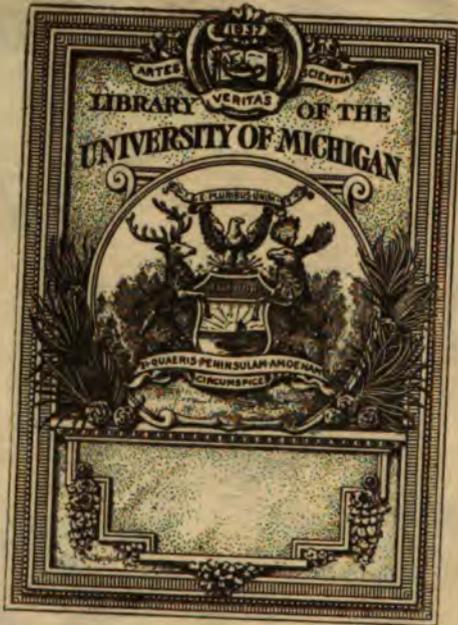


B 506493

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

www.libriol.com.cn



[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

Mathematics

QA

1

Q5

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

GIORNALE  
DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI

---

Volume XXVI. - 1888.

---

NAPOLI

BENEDETTO PELLERANO EDITORE

LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE

*Via Gennaro Serra 20.*

LONDRA

DULAU and c<sup>o</sup>.  
37. Soho square

BERLINO

R. FRIEDLANDER und SOHN  
11. Carlstrasse

PARIGI

GAUTHIER-VILLARS  
55. Quai des Augustins

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

www.libtool.com.cn

# GIORNALE DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI

---

Volume XXVI. - 1888.

---

NAPOLI  
BENEDETTO PELLERANO EDITORE  
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE  
*Via Gennaro Serra 20.*  
1888.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

## I N D I C E

|  |        |
|--|--------|
| M. Pannelli—Sui connessi ternari di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione doppia . . . . .   | Pag. 1 |
| Programma di concorso dell'Accademia reale di Napoli . . . . .   | » 20   |
| Rodolfo Bettazzi—Sulla derivata totale delle funzioni di due variabili reali e sull'inversione delle derivazioni . . . . .                               | » 21   |
| Ernesto Pascal—Su di un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie . . . . .   | » 33   |
| M. Lerch—Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe . . . . .  | » 39   |
| Luigi Certo—Sulle forme di 3° grado generate da due forme elementari proiettive di 1° e di 2° grado di un piano o di una stella . . . . .                | » 41   |
| » —Sull' $n$ -agono inscritto isocline in un $n$ -agono piano semplice dato. . . . .   | » 46   |
| Giov. d'Arone—Intorno ad un teorema di Tchébychew. . . . .   | » 61   |
| R. Marcolongo—Sull'analisi indeterminata di 2° grado . . . . .   | » 65   |
| Aurelio Lugli—Sul numero dei numeri primi da 1 ad $n$ . . . . .  | » 86   |
| Gino Loria—Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque . . . . .  | » 96   |
| E. Cesàro—Quistioni 86 a 89 . . . . .  | » 101  |
| Ernesto Pascal—Aggiunta alla nota intitolata: Sopra un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie . . . . .                          | » 102  |
| Geminiano Pirondini—Sulle linee a doppia curvatura . . . . .   | » 104  |
| Ferdinando Ronchetti—Calcolo del valore, al netto, di titoli soggetti a tassa di circolazione e dritto di provvigione . . . . .                          | » 133  |
| Giulio Giuliani—Alcune osservazioni sopra le funzioni sferiche di ordine superiore al secondo e sopra altre funzioni che se ne possano dedurre . . . . . | » 155  |
| Gabriele Torelli—Su qualche proprietà delle curve piane del 3° ordine fornite d'un punto doppio . . . . .  | » 172  |
| Vittorio Murer—Le serie algebriche di superficie ad indice 3 . . . . .   | » 178  |
| R. Raimondi—Sulle curve d'inversione . . . . .   | » 181  |
| » —Un teorema sui determinanti di differenze . . . . .   | » 185  |
| Carlo Maria Piuma—Soluzione d'un problema proposto dal sig. Lucas . . . . .  | » 189  |
| Cesare Garibaldi—Nuova dimostrazione di un teorema di Fermat. . . . .  | » 197  |
| Enrico Nannei—Le superficie ipercicliche . . . . .   | » 201  |
| Giulio Giuliani—Aggiunte ad una memoria del sig. Kummer . . . . .  | » 234  |
| M. Pieri—Sopra un teorema di Geometria ad $n$ dimensioni . . . . .   | » 251  |

|  |          |
|--|----------|
| G. Peano - Definizione geometrica delle funzioni ellittiche . . . . .  | Pag. 255 |
| Geminiano Pirondini - Sulle curve osculatrici . . . . .  | » 257    |
| Giulio Vivanti - Nuove ricerche sulle funzioni intere . . . . .  | » 303    |
| Angiolo Andreini - Sopra una proprietà singolare di alcuni numeri dipendenti<br>dal sistema particolare di numerazione nel quale sono scritti. . . . . | » 315    |
| Gabriele Torelli - Un teorema sulle curve del 3° ordine . . . . .  | » 327    |
| Gino Loria - Nota su una classe di determinanti . . . . .  | » 329    |
| » - Sulle curve razionali normali in uno spazio a $n$ dimensioni . . . . .   | » 334    |
| Alfonso del Re - Un teorema nella geometria di una certa classe di corri-<br>spondenze : . . . . .   | » 348    |
| Geminiano Pirondini - Sopra alcune superficie e curve . . . . .  | » 352    |
| Federico Amodeo - Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica<br>degli elementi immaginari . . . . .                                      | » 363    |
| Albino Nagy - Sul moto di un punto in un mezzo resistente . . . . .  | » 369    |
| M. Lerch - Sur une fonction discontinue . . . . .  | » 375    |
| Adolfo Campetti - Sulla distribuzione delle correnti sulle superficie . . . . .  | » 377    |
| G. Pirondini - Errata-Corrige alla Memoria Sulle curve osculatrici. . . . .  | » 380    |

www.libtool.com

# GIORNALE DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI  
DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

---

SUI CONNESSI TERNARI DI 2° ORDINE E DI 2ª CLASSE

IN INVOLUZIONE DOPPIA

PEL

Dott. M. PANNELLI.

---

Il Chiarissimo Prof. Battaglini ha studiato in una sua dotta Memoria (\*), il connesso di punti e di rette di 2° ordine e di 2ª classe, nel quale le linee di 2ª classe corrispondenti ai punti del piano, in cui il connesso viene rappresentato, formano una schiera e le linee di 2° ordine corrispondenti alle rette dello stesso piano formano un fascio. In questa Nota si fa lo studio analogo per il connesso di punti e di rette di 2° ordine e di 2ª classe, nel quale le linee di 2ª classe corrispondenti ai punti del piano formano una rete, *rete tangenziale*, e le linee di 2° ordine corrispondenti alle rette formano parimenti una rete, *rete punteggiata*. E come il Battaglini ha chiamato quel connesso *Connesso in involuzione semplice*, così questo si dirà *Connesso in involuzione doppia*.

1. L'equazione di un siffatto connesso è

$$(1) \quad (fF) = (Ff) = f_a F_a + f_b F_b + f_c F_c = 0$$

dove  $f_a, f_b, f_c$  sono forme quadratiche omogenee delle coordinate  $x_1, x_2, x_3$  di un punto X, rispetto ad un triangolo fondamentale, ed  $F_a, F_b, F_c$  sono forme qua-

---

(\*) Battaglini: « Sui connessi ternari di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice » Volume VIII degli atti della Reale Accademia delle Scienze Físiche e Matematiche di Napoli, 1879.

dratiche omogenee delle coordinate  $u_1, u_2, u_3$  di una retta U, rispetto allo stesso triangolo.

Se si indicano con  $l, m, n$  i risultati delle sostituzioni delle coordinate di un punto dato X alle variabili  $x_1, x_2, x_3$  nelle forme  $f_a, f_b, f_c$ , l'equazione della linea F di 2<sup>a</sup> classe corrispondente nel connesso a quel punto è

$$(2) \quad F = lF_\alpha + mF_\beta + nF_\gamma = 0$$

Se si indicano con  $\lambda, \mu, \nu$  i risultati delle sostituzioni delle coordinate di una retta data U alle variabili  $u_1, u_2, u_3$  nelle forme  $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ , l'equazione della linea  $f$  di 2<sup>o</sup> ordine corrispondente nel connesso a quella retta è

$$f = \lambda f_a + \mu f_b + \nu f_c = 0.$$

Se il punto X percorre una linea  $f$ , fra i parametri  $\lambda, \mu, \nu$  di questa linea e i parametri  $l, m, n$  della linea F corrispondente nel connesso a quel punto passa la relazione

$$(3) \quad \lambda l + \mu m + \nu n = 0$$

Quindi le linee F corrispondenti ai punti X di una linea  $f$  formano una schiera di cui l'equazione si ottiene eliminando uno dei parametri  $l, m, n$  fra le equazioni (2) (a sinistra) e (3). Perciò, dopo aver fatto il ragionamento correlativo, si può concludere :

I. « Ad una linea  $f$  corrisponde nel connesso ( $fF$ ) una schiera di linee F, di cui l'equazione può mettersi sotto una qualunque delle tre forme seguenti :

$$\begin{aligned} m(\lambda F_\beta - \mu F'_\alpha) + n(\lambda F_\gamma - \nu F'_\alpha) &= 0 \\ n(\mu F_\gamma - \nu F'_\beta) + l(\mu F_\alpha - \lambda F'_\beta) &= 0 \\ l(\nu F_\alpha - \lambda F'_\gamma) + m(\nu F_\beta - \mu F'_\gamma) &= 0 \end{aligned}$$

« Ad una linea F corrisponde nel connesso ( $Ff$ ) un fascio di linee  $f$ , di cui l'equazione può mettersi sotto una qualunque delle tre forme seguenti :

$$\begin{aligned} \mu(lf_b - mf'_a) + \nu(lf_c - nf'_a) &= 0 \\ \nu(mf_c - nf'_b) + \lambda(mf_a - lf'_b) &= 0 \\ \lambda(nf_a - lf'_c) + \mu(nf_b - mf'_c) &= 0 \end{aligned}$$

Da questi teoremi seguono gli altri due :

II. « Data una linea  $f$ , vi sono 4 rette, a ciascuna delle quali corrisponde nel connesso ( $fF$ ) quella linea, ed esse costituiscono la base della schiera corrispondente alla linea medesima ».

« Data una linea F, vi sono 4 punti, a ciascuno dei quali corrisponde nel connesso ( $Ff$ ) quella linea, ed essi costituiscono la base del fascio corrispondente alla linea medesima ».

Ad una linea qualunque F della schiera

$$(l_1 + kl_2)F_\alpha + (m_1 + km_2)F_\beta + (n_1 + kn_2)F_\gamma = 0,$$

cioè ad una linea determinata da un valore arbitrario del parametro  $k$ , corrisponde un fascio di linee  $f$ , di cui l'equazione può scriversi così :

$$\mu[(l_1 + kl_2)f_b - (m_1 + km_2)f'_a] + \nu[(l_1 + kl_2)f_c - (n_1 + kn_2)f'_a] = 0.$$

Ora se si pone [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho\mu = n_1 l_2 - l_1 n_2 \quad , \quad \rho\nu = l_1 m_2 - m_1 l_2$$

si ottiene l'equazione

$$(m_1 n_2 - n_1 m_2) f_a + (n_1 l_2 - l_1 n_2) f_b + (l_1 m_2 - m_1 l_2) f_c = 0$$

che evidentemente rappresenta una linea del fascio anzidetto. Questa linea appartiene a tutti gli infiniti fasci corrispondenti alle infinite linee della schiera data, perchè nella sua equazione non figura il parametro  $k$ . Quindi essa è il luogo delle quaterne di punti, alle quali corrispondono nel connesso le linee di quella schiera. Dunque :

|   |  |
|---|--|
| <p>III. « Alla schiera di linee F<br/> <math>(l_1 + k l_2) F_\alpha + (m_1 + k m_2) F_\beta + (n_1 + k n_2) F_\gamma = 0</math><br/>                 « corrisponde nel connesso (Ff) la linea f, che ha per equazione<br/> <math>(m_1 n_2 - n_1 m_2) f_a + (n_1 l_2 - l_1 n_2) f_b + (l_1 m_2 - m_1 l_2) f_c = 0</math></p> | <p>« Al fascio di linee f<br/> <math>(\lambda_1 + x \lambda_2) f_a + (\mu_1 + x \mu_2) f_b + (\nu_1 + x \nu_2) f_c = 0</math><br/>                 « corrisponde nel connesso (fF) la linea F, che ha per equazione<br/> <math>(\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2) F_\alpha + (\nu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nu_2) F_\beta + (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) F_\gamma = 0</math>.</p> |
|---|--|

Infine sono evidenti queste altre due proprietà :

|   |  |
|---|--|
| <p>IV. « Al fascio determinato da due linee f, corrisponde nel connesso (fF) la linea F comune alle due schiere corrispondenti a quelle due linee f, e viceversa ».</p> | <p>« Alla schiera determinata da due linee F, corrisponde nel connesso (Ff) la linea f comune ai due fasci corrispondenti a quelle due linee F, e viceversa ».</p> |
|---|--|

2. Se  $a_x^2 = 0$  e  $u_\alpha^2 = 0$  sono le equazioni in coefficienti simbolici di due linee una del 2° ordine e l'altra della 2ª classe, è noto che se si annulla l'invariante simultaneo  $a_\alpha^2$ , vuol dire che esistono infiniti triangoli appartenenti alla prima linea e coniugati rispetto alla seconda, come anche infiniti triangoli appartenenti a questa linea e coniugati rispetto a quella; e che in tal caso si dice che le due linee sono armoniche fra loro.

Quindi se si pone

$$f_a = a_x^2 = a'_x{}^2 = \dots, f_b = b_x^2 = b'_x{}^2 = \dots, f_c = c_x^2 = c'_x{}^2 = \dots$$

$$F_\alpha = u_\alpha^2 = u_\alpha'^2 = \dots, F_\beta = u_\beta^2 = u_\beta'^2 = \dots, F_\gamma = u_\gamma^2 = u_\gamma'^2 = \dots$$

una linea  $f'$  della rete punteggiata ed una linea  $F''$  della rete tangenziale sono

armoniche fra loro, se fra i loro parametri passa la relazione:

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(4) \quad \lambda' l'' a_\alpha^2 + \lambda' m'' a_\beta^2 + \lambda' n'' a_\gamma^2 + \mu' l'' b_\alpha^2 + \mu' m'' b_\beta^2 + \mu' n'' b_\gamma^2 + \nu' l'' c_\alpha^2 + \nu' m'' c_\beta^2 + \nu' n'' c_\gamma^2 = 0$$

Ora in virtù di questa relazione, come i teoremi del numero precedente si dimostrano i seguenti:

I. « Ad una linea  $f'$  corrisponde una schiera di linee armoniche  $F''$ , di cui l'equazione può mettersi sotto una qualunque delle tre forme seguenti:

$$m'' [(\lambda' a_\alpha^2 + \mu' b_\alpha^2 + \nu' c_\alpha^2) F_\beta - (\lambda' a_\beta^2 + \mu' b_\beta^2 + \nu' c_\beta^2) F_\alpha] + n'' [(\lambda' a_\alpha^2 + \mu' b_\alpha^2 + \nu' c_\alpha^2) F_\gamma - (\lambda' a_\gamma^2 + \mu' b_\gamma^2 + \nu' c_\gamma^2) F_\alpha] = 0$$

$$n'' [(\lambda' a_\beta^2 + \mu' b_\beta^2 + \nu' c_\beta^2) F_\gamma - (\lambda' a_\gamma^2 + \mu' b_\gamma^2 + \nu' c_\gamma^2) F_\beta] + l'' [(\lambda' a_\beta^2 + \mu' b_\beta^2 + \nu' c_\beta^2) F_\alpha - (\lambda' a_\alpha^2 + \mu' b_\alpha^2 + \nu' c_\alpha^2) F_\beta] = 0$$

$$l'' [(\lambda' a_\gamma^2 + \mu' b_\gamma^2 + \nu' c_\gamma^2) F_\alpha - (\lambda' a_\alpha^2 + \mu' b_\alpha^2 + \nu' c_\alpha^2) F_\gamma] + m'' [(\lambda' a_\gamma^2 + \mu' b_\gamma^2 + \nu' c_\gamma^2) F_\beta - (\lambda' a_\beta^2 + \mu' b_\beta^2 + \nu' c_\beta^2) F_\gamma] = 0$$

II. « Alla schiera di linee  $F''$

$$(l_1'' + k l_2'') F_\alpha + (m_1'' + k m_2'') F_\beta + (n_1'' + k n_2'') F_\gamma = 0$$

« corrisponde la linea armonica  $f'$ , che ha per equazione

$$[(m_1'' n_2'' - n_1'' m_2'') A_1 + (n_1'' l_2'' - l_1'' n_2'') A_2 + (l_1'' m_2'' - m_1'' l_2'') A_3] f_\alpha + [(m_1'' n_2'' - n_1'' m_2'') B_1 + (n_1'' l_2'' - l_1'' n_2'') B_2 + (l_1'' m_2'' - m_1'' l_2'') B_3] f_\beta + [(m_1'' n_2'' - n_1'' m_2'') C_1 + (n_1'' l_2'' - l_1'' n_2'') C_2 + (l_1'' m_2'' - m_1'' l_2'') C_3] f_\gamma = 0$$

« Ad una linea  $F''$  corrisponde un fascio di linee armoniche  $f'$ , di cui l'equazione può mettersi sotto una qualunque delle tre forme seguenti:

$$\mu' [(l'' a_\alpha^2 + m'' a_\beta^2 + n'' a_\gamma^2) f_b - (l'' b_\alpha^2 + m'' b_\beta^2 + n'' b_\gamma^2) f_a] + \nu' [(l'' a_\alpha^2 + m'' a_\beta^2 + n'' a_\gamma^2) f_c - (l'' c_\alpha^2 + m'' c_\beta^2 + n'' c_\gamma^2) f_a] = 0$$

$$\nu' [(l'' b_\alpha^2 + m'' b_\beta^2 + n'' b_\gamma^2) f_c - (l'' c_\alpha^2 + m'' c_\beta^2 + n'' c_\gamma^2) f_b] + \lambda' [(l'' b_\alpha^2 + m'' b_\beta^2 + n'' b_\gamma^2) f_a - (l'' a_\alpha^2 + m'' a_\beta^2 + n'' a_\gamma^2) f_b] = 0$$

$$\lambda' [(l'' c_\alpha^2 + m'' c_\beta^2 + n'' c_\gamma^2) f_a - (l'' a_\alpha^2 + m'' a_\beta^2 + n'' a_\gamma^2) f_c] + \mu' [(l'' c_\alpha^2 + m'' c_\beta^2 + n'' c_\gamma^2) f_b - (l'' b_\alpha^2 + m'' b_\beta^2 + n'' b_\gamma^2) f_c] = 0$$

« Al fascio di linee  $f'$

$$(\lambda'_1 + x \lambda'_2) f_\alpha + (\mu'_1 + x \mu'_2) f_\beta + (\nu'_1 + x \nu'_2) f_\gamma = 0$$

« corrisponde la linea armonica  $F''$ , che ha per equazione

$$[(\mu'_1 \nu'_2 - \nu'_1 \mu'_2) A_1 + (\nu'_1 \lambda'_2 - \lambda'_1 \nu'_2) B_1 + (\lambda'_1 \mu'_2 - \mu'_1 \lambda'_2) C_1] F_\alpha + [(\mu'_1 \nu'_2 - \nu'_1 \mu'_2) A_2 + (\nu'_1 \lambda'_2 - \lambda'_1 \nu'_2) B_2 + (\lambda'_1 \mu'_2 - \mu'_1 \lambda'_2) C_2] F_\beta + [(\mu'_1 \nu'_2 - \nu'_1 \mu'_2) A_3 + (\nu'_1 \lambda'_2 - \lambda'_1 \nu'_2) B_3 + (\lambda'_1 \mu'_2 - \mu'_1 \lambda'_2) C_3] F_\gamma = 0$$

dove  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  rappresentano i complementi algebrici degli elementi del determinante

$$\begin{vmatrix} a_\alpha^2 & a_\beta^2 & a_\gamma^2 \\ b_\alpha^2 & b_\beta^2 & b_\gamma^2 \\ c_\alpha^2 & c_\beta^2 & c_\gamma^2 \end{vmatrix}.$$

Infine si hanno qui due teoremi affatto analoghi ai teoremi IV del numero precedente, che, per brevità, non vengono neppure enunciati.

3. Ad ogni linea  $f'$  corrisponde nel connesso ( $fF$ ) una schiera di linee  $F'$  (n° 1, teor. I, a sinistra) e corrisponde altresì una schiera di linee armoniche  $F''$  (n° 2, teor. I, a sinistra). Queste due schiere appartengono ad una medesima rete tangenziale, epperò hanno una linea in comune. Quindi :

I. « Ad ogni linea  $f'$  corrisponde, per mezzo del connesso ( $fF$ ), una linea armonica  $F''$  ». | « Ad ogni linea  $F''$  corrisponde, per mezzo del connesso ( $Ff$ ), una linea armonica  $f'$  ».

Fra i parametri  $\lambda', \mu', \nu'$  di una linea  $f'$  e i parametri  $l', m', n''$  della linea armonica corrispondente  $F''$  passano le relazioni (3) e (4), epperò :

II. « I parametri della linea  $F''$  corrispondente ad una data linea  $f'$  sono determinati dalle formole :

$$\begin{aligned} \rho'' l'' &= \mu'(\lambda' a_\gamma^2 + \mu' b_\gamma^2 + \nu' c_\gamma^2) - \\ &\quad - \nu'(\lambda' a_\beta^2 + \mu' b_\beta^2 + \nu' c_\beta^2) \\ (5) \quad \rho'' m'' &= \nu'(\lambda' a_\alpha^2 + \mu' b_\alpha^2 + \nu' c_\alpha^2) - \\ &\quad - \lambda'(\lambda' a_\gamma^2 + \mu' b_\gamma^2 + \nu' c_\gamma^2) \\ \rho'' n'' &= \lambda'(\lambda' a_\beta^2 + \mu' b_\beta^2 + \nu' c_\beta^2) - \\ &\quad - \mu'(\lambda' a_\alpha^2 + \mu' b_\alpha^2 + \nu' c_\alpha^2) \end{aligned}$$

« dove  $\rho''$  è un fattore di proporzionalità ».

Le due schiere della rete tangenziale corrispondenti ad una medesima linea  $f'$  della rete punteggiata coincidono fra loro, se si ha :

$$\begin{aligned} \rho\lambda &= \lambda a_\alpha^2 + \mu b_\alpha^2 + \nu c_\alpha^2 \\ \rho\mu &= \lambda a_\beta^2 + \mu b_\beta^2 + \nu c_\beta^2 \\ \rho\nu &= \lambda a_\gamma^2 + \mu b_\gamma^2 + \nu c_\gamma^2. \end{aligned}$$

« I parametri della linea  $f'$  corrispondente ad una data linea  $F''$  sono determinati dalle formole :

$$\begin{aligned} \rho' \lambda' &= m''(l'' c_\alpha^2 + m'' c_\beta^2 + n'' c_\gamma^2) - \\ &\quad - n''(l'' b_\alpha^2 + m'' b_\beta^2 + n'' b_\gamma^2) \\ \rho' \mu' &= n''(l'' a_\alpha^2 + m'' a_\beta^2 + n'' a_\gamma^2) - \\ &\quad - l''(l'' c_\alpha^2 + m'' c_\beta^2 + n'' c_\gamma^2) \\ \rho' \nu' &= l''(l'' b_\alpha^2 + m'' b_\beta^2 + n'' b_\gamma^2) - \\ &\quad - m''(l'' a_\alpha^2 + m'' a_\beta^2 + n'' a_\gamma^2) \end{aligned}$$

« dove  $\rho'$  è un fattore di proporzionalità ».

I due fasci della rete punteggiata corrispondenti ad una medesima linea  $F'$  della rete tangenziale coincidono fra loro, se si ha :

$$\begin{aligned} \rho l &= \lambda a_\alpha^2 + \mu a_\beta^2 + \nu a_\gamma^2 \\ \rho m &= \lambda b_\alpha^2 + \mu b_\beta^2 + \nu b_\gamma^2 \\ \rho n &= \lambda c_\alpha^2 + \mu c_\beta^2 + \nu c_\gamma^2. \end{aligned}$$

Ora perchè queste tre equazioni coesistono deve essere

$$(6) \begin{vmatrix} a_\alpha^2 - \rho & b_\alpha^2 & c_\alpha^2 \\ a_\beta^2 & b_\beta^2 - \rho & c_\beta^2 \\ a_\gamma^2 & b_\gamma^2 & c_\gamma^2 - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi :

III. « Vi sono tre linee  $f$ , a ciascuna delle quali corrisponde nel connesso ( $fF$ ) una schiera di linee armoniche  $F$ . Esse saranno rappresentate dalle notazioni  $f_1, f_2, f_3$  ».

Ora perchè queste tre equazioni coesistono deve essere

$$\begin{vmatrix} a_\alpha^2 - \rho & a_\beta^2 & a_\gamma^2 \\ b_\alpha^2 & b_\beta^2 - \rho & b_\gamma^2 \\ c_\alpha^2 & c_\beta^2 & c_\gamma^2 - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi :

« Vi sono tre linee  $F$ , a ciascuna delle quali corrisponde nel connesso ( $Ff$ ) un fascio di linee armoniche  $f$ . Esse saranno rappresentate dalle notazioni  $F_1, F_2, F_3$  ».

4. Ad ogni linea  $f'$  corrisponde una schiera di linee armoniche  $F''$  (n° 2 teorema I, a sinistra), e a questa schiera corrisponde nel connesso ( $Ff$ ) una linea  $f''$  (n° 1, teor. III, a sinistra). Viceversa, ad ogni linea  $f''$  corrisponde nel connesso ( $fF$ ) una schiera di linee  $F''$  (n° 1, teor. I, a sinistra), e a questa schiera corrisponde una linea armonica  $f'$  (n° 2, teor. II, a sinistra). Quindi :

I. « Le linee  $f$  si corrispondono proiettivamente fra loro » | « Le linee  $F$  si corrispondono proiettivamente fra loro ».

Se l'equazione della schiera di linee armoniche  $F''$  corrispondente ad una data linea  $f'$  si scrive sotto la forma

$$[m''(\lambda'a_\beta^2 + \mu'b_\beta^2 + \nu'c_\beta^2) + n''(\lambda'a_\gamma^2 + \mu'b_\gamma^2 + \nu'c_\gamma^2)] F_\alpha - m''(\lambda'a_\alpha^2 + \mu'b_\alpha^2 + \nu'c_\alpha^2) F_\beta - n''(\lambda'a_\alpha^2 + \mu'b_\alpha^2 + \nu'c_\alpha^2) F_\gamma = 0,$$

si vede che l'equazione della linea  $f''$  corrispondente nel connesso ( $Ff$ ) a questa schiera si ottiene per mezzo del teorema III (a sinistra) del n.° 1. ponendo

$$l_1 = \lambda'a_\beta^2 + \mu'b_\beta^2 + \nu'c_\beta^2, \quad m_1 = -(\lambda'a_\alpha^2 + \mu'b_\alpha^2 + \nu'c_\alpha^2), \quad n_1 = 0$$

$$l_2 = \lambda'a_\gamma^2 + \mu'b_\gamma^2 + \nu'c_\gamma^2, \quad m_2 = 0, \quad n_2 = -(\lambda'a_\alpha^2 + \mu'b_\alpha^2 + \nu'c_\alpha^2),$$

epperò è

$$(\lambda'a_\alpha^2 + \mu'b_\alpha^2 + \nu'c_\alpha^2) f_\alpha + (\lambda'a_\beta^2 + \mu'b_\beta^2 + \nu'c_\beta^2) f_\beta + (\lambda'a_\gamma^2 + \mu'b_\gamma^2 + \nu'c_\gamma^2) f_\gamma = 0.$$

Dunque :

II. « I parametri  $\lambda'', \mu'', \nu''$  della linea  $f''$  corrispondente ad una data linea  $f'$  » | « I parametri  $l', m', n'$  della linea  $F'$  corrispondente ad una data linea  $F''$  »

« nea  $f'$  sono determinati dalle formole:

$\sigma''\lambda'' = \lambda'a_\alpha^2 + \mu'b_\alpha^2 + \nu'c_\alpha^2$

(7)  $\sigma''\mu'' = \lambda'a_\beta^2 + \mu'b_\beta^2 + \nu'c_\beta^2$

$\sigma''\nu'' = \lambda'a_\gamma^2 + \mu'b_\gamma^2 + \nu'c_\gamma^2$

« dove  $\sigma''$  è un fattore di proporzionalità ».

In modo affatto analogo si trova :

III. « I parametri  $\lambda', \mu', \nu'$  della linea  $f'$  corrispondente ad una data linea  $f''$  sono determinati dalle formole:

$\sigma'\lambda' = \lambda''A_1 + \mu''A_2 + \nu''A_3$

$\sigma'\mu' = \lambda''B_1 + \mu''B_2 + \nu''B_3$

$\sigma'\nu' = \lambda''C_1 + \mu''C_2 + \nu''C_3$

« dove  $\sigma'$  è un fattore di proporzionalità ».

Le equazioni contenute in questi teoremi III, si possono ancora ricavare da quelle contenute nei teoremi precedenti II, risolvendo quest'ultime rispetto ai parametri  $\lambda', \mu', \nu'$  e  $\lambda'', \mu'', \nu''$  rispettivamente. Si ha così una prova della esattezza dei risultati sin qui ottenuti.

Una linea  $f$  coincide con la linea corrispondente, se si ha :

$\sigma\lambda = \lambda a_\alpha^2 + \mu b_\alpha^2 + \nu c_\alpha^2$

$\sigma\mu = \lambda a_\beta^2 + \mu b_\beta^2 + \nu c_\beta^2$

$\sigma\nu = \lambda a_\gamma^2 + \mu b_\gamma^2 + \nu c_\gamma^2$

Quindi :

IV. « Vi sono tre linee  $f$ , ciascuna delle quali coincide con la corrispondente, e queste sono le tre linee  $f_1, f_2, f_3$  ».

In virtù dei teoremi IV del n.º 1. e dei teoremi analoghi accennati alla fine del numero 2, si ha ancora :

V. « Alle tre linee  $f_1, f_2, f_3$  corrispondono nel connesso ( $fF$ ) le tre schiere di linee armoniche  $(F_2, F_3), (F_3, F_1), (F_1, F_2)$ , determinate dalle linee  $F_1, F_2, F_3$ , prese due a due ».

« sono determinati dalle formole :

$s'l' = l''a_\alpha^2 + m''a_\beta^2 + n''a_\gamma^2$

$s'm' = l''b_\alpha^2 + m''b_\beta^2 + n''b_\gamma^2$

$s'n' = l''c_\alpha^2 + m''c_\beta^2 + n''c_\gamma^2$

« dove  $s'$  è un fattore di proporzionalità ».

« I parametri  $l'', m'', n''$  della linea  $F''$  corrispondente ad una data linea  $F'$  sono determinati dalle formole :

$s'l'' = l'A_1 + m'B_1 + n'C_1$

$s'm'' = l'A_2 + m'B_2 + n'C_2$

$s'n'' = l'A_3 + m'B_3 + n'C_3$

« dove  $s''$  è un fattore di proporzionalità ».

Una linea  $F$  coincide con la linea corrispondente, se si ha :

$sl = la_\alpha^2 + ma_\beta^2 + na_\gamma^2$

$sm = lb_\alpha^2 + mb_\beta^2 + nb_\gamma^2$

$sn = lc_\alpha^2 + mc_\beta^2 + nc_\gamma^2$

Quindi :

« Vi sono tre linee  $F$ , ciascuna delle quali coincide con la corrispondente, e queste sono le tre linee  $F_1, F_2, F_3$  ».

« Alle tre linee  $F_1, F_2, F_3$  corrispondono nel connesso ( $Ff$ ) i tre fasci di linee armoniche  $(f_2, f_3), (f_3, f_1), (f_1, f_2)$ , determinati dalle linee  $f_1, f_2, f_3$ , prese due a due ».

5. Siano

www.libtool.com.cn

$$P_x^2 = 0, \quad Q_x^2 = 0, \quad R_x^2 = 0 \quad \text{e} \quad u_P^2 = 0, \quad u_Q^2 = 0, \quad u_R^2 = 0$$

le equazioni delle tre linee  $f_1, f_2, f_3$  e quelle delle tre linee  $F_1, F_2, F_3$  rispettivamente. Se le prime tre linee si prendono per determinare la rete punteggiata e le seconde per determinare la rete tangenziale, l'equazione del connesso è

$$P_x^2 u_P^2 + Q_x^2 u_Q^2 + R_x^2 u_R^2 = 0,$$

epperò si presenta ancora sotto la forma (1). Ma, poichè in virtù dei teoremi V del numero precedente, si ha

$$P_Q^2 = 0, \quad P_R^2 = 0, \quad Q_R^2 = 0, \quad Q_P^2 = 0, \quad R_P^2 = 0, \quad R_Q^2 = 0$$

le formole (5) prendono la forma più semplice

$$\begin{aligned} \rho''a'' &= (R_R^2 - Q_Q^2)\beta'\gamma' & \rho'a' &= (R_R^2 - Q_Q^2)b''c'' \\ \rho''b'' &= (P_P^2 - R_R^2)\gamma'a' & \rho'\beta' &= (P_P^2 - R_R^2)c''a'' \\ \rho''c'' &= (Q_Q^2 - P_P^2)\alpha'\beta' & \rho'\gamma' &= (Q_Q^2 - P_P^2)a''b'' \end{aligned}$$

e così le formole (7)

$$\begin{aligned} \sigma'a'' &= \alpha'P_P^2 & s'a' &= a''P_P^2 \\ \sigma''\beta'' &= \beta'Q_Q^2 & s'b' &= b''Q_Q^2 \\ \sigma''\gamma'' &= \gamma'R_R^2 & s'c' &= c''R_R^2 \end{aligned}$$

dove  $a', b', c', \dots$  hanno significati analoghi a quelli di  $l', m', n', \dots$

Le equazioni (7) (a sinistra) possono essere considerate come le equazioni che definiscono una corrispondenza collineare fra i punti del piano, se i parametri  $\lambda', \mu', \nu'$  si riguardano come le coordinate di un punto ed i parametri  $\lambda'', \mu'', \nu''$  come le coordinate del punto corrispondente. Quindi, come è noto, esse possono esser messe sotto la forma

$$\begin{aligned} k\lambda'' &= \alpha'\rho_1 \\ k\mu'' &= \beta'\rho_2 \\ k\nu'' &= \gamma'\rho_3 \end{aligned}$$

dove  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  sono le radici dell'equazione cubica (6) e  $k$  è un fattore di propor-

zionalità. Ora dal confronto di queste equazioni con le precedenti (a sinistra) si ricava

$$\frac{P_P^2}{R_R^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = H \qquad \frac{Q_Q^2}{R_R^2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = K ,$$

dicendo H e K i valori dei rapporti  $\rho_1 : \rho_2$  e  $\rho_2 : \rho_3$

6. Se si indicano con

$$(\alpha', \beta', \gamma') , (\alpha'', \beta'', \gamma'') , \dots , (\alpha^{(n+1)}, \beta^{(n+1)}, \gamma^{(n+1)})$$

i parametri di  $n + 1$  linee  $f$ , ciascuna delle quali sia dedotta dalla precedente con le condizioni

$$\frac{\alpha^{(r)}}{\gamma^{(r)}} = H \frac{\alpha^{(r-1)}}{\gamma^{(r-1)}} \qquad , \qquad \frac{\beta^{(r)}}{\gamma^{(r)}} = K \frac{\beta^{(r-1)}}{\gamma^{(r-1)}} ,$$

è chiaro che l'ultima linea coincide con la primitiva, se si ha :

$$H^n = K^n = 1 .$$

In tal caso si dirà che il connesso ( $fF$ ) è *ciclicamente proiettivo secondo n*.

Dunque :

|   |  |
|---|--|
| <p>I. « Se il connesso (<math>fF</math>) è ciclicamente proiettivo secondo <math>n</math>, prendendo una linea qualunque <math>f'</math>, di questa la schiera delle linee armoniche <math>F''</math> e poi di questa schiera la linea <math>f''</math> corrispondente nel connesso, e così per <math>n</math> volte di seguito, l' <math>(n + 1)^{ma}</math> linea ottenuta coincide con la primitiva ».</p> | <p>« Se il connesso (<math>Ff</math>) è ciclicamente proiettivo secondo <math>n</math>, prendendo una linea qualunque <math>F^{(n+1)}</math>, di questa il fascio delle linee armoniche <math>f^{(n)}</math>, e poi di questo fascio la linea <math>F^{(n)}</math> corrispondente nel connesso, e così per <math>n</math> volte di seguito, l' <math>(n + 1)^{ma}</math> linea ottenuta coincide con la primitiva ».</p> |
|---|--|

In particolare, se le condizioni precedenti sono soddisfatte per  $n = 1$ , cioè se si ha

$$H = K = 1 ,$$

ad ogni linea  $f$  corrisponde nel connesso ( $fF$ ) una schiera di linee armoniche  $F$ , e così ad ogni linea  $F$  corrisponde un fascio di linee armoniche  $f$ . Quindi, in questo caso, le linee  $f_a, f_b, f_c$  sono armoniche con le linee  $F_\beta$  e  $F_\gamma, F_\gamma$  e  $F_\alpha, F_\alpha$  e  $F_\beta$  rispettivamente, epperò si ha :

$$a_\beta^2 = 0 \quad , \quad a_\gamma^2 = 0 \quad , \quad b_\gamma^2 = 0 \quad , \quad b_\alpha^2 = 0 \quad , \quad c_\alpha^2 = 0 \quad , \quad c_\beta^2 = 0 .$$

Inoltre l'equazione cubica (6) si riduce a questa :

$$(a_\alpha^2 - \rho) (b_\beta^2 - \rho) (c_\gamma^2 - \rho) = 0$$

è così si trova  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho_1 = a_\alpha^2, \quad \rho_2 = b_\beta^2, \quad \rho_3 = c_\gamma^2.$$

Dunque :

II. « Il connesso ( $fF$ ) è ciclicamente proiettivo secondo 1, se sono soddisfatte le condizioni seguenti :

$$a_\beta^2 = 0, \quad a_\gamma^2 = 0, \quad b_\gamma^2 = 0, \quad b_\alpha^2 = 0, \quad c_\alpha^2 = 0, \quad c_\beta^2 = 0$$
$$a_\alpha^2 = b_\beta^2 = c_\gamma^2.$$

Si consideri ancora il caso di  $n=2$ . Se l'equazione (6) si scrive sotto la forma

$$\rho^3 - L\rho^2 + M\rho - N = 0,$$

l'equazione di cui le radici sono  $\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2$  è

$$R^3 - (L^2 - 2M)R^2 + (M^2 - 2LN)R - N^2 = 0;$$

e questa ha tutte e tre le radici eguali, se fra i suoi coefficienti passano le relazioni

$$(L^2 - 2M)^2 = 3(M^2 - 2LN)$$

$$9N^2 = (L^2 - 2M)(M^2 - 2LN)$$

dalle quali, eliminando il coefficiente  $N$ , si ricava una nuova relazione che si scinde nelle due :

$$L^2 - 3M = 0, \quad L^2 + M = 0.$$

Ciascuna di queste può essere combinata con la prima delle due precedenti e così si ottiene :

$$3LN - M^2 = 0 \quad \text{o} \quad LN + M^2 = 0.$$

Ma se sono soddisfatte le due relazioni corrispondenti a sinistra, le tre radici  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  sono eguali fra loro; se poi sono soddisfatte quelle a destra, due di queste radici sono eguali e la terza differisce da esse soltanto per il segno; dunque, poichè ciascuno di questi due casi s'intende per ora escluso, si ha :

III. « Il connesso ( $fF$ ) non può essere ciclicamente proiettivo secondo 2 ».

È poi evidente :

IV. « Il connesso ( $fF$ ) è ciclicamente proiettivo secondo 3, se sono soddisfatte

« le due condizioni: [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$L = a_\alpha^2 + b_\beta^2 + c_\gamma^2 = 0$$

$$M = (b_\beta^2 c_\gamma^2 + c_\gamma^2 a_\alpha^2 + a_\alpha^2 b_\beta^2) - (b_\gamma^2 c_\beta^2 + c_\alpha^2 a_\gamma^2 + a_\beta^2 b_\alpha^2) = 0.$$

7. Le due linee  $f$  ed  $F$ , corrispondenti nel connesso ( $fF$ ) ad una retta  $U$  e ad un punto  $X$ , sono armoniche fra loro, se fra le coordinate della retta  $U$  e quelle del punto  $X$ , passa la relazione

$$a_x^2 u_\alpha^2 a_x^2 + a_x^2 u_\beta^2 b_\alpha^2 + a_x^2 u_\gamma^2 c_\alpha^2 + b_x^2 u_\alpha^2 a_\beta^2 + b_x^2 u_\beta^2 b_\beta^2 \\ b_x^2 u_\gamma^2 c_\beta^2 + c_x^2 u_\alpha^2 a_\gamma^2 + c_x^2 u_\beta^2 b_\gamma^2 + c_x^2 u_\gamma^2 c_\gamma^2 = 0.$$

Quindi questa è l'equazione del connesso formato da elementi  $(X, U)$  tali, che le linee corrispondenti nel connesso ( $fF$ ) al punto e alla retta di ogni elemento, sono armoniche fra loro. Seguendo le denominazioni del Battaglini, questo connesso si dirà *associato* al connesso dato. Dunque:

I. « Il connesso associato ad un connesso di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione doppia, è un altro connesso di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione doppia ».

Se come equazione del connesso ( $fF$ ) si prende

$$P_x^2 u_P^2 + Q_x^2 u_Q^2 + R_x^2 u_R^2 = 0,$$

quella del connesso associato diventa

$$P_x^2 u_P^2 P_P^2 + Q_x^2 u_Q^2 Q_Q^2 + R_x^2 u_R^2 R_R^2 = 0;$$

e da questa equazione è facile dedurre:

II. « Il connesso ( $fF$ ) e il suo connesso associato hanno le stesse linee fondamentali  $f_1, f_2, f_3$  e le stesse linee fondamentali  $F_1, F_2, F_3$  »

III. « Se il connesso ( $fF$ ) è ciclicamente proiettivo, anche il suo connesso associato è ciclicamente proiettivo ».

In particolare, se si ha

$$N = \begin{vmatrix} a_\alpha^2 & a_\beta^2 & a_\gamma^2 \\ b_\alpha^2 & b_\beta^2 & b_\gamma^2 \\ c_\alpha^2 & c_\beta^2 & c_\gamma^2 \end{vmatrix} = 0,$$

è o  $P_P^2 = 0$ , oppure  $Q_Q^2 = 0$ , oppure  $R_R^2 = 0$ . Supponiamo, per fissare le idee,

che sia  $P_P^2 = 0$ . In tal caso la linea  $P_x^2 = 0$ , è armonica con una qualunque delle linee della rete tangenziale, di cui l'equazione è

$$au_P^2 + bu_Q^2 + cu_R^2 = 0,$$

perchè sono soddisfatte le condizioni

$$P_P^2 = 0, \quad P_Q^2 = 0, \quad P_R^2 = 0.$$

Dunque :

IV. « Se è  $N = 0$ , il connesso associato al connesso ( $fF$ ) è un connesso di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice e una delle linee  $f_1, f_2, f_3$  è armonica con una qualunque delle linee della rete tangenziale, e così una delle linee  $F_1, F_2, F_3$  è armonica con una qualunque delle linee della rete punteggiata ».

In modo analogo si trova :

V. « Se è  $M = 0$  ed  $N = 0$ , il connesso associato al connesso ( $fF$ ) è un connesso di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione identica e ciascuna linea di uno dei fasci  $(f_2, f_3), (f_3, f_1), (f_1, f_2)$  è armonica con una qualunque delle linee della rete tangenziale, e così ciascuna linea di una delle schiere  $(F_2, F_3), (F_3, F_1), (F_1, F_2)$  è armonica con una qualunque delle linee della rete punteggiata ».

8. In ciò che precede si è tacitamente supposto che le radici  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  dell'equazione cubica (6) fossero disuguali fra loro. Ora si passa a studiare i casi in cui due di queste radici, oppure tutte e tre, sono eguali.

1°) Sia  $\rho_2 = \rho_3$ . In tal caso si hanno due sole linee  $f$ , a ciascuna delle quali corrisponda nel connesso una schiera di linee armoniche; e così due sole linee  $F$ , a ciascuna delle quali corrisponda nel connesso un fascio di linee armoniche.

Siano  $f_1$  e  $f_2$  quelle due prime linee. Le due schiere corrispondenti hanno in comune una linea  $F_3$ , alla quale corrisponde nel connesso il fascio di linee armoniche  $(f_1, f_2)$ ; epperò  $F_3$  è una delle due anzidette linee  $F$ . Sia  $F_1$  l'altra. La linea  $f$  comune al fascio  $(f_1, f_2)$  o al fascio di linee armoniche corrispondente nel connesso alla linea  $F_1$ , ha come corrispondente nel connesso stesso la schiera di linee armoniche  $(F_1, F_2)$ ; e quindi, in virtù dell'ipotesi  $\rho_2 = \rho_3$ , quella linea deve coincidere con una delle due linee  $f_1, f_2$ . Si supponga che coincida con  $f_2$ ; allora  $(F_1, F_3)$  è la schiera di linee armoniche corrispondente nel connesso alla linea  $f_2$ . Sia poi  $(F_3, F_2)$  quella corrispondente alla linea  $f_1$  e  $(f_2, f_3)$  il fascio di linee armoniche corrispondenti nel connesso alla linea  $F_1$ .

In virtù di queste considerazioni, si ha :

$$P_P^2 > 0, \quad P_Q^2 = 0, \quad P_R^2 = 0$$

$$Q_P^2 = 0, \quad Q_Q^2 > 0, \quad Q_R^2 = 0$$

$$R_P^2 = 0, \quad R_Q^2 > 0, \quad R_R^2 > 0;$$

quindi la nuova equazione cubica (6) è

$$\begin{vmatrix} P_F^2 - \rho & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & Q_Q^2 - \rho & , & 0 \\ 0 & , & R_Q^2 & , & R_R^2 - \rho \end{vmatrix} = 0 ,$$

e perchè questa ammetta due radici eguali è necessario che sia

$$Q_Q^2 = R_R^2 .$$

Perciò le formole che nel caso attuale definiscono la dipendenza proiettiva fra le linee della rete punteggiata espressa dal teorema I (a sinistra) del n° 4 sono:

$$\frac{\alpha''}{\gamma''} = I \frac{\alpha'}{\gamma'} \quad , \quad \frac{\beta''}{\gamma''} = \frac{\beta'}{\gamma'} + J$$

dove si è posto

$$I = \frac{P_F^2}{Q_Q^2} \quad , \quad J = \frac{R_Q^2}{Q_Q^2} ;$$

ed analoghe sono le formole che definiscono la dipendenza proiettiva fra le linee della rete tangenziale espressa dal teorema I (a destra) del medesimo numero.

Ora se

$$(\alpha, \beta, \gamma) , (\alpha', \beta', \gamma') , (\alpha'', \beta'', \gamma'') , \dots , (\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)})$$

sono i parametri di  $n + 1$  linee  $f$ , ciascuna delle quali sia dedotta dalla precedente con le condizioni

$$\frac{\alpha^{(r)}}{\gamma^{(r)}} = I \frac{\alpha^{(r-1)}}{\gamma^{(r-1)}} \quad , \quad \frac{\beta^{(r)}}{\gamma^{(r)}} = \frac{\beta^{(r-1)}}{\gamma^{(r-1)}} + J ,$$

è facile vedere che i parametri della  $(n + 1)^{ma}$  linea  $f$  dipendono da quelli della prima per mezzo delle formole

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\gamma^{(n)}} = I^n \frac{\alpha}{\gamma} \quad \frac{\beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}} = \frac{\beta}{\gamma} + nJ$$

le quali provano :

I.  $\alpha$  Se due delle tre radici dell'equazione cubica (6) sono eguali fra loro, il  $\alpha$  connesso ( $fF$ ) è ciclicamente proiettivo secondo  $n$ , quando sono soddisfatte insieme le due condizioni

$$J = 0 \quad , \quad I^n = 1 .$$

2°) Sia  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ . In tal caso si ha una sola linea  $f$ , alla quale corrisponda nel connesso una schiera di linee armoniche, e così una sola linea  $F$ , alla quale corrisponda nel connesso un fascio di linee armoniche:

Sia  $f_1$  quella prima linea. Delle due linee  $F_2$  ed  $F_3$ , che determinano la schiera di linee armoniche corrispondente ad  $f_1$ , una,  $F_3$ , sia la linea della rete tangenziale alla quale corrisponde un fascio di linee armoniche. A questo fascio appartiene la linea  $f_1$ , epperò esso può riguardarsi come determinato da questa linea  $f_1$  e da un'altra linea  $f_2$ . Siano infine  $f_3$  ed  $F_1$  due linee armoniche corrispondenti nel connesso.

In virtù di queste considerazioni si ha :

$$\begin{aligned}
 P_{P^2} > 0 & \quad , & P_{Q^2} = 0 & \quad , & P_{R^2} = 0, \\
 Q_{P^2} > 0 & \quad , & Q_{Q^2} > 0 & \quad , & Q_{R^2} = 0, \\
 R_{P^2} = 0 & \quad , & R_{Q^2} > 0 & \quad , & R_{R^2} < 0;
 \end{aligned}$$

quindi la nuova equazione cubica (6) è

$$\begin{vmatrix}
 P_{P^2} - \rho & , & 0 & , & 0 \\
 Q_{P^2} & , & Q_{Q^2} - \rho & , & 0 \\
 0 & , & R_{Q^2} & , & R_{R^2} - \rho
 \end{vmatrix} = 0,$$

e perchè questa abbia tutte e tre le radici eguali è necessario che sia

$$P_{P^2} = Q_{Q^2} = R_{R^2}.$$

Perciò le formole che nel caso attuale definiscono la dipendenza proiettiva fra le linee della rete punteggiata espressa dal teorema I (a sinistra) del n° 4 sono :

$$\frac{\alpha''}{\gamma''} = \frac{\alpha'}{\gamma'} + \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{Q_{P^2}}{P_{P^2}} \quad , \quad \frac{\beta''}{\gamma''} = \frac{\beta'}{\gamma'} + \frac{R_{Q^2}}{P_{P^2}}$$

ed analoghe sono le formole che definiscono la dipendenza proiettiva fra le linee della rete tangenziale espressa dal teorema I (a destra) del medesimo numero.

Le formole precedenti permettono senz'altro di stabilire :

II. « Se tutte e tre le radici dell'equazione cubica (6) sono eguali fra loro , « il connesso ( $fF$ ) non può essere mai ciclicamente proiettivo ».

9. Se il discriminante dell'equazione della linea  $F$  corrispondente nel con-

nesso ( $fF$ ) ad un punto dato  $X$ , si annulla, la linea  $F$  della 2<sup>a</sup> classe si riduce a due punti; epperò: [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

I. « Il luogo del punto  $X$ , al quale « corrisponde nel connesso ( $fF$ ); una coppia di punti, ha per equazione

$$\begin{aligned} & (\alpha\alpha'a'')^2 a_x^2 a_x'^2 a_x''^2 + (\beta\beta'\beta'')^2 b_x^2 b_x'^2 b_x''^2 + \\ & + (\gamma\gamma'\gamma'')^2 c_x^2 c_x'^2 c_x''^2 + \\ & + 3[(\alpha\alpha'\beta)^2 b_x^2 + (\alpha\alpha'\gamma)^2 c_x^2] a_x^2 a_x'^2 \\ & + 3[(\beta\beta'\gamma)^2 c_x^2 + (\beta\beta'\alpha)^2 a_x^2] b_x^2 b_x'^2 \\ & + 3[(\gamma\gamma'\alpha)^2 a_x^2 + (\gamma\gamma'\beta)^2 b_x^2] c_x^2 c_x'^2 \\ & + 6(\alpha\beta\gamma)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 = 0 \end{aligned}$$

« e quindi è una linea del 6<sup>o</sup> ordine ».

Inoltre :

II. « Il luogo delle coppie di punti « corrispondenti ai punti  $X$  della linea « precedente, è la curva d' Hermite « della rete tangenziale, e quindi è una « curva generale del 3<sup>o</sup> ordine ».

III. « L'inviluppo della retta che unisce i due punti di una stessa coppia, « è la curva di Jacobi della rete tangenziale, e quindi è una curva generale della 3<sup>a</sup> classe ».

« L'inviluppo della retta  $U$ , alla quale « corrisponde nel connesso ( $Ff$ ) una coppia di rette, ha per equazione

$$\begin{aligned} & (\alpha\alpha'a'')^2 u_\alpha^2 u_\alpha'^2 u_\alpha''^2 + (bb'b'')^2 u_\beta^2 u_\beta'^2 u_\beta''^2 + \\ & + (cc'c'')^2 u_\gamma^2 u_\gamma'^2 u_\gamma''^2 + \\ & + 3[(\alpha\alpha'b)^2 u_\beta^2 + (\alpha\alpha'c)^2 u_\gamma^2] u_\alpha^2 u_\alpha'^2 \\ & + 3[(bb'c)^2 u_\gamma^2 + (bb'a)^2 u_\alpha^2] u_\beta^2 u_\beta'^2 \\ & + 3[(cc'a)^2 u_\alpha^2 + (cc'b)^2 u_\beta^2] u_\gamma^2 u_\gamma'^2 \\ & + 6(abc)^2 u_\alpha^2 u_\beta^2 u_\gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

« e quindi è una linea della 6<sup>a</sup> classe ».

« L'inviluppo delle coppie di rette corrispondenti alle tangenti  $U$  della linea « precedente, è la curva d' Hermite « della rete punteggiata, e quindi è una « curva generale della 3<sup>a</sup> classe ».

« Il luogo del punto d'incontro delle « due rette di una stessa coppia, è la « curva di Jacobi della rete punteggiata, e quindi è una curva generale « del 3<sup>o</sup> ordine ».

Siano  $A$  e  $B$  i due punti di una medesima coppia. Ad essi corrisponde nel connesso ( $Ff$ ) un fascio  $S$  di linee  $f$ , a ciascuna delle quali corrisponde poi nello stesso connesso ( $fF$ ) una schiera di linee  $F$ , di cui fa parte la linea singolare formata dai due punti  $A$  e  $B$ . Quindi delle 4 rette costituenti la base di questa schiera 2 passano per il punto  $A$  e 2 per il punto  $B$ . Perciò ad ogni linea  $f$  del fascio  $S$  corrisponde una coppia di rette appartenente al punto  $A$  e un'altra coppia di rette appartenente al punto  $B$ . Ora è facile dimostrare che tutte le coppie di rette analoghe che passano per  $A$ , formano un'involuzione, come pure quelle che passano per  $B$ , e che le coppie di queste due involuzioni si corrispondono una ad una. Fra le linee del fascio  $S$  vi sono 3 coppie di rette e a ciascuna di queste tre coppie corrispondono due rette coniugate nell'involuzione  $A$  e le due rette a queste corrispondenti nell'involuzione  $B$ . Si hanno così 6 rette dell'involuzione  $A$ , due a due coniugate, ad ognuna delle quali corrisponde nel connesso ( $fF$ ) una coppia di rette, esse dunque appartengono all'inviluppo  $I$  (a destra). Così appartengono allo stesso inviluppo le 6 rette corrispondenti dell'involuzione  $B$ . Dunque :

|  |  |
|--|--|
| <p>IV. « Le <math>b</math> tangenti condotte all'involuppo I (a destra) da un punto qualunque della curva d'Hermitte della rete tangenziale, formano 3 coppie di raggi in involuzione ».</p> | <p>« I 6 punti d'incontro con il luogo I (a sinistra) di una tangente qualunque della curva d'Hermitte della rete punteggiata, formano 3 coppie di punti in involuzione ».</p> |
|--|--|

Ciascuno dei raggi doppi dell'involuzione di centro A forma, contato due volte, insieme alla coppia di raggi corrispondente nell'involuzione di centro B, la base di una schiera di linee F corrispondente nel connesso ad una linea del fascio S. Fra le linee di questa schiera ve n'è una costituita da due punti, che giacciono sul raggio doppio che si è considerato. Questo raggio appartiene dunque all'involuppo III (a sinistra); epperò :

|  |   |
|--|---|
| <p>V. « Delle 3 tangenti condotte alla Jacobiana della rete tangenziale da un punto qualunque della curva d'Hermitte della rete medesima, una è la retta che unisce questo punto al suo congiunto, e le altre due sono i raggi doppi dell'involuzione delle 6 tangenti condotte dallo stesso punto all'involuppo I (a destra) ».</p> | <p>« Dei 3 punti d'incontro con la Jacobiana della rete punteggiata di una tangente qualunque della curva d'Hermitte della rete medesima, uno è il punto d'incontro di questa tangente con la sua congiunta e gli altri due sono i punti doppi dell'involuzione dei 6 punti d'incontro della stessa tangente con il luogo I (a sinistra) ».</p> |
|--|---|

10. L'equazione in coordinate di punti della linea F della 2ª classe corrispondente nel connesso ( $fF$ ) ad un punto dato X, è

$$\begin{aligned}
 & (\alpha\alpha'y)^2 a_x^2 a'_x{}^2 + (\beta\beta'y)^2 b_x^2 b'_x{}^2 + (\gamma\gamma'y)^2 c_x^2 c'_x{}^2 + 2(\beta\gamma y)^2 b_x^2 c_x^2 \\
 & + 2(\gamma\alpha y)^2 c_x^2 a_x^2 + 2(\alpha\beta y)^2 a_x^2 b_x^2 = 0,
 \end{aligned}$$

dove  $y_1, y_2, y_3$  sono le coordinate correnti. Se la linea F passa per il punto X cui corrisponde, questa equazione è soddisfatta da  $y_i = x_i$ ; epperò :

|  |   |
|--|---|
| <p>I. « Il luogo dei punti che giacciono sulle linee corrispondenti F della 2ª classe ha per equazione</p> $  \begin{aligned}  & (\alpha\alpha'x)^2 a_x^2 a'_x{}^2 + (\beta\beta'x)^2 b_x^2 b'_x{}^2 + \\  & + (\gamma\gamma'x)^2 c_x^2 c'_x{}^2 + 2(\beta\gamma x)^2 b_x^2 c_x^2 + \\  & + 2(\gamma\alpha x)^2 c_x^2 a_x^2 + 2(\alpha\beta x)^2 a_x^2 b_x^2 = 0,  \end{aligned}  $ <p>« e quindi è del 6º ordine ».</p> | <p>« L'involuppo delle rette che toccano le linee corrispondenti <math>f</math> del 2º ordine ha per equazione</p> $  \begin{aligned}  & (aa'u)^2 u_\alpha^2 u_\alpha'^2 + (bb'u)^2 u_\beta^2 u_\beta'^2 + \\  & + (cc'u)^2 u_\gamma^2 u_\gamma'^2 + 2(bcu)^2 u_\beta^2 u_\gamma'^2 + \\  & + 2(cau)^2 u_\gamma^2 u_\alpha'^2 + 2(abu)^2 u_\alpha^2 u_\beta'^2 = 0  \end{aligned}  $ <p>« e quindi è della 6ª classe ».</p> |
|--|---|

Inoltre :

|  |   |
|--|---|
| <p>II. « Il luogo dei punti X, di cui le linee corrispondenti F passano per un</p> | <p>« L'involuppo delle rette U, di cui le linee corrispondenti <math>f</math> toccano una retta</p> |
|--|---|

α punto dato Y, ha per equazione

$$\begin{aligned} & (\alpha x'y)^2 a_x^2 a'_x{}^2 + (\beta \beta'y)^2 b_x^2 b'_x{}^2 + \\ & + (\gamma \gamma'y)^2 c_x^2 c'_x{}^2 + 2(\beta \gamma y)^2 b_x^2 c_x^2 + \\ & + 2(\gamma \alpha y)^2 c_x^2 a_x^2 + 2(\alpha \beta y)^2 a_x^2 b_x^2 = 0 \end{aligned}$$

α e quindi è del 4° ordine ».

α data V, ha per equazione

$$\begin{aligned} & (aa'v)^2 u_\alpha^2 u_\alpha'^2 + (bb'v)^2 u_\beta^2 u_\beta'^2 + \\ & + (cc'v) u_\gamma^2 u_\gamma'^2 + 2(bcv)^2 u_\beta^2 u_\gamma'^2 + \\ & + 2(cav)^2 u_\gamma^2 u_\alpha'^2 + 2(abv)^2 u_\alpha^2 u_\beta'^2 = 0 \end{aligned}$$

α e quindi è della 4ª classe ».

Le coordinate di una retta qualunque che passa per il punto comune a due rette date U e V sono

$$ru_1 + sv_1, \quad ru_2 + sv_2, \quad ru_3 + sv_3,$$

eperò l'equazione della linea  $f$  ad essa corrispondente nel connesso ( $Ff$ ) è

$$a_x^2 (ru + sv)_\alpha^2 + b_x^2 (ru + sv)_\beta^2 + c_x^2 (ru + sv)_\gamma^2 = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} & r^2 (a_x^2 u_\alpha^2 + b_x^2 u_\beta^2 + c_x^2 u_\gamma^2) + 2rs (a_x^2 u_\alpha v_\alpha + b_x^2 u_\beta v_\beta + c_x^2 u_\gamma v_\gamma) + \\ & + s^2 (a_x^2 v_\alpha^2 + b_x^2 v_\beta^2 + c_x^2 v_\gamma^2) = 0. \end{aligned}$$

Dunque :

|   |  |
|---|--|
| <p>III. « Le linee <math>f</math> corrispondenti nel connesso (<math>Ff</math>) alle rette di un fascio, formano un sistema semplicemente infinito tale, che per ogni punto del piano passano due sole linee del sistema ».</p> | <p>« Le linee <math>F</math> corrispondenti nel connesso (<math>fF</math>) ai punti di una retta, formano un sistema semplicemente infinito tale, che ogni retta del piano tocca due sole linee del sistema ».</p> |
|---|--|

L'involuppo delle linee  $f$  corrispondenti alle rette del fascio ( $U, V$ ) ha per equazione

$$(u_\alpha^2 u_\alpha'^2 + b_x^2 u_\beta^2 + c_x^2 u_\gamma^2)(a_x^2 v_\alpha^2 + b_x^2 v_\beta^2 + c_x^2 v_\gamma^2) - (a_x^2 u_\alpha v_\alpha + b_x^2 u_\beta v_\beta + c_x^2 u_\gamma v_\gamma)^2 = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} & (u_\alpha^2 v_\alpha'^2 - u_\alpha v_\alpha' u_\alpha v_\alpha') a_x^2 u_x'^2 + (u_\beta^2 v_\beta'^2 - u_\beta v_\beta' u_\beta v_\beta') b_x^2 u_x'^2 + (u_\gamma^2 v_\gamma'^2 - u_\gamma v_\gamma' u_\gamma v_\gamma') c_x^2 u_x'^2 + \\ & + (u_\beta^2 v_\gamma'^2 + u_\gamma^2 v_\beta'^2 - 2u_\beta v_\beta' u_\gamma v_\gamma') b_x^2 c_x^2 + (u_\gamma^2 v_\alpha'^2 + u_\alpha^2 v_\gamma'^2 - 2u_\gamma v_\gamma' u_\alpha v_\alpha') c_x^2 a_x^2 + \\ & + u_\alpha^2 v_\beta'^2 + u_\beta^2 v_\alpha'^2 - 2u_\alpha v_\alpha' u_\beta v_\beta') u_x^2 b_x^2 = 0. \end{aligned}$$

Ora se  $y_1, y_2, y_3$  rappresentano le coordinate del centro del fascio ( $U, V$ ) si ottiene

tiene facilmente

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$2(u_\alpha^2 v_\alpha^2 - u_\alpha v_\alpha u_\alpha v_\alpha) = (\alpha\alpha'y)^2, \quad 2(u_\beta^2 v_\beta^2 - u_\beta v_\beta u_\beta v_\beta) = (\beta\beta'y)^2,$$

$$2(u_\gamma^2 v_\gamma^2 - u_\gamma v_\gamma u_\gamma v_\gamma) = (\gamma\gamma'y)^2$$

$$u_\beta^2 v_\gamma^2 + u_\gamma^2 v_\beta^2 - 2u_\beta v_\beta u_\gamma v_\gamma = (\beta\gamma y)^2, \quad u_\gamma^2 v_\alpha^2 + u_\alpha^2 v_\gamma^2 - 2u_\gamma v_\gamma u_\alpha v_\alpha = (\gamma\alpha y)^2,$$

$$u_\alpha^2 v_\beta^2 + u_\beta^2 v_\alpha^2 - 2u_\alpha v_\alpha u_\beta v_\beta = (\alpha\beta y)^2.$$

Quindi la equazione precedente diventa

$$\begin{aligned} & (\alpha\alpha'y)^2 a_x^2 a_x'^2 + (\beta\beta'y)^2 b_x^2 b_x'^2 + (\gamma\gamma'y)^2 c_x^2 c_x'^2 + 2(\beta\gamma y)^2 b_x^2 c_x'^2 + \\ & + 2(\gamma\alpha y)^2 c_x^2 a_x'^2 + 2(\alpha\beta y)^2 a_x^2 b_x'^2 = 0 \end{aligned}$$

epperò tenendo presente il teorema II (a destra) di questo numero si conclude :

|   |  |
|---|--|
| <p>IV. « L'involuppo delle linee <math>f</math> corrispondenti nel connesso (<math>fF</math>) alle rette « di un fascio di centro <math>Y</math>. è il luogo « dei punti <math>X</math> di cui le linee corrispondenti <math>F</math> passano per il centro <math>Y</math> ».</p> | <p>« L'involuppo delle linee <math>F</math> corrispondenti nel connesso (<math>Ff</math>) ai punti di una « punteggiata <math>V</math>, è l'involuppo delle rette « <math>U</math>, di cui le linee corrispondenti <math>f</math> toccano la retta <math>V</math> ».</p> |
|---|--|

11. Dicesi *coincidenza principale di un connesso*, la coincidenza formata dagli elementi comuni al connesso dato e al connesso identico :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Ora si cerchi il luogo del punto  $X$  tale, che la retta  $U$  che lo congiunge ad un punto fisso  $Y$  formi con  $X$  un elemento della coincidenza principale del connesso ( $fF$ ). Nel connesso identico, ad ogni punto corrisponde l'insieme delle rette che passano per esso. Quindi  $(X, U)$  ed  $(Y, U)$  sono due elementi di questo connesso, epperò si ha :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0.$$

Inoltre perchè  $(XU)$  deve essere ancora un elemento del connesso ( $fF$ ), si ha pure

$$a_x^2 u_\alpha^2 + b_x^2 u_\beta^2 + c_x^2 u_\gamma^2 = 0.$$

Eliminando  $u_1, u_2, u_3$  fra le tre equazioni precedenti, si ottiene l'equazione del

luogo cercato. Dunque:

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

« Il luogo del punto X tale, che la  
« retta U che lo congiunge ad un punto  
« fisso Y costituisca con X un elemento  
« (X,U) della coincidenza principale del  
« connesso (fF) ha per equazione

$$a_x^2(\alpha xy)^2 + b_x^2(\beta xy)^2 + c_x^2(\gamma xy)^2 = 0$$

« epperò è una curva del 4° ordine, che  
« possiede in Y un punto doppio ».

« L'involuppo della retta U, tale che il  
« suo punto d' intersezione X con una  
« retta fissa V costituisca con U un ele-  
« mento (U,X) della coincidenza princi-  
« pale del connesso (Ff), ha per equazione

$$u_\alpha^2(\alpha uv)^2 + u_\beta^2(\beta uv)^2 + u_\gamma^2(\gamma uv)^2 = 0$$

« epperò è una curva della 4ª classe, che  
« possiede in V una tangente doppia ».

Teramo 24 Novembre 1887.

La R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, ha pubblicato il seguente :

#### PROGRAMMA DI CONCORSO.

L'Accademia non ha ricevuto alcuna risposta al Programma di concorso scaduto nel Marzo 1887 sopra un tema di matematica. L'altro concorso sopra tema di chimica, aperto in Gennaio 1887, scade nel prossimo Marzo. Intanto l'Accademia ripropone il tema di matematica nei seguenti termini :

Sarà conferito un premio di lire mille all'Autore della migliore Memoria :

« Sulle curve piane del 4° ordine in relazione con l'interpretazione geometrica delle forme invariantive della forma ternaria biquadratica ».

L'Accademia desidera un'esposizione analitica sistematica delle più notevoli proprietà delle curve piane del 4° ordine in relazione con l'interpretazione geometrica delle forme invariantive della forma ternaria biquadratica. La Memoria dovrebbe trattare :

- 1° Delle polari della curva di 4° ordine.
- 2° Delle sue tangenti doppie.
- 3° Dei suoi flessi
- 4° Dei caratteri analitici invariantivi che distinguono le linee speciali del 4° ordine.
- 5° Della geometria sopra una curva del 4° ordine.

L'Accademia si riserva di conferire una parte del premio anzidetto qualora fosse trattato soltanto qualcuno dei più importanti dei precedenti argomenti.

#### CONDIZIONI.

1. Le memorie dovranno essere scritte in italiano, latino o francese, e dovranno inviarsi al Segretario dell'Accademia non più tardi del mese di Marzo 1889.
2. Esse debbono essere distinte con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata che conterrà il nome dell'Autore.
3. La memoria premiata sarà pubblicata negli Atti dell'Accademia per intero o per sunto, e l'Autore ne avrà cento copie.
4. Tutte le memorie inviate pel concorso al Premio si conserveranno nell'Archivio dell'Accademia, e soltanto si permetterà di estrarne copia a chi le avrà presentate.

Napoli, Gennaio 1888.

DERIVATA TOTALE DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI REALI

E SULL'INVERSIONE DELLE DERIVAZIONI

PER

RODOLFO BETTAZZI.



1. Nella mia Nota. « Sui concetti di derivazione e di integrazione delle funzioni « di più variabili reali » pubblicata nel Vol. XXII del Giornale di Matematiche chiamai *derivata totale* di una funzione  $f(x,y)$  di due variabili reali  $x,y$  nel punto  $(x_0, y_0)$  e indicai col simbolo  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial(x,y)}$  il limite (quando esista) del rapporto

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

preso quando  $h$  e  $k$  tendono a zero in un modo qualunque. Quel rapporto rappresenta l'incremento rispetto ad  $x$  (o ad  $y$ ) degli incrementi della funzione rispetto ad  $y$  (o ad  $x$ ) negli intorno del punto dato: lo dissi perciò *rapporto incrementale* della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Notai che conviene tener distinti i quattro rapporti incrementali che si hanno dando ad  $h$  e  $k$  i vari segni di cui sono suscettibili: talchè si può giungere a 4 derivate totali, che distinsi coi segni che spettano ad  $h$  e  $k$  nei quadranti in cui sono prese, e dissi infine *derivata totale ordinaria* quella che si ottiene quando le quattro derivate ora dette sono uguali.

Se per brevità si pone

$$R_{h,k} = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

essendo  $(x_0, y_0)$  un determinato punto del campo in cui è data la funzione  $f(x,y)$  (per il qual punto supporremo di aver condotto le parallele agli assi coordinati, in modo da aver diviso il campo in 4 quadranti) dimostrai in quella Nota che presi

i due limiti inferiore e superiore, rispettivamente  $l'_{x_0, y_0, h, k}$ ,  $L'_{x_0, y_0, h, k}$  dei valori che il rapporto incrementale  $R_{h, k}$  assume quando  $h$  e  $k$  variano nel rettangolo che ha per lati le rette  $x = x_0$ ,  $x = x_0 + h$ ,  $y = y_0$ ,  $y = y_0 + k$  (esclusi i lati  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , dove  $R_{h, k}$  non ha significato) essi sono tali che quando o  $h$ , o  $k$  o  $h$  e  $k$  insieme diminuiscono,  $l'_{x_0, y_0, h, k}$  o cresce o resta invariato e  $L'_{x_0, y_0, h, k}$  o decresce o resta invariato: quindi su ogni retta  $h = h_1$  compresa nel rettangolo,  $l'_{x_0, y_0, h, k}$  ha un limite  $l'_{x_0, y_0, h_1, 0}$  per  $k = 0$ , e  $L'_{x_0, y_0, h, k}$  per  $k = 0$  ha un limite  $L'_{x_0, y_0, h_1, 0}$ ; e per ogni retta  $k = k_1$ , pure compresa nel rettangolo, per  $h = 0$  le medesime quantità hanno limiti rispettivi:  $l'_{x_0, y_0, 0, k_1}$ ,  $L'_{x_0, y_0, 0, k_1}$ . Questi limiti possono essere finiti o infiniti. La quantità  $l'_{x_0, y_0, h, 0}$  anch' essa non decresce quando  $h$  s'avvicina a zero: quindi per  $h = 0$  ha un limite  $\lambda'_{x_0, y_0}$ : del pari  $L'_{x_0, y_0, h, 0}$  ha un limite  $\Lambda'_{x_0, y_0}$ . Il valore  $\lambda'_{x_0, y_0}$  è limite anche di  $l'_{x_0, y_0, h, k}$  quando  $h$  e  $k$  tendono a zero in un modo qualunque, purchè si mantengano ambedue diversi da zero, ed è anche limite per  $k = 0$  di  $l'_{x_0, y_0, 0, k}$ ; così  $\Lambda'_{x_0, y_0}$  è limite di  $L'_{x_0, y_0, h, k}$  e di  $L'_{x_0, y_0, 0, k}$ .

Alle due quantità  $\lambda'_{x_0, y_0}$ ,  $\Lambda'_{x_0, y_0}$  detti il nome di *estremi oscillatorii* rispettivamente *inferiore e superiore* del rapporto incrementale (+ +); esse dipendono non dall'ampiezza nè dalla forma del campo, ma solo dal punto  $(x_0, y_0)$ . La condizione necessaria e sufficiente affinchè in un punto esista la derivata totale (+ +) è che essi in quel punto siano uguali. Se gli 8 estremi oscillatorii sono uguali in un punto, in esso esiste la derivata ordinaria (\*).

2. La derivata totale è chiaramente in stretta relazione colla derivata seconda mista di una funzione di due variabili; ma può esistere l'una senza che esistano le altre e viceversa. Infatti per l'esistenza della derivata totale occorre che esista il limite di  $R_{h, k}$  anche, p. e. quando tende a zero prima  $h$  e poi  $k$ ; ma non occorre che esista il limite per  $h = 0$  di  $R_{h, k}$ : basta che, per  $h = 0$ ,  $R_{h, k}$  oscilli fra limiti che tendano a divenire uguali per  $k = 0$ . Invece perchè esista la derivata seconda mista  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  nel punto  $(x_0, y_0)$  occorre che esista il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$$

per ogni  $y$  compreso fra  $y_0$  e  $y_0 + k$  con  $k$  conveniente giacchè quel limite è

(\*) Per quanto è enunciato in questo paragrafo, vedi la mia Nota citata.

$f'_x(x_0, y)$ , e poi il [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_x(x_0, y_0 + k) - f'_x(x_0, y_0)}{k}$$

e quindi che a *fortiori* esista il  $\lim_{h \rightarrow 0} R_{h,k}$ . Le due derivate non sono quindi tali che il concetto dell'una comprenda quello dell'altra: vedremo per altro ora come è legata la loro esistenza.

Intanto è bene notare che si sogliono considerare le derivate miste ordinarie, cioè le derivate prime ordinarie rispetto ad  $y$  (o ad  $x$ ) delle derivate prime ordinarie rispetto ad  $x$  (o ad  $y$ ). Qui, per maggior generalità, distingueremo quattro specie di derivate seconde, cioè le derivate destre o sinistre rispetto ad  $y$  (o ad  $x$ ) tanto delle derivate destre che delle derivate sinistre rispetto ad  $x$  (o ad  $y$ ) e indicheremo esse pure colle coppie rispettive di segni che per calcolarle si danno agli incrementi  $h$  e  $k$  di  $x_0$  ed  $y_0$ . Senza stare a ripeterlo ogni volta, intenderemo di fare i nostri studi sulle derivate miste e totali (+ +).

3. Nella mia Nota citata è dimostrato il teorema:

« Se in un punto  $(x_0, y_0)$  interno al campo in cui una funzione  $f(x, y)$  è data, « questa funzione ammette la derivata totale in un certo quadrante (p. e. (+ +)) « e negli intorni  $(x_0 + h, y_0)$  del medesimo quadrante ammette la derivata prima « rapporto ad  $y$ , e negli intorni  $(x_0, y_0 + k)$  quella rapporto ad  $x$ , esisteranno le « due derivate seconde miste prese nel medesimo quadrante e saranno uguali alla « derivata totale - e quindi fra loro, cioè sarà possibile l'inversione delle derivazioni (\*) ».

Vogliamo ora cercare le condizioni di esistenza della derivata totale e insieme di uguaglianza alle due derivate miste. Quanto alla funzione  $f(x, y)$  da studiarci la supporremo sinistra in tutti i punti interni ad un certo campo in cui si suppone nota: e ci limiteremo a studiarne i punti in cui gli estremi oscillatorii sono finiti.

Supponiamo per semplicità che il punto  $(x_0, y_0)$  in cui si studia la derivata sia il punto  $(0, 0)$ , il che non limita la sua arbitrarietà, potendo ogni punto ridursi ad essere origine con un solo cambiamento di assi. Denoteremo allora più brevemente con  $l'_{h,k}$ ,  $L'_{h,k}$ ,  $l'_{0,k}$  ecc. le quantità indicate fin qui rispettivamente con  $l'_{x_0, y_0, h, k}$ ,  $L'_{x_0, y_0, h, k}$ ,  $l'_{x_0, y_0, 0, k}$  ecc. e con  $\lambda'$ ,  $\Lambda'$  gli estremi oscillatorii.

Essendo per ipotesi finiti  $\lambda'$  e  $\Lambda'$ , saranno finiti pure  $l'_{h,k}$ ,  $L'_{h,k}$  e così le quantità che in seguito denoteremo con  $l'_{h,(k)}$  ecc., almeno quando  $h$  e  $k$ , come per noi sarà lecito supporre, siano sufficientemente piccoli; giacchè il rapporto incrementale, e quindi anche i suoi limiti inferiori e superiori, ed i limiti verso cui

---

(\*) Vedi mia Nota § 9.

tendono questi limiti inferiori e superiori, finiscono per mantenersi sempre compresi fra  $\lambda' + \varepsilon$  e  $\Lambda' + \varepsilon$  quando  $h$  e  $k$  tendono a zero, essendo  $\varepsilon$  del grado di piccolezza che più ci piace.

Se ora con  $\overline{hk}$  s'intende il rettangolo che ha per lati  $x=0, x=h, y=0, y=k$ , osserviamo che, a causa del significato dato a  $l'_{h,k}$ , per il teorema del Weierstrass, nel rettangolo  $\overline{hk}$  o sul suo contorno c'è almeno un punto tale che in qualunque suo intorno il limite inferiore dei valori di  $R_{h,k}$  è ancora  $l'_{h,k}$ . Se questo punto è all'interno di  $\overline{hk}$  o su uno dei lati che non passano per  $(0, 0)$  può avvenire che in esso  $R_{h,k}$  prenda effettivamente quel valore  $l'_{h,k}$ . Se poi questo non avviene, come in particolare se questo punto è su uno degli assi, dimodochè in esso  $R_{h,k}$  non abbia valore, potremo dire soltanto che in ogni suo intorno,  $l'_{h,k}$  è limite inferiore di  $R_{h,k}$ , e quindi esistono infiniti punti in cui  $R_{h,k}$  differisce da esso tanto poco quanto si vuole. In altre parole, o esistono due valori  $h_1$  e  $k_1$  diversi da zero ( $h_1 \leq h, k_1 \leq k$ ) tali che  $R_{h_1, k_1} = l'_{h,k}$ , oppure esistono due valori  $h_1$  e  $k_1$  (uno dei quali o anche ambedue potranno essere uguali a zero) tali che, preso  $\sigma$  piccolo a piacere, vi siano due numeri  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , non ad arbitrio ma diversi da zero e inferiori a numeri di piccolezza arbitraria, in modo che si abbia

$$(1) \quad R_{h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1} = l'_{h,k} + \varepsilon$$

con  $\varepsilon$  conveniente, ma minore di  $\sigma$  — essendo sempre  $(h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1)$  un punto del campo nel quadrante  $(++)$  che si studia.

Consideriamo ora il limite inferiore dei valori che  $R_{h,k}$  prende nel solito quadrante quando  $k$  è fisso e  $h$  prende tutti i valori compresi fra 0 ed  $h$  (0 escluso,  $h$  incluso), e indichiamolo con  $l'_{h,(k)}$ ; s'intenderà facilmente il significato che avranno i simboli analoghi  $l'_{(h),k}, L'_{h,(k)}, L'_{(h),k}$ . Allora  $l'_{h,(k)}$  non decresce quando  $h$  tende a zero: quindi per  $h=0$  esso tende ad un limite che indico con  $l'_{0,(k)}$  (\*); e analogamente per  $l'_{(h),k}$  ecc. Sarà evidentemente sempre  $l'_{h,(k_0)} \geq l'_{h,k}$  per  $k_0 \leq k$ .

Allora, se il punto  $(h_1, k_1)$  di cui si è parlato è tale che in esso  $R_{h_1, k_1} = l'_{h,k}$ , prenderà in esso  $R_{h,k}$  il valore minimo di tutto il rettangolo  $\overline{hk}$ ; e quindi anche  $l'_{h,(k_1)}$  è uguale ad esso, cioè

$$l'_{h,(k_1)} = R_{h_1, k_1} = l'_{h,k}$$

Se questo non avviene, consideriamo  $R_{h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1}$ . Sulla retta  $y = k_1 + \beta_1$

---

(\*) Nella mia Nota citata adoprai altri simboli per questa quantità: ho sostituito questo per maggior chiarezza.

(su cui si trova il punto  $(h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1)$  nel quale si considera ora  $R_{h,k}$ ) prendiamo la quantità indicata con  $l'_{h, (k_1 + \beta_1)}$ ; essa intanto, come limite inferiore di certi valori di  $R_{h,k}$  fra i quali comparisce  $R_{h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1}$ , ci dà

$$l'_{h, (k_1 + \beta_1)} < R_{h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1};$$

ma insieme, essendo  $(h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1)$  un punto del rettangolo  $\overline{hk}$ , dev' essere  $l'_{h, (k_1 + \beta_1)} \geq l'_{h, k}$ , onde sarà

$$R_{h_1 + \alpha_1, k_1 + \beta_1} \geq l'_{h, (k_1 + \beta_1)} \geq l'_{h, k};$$

cioè, a causa della (1), sarà in tutti i casi

$$l'_{h, k} + \sigma > l'_{h, (k_1 + \beta_1)} \geq l'_{h, h}$$

con  $\sigma$  piccolo a piacere, purchè si prenda convenientemente  $\beta_1$ , il quale del resto, anche fissato arbitrariamente  $\sigma$ , si può stabilire che sia minore della grandezza, che più ci piace. Questa formula si riferisce anche al caso in cui

$$R_{h_1, k_1} = l'_{h, k} = l'_{h, (k_1)};$$

basta porre in essa  $\beta_1 = 0$  e quindi ritenere  $k_1$  diverso da zero. Essa vale qualunque siano  $h$  e  $k$  purchè comprese nel rettangolo  $\overline{hk}$ : e le si può dare la forma:

$$(2) \quad l'_{h, k} = l'_{h, (k_1 + \beta_1)} - \eta \quad \text{con } \eta < \sigma.$$

Essendo ora  $l'_{0,(k)}$  il limite preso per  $h=0$  di  $l'_{h,(k)}$ , ne viene che per ogni  $k$ , fissato  $\sigma$  piccolo a piacere, si trova un valore  $\mu$ , dipendente in generale da  $k$ , e sufficientemente piccolo, tale che per ogni  $h < \mu$ , purchè diverso da zero, si ha in valore assoluto ed anche in segno (essendo  $l'_{0,(k)} \geq l'_{h,(k)}$ )

$$l'_{0,(k)} - l'_{h,(k)} < \frac{\sigma}{4}.$$

Se di più la quantità  $l'_{0,(k)}$  ha un limite per  $k=0$ , e questo è  $A$ , ne viene che si troverà un valore  $\nu$  sufficientemente piccolo, perchè per  $k < \nu$  e insieme diverso da zero, sia in valore assoluto,

$$[A - l'_{0,(k)}] < \frac{\sigma}{4}.$$

Se  $\mu$  in particolare non dipenderà da  $k$ , cioè sarà lo stesso qualunque sia  $k$  purchè minore di  $\nu$ , allora sommando le due relazioni precedenti si deduce che, fissato  $\sigma$  piccolo a piacere, si possono determinare due numeri  $\mu$  e  $\nu$  in modo che presi  $h$  e  $k$  comunque, purchè  $0 < h < \mu$ ,  $0 < k < \nu$ , si abbia in valore assoluto,

$$[A - l'_{h,(k)}] < \frac{\sigma}{2}.$$

Ma dalla (2), preso per  $\sigma$  il valore  $\frac{\sigma}{2}$  e scelti  $h$  e  $k$  dentro i limiti  $\mu$  e  $\nu$  si ha

$$A - l'_{h,k} = A - l'_{h,(k_1 + \beta_1)} + \eta \quad \text{con } \eta < \frac{\sigma}{2},$$

e quindi sarà in valore assoluto, se  $h < \mu$ ,  $k < \nu$ ,

$$[A - l'_{h,k}] < \sigma$$

dipendendo  $\mu$  e  $\nu$  da  $\sigma$ , ma essendo  $h$  e  $k$  comunque presi, purchè rispettivamente minori di essi. Se ne deduce che il limite di  $l'_{h,k}$  per  $h = 0$ ,  $k = 0$  è  $A$ , ma d'altra parte il suo limite è  $\lambda'$ , quindi sarà

$$A = \lambda'.$$

Vale a dire che se esiste il  $\lim_{k \rightarrow 0} l'_{o,(k)}$  e  $l'_{h,(k)}$  tende verso  $l'_{o,(k)}$  uniformemente rispetto a  $k$ , cioè in modo che per tutti i valori di  $k$  minori di  $\nu$  basti prendere  $h$  minore di un medesimo numero  $\mu$  perchè esso differisca dal limite corrispondente meno di  $\sigma$ , sarà

$$\lim_{k \rightarrow 0} l'_{o,(k)} = \lambda'.$$

Del pari, ammesso che siano soddisfatte le analoghe condizioni per  $L'_{o,(k)}$ , si dimostra che

$$\lim_{k \rightarrow 0} L'_{o,(k)} = \Lambda'.$$

E siccome dall'essere uguali o disuguali gli estremi oscillatorii dipende l'esistenza o non esistenza della derivata totale, concluderemo che supposte verificate le condizioni poste per  $l'_{o,(k)}$ ,  $L'_{o,(k)}$ , la derivata totale esiste o no secondochè sono o non sono uguali i due limiti

$$\lim_{k \rightarrow 0} l'_{o,(k)}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} L'_{o,(k)}.$$

Volendo occuparci delle funzioni che ammettono le derivate miste, supponiamo

ora che la nostra funzione ammetta la derivata prima a destra rapporto ad  $x$ , in tutti i punti dell'intorno  $(0, k)$  del punto 0 sull'asse  $y$  (0 incluso) e la derivata prima a destra rapporto ad  $y$  in tutti i punti dell'intorno  $(0, h)$  del punto 0 sull'asse  $x$  (0 incluso). Avremo in tal caso che *a fortiori* esisterà  $\lim_{h=0} R_{h,k}$ , che indicheremo con  $R_{0,k}$  per qualunque  $k$  preso nell'intorno anzidetto ( $k > 0$ ) e quindi necessariamente i due limiti per  $h=0$  di  $l'_{h,(k)}$ ,  $L'_{h,(k)}$ , cioè  $l'_{0,(k)}$ ,  $L'_{0,(k)}$ , sono per ognuno dei valori accennati per  $k$  uguali fra loro ed uguali al valore di  $R_{0,k}$ ; onde  $l'_{0,(k)}$  e  $L'_{0,(k)}$  hanno un limite o no secondochè lo ha o no  $R_{0,k}$  per  $k=0$ : e quando lo hanno è lo stesso per ambedue ed è questo  $\lim_{k=0} R_{0,k}$ . Ma quando

esiste la derivata seconda mista  $(+ +) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , essa è uguale a  $\lim_{k=0} R_{0,k}$ ; quindi se nel punto  $(0, 0)$  esiste  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e se ha luogo la convergenza in ugual grado di  $l'_{h,(k)}$  verso  $l'_{0,(k)}$  saranno uguali gli estremi oscillatorii ed esisterà la derivata totale: ed allora per il teorema citato in principio del paragrafo, esisterà anche l'altra derivata mista e sarà uguale a  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Dunque:

« Limitandosi alle funzioni  $f(x, y)$  che ammettono le due derivate prime in « intorno del punto  $(0, 0)$  presi sugli assi, se in quel punto esista la derivata seconda mista  $(+ +) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  (o l'altra  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ) e se ha luogo la convergenza uniforme « di  $l'_{h,(k)}$  verso  $l'_{0,(k)}$ , esiste la derivata totale, ed esiste anche l'altra derivata « mista che è uguale alla derivata totale e alla prima derivata mista – cioè è possibile l'inversione delle derivazioni ».

4. Vediamo ora come si possa trasformare la condizione della convergenza in ugual grado di  $l'_{h,(k)}$  verso  $l'_{0,(k)}$  e di  $L'_{h,(k)}$  verso  $L'_{0,(k)}$ .

Si è visto che, nel caso a cui si è detto di porre speciale attenzione, quello cioè in cui la funzione nostra ammetta in intorno di  $(0, 0)$  presi sugli assi delle  $x$  e delle  $y$  le derivate prime rispettivamente rapporto ad  $y$  e ad  $x$ , si ha:

$$\lim_{h=0} R_{h,k} = R_{0,k} = l'_{0,(k)} = L'_{0,(k)}$$

laonde le condizioni di convergenza uniforme si possono scrivere così:

$$(3) \quad R_{0,k} - l'_{h,(k)} < \sigma \quad , \quad L'_{h,(k)} - R_{0,k} < \sigma$$

quando  $h < \mu$  e  $k$  qualunque purchè minore di  $\nu$ , con  $\mu$  e  $\nu$  convenienti. Ma  $l'_{h,(k)}$ ,  $L'_{h,(k)}$  sono appunto i limiti inferiore e superiore dei valori di  $R_{h,k}$  quando  $k$  è fisso ad  $h$  variabile; per cui dico che quelle condizioni equivalgono all'altra che  $R_{h,k}$  tenda al suo limite  $R_{0,k}$  uniformemente per  $k < \nu$ . Infatti se avviene que-

st'ultima circostanza vuol dire che si ha in valore assoluto, per  $h < \mu$ ,  $k < \nu$ ,  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(4) \quad [R_{0,k} - R_{h,k}] < \sigma$$

onde  $l'_{h,(k)}$ ,  $L'_{h,(k)}$  per  $h < \mu$ ,  $k < \nu$  non possono differire da  $R_{0,k}$  più di  $2\sigma$ ; e viceversa se le (3) sono soddisfatte, siccome  $l'_{h,(k)} \leq R_{h,k} \leq L'_{h,(k)}$ , sarà vera a fortiori in valore assoluto la (4). La nostra condizione di convergenza in ugual grado si cambia quindi nell'altra che la differenza fra  $R_{h,k}$  e  $R_{0,k}$  dev'essere minore di  $\sigma$  per qualunque  $h < \mu$ , qualunque sia  $k$ , purchè minore di  $\nu$ , essendo  $\mu$  e  $\nu$  scelti convenientemente; ossia che quella differenza dev'essere minore di  $\sigma$  per tutti i punti interni ad un certo rettangolo  $\overline{\mu\nu}$ . Può quindi concludersi:

« Per le funzioni che ammettono la derivata prima in intorno del punto (0,0)  
 « presi sugli assi, se nel punto stesso esista una delle due derivate seconde miste  
 « p. es.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e se allora  $R_{h,k}$  tende uniformemente al suo limite  $R_{0,k}$  per  $k$   
 « sufficientemente piccolo, esistono la derivata totale e l'altra derivata mista, e tutte  
 « queste derivate sono uguali, cioè è possibile l'inversione delle derivazioni ».

S'intende che se si sapesse esistente  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  dovrebbe  $R_{h,k}$  tendere uniformemente a  $R_{h,0}$ .

5. Supponiamo ora reciprocamente esistente la derivata totale nel punto (0,0). Allora, sempre riferendosi a funzioni che ammettono le derivate prime, per il teorema citato in principio del § 3 esisteranno ambedue le derivate miste - che oltre a ciò saranno anche uguali fra loro. Dico inoltre che è verificata la condizione della convergenza in ugual grado di  $R_{h,k}$  verso  $R_{0,k}$ . Infatti esiste intanto questo limite  $R_{0,k}$  a causa dell'esistenza delle derivate prime di  $f(x, y)$  rispetto ad  $x$ . Esistendo la derivata totale deve esistere il limite di  $R_{h,k}$  quando  $h$  e  $k$  tendono a zero in un modo qualunque, anche se tende a zero prima  $h$  e poi  $k$  o viceversa. Se questo limite è  $C$ , dev'essere quindi  $C = \lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} R_{h,k} = \lim_{k \rightarrow 0} R_{0,k}$ . Ciò vuol dire che si possono trovare due valori  $\mu_0$  e  $\nu_1$  tali che per  $h < \mu_0$  e  $k < \nu_1$ , sia in valore assoluto

$$[C - R_{h,k}] < \frac{\sigma}{2}$$

ed un valore  $\nu_2$  tale che, per  $k < \nu_2$  sia, pure in valore assoluto,

$$[C - R_{0,k}] < \frac{\sigma}{2}$$

con  $\sigma$  preso in precedenza piccolo a piacere. Indicando quindi con  $\nu_0$  il minore dei due numeri  $\nu_1$  e  $\nu_2$  avremo, sottraendo le precedenti disuguaglianze, che per

$h < \mu_0, k < \nu_0$  sarà sempre in valore assoluto

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$[R_{0,k} - R_{h,k}] < \sigma$$

che è la condizione (4).

Possiamo quindi concludere :

« Considerando le funzioni che in tutto un intorno  $(0, h)$  del punto 0 sull'asse  $x$  (gli estremi inclusi) ammettono la derivata prima rispetto ad  $y$ , ed in tutto un intorno  $(0, k)$  del punto 0 sull'asse delle  $y$  (gli estremi inclusi) la derivata prima rispetto ad  $x$ , la condizione necessaria e sufficiente perchè esse ammettano la derivata totale (finita) nel punto  $(0, 0)$  è che esista nel punto  $(0, 0)$  una delle due derivate seconde miste e che il rapporto incrementale  $R_{h,k}$  tenda al suo limite  $R_{0,k}$  (se esista la derivata  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  - o  $R_{h,0}$  se esiste l'altra  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ) uniformemente per  $h < \nu$  con  $\nu$  convenientemente piccolo ».

« Con queste condizioni si ha di più che esiste anche l'altra derivata seconda mista ed è uguale a quella data, cioè è possibile l'inversione delle derivazioni ».

Se si chiede che esista nel punto  $(0, 0)$  la derivata mista ordinaria  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e che la convergenza uniforme di  $R_{h,k}$  verso  $R_{0,k}$  si verifichi a destra e a sinistra di 0 sull'asse delle  $x$  per  $h$  minore di  $\nu$  solo in valore assoluto, cioè sia una convergenza uniforme nell'intero rettangolo  $x = \mu, x = -\mu, y = \nu, y = -\nu$ , allora evidentemente si ha così la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della derivata totale ordinaria.

6. Se supponiamo che la derivata seconda  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , che noi indicheremo con  $f''_{x,y}(x, y)$  esista non solo nel punto  $(0, 0)$  ma in tutto un intorno di questo punto, nel quale intorno chiederemo solo per ora che sia determinata e finita, allora, essendo

$$R_{h,k} = \frac{\frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} - \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}}{k}$$

sarà

$$R_{0,k} = \lim_{h \rightarrow 0} R_{h,k} = \frac{f'_x(0, k) - f'_x(0, 0)}{k} = f''_{x,y}(0, k_1)$$

dove  $k_1$  è un conveniente valore intermedio fra 0 e  $k$ . Ponendo poi :

$$f(x, y + k) - f(x, y) = \varphi(x, y, k),$$

la funzione  $\varphi(x, y, k)$  ammette le derivate prime e seconde finchè le ammettono  $f(x, y+k)$  e  $f(x, y)$ . Allora, esistendo la derivata prima di  $f(x, y)$  rispetto ad  $x$  in tutto un intorno di  $(0, 0)$ , in particolare sull'asse  $y$  fra  $0$  e  $k$ , sarà

$$\frac{\varphi(x+h, y, k) - \varphi(x, y, k)}{h} = \varphi'_x(x+h', y, k) = f'_x(x+h', y+k) - f'_x(x+h', y)$$

essendo  $h'$  un conveniente valore compreso fra  $0$  ed  $h$ . Ma poichè

$$R_{h,k} = \frac{\frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} - \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}}{h}$$

sarà anche

$$R_{h,k} = \frac{\varphi(h, 0, k) - \varphi(0, 0, k)}{h \cdot k} = \frac{f'_x(h', k) - f'_x(h', 0)}{k}$$

Di qui si rileva

$$R_{h,k} = f''_{x,y}(h', k') \quad \text{con} \quad 0 < k' < k.$$

La quantità  $R_{0,k} - R_{h,k}$  sarà quindi ora uguale ad

$$f''_{x,y}(0, k_1) - f''_{x,y}(h', k');$$

e per l'esistenza della derivata totale basterà che essa tenda a zero uniformemente. Se  $f''_{x,y}(x, y)$  oltre esistere, come si è supposto, in tutto un intorno di  $(0, 0)$  è in questo punto continua assolutamente, vuol dire che preso  $\sigma$  piccolo a piacere, devono esistere due valori  $\mu$  e  $\nu$  tali che per  $h < \mu$ ,  $k < \nu$  la differenza fra due qualunque dei suoi valori deve essere minore di  $\sigma$ ; quindi la differenza precedente per  $h < \mu$  è minore di  $\sigma$  per tutti i valori di  $k < \nu$ , ossia è soddisfatta la richiesta condizione di convergenza in ugual grado. Lo stesso accadrebbe se la derivata seconda mista senza esser continua nel punto  $(0, 0)$  avesse in quel punto una discontinuità di quelle che possono togliersi cambiando il valore nel punto — fosse cioè tale che esistesse il limite di  $f''_{x,y}(h, k)$  per  $h$  e  $k$  tendenti comunque a zero, ma non fosse uguale a  $f''_{x,y}(0, 0)$  — Nell'uno e nell'altro di questi due casi sono soddisfatte tutte le condizioni richieste dal teorema precedente, onde si può concludere:

« Se si ha una funzione  $f(x, y)$  che negli intorni del punto  $(0, 0)$  situati sugli assi  $x$  ed  $y$  ammette le derivate prime rispettivamente rapporto ad  $y$  ed  $x$ , e in un intorno rettangolare che comprende il punto  $(0, 0)$  all'interno ammette

« determinata e finita una delle due derivate miste che nel punto  $(0, 0)$  è anche continua, o almeno ha una discontinuità che può togliersi cambiando il valore nel punto, la funzione in quel punto ammette la derivata totale e l'altra derivata mista ed è possibile l'inversione delle derivazioni ».

Questo teorema è simile ad uno già noto (\*) che dà condizioni sufficienti per l'inversione delle derivazioni; ma è alquanto più generale, non chiedendo che sia fin da principio verificata la continuità di una delle due derivate prime, e non esigendo la continuità di quella delle derivate miste che si sa esistere, ma solo l'esistenza di un limite per i valori di questa derivata mista quando  $h$  e  $k$  tendono a zero. Di più il nostro teorema prova che, quando sono soddisfatte le condizioni espresse in esso, esiste anche la derivata totale che è uguale a ciascuna delle due derivate miste.

Queste condizioni peraltro non sono *necessarie* per l'esistenza della derivata totale, e nemmeno per la sola possibilità dell'inversione delle derivazioni.

7. Le considerazioni esposte mettono in chiaro come possono esistere funzioni dotate di derivata totale e prive di derivate miste, e del pari funzioni che hanno le due derivate miste uguali e non hanno derivata totale.

Le funzioni della prima specie devono essere tali da non ammettere in intorno del punto  $(0, 0)$  situati sugli assi ambedue le derivate prime; giacchè, se le ammettessero ambedue, esistendo la derivata totale s'è già visto che dovrebbero esistere le due derivate miste ed essere uguali, contro l'ipotesi. Un esempio è quello già citato al § 9 della mia Nota, della funzione

$$f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

dove  $\varphi(x)$  e  $\psi(y)$  sono funzioni che non hanno le derivate rispetto a quelle variabili da cui solo dipendono. Ciò fa sì che mancano le derivate miste, in tutti i punti, mentre la derivata totale esiste ed è uguale a zero in tutti i punti. Se invece  $\varphi(x)$  non ammettesse derivata rapporto ad  $x$ , e  $\psi(y)$  l'ammettesse rapporto ad  $y$ , allora la derivata totale sarebbe ancora zero in tutti i punti, la derivata mista  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  esisterebbe e sarebbe uguale a zero, mentre la derivata  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  mancherebbe sempre.

Un esempio di funzioni che soddisfano alla seconda condizione è la funzione che per  $x=0, y=0$  è uguale a 0, e negli altri punti è data dalla formula

$$f(x, y) = y^2 \operatorname{arc tang} \frac{x}{y} + x^2 \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}$$

---

(\*) V. Dini. *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*.

dove per *arc tang* si prenderà sempre l'arco positivo o negativo che ha il minore valore assoluto. Infatti è, nel punto (0, 0),

$$R_{h,k} = \frac{h^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{h}{k} + k^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{k}{h}}{hk} = \frac{\operatorname{arc\,tang} \left(\frac{h}{k}\right)}{\left(\frac{h}{k}\right)} + \frac{\operatorname{arc\,tang} \left(\frac{k}{h}\right)}{\left(\frac{k}{h}\right)}$$

e quindi il limite per  $h=0$ ,  $k=0$ , quando  $h$  e  $k$  vanno a zero comunque, non esiste: e basta a provarlo il supporre che  $h$  e  $k$  vadano a zero insieme in modo che  $h=k$ , oppure in modo che  $h=k^2$ ; giacchè nel primo caso si ha:

$$R_{h,k} = \frac{\pi}{2} \text{ costante}$$

e nel 2° caso

$$R_{h,k} = \frac{\operatorname{arc\,tang} k}{k} + \frac{\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)}$$

che per  $k=0$  tende ad 1.—Esistono invece le due derivate miste e sono uguali fra loro, essendo 1 il loro valore comune.



# SU DI UN TEOREMA SUL CALCOLO SIMBOLICO

NELLA TEORIA DELLE FORME BINARIE

N O T A

D I

ERNESTO PASCAL.

---

Scopo di questa breve Nota è di dare, sotto un aspetto più generale e più completo, la dimostrazione di un teorema sul calcolo simbolico delle Forme binarie, che già si trova accennato per incidente in un altro mio lavoro (\*).

In una recente opera comparsa contemporaneamente al mio lavoro (\*\*), lo stesso teorema si trova enunciato e dimostrato in un modo diverso. Mi pare che con questa mia dimostrazione si penetri più addentro nell'intima natura della questione.

La estensione alle Forme ternarie del teorema che forma l'oggetto di questa Nota si trova in un recente lavoro di Study (\*\*\*) ; la sua estensione poi alle Forme ennarie si trova in un mio recentissimo lavoro pubblicato nei Rendiconti dei Lincei.

Indichiamo con  $a, b, c, d, \dots$  altrettante serie di coefficienti di Forme binarie lineari, e con  $x, y, z, t, \dots$  altrettante serie di variabili. Per brevità, chiameremo le une e le altre *elementi*, e allora è noto che fra quattro *elementi* qualunque (siano tutti coefficienti, o tutti variabili, o alcuni coefficienti e altri varia-

---

(\*) Su di un nuovo simbolo nella teoria delle Forme binarie a due serie di variabili. Rendiconti della R. Accademia di Napoli.—1887.

(\*\*) Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie, von Kerschesteiner pag. 132. Il ragionamento di pag. 14 non ha nessun rigore come osserva in una nota lo stesso Autore.

(\*\*\*) Math. Ann. Bd. 30, s. 120.

bili) esiste sempre una relazione d'identità, la quale secondo i diversi casi piglia le seguenti espressioni :

$$\left. \begin{aligned}
 (ab)(cd) + (bc)(ad) + (ca)(bd) &= 0 \\
 (ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x &= 0 \\
 a_x b_y - a_y b_x - (ab)(xy) &= 0 \\
 a_x(yz) + a_y(zx) + a_z(xy) &= 0 \\
 (xl)(yz) + (yl)(zx) + (zl)(xy) &= 0
 \end{aligned} \right\} .$$

Si abbia ora una funzione di un certo numero di *elementi*, e composta di un aggregato di prodotti di determinanti binarii del tipo  $(ab)$  o  $(xy)$ , e di fattori lineari del tipo  $a_x$ . Dico che se tale funzione è identicamente zero, deve potersi ridurre ad un assieme di termini ciascuno dei quali contenga come fattore l'identità zero corrispondente a quattro certi elementi, di cui tre son fissi per ciascun termine e il quarto muta da termine a termine. Naturalmente la funzione si intende omogenea in ciascuno elemento.

Supponiamo in primo luogo che nella Funzione vi compariscano solo quattro elementi, che potremo supporre, per fissare le idee, tutti quattro coefficienti.

Allora la funzione sarà un assieme di termini ciascuno del tipo

$$(ab)^{\lambda_{12}} (ac)^{\lambda_{13}} (ad)^{\lambda_{14}} (bc)^{\lambda_{23}} (bd)^{\lambda_{24}} (cd)^{\lambda_{34}}$$

dove per tutti i termini dovrà aversi

$$\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} = \text{cost.} = \alpha$$

$$\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} = \text{cost.} = \beta$$

$$\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} = \text{cost.} = \gamma$$

$$\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} = \text{cost.} = \delta$$

da cui si ricava :

$$(\lambda_{13} - \lambda_{24}) + (\lambda_{14} - \lambda_{23}) = \text{cost.}$$

$$(\lambda_{13} - \lambda_{24}) - (\lambda_{14} - \lambda_{23}) = \text{cost.}$$

e così altre analoghe.

Onde si ricava che  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{12} - \lambda_{24} = \text{cost.} \\ \lambda_{13} - \lambda_{24} = \text{cost.} \\ \lambda_{14} - \lambda_{23} = \text{cost.} \end{array} \right.$$

Epperò, supposto, per fissare le idee, che queste tre costanti sono tutte positive, si ha che tutti i termini hanno per fattore comune

$$(ab)^{\lambda_{12}-\lambda_{24}} (ac)^{\lambda_{13}-\lambda_{24}} (ad)^{\lambda_{14}-\lambda_{23}}$$

che si può dunque trascurare, e resta una funzione che sarà anche zero, ma dove però gli esponenti di

$$(a b) \quad \text{e} \quad (c d)$$

$$(a c) \quad \text{e} \quad (b d)$$

$$(a d) \quad \text{e} \quad (b c)$$

sono rispettivamente eguali.

Poichè l'espressione che consideriamo è omogenea rispettivamente in

$$a_1, a_2 ; b_1, b_2 ; c_1, c_2 ; d_1, d_2.$$

si può dire che, in tutto, in essa vi compariscono solo quattro variabili indipendenti, che potremo chiamare  $a, b, c, d$ .

In luogo delle due variabili  $c, d$  posso allora introdurre le altre due  $A, B$ , legate alle prime dalle relazioni

$$\left. \begin{array}{l} (ac)(bd) = A \\ (ad)(bc) = B \end{array} \right\} \quad (1)$$

e in tutta l'espressione in luogo di  $c, d$  dovremo porre i loro valori in funzione di  $A, B, a, b$ .

Però poichè tutta la Funzione risulta solo di termini del tipo :

$$[(ac)(bd)]^\lambda [(ad)(bc)]^\mu [(ab)(cd)]^\nu,$$

così ci basta vedere che cosa diventa in funzione di  $A, B, a, b$ , la sola espressione  $(ab)(cd)$ .

Scompariscono le altre due variabili  $a, b$ , e resta solo  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(ab)(cd) = A - B. \tag{2}$$

La Funzione deve dunque ridursi identicamente a zero facendo le sole appo-  
sizioni (1), (2), perchè non abbiamo fatto altro che alle due sole variabili  $c, d$   
sostituire le altre due fra loro indipendenti  $A, B$ .

Possiamo ancora dire, se poniamo  $(ab)(cd) = C$ , che si ottiene una Funzione  
razionale ed intera delle tre variabili  $A, B, C$ , e che deve ridursi identicamente  
a zero ponendo  $C = A - B$ , ovvero, che deve avere per fattore  $C - (A - B)$ .

Poichè poi si vede che  $C - A + B$  non è altro che appunto che

$$(ab)(cd) + (bc)(ad) + (ca)(bd),$$

si vede che è dimostrato l'assunto.

Supponiamo ora che la Funzione contenga più di quattro elementi, p. e. cin-  
que. Per fissare le idee, possiamo sempre supporre che due degli elementi siano  
le due serie di variabili  $x, y$ . Applicandovi allora la nota formola fondamentale di  
Jordan (\*), la Funzione si riduce ad una serie ordinata secondo le potenze di  
 $(xy)$  e di cui i coefficienti sono polari rispetto al polo  $(y)$ .

Ora se tutta la Funzione in  $x, y$  deve essere zero, dovrà essere zero ciascuna  
Funzione su cui si applichi l'operazione di polare (\*\*). E poichè ciascuna di queste  
funzioni contiene adesso quattro soli elementi, così si applica il teorema dimo-  
strato sopra, e si ricava che essa deve essere del tipo

$$[(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x] Q.$$

Dovendo poi su questa operare la polare di polo  $y$ , si avrà che la Funzione  
primitiva risulta infine di un assieme di termini di cui ciascuno o contiene per  
fattore

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x$$

ovvero

$$(ab)c_y + (bc)a_y + (ca)b_y$$

Si vede quindi che la Funzione a cinque elementi potrà sempre ridursi ad un  
assieme di due termini di cui uno contenga per fattore l'identità zero corrispon-

(\*) *Mathematische Annalen*, Bd, III.

(\*\*) *Clebsch. Th. der alg. Formen*, pag. 18.

dente a quattro elementi  $a, b, c, x$ , e l'altro l'*identità zero* corrispondente ai quattro elementi  $a, b, c, y$ .

Se invece di cinque elementi ve ne fossero più, colla ripetuta applicazione della formola di Gordan si giunge in generale al risultato che in tanti termini può scomporsi la Funzione quanto è il numero degli elementi meno tre.

Per rischiarare la teoria esposta svilupperemo un esempio, e propriamente lo ricaveremo da quello che si trova a pag. 15-16 della citata Opera di Kerschens- steiner.

Col metodo ivi seguito si decompone la Funzione

$$F = G_1 - G_1' + G_2 - G_2'$$

contenente i cinque elementi  $a, b, \alpha, \beta, x$ , in quattro termini, ciascuno conte- nente per fattore una *identità zero*; e se poi questi quattro termini si riducono a due, è solo colla supposizione dell'equivalenza dei simboli  $\alpha, \beta$ ;  $a, b$  rispetti- vamente, perchè simboli di due cubiche. Noi invece col nostro metodo trasforme- remo  $F$  direttamente in *due* termini ciascuno contenente un'*identità zero* come fattore, indipendentemente dalla supposizione che gli elementi contenuti in  $F$  siano simboli o quantità effettive.

Per comodità facciamo i seguenti mutamenti. Mutiamo

|                |          |                  |       |
|----------------|----------|------------------|-------|
| le variabili   | $x$      | nei coefficienti | $c$   |
| i coefficienti | $\alpha$ | nelle variabili  | $x$   |
| i coefficienti | $\beta$  | nelle variabili  | $y$ . |

Allora

$$G_1 = (ab) (bc)^2 (xy)^2 a_x a_y \qquad G_1' = (ab) (ac)^2 (xy)^2 b_x b_y$$

$$G_2 = (ab)^2 (xy) a_x b_x c_y^2 \qquad G_2' = (ab)^2 (xy) a_y b_y c_x^2$$

Sopprimendo il fattore comune  $(ab) (xy)$  e seguitando a chiamare  $G$  i termini rimasti, e applicando ad essi la formola di Gordan, si ricava:

$$G_1 = (xy) (bc)^2 \Delta_y a_x^2$$

$$G_1' = (xy) (ac)^2 \Delta_y b_x^2$$

$$G_2 = (ab) \left\{ \Delta_y^2 a_x b_x c_x^2 + \frac{1}{2} (xy) \Delta_y [a_x(bc) + (ac) b_x] c_x + \frac{1}{3} (xy)^2 (ac) (bc) \right\}$$

$$G_2' = (ab) \left\{ \Delta_y^2 a_x b_x c_x^2 - \frac{1}{2} (xy) \Delta_y [a_x(bc) + (ac) b_x] c_x + \frac{1}{3} (xy)^2 (ac) (bc) \right\}$$

indicando con  $\Delta_y$  l'operazione di polare rispetto al polo  $y$ .

Onde raccogliendo :

$$\begin{aligned} F &= (ab) (xy)^2 \Delta_y (ab) c_x [ (ac) b_x + (cb) a_x + (ba) c_x ] = \\ &= (ab)^2 (xy)^2 c_y [ (ac) b_x + (cb) a_x + (ba) c_x ] + \\ &+ (ab)^2 (ay)^2 c_x [ (ac) b_y + (cb) a_y + (ba) c_y ]. \end{aligned}$$

Passando infine ai simboli primitivi si ha :

$$F = - (ab)^2 (\alpha\beta)^2 \{ \beta_x [(ba)a_x + (ax)b_x + (ab)\alpha_x] + \alpha_x [(b\beta)a_x + (\beta a)b_x + (ab)\beta_x] \}.$$

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE  
D'UNE FORMULE DE RAABE

PAR

M. LERCH

Docent à l'École Polytechnique tchèque de Prague.



Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x + u) dx = F(u)$$

et supposons que  $u$  soit réel et positif.

Posant  $x + u = z$  cette intégrale se change en

$$F(u) = \int_u^{u+1} \log \Gamma(z) dz$$

d'où il suit la formule

$$\frac{d}{du} F(u) = \lg \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = \lg u$$

dont on conclut

$$(1) \quad F(u) = C + u \log u - u,$$

$C$  désignant la constante d'intégration.

On a évidemment

$$C = \int_0^1 \lg \Gamma(x) dx;$$

la formule

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

nous donnera

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x) dx = \lg \pi - \int_0^1 \lg \sin \pi x dx - \int_0^1 \lg \Gamma(1-x) dx$$

et puisqu'on a

$$\int_0^1 \lg \Gamma(1-x) dx = \int_0^1 \lg \Gamma(x) dx$$

il s'en suit

$$2 \int_0^1 \lg \Gamma(x) dx = \lg \pi - \int_0^1 \lg \sin \pi x dx = \lg 2\pi$$

de sorte qu'on aura enfin

$$C = \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

En substituant cette valeur dans la formule (1) il vient

$$(2) \quad \int_0^1 \lg \Gamma(x+u) dx = u \lg u - u + \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

Cette formule a été donnée par Raabe et démontrée de plusieurs manières moins simples que la précédente.

## SULLE FORME DI TERZO GRADO GENERATE

DA DUE FORME ELEMENTARI PROIETTIVE

di primo e di secondo grado di un piano o di una stella

DEL

Dott. LUIGI CERTO.

Occupato in altra investigazione, ebbi bisogno, per proseguirla, di studiare la materia che è oggetto di questa Nota, e intorno alla quale non vi è pubblicazione di sorta, se si tolgano le nozioni contenute nella *Geometrie der Lage* di Reye (\*); mentre che per due forme elementari proiettive di secondo grado, o di primo e di secondo grado, in posizione generale, vi sono, oltre le nozioni contenute in quest'opera, due particolari lavori, l'uno di Benno Klein (\*\*), l'altro di Jottes (\*\*\*).

Pubblico i risultati di quello studio occasionale, con la speranza ch'io possa riprendere la trattazione dell'argomento in generale e in modo completo.

*Il luogo del punto d'intersezione di due raggi corrispondenti in due fasci proiettivi di raggi, l'uno di prima classe, l'altro di seconda, e situati in uno stesso piano, è una curva di terzo ordine (\*\*\*\*).*

*L'involuppo della retta congiungente due punti corrispondenti in due punteggiate proiettive, l'una di primo, l'altra di secondo ordine, e poste in uno stesso piano, è una curva di terza classe (\*\*\*\*).*

*Il luogo della retta d'intersezione di due piani corrispondenti in due fasci proiettivi di piani, l'uno di prima classe, l'altro di seconda, e appartenenti a una stessa stella, è un cono di terzo ordine.*

*L'involuppo del piano che contiene due raggi corrispondenti di due fasci proiettivi di raggi, l'uno di primo ordine, l'altro (costituente un cono) di secondo ordine, e appartenenti a una medesima stella, è un cono di terza classe.*

(\*) Erste Abteilung, eilfter Vortrag, 1877.

(\*\*) *Ueber die geradlinige Fläche 3. Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene*, 1876.

(\*\*\*) *Die Raumcurve 4. Ordnung 2. Species synthetisch behandelt*, 1888.

(\*\*\*\*) Cfr. Reye l. c. pag. 109.

Difatti (primo teorema a sinistra), sieno  $(a)$   $(b)$  rispettivamente i fasci dati della prima e della seconda classe, ed  $(A)$   $(B)$  le punteggiate nelle quali quei fasci sono segati da una retta arbitraria  $r$  del piano. Ad un punto  $A_1' = a_1'r$  di  $(A)$  corrisponde il punto  $B_1 = b_1'r$  di  $(B)$ ; ma da  $B_1$  esce un secondo raggio  $b_1''$  di  $(b)$  e il raggio  $a_1''$  corrispondente in  $(a)$  determina un secondo punto  $A_1'' = a_1''r$  della punteggiata  $(A)$ , il quale anch'esso corrisponde a  $B_1$ . Sicchè le punteggiate sovrapposte di primo ordine  $(A)$   $(B)$  sono in corrispondenza  $(2, 1)$ ; e però, pel principio di corrispondenza di Chasles (\*), hanno tre punti uniti, che sono i punti ove  $r$  sega la curva generata dai fasci  $(a)$  e  $(b)$ .

Questa curva, che chiameremo perciò  $K^3$ , si può agevolmente costruire, quando son date tre coppie di raggi corrispondenti  $a_1 b_1$   $a_2 b_2$   $a_3 b_3$  dei due fasci  $(a)$   $(b)$ . Difatti, segnando questi fasci rispettivamente con una retta arbitraria  $s$  condotta pel punto  $a_1 b_1$  e con la  $b_1$ , si otterranno due punteggiate rettilinee prospettive  $(P)$   $(Q)$ , determinate dal punto unito  $a_1 b_1 = P_1 = Q_1$  e dalle coppie di punti corrispondenti  $P_2 = sa_2$   $Q_2 = b_1 b_2$ , e  $P_3 = sa_3$   $Q_3 = b_1 b_3$ . Quindi si trova subito di un punto  $P_i$  in  $(P)$  il suo corrispondente  $Q_i$  in  $(Q)$ , e non resta che a condurre per questi punti rispettivamente i raggi  $a_i b_i$  nei fasci  $(a)$   $(b)$ , per ottenere un punto  $a_i b_i$  di  $K^3$ .

2. Le coppie come  $A_1' A_1''$  costituiscono una involuzione quadratica di punti sulla trasversale  $r$ . Sieno  $M N$  i punti comuni a  $r$  e alla conica  $C^2$  involuppo o sostegno di  $(b)$ . I due raggi  $b' b''$  di  $(b)$  uscenti da  $M$  sono coincidenti in un sol raggio  $m$ , e i due raggi  $a' a''$  corrispondenti in  $(a)$  coincideranno anch'essi in un raggio  $e$ ; e il punto  $E = er$  sarà un punto doppio dell'involuzione  $(A' A'')$ . Analogamente si troverà, partendo da  $N$ , il secondo punto doppio  $F$ .

Se la  $r$  è un raggio  $a_1'$  del fascio  $(a)$ , ad ogni punto di  $r$ , considerato come punto  $B_i$  della punteggiata  $(B)$ , corrisponde in  $(A)$  il centro del fascio  $(a)$  contato due volte, come punto  $A_i'$  e come punto  $A_i''$ .

E in particolare, a questo centro pensato come punto  $B_2$  di  $(B)$  corrisponde in  $(A)$  sè stesso contato due volte, come punto  $A_2'$  e come punto  $A_2''$ . Al raggio  $r = a_1'$  di  $(a)$  corrisponde un raggio  $b_1'$  in  $(b)$ ; il quale sega  $r$  nel punto  $B_1$ . Da  $B_1$  esce un secondo raggio  $b_1''$  di  $(b)$ , cui corrisponde un raggio  $a_1''$  in  $(a)$ . E dei raggi  $a_1' a_1''$  il primo ha con  $r$  tutt'i punti in comune, il secondo sega  $r$  nel centro di  $(a)$ ; cioè dei punti  $A_1' A_1''$  il primo è indeterminato sulla  $r$ , il secondo è il centro di  $(a)$ . La involuzione  $(A' A'')$  è degenerata in una involuzione impropria, ove i due punti doppi  $E F$  coincidono nel centro di  $(a)$ , e i loro corrispondenti nella punteggiata  $(B)$  sono con essi coincidenti; e tutte le coppie son costituite da questo centro come punto  $A'$  e da un punto arbitrario di  $r$  come punto  $A''$ .

---

(\*) Comptes rendus de l'Académie des sciences, 27 Juin 1864 T. LVIII, p. 1175.  
Clebsch-Lindemann Vorl. u. Geom. 1876 p. 210.

Dei tre punti uniti delle punteggiate (A) (B) sulla  $r$ , due coincidono col centro di (a) e il terzo è B. Dunque:

*La curva generata del terzo ordine ha nel centro del fascio di prima classe un punto doppio.*

*La curva generata di terza classe ha per tangente doppia la base della punteggiata di primo ordine.*

*Il cono generato di terzo ordine ha una generatrice doppia nell'asse del fascio di prima classe.*

*Il cono generato di terza classe ha un piano tangente doppio nel piano del fascio di primo ordine.*

3. Si prenda per trasversale  $r$  uno dei due raggi di (a) corrispondenti ai due raggi comuni ai fasci (a) (b). Il punto  $B_1$  dell'Art. precedente viene allora a coincidere col centro di (a), e quindi tutti e tre i punti uniti delle punteggiate (A) e (B) sulla  $r$  sono coincidenti nel centro di (a). Dunque:

*Le due tangenti della curva generata di terzo ordine nel punto doppio sono quei raggi del fascio di prima classe che corrispondono ai due raggi del fascio di seconda classe appartenenti anche al primo fascio.*

*I due punti di contatto della tangente doppia colla curva generata di terza classe sono quei punti della punteggiata di primo ordine che corrispondono ai due punti che la punteggiata di secondo ordine ha in comune con quella di primo.*

*I due piani tangenti nella generatrice doppia del cono di terzo ordine sono quei piani del fascio di prima classe che corrispondono ai piani che il fascio di seconda classe ha in comune con quello di prima.*

*Le due generatrici di contatto del piano tangente doppio col cono di terza classe sono quei due raggi del fascio di primo ordine che corrispondono ai raggi che il cono di secondo ordine ha in comune col fascio di primo ordine.*

4. La trasversale  $r$  sia un raggio  $b'$  del fascio (b). Da un punto B di essa esce un sol raggio variabile  $b''$  di (b), cui corrisponde un raggio  $a''$  di (a). I raggi  $a'' b''$  disegnano sulla  $r$  due punteggiate proiettive sovrapposte (A'') (B). Quindi i tre punti di intersezione di  $r$  con la curva  $K^3$  sono il punto  $A' = a' b'$  e i due punti uniti delle punteggiate (A'') (B).

Se  $A' = a' b'$  è un punto comune alla conica  $C^2$  e alla cubica  $K^3$ , e  $b''$  è il raggio del fascio (b) infinitamente vicino al raggio  $b'$ , saranno i punti  $B = b' b''$  ed  $A'' = b' a''$  infinitamente vicini ad  $A'$ ; cioè uno dei punti uniti delle punteggiate proiettive sovrapposte (A'') (B) sarà infinitamente vicino ad  $A'$ . Dunque nei punti comuni alle  $C^2 K^3$  queste curve si toccano; sicchè in generale:

*La curva generata di terzo ordine è tritangente alla conica involuppo o sostegno del fascio di raggi di seconda classe.*

*La curva di terza classe è tritangente alla conica base della punteggiata di secondo ordine.*

*Il cono generato di terzo ordine è tritangente al cono involuppo del fascio di piani di seconda classe.*

*Il cono generato di terza classe è tritangente al cono di secondo ordine.*

5. Supponiamo che i fasci (a) (b) siano situati in modo che un raggio  $a_1'$  di (a) coincida col corrispondente  $b_1'$  di (b), cioè che vi sia un raggio unito  $u = a_1' = b_1'$ . La cubica generata  $K^3$  si spezza allora in quel raggio  $u$  e in una conica  $K^2$  che passa pel centro di (a) ed è bitangente alla conica  $C^2$ . Il punto dove  $u$  è toccata da  $C^2$  e quello ove è segata dalla corda comune di contatto delle  $C^2$  e  $K^2$  dividono armonicamente le tangenti comuni a  $C^2$  e  $K^2$ , e anche la conica  $K^2$  (\*). Dunque :

*La curva generata da due fasci proiettivi di raggi di prima e di seconda classe di uno stesso piano, che abbiano un raggio unito, si compone di questo raggio e di una conica che è bitangente alla conica sostegno del fascio di seconda classe e che passa pel centro dell'altro fascio, ove ha per tangente il raggio del fascio di prima classe, corrispondente al raggio comune ai due fasci diverso dal raggio unito.*

*La curva generata da due punteggiato proiettive di primo e di secondo ordine di uno stesso piano, che abbiano un punto unito, si compone di questo punto e di una conica che è bitangente alla conica base della punteggiata di secondo ordine ed è tangente alla retta base dell'altra punteggiata nel punto, della punteggiata di primo ordine, corrispondente al punto comune alle due punteggiato diverso dal punto unito.*

*Il cono generato da due fasci proiettivi di piani di prima e di seconda classe di una stessa stella che abbiano un piano unito, si compone di questo piano e di un cono di secondo grado che è bitangente al cono sostegno del secondo fascio e che contiene l'asse del primo, dove ha per piano tangente quel piano del fascio di prima classe, corrispondente al piano comune ai due fasci diverso dal piano unito (\*\*).*

*Il cono generato da due fasci proiettivi di raggi di primo e di secondo ordine di una stessa stella aventi un raggio unito, si compone di questo raggio e di un cono di secondo grado che è bitangente al cono base del secondo fascio ed è tangente al piano del primo nel raggio, del fascio di primo ordine, corrispondente al raggio comune ai due fasci diverso dal raggio unito.*

6. Se la proiettività fra' due fasci (a) (b) è tale che tutt' e due i raggi comuni ai due fasci corrispondano ciascuno a sè stesso, cioè siano due raggi uniti  $u_1, u_2$ , la  $K^3$  si spezza nei due raggi  $u_1, u_2$  e in una retta  $K^1$  la quale è anch'essa un raggio di (b).

Estendendo la definizione di forme prospettive a due forme elementari proiettive di primo e di secondo grado di cui due elementi corrispondenti variabili determinino l'elemento variabile di una forma elementare di primo grado, possiamo dire che :

(\*) Cremona, El. di Geom. proj. n. 145 e 152.

(\*\*) Cfr. Reye l. c. pag. 112.

Due fasci proiettivi di raggi di prima e di seconda classe in uno stesso piano se hanno due raggi unili sono prospettivi e l'asse di prospettiva è un raggio del secondo fascio (\*).

Due punteggiate proiettive di primo e di secondo ordine in uno stesso piano se hanno due punti unili sono prospettive e il centro di prospettiva è un punto della seconda punteggiata (\*).

Due fasci proiettivi di piani di prima e di seconda classe in una stessa stella se hanno due piani unili sono prospettivi e il piano di prospettiva è un elemento del secondo fascio.

Due fasci proiettivi di raggi di primo e di secondo ordine in una stessa stella se hanno due raggi unili sono prospettivi e l'asse di prospettiva è un raggio del secondo fascio.

---

(\*) Cfr. Reye l. c. pag. 110.

# SULL' N-AGONO INSCRITTO ISOCLINO

IN UN N-AGONO PIANO SEMPLICE DATO

PEL

Dott. LUIGI CERTO.

Mi proposi questo studio nello stesso tempo dell'altro correlativo, di cui diedi brevissimo cenno in questo Giornale, vol. XXIII. E stavo per pubblicarlo, quando mi accorsi che intorno al principale oggetto di esso s'era fermato lo Steiner (\*), e che recentemente Rudolf Sturm (\*\*\*) aveva ampiamente illustrato quel luogo della trattazione di Steiner. La lettura di questi lavori mi riconsigliano vie meglio la pubblicazione integrale del mio.

I.

1. È facile risolvere elementarmente il problema :

Dati ad arbitrio in un piano due punti  $A'_n, A''_n$  e un  $(n-1)$ -latero semplice  $a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1}$ , costruire una linea poligonale  $A'_n A_1 A_2 \dots A_{n-2} A_{n-1} A''_n$  inscritta isoclina nel dato poligono, cioè tale che il suo vertice  $A_i$  sia sopra la retta  $a_i$ , e le direzioni  $A_i A_{i-1}, A_i A_{i+1}$ , dei suoi due lati che in  $a_i$  si incontrano, formino angoli eguali opposti con una stessa direzione o rispettivamente con le due direzioni di  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-2, n-1$ ).

Infatti basta costruire il gruppo di punti  $P_1 P_2 \dots P_{n-2} P_{n-1}$ , di cui  $P_1$  sia il simmetrico di  $A'_n$  rispetto ad  $a_1$ , e  $P_i$  sia il simmetrico di  $P_{i-1}$  rispetto ad  $a_i$

(\*) Nei numeri 63, 64 della prima delle sue due memorie : *Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt*, pubblicata, tradotta in francese, nel Giornale di Liouville, vol. VI, e nel Giornale di Crelle, vol. XXIV, e, in originale, nelle sue *Gesammelte Werke*, vol. II.

(\*\*) Nella seconda parte delle *Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätze über Maximum und Minimum*, Journal f. d. reine u. angewandte Math., Bd. 96.

( $i = 2, 3, \dots, n-2, n-1$ ); quindi costruire il gruppo di punti  $A_{n-1} A_{n-2} \dots A_2 A_1$ , in modo che sia  $A_{n-1} \equiv A'_n P_{n-1} a_{n-1}$ , e sia  $A_i \equiv A_{i+1} P_i a_i$  ( $i = n-2, n-3, \dots, 2, 1$ ).

Il problema è determinato e di primo grado (\*).

La stessa linea poligonale inscritta isoclina può ottenersi costruendo il gruppo di punti  $Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_2 Q_1$ , in modo che  $Q_{n-1}$  sia il simmetrico di  $A'_n$  rispetto ad  $a_{n-1}$ , e  $Q_i$  sia il simmetrico di  $Q_{i+1}$  rispetto ad  $a_i$  ( $i = n-2, n-3, \dots, 2, 1$ ); quindi costruendo il gruppo  $A_1 A_2 \dots A_{n-2} A_{n-1}$  in modo che sia  $A_1 \equiv A'_n Q_1 a_1$ , e sia  $A_i \equiv A_{i-1} Q_i a_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-2, n-1$ ).

Se si costruiscono entrambi i gruppi di punti (P) e (Q), la linea poligonale richiesta è formata dalle rette  $A'_n Q_1 P_1 Q_2 P_2 Q_3 \dots P_{n-2} Q_{n-1} P_{n-1} A'_n$  prese nell'ordine in cui sono scritte.

2. Se i segmenti  $A'_n A_1 A_1 A_2 A_2 A_3 \dots$ , lati in senso stretto della linea poligonale ora costruita, si fanno coincidere successivamente, il primo colla sua immagine rispetto ad  $a_1$ , sulla retta  $P_1 A_1$ ; questa immagine e il secondo colle loro immagini rispetto ad  $a_2$ , sulla  $P_2 A_2$ ; queste due immagini e il terzo colle loro immagini rispetto ad  $a_3$ , sulla  $P_3 A_3$ ; ecc.: si troveranno in ultimo trasportati tutti quei lati sulla retta  $P_{n-1} A'_n$ , in modo che ciascuno sarà adiacente al precedente e che, considerati come segmenti relativi (\*\*), avranno per somma il segmento  $P_{n-1} A'_n$ . Per comporre questa somma, si deve (partendo con un segno arbitrario pel primo lato) prendere ciascuno degli altri lati con lo stesso segno del precedente ovvero col segno opposto, secondo che sia riflesso ovvero rifratto, cioè secondo che stia col precedente dalla stessa banda o da bande opposte della retta  $a_i$  sulla quale s'incontrano (\*\*\*)).

(\*) Cfr. Baltzer, *Elem. der Math., Planim.*, 1883, § 6. 12: Steiner. m. c., 63, III, C, 3.<sup>o</sup>

Il problema: Descrivere il cammino che deve seguire in un biliardo una palla d'avorio, affinchè partendo da un punto dato venga a passare per un altro punto dato, dopo avere urtati alcuni lati assegnati del contorno supposto poligonale (Sannia e D'Ovidio *Elem. di Geom.*, 1886, prob. 12 degli Es. in fine del lib. 2.<sup>o</sup>); ovvero, che torna lo stesso: Descrivere il cammino che deve percorrere un raggio luminoso, che parta da un dato punto di una stanza prismatica di specchi (secondo una direzione contenuta nel piano condotto per quel punto perpendicolarmente agli spigoli laterali del prisma), e che si rifletta in determinate pareti della stanza, affinchè pervenga ad un altro punto dato in quel piano; è un caso particolare del nostro, e ha delle condizioni in più da soddisfare, derivanti dalle particolari condizioni fisiche, sicchè non è sempre possibile.

(\*\*) Stolz, *Vorles. u. Allg. Arith.* I. Teil, 1885, V. Abschn., 7; Baltzer, op. c., § 14, 1.

(\*\*\*) Steiner, m. c., 63, III, A; Sturm, m. c., §§ 19, 21 e 23.

Se si verifica sempre la prima ipotesi, la grandezza assoluta della somma sarà eguale alla somma delle grandezze assolute dei lati, cioè sarà il perimetro della linea poligonale nel significato ordinario.

Facendo, in ordine inverso, la analoga riduzione di quei lati sulla retta  $Q_1 A'_n$ , si ottiene la stessa somma, cioè il segmento  $A'_n Q_1$  sarà eguale al segmento  $P_{n-1} A''_n$ ; perchè la punteggiata descritta dai lati ridotti sulla retta  $A'_n Q_1$  è eguale a quella descritta sulla retta  $P_{n-1} A''_n$ .

Chiameremo, in tutt'i casi, *perimetro della linea poligonale inscritta isoclina* un segmento eguale a ciascuno dei segmenti  $P_{n-1} A''_n$   $A'_n Q_1$ , assolutamente considerati.

Per ogni altra linea poligonale inscritta nell'  $(n-1)$ -latero e terminata ai punti  $A'_n$   $A''_n$  non ha luogo la nozione del segno nei lati, perchè, mediante le successive operazioni descritte innanzi, questi non si ridurranno sopra una stessa retta, ma formeranno un contorno poligonale che avrà gli stessi termini del segmento  $P_{n-1} A''_n$  ovvero  $A'_n Q_1$ ; siamo dunque indotti a considerare questi lati come un gruppo di segmenti assoluti, e a dare al perimetro il significato ordinario di somma di lati assolutamente presi. E si ha il teorema:

*Fra le linee poligonali che terminano agli stessi due punti e sono inscritte nell'  $(n-1)$ -latero, la isoclina è quella di più piccolo perimetro.*

II.

3. Proponiamoci adesso il problema (\*):

*Dato un n-agono piano semplice arbitrario, costruirne un altro inscritto isoclino nel primo, cioè tale che abbia ciascun vertice ordinatamente sopra ciascun lato (retta) del primo, e abbia ciascuna coppia di lati consecutivi egualmente inclinati a quel lato del primo sul quale s'incontrano (vedi § 1).*

Chiamiamo  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$  le rette e  $V_1 V_2 \dots V_{n-1} V_n$  i punti costituenti i lati e i vertici del dato poligono, in modo che sia  $a_i \equiv V_i V_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Di una retta  $r'_n$  del piano si costruisca la simmetrica  $r_1$  rispetto ad  $a_1$ ; della retta  $r_1$  si costruisca la retta  $r_2$  simmetrica rispetto ad  $a_2$ ; ecc.; e finalmente della retta  $r_{n-1}$  si costruisca la retta  $r''_n$  simmetrica rispetto ad  $a_n$ .

I piani rigati sovrapposti

$$(r'_n) (r_1) (r_2) \dots (r_{n-1}) (r''_n)$$

(\*) Dal quale dipende l'altro:

Tracciare in un bigliardo di contorno poligonale arbitrario il cammino che deve percorrere una palla urtando in assegnate sponde con dato ordine, affinchè la palla stessa lo possa seguire perennemente. Un analogo quesito può farsi circa il cammino d'un raggio luminoso, ecc. (§ 1, nota).

descritti rispettivamente dalle rette  $r'_n, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r''_n$ , al variare della prima nel piano dato, sono, cominciando dal secondo, ciascuno simmetrico del precedente rispetto agli assi  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ .

Dunque secondo che  $n$  è dispari o pari i piani rigati ( $r'_n$ ) ( $r''_n$ ) sono eguali opposti o eguali direttamente (\*).

Nel primo caso vi è in generale una sola retta unita  $r_n$ , oltre la retta all'infinito. Perchè la rete di coniche, i cui punti basi sono i punti uniti (\*\*), è composta delle iperboli equilatera che hanno un assintoto in comune (\*\*); e quindi due dei tre punti uniti cadono nel punto all'infinito di questo assintoto, il terzo è il punto all'infinito comune agli altri assintoti; e delle tre rette unite una è quel primo assintoto, le altre due coincidono con la retta all'infinito (\*\*\*).

Quando si parta da questa retta unita  $r_n$  come retta  $r'_n$ , e solo allora, sarà

$$r''_n \equiv r'_n;$$

e quindi l' $n$ -latero semplice che ne risulta, costituito dalle rette  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ , prese in questo ordine, è l'unico  $n$ -latero inscritto isocline al dato.

Per costruire la retta  $r_n$  basta trovare di due punti  $M', N'$  del piano ( $r'_n$ ) i corrispondenti punti  $M'', N''$  del piano ( $r''_n$ ); la retta congiungente i centri dei segmenti  $M' M'' N' N''$  sarà la richiesta  $r_n$ .

Nel secondo caso non v'è in generale nessuna retta unita reale, oltre la retta all'infinito. Perchè la rete di coniche, i cui punti basi sono i punti uniti, è composta dei cerchi che passano per uno stesso punto reale al finito; e quindi i tre punti uniti sono questo punto e i due punti ciclici immaginari all'infinito del pia-

(\*) Cfr., anche per ciò che segue in questo §, Felix Klein, *U. sogenannte Nicht-Euklid. Geom.*, §§ 9 e 13, *Mathem. Ann.* IV.

(\*\*) Staudt, *Geom. der Lage*, n° 294 e *Beitrage sur Geom. der Lage*, numeri 188, 301; Chasles, *Mém. de Géom. in seguito all'Apérçu historique*, n. 483.

(\*\*\*) Chasles, *Propr. rel. au déplac. fini etc.*, n° 42, 1°. *Comptes rendus*, t. 51.

(\*\*\*\*) Cfr. Schell. *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, 1879-80, II. T., Cap. I., § 7; Baltzer, op. c., § 7, 4, e anche § 12, 6 (dove la simiglianza si riduca ad eguaglianza); Sannia e D'Ovidio, op. c., § 110; Magnus, *Aufg. und. Lehrs. aus der anal. Geom.*, § 18; Chasles, ultima m. c., n° 36, 3° e n° 45. In questo ultimo numero v'è una inesattezza, non corretta nè osservata da Brisse nella sua riproduzione illustrata (*Journal de Liouville* 1874-75) della memoria di Chasles, cioè l'asserzione che per due figure eguali inversamente uno dei due punti uniti è all'infinito; infatti abbiamo visto sopra che invece tutt'e due i punti uniti sono all'infinito.

no: e le tre rette unite sono le rette immaginarie che congiungono il primo punto con gli altri due, e la retta all'infinito, congiungente questi due (\*).

Dunque quando  $n$  è pari in generale non v'è nessuno  $n$ -latero inscritto isocli-no. Ma se in particolare i piani rigati ( $r'_n$ ) ( $r''_n$ ) risultano omologici affini ed omo-tetici, se, in altri termini, hanno parallele (direttamente) le rette corrispondenti (che avviene quando  $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$  (§ 4)), vi ha infinite rette unite  $r_n$ , e sono i raggi paralleli che escono dal centro dell'omologia. Quindi in questo caso particolare vi sono infiniti  $n$ -lateri inscritti isoclini al dato, e son tali che i lati di uno sono paralleli rispettivamente ai lati di un altro qualunque di essi. Una di queste infinite rette  $r_n$  si costruisce congiungendo due punti omo-loghi  $M' M''$  dei piani ( $r'_n$ ) ( $r''_n$ ) (\*\*).

OSSEVAZIONE. Per tutti e due i sopra trattati casi che esista un  $n$ -agono in-scritto isocli-no  $r_1 r_2 \dots r_n \equiv A_1 A_2 \dots A_n$ , dove è  $r_i \equiv A_i A_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), è condizione necessaria che in esso vi sia un numero pari di coppie di lati (segmenti) successivi  $A_{i-1} A_i A_i A_{i+1}$  posti da bande opposte della retta  $a_i$  sulla quale si in-contrano. Perchè risulta dal nostro ragionamento che, fissando una direzione sopra quella retta  $r'_n$  con cui si deve partire per costruirlo, è necessario che, in entrambi i casi, la direzione corrispondente che si ottiene sulla  $r''_n$ , coincida con la dire-zione scelta sulla  $r'_n$ ; è necessario cioè che queste due direzioni costituiscano una sola direzione  $A_n A_1$ , ovvero  $A_1 A_n$ , del lato  $r_n$ . E perchè percorrendo il contorno dell' $n$ -agono inscritto isocli-no in un determinato verso, le direzioni secondo cui si cammina sopra due lati (segmenti) successivi saranno fra loro simmetriche ov-vero l'una opposta alla simmetrica dell'altra, rispetto al lato dell' $n$ -agono dato sul quale si segano, secondo che quei due lati sono dalla stessa banda o da bande opposte di quest'ultimo (cfr. § 2).

Sicchè considerando l' $n$ -agono inscritto isocli-no come una linea poligonale inscritta isocli-na nell' $(n-1)$ -latero  $a_{i+1} a_{i+2} \dots a_{i-1} a_{i-1}$  e avente i termini coinci-denti nel vertice  $A_i$ , il perimetro (nel significato speciale del § 2) di questa linea è costante, al variare di  $i$  da 1 ad  $n$ ; e però possiamo d'ora innanzi intendere per *perimetro dell' $n$ -agono inscritto isocli-no* il perimetro di una di queste  $n$  linee poligonali ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Per un  $n$ -agono inscritto arbitrario, nell' $n$ -agono dato, la condizione su detta non è necessaria, e però non si può che ritenere per esso la definizione ordinaria di perimetro, somma di lati (segmenti) assolutamente considerati, se non si vuol dare un significato ambiguo a questa parola.

(\*) Schell, l. c. §§ 4 e 5; Baltzer, op. c., § 7, 2 e 3, e anche § 12, 5 (riducendo la simiglianza a eguaglianza); Sannia e D'Ovidio, l. c.; Euler *Nov. Act. Petrop.*, 9, p. 154; Magnus, l. c.; Chasles, m. c., numeri 1, 7, 45.

(\*\*) Cfr. questo § con la mia nota *Sui poligoni piani semplici*, Giornale di Bat-taglini, vol. XXIII.

4. Chiamiamo  $\alpha_i$  l'angolo positivo  $V_i V_{i-1} \hat{V}_i V_{i+1}$  del poligono dato, che ha il vertice in  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$ ). Fissiamo una direzione sopra  $r'_n$ , indicandola con questa stessa lettera, e chiamiamo  $\beta$  l'angolo positivo che essa fa con la direzione  $V_1 V_n$  di  $\alpha_n$ , cioè poniamo

$$r'_n \hat{V}_1 V_n = \beta.$$

Chiamiamo con  $r_1$  la direzione simmetrica della direzione  $r'_n$  rispetto ad  $\alpha_1$ ; con  $r_2$  la direzione simmetrica di  $r_1$  rispetto ad  $\alpha_2$ ; ecc. Avremo le seguenti eguaglianze di angoli:

$$\begin{aligned} r'_n \hat{V}_1 V_2 = V_1 V_2 \hat{r}_1 &= r'_n \hat{V}_1 V_n + V_1 V_n \hat{V}_1 V_2 \\ &= \beta + \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 \hat{V}_2 V_3 = V_2 V_3 \hat{r}_2 &= r_1 \hat{V}_2 V_1 + V_2 V_1 \hat{V}_2 V_3 \\ &= \pi - \beta - \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 \hat{V}_3 V_4 = V_3 V_4 \hat{r}_3 &= r_2 \hat{V}_3 V_2 + V_3 V_2 \hat{V}_3 V_4 \\ &= \beta + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 \hat{V}_4 V_5 = V_4 V_5 \hat{r}_4 &= r_3 \hat{V}_4 V_3 + V_4 V_3 \hat{V}_4 V_5 \\ &= \pi - \beta - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_n V_1 \hat{r}''_n &= \beta + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots + \alpha_n \quad (n \text{ dispari}), \\ &= \pi - \beta - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + \alpha_n \quad (n \text{ pari}). \end{aligned}$$

Nel caso che  $n$  sia pari, quando è inoltre

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0,$$



6. Sulla retta  $a_n$  si prenda un punto  $A_n$ , e assumendolo come un punto  $A'_n$  e come punto  $A''_n$  insieme, costruiscansi i gruppi di punti (P) (Q) (A) relativi all'  $(n-1)$ -latero  $a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1}$  (§ 1). La linea poligonale  $A_n A_1 A_2 \dots A_{n-2} A_{n-1} A_n$  sarà inscritta isoclina a questo  $(n-1)$ -latero. E perchè essa possa costituire un  $n$ -agono inscritto isoclino (§ 3) nell' $n$ -latero dato è necessario e basta che la retta  $A_1 A_n$ , che già passa pel punto  $Q_1$ , passi anche pel punto  $P_n$  simmetrico di  $P_{n-1}$  rispetto ad  $a_n$ ; cioè che i segmenti  $Q_1 A_n A_n P_n$ , eguali al perimetro della linea poligonale (§ 2), sieno sopra una stessa retta. Ed anche è necessario e basta che la retta  $A_{n-1} A_n$ , che già contiene il punto  $P_{n-1}$ , contenga il punto  $Q_n$  simmetrico di  $Q_1$  rispetto ad  $a_n$ ; cioè che i segmenti  $P_{n-1} A_n A_n Q_n$ , eguali al perimetro della linea poligonale, sieno sopra una stessa retta.

7. Se  $n$  è dispari, le direzioni  $p_n q_1$  sono direttamente parallele (§ 5); e però facendo muovere il punto  $A_n$  sulla  $a_n$  nella direzione  $V_1 V_n$ , i punti  $P_n Q_1$  descrivono due punteggiate direttamente eguali sulle  $p_n q_1$  rispettivamente; e quindi i segmenti  $P_n Q_1$ , terminati dalle coppie di punti omologhi di queste punteggiate, sono fra loro equipollenti.

Supposto costruito, come nel § 3, il poligono  $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n \equiv r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n$  inscritto isoclino al dato, il suo vertice  $A_n$  dovrà essere centro di quello dei segmenti  $P_n Q_1$  sul quale sarà situato (§ 6); e tutt'i segmenti equipollenti  $P_n Q_1$  saranno quindi eguali al doppio del perimetro di questo poligono inscritto isoclino costruito (§ 3, Oss.).

Si abbia ora un  $n$ -agono  $A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A'_n$  inscritto nel dato, diverso dall'isoclino, ma del resto arbitrario. E costruiamo la linea poligonale  $A'_n A''_1 A''_2 \dots A''_{n-1} A'_n$  inscritta isoclina all'  $(n-1)$ -latero  $a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1}$ , e i cui termini coincidano in  $A'_n$  (§ 1). Si avrà (§ 2) perimetro  $A'_n A''_1 A''_2 \dots A''_{n-1} A'_n <$  perimetro  $A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A'_n$ .

Se i punti dei gruppi (P) (Q) che son serviti a costruire il poligono  $A'_1 A''_2 \dots A''_{n-1} A'_n$  si indicano con

$$P'_1 P'_2 \dots P'_{n-1} P'_n \quad Q'_{n-1} Q'_{n-2} \dots Q'_1 Q'_n .$$

si avrà

$$\text{perimetro } A'_n A''_1 A''_2 \dots A''_{n-1} A'_n = P'_n A'_n = A'_n Q'_1 .$$

Ma poichè il punto  $A'_n$  è fuori la retta  $P'_n Q'_1$ , si ha ancora

$$P'_n Q'_1 < P'_n A'_n + A'_n Q'_1 ,$$

cioè, dividendo per 2,

$$\text{perimetro } A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n < \text{perimetro } A'_n A''_1 A''_2 \dots A''_{n-1} A'_n .$$

Quindi a più forte ragione è

www.libtool.com.cn

$$\text{perimetro } A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n < \text{perimetro } A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A'_n.$$

Dunque :

\* In un n-agono semplice di un numero dispari di lati vi è sempre uno ma un solo n-agono semplice inscritto isocli-no, il quale è l'n-agono inscritto di più piccolo perimetro (\*).

8. Quando il numero n dei lati  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$  del poligono dato è pari, abbiamo visto (§ 3) che in generale non v'è nessun n-agono inscritto isocli-no in quel poligono. Le direzioni  $p_n q_1$  formano allora con la retta  $a_n$  un triangolo iso-scele di cui la base è su questa retta (§ 5); e considerazioni analoghe a quelle del § precedente non possono aver luogo, se non che nel caso particolare che le direzioni  $p_n q_1$  sieno direttamente parallele alla direzione  $V_1 V_n$ , che sia, cioè,

$$p_n \hat{V}_n V_1 = V_n V_1 \hat{q}_1 = \pi,$$

per il che è condizione necessaria e sufficiente che sia

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0.$$

In questo caso abbiamo già assodato (§§ 3 e 4) che vi sono infiniti n-agoni inscritti isoclini; ed è facile poi convincersi che preso un punto  $A_n$  sulla  $a_n$  e co-struita col solito metodo la linea poligonale  $A_n A_1 A_2 \dots A_{n-2} A_{n-1} A_n$  inscritta iso-clina all'(n-1)-latero  $a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1}$  e coi termini coincidenti in  $A_n$ , questa è per l'appunto quell'n-agono inscritto isocli-no al dato che ha per vertice sulla  $a_n$  il punto scelto  $A_n$ .

Se

$$P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n \quad Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_1 Q_n$$

sono i gruppi di punti che son serviti a costruire questa linea poligonale, il punto  $A_n$  dovrà essere il centro del segmento  $P_n Q_1$ , e dovrà essere (§ 2 e § 3, Oss.)

$$\text{perimetro } A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n = P_n A_n = A_n Q_1.$$

Facendo muovere  $A_n$  sulla  $a_n$ , il segmento  $P_n Q_1$  si muoverà mantenendosi

(\*) Cfr. questo e il seguente § coi §§ 25, 26 e 27 della m. c. di Sturm. Ivi il punto  $\mathfrak{B}_1^{(m)}$  è quello stesso che io chiamo  $Q_1$ , nel seguente § 15.

equipollente a sè stesso e conservando come centro il punto  $A_n$ . Quindi i perimetri degli infiniti  $n$ -agoni inscritti isoclini al dato sono tutti fra loro eguali, perchè tutti eguali alla metà del segmento costante  $P_n Q_1$ .

Ogni altro  $n$ -agono  $A'_1, A'_2 \dots A'_{n-1}, A_n$  inscritto nel dato ha un perimetro maggiore del perimetro dell' $n$ -agono  $A_1, A_2 \dots A_{n-1}, A_n$  inscritto isocli-no, avente in comune con quello il vertice  $A_n$  sulla  $a_n$ , o quindi anche maggiore del perimetro di ogni  $n$ -agono inscritto isocli-no. Dunque :

*In un  $n$ -agono semplice di un numero pari di lati o non v'è nessun  $n$ -agono semplice inscritto isocli-no, ovvero ve ne sono infiniti, i quali hanno i perimetri fra loro eguali e più piccoli del perimetro di ogni altro  $n$ -agono semplice inscritto.*

Siccome i contorni di questi  $n$ -agoni inscritti isoclini sono anche paralleli (§ 3), si potrebbe dire che essi sono equipollenti.

Perchè si verifichi la seconda parte del teorema ora enunciato, il poligono dato deve soddisfare ad una sola condizione elementare, la quale fa dipendere la direzione di una delle  $n$  rette  $a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n$  dalle altre rette scelte arbitrariamente.

### III.

9. Dato un  $n$ -agono semplice qualunque, può darsi uno di questi tre casi :

a) Nell' $n$ -agono inscritto isocli-no ( $n$  dispari), ovvero in uno degli  $n$ -agoni inscritti isoclini al dato ( $n$  pari), ciascuna coppia di lati (segmenti) successivi sono dalla stessa banda del lato di questo sul quale si incontrano ;

b) Questa proprietà non ha luogo nell'unico  $n$ -agono inscritto isocli-no ( $n$  dispari) ovvero in nessuno degli  $n$ -agoni inscritti isoclini ( $n$  pari) ;

c) Non vi è nessun  $n$ -agono inscritto isocli-no ( $n$  pari).

Nei casi a) e b) il perimetro dell' $n$ -agono inscritto isocli-no è un segmento più piccolo del perimetro d'un  $n$ -agono inscritto qualunque. Ma in a), appunto perchè il primo perimetro si riduce anch'esso a un perimetro nel significato ordinario, come è il secondo, acquista il carattere di un minimo, ovvero di limite inferiore a cui si approssima indefinitamente il secondo perimetro, a misura che i vertici del poligono inscritto arbitrario si muovono, indefinitamente avvicinandosi ai vertici del poligono inscritto isocli-no.

Questo carattere di limite manca in b), perchè ivi è una sostanziale differenza tra il significato speciale del primo perimetro e il significato ordinario del secondo.

Ci si può domandare qual sia, nei casi b) e c), l' $n$ -agono inscritto che sostituisce l' $n$ -agono inscritto isocli-no del caso a), in quanto alla proprietà notata del minimo. Ecco ciò che ci limiteremo a rispondere in generale :

Nei casi b) e c) il minimo del perimetro d' un  $n$ -agono inscritto variabile non può essere il perimetro di un  $n$ -agono proprio inscritto; può quindi soltanto essere il perimetro di un  $n$ -agono degenerato, in un  $m$ -agono ( $m < n$ ), in quanto che abbia o delle coppie di lati successivi posti sopra una stessa retta, ovvero delle coppie di vertici successivi coincidenti tra loro, e per conseguenza coincidenti con un vertice dell'  $n$ -agono dato, ovvero l'una e l'altra cosa insieme.

Infatti nel caso b) il minimo in discorso non può essere il perimetro, nel senso ordinario, dell'  $n$ -agono inscritto isoclino ( $n$  dispari), ovvero d' uno degli  $n$ -agoni inscritti isoclini ( $n$  pari); imperocchè, se in entrambi i casi indichiamo al solito con  $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$  l'  $n$ -agono inscritto isoclino, in questo vi sarà almeno una coppia di lati consecutivi  $A_r A_{r+1} A_{r+1} A_{r+2}$  situati da bande opposte del lato  $a_{r+1}$  dell'  $n$ -agono dato; e ciascuno degli infiniti punti di  $a_{r+1}$  compresi tra  $A_{r+1}$  e il punto  $A'_{r+1} \equiv a_{r+1} \cdot A_r A_{r+2}$ , e anche di altri infiniti al di là di  $A'_{r+1}$ , darà la somma delle sue distanze da  $A_r$  e da  $A_{r+2}$  minore di  $A_r A_{r+1} + A_{r+1} A_{r+2}$ .

In tutti e due i casi b) e c) poi, se poniamo che esista un  $n$ -agono proprio  $A'_1 A'_2 \dots A'_{n+1} A'_n$  inscritto (non isoclino, nel caso b)) il cui perimetro sia quel minimo, vi sarà certamente in esso almeno una terna di vertici successivi  $A'_r A'_{r+1} A'_{r+2}$ , rispettivamente sui lati  $a_r a_{r+1} a_{r+2}$ , tali che le rette  $A'_r A'_{r+1} A'_{r+1} A'_{r+2}$  non sieno egualmente inclinate al lato  $a_{r+1}$ . Quindi si avrebbe, contro l'ipotesi, un  $n$ -agono inscritto di perimetro più piccolo che il perimetro di  $A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A'_n$ , col sostituire al vertice  $A'_{r+1}$  uno degli infiniti punti di  $a_{r+1}$  che vanno da  $A'_{r+1}$  al punto  $A''_{r+1} \equiv a_{r+1} \cdot A'_r A'_{r+2}$  (se i punti  $A'_r A'_{r+2}$  sono da bande opposte di  $a_{r+1}$ ), ovvero al punto  $A''_{r+1}$  tale che le direzioni  $A'_{r+1} A'_r A''_{r+1} A'_{r+2}$  facciano angoli eguali opposti rispettivamente con le due direzioni di  $a_{r+1}$  (se i punti  $A'_r A'_{r+2}$  sono dalla stessa banda di  $a_{r+1}$ ). E si contraddice all'ipotesi anche sostituendo al vertice  $A'_{r+1}$  uno di infiniti altri punti posti sopra  $a_{r+1}$  al di là di  $A''_{r+1}$ .

10. Volendo limitarci a considerare i soli  $n$ -agoni inscritti (in senso stretto) che hanno i vertici sui lati in senso stretto dell'  $n$ -agono dato, dovremo suddividere il caso a) nei due seguenti:

a') L'  $n$ -agono inscritto isoclino ( $n$  dispari) o uno degli  $n$ -agoni inscritti isoclini ( $n$  pari), oltre a soddisfare la condizione a), ha anch'esso tutt' i vertici interni ai lati (segmenti) corrispondenti dell'  $n$ -agono dato;

a'') Questa seconda condizione non è soddisfatta (\*).

---

(\*) La osservazione di Sturm, a principio del § 28 della m. c., è erronea, in quanto che la condizione aggiunta in a') non è, in generale, nè necessaria nè sufficiente perchè si abbia il caso a). Non solo, infatti, vi sono  $n$ -agoni inscritti isoclini che pur soddisfacendo a quella condizione a') non hanno la proprietà a); vero è, allora naturalmente l'  $n$ -agono dato sarà concavo; ma vi sono ancora  $n$ -agoni inscritti

Ed allora il minimo del perimetro del poligono variabile inscritto in senso stretto è soltanto nel caso  $a'$ ) rappresentato dal perimetro dell' $n$ -agono inscritto isocliino, mentre nei casi  $a''$ )  $b$ )  $c$ ) non può essere che il perimetro di un  $n$ -agono degenerato.

11. Per ogni assegnato valore di  $n$  la ricerca effettiva dell' $n$ -agono limite degenerato, nei casi  $b$ )  $c$ ) quando si tratti di  $n$ -agono variabile inscritto in senso generale (§ 9), e nei casi  $a''$ )  $b$ )  $c$ ) quando di  $n$ -agono inscritto in senso stretto (§ 10), è, ch'io creda, molto complicata; richiede si classifichino opportunamente i diversi  $n$ -agoni che possono esser dati, e si studii ciascuna classe ordinaratamente; e se ne può vedere un esempio nei §§ dal 28 al 33 della m. di Sturm, dove la ricerca è fatta semplicemente per l' $n$ -agono variabile inscritto in senso stretto, in un dato triangolo ottusangolo ( $n = 3$ , caso  $b$ )), ovvero in un quadrangolo convesso ( $n$ -agono dato convesso,  $n = 4$ ; casi  $a''$ )  $b$ )  $c$ )).

Quando l' $n$ -agono dato è un triangolo, si è nel caso  $a'$ ), soltanto allorchè il triangolo è acutangolo (\*); si è invece nel caso  $b$ ) allorchè è ottusangolo; altri casi non possono darsi.

E per un quadrangolo, si è nel caso  $a'$ ), soltanto allorchè è convesso e inscritto in un cerchio di centro interno al quadrangolo stesso (\*\*).

IV.

12. La soluzione del problema del § 3 può presentarsi sotto la forma seguente:

Di un punto  $A_n$  di  $a_n$  costruiscono i corrispondenti gruppi (P) (Q) (A) come nel § 6. Se il punto  $A_n$  descrive la punteggiata  $(A_n)$  sulla  $a_n$ , i punti  $P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n$  descrivono rispettivamente, sulle rette  $p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n$  (§ 5), altrettante punteggiate eguali alla punteggiata  $(A_n)$ .

isoclini che non soddisfano alla stessa condizione  $a'$ ), e pure hanno la proprietà  $a$ ); e qui l' $n$ -agono dato può essere anche convesso, e se ne ha un esempio nel quadrangolo  $A B C D$ , fig. 6 della stessa m. di Sturm, § 29, caso  $c$ ).

(\*) Cfr. Sturm, m. c., § 20; Steiner, m. c., 64, II, 3.<sup>o</sup>, e Anm. 8) in fine delle gesamm. Werke. Il teorema relativo a questo caso fu enunciato da Fagnano juniore (Eruditorum Diarii, t. I, 1775, prob. IV, art. VIII); ma la dimostrazione ivi data e quella accennata da Baltzer (op. c., § 6, 12) hanno il solito difetto, dal quale nemmeno Steiner fu sempre immune (vedi Sturm, m. c., §§ 1, 2 e 25). La dimostrazione analitica che si trova in Schloemilch (*Uebungsbuch z. Stud. d. hoeheren Analysis*, I. Teil, 1878, § 32. 10) e in Frenet (*Recueil d'ex. sur le Cal. Inf.*, 1882, Ex. 223), vale (vedi in fine della Oss. del § 3) per questo solo caso del triangolo acutangolo, sebbene ivi non sia fatta una tale restrizione.

(\*\*) Sturm, m. c., § 28.

La retta  $A_n P_{n-1}$  varia in un fascio parabolico di 2ª classe (involupante cioè una parabola) del quale fanno parte i raggi  $a_n p_{n-1}$  (\*).

Quindi le rette

$$A_n P_{n-1} \ A_{n-1} P_{n-2} \ \dots \ A_2 P_1 \ A_1 A_n \equiv Q_1 A_n$$

variano in altrettanti fasci parabolici di 2ª classe, ciascuno simmetrico del seguente rispetto agli assi

$$a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_1$$

ordinatamente, e contenenti rispettivamente i raggi

$$p_{n-1} \ p_{n-2} \ \dots \ p_1 \ a_n.$$

Il fascio lineare di raggi paralleli  $(P_{n-1}, P_n)$ , e il fascio di 2ª classe  $(Q_1, A_n)$  descritto dalla retta  $Q_1 A_n$ , sono proiettivi ed hanno per raggio unito la retta all'infinito; quindi (\*\*) generano con la loro intersezione (oltre la retta all'infinito) una conica che passa pel centro (all'infinito) del fascio  $(P_{n-1}, P_n)$  e che è bitangente alla parabola involuppo del fascio  $(Q_1, A_n)$ ; e che però è una iperbole (\*), di cui un assintoto è il raggio del fascio  $(P_{n-1}, P_n)$  corrispondente al raggio al finito comune ai due fasci, e l'altro assintoto è parallelo alla  $p_n$ .

13. Allorchè  $n$  è dispari, questa iperbole sega la  $p_n$  in un sol punto  $P_n$  a distanza finita, il quale dà l'unica soluzione del problema.

Basta, infatti, per ottenerla, costruire, partendo da questo punto  $P_n$ , successivamente i punti corrispondenti

$$P_{n-1} \ P_{n-2} \ \dots \ P_2 \ P_1 \ A_n \ A_{n-1} \ \dots \ A_2 \ A_1.$$

Quando  $n$  è pari, il secondo assintoto della iperbole è  $p_n$ , e quindi la iperbole non sega la  $p_n$  in nessun punto al finito; sicchè non v'è nessuna soluzione. Ma nel caso particolare che  $\alpha_1 - \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$ , cioè che  $q_1$  e  $p_n$  sieno direttamente parallele alla direzione  $V_1 V_n$ , il fascio parabolico  $(Q_1, A_n)$  diventa lineare e di raggi paralleli anch'esso, e la intersezione propria dei due fasci  $(P_{n-1}, P_n)$   $(Q_1, A_n)$  si riduce alla retta  $p_n$  (§ 8). In questo caso adunque ogni punto  $P_n$  della  $p_n$  risolve il problema.

14. Allo stesso risultato si giunge riguardando le punteggiate che, al muo-

(\*) Cremona, *Elem. di Geom. proj.* 1873, n. 120.

(\*\*) § 5, della mia Nota *Sulle forme di 3.º grado generale*, ecc., vol. XXVI di questo Giornale.

(\*\*\*) Cremona, *op. c.*, n. 142.

vere di  $A_n$  sulla  $a_n$ , descrivono, sulle  $q_{n-1} q_{n-2} \dots q_1 q_n$ , rispettivamente i punti  $Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_1 Q_n$ ; ottenendosi così una seconda iperbole da segare con  $q_n$ ; ecc.

15. E come siam partiti dal lato  $a_n$ , possiamo partire da un altro lato qualunque  $a_i$ , per ottenere la stessa soluzione.

Chiamando con  $P_{rn}$  i punti  $P_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) che si costruirono nel § 13, e con  $Q_{rn}$  gli analoghi punti  $Q_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) cui si sarebbe giunti nel § 14; nel caso, s'intende, che questi punti vi sieno ( $n$  dispari, ovvero  $n$  pari e  $\alpha_1 - \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$ ); e chiamando in generale con  $P_{ri} Q_{ri}$  i punti  $P_r Q_r$  che si costruirebbero analogamente partendo dalla retta  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), invece che dalla particolare retta  $a_n$ , avremo il teorema:

Dato l' $n$ -latero  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$  ( $n$  dispari ovvero  $n$  pari e  $\alpha_1 - \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$ ) e costruiti i due gruppi di punti  $(P_{ri}) (Q_{ri})$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) relativi al lato  $a_i$ , i lati (rette) d'ordine dispari del  $2n$ -agono semplice

$$P_{i-1,i} Q_{ii} P_{i-2,i} Q_{i-1,i} \dots P_{i+1,i} Q_{i+2,i} P_{ii} Q_{i+1,i}$$

ovvero le rette diagonali principali nel  $2n$ -agono semplice

$$P_{i-1,i} P_{i-2,i} \dots P_{i+1,i} P_{ii} Q_{ii} Q_{i-1,i} \dots Q_{i+2,i} Q_{i+1,i},$$

prese nell'ordine che qui si presentano, determinano l' $n$ -agono  $A_i A_{i-1} A_{i-2} \dots A_{i+2} A_{i+1}$  inscritto isoclino al dato  $a_i a_{i-1} a_{i-2} \dots a_{i+2} a_{i+1}$ .

Difatti i lati

$$A_i A_{i-1} A_{i-1} A_{i-2} \dots A_{i+2} A_{i+1} A_{i+1} A_i$$

devono rispettivamente passare pei punti

$$P_{i-1,i} P_{i-2,i} \dots P_{i+1,i} P_{ii},$$

e anche rispettivamente per gli altri

$$Q_{ii} Q_{i-1,i} \dots Q_{i+2,i} Q_{i+1,i}.$$

Quando  $i$  varia da 1 ad  $n$ , i  $2n^2$  punti  $P$  e  $Q$  che si ottengono sono distribuiti a  $2n$  a  $2n$  sugli  $n$  lati del poligono inscritto isoclino.

$P$ . e. sono sopra il lato  $A_r A_{r+1}$  i punti

$$P_{r1} P_{r2} \dots P_{rn} Q_{r+1,1} Q_{r+1,2} \dots Q_{r+1,n}.$$

Il perimetro del poligono inscritto isoclino è eguale a ciascuno dei  $4n$  segmenti

$$A_i P_{ii} A_i Q_{ii} A_i P_{i-1,i} A_i Q_{i+1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

E nel caso che  $n$  sia dispari:

Il quadrangolo semplice  $P_{ii} P_{i-1,i} Q_{i+1,i} Q_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) è un rettangolo, di cui i lati son paralleli e perpendicolari ad  $a_i$ , il centro è  $A_i$  e quindi le semidiagonali sono eguali al perimetro suddetto. E il quadrilatero semplice  $P_{ii} P_{i-1,i} Q_{i+1,i} Q_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) è un rombo concentrico e circoscritto al rettangolo precedente e di cui una retta diagonale è  $a_i$ ; indicando con  $p_{rn} q_{rn}$  le rette contenenti le direzioni  $p_r q_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) del § 5, e in generale con  $p_{ri} q_{ri}$  le rette che si costruirebbero, analogamente alle precedenti, partendo dalla retta  $a_i \equiv V_{i+1} V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) invece che dalla particolare retta  $a_n \equiv V_1 V_n$ .

Se esprimiamo coi numeri

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n-1 \quad n$$

rispettivamente le grandezze relative (§ 2) dei segmenti

$$A_1 A_2 \quad A_2 A_3 \quad A_3 A_4 \quad \dots \quad A_{n-1} A_n \quad A_n A_1,$$

lati in senso stretto del poligono inscritto isoclino, la disposizione dei segmenti determinati dalle coppie di punti successivi in ciascuna delle punteggiate

$$P_{r1} P_{r2} \dots P_{rn} \quad A_r A_{r+1} \quad Q_{r+1,1} Q_{r+1,2} \dots Q_{r+1,n}$$

sui lati (rette)  $A_r A_{r+1}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) risulta dal quadro seguente :

|                            |   |               |                           |                     |
|----------------------------|---|---------------|---------------------------|---------------------|
| serie di segmenti sul lato | } | $A_1 A_2$     | 1 2 3 ... n - 1 n [1]     | 2 3 ... n - 1 n 1   |
|                            |   | $A_2 A_3$     | 2 3 ... n - 1 n 1 [2]     | 3 ... n - 1 n 1 2   |
|                            |   | $A_3 A_4$     | 3 ... n - 1 n 1 [3]       | ... n - 1 n 1 2 3   |
|                            |   | . . .         | . . . . .                 | . . . . .           |
|                            |   | $A_{n-1} A_n$ | n - 1 n 1 2 3 ... [n - 1] | n 1 2 3 ... n - 1   |
|                            |   | $A_n A_1$     | n 1 2 3 ... n - 1 [n]     | 1 2 3 ... n - 1 n ; |

dove le parentesi [ ] indicano che i segmenti 1 2 3 ... n - 1 n chiusi in esse sono i lati del poligono inscritto isoclino in grandezza e posizione; e la collocazione relativa delle serie mostra che la serie situata sul lato  $A_i A_{i+1}$ , si ottiene da quella sul lato precedente  $A_{i-1} A_i$ , sopprimendo in questa il primo segmento  $i - 1$ , ponendovi, adiacente all'ultimo segmento  $i - 1$ , il segmento  $i$ , e quindi prendendo della serie così modificata la serie simmetrica rispetto ad  $a_i$ .





teorema di Tchébychev. E vediamo altresì come non sia necessario che ciascuna funzione cresca o decresca costantemente nell'intervallo considerato.

Osserviamo che, dette rispettivamente  $u$  e  $v$  le variazioni subite dalle funzioni  $U$  e  $V$  lungo l'intervallo  $01$ , si ha

$$0 < u_j - u_i < u, \quad (i < j),$$

secondo che  $U$  cresce o decresce. Dunque

$$0 < (u_i - u_j)(v_i - v_j) < uv,$$

secondo che  $U$  e  $V$  variano o no nel medesimo senso. Ne segue, nelle stesse ipotesi,

$$0 < \lim \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i,j}^n (u_i - u_j)(v_i - v_j) < \frac{1}{2} uv, \quad (i < j).$$

Per conseguenza si può affermare, in virtù di (3), che l'espressione

$$\int_0^1 UV \, dx - \int_0^1 U \, dx \int_0^1 V \, dx$$

è compresa fra  $0$  ed  $\frac{1}{2} uv$ . Questo enunciato completa il teorema di Tchébychev, e lo include, perchè  $uv$  è positivo o negativo, secondo che  $U$  e  $V$  variano o no nel medesimo senso. È chiaro poi che, se ciascuna funzione non varia sempre nello stesso senso, ai valori assoluti di  $u$  e  $v$  bisogna sostituire le oscillazioni totali subite dalle due funzioni lungo l'intervallo  $01$ .

Possiamo, del resto, invece di  $0$  ed  $\frac{1}{2} uv$ , ottenere altri limiti, che spesso riescono più vicini al valore della (4). Infatti, chiamando  $\alpha_0, \alpha_1$ , e  $\beta_0, \beta_1$ , i limiti fra cui oscillano rispettivamente i valori assoluti delle differenze  $u_{i+1} - u_i$  e  $v_{i+1} - v_i$ , il prodotto  $(u_i - u_j)(v_i - v_j)$  resta compreso, in valore assoluto, fra  $(i-j)^2 \alpha_0 \beta_0$  ed  $(i-j)^2 \alpha_1 \beta_1$ . Per conseguenza, dividendo per  $\lim \cdot n^2 \alpha_0 \beta_0$  o per  $\lim \cdot n^2 \alpha_1 \beta_1$ , il secondo membro della (3), questo diventa

$$\lim \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-i)^2] = \lim \cdot \frac{n^2 - 1}{12n^2} = \frac{1}{12}.$$

Quanto ai limiti di  $n^2 \alpha_0 \beta_0$ ,  $n^2 \alpha_1 \beta_1$ , essi ammettono una semplicissima interpretazione geometrica. Considerando le tangenti alla curva  $U=0$ , nell'inter-

vallo 01, si prendano quelle due che hanno massima o minima inclinazione assoluta sull'asse delle  $x$ , e siano rispettivamente  $a_1$  ed  $a_0$  le tangenti trigonometriche di tali inclinazioni. È chiaro che  $a_0$  ed  $a_1$  sono i limiti verso cui tendono  $n\alpha_0$  ed  $n\alpha_1$ , per  $n$  infinito, e però, introducendo quantità analoghe,  $b_0$  e  $b_1$ , per la funzione  $V$ , si ha

$$\lim \cdot n^2 \alpha_0 \beta_0 = a_0 b_0 \quad , \quad \lim \cdot n^2 \alpha_1 \beta_1 = a_1 b_1.$$

Dunque, il valore assoluto dell'espressione

$$\int_0^1 UV \, dx - \int_0^1 U \, dx \int_0^1 V \, dx$$

è compreso fra  $\frac{a_0 b_0}{12}$  ed  $\frac{a_1 b_1}{12}$ .

Queste limitazioni potrebbero forse tornare utili nel calcolo di certi integrali definiti. Come unica applicazione osserviamo che, se si prende

$$U = f\left(\log \frac{1}{x}\right) \quad , \quad V = \left(\log \frac{1}{x}\right)^\varepsilon,$$

essendo  $\varepsilon$  una frazione propria, si ha

$$b_0 = \varepsilon \left(\frac{e}{1-\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon} \quad , \quad b_1 = \infty.$$

Il teorema di Tchébychew dice che l'espressione

$$\int_0^\infty x^\varepsilon e^{-x} f(x) \, dx - \Gamma(1+\varepsilon) \int_0^\infty e^{-x} f(x) \, dx$$

è positiva o negativa, secondo che la funzione  $f(x)$  è crescente o decrescente per  $x$  variabile da zero all'infinito. Grazie al complemento da noi dato al teorema stesso si può affermare, inoltre, che il valore assoluto dell'ultima espressione è superiore a

$$\frac{\varepsilon a_0}{12} \left(\frac{e}{1-\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon},$$

dove  $a_0$  rappresenta il minimo valore assoluto di  $e^x f'(x)$ , per  $x$  positivo. Ritorneremo tra breve sulle considerazioni precedenti per racchiudere l'espressione (1) fra limiti anche più approssimati, ed applicheremo allora i nuovi risultati a svariate questioni d'analisi.

## SULL' ANALISI INDETERMINATA DI 2° GRADO

### NOTA II\* (\*)

DEL

Dott. R. MARCOLONGO.

15. Passiamo ora a discutere un'altra forma dell'equazione generale; quella in cui  $D = E = 0$ , cioè la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

che terremo scritta invece così:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = P. \quad (1)$$

È noto come nella teoria dei numeri s'intenda per forma quadratica un'espressione della forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

e come la teoria delle forme quadratiche sia stata completamente sviluppata per opera di Fermat, Eulero, Lagrange, Legendre, Gauss e Dirichlet (\*\*).

Allorquando si cerca di risolvere l'equazione indeterminata (1), si dice che si cercano le possibili rappresentazioni del numero P mediante la forma quadratica (a, b, c). Ci si presenta quindi fin da principio il doppio problema, di riconoscere cioè a priori se la rappresentazione è possibile, e quindi trovare tutte le possibili rappresentazioni.

(\*) V. Questo Giornale, vol. XXV, pag. 161.

(\*\*) Diofanto-Leonardo Pisano-Fermat che proposero e in parte sciolsero alcune equazioni indeterminate di 2° grado, si occuparono di speciali forme quadratiche. Più lungi e più profondamente spinse le ricerche Eulero, ricerche sparse

Problemi del tutto analoghi ci si erano presentati nello studio della equazione di Legendre; e come la teoria dei resti quadratici ci diè il mezzo di poter rispondere completamente alla domanda della possibilità o impossibilità della equazione, la teoria delle forme quadratiche ci farà risolvere il doppio problema per questa nuova forma di equazione indeterminata. Ma prima di esporre il caso generale, riassumendo in breve i principali risultati della teorica delle forme quadratiche, cominciamo coll'esporre due casi particolari dai quali in seguito sempre faremo astrazione.

16. Supponiamo  $P = 0$ . Perchè la

$$ax^2 + 2bxy + by^2 = 0$$

ammetta soluzioni intere diverse dalle

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0$$

occorre che sia  $b^2 - ac = u^2$ , essendo  $u$  un numero intero; allora sarà facile dedurre in generale:

$$x = (\pm u - b)t$$

$$y = at$$

$t$  essendo una indeterminata intera.

17. Supponendo  $P > 0$ , si supponga  $c = 0$ .

---

nei *Commentari* e nei *Novi Commentari Academiae scient. imp. Petr.*; i cui risultati furono poi raccolti nella sua *Algebra*.

La risoluzione completa di una equazione indeterminata generale di 2° grado è dovuta a Lagrange che pubblicò le sue profonde ricerche sulle *Nouv. Mém. de l'Acad. de Ber.* nelle *Additions à l'Alg. de Euler*, e nelle classiche Memorie citate al principio della mia prima Nota.

Legendre (*Académ. des scienc.* 1785 e seg.) completava le ricerche di Lagrange.

Gauss imprese a trattare lo stesso argomento con metodo del tutto diverso (*Recherch. Arith.* pag. 116 - *Dis. Arith.* pag. 165). Infine al Dirichlet sono dovute delle interessantissime semplificazioni alla teoria delle forme quadratiche nel caso del determinante positivo (*Verein. der Theorie u. s. w.* Berl. Akad. 1854 e *Jour. de Liouv.* tomo 2°, 2ª serie) e quindi le splendide ricerche sul numero delle classi delle forme di dato determinante (*Rech. sur div. applic. de l'anal. infinit. à la th. des nombres.* Crelle Jour. 19 e 21. *Zahlentheorie*, V. Abschnitt).

La (1) diventa: [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x(ax + 2by) = P.$$

Decomponiamo  $P$  nel prodotto di due fattori. Siano  $u$  e  $v$  i fattori di una di queste decomposizioni; avremo:

$$x = u, \quad ax + 2by = v$$

d'onde

$$y = \frac{au - v}{2b}$$

è superfluo osservare che dovremo ritenere solo quelle decomposizioni che ci danno per  $y$  un numero intero.

18. Supponiamo che il determinante della forma sia un quadrato esatto; cioè:

$$b^2 - ac = k^2.$$

L'equazione:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2b\frac{x}{y} + c = 0$$

avrà due radici razionali e diverse che indicheremo con  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{m_1}{n_1}$ .

Avremo

$$a\left(x - \frac{m}{n}y\right)\left(x - \frac{m_1}{n_1}y\right) = P$$

d'onde

$$(nx - my)(n_1x - m_1y) = \frac{nn_1P}{a}.$$

Dovremo adunque ricorrere alla solita decomposizione del numero  $\frac{nn_1P}{a}$  nel prodotto di due fattori, indi risolvere due equazioni di 1° grado rispetto  $x$  ed  $y$ .

19. Nel caso di  $k = 0$  le due radici  $\frac{m}{n}$ ,  $\frac{m_1}{n_1}$  diventano identiche; in tal caso giungeremo alla:

$$(nx - my)^2 = \frac{n^2P}{a}$$

occorrerà adunque che sia un quadrato esatto

$$\frac{P}{a} = \alpha^2$$

allora :  
www.libtool.com.cn

$$nx - my = \pm n\alpha.$$

Due soluzioni particolari sono

$$x = \pm \alpha \quad y = 0$$

onde in generale :

$$x = \pm \alpha + mt$$

$$y = nt$$

20. Ciò premesso richiamiamo brevemente le proprietà principali delle forme quadratiche che conducono alla ricerca delle possibili rappresentazioni di un dato numero P ; cioè alla risoluzione in numeri interi della equazione indeterminata di secondo grado :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = P.$$

Data la forma ( a , b , c ) se poniamo (\*)

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y'$$

si giunge ad una nuova forma quadratica ( a' , b' , c' ) contenuta nella 1<sup>a</sup> e da essa ottenuta mediante la sostituzione

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Fra i coefficienti delle due forme hanno luogo le relazioni

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$$

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta$$

$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2.$$

Se diciamo con D il determinante della prima forma e con D' quello della seconda sarà :

$$D = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D'.$$

---

(\*) Dirichlet l. c. Quadratische Formen § 56 e seguenti.

Ogni numero rappresentabile dalla seconda forma, lo sarà anche dalla prima. Se dalla prima forma  $(a,b,c)$  si può passare alla seconda  $(a',b',c')$  non è vera la reciproca ; occorre però che

$$a\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Dal prendere il segno superiore o l'inferiore si distingue la sostituzione in propria o in impropria.

Nel primo caso la sostituzione inversa mercè la quale dalla  $(a',b',c')$  si passa alla  $(a,b,c)$  è la :

$$\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Due forme siffatte sono dette *equivalenti*.

21. Dovendo risolvere la equazione :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = P$$

potremo limitarci a trovare le soluzioni intere in cui i numeri  $x$  ed  $y$  sono primi tra loro.

Trasformando la  $(a,b,c)$  mercè la sostituzione propria

$$\begin{bmatrix} x & \xi \\ y & \eta \end{bmatrix}$$

giungeremo ad una forma equivalente  $(P, n, l)$  e per avere lo stesso determinante  $D$  della prima dovrà essere verificata la condizione

$$n^2 - Pl = D$$

la quale ci dice che la congruenza di Legendre

$$z^2 \equiv D \pmod{P}$$

è possibile ed ammette la radice  $n$ . Sarà intanto

$$\left(\frac{D}{P}\right) = 1$$

onde :

*La condizione necessaria perchè si possa risolvere in numeri interi l'equa-*

zione indeterminata  
www.libtool.com.cn

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = P$$

è che il determinante D della forma sia resto quadratico nel numero P (\*).

Risolta coi metodi già esposti la equazione

$$z^2 - Py = D$$

cioè trovate le due radici incongruenti rispetto al modulo P, se indichiamo con n un rappresentante della z e con l uno della y le due forme

$$(a, b, c) \quad , \quad (P, n, l)$$

avranno lo stesso determinante D. Ma non potremo perciò inferirne che a sono equivalenti; dovremo dunque anzitutto ricercare se lo sono, e quindi trovare tutte le sostituzioni mercè le quali dalla prima si passa alla seconda. Il primo ed il terzo coefficiente di queste sostituzioni sono i numeri interi che ci risolvono l'equazione indeterminata proposta. Vediamo con ciò che il nostro problema sarà risoluto se sapremo risolvere i due a cui abbiamo accennato; cioè:

*Riconoscere se due forme dello stesso determinante sono o no equivalenti; e date due forme equivalenti trovare tutte le sostituzioni mercè le quali dall'una si passa all'altra.* Questi due problemi si risolvono completamente. Il primo richiede metodi del tutto diversi a seconda che il determinante è positivo o negativo. In ogni caso per altro il metodo è tale che nello stesso tempo che fa riconoscere che due date forme dello stesso determinante sono equivalenti dà anche la sostituzione per poter passare dall'una all'altra forma.

Amnesso adunque che si sia riconosciuto che le due forme  $(a,b,c)$ ,  $(a',b',c')$  di stesso determinante siano eguali, abbiamo una trasformazione S mediante la quale dalla prima passiamo alla seconda; si tratterà di trovare tutte le altre; ora è notissimo che se indichiamo con L una trasformazione mercè la quale la prima si trasforma in sè stessa, colla sostituzione composta L.S passiamo da  $(a,b,c)$  ad  $(a',b',c')$ ; e reciprocamente tutte le sostituzioni che trasformano  $(a,b,c)$  in  $(a',b',c')$  sono ottenute con tal metodo.

22. Ora una forma  $(a,b,c)$  di determinante D e di divisore  $\sigma$  ( $\sigma$  essendo il m. c. d. dei coefficienti  $a, 2b, c$ ) si trasforma in sè stessa mediante tutte le trasformazioni:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

(\*) Dirichlet. § 60.

Gauss l. c. § 154.

dove  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  danno i valori seguenti:

$$\beta = -\frac{cu}{\sigma}, \quad \mu = \frac{au}{\sigma}$$

$$\alpha = \frac{t-bu}{\sigma}, \quad \beta = \frac{t+bu}{\sigma}$$

essendo  $u$  e  $t$  soluzioni intere della equazione pelliana (\*)

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

della quale più oltre avremo diffusamente ad occuparci.

23. Nel caso in cui  $D$  sia negativo e  $= -D_1$  l'equazione

$$t^2 + D_1 u^2 = \sigma^2$$

può essere agevolmente risolta:

Se

$$D_1 = \sigma^2$$

avremo:

$$\left. \begin{array}{l} t = \sigma \\ u = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} t = -\sigma \\ u = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} t = 0 \\ u = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} t = 0 \\ u = -1 \end{array} \right\}$$

In tal caso riflettendo ai valori particolari che assumono  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  potremo enunciare il teorema seguente:

Una forma  $(a, b, c)$  di divisore  $\sigma$  e di determinante  $D = -\sigma^2$  si trasforma in sè stessa mediante le sole quattro sostituzioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\frac{b}{\sigma} & -\frac{c}{\sigma} \\ \frac{a}{\sigma} & \frac{b}{\sigma} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{b}{\sigma} & \frac{c}{\sigma} \\ -\frac{a}{\sigma} & -\frac{b}{\sigma} \end{bmatrix}.$$

Se invece

$$D = -m\sigma^2$$

avremo semplicemente che:

24. Una forma  $(a, b, c)$  di divisore  $\sigma$  e di determinante  $D = -m\sigma^2$  si trasforma

(\*) Dirichlet. § 62.

Gauss. Dis. Anal. § 162 e seguenti.

( 72 )

in sè stessa mediante le due sole sostituzioni :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

25. Potrà ancora essere :

$$4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}$$

cioè :

$$4D_1 \equiv 3\sigma^2 \pmod{4\sigma^2},$$

e primieramente sia :

$$4D_1 = 3\sigma^2.$$

L'equazione pelliana :

$$t^2 + \frac{3}{4}\sigma^2 u^2 = \sigma^2$$

ci darà 6 diverse soluzioni ; potremo quindi enunciare il teorema :

*Una forma (a,b,c) di divisore  $\sigma$  e di determinante D tale che  $4D = -3\sigma^2$  si trasforma in sè stessa mediante le sei uniche trasformazioni :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{\sigma-2b}{2\sigma} & \frac{-c}{\sigma} \\ \frac{a}{\sigma} & \frac{\sigma+2b}{2\sigma} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sigma-2b}{2\sigma} & \frac{c}{\sigma} \\ \frac{a}{\sigma} & -\frac{\sigma+2b}{2\sigma} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{\sigma+2b}{2\sigma} & \frac{c}{\sigma} \\ -\frac{a}{\sigma} & \frac{\sigma-2b}{2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -\frac{\sigma+2b}{2\sigma} & \frac{-c}{\sigma} \\ \frac{a}{\sigma} & -\frac{\sigma-2b}{2\sigma} \end{bmatrix}.$$

26. Negli altri casi  $4D_1$  avrà la forma

$$3\sigma^2 + 4n\sigma^2$$

allora l'equazione pelliana corrispondente

$$t^2 + \frac{(4n+3)\sigma^2}{4} u^2 = \sigma^2$$

ammetterà due sole soluzioni  $t = \pm \sigma, u = 0$  ; in tal caso potremo enunciare il teorema :

Una forma  $(a,b,c)$  di divisore  $\sigma$  e di determinante  $D$ , tale che  $4D = -(4u+3)\sigma^2$ , si trasforma in sè stessa mediante le due sole trasformazioni :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il secondo problema è adunque completamente risoluto nel caso del determinante negativo.

27. Si tratta ora di dover risolvere l'altro problema. Riconoscere se due forme dello stesso determinante siano o no equivalenti. Cominciamo dal considerare forme con determinante negativo.

Siano  $(a,b,c)$   $(a',b',c')$  due forme dello stesso determinante negativo il cui valore assoluto diciamo  $D_1$ .

Supponiamole equivalenti e sia  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  la sostituzione che ci fa passare dalla prima alla seconda.

Potremo evidentemente supporre, senza ledere la generalità, che  $a' \leq a$ . Intanto le equazioni esprimenti il fatto che  $(a,b,c)$  si trasforma in  $(a',b',c')$  mediante  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  sono come

$$a\delta - \beta\gamma = 1$$

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = a'$$

$$a\alpha\beta + 2b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta = b'$$

Dalla seconda abbiamo facilmente :

$$(a\alpha + b\gamma)^2 + \gamma D_1 = aa'.$$

Su questa possiamo fare una osservazione interessante.

Se avesse luogo la diseuguaglianza  $a < \sqrt{2D_1}$  e quindi anche :

$$a' < \sqrt{2D_1}$$

avremmo  $aa' < 2D_1$  e quindi  $\gamma$  non potrebbe assumere altro che il valor zero o i valori  $\pm 1$ .

Supponiamo che ciò possa farsi ; cioè o che la condizione imposta sia verificata o che sia possibile mediante una trasformazione dedurre dalla forma  $(a,b,c)$  un'altra di stesso determinante e nella quale sia verificata tale condizione. Nè si manchi di osservare che tal condizione lascia ancora una grande arbitarietà nei

( 74 )

coefficienti della forma. Ciò posto sia  $\gamma = 0$ : dovrà allora essere :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\alpha = \pm 1 \quad , \quad \delta = \pm 1$$

$$a = a'$$

$$b' - b = \pm a\beta.$$

Quest'ultima equazione ci suggerisce un'altra condizione da porre tra i coefficienti della forma, condizione che ci porterà a determinare semplicemente  $\beta$ . Supponiamo infatti che

$$b \leq \frac{1}{2} a$$

e lo stesso avvenga per la 2<sup>a</sup> forma; cioè:

$$b' \leq \frac{1}{2} a' \leq \frac{1}{2} a$$

allora  $b' - b$  dovrà essere in valor assoluto minore di  $a$  e dovendo essere divisibile per  $a$  dovrà essere  $b' - b = 0$  e quindi  $c = c'$  e le due forme sarebbero identiche; oppure potrà essere:

$$b' = -\frac{1}{2} a \quad ; \quad b = \frac{1}{2} a$$

allora  $\beta = -1$ . Onde:

*Date due forme  $(a, b, c)$ ,  $(a', b', c')$  nelle quali*

$$a < \sqrt{2D_1} \quad a' < \sqrt{2D_1}$$

$$b \leq \frac{1}{2} a \quad b' \leq \frac{1}{2} a'$$

*esse saranno equivalenti quando hanno la forma*

$$\left( a, \frac{1}{2} a, c \right) \quad \left( a, -\frac{1}{2} a, c \right)$$

*e si passerà dalla prima all'altra mediante la sostituzione:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

28. Data la forma  $(a, b, c)$  si riconosce subito se in essa

$$2b \leq a$$

ma non è così per riscontrare se ha luogo l'altra  $a < \sqrt{2D_1}$ , che è opportuno trasformare; ciò che ha luogo in modo semplicissimo.

Infatti:

$$a^2 < 2D_1$$

cioè:

$$4b^2 + 2a^2 < 4ac$$

e poichè  $4b^2 \leq a^2$ , se ha luogo la diseguaglianza

$$2a^2 + a < 4ac$$

a più forte ragione sarà soddisfatta la precedente, ora questa è certamente verificata se poniamo

$$a \leq c.$$

Onde ora possiamo invertire la cosa e supporre di aver fatto il ragionamento di prima sulla forma  $(a, b, c)$  in cui

$$2b \leq a \quad a \leq c.$$

Una tal forma come è noto dicesi *ridotta* (\*).

29. Nell'ipotesi di  $\gamma = +1$  seguendo dei ragionamenti analoghi a quelli già fatti si viene a provare che le due forme  $(a, b, c)$   $(a', b', c')$  entrambe ridotte, per essere equivalenti debbono presentarsi sotto la forma:

$$(a, b, a) \quad (a, -b, a)$$

e la sostituzione che ci fa passare dalla prima alla seconda è:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

(\*) Un tal metodo per giungere a stabilire il concetto di forma ridotta nel caso del Determinante negativo oltre a sembrarci nuovo, è a parer nostro preferibile molto a quello adottato dallo stesso Gauss § 171 l. c., dal Dirichlet l. c. § 64. Wertheim. Elemente der Zahlentheorie. Leipzig 1887, Kapitel IX, § 107.

30. Resta ora a mostrare come effettivamente, data una forma  $(a, b, c)$  possa trovarsi una ridotta equivalente.

Si trasformi  $(a, b, c)$  con  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{bmatrix}$ ; otterremo una nuova forma  $(a', b', c')$  equivalente e sarà :

$$a' = c$$

$$b' = -b - cd$$

cioè :

$$b' \equiv -b \pmod{c} = a'$$

ed evidentemente potremo determinare  $b'$  in modo che risulti in valore assoluto

$$2b' \leq a'.$$

Determinato  $b'$  in tal guisa, resterà determinato  $\delta$ , e quindi la sostituzione mercè la quale da  $(a, b, c)$  si passa alla equivalente  $(c, b', c')$  nella quale è soddisfatta la condizione :

$$2b' < c$$

se inoltre fosse  $c \leq c'$  allora tal forma sarebbe ridotta. Se invece fosse  $c > c'$  allora ad essa bisognerà di nuovo applicare la trasformazione e giungeremo ad una nuova forma  $(c', b'', c'')$  in cui  $2b'' \leq c'$ . Se  $c' \leq c''$  la forma è ridotta, ecc. E naturalmente il processo dovrà finire poichè la serie  $c > c' > c''$  di numeri interi e positivi non può certamente essere illimitata.

Evidentemente nel passaggio da

$$(a, b, c) \quad \text{a} \quad (c, b', c')$$

si ha

$$\delta = -\frac{b' + b}{c}$$

$$c' = (b - b')\delta + a.$$

Se  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_1 \end{bmatrix}$  è la trasformazione propria con la quale da  $(c, b', c')$  passiamo a  $(c', b'', c'')$  componendola con la  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{bmatrix}$  otterremo direttamente la trasformazione con la quale da  $(a, b, c)$  passiamo a  $(c', b', c'')$  e così di seguito.

31. Indicando con  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$  il quarto coefficiente di siffatte sostituzioni, sarebbe comodo possedere una formula la quale ci dia semplicemente la trasformazione prodotto senza aver bisogno di passare per i prodotti delle successive trasformazioni. È assai facile determinare tal formula.

Infatti il prodotto delle due sostituzioni

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \delta_2 \\ -\delta_1 & -1 + \delta_1 \delta_2 \end{bmatrix}$$

può scriversi così :

$$\begin{bmatrix} -[1] & -[-\delta_2] \\ -[\delta_1] & -[\delta_1, -\delta_2] \end{bmatrix}$$

valendoci delle note parentesi di Gauss le quali si calcolano assai agevolmente colla stessa regola colla quale si calcolano i numeratori delle ridotte delle frazioni continue. Il prodotto di questa sostituzione per la sostituzione  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_3 \end{bmatrix}$  si potrà rappresentare con :

$$\begin{bmatrix} [-\delta_2] & -[-\delta_2, \delta_3] \\ [\delta_1, -\delta_2] & -[\delta_1, -\delta_2, -\delta_3] \end{bmatrix}$$

e così di seguito sarà facile ricavare che il prodotto di quattro sostituzioni della forma suesposta verrà rappresentato dalla sostituzione

$$\begin{bmatrix} [-\delta_2, \delta_3] & [-\delta_2, \delta_3, -\delta_4] \\ [\delta_1, -\delta_2, \delta_3] & [\delta_1, -\delta_2, \delta_3, -\delta_4] \end{bmatrix}$$

ecc.

Ed è facile poter concludere che i segni da porsi innanzi alle parentesi, si riprodurranno di quattro in quattro. Onde tenenlo presenti quei dei primi quattro potremo concludere che per un numero  $4n$  di  $\delta$  i segni sono :

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}$$

per  $4n + 1$

$$\begin{bmatrix} - & + \\ - & + \end{bmatrix}$$

per  $4n + 2$

$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

per  $4n + 3$

$$\begin{bmatrix} + & - \\ + & - \end{bmatrix}$$

L'espressione generale (astrazione fatta dai segni) del prodotto di  $n$  sostituzioni è :

$$\begin{bmatrix} [-\delta_2, \delta_3, \dots, (-1)^n \delta_{n-1}] & [-\delta_2, \delta_3, \dots, (-1)^{n+1} \delta_n] \\ [\delta_1, -\delta_2, \dots, (-1)^n \delta_{n-1}] & [\delta_1, -\delta_2, \dots, (-1)^{n+1} \delta_n] \end{bmatrix}$$

in cui i segni innanzi alle parentesi sono determinati nel modo suesposto.

32. L'algoritmo mediante il quale una data forma quadratica può ridursi in una equivalente ridotta, è oltre ogni dire semplice.

Tralascio di darne un esempio avendo in animo di tornare espressamente sulla risoluzione numerica delle equazioni indeterminate di 2° grado.

Coloro i quali si interessano a questi studi, oltre alle opere classiche citate nella mia 1ª Nota, potranno assai vantaggiosamente approfittare dell'opera recente del Wertheim (già citata) nella quale trovansi non poche applicazioni numeriche.

33. Resta con ciò risoluto il secondo problema, di riconoscere cioè se due forme di stesso determinante sono o no equivalenti. Infatti se le due forme sono ridotte, si riconoscerà ciò immediatamente ricordando che due forme ridotte di stesso determinante negativo non possono essere equivalenti che in due casi già accennati.

Se le due forme non fossero ridotte vi si ridurranno.

34. Tornando alla risoluzione della

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = P$$

costruiamoci la forma  $(P, n, l)$ ; saranno  $(a, b, c)$  e  $(P, n, l)$  le forme delle quali bisogna riconoscere l'equivalenza.

Da  $(a, b, c)$  si sia passati alla forma ridotta  $(A, B, C)$  e la sostituzione mediante la quale dalla prima si ottiene la seconda indichiamola con  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  e abbiamo date le formule generali per cui i coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , dipendono dalle  $\delta$  in valore ed in segno. Analogamente diciamo  $\begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix}$  la sostituzione mercè la quale  $(P, n, l)$  si trasforma nella forma ridotta  $(A', B', C')$ . Confronteremo  $(A, B, C)$  con  $(A', B', C')$ . Potranno avvenire tre casi :

I.º La forma  $(A, B, C)$  sia identica colla forma  $(A' B' C')$ . In tal caso passeremo dalla  $(a, b, c)$  alla  $(P, n, l)$  colla sostituzione composta :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta' & -\beta' \\ -\gamma' & \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\delta' - \beta\gamma' & \alpha'\beta - \alpha\beta' \\ \gamma\delta' - \gamma'\delta & \alpha'\delta - \gamma\beta' \end{bmatrix}.$$

Ma bisogna ancora tenere presenti le sostituzioni per le quali  $(a, b, c)$  si trasforma in sè stessa. Nel caso in cui

$$D = -m\sigma^2; \quad \text{o} \quad 4D = -(4n+3)\sigma^2$$

quelle trasformazioni si riducono solamente alle :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

allora abbiamo evidentemente :

$$x = \pm (\alpha\delta' - \beta\gamma')$$

$$y = \pm (\gamma\delta' - \gamma'\delta)$$

Se  $D = -\sigma^2$  le sostituzioni che trasformano in sè stessa la forma  $(a, b, c)$  sono quattro; onde le sostituzioni che ci fanno passare da  $(a, b, c)$  a  $(P, n, l)$  sono oltre le due precedenti queste altre due :

$$\begin{bmatrix} -\frac{b}{\sigma} & -\frac{c}{\sigma} \\ \frac{a}{\sigma} & \frac{b}{\sigma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha\delta' - \beta\gamma' & \alpha'\beta - \alpha\beta' \\ \gamma\delta' - \gamma'\delta & \alpha'\delta - \gamma\beta' \end{bmatrix} =$$

$$\left[ \begin{array}{cc} -\frac{b(\alpha\delta' - \beta\gamma') + c(\gamma\delta' - \gamma'\delta)}{\sigma} & -\frac{b(\alpha'\beta - \alpha\beta') + c(\alpha'\delta - \gamma\beta')}{\sigma} \\ \frac{a(\alpha\delta' - \beta\gamma') + b(\gamma\delta' - \gamma'\delta)}{\sigma} & \frac{a(\alpha'\beta - \alpha\beta') + b(\alpha'\delta - \gamma\beta')}{\sigma} \end{array} \right]$$

e l'altra che si ottiene dal prodotto delle due seguenti

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{\sigma} & \frac{c}{\sigma} \\ -\frac{a}{\sigma} & -\frac{b}{\sigma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha\delta' - \beta\gamma' & \alpha'\beta - \alpha\beta' \\ \gamma\delta' - \gamma'\delta & \alpha'\delta - \gamma\beta' \end{bmatrix} :$$

onde la nostra equazione

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = P$$

ammetterà queste altre coppie di valori : cioè :

$$x = \mp \frac{(\alpha\delta' - \beta\gamma')b + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)c}{\sigma}$$

$$y = \pm \frac{(\alpha\delta' - \beta\gamma')a + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)b}{\sigma}$$

le quali, come è facile vedere stanno in un notevole rapporto colle prime ; deno-

minando con  $x_0$  e  $y_0$  le due prime ; cioè :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x_0 = (\alpha\delta' - \beta\gamma')$$

$$y_0 = (\gamma\delta' - \gamma'\delta)$$

avremo che le formule

$$\mp \frac{bx_0 + cy_0}{\sigma}, \quad \text{e} \quad \pm \frac{ax_0 + by_0}{\sigma}$$

ci rappresentano due nuove radici della equazione come sarebbe assai facile verificare *a priori*.

Qui sorge spontanea l'idea di operare sulle due nuove radici, che chiameremo  $x_1$  e  $y_1$ , come si è operato con  $x_0, y_0$ ; ma calcolando le espressioni

$$\mp \frac{bx_1 + cy_1}{\sigma} \quad \text{e} \quad \pm \frac{ax_1 + by_1}{\sigma}$$

riotteniamo le radici  $x_0$  ed  $y_0$ ; potremo brevemente accennare tal fatto dicendo che le radici  $x_0, y_0, x_1, y_1$  formano un ciclo.

Deduciamo adunque il seguente notevole

**TEOREMA.** - Se  $x_0, y_0$  è una soluzione della equazione indeterminata

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = P$$

nella ipotesi che la quantità  $b^2 - ac = -\sigma^2$ , otterremo una nuova soluzione  $x_1, y_1$  mediante le formule :

$$x_1 = \mp \frac{bx_0 + cy_0}{\sigma}, \quad y_1 = \pm \frac{ax_0 + by_0}{\sigma}$$

essendo  $\sigma$  il m. c. d. dei coefficienti  $(a, b, c)$ . Le due coppie  $(x_0, y_0); (x_1, y_1)$  formano un ciclo.

Supponiamo da ultimo, che  $4D = -3\sigma^2$ ; allora la forma  $(a, b, c)$  si trasforma in sè stessa mediante sei sostituzioni di cui già abbiamo date le espressioni generali. Prescindiamo dalle prime due; prendendo a considerare la terza troviamo che la forma  $(a, b, c)$  si trasforma nella  $(P, n, l)$  mediante la sostituzione composta :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma - 2b}{2\sigma} & -\frac{c}{\sigma} \\ \frac{a}{\sigma} & \frac{\sigma + 2b}{2\sigma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha\delta' - \beta\gamma' & \alpha'\beta - \alpha\beta' \\ \gamma\delta' - \gamma'\delta & \alpha'\delta - \gamma\beta' \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \frac{(\alpha\delta' - \beta\gamma')(\sigma - 2b) - 2c(\gamma\delta' - \gamma'\delta)}{2\sigma}, \dots \dots \dots \\ \frac{2a(\alpha\delta' - \beta\gamma') + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)(\sigma + 2b)}{2\sigma}, \dots \dots \dots \end{bmatrix}.$$

Operando invece con la quarta sostituzione otterremo che la sostituzione composta non differisce dalla precedente che pel segno del 1° e 3° coefficiente; sicchè posto come precedentemente :

$$\alpha\delta' - \beta\gamma' = x_0 \quad \gamma\delta' - \gamma'\delta = y_0$$

otterremo una nuova coppia di soluzioni mercè le formule :

$$x_1 = \pm \frac{(\sigma - 2b)x_0 - 2c y_0}{2\sigma}, \quad y_1 = \pm \frac{2a x_0 + (\sigma + 2b)y_0}{2\sigma}.$$

Analogamente operando sulla quinta e sesta trasformazione sarà facile dedurre una nuova coppia di soluzioni mercè le formule :

$$x_2 = \pm \frac{(\sigma + 2b)x_0 + 2c y_0}{2\sigma}, \quad y_2 = \pm \frac{-2a x_0 + (\sigma - 2b)y_0}{2\sigma}.$$

Onde in tal caso abbiamo che: *cognita una soluzione*  $(x_0, y_0)$  *potremo dedurne altre due*  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ . *Sarà facile ancor qui riscontrare questo altro notevole fatto.*

*Le soluzioni che si otterrebbero dalla coppia*  $(x_1, y_1)$  *allo stesso modo che queste furono dedotte da*  $(x_0, y_0)$ , *coincidono con la coppia*  $(x_2, y_2)$ .

*Le soluzioni che si otterrebbero dalla coppia*  $(x_2, y_2)$  *allo stesso modo che la coppia*  $(x_1, y_1)$  *fu dedotta dalla*  $(x_0, y_0)$ , *coincidono con la*  $(x_0, y_0)$  *ecc.*

*Si può ben dire adunque che le tre coppie*  $(x_0, y_0)$ ;  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$  *costituiscono un ciclo.*

II. Supponiamo che la forma  $(A, B, C)$  non sia identica con la  $(A', B, C)$  ma che tuttavia sieno equivalenti; essendo le due forme ridotte non potranno avvenire che due casi; cioè che abbiano la forma  $(A, B, A)$  e  $(A, -B, A)$ ; oppure

$$\left(A, \frac{1}{2}A, C\right) \quad ; \quad \left(A, -\frac{1}{2}A, C\right).$$

Cominciamo dal primo. Da  $(a, b, c)$  si passa ad  $(A, B, A)$  colla sostituzione  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ; da questa alla  $(A, -B, A)$  colla sostituzione  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; e da questa infine alla  $(P, n, l)$  colla sostituzione  $\begin{bmatrix} \delta' & -\beta' \\ -\gamma' & \alpha' \end{bmatrix}$ ; onde passeremo da  $(a, b, c)$  alla  $(P, n, l)$  colla sostituzione composta :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta' & -\beta' \\ -\gamma' & \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\delta' + \alpha\gamma' & -\beta\beta' - \alpha\alpha' \\ \delta\delta' + \gamma\gamma' & -\delta\beta' - \gamma\alpha' \end{bmatrix}$$

quindi in tal caso si ha :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x_0 = \pm (\beta\delta' + \alpha\gamma') \quad ; \quad y_0 = \pm (\gamma\gamma' + \delta\delta')$$

nel resto si continua come nel caso precedente.

Nell'altra ipotesi, facendo ragionamenti del tutto simili si troverà :

$$x_0 = \pm (\alpha\delta' + \alpha\gamma' - \beta\gamma') \quad ; \quad y_0 = \pm (\gamma\delta' - \gamma\gamma' - \gamma'\delta).$$

35. Per ciò che riguarda il numero delle soluzioni della equazione indeterminata di cui ci occupiamo, osserveremo che dovendo anzitutto risolvere la

$$x^2 \equiv D \pmod{P}$$

dovremo determinare il numero delle sue radici incongruenti, e sappiamo che se indichiamo con  $h$  il numero dei fattori primi dispari contenuti in  $P$  quell'equazione ha  $2^h$  radici incongruenti se  $P$  è dispari o contiene il 2 elevato alla prima potenza; ne avrà invece  $2^{h+1}$  se contiene il 2 elevato alla 2ª; ne avrà  $2^{h+2}$  se contiene il 2 elevato alla 3ª o ad una potenza superiore.

Se adunque indichiamo con  $N$  il numero delle soluzioni della equazione di Legendre,  $N$  potrà avere uno dei tre valori  $2^h$ ,  $2^{h+1}$ ,  $2^{h+2}$ ; potremo adunque formare  $N$  forme dello stesso determinante  $D$  della  $(a, b, c)$ ; fra queste occorre ricercare quali sono equivalenti alla primitiva. Supposto che ve ne siano  $\nu < N$ , bisogna ricercare le trasformazioni che ci fanno passare dalla prima alle altre e il numero di queste siamo pure in grado di poter determinare in ogni singolo caso e sappiamo che tal numero può essere 2, o 4, o 6. Indichiamo con  $\mu$  uno di questi numeri; ogni trasformazione ci dà una soluzione, onde in tutto avremo  $\mu\nu$  soluzioni.

36. Nella classe delle equazioni considerate rientra pure la

$$ax^2 + by^2 = P$$

essendo  $a$  e  $b$  dello stesso segno; in particolare si può risolvere l'equazione

$$x^2 + y^2 = P$$

cioè trattare il problema dello spezzamento di un numero in due quadrati. Ed è notissimo come la esposta teoria ci conduca ai seguenti teoremi:

*Un numero dispari  $i$  cui  $h$  fattori primi sono tutti della forma  $4n + 1$  è decomponibile nella somma di due quadrati in  $2^{h-1}$  maniere differenti (\*).*

(\*) Cfr. Dirichlet l. o. § 68.

Gauss l. o. § 182.

La potenza  $h^{ma}$  di un numero primo della forma  $4n + 1$  è decomponibile sempre nella somma di due quadrati in  $2^{h-1}$  maniere diverse (\*).

Ed infine al teorema celebre di Fermat (\*\*).

Un numero primo dispari della forma  $4n + 1$  è decomponibile sempre ed in un modo unico nella somma di due quadrati.

37. Su questo importante argomento lo studioso tenga presente il teorema generalissimo di Jacobi riflettente la decomposizione in numero primo  $p$  nel prodotto di due fattori complessi coniugati. Indicando con  $e$  un fattore di  $p - 1$  e con  $\alpha$  una radice primitiva dell'unità del grado  $e$  abbiamo che :

$$p = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-2} \alpha^{\text{ind}(\mu+\mu^2)} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=p-2} \alpha^{-\text{ind}(\mu+\mu^2)}. \quad (***)$$

Nè si manchino di ricordare le formule, per la prima volta date da Gauss (\*\*\*\*) circa lo spezzamento di un numero primo  $p$  della forma  $4n + 1$  nella somma di due quadrati. Queste formule, sotto forma un poco diversa sono le seguenti.

Se

$$p = a^2 + b^2$$

i numeri  $a$  e  $b$  si determineranno come i minimi resti che verificano le congruenze

$$a \equiv (-1)^{\frac{p+3}{4}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\prod \left(\frac{p-1}{2}\right)}{\left(\prod \frac{p-1}{4}\right)^2} \pmod{p}$$

$$\pm 2b \left(\prod \frac{p-1}{4}\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p} \quad (*****)$$

(\*) Cfr. Arndt. Bemerkungen über die Verwandlung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch (Jour. Crelle 31).

(\*\*) È notissimo che Fermat soleva scrivere i suoi teoremi in margine ad una edizione di Diofanto. Questa edizione fu ristampata in Tolosa nel 1670 per cura del figlio. *Diophantus Alexandrinus. Arithmeticon libri sex etc. Cum commentariis C. G. Bacheti et observationibus D. P. de Fermat. Tolosae 1670.* Alla pagina 127 : (Arith. liber III).

« Numerus primus qui superat unitate quaternarii multiplicem etc. Idem numerus a primus et ipsius quadratus componuntur semel ex duobus quadratis etc. ».

Questo teorema fu per la prima volta dimostrato da Eulero Comm. Novi Petr. Tomo IV an. 1752 e 1753 p. 3. oppure *Commentationes arithmeticae collectae* p. 155. De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum.

(\*\*\*) Questo teorema trovasi in sostanza nella celebre memoria di Jacobi (Ueber die Kreisth. u. ihre Anw. Crelle 30).

(\*\*\*\*) Gauss. *Theoria residuorum biquad. commentatio I* Vol. II opere p. 86-87.

(\*\*\*\*\*) Cfr. Bachmann. *Die Lehre der Kreisth. X. Abschnitt.*

38. L'equazione  $x^2 + y^2 = P$  è storicamente celebre. Primo forse fra tutti se ne occupa Leonardo Pisano, il quale giunge ad un teorema notevolissimo. Se  $x' y'$  è una soluzione della proposta ed  $\alpha \beta \gamma$  tre numeri legati dalla relazione

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

si otterranno due nuove soluzioni razionali della proposta mediante le formule

$$x = \frac{\alpha y' + \beta x'}{\gamma} \quad ; \quad y = \frac{\alpha x' - \beta y'}{\gamma} \quad (*)$$

Ben più tardi Eulero si occupa della equazione più generale

$$Cx^2 + y^2 = A$$

e dell'altra analoga

$$ax^2 + b = y^2 \quad (**)$$

e mostra che se  $x'$  e  $y'$  è una coppia di valori di  $x$  ed  $y$  ed  $\alpha$  e  $\beta$  una coppia di valori che soddisfa la

$$Cx^2 + y^2 = 1$$

due nuove soluzioni della proposta verranno espresse per mezzo delle formule :

$$x = \alpha y' + \beta x' \quad ; \quad y = C\alpha x' + \beta y'.$$

Ma dopochè il Colebrooke, il Taylor, e lo Strachey (\*\*\*) ebbero al principio di questo secolo tradotte dal sanscrito le opere di Brahma-Gupta e di

(\*) Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo XIII, pubblicati da B. Boncompagni 1862, Vol. 2°. *Opuscoli*, secondo la lezione di un codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano, pag. 256-257. Questo libro di Leonardo andò perduto verso la fine del secolo scorso (Libri. His. des sc. math. tomo 2° pag. 40). Per altro si sapeva già per testimonianza di Luca Pacioli e di Cardano di questo teorema di Leonardo e come egli lo dimostrasse geometricamente, il che è vero. Le formule in questione furono dimostrate per la prima volta da Vieta (Opere 1616, *Feteticorum liber IV*, pag. 62).

(\*\*) Euler. *Algèbre*. Paris 1807 2<sup>me</sup> Partie, Chap. VI e VII.

(\*\*\*) *Algebra with arithmetic and mensuration*, from the sanscrit of Brahma Gupta and Bhaskara translated by Colebrooke 1817.

*Bhascara Acharya*, *Lilawati*. translated by Taylor 1816.

*Bija. Garicta* translated by Strachey. 1818.

Bhascara Acharya apparve come queste regole circa quattro secoli avanti Leonardo fossero già note agli Indiani (\*).

Un tal fatto era talmente inesperto che il Libri scriveva: « l'on doit avouer malgré tout notre orgueil occidental, que ces ouvrages eussent été apportés en Europe soixante ou quatre-vingt ans plus tôt, leur apparition même après la mort de Newton et du vivant d'Euler, aurait pu hâter parmi nous les progrès de l'analyse algébrique (\*\*) ».

Su tal argomento lo studioso potrà assai utilmente consultare la dotta memoria dell'illustre Chasles (ancora non era stato rinvenuto il libro di Leonardo) ove le formole di Leonardo e di Eulero sono dimostrate geometricamente (\*\*).

39. Nel caso dell'equazione

$$x^2 + y^2 = P$$

dove  $P = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$  essendo  $a, b, c \dots$  fattori primi della forma  $4n + 1$ , si può richiedere in quanti modi diversi possa il numero  $P$  spezzarsi nella somma di due quadrati. Il numero di tali decomposizioni viene espresso da :

$$\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \dots}{2}$$

la quale formola venne data da Gauss senza dimostrazione (\*\*\*\*). Si può consultare la dimostrazione di Legendre (\*\*\*\*\*) alcune note del Prof. Volpicelli, di Giusto Bellavitis ed infine la elegantissima dimostrazione del Prof. Chelini (\*\*\*\*\*).

---

(\*) Brahma-Gupta and Bhascara. Algebra p. XVIII, 172, 245, 265 ecc. Queste regole sono assai oscuramente espresse in versi. Brahma-Gupta viveva verso la fine del 500. Bhascara verso il 1100 (Libri l. c. Vol. 1° p. 125. Marie Hist. des sciences math. Vol. I° p. 86 e 130).

(\*\*) Libri l. c. Vol. I° p. 126.

(\*\*\*) Formules d'Euler pour la résolution de l'équation  $Cx^2 + A = y^2$ . Leur identité avec celles des algébristes indiens et arabes etc. (Liouv. Jour. tome II° 1837). Ivi sono riportate le regole di Brahma-Gupta e Bhascara secondo la versione di Colebrooke.

(\*\*\*\*) Gauss Dis. Arith. pag. 219 (in una nota).

(\*\*\*\*\*) Théorie des Nombres Vol. I° pag. 314.

(\*\*\*\*\*) Volpicelli. Annali di Scienze Fis. Mat. 1854. Annali di Tortolini 1850. Atti accad. Nuovi Lincei 1850. Bellavitis. Ann. Tortolini Vol. I° pagina 422. Chelini. Ann. Tortolini Vol. 3° pag. 126.

SUL NUMERO DEI NUMERI PRIMI DA 1 AD  $n$

N O T A

DEL

Dottor AURELIO LUGLI



1. Legendre nella sua *Théorie des nombres* (Cap. IV, § 11), quindi Meissel nei *Mathematische Annalen* (Vol. II e III), hanno trattato il problema di determinare quanti siano i numeri primi in un intervallo arbitrariamente dato, della serie naturale dei numeri, riconducendolo a quello della determinazione dei numeri primi in un intervallo più ristretto. Con intento uguale ma con un metodo che reputo molto più semplice di quello seguito dai matematici menzionati, fondandomi sopra due proprietà elementari dei numeri (\*), deduco qui una formola (quella [7] del n° 5) mediante la quale riesce relativamente agevole determinare il numero dei numeri primi fino ad un limite qualsiasi.

2. ТЕОРЕМА. *Il numero dei numeri primi della serie 1, 2, 3 ... n non divisibili per alcuno dei numeri primi a, b, c, ... si ottiene sviluppando il prodotto*

$$[1] \quad n \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

e sostituendo ad ogni termine il maggior intero contenuto in esso, senza alterazione del segno.

Infatti, seguendo Legendre, indicando con  $E\left(\frac{n}{s}\right)$  il maggior intero contenuto nella frazione  $\frac{n}{s}$ , nella data serie, vi sono  $E\left(\frac{n}{a}\right)$  numeri divisibili per  $a$ , ossia

$$a, 2a, \dots, \left\{ E\left(\frac{n}{a}\right) \right\} \cdot a,$$

---

(\*) Quelle espresse dalle formole [3] e [4].

onde rimangono [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$n - E\left(\frac{n}{a}\right) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

numeri non divisibili per  $a$ , dove il secondo membro va inteso nel senso espresso dall'enunciato del teorema.

Fra i numeri della data serie divisibili per  $b$ , conviene sceverare quelli che non sono divisibili per  $a$ . Ma nella serie

$$b, 2b, \dots \left\{ E\left(\frac{n}{b}\right) \right\} \cdot b$$

vi sono evidentemente tanti numeri non divisibili per  $a$  quanti ve ne sono nella serie

$$1, 2, \dots \dots E\left(\frac{n}{b}\right),$$

onde, per quanto si è detto innanzi, saranno

$$\left\{ E\left(\frac{n}{b}\right) \right\} \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

i numeri delle due ultime serie non divisibili per  $a$  ed

$$n\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \left\{ E\left(\frac{n}{b}\right) \right\} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

i numeri della serie data non divisibili per  $a$  e per  $b$ , calcolando sempre i prodotti ed i loro termini nel modo voluto dall'enunciato del teorema.

Proseguendo analogamente si giunge a concludere che i numeri da 1 ad  $n$  non divisibili per alcuno dei numeri primi  $a, b, c, \dots$  sono precisamente quelli dati dalla [1] sviluppata nel modo stabilito.

3. Indicando ora con  $\varphi(n, i)$  il numero dei numeri dell'intervallo da 1 ad  $n$ , non divisibili per alcuno dei primi  $i$  numeri primi  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$  della serie naturale dei numeri, sarà analogamente:

$$\varphi(n, i) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_{i-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

dove il segno d'eguaglianza va inteso nel modo imposto dall'enunciato del teorema precedente, quindi:

$$\varphi(n, i) = \varphi(n, i-1) \left\{ 1 - \frac{1}{p_i} \right\}$$

od anche, con le stesse convenzioni,

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$[2] \quad \varphi(n, i) = \varphi(n, i-1) - \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i-1 \right].$$

Facendo variare, in questa formola,  $i$  da 2 ad  $i-1$  si hanno le eguaglianze

$$\varphi(n, 2) = \varphi(n, 1) - \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_2} \right), 1 \right]$$

$$\varphi(n, 3) = \varphi(n, 2) - \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_3} \right), 2 \right]$$

.....

$$\varphi(n, i-1) = \varphi(n, i-2) - \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_{i-1}} \right), i-2 \right],$$

che sommate membro a membro con la [2], danno

$$[3] \quad \varphi(n, i) = \varphi(n, 1) - \sum_{i=2}^{i-1} \left( \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i-1 \right] \right).$$

Per dare un esempio dell'uso di questa formola vogliasi determinare quanti siano i numeri della serie da 1 a 1000 non divisibili per  $p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7$ . Si osservi che in questo caso è da porsi  $n=1000, i=4$  e che si ha  $\varphi(n,1)=500$ , essendo 500 i numeri dispari da 1 a 1000, ossia i numeri di questo intervallo primi con  $p_1$ . Il termine sommatorio sarà formato da tre parti cioè,

$$\begin{aligned} & \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{p_2} \right), 1 \right] + \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{p_3} \right), 2 \right] + \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{p_4} \right), 3 \right] = \\ & 333 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + 200 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + 142 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = \\ & 333 - E \left( \frac{333}{2} \right) + 200 - E \left( \frac{200}{2} \right) - E \left( \frac{200}{3} \right) + E \left( \frac{200}{6} \right) + 142 - \\ & - E \left( \frac{142}{2} \right) - E \left( \frac{142}{3} \right) + E \left( \frac{142}{6} \right) - E \left( \frac{142}{5} \right) + E \left( \frac{142}{10} \right) + E \left( \frac{142}{15} \right) - E \left( \frac{142}{30} \right) \\ & = 167 + 67 + 38 = 272, \end{aligned}$$

quindi :

$$\varphi(1000, 4) = 500 - 272 = 228,$$

perciò da 1 a 1000 vi sono 228 numeri non divisibili per 2, 3, 5, 7.

4. S'indichi con  $\psi(n)$  il numero dei numeri primi da 1 ad  $n$ , esclusa l'unità. Osservando che  $\varphi(n, i)$  esprime quanti siano i numeri dello stesso intervallo non divisibili per i primi  $i$  numeri primi  $p_1, p_2, \dots, p_i$ , si dedurrà facilmente che, essendo  $i < \psi(n)$  i numeri medesimi non divisibili per  $p_1, p_2, \dots, p_i$ , oltre all'unità, saranno i numeri primi  $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{\psi(n)}$  e i prodotti che si ottengono dalla combinazione di questi ultimi. Quando però si ponga  $i \geq \psi E(\sqrt{n})$  risulta  $p_{i+1} > E(\sqrt{n})$ , onde nell'intervallo da 1 ad  $n$  i numeri primi con  $p_1, p_2, \dots, p_i$  non saranno altro che gli ultimi  $\psi(n) - i$  numeri primi e l'unità, talchè si avrà l'eguaglianza :

$$[4] \quad \varphi(n, i) = \psi(n) - i + 1.$$

Da questa si deduce :

$$\psi(n) = i - 1 + \varphi(n, i)$$

e con la sostituzione a  $\varphi(n, i)$  del suo valore [3] :

$$[5] \quad \psi(n) = i - 1 + \varphi(n, 1) - \sum_{i=2}^{i-1} \left( \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] \right),$$

ed è questa appunto la formola che si presta al calcolo dei numeri primi da 1 ad  $n$  quando sia noto il numero di tali numeri nell'intervallo più ristretto da 1 ad  $E(\sqrt{n})$  e si prenda  $i$  almeno uguale a  $\psi E(\sqrt{n})$ .

Come esempio si voglia determinare il numero dei numeri primi nell'intervallo da 1 a 1000. A tal uopo si osservi che  $E(\sqrt{1000}) = 31, i = 11$ , quindi :

$$\psi(1000) = 11 - 1 + \varphi(1000, 1) - \sum_{i=2}^{i=11} \left( \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] \right).$$

Ora, calcolando le singole parti del termine sommatorio, si ha, in seguito al numero precedente, per  $i = 2, 3, 4$  :

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_2} \right), i - 1 \right]_{i=2} = \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{3} \right), 1 \right] = 167,$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_3} \right), 2 \right] = \varphi(200, 2) = 67,$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_4} \right), 3 \right] = \varphi(142, 3) = 38;$$

per  $i = 5$  :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\begin{aligned} \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_5} \right), 4 \right] &= \varphi(90, 4) = 90 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{5} \right) \left( 1 - \frac{1}{7} \right) = \\ &= 90 - E \left( \frac{90}{2} \right) - E \left( \frac{90}{3} \right) - E \left( \frac{90}{5} \right) - E \left( \frac{90}{7} \right) + E \left( \frac{90}{6} \right) + E \left( \frac{90}{10} \right) + E \left( \frac{90}{14} \right) \\ &+ E \left( \frac{90}{15} \right) + E \left( \frac{90}{21} \right) + E \left( \frac{90}{35} \right) - E \left( \frac{90}{30} \right) - E \left( \frac{90}{42} \right) - E \left( \frac{90}{70} \right) - E \left( \frac{90}{105} \right) + E \left( \frac{90}{210} \right) \\ &= 90 - 45 - 30 - 18 - 12 + 15 + 9 + 6 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 = 21. \end{aligned}$$

Già da ora si vede che il calcolo di queste parti diverrebbe estremamente complicato quando si fosse costretti a fare uso costantemente della [1]. Fortunatamente la [2] in generale e meglio la [4], quand'è possibile servirsene, porgono il mezzo di abbreviare le operazioni. Alla determinazione di quest'ultima  $\varphi$ , essendo  $n = 90$ ,  $E(\sqrt{n}) = 9$ ,  $\psi E(\sqrt{n}) = 4$  e  $i - 1 = 4$  non minore del numero dei numeri primi da 1 ad  $E(\sqrt{n})$ , serve immediatamente la [4] che dà :

$$\varphi(90, 4) = \psi(90) - 4 + 1 = 24 - 4 + 1 = 21,$$

per l'uso della quale è bene notare però che necessita conoscere il numero dei numeri primi da 1 a 90 che supporremo noto. La stessa formola si presta a più forte ragione in seguito atteso che  $i$  cresce ed  $n$  diminuisce, onde per le ulteriori  $\varphi$  si ha :

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_6} \right), 5 \right] = \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{13} \right), 5 \right] = \psi(76) - 5 + 1 = 21 - 5 + 1 = 17$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_7} \right), 6 \right] = \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{17} \right), 6 \right] = \psi(58) - 6 + 1 = 16 - 6 + 1 = 11$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_8} \right), 7 \right] = \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{19} \right), 7 \right] = \psi(52) - 7 + 1 = 15 - 7 + 1 = 9$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_9} \right), 8 \right] = \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{23} \right), 8 \right] = \psi(43) - 8 + 1 = 14 - 8 + 1 = 7$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_{10}} \right), 9 \right] = \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{29} \right), 9 \right] = \psi(34) - 9 + 1 = 11 - 9 + 1 = 3$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_{11}} \right), 10 \right] = \varphi \left[ E \left( \frac{1000}{31} \right), 10 \right] = \psi(32) - 10 + 1 = 11 - 10 + 1 = 2;$$

per cui finalmente :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\psi(1000) = 10 + 500 - \{167 + 67 + 38 + 21 + 17 + 11 + 9 + 7 + 3 + 2\} = 168.$$

Vi sono dunque 168 numeri primi da 1 a 1000, esclusa l'unità.

5. Come risulta dal precedente esempio, il calcolo del termine sommatorio nella [5] è grandemente semplificato quando nella determinazione dei valori delle espressioni  $\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right]$  si faccia uso, a partire dal punto in cui ciò è possibile, della relazione [4]. Mostreremo qui come questa semplificazione sia introducibile nella [5], il che ci condurrà ad una nuova espressione della formola che rappresenta il numero dei numeri primi nell'intervallo da 1 ad  $n$ .

Di tutte le espressioni  $E \left( \frac{n}{p_i} \right)$  sia  $E \left( \frac{n}{p_s} \right)$  la prima per la quale si ha :

$$[6] \quad s - 1 = \psi E \left( \sqrt{\frac{n}{p_s}} \right)$$

o altrimenti nella serie dei numeri primi  $p_1, p_2, \dots, p_s, \dots, p_i$  sia  $p_s$  il primo per quale il numero dei numeri primi da 1 alla radice quadrata a meno d'una unità del maggior intero contenuto nella frazione  $\frac{n}{p_s}$ , uguagli  $s - 1$  (\*), allora potrà scriversi in seguito alla [4] :

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_s} \right), s - 1 \right] = \psi E \left( \frac{n}{p_s} \right) - s + 1 + 1$$

e la medesima relazione seguirà a valere per ogni altro numero  $p$  maggiore di  $p_s$ , fino a  $p_i$ , inquantochè per un tal numero la diseuguaglianza

$$s - 1 > \psi E \left( \sqrt{\frac{n}{p_s}} \right),$$

analogha alla  $i > \psi E(\sqrt{n})$ , da cui discende la [4], è sempre soddisfatta. Se perciò si separano gli addendi del termine sommatorio in due parti, la prima comprendente quelli che da  $i = 2$  vanno fino ad  $i = s - 1$  e la seconda i rimanenti, questi

---

(\*) Un criterio per trovare il valore di  $s$  può aversi confrontando  $p_{i-1}$  con  $E \left( \sqrt{\frac{n}{p_i}} \right)$ , giacchè per questo valore  $E \left( \sqrt{\frac{n}{p_i}} \right)$  dev'essere minore di  $p_i$ .

ultimi, in numero di  $i - (s - 1)$ , saranno  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_s} \right), s - 1 \right] = \psi E \left( \frac{n}{p_s} \right) - s + 2$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_{s+1}} \right), s \right] = \psi E \left( \frac{n}{p_{s+1}} \right) - s - 1 + 2$$

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_{s+2}} \right), s + 1 \right] = \psi E \left( \frac{n}{p_{s+2}} \right) - s - 2 + 2$$

.....

$$\varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] = \psi E \left( \frac{n}{p_i} \right) - s - (i - s) + 2$$

ed avranno per somma :

$$\sum_{i=s}^{i=i} \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] = \sum_{i=s}^{i=i} \psi E \left( \frac{n}{p_i} \right) - (s - 2)(i - s + 1) - \frac{i - s + 1}{2} (i - s)$$

onde la formola [5] facendo la separazione di questi termini diviene :

$$\begin{aligned} \psi(n) &= i - 1 + \varphi(n, 1) - \sum_{i=2}^{i=s-1} \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] - \sum_{i=s}^{i=i} \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] \\ &= i - 1 + \varphi(n, 1) - \sum_{i=2}^{i=s-1} \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] - \sum_{i=s}^{i=i} \psi E \left( \frac{n}{p_i} \right) + \frac{i^2 - s^2 - 3i + 5s - 4}{2} \end{aligned}$$

ossia :

$$[7] \quad \psi(n) = E \left( \frac{n}{2} \right) - \sum_{i=2}^{i=s-1} \varphi \left[ E \left( \frac{n}{p_i} \right), i - 1 \right] - \sum_{i=s}^{i=i} \psi E \left( \frac{n}{p_i} \right) + \frac{1}{2} \{ i^2 - s^2 - i + 5s - 6 \}$$

che è la formola generale che dà il numero dei numeri primi da 1 ad  $n$ , rappresentando  $i$  il numero dei numeri primi da 1 a  $\sqrt{n}$  ed  $s$  il più piccolo numero pel quale si ha la relazione  $s - 1 = \psi E \left( \sqrt{\frac{n}{p_s}} \right)$  che è una conseguenza dell'altra

$$p_s > E \left( \sqrt{\frac{n}{p_s}} \right).$$

6. Crediamo utile applicare anche questa formola più completa ad un esempio. Ci proponiamo cioè di determinare quanti siano i numeri primi da 1 a 10000 e lo sviluppo del calcolo mostrerà come ciò possa conseguirsi facendo uso di una piccola tavola di numeri primi che può facilmente costruirsi secondo il *vaglio di Eratostene*.

In questo caso abbiamo  $n = 10000$ ,  $\sqrt{n} = 100$ ,  $\psi(\sqrt{n}) = i = 25$ ,

$$p_2=3, p_3=5, p_4=7, p_5=11, p_6=13, p_7=17, p_8=19, p_9=23, p_{10}=29,$$

$$p_{11}=31, p_{12}=37, p_{13}=41, p_{14}=43, p_{15}=47, p_{16}=53, p_{17}=59, p_{18}=61,$$

$$p_{19}=67, p_{20}=71, p_{21}=73, p_{22}=79, p_{23}=83, p_{24}=89, p_{25}=97.$$

Calcolando poi le frazioni  $E\left(\frac{n}{p_i}\right)$  per i valori di  $i$  fra 3 e 25 si trova

$$E\left(\frac{10000}{3}\right) = 3333, E\left(\frac{10000}{5}\right) = 2000, E\left(\frac{10000}{7}\right) = 1428, E\left(\frac{10000}{11}\right) = 909,$$

$$E\left(\frac{10000}{13}\right) = 769, E\left(\frac{10000}{17}\right) = 588, E\left(\frac{10000}{19}\right) = 526, E\left(\frac{10000}{23}\right) = 434,$$

$$E\left(\frac{10000}{29}\right) = 344, E\left(\frac{10000}{31}\right) = 322, E\left(\frac{10000}{37}\right) = 270, E\left(\frac{10000}{41}\right) = 243,$$

$$E\left(\frac{10000}{43}\right) = 232, E\left(\frac{10000}{47}\right) = 212, E\left(\frac{10000}{53}\right) = 188, E\left(\frac{10000}{59}\right) = 169,$$

$$E\left(\frac{10000}{61}\right) = 163, E\left(\frac{10000}{67}\right) = 149, E\left(\frac{10000}{71}\right) = 140, E\left(\frac{10000}{73}\right) = 136,$$

$$E\left(\frac{10000}{79}\right) = 126, E\left(\frac{10000}{83}\right) = 120, E\left(\frac{10000}{89}\right) = 112, E\left(\frac{10000}{97}\right) = 103,$$

e per le radici quadrate di questi numeri a meno d'una unità :

$$\sqrt{3333} = 57, \quad \sqrt{2000} = 44, \quad \sqrt{1428} = 37, \quad \sqrt{909} = 30,$$

$$\sqrt{769} = 27, \quad \sqrt{588} = 24, \quad \sqrt{526} = 22, \quad \sqrt{434} = 20, \dots$$

e poichè si ha precisamente :

$$E(\sqrt{434}) = E\left(\sqrt{\frac{10000}{23}}\right) = E\left(\frac{\sqrt{10000}}{p_9}\right) = 20,$$

talchè a cominciare dall'ottava di queste frazioni la relazione [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$p_s > E \left( \sqrt{\frac{n}{p_s}} \right)$$

è soddisfatta e con essa l'altra

$$s - 1 = \psi E \left( \sqrt{\frac{n}{p_s}} \right)$$

così sarà  $s - 1 = \psi(20)$ , ed essendo 8 i numeri primi da 1 a 20,  $s = 9$ .

L'espressione da calcolare sarà in tal modo

$$[8] \quad \psi(10000) = 5000 - \sum_{i=2}^{i=8} \varphi \left[ E \left( \frac{10000}{p_i} \right), i - 1 \right] - \sum_{i=9}^{i=25} \psi E \left( \frac{10000}{p_i} \right) + 279.$$

Per il calcolo dei primi quattro termini  $\varphi$  procedendo come al n° 3, si trovano senz'altro i valori 1667, 667, 381, 208, per quello della successiva espressione

$$\varphi \left[ E \left( \frac{10000}{p_6} \right), 5 \right] = \varphi(769, 5),$$

a scopo di brevità, si ricorra primieramente alla [2]. Questa dà

$$\varphi(769, 5) = \varphi(769, 4) - \varphi \left[ E \left( \frac{769}{p_5} \right), 4 \right] = \varphi(769, 4) - \varphi(69, 4).$$

Per valutare l'ultimo termine si faccia uso della [4], il che è permesso poichè

$$4 = \psi E(\sqrt{69}) = \psi(8),$$

risulta allora

$$\varphi(769, 5) = \varphi(769, 4) - \psi(69) + 4 - 1 = \varphi(769, 4) - 16,$$

e calcolando direttamente il primo :

$$\varphi(769, 5) = 160.$$

Analogamente con l'uso delle [2] e [4] si trova con sufficiente speditezza che i due termini ultimi della prima  $\Sigma$  hanno i valori : 111 e 95.

L'espressione [8], tenendo conto dei valori precedentemente ottenuti, diviene così :

$$\psi(10000) = 1990 - \sum_{i=9}^{i=25} \psi E \left( \frac{10000}{p_i} \right) =$$

$$1990 - \{ \psi(134) + \psi(344) + \psi(322) + \psi(270) + \psi(243) + \psi(232) + \psi(212) + \psi(188) + \\ + \psi(169) + \psi(163) + \psi(149) + \psi(140) + \psi(136) + \psi(126) + \psi(120) + \psi(112) + \psi(103) \}.$$

Ora ricorrendo ad una tavola di numeri primi, che basta estesa fino a 434, si trovano subito i singoli valori delle  $\psi$ , la cui somma è 761, onde

$$\psi(10000) = 1990 - 761 = 1229,$$

vi sono adunque 1229 numeri primi da 1 a 10000, esclusa l'unità.

7. A verifica delle applicazioni che venissero fatte della formola [7], riporterò qui, prendendola dal Legendre (\*), una tabella in cui è dato il numero dei numeri primi, compreso 1, entro diversi estesi intervalli

| INTERVALLI   | Numero dei n. <sup>i</sup> primi | INTERVALLI    | Numero dei n. <sup>i</sup> primi |
|--------------|----------------------------------|---------------|----------------------------------|
| da 1 a 10000 | 1230                             | da 1 a 200000 | 17984                            |
| » 20000      | 2263                             | » 250000      | 22045                            |
| » 30000      | 3246                             | » 300000      | 25988                            |
| » 40000      | 4204                             | » 350000      | 29977                            |
| » 50000      | 5134                             | » 400000      | 33861                            |
| » 60000      | 6058                             | » 500000      | 41538                            |
| » 70000      | 6936                             | » 600000      | 49093                            |
| » 80000      | 7837                             | » 700000      | 56535                            |
| » 90000      | 8713                             | » 800000      | 63937                            |
| » 100000     | 9592                             | » 900000      | 71268                            |
| » 150000     | 13849                            | » 1000000     | 78493                            |

8. È ovvio poi che il problema risoluto acconsente la soluzione anche dell'altro: *Trovare il numero dei numeri primi fra due numeri dati a e b.*

(\*) Op. cit.—L'edizione francese è molto rara, ne esiste però una tedesca di recente pubblicazione: *Zahlentheorie von Adrien-Marie Legendre*. Leipzig 1886. Per la tabella riportata vedere a p. 66 del Vol. II dell'edizione tedesca.



S U L

CONCETTO DI VOLUME IN UNO SPAZIO LINEARE QUALUNQUE,

N O T A

D I

G I N O L O R I A .

In molte ricerche nelle quali è necessario considerare l'analogo nello spazio  $S_n$  (lineare) a  $n$  dimensioni dell'area di un triangolo rettilineo e del volume di un tetraedro del nostro spazio, tutti gli autori a me noti si limitano a introdurre un'espressione, funzione delle coordinate di  $n+1$  punti di  $S_n$ , modellata sulle espressioni analoghe fornite dalla Geometria analitica cartesiana e che essi riguardano come misura del volume dell' $(n+1)$ -gono avente per vertici i detti punti. Considerata questa introduzione come definizione, essa è logicamente legittima; tuttavia essa lascia, a mio credere, un po' insoddisfatti coloro che amano veder stabiliti i concetti geometrici indipendentemente da un sistema di coordinate. Colle osservazioni seguenti mi proposi di colmare la lacuna che in conseguenza, secondo me, si riscontra in questa parte della Geometria; esse furono ispirate parecchi anni or sono dalla lettura dell'importante memoria del Prof. d' Ovidio: *Le funzioni metriche fondamentali negli spazii di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (Mem. dell'Accademia dei Lincei, Serie III, Vol. I), e vengono ora pubblicate perchè alcuni scritti recenti mi fecero credere non fosse fuor di proposito il farle conoscere.

1. Siano  $(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$  ( $r = 1, 2, 3$ ) le coordinate omogenee di tre punti  $P^{(r)}$ ;  $(\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \xi_3^{(r)})$  quelle delle rette che li congiungono a due a due. Nel piano da essi individuato sia stabilita una determinazione metrica, il cui assoluto abbia per equazione in coordinate di punti e di rette le seguenti:

$$\alpha_{xx} = \sum \alpha_{ik} \omega_i \omega_k = 0 \quad , \quad \alpha_{\xi\xi} = \sum \alpha_{ik} \xi_i \xi_k = 0 ;$$



sia poi

www.libtool.com.cn

$$\Delta = |a_{ik}|, \quad a_{x^{(r)}x^{(s)}} = \sum a_{ik} x_i^{(r)} x_k^{(s)}$$

$$D = |a_{ik}|, \quad a_{\xi^{(r)}\xi^{(s)}} = \sum a_{ik} \xi_i^{(r)} \xi_k^{(s)}$$

Chiamando  $(P^{(r)} P^{(s)})$  la distanza fra i punti  $P^{(r)}, P^{(s)}$  e  $(P^{(r)}, P^{(s)} P^{(t)})$  quella fra il punto  $P^{(r)}$  e la retta  $P^{(s)} P^{(t)}$  (altezza del triangolo  $P' P'' P'''$ ), avremo :

$$\text{sen}(P' P'' P''') = \sqrt{\frac{a_{\xi' \xi'}}{a_{x'' x''} a_{x''' x'''}}}, \quad \text{sen}(P', P'' P''') = \frac{(\xi_1' x_1' + \xi_2' x_2' + \xi_3' x_3') \sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x'' x''} a_{\xi' \xi'}}};$$

dunque

$$\text{sen}(P', P'' P''') \text{sen}(P'' P''') = \frac{(\xi_1' x_1' + \xi_2' x_2' + \xi_3' x_3') \sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x'' x''} a_{x''' x'''}}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x'' x''} a_{x''' x'''}}}$$

Il secondo membro di questa relazione è una funzione simmetrica delle coordinate dei dati punti, quindi possiamo scrivere :

$$\text{sen}(P', P'' P''') \text{sen}(P'' P''') = \text{sen}(P'', P''' P') \text{sen}(P''' P') = \text{sen}(P''', P' P'') \text{sen}(P' P'').$$

Chiameremo *seno dell'area del dato triangolo* il valore comune di questi prodotti; e indicandola con  $\text{sen}(P' P'' P''')$  scriveremo

$$(1) \quad \text{sen}(P' P'' P''') = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x'' x''} a_{x''' x'''}}}$$

Correlativamente : indicando con  $r' r'' r'''$  i lati di un trilatero avremo

$$\text{sen}(r', r'' r''') \text{sen}(r'' r''') = \text{sen}(r'', r''' r') \text{sen}(r''' r') = \text{sen}(r''', r' r'') \text{sen}(r' r'');$$

chiameremo *seno dell'area del trilatero* ( $r' r'' r'''$ ) il valore comune di questi prodotti ed avremo

$$(2) \quad \text{sen}(r' r'' r''') = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' \\ \xi_1''' & \xi_2''' & \xi_3''' \end{vmatrix} \sqrt{D}}{\sqrt{a_{\xi' \xi'} a_{\xi'' \xi''} a_{\xi''' \xi'''}}}$$



Notando che se  $r' \equiv P'' P'''$ ,  $r'' \equiv P''' P'$ ,  $r''' \equiv P' P''$ , si può scrivere  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\text{sen}(r' r'' r''') = \frac{\left\{ \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x'x'} a_{x''x''} a_{x'''x'''}}} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \right\}^2}{\sqrt{\frac{a_{x''x''} a_{x'''x'''} - a_{x'x'}^2}{a_{x''x''} a_{x'''x'''}}} \sqrt{\frac{a_{x'''x'''} a_{x'x'} - a_{x''x''}^2}{a_{x'''x'''} a_{x'x'}}} \sqrt{\frac{a_{x'x'} a_{x''x''} - a_{x'''x'''}^2}{a_{x'x'} a_{x''x''}}}}$$

dedurremo

$$(3) \quad \text{sen}(r' r'' r''') = \frac{\text{sen}^2(P' P'' P''')}{\text{sen}(P'' P''') \text{sen}(P''' P') \text{sen}(P' P'')} ;$$

e correlativamente

$$(4) \quad \text{sen}(P' P'' P''') = \frac{\text{sen}^2(r' r'' r''')}{\text{sen}(r'' r''') \text{sen}(r''' r') \text{sen}(r' r'')} .$$

Quando la metrica è euclidea, sostituendo  $(P' P'' P''')$  a  $\text{sen}(P' P'' P''')$  e  $(r' r'' r''')$  a  $\text{sen}(r' r'' r''')$  le (1), (2) rientrano in relazioni note.

2. Supponiamo che i tre punti  $P' P'' P'''$  si considerino nello spazio: chiamiamo in conseguenza  $x_1^{(r)}$ ,  $x_2^{(r)}$ ,  $x_3^{(r)}$ ,  $x_4^{(r)}$  le loro coordinate omogenee. La distanza del punto  $P'$  dalla retta  $P'' P'''$  non è che la distanza di  $P'$  dalla traccia della retta  $P'' P'''$  sul piano determinato dal punto  $P'$  e dalla retta coniugata di  $P'' P'''$  rispetto all'assoluto. Se quindi

$$a_{xxx} \equiv \sum a_{ik} x_i x_k = 0 \quad , \quad a_{\xi\xi} \equiv \sum a_{ik} \xi_i \xi_k = 0$$

sono le equazioni di questo in coordinate di punti e di piani, avremo

$$\text{sen}^2(P', P'' P''') = \frac{\begin{vmatrix} a_{x'x'} & a_{x''x''} & a_{x'''x'''} \\ a_{x''x'} & a_{x''x''} & a_{x''x'''} \\ a_{x'''x'} & a_{x'''x''} & a_{x'''x'''} \end{vmatrix}}{a_{x''x''} a_{x'''x'''}}$$

ossia, chiamando  $\xi_i^{r'}$  le coordinate del piano  $P' P'' P'''$ ,

$$\text{sen}^2(P', P'' P''') = \frac{a_{\xi_i^{r'} \xi_i^{r'}}}{a_{x'x'} (a_{x''x''} a_{x'''x'''} - a_{x'x'}^2)}$$

D'altronde si ha

$$\text{sen}^2(P'' P''') = \frac{a_{x'x'} a_{x''x''} - a_{x'''x'''}^2}{a_{x''x''} a_{x'''x'''}}$$



epperò si conclude [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\text{sen}^2(P', P'' P''') \times \text{sen}^2(P'' P''') = \text{sen}^2(P' P'' P''') = \frac{\alpha_{\xi_1 \nu \xi_1 \nu}}{a_{x'x'} a_{x''x''} a_{x'''x'''}}$$

3. Consideriamo ora un quarto punto  $P^{IV}(x_1^{IV}, x_2^{IV}, x_3^{IV}, x_4^{IV})$  e chiamiamo  $\xi_i', \xi_i'', \xi_i'''$  le coordinate dei piani che esso determina rispettivamente colle rette  $P' P''', P'' P', P' P''$  e  $(P^{IV}, P' P'' P''')$  la distanza del punto  $P^{IV}$  dal piano  $P' P'' P'''$ ; avremo :

$$\text{sen}^2(P^{IV}, P' P'' P''') = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{IV} & x_2^{IV} & x_3^{IV} & x_4^{IV} \end{vmatrix} \Delta}{a_{x^{IV}x^{IV}} \alpha_{\xi_1 \nu \xi_1 \nu}} \quad (\text{ove } \Delta = |a_{ik}|).$$

Dalle due ultime relazioni risulta l'altra

$$\text{sen}(P' P'' P''') \text{sen}(P^{IV}, P' P'' P''') = \frac{\sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{IV} & x_2^{IV} & x_3^{IV} & x_4^{IV} \end{vmatrix}}{\sqrt{a_{x'x'} a_{x''x''} a_{x'''x'''} a_{x^{IV}x^{IV}}}}$$

E siccome il secondo membro non muta facendo una permutazione fra i punti considerati così si conclude che i quattro prodotti dei seni dei triangoli fatte del dato tetragono pei seni delle corrispondenti altezze sono fra loro uguali. Chiamando *seno del volume del tetragono* il valor comune di questi prodotti, potremo scrivere

$$(5) \quad \text{sen}(P' P'' P''') \text{sen}(P^{IV}, P' P'' P''') = \frac{\sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{IV} & x_2^{IV} & x_3^{IV} & x_4^{IV} \end{vmatrix}}{\sqrt{a_{x'x'} a_{x''x''} a_{x'''x'''} a_{x^{IV}x^{IV}}}}$$

4. Considerazioni correlative conducono alla definizione di *seno del volume*



d' un tetraedro e alla formola  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(6) \quad \text{sen}(\pi' \pi'' \pi''' \pi^{iv}) = \frac{\sqrt{D} \begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' & \xi_4' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' & \xi_4'' \\ \xi_1''' & \xi_2''' & \xi_3''' & \xi_4''' \\ \xi_1^{iv} & \xi_2^{iv} & \xi_3^{iv} & \xi_4^{iv} \end{vmatrix}}{\sqrt{\alpha_{\xi_1 \xi_1} \alpha_{\xi_2 \xi_2} \alpha_{\xi_3 \xi_3} \alpha_{\xi_4 \xi_4}}} \quad (\text{ove } D = |\alpha_{ik}|).$$

Se  $P' \equiv \pi'' \pi''' \pi^{iv}$ ,  $P'' \equiv \pi''' \pi^{iv} \pi'$ ,  $P''' \equiv \pi^{iv} \pi' \pi''$ ,  $P^{iv} \equiv \pi' \pi'' \pi'''$ , dalle (5) (6) scaturiscono le due seguenti formole fra loro correlative :

$$(7) \quad \text{sen}(\pi' \pi'' \pi''' \pi^{iv}) = \frac{\text{sen}^3(P' P'' P''' P^{iv})}{\text{sen}(P'' P''' P^{iv}) \text{sen}(P''' P^{iv} P') \text{sen}(P^{iv} P' P'') \text{sen}(P' P'' P''')}$$

$$(8) \quad \text{sen}(P' P'' P''' P^{iv}) = \frac{\text{sen}^2(\pi' \pi'' \pi''' \pi^{iv})}{\text{sen}(\pi'' \pi''' \pi^{iv}) \text{sen}(\pi''' \pi^{iv} \pi') \text{sen}(\pi^{iv} \pi' \pi'') \text{sen}(\pi' \pi'' \pi''')}$$

Quando la metrica è euclidea, sostituendo ai seni gli archi, dalle (5) (6) si ottengono le espressioni ordinarie del volume di un tetragono o un tetraedro in funzione delle coordinate dei vertici o delle facce.

4. Il metodo con cui siamo passati dalla distanza di due punti all'area di un triangolo e dall'area di un triangolo al volume di un tetraedro è applicabile anche agli iperspazii. Infatti, nello spazio a quattro dimensioni sussiste (e si dimostra con ragionamenti analoghi ai precedenti) il teorema: « dato un pentagono, il prodotto del seno del volume di un tetraedro base pel seno della corrispondente altezza è lo stesso qualunque sia il tetraedro assunto come base »; questo prodotto si definirà come *seno del volume del pentagono*. E in generale, dopo avere studiato lo spazio a  $n - 1$  dimensioni, si dimostrerà che: « dato un  $(n + 1)$ -gono in  $S_n$ , il prodotto del seno del volume di un  $n$ -gono base pel seno della corrispondente altezza è una funzione simmetrica degli  $n + 1$  punti dati »; questa funzione si definirà come *seno del volume dell'  $(n + 1)$ -gono dello spazio  $S_n$  a  $n$  dimensioni*.

Siano  $\alpha_i^{(r)}$  ( $i, r = 1, 2, \dots, n + 1$ ) le coordinate omogenee di  $n + 1$  punti  $P^{(r)}$  di  $S_n$ ; se con  $\alpha_{xx} = 0$  s'indica l'equazione dell'assoluto e con  $\Delta$  il discriminante  $|\alpha_{ik}|$  di questo, se ancora si chiama  $(P^{(1)} P^{(2)} \dots P^{(n+1)})$  il volume dell'  $(n + 1)$ -gono avente per vertici i punti  $P^{(r)}$ , avremo

$$\text{sen}(P^{(1)} P^{(2)} \dots P^{(n+1)}) = \frac{\sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \dots & \alpha_{n+1}^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_{n+1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_1^{(n+1)} & \alpha_2^{(n+1)} & \dots & \alpha_{n+1}^{(n+1)} \end{vmatrix}}{\sqrt{\alpha_{x^{(1)} x^{(1)}} \alpha_{x^{(2)} x^{(2)}} \dots \alpha_{x^{(n+1)} x^{(n+1)}}}}.$$



Nel caso di una metrica euclidea si conclude che il volume del dato sistema di punti, a meno di un fattore costante, è misurato dal determinante formato con le coordinate de' suoi vertici.

Alle considerazioni accennate in questo numero ne corrispondono altrettante per dualità, le quali conducono alla nozione di *seno del volume di un (n+1)-edro* nello spazio  $S_n$  a  $n$  dimensioni e alla formola che ne dà la misura in funzione delle coordinate delle facce.

5 Ottobre 1887.

---

### Q U I S T I O N I.

---

86. Se  $u_n$  ed  $s$  sono rispettivamente il termine generale e la somma d'una serie convergente, si ha, per  $n$  infinito,

$$\lim. \left(\frac{n}{1}\right)^{u_1} \left(\frac{n}{2}\right)^{u_2} \left(\frac{n}{3}\right)^{u_3} \dots \left(\frac{n}{n}\right)^{u_n} = e^s.$$

87. Se, per  $n$  infinito,  $a_n$  tende ad un limite  $a$ , si ha

$$\lim. \frac{1}{n} \sqrt[n]{a_1 (a_1 + a_2) (a_1 + a_2 + a_3) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{a}{e}.$$

88. Si alteri l'ordine dei termini della serie  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , lasciando i termini positivi nell'ordine in cui si trovano ed anche i termini negativi. Se  $p$  è la probabilità che un termine, preso ad arbitrio nella nuova serie, sia positivo, la somma della serie stessa è uguale al logaritmo naturale di

$$2 \sqrt{\frac{p}{1-p}}.$$

89. Si conduca, per ciascun punto d'una curva, una retta egualmente inclinata sulla tangente e sul piano osculatore, e si dimostri che i punti centrali di tutte le rette analoghe costituiscono, ad ogni istante, una superficie cilindrica di rivoluzione.

E. Cesàro.

## SOPRA UN TEOREMA SUL CALCOLO SIMBOLICO

NELLA TEORIA DELLE FORME BINARIE

PER

ERNESTO PASCAL.

Il teorema che forma l'oggetto della Nota succitata si può in sostanza enunciare nel seguente modo :

« Data un'espressione  $F$  del tipo invariante omogenea in ciascuna serie di « coefficienti e di variabili, che sia irriducibile, cioè non sia il prodotto di due « altre espressioni dello stesso tipo, e che sia identicamente zero, essa potrà verificarsi con processo sempre intero solo con *identità-zero* ».

O anche :

« Si potranno sempre alla detta espressione  $F$  aggiungere e togliere un certo « numero di termini, e raggrupparli in modo da costituire una somma di parti « ciascuna delle quali contenga per fattore un' *identità-zero* ».

Quando noi a pag. 5 della Nota abbiamo osservato che in tante parti può scomporsi  $F$  quanto è il numero degli elementi meno tre, s'intende naturalmente che tale è il numero a meno però di applicazioni dello sviluppo di Gordan.

Ora l'applicazione di sviluppi di Gordan corrisponde a far uso di un certo numero di *identità-zero*; possiamo quindi concludere che il numero richiesto delle parti è propriamente quanto è il numero degli elementi meno tre, più il numero  $\sigma$  delle *identità-zero* che corrispondono agli sviluppi di Gordan occorrenti.

Questo numero  $\sigma$  può riconoscersi *a priori* dalla semplice ispezione dei vari termini di  $F$ .

Così p. e. nel caso da noi considerato, dalla semplice ispezione dei valori di  $G_2, G'_2$ , si ricava che per applicarvi gli sviluppi di Gordan, non occorrono che solo le due *identità-zero*

$$\left. \begin{aligned} (ac) (xy) - a_x c_y + a_y c_x &= 0 \\ (bc) (xy) - b_x c_y + b_y c_x &= 0 \end{aligned} \right\} (\alpha).$$

Nella Nota succitata, siamo giunti a scomporre F, a meno di sviluppi di Gordan in due termini:

$$\begin{aligned} & (ab) (xy)^2 \Delta_y \{ (ca) b_x - (bc) a_x \} \{ (ac) b_x + (cb) a_x + (ba) c_x \} \quad (*) \\ & = \frac{1}{2} (ab) (xy)^2 \{ (ca) b_y - (bc) a_y \} \{ (ac) b_x + (cb) a_x + (ba) c_x \} + \\ & + \frac{1}{2} (ab) (xy)^2 \{ (ca) b_x - (bc) a_x \} \{ (ac) b_y + (cb) a_y + (ba) c_y \}. \end{aligned}$$

Poichè gli effettuati sviluppi di Gordan non equivalgono che solo alle due identità (a), ricaviamo che aggiungendo e togliendo opportunamente certi termini ad F, e raggruppandoli in modo conveniente, essa deve potersi ridurre a sole quattro parti ciascuna contenente per fattore una delle quattro suddette identità-zero.

Infatti è facile verificare che identicamente :

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} (ab) (xy)^2 \{ (ca) b_y - (bc) a_y \} \{ (ac) b_x + (cb) a_x + (ba) c_x \} \\ & + \frac{1}{2} (ab) (xy)^2 \{ (ca) b_x - (bc) a_x \} \{ (ac) b_y + (cb) a_y + (ba) c_y \} \\ & + \frac{1}{2} (ab)^2 (xy) \{ b_y c_x + b_x c_y \} \{ (xy) (ca) + c_y a_x - c_x a_y \} \\ & + \frac{1}{2} (ab)^2 (xy) \{ a_y c_x + a_x c_y \} \{ (xy) (cb) + c_y b_x - c_x b_y \}. \end{aligned}$$

---

(\*) Per una disavvertenza questa formola e le seguenti furono stampate inesattamente. Il paziente lettore le avrà già corrette da sè.

---

# SULLE LINEE A DOPPIA CURVATURA

PER

GEMINIANO PIRONDINI.



## § 1.

Determiniamo le curve nelle quali i piani osculatori sono equidistanti da un punto. Se  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ,  $(\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu)$ ,  $(\cos l, \cos m, \cos n)$  sono i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale della curva  $L$ , la distanza del piano osculatore nel punto  $(x, y, z)$  dall'origine delle coordinate è  $\Sigma x \cos l$ ; dovremo dunque avere :

$$(1) \quad \Sigma x \cos l = \text{costante} = a$$

la quale, colla derivazione e coll'applicazione delle note formole di Serret, dà :

$$(2) \quad \Sigma x \cos \lambda = 0.$$

Se poi  $i$  è l'angolo sotto il quale la curva è segata dai raggi vettori  $R$  che partono dalla origine  $O$ , abbiamo :

$$(3) \quad \Sigma x \cos \alpha = R \cos i.$$

Quadrando e sommando le (1) (2) (3) abbiamo :  $R^2 = a^2 + R^2 \cos^2 i$ , da cui

$$(4) \quad R \sin i = a.$$

Ora se sviluppiamo il cono che proietta la linea  $L$  da  $O$ , per la curva piana avrà pure luogo la relazione precedente e se  $u$  e l'angolo polare, si ha :

$$\sin i = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{dR}{du}\right)^2}}$$

e la (4) diviene :

www.libtool.com.cn

$$\frac{adR}{R \sqrt{R^2 - a^2}} = du.$$

Integrando e dando alla costante arbitraria un valore conveniente, si ottiene:

$$R \cos u = a ;$$

la trasformata di L è quindi una retta e la L è geodetica sul cono che la proietta da O.

Se viceversa prendiamo una geodetica qualunque di un cono col vertice in O, deve per essa essere soddisfatta una relazione della forma (4); inoltre è soddisfatta (2), poichè in questo caso la normale principale della curva è perpendicolare al raggio vettore R; la (3) è soddisfatta pure, dunque deve essere soddisfatta (1), cioè i piani osculatori sono equidistanti da O.

Dunque: « *Le sole curve nelle quali i piani osculatori sono equidistanti da un punto sono le geodetiche dei coni che hanno il vertice in quel punto* ».

Vediamo quali sono le linee nelle quali i piani normali sono equidistanti da un punto. Se tale punto è l'origine delle coordinate, la condizione da verificare è nel nostro caso:  $\sum x \cos \alpha = a$ , dalla quale si deduce:

$$\sum \frac{x}{R} \cos \alpha = \frac{a}{R}$$

ma il 1° membro è  $\cos i$ , essendo  $i$  l'angolo sotto il quale la curva è segata dal raggio vettore, dunque dobbiamo avere

$$\cos i = \frac{a}{R},$$

la quale relazione sarà anche soddisfatta per la curva piana  $l$  in cui si trasforma L per lo sviluppo del cono che la proietta dall'origine.

Avendosi  $\cos i = \frac{R'}{\sqrt{R^2 + R'^2}}$ , essendo  $R'$  la derivata di R rapporto all'angolo polare  $u$ , si ha:

$$\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{aR} = du$$

la quale coll'integrazione ci offre:

$$u = \frac{1}{a} \sqrt{R^2 - a^2} + \text{arc. sen} \left( \frac{a}{R} \right),$$

equazione polare di una sviluppante di cerchio. La curva  $L$  è quindi sul cono una traiettoria ortogonale delle geodetiche tangenti a una traiettoria ortogonale delle generatrici; questa curva si può evidentemente chiamare sviluppante geodetica di questa traiettoria.

Dunque: « *Le sole curve nelle quali i piani normali sono equidistanti da un punto sono le sviluppanti geodetiche delle traiettorie ortogonali delle generatrici dei coni che hanno il vertice in quel punto* ».

Osservando che i piani normali di una curva sono i piani osculatori dello spigolo di regresso della sviluppabile polare, si potrà dire: « *Le sviluppanti geodetiche delle traiettorie ortogonali delle generatrici di un cono sono le uniche curve che abbiano per spigolo di regresso della sviluppabile polare una geodetica di un cono* ».

Derivando la  $\Sigma x \cos \alpha = a$  rapporto all'arco di  $L$ , si ha:

$$\Sigma \cos^2 \alpha + \Sigma x \frac{\cos \lambda}{\rho} = 0$$

da cui:

$$R \Sigma \frac{x}{R} \cos \lambda = -\rho$$

ossia:

$$R \cos(R, \rho) = -\rho.$$

Dunque: « *Il luogo dei centri di curvatura della curva  $L$ , si ottiene proiettando il vertice del cono sulle normali principali della curva* ».

Osservando poi che i piani rettificanti di una linea sono i piani osculatori della sviluppabile rettificatrice, si avrà: « *Le sole curve nelle quali i piani rettificanti siano equidistanti da un punto sono le geodetiche delle sviluppabili il cui spigolo di regresso è una geodetica di un cono qualunque col vertice in quel punto* ».

Avendosi per queste curve  $\Sigma x \cos \lambda = a$ , sarà:

$$\Sigma x \frac{\cos \alpha}{\rho} + \Sigma x \frac{\cos l}{r} = 0$$

essendo  $\rho, r$  il raggio di curvatura e di torsione della linea; notando che

$$R \Sigma \frac{x}{R} \cos \alpha, \quad R \Sigma \frac{x}{R} \cos l$$

sono le proiezioni  $P_t, P_b$  del raggio vettore  $R$  sulla tangente e sulla binormale,

la precedente diviene :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{P_t}{\rho} + \frac{P_b}{r} = 0.$$

Dunque : « *Nelle curve in cui i piani rettificanti sono equidistanti da un punto, le proiezioni del raggio vettore sulle tangenti e sulle binormali sono proporzionali al raggio di curvatura e al raggio di torsione* ».

§ 2.

Proponiamoci di determinare tutte quelle linee le quali, muovendosi di moto elicoidale intorno a una retta, generano un elicoide rigato.

Presa per asse delle  $z$  la retta intorno alla quale avviene il moto elicoidale, sia  $L$  la curva generatrice,  $L_1$  l'elica circolare linea di stringimento della superficie ed  $l, l_1$  le proiezioni delle precedenti sul piano  $z=0$ . Indichiamo con  $p$  il parametro del moto elicoidale, con  $h$  il raggio del cerchio  $l_1$  e con  $\theta$  l'inclinazione costante delle generatrici sull'asse dell'elicoide.

Siano  $A, B$  due punti consecutivi di  $L$  e siano  $(A_1, B_1), (a, b), (a_1, b_1)$  i punti che corrispondono ad essi sulle linee  $L_1, l, l_1$ ; proiettando  $A_1$  sulla  $Aa$  in  $A_0$ , abbiamo :

$$AA_0 = A_1 A_0 \cotg \theta = a_1 a \cotg \theta = \sqrt{oa^2 - oa_1^2} \cdot \cotg \theta,$$

essendo  $o$  l'origine degli assi.

Indicando quindi con  $R$  il raggio vettore  $oa$  di  $l$ , si avrà

$$AA_0 = \sqrt{R^2 - h^2} \cotg \theta;$$

sarà dunque

$$A_1 a_1 = A_0 a = Aa - AA_0 = z - \sqrt{R^2 - h^2} \cotg \theta.$$

La traslazione elementare  $dt$  del moto elicoidale è perciò data come segue :

$$dt = d(A_1 a_1) = dz - d \sqrt{R^2 - h^2} \cdot \cotg \theta.$$

La rotazione infinitesima  $d\omega$  è manifestamente misurata dall'angolo  $\widehat{a_1 o b_1}$  che formano fra loro i raggi del cerchio  $l_1$  che vanno ai due punti consecutivi  $a_1, b_1$ ; quindi

$$d\omega = d(\widehat{x o a_1}).$$

Se chiamiamo  $u$  l'angolo polare di  $l$  contato a partire dall'asse delle  $x$ , abbiamo:  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\widehat{xoa_1} = \widehat{xoa} - \widehat{a_1oa} = u - \widehat{a_1oa};$$

e siccome

$$\cos(\widehat{a_1oa}) = \frac{oa_1}{oa} = \frac{h}{R},$$

sarà :

$$\widehat{a_1oa} = \arccos\left(\frac{h}{R}\right).$$

Dunque :

$$\widehat{xoa_1} = u - \arccos\left(\frac{h}{R}\right)$$

da cui :

$$d\omega = du - d \arccos\left(\frac{h}{R}\right)$$

$$p = \frac{dl}{d\omega} = \frac{dz - d\sqrt{R^2 - h^2} \cotg \theta}{du - d \arccos\left(\frac{h}{R}\right)}.$$

Di qui si deduce :

$$dz = p du + d\sqrt{R^2 - h^2} \cdot \cotg \theta - p d \arccos\left(\frac{h}{R}\right);$$

integrando (e mettendo a zero la costante), si ha :

$$(5) \quad z = pu + \sqrt{R^2 - h^2} \cdot \cotg \theta - p \arccos\left(\frac{h}{R}\right).$$

Si potrà dunque enunciare il teorema : « *Le sole curve che, muovendosi di moto elicoidale di parametro  $p$  intorno all'asse delle  $z$  generano un elicoide rigato sono quelle rappresentate dalle equazioni :*

$$x = R \cos u \quad , \quad y = R \sin u \quad , \quad z = pu + \sqrt{R^2 - h^2} \cotg \theta - p \arccos\left(\frac{h}{R}\right)$$

dove  $h$  e  $\theta$  sono rispettivamente la minima distanza delle generatrici dall'asse e l'inclinazione di esse sull'asse.

Se l'elicoide è a direttrice rettilinea  $h = 0$  e quindi :

www.libtool.com.cn

$$Z = pu + R \cotg \theta$$

Se l'elicoide rigato è a piano direttore  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e quindi :

$$z = pu - p \operatorname{arc.} \cos \left( \frac{h}{R} \right).$$

Se l'elicoide rigato è quello ad area minima  $h = 0$  ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e quindi :

$$z = pu.$$

Nel caso dell'elicoide gobbo ad area minima mettiamo la condizione che la curva generatrice sia un'elica d'un cilindro colle generatrici parallele all'asse ; se  $i$  è l'angolo sotto il quale l'elica sega le generatrici del cilindro, le coordinate dei suoi punti sono :

$$(6) \quad x = R \cos u \quad , \quad y = R \sin u \quad , \quad z = \cotg i \int \sqrt{R^2 + R'^2} du.$$

Nel presente caso dovrà dunque essere :

$$p \operatorname{tang} i = \sqrt{R^2 + R'^2}$$

che con una facile integrazione offre :

$$R = p \operatorname{tang} i \cdot \operatorname{sen} u ,$$

equazione polare di una circonferenza di raggio  $\frac{p}{2} \operatorname{tang} i$  , passante pel polo.

Dunque : « Sull'elicoide rigato ad area minima vi sono infiniti sistemi di eliche circolari non traiettorie ortogonali delle generatrici ; esse sono descritte sopra cilindri passanti tutti per l'asse dell'elicoide ».

Si può anche dire : « Se un'elica descritta sopra un cilindro circolare di raggio  $r$  e inclinata dell'angolo  $i$  sulle generatrici si fa muovere di moto elicoidale di parametro  $p = 2r \cotg i$  intorno a una generatrice qualunque del cilindro, essa genera una porzione di un elicoide rigato ad area minima ».

Supponendo poi  $p=0$ , l'elicoide degenera nell'iperboloide gobbo di rivoluzione e si ha perciò il teorema : « Le sole linee le quali , ruotando intorno all'asse delle  $z$  generano un iperboloide rigato di rivoluzione sono quelle rappresentate

dalle equazioni :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x = R \cos u \quad , \quad y = R \sin u \quad , \quad z = \sqrt{R^2 - h^2} \cotg \theta$$

Confrontando questa terza equazione colla terza delle (6), si ha che esse coincidono quando

$$\frac{RR' \cotg \theta}{\sqrt{R^2 - h^2}} = \cotg i \cdot \sqrt{R^2 + R'^2} .$$

Quest'ultima relazione, potendosi scrivere :

$$R' \sqrt{(\cotg^2 \theta - \cotg^2 i) R^2 + h^2 \cotg^2 i} = R \sqrt{R^2 + R'^2} \cotg i$$

ci dà :

$$\text{tang } i \int \frac{\sqrt{R^2 (\cotg^2 \theta - \cotg^2 i) + h^2 \cotg^2 i}}{R \sqrt{R^2 + R'^2}} dR = u + \text{costante}$$

la quale rappresenta la sezione retta dei cilindri le cui eliche possono essere collocate sopra degli iperboloidi di rivoluzione a una falda aventi l'asse parallelo alle generatrici del cilindro.

Si può facilmente vedere quando l'elicoide rigato sarà sviluppabile, ovvero quando sarà formato dalle binormali di un'elica circolare. Si osservi che se  $i$  è l'angolo sotto il quale le generatrici dell'elicoide segano l'elica linea di stringimento tale elica segherà le generatrici del proprio cilindro sotto l'angolo  $\theta - i$ ; dunque avremo per la traslazione infinitesima  $dt$

$$dt = ds \cdot \cos(\theta - i)$$

essendo  $s$  l'arco elementare dell'elica. D'altronde la rotazione infinitesima è anche misurata dall'angolo di contingenza  $\frac{ds_0}{h}$  del cerchio proiezione dell'elica; dunque

$$d\omega = \frac{ds_0}{h} = \frac{\text{sen}(\theta - i)}{h} ds .$$

Perciò :

$$p = h \cotg(\theta - i) .$$

Ora perchè l'elicoide sia sviluppabile è necessario e sufficiente che sia  $i = 0$  e allora :

$$p = h \cotg \theta ;$$

siccome di qui si trae:  $h = p \operatorname{tang} \theta$ , sarà:

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$z = pu + \sqrt{R^2 \operatorname{cotg}^2 \theta - p^2} - p \operatorname{arc.cos} \left( \frac{p \operatorname{tg} \theta}{R} \right).$$

**Dunque:** *Le sole curve le quali, muovendosi di moto elicoidale di parametro  $p$  intorno all'asse delle  $z$  generano un elicoide sviluppabile sono quelle rappresentate dalle equazioni:*

$$x = R \cos u \quad , \quad y = R \operatorname{sen} u \quad , \quad z = pu + \sqrt{R^2 \operatorname{cotg}^2 \theta - p^2} - p \operatorname{arc.cos} \left( \frac{p \operatorname{tg} \theta}{R} \right).$$

L'elicoide rigato sarà formato dalle binormali di un'elica quando  $i = \frac{\pi}{2}$ , cioè quando  $p = -h \operatorname{tg} \theta$ ; di qui si ricava:

$$h = -p \operatorname{cotg} \theta$$

e perciò

$$z = pu + \sqrt{R^2 - p^2 \operatorname{cotg}^2 \theta} \operatorname{cotg} \theta - p \operatorname{arc.cos} \left( \frac{-p \operatorname{cotg} \theta}{R} \right).$$

**Dunque:** *Le sole curve le quali, muovendosi di moto elicoidale di parametro  $p$  intorno all'asse delle  $z$  generano un elicoide luogo delle binormali di una elica circolare sono quelle rappresentate dalle equazioni:*

$$x = R \cos u \quad , \quad y = R \operatorname{sen} u \quad , \quad z = pu + \sqrt{R^2 - p^2 \operatorname{cotg}^2 \theta} \cdot \operatorname{cotg} \theta - p \operatorname{arc.cos} \left( \frac{-p \operatorname{cotg} \theta}{R} \right).$$

Nel caso generale l'intersezione della superficie elicoidale col piano coordinato  $z = 0$  ha per equazione polare:

$$-u = \frac{\operatorname{cotg} \theta}{p} \sqrt{R^2 - h^2} - \operatorname{arc.cos} \left( \frac{h}{R} \right)$$

la quale rappresenta una sviluppante di cerchio nel solo caso in cui:

$$p = h \operatorname{cotg} \theta.$$

**Dunque:** *Le sole elicoidi rigate nelle quali la sezione normale all'asse è una sviluppante di cerchio sono le elicoidi sviluppabili.*

Si può facilmente determinare quelle linee le quali in un dato movimento elicoidale generano un elicoide rigato, rimanendo nello stesso tempo geodetiche e

traiettorie ortogonali delle eliche. Infatti se queste ultime condizioni sono verificate si deve avere, secondo quanto ho altrove dimostrato (\*)

$$z = -\frac{1}{p} \int R^2 du$$

la quale, confrontata colla (5) dà :

$$R \sqrt{R^2 - h^2} (p^2 + R^2) - pR' (ph - R^2 \cotg \theta) = 0.$$

Integrando si ottiene :

$$p \int \frac{ph - R^2 \cotg \theta}{R(R^2 + p^2) \sqrt{R^2 - h^2}} dR = u + \text{cost.},$$

che rappresenta la proiezione della curva sul piano  $z = 0$  ; avuta tale proiezione, è completamente nota la curva domandata.

Un'evolvente qualunque di essa è la curva più generale avente la proprietà di rimanere, nel movimento elicoidale di parametro  $p$  intorno all'asse delle  $z$ , costantemente linea di curvatura di un elicoide nel quale una delle falde dell'evoluta è un elicoide rigato.

Se si suppone che l'elicoide abbia una direttrice rettilinea, allora  $h = 0$  e la precedente diviene

$$p \cotg \theta \int \frac{dR}{R^2 + p^2} = a - u$$

con  $a$  costante ; eseguendo la quadratura, si ottiene :

$$\text{arc.tg} \frac{R}{p} = \text{tg} \theta \cdot (a - u),$$

da cui :

$$R = p \text{ tang} (\text{tg} \theta \cdot a - \text{tg} \theta \cdot u).$$

Mettendo  $a \cdot \text{tg} \theta = \frac{\pi}{2}$ , si ha :

$$R = p \cotg (u \text{ tang} \theta).$$

---

(\*) Questo Giornale, anno 1884.

Sia  $L$  (\*) una linea qualunque  $(s, \rho, r)$  ed  $L_1(s_1, \rho_1, r_1)$  lo spigolo di regresso della sua sviluppabile rettificatrice  $\Sigma$ ; sia  $i$  l'angolo sotto il quale  $L$  sega le generatrici di  $\Sigma$  e  $T$  il segmento di generatrice compreso fra le curve  $L, L_1$ .

Se  $A_1A, B_1B$  sono due generatrici consecutive di  $\Sigma$  e se col centro  $B_1$  e col raggio  $B_1A$  descriviamo l'arco  $AM$  compreso fra quelle generatrici, abbiamo:

$$BM = B_1M - B_1B = B_1A - B_1B = B_1A_1 + A_1A - B_1B = B_1A_1 - (B_1B - A_1A) = ds_1 - dT.$$

Notando quindi che per le geodetiche delle sviluppabili abbiamo  $\cotg i = \frac{\rho}{r}$ , sar :

$$(7) \quad \frac{\rho}{r} = \cotg i = \frac{MB}{MA} = \frac{ds_1 - dT}{T \frac{ds_1}{\rho_1}} = \frac{\rho_1}{T} \left( 1 - \frac{dT}{ds_1} \right);$$

siccome poi:  $\sen i = \frac{r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}$ , si avr :

$$(8) \quad ds = AB = \frac{MA}{\sen i} = \frac{T \sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho_1 r} ds_1.$$

Le normali principali di  $L$  sono parallele alle binormali di  $L_1$ , quindi l'angolo infinitesimo di due normali principali consecutive di  $L$    eguale all'angolo di torsione di  $L_1$ ; dunque

$$(9) \quad \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho r} ds = \frac{ds_1}{r_1}.$$

Notando infine che l'angolo di contingenza dello spigolo di regresso  $L_1$  della sviluppabile rettificatrice di  $L$     $d \operatorname{arc.tg} \left( \frac{r}{\rho} \right)$ , la (8) diviene:

$$ds = \frac{T \sqrt{\rho^2 + r^2}}{r} d \operatorname{arc.tg} \left( \frac{r}{\rho} \right) = \frac{T d \left( \frac{r}{\rho} \right)}{\frac{r}{\rho} \sqrt{1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2}}.$$

(\*) Il lettore   pregato fare la figura.

da cui :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(10) \quad T = \frac{\frac{r}{\rho} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}}{\frac{d}{ds} \left(\frac{r}{\rho}\right)} .$$

Dalle relazioni precedenti possiamo ricavare il valore di  $\rho_1, r_1$  in funzione di  $\rho, r$ ; sostituendo in (7) il valore di  $ds_1$  tratto dalla (8), si ha :

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho_1 r - T \frac{dT}{ds} \sqrt{\rho^2 + r^2}}{Tr} ,$$

da cui si trae :

$$(11) \quad \rho_1 = \frac{T \left[ 1 + \frac{dT}{ds} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \right]}{\frac{r}{\rho}} .$$

Sostituendo tale valore nella (9), si ha :

$$(12) \quad r_1 = \frac{r \left[ 1 + \frac{dT}{ds} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \right]}{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} .$$

Dunque : *Il raggio di curvatura  $\rho_1$  e quello di torsione  $r_1$  dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di una linea sono dati dalle (11) (12) dove T ha il valore (10).*

Da queste formole si ottengono alcune conseguenze notevoli.

Nelle flessioni delle sviluppabili che ne mantengono rettilinee le generatrici, non varia il rapporto  $\frac{r}{\rho}$  relativo a una geodetica ; quindi per le (11), (12) si manterrà inalterato tanto  $\rho_1$  quanto il rapporto  $\frac{r_1}{r}$ ; se quindi consideriamo due geodetiche  $L_a, L_b$  della  $\Sigma$ , abbiamo che nelle dette flessioni rimangono invariati i rapporti  $\frac{r_1}{r_a}, \frac{r_1}{r_b}$  e quindi anche il rapporto  $\frac{r_a}{r_b}$ ; ma deve pure rimanere invariato tanto il rapporto  $\frac{r_a}{\rho_a}$  quanto l'altro  $\frac{r_b}{\rho_b}$ , quindi rimarrà pure invariato il rapporto  $\frac{\rho_a}{\rho_b}$ .

Dunque : *Considerando sopra una sviluppabile due geodetiche qualunque ,*

tanto il rapporto dei loro raggi di curvatura quanto quello dei loro raggi di torsione. nei punti dove esse sono incontrate da una stessa generatrice, rimangono invariati in qualsivoglia flessione della sviluppabile che ne mantenga rettilinee le generatrici.

La condizione necessaria e sufficiente perchè la sviluppabile  $\Sigma$  sia un cono è che lo spigolo di regresso  $L_1$  si riduca a un punto; tale condizione è verificata se  $\rho_1 = r_1 = 0$ , cioè se :

$$1 + \frac{dT}{ds} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} = 0.$$

Ponendo  $\frac{r}{\rho} = v$ , poichè  $T = \frac{v \sqrt{1 + v^2}}{v'}$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{v'^2(1 + 2v^2) - vv''(1 + v^2)}{v'^2 \sqrt{1 + v^2}}$$

la precedente diviene :

$$(1 + v^2)(2v'^2 - vv'') = 0.$$

Non potendo essere nullo il 1° fattore, deve essere :

$$2v'^2 - vv'' = 0$$

la quale, con una prima integrazione dà :

$$v' = av^2$$

Di qui si trae :

$$\frac{dv}{v^2} = a ds,$$

che integrata offre :

$$\frac{1}{v} = b - as.$$

Notando che  $\frac{1}{v} = \frac{\rho}{r}$ , si ha il teorema già dimostrato per altra via (\*). *Le geodetiche dei coni sono caratterizzate dalla proprietà che il rapporto del raggio di curvatura al raggio di torsione è una funzione lineare dell'arco della linea.*

---

(\*) Questo Giornale 1885.

Se mettiamo la condizione che  $L_1$  sia un'elica, deve essere  $\frac{r_1}{\rho_1} = \text{cost.} = a$  e quindi :

$$a = \frac{r_1}{\rho_1} = \frac{\rho_1^2}{(\rho^2 + r^2)T} = \frac{\rho^2 r^2}{r(\rho^2 + r^2)} \frac{\frac{d}{ds} \left( \frac{r}{\rho} \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2}}$$

da cui :

$$\frac{d}{ds} \text{arctg} \left( \frac{r}{\rho} \right) = a \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Tale è la condizione che deve essere verificata fra i raggi  $\rho, r$  di una linea perchè essa sia geodetica di una sviluppabile a cono direttore di rivoluzione (l. c.).

Consideriamo il caso di  $T = \text{cost.} = a$ ; notando che  $\text{tang} i = \frac{r}{\rho}$ , avremo

$$a = \frac{\frac{r}{\rho} \sqrt{1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2}}{\frac{d}{ds} \left( \frac{r}{\rho} \right)} = \frac{\text{sen } i}{\frac{di}{ds}}, \quad \text{ossia :} \quad \frac{a di}{\text{sen } i} = ds,$$

che integrata dà :

$$a \log. \text{tg} \frac{1}{2} i = s + a \log m,$$

con  $m$  costante arbitraria.

Di qui deducendosi :

$$\text{cotg } i = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{2m} (e^{-\frac{s}{a}} - m^2 e^{\frac{s}{a}})$$

avremo : *La relazione scritta caratterizza le geodetiche di quelle sviluppabili le quali, nel distendersi sul piano, riducono lo spigolo di regresso a una trattrice e la geodetica all'assintoto di questa curva.*

Consideriamo le sviluppabili le cui geodetiche verificano la relazione  $\frac{di}{ds} = \frac{1}{a}$ , con  $a$  costante; la curva piana in cui si trasforma lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice si può considerare come l'involuppo di una retta che ruota uniformemente intorno a un punto nel mentre che esso si sposta di moto uniforme sopra una retta  $R$ ; tale involuppo è una cicloide generata da un cerchio di raggio  $\frac{1}{2} a$  e la retta  $R$  ne è la tangente al vertice.

Potremo dunque dire: *La relazione  $\frac{\rho}{r} = \cotg\left(\frac{s+b}{a}\right)$  caratterizza le geodetiche delle sviluppabili le quali, quando si applicano al piano, trasformano lo spigolo di regresso in una cicloide (generata da un cerchio di raggio  $\frac{a}{2}$ ) e la geodetica nella tangente al vertice della curva.*

Se trasformiamo l'espressione di  $r_1$ , ponendo come prima  $\frac{r}{\rho} = v$ , si trova

$$r_1 = \frac{r(2v'^2 - vv'')}{v'^2};$$

per cui, se sarà  $\frac{r_1}{r} = \text{costante} = a$ , avremo:

$$v'^2(2 - a) = vv''$$

la quale potendosi scrivere:

$$(2 - a) \frac{v'}{v} = \frac{v''}{v'}$$

con una prima integrazione offre:

$$v' = mv^{2-a}.$$

Di qui si deduce:

$$v^{a-2} \cdot dv = m ds$$

e quindi (quando sia  $a > 1$ ), avremo:

$$v^{a-1} = (ms + n)(a - 1) = ps + q$$

dalla quale si ricava:

$$(13) \quad v = [ps + q]^{\frac{1}{a-1}}.$$

Se poi  $a = 1$ , risulta

$$\log v = ms + \log n,$$

da cui:

$$(14) \quad v = ne^{ms}$$

Dunque: Se per una curva L il rapporto  $\frac{r_1}{r}$  del raggio di torsione dello spi-

golo di regresso della sviluppabile rettificatrice al raggio di torsione di  $L$  è una costante diversa da 1, la curva  $L$  è tale che in ogni suo punto è verificata la relazione

$$\frac{r}{\rho} = (ps + q)^{\frac{1}{a-1}}$$

e viceversa.

Se poi quel rapporto è eguale ad 1, in ogni punto della curva  $L$  è verificata la relazione  $\frac{r}{\rho} = ne^{ms}$  e viceversa.

Determiniamo tanto nel caso (13) quanto nel (14) la curva piana in cui si trasforma lo spigolo di regresso  $L_1$  della sviluppabile  $\Sigma$ , allorchè questa si distende sul piano.

Supponiamo di aver fatto un tale sviluppo e di avere preso per asse delle  $x$  la retta in cui si trasforma la geodetica  $L$  e come origine degli assi il punto dal quale si contano gli archi  $s$  di  $L$ .

Sia poi  $L_0$  la curva piana in cui si è trasformato lo spigolo di regresso  $L_1$ ; l'arco  $s$  di  $L$  viene ad essere (nella figura piana) la porzione di asse delle  $x$  intercetta fra l'origine e il punto di tragitto della tangente alla  $L_0$ ; dunque evidentemente per passare dalla figura dello spazio alla figura piana, si deve sostituire ad  $s$  l'espressione

$$\frac{x dy - y dx}{dy}$$

Inoltre l'angolo  $i$  viene ad essere quello sotto il quale le tangenti di  $L_0$  segnano l'asse delle  $x$  e siccome  $\frac{r}{\rho} = \text{tangi } i$ , così si deve al posto di  $\frac{r}{\rho}$  mettere  $\frac{dy}{dx}$ .

Dunque nel caso generale (13) l'equazione differenziale della  $L_0$  viene ad essere:

$$\frac{dy}{dx} = \left[ p \frac{x dy - y dx}{dy} + q \right]^{\frac{1}{a-1}}$$

Consideriamo il caso di  $a=2$ ; allora la precedente diviene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (px + q) \frac{dy}{dx} - py$$

la quale, risolta rapporto ad  $y$ , dà:

$$y = \alpha y' + \frac{q y' - y'^2}{p}$$

L'integrale generale è :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$y = cx + \frac{qc - c^2}{p}$$

che rappresenta una retta ; e vi è inoltre una soluzione singolare che si ottiene colla eliminazione di  $y'$  fra la precedente relazione e l'altra :

$$x + \frac{q - 2y'}{n} = 0.$$

Tale eliminazione conduce all'equazione :

$$\left(x + \frac{q}{p}\right)^2 = \frac{4}{p} y$$

che rappresenta una parabola.

Dunque : *Le curve gobbe per le quali  $\frac{r}{\rho} = ps + q$  hanno un raggio di torsione metà del raggio di torsione dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice ; quando tale sviluppabile si distende sul piano, il suo spigolo di regresso si riduce a una parabola e la linea data alla tangente nel vertice di essa.*

Nel caso di (14) si ottiene colle precedenti sostituzioni

$$\frac{dy}{dx} = ne^{\frac{mxy' - y}{y'}}$$

da cui si ricava :

$$\log y' = \log n + \frac{mxy' - my}{y'}$$

che risolta rapporto ad  $y$  dà :

$$y = xy' - \frac{y' \log y'}{m} + \frac{y' \log n}{m}.$$

L'integrale generale di quest'equazione differenziale è :

$$y = c \left( x + \log \sqrt{\frac{n}{c}} \right)$$

che, rappresentando una retta, non ha nel nostro caso alcuna importanza ; si ha poi una soluzione singolare che risulta dall'eliminazione di  $y'$  fra la precedente

relazione e l'altra  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x + \frac{1}{m} (\log n - \log y' - 1) = 0.$$

Tale soluzione singolare è dunque :

$$my = ne^{mx-1}$$

che rappresenta una curva logaritmica coll'assintoto coincidente coll'asse delle  $x$ .

Dunque : *Le sole curve gobbe nelle quali  $\frac{r}{\rho} = ne^{mx}$  hanno il raggio di torsione costantemente eguale al raggio di torsione dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice : quando tale sviluppabile si distende sul piano, lo spigolo di regresso diviene una curva logaritmica e la geodetica si trasforma nell'assintoto di essa.*

#### § 4.

Tenendo ferme tutte le precedenti indicazioni, si supponga che  $L$  sia una sviluppante di  $L_1$ , cioè una traiettoria ortogonale delle tangenti di  $L_1$ .

Applicando le considerazioni del § 6, introducendovi inoltre la particolarizzazione  $t = \frac{\pi}{2}$ , si ha :

$$(15) \quad ds = T \frac{ds_1}{\rho_1}, \quad \rho = \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2}};$$

quest'ultima ci dà il raggio di curvatura di  $L$ .

Determiniamo ora il raggio di torsione di  $L$ ; essendo le tangenti di  $L$  parallele alle normali principali di  $L_1$ , la binormale di  $L$  viene ad essere parallela alla minima distanza di due normali principali consecutive di  $L_1$ ; ma in una curva qualunque la minima distanza di due normali principali consecutive è parallela alla retta rettificatrice della curva; perciò l'angolo di torsione di  $L$  è eguale all'angolo di contingenza dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di  $L_1$ .  
 Dunque :

$$\frac{ds}{r} = d \operatorname{arc.tg} \left( \frac{r_1}{\rho_1} \right)$$

e perciò

$$(16) \quad r = \frac{T}{\rho_1 \frac{d}{ds_1} \operatorname{arc.tg} \left( \frac{r_1}{\rho_1} \right)}.$$

La (16) mostra che la condizione onde sia  $\frac{1}{r} = 0$  è equivalente all'altra che sia  $\frac{r_1}{\rho_1}$  costante; quindi si ha il noto teorema: *Le sole curve che hanno una sviluppante piana sono le eliche.*

Avendosi:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2}}} \frac{d}{ds_1} \text{arc.tg} \left( \frac{r_1}{\rho_1} \right)$$

quando sia  $\frac{\rho}{r} = \text{cost.} = a$ , sarà:

$$\frac{d}{ds_1} \text{arctg} \left( \frac{r_1}{\rho_1} \right) = a \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2}}$$

Dunque: *Le sole curve che hanno un'elica per sviluppante sono le geodetiche delle sviluppabili a cono direttore di rivoluzione.*

Passiamo ora a risolvere le (15) (16) rapporto a  $\rho_1, r_1$ ; dalla (15) si deduce

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{\rho}{\sqrt{T^2 - \rho^2}}$$

e sostituendo tale valore in (16) coll'osservare che  $ds_1 = dT$ , si ottiene:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{r}{T} \frac{d}{dT} \text{arc.tg} \left( \frac{\rho}{\sqrt{T^2 - \rho^2}} \right),$$

e quindi:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\sqrt{T^2 - \rho^2}}{\rho} \frac{r}{T} \frac{d}{dT} \text{arc.tg} \left( \frac{\rho}{\sqrt{T^2 - \rho^2}} \right)$$

Conviene però dare a queste espressioni altra forma, introducendo il valore di  $T$  espresso per gli elementi di  $L$ . Se  $\theta$  è l'angolo sotto il quale i piani osculatori di  $L$  segano la sviluppabile e se notiamo che i segmenti  $T$  rappresentano i raggi di curvatura geodetica di  $L$ , avremo:

$$T = \frac{\rho}{\cos \theta}, \quad \text{da cui:} \quad \text{arc.tg} \frac{\rho}{\sqrt{T^2 - \rho^2}} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Ora se applichiamo la (24) del § 6 facendovi però  $i = \frac{\pi}{2}$ , si deduce subito:

$$\text{tg} \theta = \frac{\rho_1}{r_1}, \quad \text{da cui:} \quad d\theta = d \text{arc.tg} \left( \frac{\rho_1}{r_1} \right).$$

Se  $d\omega$  è l'angolo di contingenza dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di  $L_1$ , abbiamo

$$d\omega = d \operatorname{arc.tg} \left( \frac{r_1}{\rho_1} \right) = - d \operatorname{arc.tg} \left( \frac{\rho_1}{r_1} \right) = - d\theta;$$

ma si è già osservato che l'angolo di contingenza dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di  $L_1$  è eguale all'angolo di torsione di  $L_1$ , dunque

$$d\theta = - \frac{ds}{r}$$

ed integrando

$$\theta = - \left( a + \int \frac{ds}{r} \right).$$

In forza di questi valori si ha per espressione di  $\rho_1$  e  $r_1$

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\cos^3 \left( a + \int \frac{ds}{r} \right)} \left[ \frac{d\rho}{ds} \cos \left( a + \int \frac{ds}{r} \right) + \frac{\rho}{r} \operatorname{sen} \left( a + \int \frac{ds}{r} \right) \right]$$

$$r_1 = \frac{\rho}{\operatorname{sen} \left( a + \int \frac{ds}{r} \right) \cos^2 \left( a + \int \frac{ds}{r} \right)} \left[ \frac{d\rho}{ds} \cos \left( a + \int \frac{ds}{r} \right) + \frac{\rho}{r} \operatorname{sen} \left( a + \int \frac{ds}{r} \right) \right].$$

Facciamo qualche applicazione di queste formole. Avendosi ad es.

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \left( a + \int \frac{ds}{r} \right)$$

la condizione che sia  $\frac{\rho_1}{r_1}$  costante è equivalente all'altra che sia  $\frac{1}{r} = 0$ .

Dunque: *Se una curva ha fra le sue evolute un'elica, la curva data è piana e tutte le sue evolute sono eliche (una sola degenerata in curva piana).*

Se la curva  $L_1$  è una geodetica di un cono, si deve avere:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = ms_1 + n$$

e potendosi scegliere l'origine degli archi  $s_1$  in modo che  $n = 0$  si potrà scrivere:

$$\operatorname{tg} \left( a + \int \frac{ds}{r} \right) = \frac{\rho_1}{r_1} = ms_1.$$

Ora  $s_1 = T + k$  con  $k$  costante, e se supponiamo  $k=0$  la linea  $L$  sarà quell'evolvente di  $L_1$  che incomincia dal punto di  $L_1$  che è l'origine degli archi  $s_1$  cioè dal punto di  $L_1$  più vicino al vertice del cono di cui essa è geodetica. In tal caso avendosi

$$s_1 = T = \frac{\rho}{\cos\left(a + \int \frac{ds}{r}\right)}$$

sarà :

$$\text{tang}\left(a + \int \frac{ds}{r}\right) = \frac{m\rho}{\cos\left(a + \int \frac{ds}{r}\right)}$$

ossia

$$m\rho = \text{sen}\left(a + \int \frac{ds}{r}\right).$$

Si conclude: *Le linee in tutti i punti delle quali è verificata la relazione  $m\rho = \text{sen}\left(a + \int \frac{ds}{r}\right)$  sono le sole che si possano considerare come evolventi di geodetiche coniche comincianti dal punto di queste che è più vicino al vertice del cono di cui esse sono geodetiche.*

CASO PARTICOLARE. Si ha un caso notevole supponendo che, essendo  $L_1$  una geodetica di un cono, sia inoltre  $L$  un'elica. Allora se  $i$  è l'angolo costante sotto il quale l'elica sega le generatrici del cilindro, abbiamo :

$$\frac{\rho}{r} = \text{cotg } i ,$$

da cui

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \text{cotg } i \quad , \quad \text{cotg } i \cdot ds = m \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - m^2 \rho^2}}$$

Integrando e mettendo a zero la costante arbitraria, il che non particolarizza i risultati, si ottiene :

$$s \cdot \text{cotg } i = - \frac{1}{m} \sqrt{1 - m^2 \rho^2}$$

dalla quale si deduce :

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{m^2} - \text{cotg}^2 i \cdot s^2}.$$

Ora se indichiamo con  $\rho_0, s_0$  il raggio di curvatura e l'arco della sezione retta

del cilindro che contiene l'elica  $L$ , abbiamo :

$$\rho_0 = \rho \operatorname{sen}^2 i \quad , \quad s_0 = s \cdot \operatorname{sen} i$$

$$\rho_0 = \operatorname{sen}^2 i \sqrt{\frac{1}{m^2} - \cotg^2 i \frac{s_0^2}{\operatorname{sen}^2 i}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4 i}{m^2} - \cos^2 i \cdot s_0^2}$$

la quale mostra che la sezione retta è un epicicloide.

Nel nostro caso si è messa la condizione che sia  $L$ , una geodetica di un cono; ma in generale le sviluppate delle eliche sono geodetiche di elicoidi sviluppabili (cioè di sviluppabili il cui spigolo di regresso è un'elica) e siccome fra i coni l'unico che si possa considerare come appartenente alla famiglia delle elicoidi sviluppabili è quello di rotazione, ne risulta che  $L$ , è una geodetica di un cono di rotazione.

Si ha dunque il teorema: *Fra le eliche, solamente quelle descritte sopra cilindri a sezione retta epicicloideale si possono considerare come evolventi di geodetiche di coni (necessariamente di rivoluzione), comincianti dal punto di tali curve situato più vicino al vertice.*

### § 5.

Data una linea  $L$  dello spazio facciamo passare per essa una superficie rigata e mettiamo la condizione che essa sia sviluppabile. Indicando nel modo solito gli elementi geometrici di  $L$ , con  $A, B, C$  gli angoli fatti dalle generatrici della superficie rispettivamente colla tangente, colla normale principale e colla binormale, e con  $R$  la distanza di un punto qualunque della superficie da  $L$  contata sulla generatrice, avremo per le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di un punto arbitrario della superficie.

$$\xi = x + R(\cos \alpha \cos A + \cos \lambda \cos B + \cos l \cos C), \quad \text{etc.}$$

Da queste si trae :

$$M = \sum \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{ds} (\cos \alpha \cos A + \cos \lambda \cos B + \cos l \cos C) = \frac{d \cos A}{ds} - \frac{\cos B}{\rho}$$

$$N^2 = \sum \left[ \frac{d}{ds} (\cos \alpha \cos A + \cos \lambda \cos B + \cos l \cos C) \right]^2$$

$$= \left( \frac{d \cos A}{ds} - \frac{\cos B}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{\cos A}{\rho} + \frac{\cos C}{r} + \frac{d \cos B}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d \cos C}{ds} - \frac{\cos B}{r} \right)^2.$$

Notando quindi che la condizione di sviluppabilità della superficie rigata è :

$$N^2 \operatorname{sen}^2 A = M^2$$

avremo nel nostro caso :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\left(\frac{\cos A}{\rho} + \frac{\cos C}{r} + \frac{d \cos B}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d \cos C}{ds} - \frac{\cos B}{r}\right)^2 = \left(\frac{d \cos A}{ds} - \frac{\cos B}{\rho}\right)^2 \cotg^2 A.$$

Se supponiamo che la L sia piana, si avrà  $\frac{1}{r} = 0$  e la precedente diviene :

$$(17) \quad \left(\frac{\cos A}{\rho} + \frac{d \cos B}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d \cos C}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d \cos A}{ds} - \frac{\cos B}{\rho}\right)^2 \cotg^2 A.$$

Si sviluppi la superficie sul piano e sia  $L_1$  la linea in cui si trasforma L,  $\rho_1$  il suo raggio di curvatura ed  $A_1, B_1$  gli angoli che la generatrice distesa sul piano fa colla tangente e colla normale di  $L_1$ . Avremo evidentemente :

$$A = A_1$$

Inoltre nello sviluppo si conserva inalterata la curvatura geodetica della L; notando che l'angolo  $\psi$  sotto il quale il piano osculatore di L sega la superficie è dato da (\*)

$$\cos \psi = \frac{\cos B}{\sin A}$$

la curvatura geodetica di L sarà :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\cos B}{\sin A}$$

Siccome tale curvatura geodetica alla fine dello sviluppo diviene la curvatura assoluta di  $L_1$ , avremo :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\cos B}{\sin A} = \frac{1}{\rho_1}$$

da cui si deduce :

$$(18) \quad \cos B = \frac{\rho}{\rho_1} \sin A.$$

Si ha poi (dalla relazione  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ ) :

$$(19) \quad \cos C = \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2} \cdot \sin A$$

(\*) V. mia Nota : *Sulle sup. rigate*, § IV. Questo Giornale.

dalle quali si ricava :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{d \cos B}{ds} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)' \operatorname{sen} A + \frac{\rho}{\rho_1} \cos A \cdot \frac{dA}{ds};$$

$$\frac{d \cos C}{ds} = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2}\right]' \operatorname{sen} A + \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2} \cos \frac{dA}{ds}.$$

Ora se nella (17) al posto di  $\frac{\cos B}{\rho}$  mettiamo il suo eguale  $\frac{\operatorname{sen} A}{\rho_1}$ , si vede che essa può assumere la forma seguente :

$$\left(\frac{d \cos C}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dA}{ds} + \frac{1}{\rho_1}\right)^2 \cos^2 A - \left(\frac{\cos A}{\rho} + \frac{d \cos B}{ds}\right)^2$$

e se in questa sostituiamo i valori già calcolati di  $\cos B$ ,  $\cos C$ ,  $\frac{d \cos B}{ds}$ ,  $\frac{d \cos C}{ds}$  si ha dopo alcune facili operazioni :

$$\frac{\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{1/2}}{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2} \operatorname{tg} A + \frac{2}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)' \operatorname{tg} A - \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) = 0.$$

Di qui si trae  $\operatorname{tang} A = \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{\rho \rho_1^2 \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)'}$ , e per conseguenza sarà :

$$\operatorname{sen} A = \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{\sqrt{(\rho^2 - \rho_1^2)^2 + \rho^2(\rho' \rho_1 - \rho \rho_1')^2}}.$$

Avendo quindi presente le (18) (19) avremo per i coseni degli angoli A, B, C i seguenti valori :

$$(20) \quad \cos A = \frac{\rho(\rho' \rho_1 - \rho \rho_1')}{\sqrt{(\rho^2 - \rho_1^2)^2 + \rho^2(\rho' \rho_1 - \rho \rho_1')^2}}; \quad \cos B = \frac{\rho(\rho^2 - \rho_1^2)}{\rho_1 \sqrt{(\rho^2 - \rho_1^2)^2 + \rho^2(\rho' \rho_1 - \rho \rho_1')^2}};$$

$$\cos C = \frac{(\rho^2 - \rho_1^2) \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{\rho_1 \sqrt{(\rho^2 - \rho_1^2)^2 + \rho^2(\rho' \rho_1 - \rho \rho_1')^2}}.$$

Si ha dunque il teorema : Per far passare per una data curva piana L, il cui raggio di curvatura è  $\rho$ , una sviluppabile tale, che nello sviluppo riduca L a una data linea piana L<sub>1</sub> di cui il raggio di curvatura è  $\rho_1$ , si conducano per

i punti di  $L$  delle rette inclinate sulle tangenti, sulle normali principali e sulle binormali di  $L$  di angoli  $A, B, C$  dati dalle (20).

Se mettiamo la condizione che sia  $\frac{\rho}{\rho_1} = \text{costante} = k$ , risulta :

$$\cos A = 0 \quad , \quad \cos B = k \quad , \quad \cos C = \sqrt{1 - k^2}$$

e quindi la sviluppabile che ha la voluta proprietà si ottiene conducendo per i punti di  $L$  delle rette situate nei piani normali ed inclinate egualmente sulle normali.

Operando nel modo detto sopra una spirale logaritmica ( $\rho = as$ ) ovvero sopra una sviluppante di cerchio ( $\rho = \sqrt{as}$ ), si ottiene una nuova curva  $L_1$  appartenente rispettivamente alle dette classi.

Osserviamo che la relazione  $\rho = \sqrt{m^2 - n^2 s^2}$  rappresenta un'epicloide, una cicloide o un'ipocicloide a seconda che  $n < 1, = 1, > 1$ ; se sopra una di queste curve eseguiamo la costruzione precedente, si ha per la trasformata piana :

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\cos B} = \sqrt{\left(\frac{m}{\cos B}\right)^2 - \left(\frac{n}{\cos B}\right)^2 \cdot s^2}.$$

Ora se  $n < 1$  evidentemente  $\frac{n}{\cos B}$  può essere indifferentemente  $< 1, = 1, > 1$ ;

ma se  $n = 1$  ovvero  $n > 1$  necessariamente  $\frac{n}{\cos B} > 1$ .

Dunque : Se per i punti di un'epicloide  $L$  si conducono nei piani normali delle rette inclinate sulle normali di un angolo costante e si sviluppa poi la superficie ottenuta sopra un piano, la curva  $L$  si trasforma in una curva  $L_1$  che può essere indifferentemente una cicloide o un'ipocicloide; se però si ripete la detta costruzione sopra una cicloide ovvero sopra un'ipocicloide, la curva  $L_1$  che si ottiene è sempre un'ipocicloide.

§ 6.

Determiniamo l'espressione del raggio di curvatura di una linea qualunque  $L_1$  descritta sopra una superficie sviluppabile il cui spigolo di regresso è una data linea  $L$ .

Sia  $l$  l'indicatrice sferica di  $L, l_1$  quella di  $L_1$ ; siano  $a, b$  due punti consecutivi di  $l$  ed  $a_1, b_1$  i corrispondenti di  $l_1$  (\*). Se col centro  $b$  e col raggio sfe-

---

(\*) Il lettore è pregato di fare la figura.

rico  $ba_1$ , si descrive l'arco  $a_1m$  compreso fra  $aa_1$  e  $bb_1$ , abbiamo :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$mb_1 = bm - bb_1 = ba_1 - bb_1 = ba + aa_1 - bb_1 = ba - (bb_1 - aa_1).$$

Ora  $ab$  misura l'angolo di contingenza  $\frac{ds}{\rho}$  di  $L$  e  $bb_1 - aa_1$  è il differenziale di  $aa_1$ , cioè  $di$  essendo  $i$  l'angolo sotto il quale  $L_1$  sega le generatrici della sviluppabile. Dunque

$$mb_1 = \frac{ds}{\rho} - di.$$

Notando poi che l'angolo sferico  $a_1bb_1$  è eguale all'angolo di torsione  $\frac{ds}{r}$  di  $L$ , avremo :

$$a_1m = (a_1\hat{b}b_1) \cdot \text{sen}(\hat{b}b_1) = \frac{ds}{r} \text{sen} i;$$

dunque avremo per l'angolo di contingenza di  $L_1$  :

$$\frac{ds_1}{\rho_1} = a_1b_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{di}{ds}\right)^2 + \frac{\text{sen}^2 i}{r^2}} \cdot ds.$$

Avendosi poi :

$$ds_1 = T \frac{ds}{\rho} \cdot \frac{1}{\text{sen} i},$$

sarà :

$$(21) \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\text{sen} i}{T} \sqrt{\left(1 - \rho \frac{di}{ds}\right)^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \text{sen}^2 i}.$$

Per far uso di questa formola, siccome non possono essere arbitrariamente date entrambe le quantità  $i$ ,  $T$ , bisognerà calcolare una di tali quantità quando è data l'altra. Così ad esempio se  $T = \text{costante} = a$ , si vede facilmente che :

$$\text{sen} i = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}$$

e quindi la (21) diviene :

$$\rho_1 = \frac{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(a^2 + \rho^2 - a\rho \frac{d\rho}{ds}\right)^2 + a^2 \frac{\rho^2}{r^2} (a^2 + \rho^2)}}.$$

Dall'espressione ora trovata di  $\rho_1$  si deduce: *La linea, luogo degli estremi di segmenti costanti staccati sulle tangenti di una curva L, è traiettoria isogonale delle tangenti stesse solamente nel caso in cui L è a curvatura costante.*

Se la linea L è piana  $\frac{1}{r} = 0$  e se supponiamo inoltre  $\rho_1 = \text{costante} = k$ , l'ultima relazione diviene:

$$(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} = k(a^2 + \rho^2) - ka\rho \frac{d\rho}{ds}$$

che offre:

$$s = ak \int \frac{\rho d\rho}{(a^2 + \rho^2) \{ k - \sqrt{a^2 + \rho^2} \}}$$

Eseguendo tale quadratura, si ottiene:

$$(22) \quad \rho = \frac{\sqrt{m^2 - a^2 \left( \frac{m}{k} + e^{-\frac{s}{a}} \right)^2}}{\frac{m}{k} + e^{-\frac{s}{a}}}$$

essendo  $m$  una costante arbitraria.

Perciò: *Le curve il cui raggio di curvatura si esprime in funzione del raggio per mezzo della (22) sono caratterizzate dalla proprietà che gli estremi dei segmenti di lunghezza costante a staccati sulle tangenti a partire dal punto di contatto, si trovano sopra un cerchio di raggio  $k$ .*

Passando nella (22) al limite per  $k = \infty$ , si ha:

$$\rho = \sqrt{m^2 e^{\frac{2s}{a}} - a^2}$$

la quale è la nota relazione caratteristica della trattrice.

Nella figura sferica che ci ha servito a determinare  $\rho_1$ , si vede chiaramente che l'angolo sferico  $\widehat{a_1 b_1 m}$  è l'angolo  $\theta$  sotto il quale il piano osculatore della linea  $L_1$  sega la sviluppabile; ora siccome

$$mb_1 = a_1 b_1 \cos \theta$$

e siccome  $a_1 b_1$  misura l'angolo di contingenza assoluta di  $L_1$ , sarà  $mb_1$  eguale all'angolo di contingenza geodetica  $\frac{ds_1}{\rho_{1g}}$  di  $L_1$ . Dunque:

$$\frac{ds_1}{\rho_{1g}} = mb_1 = \frac{ds}{\rho} - di$$

e perciò :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(23) \quad \frac{1}{\rho_{1g}} = \frac{\text{sen } i}{T} \left( 1 - \rho \frac{di}{ds} \right).$$

Dalle (21) (23) risulta che : *L'angolo  $\theta$  sotto il quale il piano osculatore della linea  $L_1$  sega la sviluppabile su cui è descritta è tale che*

$$(24) \quad \cos \theta = \frac{1 - \rho \frac{di}{ds}}{\sqrt{\left( 1 - \rho \frac{di}{ds} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \text{sen}^2 i}}.$$

Per fare un'applicazione delle formole (21) (23), supponiamo che si tratti della geodetica di un cono ; allora, osservando che in questo caso il rapporto  $\frac{\rho}{r}$  relativo allo spigolo di regresso della sviluppabile, ora ridotto a un punto, è eguale alla curvatura sferica  $\frac{1}{r_g}$  della traccia del cono sopra una sfera di raggio unitario col centro nel vertice, la (21) in forza della (23) diviene :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\text{sen}^2 i}{T \cdot r_g}.$$

Ma evidentemente  $T r_g$  è il raggio di curvatura geodetica  $R_g$  della traccia sferica normale del cono sopra una sfera di raggio  $T$  ; avremo dunque ,

$$\rho_1 = \frac{R_g}{\text{sen}^2 i}$$

*cioè : Il raggio di curvatura assoluta in un punto qualunque di una geodetica conica è eguale al raggio di curvatura geodetica (sulla sfera che la contiene) della traiettoria ortogonale delle generatrici in quel punto , diviso per il quadrato del seno dell'inclinazione della geodetica sulla generatrice che passa per esso.*

Questo teorema, nel caso che il cono divenga un cilindro, si trasforma in una notissima proprietà delle eliche.

## § 7.

Una linea dello spazio è completamente determinata di forma quando si conosce il raggio di curvatura  $\rho$  e quello di torsione  $\tau$  in funzione dell'arco  $s$ . In certi casi può essere dato il solo raggio  $\rho$  o l'altro  $\tau$  in funzione di  $s$  e può interessare di trovare le corrispondenti famiglie di curve.

Se è dato  $\rho$ , si deve avere :

$$\Sigma x'^2 = 1 \quad , \quad \Sigma x''^2 = \frac{1}{\rho^2} ;$$

la prima relazione si soddisfa prendendo :

$$x' = \text{sen } \varphi \cos \psi \quad , \quad y' = \text{sen } \varphi \text{ sen } \psi \quad , \quad z' = \cos \varphi$$

dove  $\varphi$  e  $\psi$  sono due funzioni arbitrarie di  $s$ . Allora la seconda relazione diviene :

$$\frac{1}{\rho^2} = \varphi'^2 + \text{sen}^2 \varphi \cdot \psi'^2$$

da cui si deduce :

$$\psi = k + \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \varphi'^2}}{\text{sen } \varphi} ds$$

con  $k$  costante arbitraria.

Dunque avremo per le coordinate  $x, y, z$  di un punto qualunque della curva domandata.

$$\begin{aligned}
 x &= \int \text{sen } \varphi \cdot \cos \left[ k + \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \varphi'^2}}{\text{sen } \varphi} ds \right] ds ; \\
 (25) \quad y &= \int \text{sen } \varphi \cdot \text{sen} \left[ k + \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \varphi'^2}}{\text{sen } \varphi} ds \right] ds ; \\
 z &= \int \cos \varphi \cdot ds .
 \end{aligned}$$

Ad ogni forma della funzione  $\varphi$  corrisponde una curva.

Supponiamo ora che sia dato il raggio di torsione  $r$ . Se  $l, m, n$  sono gli angoli fatti cogli assi dalla binormale di una curva  $L$ , le formole :

$$(26) \quad x_1 = \int \cos l \cdot ds \quad , \quad y = \int \cos m \cdot ds \quad , \quad z = \int \cos n \cdot ds$$

definiscono una curva  $L_1$ , legata alla  $L$  in modo, che :

$$ds = ds_1 \quad , \quad \rho = r_1 \quad , \quad r = \rho_1 .$$

Per conseguenza ricavando  $\cos l, \cos m, \cos n$  dalle (25) si avranno nelle (26) le coordinate dei punti delle curve in cui il raggio di torsione è  $\rho$ , cioè una funzione arbitraria dell'arco.

Ora dalle (25) si ha :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\cos l = \rho (y'z'' - z'y'') = -\rho \left[ \varphi' \cdot \operatorname{sen} \psi - \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \varphi'^2} \cos \varphi \cos \psi \right]$$

$$\cos m = \rho (z'x'' - x'z'') = \rho \left[ \varphi' \cdot \cos \psi - \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \varphi'^2} \cos \varphi \operatorname{sen} \psi \right]$$

$$\cos n = \rho (x'y'' - y'x'') = \rho \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \varphi'^2} \cdot \operatorname{sen} \varphi.$$

Sostituendo questi valori nelle (26) e cambiando anche  $\rho$  in  $r$ , si ha :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\int r \left[ \varphi' \operatorname{sen} \psi - \sqrt{\frac{1}{r^2} - \varphi'^2} \cdot \cos \varphi \cos \psi \right] ds \\ y = \int r \left[ \varphi' \cos \psi - \sqrt{\frac{1}{r^2} - \varphi'^2} \cdot \cos \varphi \operatorname{sen} \psi \right] ds \\ z = \int r \sqrt{\frac{1}{r^2} - \varphi'^2} \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot ds \end{array} \right.$$

dove :

$$\psi = k + \int \frac{\sqrt{\frac{1}{r^2} - \varphi'^2}}{\operatorname{sen} \varphi} ds.$$

Queste equazioni definiscono nel modo più generale le curve in cui il raggio di torsione è una data funzione  $r$  dell'arco, la funzione  $\varphi$  rimane completamente arbitraria.

Reggio-Calabria, agosto 1886.

www.libtool.com.cn

CALCOLO DEL VALORE, AL NETTO,  
DI TITOLI SOGGETTI A TASSA DI CIRCOLAZIONE E DRITTO DI PROVVISORIE  
COME LE OBBLIGAZIONI FERROVIARIE

PER

FERDINANDO RONCHETTI.

*Illustrissimo Sig. Professore*  
*Comm. Giuseppe Battaglini*

Napoli

Roma li 7 febbraio 1888

Secondato dalla di Lei benevolenza, vidi nell'agosto e settembre 1886 inserito in cotesto reputato Giornale di Matematiche un mio *Saggio di aritmetica dei Titoli di credito* che da persone competenti venne favorevolmente giudicato. Condussi ora a termine, nello stesso ordine di idee, una nuova ricerca, a primo aspetto abbastanza involuta, tanto che l'avevo messa da parte come disperata, ma che poi, come l'altra ivi svolta, dei Titoli estinguibili per acquisti al corso di piazza, mena a risultati inaspettatamente semplicissimi; quella del valore effettivo che per rappresentare un determinato interesse semestrale netto, attivo o passivo, dee avere un Titolo, soggetto a imposta proporzionale, non solo sui frutti, ma altresì sul valore effettivo medesimo, com'è la tassa di circolazione; e per di più, passibile, per il debitore, di un dritto, pure proporzionale, di provvigione su tutti i pagamenti che in ordine ad esso fannosi al creditore, supposti aver luogo per via d'intermediario. Ma avendomene porta occasione la recente emissione delle obbligazioni ferroviarie, parvemi opportuno completare anche questa parte della trattazione dei Titoli, in modo che si veda potersene sempre con brevissimi calcoli trovare, per ogni modalità di essi, il valore corrispondente a qualunque interesse netto; altra prova, se ne abbisognasse, del come, pur nel campo della finanza, possa la matematica esercitare ampio e incontestato dominio.

A chi ora raccomandare questo lavoro se non a Lei, alla cui squisita cortesia

debbo se anche il precedente potè divenire di pubblico diritto? Ella voglia però accoglierlo con la consueta indulgenza: e permetta ch'io profitti dell'incontro per farle pubblicamente palesi i sensi di profonda gratitudine e di vera stima, coi quali è l'onore di protestarmi

di Lei

*Devotissimo*  
Ferdinando Ronchetti.

---

## CAPITOLO PRIMO

### I n t r o d u z i o n e .

Richiesto di avviso sulla maggiore o minore convenienza della recente emissione delle obbligazioni ferroviarie rimborsabili, o per dir più preciso, su l'onere semestrale netto ch'essa apporta al governo per ogni lira di capitale incassato, in rapporto a quello ch'egli avrebbe sopportato se avesse invece emesso rendita perpetua al corso della giornata, dovetti innanzi tutto preoccuparmi della possibilità in genere di risolvere matematicamente il problema, presentando esso questo di apparentemente irriducibile al calcolo, che cioè quei Titoli vanno soggetti a tassa di circolazione, la quale, come ognun sa, si commisura sul corso medio di borsa dell'anno precedente, e quindi su di un elemento che parrebbe a tutta prima non potersi in prevenzione determinare.

Ma a ciò è agevole il rimedio, solo che si attribuisca in ipotesi al Titolo, per ogni semestre della sua durata, un valore tale ch'esso e al principio e al fine de' semestri, e così nell'intervallo, rappresenti un determinato interesse netto, e nel caso nostro, quello precisamente che avrebbe dato la detta rendita perpetua: che è lo stesso sistema da me seguito nel citato Saggio di aritmetica per risolvere l'altro problema, d'aspetto esso pur refrattario, inteso a determinare l'interesse di Titoli, redimibili ai corsi di piazza.

In qual modo poi converrà commisurare la detta tassa per renderne agevole la calcolazione? A questo riguardo sarà bene di far precedere alcuni cenni dilucidativi.

Premesse sulla tassa di circolazione.

Il testo unico, 13 aprile 1874 n° 2077, delle leggi sulle tasse di bollo non che in surroga a quelle di bollo e registro, porta, agli art. 68 e 69, che per la circolazione dei Titoli d'ogni specie (tranne poche eccezioni fra cui la rendita perpetua) è dovuta una tassa annuale dell' 1%, che diventa l' 1,20 per effetto del doppio decimo. Questa tassa si liquida sul valore dei Titoli al corso medio di borsa dell'anno precedente, e se non furono quotati, su quello accertato da pubblici mediatori, o, in difetto, sul nominale versato. Essa viene pagata, in rate semestrali posticipate e computabili dal 1° gennaio e 1° luglio di ciascun anno, direttamente da chi emette i Titoli, salvo il regresso verso i portatori.

Ma per comodità di calcolo (e pur con impercettibile divario dal vero) io supporrò che la liquidazione, di fronte sì alla finanza che ai portatori, si faccia contemporanea al pagamento e a semestre, ritenuto come il periodo più breve a cui si fanno i pagamenti sui Titoli; per il che la tassa sarà a valutarsi di 6 cent. ogni 100 lire, ossia 0,0006 (algebricamente  $t$ ) ogni lira del capitale alla medesima soggetto.

Per la possibilità stessa del calcolo poi, questo capitale, in principio dei semestri lo computerò, come dissi, in base ai valori di Borsa (o di sconto o effettivi che dir si voglia) successivamente rispondenti a un dato interesse semestrale netto  $r'$ , e, nel loro corso (prescindendo per semplificazione dal più esatto calcolo di sconto quale venne da me suggerito ai § 122 a 124 dell'opuscolo *Sulla determinazione dell'interesse* e che riservavo ad apposito studio, ma che in concreto non porterebbe se non microscopiche differenze) lo computerò partendo invece dalla ipotesi, pur essa abbastanza approssimativa, che lo aumento di valore che il Titolo acquista pel godimento dei frutti sia, come presso a poco si suole, rappresentato giornalmente da un prorata della differenza tra il valore di Borsa in principio e quello al fine di ogni singolo semestre; con che evidentemente avendosi tanti valori giornalieri in progressione aritmetica, si potrà considerare come valore medio, passibile della tassa, quello costituito dalla semisomma dei due termini estremi rappresentanti i valori effettivi a principio e fine di ogni semestre. Se questa semisomma infatti, moltiplicata pel numero dei termini della progressione dà, come è noto, la somma dei loro valori, l'omettere tale moltiplica è precisamente come se questa somma venisse divisa pel numero dei termini, che è quello appunto che costituisce una media.

CAP. 3.

Provvigione.

Considerando poi anche il Titolo come servito per via d'intermediario e soggetto quindi a un dritto di provvigione su tutti i pagamenti al netto che in ordine ad esso si fanno da quello al creditore, il detto interesse semestrale netto potrà distinguersi a seconda che attivo o passivo; e sarà attivo quello che percepirà il creditore, niun conto naturalmente tenuto di quel dritto di provvigione; passivo quello che costituirà l'intero onere effettivo del debitore, quel dritto pure compreso; confondendosi poi desso con l'attivo quando creditore ed intermediario siano una sola ed unica persona.

CAP. 4.

Prima formola universale.

Ciò premesso, innanzi di analizzare partitamente ogni singola categoria di Titoli regolarmente costituiti per ammortamento a un valor nominale predeterminato, quali furono descritti nel citato Saggio, piglierò le mosse da un Titolo ammortizzabile in genere, con la sola condizione che le ammortizzazioni, in quelle epoche in cui esse cadono, coincidano pure col pagamento degl'interessi.

Per avere dunque il valore effettivo (che per far più presto dirò anche semplicemente valore; come, capitale, il capital nominale) di qualunque Titolo fruttifero al fine di qualunque periodo uguale (che di solito sarà il semestre), rifletto ch'esso sarà naturalmente costituito dei 4 seguenti elementi.

1° dei frutti del capitale  $c$  vigente al principio del semestre, depurati di ogni tassa, compresa quella di circolazione, e rispondenti quindi a un interesse incognito  $y$ .

2° del rimborso, che chiamerò  $a$ , di tutto o parte, o anche nulla, del capitale predetto, a seconda dell'epoca e della forma costitutiva del Titolo.

3° del dritto di provvigione, unitariamente  $p$ , che dovrà cadere tanto sui frutti netti quanto sui rimborsi, e che si ridurrà però a 0 quando, come dissi, si ricerchi l'interesse effettivo per un creditore diverso dall'intermediario.

4° del valore effettivo del capitale residuo al principio del semestre successivo.

E chiamato  $n$  il numero dei semestri a decorrere dal principio di quello che si vuol considerare fino alla data della estinzione finale del Titolo, la formola ge-

nerale del suo valore  $X_n$ , al principio di qualsiasi semestre, si baserà sulla somma di quei quattro elementi (che seppero a partire dall'ultimo), scontata all'interesse  $r'$  (ossia  $s' - 1$ ) come ai §§ 2 e 3 del citato Saggio: si avrà così il seguente valore del Titolo al principio del semestre, in relazione a  $y_n$  incognita e alle altre quantità o note o determinabili

$$X_n = \frac{X_{n-1} + (1+p)(a_n + y_n c_n)}{s'}$$

Di qui si avrà pure il valore del Titolo alla fine del semestre

$$s'X_n = X_{n-1} + (1+p)(a_n + y_n c_n)$$

Il valore di  $y_n$  si avrà poi uguagliando i frutti completamente netti a quelli depurati solo dalle altre tasse proporzionali che non siano quella di circolazione, deducendovi quindi quest'ultima, commisurata come si è visto al Cap. 2, ultimo alinea, sulla semisomma dei valori del Titolo al principio e al fine del semestre

$$y_n c_n = r'' c_n - t \frac{X_n + s'X_n}{2} = \frac{2r'' c_n - tX_n(1+s')}{2}$$

Nel valore di  $s'X_n$  introdotto questo di  $y_n c_n$ , esso diverrà

$$s'X_n = X_{n-1} + (1+p)a_n + (1+p) \frac{2r'' c_n - tX_n(1+s')}{2}$$

onde

$$2s'X_n = 2X_{n-1} + 2(1+p)a_n + (1+p)2r'' c_n - t(1+p)(1+s')X_n$$

$$X_n \{ 2s' + t(1+p)(1+s') \} = 2 \{ X_{n-1} + (1+p)(a_n + r'' c_n) \}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} X_n &= 2 \frac{X_{n-1} + (1+p)(a_n + r'' c_n)}{2s' + t(1+p)(2+r')} = \frac{X_{n-1} + (1+p)(a_n + r'' c_n)}{s' + t(1+p) \left( 1 + \frac{r'}{2} \right)} \\ &= \frac{X_{n-1} + (1+p)(a_n + r'' c_n)}{\sigma} \end{aligned}$$

Questa sarà la prima formola universale per tutti i periodi, applicabile a tutti i Titoli ammortizzabili superiormente indicati; e in linguaggio comune significherà che qualunque di siffatti Titoli, soggetto a tassa di circolazione e dritto di prov.

vigione, avrà al principio di semestre, per rendere un interesse netto  $r'$ , un valore rappresentato dai pagamenti che si fanno alla fine, astrazione fatta dalla tassa di circolazione, aggiuntovi il valore al principio del semestre successivo, il tutto scontato a un altro interesse che chiamerò di corrispondenza, uguale a quello voluto, più la tassa di circolazione (e relativa provvigione) sul valore a metà del semestre della unità considerata con l'aggiunta del prorata dello interesse medesimo. Resterà poi sempre a determinare il valore del Titolo al principio del periodo successivo.

## CAP. 5.

## Titoli a un periodo dal rimborso finale.

Nel periodo però di ultimo rimborso, riducendosi il valor residuo effettivo  $X_{n-1}$  sempre e necessariamente in tutti i Titoli a 0, e le quote di ammortizzazione  $a_n$  confondendosi col capital vigente a principio di periodo, la formola di venterà per tutti indistintamente i Titoli ammortizzabili, qualunque ne sia la forma costitutiva,

$$X_1 = c_1(1+p) \frac{1+r''}{\sigma} \equiv c_1(1+p) \frac{1+r''}{s' + t \left(1 + \frac{r'}{2}\right) + tp + \frac{tpr'}{2}}.$$

## CAP. 6.

## Titolo perpetuo.

Volendo invece applicare la predetta formola generica anche al caso del Titolo perpetuo (a prescindere beninteso dalla ipotesi del rimborso alla pari, non potendosi per questo determinare alcuna positiva scadenza), è chiaro che, esclusa così ogni idea di rimborso, dovrò in essa pure sostituire ad  $a_n$ , 0; e la formola dovrà poi modificarsi, cambiando  $X_{n-1}$  in  $X_n$ , in conseguenza all'essere per siffatto Titolo indefinito il termine della estinzione, onde non v'è fra un periodo e l'altro possibilità di assegnare, a intervallo uguale, una differenza nel valore del Titolo, come invece vi è, per la diversa distanza da quel termine, nei Titoli ammortizzabili. Si partirà insomma dalla considerazione che, staccato il frutto e rimanendo costante l'interesse, il valore del Titolo perpetuo resta al principio di qualunque sia periodo immutabilmente il medesimo.

L'equazione generica pertanto diventerà

$$X = \frac{X + (1+p)r''c}{\sigma}$$

onde

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\sigma X = X + (1 + p) r'' c \quad . \quad (\sigma - 1) X = (1 + p) r'' c$$

e finalmente

$$X = c (1 + p) \frac{r''}{\rho} = c (1 + p) \frac{r''}{r' + t (1 + p) \left(1 + \frac{r'}{2}\right)}$$

che nel caso di  $t$  e  $p = 0$  diventa

$$X = c \frac{r''}{r'}$$

formola ordinaria e notissima dei Titoli in parola, come al § 6 del Saggio.

### CAP. 7.

#### Riprova aritmetica.

A miglior conferma della esattezza della formola generica ricerchisi qui ad esempio che valore dovrebbe avere il n.° consolidato 5 % per rendere un 2 % pienamente netto al semestre, nel supposto (beninteso astratto, opponendovisi per ora la citata legge 13 aprile 1874) che fosse pur soggetto alla tassa di circolazione, e calcolato il diritto di provvigione in ragione di 1/4 %. Avremo animando la testè ritrovata formola con la sostituzione alle lettere dei valori corrispondenti; e operando per un capital nominale di un milione :

$$X = 1,000,000.1,0025 \frac{0,0217}{0,02 + 0,0006.1,0025.1,01}$$

Divenendo il denominatore

$$0,02 + 0,0006.1,012525 = 0,02 + 0,000607515$$

avrò coi log.

$$\begin{array}{r} \log. 0,0217 = \quad 8,3364597338 \\ - \log. 0,020607515 = - 8,3140256150 \\ \hline 0,0224341188 = \log. 1,0530139 \end{array}$$

che moltiplicato per un milione sarà 1,053,013,90  
 e aggiuntovi il 4° % di provvigione in 2,632,53

darà per valore del Titolo di un milione 1,055,646,43  
 s'intende a principio di semestre.

|                           |              |  |
|---------------------------|--------------|--|
| Aggiunti infatti a        | 1,055,646,43 | i frutti allo stabilito                    |
| tasso del 2 % cioè        | 21,112,93    |  |
| si à                      | 1,076,759,36 | valore effettivo alla fine del semestre    |
| Aggiuntovi                | 1,055,646,43 | valore effettivo al principio del semestre |
| si à la somma             | 2,132,405,79 | che dimezzata darà                         |
| la media in               | 1,066,202,90 | E il 0,6 % su questo valore porterà        |
| per tasso di circolazione | 639,72       | che tolte dal frutto depurato della sola   |
| ricchezza mobile in       | 21,700,00    |  |
| darà il frutto netto      | 21,060,28    | su cui cadrà la provvigione del            |
| 4° % in                   | 52,65        |  |
| onde un carico netto di   | 21,112,93    | precisamente come sopra si è visto.        |

## CAP. 8.

## Titoli ammortizzabili in genere.

Ciò detto pel Titolo perpetuo; quanto è ai Titoli ammortizzabili, volendo rendere di uso immediato per tutti i periodi la ripetuta formola generica, converrà svilupparla, sostituendo man mano al valore da determinarsi  $X_{n-1}$  i valori concreti di  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-2}$  ottenuti successivamente. Si avrà quindi

$$X_1 = \frac{0 + (1+p)(a_1 + r''c_1)}{\sigma} = (1+p) \frac{a_1 + r''c_1}{\sigma}$$

$$X_2 = \frac{X_1 + (1+p)(a_2 + r''c_2)}{\sigma} = (1+p) \left( \frac{a_1 + r''c_1}{\sigma^2} + \frac{a_2 + r''c_2}{\sigma} \right)$$

$$X_3 = \frac{X_2 + (1+p)(a_3 + r''c_3)}{\sigma} = (1+p) \left( \frac{a_1 + r''c_1}{\sigma^3} + \frac{a_2 + r''c_2}{\sigma^2} + \frac{a_3 + r''c_3}{\sigma} \right).$$

E analogamente

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$X_n = (1+p) \left( \frac{a_1+r''c_1}{\sigma^n} + \frac{a_2+r''c_2}{\sigma^{n-1}} + \frac{a_3+r''c_3}{\sigma^{n-2}} + \dots + \frac{a_n+r''c_n}{\sigma} \right).$$

Ora cosa rappresenta questa espressione se non lo sconto composto, a un interesse  $\rho$ , di tutte le somme che si pagano su un Titolo provvigionato, esente da tassa di circolazione e soggetto ad ammortizzazione per un capitale predeterminato, di qualunque forma essa sia purchè non cada in epoche diverse dagli interessi? E siccome da siffatto sconto si ottenne già al § 48 del Saggio la formola universale dei principali Titoli a seconda della effettiva loro costituzione (tenuto pur conto, per una più generica applicazione, della possibilità che per ogni unità del capital nominale si corrisponda una quantità  $P$  di premio e che le ammortizzazioni si soddisfino con un aggio  $A$  sul Titolo rimborsato ed annesso coupon), si avrà che la formola stessa potrà valere anche per Titoli soggetti a tassa di circolazione, con la sola variazione dell'interesse di sconto. Il valore cioè di un qualunque Titolo della specie, dal capital nominale  $c$ , per rappresentare un determinato interesse semestrale  $r'$  netto di tassa di circolazione e dritto di provvigione, sarà uguale al valore di un Titolo congenere dal capital nominale  $c(1+p)$ , esente dall'una e dall'altra, e il cui sconto si operi a un altro interesse maggiore

$$\rho = r' + t(1+p) \left( 1 + \frac{r'}{2} \right) = r' + t \left( 1 + \frac{r'}{2} \right) + tp + \frac{tp r'}{2}.$$

E così la formola generale di ogni Titolo, ammortizzabile o perpetuo, provvigionato o no, soggetto o meno a tassa di circolazione sarà

$$c' = c(1+p) \left\{ \frac{r''}{\rho} + q' \left( P + A(1+r''+P) + 1 - \frac{r''}{\rho} \right) \right\}$$

dove  $\frac{r''}{\rho}$  sarà il valore a un interesse  $\rho$  di un Titolo perpetuo dal frutto, netto di ricchezza mobile.  $r''$ , e  $q'$  rappresenterà la quota unitaria delle ammortizzazioni per ogni sorta di Titoli, pure in funzione di  $\rho$ , così com'è fornita dal ripetuto Saggio; e la formola funzionerà anche nei casi in cui per un dato Titolo mancasse alcuno degli elementi in essa enunciati, bastando introdurvi in luogo dello elemento mancante uno 0.

Lo stesso risultato di equivalenza sarebbesi del resto ottenuto anche con un analisi diretta per ogni singolo Titolo: e sarei qui tentato di riportare i conteggi relativi, che per taluni avvedimenti di calcolo potrebbero riuscire interessanti, ma me ne trattiene il timore di annoiare soverchiamente i lettori.

## Titoli ad ammortizzazione differita o alternata.

Ma deesi pur prevedere il caso in cui il Titolo, o ritardi il principio della sua ammortizzazione, o, ciò che per il calcolo tornerà lo stesso, alterni nel suo corso forme di ammortizzazioni differenti, pur mantenendo inalterato il valente de' suoi frutti  $r''c$  e la sua natura di Titolo provvigionato. Non si à allora che a considerare prima il Titolo nel suo ultimo stadio, e trovarne col metodo suesposto il valore al suo principio, che per brevità si esprimerà con l'equazione  $c' = c(1 + p)\beta$ . Quindi riportare questo valore al principio dello stadio di ammortizzazione precedente (che nel caso di Titolo differito vestirà la forma del Titolo a scadenza, di che ai §§ 7 e 8 del Saggio), ciò che si otterrà prendendo come capital nominale rimborsabile il valore già ottenuto  $c\beta$ , e ponendo in relazione a questo il fruttato, facendo cioè

$$r''c = r'''c\beta; \quad \text{onde} \quad r''' = \frac{r''}{\beta}.$$

La equazione del valor complessivo del Titolo, compreso questo nuovo periodo, di cui chiamerò  $q''$  lo sconto unitario delle ammortizzazioni, sarà così (trascurati per semplificazione i casi de' premi e degli aggi)

$$c'' = c\beta(1 + p) \left\{ \frac{r''}{\beta\rho} + \left( 1 - \frac{r''}{\beta\rho} \right) q'' \right\} = c(1 + p) \left\{ \frac{r''}{\rho} + \left( \beta - \frac{r''}{\rho} \right) q'' \right\} = c(1 + p)\gamma.$$

E ugualmente si opererà ove occorra di calcolare un altro stadio precedente; e così sempre di seguito per tutti gli stadii che intercedano fino al giorno al quale si vorrà il valore del Titolo

$$c''' = c(1 + p) \left\{ \frac{r''}{\rho} + \left( \gamma - \frac{r''}{\rho} \right) q''' \right\} = c(1 + p)\delta$$

$$c^{iv} = c(1 + p) \left\{ \frac{r''}{\rho} + \left( \delta - \frac{r''}{\rho} \right) q^{iv} \right\} = c(1 + p)\epsilon \quad \text{etc.}$$

## CAP. 10.

Correzione della formola dell'interesse netto  $\rho$ .

Nello accingerci a questi calcoli abbiamo però trascurato una obiezione che ci poteva esser fatta; ed è la seguente.

Supposto che il Titolo sia, come suol dirsi, classato, sia cioè uscito dalle mani

degli assuntori della sua emissione, incaricati per solito del suo servizio mediante provvigione, per disseminarsi in quelle dei privati cercatori d'impiego o speculatori, è certo che quello che determinerà il suo valore sulla piazza non è già l'onere ch'esso apporta al debitore, o ch'è lo stesso, l'interesse che arreca ai detti assuntori, bensì quello che ne fruisce la maggioranza dei creditori. Ciò anzi potrà sostenersi che si verifichi in genere sempre, giacchè, anche per classarsi, un Titolo à pur bisogno di commisurarsi agl'interessi ed esigenze degli acquirenti. Ora sta bene che si possa sempre stabilire il valore in parola, a una data epoca, in base alla cifra dell'onere sopradetto; ma non è men vero che essendo, la porzione di quest'onere che corrisponde alla provvigione, indifferente pel portatore ordinario, a quel valore corrisponderà altra cifra che rappresenterà puramente il correlativo interesse netto del creditore, ed è su questa e non sulla prima che si dovrebbero poi commisurare i valori del Titolo in tutti gli istanti successivi, e così anche alla fine del periodo al quale si riferisce il valore ricercato, e in seguito sempre fino alla estinzione, ricscendone così variate le cifre dei dritti di circolazione e conseguentemente anche della provvigione, e perciò di riverberare quella stessa del valore che si ricerca.

Dovrebbe quindi, per risolvere il problema con tutta la desiderabile esattezza trovare un valore del Titolo, basato bensì sull'onere, ma nel quale gl'importi semestrali della tassa di circolazione e quindi della provvigione si commisurassero a valori successivi del Titolo basati sullo interesse; problema che non dico insolubile, ma che mi si presenta complicatissimo.

Ma vedasi piuttosto, se da tale diversa maniera di calcolo deriverebbero poi all'atto pratico e in via ordinaria differenze apprezzabili; e consideriamo perciò (con un procedimento analogo a quello tenuto nel Saggio, § 23 e seg., per trovare il valore al netto di Titoli estinguibili per acquisti al corso) quelle che si presenteranno nei due casi più dissimili, del Titolo ammortizzabile a un semestre e del Titolo perpetuo.

#### CAP. 11.

##### Formola corretta dell'interesse netto $\rho$ .

Cominciando dal Titolo ammortizzabile a un semestre; per quanto è detto ai Capitoli 4 e 5, avremo:

Somma che lo Stato dee pagare al netto al fine del semestre, scontata al principio, all'interesse nettissimo  $r'$

$$X_1 = \frac{(1 + \rho)(c_1 + y_1 c_1)}{s'}$$

Valore in fine del semestre in riguardo del solo portatore, e cioè a pre-

scindere dal dritto di provvigione  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$c_1 + y_1 c_1$$

Tassa di circolazione

$$l \frac{x_1 + c_1 + y_1 c_1}{2}$$

Frutti, al netto da questa tassa

$$y_1 c_1 = r'' c_1 - l \frac{x_1 + c_1 + y_1 c_1}{2}$$

Da cui

$$2y_1 c_1 = 2r'' c_1 - lx_1 - lc_1 - ly_1 c_1 \quad (2+l)y_1 c_1 = (2r'' - l)c_1 - lx_1$$

$$y_1 c_1 = \frac{(2r'' - l)c_1 - lx_1}{2+l}$$

Introdotta questo valore nella equazione di  $X_1$  si avrà

$$s'x = (1+p)c_1 + (1+p) \frac{(2r'' - l)c_1 - lx_1}{2+l}$$

$$s'(2+l)x_1 = (1+p)(2+l)c_1 + (1+p)(2r'' - l)c_1 - (1+p)lx_1$$

$$\{s'(2+l) + (1+p)l\} x_1 = \{2(1+p) + l(1+p) + 2r''(1+p) - l(1+p)\} c_1$$

$$X_1 = 2(1+p)c_1 \frac{1+r''}{2s'+l(s'+1+p)} = (1+p)c_1 \frac{1+r''}{s'+l \frac{2+r'+p}{2}} = (1+p)c_1 \frac{1+r''}{s'+l \left(1 + \frac{r'}{2}\right) + \frac{lp}{2}}$$

con una differenza nell'interesse, di  $\frac{lp}{2} + \frac{lpr'}{2}$  in meno di quello che si trovò al Cap. 5 col calcolo generale.

Nel caso del Titolo perpetuo avremo invece, richiamandoci al Cap. 6. :  
 Valore in principio di semestre per dare un carico netto  $r'$  :

$$X = \frac{yc + pyc}{r'}$$

Valore in fine, nei riguardi del solo portatore, cioè con l'aggiunta al valore in prin-

cipio, del frutto netto, senza provvigione :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$X + yc$$

Tassa di circolazione

$$t \frac{X + X + yc}{2} = t \frac{2X + yc}{2} .$$

Frutti, al netto di questa tassa

$$yc = r''c - t \frac{2X + yc}{2} .$$

Da cui

$$2yc = 2r''c - 2tx - tyc \qquad (2 + t)yc = 2r''c - 2tx$$

$$yc = \frac{2r''c - 2tx}{2 + t} .$$

Introdotta questo valore nell'equazione di X, si avrà

$$r'x = (1 + p) \frac{2r''c - 2tx}{2 + t} \quad \{ r'(2 + t) + 2t(1 + p) \} x = 2r''c(1 + p)$$

$$X = \frac{2r''c(1 + p)}{2r' + t(r' + 2 + 2p)} = \frac{r''c(1 + p)}{r' \left( 1 + \frac{r'}{2} \right) + tp}$$

con una differenza d'interesse, di  $\frac{tpr'}{2}$  in meno su quello che si trovò al citato

Cap. 6.

È evidente dunque che nel caso tanto del Titolo a un periodo quanto del Titolo perpetuo sarebbe inesatto adottare un interesse di corrispondenza ,

$$r' + t \left( 1 + \frac{r'}{2} \right) + tp + \frac{tpr'}{2} ,$$

come fu trovato in principio, in luogo dei più giusti trovati ora di

$$r' + t \left( 1 + \frac{r'}{2} \right) + \frac{tp}{2} \qquad \text{e} \qquad r' + t \left( 1 + \frac{r'}{2} \right) + tp .$$

È chiaro del pari che passando il Titolo da perpetuo ad ammortizzabile, questo interesse di corrispondenza dovrà gradatamente diminuire fino a raggiunger quello

per il Titolo a un periodo; e senza ricorrere ad una rigorosa dimostrazione basterà osservare che ammettendo il contrario, sia che l'interesse di corrispondenza rimanesse stazionario, sia che aumentasse in luogo di diminuire, si avrebbe quando siamo al passaggio, dal Titolo a 2 periodi al Titolo a un periodo, un salto che nessuna ragione potrebbe giustificare.

Ma per evitare di dover ricorrere, nel calcolare i Titoli ammortizzabili a più di un periodo, ad una media immaginaria, si osserva che nei casi ordinari (e tanto più nell'applicazione che dovremo fare a un Titolo ammortizzabile in quasi 100 anni) si potrà senza tema d'inesattezza adottare costantemente l'interesse di corrispondenza del Titolo perpetuo, come quello che applicato anche al Titolo a 1 periodo non potrebbe portare che differenze impercettibili. Posta infatti una tassa di 6 cent. e una provvigione del 4°/100 sem., il di più,  $\frac{1}{2} p$ , che si verrebbe nello interesse di corrispondenza ad attribuire al Titolo a 1 periodo, e che sarebbe il maggiore possibile, non porterebbe che una differenza al di sopra del vero di 0,0003.0,0025, ossia di 0,00000075, dico settediecimilionesimi e  $\frac{1}{2}$ , differenza a mala pena sensibile allo stromento logaritmico, e che anche col calcolo aritmetico non produrrebbe se non dei residui insignificanti e affatto trascurabili. In simili condizioni faremo dunque sempre

$$p = r' + t \left( 1 + p + \frac{r'}{2} \right).$$

## CAP. 12.

### Dati di fatto relativi alle obbligazioni ferroviarie.

Veniamo finalmente ad applicare le trovate formole alle Obbligazioni ferroviarie da ultimo emesse, che si sa essere del capital nominale di L. 500 al 3°/100, garantite dallo Stato, fruttifere semestralmente dal 1° luglio 1887 con ritenuta di ricchezza mobile e tassa di circolazione, e ammortizzabili in 90 annuità, la prima delle quali al 1° luglio 1896, e sui di cui pagamenti, affidati alle singole Società ferroviarie, si passa a queste del governo provvigione del 4°/100.

Cominciando dall'indagare la convenienza dell'emissione nei riguardi di quest'ultimo, che giusta quanto dicemmo al bel principio di questo lavoro riducesi ad un confronto con una corrispondente di rendita perpetua; perchè un calcolo in proposito si potesse fare con rigorosa esattezza, converrebbe veramente conoscere anche l'importo di tutte quante le spese che entrambe le emissioni, rendita perpetua e obbligazioni rimborsabili (dedotti, per quest'ultime, eventuali dritti di partecipazione), arrecherebbero allo stato, onde avere così, precisi i due termini di confronto, capitale netto ricavato e reddito netto vincolato, per ogni singola emissione. Ma poichè non credo che di siffatto estremo vengano, come pur sarebbe

utile, pubblicate le risultanze, ci converrà sopporre simili spese identiche in entrambi i sistemi, benchè per le dirette alienazioni di rendita ai corsi della giornata (alle quali infatti onde procurarsi i fondi per le ferrovie ebbe prima ricorso il governo) le spese stesse devano evidentemente essere state molto minori.

Un ugual supposizione dovremo pur fare per quanto riguarda il diritto di provvigione sui pagamenti destinati al servizio di entrambi i Titoli, benchè, per la rendita, provvigione abbia luogo, nè so in qual misura, solamente sulla parte che è collocata all'estero; si fletterà cioè, cosa forse lontana del vero, che la maggiore spesa per provvigione alle società possa equipararsi a quella che senza di esse lo stato dovrebbe sostenere per un più largo impianto de' suoi ufficii.

Su queste basi vediamo qual carico netto rappresentava il consolidato 5%, allorquando, per ottenere la somma di 226, 234, 258. 40 di cui al R. D. 3 giugno 1887 N.° 4514 (e altri 100, 850, 000 occorsero, in appresso, come dalla legge del 24 luglio success. N.° 4771) il governo si assicurò presso un Consorzio d'Istituti il collocamento delle obbligazioni ferroviarie a 307, 50, per 500 di cui si professò debitore; il qual Consorzio subito aperse una sottoscrizione che figurò coperta a 316, pagabili, 25 alla sottoscrizione che fu il 16 giugno, 50 al riparto, e le altre 241 a tutto il 30 novembre con gl'interessi al 4% annuo. Dal Bollettino delle Finanze, Industria e Commercio del 29 maggio desumo che l'accordo per quel collocamento avvenne il 24 di quel mese, alla qual'epoca il Listino segnava la nostra rendita 99.50; e a Parigi per il cambio (in onta a l'abolito corso forzoso, tornato ad elevarsi) 98, 70, che sarà il corso applicabile trattandosi di titoli pagabili anche all'estero in numerario; e darebbe, toltone il prorata del coupon di 4 mesi e  $\frac{3}{4}$ , una valuta al 1.° luglio succ. di 97, equivalente a un carico netto, semestrale sempre, e compresa la provvigione, di  $\frac{2,175,425}{97}$  ossia del 2, 24, 27, 06, 2%.

In relazione poi al portatore la rendita a 97 equivarrà a un reddito netto di  $\frac{2.17}{97}$  ossia del 2, 23, 71, 13, 4.

### CAP. 13.

#### Posizione del Problema.

Nella impossibilità in cui siamo di trovare con breve e preciso calcolo il carico o il reddito netti, e conseguenti corsi della rendita, corrispondenti ai prezzi di emissione suaccennati di 307, 50 e di 316 (impossibilità già veduta al § 8 del Saggio, e alla quale mi riservo sempre, come promisi e se ne avrò agio, di mostrare con apposita memoria il metodo di supplire in via approssimativa), il calcolo dovrebbe invece consistere a trovare con due distinte operazioni il valore che avrebbe dovuto assegnarsi alle Obbligazioni ferroviarie, per rappresentare il carico o il reddito netti testè veduti in relazione a un corso della rendita di 97, e ciò trovando innanzi

tutto sulla formola del Cap. 11. gl'interessi di corrispondenza di quei due interessi netti, e in base a quelli applicando, prima la formola del Cap. 8 e poscia, trattandosi di Titolo differito, quella pure del Cap. 9.

Ma per semplificare le operazioni procederemo invece in senso inverso, nel supposto cioè di un interesse di corrispondenza comune, che per una certa induzione e utilizzando per le formole di  $q'$  i dati di Tavole già costrutte o da costruirsi per interessi precedenti di 25 in 25 Cent., fingeremo del 2,25 % al semestre e al quale vedremo ora quali distinti interessi netti, sia attivo sia passivo, equivalgano.

CAP. 14.

Interesse unico di corrispondenza per il carico e il reddito.

Già vedemmo

$$\rho = \frac{2r' + t\{2(1+p) + r'\}}{2} = \frac{2r' + 2t(1+p) + tr'}{2} = \frac{(2+t)r' + 2t(1+p)}{2}$$

Di qui

$$2\rho - 2t(1+p) = (2+t)r'$$

e finalmente :

$$r' = 2 \frac{\rho - t(1+p)}{2+t}$$

che darà il carico netto dello stato in relazione a un interesse di corrispondenza,  $\rho$  : e si convertirà in

$$r' = 2 \frac{\rho - t}{2+t}$$

quando P sia zero, esprimendo in questo caso sempre il reddito netto del portatore, pel quale è chiaro che non entra mai in calcolo l'elemento della provvigione.

Posti al luogo delle lettere i loro valori in concreto, avremo nel 1.º caso

$$r' = 2 \frac{0,0225 - 0,0006 \cdot 1,0025}{2,0006} = 2 \frac{0,0225 - 0,0006015}{2,0006} = 2 \frac{0,0218985}{2,0006} = \frac{0,043797}{2,0006}$$

E coi log.

$$\begin{array}{r}
8,6414444 \\
- 0,3011603 \\
\hline
8,3402841 = \log. 0,021891934.
\end{array}$$

Nel 2.º caso avremo invece  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$r' = 2 \frac{0,0225 - 0,0006}{2,0006} = 2 \frac{0,0219}{2,0006} = \frac{0,0438}{2,0006}$$

E coi log.

$$\begin{array}{r} 8,6414741 \\ - 0,3011603 \\ \hline 8,3403138 = \log. 0,021893429. \end{array}$$

Ciò vorrà dire che il valore della obbligazione ferroviaria che troveremo in rapporto al carico sulla base d'un interesse di corrispondenza del 2,25 %, equivarrà a un carico netto effettivo del 2,18,91,93,4, (quasi con la deduzione del % della tassa di circolazione); e quello che troveremo in rapporto al reddito ugualmente operando equivarrà a un reddito netto effettivo del 2,18,93,42,9.

Come si vede, frai 2 interessi, attivo e passivo, vi sarà poca differenza, e la differenza maggiore consisterà quindi, pel valore del Titolo in rapporto al carico, nel doversi moltiplicare il capital nominale per  $1 + p$ . E sarebbe pure un buon esercizio di logica trovare il perchè di quella piccola differenza, per la quale in conclusione un capitale non provvigionato,  $1 + p$ , scontato a un dato interesse di corrispondenza, verrebbe a rappresentare un interesse netto maggiore, di quel che un capitale provvigionato  $1$ , scontato allo stesso interesse sopradetto; ma a risparmio di tempo e a non deviare dallo scopo, lascerò anche questa ricerca a chi se ne vorrà dilettere.

### CAP. 15.

#### Applicazione delle formole alle obbligazioni ferroviarie.

Ed ora veniamo finalmente all'applicazione alle obbligazioni ferroviarie delle formole generali dei Cap. 8 e 9; la 1ª delle quali, che ne darà il valore al 1º luglio 1895, diventerà, riducendo  $P$  ed  $A$  a zero, prendendo  $q'$  dal § 52 del Saggio e chiamato  $n$  il numero degli anni anzichè dei semestri

$$c' = (1+p)c \left\{ \frac{r''}{\rho} + \left( 1 - \frac{r''}{\rho} \right) \left( \frac{\frac{r}{1-s^{-n}}}{\frac{\rho}{1-s^{-2n}}} \frac{\rho}{\rho(2+\rho)-r} - \frac{r}{\rho(2+\rho)-r} \right) \right\} = (1+p)c\beta$$

e la 2ª, che darà il valore al 1º luglio 1887, ossia 8 anni innanzi, potrà, fatto

$q'' = \sigma^{-2n'}$  (ove  $n'$  saranno gli anni di differimento), rappresentarsi per [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$c'' = (1 + p) c \left\{ \frac{r''}{\rho} + \left( \beta - \frac{r''}{\rho} \right) \sigma^{-2n'} \right\}.$$

Cominciamo a trovare il valore di  $\beta$  che è :

$$\frac{r''}{\rho} + \left( 1 - \frac{r''}{\rho} \right) q'.$$

Essendo noto che il frutto semestrale di una rendita annua 3%, al netto della sola ricchezza mobile del 13,20% sul frutto lordo, è per ogni lira, 0,01302, il suo valor capitale in relazione a un interesse del 2,25% sarà

$$\frac{r''}{\rho} = \frac{0,01302}{0,0225}$$

che coi log. darà :

$$\begin{array}{r}
18,1146110 \\
- 8,3521825 \\
\hline
9,7624285 = \log. 0,57866667
\end{array}$$

Si avrà quindi l'equazione

$$\beta = 0,57866667 + 0,42133333 q'$$

Ed ora, al valore di  $q'$ .

$$q' = \frac{\frac{0,03}{1 - 1,03^{-90}}}{0,0225} \frac{0,0225}{0,0225 \cdot 2,0225 - 0,03} - \frac{0,03}{0,0225 \cdot 2,0225 - 0,03} \cdot \frac{1}{1 - 1,0225^{-180}}$$

La 1ª frazione rappresenta il rapporto fra l'annuità all'interesse nominale e la semestralità all'interesse di corrispondenza. Ora dalla Tav. 8ª di Peire apprendo il valore dell'annuità 3% per 90 anni, che sarà 0,03225556. E il suo logaritmo 8,50860456.

Per avere il valore della periodità 2,25% per 180 semestri, che manca alle Tavole, opero come segue :

$$\log. 1,0225 = 0,0096633$$

180

$$\begin{array}{r} 7730640 \\ 96633 \end{array}$$

$$\log. 1,0225^{180} = 1,7393940$$

10

$$\log. 1,0225^{-180} = 8,2606060 = \log. 0,018222418$$

$$0,981777582. \text{ Suo log. } 9,9920131352$$

$$\log. 0,0225 = 18,3521825$$

$$\begin{array}{r} 8,3601693648 \end{array}$$

che sottraggo dal log. dell'annuità 3%

$$\begin{array}{r} 8,50860456 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,1484351952. \end{array}$$

Proseguo le operazioni fino alla totale risoluzione delle equazioni di  $q'$  e di  $\beta$

$$2,0225$$

$$0,0225$$

$$\begin{array}{r} 401125 \end{array}$$

$$40450$$

$$40450$$

$$\begin{array}{r} 0,04550625 \end{array}$$

$$-0,03$$

$$0,01550625. \text{ Suo log. } 8,1905068$$

$$8,1905068$$

$$\log. 0,0225 \quad 8,3521825$$

$$\log. 0,03 \quad 8,4771213$$

$$\begin{array}{r} 0,4616757 \end{array}$$

$$0,2866145 = \log. 1,934704$$

$$\begin{array}{r} 0,1484351952 \end{array}$$

$$0,3101108952 = \log. 2,0422594$$

$$-1,934704$$

$$q' = 0,4075554. \text{ Suo log. } 9,031632216$$

$$\log. 0,4213333 \quad 9,6246258299$$

$$\begin{array}{r} 8,6562580459 = \end{array}$$



vantaggiosa. Rimangono però sempre intatte le riserve già espresse circa le spese, le provvigioni; cui devono aggiungersi quelle circa le conseguenze economiche derivate dall'essersi dovuto fare assegnamento sul concorso del massimo Istituto di credito e così intaccare le risorse della circolazione. Quelli che potranno contare su un guadagno piccolo ma sicuro saranno al solito gli intermediari.

Quanto al pubblico, s'egli avesse acquistata la obbligazione ferroviaria a 305,20, avrebbe fatto un impiego del 2,19 c. netto %; avendolo invece acquistata a 316, avrà fatto un impiego molto minore, che da altri calcoli all'uopo istituiti mi risultò al disotto anche del 2,17 che corrisponderebbe al corso della rendita alla pari; e ciò quando questa ne distava ben di 3 punti, e acquistandola, il portatore avrebbe fruito di un interesse di quasi il 2,24 %.

#### CAP. 16.

**Obiezioni in appoggio al maggior valore dell'obbligazione ferroviaria.**

Ma a spiegare la maggiore appetibilità della obbligazione ferroviaria in confronto della rendita abbiamo sentito mettere in conto la forma del Titolo che con la tenuità dell'interesse nominale e la prospettiva di un lauto rimborso alletta veramente i capitali del risparmio. A ciò per altro può osservarsi che eranvi pure sul mercato altre consimili obbligazioni 3 %, similmente garantite dal governo e già in corso di ammortizzazione, le Vittorio Emanuele p. e. e le Livornesi, esenti le prime da tassa di circolazione, ed estinguibili, le une col 1° ottobre 1961 ossia fra 74 anni, le altre col 1° gennaio 1875, ossia fra soli 68, le quali, come dagli opportuni calcoli (che risparmio al lettore), avrebbero, per equivalere alla rendita al pari, potuto acquistarsi per 332,81 e 331,29, mentre invece si quotavano a 326 e 329; e che aggiunte quindi alle altre, pur favorevolmente quotate, e direttamente o indirettamente garantite dallo Stato, Romane, Centrali, Pistoiesi, Meridionali, Sarde, Pontebbane etc. avrebbero, se non in tutto, in gran parte, potuto sopprimere alle esigenze dei vogliosi di simile impiego.

E siffatta osservazione può rispondere anche a coloro che cercassero la spiegazione della cosa nel corso elevato del consolidato 3 % il quale al tasso medio attuale, che depurato del prorata frutti aggirasi intorno al 65,10, renderebbe, non il 2,24, come il 5 % a 97, bensì il 2 solamente; del che a sua volta troverebbero ragione nella preferibilità del 3 % per non essere, nè ora nè chi sa ancora fin quando, soggetto all'alea della conversione. Ma visti appunto i bassi corsi degli altri Titoli 3 %, essi pure non passibili di conversione, mi parrebbe più ragionevole ritenere che non dalla sua intrinseca appetibilità, siano determinati gli alti corsi di questo Consolidato, bensì dalla esigua sua quantità, in buona parte anche immobilizzata; il che lo rende sensibilissimo alle richieste che su di esso è naturale si volgano sia da parte del risparmio sia degli accaparratori, ma per ciò stesso non lo rende troppo atto a considerarlo come Titolo regolatore del mercato.

CAP. 17.

C o n c l u s i o n e .

Ma per non divagare più oltre in considerazioni al campo scientifico troppo estranee, e volendo pur concludere, mi basti di far rilevare ancora una volta la utilità della matematica anche nelle sue applicazioni alla pubblica e privata finanza, essendosi con essa risolto in modo abbastanza semplice un problema in apparenza insolubile, quale presentavasi quello del valore effettivo di un Titolo soggetto a imposta non solo sui frutti, ma anche sul valore effettivo medesimo; e fattone concludente saggio sopra un' importante operazione finanziaria.

Mi auguro che l'agio non mi manchi per darne in seguito più ampie dimostrazioni, e adempiere insieme le promesse fatte nella chiusa del lavoro precedente; a che mi trovo pure animato dai favorevoli giudizi avutine da persone competentissime. E termino intanto ringraziando i lettori dell'attenzione prestatami, e assicurando loro anche maggior gratitudine se vorranno assistermi dei loro lumi e onorarmi altresì delle loro assennate osservazioni e censure.

---

## ALCUNE OSSERVAZIONI

SOPRA LE FUNZIONI SFERICHE DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO

E SOPRA ALTRE FUNZIONI CHE SE NE POSSONO DEDURRE

## N O T A

D I

GIULIO GIULIANI.

## I.

1. Dallo sviluppo della funzione  $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$  in serie ordinata per le potenze crescenti di  $\alpha$  si ottengono le funzioni sferiche  $X_n(p, \alpha)$  di ordine  $p$ , che per  $p=2$  si riducono alle ordinarie funzioni sferiche provenienti dallo sviluppo di  $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Alle proprietà già note delle funzioni  $X_n(p, \alpha)$ , contenute nelle memorie dei signori Cayley, Clebsch, Heine, Mehler e Tonelli, ne aggiungeremo qualche altra che forse potrà sembrare non del tutto priva d'interesse.

Abbiamo intanto (Heine-Hand. d. *Kugelfunctionen*, vol. I, p. 453).

$$(1) \quad X_n(p, \alpha) = \frac{\pi(p+n-2)}{2^{p-2} \sqrt{\pi} \pi(n) \pi\left(\frac{p-3}{2}\right)} \int_0^\pi (\alpha + \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^n \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \, d\varphi$$

e da questa ne risulta, come ora dimostreremo, che  $X_n(p, \alpha)$ , per  $\alpha = \cos \theta$  con  $0 < \theta < \pi$  diviene infinita dell'ordine  $\frac{2p-5}{2}$  e per  $\theta = 0 = \pi$  dell'ordine  $p-2$ . Osserviamo prima di tutto che

$$(2) \quad \frac{\pi(p+n-2)}{\pi(n)} = \pi(p-1) p(1+p) \left(1 + \frac{p}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{n-2}\right) \frac{1}{n(n-1)} = \pi(p-1) \frac{F(p, n-1)}{n(n-1)^{1-p}}$$

essendo  $F(p, n-1)$  una funzione di  $n$  che è finita al crescere di  $n$  per  $p$  finito e che ha per limite per  $n = \infty$  la fattoriale  $F_c(p)$  del Weierstrass.

Abbiamo poi, limitandoci a considerare il caso di  $p$  pari, che l'integrale

$$\int_0^\pi (\alpha + \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n \sin^{p-2} \varphi \, d\varphi$$

si riduce alla somma di un numero finito d'integrali, dei quali uno è

$$\int_0^\pi (\alpha + \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n \, d\varphi$$

e gli altri sono della forma

$$\int_0^\pi (\alpha + \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n \cos m\varphi \, d\varphi.$$

Tutti però possono ridursi (Heine *lib. cit.* pag. 178 e seguenti) all'espressione  $\frac{C}{\sqrt{n}} (1 + D)$  con  $C$  indipendente da  $n$  e  $D$  infinitesimo del primo ordine al crescere indefinito di  $n$ . Avremo quindi, tenendo conto anche delle (1) e (2),

$$X_n(p, \alpha) = \frac{C}{n \sqrt{n} (n-1)^{1-p}} (1 + D) = \frac{C}{n^{\frac{5-2p}{2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-p}} (1 + D)$$

con  $C$  finito anche per  $n = \infty$  e  $D$  infinitesimo del primo ordine per  $n = \infty$ .

Per  $p=2$  si ha una nota proprietà delle funzioni sferiche ordinarie. Se  $\alpha=1$ , dalle (1) e (2) si deduce subito che  $X_n(p, 1)$  diviene infinita dell'ordine  $p-2$ .

2. Poichè la  $X_n(p, \alpha)$  soddisfa alla (Tonelli. *Ueber die Potentialfunction in einem mehrfach ausgedehnten Raume. Nach. von der Geselleschaften zu Göttingen* 1875)

$$(1 - \alpha^2) \frac{d^2 X_n(p, \alpha)}{d\alpha^2} - p\alpha \frac{dX_n(p, \alpha)}{d\alpha} + n(n+p-1) X_n(p, \alpha) = 0$$

se ne deduce che non può esser nulla per  $\alpha = \pm 1$ , nè aver radici multiple l'equazione  $X_n(p, \alpha) = 0$ . Di più dalle due (Heine *lib. cit.* pag. 453)

$$X_n(2s+1, \alpha) = \frac{1}{2^{s-1} \sqrt{\pi}} \frac{d^s}{d\alpha^s} \left( \frac{\cos(n+s)\theta}{n+s} \right) \quad (\alpha = \cos \theta)$$

$$X_n(2s+2, \alpha) = \frac{1}{2^s} \frac{d^s}{d\alpha^s} \left( P_{n+s}(\alpha) \right)$$

essendo  $P_{n+s}(x)$  la ordinaria funzione sferica di prima specie del grado  $n+s$ , si ha che le radici della  $X_n(2s+2, x) = 0$  sono tutte reali e comprese tra  $-1$  e  $+1$ , e quelle di  $X_n(2s+1, x)$  sono pure tutte reali e comprese tra

$$\frac{-\pi}{2(n+s)} \quad \text{e} \quad \frac{+\pi}{2(n+s)},$$

quando si considerino i soli valori di  $\theta$  compresi tra  $-\pi$  e  $+\pi$ .

3. Dimostrerò ora che, mentre una funzione  $f(x)$  della variabile reale  $x$  può sotto certe condizioni pochissimo restrittive (Dini. *Sopra le serie di funzioni sferiche. Annali di Matematica*, serie II, tomo VI, e, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di variabile reale*; pag. 277 e seguenti)

svilupparsi nell'intervallo  $(-1, 1)$  in serie della forma  $\sum_0^{\infty} A_n X_n(2, x)$  con

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) X_n(2, x) dx,$$

invece la serie  $\sum_0^{\infty} B_n X_n(p, x)$  con

$$B_n = \frac{(2n+p-1)\pi(n)}{2^{3-p}\pi(n+p-2)} \int_{-1}^1 f(x) X_n(p, x) (1-x^2)^{\frac{p-2}{2}} dx$$

non ha per somma un numero finito se  $p > 2$ . Ricordo, per giustificare la forma dei coefficienti  $B_n$  (cfr. Dini *lib. cit.* pag. 134) che, come si hanno per  $p=2$  le formole

$$\int_{-1}^1 X_n(2, x) X_m(2, x) dx = 0 \quad m > n$$

$$\int_{-1}^1 (X_n(2, x))^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

così abbiamo per  $p > 2$  (Heine. *Die speciellen Laméschen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung. Journal für die Math.* vol. 62)

$$\int_{-1}^1 X_n(p, x) X_m(p, x) (1-x^2)^{\frac{p-2}{2}} dx = 0 \quad m > n$$

$$\int_{-1}^1 (X_n(p, x))^2 (1-x^2)^{\frac{p-2}{2}} dx = \frac{2^{3-p}}{2n+p-1} \frac{\pi(n+p-2)}{\pi(n)}.$$

Ricordo ancora che  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$X_n(p, \cos \theta) X_n(p, \cos \theta') = \frac{\pi(n+p-2)}{2^{p-1} \sqrt{\pi} \pi(n) \pi\left(\frac{n-3}{2}\right)} \int_0^{2\pi} X_n(p, \cos \gamma) \sin^{p-2} \gamma \, d\gamma$$

essendo

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi,$$

e che (Tonelli, *mem. cit.*),

$$(p-1) X_0(p, x) + p X_1(p, x) + \dots + (p+2n-1) X_n(p, x) = \frac{dX_{n+1}(p, x)}{dx} + \frac{dX_n(p, x)}{dx}$$

Ora abbiamo

$$\sum_0^\infty B_n X_n(p, x') = \sum_0^\infty \frac{(2n+p-1) \pi(n)}{2^{n-p} \pi(n+p-2)} X_n(p, x') \int_{-1}^1 f(x) X_n(p, x) (1-x^2)^{\frac{p-2}{2}} dx$$

e ponendo  $x = \cos \theta$ ,  $x' = \cos \theta'$ , facendo uso delle precedenti e indicando con  $P$  un numero indipendente da  $n$

$$\sum_0^\infty B_n X_n(p, x') = P \sum_0^\infty (2n+p-1) \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} X_n(p, \cos \gamma) \sin^{p-2} \gamma \, d\gamma.$$

La somma dei primi  $n+1$  termini di questa serie è data da

$$P \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \left( \frac{dX_n(p, \cos \gamma)}{d\gamma} + \frac{dX_{n+1}(p, \cos \gamma)}{d\gamma} \right) \frac{\sin^{p-2} \gamma}{\sin \gamma} \, d\gamma.$$

Si riconosce facilmente, imitando la dimostrazione data dal prof. Dini per le ordinarie funzioni sferiche (Dini, *lib. cit.* pag. 279 e segg.) e tenendo conto dei risultati del n° 1, che l'espressione precedente diviene infinita per  $n = \infty$  e per  $p > 2$ .

## II.

1. Consideriamo ora le funzioni  $I_n(p, x)$  definite dalla

$$I_n(p, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi$$

che per  $p = 2$  si riducono a quelle di Bessel. Abbiamo

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$I_n(p, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos n \varphi \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} n \varphi \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi$$

ora

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} n \varphi \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} n \varphi \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi$$

Il secondo di questi integrali, colla trasformazione  $\varphi = \pi - \omega$ , diviene se  $n$

e  $p$  sono pari, eguale a  $-\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ , quindi per  $n$  e  $p$  pari

$$I_n(p, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos n \varphi \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi.$$

Nello stesso modo si dimostra che si ha pure per  $n$  e  $p$  dispari

$$I_n(p, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos n \varphi \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi$$

e finalmente per  $n$  dispari e  $p$  pari, o  $n$  pari e  $p$  dispari

$$I_n(p, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} n \varphi \cos^{p-2} \varphi \, d\varphi.$$

Supponendo  $p$  pari si ha tra  $0$  e  $\pi$  (Dini, *lib. cit.* pag. 112)

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos^{p-2} \varphi = I_0(p, x) + 2 I_2(p, x) \cos 2\varphi + \dots \\ \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) \cos^{p-2} \varphi = 2 I_1(p, x) \operatorname{sen} \varphi + 2 I_3(p, x) \operatorname{sen} 3\varphi + \dots \end{cases}$$

mentre invece si avrebbe per  $p$  dispari

$$\cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos^{p-2} \varphi = 2 I_1(p, x) \cos \varphi + 2 I_3(p, x) \cos 3\varphi + \dots$$

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) \cos^{p-2} \varphi = 2 I_2(p, x) \operatorname{sen} 2\varphi + 2 I_4(p, x) \operatorname{sen} 4\varphi + \dots$$

Limitandoci a considerare il caso di  $p$  pari, giacchè nello stesso modo si tratterebbe quello di  $p$  dispari, si ottiene per  $\varphi = 0$  dalla prima delle (1)

$$1 = I_0(p, x) + 2 I_2(p, x) + \dots,$$

e per  $\varphi = \frac{\pi}{4}$   
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \cos\left(\omega \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = I_0(p, \omega) - 2I_2(p, \omega) + \dots$$

e facendo nella seconda delle (1)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \operatorname{sen}\left(\omega \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2I_1(p, \omega) \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + 2I_3(p, \omega) \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} + \dots$$

cambiando ora nelle (1)  $\varphi$  in  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  e sommando, dopo aver moltiplicato la seconda per  $i = \sqrt{-1}$ , si ha

$$e^{i x \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi = I_0(p, \omega) + 2 \sum_1^{\infty} i^n I_n(p, \omega) \cos n\varphi$$

e da questa

$$I_n(p, \omega) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i x \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos n\varphi d\varphi.$$

Aggiungiamo che i risultati ai quali siamo pervenuti per  $p$  pari valgono anche se  $p$  è una frazione irriducibile con denominatore dispari, quando si consideri il solo valore reale del radicale.

2. Notiamo ora che all'infuori del coefficiente

$$\frac{2^{2-p}}{\sqrt{\pi} \pi \left(\frac{p-3}{2}\right)}$$

la funzione  $\pi I_0(p, \omega)$  è il limite di

$$n^{2-p} X_n\left(p, \cos \frac{\theta}{n}\right)$$

per  $n = \infty$ , come è dimostrato dall'Heine (*Heine lib. cit. pag. 463*) partendo dall'espressione (1) di

$$X_n\left(p, \cos \frac{\theta}{n}\right).$$

Allo stesso risultato si potrebbe anche pervenire, e si avrebbe allora anche lo sviluppo in serie della  $I_n(p, x)$ , partendo dall'espressione di

$$X_n \left( p, \cos \frac{\theta}{n} \right)$$

sotto forma di un polinomio espresso per i coseni degli archi multipli di  $\frac{\theta}{n}$  e applicando le stesse considerazioni della mia Nota: *Sopra la funzione  $P_n(\cos \gamma)$  per  $n$  infinito.* (*Giornale di Matematiche*, vol. XXII).

3. La funzione  $I_n(p, x)$  soddisfa a un'equazione differenziale del quarto ordine ( $n > 0$ ), come può riconoscersi facilmente da ciò che segue. Integrando per parti si ha

$$\int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos n \varphi \, d\varphi = \frac{i x}{n} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-1} \varphi \operatorname{sen} n \varphi \, d\varphi - \frac{p-2}{n} \cdot \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} n \varphi \, d\varphi.$$

Sempre integrando per parti

$$\int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-1} \varphi \operatorname{sen} n \varphi \, d\varphi = \frac{-ix}{n} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^p \varphi \cos n \varphi \, d\varphi + \frac{p-1}{n} \cdot \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos \varphi \cos n \varphi \, d\varphi,$$

$$\int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} n \varphi \, d\varphi = \frac{-1}{n} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos n \varphi \, d\varphi + \frac{p-3}{n} \cdot$$

$$\int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-1} \varphi \cos^2 \varphi \cos n \varphi \, d\varphi - \frac{ix}{n} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos \varphi \cos n \varphi \, d\varphi.$$

Sostituendo e riducendo

$$(-i)^{-n} \pi I_n(p, x) = \frac{x^2}{n^2} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^p \varphi \cos n \varphi \, d\varphi + \frac{i(p-1)x}{n^2} \cdot$$

$$\int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos \varphi \cos n \varphi \, d\varphi +$$

$$+ \frac{p-2}{n^2} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos n \varphi \, d\varphi - \frac{(p-2)(p-3)}{n^2} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-1} \varphi \cos^2 \varphi \cos n \varphi \, d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(p-2)i\alpha}{n^2} \int_0^\pi e^{i\alpha \cos \varphi} \sin^{p-2} \varphi \cos \varphi \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{\alpha^2 + (p-2)^2}{n^2} \int_0^\pi e^{i\alpha \cos \varphi} \sin^{p-2} \varphi \cos n\varphi \, d\varphi - \\
& - \frac{\alpha^2}{n^2} \int_0^\pi e^{i\alpha \cos \varphi} \sin^{p-2} \varphi \cos^2 \varphi \cos n\varphi \, d\varphi + \frac{i\alpha}{n^2} (2p-3) \int_0^\pi e^{i\alpha \cos \varphi} \sin^{p-2} \varphi \cos \varphi \cos n\varphi \, d\varphi - \\
& - \frac{(p-2)(p-3)}{n^2} \int_0^\pi e^{i\alpha \cos \varphi} \sin^{p-2} \varphi \cos n\varphi \, d\varphi.
\end{aligned}$$

Coll'osservare che

$$\begin{aligned}
(-i)^{-n} \pi \frac{d I_n(p, \alpha)}{d\alpha} &= i \int_0^\pi e^{i\alpha \cos \varphi} \sin^{p-2} \varphi \cos \varphi \cos n\varphi \, d\varphi \\
(-i)^{-n} \pi \frac{d^2 I_n(p, \alpha)}{d\alpha^2} &= - \int_0^\pi e^{i\alpha \cos \varphi} \sin^{p-2} \varphi \cos^2 \varphi \cos n\varphi \, d\varphi
\end{aligned}$$

la precedente diviene

$$\begin{aligned}
(2) \quad \frac{\alpha^2}{n^2} \frac{d^2 I_n(p, \alpha)}{d\alpha^2} + \frac{\alpha}{n^2} (2p-3) \frac{d I_n(p, \alpha)}{d\alpha} + \left( \frac{\alpha^2 + (p-2)^2}{n^2} - 1 \right) I_n(p, \alpha) - \\
- \frac{(p-2)(p-3)}{n^2} I_n(p-2, \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$(3) \quad \frac{d^2 I_n(p-2, \alpha)}{d\alpha^2} = - I_n(p-2, \alpha) + I_n(p, \alpha).$$

Ricavando dalla (3)

$$I_n(p, \alpha), \quad \frac{d I_n(p, \alpha)}{d\alpha}, \quad \frac{d^2 I_n(p, \alpha)}{d\alpha^2}$$

e sostituendo questi valori nella (2), otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2}{n^2} \frac{d^2 I_n(p-2, \alpha)}{d\alpha^2} + \frac{\alpha}{n^2} (2p-3) \frac{d I_n(p-2, \alpha)}{d\alpha} + \left( \frac{2\alpha^2 + (p-2)^2}{n^2} - 1 \right) \frac{d^2 I_n(p-2, \alpha)}{d\alpha^2} + \\
+ (2p-3) \frac{\alpha}{n^2} \frac{d I_n(p-2, \alpha)}{d\alpha} + \left( \frac{\alpha^2 + p-2}{n^2} - 1 \right) I_n(p-2, \alpha) = 0
\end{aligned}$$

e da questa cambiando  $p - 2$  in  $p$  si ha l'equazione differenziale alla quale soddisfa  $I_0(p, x)$ . [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

La  $I_0(p, x)$  è invece un integrale di un'equazione differenziale del secondo ordine che può trovarsi così. Dalla

$$I_0(p, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \, d\varphi$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{dI_0(p, x)}{dx} &= \frac{i}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{i}{(p-1)\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \frac{d \operatorname{sen}^{p-1} \varphi}{d\varphi} \, d\varphi = \\ &= \frac{i}{(p-1)\pi} \left( e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-1} \varphi \right)_0^\pi - \frac{x}{(p-1)\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^p \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{-x}{(p-1)\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \, d\varphi + \frac{x}{(p-1)\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{-x}{p-1} I_0(p, x) - \frac{x}{p-1} \frac{d^2 I_0(p, x)}{dx^2}, \end{aligned}$$

o

$$(4) \quad \frac{d^2 I_0(p, x)}{dx^2} + \frac{p-1}{x} \frac{dI_0(p, x)}{dx} + I_0(p, x) = 0.$$

Un altro integrale della (4) può trovarsi ponendo  $Y_0 = I_0(p, x)U$ . Si vede allora che  $U$  deve soddisfare alla

$$\frac{dU}{dx} \left( \frac{p-1}{x} + \frac{2}{I_0(p, x)} \frac{dI_0(p, x)}{dx} \right) + \frac{d^2 U}{dx^2} = 0$$

ossia

$$\frac{p-1}{x} + \frac{2}{I_0(p, x)} \frac{dI_0(p, x)}{dx} + \frac{\frac{d^2 U}{dx^2}}{\frac{dU}{dx}} = 0$$

e integrando

$$(p-1) \log x + 2 \log I_0(p, x) + \log \frac{dU}{dx} = \text{cost.}$$

o

www.libtool.com.cn

$$x^{p-1} I_0^2(p, x) \frac{dU}{dx} = e^{\cos t}.$$

o

$$U = \int \frac{dx}{x^{p-1} I_0^2(p, x)}.$$

Quindi

$$Y_0 = I_0(p, x) \int \frac{dx}{x^{p-1} [I_0(p, x)]^2}.$$

Le funzioni  $I_0(p, x)$  e  $Y_0$  servono ad integrare l'equazione a derivate parziali

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} + f = 0.$$

Ponendo infatti

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \dots + (x_p - x_p')^2} \quad \text{e} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_p) = f(R)$$

si ha, poichè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_s^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} \frac{(x_s - x_s')^2}{R^2} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{R^2 - (x_s - x_s')^2}{R^3},$$

che la (5) si trasforma nella

$$\frac{d^2 f}{dR^2} + \frac{p-1}{R} \frac{df}{dR} + f = 0$$

che ammette per integrali particolari

$$I_0(p, R) \quad , \quad Y_0(R).$$

4. Lo sviluppo in serie della funzione  $I_n(p, x)$  può aversi facilmente osservando che, per  $p$  pari,

$$\begin{aligned} I_n(p, x) &= \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos n\varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi \left( 1 + \frac{ix \cos \varphi}{\pi(1)} + \dots \right) \operatorname{sen} \varphi \cos n\varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

E sostituendo a  $\cos n\varphi$  il suo valore dato dalla

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$2 \cos n\varphi = (2 \cos \varphi)^n - \frac{n}{1} (2 \cos \varphi)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2 \cos \varphi)^{n-4} - \dots,$$

dove il secondo membro termina quando finiscono le potenze positive di  $\cos \varphi$ , e perchè è applicabile l'integrazione per serie, siamo ridotti a calcolare integrali della forma

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos^s \varphi d\varphi.$$

Questi si hanno dalla formola di riduzione

$$\int \operatorname{sen}^{p-2} \varphi \cos^s \varphi d\varphi = -\frac{\cos^{s-1} \varphi \operatorname{sen}^{p-1} \varphi}{s+p-2} + \frac{s-1}{s+p-2} \int \cos^{s-2} \varphi \operatorname{sen}^{p-2} \varphi d\varphi$$

unita alla

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{p-2} \varphi d\varphi = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (p-2)}$$

che vale per  $p$  pari e alla

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{p-2} \varphi d\varphi = \frac{2^{p-2} \left[ \Gamma \left( \frac{p-1}{2} \right) \right]^2}{\Gamma(p-1)}$$

quando sia  $p$  una frazione (vedi n° 1).

Lo stesso sviluppo potrebbe anche ottenersi sostituendo nella serie

$$1 + \frac{i\alpha \cos \varphi}{\pi(1)} + \dots,$$

a  $\cos^m \varphi$

$$\frac{1}{2^{m-1}} \sum_0^{m-1} m_h \cos(m-2h)\varphi + m_h$$

o

$$\frac{1}{2^{m-1}} \sum_0^m m_h \cos(m-2h)\varphi$$

secondochè  $m=2n$ , o  $m=2n+1$ . Gl' integrali che dobbiamo calcolare, per essere  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) x + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) x ,$$

sono allora della forma

$$\int_0^\pi \text{sen}^{p-2} \varphi \cos l \varphi d\varphi .$$

Questi sono dati dal Kummer nella sua Memoria: *De integralibus definitis et seriebus infinitis*, (*Giornale di Crelle* vol. 17).

5. Colla trasformazione  $\varphi = \pi - \omega$  si ha

$$I_0(p, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \text{sen } \omega) \cos^{p-2} \omega d\omega$$

supposto  $p$  pari o frazionario purehè sia soddisfatta la solita condizione del n° 1. Ponendo poi  $\text{sen } \omega = u$ , si ha

$$I_0(p, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(xu) (1-u^2)^{\frac{p-3}{2}} du .$$

Sia ora  $F(x)$  una funzione per la cui derivata si abbia per tutti i valori di  $x$  tra 0 e  $\pi$ ,

$$F'(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots$$

con

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F'(x) \cos nx dx .$$

Cambiando ora  $x$  in  $ux$  con  $0 \leq u \leq 1$ , si avrà ancora nello stesso intervallo, gli estremi inclusi ,

$$F'(ux) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos ux + a_2 \cos 2ux + \dots$$

Moltiplicando per  $\frac{2}{\pi} (1-u^2)^{\frac{p-3}{2}} du$ , integrando tra 0 e 1 e osservando che alla serie del secondo membro, perchè di Fourier, è applicabile l'integrazione

termine a termine, si ha

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 F'(ux) (1-u^2)^{\frac{p-3}{2}} du = \frac{1}{2} a_0 + a_1 I_0(p, x) + a_2 I_0(p, 2x) + \dots$$

Ora, sotto certe condizioni, è facile determinare una funzione  $F'(x)$  per la quale sia

$$(6) \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 F'(ux) (1-u^2)^{\frac{p-3}{2}} du.$$

Generalizzeremo per questo una formola dovuta ad Abel (*Abel. Resolution d'un problème de mécanique. Oeuvres complètes*, vol. I pag. 97). Consideriamo l'integrale

$$\int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y^s)^{\beta-1} dy.$$

Ponendo  $y^s = x$ , si ha

$$\int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y^s)^{\beta-1} dy = \frac{1}{s} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{s}-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{s}\right) \Gamma(\beta)}{s \Gamma\left(\frac{\alpha}{s} + \beta\right)}$$

e ponendo  $z = ay$ , la precedente diviene

$$\int_0^a z^{\alpha-1} (a^s - z^s)^{\beta-1} dz = \frac{a^{\alpha+s\beta-s} \Gamma\left(\frac{\alpha}{s}\right) \Gamma(\beta)}{s \Gamma\left(\frac{\alpha}{s} + \beta\right)}.$$

Moltiplicando per  $\frac{a^{s-1} da}{(a^s - a^s)^\beta}$ , integrando tra 0 e  $x$  e osservando che colla trasformazione  $a = xy$  l'integrale

$$\int_0^x \frac{a^{\alpha+s\beta-1} da}{(a^s - a^s)^\beta} \quad \text{diviene} \quad x^\alpha \int_0^1 y^{\alpha+s\beta-1} (1-y^s)^{-\beta} dy,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{a^{\alpha-1} da}{(a^s - a^s)^\beta} \int_0^a z^{\alpha-1} (a^s - z^s)^{\beta-1} dz &= \frac{x^\alpha}{s} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{s}\right) \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta) \Gamma\left(\frac{\alpha}{s} + \beta\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{s} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{s} + \beta\right)} = \\ &= \frac{x^\alpha}{\alpha} \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta). \end{aligned}$$

Moltiplicando ora per  $\alpha \varphi(\alpha) d\alpha$  e integrando rispetto ad  $\alpha$

$$\int_0^x \frac{d\alpha}{(\alpha^2 - a^2)^\beta} \int_0^a \frac{(\int_0^a \alpha z^{\alpha-1} \varphi(\alpha) d\alpha) dz}{(a^2 - z^2)^{1-\beta}} = \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta) \int \varphi(\alpha) x^\alpha d\alpha$$

da cui, ponendo  $\int \varphi(\alpha) x^\alpha d\alpha = f(x)$  e poichè  $\Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta) = \frac{\pi}{\text{sen } \beta\pi}$ ,

$$f(x) = \frac{\text{sen } \beta\pi}{\pi} \int_0^x \frac{d\alpha}{(\alpha^2 - a^2)^\beta} \int_0^a \frac{f'(z) dz}{(a^2 - z^2)^{1-\beta}}$$

Questa però non vale qualunque sia  $\beta$ , dovendo gli integrali esser finiti, ma per  $\beta < 1$ . Sostituendo nel secondo integrale a  $z$ ,  $ay$  esso diviene

$$\int_0^1 \frac{a^{1+\beta-2s} f'(ay) dy}{(1-y^2)^{1-\beta}}$$

e quindi

$$f(x) = \frac{\text{sen } \beta\pi}{\pi} \int_0^x \frac{a^{1+\beta-2s} da}{(\alpha^2 - a^2)^\beta} \int_0^1 \frac{f'(ay) dy}{(1-y^2)^{1-\beta}}$$

Si moltiplichino ora i due membri della (6) per

$$\frac{x^{\frac{p-1}{2}-1} dx}{(y^2 - x^2)^{\frac{p-1}{2}}}$$

e si integri tra 0 e  $y$ , si avrà

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{x^{\frac{p-1}{2}-1} \varphi(x) dx}{(y^2 - x^2)^{\frac{p-1}{2}}} &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{x^{\frac{p-1}{2}-1} dx}{(y^2 - x^2)^{\frac{p-1}{2}}} \int_0^1 F'(ux) (1-u^2)^{\frac{p-1}{2}-1} du = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{\text{sen } \frac{p-1}{2} \pi} F(y) = \frac{2}{\text{sen } \frac{p-1}{2} \pi} F(y). \end{aligned}$$

6. Cerchiamo ora la somma della serie  $\sum_0^\infty I_n(p, x)$ . Abbiamo supponendo  $p$

pari o frazionario, purchè sia soddisfatta la solita condizione del n° 1,  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\begin{aligned} \sum_0^n I_n(p, x) &= \sum_0^n \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos^{p-2} \varphi (1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos^{p-2} \varphi \left( -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}} \right) d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} I_0(p, x) + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos^{p-2} \varphi \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \varphi}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}} d\varphi \end{aligned}$$

Ponendo

$$\frac{\varphi}{2} = \omega, \quad h = 2n + 1$$

$$\sum_0^n I_n(p, x) = -\frac{1}{2} I_0(p, x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen} 2\omega) \cos^{p-2} 2\omega \frac{\operatorname{sen} h\omega}{\operatorname{sen} \omega} d\omega.$$

Ma (Dini, *lib. cit.* p. 25)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen} 2\omega) \cos^{p-2} 2\omega \frac{\operatorname{sen} h\omega}{\operatorname{sen} \omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \cos(x \operatorname{sen} (+0)) \cos^{p-2} (+0) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\sum_0^\infty I_n(p, x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} I_0(p, x).$$

Così la serie

$$\sum_0^\infty \int_0^a f(x) I_n(p, x) dx$$

ha per somma, comè si riconosce prendendo il limite della somma dei suoi primi

$n + 1$  termini,  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\int_0^a f(x) \left\{ -\frac{1}{2} I_0(p, x) + \frac{\pi}{2} \right\} dx$$

e in conseguenza

$$\frac{3}{2} \int_0^a I_0(p, x) f(x) dx + \sum_1^{\infty} \int_0^a I_n(p, x) f(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^a f(x) dx.$$

Si può determinare  $f(x)$  in modo che sia

$$F(a) - F(0) = \frac{\pi}{2} \int_0^a f(x) dx,$$

prendendo

$$f(x) = \frac{2}{\pi} F'(x)$$

e quindi si avrà uno sviluppo in serie per  $F(x)$ , purchè  $F'(x) \cdot I_n(p, x)$  sia atto all'integrazione definita ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ) tra 0 ed  $a$ .

7. Prendendo  $\varphi_n(x) = I_0(p, x) x^n$ , si ha

$$\frac{dI_0(p, x)}{dx} = -n x^{n-1} \varphi_n(x) + x^{-n} \frac{d\varphi_n(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2 I_0(p, x)}{dx^2} = n(n+1) x^{n-2} \varphi_n(x) - 2n x^{n-1} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} + x^{-n} \frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2}.$$

Sostituendo nella (4) e riducendo

$$(7) \quad \frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} + \frac{p-1-2n}{x} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} + \left\{ \frac{n(n+2-p)}{x^2} + 1 \right\} \varphi_n(x) = 0.$$

Facendo  $p = 2n + 2$ , la precedente diviene

$$\frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) \varphi_n(x) = 0$$

che è l'equazione differenziale delle funzioni di Bessel. Non è però  $\varphi_n(x) = I_n(2, x)$ , come può dimostrarsi facilmente prendendo per  $I_0(p, x)$  la

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(xu) (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} du$$

(in questo caso è  $p = 2n + 2$ ) e trasformando in modo analogo l'espressione

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{x^n}{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen}^{2n} \varphi d\varphi$$

data da Jacobi (Jacobi, *Formula transformationis integralium definitorum Giornale di Crelle* vol. 15) per  $I_n(2, x)$ . Facendo poi  $p = h + 2n + 1$  la (7) diviene

$$\frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} + \frac{h}{x} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} + \left( \frac{n(1 - h - n)}{x^2} + 1 \right) \varphi_n(x) = 0.$$

Si potrà dimostrare facilmente, supponendo che  $h$  non varii con  $n$ , ma sia costante, che una funzione regolare  $f(x)$  nell'intorno del posto  $x = 0$ , è sviluppabile in serie della forma  $\Sigma c_n \varphi_n(x)$  (Pincherle, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche. Mem. dell'Acc. di Bologna*, Serie IV, tomo III). Sviluppando  $\frac{1}{y - x}$  in serie della forma

$$\Sigma \psi_n(y) \varphi_n(x)$$

si potranno determinare le funzioni  $\psi_n(y)$  associate delle  $\varphi_n(x)$ , ed anche determinare, applicando il metodo dato dal sig. Neumann (Neumann, *Theorie der Bessel'schen Functionen*, pag. 8 e seguenti) per le funzioni  $O_n(x)$  associate delle funzioni di Bessel, l'equazione differenziale alla quale soddisfano le  $\psi_n(y)$ .

Lucca, aprile 1888.

SU QUALCHE PROPRIETÀ

DELLE CURVE PIANE DEL TERZ' ORDINE FORNITE DI UN PUNTO DOPPIO

NOTA

DI

GABRIELE TORELLI.

Nel precedente mio lavoro intitolato: *Sul sistema di più forme binarie cubiche* (\*) stabilii che se  $f$  e  $\varphi$  sono due forme binarie cubiche, si ha la formola

$$2R\varphi = 2Sf + 2JQ + 3p\Delta, \tag{1}$$

dove

$$\Delta = (f, f)_2, \quad Q = (f, \Delta)_1, \quad R = (\Delta, \Delta)_2$$

$$S = (\varphi, Q)_2, \quad J = (f, \varphi)_3, \quad p = (\Delta, \varphi)_2.$$

Nella presente nota, dalla interpretazione geometrica della formola surripportata, ricavo alcune proprietà delle curve piane del terz' ordine fornite di un punto doppio.

1. È noto che se le coordinate di un punto di una curva della specie in discorso sono rappresentate da

$$\rho x_1 = a_2^3, \quad \rho x_2 = b_2^3, \quad \rho x_3 = c_2^3,$$

la forma

$$D_2^3 = (bc)^3 a_2^3 + (ca)^3 b_2^3 + (ab)^3 c_2^3$$

eguagliata a zero fornisce i parametri dei tre flessi, o, più brevemente, i punti

(\*) Rendiconto della R. Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli, Ottobre 1885, oppure Annali del R. Istituto tecnico di Napoli, vol. III.

base di  $D_z^3$  sono i tre flessi; e ponendo

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(bc)^3 = d_1, \quad (ca)^3 = d_2, \quad (ab)^3 = d_3,$$

l'equazione della retta  $d$  dei flessi è

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0.$$

Inoltre i punti d'incontro della retta  $u$  rappresentata dall'equazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

colla cubica sono i punti base della forma

$$U_z^3 = u_1 a_z^3 + u_2 b_z^3 + u_3 c_z^3.$$

Di questa forma indicheremo con  $R$  il discriminante, con  $\Delta_z^2, Q_z^3$  i covarianti quadratico e cubico.

2. Ciò premesso supponiamo nella (1)  $f = U_z^3$ , e  $\varphi$  successivamente eguale ad  $a_z^3, b_z^3, c_z^3$ . Otteniamo

$$\left. \begin{aligned} 2Ra_z^3 &= 2(aQ)^3 U_z^3 + 2(Ua)^3 Q_z^3 + 3(\Delta a)^2 a_z \cdot \Delta'_z{}^2 \\ 2Rb_z^3 &= 2(bQ)^3 U_z^3 + 2(Ub)^3 Q_z^3 + 3(\Delta b)^2 b_z \cdot \Delta'_z{}^2 \\ 2Rc_z^3 &= 2(cQ)^3 U_z^3 + 2(Uc)^3 Q_z^3 + 3(\Delta c)^2 c_z \cdot \Delta'_z{}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2).$$

Evidentemente  $(Ua)^3, (Ub)^3, (Uc)^3$  sono proporzionali alle coordinate del punto d'incontro della trasversale  $u$  colla retta  $d$  dei flessi.

Occupiamoci di costruire il punto  $K$ , le cui coordinate sono proporzionali ad  $(aQ)^3, (bQ)^3, (cQ)^3$ .

Per ciò fare assumiamo l'equazione della cubica sotto la forma canonica

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2 x_3 = 0;$$

abbiamo allora

$$a_z^3 = z_1^2 z_2, \quad b_z^3 = z_1 z_2^2, \quad c_z^3 = -(z_1^3 + z_2^3).$$

Le coordinate  $X_1, X_2, X_3$  del punto richiesto  $K$  sono proporzionali a

$$\begin{aligned} &9u_2 u_3^2 + 6u_1^2 u_3 + u_2^2 u_1 \\ &9u_1 u_3^2 + 6u_2^2 u_3 + u_1^2 u_2 \\ &- 54 u_3^3 + 18 u_1 u_2 u_3 + 2 u_1^3 + 2 u_2^3. \end{aligned}$$

Or la poloconica della retta  $u$  è  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(u_1^2 + 12u_2 u_3) x_1^2 + (u_2^2 + 12u_1 u_3) x_2^2 + u_3^2 x_3^2$$

$$- 2(18u_3^2 + u_1 u_2) x_1 x_2 - 2u_1 u_3 x_1 x_3 - 2u_2 u_3 x_2 x_3 = 0 ;$$

e le coordinate  $X'_1, X'_2, X'_3$  del polo  $F$  della retta dei flessi  $x_3 = 0$  rispetto a questa poloconica sono proporzionali a

$$9u_2 u_3^2 + 6u_1^2 u_3 + u_2^2 u_1$$

$$9u_1 u_3^2 + 6u_2^2 u_3 + u_1^2 u_2$$

$$- 162u_3^3 + 54u_1 u_2 u_3 + 6u_1^3 + 6u_2^3 ;$$

perciò fra le coordinate  $X_1, X_2, X_3$  del punto  $K$ , e le coordinate  $X'_1, X'_2, X'_3$  del polo  $F$  sussistono le relazioni  $\rho X_1 = X'_1, \rho X_2 = X'_2, \rho X_3 = 3X'_3$ ; laonde i punti  $K, F$  stanno per dritto col punto doppio  $D$ , e chiamando  $J$  il punto d'incontro della retta  $DKF$  colla retta dei flessi si ha che il rapporto anarmonico

$$(JD, FK) = 3.$$

*Perciò : il punto le cui coordinate sono proporzionali ad  $(aQ)^3, (bQ)^3, (cQ)^3$  si costruisce cercando il polo  $F$  della retta dei flessi rispetto alla poloconica della retta  $u$ , e determinando sulla congiungente del punto doppio  $D$  col polo  $F$ , la quale incontri in  $J$  la retta dei flessi, il punto  $K$  tale che il rapporto anarmonico  $(JD, FK)$  sia eguale a 3.*

3. Ciò posto è facile assegnare i punti della curva che sono base del covariante  $\Delta_2^3$ .

Per questi punti in forza delle (2) si ha

$$\left| \begin{array}{ccc} a_z^3 & (aQ)^3 & (Ua)^3 \\ b_z^3 & (bQ)^3 & (Ub)^3 \\ c_z^3 & (cQ)^3 & (Uc)^3 \end{array} \right| = 0 ;$$

perciò essi sono due dei punti d'incontro (reali o immaginari) della curva colla congiungente il punto  $(ud)$  col punto  $K$  testè costruito.

Il parametro del rimanente punto d'intersezione (sempre reale) di questa con-

giungente colla curva è fornito (\*) dall'equazione  $(\Delta D)^2 D_z = 0$  cioè da

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$d_1 (\Delta a)^2 a_z + d_2 (\Delta b)^2 b_z + d_3 (\Delta c)^2 c_z = 0.$$

4. Sia  $v \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$  un'altra trasversale, i cui punti d'incontro colla curva sono i punti base della forma  $V_z^3 = v_1 a_z^3 + v_2 b_z^3 + v_3 c_z^3$ . Si ha

$$\begin{aligned} RV_z^3 - (VQ)^3 U_z^3 &= \\ &= \begin{vmatrix} u_1(aQ)^3 + u_2(bQ)^3 + u_3(cQ)^3 & v_1(aQ)^3 + v_2(bQ)^3 + v_3(cQ)^3 \\ u_1 a_z^3 + u_2 b_z^3 + u_3 c_z^3 & v_1 a_z^3 + v_2 b_z^3 + v_3 c_z^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (aQ)^3 & (bQ)^3 & (cQ)^3 \\ a_z^3 & b_z^3 & c_z^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \\ (aQ)^3 & (bQ)^3 & (cQ)^3 \\ a_z^3 & b_z^3 & c_z^3 \end{vmatrix} = W_z^3. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$RV_z^3 = (VQ)^3 U_z^3 + W_z^3; \tag{3}$$

dove la forma  $W_z^3$  ha per base i punti d'intersezione colla cubica della congiungente il punto  $(uv)$  col punto  $K \{ (aQ)^3, (bQ)^3, (cQ)^3 \}$ .

Alla formola (3) si può anche giungere supponendo nella (1)  $f = U_z^3$ ,  $\varphi = V_z^3$  e nella eguaglianza che si ottiene, cioè

$$2RV_z^3 = 2(VQ)^3 U_z^3 + 2(UV)^3 Q_z^3 + 3(\Delta V)^2 V_z \cdot \Delta'_z{}^2 \tag{4}$$

trasformando convenientemente il secondo membro.

Se la  $v$  è la retta  $d$  dei flessi, si ha  $(UV)^3 = 0$ , e la (4) paragonata colla (3) mostra che in tal caso la  $W_z^3 = \frac{3}{2} (\Delta D)^2 D_z \cdot \Delta'_z{}^2$ , il che conferma i risultati del § 3, cioè che la congiungente il punto  $(ud)$  col punto  $K \{ (aQ)^3, (bQ)^3, (cQ)^3 \}$  taglia la cubica in tre punti dei quali due sono base del covariante  $\Delta_z^2$ , e il terzo del covariante  $(\Delta D)^2 D_z$ .

(\*) Vedi Anelli. *Sopra le curve piane del 3.º ordine con un punto doppio*, § IV. *Giornale di Battaglini*. Vol. XVI pag. 364.

Or la (3) interpretata geometricamente fornisce il teorema :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

*Se attorno ad un punto S del piano di una curva di 3° ordine fornita di un punto doppio, rota una trasversale, e i punti d'incontro si proiettano dal punto doppio, le terne dei raggi che s'ottengono formano un'involuzione cubica semplice.*

Questo teorema è già noto; p. e., sotto altra forma, si trova nel § 15 della memoria del D' Ovidio intitolata *Studio sulle cubiche gobbe* (\*).

Le quattro tangenti condotte da S alla cubica danno le quattro terne dell'involuzione fornite di elementi doppii. Se S sta sopra una delle tangenti di flesso l'involuzione ha un elemento triplo, e due doppii; se S è l'intersezione di due tangenti di flesso, l'involuzione possiede due elementi tripli anzi che quattro elementi doppii.

5. Se S sta sulla curva tutte le terne della precedente involuzione cubica hanno un elemento comune; soppresso questo, le coppie rimanenti formano un'involuzione quadratica. Dunque si ha il teorema :

*Se attorno ad un punto S di una cubica munita di punto doppio si fa rotare una trasversale, e i nuovi punti d'incontro si proiettano dal punto doppio, le coppie di raggi che s'ottengono formano un'involuzione quadratica. I raggi doppii sono quelli che proiettano i punti aventi S per punto tangenziale.*

Coppia comune a tutte le involuzioni quadratiche che s'ottengono facendo variare S sulla cubica, è quella formata dalle due tangenti nel punto doppio D.

6. Sia PQRS un quadrangolo iscritto nella cubica. Dal punto doppio D proiettiamo i vertici P, R, e le rimanenti intersezioni A, A', B, B' della cubica rispettivamente coi lati SP, RQ, SR, PQ, e indichiamo i raggi proiettanti colle lettere minuscole corrispondenti a quelle che dinotano i punti proiettati, e finalmente chiamiamo  $t_1, t_2$  le tangenti alla cubica nel punto doppio D.

In virtù del teorema precedente le tre coppie  $ap, br, t_1 t_2$  costituiscono una involuzione quadratica, e un'altra involuzione quadratica è costituita dalle coppie  $a'r, b'p, t_1 t_2$ . Perciò i fasci  $abt_1 t_2, a'b't_2 t_1$  sono rispettivamente proiettivi a  $prt_2 t_1, rpt_1 t_2$ ; ma questi due sono proiettivi fra loro, dunque anche tali sono i primi due; laonde le tre coppie  $aa', bb', t_1 t_2$  costituiscono una involuzione quadratica.

Può quindi conchiudersi il teorema :

*Se un quadrangolo è iscritto in una cubica fornita di punto doppio, le tangenti in questo, e i raggi che da esso proiettano i rimanenti punti d'incontro delle coppie di lati opposti colla cubica formano una involuzione quadratica.*

---

(\*) Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, Serie II, vol. XXXII.

Donde segue l'altro teorema che può considerarsi come generalizzazione del teorema di Desargues sul quadrangolo iscritto in una conica :

*Se un poligono di  $2n$  lati iscritto in una curva di  $3^{\circ}$  ordine a punto doppio, senza cessare di essere iscritto nella cubica si deforma in modo che  $2n-1$  lati rotano attorno ai rimanenti loro punti d'intersezione colla curva, anche il restante lato rota attorno all'ulteriore suo punto d'incontro colla cubica stessa.*

Questo teorema mostra che la soluzione del problema :

*Iscrivere in una cubica munita di punto doppio un ennagono i cui lati passino per  $n$  punti assegnati sulla stessa cubica :*

procede tal quale come quella del problema : iscrivere in una conica un ennagono i cui lati passino per  $n$  punti assegnati per dritto. Epperò esso per  $n$  pari risulta impossibile o indeterminato, e per  $n$  dispari ha due o zero soluzioni (\*).

---

(\*) Cfr. le considerazioni fatte nel caso particolare trattato nelle *Leçons sur la Géométrie* par A. Clebsch, T. II, pag. 840.

# LE SERIE ALGEBRICHE DI SUPERFICIE AD INDICE 3

## N O T A

D E L

Dott. VITTORIO MURER.

Nel vol. XXV di questo Giornale fu pubblicato una breve mia Nota *Sulle serie d'indice 1 e 2*, avente per iscopo di stabilirne l'equazione e la generazione generale. Come complemento di quelle, analoghe ricerche per le serie d'indice 3 mi permetto ora di esporre concisamente in questo istesso periodico; quantunque, riguardo ad esse, sia già stato accolto un mio cenno nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

1. I concetti e le proprietà note degli iperspazi si possono immediatamente applicare alle serie, in tutto ciò che dipende dal loro indice.

L'assieme delle superficie d'ordine  $n$  forma un sistema lineare  $S_m$ , ad  $m$  dimensioni; essendo  $m = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 1$ . Indichiamo poi con  $S_k$  un sistema lineare a  $k$  dimensioni contenuto in  $S_m$ ; e in particolare quindi con  $S_1$  un fascio,  $S_2$  una rete, ecc.

Una serie algebrica  $U$ , che non si spezzi, avrà a comune con un  $S_{m-1}$ , in cui non giaccia per intero, un numero costante  $\mu$  di superficie. Esso è precisamente l'indice della serie, esprimendo per l'appunto quante superficie di  $U$  appartengono al sistema  $S_{m-1}$  formato dalle superficie di  $S_m$  che passano per un punto dato.

Se la serie appartiene a un  $S_k$ , cioè giace in un  $S_k$ , ma non in un  $S_{k-1}$ , allora  $\mu$  è anche il numero delle superficie della serie che giacciono in un qualunque  $S_{k-1}$  che faccia parte di  $S_k$ . E deve essere  $k \leq \mu$ ; giacchè altrimenti per  $k$  superficie della serie si potrebbe condurre un  $S_{k-1}$  che la conterrebbe per intero, avendo con essa a comune più di  $\mu$  superficie. In particolare poi per  $k = \mu$  la serie è razionale. E invero, per  $\mu - 1$  superficie fisse e per una variabile di  $U$  si può condurre un  $S_{\mu-1}$ , il quale avrà a comune con un fascio  $S_1$  situato in  $S_\mu$  una superficie sola; e viceversa una superficie di  $S_1$  e quelle  $\mu - 1$  fisse determinano un

$S_{\mu-1}$ , il quale conterrà ulteriormente un'unica superficie di  $U$ . Le superficie di  $U$  corrispondono così univocamente a quelle del fascio  $S_1$ ; c. d. d.

2. In particolare si deduce che, per  $\mu = 1$  una serie d'indice 1 non è altro che un fascio  $S_1$ ; per  $\mu = 2$  una serie d'indice 2 è contenuta in una rete  $S_2$ , ed è razionale (essendo qui  $k = \mu = 2$ ): cose già vedute altrimenti.

Per  $\mu = 3$  bisogna distinguere due casi :

O la serie appartiene a un sistema lineare  $S_3$ ; e allora è razionale.

O la serie appartiene invece a una rete  $S_2$ ; e allora essa, ove non intervengano altre particolarità facili a rinvenirsi, non è razionale; ma, scritta l'equazione sua sotto la forma :

$$u_1 \lambda_1 + u_2 \lambda_2 + u_3 \lambda_3 = 0,$$

i parametri  $\lambda_i$  non saranno esprimibili con un unico parametro  $\lambda$  altramente che con funzioni ellittiche (come per le cubiche piane senza punto doppio).

3. Nel primo caso l'equazione della serie si può ridurre alla :

$$u_0 \lambda_1^3 + 3u_1 \lambda_1^2 \lambda_2 + 3u_2 \lambda_1 \lambda_2^2 + u_3 \lambda_2^3 = 0,$$

caso questo già da me considerato nel vol. XXIV di questo Giornale. Aggiungerò solo che :

La involupante della serie può essere generata, tanto dalle due serie proiettive d'ordine  $n$  ed indice 2 :

$$u_0 \lambda_1^2 + 2u_1 \lambda_1 \lambda_2 + u_2 \lambda_2^2 = 0 \quad , \quad u_1 \lambda_1^2 + 2u_2 \lambda_1 \lambda_2 + u_3 \lambda_2^2 = 0;$$

quanto dai due fasci proiettivi, d'ordine  $2n$  :

$$u_0 u_2 - u_1^2 = \mu (u_0 u_3 - u_1 u_2) \quad , \quad u_0 u_3 - u_1 u_2 = 4\mu (u_1 u_3 - u_2^2);$$

la linea base di ciascuno dei quali si compone della *linea cuspidale* (d'ordine  $3n^2$ ) della serie, e di una *caratteristica* (d'ordine  $n^2$ ) della stessa. L'equazione della involupante stessa è :

$$\frac{1}{2} (u_0 u_2 - u_1^2) (u_1 u_3 - u_2^2) - (u_0 u_3 - u_1 u_2)^2 = 0.$$

Osservando poi che nel sistema  $S_3$ , in cui giace la  $U$ , su ogni linea  $(n, n)$ , base di un fascio, resta determinato dalle altre superficie un sistema  $\infty^1$  di gruppi  $(n, n, n)$ , basi di una rete, e su ogni superficie è determinato, dalle altre, un sistema  $\infty^2$  di curve  $(n, n)$ , si trova subito che :

« Una serie generale d'indice 3, situata in un  $S_3$ , è generata dalla superficie « variabile di  $S_3$  che congiunge i gruppi corrispondenti  $(n, n, n)$  situati su tre « linee  $(n, n)$  di  $S_3$ ; quando fra i sistemi di gruppi siasi stabilita corrispondenza « proiettiva ;

Or la (3) interpretata geometricamente fornisce il teorema :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

*Se attorno ad un punto S del piano di una curva di 3° ordine fornita di un punto doppio, rota una trasversale, e i punti d'incontro si proiettano dal punto doppio, le terne dei raggi che s'ottengono formano un'involuzione cubica semplice.*

Questo teorema è già noto; p. e., sotto altra forma, si trova nel § 15 della memoria del D' Ovidio intitolata *Studio sulle cubiche gobbe* (\*).

Le quattro tangenti condotte da S alla cubica danno le quattro terne dell'involuzione fornite di elementi doppii. Se S sta sopra una delle tangenti di flesso l'involuzione ha un elemento triplo, e due doppii; se S è l'intersezione di due tangenti di flesso, l'involuzione possiede due elementi tripli anzi che quattro elementi doppii.

5. Se S sta sulla curva tutte le terne della precedente involuzione cubica hanno un elemento comune; soppresso questo, le coppie rimanenti formano un'involuzione quadratica. Dunque si ha il teorema :

*Se attorno ad un punto S di una cubica munita di punto doppio si fa rotare una trasversale, e i nuovi punti d'incontro si proiettano dal punto doppio, le coppie di raggi che s'ottengono formano un'involuzione quadratica. I raggi doppii sono quelli che proiettano i punti aventi S per punto tangenziale.*

Coppia comune a tutte le involuzioni quadratiche che s'ottengono facendo variare S sulla cubica, è quella formata dalle due tangenti nel punto doppio D.

6. Sia PQRS un quadrangolo iscritto nella cubica. Dal punto doppio D proiettiamo i vertici P, R, e le rimanenti intersezioni A, A', B, B' della cubica rispettivamente coi lati SP, RQ, SR, PQ, e indichiamo i raggi proiettanti colle lettere minuscole corrispondenti a quelle che dinotano i punti proiettati, e finalmente chiamiamo  $t_1, t_2$  le tangenti alla cubica nel punto doppio D.

In virtù del teorema precedente le tre coppie  $ap, br, t_1 t_2$  costituiscono una involuzione quadratica, e un'altra involuzione quadratica è costituita dalle coppie  $a'r, b'p, t_1 t_2$ . Perciò i fasci  $abt_1 t_2, a'b't_2 t_1$  sono rispettivamente proiettivi a  $prt_2 t_1, rpt_1 t_2$ ; ma questi due sono proiettivi fra loro, dunque anche tali sono i primi due; laonde le tre coppie  $aa', bb', t_1 t_2$  costituiscono una involuzione quadratica.

Può quindi conchiudersi il teorema :

*Se un quadrangolo è iscritto in una cubica fornita di punto doppio, le tangenti in questo, e i raggi che da esso proiettano i rimanenti punti d'incontro delle coppie di lati opposti colla cubica formano una involuzione quadratica.*

---

(\*) Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, Serie II, vol. XXXII.

. Donde segue l'altro teorema che può considerarsi come generalizzazione del teorema di Desargues sul quadrangolo iscritto in una conica :

*Se un poligono di  $2n$  lati iscritto in una curva di 3° ordine a punto doppio, senza cessare di essere iscritto nella cubica si deforma in modo che  $2n-1$  lati rotano attorno ai rimanenti loro punti d'intersezione colla curva, anche il restante lato rota attorno all'ulteriore suo punto d'incontro colla cubica stessa.*

Questo teorema mostra che la soluzione del problema :

*Iscrivere in una cubica munita di punto doppio un ennagono i cui lati passino per  $n$  punti assegnati sulla stessa cubica :*

procede tal quale come quella del problema : iscrivere in una conica un ennagono i cui lati passino per  $n$  punti assegnati per dritto. Epperò esso per  $n$  pari risulta impossibile o indeterminato, e per  $n$  dispari ha due o zero soluzioni (\*).

---

(\*) Cfr. le considerazioni fatte nel caso particolare trattato nelle *Leçons sur la Géométrie* par A. Clebsch, T. II, pag. 340.

## LE SERIE ALGEBRICHE DI SUPERFICIE AD INDICE 3

N O T A

D E L

Dott. VITTORIO MURER.

Nel vol. XXV di questo Giornale fu pubblicato una breve mia Nota *Sulle serie d'indice 1 e 2*, avente per iscopo di stabilirne l'equazione e la generazione generale. Come complemento di quelle, analoghe ricerche per le serie d'indice 3 mi permetto ora di esporre concisamente in questo istesso periodico; quantunque, riguardo ad esse, sia già stato accolto un mio cenno nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

1. I concetti e le proprietà note degli iperspazi si possono immediatamente applicare alle serie, in tutto ciò che dipende dal loro indice.

L'assieme delle superficie d'ordine  $n$  forma un sistema lineare  $S_m$ , ad  $m$  dimensioni; essendo  $m = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 1$ . Indichiamo poi con  $S_k$  un sistema lineare a  $k$  dimensioni contenuto in  $S_m$ ; e in particolare quindi con  $S_1$  un fascio,  $S_2$  una rete, ecc.

Una serie algebrica  $U$ , che non si spezzi, avrà a comune con un  $S_{m-1}$ , in cui non giaccia per intero, un numero costante  $\mu$  di superficie. Esso è precisamente l'indice della serie, esprimendo per l'appunto quante superficie di  $U$  appartengono al sistema  $S_{m-1}$  formato dalle superficie di  $S_m$  che passano per un punto dato.

Se la serie appartiene a un  $S_k$ , cioè giace in un  $S_k$ , ma non in un  $S_{k-1}$ , allora  $\mu$  è anche il numero delle superficie della serie che giacciono in un qualunque  $S_{k-1}$  che faccia parte di  $S_k$ . E deve essere  $k \leq \mu$ ; giacchè altrimenti per  $k$  superficie della serie si potrebbe condurre un  $S_{k-1}$  che la conterrebbe per intero, avendo con essa a comune più di  $\mu$  superficie. In particolare poi per  $k = \mu$  la serie è razionale. E invero, per  $\mu - 1$  superficie fisse e per una variabile di  $U$  si può condurre un  $S_{\mu-1}$ , il quale avrà a comune con un fascio  $S_1$  situato in  $S_\mu$  una superficie sola; e viceversa una superficie di  $S_1$  e quelle  $\mu - 1$  fisse determinano un

$S_{\mu-1}$ , il quale conterrà ulteriormente un'unica superficie di  $U$ . Le superficie di  $U$  corrispondono così univocamente a quelle del fascio  $S_1$ ; c. d. d.

2. In particolare si deduce che, per  $\mu = 1$  una serie d'indice 1 non è altro che un fascio  $S_1$ ; per  $\mu = 2$  una serie d'indice 2 è contenuta in una rete  $S_2$ , ed è razionale (essendo qui  $k = \mu = 2$ ): cose già vedute altrimenti.

Per  $\mu = 3$  bisogna distinguere due casi:

O la serie appartiene a un sistema lineare  $S_3$ ; e allora è razionale.

O la serie appartiene invece a una rete  $S_2$ ; e allora essa, ove non intervengano altre particolarità facili a rinvenirsi, non è razionale; ma, scritta l'equazione sua sotto la forma:

$$u_1 \lambda_1 + u_2 \lambda_2 + u_3 \lambda_3 = 0,$$

i parametri  $\lambda_i$  non saranno esprimibili con un unico parametro  $\lambda$  altrimenti che con funzioni ellittiche (come per le cubiche piane senza punto doppio).

3. Nel primo caso l'equazione della serie si può ridurre alla:

$$u_0 \lambda_1^3 + 3u_1 \lambda_1^2 \lambda_2 + 3u_2 \lambda_1 \lambda_2^2 + u_3 \lambda_2^3 = 0,$$

caso questo già da me considerato nel vol. XXIV di questo Giornale. Aggiungerò solo che:

La involupante della serie può essere generata, tanto dalle due serie proiettive d'ordine  $n$  ed indice 2:

$$u_0 \lambda_1^2 + 2u_1 \lambda_1 \lambda_2 + u_2 \lambda_2^2 = 0 \quad , \quad u_1 \lambda_1^2 + 2u_2 \lambda_1 \lambda_2 + u_3 \lambda_2^2 = 0;$$

quanto dai due fasci proiettivi, d'ordine  $2n$ :

$$u_0 u_2 - u_1^2 = \mu (u_0 u_3 - u_1 u_2) \quad , \quad u_0 u_3 - u_1 u_2 = 4\mu (u_1 u_3 - u_2^2);$$

la linea base di ciascuno dei quali si compone della *linea cuspidale* (d'ordine  $3n^2$ ) della serie, e di una *caratteristica* (d'ordine  $n^2$ ) della stessa. L'equazione della involupante stessa è:

$$4(u_0 u_2 - u_1^2)(u_1 u_3 - u_2^2) - (u_0 u_3 - u_1 u_2)^2 = 0.$$

Osservando poi che nel sistema  $S_3$ , in cui giace la  $U$ , su ogni linea  $(n, n)$ , base di un fascio, resta determinato dalle altre superficie un sistema  $\infty^1$  di gruppi  $(n, n, n)$ , basi di una rete, e su ogni superficie è determinato, dalle altre, un sistema  $\infty^2$  di curve  $(n, n)$ , si trova subito che:

« Una serie generale d'indice 3, situata in un  $S_3$ , è generata dalla superficie « variabile di  $S_3$  che congiunge i gruppi corrispondenti  $(n, n, n)$  situati su tre « linee  $(n, n)$  di  $S_3$ ; quando fra i sistemi di gruppi siasi stabilita corrispondenza « proiettiva;

« oppure, dalla superficie che congiunge due curve corrispondenti  $(n, n)$  di due sistemi proiettivi, situati su due superficie di  $S_3$ . (Nei due sistemi  $\infty^2$  di curve avviene  $\infty^1$  volte che una curva possa essere congiunta colla sua corrispondente) ».

Questi risultati sono una ovvia generalizzazione dei notissimi sulle sviluppabili di terza classe.

4. Nel caso invece che la serie giaccia in una rete  $S_2$ , si hanno risultati analoghi a quelli noti sul cono di 3<sup>a</sup> classe (a cui si riduce per  $n = 1$ ). Escluso il caso di una superficie doppia (la serie allora sarebbe razionale), si trova che la linea cuspidale della serie, di ordine  $9n^2$ , si spezza in 9 caratteristiche, aventi naturalmente a comune gli  $n^3$  punti base di  $S_2$ . L'inviluppante è segata da una qualunque superficie di  $S_2$  secondo caratteristiche, giacchè se la superficie contiene un punto di una di esse, fuori degli  $n^3$  punti base di  $S_2$ , ne contiene  $n^3 + 1$ . Si trova così che la involupante è segata, da ogni superficie della rete, in 6 caratteristiche, cioè in una linea d'ordine  $6n^2$ ; ed è quindi di grado  $\frac{6n^2}{n} = 6n$ . Osservando poi che due curve  $(n, n)$  della rete non possono segarsi fuori dei punti base, si deduce che ogni curva  $(n, n)$  sega la involupante in quegli  $n^3$  punti, e non in altri. Ognuno di questi sarà quindi multiplo per la involupante secondo  $\frac{n^3 \cdot 6n}{n^3} = 6$ .

« Dunque la involupante è di ordine  $6n$ , ed ha per punti multipli secondo 6 « quelli base della rete ».

Per generare poi la serie si riferiscano proiettivamente tre reti sovrapposte. Allora se in una di tali reti una superficie percorre un fascio, lo stesso avverrà della corrispondente nelle altre due reti, e resteranno in tal modo riferiti proiettivamente i fasci nelle tre reti. Un fascio della prima e il corrispondente della seconda avranno a comune una superficie, la quale in generale non apparterrà al fascio corrispondente nella terza. Succederà però  $\infty^1$  volte che tre fasci abbiano una superficie corrispondente a comune; e l'assieme di tali superficie costituisce una serie generale situata nella rete assunta.

Spezia, Maggio 1888.

## SULLE CURVE D'INVERSIONE

N O T A

D E L

Dott. R. RAIMONDI.

1. In una precedente Nota abbiamo fatto cenno della *trasformata per inversione* d'una retta rappresentata col metodo dei quaternioni, vale a dire, data l'equazione d'una retta :

$$\mathbf{VBX} = \mathbf{VBA},$$

ove  $X$  è il vettore variabile,  $A$  un vettore d'un punto fisso della retta e  $B$  un vettore secondo la stessa, si ha in corrispondenza la equazione :

$$-\frac{b^2}{(\mathbf{TVBA})^2} \mathbf{S} \frac{\mathbf{VBA}}{\mathbf{B}} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^2,$$

essendo  $\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{X}}$ , la quale rappresenta la circonferenza passante per l'origine *trasformata per inversione* della data retta, e il vettore del centro è

$$-\frac{b^2}{2(\mathbf{TVBA})^2} \frac{\mathbf{VBA}}{\mathbf{B}}.$$

Questa espressione può ancora trasformarsi, poichè abbiamo :

$$\mathbf{VBA} = -ba \operatorname{sen} \varphi \mathbf{H},$$

ove  $\mathbf{H}$  è un vettore unitario perpendicolare al piano  $BA$ , onde la superiore espressione prende la forma

$$\frac{b}{2a \operatorname{sen} \varphi} \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{B}};$$

poichè  $\frac{H}{B}$  è un quaternionico rettangolare, esso equivale al vettore  $\frac{1}{b} I$  perpendicolare al piano di H e B; cioè A, B, I sono coplanari, il vettore del centro può dunque dinotarsi con

$$\frac{1}{2a \operatorname{sen} \varphi} I.$$

Se assumiamo il vettore A perpendicolare alla retta, la sua direzione sarà quella di I e  $\varphi = 90^\circ$ , il centro della circonferenza si trova dunque su questa perpendicolare distante  $\frac{1}{2a}$  dall'origine, essendo  $a = TA$ . Costruendo la figura, si osserverà che: *un raggio vettore dall'origine alla retta taglia la circonferenza suddetta in un punto distante dall'origine d'una lunghezza che è la reciproca della lunghezza del raggio vettore.*

2. Sia una curva piana data dalla equazione

$$R = f(t),$$

ove R è il vettore variabile e t una variabile reale.

L'equazione della tangente nel punto R è:

$$\sqrt{\frac{dR}{dt}} R_1 = \sqrt{\frac{dR}{dt}} R;$$

(Gräfe. *Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen*. Leipzig 1883) in essa  $R_1$  è il vettore variabile e  $\frac{dR}{dt}$  il coefficiente differenziale di R rispetto a t, che rappresenta un vettore nella direzione della tangente.

L'equazione della circonferenza *trasformata per inversione* della tangente è:

$$\frac{1}{TR \operatorname{sen} \varphi} S I Y = Y^2,$$

essendo I un vettore unitario perpendicolare a  $\frac{dR}{dt}$  nel piano della curva, cioè un vettore parallelo alla normale;  $\varphi$  è l'angolo del raggio vettore colla tangente. Il vettore del centro è

$$\frac{I}{2TR \operatorname{sen} \varphi}.$$

Dalla equazione della curva si ricava  $TR = r$ , come ancora potrà esprimersi  $\varphi$  in funzione di r; la lunghezza del raggio è  $\frac{1}{2r \operatorname{sen} \varphi}$ .

Facendo variare  $r$ , variano  $l$  e  $\varphi$ , e il centro della trasformata per inversione percorrerà un luogo, che potremmo denominare *curva d'inversione*.

Si può per semplicità assumere per variabile reale l'angolo  $\theta$  che il raggio vettore fa con un asse fisso, allora potremmo avere l'equazione della curva in coordinate polari ordinarie:

$$TR = r = f(\theta),$$

e ricordando che il vettore del centro della *trasformata per inversione* è perpendicolare alla tangente, l'equazione della curva d'inversione in coordinate polari sarà:

$$r_1 = f_1(\theta_1),$$

ove  $\theta_1$  vale  $\theta + 90^\circ - \varphi$ .

3. *Esempi.* 1.° Abbiassi la circonferenza col centro all'origine

$$TR = r = a,$$

poichè  $\varphi = 90^\circ$ , la curva d'inversione è

$$r_1 = \frac{1}{2a},$$

una circonferenza concentrica.

2.° Sia la circonferenza passante pel polo e col centro sull'asse fisso, la sua equazione è

$$TR = r = 2a \cos \theta = 2a \sin \varphi,$$

l'equazione della corrispondente curva d'inversione è

$$r_1 = \frac{1}{4a \cos^2 \theta} = \frac{1}{4a \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} = \frac{1}{2a(1 + \cos \theta_1)},$$

una parabola.

3.° Sia la spirale logaritmica

$$TR = r = bc^{\frac{\theta}{c}},$$

la sua curva d'inversione, essendo  $\tan \varphi = c$ , è data da

$$r_1 = \frac{\sqrt{1+c^2}}{2bce^{\frac{\theta}{c}}} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{2bce^{\frac{\theta_1 - \text{arc cot } c}{c}}} = b_1 e^{-\frac{\theta_1}{c}}$$

cioè un'altra spirale.

4. Se  $p$  è la perpendicolare dall'origine sulla tangente, si ha  $p = r \operatorname{sen} \varphi$ ; poichè  $r_1$  è diretto secondo  $p$ , la curva d'inversione può rappresentarsi con

$$r_1 = \frac{1}{2p},$$

cioè: *I punti della curva d'inversione sono sulle perpendicolari alle tangenti abbassate dall'origine a distanze metà delle reciproche delle lunghezze di queste perpendicolari.*

*Esempii.* 1° La perpendicolare alla tangente alla ellisse è  $a \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1}$ , la curva d'inversione è quindi:

$$r_1 = \frac{1}{2a \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

cioè una ellisse che ha per semiassi  $\frac{1}{2a}$ ,  $\frac{1}{2b}$ .

2° Poichè la perpendicolare dal fuoco incontra la tangente alla parabola in un punto posto sulla tangente al vertice, la lunghezza della perpendicolare essendo  $\frac{m}{\operatorname{sen} \theta_1}$ , ove  $\theta_1$  è l'angolo che la perpendicolare fa colla tangente al vertice, la curva d'inversione è data da

$$r_1 = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{2m},$$

cioè è un cerchio passante per l'origine.

Si ha dunque questa semplicissima proprietà: *Se da un punto si tirano a una retta i raggi vettori, le reciproche di essi prese nella stessa direzione danno la circonferenza trasformata per inversione della retta, mentre le metà di queste reciproche danno un'altra circonferenza che è la curva d'inversione d'una parabola avente il punto per fuoco e la retta per tangente al vertice.*

Messina 20 Febbraio 1888.

www.libtool.com.cn  
UN TEOREMA SUI DETERMINANTI DI DIFFERENZE

DEL

Dott. R. RAIMONDI

Siano  $a_1, a_2, \dots$  una serie di quantità che abbiano costanti uguali a  $c$  le differenze  $n^{\text{ma}}$ , se indichiamo con  $d_r$  la  $r^{\text{ma}}$  differenza  $s^{\text{ma}}$  e formiamo le successive serie di differenze, notando che  $d_{mn} = c$  qualunque sia  $m$ , nel seguente modo :

$$\begin{array}{cccc}
 c & , & c & , & c & , & \dots & \dots & \dots \\
 d_{1,n-1} & , & d_{2,n-1} & , & d_{3,n-1} & , & \dots & \dots & \dots \\
 d_{1,n-2} & , & d_{2,n-2} & , & d_{3,n-2} & , & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 d_{1,2} & , & d_{2,2} & , & d_{3,2} & , & \dots & \dots & \dots \\
 d_{1,1} & , & d_{2,1} & , & d_{3,1} & , & \dots & \dots & \dots \\
 a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & \dots & \dots & \dots
 \end{array}
 \tag{1}$$

e prendiamo  $n + 1$  verticali successive per formarne un determinante, questo avrà il valore costante  $c^{n+1}$ .

*Dimostrazione.* Prendiamo il determinante formato dalle  $n+1$  prime verticali :

$$D = \begin{vmatrix}
 c & , & c & \dots & c & , & c \\
 d_{1,n-1} & , & d_{2,n-1} & , & \dots & , & d_{n,n-1} & , & d_{n+1,n-1} \\
 \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
 d_{1,1} & , & d_{2,1} & , & \dots & , & d_{n,1} & , & d_{n+1,1} \\
 a_1 & , & a_2 & , & \dots & , & a_n & , & a_{n+1}
 \end{vmatrix} ;$$

VOL. XXVI. 24



di esso, sommando ciascuna orizzontale colla precedente, lasciando la stessa la prima, il valore non cambierà, e notando che si ha in generale

$$d_{rs} + d_{r,s-1} = d_{r+1,s-1},$$

il determinante diviene

$$\begin{vmatrix} c & , & c & , & \dots & c & , & c \\ d_{2,n-1} & , & d_{3,n-1} & , & \dots & d_{n+1,n-1} & , & d_{n+2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ d_{2,1} & , & d_{3,1} & , & \dots & d_{n+1,1} & , & d_{n+2,1} \\ a_2 & , & a_3 & , & \dots & a_{n+1} & , & a_{n+2} \end{vmatrix}$$

cioè il determinante delle prime  $n+1$  verticali (1) equivale al determinante delle  $n+1$  verticali successive a cominciare dalla seconda; lo stesso dunque varrà per  $n+1$  successive verticali qualunque siano.

Sottraggiamo in D da ciascuna verticale la precedente, restando la stessa la prima, si ha :

$$D = \begin{vmatrix} c & , & 0 & \dots & 0 & , & 0 \\ d_{1,n-1} & , & d_{1,n} & \dots & d_{n-1,n} & , & d_{n,n} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ d_{1,1} & , & d_{1,2} & \dots & d_{n-1,2} & , & d_{n,2} \\ a_1 & , & d_{1,1} & \dots & d_{n-1,1} & , & d_{n,1} \end{vmatrix}$$

$$= c \cdot \begin{vmatrix} c & , & c & \dots & c & , & c \\ d_{1,n-1} & , & d_{2,n-1} & \dots & d_{n-1,n-1} & , & d_{n,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ d_{1,2} & , & d_{2,2} & \dots & d_{n-1,2} & , & d_{n,2} \\ d_{1,1} & , & d_{2,1} & \dots & d_{n-1,1} & , & d_{n,1} \end{vmatrix}$$

Ripetendo la stessa operazione nell'ultima forma, otteniamo :

$$\begin{aligned}
 D &= c \cdot \begin{vmatrix} c & , & 0 & \dots & 0 & , & 0 \\ d_{1,n-1} & , & d_{1,n} & \dots & d_{n-2,n} & , & d_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ d_{1,2} & , & d_{1,3} & \dots & d_{n-2,3} & , & d_{n-1,3} \\ d_{1,1} & , & d_{1,2} & \dots & d_{n-2,2} & , & d_{n-1,2} \end{vmatrix} \\
 &= c^2 \cdot \begin{vmatrix} c & , & c & \dots & c & , & c \\ d_{1,n-1} & , & d_{2,n-1} & \dots & d_{n-2,n-1} & , & d_{n-1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ d_{1,3} & , & d_{2,3} & \dots & d_{n-2,3} & , & d_{n-1,3} \\ d_{1,2} & , & d_{2,2} & \dots & d_{n-2,2} & , & d_{n-1,2} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Continuando allo stesso modo arriveremo a :

$$D = c^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} c & , & c \\ d_{1,n-1} & , & d_{2,n-1} \end{vmatrix} = c^{n-1} \begin{vmatrix} c & , & 0 \\ d_{1,n-1} & , & d_{1,n} \end{vmatrix} = c^{n+1}.$$

Formando un determinante M con le prime m serie (!) e m verticali consecutive, si ha con lo stesso procedimento :

$$M = c^m.$$

*Applicazione ai numeri figurati.* Prendiamo un numero qualunque, p. e. cinque, di serie di numeri figurati, a cominciare dalla prima, che è la serie : 1, 1, 1, ..., essi sono :

- 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , . . . . .
- 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , . . . . .
- 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , 28 , . . . . .
- 1 , 4 , 10 , 20 , 35 , 56 , 84 , . . . . .
- 1 , 5 , 15 , 35 , 70 , 126 , 210 , . . . . .



Scriviamo questi numeri nel modo seguente, cioè prendendo il 5° della 1ª orizzontale, il 4° della 2ª, ... il 1° della 5ª e formiamo la prima verticale, e così di seguito :

|     |                              |
|-----|------------------------------|
|     | 1 , 1 , 1 , 1 , . . . . .    |
|     | 4 , 5 , 6 , 7 , . . . . .    |
| (2) | 6 , 10 , 15 , 21 , . . . . . |
|     | 4 , 10 , 20 , 35 , . . . . . |
|     | 1 , 5 , 15 , 35 , . . . . .  |

Queste serie seguono la stessa legge delle differenze (1), dunque : *Un determinante qualunque formato dai primi m ordini di numeri figurati, scritti nel modo (2), con m colonne consecutive, ha il valore costante 1.*

Messina , 7 Gennaio 1888.

---

ANNUNZIO BIBLIOGRAFICO

---

TAVOLE dei quadrati e dei cubi dei numeri interi da 1 a 1000, ossia delle radici quadrate a meno di una unità degl'interi da 1 a 1 000 000 e delle radici cubiche a meno di una unità degl'interi da 1 a 1 000 000 000, con un teorema sopra le radici quadrate con dimostrazione nuova, e con un teorema nuovo sopra la radice cubica, ad uso dei corsi di **Matematica**, di Bernardi Dott. Prof. Giuseppe — Parma 1888.

---



SOLUZIONE DI UN PROBLEMA PROPOSTO DAL SIG. LUCAS

PER

CARLO MARIA PIUMA.

(Continuazione. Vedi vol. 22 pag. 17)



9. Per ciascun punto di un'ellisse passano quattro circonferenze ad essa osculatrici, cioè quella che ha il suo punto di osculazione nel punto dato ed altre tre che sono, in generale, da questa diverse.

Sia  $M(m, n)$  un punto dell'ellisse (5), le coordinate dei punti di osculazione delle tre circonferenze osculatrici a questa curva, che passando per  $M$  sono, in generale, diverse da quella osculatrice in tal punto, vengono date dalle due equazioni

$$(19) \quad 4x^3 - 3p^2x - p^2m = 0 \quad , \quad 4y^3 - 3q^2y - q^2n = 0 \quad ,$$

e nella prima di queste equazioni mancando il termine in  $x^2$  e nella seconda mancando quello in  $y^2$ , si scorge che sono nulle tanto la somma delle ascisse quanto quella delle ordinate dei tre punti di osculazione considerati e quindi che *i tre punti di osculazione delle tre circonferenze osculatrici ad una ellisse che passando per uno stesso de' suoi punti, sono in generale diverse da quella osculatrice in tal punto, sono i vertici di un triangolo iscritto in questa ellisse che ha il suo centro di gravità nel centro della curva (\*)*.

Ciascun punto di un'ellisse è vertice di un solo triangolo ad essa iscritto col centro di gravità nel centro della curva, e se indichiamo con  $x_1, y_1$  le coordinate di questo punto e le sostituiamo nella (19), per  $m$  ed  $n$  otterremo valori tali che fra le tre circonferenze osculatrici alla (5), che passano pel punto  $M(m, n)$  così determinato, una avrà per punto di osculazione il punto  $(x_1, y_1)$ , e quindi *le tre circonferenze osculatrici ad un'ellisse nei vertici di un triangolo iscritto nella stessa il quale abbia il suo centro di gravità nel centro della curva si tagliano in uno stesso punto appartenente all'ellisse*.

---

(\*) Vedasi in proposito una Nota di Steiner-Crelle. *Journal der Mathematik*, vol. 32, pag. 300-304.

10. La circonferenza circoscritta al triangolo ABC iscritto nell'ellisse, col centro di gravità nel centro dell'ellisse, passa pel punto comune a questa curva ed alle tre circonferenze ad essa osculatrici nei punti A, B, C.

Infatti indicando con  $\alpha$  e  $\beta$  le coordinate del centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, le coordinate di ciascuno de' suoi vertici A, B, C, come abbiamo visto, devono soddisfare le due equazioni

$$(20) \quad 4x^3 - 3p^2x - 4 \frac{p^4\alpha}{p^2 - q^2} = 0 \quad , \quad 4y^3 - 3q^2y - 4 \frac{q^4\beta}{q^2 - p^2} = 0$$

ma le (19) e (20) dovendo avere le stesse radici, quando  $m$  ed  $n$  siano le coordinate del punto comune all'ellisse ed alle tre circonferenze considerate, risulteranno le due relazioni

$$p^2m = 4 \frac{p^4\alpha}{p^2 - q^2} \quad , \quad q^2n = 4 \frac{q^4\beta}{q^2 - p^2}$$

ossia

$$(21) \quad \alpha = m \frac{p^2 - q^2}{4p^2} \quad , \quad \beta = n \frac{q^2 - p^2}{4q^2} .$$

Avendo poi trovato per il quadrato del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC

$$\frac{p^2 + q^2}{2} + \alpha^2 + \beta^2$$

essa avrà per equazione

$$x^2 - m \frac{p^2 - q^2}{2p^2} x + y^2 - n \frac{q^2 - p^2}{2q^2} y = \frac{p^2 + q^2}{2} .$$

E per dimostrare il teorema enunciato basterà far vedere che questa equazione è soddisfatta ponendo  $x = m$  ed  $y = n$ . Ma il risultato di questa sostituzione si riduce a

$$\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} = 1$$

relazione soddisfatta dalle coordinate di ciascun punto della (5) ed in particolare da quelle del punto M, ciò che prova il nostro teorema.

11. I centri di curvatura corrispondenti ai punti di un'ellisse, vertici di un triangolo ad essa iscritto col centro di gravità nel centro di questa curva, formano un triangolo tale che il suo centro di gravità coincide col centro della circonferenza circoscritta al primo di questi triangoli.

Sia  $A B C$  il primo triangolo ed  $A_1 B_1 C_1$  quello formato dai centri di curvatura  $A_1, B_1, C_1$  dell'ellisse rispettivamente in  $A, B, C$ .

Indichiamo con  $\xi_1, \zeta_1$  le coordinate del punto  $A_1$ ,  $\xi_2, \zeta_2$  quelle del punto  $B_1$ , e con  $\xi_3, \zeta_3$  quelle di  $C_1$ , essendo indicate come al solito con  $x_1, y_1$  le coordinate di  $A$ ,  $x_2, y_2$  quelle di  $B$ , e con  $x_3, y_3$  quelle di  $C$ , si avranno le relazioni

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{p^2 - q^2}{p^4} x_1^3, & \zeta_1 &= -\frac{p^2 - q^2}{q^4} y_1^3 \\ \xi_2 &= \frac{p^2 - q^2}{p^4} x_2^3, & \zeta_2 &= -\frac{p^2 - q^2}{q^4} y_2^3 \\ \xi_3 &= \frac{p^2 - q^2}{p^4} x_3^3, & \zeta_3 &= -\frac{p^2 - q^2}{q^4} y_3^3.\end{aligned}$$

Ma le coordinate  $x_1, y_1$  del vertice  $A$ ,  $x_2, y_2$  del vertice  $B$ ,  $x_3, y_3$  del vertice  $C$  del triangolo  $ABC$ , per i valori di  $m$  ed  $n$  scelti convenientemente, devono soddisfare le (20); per cui sarà

$$\begin{aligned}x_1^3 &= \frac{3p^2 x_1 + p^2 m}{4}, & x_2^3 &= \frac{3p^2 x_2 + p^2 m}{4}, & x_3^3 &= \frac{3p^2 x_3 + p^2 m}{4} \\ y_1^3 &= \frac{3q^2 y_1 + q^2 n}{4}, & y_2^3 &= \frac{3q^2 y_2 + q^2 n}{4}, & y_3^3 &= \frac{3q^2 y_3 + q^2 n}{4}\end{aligned}$$

e portando questi valori nelle relazioni precedenti risulterà

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{p^2 - q^2}{4p^2} (m + 3x_1), & \xi_2 = \frac{p^2 - q^2}{4p^2} (m + 3x_2), & \xi_3 = \frac{p^2 - q^2}{4p^2} (m + 3x_3) \\ \zeta_1 = -\frac{p^2 - q^2}{4q^2} (n + 3y_1), & \zeta_2 = -\frac{p^2 - q^2}{4q^2} (n + 3y_2), & \zeta_3 = -\frac{p^2 - q^2}{4q^2} (n + 3y_3). \end{cases}$$

Ed indicando con  $\mu, \eta$  le coordinate del centro di gravità del triangolo  $A_1 B_1 C_1$ , avremo

$$(23) \quad \mu = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3} = \frac{p^2 - q^2}{4p^2} m, \quad \eta = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{3} = \frac{q^2 - p^2}{4q^2} n,$$

valori che coincidono con quelli dati rispettivamente dalle (21) per  $\alpha$  e per  $\beta$  coordinate del centro della circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ , ciò che dimostra il teorema annunziato.

12. *La somma dei quadrati dei lati e l'area dei triangoli  $A_1 B_1 C_1$  formati*

dai centri di curvatura di un'ellisse corrispondenti ai vertici dei triangoli ABC ad essa iscritti che hanno il centro di gravità nel centro della curva sono costanti.

Indicando con  $\Sigma$  la somma dei quadrati dei lati di uno di questi triangoli  $A_1 B_1 C_1$ , che corrisponde al triangolo ABC essa sarà

$$\Sigma = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1)^2$$

che per le (22) diviene

$$\Sigma = \frac{9}{8} (p^2 - q^2)^2 \left( \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1}{p^4} + \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3 - y_3 y_1}{q^4} \right).$$

Ma al n° 3 sono state dimostrate le relazioni

$$(24) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = \frac{3}{2} p^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -2(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) = \frac{3}{2} q^2 \end{cases}$$

per cui sarà

$$\Sigma = \frac{81}{32} \cdot \frac{(p^4 - q^4)(p^2 - q^2)}{p^2 q^2}.$$

Indicando poi con  $S_1$  l'area del triangolo  $A_1 B_1 C_1$ , sarà

$$2S_1 = (\xi_2 - \xi_1)(\zeta_3 - \zeta_1) - (\xi_3 - \xi_1)(\zeta_2 - \zeta_1) = \frac{9}{16} \frac{(p^2 - q^2)^2}{p^2 q^2} \{ (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \}$$

ossia

$$S_1 = \frac{9}{16} \cdot \frac{(p^2 - q^2)^2}{p^2 q^2} S$$

S essendo l'area del triangolo ABC che si è trovata essere eguale a  $3^{\frac{3}{2}} \frac{pq}{4}$  per cui risulta

$$S_1 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \frac{(p^2 - q^2)^2}{pq}.$$

13. Cerchiamo ora l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo  $A_1 B_1 C_1$ , formato dai centri di curvatura fin qui considerati.

Se prendiamo l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo  $A_1 B_1 C_1$

sotto la forma

www.libtool.com.cn

$$x^2 + y^2 - Hx - Ky = R$$

essa dovrà essere soddisfatta dalle coordinate dei punti  $A_1, B_1, C_1$  per cui, per determinare le costanti  $H, K$  ed  $R$  in essa contenute, si avrà il sistema di tre equazioni lineari del primo grado

$$\xi_1^2 + \zeta_1^2 - H \xi_1 - K \zeta_1 = R$$

$$\xi_2^2 + \zeta_2^2 - H \xi_2 - K \zeta_2 = R$$

$$\xi_3^2 + \zeta_3^2 - H \xi_3 - K \zeta_3 = R.$$

Per dedurre più rapidamente il valore delle incognite  $H, K$  ed  $R$ , a questo sistema ne sostituiamo uno analogo dedotto dal precedente nel modo che segue. La prima delle equazioni

$$(25) \quad \xi_2^2 - \xi_3^2 + \zeta_2^2 - \zeta_3^2 - H(\xi_2 - \xi_3) - K(\zeta_2 - \zeta_3) = 0$$

del nuovo sistema si ottiene sottraendo membro a membro dalla seconda la terza del primitivo, la seconda

$$(26) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 3\xi_1^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 - 3\zeta_1^2 - H(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 3\xi_1) - K(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - 3\zeta_1) = 0$$

si ottiene sottraendo membro a membro tre volte la prima dalla somma delle tre equazioni del sistema primitivo, e la terza

$$(27) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 - H(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) - K(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) = 3R$$

addizionando membro a membro le tre equazioni del sistema primitivo.

Ma per le (22) si ha

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{(p^2 - q^2)^2}{16p^4} \{ 3m^2 + 6m(x_1 + x_2 + x_3) + 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \}$$

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = \frac{(p^2 - q^2)^2}{16q^4} \{ 3n^2 + 6n(y_1 + y_2 + y_3) + 9(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \}$$

che tenuto conto delle relazioni  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ,  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$  e dei valori

di  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  e di  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$  forniti dalle (21) si avrà

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{3(p^2 - q^2)^2}{32q^4} (2m^2 + 9p^2) \\ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = \frac{3(p^2 - q^2)^2}{32q^4} (2n^2 + 9q^2). \end{array} \right.$$

Nella (26) sostituendo al luogo di  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$  e di  $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2$  i loro valori dati dalle (28), a  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$  ed a  $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$  quelli dati dalle (23) ed a  $\xi_1$  e  $\zeta_1$  quelli forniti dalle due prime delle (22) e dividendo poi il risultato per  $\frac{9(p^2 - q^2)}{4p^4q^4}$  si avrà

$$\begin{aligned} (p^2 - q^2) \{ 3p^2q^2(p^2 + q^2) - 4q^4mx_1 - 4p^4ny_1 - 6q^4x_1^2 - 6p^4y_1^2 \} = \\ = 8p^2q^2(p^2y_1K - q^2x_1H) \end{aligned}$$

Per le (22) la (25) poi si riduce alla

$$\begin{aligned} \frac{p^2 - q^2}{4} \left[ \frac{(x_2 - x_3) \{ 2m + 3(x_2 + x_3) \}}{p^4} + \frac{(y_2 - y_3) \{ 2n + 3(y_2 + y_3) \}}{q^4} \right] = \\ = \frac{x_2 - x_3}{p^2} H - \frac{y_2 - y_3}{q^2} K \end{aligned}$$

che tenuto conto delle (7) diviene

$$(p^2 - q^2) \{ 2q^2my_1 - 2p^2nx_1 + 3(p^2 - q^2)x_1y_1 \} = 4p^2q^2(x_1K + y_1H)$$

ed osservando che è  $q^2x_1^2 + p^2y_1^2 = p^2q^2$ , queste due ultime equazioni ci danno

$$H = \frac{(p^2 - q^2) \{ 4p^2q^2m + 3(p^2 - q^2)(4x_1^3 - 3p^2x_1) \}}{8p^4q^2}$$

che per la prima delle (19) diviene

$$(29) \quad H = \frac{(p^2 - q^2)(7q^2 - 3p^2)}{8p^2q^2} m$$

ed in modo analogo si ottiene

$$(30) \quad K = \frac{(p^2 - q^2)(3q^2 - 7p^2)}{8p^2q^2} n.$$

Sostituendo poi questi valori di H e di K nella (27) come pure quelli di

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \quad \text{e di} \quad \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2$$

dati dalle (28) e quelli di

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad \text{e di} \quad \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$

forniti delle (23) si ottiene

$$R = \frac{(p^2 - q^2)^2}{32 p^4 q^4} \{ 9p^2 q^2 (p^2 + q^2) + 3p^2 q^2 (m^2 + n^2) - 5q^4 m^2 - 5p^4 n^2 \}$$

da cui

$$\begin{aligned} R &= \frac{(p^2 - q^2)^2}{32 p^4 q^4} \{ 9p^2 q^2 (p^2 + q^2) + 3p^2 q^2 (m^2 + n^2) - 5q^4 (p^2 q^2 - p^2 n^2) - 5p^4 (p^2 q^2 - q^2 m^2) \} \\ &= \frac{(p^2 - q^2)^2}{8 p^2 q^2} \{ p^2 + q^2 + 2(m^2 + n^2) \} \end{aligned}$$

e quindi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo  $A_1 B_1 C_1$  è

$$\begin{aligned} (31) \quad x^2 + y^2 - \frac{(p^2 - q^2)(7q^2 - 3p^2)}{8 p^2 q^2} mx - \frac{(p^2 - q^2)(3q^2 - 7p^2)}{8 p^2 q^2} ny &= \\ &= \frac{(p^2 - q^2)^2}{8 p^2 q^2} \{ p^2 + q^2 + 2(m^2 + n^2) \}. \end{aligned}$$

Da qui si scorge che il luogo geometrico dei centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli  $A_1 B_1 C_1$  è nuovamente un'ellisse concentrica alla data.

14. Prendiamo ora tre punti

$$M(m, n), M'(m', n'), M''(m'', n'')$$

sulla ellisse (5) in modo che siano i tre vertici di un triangolo iscritto nella stessa col centro di gravità coincidente col centro della curva, e se indichiamo con

$$A_1 B_1 C_1, A_1' B_1' C_1', A_1'' B_1'' C_1''$$

i triangoli formati dai centri delle circonferenze ad essa osculatrici che passano

rispettivamente per  $M, M', M''$ , e sono, in generale diverse da quelle osculatrici in detti punti, essendo

$$m + m' + m'' = 0 \quad , \quad n + n' + n'' = 0$$

la (31) ci fa vedere che i centri delle tre circonferenze circoscritte ai triangoli

$$A B C \quad , \quad A' B' C' \quad , \quad A'' B'' C''$$

formano un triangolo che ha il suo ceniro di gravità nel centro dell'ellisse data, etc. etc.

Genova 8 Aprile 1888.

# NUOVA DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA DI FERMAT

PER

CESARE GARIBALDI

Studente in Matematiche nella R. Università di Genova.

.....

Mi propongo di dimostrare che se  $p$  è un numero primo, ed  $a$  un numero primo con  $p$ , sta la relazione

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

## I.

Sieno dati  $ap$  elementi disposti in  $p$  linee orizzontali ed  $a$  colonne verticali

$$\begin{array}{cccccccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1a} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2a} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
\alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{pa}
\end{array}$$

Si tratta di determinare il numero  $N$  delle combinazioni differenti  $p$  a  $p$  che si possono formare con questi elementi, colla condizione che ciascuna combinazione contenga un solo elemento di ciascuna linea orizzontale.

Il numero totale delle combinazioni  $p$  a  $p$  degli  $ap$  elementi dati è:

$$\binom{ap}{p}.$$

Da questo numero, per avere il numero cercato, bisogna sottrarre: il numero delle combinazioni  $p$  a  $p$  che non contengono che elementi di una sola linea; il numero di quelle che contengono effettivamente elementi di due linee ma non ne

contengono di tre ; . . . il numero di quelle che contengono effettivamente elementi di  $n$  linee, ma non elementi di  $n + 1$  linee, . . . e finalmente il numero di quelle che contengono effettivamente elementi di  $p - 1$  linee ma non elementi di  $p$  linee.

Ciò posto, indichiamo con  $A_n$  il numero delle combinazioni  $p$  a  $p$  di  $n$  linee di elementi, composte ciascuna di  $a$  elementi, per modo che in ciascuna combinazione entrino elementi di ciascuna di  $n$  linee. Evidentemente  $A_n$  sarà zero, od un numero intero.

Il numero delle combinazioni  $p$  a  $p$  di  $p$  linee di  $a$  elementi ciascuna, che contengono effettivamente elementi di  $n$  linee, ma non ne contengono di  $n + 1$  linee, sarà  $A_n$  moltiplicato pel numero delle combinazioni  $n$  ad  $n$  delle  $p$  linee; quindi sarà :

$$\binom{p}{n} A_n.$$

Facendo in questa espressione successivamente  $n = 1, n = 2, \dots, n = p - 1$ , e sommando, si avrà

$$\binom{p}{p-1} A_{p-1} + \binom{p}{p-2} A_{p-2} + \dots + \binom{p}{3} A_3 + \binom{p}{2} A_2 + \binom{p}{1} A_1.$$

Questa somma deve essere sottratta da  $\binom{ap}{p}$  per avere il numero  $N$  cercato: perciò sarà :

$$N = \binom{ap}{p} - \binom{p}{p-1} A_{p-1} - \binom{p}{p-2} A_{p-2} - \dots - \binom{p}{2} A_2 - \binom{p}{1} A_1.$$

II.

Supponiamo ora gli elementi  $a$  sostituiti con l'unità, e consideriamo il quadro composto di  $p$  linee orizzontali ed  $a$  colonne verticali :

$$1 + 1 + \dots + 1 = a$$

$$1 + 1 + \dots + 1 = a$$

. . . . .

$$1 + 1 + \dots + 1 = a.$$

Moltiplicando membro a membro si avrà : da una parte  $a^p$ , e dall'altra una

somma di prodotti ciascuno dei quali contiene  $p$  fattori = 1. Pertanto la somma di tutti questi prodotti sarà eguale al loro numero.

E siccome il numero di questi prodotti è eguale al numero delle combinazioni  $p$  a  $p$  che si possono formare colle  $ap$  unità del quadro, colla condizione che ciascuna combinazione, contenga un solo elemento di ciascuna linea, si avrà :

$$a^p = \binom{ap}{p} - A_{p-1} \binom{p}{p-1} - A_{p-2} \binom{p}{p-2} - \dots - A_2 \binom{p}{2} - A_1 \binom{p}{1}.$$

III.

In questa identità suppongasi  $p$  primo  $> 2$ .

Il fattore  $\binom{p}{r}$  dove  $r = 1, 2, \dots, (p-1)$ , sarà multiplo di  $p$ . D'altronde i numeri  $A_1, A_2 \dots A_{p-1}$  sono intieri, onde supposte eseguite le operazioni e messo  $p$  in evidenza, indicando con  $m$  un numero intiero, si avrà :

$$a^p = \binom{ap}{p} - m p. \tag{1}$$

Ora si ha :

$$\binom{ap}{p} = \frac{ap(ap-1) \dots [ap-(p-1)]}{p!} = a \frac{(ap-1) \dots [ap-(p-1)]}{[p-1]!}.$$

Se si suppongono eseguiti i prodotti indicati al numeratore, si vede che fra questi ve ne sarà uno solo non contenente  $p$ , e questo sarà  $1 \cdot 2 \dots (p-1)$  preso positivamente essendo  $(p-1)$  pari. Gli altri prodotti conterranno rispettivamente i fattori  $p, p^2 \dots p^{p-1}$  onde, se si indica con  $\alpha_i$  il coefficiente di  $p^i$  si ha :

$$\begin{aligned} \binom{ap}{p} &= a \frac{1 \cdot 2 \dots (p-1) - \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 - \dots + \alpha_{p-1} p^{p-1}}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \\ &= a + a \frac{-\alpha_1 p + \alpha_2 p^2 - \dots + \alpha_{p-1} p^{p-1}}{1 \cdot 2 \dots (p-1)}. \end{aligned}$$

Ora  $p$  essendo primo ciascuno dei fattori del denominatore è primo con  $p$ ; dunque supposte eseguite le operazioni e messo  $p$  in evidenza :

$$\binom{ap}{p} = a + m' p.$$

Quindi sostituendo nella (1) :

$$a^p = a + (m' - m) p$$

e dividendo per  $a$  :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$a^{p-1} = 1 + \frac{m' - m}{a} p.$$

Se in questa relazione si suppone  $a$  primo con  $p$  siccome il numero  $\frac{m' - m}{a} p$  è intero, sarà  $m' - m$  divisibile per  $a$ . Pertanto, posto

$$\frac{m' - m}{a} = M$$

si ha :

$$a^{p-1} = 1 + Mp$$

ossia

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Genova, Marzo 1888.

www.libtool.com.cn  
LE SUPERFICIE IPERCICLICHE

DEL

Dott. ENRICO NANNEI.

---

Lo studio di quei sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono una serie di superficie colla medesima curvatura costante negativa (\*) conduce alla considerazione di una classe di superficie, le cui linee di curvatura di un sistema hanno il medesimo raggio costante di prima curvatura. Per queste superficie, a cui il chiariss. Prof. Bianchi ha dato il nome di *superficie ipercicliche*, sussistono delle proprietà fondamentali, dipendenti essenzialmente da quelle dei sistemi tripli ortogonali sopra indicati di cui fanno parte.

Nel presente lavoro io mi propongo di sviluppare e dimostrare tali proprietà per via diretta, come è indicato nell'ultima parte della Memoria citata. Nello stesso tempo, tento di generalizzare la ricerca, studiando quelle superficie per le quali le linee di curvatura di un sistema sono bensì a flessione costante, ma questa varia dall'una all'altra linea del sistema.

A tali superficie conservo il nome di *superficie ipercicliche*, dicendole però a *flessione variabile*, per distinguerle da quelle particolari considerate dal professore Bianchi che sono a *flessione costante*. Una classe particolare di tali superficie è evidentemente quella delle superficie a linee di curvatura circolari.

Nel § I stabilisco le formule fondamentali relative a queste superficie in generale, la cui determinazione dipende da un sistema di equazioni a derivate parziali per funzioni incognite di due variabili.

Indi mi occupo del caso particolare in cui la flessione delle superficie ipercicliche sia costante.

Le considerazioni infinitesimali del § II mi servono per fissare il grado di arbitrarietà di queste superficie. Benchè esse non possano considerarsi come dimostrazioni rigorose mi è parso qui utile di riportarle.

Mi occupo quindi nei §§ III e IV di quelle costruzioni geometriche (*trasfor-*

---

(\*) Bianchi. Sopra i sistemi tripli di Weingarten. Ann. di Mat. Milano, Serie II. T. XIII.

mazione complementare del Bianchi, e trasformazione di Bäcklund) che permettono di dedurre nuove superficie ipercicliche da una superficie nota di questa classe.

Nel § V cerco quelle superficie ipercicliche a flessione costante che hanno pur costante la curvatura totale; e trovo che sono superficie elicoidali.

In ultimo mi propongo di cercare per ogni superficie iperciclica una serie di tali superficie che la contenga e faccia parte di un sistema triplo ortogonale. Dimostro che esiste una e una sola di tali serie.

E ciò conferma per altra via il teorema dato dal Prof. Bianchi nella Memoria citata, che: Ogni superficie iperciclica a flessione costante individua un sistema triplo ortogonale di Weingarten di cui fa parte.

## I.

1. Per determinare gli elementi che individuano le superficie ipercicliche a flessione variabile, ci serviremo delle formole di Codazzi, le quali devono essere soddisfatte per qualunque superficie. Queste formole, quando la superficie sia riferita a un sistema di coordinate ortogonali, talchè il suo elemento lineare prenda la forma:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

e con  $D$ ,  $D'$ ,  $D''$  si indichino rispettivamente le espressioni

$$-\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad -\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = -\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad -\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad (*)$$

dove  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , rappresentano i coseni di direzione della normale alla superficie, sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{D''}{\sqrt{G}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D'}{\sqrt{G}} \right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D}{\sqrt{E}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{D'}{\sqrt{E}} \right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{D''}{G} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \\ \frac{D'^2 - DD''}{\sqrt{EG}} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right). \end{array} \right.$$

Se per sistema di linee ortogonali coordinate  $u = \text{cost.}$ ,  $v = \text{cost.}$  assumiamo

(\*) Bianchi, Lezioni di Geom. diff. (autog.) p. 89.

le linee di curvatura della superficie, si ha, come è noto (\*):

$$D = -\frac{E}{r_2} \quad D' = 0 \quad D'' = -\frac{G}{r_1}$$

dove  $r_1, r_2$  rappresentano i raggi principali di curvatura.

E allora le formole precedenti diventano :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r_2} = 0 \\ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{r_1} = 0 \\ \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\}. \end{array} \right.$$

2. Per determinare nel nostro caso le quattro funzioni  $E, G, r_1, r_2$ , occorre un'altra relazione, che ci vien fornita dalla condizione da noi posta, che, cioè, la flessione delle linee di curvatura, p. e. delle  $v = \text{cost.}$  sia costante sopra una linea ma varii da linea a linea; ossia, sia una funzione soltanto di  $v$ .

Rammentiamo per questo che: « Il quadrato della flessione in un punto di una linea qualunque tracciata sopra una superficie, è eguale alla somma dei quadrati della curvatura geodetica della medesima linea e della curvatura normale nel punto considerato ».

E poichè la curvatura normale è  $\frac{1}{r_2}$  e la curvatura geodetica per le linee  $v = \text{cost.}$  è data da :

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$

avremo che la nuova relazione da aggiungersi alle (1), sarà, indicando con  $\varphi(v)$  la flessione :

$$\frac{1}{r_2^2} + \left( \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)^2 = \varphi^2(v).$$

(\*) Bianchi. Lezioni di Geom. diff. (autog.) p. 99.

3. Il sistema di equazioni :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} = 0 \\ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} = 0 \\ \frac{1}{r_1 r_2} = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} \\ \frac{1}{r_2^2} + \left( \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)^2 = \varphi^2(v) \end{array} \right.$$

dalla cui integrazione dipende la ricerca delle superficie ipercicliche a flessione variabile, si può ridurre a un sistema equivalente di tre equazioni alle derivate parziali per tre funzioni incognite, mediante l'introduzione di una nuova funzione, della quale troveremo più tardi il significato.

Poniamo

$$(3) \quad \frac{1}{r_2} = \varphi(v) \operatorname{sen} \omega ,$$

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \varphi(v) \operatorname{cos} \omega$$

L'ultima equazione del sistema (2) è allora verificata identicamente, e la prima diventa, ponendo  $\frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} = \varphi'(v)$ ,

$$(5) \quad \frac{1}{r_1} = \varphi(v) \operatorname{sen} \omega + \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \operatorname{tg} \omega + \frac{\partial \omega}{\partial v} \right)$$

E dalle altre due abbiamo :

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \sqrt{G} \varphi(v) \frac{\partial \omega}{\partial u} \operatorname{cos} \omega + \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \frac{1}{\operatorname{cos} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \sqrt{EG} \varphi^2(v) + \sqrt{E} \frac{\varphi'(v)}{\operatorname{cos} \omega} = 0.$$

E il sistema da sostituirsi al sistema (2) è quello delle equazioni (4), (6), (7).

4. Si trova facilmente il significato geometrico della funzione  $\omega$  sopra una superficie iperciclica qualunque.

Per un punto  $M$  della superficie passano una linea  $u$  e una  $v$  ortogonali (\*): conduciamo il raggio principale  $MP = r_2$  e la tangente  $MT$  alla linea  $u = \text{cost.}$ , essendo  $M$  il punto di contatto e  $T$  un punto dello spigolo di regresso della sviluppabile formata dalle tangenti alle  $u$ , lungo i punti di una  $v$ . Uniamo  $P$  con  $T$  e dal punto  $M$  conduciamo su  $PT$  la perpendicolare  $MM'$ . Supponiamo che questa perpendicolare rappresenti in grandezza e direzione il raggio di curvatura ordinaria o flessione della  $v$  nel punto  $M$ . Avremo quindi :

$$MM' = \frac{1}{\varphi(v)}$$

e dalla (3) deduciamo

$$(8) \quad \text{sen } \omega = \frac{MM'}{r_2}.$$

Ma trovandosi le tre rette  $MP$ ,  $MM'$ ,  $MT$  in uno stesso piano, ed essendo l'angolo  $PMT = 90^\circ$ , indicando con  $\alpha$  l'angolo obliquo in  $M$  del triangolo rettangolo  $MM'T$ , si ha dall'altro  $MM'P$  pure rettangolo :

$$MM' = r_2 \text{ sen } \alpha$$

quindi

$$\text{sen } \alpha = \frac{MM'}{r_2}$$

e perciò confrontando colla (8)

$$\omega = \alpha.$$

Ossia:  $\alpha$   $\omega$  è l'angolo che la normale principale alla linea  $v$  nel punto  $M$  fa colla tangente nello stesso punto alla linea  $u = \text{cost.}$  ».

5. Supponiamo ora che la flessione delle linee  $v = \text{cost.}$  sia costante ed eguale su tutta la superficie. Avremo  $\varphi(v) = c$ , e potremo prendere  $c = 1$ . Le equazioni (4) (6) (7) del caso generale diventano :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_1} = \text{sen } \omega + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \omega}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \sqrt{G} \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \sqrt{EG} = 0 \end{array} \right.$$

(\*) Il lettore è pregato di fare la figura.

che sono quelle date dal Prof. Bianchi nella Memoria citata. E ponendo

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\theta = \int \sqrt{E} du$$

da cui

$$\sqrt{E} = \frac{\partial \theta}{\partial u}$$

avremo, dalla ultima delle (9)

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \theta^2} + \sqrt{G} = 0$$

e ne dedurremo

$$\sqrt{G} = V \cos(\theta \pm V_1)$$

dove  $V$  e  $V_1$  son funzioni soltanto di  $v$ .

Cambiando  $v$  in  $\int V dv$  e ponendo, senza toglier nulla alla generalità delle formole,  $V_1 = 0$ , si ha :

$$\sqrt{G} = \cos \theta.$$

La formola dell'elemento lineare di queste superficie sarà dunque :

$$ds^2 = \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 du^2 + \cos^2 \theta dv^2.$$

6. Anche per la funzione  $\theta$  che abbiamo adesso introdotto, troveremo più tardi un significato geometrico simile a quello della funzione  $\omega$ . Farò vedere adesso come  $\theta$  e  $\omega$  sono legate fra loro da due equazioni a derivate parziali di secondo ordine.

Sostituendo infatti nelle prime due equazioni del sistema (9) i valori trovati per  $\sqrt{E}$  e  $\sqrt{G}$ , si ottiene

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \cos \omega \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \cos \omega \cos \theta \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

E da queste si può dedurre facilmente l'equazione a cui deve soddisfar  $\theta$ . Ponendo per brevità :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \frac{1}{\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial u}} = \Theta$$

si ha, che deve esser soddisfatta l'equazione

www.hdt001.com.cn

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} (1 - \Theta^2) + \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \cos \theta (1 - \Theta^2) \right\} = 0.$$

E un'equazione simile si potrebbe trovare per  $\omega$ . Dunque :

« All'elemento lineare di ogni superficie iperciclica a flessione costante = 1, riferita alle sue linee di curvatura si può dare la forma

$$ds^2 = \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 du^2 + \cos^2 \theta dv^2$$

dove  $\theta$  è una funzione che soddisfa all'equazione (11). I suoi raggi principali di curvatura sono dati da :

$$\frac{1}{r_1} = \text{sen } \omega + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{1}{r_2} = \text{sen } \omega$$

e le funzioni  $\omega$  e  $\theta$  sono legate dalle equazioni (10) ».

7. Se supponiamo che  $\omega$  sia una funzione analitica di  $v$ , e sviluppabile perciò in serie di Taylor, si può dimostrare il seguente teorema :

« Se sopra una superficie iperciclica a flessione variabile, una linea di curvatura  $v = \text{cost.}$  è un circolo, anche tutte le altre saranno circoli ».

Per dimostrare questo teorema, è necessario prima calcolare la torsione delle linee  $v = \text{cost.}$  Rammenteremo per questo che la formola che dà la torsione di una linea tracciata sulla superficie, quando essa linea appartenga alle coordinate  $v = \text{cost.}$ , è :

$$-\frac{1}{T} = \frac{1}{T_g} + \frac{d\sigma}{ds_v} \quad (*)$$

dove  $\frac{1}{T}$  indica la torsione assoluta della linea in un punto  $M$ ,  $\frac{1}{T_g}$  la torsione geodetica nello stesso punto, intendendo per torsione geodetica di una linea in un punto, la torsione della geodetica tangente in quel punto alla linea;  $\sigma$  rappresenta l'angolo che la normale principale alla linea  $v$  forma in  $M$  colla normale alla superficie;  $ds_v$  l'elemento lineare della  $v$ . Nel nostro caso avremo dunque, essendo le  $v$  linee di curvatura

$$\frac{1}{T_g} = 0, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad ds_v = \sqrt{E} du$$

(\*) Bianchi. Lezioni (aut.).

e avremo perciò

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

(12)

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{d\omega}{dv}$$

Per le superficie ipercicliche a flessione costante, si ha

(13)

$$\frac{1}{T} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial u}}{\frac{\partial \theta}{\partial u}}$$

Quando sia  $\omega$  indipendente da  $u$ , le linee  $v = \text{cost.}$  sono piane, ed essendo a flessione costante sono circolari. La superficie iperciclica a flessione variabile diventa allora una superficie involuppo di una sfera mobile di cui il centro percorre una curva arbitraria e di cui il raggio è variabile. La superficie iperciclica a flessione costante diventa una superficie ciclica.

Passiamo ora a dimostrare il teorema enunciato.

Supponiamo di sapere che per una linea  $v = v_0$  si abbia :

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)_{v=v_0} = 0.$$

Dall'equazione (6), si deduce

$$\left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \right]_{v=v_0} = 0$$

e con successive derivazioni

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \right]_{v=v_0} = 0$$

. . . . .

$$\left[ \frac{\partial^n}{\partial v^n} \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \right]_{v=v_0} = 0$$

. . . . .

e perciò

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$$

qualunque sia  $v$ , ossia, dalla (12)

$$\frac{1}{T} = 0$$

qualunque sia  $v$ .

c. d. d.

8. Lo stesso teorema vale anche per le superficie ipercicliche a flessione costante; ma per queste non c'è bisogno di ammettere che  $\omega$  sia funzione *analitica* di  $v$ , e sviluppabile perciò in serie di Taylor.

Dalle equazioni (10), moltiplicando la prima per  $\frac{\partial \omega}{\partial u}$ , la seconda per  $\frac{\partial \theta}{\partial u}$  e sommando, si ha :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial u} = F(u)$$

dove  $F(u)$  è funzione soltanto di  $u$ . Se una linea  $v$  sulla superficie è circolare cioè se per  $v = v_0$  si ha  $\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$ , anche  $F(u)$  sarà  $= 0$ ; ma siccome  $F(u)$  è indipendente da  $v$  essa sarà sempre 0 qualunque sia  $v$ ;  $\frac{\partial \omega}{\partial u}$  sarà dunque  $= 0$  su tutta la superficie, e ne dedurremo che  $\frac{1}{T}$  sarà sempre 0 e tutte le linee  $v$  saranno circolari.

II.

9. Mi occuperò adesso delle caratteristiche delle superficie ipercicliche estendendo a quelle a flessione variabile un teorema già dato dal Prof. Bianchi per quelle a flessione costante. E anch'io mi servirò di considerazioni infinitesimali, le quali mi serviranno se non altro, a far conoscere l'effettiva esistenza delle superficie che ho preso a considerare.

Si abbia una superficie iperciclica  $S$  a flessione variabile e per un suo punto  $M$  conduciamo la linea  $v_0 = \text{cost.}$  e la traiettoria ortogonale  $u_0 = \text{cost.}$  Sia  $v_1$  la linea di curvatura dello stesso sistema di  $v_0$ , e infinitamente vicina a questa; essa sarà incontrata in un punto  $P_1$ , da una linea  $u$  dell'altro sistema che passa per un punto  $P$  della  $v_0$ . I segmenti rettilinei infinitesimi  $\overline{PP_1}$  sono normali in  $P$  alla curva iniziale  $v_0$ ; e se poniamo

$$\overline{PP_1} = \epsilon f(s)$$

dove  $\epsilon$  è una costante infinitesima e  $f(s)$  una funzione dell'arco  $s$  di  $v_0$ , potremo dire che :

*La funzione  $f(s)$  è determinata dal fatto che la superficie è iperciclica.*

Infatti se con  $x, y, z, s, \dots$  s'indicano gli elementi della linea  $v_0$ , con  $x_1, y_1, z_1, s_1, \dots$  i corrispondenti relativi alla linea  $v_1$  e se poniamo  $\tau = f \frac{ds}{T} + g$ , avremo (\*)

$$(1) \quad x_1 = x + \varepsilon f(s) \{ \cos \tau \cos \xi + \operatorname{sen} \tau \cos \lambda \}$$

e similmente per  $y$ , e  $z$ , essendo  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ , gli angoli che la normale principale e la binormale della  $v_0$  formano cogli assi,  $g$  è una costante che verrà determinata quando il segmento  $\overline{PP_1}$  diventi il segmento  $MM_1$  del quale si conosce la direzione.

Derivando la (1) si ha

$$(2) \quad \frac{\partial x_1}{\partial s} = \left\{ 1 - \varepsilon f \frac{\cos \tau}{R} \right\} \cos \alpha + \varepsilon f' \cos \tau \cos \xi + \varepsilon f' \operatorname{sen} \tau \cos \lambda$$

e analogamente per  $\frac{\partial y_1}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial z_1}{\partial s}$ , avendo tenuto conto delle formole di Frénet, e indicato con  $R$  il raggio di prima curvatura della linea  $v_0 = \operatorname{cost}$ .

Quadrando e sommando le (2) trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, e estraendo la radice quadrata, si ha :

$$\frac{ds_1}{ds} = 1 - \varepsilon f \frac{\cos \tau}{R}$$

talchè le (2) diventano, trascurando al solito gli infinitesimi di ordine superiore :

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha + \varepsilon f' \cos \tau \cos \xi + \varepsilon f' \operatorname{sen} \tau \cos \lambda$$

e analoghe.

Derivando colla medesima avvertenza si ha :

$$(3) \quad \frac{\cos \xi_1}{R_1} = - \frac{\varepsilon f'}{R} \cos \tau \cos \alpha + \left\{ \frac{1}{R} + \varepsilon \left( f'' + \frac{f'}{R} \right) \cos \tau \right\} \cos \xi + \varepsilon f''' \operatorname{sen} \tau \cos \lambda$$

dove  $R$  e  $R_1$  sono i raggi di flessione delle linee  $v_0$  e  $v_1$  nei punti  $P$  e  $P_1$ .

Ma se la superficie è iperciclica a flessione variabile,  $R_1 = \operatorname{cost}$ . lungo la  $v_1$ ,  $R = \operatorname{cost}$ . lungo la  $v_0$  e se supponiamo che la flessione delle linee  $v$  sia una funzione continua di  $v$  sulla superficie, avremo :

$$(4) \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \varepsilon h$$

dove  $h$  è una costante finita.

(\*) Serret. Calc. diff.

Allora quadrando e sommando le (3) e introducendoci la (4) colla solita avvertenza avremo :

$$(5) \quad f'' + \frac{f}{R^2} = \frac{h}{\cos \tau}.$$

Nel caso delle superficie ipercicliche a flessione costante, dovendo essere

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$$

sarà

$$h = 0$$

e perciò :

$$(6) \quad f'' + \frac{f}{R^2} = 0.$$

La (6) si integra facilmente e si ha subito

$$(7) \quad f = A \cos \left( \frac{s}{R} + B \right)$$

e perciò l'integrale generale della (5) sarà :

$$(8) \quad f = A \cos \left( \frac{s}{R} + B \right) + hR \left\{ \sin \frac{s}{R} \int_0^s \frac{\sin \frac{s}{R} ds}{\cos \tau} - \cos \frac{s}{R} \int_0^s \frac{\sin \frac{s}{R} ds}{\cos \tau} \right\}.$$

10. Le costanti A e B sono perfettamente determinate perchè si possono stabilire due relazioni che le legano fra loro. Infatti se  $s', \alpha', \beta' \dots \xi' \dots$  sono gli elementi della linea  $u_0$  che passa per M, potremo porre  $\epsilon = ds'$  e allora per  $s=0$  si ha :

$$f = 1$$

ossia, per  $s = 0$ ,

$$(9) \quad A \cos B = 1.$$

Di più, essendo

$$\cos \alpha' + \frac{\cos \xi'}{\rho'} ds'$$

e analoghe, i coseni di direzione in M della  $u$  che passa per M, potremo mettere

la condizione che  $v$  sia normale in  $M$ , alla  $u_0$ , avremo :

www.libtool.com.cn

$$(10) \quad \frac{\sum \cos \alpha \cos \xi'}{\rho} + f \{ (\sum \cos \xi \cos \alpha') \cos \tau + (\sum \cos \lambda \cos \alpha') \sin \tau \}$$

e le due relazioni (9) e (10) determinano  $A$  e  $B$ .

Il teorema è dunque dimostrato.

Si vede per conseguenza che il segmento  $\overline{PP_1}$  è completamente determinato in lunghezza e direzione; la linea di curvatura  $v_0$  determina dunque la successiva  $v_1$  e così via; il luogo di queste linee è la superficie iperciclica; e poichè per conoscere  $h$  che compare nella (8), basta conoscere la natura della funzione  $\varphi(v)$  che rappresenta il raggio di flessione, potremo dire:

*Date ad arbitrio due curve  $u_0, v_0$  che s'incontrino ortogonalmente in un punto  $M$  e delle quali la prima sia a flessione costante  $\frac{1}{R}$ , esiste una ed una sola superficie iperciclica a flessione variabile*

$$\varphi(v) \quad , \quad \left( \varphi(v_0) = \frac{1}{R} \right) ,$$

*che passa per le linee  $v_0$  ed  $u_0$  e le ammette per linee di curvatura.*

11. Si deduce facilmente

*Date ad arbitrio due curve  $C$  e  $C'$  che s'incontrino ortogonalmente in un punto  $M$  e delle quali la prima sia a flessione costante  $\frac{1}{R}$  esiste una ed una sola superficie iperciclica a flessione costante di raggio  $R$  che passa per le linee  $C, C'$  e le ammette per linee di curvatura (\*).*

### III.

12. Il chiariss. prof. Bianchi nella sua tesi d'abilitazione presentata alla R. Scuola Normale di Pisa, e successivamente nel vol. XVI dei *Mathematische Annalen*, ha fatto conoscere una costruzione per dedurre da una superficie pseudosferica nota  $S$ , nuove superficie pseudosferiche col medesimo raggio. Perciò se il raggio di  $S$  è  $= R$ , basta considerare sopra  $S$  un sistema di geodetiche parallele e sopra ciascuna tangente a ogni singola geodetica staccare nel senso del parallelismo un segmento  $PP' = R$  a partire dal punto di contatto  $P$ ; il luogo dei punti  $P'$  è una nuova superficie pseudosferica di raggio  $R$ .

Il prof. Bianchi ha chiamato  $S'$  la complementare di  $S$  e trasformazione

---

(\*) Bianchi. Mem. cit.

complementare la costruzione sopra riferita per cangiare S in S'. Questa trasformazione gode la proprietà di conservare le linee di curvatura, le assintotiche e gli archi di assintotica.

Applicando simultaneamente alle  $\infty'$  superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten tale trasformazione, egli ha ancora dimostrato che: « Essa permette di dedurre da ogni sistema noto di Weingarten, infiniti nuovi sistemi della stessa specie ».

E se il sistema di Weingarten è a flessione costante (cioè se le superficie di un sistema ortogonali alle pseudosferiche sono superficie ipercicliche a flessione costante) ha pure dimostrato che:

« Dato un sistema di Weingarten a flessione costante, se delle curve C (linee di curvatura a flessione costante delle superficie ipercicliche) traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche del sistema si assumono le linee C<sup>(1)</sup> luogo dei loro centri di curvatura, queste ammettono una serie di superficie pseudosferiche ortogonali che fanno parte di un nuovo sistema di Weingarten a flessione costante ».

Se ne deduce (e il prof. Bianchi l'ha poi anche osservato direttamente) che:

Ogni superficie iperciclica a flessione costante S ammette una superficie iperciclica coniugata S' che è il luogo dei centri di curvatura delle sue linee di curvatura a flessione costante. Inversamente la coniugata di S' è S.

13. Mi propongo in questo paragrafo di ricercare se la trasformazione del Bianchi è applicabile alle superficie ipercicliche a flessione variabile.

Abbiasi dunque una superficie iperciclica a flessione variabile  $\varphi(v)$  e il suo elemento lineare riferito alle linee di curvatura sia

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Prendiamo un punto M  $\equiv (x, y, z)$  sulla superficie e conduciamo la normale principale MP essendo P il centro di curvatura. Facciamo lo stesso per ogni punto della superficie e cerchiamo se la superficie luogo dei punti P è pure iperciclica.

Se  $x, y, z$ , sono le coordinate del punto P, e X, Y, Z i coseni di direzione degli angoli che la normale fa cogli assi, avremo:

$$(1) \quad x_1 = x - \frac{1}{\varphi(v)} \cos \omega \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{\varphi(v)} \operatorname{sen} \omega \cdot X$$

e analoghe per  $y_1$  e  $z_1$ .

Dalle (1) potremo dedurre l'elemento lineare della nuova superficie, calcolando  $E_1, F_1, G_1$ .

Tenendo conto di note formole di Geometria differenziale (\*) e delle (3) e (4)

---

(\*) Queste formole di cui ci serviremo in seguito, sono:

del § I, avremo derivando le (1) rispetto ad  $u$

www.libtool.com.cn

$$(2) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{\varphi(v)} \operatorname{sen} \omega \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{1}{\varphi(v)} \cos \omega \cdot X \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

e analoghe per  $\frac{\partial y_1}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z_1}{\partial u}$ .

Derivando invece le stesse (1) rispetto a  $v$  avremo :

$$(3) \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \left\{ \sqrt{G} \cos^2 \omega + \frac{\varphi'(v)}{\varphi^2(v)} \left( \frac{\cos^2 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega}{\cos \omega} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\varphi(v)} \cos \omega \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + X \left\{ \sqrt{G} \cdot \operatorname{sen} \omega \cos \omega + \frac{2\varphi'}{\varphi^2} \operatorname{sen} \omega \right\}$$

e analoghe.

Dalle (2) e dalle (3) si deduce :

$$E_1 = \sum \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{\varphi^2(v)} \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2$$

$$G_1 = \sum \left( \frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 = G \cos^2 \omega + 2 \sqrt{G} \cdot \cos \omega \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} +$$

$$+ \frac{\varphi'^2(v)}{\varphi^4(v)} \frac{1}{\cos^2 \omega} + \frac{1}{\varphi^2(v)} \cos^2 \omega \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v} \right)^2$$

$$F_1 = \sum \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) = - \frac{\varphi'(v)}{\varphi^3(v)} \operatorname{tang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v}.$$

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} X, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{1}{r_2} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{1}{r_1} \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

14. Si vede intanto che per le superficie ipercicliche a flessione variabile,  $F_1$  non può essere zero, non essendo  $\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$ , perchè allora la superficie data degenererebbe in ciclica; nè  $\text{tg } \omega = 0$  chè in questo caso la superficie data sarebbe una sviluppabile. Vuol dire dunque che le trasformate delle linee di curvatura della superficie primitiva non formano nella nuova un sistema ortogonale. Ma poichè sappiamo che alle linee a flessione costante nella superficie primitiva corrispondono linee pure a flessione costante sulla trasformata, vediamo se tali linee sono o no per questa nuova superficie linee di curvatura. Potremo così vedere se ed in quali casi la trasformazione del Bianchi è applicabile alle superficie ipercicliche.

La condizione a cui deve soddisfare una linea per essere linea di curvatura è data da:

$$(FD'' - GD') dv^2 + (ED'' - GD) du dv + (ED' - FD) du^2 = 0.$$

Trattandosi di una linea  $v = \text{cost.}$  i cui elementi abbiamo indicati con  $E_1, D_1, F_1$ , la condizione nel nostro caso diventa

$$E_1 D_1' - F_1 D_1 = 0$$

o anche

$$(4) \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\varphi'}{\varphi} \text{tg } \omega \sum \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0.$$

Ricordando che in generale si ha:

$$X = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

avremo nel nostro caso

$$X_1 = \rho X'$$

avendo posto

$$\frac{1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} = \rho$$

$$X' = \left[ \frac{1}{\varphi(v)} \text{sen } \omega \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{1}{\varphi(v)} \text{cos } \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} Y \right] \left[ \frac{1}{\varphi(v)} \text{cos } \omega \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} \left\{ \sqrt{G} \text{cos}^2 \omega + \frac{\varphi'}{\varphi^2} \left( \frac{\text{cos}^2 \omega - \text{sen}^2 \omega}{\text{cos } \omega} \right) + Z \left( \sqrt{G} \cdot \text{sen } \omega \text{cos } \omega + \frac{2\varphi'}{\varphi^2} \text{sen } \omega \right) \right\} \right] - \\ - \left[ \frac{1}{\varphi(v)} \text{sen } \omega \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{1}{\varphi(v)} \text{cos } \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} Z \right] \left[ \frac{1}{\varphi(v)} \text{cos } \omega \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} + \text{ecc.} \right].$$

Rammentando che  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0 ,$$

la (4) ora diventa

$$(5) \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum \frac{\partial X'}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} + \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \operatorname{tg} \omega \sum \frac{\partial X'}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0.$$

Ci basterà dunque di calcolare  $X'$  e la sua derivata rispetto ad  $u$ . Osservando che un determinante della forma

$$\begin{vmatrix} ax + by + cz & , & a'x + b'y + c'z \\ ax' + by' + cz' & ; & a'x' + b'y' + c'z' \end{vmatrix}$$

può scriversi

$$(ab' - a'b) \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} + (ac' - a'c) \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + (bc' - b'c) \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

e ricordando che per essere il determinante dei coseni = 1, si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \sqrt{(EG)}$$

otterremo facilmente

$$X' = \left( \sqrt{G} \cos \omega + \frac{\varphi'(v)}{\varphi^2(v)} \right) \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\cos^2 \omega}{\varphi(v)} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen} \omega \cos \omega}{\varphi(v)} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X.$$

Derivando e applicando le formole (A) (Nota al n. 13), si ha :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X'}{\partial u} = & -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial v} \sqrt{G} \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\operatorname{sen} \omega \cos \omega}{\varphi(v)} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \\ & + X \left( \frac{\cos^2 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega}{\varphi(v)} \right) \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} . \end{aligned}$$

Ne dedurremo togliendo i termini che si distruggono

$$D_1' = \sum \frac{\partial X'}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0$$

$$D_1 = \sum \frac{\partial X'}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \omega \cos \omega}{\varphi^2(v)} \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\cos^2 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega}{\varphi^2(v)} \cos \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

E l'equazione (5) ora diventa :

$$(6) \quad \frac{\varphi'(v)}{\varphi^3(v)} \operatorname{sen} \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0.$$

E questo, se la superficie primitiva si mantiene iperciclica, non è soddisfatto che per  $\varphi'(v) = 0$  ossia  $\varphi(v) = \text{cost.}$

Possiamo dunque dire :

*Alle superficie ipercicliche a flessione variabile non è applicabile la trasformazione del Bianchi.*

La superficie trasformata della primitiva avrà un sistema di linee a flessione costante sopra ogni linea e variabile da linea a linea, ma questo sistema, non sarà di linee di curvatura.

15. Avendo trovato  $D' = 0$  possiamo dire che :

*Sulla superficie luogo dei centri di curvatura di una superficie iperciclica alle linee di curvatura di questa corrispondono linee a tangenti coniugate.*

16. Ma è evidente che la trasformazione è applicabile, quando la superficie iperciclica è a flessione costante. Infatti, facendo  $\varphi(v) = \text{cost.} = 1$ , si ha facilmente

$$E_1 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 \quad G_1 = \cos^2 \omega \quad F_1 = 0$$

talchè l'elemento lineare della nuova superficie è :

$$ds^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 du^2 + \cos^2 \omega dv^2$$

che è l'elemento lineare di una superficie iperciclica di raggio costante,  $= 1$ , ed è veramente iperciclica, perchè, essendo soddisfatta la (6), le sue linee a flessione costante son le linee di curvatura. La chiameremo la *coniugata* della prima.

Nella nuova superficie,  $\omega$  sostituisce  $\theta$  della prima e viceversa; cosicchè, come avevamo accennato nel § I, si capisce ora facilmente quale sia il significato geo-

metrico di  $\theta$ . Esso rappresenta l'angolo che la normale principale a una  $v = \text{cost.}$  in un punto della superficie coniugata, fa colla tangente nello stesso punto alla  $u = \text{cost.}$

Per la nuova superficie si ha :

$$\frac{1}{r_1} = \text{sen } \theta + \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \theta}{\partial v} \qquad \frac{1}{r_2} = \text{sen } \theta$$

e fra le quantità  $\omega$  e  $\theta$  sussisteranno tuttora le relazioni (10) del § I, e  $\omega$  dovrebbe soddisfare a un'equazione di quarto ordine simile alla (11) dello stesso §.

Si vede facilmente che cercando la coniugata di questa nuova superficie, si tornerebbe alla primitiva, e che se la superficie  $S$  è ciclica, la sua coniugata si riduce ad una linea.

17. Esporrò adesso una *costruzione* molto semplice della coniugata di una superficie iperciclica di raggio costante = 1.

Si descriva una sfera di raggio eguale all'unità, che abbia il centro sopra una linea  $v = \text{cost.}$ , e si faccia percorrere al centro tutta la linea  $v$ . La superficie involuppo di tutte le posizioni della sfera mobile sarà una superficie canale, la quale avrà uno spigolo di regresso.

Se si ripete questa operazione per tutte le linee  $v = \text{cost.}$  il luogo degli spigoli di regresso sarà la superficie coniugata.

Infatti se  $x, y, z$  son le coordinate di un punto qualunque di una linea  $v = \text{cost.}$  sopra la superficie primitiva, avremo che l'equazione della sfera mobile sarà

$$f = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = 1.$$

La *caratteristica*, cioè la curva limite verso cui tende l'intersezione di due sfere vicinissime, vien data dalle due equazioni simultanee

$$f = 1 \qquad f' = 0$$

ossia :

$$(1) \qquad (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = 1$$

$$(2) \qquad (X - x) \cos \alpha + (Y - y) \cos \beta + (Z - z) \cos \gamma = 0.$$

E poichè la (2) è l'equazione d'un piano normale alla curva e che passa pel punto  $(x, y, z)$  centro della sfera, la caratteristica è un circolo di raggio 1.

Il luogo di questi circoli che giacciono in piani normali alla linea  $v = \text{cost.}$  è una superficie canale, e un punto del suo spigolo di regresso è dato, come sappiamo, dalle tre equazioni simultanee

$$f = 1 \qquad f' = 0 \qquad f'' = 0$$

ossia

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(1) \quad (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = 1$$

$$(2) \quad (X - x) \cos \alpha + (Y - y) \cos \beta + (Z - z) \cos \gamma = 0$$

$$(3) \quad (X - x) \cos \xi + (Y - y) \cos \eta + (Z - z) \cos \zeta = 1$$

La (3) è l'equazione d'un piano normale al piano (2) e distante dalla linea dei centri di una lunghezza = 1, e perciò tangente alla superficie canale. E poichè gli angoli che fa la sua normale sono appunto quelli che fa la normale alla linea  $v = \text{cost.}$ , è evidente che il punto definito dalle (1) (2) (3) è il centro di curvatura della linea  $v = \text{cost.}$

Dunque :

*La coniugata d'una superficie iperciclica a flessione costante = 1, si può considerare come il luogo geometrico degli spigoli di regresso delle superficie canali, generate da sfere di raggio 1, i cui centri percorrono le linee a flessione costante delle superficie date.*

#### IV.

18. Il sig. Bäcklund ha felicemente generalizzato la trasformazione del Bianchi. Alla trasformazione di Bäcklund si può dare la forma contenuta nell'enunciato seguente :

« Data una superficie pseudosferica  $S$  di raggio = 1, se per ciascun punto  $P$  della superficie e nel piano tangente in  $P$  si conduce un segmento costante  $PP' = \cos \sigma$ , inclinato sulla linea di curvatura  $v = \text{cost.}$  dell'angolo  $\varphi$  che soddisfa ad una certa equazione a differenziali totali, la superficie  $S'$  luogo degli estremi  $P'$  è una nuova superficie pseudosferica di raggio = 1. Anche questa trasformazione conserva le linee di curvatura, le assintotiche e gli archi di assintotica.

Il prof. Bianchi l'ha applicata ai sistemi tripli di Weingarten, e ha dimostrato che quelli a flessione costante si comportano rispetto alla trasformazione di Bäcklund come rispetto alla complementare, cangiandosi, cioè, in sistemi della stessa natura. Ne deduce che anche alle superficie ipercicliche a flessione costante è applicabile la trasformazione di Bäcklund.

19. Cerchiamo direttamente questo medesimo risultato :

Conduciamo in un punto  $P$  della superficie data, una normale alla linea  $v$  che passa per quel punto e stacciamovi un segmento =  $\cos \sigma$  ( $\sigma = \text{cost.}$ ). Sia  $\varphi$  l'angolo che la normale  $PP'$  fa colla tangente in  $P$  alla linea  $u = \text{cost.}$  che passa per  $P$ . Se con  $x, y, z$  indichiamo le coordinate cartesiane del punto  $P$ , con  $x', y', z'$

quelle del punto P', avremo :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x' = x + \left( \cos \varphi \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} + X \operatorname{sen} \varphi \right) \cos \sigma$$

e similmente  $y'$  e  $z'$ .

Tenendo conto delle solite formole (A) n° 13 avremo :

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} (1 + \cos \sigma \cos(\varphi - \omega)) + \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + X \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cos \sigma \cos \varphi$$

e così per  $\frac{\partial y'}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z'}{\partial u}$  ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \left\{ 1 - \left( \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \cos \sigma \right\} + \\ + \frac{\partial x}{\partial u} \cos \sigma \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} + X \cos \sigma \cos \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \cos \theta \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

e così per  $\frac{\partial y'}{\partial v}$  e  $\frac{\partial z'}{\partial v}$ .

Dalle formole precedenti si deduce subito per la superficie luogo dei punti P,

$$E' = \sum \left( \frac{\partial x'}{\partial u} \right)^2 = \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 \left\{ 1 + \cos \sigma \cos(\varphi - \omega) \right\}^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \cos^2 \sigma$$

$$F' = \sum \left( \frac{\partial x'}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial x'}{\partial v} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial u} \cos \sigma \cos \varphi \operatorname{sen} \theta (1 + \cos \sigma \cos(\varphi - \omega)) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cos^2 \sigma \cos^2 \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \operatorname{sen} \omega \cos \theta - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \sigma \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \left\{ 1 - \cos \varphi \cos \sigma \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \operatorname{sen} \omega - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \right\}$$

$$G' = \sum \left( \frac{\partial x'}{\partial v} \right)^2 = \cos^2 \theta + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \cos \theta \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 \cos^2 \sigma + \cos^2 \sigma \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta -$$

$$- 2 \cos \theta \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \cos \theta \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right).$$

Perchè questa nuova superficie sia pure iperciclica di raggio costante = 1, bisogna che si abbia

$$E' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 \quad G' = \cos^2 \varphi \quad F' = 0,$$

Sostituendo in luogo di  $E'$  il valore trovato, la 1<sup>a</sup> di queste relazioni diventa:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 \{ 1 + \cos \sigma \cos(\varphi - \omega) \}^2 + \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2$$

che ci dà per  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1}{\sin \sigma} \frac{\partial \theta}{\partial u} \{ 1 + \cos \sigma \cos(\varphi - \omega) \}.$$

Dalla seconda similmente si dedurrebbe:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left\{ \frac{\sin \varphi \cos \theta + \sin \sigma \cos \varphi \sin \theta}{\cos \sigma} + \cos \theta \sin \omega + \frac{\partial \omega}{\partial v} \right\}.$$

È facile vedere che le condizioni (1) e (2) rendono  $F'=0$ . E si può anche far vedere col metodo altrove seguito che le linee  $v = \text{cost.}$  a flessione costante nella nuova superficie sono proprio le linee di curvatura. Ma i calcoli sono oltremodo lunghi e noi li trascureremo.

Alle condizioni (1) e (2) si può evidentemente sostituire l'altra

$$(3) \quad d\varphi = \frac{1}{\sin \sigma} \frac{\partial \theta}{\partial u} \{ 1 + \cos \sigma \cos(\varphi - \omega) \} du \\ - \left\{ \frac{\sin \varphi \cos \theta + \sin \sigma \cos \varphi \sin \theta}{\cos \sigma} + \cos \theta \sin \omega + \frac{\partial \omega}{\partial v} \right\} dv$$

e potremo dire:

*Data una superficie iperciclica  $S$  a flessione costante = 1, se per ogni suo punto  $P$  si conduce un segmento rettilineo costante  $PP' = \cos \sigma$ , normale alla linea di curvatura  $v = \text{cost.}$  e inclinato sull'altra dell'angolo  $\varphi$ , che soddisfa all'equazione (3) a differenziali totali, il luogo degli estremi  $P'$  sarà una nuova superficie iperciclica di raggio 1, che avrà per elemento lineare*

$$ds_1^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + \cos^2 \varphi dv^2.$$

20. La condizione d'integrabilità della (3) è evidentemente soddisfatta a causa delle (10) del § I. Esiste dunque un integrale  $\varphi = \varphi(u, v)$  della (3) e questo integrale conterrà oltre  $\sigma$  un'altra costante arbitraria.

È chiaro che passati da una superficie iperciclica ad un'altra mediante la trasformazione di Bäcklund si potrà alla nuova superficie applicare la medesima trasformazione. Anzi, siccome la (3) quando se ne conosca un'integrale particolare si riduce alle quadrature, potremo dedurre che quando della superficie primitiva si conosca una delle trasformate tutte le altre si otterranno con sole quadrature.

V.

21. Mi propongo adesso di cercare quali sono fra le superficie ipercicliche a flessione costante quelle che hanno pure costante la curvatura totale sia positiva, sia negativa.

Come vedremo, la soluzione di questo problema dipende dalla ricerca delle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del secondo ordine con due variabili. Per tale ricerca mi servirò del metodo dato dal Prof. Bianchi nella sua nota presentata ai Lincei (\*), metodo che, nella parte che ci è necessaria, riassumerò qui brevemente.

22. Fra i casi più semplici che l'A. premette alla trattazione del caso generale, vi è quello in cui le due equazioni sieno uno di 2°, l'altra di 1° ordine: ossia suppone che si abbia:

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ f(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

dove  $z$  è la funzione incognita delle due variabili indipendenti  $x$  e  $y$  e  $p, q, r, s, t$  sono le notazioni di Monge per indicare rispettivamente  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dots$

Allora, se la seconda delle equazioni date si risolve rispetto a  $q$  in modo da trarne

$$q = \psi(x, y, z, p)$$

e se ne deducono  $s$  e  $t$  che combinate colla prima delle (1) daranno

$$r = \varphi_1(x, y, z, p), \quad s = \varphi_2(x, y, z, p), \quad t = \varphi_3(x, y, z, p).$$

---

(\*) Bianchi. Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2° ordine con 2 variabili.

il prof. Bianchi ha dimostrato che, introducendo con Mayer il sistema

$$\begin{cases} A(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0 \\ B(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0 \end{cases}$$

dove  $\Phi$  è una funzione incognita delle quattro variabili  $x, y, z, p$ , quando non sia identicamente

$$(2) \quad A(\varphi_2) = B(\varphi_1)$$

questa relazione (2) ci darà  $p$  in funzione di  $x, y, z$ . E quando l'equazione

$$dz = p dx + q dy$$

soddisfi alle note condizioni d'integrabilità, ne trarremo  $z$  in funzione di  $x$  e di  $y$  e di una costante arbitraria e resterà a verificare se tale valore di  $z$  soddisfa le (1).

23. Si voglia ora cercare se esistono superficie ipercicliche a flessione costante = 1, e a curvatura costante negativa  $-\frac{1}{R^2}$ .

Una superficie a curvatura costante negativa ha per elemento lineare

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2$$

dove  $\theta$  è tale che soddisfa all'equazione

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \frac{1}{R^2} \sin \theta \cos \theta$$

e per tale superficie si ha anche :

$$r_1 = -R \operatorname{tang} \theta \quad r_2 = R \operatorname{cotg} \theta.$$

Inoltre perchè la superficie sia iperciclica a flessione costante = 1, abbiamo veduto che deve essere :

$$\frac{1}{r_2^2} + \left( \frac{1}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)^2 = 1$$

ossia

$$\frac{1}{R^2} \operatorname{tang}^2 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 = 1$$

da cui, ponendo per brevità  $k^2 = 1 + \frac{1}{R^2}$ ,

$$(4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

Il nostro problema si riduce quindi a cercare le soluzioni comuni alle equazioni (3) e (4).

Seguendo il metodo indicato precedentemente si ha

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} r - t = \frac{1}{R^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ q = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \end{array} \right.$$

quindi

$$s = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{-k^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} p = \varphi_2$$

$$t = \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \frac{\partial q}{\partial v} = -k^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \varphi_3$$

$$r = t + \frac{1}{R^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta = \varphi_1.$$

Costruisco

$$A(\varphi_2) - B(\varphi_1) = 0$$

ossia

$$A\left(\frac{-k^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} p\right) - B(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) = 0$$

e ottengo :

$$-k^2 p^2 \frac{(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} - (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 0$$

da cui

$$p = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Abbiamo dunque

$$p = \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \quad q = \frac{\partial \theta}{\partial v} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

e ne deduciamo [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$d\theta = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left( \frac{1}{k} du + dv \right).$$

Questa soddisfa alle condizioni d'integrabilità, e scrivendola

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \frac{du}{k} + dv$$

ne dedurremo integrando

$$\frac{u}{k} + v = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$$

Ponendo  $\operatorname{sen} \theta = x$  l'integrale del secondo membro si riduce alla forma d'integrale ellittico

$$\frac{u}{k} + v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Essendo il modulo  $k = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}}$  maggiore dell'unità, applichiamo la trasformazione

$x = \frac{y}{k}$ . Si ha allora

$$k \left( \frac{u}{k} + v \right) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2) \left( 1 - \frac{1}{k^2} y^2 \right)}}$$

e perciò

$$y = kx = \operatorname{sn} \left( u + kv, \frac{1}{k} \right)$$

ossia

$$x = \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{k} \operatorname{sn} \left( u + kv, \frac{1}{k} \right)$$

Ma per una nota formula d'analisi

$$\operatorname{sen} \left( \frac{z}{k}, k \right) = \frac{1}{k} \operatorname{sn} \left( z, \frac{1}{k} \right),$$

quindi

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sn} \left( \frac{u}{k} + v, k \right)$$

e finalmente  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\theta = \operatorname{am} \left( \frac{u}{k} + v, k \right).$$

La funzione  $\theta$  dunque esiste ed è funzione di una combinazione lineare delle variabili. Sappiamo dalla Geometria differenziale che in tal caso la superficie è un'elicoide.

*Esistono superficie ipercicliche a flessione costante a curvatura costante negativa e sono elicoidi.*

Tali elicoidi compariscono nei sistemi tripli elicoidali a flessione costante.

24. Seguendo la stessa via che si è tenuta nel caso precedente, potremo cercare se esistono superficie ipercicliche a flessione costante e a curvatura costante positiva.

L'elemento lineare di una superficie a curvatura costante positiva  $\frac{1}{R^2}$  è

$$ds^2 = \cosh^2 \theta du^2 + \sinh^2 \theta dv^2$$

con

$$r_1 = R \operatorname{tanh} \theta \quad r_2 = R \operatorname{coth} \theta$$

e  $\theta$  deve soddisfare all'equazione

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\frac{1}{R^2} \sinh \theta \cosh \theta.$$

Di più, perchè la superficie sia iperciclica,  $\theta$  deve soddisfare all'altra equazione:

$$\frac{1}{r_2^2} + \left( \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)^2 = 1.$$

ossia

$$\frac{1}{R^2} \operatorname{tanh}^2 \theta + \frac{1}{\cosh^2 \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 = 1$$

da cui

$$(7) \quad q = \frac{\partial \theta}{\partial v} = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{R^2} - 1 \right) \sinh^2 \theta} = \sqrt{1 - R^2 \sinh^2 \theta}$$

ponendo

$$k^2 = \frac{1}{R^2} - 1.$$

Dovremo dunque cercare le soluzioni comuni al sistema formato dalla (6) e dalla (7). [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

Si ottiene subito :

$$s = \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{-k^2 \sinh \theta \cosh \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sinh^2 \theta}} p = \varphi_2$$

$$t = \frac{\partial q}{\partial v} = -k^2 \sinh \theta \cosh \theta = \varphi_3$$

e dalla (6)

$$r = -\sinh \theta \cosh \theta = \varphi_1.$$

Costruiamo

$$A(\varphi_2) - B(\varphi_1) = 0$$

ossia

$$A\left(\frac{-k^2 \sinh \theta \cosh \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sinh^2 \theta}}\right) - B(-\sinh \theta \cosh \theta) = 0$$

Avremo :

$$-k^2 p^2 \left\{ \frac{(\sinh^2 \theta + \cosh^2 \theta)(1 - k^2 \sinh^2 \theta) + k^2 \sinh^2 \theta \cosh^2 \theta}{(1 - k^2 \cosh^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \right\} + \frac{k^2 \sinh^2 \theta \cosh^2 \theta}{(1 - k^2 \sinh^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} + (1 - k^2 \sinh^2 \theta)^{\frac{1}{2}} (\sinh^2 \theta + \cosh^2 \theta) = 0$$

da cui

$$p = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \sinh^2 \theta}.$$

Abbiamo dunque :

$$p = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \sinh^2 \theta} \qquad q = \sqrt{1 - k^2 \sinh^2 \theta}$$

e perciò :

$$d\theta = \sqrt{1 - k^2 \sinh^2 \theta} \left( \frac{du}{k} + dv \right)$$

da cui

$$\frac{du}{k} + dv = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sinh^2 \theta}}.$$

Ponendo  $\operatorname{senh} \theta = \operatorname{tang} \alpha$  e integrando, si ha :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{u}{k} + v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

avendo posto

$$1 + k^2 = k_1^2.$$

Ponendo ora  $\operatorname{sen} \alpha = y$ , abbiamo

$$\frac{u}{k} + v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k_1^2 y^2)}}$$

e poichè supponiamo  $\frac{1}{R^2} > 1$  affinchè  $k^2$  non risulti negativo, sarà  $k_1^2 > 1$ ; e quindi

anche qui applicheremo la trasformazione  $y = \frac{z}{k_1}$  e troveremo

$$z = k_1 y = k_1 \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sn} k_1 \left( \frac{u}{k} + v, \frac{1}{k_1} \right)$$

da cui

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{k_1} \operatorname{sn} \left( \frac{k_1 u}{k} + k_1 v, \frac{1}{k_1} \right)$$

ossia

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sn} \left( \frac{u}{k} + v, k_1 \right)$$

Poichè anche in questo caso  $\theta$  risulta funzione di una combinazione lineare delle variabili, concluderemo che :

*Esistono superficie ipercicliche a flessione costante e a curvatura costante positiva e sono elicoidi (\*)*.

(\*) Il sig. M. N. Nicolaïdes nel *Bulletin des sciences mathématiques* (1876) in una Nota che porta il titolo : *Sur quelques surfaces à courbure constante*, dimostra che : « Se in una superficie il raggio di prima curvatura è costante per le linee dell'uno e dell'altro dei sistemi di linee di curvatura, la superficie è a curvatura costante » ossia : « Se una superficie è doppiamente iperciclica, essa è a curvatura costante : » E chiamando  $a$  la prima curvatura di uno dei sistemi di linee di curvatura,  $b$  quella dell'altro, ( $a$  e  $b$  costanti), partendo dalle formule di Codazzi, trovo  $k = a^2 + b^2$ .

Peraltro tali superficie non esistono. Infatti, se esistessero, chiamando  $a$  e  $b$  le

25. Seguendo lo stesso metodo si potrebbe dimostrare che :

*Non esistono superficie ipercicliche a flessione costante d'area minima, nè a curvatura media costante differente da zero.*

Per le superficie d'area minima basta far vedere che, essendo l'elemento lineare

$$ds^2 = r_2 (du^2 + dv^2)$$

non ammettono soluzioni comuni le equazioni del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_2^2} + \left( \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)^2 = 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial r_2}{\partial v} = 2 \sqrt{r_2(r_2 - 1)} \\ \frac{\partial^2 \log r_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log r_1}{\partial v^2} = \frac{2}{r_2} \end{array} \right. .$$

e per l'altro caso basta, seguendo sempre lo stesso metodo, far vedere che non hanno soluzioni comuni le equazioni del sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_2} + \left( \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)^2 = 1 \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = - \operatorname{senh} \theta \operatorname{cosh} \theta \end{array} \right.$$

prime curvature dei due sistemi,  $k$  la curvatura totale, dovrebbe essere contemporaneamente

$$a = \text{cost.} \quad b = \text{cost.} \quad k = \text{cost.}$$

È ben vero che pel teorema di Nicolaides la terza eguaglianza è conseguenza delle prime due; ma per la 1<sup>a</sup> e per la 3<sup>a</sup>, la superficie, come abbiamo dimostrato, dovrebbe essere un'elicoide, e su questa, come è facile vedere, non si verifica che  $b = \text{cost.}$  Non può darsi dunque che sia contemporaneamente  $a = \text{cost.}$   $b = \text{cost.}$  cioè non esistono superficie doppiamente ipercicliche a flessione costante.

A questo medesimo risultato si giunge del resto direttamente, seguendo il metodo tenuto in questo § in ricerche consimili. Sembra più difficile il cercare se esistono superficie doppiamente ipercicliche a flessione variabile, cioè tali che per tutti e due i sistemi di linee di curvatura, la flessione sia costante sopra ogni linea, ma varii da linea a linea. Io avrei trovato che le due funzioni  $\varphi(u)$  della sola  $u$ , e  $\psi(v)$  della sola  $v$  che rappresentano le flessioni delle linee dei due sistemi di linee di curvatura, dovrebbero soddisfare a *tre* equazioni a derivate parziali del 2<sup>o</sup> ordine, e mi sembra che l'unico caso particolare in cui ciò è possibile sia quello della ciclode di Dupin.

essendo

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$r_1 = \frac{Re^{\pm\theta}}{\sinh\theta} \qquad r_2 = \pm \frac{Re^{\pm\theta}}{\cosh\theta} .$$

VI.

26. Limitandomi al caso delle superficie ipercicliche a flessione costante applicherò ora i risultati del § II, per cercare per ogni superficie iperciclica una serie di tali superficie che la contenga e faccia parte di un sistema triplo ortogonale.

Dalle ricerche del Cayley (\*) è noto che la distanza infinitesima  $\rho$  fra due superficie consecutive  $S, S'$  di un sistema di superficie, al quale possano associarsene altri due ortogonali al primo e fra loro, soddisfa ad un'equazione alle derivate parziali seconde, che, se l'elemento lineare è riferito alle linee di curvatura  $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}$  e prende la forma

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

è la seguente :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} .$$

Ma perchè le superficie siano ipercicliche a flessione costante è necessario che i segmenti infinitesimi normali alle linee  $v$ , e perciò anche quelli normali alla superficie, soddisfino all'equazione trovata nel § II

$$\rho'' + \frac{\rho}{R} = 0 \qquad \text{essendo} \qquad \rho = \epsilon f ,$$

ossia, se  $R = 1$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} + \rho = 0$$

Ricordando la forma dell'elemento lineare per le superficie ipercicliche a flessione costante, dovremo dunque cercare le soluzioni comuni alle due equazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \text{tang } \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} + \rho &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(\*) Salmon. Geometrie des Raumes.

Ma  $ds$  rappresenta l'elemento di arco della linea  $v = \text{cost.}$  e perciò

$$ds_v = \frac{\partial \theta}{\partial u} du$$

e

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} = \frac{\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2}.$$

Quindi le equazioni che dobbiamo studiare, diventano

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \text{tang } \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^3 = 0. \end{array} \right.$$

27. Per trovare le soluzioni comuni alle (1) mi servirò di un metodo dato dal prof. Bianchi nella Nota citata al § precedente. Egli studia il caso in cui le due equazioni

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

$$F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

(vedi § preced.) sieno risolvibili rispetto a  $s$  e a  $t$ , talchè si abbia

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \psi_1(x, y, z, p, q, r) \\ t = \psi_2(x, y, z, p, q, r). \end{array} \right.$$

Allora, se s'introducono le notazioni

$$r(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial z} + r \frac{\partial \psi}{\partial p} + \psi_1 \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

$$\rho(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y} + q \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi_1 \frac{\partial \psi}{\partial p} + \psi_2 \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

e accade che si abbia identicamente

$$(3) \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right)^2$$

il prof. Bianchi ha dimostrato che deve esistere la relazione :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(4) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \cdot r(\psi_1) = r(\psi_2) - \rho(\psi_1).$$

E se questa relazione non è identica in  $x, y, z, p, q, r$ , potremo insieme colle (2) dedurne  $p$  e  $q$ . Dovendo allora essere

$$dz = p dx + q dy,$$

quando questa soddisfi alla condizione d'integrabilità, otterremo  $z$  in funzione di  $x, y$ , e di una costante arbitraria.

28. Se, per servirci di questi risultati, nel caso nostro, poniamo

$$\rho = z, \quad v = x, \quad u = y, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial u} = q$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = s, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = r, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = t$$

le (1) diventano

$$\left\{ \begin{aligned} t \frac{\partial \theta}{\partial x} - q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + z \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 &= 0 \\ s \frac{\partial \theta}{\partial x} - q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + p \operatorname{tang} \theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dalle quali si deduce :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} s = \psi_1 &= q \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial \theta}{\partial y}} - p \operatorname{tang} \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ t = \psi_2 &= q \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}}{\frac{\partial \theta}{\partial y}} - z \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

E siccome la (3) è identicamente verificata, come si può facilmente vedere, ci serviremo della relazione (8), che in questo caso, con semplici riduzioni, diventa

$$z \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \operatorname{tang} \theta = 0$$

ossia

www.libtool.com.cn

$$(6) \quad q = z \cot \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Derivando rispetto ad  $x$  si ha :

$$s = z \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - z \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right).$$

E confrontando colla prima delle (9), deve essere :

$$p \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} - z \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = -p \tan \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

da cui

$$(7) \quad p = z \cot \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Avremo dunque

$$dz = z \cot \theta d\theta.$$

Quest'equazione s'integra subito, e ci dà :

$$\log z = \log \sin \theta d\theta + \log c$$

e perciò

$$z = \rho = c \sin \theta.$$

La distanza infinitesima fra due superficie consecutive del sistema è dunque determinata sempre ed in modo unico. E potremo dire :

*Ogni superficie iperciclica a flessione costante individua sempre ed in modo unico un sistema triplo ortogonale di cui fa parte.*

E poichè le superficie ipercicliche provengono appunto dai sistemi tripli di Weingarten, è confermato così il seguente teorema, dedotto per ben altra via dal Prof. Bianchi.

*Ogni superficie iperciclica a flessione costante individua un sistema triplo ortogonale di Weingarten a flessione costante cui essa appartiene.*

Pisa 1887.

AGGIUNTE AD UNA MEMORIA DEL SIG. KUMMER

N O T A

DI

GIULIO GIULIANI.



1. La funzione definita dall'integrale

$$z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tang} \omega + n \omega \right) d\omega$$

soddisfa (Kummer, *De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis. Giorn. di Crelle*, vol. 17) alla

$$(1) \quad h\alpha \frac{d^2 z}{d\alpha^2} - \frac{1}{2}(h-1) \frac{dz}{d\alpha} - (\alpha + 2n) z = 0.$$

Anche l'integrale

$$\int_0^{\pi} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \omega + n \omega \right) d\omega$$

soddisfa alla (1); però quest'integrale, se  $h-1$  ed  $n$  sono tutti e due pari o tutti e due dispari è il doppio dell'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \omega + n \omega \right) d\omega,$$

se  $h-1$  è pari ed  $n$  dispari, o  $h-1$  dispari ed  $n$  pari è eguale a zero, come

può dimostrarsi facilmente scomponendolo nei due

www.ibtool.com.cn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega + n\omega \right) d\omega$$

e

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega + n\omega \right) d\omega$$

e sostituendo nel secondo a  $\omega$ ,  $\pi - \omega$ .

Ponendo ora

$$U_n(h, x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega d\omega$$

$$V_n(h, x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{sen} n\omega d\omega$$

si avrà  $z = U_n(h, x) - V_n(h, x)$ . Le due funzioni  $U_n$  e  $V_n$  soddisfano alla stessa equazione differenziale del quarto ordine.

Abbiamo intanto

$$d \left( \cos^{h-1} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega \right) = -(h-1) \cos^{h-2} \omega \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega d\omega$$

$$+ \frac{x}{2} \cos^{h-2} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega d\omega - n \cos^{h-1} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{sen} n\omega d\omega$$

e da questa, integrando tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$0 = -(h-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-2} \omega \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega d\omega +$$

$$+ \frac{x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-2} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega d\omega - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{sen} n\omega d\omega$$

o

$$(2) \quad 2(h-1) \frac{dU_n(h, x)}{dx} + \frac{x}{2} \cdot U_n(h-2, x) - n V_n(h, x) = 0.$$

Analogamente

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$d \left( \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{sen} n \omega \right) = -(h-1) \cos^{h-2} \omega \operatorname{sen} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{sen} n \omega \, d\omega - \\ - \frac{x}{2} \cos^{h-3} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{sen} n \omega \, d\omega + n \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{cos} n \omega \, d\omega.$$

Integrando tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$  e sostituendo agli integrali i loro valori espressi per le U e V

$$(3) \quad -2(h-1) \frac{dV_n(h, x)}{dx} - \frac{x}{2} V_n(h-2, x) + n U_n(h, x) = 0$$

ora

$$\frac{d^2 U_n(h, x)}{dx^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-3} \omega \operatorname{sen}^2 \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{cos} n \omega \, d\omega = \\ = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-3} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{cos} n \omega \, d\omega + \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{cos} n \omega \, d\omega = \\ = -\frac{1}{\frac{1}{2}} U_n(h-2, x) + \frac{1}{\frac{1}{2}} U_n(h, x).$$

La (2) diviene in conseguenza

$$(4) \quad 2x \frac{d^2 U_n(h, x)}{dx^2} - 2(h-1) \frac{dU_n(h, x)}{dx} - \frac{1}{2} x U_n(h, x) + n V_n(h, x) = 0.$$

Analogamente

$$\frac{d^2 V_n(h, x)}{dx^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} V_n(h-2, x) + \frac{1}{\frac{1}{2}} V_n(h, x)$$

e così abbiamo sostituendo nella (3),

$$(5) \quad 2x \frac{d^2 V_n(h, x)}{dx^2} - 2(h-1) \frac{dV_n(h, x)}{dx} - \frac{x}{2} V_n(h, x) + n U_n(h, x) = 0.$$

Dalle (4) e (5) ritroviamo, come è naturale, che la  $U_n(h, x) - V_n(h, x)$  soddisfa alla (1). Dalla (4) abbiamo, indicando  $V_n(h, x)$  e  $U_n(h, x)$  più semplicemente

con  $V_n$  e  $U_n$ , [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$V_n = \frac{1}{n} \left\{ -2x \frac{d^2 U_n}{dx^2} + 2(h-1) \frac{dU_n}{dx} + \frac{x}{2} U_n \right\}$$

$$\frac{dV_n}{dx} = \frac{1}{n} \left\{ -2x \frac{d^3 U_n}{dx^3} + 2(h-2) \frac{d^2 U_n}{dx^2} + \frac{x}{2} \frac{dU_n}{dx} + \frac{1}{2} U_n \right\}$$

$$\frac{d^2 V_n}{dx^2} = \frac{1}{n} \left\{ -2x \frac{d^4 U_n}{dx^4} + 2(h-3) \frac{d^3 U_n}{dx^3} + \frac{x}{2} \frac{d^2 U_n}{dx^2} + \frac{dU_n}{dx} \right\}$$

e sostituiti questi valori nella (5)

$$(6) \quad -4x^2 \frac{d^4 U_n}{dx^4} + 8(h-2)x \frac{d^3 U_n}{dx^3} + 2\{x^2 - 2(h-1)(h-2)\} \frac{d^2 U_n}{dx^2} \\ - 2x(h-2) \frac{dU_n}{dx} + \left(n^2 + 1 - h + \frac{x^2}{4}\right) U_n = 0.$$

Dalla forma delle (4) e (5) si deduce subito che anche la  $V_n$  soddisfa alla (6), la quale ha quindi per integrale completo  $AU_n + BV_n$ , con A e B costanti arbitrarie.

Può aversi facilmente anche lo sviluppo in serie di  $U_n$  e  $V_n$ . Abbiamo infatti (Kummer - *mem. cit. formola (24)*)

$$(7) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega + n\omega \right) d\omega = U_n - V_n =$$

$$= \frac{\pi \Gamma(h-1) e^{-\frac{x}{2}} \varphi \left( \frac{n-h+1}{2}, 1-h, x \right)}{2^h \Gamma \left( \frac{h-n+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{h+n-1}{2} \right)} - \frac{\pi \cos \frac{h-n}{2} \pi x^h e^{-\frac{x}{2}} \varphi \left( \frac{n+h+1}{2}, 1+h, x \right)}{2^h \operatorname{sen} h\pi \Gamma(h)}$$

dove  $\Gamma(m)$  è il secondo integrale euleriano e

$$\varphi(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Cambiando nella precedente  $n$  in  $-n$ ,  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(8) \quad U_n + V_n = \frac{\pi \Gamma(h-1) e^{-\frac{x}{2} \varphi} \left( \frac{1-n-h}{2}, 1-h, x \right)}{2^h \Gamma\left(\frac{h+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{h-n+1}{2}\right)} -$$

$$- \frac{\pi \cos \frac{h+n}{2} \pi \alpha^h e^{-\frac{x}{2} \varphi} \left( \frac{h-n+1}{2}, 1+h, x \right)}{2^h \operatorname{sen} h\pi \Gamma(h)}.$$

Le (7) e (8), che valgano per  $h$  frazionario, ci determinano  $U_n$  e  $V_n$ .

Nel caso poi di  $n$  pari e  $h$  dispari, o di  $n$  dispari ed  $h$  pari, si riducono gli integrali che danno  $U$  e  $V$  ad altri integrali noti. Infatti sviluppando  $\cos n\omega$  colla formola

$$2 \cos n\omega = (2 \cos \omega)^n - \frac{n}{1} (2 \cos \omega)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2 \cos \omega)^{n-4} - \dots$$

l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega \, d\omega$$

si riduce alla somma d'integrali della forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^s \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \, d\omega.$$

Facendo  $\operatorname{tang} \omega = \varphi$ , si ha

$$(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^s \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \, d\omega = \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{x}{2} \varphi \right) \frac{d\varphi}{(1+\varphi^2)^{\frac{s+2}{2}}}.$$

dove per l'ipotesi fatte  $\frac{s+2}{2}$  è un numero intero. Così colla formola

$$\operatorname{sen} n\omega = \operatorname{sen} \omega \left[ (2 \cos \omega)^{n-1} - \frac{n-2}{1} (2 \cos \omega)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} (2 \cos \omega)^{n-5} - \dots \right]$$

l'integrale

www.libtool.com.cn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \operatorname{sen} n\omega \, d\omega$$

è ridotto alla somma d'integrali della forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^s \omega \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) d\omega ,$$

o,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{s+1} \omega \operatorname{tang} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) d\omega .$$

Facendo anche qui  $\operatorname{tang} \omega = \varphi$  si ha

$$(\beta) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{s+1} \omega \operatorname{tang} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) d\omega = \int_0^{\infty} \varphi \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \varphi \right) \frac{d\varphi}{(1+\varphi^2)^{\frac{s+3}{2}}}$$

essendo  $\frac{s+3}{2}$  un numero intero. L'integrale del secondo membro della ( $\alpha$ ) è dato dal Serret alla pag. 199 del suo *Calcul Integral*. Tanto quello del secondo membro della ( $\alpha$ ), come quello del secondo membro della ( $\beta$ ) sono dati dal signor Bierens de Haan, alla pag. 570 della *Exposé de la théorie des propriétés des formules des transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales*, e sotto forma di serie e di derivata della funzione  $e^{-\frac{x}{2}}$ .

Il caso di  $n$  dispari ed  $h$  dispari ed  $n$  pari ed  $h$  pari si riducono ai precedenti scrivendo  $\cos^{h-1} \omega = \cos^{h-2} \omega \cos \omega$  e facendo uso delle formole che trasformano  $\operatorname{sen} x \operatorname{cos} y$ ,  $\cos x \operatorname{cos} y$  in somme di seni o coseni.

2. Aggiungiamo qualche altra proprietà delle funzioni  $U_n$  e  $V_n$ . Abbiamo (Dini *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche*, pag. 112) tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega' \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega' \right) d\omega' + \\ &+ \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \cos 2n\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega' \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega' \right) \cos 2n\omega' d\omega' \end{aligned}$$

e in conseguenza in quest'intervallo

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(9) \quad \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) = \frac{2}{\pi} U_0 + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} U_{2n} \cos 2n\omega$$

e da questa per  $\omega = 0$ ,

$$1 = \frac{2}{\pi} U_0 + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} U_{2n}$$

e per  $\omega = \frac{\pi}{4}$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{2^{\frac{h+1}{2}}}{\pi} U_0 + \frac{2^{\frac{h+3}{2}}}{\pi} \{ -U_4 + U_8 \dots \}$$

Analogamente abbiamo tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$

$$(10) \quad \cos^{h-1} \omega \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) = \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} V_{2n} \operatorname{sen} 2n\omega$$

e da questa per  $\omega = \frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{2^{\frac{h+3}{2}}}{\pi} \{ V_2 - V_6 + V_{10} - V_{14} + \dots \}.$$

Le due funzioni  $U_n$  e  $V_n$  tendono al limite zero per  $n = \infty$ ; questa proprietà può dedursi per le funzioni  $U_n$  e  $V_n$  con indice pari dalle (9) e (10) (Riemann *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* § 10). Per tutte poi può ripetersi la seguente dimostrazione analoga a quella già citata del Riemann. Consideriamo un valore speciale di  $n$  e sia  $p \frac{\pi}{n}$  il multiplo di  $\frac{\pi}{n}$  immediatamente inferiore o eguale a  $\frac{\pi}{2}$ . Se  $n = 2m$  o  $n = 2m + 1$  sarà sempre  $p = m$ , ma mentre nel primo caso  $p \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$ , nel secondo  $p \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$ , dimo-  
 dochè sarà

$$U_n = t_1 + t_2 + \dots + t_m + \int_{m \frac{\pi}{n}}^{m \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n\omega \, d\omega$$

dove è

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$I_s = \int_{(s-1)\frac{\pi}{n}}^{s\frac{\pi}{n}} \cos^{h-1} \omega \cos\left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \omega\right) \cos n\omega \, d\omega$$

e l'ultimo integrale mancherà se  $n = 2m$ .

Ora abbiamo

$$I_s = \int_{(s-1)\frac{\pi}{n}}^{(s-1)\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}} \cos^{h-1} \omega \cos\left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \omega\right) \cos n\omega \, d\omega +$$

$$+ \int_{(s-1)\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{n}} \cos^{h-1} \omega \cos\left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \omega\right) \cos n\omega \, d\omega$$

in ciascuno dei quali  $\cos n\omega$  o è sempre positivo o sempre negativo. Indicando con  $M_s$  il massimo valore e con  $m_s$  il minimo di

$$\cos^{h-1} \omega \cos\left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \omega\right)$$

nell'intervallo

$$\left[ (s-1)\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \right],$$

si ha evidentemente in valore assoluto

$$I_s < \frac{1}{n} (M_s - m_s).$$

Se vi è l'ultimo integrale si riconosce subito ch'è minore di  $\frac{\pi}{2n}$ , e se poi  $h$  è

intero e positivo, per essere allora  $\cos^{h-1} \omega < \cos \omega$ , si ha  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\int_{m \frac{\pi}{n}}^{m \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \cos n \omega \, d\omega < \int_{m \frac{\pi}{n}}^{m \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}} \cos \omega \cos n \omega \, d\omega.$$

Questo è eguale alla somma dei due integrali

$$\frac{1}{2} \int_{m \frac{\pi}{n}}^{m \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}} \cos (n+1) \omega \, d\omega \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \int_{m \frac{\pi}{n}}^{m \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}} \cos (n-1) \omega \, d\omega.$$

Il primo, ricordando che  $2m+1 = n$ , si trova eguale a

$$\frac{1}{2(n+1)} \left\{ \operatorname{sen} (m+1) \pi - \operatorname{sen} \left( m\pi + m \frac{\pi}{n} \right) \right\}$$

e quindi in valore assoluto minore di  $\frac{m \frac{\pi}{n}}{2(n+1)}$ . Da ciò che precede, e perchè se una funzione  $f(x)$  è atta all'integrazione definita nell'intervallo  $(a,b)$ , diviso questo in  $n$  intervalli parziali  $\delta_1 \dots \delta_n$  nei quali le oscillazioni della funzione siano indicate con  $D_1, D_2 \dots D_n$ , è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \delta_i D_i = 0,$$

si ha la proprietà enunciata per la  $U_n$ ; nello stesso modo potrebbe dimostrarsi che  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$ .

Dalla nota formola

$$\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos m\omega = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \omega}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega}$$

si ricava

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{1}{2} U_0 + \sum_1^n U_n = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{\omega}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} d\omega ;$$

ora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} d\omega = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} (2n+1) \omega d\omega}{\operatorname{sen} \omega} .$$

L'ultimo integrale (Dini, *lib. cit.* § 19) ha il limite  $\frac{\pi}{2}$  per  $n = \infty$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} d\omega = \pi .$$

Colla stessa trasformazione si dimostrerebbe che per  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ , si ha ancora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} d\omega = 0$$

e in conseguenza (Dini, *lib. cit.* § 25)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{\omega}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} d\omega = \\ = \pi \cos^{h-1} (+0) \cos \left( \frac{\omega}{2} \operatorname{tang} (+0) \right) = \pi . \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} U_0 + \sum_1^n U_n = \frac{\pi}{2} .$$

Cerchiamo ora la somma della serie

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(11) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) U_0 dx + \sum_1^{\infty} \int_0^1 f(x) U_n dx$$

essendo  $f(x)$  tale che il prodotto  $f(x) U_n$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ) sia atto all'integrazione definita tra 0 e 1. Abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) U_0 dx + \sum_1^n \int_0^1 f(x) U_n dx = \\ & \int_0^1 f(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1} \omega \cos \left( \frac{x}{2} \operatorname{tang} \omega \right) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} d\omega dx. \end{aligned}$$

e passando al limite per  $n = \infty$ , per le osservazioni precedenti, abbiamo che la somma della serie è  $\frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) dx$ .

Se ne deduce subito che

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} \int_0^1 f'(xn) dn = \frac{\pi}{2} (f(x) - f(0)) = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(xn) U_0(h, n) dn + \sum_1^{\infty} \int_0^1 f'(xn) U_n(h, n) dn. \end{aligned}$$

dove con  $f'(xn)$  si è indicata la derivata prima di  $f(xn)$  rispetto ad  $n$ , purchè il prodotto  $f'(xn) U_n(h, n)$  ( $n = 0, 1 \dots$ ) sia atto all'integrazione tra 0 e 1.

3. La (1) colla trasformazione  $z = e^{-\frac{x}{2}} y$ , diviene

$$(12) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} - (h-1+x) \frac{dy}{dx} - \left( \frac{n-h+1}{2} \right) y = 0$$

e questa ammette i due integrali particolari (Kummer, *mem. cit.*)

$$\varphi \left( \frac{n-h+1}{2}, 1-h, x \right), \quad x^h \varphi \left( \frac{n+h+1}{2}, 1+h, x \right).$$

La  $\varphi(\alpha, \beta, x)$  è convergente in egual grado e incondizionatamente dall'ordine dei termini anche per qualunque valore della  $x$  purchè finito, e lo stesso è della

serie ipergeometrica  $F\left(\alpha, m, \beta, \frac{x}{m}\right)$  anche per valori di  $m$  superiori a un numero scelto arbitrariamente grande e positivo purchè finito. Possiamo concluderne (cfr. la mia Nota. *Sopra la dimostrazione di una formola di analisi. Giorn. di Matem.* vol. XXII) che

$$\varphi(\alpha, \beta, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F\left(\alpha, m, \beta, \frac{x}{m}\right).$$

Dalla formola (Kummer, *Ueber die hypergeometrische Reihe*, sez. IV. *Giornale di Crelle*, vol. 15)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} (1-xv)^{-\alpha} dv$$

si ottiene, cambiando  $x$  in  $\frac{x}{m}$ ,  $\alpha$  in  $m$  e passando al limite per  $m = \infty$ , ciò che può farsi per le osservazioni precedenti,

$$\varphi(\beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} e^{xv} dv.$$

Le due soluzioni particolari della (12) saranno dunque date sotto forma d'integrale dalle

$$\frac{\Gamma(1-h)}{\Gamma\left(\frac{n-h+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-h-n}{2}\right)} \int_0^1 e^{xv} v^{\frac{n-h+1}{2}} (1-v)^{-\frac{n-h+1}{2}} dv$$

$$\frac{\Gamma(1+h)}{\Gamma\left(\frac{n+h+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+h-n}{2}\right)} \int_0^1 e^{xv} v^{\frac{n+h-1}{2}} (1-v)^{\frac{h-n-1}{2}} dv$$

Queste due ultime espressioni non valgono però in generale a causa delle funzioni che possono divenire infinite sotto il segno integrale a seconda dei valori di  $n$  e di  $h$ .

Faremo ora qualche osservazione nel caso di  $n = h$ . La (12) diviene in questa ipotesi

$$(13) \quad x \frac{d^2y}{dx^2} - (n-1+x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0$$

che ha per soluzioni particolari

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 1-n, x\right) \quad \text{e} \quad \varphi_n(x) = x^n \varphi\left(\frac{2n+1}{2}, 1+n, x\right).$$

In questo caso il secondo integrale diviene

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 e^{xv} v^{\frac{2n-1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv$$

ed è finito, perchè la funzione  $(1-v)^{-\frac{1}{2}}$  è per  $v=1$  infinita di ordine  $\frac{1}{2}$ . Ricorrendo che  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  e che (Serret, *Calcul Intégral*, § 519)

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n)}{2^{2n-1}}$$

si ha

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}$$

e poichè

$$\Gamma(p) = \pi(p-1) = 1 \cdot 2 \dots (p-1),$$

$$\varphi_n(x) = \frac{2^{2n-1}}{\pi} \frac{\pi(n) \pi(n-1)}{\pi(2n-1)} x^n \int_0^1 e^{xv} v^{\frac{2n-1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv.$$

Fatte poi le riduzioni nella serie che dà  $\varphi_n(x)$ , abbiamo ancora

$$\varphi_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+3) \dots (2n+2s-2)}{(n+1)(n+2) \dots (n+s)} \frac{x^{n+s}}{\pi(s)}.$$

È facile ora dimostrare che la  $\varphi_n(x)$  per  $n=\infty$  diviene infinitesima ( $0 < |x| < 1$ ) dell'ordine di  $x^n$  o di ordine superiore ed ha un limite inferiore ad  $e$  (base dei logaritmi naturali) per  $x=1$ . Indicando infatti con  $E$  una quantità eguale ad  $e^x$  per  $x$  positivo e a  $1$  per  $x$  negativo, e ad  $e$  per  $x=1$ , si ha

$$\varphi_n(x) < \frac{2^{2n-1}}{\pi} \frac{\pi(n) \pi(n-1)}{\pi(2n-1)} x^n E \int_0^1 v^{\frac{2n-1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv.$$

Osservando che l'integrale del secondo membro si può anche scrivere

$$\int_0^1 v^{\frac{2n-1}{2}} (1-v)^{\frac{1}{2}-1} dv,$$

e così è ridotto al primo integrale euleriano, si ha

$$\varphi_n(x) < \frac{2^{2n-1}}{\pi} \frac{\pi(n) \pi(n-1)}{\pi(2n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+2}{2}\right)} E x^n$$

e riducendo ed esprimendo le  $\Gamma$  per le  $\pi$ , abbiamo finalmente

$$\varphi_n(x) < E x^n$$

che prova la proprietà enunciata per  $|x| \leq 1$ . Per  $|x| > 1$  si può dedurre subito anche dall'espressione in serie di  $\varphi_n(x)$  che essa diviene infinita dell'ordine  $n$ .

Ne deduciamo che la serie  $\sum_0^\infty \varphi_n(x)$  è convergente in egual grado per  $|x| < 1$  ed ha una somma inferiore a  $\frac{E}{1-x}$ . Ponendo poi

$$a_n = \frac{2^{2n-1}}{\pi} \frac{\pi(n) \pi(n-1)}{\pi(2n-1)}$$

e supponendo  $|x| < 1$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_0(x)}{a_0} + \frac{\varphi_1(x)}{a_1} + \dots + \frac{\varphi_n(x)}{a_n} &= \int_0^1 \frac{e^{xv} v^{-\frac{1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv}{1-xv} \\ &- x^n \int_0^1 \frac{e^{xv} v^{\frac{2n-1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv}{1-xv} \end{aligned}$$

ed essendo zero, come è facile a dimostrare, il limite per  $n = \infty$  del secondo integrale del secondo membro,

$$\sum_0^\infty \frac{\varphi_n(x)}{a_n} = \int_0^1 \frac{e^{xv} v^{-\frac{1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv}{1-xv}$$

4. Se  $F(x)$  è una funzione regolare nell'intorno del posto  $x=0$ , abbiamo (Pincherle, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche* § II, *Mem. dell'Acc. di Bologna, Serie IV, tomo III*) nell'intorno del posto stesso

$$F(x) = \sum_0^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

essendo, se

$$F(x) = \sum_0^{\infty} h_n x^n$$

$$(14) \quad c_n = h_n - h_{n-1} d_1^{(n)} + h_{n-2} d_2^{(n)} - \dots + (-1)^n h_0 d_n^{(n)}$$

con

$$d_r^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{n-r,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-r,2} & a_{n-r+1,1} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-r,r} & a_{n-r+1,r-r} & \dots & \dots & a_{n-1,1} \end{vmatrix}$$

dove, posto  $\varphi_n(x) = x^n f_n(x)$ , si è con  $a_{r,s}$  indicato il coefficiente di  $x^s$  nella funzione  $f_r(x)$ .

Per  $|y| > |x|$  abbiamo in conseguenza

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Le  $c$  sono in questo caso funzioni della  $y$ , che indicheremo con  $\psi_n(y)$  e che chiameremo funzioni associate delle  $\varphi_n(x)$ , e per essere

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} + \dots$$

abbiamo

$$\psi_n(y) = \frac{1}{y^{n+1}} - \frac{d_1^{(n)}}{y^n} + \dots + (-1)^n \frac{d_n^{(n)}}{y}.$$

Imitando le dimostrazioni date dal sig. Neumann (*Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen*, § 9) per le funzioni  $I_n$  e  $O_n$ , si hanno le seguenti re-

lezioni

www.libtool.com.cn

$$\int_C \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_C \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_C \varphi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

nelle quali  $C$  è una linea chiusa del piano della variabile complessa  $x$  che non racchiude l'origine e  $C'$  una linea che può contenere nel suo interno anche il punto  $x=0$ . Per  $n > m$ , abbiamo anche

$$\int_{C'} \varphi_n(x) \psi_m(x) dx = 0$$

e per  $n = m$ 

$$\int_{C'} \varphi_n(x) \psi_n(x) dx = 2\pi i.$$

Determinate così le funzioni  $\psi_n(x)$  e le loro principali proprietà, abbiamo, se  $f(x)$  è funzione di  $x$  regolare entro un circolo  $C$  col centro nell'origine e di contorno  $s$ ,

$$f(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(x)}{x-x'} dx = \frac{1}{2\pi i} \sum_0^{\infty} \varphi_n(x') \int_s f(x) \psi_n(x) dx$$

e nello spazio compreso fra due circoli concentrici  $C$  e  $C'$ .

$$f(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(x)}{x-x'} dx - \frac{1}{2\pi i} \int_{s'} \frac{f(x)}{x-x'} dx.$$

Se  $s$  è la circonferenza di raggio maggiore e  $s'$  quella di raggio minore nel primo integrale è  $|x| > |x'|$  e nel secondo  $|x| < |x'|$ , e quindi

$$f(x') = \frac{1}{2\pi i} \sum_0^{\infty} \left( \varphi_n(x') \int_s f(x) \psi_n(x) dx + \psi_n(x') \int_{s'} f(x) \varphi_n(x) dx \right).$$

Devo avvertire che nella mia nota « Sopra certe funzioni analoghe alle funzioni cilindriche » pubblicata nel vol. XXV del Giornale di Matematiche, per un errore di calcolo ho detto che la funzione

$$\int_0^{\pi} e^{ix^k \cos^k \omega} \cos n\omega d\omega$$

soddisfa alla

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(\alpha) \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left( h^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) f = 0$$

ciò che non è. Aggiungerò a questo proposito che l'equazione

$$(\beta) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} - a^2 w - \left( p + \frac{1}{2} \right) \frac{w}{x^2} = 0$$

che si riduce all'equazione differenziale delle funzioni di Bessel per

$$a = \sqrt{-1} \quad , \quad p = n - \frac{1}{2}$$

e alla (α) per

$$a = h \sqrt{-1} \quad e \quad p = n - \frac{1}{2}$$

ammette i due integrali particolari

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(-p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-p)} x^{-p-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{p-1} e^{asx} ds$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} x^{p+\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 (1-s^2)^p e^{asx} ds.$$

Le funzioni V si riducono alle funzioni di Bessel  $I_n(x)$ , perchè essendo

$$I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{x^n}{s^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{iux} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} du$$

si ricava

$$V = \left(\frac{2}{ia}\right)^{p+\frac{1}{2}} \Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right) I_{p+\frac{1}{2}}(aix).$$

Questi risultati sono tolti dalla memoria del sig. Glaisher, *On Riccati's Equation and its Transformations*, *Philosophical Transactions*, vol. 172.

Lucca, Gennaio 1888.

## SOPRA UN TEOREMA DI GEOMETRIA AD $n$ DIMENSIONI

NOTA

DI

M. P I E R I.

---

1. Mediante il principio di corrispondenza relativo ad uno spazio lineare qualunque ad  $n$  dimensioni (\*), si può dare una nuova dimostrazione del teorema :

« *Due varietà algebriche contenute in uno spazio lineare  $S_n$  ad  $n$  dimensioni hanno a comune in generale (supposto che la somma delle loro dimensioni sia  $\geq n$ ) una varietà d'ordine eguale al prodotto dei loro ordini* ».

È noto che questa proposizione, la quale costituisce un'importante generalizzazione del teorema di Bezout ( $n = 2$ ), fu dimostrata sinteticamente dal Chasles nel caso di  $n = 2$ , e dal Fouret nel caso di  $n = 3$ , per mezzo del principio di corrispondenza relativo alle forme di prima specie (\*\*); ma nel caso di  $n$  qualunque non pare che si conosca di essa alcun'altra dimostrazione all'infuori di quella analitica dovuta all'Halphen (\*\*\*)).

---

(\*) Il principio di corrispondenza in uno spazio di quante si vogliano dimensioni fu oggetto d'una mia Nota, pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (Marzo 1887). Per altro la medesima generalizzazione del principio di Chasles era già stata ottenuta dal compianto Prof. E. Caporali. V. i suoi frammenti postumi sulla teoria degli spazi a più dimensioni, a pag. 327 della recente pubblicazione: « *Memorie di Geometria* di E. Caporali » Napoli 1888, ed. Pellerano.

(\*\*) V. Fouret « *Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface*. Bulletin de la Société Mathématique de France, Vol. I, pag. 258.

(\*\*\*) Halphen. *Recherches de géométrie à  $n$  dimensions*. Bull. d. l. Soc. Math. d. France, Vol. II, pag. 34.

La dimostrazione seguente è sintetica; le premesse analitiche su cui è fondata possono ridursi al teorema che « un'equazione algebrica di grado  $n$  ha  $n$  (oppure infinite) radici » ed ai principii intorno alle proiezioni e intersezioni di spazi lineari.

2. È chiaro che basterà dimostrare la proposizione: « Due varietà  $V_p^\mu, V_q^\nu$  giacenti in uno spazio  $S_n$  e tali, che la somma  $p + q$  delle loro dimensioni sia eguale ad  $n$ , hanno a comune in generale un numero finito di punti eguale al prodotto  $\mu\nu$  dei loro ordini » poichè da questo caso si passa facilmente a quello di  $p + q > n$ .

A tal uopo ammetteremo questa proposizione come vera nello spazio  $S_{n-1}$  e in tutti gli spazi inferiori. Si osservi che tale ipotesi trae seco la conseguenza, che « se  $p + q > n$ , le due varietà  $V_p^\mu, V_q^\nu$  giacenti in  $S_n$  hanno a comune una varietà d'ordine  $\mu\nu$  ».

Inoltre supporremo noto il principio di corrispondenza, espresso dalla formula:

$$N_{(k)} = \alpha_0 + \alpha_0' + \sum_{i=1}^{i=k-1} \alpha_i,$$

dove  $\alpha_0, \alpha_0'$  denotano rispettivamente il numero dei punti, che in due spazi  $S_k, S'_k$  sovrapposti corrispondono (algebricamente) ad un punto del primo e del secondo spazio (\*),  $\alpha_i$  è l'ordine della varietà ad  $i$  dimensioni che corrisponde ad un  $S_i$  del primo, ed  $N_{(k)}$  il numero dei punti uniti (supposti in numero finito).

3. Ciò premesso si dimostra subito che: « Entro un  $S_{n-1}$ , le rette che incontrano due  $S_{i-1}$  e due  $S_{n-i-1}$ , indipendenti fra loro, sono in numero di  $i$ , postochè

$$i - 1 \leq n - i - 1.$$

Se

$$i - 1 = n - i - 1, \quad \text{onde} \quad 2i - 1 = n - 1,$$

gli spazi  $S_i$  che proiettano i punti d'uno qualunque dei quattro  $S_{i-1}$  da due dei rimanenti determinano sul quarto una corrispondenza univoca (omografia), per la quale si ha evidentemente

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{i-2} = 1.$$

e quindi ( $n \cdot 2$ )

$$N_{(i-1)} = i.$$

---

(\*) S' intende qui per *punto* un elemento generatore di natura arbitraria, e per  $S_k$  una forma fondamentale (lineare) di specie  $k$ .

Se

www.libtool.com.cn

$$i - 1 < n - i - 1,$$

onde

$$2i - 1 < n - 1,$$

allora quell'  $S_{2i-1}$  che congiunge i due  $S_{i-1}$ , taglierà i due  $S_{n-i-1}$  secondo due  $S_{i-1}$ , epperò si ritorna al caso precedente.

Sostituendo ad uno degli  $S_{i-1}$  una varietà  $V_{i-1}^\mu$ , e poscia ad uno degli  $S_{n-i-1}$  una varietà  $V_{n-i-1}^\nu$ , per mezzo di un ragionamento notissimo si deduce tosto che:  
« Entro un  $S_{n-1}$  le rette che incontrano due spazi  $S_{i-1}$ ,  $S_{n-i-1}$  e due varietà

$$V_{i-1}^\mu, V_{n-i-1}^\nu \text{ (con } i - 1 \leq n - i - 1 \text{)}$$

sono in numero di  $i \times \mu \times \nu$  ».

4. Consideriamo ora in  $S_n$  le due varietà  $V_p^\mu, V_q^\nu$ , con  $p + q = n$  (n. 2); e sia  $p \leq q$ . Prendiamo nel medesimo spazio un  $S_{n-p-1}$  ed un  $S_{p-1}$  fissi. Tra gli  $\infty^p S_{n-p}$  che passano per quell'  $S_{n-p-1}$  (i quali generano una forma fondamentale di specie  $p$ ) è facile stabilire una corrispondenza algebrica che conduce alla determinazione dei punti comuni alle due varietà  $V^\mu, V^\nu$ .

Infatti sia  $\Pi$  uno qualunque di questi  $S_{n-p}$ : esso taglierà la varietà  $V_p^\mu$  in  $\mu$  punti. Ora i  $\mu$  spazi  $S_p$  che proiettano questi punti dall'  $S_{p-1}$  fisso hanno a comune con l'altra varietà  $V_q^\nu$   $\mu\nu$  punti, i quali sono proiettati dall'  $S_{n-p-1}$  mediante  $\mu\nu$  spazi  $\Pi'$  corrispondenti a  $\Pi$ . Viceversa, un  $S_{n-p}$  preso come spazio  $\Pi'$  taglia  $V_q^\nu$  secondo una varietà d'ordine  $\nu$ , la quale è proiettata dall'  $S_{p-1}$  fisso mediante un  $S_{p-1}$  — cono d'ordine  $\nu$  avente a comune  $\mu\nu$  spazi generatori  $S_p$  con l'  $S_{p-1}$  — cono d'ordine  $\mu$ , che proietta dallo stesso sostegno la varietà  $V_p^\mu$  (n. 2). Dunque uno spazio  $\Pi'$  corrisponde a  $\mu\nu$  spazi  $\Pi$ .

Agli spazi  $\Pi$  generanti una forma fondamentale di specie  $r$  ( $r < p$ ) corrispondono gli spazi  $\Pi'$  formanti un  $S_{n-p-1}$  — cono d'ordine  $\mu\nu$ . Invero quegli  $\infty^r$  spazi  $\Pi$  occupano un  $S_{n-p+r}$ , il quale ha a comune con  $V_p^\mu$  una varietà  $V_r^\mu$ ; ora l'  $S_{p-1}$  — cono d'ordine  $\mu$  proiettante questa varietà dall'  $S_{p-1}$  fisso sega (n. 2)  $V_q^\nu$  secondo una varietà  $V_r^{\mu \cdot \nu}$ , che è proiettata dall'  $S_{n-p-1}$  mediante un cono dello stesso ordine  $\mu\nu$ , ecc.

Rispetto alla corrispondenza stabilita si avrà dunque :

$$\alpha_0 = \alpha'_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{p-1} = \mu\nu,$$

e conseguentemente esisteranno (n. 2) :

$$N_{(p)} = (p + 1) \mu\nu$$

coincidenze fra spazi  $\Pi$  e  $\Pi'$  corrispondenti. Un certo numero di queste coincidenze è fornito dalle rette che incontrano i due spazi fissi  $S_{p-1}$ ,  $S_{n-p-1}$  e le due varietà  $V_p^\mu$ ,  $V_q^\nu$ . Ma queste rette giacciono tutte quante nell' $S_{n-1}$  determinato dai due spazi  $S_{p-1}$ ,  $S_{n-p-1}$ , ed il loro numero fu trovato (n. 3.) eguale a  $p\mu\nu$ . Le rimanenti  $\mu\nu$  coincidenze sono date dagli spazi  $\Pi$  che proiettano punti comuni alle date varietà  $V_p^\mu$ ,  $V_q^\nu$ . Il teorema proposto è così dimostrato in generale, poi che esso è vero (n. 1.) per  $n - 1 = 3$ .

Torino, Maggio 1888.

## DEFINIZIONE GEOMETRICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

N O T A

D I

G. P E A N O.

Il signor Halphen nel suo recente *Traité des fonctions elliptiques*, etc. . definisce geometricamente le funzioni ellittiche. Lo scopo di questa breve Nota è di dare un'altra definizione geometrica di tali funzioni, a mio credere, più semplice e più conforme alle comuni definizioni delle funzioni circolari.

Sia l'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  rispetto agli assi ortogonali  $Ox$  ed  $Oy$ . Preso un punto  $P$  dell'ellisse, si segnino sul raggio vettore  $OP$  i due punti  $M$  ed  $N$  tali che  $PM = -\frac{l}{2}$ ,  $PN = +\frac{l}{2}$ , ove  $l$  è una lunghezza data. Variando  $P$  sull'ellisse, i punti  $M$  ed  $N$  descrivono due concoidi dell'ellisse, ed il segmento  $MN$ , che giace sul raggio vettore, e il cui punto medio  $P$  descrive l'ellisse, descriverà un'area piana.

Sia  $U$  l'area descritta da  $MN$  mentre l'angolo  $POx = \alpha$  varia da  $0$  ad  $\alpha$ , ovvero mentre l'angolo eccentrico  $\theta$  (per cui  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ ) varia da  $0$  a  $\theta$ . Applicando note formule di calcolo si ricavano per  $U$  le espressioni:

$$(1) \quad U = lab \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}},$$

$$(2) \quad U = lab \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

Gli integrali che compaiono in (1) e (2) sono integrali ellittici di prima specie; perciò queste formule possono servire a definire le funzioni ellittiche.

Partendo p. e. dalla (2), supposto  $a > b$ , e fatto  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , si ha:

$$(3) \quad U = lb \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}.$$

Quindi, fatto  $u = \frac{U}{lb}$ , (ovvero, supposto  $l = b = 1$ , fatto  $u = U$ ), si ricava :

$$(4) \quad \theta = amu.$$

Dette  $x$  e  $y$  le coordinate del punto P corrispondente all'angolo eccentrico  $\theta$ ,  $r$  il suo raggio vettore, si ha :

$$(5) \quad x = a \operatorname{cn} u$$

$$(6) \quad y = b \operatorname{sn} u,$$

$$(7) \quad r = a \operatorname{dn} u.$$

Le formule (4), (5), (6), (7) che si ottengono immediatamente dalla teoria delle funzioni ellittiche, possono invece assumersi quali definizioni geometriche di tali funzioni.

Torino, 1 maggio 1888.

# SULLE CURVE OSCULATRICI

PER

GEMINIANO PIRONDINI.

## § 1.

### Linee osculatrici dello spazio.

Siano  $L, L_1$  due curve qualunque dello spazio rappresentate rispettivamente dalle equazioni :

$$\rho = \rho(s) \quad , \quad r = r(s) \quad ; \quad \rho_1 = \rho_1(s) \quad , \quad r_1 = r_1(s)$$

che ne danno il raggio di curvatura e quello di torsione in funzione dell'arco. Siano  $A, A_1$  due punti di tali linee e supponiamo che esse possano essere collocate in modo da avere in comune i punti  $A, A_1$  e gli  $n$  punti consecutivi, le curve avranno allora comuni  $n + 1$  punti consecutivi cioè un contatto dell'ordine  $n$ . Stabiliamo le condizioni analitiche di un tale contatto.

Siccome i punti  $A, A_1$  e i due loro consecutivi coincidono, dovremo avere :

$$\rho(s) = \rho_1(s) ;$$

mettendo la condizione che coincidano altri due punti successivi, avremo :

$$\rho(s + ds) = \rho_1(s + ds) \quad , \quad r(s) = r_1(s).$$

La prima, sviluppando in serie le funzioni  $\rho(s + ds)$  ,  $\rho_1(s + ds)$  e tenendo conto solamente degli infinitesimi di 1° ordine, dà :

$$\rho(s) + \frac{d\rho}{ds} ds = \rho_1(s) + \frac{d\rho_1}{ds} ds$$

e questa condizione, in causa della precedente, si riduce a :

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds} .$$

La coincidenza di quattro punti consecutivi porta dunque alle condizioni :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho = \rho_1 \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds} \quad , \quad r = r_1 .$$

Se si mette la condizione che nelle due curve coincidano cinque punti consecutivi, oltre le condizioni precedenti dovranno essere soddisfatte le altre due :

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds^2} \quad , \quad \frac{dr}{ds} = \frac{dr_1}{ds} .$$

Di modo che, procedendo con eguale metodo fino a che nelle due curve coincidano  $n + 1$  punti consecutivi, si arriva al teorema generale. « *La condizione necessaria e sufficiente perchè due curve  $L, L_1$  dello spazio possano venire disposte in modo da avere comuni i punti  $A, A_1$  e gli altri  $n$  consecutivi, cioè in modo da avere in quei punti un contatto di ordine  $n$ , è che nei punti  $A, A_1$  siano soddisfatte le seguenti  $2n - 5$  condizioni :*

$$\begin{aligned} \rho = \rho_1 \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds} \quad , \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds^2} \quad , \quad \dots \dots \dots \quad \frac{d^{n-2}\rho}{ds^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\rho_1}{ds^{n-2}} \\ r = r_1 \quad , \quad \frac{dr}{ds} = \frac{dr_1}{ds} \quad , \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r_1}{ds^2} \quad , \quad \dots \dots \dots \quad \frac{d^{n-3}r}{ds^{n-3}} = \frac{d^{n-3}r_1}{ds^{n-3}} \end{aligned}$$

Date le due linee  $L, L_1$  aventi un contatto d'ordine  $n$ , indichiamo con  $S, S_1$  i luoghi dei centri delle sfere osculatrici ; con  $R, R_1$  gli spigoli di regresso delle sviluppabili rettificanti ; con  $C, C_1$  i luoghi dei centri di curvatura ; con  $N, N_1$  le linee di stringimento delle superficie gobbe delle normali principali.

Per la coincidenza dei primi quattro punti consecutivi delle linee  $L, L_1$  le due curve  $S, S_1$  hanno comuni due tangenti consecutive, cioè tre punti consecutivi ; per ogni altra coppia dei rimanenti  $n - 3$  punti consecutivi delle linee date  $L, L_1$  che vengano a coincidere, ha luogo pure la coincidenza di un'altra coppia di punti consecutivi delle linee  $S, S_1$ , le quali hanno dunque un contatto d'ordine  $n - 1$ .

Se le curve  $L, L_1$  hanno comuni cinque punti consecutivi, le curve  $R, R_1$  hanno comuni due tangenti consecutive, cioè tre punti consecutivi comuni; nel caso generale che  $L, L_1$  abbiano comuni  $n + 1$  punti consecutivi, le  $R, R_1$  ne avranno comuni  $n - 1$ , cioè avranno un contatto d'ordine  $n - 2$ .

Le curve  $C, C_1$ , quando  $L, L_1$  abbiano un contatto di 3° ordine, hanno due punti consecutivi comuni, cioè un contatto di 1° ordine, e quindi nel caso generale le curve  $C, C_1$  avranno un contatto d'ordine  $n - 2$ .

In quanto alle linee  $N, N_1$ , basta osservare che esse hanno comuni due punti consecutivi quando  $L, L_1$  ne hanno comuni cinque ; nel caso generale che queste

abbiano comuni  $n + 1$  punti consecutivi. le linee  $N, N_1$  ne avranno comuni  $n - 2$ , cioè avranno un contatto d'ordine  $n - 3$ .

Si può dunque enunciare il teorema: « Quando due linee hanno in un punto un contatto d'ordine  $n$ , i luoghi dei centri delle sfere osculatrici hanno nel punto corrispondente un contatto d'ordine  $n - 1$ ; i luoghi dei centri di curvatura e gli spigoli di regresso delle sviluppabili rettificatrici un contatto d'ordine  $n - 2$ , e le linee di stringimento delle superficie gobbe delle normali principali un contatto d'ordine  $n - 3$  ».

Sia  $L$  una curva qualunque dello spazio e  $C$  un'elica avente con  $L$  il contatto d'ordine massimo; se  $L, C$  hanno in comune  $n + 1$  punti, si è visto che queste curve hanno comuni  $n - 2$  rette rettificatrici consecutive. Ma siccome le rette rettificatrici di  $C$  sono tutte parallele, è chiaro che generalmente una sola retta rettificatrice di  $L$  può coincidere con una retta rettificatrice di  $C$ , cioè

$$n - 2 = 1, \quad \text{d'onde} \quad n + 1 = 4.$$

Dunque « un'elica non ha generalmente con una linea qualunque dello spazio (non elica) un contatto superiore al terzo ».

Sia  $C$  una geodetica d'un cono avente con la linea  $L$   $n + 1$  punti consecutivi comuni, in questo caso le rette rettificatrici di  $C$  passano per uno stesso punto e quindi generalmente due sole rette rettificatrici di  $L$  possono coincidere colle corrispondenti di  $C$ . Dunque

$$n - 2 = 2, \quad \text{d'onde} \quad n + 1 = 5.$$

Perciò « una geodetica d'un cono non ha generalmente con una linea qualunque dello spazio (non geodetica di un cono) un contatto superiore al quarto ».

Sia  $C$  una geodetica d'un elicoide sviluppabile avente con  $L$   $n + 1$  punti consecutivi comuni; in questo caso tutte le rette rettificatrici di  $C$  sono inclinate a una retta fissa d'un angolo costante, perciò in generale tre sole rette rettificatrici consecutive di  $L$  possono coincidere colle corrispondenti rette rettificatrici di  $C$ . Abbiamo dunque

$$n - 2 = 3, \quad \text{d'onde} \quad n + 1 = 6.$$

Perciò « una geodetica d'un elicoide sviluppabile non ha generalmente con una linea qualunque dello spazio (non geodetica d'elicoide sviluppabile) un contatto superiore al quinto ».

Da quanto precede, risulta:

« Le eliche osculatrici a una curva data  $L$  in un punto sono situate sopra cilindri le cui generatrici sono parallele alla retta rettificatrice di  $L$  in quel punto ».

« Le geodetiche di coni, osculatrici a una curva data  $L$ , se hanno un cou-

*... fatto di generatrici con essa, sono situate su coni col vertice nel punto corrispondente dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L ».*

*Dalla proprietà che le generatrici del cilindro contenente un'elica osculatrice a una linea L sono parallele alle rette rettificatrici di L, deriva che l'elica osculatrice sega le generatrici del cilindro su cui è descritta sotto un angolo i tale, che*

$$\text{tang } i = \frac{r}{\rho}.$$

Se quindi chiamiamo  $\rho_0$  il raggio di curvatura della sezione retta del cilindro, nel punto di contatto avremo :

$$\rho_0 = \rho \text{ sen}^2 i = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Siccome  $\frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}$  è la porzione della normale principale di L compresa fra

questa curva e la linea di stringimento della superficie gobba delle normali principali, si potrà enunciare il teorema *« la sezione retta del cilindro contenente un'elica osculatrice a una linea qualunque L, ha il centro di curvatura, corrispondente al punto di contatto, sulla linea di stringimento della superficie gobba delle normali principali di L ».*

Questo teorema può essere generalizzato per il caso che la linea osculatrice sia una geodetica conica ; infatti nel mio scritto *Sulle linee a doppia curvatura* (questo giornale) ho dimostrato la formola :

$$R_g = \rho \text{ sen}^2 i$$

dove  $\rho$  è il raggio di curvatura di una geodetica conica,  $i$  l'angolo sotto il quale essa sega le generatrici del cono e  $R_g$  il raggio di curvatura geodetica, sulla sfera che la contiene, della sezione sferica normale del cono passante per il punto considerato.

Ora siccome il vertice del cono si trova sulla retta rettificatrice della curva osculata, si ha nel punto di contatto

$$\text{tang } i = \frac{r}{\rho} \quad \text{e quindi} \quad R_g = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Dunque *« quando una geodetica d'un cono è osculatrice in un punto A a una linea qualunque L, la sezione sferica normale del cono passante per A ha*

per raggio di curvatura geodetica sulla sfera in  $A$  il segmento di normale principale ad  $L$  compreso fra  $A$  e la linea di stringimento della superficie delle normali principali di  $L$  ».

Se una superficie è determinata da  $n + 1$  punti e la linea  $C$  appartiene a questa superficie, non potrà avere comune con una linea dello spazio  $L$  che  $n + 1$  punti al più, cioè non potrà avere con  $L$  un contatto superiore all'  $n^{\text{mo}}$ .

Per conseguenza « una linea sferica, una linea descritta sopra un cilindro di rivoluzione e una linea descritta sopra un cono di rivoluzione hanno con una linea qualunque dello spazio, non descritta rispettivamente sulle stesse superficie, un contatto che tutto al più è rispettivamente dell'ordine  $3^{\circ}$ ,  $4^{\circ}$ ,  $5^{\circ}$  ».

Siano  $L$  e  $L_1$  due curve simili, le equazioni caratteristiche di tali linee si possono mettere sotto la forma :

$$\rho = \rho(s) \quad , \quad r = r(s) \quad ; \quad \rho_1 = \frac{1}{k} \rho(ks) \quad , \quad r_1 = \frac{1}{k} r(ks)$$

essendo  $k$  una costante. Chiamando  $\sigma$  il valore di  $s$  che corrisponde ai punti delle due linee in cui esse sono a contatto, dobbiamo avere per il contatto di  $4^{\circ}$  ordine:

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{k} \rho(k\sigma) \quad , \quad \rho'(\sigma) = \rho'(k\sigma) \quad , \quad \rho''(\sigma) = k \rho''(\sigma),$$

$$r(\sigma) = \frac{1}{k} r(k\sigma) \quad , \quad r'(\sigma) = r'(k\sigma).$$

La seconda e la quinta di queste relazioni richiedono, per essere soddisfatte, che tanto  $\rho'$  quanto  $r'$  non dipendano da  $s$ , cosicchè si abbia

$$\rho = ms \quad , \quad r = ns$$

con  $m, n$  costanti. Allora risulta :

$$\rho_1 = ms \quad , \quad r_1 = ns$$

le quali dimostrano che le due curve  $L, L_1$  sono due eliche cilindro-coniche eguali.

Si conclude che « due curve simili dello spazio non possono generalmente avere fra loro un contatto superiore al terzo ».

Considerando poi le condizioni del contatto di  $3^{\circ}$  ordine

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{k} \rho(\sigma) \quad , \quad \rho'(\sigma) = \rho'(k\sigma) \quad , \quad r(\sigma) = \frac{1}{k} r(k\sigma)$$

si vede dalla seconda che per essere soddisfatta richiede che  $\rho'$  non contenga  $s$ ; dobbiamo dunque avere  $\rho = ms$  e quindi anche  $\rho_1 = ms$ .

Dunque « se due curve simili dello spazio hanno fra loro un contatto di 3° ordine, quando la loro sviluppabile osculatrice si distende sopra un piano, si trasformano in due spirali logaritmiche eguali ».

Vediamo se una curva dello spazio L può essere osculata in tutti i suoi punti da una medesima curva C non piana. Se  $\rho, r$  sono i raggi di L e

$$\rho_1 = f(s) \quad , \quad r_1 = \varphi(s)$$

quelli di C, le condizioni d'osculatione delle curve C, L in un punto corrispondente al valore s qualunque dell'arco sono :

$$\rho = f(s) \quad , \quad \rho' = f'(s) \quad , \quad \rho'' = f''(s) \quad , \quad . \quad . \quad ; \quad r = \varphi(s) \quad , \quad r' = \varphi'(s) \quad , \quad . \quad . \quad .$$

Ora se le curve osculatrici C sono eguali fra loro in tutti i punti di L, i parametri che entrano nelle funzioni  $f(s), \varphi(s)$  e dai quali dipende la forma della linea C devono essere indipendenti da s. Allora le relazioni :

$$\rho = f(s) \quad , \quad r = \varphi(s)$$

si possono considerare come le equazioni caratteristiche della curva L la quale è identica, per conseguenza, alla curva C pure rappresentata dalle stesse equazioni.

Dunque « se per una linea L dello spazio le curve osculatrici a doppia curvatura C e appartenenti a una determinata famiglia sono tutte eguali fra loro, la curva L è identica alle curve C ».

La curva  $L_1$  osculatrice di L sia a curvatura costante  $\frac{1}{k}$ ; le sole condizioni che potremo verificare circa ai raggi di curvatura e di torsione delle due curve sono :

$$k = \rho \quad , \quad r_1 = r \quad , \quad r_1' = r' \quad , \quad . \quad . \quad .$$

le quali danno un contatto generalmente non superiore al secondo.

Dunque « una curva a curvatura costante, osculando una curva qualunque, non può avere con essa un contatto superiore al secondo ».

Questa proprietà si verifica ad es. per il cerchio osculatore.

Se poi la curva  $L_1$  è a torsione costante  $\frac{1}{k}$ , non sarà possibile verificare che le seguenti relazioni :

$$\rho_1 = \rho \quad , \quad \rho_1' = \rho' \quad , \quad \rho_1'' = \rho'' \quad . \quad . \quad . \quad ; \quad k = r$$

dalle quali si deduce « una curva a torsione costante, osculando una curva qualunque, ha con questa un contatto ordinariamente di 3° ordine ».

Le due curve  $L, L$  abbiano per deformate piane una stessa curva, cioè diano luogo alla stessa linea piana quando la loro sviluppabile osculatrice si sviluppa sopra un piano; le due linee avranno la stessa curvatura e quindi generalmente non si potrà che soddisfare alle condizioni:

$$\rho_1 = \rho \quad , \quad \rho_1' = \rho' \quad , \quad \rho_1'' = \rho'' \quad . . . .$$

Quindi « due curve dello spazio aventi la medesima deformata piana si osculano con un contatto ordinariamente non superiore al secondo ».

§ 2.

Siano  $\rho, r$  il raggio di curvatura e quello di torsione di una linea qualunque a doppia curvatura  $L$ ; sia  $C$  una curva individuata dalle equazioni:

$$\rho_1 = f(s) \quad , \quad r_1 = \varphi(s)$$

esprimenti i suoi raggi  $\rho_1, r_1$  in funzione dell'arco  $s$ .

Se nel punto  $s = \sigma$  la curva  $C$  è osculatrice ad  $L$ , sono verificate le relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} f(\sigma) = \rho \quad , \quad f'(\sigma) = \rho' \quad , \quad f''(\sigma) = \rho'' \quad , \quad . . . \\ \varphi(\sigma) = r \quad , \quad \varphi'(\sigma) = r' \quad , \quad \varphi''(\sigma) = r'' \quad , \quad . . . \end{cases}$$

dalle quali potremo ricavare in funzione di  $\rho$  e  $r$  e delle loro derivate i valori dei parametri che entrano nelle funzioni  $f(s), \varphi(s)$  e il valore di  $\sigma$ ; i primi servono per fissare la forma della curva osculatrice  $C$  e l'ultimo serve per determinare la posizione della curva  $C$  rispetto alla  $L$ .

Applicheremo queste considerazioni generali ad alcuni casi.

Geodetica conica osculatrice.

Proponiamoci di determinare la geodetica  $C$  d'un cono di rivoluzione osculatrice a una curva dello spazio  $L$ .

Bisogna anzitutto determinare in funzione dell'arco il raggio di curvatura e quello di torsione di  $C$ ; per fare questo, notiamo che un cono di rivoluzione può considerarsi come un'elicoide sviluppabile, essendo le sue generatrici inclinate d'un angolo costante a una retta. Conseguentemente per una geodetica d'un tale

cono dobbiamo avere (\*)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{d}{ds} \text{arc.tang} \left( \frac{r_1}{\rho_1} \right) = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2}} \cdot \text{tang} \alpha$$

essendo  $\alpha$  il semiangolo al vertice. Inoltre deve essere (\*\*):

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{s}{a}$$

essendo  $a$  la minima distanza del vertice del cono dalla curva.

Da queste due relazioni si deduce facilmente:

$$\rho_1 = \frac{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \text{tang} \alpha \quad , \quad r_1 = \frac{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}{as} \text{tang} \alpha.$$

Nel nostro caso, avendo disponibili tre sole indeterminate, cioè  $a$ ,  $\alpha$  e  $\sigma$  non possiamo che soddisfare alle tre seguenti relazioni fra le (1):

$$\frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \text{tang} \alpha = \rho \quad ; \quad \frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2} 3 \text{tang} \alpha \cdot \sigma = \rho' \quad ; \quad \frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{as} \text{tang} \alpha = r$$

dalle quali si ricavano facilmente le altre:

$$\frac{a^2 + \sigma^2}{3\sigma} = \frac{\rho}{\rho'} \quad ; \quad \frac{a(a^2 + \sigma^2)}{3\sigma^2} = \frac{r}{\rho'} \quad ; \quad \frac{\sigma}{a} = \frac{\rho}{r}.$$

Queste relazioni ci offrono dopo qualche calcolo:

$$(2) \quad a = \rho \frac{3 \frac{\rho}{r}}{\rho' \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right]} \quad ; \quad \text{tang} \alpha = \frac{\rho'}{3 \frac{\rho}{r} \sqrt{1 + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2}} \quad ; \quad \sigma = \rho \frac{3 \left( \frac{\rho}{r} \right)^2}{\rho' \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right]}$$

le quali servono, come ora mostreremo, a determinare completamente di forma e di posizione la geodetica conica osculatrice.

(\*) *Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe.* Questo giornale, 1885.

(\*\*) l. c.

Tale curva ha colla L un contatto di 3° ordine, il che si deduce dalle condizioni che abbiamo verificate precedentemente; per questa circostanza il vertice del cono contenente la geodetica osculatrice è bensì situato sulla retta rettificatrice di L, ma non generalmente sullo spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice.

Se chiamiamo R la distanza fra il vertice del cono e il punto di contatto delle curve C, L ed  $i$  l'inclinazione della geodetica C sulle generatrici del cono, abbiamo:

$$R = \frac{\sigma}{\cos i};$$

siccome poi, in causa d'una nota proprietà delle geodetiche delle sviluppabili

$$\cot g i = \frac{\rho_1}{r_1} = \frac{\rho}{r}$$

sarà:

$$R = \sigma \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

E sostituendo a  $\sigma$  il valore precedente:

$$R = \frac{3\rho}{\rho'} \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Invece la distanza  $\Delta$  fra un punto d'una curva e il corrispondente punto dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice è data così (V. mia memoria, l. c.)

$$\Delta = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}}{\frac{d}{ds} \log \left(\frac{r}{\rho}\right)} = - \frac{1}{\frac{\rho}{r}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\frac{d}{ds} \log \left(\frac{\rho}{r}\right)}.$$

Mettendo la condizione che sia  $\Delta = R$  risulta un'equazione che si può, dopo qualche trasformazione, scrivere così:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{3}{2} \frac{d \left[ 1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = 0.$$

Integrandola, si ha :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho = \frac{k}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Dunque « il luogo geometrico dei vertici dei coni di rivoluzione contenenti le geodetiche coniche osculatrici a una curva dello spazio coincide collo spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di tale curva solamente quando sia verificata la condizione

$$\rho = k \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

Le coordinate  $x, y, z$  d'un punto qualunque di una linea dello spazio si possono mettere sotto la forma :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} x = R \operatorname{sen} \varphi \cos \left[ \int \frac{\sqrt{1 - R'^2 - R^2 \varphi'^2}}{R \operatorname{sen} \varphi} ds \right], \quad y = R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \left[ \int \frac{\sqrt{1 - R'^2 - R^2 \varphi'^2}}{R \operatorname{sen} \varphi} ds \right] \\ z = R \cos \varphi \end{array} \right.$$

essendo  $s$  l'arco,  $R$  il raggio vettore che parte dall'origine degli assi e  $\varphi$  l'angolo che tale raggio vettore fa coll'asse delle  $z$ .

Se dunque assumiamo l'asse del cono per asse delle  $z$ , avremo :

$$\varphi = 0, \quad \text{quindi} \quad \varphi' = 0;$$

inoltre

$$R = \sqrt{a^2 + s^2}$$

e quindi le precedenti, applicate al caso della geodetica d'un cono di rivoluzione, assumono la forma :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \cos \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] \\ y = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right], \\ z = \sqrt{a^2 + s^2} \cdot \cos \alpha. \end{array} \right.$$

Siccome queste formole per  $s = 0$  divengono

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x = a \operatorname{sen} \alpha, \quad y = 0, \quad z = a \cos \alpha$$

si conclude che l'asse delle  $x$  è la retta condotta per il vertice parallelamente alla perpendicolare all'asse condotta pel vertice della geodetica (punto di questa curva più prossimo al vertice del cono).

Cambiamo gli assi  $ox, oy$  prendendo per nuovo asse delle  $x$  la retta condotta per il vertice del cono parallelamente alla normale all'asse condotta per il punto di contatto A; chiamando  $o\xi, o\eta, oz$  i nuovi assi, bisognerà determinare l'angolo  $\theta$  dei due assi  $ox, o\xi$ . Si osservi per questo che le coordinate della proiezione di A sul piano  $z = 0$  sono date dalle due prime (4) quando si ponga in esse al posto di  $s$  il valore  $\sigma$  dato dalla terza delle (2). Così facendo, risulta

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x} = \operatorname{cotg} \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sigma}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right]$$

e siccome  $\frac{\sigma}{a} = \frac{\rho}{r}$ , sarà

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\rho}{r}}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Tenendo conto di questo valore di  $\theta$  e facendo il detto cambiamento d'assi, risulta

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right], \\ \eta = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \cos \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right], \\ \xi = \sqrt{a^2 + s^2} \cdot \cos \alpha. \end{array} \right.$$

Ora cambieremo nuovamente il sistema d'assi coordinati scegliendo per asse delle  $x$  la tangente alla curva L, per asse delle  $y$  la normale principale e per asse delle  $z$  la binormale.

Chiamando  $x_0, y_0, z_0$  le coordinate della nuova origine A rapporto agli assi

La coincidenza di quattro punti consecutivi porta dunque alle condizioni :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho = \rho_1 \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds} \quad , \quad r = r_1 .$$

Se si mette la condizione che nelle due curve coincidano cinque punti consecutivi, oltre le condizioni precedenti dovranno essere soddisfatte le altre due :

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds^2} \quad , \quad \frac{dr}{ds} = \frac{dr_1}{ds} .$$

Di modo che, procedendo con eguale metodo fino a che nelle due curve coincidano  $n + 1$  punti consecutivi, si arriva al teorema generale. « *La condizione necessaria e sufficiente perchè due curve  $L, L_1$  dello spazio possano venire disposte in modo da avere comuni i punti  $A, A_1$  e gli altri  $n$  consecutivi, cioè in modo da avere in quei punti un contatto di ordine  $n$ , è che nei punti  $A, A_1$  siano soddisfatte le seguenti  $2n - 5$  condizioni :*

$$\begin{aligned} \rho = \rho_1 \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds} \quad , \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds^2} \quad , \quad \dots \dots \dots \quad \frac{d^{n-2}\rho}{ds^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\rho_1}{ds^{n-2}} \\ r = r_1 \quad , \quad \frac{dr}{ds} = \frac{dr_1}{ds} \quad , \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r_1}{ds^2} \quad , \quad \dots \dots \dots \quad \frac{d^{n-3}r}{ds^{n-3}} = \frac{d^{n-3}r_1}{ds^{n-3}} \end{aligned}$$

Date le due linee  $L, L_1$  aventi un contatto d'ordine  $n$ , indichiamo con  $S, S_1$  i luoghi dei centri delle sfere osculatrici ; con  $R, R_1$  gli spigoli di regresso delle sviluppabili rettificanti ; con  $C, C_1$  i luoghi dei centri di curvatura ; con  $N, N_1$  le linee di stringimento delle superficie gobbe delle normali principali.

Per la coincidenza dei primi quattro punti consecutivi delle linee  $L, L_1$ , le due curve  $S, S_1$  hanno comuni due tangenti consecutive, cioè tre punti consecutivi ; per ogni altra coppia dei rimanenti  $n - 3$  punti consecutivi delle linee date  $L, L_1$ , che vengano a coincidere, ha luogo pure la coincidenza di un'altra coppia di punti consecutivi delle linee  $S, S_1$ , le quali hanno dunque un contatto d'ordine  $n - 1$ .

Se le curve  $L, L_1$  hanno comuni cinque punti consecutivi, le curve  $R, R_1$  hanno comuni due tangenti consecutive, cioè tre punti consecutivi comuni; nel caso generale che  $L, L_1$  abbiano comuni  $n + 1$  punti consecutivi, le  $R, R_1$  ne avranno comuni  $n - 1$ , cioè avranno un contatto d'ordine  $n - 2$ .

Le curve  $C, C_1$ , quando  $L, L_1$  abbiano un contatto di 3° ordine, hanno due punti consecutivi comuni, cioè un contatto di 1° ordine, e quindi nel caso generale le curve  $C, C_1$  avranno un contatto d'ordine  $n - 2$ .

In quanto alle linee  $N, N_1$ , basta osservare che esse hanno comuni due punti consecutivi quando  $L, L_1$  ne hanno comuni cinque ; nel caso generale che queste

abbiano comuni  $n + 1$  punti consecutivi. le linee  $N, N_1$  ne avranno comuni  $n - 2$ , cioè avranno un contatto d'ordine  $n - 3$ .

Si può dunque enunciare il teorema: « Quando due linee hanno in un punto un contatto d'ordine  $n$ , i luoghi dei centri delle sfere osculatrici hanno nel punto corrispondente un contatto d'ordine  $n - 1$ ; i luoghi dei centri di curvatura e gli spigoli di regresso delle sviluppabili rettificatrici un contatto d'ordine  $n - 2$ , e le linee di stringimento delle superficie gobbe delle normali principali un contatto d'ordine  $n - 3$  ».

Sia  $L$  una curva qualunque dello spazio e  $C$  un'elica avente con  $L$  il contatto d'ordine massimo; se  $L, C$  hanno in comune  $n + 1$  punti, si è visto che queste curve hanno comuni  $n - 2$  rette rettificatrici consecutive. Ma siccome le rette rettificatrici di  $C$  sono tutte parallele, è chiaro che generalmente una sola retta rettificatrice di  $L$  può coincidere con una retta rettificatrice di  $C$ , cioè

$$n - 2 = 1, \quad \text{d'onde} \quad n + 1 = 4.$$

Dunque « un'elica non ha generalmente con una linea qualunque dello spazio (non elica) un contatto superiore al terzo ».

Sia  $C$  una geodetica d'un cono avente con la linea  $L$   $n + 1$  punti consecutivi comuni, in questo caso le rette rettificatrici di  $C$  passano per uno stesso punto e quindi generalmente due sole rette rettificatrici di  $L$  possono coincidere colle corrispondenti di  $C$ . Dunque

$$n - 2 = 2, \quad \text{d'onde} \quad n + 1 = 5.$$

Perciò « una geodetica d'un cono non ha generalmente con una linea qualunque dello spazio (non geodetica di un cono) un contatto superiore al quarto ».

Sia  $C$  una geodetica d'un elicoide sviluppabile avente con  $L$   $n + 1$  punti consecutivi comuni; in questo caso tutte le rette rettificatrici di  $C$  sono inclinate a una retta fissa d'un angolo costante, perciò in generale tre sole rette rettificatrici consecutive di  $L$  possono coincidere colle corrispondenti rette rettificatrici di  $C$ . Abbiamo dunque

$$n - 2 = 3, \quad \text{d'onde} \quad n + 1 = 6.$$

Perciò « una geodetica d'un elicoide sviluppabile non ha generalmente con una linea qualunque dello spazio (non geodetica d'elicoide sviluppabile) un contatto superiore al quinto ».

Da quanto precede, risulta:

« Le eliche osculatrici a una curva data  $L$  in un punto sono situate sopra cilindri le cui generatrici sono parallele alla retta rettificatrice di  $L$  in quel punto ».

« Le geodetiche di coni, osculatrici a una curva data  $L$ , se hanno un cou-

lato di 4° ordine con essa, sono situate su coni col vertice nel punto corrispondente dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L ».

Dalla proprietà che le generatrici del cilindro contenente un'elica osculatrice a una linea L sono parallele alle rette rettificatrici di L, deriva che l'elica osculatrice sega le generatrici del cilindro su cui è descritta sotto un angolo  $i$  tale, che

$$\operatorname{tang} i = \frac{r}{\rho}.$$

Se quindi chiamiamo  $\rho_0$  il raggio di curvatura della sezione retta del cilindro, nel punto di contatto avremo :

$$\rho_0 = \rho \operatorname{sen}^2 i = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Siccome  $\frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}$  è la porzione della normale principale di L compresa fra

questa curva e la linea di stringimento della superficie gobba delle normali principali, si potrà enunciare il teorema « la sezione retta del cilindro contenente un'elica osculatrice a una linea qualunque L, ha il centro di curvatura, corrispondente al punto di contatto, sulla linea di stringimento della superficie gobba delle normali principali di L ».

Questo teorema può essere generalizzato per il caso che la linea osculatrice sia una geodetica conica; infatti nel mio scritto *Sulle linee a doppia curvatura* (questo giornale) ho dimostrato la formola :

$$R_g = \rho \operatorname{sen}^2 i$$

dove  $\rho$  è il raggio di curvatura di una geodetica conica,  $i$  l'angolo sotto il quale essa sega le generatrici del cono e  $R_g$  il raggio di curvatura geodetica, sulla sfera che la contiene, della sezione sferica normale del cono passante per il punto considerato.

Ora siccome il vertice del cono si trova sulla retta rettificatrice della curva osculata, si ha nel punto di contatto

$$\operatorname{tang} i = \frac{r}{\rho} \quad \text{e quindi} \quad R_g = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Dunque « quando una geodetica d'un cono è osculatrice in un punto A a una linea qualunque L, la sezione sferica normale del cono passante per A ha

per raggio di curvatura geodetica sulla sfera in A il segmento di normale principale ad L compreso fra A e la linea di stringimento della superficie delle normali principali di L ».

Se una superficie è determinata da  $n + 1$  punti e la linea C appartiene a questa superficie, non potrà avere comune con una linea dello spazio L che  $n + 1$  punti al più, cioè non potrà avere con L un contatto superiore all'  $n^{\text{mo}}$ .

Per conseguenza « una linea sferica, una linea descritta sopra un cilindro di rivoluzione e una linea descritta sopra un cono di rivoluzione hanno con una linea qualunque dello spazio, non descritta rispettivamente sulle stesse superficie, un contatto che tutto al più è rispettivamente dell'ordine  $3^{\circ}$ ,  $4^{\circ}$ ,  $5^{\circ}$  ».

Siano L e  $L_1$  due curve simili, le equazioni caratteristiche di tali linee si possono mettere sotto la forma :

$$\rho = \rho(s) \quad , \quad r = r(s) \quad ; \quad \rho_1 = \frac{1}{k} \rho(ks) \quad , \quad r_1 = \frac{1}{k} r(ks)$$

essendo  $k$  una costante. Chiamando  $\sigma$  il valore di  $s$  che corrisponde ai punti delle due linee in cui esse sono a contatto, dobbiamo avere per il contatto di  $4^{\circ}$  ordine:

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{k} \rho(k\sigma) \quad , \quad \rho'(\sigma) = \rho'(k\sigma) \quad , \quad \rho''(\sigma) = k \rho''(\sigma),$$

$$r(\sigma) = \frac{1}{k} r(k\sigma) \quad , \quad r'(\sigma) = r'(k\sigma).$$

La seconda e la quinta di queste relazioni richiedono, per essere soddisfatte, che tanto  $\rho'$  quanto  $r'$  non dipendano da  $s$ , cosicchè si abbia

$$\rho = ms \quad , \quad r = ns$$

con  $m, n$  costanti. Allora risulta :

$$\rho_1 = ms \quad , \quad r_1 = ns$$

le quali dimostrano che le due curve L,  $L_1$  sono due eliche cilindro-coniche eguali.

Si conclude che « due curve simili dello spazio non possono generalmente avere fra loro un contatto superiore al terzo ».

Considerando poi le condizioni del contatto di  $3^{\circ}$  ordine

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{k} \rho(\sigma) \quad , \quad \rho'(\sigma) = \rho'(k\sigma) \quad , \quad r(\sigma) = \frac{1}{k} r(k\sigma)$$

si vede dalla seconda che per essere soddisfatta richiede che  $\rho'$  non contenga  $s$ ; dobbiamo dunque avere  $\rho = ms$  e quindi anche  $\rho_1 = ms$ .

Dunque « se due curve simili dello spazio hanno fra loro un contatto di 3° ordine, quando la loro sviluppabile osculatrice si distende sopra un piano, si trasformano in due spirali logaritmiche eguali ».

Vediamo se una curva dello spazio L può essere osculata in tutti i suoi punti da una medesima curva C non piana. Se  $\rho, r$  sono i raggi di L e

$$\rho_1 = f(s) \quad , \quad r_1 = \varphi(s)$$

quelli di C, le condizioni d'osculatione delle curve C, L in un punto corrispondente al valore s qualunque dell'arco sono :

$$\rho = f(s) \quad , \quad \rho' = f'(s) \quad , \quad \rho'' = f''(s) \quad , \quad . \quad . \quad ; \quad r = \varphi(s) \quad , \quad r' = \varphi'(s) \quad , \quad . \quad . \quad .$$

Ora se le curve osculatrici C sono eguali fra loro in tutti i punti di L, i parametri che entrano nelle funzioni  $f(s), \varphi(s)$  e dai quali dipende la forma della linea C devono essere indipendenti da s. Allora le relazioni :

$$\rho = f(s) \quad , \quad r = \varphi(s)$$

si possono considerare come le equazioni caratteristiche della curva L la quale è identica, per conseguenza, alla curva C pure rappresentata dalle stesse equazioni.

Dunque « se per una linea L dello spazio le curve osculatrici a doppia curvatura C e appartenenti a una determinata famiglia sono tutte eguali fra loro, la curva L è identica alle curve C ».

La curva  $L_1$  osculatrice di L sia a curvatura costante  $\frac{1}{k}$ ; le sole condizioni che potremo verificare circa ai raggi di curvatura e di torsione delle due curve sono :

$$k = \rho \quad , \quad r_1 = r \quad , \quad r_1' = r' \quad , \quad . \quad . \quad .$$

le quali danno un contatto generalmente non superiore al secondo.

Dunque « una curva a curvatura costante, osculando una curva qualunque, non può avere con essa un contatto superiore al secondo ».

Questa proprietà si verifica ad es. per il cerchio osculatore.

Se poi la curva  $L_1$  è a torsione costante  $\frac{1}{k}$ , non sarà possibile verificare che le seguenti relazioni :

$$\rho_1 = \rho \quad , \quad \rho_1' = \rho' \quad , \quad \rho_1'' = \rho'' \quad . \quad . \quad . \quad ; \quad k = r$$

dalle quali si deduce « una curva a torsione costante, osculando una curva qualunque, ha con questa un contatto ordinariamente di 3° ordine ».

Le due curve  $L, L$  abbiano per deformate piane una stessa curva, cioè diano luogo alla stessa linea piana quando la loro sviluppabile osculatrice si sviluppa sopra un piano; le due linee avranno la stessa curvatura e quindi generalmente non si potrà che soddisfare alle condizioni:

$$\rho_1 = \rho \quad , \quad \rho_1' = \rho' \quad , \quad \rho_1'' = \rho'' \quad . . . .$$

Quindi « due curve dello spazio aventi la medesima deformata piana si osculano con un contatto ordinariamente non superiore al secondo ».

§ 2.

Siano  $\rho, r$  il raggio di curvatura e quello di torsione di una linea qualunque a doppia curvatura  $L$ ; sia  $C$  una curva individuata dalle equazioni:

$$\rho_1 = f(s) \quad , \quad r_1 = \varphi(s)$$

esprimenti i suoi raggi  $\rho_1, r_1$  in funzione dell'arco  $s$ .

Se nel punto  $s = \sigma$  la curva  $C$  è osculatrice ad  $L$ , sono verificate le relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} f(\sigma) = \rho \quad , \quad f'(\sigma) = \rho' \quad , \quad f''(\sigma) = \rho'' \quad , \quad . . . . \\ \varphi(\sigma) = r \quad , \quad \varphi'(\sigma) = r' \quad , \quad \varphi''(\sigma) = r'' \quad , \quad . . . . \end{cases}$$

dalle quali potremo ricavare in funzione di  $\rho$  e  $r$  e delle loro derivate i valori dei parametri che entrano nelle funzioni  $f(s), \varphi(s)$  e il valore di  $\sigma$ ; i primi servono per fissare la forma della curva osculatrice  $C$  e l'ultimo serve per determinare la posizione della curva  $C$  rispetto alla  $L$ .

Applicheremo queste considerazioni generali ad alcuni casi.

Geodetica conica osculatrice.

Proponiamoci di determinare la geodetica  $C$  d'un cono di rivoluzione osculatrice a una curva dello spazio  $L$ .

Bisogna anzitutto determinare in funzione dell'arco il raggio di curvatura e quello di torsione di  $C$ ; per fare questo, notiamo che un cono di rivoluzione può considerarsi come un'elicoide sviluppabile, essendo le sue generatrici inclinate d'un angolo costante a una retta. Conseguentemente per una geodetica d'un tale

cono dobbiamo avere (\*)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{d}{ds} \text{arc.tang} \left( \frac{r_1}{\rho_1} \right) = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2}} \cdot \text{tang} \alpha$$

essendo  $\alpha$  il semiangolo al vertice. Inoltre deve essere (\*\*):

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{s}{a}$$

essendo  $a$  la minima distanza del vertice del cono dalla curva.

Da queste due relazioni si deduce facilmente:

$$\rho_1 = \frac{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \text{tang} \alpha \quad , \quad r_1 = \frac{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}{as} \text{tang} \alpha.$$

Nel nostro caso, avendo disponibili tre sole indeterminate, cioè  $a$ ,  $\alpha$  e  $\sigma$  non possiamo che soddisfare alle tre seguenti relazioni fra le (1):

$$\frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \text{tang} \alpha = \rho \quad ; \quad \frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2} 3 \text{tang} \alpha \cdot \sigma = \rho' \quad ; \quad \frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{as} \text{tang} \alpha = r$$

dalle quali si ricavano facilmente le altre:

$$\frac{a^2 + \sigma^2}{3\sigma} = \frac{\rho}{\rho'} \quad ; \quad \frac{a(a^2 + \sigma^2)}{3\sigma^2} = \frac{r}{\rho'} \quad ; \quad \frac{\sigma}{a} = \frac{\rho}{r}.$$

Queste relazioni ci offrono dopo qualche calcolo:

$$(2) \quad a = \rho \frac{3 \frac{\rho}{r}}{\rho' \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right]} \quad ; \quad \text{tang} \alpha = \frac{\rho'}{3 \frac{\rho}{r} \sqrt{1 + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2}} \quad ; \quad \sigma = \rho \frac{3 \left( \frac{\rho}{r} \right)^2}{\rho' \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right]}$$

le quali servono, come ora mostreremo, a determinare completamente di forma e di posizione la geodetica conica osculatrice.

(\*) *Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe*. Questo giornale, 1885.

(\*\*) l. c.

Tale curva ha colla L un contatto di 3° ordine, il che si deduce dalle condizioni che abbiamo verificate precedentemente; per questa circostanza il vertice del cono contenente la geodetica osculatrice è bensì situato sulla retta rettificatrice di L, ma non generalmente sullo spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice.

Se chiamiamo R la distanza fra il vertice del cono e il punto di contatto delle curve C, L ed  $i$  l'inclinazione della geodetica C sulle generatrici del cono, abbiamo:

$$R = \frac{\sigma}{\cos i};$$

siccome poi, in causa d'una nota proprietà delle geodetiche delle sviluppabili

$$\cot g i = \frac{\rho_1}{r_1} = \frac{\rho}{r}$$

sarà:

$$R = \sigma \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

E sostituendo a  $\sigma$  il valore precedente:

$$R = \frac{3\rho}{\rho'} \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Invece la distanza  $\Delta$  fra un punto d'una curva e il corrispondente punto dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice è data così (V. mia memoria, l. c.)

$$\Delta = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}}{\frac{d}{ds} \log \left(\frac{r}{\rho}\right)} = - \frac{1}{\frac{\rho}{r}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\frac{d}{ds} \log \left(\frac{\rho}{r}\right)}.$$

Mettendo la condizione che sia  $\Delta = R$  risulta un'equazione che si può, dopo qualche trasformazione, scrivere così:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{3}{2} \frac{d \left[ 1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = 0.$$

Integrandola, si ha :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho = \frac{k}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Dunque « il luogo geometrico dei vertici dei coni di rivoluzione contenenti le geodetiche coniche osculatrici a una curva dello spazio coincide collo spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di tale curva solamente quando sia verificata la condizione

$$\rho = k \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Le coordinate  $x, y, z$  d'un punto qualunque di una linea dello spazio si possono mettere sotto la forma :

$$(3) \begin{cases} x = R \operatorname{sen} \varphi \cos \left[ \int \frac{\sqrt{1-R'^2-R^2\varphi'^2}}{R \operatorname{sen} \varphi} ds \right], & y = R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \left[ \int \frac{\sqrt{1-R'^2-R^2\varphi'^2}}{R \operatorname{sen} \varphi} ds \right] \\ & z = R \cos \varphi \end{cases}$$

essendo  $s$  l'arco,  $R$  il raggio vettore che parte dall'origine degli assi e  $\varphi$  l'angolo che tale raggio vettore fa coll'asse delle  $z$ .

Se dunque assumiamo l'asse del cono per asse delle  $z$ , avremo :

$$\varphi = 0, \quad \text{quindi} \quad \varphi' = 0;$$

inoltre

$$R = \sqrt{a^2 + s^2}$$

e quindi le precedenti, applicate al caso della geodetica d'un cono di rivoluzione, assumono la forma :

$$(4) \begin{cases} x = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \cos \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] \\ y = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right], \\ z = \sqrt{a^2 + s^2} \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Siccome queste formole per  $s = 0$  divengono

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$x = a \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = a \operatorname{cos} \alpha$$

si conclude che l'asse delle  $x$  è la retta condotta per il vertice parallelamente alla perpendicolare all'asse condotta pel vertice della geodetica (punto di questa curva più prossimo al vertice del cono)..

Cambiamo gli assi  $ox, oy$  prendendo per nuovo asse delle  $x$  la retta condotta per il vertice del cono parallelamente alla normale all'asse condotta per il punto di contatto A; chiamando  $o\xi, o\eta, o\zeta$  i nuovi assi, bisognerà determinare l'angolo  $\theta$  dei due assi  $ox, o\xi$ . Si osservi per questo che le coordinate della proiezione di A sul piano  $z=0$  sono date dalle due prime (4) quando si ponga in esse al posto di  $s$  il valore  $\sigma$  dato dalla terza delle (2). Così facendo, risulta

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x} = \operatorname{cotg} \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sigma}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right]$$

e siccome  $\frac{\sigma}{a} = \frac{\rho}{r}$ , sarà

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\rho}{r}}{\operatorname{sen} \alpha} .$$

Tenendo conto di questo valore di  $\theta$  e facendo il detto cambiamento d'assi, risulta

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] , \\ \eta = \sqrt{a^2 + s^2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] , \\ \xi = \sqrt{a^2 + s^2} \cdot \operatorname{cos} \alpha . \end{array} \right.$$

Ora cambieremo nuovamente il sistema d'assi coordinati scegliendo per asse delle  $x$  la tangente alla curva L, per asse delle  $y$  la normale principale e per asse delle  $z$  la binormale.

Chiamando  $x_0, y_0, z_0$  le coordinate della nuova origine A rapporto agli assi

$o(\xi, \eta, \zeta)$ , queste coordinate saranno :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(6) \quad \begin{cases} x_0 = \sqrt{a^2 + \sigma^2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc tang} \frac{\sigma}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right], \\ y_0 = \sqrt{a^2 + \sigma^2} \operatorname{sen} \alpha \cos \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc tang} \frac{\sigma}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right], \\ z_0 = \sqrt{a^2 + \sigma^2} \cos \alpha. \end{cases}$$

Per i coseni direttivi dei nuovi assi rapporto agli antichi, si ha :

$$\cos(\xi, x) = 0, \quad \cos(\xi, y) = \cos \alpha, \quad \cos(\xi, z) = \operatorname{sen} \alpha;$$

$$\cos(\zeta, x) = \left[ \frac{dz}{ds} \right]_{s=\sigma} = \frac{\sigma \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}, \quad \cos(\zeta, y) = \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\cos(\zeta, z) = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}};$$

$$\cos(\eta, x) = \sqrt{\frac{a^2 + \sigma^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{a^2 + \sigma^2}}, \quad \cos(\eta, y) = 0$$

$$\cos(\eta, \zeta) = \frac{\sigma \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}$$

Per mezzo di questi valori si potrà ottenere il cambiamento detto d'assi e si avrà :

$$(7) \quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} \left\{ \sqrt{a^2 + \sigma^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] + \sigma \cos^2 \alpha \right\} \\ y = y_0 + \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} \left\{ \operatorname{sen} \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] + 1 \right\} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ z = z_0 + \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} \left\{ \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} \cos \left[ \frac{\operatorname{arc tang} \frac{\rho}{r} - \operatorname{arc tang} \frac{s}{a}}{\operatorname{sen} \alpha} \right] + \frac{a}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} \cos^2 \alpha \right\}. \end{cases}$$

Si ha così il teorema « le coordinate d'un punto qualunque di una geodetica di un cono di rivoluzione osculatrice a una curva qualunque L, quando si riferisca al triedro formato dalla tangente, dalla normale principale e dalla binormale, sono date dalle equazioni (7) nelle quali  $x_0, y_0, z_0$  sono date dalle (6), e di più la minima distanza  $a$  della geodetica dal vertice del cono, il semian-golo  $\alpha$  al vertice di questo cono e l'arco  $\sigma$  della geodetica intercetto fra il vertice della curva e il punto di contatto sono dati dalle (2).

La curva osculatrice ha con L un contatto generalmente di 3° ordine ».

**Elia cilindro-conica osculatrice.**

I raggi  $\rho_1, r_1$  dell'elica cilindro-conica C sono dati come segue

$$\rho_1 = as \quad , \quad r_1 = \text{tang } i \cdot as$$

essendo  $i$  l'angolo sotto il quale l'elica sega le generatrici del cilindro ed  $a$  una costante. I tre parametri  $a, i, \sigma$  (essendo  $\sigma$  il valore dell'arco  $s$  di C corrispondente al punto di contatto) si potranno determinare mettendo la condizione che l'elica C abbia colla curva L un contatto di terzo ordine.

Le condizioni da soddisfare sono :

$$a\sigma = \rho \quad , \quad \alpha = \rho' \quad , \quad \text{tang } i \cdot a\sigma = r$$

dalle quali si deduce facilmente :

$$a = \rho' \quad , \quad \text{tang } i = \frac{r}{\rho} \quad , \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho'}$$

Le due prime servono a fissare la forma della curva osculatrice e la terza a fissare la sua posizione relativamente alla curva L. Se  $\rho_0$  e  $s_0$  sono il raggio di curvatura e l'arco della sezione retta del cilindro contenente l'elica osculatrice, si ha

$$\rho_0 = \rho_1 \text{ sen}^2 i = as \cdot \text{sen}^2 i$$

e siccome

$$s_0 = s \cdot \text{sen } i$$

risulta :

$$\rho_0 = s_0 \cdot a \text{ sen } i$$

Ora nel punto di contatto delle curve C, L abbiamo :

$$a = \rho' \quad , \quad \text{sen } i = \frac{r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}$$

dunque sarà :

(8) [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho_0 = s_0 \cdot \frac{\rho'}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}$$

Perciò « la spirale logaritmica, sezione retta del cilindro contenente l'elica cilindro-conica osculatrice a una curva qualunque, sega i raggi vettori sotto l'angolo costante  $\alpha$  dato dalla relazione

$$\cotg \alpha = \frac{\rho'}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}$$

La relazione (8) che dà la sezione retta del cilindro, unita alla proprietà che il cilindro contenente l'elica osculatrice ha le generatrici parallele alla retta rettificatrice di L corrispondente al punto di contatto, serve per trovare effettivamente tale cilindro e quindi anche l'elica osculatrice descritta su di esso.

Se O è il polo della spirale logaritmica sezione retta del cilindro, P un punto qualunque dell'elica, P<sub>0</sub> il punto corrispondente della spirale, si ha :

$$OP_0 = s_0 \cos \alpha \quad , \quad PP_0 = s_0 \cotg \alpha$$

quindi :

$$R = OP = s_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \cotg^2 \alpha} = \text{sen } \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \cotg^2 \alpha} \cdot s ;$$

e ponendo per semplicità

$$\text{sen } \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \cotg^2 \alpha} = k$$

risulterà :

$$R = ks.$$

L'angolo  $\varphi$  che il raggio vettore R fa coll'asse delle z, essendo dato dalla relazione

$$\cos \varphi = \frac{PP_0}{OP} = \frac{\cotg \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cotg^2 \alpha}}$$

è costante ; applicando quindi le formole (3), si ha per coordinate d'un punto qualunque dell'elica cilindro-conica :

$$x = ks \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \left[ \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k \text{ sen } \varphi} \log s \right] \quad , \quad y = ks \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{sen} \left[ \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k \text{ sen } \varphi} \log s \right] ,$$

$$z = ks \cdot \cos \varphi .$$

Sostituiamo all'asse delle  $x$  la normale principale della linea  $L$  nel punto che si considera  $A$ ; chiamando  $\xi, \eta, \zeta$  le nuove coordinate e  $\theta$  l'angolo dei due assi  $x, \xi$  avremo :

$$\operatorname{tang} \theta = \left( \frac{y}{x} \right)_{s=\sigma} = \operatorname{tang} \left[ \frac{\sqrt{1-k^2}}{k \operatorname{sen} \varphi} \log \sigma \right],$$

d'onde

$$\theta = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k \operatorname{sen} \varphi} \log \sigma.$$

Sarà dunque :

$$\xi = ks \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \left[ \frac{\sqrt{1-k^2}}{k \operatorname{sen} \varphi} \log(\sigma s) \right] \quad , \quad \eta = ks \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{\sqrt{1-k^2}}{k \operatorname{sen} \varphi} \log(\sigma s) \right]$$

$$\zeta = ks \cdot \cos \varphi.$$

Cambiamo ora assi prendendo per asse delle  $x$  la tangente, per asse delle  $y$  la normale principale e per asse delle  $z$  la binormale di  $L$ . Le coordinate  $x_0, y_0, z_0$  della nuova origine rapporto agli assi  $\xi, \eta, \zeta$  sono :

$$x_0 = (R)_{s=\sigma} = k\sigma \quad , \quad y_0 = 0 \quad , \quad z_0 = 0.$$

Si ha inoltre :

$$\cos(\xi, x) = 0 \quad , \quad \cos(\xi, y) = 1 \quad , \quad \cos(\xi, z) = 0 ;$$

$$\cos(\eta, x) = \frac{\frac{r}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} \quad , \quad \cos(\eta, y) = 0 \quad , \quad \cos(\eta, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} ;$$

$$\cos(\zeta, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} \quad , \quad \cos(\zeta, y) = 0 \quad , \quad \cos(\zeta, z) = \frac{\frac{r}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}}$$

e quindi le nuove coordinate  $x, y, z$  sono date nel seguente modo :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= k\sigma + \frac{k\sigma}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} \left\{ \frac{r}{\rho} \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k \operatorname{sen} \varphi} \log(\sigma s) \right] + \cos \varphi \right\}, \\ y &= k\sigma \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \left[ \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k \operatorname{sen} \varphi} \log(\sigma s) \right] \\ z &= \frac{k\sigma}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} \left\{ \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k \operatorname{sen} \varphi} \log(\sigma s) \right] + \frac{r}{\rho} \cos \varphi \right\}. \end{aligned} \right.$$

Abbiamo così il teorema: *« in ogni punto di una curva dello spazio esiste un'elica cilindro-conica osculatrice, avente colla curva un contatto di 3° ordine; le coordinate d'un punto qualunque di una tale elica espresse per l'arco e riferite al triedro formato dalla tangente, dalla normale principale e dalla binormale sono date dalle (9) nelle quali l'angolo  $i$  sotto il quale l'elica sega le generatrici del cilindro è dato dalla relazione  $\operatorname{tang} i = \frac{r}{\rho}$ , l'angolo  $\alpha$  sotto il quale la spirale logaritmica sezione retta del cilindro sega i raggi vettori è dato dalla relazione  $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}$ , la porzione  $\sigma$  dell'arco di spirale compreso fra il polo e il punto di contatto è  $\sigma = \frac{\rho}{\rho'}$ , il semi-angolo al vertice  $\varphi$  del cono retto di cui la curva è elica è dato dalla relazione  $\cos \varphi = \frac{\operatorname{cotg} i}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 i}}$  e  $k$  è una costante definita dalla relazione  $k = \operatorname{sen} i \sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 i}$  ».*

### Elica circolare osculatrice.

Indicando con  $a$  il raggio di curvatura costante e con  $b$  il raggio di torsione costante dell'elica circolare, non potremo in questo caso soddisfare che alle due condizioni seguenti :

$$a = \rho \quad , \quad b = r$$

le quali fissano completamente l'elica osculatrice.

Si può osservare che tale elica ha colla data linea un contatto di 2° ordine; per tale contatto è sufficiente la condizione  $a = \rho$  ed infinite sono le eliche circolari che hanno un tale contatto colla data linea; l'elica osculatrice è quella nella

quale oltre la condizione  $a = \rho$  è soddisfatta l'altra  $b = r$ , la quale però non fa aumentare l'ordine del contatto.

Per teoremi del § precedente la sezione retta del cilindro contenente l'elica osculatrice ha il centro di curvatura corrispondente al punto di contatto sulla linea di stringimento della superficie gobba delle normali principali della curva osculata  $L$ , ed oltre ciò le generatrici del cilindro sono parallele alla retta rettificatrice di  $L$ .

Avremo dunque il teorema « l'elica circolare osculatrice a una linea  $L$  dello spazio è descritta sopra un cilindro il cui asse è la minima distanza di due normali principali consecutive; essa sega le generatrici del cilindro sotto un angolo  $i$  tale che  $\tan i = \frac{r}{\rho}$  ».

Per trovare l'elica osculatrice nella sua posizione effettiva, si procede analogamente al caso precedente e si giunge alle equazioni:

$$x = \rho_0 \cos \left( \frac{\text{sen } i}{\rho_0} s \right), \quad y = \rho_0 \text{sen} \left( \frac{\text{sen } i}{\rho_0} s \right), \quad z = s \cdot \cos i$$

quando l'asse delle  $x$  sia la normale principale, quello delle  $z$  la minima distanza di due normali principali consecutive della curva osculata  $L$  e l'asse delle  $y$  la normale al piano dei due primi.

Ricordando i valori di  $\rho_0$  e di  $i$ , e prendendo per nuovi assi la tangente, la normale principale e la binormale di  $L$ , si arriva alle espressioni:

$$x = \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \left\{ \rho + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 s + \frac{\rho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}} \text{sen} \left[ \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\rho} s \right] \right\},$$

$$y = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \cos \left[ \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\rho} s \right]$$

$$z = \frac{\frac{\rho}{r}}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \left\{ s + \frac{\rho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}} \text{sen} \left[ \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\rho} s \right] \right\}$$

le quali ci danno le coordinate d'un punto qualunque dell'elica circolare osculatrice espresse per l'arco.

## Curve osculatrici sulla sfera.

Una curva sulla sfera è completamente nota *di forma* quando sia dato il suo raggio di curvatura geodetica in funzione dell'arco.

Supponiamo che due curve sferiche  $L, L_1$  definite dalle relazioni :

$$\rho = \rho(s) \quad , \quad \rho_1 = \rho_1(s)$$

abbiano in un punto un contatto di ordine  $n$ , cioè  $n + 1$  punti consecutivi coincidenti. La coincidenza di tre punti consecutivi delle curve porta che in quel punto si abbia :

$$\rho(s) = \rho_1(s).$$

Se un quarto punto di  $L_1$  coincide con un quarto punto consecutivo di  $L$ , oltre la relazione precedente bisogna che sia soddisfatta l'altra :

$$\rho(s + ds) = \rho_1(s + ds)$$

la quale relazione, sviluppata limitatamente ai differenziali di 1° ordine, diviene :

$$\rho(s) + \frac{d\rho}{ds} ds = \rho_1(s) + \frac{d\rho_1}{ds} ds ;$$

questa, in causa della prima, si scinde nelle due :

$$\rho(s) = \rho_1(s) \quad , \quad \frac{d\rho(s)}{ds} = \frac{d\rho_1(s)}{ds} .$$

La coincidenza di un altro punto di  $L_1$  con un altro di  $L$ , porta alle condizioni

$$\rho(s) = \rho_1(s) \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds} \quad , \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds^2} .$$

Ragionando analogamente fino a che  $n + 1$  punti consecutivi di  $L_1$  coincidano con  $n + 1$  consecutivi di  $L$ , si giunge al teorema generale *« perchè due curve descritte sulla stessa sfera e definite dalle relazioni  $\rho = \rho(s)$ ,  $\rho_1 = \rho_1(s)$  che ne esprimono i raggi di curvatura geodetica in funzione dell'arco, possano essere collocate in modo da avere in un punto un contatto d'ordine  $n$ , occorre che in*

quel punto siano soddisfatte le seguenti  $n - 1$  relazioni :

www.fhbook.com.cn

$$\rho = \rho_1, \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds}, \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds^2}, \quad \dots \dots \dots \quad \frac{d^{n-2}\rho}{ds^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\rho_1}{ds^{n-2}}.$$

Da questo teorema risulta una notevole conseguenza ; supponiamo che nella relazione caratteristica di una data curva sferica C

$$\rho = \rho(s)$$

entramo  $m$  costanti, nessuna delle quali serva per fissare l'origine degli archi.

Preso una curva sferica qualunque L sarà possibile soddisfare ad  $m + 1$  delle condizioni precedenti servendosi delle  $m$  indeterminate che entrano nella funzione  $\rho(s)$  e del valore incognito  $\sigma$  della porzione dell'arco  $s$  di C compreso fra l'origine degli archi e il punto di contatto di C con L ; con questo viene completamente determinata la forma e la posizione della curva sferica C.

La curva sferica C così determinata viene ad avere colla curva L un contatto d'ordine  $m + 2$  e quindi avrà comune con L  $m + 3$  punti consecutivi.

Dunque « una curva sferica non piana definita dalla relazione  $\rho = \rho(s)$  nella quale entrano  $m$  costanti, nessuna delle quali serva per fissare l'origine degli archi, è determinata da  $m + 3$  punti ».

Consideriamo il caso dell'elica sferica ; chiamando  $i$  l'angolo sotto il quale l'elica sega le generatrici del cilindro e R il raggio della sfera, abbiamo per tale curva

$$R^2 = \rho^2 + r^2 \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2, \quad r = \rho \operatorname{tang} i$$

dalle quali si deduce

$$\rho = \sqrt{R^2 - s^2 \operatorname{cotg}^2 i}, \quad r = \operatorname{tang} i \sqrt{R^2 - s^2 \operatorname{cotg}^2 i}.$$

Se quindi  $\rho_g$  è il raggio di curvatura geodetica della linea sulla sfera, sarà :

$$\rho_g = \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{R \sqrt{R^2 \operatorname{tang}^2 i - s^2}}{s}$$

Potremo dunque dire « nell'elica sferica il raggio di curvatura geodetica  $\rho$  si esprime per l'arco  $s$  nel modo seguente

$$\rho = \frac{R \sqrt{R^2 \operatorname{tang}^2 i - s^2}}{s}.$$

Siccome in questa funzione di  $s$ , una volta fissata la sfera, vi entra la sola costante arbitraria  $i$ , si avrà « l'elica sferica è determinata da 4 punti ».

Data una curva sferica qualunque  $L$ , determiniamo in un suo punto qualunque l'elica sferica osculatrice; se  $\rho$  è il raggio di curvatura sferica di  $L$  e  $\rho_1$  quello dell'elica, potremo nel caso nostro soddisfare alle condizioni seguenti:

$$\rho = \rho_1, \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds}$$

le quali divengono:

$$\frac{R \sqrt{R^2 \operatorname{tang}^2 i - s^2}}{s} = \rho, \quad - \frac{R^2 \operatorname{tang}^2 i}{s^2 \sqrt{R^2 \operatorname{tang}^2 i - s^2}} = \rho'$$

dalle quali si potrà ricavare  $i$  e  $s$ ; il primo valore determina la forma della curva e il secondo valore ne determina la posizione sulla sfera rispetto alla linea  $L$ .

Risolvendo le due precedenti relazioni rapporto alle quantità  $i, s$ , si ha:

$$\operatorname{tang} i = \frac{1}{\rho'} \frac{(R^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 \rho}, \quad s = - \frac{1}{\rho'} \frac{R^2 + \rho^2}{\rho}$$

e il problema propostoci si può considerare come risoluto.

Indicando con  $r_1$  il raggio di curvatura geodetica della prima evoluta sferica  $L_1$  di una linea descritta sopra una sfera di raggio  $R$ , si può trovare  $r_1$  espresso per il raggio di curvatura geodetica  $\rho$  di  $L$ .

Infatti se  $A, B$  sono due punti consecutivi di  $L$ ;  $A_1, B_1$  i corrispondenti di  $L_1$  si ha:

$$AB = ds = R \operatorname{sen} \left( \frac{AA_1}{R} \right) d\epsilon_{1\sigma} = R \operatorname{sen} \left( \frac{H}{R} \right) d\epsilon_{1\sigma},$$

essendo  $d\epsilon_{1\sigma}$  l'angolo di contingenza geodetica di  $L_1$  ed  $H$  l'arco  $AA_1$ . Di qui si deduce:

$$\frac{1}{d\epsilon_{1\sigma}} = \frac{R \operatorname{sen} \left( \frac{H}{R} \right)}{ds};$$

inoltre

$$ds_1 = d(AA_1) = dH,$$

dunque:

$$r_1 = \frac{ds_1}{d\epsilon_{1\sigma}} = R \operatorname{sen} \left( \frac{H}{R} \right) \frac{dH}{ds}.$$

Ora dalla formola :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho = R \operatorname{tang} \left( \frac{H}{R} \right)$$

si deduce :

$$\operatorname{sen} \left( \frac{H}{R} \right) = \frac{\rho}{\sqrt{R^2 + \rho^2}} \quad , \quad \frac{dH}{ds} = \frac{R^2 \frac{d\rho}{ds}}{R^2 + \rho^2}$$

quindi sarà :

$$r_1 = R^3 \frac{\rho \frac{d\rho}{ds}}{(R^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

che è la formola che volevamo stabilire. Per il raggio di curvatura geodetica  $r_2$  della seconda evoluta  $L_2$  di  $L$ , avremo :

$$r^2 = R^3 \frac{r_1 \frac{dr_1}{ds_1}}{(R^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e il secondo membro può facilmente esprimersi per mezzo delle quantità

$$\rho, \frac{d\rho}{ds}, \frac{d^2\rho}{ds^2}, \dots \dots \dots \text{etc.}$$

Allora le condizioni del contatto di 3° ordine

$$\rho = \rho_1 \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds}$$

dimostrano che , per le evolte sferiche delle due linee , risultano eguali i raggi di curvatura geodetica e quindi tali evolte hanno un contatto di 2° ordine. Le condizioni del contatto di 4° ordine

$$\rho = \rho_1 \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds} \quad , \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds_1^2}$$

per le due linee date, contengono le condizioni del contatto di 3° ordine per le evolte e la condizione del contatto di 2° ordine per le evolte seconde.

Seguitando lo stesso ragionamento, si arriva al teorema « se due curve sferiche hanno in un punto un contatto d'ordine n , le loro evolte d'ordine m

(in cui  $m < n$ ) hanno, nel punto corrispondente al punto di tangenza, un contatto d'ordine  $n - m$  ».

Supponiamo viceversa che due curve sferiche abbiano un contatto di 2° ordine e consideriamo due evolventi di quelle curve, di cui indicheremo con  $\rho, \rho_1$  i raggi di curvatura geodetica. Siccome le due evolute hanno eguali i raggi di curvatura geodetica, sarà :

$$R^3 \frac{\rho \frac{d\rho}{ds}}{(R^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = R^3 \frac{\rho_1 \frac{d\rho_1}{ds}}{(R^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ma le due evolventi hanno comune il punto che corrisponde a quello in cui si toccano le evolute, quindi sarà  $\rho = \rho_1$ ; dunque la precedente relazione si scinde nelle due :

$$\rho = \rho_1, \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds},$$

le quali provano che le due evolventi hanno un contatto di 3° ordine. Ripetendo per queste due curve le stesse osservazioni ora fatte e seguitando con metodo analogo, si ha il teorema « se due curve sferiche hanno un contatto d'ordine  $n$ , le loro evolventi d'ordine  $m$ , aventi in comune il punto che corrisponde a quello in cui si toccano le curve date, hanno in questo punto un contatto d'ordine  $n + m$  ».

Sia ora  $L$  una curva sferica,  $L_1$  la sua evoluta ed  $A, A_1$  due punti corrispondenti di queste linee; se nel punto  $A_1$  descriviamo il cerchio osculatore di  $L_1$ , l'evolvente di questo cerchio che passa per  $A$  sarà (per ciò che precede) l'elica sferica osculatrice di  $L$ . Dunque « l'elica sferica osculatrice a una curva sferica  $L$  è la sviluppante geodetica del cerchio osculatore dell'evoluta  $L_1$  di  $L$ .

Vediamo di determinare quelle curve sferiche che possono essere collocate in modo, da avere costantemente un contatto di 2° ordine colla loro prima evoluta, essendo punti corrispondenti un punto qualunque della data linea e il suo centro di curvatura sferica.

Essendo  $r_1$  il raggio di curvatura geodetica dell'evoluta di  $L$ , la condizione da soddisfarsi è :

$$r_1 = \rho, \quad \text{cioè :} \quad \frac{R^3 \frac{d\rho}{ds}}{(R^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

dalla quale si ottiene :

$$R^3 \int \frac{d\rho}{(R^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = s + \text{costante.}$$

La quadratura indicata si effettua senza difficoltà e si ottiene :

$$\frac{2R^2}{(-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + R^2})^2 + R^2} = s + a.$$

Questa relazione, risolta rapporto a  $\rho$ , dà :

$$\rho = R(s + a - R) \sqrt{2R(s + a) - (s + a)^2}.$$

Abbiamo dunque il teorema *« le curve sferiche che possono essere collocate in modo da avere, in ogni loro punto, un contatto di 2° ordine colla loro prima evoluta, sono quelle in cui il raggio di curvatura geodetica  $\rho$  si esprime in funzione dell'arco  $s$  per mezzo dell'equazione*

$$\rho = R(s + a - R) \sqrt{2R(s + a) - (s + a)^2} ».$$

Siano  $L$  e  $L_1$  due geodetiche di coni, dovremo avere fra i loro raggi di curvatura :

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{s}{a_1} \quad , \quad \frac{\rho}{r} = \frac{s}{a}$$

essendo  $a_1, a$  le minime distanze del vertice dalle due curve. Le condizioni d'oscillazione

$$\rho_1 = \rho \quad , \quad \rho_1' = \rho' \quad , \quad \rho_1'' = \rho'' \quad , \quad \dots \quad ; \quad r_1 = r \quad , \quad r_1' = r' \quad , \quad \dots$$

danno :

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{\rho}{r} \quad \text{e quindi} \quad a_1 = a.$$

D'altronde se le curve hanno un contatto almeno del 4° ordine, devono avere coincidenti due rette rettificatrici consecutive, cioè coincidenti i vertici dei coni su cui sono descritte.

Seghiamo i due coni con una sfera avente il centro nel vertice comune e avente per raggio la distanza fra tale vertice e il punto di contatto delle due linee; chiamando  $R_g, R_{1g}$  i raggi di curvatura geodetica delle due sezioni, abbiamo, per quanto si è ricordato al § 1°

$$R_g = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} \quad , \quad R_{1g} = \frac{\rho_1}{1 + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2} = \frac{\rho_1}{1 + \left(\frac{s}{a_1}\right)^2}$$

e queste dimostrano che nel punto di contatto  
www.libtool.com.cn

$$R_g = R_{1g}$$

Inoltre essendo :

$$\frac{dR_g}{d\sigma} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho}{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right) \frac{ds}{d\sigma} \quad , \quad \frac{dR_{1g}}{d\sigma} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho}{1 + \left(\frac{s}{a_1}\right)^2} \right) \frac{ds}{d\sigma}$$

sarà pure

$$\frac{dR_g}{d\sigma} = \frac{dR_{1g}}{d\sigma} , \dots \dots \dots \text{ecc.}$$

Talchè si ha il teorema « perchè due geodetiche coniche abbiano in un punto un contatto d'ordine  $n$  (essendo  $n > 4$ ) occorre che i coni su cui esse sono descritte abbiano i vertici coincidenti, che le minime distanze fra tali vertici e le curve siano le medesime e che le linee sferiche ottenute nei due coni segandoli con una sfera col centro nel vertice dei coni e con raggio eguale alla distanza fra tale punto e il punto di contatto abbiano in questo stesso punto un contatto d'ordine  $n$  ».

Supponiamo che le linee  $L, L_1$  siano tali, che per esse si possa far passare due superficie  $S, S_1$  eguali fra loro determinate da  $n$  punti scelti in posizione generale nello spazio ; le curve  $L, L_1$  potranno avere allora anche  $n - 1$  punti consecutivi comuni senza che le superficie eguali  $S, S_1$  coincidano. Ma se le curve  $L, L_1$  si possono collocare in modo che abbiano  $n$  punti comuni, allora le due superficie  $S, S_1$  devono coincidere.

Dunque « se due linee dello spazio  $L, L_1$  sono tali che per esse si possa far passare due superficie eguali determinate da  $n$  punti, le curve stesse non potranno generalmente avere un contatto d'ordine superiore ad  $n - 2$  se non coincidono le superficie stesse ».

Supponendo che queste superficie siano sfere, abbiamo « due curve descritte sopra due sfere eguali hanno nello spazio un contatto d'ordine  $n$  ( $n > 3$ ) se le dette sfere coincidono e se inoltre sopra tale sfera le curve hanno un contatto d'ordine  $n$  ».

§ 4.

Linee osculatrici piane.

Se nel teorema dimostrato al § precedente supponiamo che il raggio della sfera vada indefinitamente aumentando, la curva sferica data e la sua osculatrice

hanno per limite due curve piane e i loro raggi di curvatura geodetica hanno per limite i raggi di curvatura di tali linee piane.

Avremo dunque il teorema « la condizione necessaria e sufficiente perchè due curve piane  $L, L_1$  possano collocarsi in modo da avere in un punto un contatto d'ordine  $n$ , cioè coincidenti  $n + 1$  punti consecutivi, è che in quel punto siano soddisfatte le  $n - 1$  condizioni :

$$\rho = \rho_1, \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds}, \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho_1}{ds^2}, \dots \dots \frac{d^{n-2}\rho}{ds^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\rho_1}{ds^{n-2}}.$$

Da queste condizioni si ricava « se due curve piane hanno in un punto un contatto d'ordine  $n$  le loro evolute d'ordine  $m$  (essendo  $m < n$ ) hanno nel punto corrispondente un contatto d'ordine  $n - m$  ».

Così pure « se due curve piane hanno in un punto un contatto d'ordine  $n$ , due loro evolventi d'ordine  $m$ , aventi a comune il punto che corrisponde a quello di contatto delle evolute, hanno quivi un contatto d'ordine  $n + m$  ».

Applicando il penultimo teorema al caso in cui la curva osculatrice sia una sviluppannte di cerchio, abbiamo « la sviluppannte di cerchio osculatrice a una curva  $L$  in un punto  $A$  è sviluppannte del cerchio che oscula l'evoluta di  $L$  nel punto corrispondente di  $A$ .

Inoltre, per un teorema dimostrato al § precedente, se una linea piana, non circolare, è definita dalla relazione  $\rho = f(s)$  e nella funzione  $f(s)$  entrano  $m$  parametri nessuno dei quali serve a fissare l'origine degli archi, la curva è determinata da  $m + 3$  punti ».

Così ad esempio la spirale logaritmica  $\rho = as$ , la cicloide  $\rho = \sqrt{a^2 - s^2}$ , la sviluppannte di cerchio  $\rho = \sqrt{a^2 + s^2}$  sono determinate da quattro punti.

Consideriamo la spirale logaritmica osculatrice; per essa abbiamo  $\rho_1 = s \cdot \cotg i$ , essendo  $i$  l'angolo costante sotto il quale la curva sega i raggi vettori che concorrono nel polo.

Se dunque  $\rho$  è il raggio di curvatura della curva osculata, le condizioni d'osculatione sono :

$$s \cotg i = \rho, \quad \cotg i = \rho'.$$

Da queste si ha nel punto di contatto

$$s = \frac{\rho}{\cotg i} = \frac{\rho}{\rho'}$$

e quindi « per la spirale logaritmica osculatrice a una curva piana  $L$ , l'angolo  $i$  sotto il quale la curva sega i raggi vettori che vanno al polo e l'arco  $s$  com-

preso fra il polo e il punto di contatto sono definiti dalle relazioni  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\cot g i = \frac{d\rho}{ds} \quad , \quad s = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{ds}} .$$

Indicando con R la distanza fra il polo della spirale e il punto di contatto, si ha :

$$R = \rho_1 \operatorname{sen} i = \rho \operatorname{sen} i = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho'^2}} ;$$

se dunque  $x_0, y_0$  sono le coordinate del polo riferito alla tangente della curva L (asse delle  $x$ ) e alla normale (asse delle  $y$ ), sarà :

$$x_0 = \frac{\rho\rho'}{1 + \rho'^2} \quad , \quad y_0 = \frac{\rho}{1 + \rho'^2} .$$

Indichiamo con  $(\cos \alpha, \cos \beta)$  ,  $(\cos \lambda, \cos \nu)$  i coseni direttivi della tangente e della normale di L rapporto a un sistema d'assi ortogonali e con  $x, y$  le coordinate di un punto qualunque di L, avremo per le coordinate  $\xi, \eta$  di un punto qualunque della linea dei poli :

$$\xi = x + \frac{\rho\rho'}{1 + \rho'^2} \cos \alpha + \frac{\rho}{1 + \rho'^2} \cos \lambda \quad , \quad \eta = y + \frac{\rho\rho'}{1 + \rho'^2} \cos \beta + \frac{\rho}{1 + \rho'^2} \cos \nu .$$

Per conseguenza :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{2\rho'(1 + \rho'^2 - \rho\rho'')}{(1 + \rho'^2)^2} (\rho' \cos \alpha + \cos \lambda) ,$$

$$\frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{2\rho'(1 + \rho'^2 - \rho\rho'')}{(1 + \rho'^2)^2} (\rho' \cos \beta + \cos \nu) ,$$

dalle quali si ha :

$$(10) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{(1 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{2\rho'(1 + \rho'^2 - \rho\rho'')} .$$

Dunque risulta :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{\rho' \cos \alpha + \cos \lambda}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \quad , \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{\rho' \cos \beta + \cos \nu}{\sqrt{1 + \rho'^2}} .$$

Derivando nuovamente queste eguaglianze ed applicando la (10), abbiamo :

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \frac{-\cos\alpha + \rho' \cos\lambda}{2\rho\rho'}, \quad \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} = \frac{-\cos\beta + \rho' \cos\mu}{2\rho\rho'}.$$

Se chiamiamo  $\theta$  l'angolo che la tangente alla curva  $L$  fa colla tangente corrispondente alla curva  $L_0$  luogo dei poli delle spirali logaritmiche osculatrici di  $L$  abbiamo :

$$\cos\theta = \cos\alpha \frac{d\xi}{d\sigma} + \cos\beta \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{\rho'}{\sqrt{1 + \rho'^2}} = \cos i$$

da cui

$$\theta = i.$$

Dunque « le tangenti corrispondenti delle curve  $L$ ,  $L_0$  formano fra loro lo stesso angolo che la spirale osculatrice fa coi raggi vettori che escono dal polo ».

Abbiamo poi, chiamando  $\rho_0$  il raggio di curvatura di  $L_0$  :

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)^2}} = \frac{2\rho\rho'}{\sqrt{1 + \rho'^2}}.$$

Se  $A$  è il punto di contatto,  $C$  il centro di curvatura di  $L$  in  $A$  e  $P$  il polo della spirale, il triangolo  $APC$  è rettangolo in  $P$ ; osservando che

$$\frac{\rho'}{\sqrt{1 + \rho'^2}} = \cos i = \cos C,$$

sarà

$$\rho_0 = 2\rho \cdot \cos i = 2 AC \cdot \cos C = 2 \cdot PC$$

e quindi « il raggio di curvatura della linea dei poli delle spirali logaritmiche osculatrici a una curva piana è il doppio del segmento che unisce il centro di curvatura della data linea col polo della spirale ».

Osservando poi che  $\rho\rho' = \rho_1$  raggio di curvatura dell'evolva di  $L$ , sarà :

$$\rho_0 = 2\rho_1 \operatorname{sen} i.$$

Cioè « il raggio di curvatura della linea dei poli delle spirali logaritmiche osculatrici a una curva piana è eguale al doppio del raggio di curvatura dell'evolva di questa linea, moltiplicato pel seno dell'angolo sotto il quale la spi-

rale sega i raggi vettori che escono dal polo ».  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

Dalla formola  $\rho = \frac{2\rho\rho'}{\sqrt{1+\rho'^2}}$  si deduce

$$\rho' \sqrt{4\rho^2 - \rho_0^2} = \rho_0$$

e quindi se  $\rho_0$  è costante, con un'integrazione si ha :

$$2\rho \sqrt{4\rho^2 - \rho_0^2} - \rho_0^2 \log \{ 2\rho + \sqrt{4\rho^2 - \rho_0^2} \} = 4\rho_0 s$$

la quale definisce le curve in cui il luogo dei poli delle spirali logaritmiche osculatrici è una circonferenza di raggio  $\rho_0$ .

Se vogliamo quelle curve in cui le spirali logaritmiche osculatrici hanno comune il polo, basterà notare che dovendo essere

$$\frac{d\sigma}{ds} = 0$$

per la (10) sarà soddisfatta la condizione :

$$\rho\rho'' - \rho'^2 - 1 = 0$$

la quale, integrata, dà :

$$\rho = \frac{1}{2ak} \{ e^{-as} + k^2 e^{as} \}$$

essendo  $a$  e  $k$  due costanti arbitrarie.

Tale equazione definisce le curve domandate..

Siano  $L_1$  e  $L$  due eliche definite dalle relazioni

$$\rho_1 = \rho_1(s) , r_1 = \rho_1(s) \operatorname{tang} i_1 ; \quad \rho = \rho(s) , r = \rho(s) \operatorname{tang} i.$$

Le condizioni d'osculatione divengono :

$$\rho_1 = \rho , \rho_1' = \rho' , \rho_1'' = \rho'' , \dots ; \quad \operatorname{tang} i_1 = \operatorname{tang} i \rho , \operatorname{tang} i_1 \rho_1' = \operatorname{tang} i \rho' , \dots$$

le quali si riducono alle seguenti :

$$i_1 = i , \rho_1 = \rho , \rho_1' = \rho' , \rho_1'' = \rho'' , \dots$$

Se dunque indichiamo con  $R_1, R$  i raggi di curvatura delle sezioni rette dei

due cilindri, abbiamo :

$$r_1 = r_1, \quad R_1 = R_1, \quad R_1'' = R_1', \quad R_1''' = R_1'', \dots$$

Perciò « perchè due eliche possano avere in un punto un contatto d'ordine  $n$  (essendo  $n > 3$ ) occorre che esse seghino le generatrici dei rispettivi cilindri sotto il medesimo angolo, e che le sezioni rette di questi cilindri abbiano nel punto corrispondente un contatto d'ordine  $n$  ».

### § 5.

#### Conica osculatrice a una linea piana.

Il raggio di una conica non si esprime per una funzione semplice dell'arco ed è quindi più opportuno, volendo determinare la conica osculatrice a una data linea piana, attenersi al metodo ordinario delle coordinate cartesiane.

L'equazione di una conica riferita alla tangente (asse delle  $x$ ) e alla normale (asse delle  $y$ ) in un determinato punto A di una curva piana L, mettendo la condizione che tale conica sia tangente in A alla L, è la seguente :

$$(11) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0.$$

Per tale conica e per la curva data L l'ordinata  $y$  e la sua derivata  $\frac{dy}{dx}$  sono nulle in A; perchè dunque la conica sia osculatrice ad L ci resta da esprimere che nel punto A tanto per la conica quanto per la curva acquistano il medesimo valore le tre quantità

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}.$$

Derivando successivamente la (11) rapporto ad  $x$  e facendo poi nel risultato  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  (condizioni che si verificano nel punto A), abbiamo :

$$(12) \quad D \frac{d^2y}{dx^2} + A = 0, \quad D \frac{d^3y}{dx^3} + 3B \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$D \frac{d^4y}{dx^4} + 4B \frac{d^3y}{dx^3} + 3C \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 = 0.$$

Per la curva L indichiamo con  $\rho$  il raggio di curvatura, con  $\alpha$  l'angolo che la tangente fa coll'asse delle  $x$  e con  $\xi, \eta$  le coordinate dei punti della linea.

Avremo nel punto A :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} , \quad d\xi = \cos \alpha \cdot ds , \quad d\eta = \sin \alpha \cdot ds$$

d'onde :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \tan \alpha .$$

Di qui si deduce :

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d \tan \alpha}{\cos \alpha \, ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha}$$

e siccome nel punto A ,  $\cos \alpha = 1$  , sarà :

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{\rho} .$$

Per la derivata terza, sarà :

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho \cos^3 \alpha} \right) = \frac{3}{\rho^3} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} - \frac{1}{\rho^2 \cos^4 \alpha} \frac{d\rho}{ds} ;$$

dunque nel punto A :

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} = - \frac{1}{\rho^3} \frac{d\rho}{ds} .$$

Calcolando in modo analogo  $\frac{d^4\eta}{d\xi^4}$  , si ha :

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = \frac{3}{\rho^3} + \frac{2}{\rho^3} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2\rho}{ds^2} .$$

Dunque per la curva data L nel punto A abbiamo :

$$(13) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{\rho} , \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = - \frac{1}{\rho^3} \frac{d\rho}{ds} , \quad \frac{d^4\eta}{d\xi^4} = \frac{3}{\rho^3} + \frac{2}{\rho^3} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2\rho}{ds^2} .$$

Stante l'eguaglianza delle derivate delle ordinate della curva e della conica, si può nelle (12) alle quantità  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$  ,  $\frac{d^4y}{dx^4}$  sostituire i secondi membri delle (13) ; si ottengono così tre relazioni dalle quali è facile ricavare i rapporti  $\frac{A}{D}$  ,  $\frac{B}{D}$  ,  $\frac{C}{D}$

e si ottiene :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{A}{D} = -\frac{1}{\rho}, \quad \frac{B}{D} = \frac{d\rho}{3\rho}, \quad \frac{C}{D} = \frac{3 \frac{d^2\rho}{ds^2} - 2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 9}{9\rho}.$$

Dunque « in un punto qualunque di una curva piana la conica osculatrice (che ha colla curva data un contatto di 4° ordine) riferita alla tangente (asse delle  $x$ ) e alla normale (asse delle  $y$ ) è rappresentata dall'equazione

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0$$

in cui i coefficienti hanno i seguenti valori

$$A = -9, \quad B = 3 \frac{d\rho}{ds}, \quad C = 3 \frac{d^2\rho}{ds^2} - 2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 9, \quad D = 9\rho.$$

Da queste relazioni si deduce :

$$B^2 - AC = 9 \left[ 3 \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 9 \right]$$

da cui si conclude : « la conica osculatrice di una curva piana in un dato punto di essa è un'ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda che in quel punto è negativa, nulla e positiva la quantità  $3 \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 9$  ».

Come applicazione ci proponiamo la ricerca di tutte le linee piane di cui tutte le coniche osculatrici sono delle parabole ; queste curve sono definite dalla condizione :

$$3\rho'' - \rho'^2 = 9$$

la quale, col porre  $\rho' = y$ , diviene :

$$3y' - y^2 - 9 = 0, \quad \text{d'onde} \quad \frac{d\left(\frac{y}{3}\right)}{1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2} = ds.$$

Integrando ed indicando con  $k$  una costante arbitraria risulta :

$$y = \rho' = 3 \operatorname{tang}(s + k)$$

d'onde :

$$\rho = 3 \int \operatorname{tang}(s + k) ds + 3 \log h = 3 \log \left[ \frac{h}{\cos(s + k)} \right].$$

Dunque: « le curve in cui tutte le coniche osculatrici sono parabole sono quelle rappresentate dall'equazione

$$\rho = 3 \log \left[ \frac{h}{\cos(s+k)} \right] ».$$

Se  $\lambda$  è l'angolo che uno degli assi della conica fa coll'asse delle  $x$ , abbiamo:

$$(14) \quad \text{tang } 2\lambda = \frac{2B}{A-C} = \frac{6\rho'}{2\rho'^2 - 3\rho''}.$$

La condizione che sia  $\lambda = \frac{\pi}{4}$  è equivalente all'altra che sia:

$$3\rho'' = 2\rho'^2;$$

questa si può scrivere

$$\frac{3\rho''}{\rho'^2} ds = 2 ds$$

da cui integrando:

$$\frac{3}{\rho'} = -b - 2s.$$

Di qui si trae:

$$d\rho = -\frac{3}{b+2s} ds$$

donde:

$$\rho = a - \frac{3}{2} \int \frac{2 ds}{b+2s} = a - \frac{3}{2} \log(b+2s).$$

Dunque: « le sole curve in cui le coniche osculatrici hanno uno degli assi inclinato dell'angolo  $\frac{\pi}{4}$  sulla tangente sono quelle definite dall'equazione

$$\rho = a - \frac{3}{2} \log(b+2s) ».$$

Consideriamo più generalmente le curve in cui un asse delle coniche osculatrici è inclinato sulla tangente alla linea di un angolo costante  $\alpha$ .

La formola precedente si può scrivere:

$$(3 \text{ tang } 2\alpha) \rho'' - (2 \text{ tang } 2\alpha) \rho'^2 + 6 \rho' = 0$$

la quale, col porre  $y' = \rho'$ , diviene :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(3 \operatorname{tang} 2\alpha) y' - (2 \operatorname{tang} 2\alpha) y^2 + 6y = 0$$

d'onde deriva :

$$3 \operatorname{tang} 2\alpha \int \frac{dy}{2 \operatorname{tang} 2\alpha \cdot y^2 - 6y} = s + k.$$

Eseguendo questa quadratura, si ha :

$$\frac{4}{2} \operatorname{tang} 2\alpha \cdot \log \left[ \frac{2 \operatorname{tang} 2\alpha \cdot y - 6}{y} \right] = s + k$$

e risolvendo tale relazione rapporto ad  $y$ , col cambiare altresì  $\frac{2h}{\operatorname{tang} 2\alpha}$  in  $k$ , si ha:

$$y = \rho' = \frac{6}{2 \operatorname{tang} 2\alpha - k e^{2s \operatorname{cotg} 2\alpha}}$$

dalla quale otteniamo facilmente

$$(15) \quad \rho = 6 \int \frac{ds}{2 \operatorname{tang} 2\alpha - k e^{2s \operatorname{cotg} 2\alpha}} + \text{cost.}$$

Dunque : « le curve in cui uno degli assi delle coniche osculatrici è inclinato sulla tangente dell'angolo costante  $\alpha$ , sono quelle definite dalla relazione (15) ».

Troviamo le coordinate del centro della conica osculatrice , indicandole con  $x_0, y_0$ , si avrà :

$$(16) \quad x_0 = -\frac{BD}{B^2 - AC} = \frac{3\rho\rho'}{9 + \rho'^2 - 3\rho''} \quad , \quad y_0 = \frac{AD}{B^2 - AC} = \frac{9\rho}{9 + \rho'^2 - 3\rho''} .$$

Se confrontiamo queste espressioni con quelle che ci danno le coordinate del polo della spirale logaritmica osculatrice, abbiamo che « il centro della conica osculatrice di una linea piana qualunque non coincide mai col polo della spirale logaritmica osculatrice alla stessa curva ».

Se chiamiamo  $\theta$  l'angolo che la tangente alla curva osculata fa col diametro della conica osculatrice che passa pel punto di contatto, abbiamo :

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{\rho'} .$$

Da questa relazione si deduce :

$$\operatorname{tang} \theta \cdot \rho' ds = 3 ds$$

e quindi, se  $\theta$  è costante, coll'integrazione risulta :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\rho = 3 \cotg \theta \cdot s + a.$$

La curva data è quindi una spirale logaritmica, e siccome nella spirale logaritmica segante i raggi vettori sotto l'angolo  $i$  si ha :

$$\rho = \cotg i \cdot s,$$

avremo :

$$\cotg i = 3 \cotg \theta, \quad \text{d'onde} \quad \text{tang } \theta = 3 \text{ tang } i.$$

Dunque : « solamente nella spirale logaritmica i diametri delle coniche osculatrici passanti per i punti di contatto sono inclinati sulla tangente d'un angolo costante  $\theta$  ; la tangente di tale inclinazione è tripla della tangente dell'inclinazione  $i$  della spirale sui raggi vettori uscenti dal polo ».

Nel caso che la conica osculatrice sia un'ellisse o un'iperbolo, determiniamone la lunghezza degli assi ; se, rispetto agli assi, la conica è rappresentata dall'equazione :

$$Mx^2 + Ny^2 + P = 0,$$

si ha, come è noto :

$$M + N = A + C, \quad MN = AC - B^2,$$

d'onde :

$$M = \frac{1}{2} \left\{ (A + C) + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right\}, \quad N = \frac{1}{2} \left\{ (A + C) - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right\}.$$

Rispetto alla quantità  $P$ , si ha :

$$P = Dy_0$$

essendo  $y_0$  data dalla seconda delle (16) ; sostituendo in queste equazioni i valori trovati precedentemente, abbiamo :

$$M = \frac{1}{2} \left\{ 3 \rho'' - 2 \rho'^2 - 18 + \sqrt{36 \rho'^2 + (3 \rho'' - 2 \rho'^2)^2} \right\},$$

$$N = \frac{1}{2} \left\{ 3 \rho'' - 2 \rho'^2 - 18 - \sqrt{36 \rho'^2 + (3 \rho'' - 2 \rho'^2)^2} \right\}$$

$$P = \frac{81 \rho^2}{9 + \rho'^2 - 3 \rho''}.$$

Ma se  $a, b$  sono i due semiassi della conica, abbiamo

$$a = \sqrt{-\frac{P}{M}}, \quad b = \sqrt{-\frac{P}{N}},$$

dunque

$$a = \frac{9\rho\sqrt{2}}{\sqrt{(9 + \rho'^2 - 3\rho'') [18 + 2\rho'^2 - 3\rho'' - \sqrt{36\rho'^2 + (3\rho'' - 2\rho'^2)^2}]}}$$

$$b = \frac{9\rho\sqrt{2}}{\sqrt{(9 + \rho'^2 - 3\rho'') [18 + 2\rho'^2 - 3\rho'' + \sqrt{36\rho'^2 + (3\rho'' - 2\rho'^2)^2}]}}.$$

Osservando che l'area dell'ellisse i cui semiassi sono  $a, b$  è data da  $\pi ab$ , avremo, chiamando  $S$  l'area dell'ellisse osculatrice :

$$S = \frac{27\pi\rho^2}{[9 + \rho'^2 - 3\rho'']^{\frac{3}{2}}}.$$

Mettiamo la condizione che l'area dell'ellisse osculatrice sia proporzionale all'area del cerchio osculatore; chiamando  $k$  il rapporto fra l'area del cerchio e quella dell'ellisse, abbiamo :

$$(9 + \rho'^2 - 3\rho'')^{\frac{3}{2}} = 27k$$

da cui :

$$9 + \rho'^2 - 3\rho'' = 9\sqrt[3]{k^2},$$

che si può scrivere :

$$3\rho'' - \rho'^2 = a$$

avendo posto per brevità :

$$a = 9(s - \sqrt[3]{k^2}).$$

Da quella relazione si ricava :

$$\frac{3\rho''}{\rho'^2 + a} = 1$$

la quale, moltiplicata per  $ds$  ed integrata, dà :

$$\rho' = \sqrt{a} \operatorname{tang} \left( m + \frac{\sqrt{a}}{3} s \right) , \quad \text{se } a > 0$$

$$\rho' = -\frac{3}{s+m} , \quad \text{se } a = 0$$

$$\rho' = \sqrt{-a} \frac{1+me \frac{2\sqrt{-a}s}{3}}{1+me \frac{2\sqrt{-a}s}{3}} , \quad \text{se } a < 0.$$

Da queste eguaglianze, con altre derivazioni, ricaviamo rispettivamente :

$$(17) \quad \rho = -3 \log \cos \left( m + \frac{\sqrt{a}}{3} s \right) ; \quad \rho = -3 \log(m+s) ;$$

$$\rho = \sqrt{a} \int \frac{1+me \frac{2\sqrt{-a}s}{3}}{1-me \frac{2\sqrt{-a}s}{3}} ds = \sqrt{-a} s - \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{2}} \log \left( 1 - me \frac{2\sqrt{-a}s}{3} \right)$$

e queste, in causa del valore di  $a$ , si può dire che valgono rispettivamente nei casi di  $k < 1$ ,  $k = 1$ ,  $k > 1$ .

Per risolvere completamente il problema bisogna vedere fra le curve piane definite dalle relazioni precedenti quali sono quelle in cui le coniche osculatrici sono delle ellissi. Avendosi nel 1° caso :

$$\rho' = \sqrt{a} \operatorname{tang} \left( m + \frac{\sqrt{a}}{3} s \right) , \quad \rho'' = \frac{a}{3} \frac{1}{\cos^2 \left( m + \frac{\sqrt{a}}{3} s \right)}$$

sarà :

$$3\rho'' - \rho'^2 - 9 = a - 9.$$

La condizione dunque perchè la conica osculatrice sia un'ellisse, diviene nel primo caso :  $a - 9 < 0$ , cioè, a causa del valore di  $a$ ,

$$1 - \sqrt{k^2} < 1$$

e questa è sempre soddisfatta.

Nel secondo caso, cioè quando  $k = 1$ , si ha :

$$\rho' = \frac{-3}{m+s} \quad , \quad \rho'' = \frac{3}{(m+s)^2}$$

e quindi :

$$3\rho'' - \rho'^2 - 9 = -9$$

la quale dimostra che presentemente la conica è un'ellisse.

Nel terzo caso poi, in cui  $k > 1$ , si ha :

$$\rho' = \sqrt{a} \frac{1 + me \frac{2\sqrt{-a}}{3}s}{1 - me \frac{2\sqrt{-a}}{3}s} \quad , \quad \rho'' = -\frac{4am}{3} \frac{e \frac{2\sqrt{-a}}{3}s}{\left[1 - me \frac{2\sqrt{-a}}{3}s\right]^2}$$

e quindi se ne deduce, dopo qualche calcolo :

$$3\rho'' - \rho'^2 - 9 = a - 9$$

e siccome ora  $a < 0$ , si conclude che anche in questo caso la conica osculatrice è un'ellisse.

Dunque : « le curve piane in cui il rapporto fra l'area del cerchio osculatore e l'area dell'ellisse osculatrice è una costante  $k$  sono rappresentate da una delle equazioni seguenti :

$$\rho = -3 \log \cos \left\{ m + \sqrt{1 - \sqrt{k^2} \cdot s} \right\} ;$$

$$\rho = -3 \log(s + m) ; \quad \rho = 3 \sqrt{-1 + \sqrt{k^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left( 1 - me \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{k^2}}}{\sqrt{-1 + \sqrt{k^2}}} \right) \right\}$$

a seconda che  $k$  è minore, eguale o maggiore dell'unità ».

Vediamo se vi sono delle curve piane in cui le coniche osculatrici passano per il centro di curvatura. Se nell'equazione generale della conica osculatrice poniamo  $x = 0$ , risulta

$$y_0(Cy_0 + 2D) = 0$$

che dà le due soluzioni :

$$y_0 = 0 \quad , \quad y_0 = -\frac{2D}{C} = \frac{-18\rho}{3\rho'' - 2\rho'^2 - 9}$$

Per le curve domandate, dovendo riuscire  $y_0 = \rho$ , avremo :

$$\frac{18\rho}{9 + 2\rho'^2 - 3\rho''} = \rho$$

da cui si ricava :

$$3\rho'' - 2\rho'^2 + 9 = 0$$

che si può scrivere :

$$\frac{3\rho''}{2\rho'^2 - 9} = 1$$

d'onde :

$$3 \int \frac{d\rho'}{2\rho'^2 - 9} = s + m.$$

Eseguendo la quadratura indicata, viene :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}\rho' - 3}{\sqrt{2}\rho' + 3} = s + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log m$$

d'onde :

$$\rho' = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1 + me^{2\sqrt{2}s}}{1 - me^{2\sqrt{2}s}}$$

e quindi :

$$\rho = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{1 + me^{2\sqrt{2}s}}{1 - me^{2\sqrt{2}s}} ds.$$

Eseguendo questa quadratura, si ottiene :

$$\rho = \frac{3}{\sqrt{2}} s - \frac{3}{2} \log (1 - me^{2\sqrt{2}s}).$$

Per trovare la natura della conica osculatrice, osserviamo che :

$$3\rho'' - \rho'^2 - 9 = 3\rho'' - 2\rho'^2 + 9 + \rho'^2 - 18 = \rho'^2 - 18$$

e perciò tale conica sarà un'ellisse, una parabola, un'iperbole a seconda che è negativa, nulla, positiva la quantità  $\rho'^2 - 18$ . Ora, in causa del valore di  $\rho$ , ab-

biamo :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\begin{aligned} \rho'^2 - 18 &= \frac{9}{2} \frac{(1 + me^{2\sqrt{2}s})^2}{(1 - me^{2\sqrt{2}s})^2} - 18 = \\ &= \frac{9}{2(1 - me^{2\sqrt{2}s})^2} \left\{ (1 + me^{2\sqrt{2}s})^2 - 4(1 - me^{2\sqrt{2}s})^2 \right\}. \end{aligned}$$

Siccome il primo fattore è sempre positivo, basta considerare il secondo che si può scrivere così :

$$-3 \left( me^{2\sqrt{2}s} - \frac{1}{3} \right) \left( me^{2\sqrt{2}s} - 3 \right);$$

esso è dunque positivo per i valori di  $me^{2\sqrt{2}s}$  compresi fra  $\frac{1}{3}$  e 3, è nullo per i valori di  $me^{2\sqrt{2}s}$  eguali a  $\frac{1}{3}$  ovvero a 3 ed è negativo per i valori di  $me^{2\sqrt{2}s}$  minori di  $\frac{1}{3}$  o maggiori di 3.

Dunque : « le curve in cui le coniche osculatrici passano costantemente per il centro di curvatura sono quelle definite dalla relazione

$$\rho = \frac{3}{\sqrt{2}} s - \frac{3}{2} \log \left( 1 - me^{2\sqrt{2}s} \right),$$

e tale conica è un'ellisse per i valori di  $s$  minori di

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left( \frac{1}{3m} \right)$$

e per quelli maggiori di

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left( \frac{3}{m} \right),$$

è una parabola per i valori di  $s$  eguali a una di queste quantità ed è un'iperbole per i valori di  $s$  compresi fra quelle quantità ».

Determiniamo quelle curve in cui le coniche osculatrici sono ellissi passanti per il centro di curvatura e tali che le loro aree abbiano un rapporto costante

con quella dei cerchi osculatori. In questo caso devono essere soddisfatte contemporaneamente le due condizioni:

$$3\rho'' - 2\rho'^2 + 9 = 0 \quad , \quad 3\rho'' - \rho'^2 = \alpha$$

dalle quali si deduce:

$$\rho'^2 = \alpha + 9 = 9 \left( 2 - \sqrt[3]{k^2} \right)$$

da cui:

$$\rho = 3 \sqrt{2 - \sqrt[3]{k^2}} \cdot s$$

e perchè  $\rho$  sia reale si richiede che sia:

$$\sqrt[3]{k^2} < 2 \quad , \quad \text{cioè} \quad k < 2\sqrt{2} \quad .$$

Ora siccome la prima delle precedenti condizioni per il valore trovato di  $\rho$  diviene

$$18 \left( 2 - \sqrt[3]{k^2} \right) = 9 \quad \text{d'onde} \quad k = \sqrt{\frac{27}{8}}$$

si vede che è soddisfatta la condizione precedente  $k < 2\sqrt{2}$

Si conclude allora

$$\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2} s$$

e si ha il teorema *a la sola curva in cui le coniche osculatrici sono ellissi passanti per i centri di curvatura e tali che le loro aree siano proporzionali a quelle dei cerchi osculatori, è la spirale logaritmica segante i raggi vettori uscenti dal polo sotto l'angolo  $i$  definito dalla relazione  $\text{tang } i = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ; il rapporto costante fra*

*l'area del cerchio osculatore e quella dell'ellisse osculatrice è  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$*

Si è trovato nel § precedente che l'angolo costante  $i$  sotto il quale la spirale logaritmica osculatrice a una data linea  $L$  sega i raggi vettori uscenti dal polo è dato dall'equazione:

$$\text{tang } i = \frac{1}{\rho}$$

da cui :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$i = \text{arc tang } \frac{1}{\rho'}$$

e derivando

$$\frac{di}{ds} = - \frac{\rho''}{1 + \rho'^2}$$

se dunque sarà

$$\frac{di}{ds} = \text{costante} = h,$$

avremo :

$$\text{arc tang } \frac{1}{\rho'} = i = hs + a$$

d' onde :

$$\rho' = \text{cotg}(hs + a) = \text{tang}(hs + m).$$

Perciò :

$$\rho = \int \text{tang}(hs + m) ds = - \frac{1}{h} \log \cos(m + hs).$$

Questa formola diviene identica alla prima delle (17) quando si abbia

$$h = \frac{1}{3}, \quad a = 1.$$

Quest'ultima condizione equivalendo all'altra

$$9 \left( 1 - \sqrt{k^2} \right) = 1$$

dà per  $k$  il seguente valore :

$$k = \frac{16 \sqrt{2}}{27}.$$

Dunque : « fra le curve in cui le rette che ne congiungono i punti coi poli delle spirali logaritmiche osculatrici segano le linee sotto l'angolo  $i = hs + m$  funzione lineare dell'arco, ve ne ha una in cui l'area del cerchio osculatore è proporzionale all'area dell'ellisse osculatrice ; tale curva è quella in cui  $h = \frac{1}{3}$  e il rapporto fra l'area del cerchio e quella dell'ellisse osculatrice è  $\frac{16\sqrt{2}}{27}$  ».

Passiamo ora a determinare quelle linee in tutti i punti delle quali le coniche osculatrici sono delle iperbole equilatera. Dalle formole che danno i semiassi della conica osculatrice, ricaviamo :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{18 + 2\rho'^2 - 3\rho'' + \sqrt{36\rho'^2 + (3\rho'' - 2\rho'^2)^2}}{18 + 2\rho'^2 - 3\rho'' - \sqrt{36\rho'^2 + (3\rho'' - 2\rho'^2)^2}} ;$$

osservando quindi che per le curve domandate deve riescire  $\frac{a^2}{b^2} = -1$ , avremo :

$$3\rho'' - 2\rho'^2 - 18 = 0.$$

Da questa relazione, che può essere scritta :

$$\frac{3\rho''}{2(\rho'^2 + 9)} = 1$$

si deduce, integrando :

$$\frac{1}{2} \text{arc tang} \left( \frac{1}{3} \rho' \right) = s + \frac{m}{2}$$

da cui :

$$\rho' = 3 \text{ tang} (m + 2s).$$

Abbiamo dunque con altra integrazione :

$$\rho = -\frac{3}{2} \log. \cos (m + 2s).$$

Perciò : « le curve piane in cui tutte le coniche osculatrici sono delle iperbole equilatera sono quelle definite dall'equazione

$$\rho = -\frac{3}{2} \log. \cos (m + 2s) \text{ »}.$$

### Applicazione alla spirale logaritmica.

Supponiamo che la linea data sia una spirale logaritmica  $\rho = as$  ; avendosi in questo caso :

$$\rho' = a \quad , \quad \rho'' = 0$$

sarà :

$$3\rho'' - \rho'^2 - 9 = -(a^2 + 9)$$

e quindi le coniche osculatrici sono tutte ellissi. Le coordinate del centro di tale ellisse, riferita alla tangente e alla normale della spirale, sono :

$$x_0 = \frac{3\rho\rho'}{\rho'^2 + 9} = \frac{3a^2s}{a^2 + 9} \quad , \quad y_0 = \frac{9\rho}{\rho'^2 + 9} = \frac{9as}{a^2 + 9} .$$

Chiamando quindi  $\xi, \eta$  le coordinate del centro riferito a un sistema d'assi fissi e  $x, y$  le coordinate del corrispondente punto della spirale, sarà :

$$\xi = x + \frac{3a^2s}{a^2 + 9} \cos \alpha + \frac{9as}{a^2 + 9} \cos \lambda \quad , \quad \eta = y + \frac{3a^2s}{a^2 + 9} \cos \beta + \frac{9as}{a^2 + 9} \cos \mu .$$

Di qui, avendosi :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{4a^2}{a^2 + 9} \cos \alpha + \frac{12a}{a^2 + 9} \cos \lambda \quad , \quad \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{4a^2}{a^2 + 9} \cos \beta + \frac{12a}{a^2 + 9} \cos \mu$$

si deduce :

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\sqrt{a^2 + 9}}{4a}$$

d'onde :

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + 9}}{4a} \cdot \sigma .$$

Abbiamo dunque :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9}} \cos \alpha + \frac{3}{\sqrt{a^2 + 9}} \cos \lambda \quad , \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9}} \cos \beta + \frac{3}{\sqrt{a^2 + 9}} \cos \mu$$

d'onde si deduce :

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \frac{a \cos \lambda - 3 \cos \alpha}{4a} \cdot \frac{1}{\rho} \quad , \quad \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} = \frac{a \cos \mu - 3 \cos \beta}{4a} \cdot \frac{1}{\rho}$$

e queste ci offrono facilmente per il raggio di curvatura  $\rho_1$  del luogo dei centri delle ellissi osculatrici :

$$(18) \quad \rho_1 = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 9}} \rho = \frac{4a^2}{\sqrt{a^2 + 9}} s = a\sigma$$

la quale dimostra il teorema : « il luogo dei centri delle ellissi osculatrici a una spirale logaritmica è una spirale logaritmica eguale alla data » .

Applicando le formole che danno la lunghezza dei semiassi della conica osculatrice, abbiamo nel nostro caso :

$$a = \frac{9\rho}{(a^2 + 9)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + 9}}}, \quad b = \frac{9\rho}{(a^2 + 9)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + 9}}}$$

cioè : « *gli assi dell'ellisse osculatrice sono proporzionali all'arco della spirale* » e conseguentemente : « *le ellissi osculatrici a una stessa spirale logaritmica sono tutte simili fra loro* ».

Calcolando l'area dell'ellisse osculatrice, si ha :

$$\pi ab = \pi \rho^2 \frac{9}{(a^2 + 9)^{\frac{3}{2}}};$$

dunque : « *l'area del cerchio osculatore alla spirale logaritmica è sempre maggiore dell'area dell'ellisse osculatrice e il rapporto delle due aree è costante* ».

Questa proprietà fa rientrare la spirale nella classe di curve determinate precedentemente ; infatti se nell'integrale che compare al secondo membro dell'ultima delle (17) si fa  $m = 0$ , si ha

$$\rho = \sqrt{-a} \cdot s$$

equazione della spirale logaritmica.

Chiamando  $\delta$  la distanza fra un punto qualunque della data spirale e il centro corrispondente dell'ellisse osculatrice e  $\theta$  l'angolo che questa retta fa colla spirale stessa, abbiamo :

$$\delta = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{3as}{\sqrt{9 + a^2}}, \quad \text{tang } \theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{a}$$

Sarà dunque

$$\delta = \rho \cdot \text{sen } \theta$$

la quale dimostra il teorema : « *la spirale logaritmica L, luogo dei centri delle ellissi osculatrici a una data spirale logaritmica L, è involuppo delle rette che uniscono i punti di L coi centri di dette ellissi* ».

Basandoci quindi su quanto ho dimostrato in altro scritto (\*), potremo dire :

(\*) Note géométrique. *Nouvelles Annales de Mathématiques*. 1886.

« la spirale logaritmica  $L_1$ , luogo dei centri delle ellissi osculatrici a una data spirale logaritmica  $L$ , ha il medesimo polo di  $L$  e si ottiene da quest'ultima facendola ruotare intorno al polo comune, nel senso dei raggi vettori crescenti, di un angolo

$$\chi = \pi - \theta - \log \left[ \frac{\text{sen}(i + \theta)}{\text{sen } i} \right] \cdot \text{tang } i.$$

Se poniamo la condizione che sia  $\chi = 0$ , abbiamo

$$\frac{1}{a} \log \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 9}} = \pi - \theta$$

d'onde

$$\text{sen} \left[ \frac{1}{a} \log \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 9}} \right] \sqrt{a^2 + 9} = 3.$$

Dunque: « Le sole spirali logaritmiche in cui i centri delle coniche osculatrici si trovano sulla curva stessa sono quelle definite dall'equazione  $\rho = as$  in cui  $a$  è una quantità che soddisfa alla relazione

$$\sqrt{a^2 + 9} \cdot \text{sen} \left[ \frac{1}{a} \log \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 9}} \right] = 3 \text{ »}.$$

Vediamo come un'ellisse debba spostarsi in un piano perchè involupi una spirale logaritmica e sia osculatrice alla medesima. Intanto, per quello che precede, il centro dell'ellisse deve muoversi sopra una spirale logaritmica e nel movimento la curva deve restare simile a sè stessa. Dalla formola (14) che ci dà il valore dell'angolo  $\lambda$  formato dall'asse maggiore dell'ellisse osculatrice colla tangente della curva osculata, abbiamo:

$$\text{tang } 2\lambda = \frac{6\rho'}{2\rho'^2 - 3\rho''} = \frac{3}{a}$$

d'onde:

$$\text{tang } \lambda = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 9}}{3}.$$

Siccome l'angolo  $\theta$  sotto il quale la tangente alla curva osculata è segata dalla congiungente i punti di questa linea coi centri corrispondenti delle ellissi osculatrici è dato dalla relazione

$$\text{tang } \theta = \frac{3}{a}$$

avremo  
www.libtool.com.cn

$$\operatorname{tang}(\theta - \lambda) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 9}}{3}.$$

Questa formola dà l'angolo  $\varphi = \theta - \lambda$  sotto il quale l'asse maggiore dell'ellisse osculatrice sega le tangenti della spirale luogo dei centri delle ellissi; avendosi poi dalla formola (18)

$$\rho = \frac{\sqrt{a^2 + 9}}{4} \sigma$$

avremo per i semiassi A, B dell'ellisse :

$$(19) \quad A = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(a^2 + 9)^{\frac{1}{4}} \sqrt{-a + \sqrt{a^2 + 9}}} \cdot \sigma, \quad B = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(a^2 + 9)^{\frac{1}{4}} \sqrt{-a + \sqrt{a^2 + 9}}} \cdot \sigma.$$

Abbiamo dunque il teorema: « se un'ellisse variabile percorre col suo centro una spirale logaritmica  $\rho = a\sigma$  e varia di posizione e di grandezza in modo che i suoi semiassi si esprimano in funzione dell'arco  $\sigma$  per mezzo delle (19), e in modo che il semiasse maggiore seghi la curva sotto l'angolo  $\varphi$  definito dalla relazione

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 9}}{3},$$

*l'ellisse involuppa una spirale logaritmica eguale alla data, alla quale essa è costantemente osculatrice ».*

Parma, R. Istituto Tecnico, febbraio 1888.

## NUOVE RICERCHE SULLE FUNZIONI INTERE

DI

GIULIO VIVANTI.

In alcuni lavori pubblicati in questo stesso periodico (\*) abbiamo esposte varie proprietà delle funzioni intere trascendenti, relative specialmente ai rapporti che hanno luogo tra una funzione intera e la sua derivata. Ci proponiamo ora di dimostrare altri teoremi riferentisi allo stesso oggetto, ai quali faremo seguire alcuni cenni sulle funzioni meromorfe in ogni campo finito (quozienti di funzioni intere).

Per la nomenclatura e le notazioni rimandiamo ai lavori citati. Rammenteremo soltanto che con  $a_i$  si rappresentano i posti-zero d'una funzione intera  $f(z)$  di genere  $m$ , e che :

$$S(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^m (z - a_i)} \quad T(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^m (z - a_i)^2} = - \frac{dS(z)}{dz}.$$

I.

1. Se al crescere indefinitamente di  $z$  sopra un raggio partente dall'origine, sul quale al di là d'un certo punto  $Z$  non giace alcuno dei punti  $a_i$ , si ha  $\lim_{z \rightarrow \infty} S(z) = 0$ , si ha anche  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{zT(z)}{S(z)} \right| \leq 1$ , quindi  $\lim_{z \rightarrow \infty} |zT(z)| = 0$  (\*\*).

(\*) Alcuni teoremi sulle funzioni intere (T. XXII p. 243); Rettifica etc. (T. XXII p. 378); Sulle funzioni intere trascendenti (T. XXIII p. 96).

Ricerche della stessa natura formano l'oggetto dei lavori del prof. Cesàro :

*Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque (Comptes Rendus de l'Ac. de Paris T. 99, p. 26).*

*Remarques sur les fonctions holomorphes (G. di Mat. T. XXII, p. 191).*

(\*\*) Abbiamo enunciato, benchè solo in parte, questo teorema nel T. XXII p. 379 del G. di Mat.

Sia  $\omega$  l'argomento del raggio considerato, e, indicando con  $Z$  un punto di questo raggio posto al di là di  $Z$ , facciasi

$$\lambda = 1 + i \operatorname{tg} \omega, \quad Z = \lambda X, \quad z = \lambda x \quad (*);$$

$X$  e  $x$  saranno reali, e posto:

$$S(z) = S(\lambda x) = f(x)$$

quindi

$$zT(z) = -x f'(x),$$

$f(x)$  sarà una funzione d'una variabile reale finita e continua nell'intervallo  $X \dots +\infty$  (escluso tutt'al più l'estremo  $+\infty$ ) ed avente in ogni punto di esso una derivata determinata e finita. Tale funzione, per dato, si annullerà per  $x = +\infty$ . Colla trasformazione

$$x = \frac{1}{x'}, \quad X = \frac{1}{X'}, \quad f(x) = \varphi(x')$$

si ottiene:

$$-x f'(x) = x' \varphi'(x').$$

La  $\varphi(x')$  è una funzione finita, continua e derivabile nell'intervallo  $+0 \dots X'$  (escluso tutt'al più l'estremo  $+0$ ), che s'annulla per  $x' = +0$ . Posto:

$$\varphi(x') = \psi(x') + i \chi(x'),$$

le funzioni a coefficienti reali  $\psi(x')$ ,  $\chi(x')$  avranno le stesse proprietà delle  $\varphi(x')$ . Ne segue (\*\*), per

$$0 < x' < X', \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < \theta < 1:$$

$$\psi(x') - \psi(+0) = x' \psi'(\eta x')$$

$$\chi(x') - \chi(+0) = x' \chi'(\theta x')$$

ossia, essendo

$$\psi(+0) = \chi(+0) = 0:$$

$$\psi(x') = x' \psi'(\eta x'), \quad \chi(x') = x' \chi'(\theta x').$$

(\*) Se  $\omega = \pm 90^\circ$  si porrà invece  $\lambda = i$ .

(\*\*) Dini, *Fondamenti* etc. p. 75.

Dalla prima di queste eguaglianze si ha :

$$\lim_{x'=0} (\eta \psi(x')) = \lim_{x'=0} (\eta x' \psi'(x'))$$

ossia :

$$\lim_{x'=0} (\eta \psi(x')) = \lim_{x'=0} (x' \psi'(x')),$$

donde :

$$\lim_{x'=0} \eta = \lim_{x'=0} \left( \frac{x' \psi'(x')}{\psi(x')} \right),$$

e per conseguenza :

$$\lim_{x'=0} \left( \frac{x' \psi'(x')}{\psi(x')} \right) \geq 1.$$

Analogamente :

$$\lim_{x'=0} \left( \frac{x' \chi'(x')}{\chi(x')} \right) \leq 1.$$

Segue di qui facilmente :

$$\lim_{x'=0} \left| \frac{x' \varphi'(x')}{\varphi(x')} \right| \leq 1,$$

ossia :

$$\lim_{z=\infty} \left| \frac{zT(z)}{S(z)} \right| \leq 1,$$

c. d. d. Dalla relazione trovata si ha :

$$\lim_{z=\infty} |zT(z)| = 0 \quad \lim_{z=\infty} \left| \frac{T(z)}{S(z)} \right| = 0.$$

Non deve dimenticarsi che in queste ultime formole  $z$  va all'infinito percorrendo la retta di argomento  $\omega$ .

2. Se  $f(z)$  è una funzione semplice che non s'annulla per  $z=0$ , e se  $b$  è un posto-zero semplice della  $f'(z)$  non coincidente con alcun posto-zero della  $f(z)$ , si ha, ricordando che :

$$f'(z) = z^m S(z) f(z) :$$

$$S(b) = 0 \quad , \quad |T(b)| > 0, \quad \text{quindi} \quad \left| \frac{T(b)}{S(b)} \right| = \infty.$$

Di qui e dal teorema dimostrato a p. 378 del T. XXII di questo Giornale segue:

Se per l'origine possono condursi due raggi tali che nè su di essi nè in uno degli spazi angolari da essi formati cada alcun posto-zero della  $f(z)$ , nello stesso spazio non cadrà (almeno al di là d'una certa distanza finita dall'origine) alcun posto-zero della  $f'(z)$ .

Infatti può trovarsi una quantità  $R$  tale che, oltre la distanza  $R$  dall'origine,  $S(z)$  abbia nello spazio angolare considerato valore assoluto minore di una quantità assegnata ad arbitrio, donde segue che  $\left| \frac{T(z)}{S(z)} \right|$  non potrà crescere indefinitamente in quello spazio.

3. Sono degne di nota le funzioni intere aventi la proprietà che i loro posti-zero possono racchiudersi entro un numero finito di spazi angolari la cui somma può rendersi piccola a piacere (\*). Ciò può esprimersi dicendo che gli argomenti dei posti-zero costituiscono un insieme di grandezza (Inhalt) nulla (\*\*).

Dal teorema del n. 2 risulta che: Se i posti-zero d'una funzione semplice di prima classe  $f(z)$  non annullantesi per  $z = 0$  hanno la proprietà che i loro argomenti formano un insieme di grandezza nulla, lo stesso ha luogo per i posti-zero della  $f'(z)$ .

4. Si è dimostrato (\*\*\*) che se una funzione semplice di 1ª classe ha tutte le radici reali e diverse da zero, la sua derivata ha tutte le radici reali. Se invece la  $f(z)$  si annulla per  $z = 0$ , può solo dimostrarsi il teorema seguente (\*\*\*\*):

Se  $f(z)$  è una funzione semplice di genere  $m$  avente tutte le radici reali ed annullantesi per  $z = 0$ , e se  $p$  è quello tra i due numeri  $m, m + 1$  che è dispari, gli argomenti dei posti-zero immaginari della  $f'(z)$  sono tutti compresi nei seguenti intervalli:

$$(2\lambda - 1) \frac{\pi}{p} \dots 2\lambda \frac{\pi}{p}, - (2\lambda - 1) \frac{\pi}{p} \dots - 2\lambda \frac{\pi}{p} \quad \left( \lambda = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right).$$

(\*) Ciò avviene in particolare, come si è già notato a p. 380 del T. XXII di questo Giornale, quando gli argomenti dei posti-zero costituiscono un gruppo di primo genere.

(\*\*) V. Cantor in *Acta Mathematica* T. IV e in *Math. Annalen* T. XXIII; Harnack in *Math. Ann.* T. XXV.

(\*\*\*) G. di Mat. T. XXII p. 257.

(\*\*\*\*) Il teorema, che la derivata d'una funzione a radici reali è una funzione della stessa natura, non sussiste sempre per le funzioni trascendenti. P. e. la funzione  $f(x) = e^{x^2} \operatorname{sen} x$  ha tutte le radici reali, mentre la sua derivata

$$f'(x) = e^{x^2} (\cos x + 2x \operatorname{sen} x)$$

ha la radice immaginaria:

$$x = 0,771 \dots i.$$

In altre parole, se si divide il piano in  $2p$  parti eguali mediante  $p$  rette passanti per l'origine, una delle quali sia l'asse delle  $x$ , e se si assegna a ciascuno spazio angolare un numero progressivo partendo da quello che sta sopra la parte positiva dell'asse  $x$  e procedendo in senso positivo, i posti-zero imaginari della  $f'(z)$  si trovano tutti negli spazi d'ordinata positiva portanti numero pari e in quelli d'ordinata negativa portanti numero dispari.

Se  $r$  è l'ordine di molteplicità della radice nulla della  $f(z)$ , si ha :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{r}{z} + z^m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^m (z - a_i)},$$

quindi per una radice  $b$  della  $f'(z)$  :

$$0 = \frac{r}{b} + b^m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^m (b - a_i)}$$

ossia :

$$0 = \frac{r}{b^{m+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^m (b - a_i)}.$$

Posto :

$$b = \xi + i\eta, \quad b^{m+1} = X + iY,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^m ((\xi - a_i)^2 + \eta^2)} = M, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^{m-1} ((\xi - a_i)^2 + \eta^2)} = N,$$

si ha :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^m (b - a_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi - a_i - i\eta}{a_i^m ((\xi - a_i)^2 + \eta^2)} = (\xi - i\eta) M - N;$$

quindi la relazione precedente diviene :

$$0 = r \frac{X - iY}{X^2 + Y^2} + (\xi - i\eta) M - N,$$

da cui si ha :

$$\frac{rX}{X^2 + Y^2} + \xi M - N = 0 \tag{7}$$

$$\frac{rY}{X^2 + Y^2} + \eta M = 0, \tag{8}$$

ed eliminando fra queste  $M$  :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{r(\eta X - \xi Y)}{(X^2 + Y^2)} - \eta N = 0. \quad (\gamma)$$

a) Sia  $m$  pari; allora  $M$  sarà essenzialmente positivo, e la  $(\beta)$  ci dice che  $\frac{Y}{\eta}$  sarà negativo. Cioè, detto  $\theta$  l'argomento di  $b$ , sarà :

$$\text{per } 0 < \theta < \pi \quad (2\mu - 1)\pi < (m + 1)\theta < 2\mu\pi,$$

$$\text{per } \pi < \theta < 2\pi \quad 2\mu\pi < (m + 1)\theta < (2\mu + 1)\pi.$$

Per conseguenza dev'essere, ricordando che per  $m$  pari  $p = m + 1$  :

$$\text{per } 0 < \theta < \pi \quad (2\mu - 1)\frac{\pi}{p} < \theta < 2\mu\frac{\pi}{p}$$

$$\text{per } \pi < \theta < 2\pi \quad 2\mu\frac{\pi}{p} < \theta < (2\mu + 1)\frac{\pi}{p}.$$

b) Sia  $m$  dispari;  $N$  sarà essenzialmente positivo, e, come risulta dalla  $(\gamma)$ ,  $\frac{\xi Y - \eta X}{\eta}$  sarà negativo. Osservando che  $\frac{(\xi Y - \eta X) i}{\xi^2 + \eta^2}$  è la parte immaginaria di  $b^m$ ,

si vede che sarà :

$$\text{per } 0 < \theta < \pi \quad (2\mu - 1)\pi < m\theta < 2\mu\pi$$

$$\text{per } \pi < \theta < 2\pi \quad 2\mu\pi < m\theta < (2\mu + 1)\pi,$$

per conseguenza (essendo  $p = m$ ) :

$$\text{per } 0 < \theta < \pi \quad (2\mu - 1)\frac{\pi}{p} < \theta < 2\mu\frac{\pi}{p}$$

$$\text{per } \pi < \theta < 2\pi \quad 2\mu\frac{\pi}{p} < \theta < (2\mu + 1)\frac{\pi}{p}.$$

Come caso particolare si ha il teorema già dimostrato (\*):

(\*) G. di Mat. T. XXII p. 255.

Se una funzione semplice di genere 0 o 1 ha tutte le radici reali, lo stesso ha luogo per la sua derivata.

5. *La derivata d'una funzione semplice di genere diverso da 0 non è sempre una funzione semplice.*

Basterà dimostrare che il teorema sussiste in un caso speciale.

Sia  $f(z)$  una funzione semplice di genere  $m$  avente tutte le radici reali e positive. Sarà (\*):

$$f'(z) = z^m f_1(z), \quad (\delta)$$

essendo  $f_1(z)$  una funzione di genere  $m$  avente tutte le radici reali e diverse da zero. Supponendo che essa sia una funzione semplice, si potrà ripetere su di essa il ragionamento precedente, e così di seguito. La relazione ( $\delta$ ) fa vedere che nella  $f(z)$  sono nulli i coefficienti di  $z, z^2, \dots, z^m$ ; lo stesso dovrà aver luogo nella  $f_1(z)$ , etc. In conclusione  $f(z)$  avrà la forma:

$$f(z) = A_0 + A_1 z^{m+1} + A_2 z^{2m+2} + \dots;$$

e perciò insieme alla radice reale positiva  $\alpha_0$  essa avrà anche le radici complesse

o negative  $ae^{\frac{2\pi k}{m+1}}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ); il che è contro i dati assunti.

Dunque la  $f'(z)$  o la  $f'_\lambda(z)$  per qualche valore di  $\lambda$  non è una funzione semplice; e il teorema è dimostrato.

6. Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  sono i moduli delle radici d'una funzione di genere  $m$  disposti in ordine crescente, e se, essendo  $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \delta_i$ , si ha

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\delta_i}{\alpha_i} = 0,$$

si ha anche:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i \alpha_i^m = \infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i \alpha_i^{m-1-\lambda} = 0 \quad (**)$$

dove  $\lambda$  denota una quantità positiva arbitrariamente piccola (\*\*).

(\*) G. di Mat. pp. 257, 260.

(\*\*) Nelle relazioni ( $\epsilon$ ), ( $\eta$ ), ( $\kappa$ ) l'espressione:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \dots = 0$  (o  $\infty$ ) deve intendersi nel senso che, o realmente il limite della quantità considerata è 0 (o  $\infty$ ), oppure questo limite è indeterminato, ma in questo secondo caso esistono sempre valori di  $i$  grandi a piacere per i quali la quantità che si considera è minore (maggiore) d'una quantità arbitrariamente piccola (grande).

(\*\*\*) Un corollario di questo teorema è il seguente, dovuto a De Sparre (*Sur*

a) Poichè la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^{m+1}}$  è convergente, e il rapporto di due suoi termini consecutivi, che è

$$\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}\right)^{m+1} \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i}\right)^{m+1}},$$

tende all'unità, dovrà essere, pel criterio di Raabe (\*):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} i \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i}\right)^{m+1}}\right) \geq 1. \quad (\zeta)$$

Ora, per valori abbastanza grandi di  $i$ :

$$\left(1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i}\right)^{m+1} \leq 1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i} (2^{m+1} - 1),$$

quindi:

$$\frac{\left(1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i}\right)^{m+1} - 1}{\left(1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i}\right)^{m+1}} < \left(1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i}\right)^{m+1} - 1 \leq \frac{\delta_i}{\alpha_i} (2^{m+1} - 1),$$

donde segue, in virtù della ( $\zeta$ ):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i \delta_i}{\alpha_i} > \frac{1}{2^{m+1} - 1}.$$

Ma poichè  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  è divergente e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^{m+1}}$  è convergente, sarà (\*\*):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{i}}{\frac{1}{\alpha_i^{m+1}}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i^{m+1}}{i} = \infty; \quad (\eta)$$

la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers, (*Comptes Rendus*) T. 102 p. 741): Se  $\lim \alpha_n^{\omega-1} (\alpha_{n-1} - \alpha_n)$  è finito e diverso da zero, le  $\alpha_n$  sono le radici d'una funzione di genere  $\omega$ .

(\*) Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, T. I p. 263.

(\*\*) V. p. e. Tannery, *Introduction à la th. des fonct.* p. 76.

combinando questa relazione colla precedente si ha :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i \alpha_i^m = \infty .$$

b) Poichè  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^m}$  è divergente, sarà pel criterio sopra citato :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} i \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i} \right)^m} \right) \leq 1. \quad (\theta)$$

Ora :

$$\left( 1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i} \right)^m - 1 \geq m \frac{\delta_i}{\alpha_i} ,$$

quindi per valori abbastanza grandi di  $i$  :

$$\frac{\left( 1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i} \right)^m - 1}{\left( 1 + \frac{\delta_i}{\alpha_i} \right)^m} \geq \frac{m}{2^m} \frac{\delta_i}{\alpha_i} ,$$

donde segue, tenendo conto della ( $\zeta$ ) :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i \delta_i}{\alpha_i} \leq \frac{2^m}{m} ,$$

e moltiplicando da ambe le parti per  $\frac{\alpha_i^{m-\lambda}}{i}$  :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i \alpha_i^{m-1-\lambda} \leq \frac{2^m}{m} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i^{m-\lambda}}{i} . \quad (\iota)$$

Se  $\mu$  è una quantità positiva piccola a piacere,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1+\mu}}$  è convergente, mentre

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^m}$  è divergente, sicchè :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i^{1+\mu}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i^m}{i^{1+\mu}} = 0 , \quad (\kappa)$$

donde si ha :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i^{m-\lambda}}{(1+\mu)^{\frac{m-\lambda}{m}} i} = 0.$$

Prendendo  $\mu = \frac{\lambda}{m-\lambda}$  si ha :

$$(1 + \mu) \frac{m-\lambda}{m} = 1 ,$$

quindi :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i^{m-\lambda}}{i} = 0 ,$$

la quale relazione, combinata colla (1), ci dà :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i \alpha_i^{m-i-\lambda} = 0.$$

## II.

7. Diremo per brevità *funzione fratta* il quoziente di due funzioni intere, che potrà sempre supporre non abbiano alcuna radice comune. La forma generale delle funzioni fratte è :

$$\chi(z) = e^{G(z)} z^r \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

dove  $G(z)$  è una funzione intera qualunque,  $r$  un numero intero positivo, nullo o negativo,  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  due funzioni intere semplici non aventi alcuna radice comune e non annullantisi per  $z=0$ . Supporremo per semplicità che nè la  $\varphi(z)$  nè la  $\psi(z)$  abbiano radici multiple.

8. Ecco alcune delle proprietà più ovvie delle funzioni fratte.

a) La derivata d'una funzione fratta è una funzione della stessa natura, e i suoi poli coincidono con quelli delle funzioni primitive.

b) Se i coefficienti delle  $G(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  sono tutti reali, le radici delle  $\chi(z)$  sono reali o coniugate due a due, e così i suoi poli, e reciprocamente (\*).

---

(\*) Cfr. la memoria : *Alcuni teoremi etc.*

c) Se alcune o tutte le radici e alcuni o tutti i poli della  $\chi(z)$  sono reali, la somma del numero delle radici della  $\chi(z)$  e di quelle della  $\chi'(z)$  compresi fra due poli reali consecutivi è un numero dispari, e la somma del numero dei poli e di quello delle radici della  $\chi'(z)$  comprese fra due radici reali consecutive della  $\chi(z)$  è pure un numero dispari.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema VIII della memoria: *Alcuni teoremi etc.*

d) Esistono funzioni fratte aventi tutte le radici e tutti i poli reali, e la cui derivata ha tutte le radici immaginarie (\*). Sia p. e. la funzione  $\chi(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , dove  $\varphi(z), \psi(z)$  sono due funzioni semplici di genere zero le cui radici  $a_i, b_i$  sono tutte reali e soddisfanno alle relazioni:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots, \quad b_1 < b_2 < b_3 < \dots, \quad a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1} \quad (**)$$

Sarà:

$$\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{z - b_i}.$$

È facile dimostrare che il secondo membro di quest'equazione, che indicheremo brevemente con P, non può annullarsi per alcun valore reale di z.

I valori reali di z diversi da  $a_i, b_i$  possono dividersi in tre categorie, secondochè

$$z < a_1, \quad a_i < z < b_i, \quad b_i < z < a_{i+1}.$$

Sia anzitutto  $z < a_1$ . Allora:

$$\frac{1}{z - a_1} < \frac{1}{z - b_1} < 0$$

quindi  $P < 0$ .

(\*) È da notarsi che lo stesso può avvenire per funzioni *razionali* fratte. Così p. e. la funzione  $\frac{(s-1)(s-3)}{s-2}$ , che ha le radici 1, 3 e il polo 2, ha per derivata

$1 + \frac{1}{(s-2)^2}$  che non ha alcuna radice reale.

(\*\*) Una tale funzione sarebbe  $\text{tang } s$ .

Sia in secondo luogo  $a_i + < z < b_i$ . Allora :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{1}{z - a_i} > 0$$

$$\frac{1}{z - a_{h+1}} > \frac{1}{z - b_h} \quad h = 1, 2, \dots,$$

quindi  $P > 0$ .

Sia infine  $b_i < z < a_{i+1}$ . Allora :

$$\frac{1}{z - a_h} < \frac{1}{z - b_h} \quad h = 1, 2, \dots$$

quindi  $P < 0$ .

Dunque in nessun caso è  $P = 0$ , e la  $\chi'(z)$  non ha alcuna radice reale.

Mantova 22 marzo 1888.

---

UNA PROPRIETÀ SINGOLARE DI ALCUNI NUMERI  
DIPENDENTE DAL SISTEMA PARTICOLARE DI NUMERAZIONE  
NEL QUALE SONO SCRITTI

N O T A

DEL

Dott. ANGIOLO ANDREINI.

---

Nel fascicolo dell'ottobre 1886 del giornale — *La Scienza per tutti* — (Milano E. Sonzogno) si legge quanto appresso:

« Singolare proprietà di un numero. — Il numero 142857 gode la singolare « proprietà che, venendo moltiplicato successivamente per tutte le cifre da 1 a 6, « dà prodotti composti sempre delle medesime cifre, situate nel medesimo ordine « in permutazione circolare.

« Il prodotto per 7 dà poi 999999.

« Vi ha una legge che regga tale singolarità, od è un semplice caso? Con- « fossiamo senza scrupoli che lo ignoriamo e che brameremmo assai di saperlo ».

Mi propongo di rispondere alla domanda precedente e nel modo più generale, risolvendo la seguente questione:

*In un sistema di numerazione a base qualunque B, determinare i numeri di m di cifre, tali che i prodotti di ciascuno di essi per i numeri 1 2 3... (m-1), m, siano tutti i numeri che risultano dalle m permutazioni circolari delle cifre del numero considerato (\*).*

In ciò che segue indicherò con N uno dei numeri richiesti dal problema, e con  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_q, \dots, N_m$ , rispettivamente i prodotti di N per 1, 2, 3... q... m e

---

(\*) La soluzione di una tale questione fu inviata al giornale citato il quale ne diede un cenno del fascicolo del Dicembre.

che per ipotesi debbono essere i numeri che si ottengono dalle  $m$  permutazioni circolari di  $N$ .

Porrò ancora per semplicità di scrittura,

$$B - 1 = b \quad ; \quad m + 1 = p;$$

$$S = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_m;$$

$$1) \quad M = N_1 + N_m = N_2 + N_{m-1} = \dots = N_q + N_{m-q+1} \dots = pN.$$

Per determinare la condizione necessaria e sufficiente, affinché un numero soddisfi al problema, faremo le considerazioni seguenti:

1. *Le somme parziali delle colonne corrispondenti, in tutte le somme 1), sono rispettivamente eguali.*

Infatti, o tutte quelle somme parziali non sorpassano il  $b$ , e allora la proposizione è evidente, o sorpassano il  $b$ , e in tal caso (se sono differenti) la differenza non può essere che di  $B$  unità. — Ora dico che ciò non è possibile, perchè se per esempio la somma parziale  $r^{\text{ma}}$  di  $N_q + N_{m-q+1}$  contenesse  $B$  unità di *più* della  $r^{\text{ma}}$  colonna di un'altra somma, per es. di  $N_h + N_{m-h+1}$ , vi dovrebbe essere un'altra somma parziale di  $N_q + N_{m-q+1}$ . per es. la  $s^{\text{ma}}$  che conterrebbe  $B$  unità di *meno* della  $s^{\text{ma}}$  di  $N_h + N_{m-h+1}$ , poichè la somma di tutte le cifre degli addendi nelle somme 1) è costante. Ma allora è evidente che l'eguaglianza:

$$N_q + N_{m-q+1} = N_h + N_{m-h+1}$$

non potrebbe sussistere, perchè la seconda somma contiene rispetto alla prima  $B$  unità di *meno* dell'ordine  $r^{\text{mo}}$  e in compenso ne conterrebbe  $B$  di *più* dell'ordine  $s^{\text{mo}}$ .

*Corollario.* Se  $m$  fosse dispari, si dovrebbe avere

$$2N \frac{m-1}{2} = M;$$

quindi ogni cifra di  $N$ , dovrebbe essere la metà della corrispondente somma parziale in ognuna delle somme 1).

2. *Tutte le somme parziali, delle somme 1) sono eguali fra loro.*

Ciò si rende manifesto osservando che tutte le somme parziali di  $S$  sono eguali fra loro (perchè ognuna risulta dall'addizione di *tutte* le cifre di  $N$ ) e che ciascuna di esse è pure data o da  $\frac{m}{2}$  volte la somma parziale corrispondente nelle somme 1) se  $m$  è pari, o da  $\frac{m+1}{2}$  volte la cifra corrispondente (1 coroll.) nel numero  $N$  se  $m$  è dispari.

**Corollario 1.** Di qui, e dal corollario del numero precedente, si deduce che  $m$  è necessariamente un numero pari, altrimenti la  $N$  sarebbe formata di cifre tutte eguali, ciò che non è possibile.

**Corollario 2.** Se tutte le somme parziali sono inferiori a  $B$ , il numero  $M$  è composto di  $m$  cifre, ed è della forma

2)  $cccc \dots cc;$

ma se quelle somme sorpassano il  $B$ , (non potendo però giungere a  $2B$ ) il numero  $M$  contiene  $m + 1$  cifre, ed è della forma

3)  $1cccc \dots cc(c-1);$

in ogni caso la somma di tutte le cifre di  $M$  è data da  $m \cdot c$ .

4. Il numero  $N$  non può essere formato dal gruppo di cifre  $\alpha, \beta, \gamma \dots \psi, \omega$ , scritto di seguito un certo numero di volte, altrimenti vi sarebbero delle permutazioni che effettuate nelle cifre di  $N$  non cambierebbero il numero stesso, ciò che è contrario all'ipotesi.

5. I resti parziali nella divisione  $\frac{M}{p} = N$ , sono tutti differenti.

Ciò risulta dalla forma del numero  $M$  2) o 3) e della considerazione (4).

Si deduce che se  $M$  è della forma 2) i resti parziali (in numero di  $p - 1 = m$ ) sono dati (astrazione fatta dall'ordine) dal a serie naturale dei numeri  $0, 1, 2, 3 \dots (r-1), (r+1), \dots p-1$ , ove manca però il numero  $r$ , essendo  $r$  il numero che non si trova come resto parziale nella divisione di  $M$  per  $p$ .

Se invece  $M$  è della forma 3) i resti sono tutti i numeri naturali da 1 ad  $m$ .

6. Il numero  $N$  è esattamente divisibile per  $b$ .

Infatti, essendo in generale

$$N = Nq + 1 - Nq,$$

il secondo membro, e quindi  $N$ , è esattamente divisibile per  $b$ , poichè, nel sistema a base  $B$ , il  $b$  gode (relativamente alla condizione di divisibilità di un numero per  $b$ ) della proprietà analoga a quella che possiede il 9 nel sistema a base 10.

**Corollario.** Indicando con  $s$  la somma di tutte le cifre del numero  $N$ , avremo:

$$s = \text{multiplo di } b$$

e quindi potremo porre  $s = \mu b$ .

7. Il numero  $M$  ha  $m$  cifre, ossia il numero  $M$  non può avere la forma 3).

Infatti, posto che  $M$  abbia la forma 3), effettuando la divisione di  $M$  per  $p$ , avremo per  $m + 1$  successive divisioni parziali eseguite nel sistema di numerazione

a base B, le eguaglianze seguenti:

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$1 = p0 + 1$$

$$B \cdot 1 + c = pq_1 + r_1$$

$$Br_1 + c_1 = pq_2 + r_2$$

. . . . .

$$Br_{m-2} + c = pq_{m-1} + r_{m-1}$$

$$Br_{m-1} + (c - 1) = pq_m + 0.$$

Sommando tutte queste eguaglianze membro a membro, facendo le opportune riduzioni, tenendo conto del significato di s (6 coroll.) e osservando (5) che

$$\sum_1^m r_n = \frac{m(m+1)}{2},$$

otterremo :

$$m \left( \frac{m+1}{2} \right) b + mc = ps$$

ovvero (6 coroll.)

$$\frac{b m p}{2} + mc = p \mu b$$

da cui si deduce che

$$cm = pb \left( \mu - \frac{m}{2} \right)$$

eguaglianza impossibile, perchè (essendo m pari (2 coroll.) la quantità fra parentesi è almeno eguale ad uno, e

$$c \leq b \quad e \quad m = p - 1.$$

8. Poichè il numero M è della forma 2), la somma delle cifre dei numeri N<sub>q</sub> e N<sub>m-q+1</sub> è eguale a quella delle cifre di M e quindi quest'ultima somma è doppia della somma delle cifre di N; avremo quindi

$$s = \mu b = \frac{mc}{2}.$$

Corollario. Dall'eguaglianza precedente si deduce che

www.libtool.com.cn

$$\mu \leq \frac{m}{2} \quad \text{poichè} \quad c \leq b.$$

9. Il numero  $p$  è primo con  $c$ ,  $b$  e  $B$

Infatti, se  $c$  e  $p$  avessero un fattore comune, si avrebbe

$$N = \frac{M}{p} = \frac{M'}{p'},$$

essendo  $\frac{M'}{p'}$  la frazione  $\frac{M}{p}$  ridotta alla più semplice espressione; e poichè tutte le cifre di  $M'$  sono eguali fra loro, al più dopo  $p' - 1$  divisioni parziali, si ritroverebbero al quoziente, e nello stesso ordine, le cifre ottenute nelle divisioni parziali precedenti, e ciò non è possibile (4).

Dalle eguaglianze ((8) e (2) 2)

$$mc = 2\mu b$$

$$M = \text{multiplo di } B + c$$

si deduce subito che  $p$  è primo con  $b$  e  $B$ , altrimenti non lo sarebbe con  $c$ .

10. Le cifre di  $M$  sono tutte eguali a  $b$ , ossia si ha  $c = b$ .

Infatti, dividendo  $M$  per  $p$  avremo per le successive divisioni parziali

$$c = pq_1 + r_1$$

$$Br_1 + c = pq_2 + r_2$$

. . . . .

. . . . .

$$Br_{m-2} + c = pq_{m-1} + r_{m-1}$$

$$Br_{m-1} + c = pq_m$$

Sommando membro a membro tutte queste eguaglianze e aggiungendo e togliendo nel 1° membro  $rb$  (essendo  $r$  il numero che non si trova come resto parziale (5)) si ottiene (come al n° 7)

$$\frac{b m p}{2} + mc - rb = p \mu b$$

ovvero (8)  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\frac{b m p}{2} + b (2\mu - r = p\mu b.$$

ossia

$$\frac{mp}{2} + 2\mu - r = p\mu.$$

Ora questa eguaglianza è impossibile per  $\mu < \frac{m}{2}$ , dunque (8 coroll.) deve essere  $\mu = \frac{m}{2}$  e quindi (8) avremo  $c = b$ .

*Corollario.* Si deduce anche che  $r = 2\mu = m$ , ossia il numero che non si trova mai come resto nella divisione  $\frac{B^m - 1}{p}$ , è  $m$ .

11. Il numero  $M$  è uguale a  $B^m - 1$ . Ciò si deduce subito osservando che tutte le cifre di  $M$ , essendo eguali a  $b$  avremo :

$$M = b(B^{m-1} + B^{m-2} + \dots + B + 1) = b \frac{B^m - 1}{B - 1} = B^m - 1.$$

12. Il numero  $p$  è primo assoluto.

Se  $p$  non fosse primo, pel teorema di Fermat, generalizzato da Eulero, dovrebbe dividere  $B^{\varphi(p)} - 1$  (essendo  $\varphi(p)$  il noto simbolo di Gauss per rappresentare il numero dei numeri primi con  $p$  e inferiori ad esso) ora ciò non è possibile, a meno che non sia  $\varphi(p) = p - 1$ , cioè che  $p$  sia primo, altrimenti non potrebbe esser verificato, per il numero  $N$ , la condizione (4).

*Corollario.* Per la stessa ragione non può essere  $B^n - 1$  esattamente divisibile per  $p$  essendo  $n$  un numero qualunque inferiore ad  $m$ , ossia la base  $B$  deve appartenere all'esponente  $m$ , modulo  $p$ .

13. Per ciò che precede possiamo dire :

*La condizione necessaria affinché il numero  $N$  soddisfi al problema, è che  $m + 1$  sia un numero primo e che  $B$  appartenga al numero  $m$  rispetto al modulo  $p$ ; il numero  $N$  è allora dato dalla divisione di  $B^m - 1$  per  $p$ .*

14. Ora dimostrerò che questa condizione è anche sufficiente.

Infatti, se  $p$  è primo e non divide  $B$ , pel teorema di Fermat  $B^{p-1} - 1$  è esattamente divisibile per  $p$ ; basterà dunque far vedere che il quoziente  $\frac{B^{p-1} - 1}{p} = N$ , soddisfa al problema; ossia che facendo le  $m$  permutazioni circolari sulle sue cifre, si ottengono altrettanti multipli differenti di  $N$ , essendo l'ordine di molteplicità di ciascuno, inferiore ad  $m$ . Infatti si ponga

$$N = \alpha \beta \gamma \delta \dots \lambda \mu \nu$$

riguardando  $\alpha\beta\gamma\delta \dots \lambda\mu\nu$  come il numero  $N$  scritto nel sistema a base  $B$ ; sia ancora

$$\beta\gamma\delta \dots \lambda\mu\nu\alpha$$

la permutazione circolare, ottenuta facendo avanzare di un posto verso sinistra ogni cifra di  $N$ , e che chiameremo con  $P$ ; avremo quindi

$$BN = \alpha\beta\gamma \dots \lambda\mu\nu 0$$

$$P = \beta\gamma \dots \lambda\mu\nu\alpha$$

e sottraendo otterremo :

$$BN - P = \alpha B^m - \alpha$$

da cui ,

$$P = BN - \alpha(B^m - 1)$$

e poichè  $N$  divide il 2° membro, deve essere  $P$  un multiplo di  $N$ .

Collo stesso metodo si proverebbe che tutte le altre permutazioni circolari di  $N$ , sono multipli di  $N$  (\*).

Ora tutte queste permutazioni sono numeri differenti, altrimenti  $N$  dovrebbe essere costituito di gruppi eguali di cifre (4) e ciò non è possibile; perchè in tal caso il  $B$  apparterebbe ad un numero minore di  $m$ , rispetto al modulo  $p$ .

Nessuna delle permutazioni può essere eguale a  $\pi N$ , essendo  $\pi \geq m$ .

E invero, se fosse  $\pi = p$ , dovrebbe essere  $N = M$  e se fosse  $\pi > p$ , (poichè  $pN = B^m - 1$ ), il numero  $\pi N$  conterrebbe almeno  $m+1$  cifre, ciò che non è possibile. Sicchè le  $m$  permutazioni di  $N$ , essendo multipli differenti di  $N$ , e tutte inferiori ad  $M$ , non possono essere altro che i numeri

$$N_1 N_2 N_3 \dots N_m$$

15. Determinata la condizione necessaria e sufficiente, affinchè  $N$  soddisfi al problema, aggiungerò ancora le considerazioni seguenti :

Dalla condizione che  $B$  appartenga ad  $m \pmod p$  risulta subito che  $p$ , oltre non dividere  $B$ , non deve dividere  $B-1$  e neppure  $B+1$ , a meno che non sia  $m=2$ .

Si deduce ancora che se fosse  $B = \beta^v$  (essendo  $v$  un numero che ha con  $m$

(\*) Questa dimostrazione prova ancora che se un numero qualunque  $p$  divide  $B^m - 1$  (essendo  $B$  ed  $m$  numeri qualunque primi o no con  $p$ ) e un numero qualunque  $N$  di  $m$  cifre, divide ancora tutti i numeri che risultano, facendo le  $m$  permutazioni circolari sulle cifre di  $N$ .

almeno un fattore primo comune  $\pi$ ) si avrebbe  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$B^{\frac{m}{\pi}} - 1 = \beta^{\frac{vm}{\pi}} - 1 = \left( \beta^{\frac{v}{\pi}} \right)^m - 1$$

e poichè il 2° membro è divisibile per  $p$  (teorema di Fermat) dovrebbe esserlo anche  $B^{\frac{m}{\pi}} - 1$ , ciò che non può essere, perchè  $B$  apparterebbe ad un numero minore di  $m \pmod{p}$ . Per quel valore di  $B$  non esiste quindi alcun numero  $N$ .

*Corollario.* Poichè  $M$  è sempre pari, in un sistema di numerazione di cui la base è una potenza di ordine pari, non può esistere alcun numero che soddisfi al problema.

16. Affinchè  $N$  contenga  $m$  cifre, è necessario che si abbia  $p < b$ ; da ciò risulta che in ogni sistema di numerazione o vi è un numero limitato di numeri  $N$ , con  $m$  cifre, che soddisfano al problema o non ve ne è alcuno. Così p. e. si riconosce subito che, per i valori di  $B$  da 1 a 10, il numero  $N$  esiste solamente nel sistema a base 5, (13); nel sistema a base 7, (1254); nel sistema a base 8, (25 e 1463); nel sistema a base 10 il solo 142857; quest'ultimo risultato risponde alla domanda fatta dal Giornale rammentato al principio di questo scritto.

Se fosse  $p > b$ , il quoziente  $\frac{B^m - 1}{p} = N$  non conterrebbe  $m$  cifre, se però si volesse riguardare come un numero composto di  $m$  cifre (come è richiesto dal problema) sarebbe necessario considerare come cifre del numero, anche tutti gli zeri che precedono le cifre significative, e che sono provenuti dalla impossibilità di effettuare le prime divisioni parziali.

Volendo però escludere fra i numeri  $N$  quelli interi della prima

$$N = 000 \dots 00 \alpha \beta \gamma \dots \lambda \mu \nu$$

(i quali del resto soddisfarebbero al problema) li riguarderemo piuttosto come numeri frazionari della forma

$$N = 0,000 \dots 00 \alpha \beta \gamma \dots \lambda \mu \nu.$$

17. *Quanti sono i numeri di  $m$  cifre che soddisfano al problema?*

Per i numeri  $N$  frazionari si risponde immediatamente, ricordando (\*) che se  $p$  è un numero primo vi sono  $\varphi(p-1) = \varphi(m)$  numeri  $B$  inferiori a  $p$  che appartengono all'esponente  $m \pmod{p}$ ; quindi vi sono tanti numeri  $N$  frazionari di  $m$  cifre, quante sono le radici primitive relative al modulo  $p$ .

(\*) Vedi p. e: Serret. *Cours d'Algèbre Supérieure*. T. II, n. 306 corollario (Paris 1885).

Detta B una di queste radici primitive, da essa si deducono infinite altre radici date dalla congruenza

$$B \equiv B \pmod{p}$$

e per ognuna di queste, riguardata come base di un sistema di numerazione, potremmo determinare il numero, o i numeri N di m cifre che vi corrispondono.

Per esempio, pel caso di  $p = 7$ , una radice primitiva è il 3 e quindi 0,010212 è il numero N, è poichè  $10 \equiv 3 \pmod{7}$  abbiamo che 10 appartiene pure a 6 (modulo 7) e quindi il 142857 è il numero N che vi corrisponde.

Si conclude che vi sono  $\varphi(m)$  numeri frazionari di m cifre, e un numero  $\varphi(m)$  volte infinito di numeri interi, che soddisfano al problema.

18. Terminerò questo scritto esponendo altre proprietà del numero N.

1° Il numero N è esattamente divisibile per  $(B - 1)$  (6) e per  $B + 1$ .

2° Il prodotto di N per p, è un numero composto di m cifre tutte eguali a b (10).

3° Essendo p un numero intero qualunque, avremo, dividendo  $\rho$  per p,

$$\rho = qp + r$$

e quindi

$$N\rho = \frac{B^m - 1}{p} (qp + r) = B^m q + (Nr - q).$$

Di qui si deduce che se le unità dell'ordine  $m^{\text{mo}}$  contenute in  $N\rho$  si riguardano come unità di primo ordine, abbiamo  $N\rho = Nr$ , ossia  $N\rho$  è una permutazione di N.

Quindi se le cifre dei fattori N e  $\rho$  si dispongono regolarmente e rispettivamente su due cerchi concentrici, invece che su due linee orizzontali, come si usa nella moltiplicazione ordinaria, eseguendo poi la moltiplicazione (nel sistema a base B) il risultato è sempre una permutazione di N, qualunque sia  $\rho$ .

Consideriamo per esempio il numero 186 a 35, (ove  $a = 10$ ) che nel sistema a base 12 soddisfa al problema, e si moltiplichino questo numero per a9; disponendo l'operazione nel modo detto precedentemente (\*) il primo prodotto parziale è 1351869, il 2° è 15186 a 2; facendo la somma si trova 5186 a 3 che è appunto una permutazione circolare del numero dato. Osservando poi che

$$aq = \rho = 7 \cdot 16 + 3 \quad (**)$$

abbiamo

$$N\rho = N_3.$$

(\*) Il lettore è pregato di fare la figura.

(\*\*) Si avverta che questo numero 16 è scritto nel sistema a base 12, e quindi nel sistema a base 10 sarebbe rappresentato dal numero 18.

4° Se  $p$  è un multiplo di  $p$ , si avrebbe, come nel caso precedente  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$Np = \frac{B^m - 1}{p} pq = \frac{B^m - 1}{p} \{ (q - 1)p + p \} = B^m (q - 1) + (M - (q - 1))$$

quindi, eseguendo la moltiplicazione nel modo detto precedentemente il numero  $Np$  è sempre espresso da un numero formato da  $m$  cifre, tutte eguali a  $b$ .

La formula precedente mostra che essendo

$$S = \frac{m(m + 1)}{2} \cdot N = \frac{m}{2} pN,$$

il numero  $S$  è espresso da un numero della forma

$$\left(\frac{m}{2} - 1\right) b b b b \dots b b \left(b - \left(\frac{m}{2} - 1\right)\right)$$

ove il numero dei  $b$  è eguale ad  $m - 1$ .

5° Se  $N$  è un numero intero, non contiene fra le sue cifre alcun  $b$ , mentre se  $N$  è frazionario, contiene necessariamente almeno un  $b$ .

Infatti abbiamo veduto (5) e 10 coroll.) che  $r = 2\mu = m$ ; sicchè il minimo resto che può trovarsi nella divisione di  $m$  per  $p$  è  $m - 1$  e quindi la cifra del quoziente che risulta dalla successiva divisione parziale (e sarà la cifra più grande di  $N$ ) è data da

$$\frac{(m - 1)B + b}{p} = \frac{bm + (m - 1)}{p} = q$$

e questo quoziente è eguale o inferiore a  $b$ , secondochè  $m - 1 \geq b$  o  $m - 1 < b$ , ovvero  $m \geq B$  o  $m < B$ ; ossia secondochè  $N$  è frazionario o intero (16).

6° Essendo

$$Nr = \frac{B^m - 1}{p} r$$

e

$$Np - r = \frac{Bm - 1}{p} (p - r) = (Bm - 1) - Nr$$

si deduce che le cifre di  $Np - r$ , sono i complementi a  $b$  delle cifre corrispondenti di  $Nr$ .

7° Poichè  $m$  è pari, potremo scrivere

$$B^m - 1 = \left(B^{\frac{m}{2}} - 1\right) \left(B^{\frac{m}{2}} + 1\right);$$

ora  $p$  non può dividere il primo fattore (13) dunque deve dividere il secondo;

chiamando con  $Q$  il quoziente, avremo

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$N = \frac{B^m - 1}{p} = Q \left( B^{\frac{m}{2}} - 1 \right) = (Q - 1) B^{\frac{m}{2}} + \left( B^{\frac{m}{2}} - Q \right).$$

Ponendo per brevità  $\frac{m}{2} = \mu$  e supponendo che

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_\mu$$

rappresenti il numero  $Q$  scritto nel sistema a base  $B$ , avremo :

$$N = a_1 a_2 \dots (a_\mu - 1) 000 \dots 00 + (b - a_1)(b - a_2) \dots (b - (a_\mu - 1)) \quad (*)$$
$$= a_1 a_2 \dots (a_\mu - 1)(b - a_1)(b - a_2)(b - a_3) \dots (b - (a_\mu - 1)).$$

Dalla forma trovata per il numero  $N$ , si deduce che la seconda metà delle cifre di  $N$  sono rispettivamente i complementi a  $b$  delle cifre della prima metà.

È poi chiaro che questa proprietà dovrà valere ancora per tutte le permutazioni circolari di  $N$  ossia per  $N_1 N_2 \dots N_m$ .

*Corollario I.* Dal 6° e da ciò che precede si ricava che  $N_p - r$  si deduce da  $N_r$  scambiando la prima metà delle cifre di questo numero, rispettivamente con quelle della 2ª metà.

*Corollario II.* Nel numero  $N$  nessuna cifra può essere, in valore, inferiore alla prima e superiore alla  $\left(\frac{m}{2} + 1\right)^{ma}$ .

8° Se le  $m$  cifre di  $N$  si dispongono su di un cerchio, in modo che si possano riguardare come situate sui vertici di un poligono regolare di  $m$  lati, si riconosce subito che all'estremità dello stesso diametro si trovano due cifre che sono il complemento a  $b$  l'uno dell'altra.

Inoltre riunendo il vertice occupato dalla prima cifra di  $N_1$  con quello occupato dalla prima cifra di  $N_2$  e così di seguito procedendo allo stesso modo finché non si giunga al vertice occupato dalla 1ª cifra di  $N_m$  e finalmente questo si riunisce al 1° vertice, otterremo un poligono intrecciato di  $m$  lati, che ha i lati (opposti) due a due eguali e paralleli eccetto quelli che riuniscono le prime cifre di  $N_{\frac{m}{2}}$  e  $N_{\frac{m}{2}+1}$  e di  $N_1$  e di  $N_m$  che sono rappresentati da due diametri.

Per esempio nel sistema a base 20 abbiamo un numero  $N$ , dato da

$$1 (10)(15) 7 (13)(16)(18) 94 (12) 63.$$

(\*) Il numero degli zeri è uguale a  $\frac{m}{2}$ .

nel quale l'insieme delle due cifre fra parentesi va considerato come se fosse una sola cifra, cioè come unità di primo ordine nel sistema a base 20 mancando di segni speciali per indicarle. Questo numero scritto su di un circolo (\*) soddisfa alla proprietà ora accennata.

9° Dalla forma del numero  $N_1(187)$  è facile riconoscere come si possa dal n° 2 dedurre immediatamente il numero N. Basta diminuire di un'unità l'ultima cifra di Q e farla seguire dai complementi a b delle cifre di (Q-1).

Non sapendo però se B appartiene ad  $m \pmod{p}$  non si potrebbe asserire che il numero n ottenuto nel modo ora detto, soddisfa al problema, perchè potrebbe risultare composto di gruppi eguali di cifre (4). Perchè ciò avvenga è necessario che il numero dei gruppi di N sia dispari, e che per conseguenza ognuno contenga un numero pari di cifre e che ogni gruppo sia formato in modo analogo al numero N cioè che le cifre della prima metà sieno rispettivamente i supplementi a b delle cifre della seconda metà.

Per esempio, nel sistema a base 8, di numeri così composti si trova il

$$047304730473.$$

il quale è dedotto colla regola accennata dal n. 2, che nel nostro caso è dato da

$$\frac{8^6 + 1}{13} = 047303$$

Tuttavia per la ricerca dei numeri N è meglio servirsi del quoziente  $\frac{B^{\frac{m}{2} + 1}}{p}$  anzichè verificare se B appartiene o no all'esponente m. Se la divisione precedente si fa esattamente e purchè il quoziente non risulti formato di gruppi nel modo accennato sopra, il numero N esiste, e si deduce da questo quoziente nel modo già detto.

19. Se la frazione  $\frac{1}{p}$  ridotta in decimali (o in frazioni corrispondenti o analoghe alle decimali nel sistema di numerazione a base B) dà luogo ad una frazione periodica semplice, e se il periodo contiene p-1 cifre, il periodo gode di tutte le proprietà del numero N.

Per ora mi basta di aver risolta la questione proposta in principio; a suo tempo vi tornerò sopra per risolvere una questione che comprende come caso particolare quella di cui mi sono ora occupato.

Viareggio, Dicembre 1886.

---

(\*) Il lettore è pregato di fare la figura.

# UN TEOREMA SULLE CURVE DEL 3° ORDINE

## NOTA

DI

GABRIELE TORELLI.

In una breve nota inserita a pag. 172 di questo volume, cercando la interpretazione geometrica di alcune forme invariantive del sistema di tre cubiche, io dedussi qualche proprietà delle curve piane del terz'ordine fornite di punto doppio. Ora la verità della proposizione, cui in ultimo pervenni, non è subordinata all'esistenza del punto doppio, ma il teorema regge per qualunque curva piana del 3° ordine. Se già non ne esiste una dimostrazione più semplice, potrebbe ritenersi una delle seguenti.

Sieno rappresentati i punti  $U$  della curva come funzioni ellittiche d'un parametro  $u$ , in modo che al valore 0 di questo parametro corrisponda un punto d'inflessione; e sieno  $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$  i vertici di un poligono di  $2n$  lati iscritto nella curva, e siano  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  gli ulteriori punti d'incontro dei successivi lati del poligono colla curva medesima. Se  $\omega$ , ed  $\omega'$  sono i periodi della curva, abbiamo le congruenze:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + u_2 + a_1 \equiv 0 \quad u_2 + u_3 + a_2 \equiv 0 \\ u_3 + u_4 + a_3 \equiv 0 \quad u_4 + u_5 + a_4 \equiv 0 \\ \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \\ u_{2n-1} + u_{2n} + a_{2n-1} \equiv 0 \quad u_{2n} + u_1 + a_{2n} \equiv 0 \end{array} \right\} \text{(mod. } \omega, \omega'),$$

dalle quali si ricavano le altre due

$$\sum_1^{2n} u_i + \sum_1^n a_{2i-1} \equiv 0 \quad , \quad \sum_1^{2n} u_i + \sum_1^n a_{2i} \equiv 0,$$

donde

$$a_{2n} \equiv \sum_1^n a_{2i-1} - \sum_1^{n-1} a_{2i};$$

questa congruenza esprime il teorema :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

*Se un poligono di  $2n$  lati iscritto in una curva di 3° ordine, senza cessare di essere iscritto nella curva, si deforma in modo che  $2n-1$  lati rotano attorno ai rimanenti loro punti d'intersezione colla curva, anche il restante lato rota attorno all'ulteriore suo punto d'incontro colla curva stessa.*

Alla medesima proposizione può anche pervenirsi così :

Sia  $U_1 U_2 U_3 U_4$  un quadrilatero iscritto in una curva del 3° ordine, e siano  $A_1, A_2, A_3, A_4, P$  rispettivamente i punti in cui le rette  $U_1 U_2, U_2 U_3, U_3 U_4, U_4 U_1, A_1 A_2$  tagliano di nuovo la curva. Giacchè  $U_1, U_2, A_1$  stanno per dritto, come pure  $U_3, U_4, A_3$ , per una nota proprietà (Clebsch-Lindmann, Leçons de Géométrie, T. II, p. 227) vi stanno pure  $P, A_2, A_4$ ; perciò se  $A_1, A_2, A_3$  restano fissi, tale pure rimane  $P$ , e quindi anche  $A_4$ .

Il teorema, provato così pel quadrilatero, si estende a un poligono di un qualunque numero pari di lati, come l'analogo nella teoria delle coniche.

Napoli, Ottobre 1888.

# NOTA SU UNA CLASSE DI DETERMINANTI

DI

GINO LORIA.



In molte ricerche di Geometria analitica occorre calcolare dei determinanti d'ordine qualunque  $n$  formati con  $n$  potenze di esponente intero di altrettante indeterminate; per trovarne il valore si può usare il procedimento seguente che ci sembra notevole per la sua semplicità (\*).

1. Notiamo anzitutto che senza diminuire la generalità delle nostre considerazioni, possiamo supporre che il minimo esponente delle potenze a cui son elevate le indeterminate sia 0 e che gli esponenti siano distribuiti in ordine decrescente da sinistra verso destra.

Ciò premesso, è chiaro che il più semplice determinante della classe in discorso è il seguente

$$(1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \lambda_n^{n-1} & \lambda_n^{n-2} & \dots & \lambda_n & 1 \end{vmatrix};$$

(\*) Quando si conoscano i valori di questi determinanti, applicando il teorema di moltiplicazione delle matrici si dedurrà il valore del determinante più generale

$$\begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & \dots & f_n(\lambda_1) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_1(\lambda_n) & \dots & f_n(\lambda_n) \end{vmatrix}$$

ove  $f_r$  è un polinomio ordinato secondo le potenze discendenti della variabile.

esso è il ben noto determinante di Cauchy ed è esprimibile come il prodotto delle  $\frac{n(n-1)}{2}$  differenze che si ottengono togliendo da ogni indeterminata  $\lambda_i$  tutte quelle di indice superiore.

2. La conoscenza del valore di questo determinante guida a quella del determinante (che designeremo con  $\Delta_r$ ) ottenuto dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^n & \lambda_n^{n-1} & \dots & \lambda_n & 1 \end{pmatrix}$$

col sopprimervi la verticale che contiene le potenze di esponente  $n - r$ . Consideriamo infatti il determinante

$$D = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \dots & x & 1 \\ \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^n & \lambda_n^{n-1} & \dots & \lambda_n & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppandolo secondo gli elementi della prima orizzontale avremo

$$D = \sum_0^n (-1)^r \Delta_r x^{n-r};$$

d'altronde  $D$  è dello stesso tipo di  $\Delta$  quindi potremo svilupparlo in prodotto colla regola rammentata nel n.º prec. ed avremo

$$D = \Delta (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n),$$

ossia (sviluppando il prodotto indicato e chiamando  $L_i$  la somma dei prodotti  $i$  a  $i$  delle  $\lambda$  e scrivendo per analogia  $L_0$  invece di 1) (\*)

$$D = \Delta \sum_0^n (-1)^r L_r x^{n-r}.$$

(\*) Per scrivere più simmetricamente alcune delle formole seguenti converremo che sia  $L_i = 0$  se  $i < 0$  e  $i > n$ .

Dal confronto delle due espressioni trovate per D concludiamo

$$(2) \quad \Delta_r = \Delta L_r.$$

3. Servendoci di questo risultato potremo trovare il valore del determinante (che indicheremo con  $\Delta_{r,s}$ ) che si ottiene sopprimendo nella matrice

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \lambda_1^{n+1} & \lambda_1^n & \dots & \lambda_1^{n-r+1} & \lambda_1^{n-r-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{n+1} & \lambda_2^n & \dots & \lambda_2^{n-r+1} & \lambda_2^{n-r-1} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ \lambda_n^{n+1} & \lambda_n^n & \dots & \lambda_n^{n-r+1} & \lambda_n^{n-r-1} & \dots & \lambda_n & 1 \end{array} \right\}$$

la verticale che contiene le potenze di esponente  $n - s$ . E invero, consideriamo il determinante ausiliare

$$D_r = \left| \begin{array}{cccccc} x^{n+1} & x^n & \dots & x^{n-r+1} & x^{n-r-1} & \dots & x & 1 \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_1^n & \dots & \lambda_1^{n-r+1} & \lambda_1^{n-r-2} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{n+1} & \lambda_2^n & \dots & \lambda_2^{n-r+1} & \lambda_2^{n-r+1} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ \lambda_n^{n+1} & \lambda_n^n & \dots & \lambda_n^{n-r+1} & \lambda_n^{n-r-1} & \dots & \lambda_n & 1 \end{array} \right|,$$

sviluppandolo secondo gli elementi della prima orizzontale otterremo

$$D_r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s x^{n-s} \Delta_{r,s} + \sum_{s=r+2}^{s=n} (-1)^{s+1} x^{n-s} \Delta_{r,s};$$

ma  $D_r$  è un determinante del tipo di  $\Delta_r$  onde potremo applicare la (2) e dedurre

$$D_r = \Delta \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s (L_r L_{s+1} - L_{r+1} L_s) x_{n-s} + \Delta \sum_{s=r+2}^{s=n+1} (-1)^s (L_r L_{s+1} - L_{r+1} L_s) x_{n-s}.$$

Confrontando questi due valori di  $D_r$  si vede tosto che è

$$(3) \quad \Delta_{r,s} = \Delta \left| \begin{array}{cc} L_{r+1} & L_r \\ L_{s+1} & L_s \end{array} \right| \quad \text{se} \quad r < s.$$

4. Ora che conosciamo il valore del determinante  $\Delta_{r,s}$  potremo dedurre quello

del determinante (che indicheremo con  $\Delta_{r,s,t}$ ) che si ottiene levando dalla matrice [www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \lambda_1^{n+2} & \lambda_1^{n+1} & \dots & \lambda_1^{n-r+1} & \lambda_1^{n-r} & \dots & \lambda_1^{n-s+1} & \lambda_1^{n-s} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{n+2} & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_2^{n-r+1} & \lambda_2^{n-r} & \dots & \lambda_2^{n-s+1} & \lambda_2^{n-s} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ \lambda_n^{n+2} & \lambda_n^{n+1} & \dots & \lambda_n^{n-r+1} & \lambda_n^{n-r} & \dots & \lambda_n^{n-s+1} & \lambda_n^{n-s} & \dots & \lambda_n & 1 \end{array} \right\}$$

la verticale che contiene le potenze di esponente  $n-t$ ; perciò trasformeremo questa matrice in un determinante  $D_{r,s}$  coll'aggiungervi come prima orizzontale

$$x^{n+2} x^{n+1} \dots x^{n-r+1} x^{n-r} \dots x^{n-s+1} x^{n-s} \dots x 1.$$

Questo determinante può svilupparsi secondo gli elementi della prima orizzontale e può calcolarsi applicando la (3); il confronto dei due risultati conduce all'eguaglianza

$$(4) \quad \Delta_{r,s,t} = \begin{vmatrix} L_{r+2} & L_{r+1} & L_r \\ L_{s+2} & L_{s+1} & L_s \\ L_{t+2} & L_{t+1} & L_t \end{vmatrix} \Delta \quad \text{ove} \quad r < s < t.$$

5. Continuando a ragionare nello stesso modo si conclude che:  
Se si indica con  $\Delta_{r_1, r_2, \dots, r_i}$  il determinante che si ottiene dalla matrice

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \lambda_1^{n+i-1} & \lambda_1^{n+i-2} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{n+i-1} & \lambda_2^{n+i-2} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{n+i-1} & \lambda_n^{n+i-2} & \dots & \lambda_n & 1 \end{array} \right\}$$

sopprimendovi le colonne che contengono le potenze di esponenti

$$n - r_1, n - r_2, \dots, n - r_i \quad \text{ove} \quad r_1 < r_2 < \dots < r_i;$$

e se con  $L_j$  si indica la somma dei prodotti  $j$  a  $j$  delle  $\lambda$  quando  $0 < j < n$  mentre

si indica l'unità quando  $j = 0$  e lo zero quando  $j < 0$  o  $> n$ ; si avrà l'identità

$$\Delta_{r_1, r_2, \dots, r_t} = \Delta \begin{vmatrix} L_{r_1+i-1} & L_{r_1+i-2} & \dots & L_{r_1} \\ L_{r_2+i-1} & L_{r_2+i-2} & \dots & L_{r_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ L_{r_t+i-1} & L_{r_t+i-2} & \dots & L_{r_t} \end{vmatrix}$$

Mantova , 5 Settembre 1888.

## SULLE CURVE RAZIONALI NORMALI IN UNO SPAZIO

A  $n$  DIMENSIONI

DI

G I N O L O R I A .

Alcune generalità sulle curve razionali normali.

1. In uno spazio a  $n$  dimensioni  $S_n$  chiamiamo  $x_0 x_1 \dots x_n$  le coordinate omogenee di un punto  $x$  e  $\xi_0 \xi_1 \dots \xi_n$  quello di uno spazio a  $n - 1$  dimensioni  $S_{n-1}$  e supponiamo scelto il punto unità in modo che la condizione affinché il punto  $x$  e lo spazio  $\xi$  siano incidenti sia espressa dalla relazione

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i x_i = 0 \quad \text{o} \quad \xi_n = 0.$$

In  $S_n$  consideriamo  $n$  fasci di  $S_{n-1}$  fra loro proiettivi le cui equazioni siano

$$(2) \quad \lambda \eta_x^{(r)} + \mu \zeta_x^{(r)} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

$\frac{\lambda}{\mu}$  essendo un parametro. Il luogo dei punti d'intersezione delle ennuple di  $S_{n-1}$  corrispondenti è una curva d'ordine  $n$   $C_{1,n,n}$  (\*) *razionale normale*, la quale incontra in  $n - 1$  punti lo spazio a  $n - 2$  dimensioni sostegno di uno dei fasci generatori la curva. Essa può ottenersi non soltanto dai fasci dati ma anche da altri  $n$  fasci proiettivi di  $S_{n-1}$ , i cui sostegni abbiano ciascuno  $n - 1$  punti comuni colla curva.

---

(\*) Seguendo l'esempio del sig. E. H. Moore (*Transactions of the Connecticut Academy*, Vol. VII 1885) indichiamo con  $S_{n,k,r}$  uno spazio a  $r$  dimensioni d'ordine  $n$  contenuto in uno spazio lineare a  $k$  dimensioni e non in uno meno esteso.

2. La curva  $C_{1,n,n}$  può generarsi altrimenti. Consideriamo infatti le  $\infty^{n-1}$  rette che si possono condurre pel punto comune agli  $n$  spazi a  $n-1$  dimensioni

$$\eta_x^{(1)} = 0 \quad , \quad \eta_x^{(2)} = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \eta_x^{(n)} = 0$$

e tutte quelle che si possono condurre pel punto comune agli altri spazi

$$\zeta_x^{(1)} = 0 \quad , \quad \zeta_x^{(2)} = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \zeta_x^{(n)} = 0.$$

Supponendo che fra questi due sistemi di rette esista una corrispondenza proiettiva, due rette corrispondenti qualunque potranno rappresentarsi con equazioni della seguente forma

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta_x^{(1)}}{\alpha_1} = \frac{\eta_x^{(2)}}{\alpha_2} = \dots = \frac{\eta_x^{(n)}}{\alpha_n} (= -\mu) \\ \frac{\zeta_x^{(1)}}{\alpha_1} = \frac{\zeta_x^{(2)}}{\alpha_2} = \dots = \frac{\zeta_x^{(n)}}{\alpha_n} (= +\lambda). \end{array} \right.$$

Vi sono  $\infty^1$  punti  $x$  di  $S_n$  per cui passano due rette corrispondenti, uno qualunque di essi soddisfa le equazioni precedenti, cioè le

$$\eta_x^{(r)} = -\mu \alpha_r \quad , \quad \zeta_x^{(r)} = \lambda \alpha_r \quad , \quad (r = 1, \dots, n)$$

epperò anche le seguenti

$$\lambda \eta_x^{(r)} + \mu \zeta_x^{(r)} = 0 \quad (r = 1, \dots, n).$$

Ora queste equazioni non differiscono dalle (2), dunque il luogo de' punti  $x$  ora considerati non differisce dalla curva  $C_{1,n,n}$  già ottenuta.

Questa è determinata da  $n+3$  de' suoi punti, perchè con questi dati si può determinare una corrispondenza proiettiva fra gli elementi di due sistemi di rette avente per centri due dei punti dati e generanti una  $C_{1,n,n}$  che contiene gli altri. Quindi il numero delle curve razionali normali dello spazio a  $n$  dimensioni è  $\infty^{(n-1)(n+3)}$ .

3. Risolvendo le (2) rispetto ai rapporti delle  $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n$  si ottiene un risultato della forma:

$$(4) \quad \rho \alpha_i = \sum_{r=0}^{r=i} a_{ir} \lambda^r \mu^{n-r} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Il determinante  
www.fdbt001.com.cn

$$a = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

è diverso da 0 se la curva considerata, come supponiamo, non appartiene a uno spazio a  $n - 1$  dimensioni; quindi noi potremo risolvere le equazioni (4) rispetto alle  $n + 1$  quantità

$$\lambda^r \mu^{n-r} \quad (r = 0, 1, \dots, n);$$

e, se chiamiamo  $\alpha_{ik}$  l'elemento aggiunto di  $a_{ik}$  nel determinante  $a$ , otterremo

$$\rho \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_{ir} x_i = a \lambda^r \mu^{n-r}.$$

Se quindi facciamo la trasformazione di coordinate stabilita dalle formole

$$\sigma y_r = \frac{\rho}{a} \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_{ir} x_i$$

potremo scrivere

$$\sigma y_r = \lambda^r \mu^{n-r}.$$

Riponendo  $x$  al posto di  $y$ ,  $\rho$  al posto di  $\sigma$  e scambiando fra loro  $\lambda$  e  $\mu$  giungeremo così alla seguente *rappresentazione parametrica delle coordinate dei punti della curva*

$$(5) \quad \rho x_i = \lambda^{n-i} \mu^i;$$

si può anche dire che la curva è rappresentata dalla forma binaria

$$(6) \quad F(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^{i=n} \xi_i \lambda^{n-i} \mu^i$$

eguagliata a zero, perchè per ogni valore del rapporto  $\lambda : \mu$ ,  $F(\lambda, \mu) = 0$  è l'equazione involuppo di un punto della curva.

Per semplicità faremo nella (5)  $\mu = 1$ , onde la curva sarà rappresentata dalle equazioni

$$(5') \quad \rho x_i = \lambda^{n-i}$$

e diremo *punto*  $\lambda$  il punto della curva a cui corrisponde il valore  $\lambda$  del parametro.

4. Chiamiamo  $A_0, A_1, \dots, A_n$  i punti fondamentali del sistema di coordinate rispetto al quale la curva che consideriamo è suscettibile della rappresentazione (5) o (5)'.

È agevole dimostrare che i punti  $A_0$  e  $A_n$  appartengono alla curva e il punto  $A_r (r = 1, \dots, n - 1)$  è l'intersezione dello spazio ad  $n - r$  dimensioni che contiene il punto  $A_0$  e  $n - r$  punti consecutivi della curva (cioè l' $S_{n-r}$  osculatore in  $A_0$  alla curva) collo spazio ad  $r$  dimensioni contenente il punto  $A_n$  e  $r$  punti consecutivi della curva (cioè l' $S_r$  osculatore in  $A_n$  alla curva).

Un tale sistema di  $n + 1$  punti e degli  $n + 1$   $S_{n-1}$  che li congiungono si dirà  $(n + 1)$ -edro di osculazione della data curva corrispondente alla corda  $A_0 A_n$ ; la curva ne ammette  $\infty^2$ .

5. L'equazione dello spazio a  $n - 1$  dimensioni che contiene i punti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  della curva ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \lambda_n^n & \lambda_n^{n-1} & \lambda_n^{n-2} & \dots & \lambda_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o anche

$$\sum_{i=0}^{i=n} x_i \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \dots & \lambda_1^{n-i+1} & \lambda_1^{n-i-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_n^n & \dots & \lambda_n^{n-i+1} & \lambda_n^{n-i-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o finalmente (\*), chiamando  $L_i$  la somma dei prodotti delle  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  prese  $i$  per volta.

$$(7) \quad \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i L_i x_i = 0,$$

avendo scritto per uniformità  $L_0$  invece di 1.

Facendo  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$  e chiamandone  $\lambda$  il valor comune dedurremo che

$$(8) \quad \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i x_i = 0$$

(\*) Cfr. la mia Nota su una classe di determinanti, che precede questo articolo. VOL. XXVI.

è l'equazione dello spazio a  $n - 1$  dimensioni osculatore in  $\lambda$  alla curva data. Gli  $\infty^1$  spazi a  $n - 1$  dimensioni osculatori alla curva ne costituiscono la *svilupabile osculatrice*.

6. Siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$  i parametri di  $p + q = n + 2$  punti della curva e siano  $x_0, x_1, \dots, x_n$  le coordinate del punto  $x$  comune all'  $S_{p-1}$  determinato dai primi  $p$  punti dati coll'  $S_{q-1}$  determinato dai rimanenti. Si potranno assegnare ai coefficienti  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  dei valori tali che risulti

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \alpha_1 \lambda_1^{n-i} + \alpha_2 \lambda_2^{n-i} + \dots + \alpha_p \lambda_p^{n-i} \\ x_i &= \beta_1 \mu_1^{n-i} + \beta_2 \mu_2^{n-i} + \dots + \beta_q \mu_q^{n-i} \end{aligned} \right\} (i = 0, 1, \dots, n).$$

Eliminando le  $\alpha$  e le  $\beta$  si ottengono due gruppi di equazioni che possono rappresentarsi così

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_0 & \lambda_1^n & \dots & \lambda_p^n \\ x_1 & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_p^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ x_n & 1 & \dots & 1 \end{array} \right\| = 0 \qquad \left\| \begin{array}{cccc} x_0 & \mu_1^n & \dots & \mu_q^n \\ x_1 & \mu_1^{n-1} & \dots & \mu_q^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & \mu_1 & \dots & \mu_q \\ x_n & 1 & \dots & 1 \end{array} \right\| = 0 ;$$

se si chiama  $L_i$  la somma dei prodotti  $i$  ad  $i$  delle  $\lambda_1 \dots \lambda_p$ ,  $M_i$  la somma analoga formata colle  $\mu_1 \dots \mu_q$ , queste equazioni si possono scrivere così:

$$(9) \quad \begin{aligned} x_r - L_1 x_{r+1} + L_2 x_{r+2} - \dots + (-1)^p L_p x_{r+p} &= 0 & (r = 0, 1, \dots, n - p) \\ x_s - M_1 x_{s+1} + M_2 x_{s+2} - \dots + (-1)^q M_q x_{s+q} &= 0 & (s = 0, 1, \dots, n - q) \end{aligned}$$

e serviranno a determinare le coordinate del punto  $x$  dianzi definito.

Facendo in particolare  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q = \mu$ , le equazioni (9) divengono

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{p-r} (-1)^i \binom{p}{i} \lambda^i x_{r+i} &= 0 & (r = 0, 1, \dots, n - p) \\ \sum_{j=0}^{q-s} (-1)^j \binom{q}{j} \mu^j x_{s+j} &= 0 & (s = 0, 1, \dots, n - q) \end{aligned} \right.$$

e servono a trovare le coordinate del punto in cui l'  $S_{p-1}$  osculatore in  $\lambda$  alla curva incontra l'  $S_{q-1}$  osculatore in  $\mu$ , nell'ipotesi che sia  $p + q = n + 2$ .



12. Facciamo un'applicazione di queste formole.

Riprendiamo la forma binaria di grado  $n$   $F(\lambda, \mu)$  definita dalla (6); la sua forma polare rispetto al punto  $\lambda_1, \mu_1$  è (dopo aver fatto per semplicità  $\mu = \mu_1 = 1$ )

$$\sum_0^n \xi_i \{ (n-i) \lambda_1 \lambda^{n-i-1} + i \lambda^{n+i} \}$$

e rappresenta, eguagliata a zero, una curva razionale d'ordine  $n - 1$  che può anche intendersi individuata dalle equazioni

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= n \lambda_1 \lambda^{n-1} \\ \rho x_1 &= (n-1) \lambda_1 \lambda^{n-2} + 1 \cdot \lambda^{n-1} \\ \rho x_2 &= (n-2) \lambda_1 \lambda^{n-3} + 2 \cdot \lambda^{n-2} \\ &\dots \\ \rho x_{n-1} &= 1 \lambda_1 + (n-1) \lambda \\ \rho x_n &= n. \end{aligned}$$

Questa curva appartiene a uno spazio a  $n - 1$  dimensioni

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n = 0 ;$$

i coefficienti  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  soddisfano, come si vede facilmente, le eguaglianze (11') in cui si scriva  $\lambda_1$  invece di  $\lambda$ ; dunque quello spazio non è che quello che oscula in  $\lambda_1$  la data curva. Dunque: se  $F(\lambda, \mu) = 0$  rappresenta una curva  $C_{1,n,n}$  razionale normale d'ordine  $n$ ,  $\lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \mu_1 \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$  rappresenterà una curva razionale normale d'ordine  $n - 1$  appartenente all' $S_{n-1}$  osculatore a  $C_{1,n,n}$  nel punto  $\lambda_1 : \mu_1$ .

Similmente la seconda polare di  $\lambda_1, \mu_1$  rispetto a  $F(\lambda, \mu)$  in cui si sia fatto  $\mu = \mu_1 = 1$ , cioè la forma

$$\sum_0^n \xi_i \{ (n-i)(n-i-1) \lambda^{n-i-2} \lambda_1^2 + 2(n-i) i \lambda^{n-i-1} \lambda_1 + i(i-1) \lambda^{n-i} \}$$

eguagliata a zero rappresenta una curva razionale d'ordine  $n - 2$ , posta quindi in uno spazio a  $n - 2$  dimensioni; le coordinate di un qualunque spazio a  $n - 1$  dimensioni passante per questo soddisfano (lo si dimostra senza difficoltà) alle equazioni che si deducono dalle (12') scrivendo  $\lambda_1$  invece di  $\lambda$ . Dunque: se  $F(\lambda, \mu) = 0$  rappresenta una curva  $C_{1,n,n}$  razionale normale d'ordine  $n$ ,

$$\lambda_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + 2 \lambda_1 \mu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \mu} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} = 0$$

rappresenterà una curva razionale normale d'ordine  $n - 2$  appartenente all'  $S_{n-2}$  osculatore a  $C_{1,n,n}$  nel punto  $\lambda_1, \mu_1$ .

Analogamente si dimostra :

Se  $F(\lambda, \mu)$  è una forma binaria che eguagliata a zero rappresenta una curva razionale normale dello spazio a  $n$  dimensioni, le sue successive polari rispetto a  $\lambda_1, \mu_1$  rappresenteranno delle curve razionali normali degli ordini  $n - 1, n - 2, \dots$  poste rispettivamente in spazi a  $n - 1, n - 2, \dots$  dimensioni osculatori alla data nel punto  $\lambda_1, \mu_1$ .

Quest'osservazione può tornar utile nello studio delle forme binarie rappresentate sulle curve razionali normali.

13. L'equazione (8) è una relazione fra il parametro di un punto della curva e un punto  $x$  del piano osculatore in esso; ritenendo in essa le  $x_0, x_1, \dots, x_n$  come date essa servirà a determinare i punti della curva i cui  $S_{n-1}$  osculatori passano per  $x$ . Questi punti sono in numero di  $n$  e determinano un  $S_{n-1}$  la cui equazione è (se  $X_i$  sono coordinate correnti) :

$$(12) \quad \sum_0^n (-1)^i \binom{n}{i} x_i X_{n-i} = 0,$$

e le cui coordinate sono :

$$r \xi_i = (-1)^i \binom{n}{i} x_{n-i}.$$

Il punto  $x$  e lo spazio ad  $n - 1$  dimensioni costruito sono associati in una corrispondenza involutoria; il luogo dei punti posti sugli  $S_{n-1}$  corrispondenti ha per equazione

$$(13) \quad \sum_0^n (-1)^i \binom{n}{i} x_i x_{n-i} = 0,$$

e l'inviluppo degli  $S_{n-1}$  che passano nei punti corrispondenti

$$(14) \quad \sum_0^n (-1)^i \frac{1}{\binom{n}{i}} \xi_i \xi_{n-i} = 0.$$

Se  $n$  è dispari queste equazioni sono soddisfatte identicamente, se  $n$  è pari rappresentano una stessa superficie di 2° grado. Dunque: quella corrispondenza involutoria è un sistema nullo se  $n$  è dispari, è una polarità rispetto a una

superficie di 2° grado passante per tutti i punti della curva e tangente a tutti i suoi piani osculatori se  $n$  è pari (\*).

14. Il primo membro della (13) è l'ultimo scorrimento del primo membro della (8) previamente ridotto a forma omogenea col sostituire a  $\lambda$  il rapporto  $\frac{\lambda}{\mu}$ ; dunque il n.° precedente porge l'interpretazione geometrica del suo annullarsi identico, per  $n$  dispari e il significato che ha l'equazione che si ottiene eguagliandolo a zero, per  $n$  pari. Ci proponiamo ora d'interpretare geometricamente l'Hesiano del primo membro della (8), che scriveremo sotto forma omogenea così:

$$\varphi(\lambda, \lambda') = \sum_0^n (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i \lambda'^{n-i} \alpha_i.$$

Cerchiamo a tale scopo le equazioni di un  $S_{n-2}$  passante per un punto  $\mu$  della curva e osculante la curva stessa in  $\lambda$ ; notando che le equazioni dell' $S_{n-2}$  determinato dai punti  $\mu, \lambda, \dots, \lambda_n$  sono

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \mu^n & \lambda_1^n & \dots & \lambda_{n-2}^n \\ \alpha_1 & \mu^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-1} \\ \alpha_2 & \mu^{n-2} & \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \mu & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} \\ \alpha_n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

si trova, ristabilita l'omogeneità, che le equazioni cercate sono

$$\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \mu' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \lambda'} = 0, \quad \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \lambda'} + \mu' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda'^2} = 0.$$

Eliminando  $\mu$  e  $\mu'$  si trova per determinare  $\lambda : \lambda'$  l'equazione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \lambda'} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda' \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda'^2} \end{vmatrix} = 0$$

(\*) Clifford. On the classification of loci (Phil. Transactions of the Roy. Soc. of London, T. CLXIX, 1878, Part II; oppure Mathematical Papers by W. K. Clifford, London 1882, p. 395-320).

la quale dimostra :

Per un punto qualunque  $x$  dello spazio a  $n$  dimensioni passano  $2(n-2)$  spazii a  $n-2$  dimensioni di cui ciascuno contiene un punto di una curva razionale normale e ha altrove con essa un contatto d'ordine  $n-2$ ; l'equazione che determina i punti di contatto ha per primo membro l'hessiano della forma che rappresenta i punti di contatto degli spazii a  $n-1$  dimensioni osculatori passanti per quel punto  $x$ .

Collineazioni che mutano in sè stessa una curva razionale normale (\*).

15. Una collineazione nello spazio a  $n$  dimensioni è determinata dalla conoscenza di  $n+2$  coppie di punti corrispondenti onde dipende da  $n(n+2)$  costanti. Affinchè essa trasformi una curva razionale normale in un'altra, è necessario e sufficiente che i punti corrispondenti a  $n+3$  punti arbitrari della prima appartengano alla seconda; il che trae seco  $(n+3)(n-1) = n(n+2) - 3$  condizioni. Ne viene che :

Esistono  $\infty^3$  collineazioni che trasformano una curva razionale normale dello spazio a  $n$  dimensioni in un'altra curva analoga.

Ciò prova che una curva razionale normale non ha invarianti assoluti e in particolare che :

Vi sono  $\infty^3$  collineazioni che trasformano in sè stessa qualsia curva razionale normale.

16. Se il punto  $\lambda$  della curva  $C_{1,n,n}$  rappresentata dalle equazioni (3') si muta nel punto  $\mu$  della stessa fra i parametri  $\lambda$  e  $\mu$  passerà una relazione algebrica tale che ad ogni valore di  $\lambda$  o di  $\mu$  corrisponde senza eccezione un valore determinato e unico di  $\mu$  o  $\lambda$ ; dunque si avrà

$$(15) \quad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

$a, b, c, d$  essendo delle costanti.

Viceversa ogni proiettività fra i punti di  $C_{1,n,n}$  individua una collineazione in  $S_n$  che muta la curva in sè stessa; a un qualunque  $S_{n-1}$  che secchi la curva nei punti  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  corrisponderà l' $S_{n-1}$  individuato da' punti di  $C_{1,n,n}$  che corrispondono a questi in virtù della (15); a qualunque punto  $\omega$  di  $S_n$  corrisponde l'intersezione degli  $S_{n-1}$  che osculano la curva nei punti che, grazie alla (15), corrispondono ai punti di osculazione con  $C_{1,n,n}$  degli  $S_{n-1}$  passanti per il punto  $\omega$ .

Se  $\xi_0 \xi_1 \dots \xi_n$  e  $\eta_0 \eta_1 \dots \eta_n$  sono le coordinate di due  $S_{n-1}$  corrispondentisi

---

(\*) Facendo nei risultati di questo § e del seguente  $n=3$  si ritrova quanto il sig. R. Sturm espone nel Vol. XXVI dei *Mathematische Annalen*.

nella collineazione individuata dalla (15) le due equazioni

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\sum_0^n \xi_i \lambda^{n-i} = 0 \quad , \quad \sum_0^n \eta_i \mu^{n-i} = 0$$

devono mutarsi l'una nell'altra in virtù della (15); vale a dire se nella prima (o seconda) si sostituisce a  $\lambda$  (o  $\mu$ ) il valore tratto dalla (15), si deve giungere alla seconda (o prima); quindi identificando, a meno di un fattore, i risultati si ottengono le equazioni che porgono le  $\eta$  mediante le  $\xi$  o viceversa.

17. Supposti presi come vertici  $A_0$  e  $A_n$  del sistema di riferimento i punti doppi dell'omografia sulla curva, la (15) si potrà scrivere sotto la forma

$$(16) \quad \mu = k\lambda.$$

Questa proiettività determina in  $S_n$  una collineazione avente per equazioni:

$$(17) \quad \begin{cases} r\xi_i = k^{n-i} \eta_i & s\eta_i = k^i \xi_i \\ \rho x_i = k^i y_i & \rho y_i = k^{n-i} x_i. \end{cases}$$

Esse ci provano che:

*Gli  $n + 1$  punti di una collineazione che trasforma in sè stessa una curva razionale normale, formano l' $(n + 1)$ -edro d'osculatione che corrisponde alla corda della curva che unisce i punti doppi della proiettività che la data collineazione determina sulla curva.*

Quindi il formare i punti uniti di una collineazione un  $(n + 1)$ -edro di osculatione di una curva razionale normale è condizione necessaria affinchè quella trasformi questa in sè stessa; è facile vedere che non è però sufficiente. Supponiamo infatti che la curva  $C_{1,n,n}$  sia al solito rappresentata dalle (5') e la collineazione lo sia dalle equazioni

$$\rho x_i = k_i y_i.$$

Affinchè questa muti in sè stessa la curva  $C_{1,n,n}$  bisogna e basta che per ogni valore di  $\lambda$  ne esista uno di  $\mu$  per cui sia

$$\rho \lambda^i = k_i \mu^i$$

ossia

$$k_i = \rho \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i;$$

è dunque necessario anche le costanti  $k_0, k_1, \dots, k_n$  siano proporzionali alle potenze  $0^a, 1^a, \dots, n^a$  di una stessa quantità. Per enunciare geometricamente questo ri-

sultato notiamo che il rapporto anarmonico del punto  $X(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , del punto  $Y(k_0x_0, k_1x_1, \dots, k_nx_n)$  e delle tracce  $T_i$  (ove  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) e  $T_n$  della retta che li congiunge sugli spazi  $x_i = 0, x_n = 0$  è dato da

$$(X Y T_i T_n) = \frac{k_n}{k_i}$$

e chiamiamo gli  $n$  rapporti anarmonici  $(X Y T_i T_n)$  *invarianti della collineazione*. Potremo allora dire:

*Affinchè una collineazione muti in sè stessa una curva razionale normale è necessario e sufficiente che i suoi punti uniti formino un  $(n+1)$ -edro di osculazione della curva e che i suoi invarianti siano eguali alla potenza successiva dall' $n^{\text{ma}}$  alla  $1^{\text{a}}$  di una stessa quantità.*

18. Una collineazione che muta in sè stessa la  $C_{1,n,n}$  rappresentata dalla (5'), cambia in sè stessa anche tutte le quadriche

$$\sum_0^n A_i x_i x_{n-i} = 0$$

le quali sono  $\infty^{\frac{n}{2}}$  o  $\infty^{\frac{n-1}{2}}$  secondochè  $n$  è pari o dispari; quando  $n$  è pari fra queste quadriche trovasi la (13). Quella collineazione muta anche in sè stesse le  $\infty^{n-1}$  curve razionali normali rappresentate dalle equazioni

$$\rho x_i = A_i \lambda^{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

le quali (qualunque siano i valori delle  $A_i$ ) hanno tutte per  $(n+1)$ -edro d'osculatione quello di riferimento.

Fra queste ne esiste una notevole la quale è il luogo de' punti in cui le tangenti nei punti  $\lambda$  della curva sono incontrate dagli  $S_{n-1}$  osculatori nei corrispondenti punti  $\mu$ ; la rappresentazione parametrica di essa [come insegnano le equazioni (10 bis)] è

$$\rho x_i = \{ i(1-k) + nk \} \lambda^{n-i}.$$

19. I casi particolari della collineazione (17) si ottengono tutti supponendo che due o più de' suoi invarianti siano fra loro eguali; ora affinchè accada per collineazioni reali deve essere  $k=1$  oppure  $k=-1$ . Nel primo caso si ha l'identità. Nel secondo si ha una corrispondenza involutoria avente per spazi di punti uniti

$$x_0=0, x_2=0, \dots, x_n=0 \quad ; \quad x_1=0, x_3=0, \dots, x_{n-1}=0 \quad \text{se } n \text{ è pari.}$$

$$x_0=0, x_2=0, \dots, x_{n-1}=0 \quad ; \quad x_1=0, x_3=0, \dots, x_n=0 \quad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Due punti qualunque della curva determinano una di queste trasformazioni involutorie che mutano la curva in se stessa.

20. Nel caso in cui la proiettività (15) s'ia involutoria, presi come vertici  $A_0 A_n$  del sistema di riferimento due punti corrispondenti, la (15) potrà ridursi alla forma

$$\lambda\mu = k$$

e determinerà in  $S_n$  la collineazione rappresentata dalle equazioni

$$(18) \quad r\xi_i = k^i \eta_{n-i} \quad , \quad \rho x_i = k^i y_{n-i}$$

la quale è involutoria e ha due spazi di punti uniti rappresentati dalle equazioni

$$x_i = k^{i-\frac{n}{2}} \quad , \quad \text{ove} \quad \left\{ \begin{array}{ll} i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{array} \right.$$

**Correlazioni che mutano una curva razionale normale nella propria sviluppabile osculatrice.**

21. Ragionando in modo analogo a quello seguito nel § prec. si vede che :

*Vi sono  $\infty^8$  correlazioni che mutano una curva razionale normale nella propria sviluppabile osculatrice. Facendo corrispondere ad ogni punto della curva il punto di osculazione dello spazio corrispondente della sviluppabile, si ottiene una proiettività fra' punti della curva ; viceversa ogni tale proiettività genera una delle correlazioni di cui è parola.*

Questa proiettività potrà suporsi rappresentata dall'equazione (16); le equazioni della corrispondente correlazione saranno

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} r\xi_{n-i} = (-1)^i \binom{n}{i} k^i y_i \quad , \quad \sigma y_i = \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} k^{n-i} \xi_{n-i} \\ \rho x_i = \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} k^i \eta_{n-i} \quad , \quad s\eta_{n-i} = (-1)^i \binom{n}{i} k^{n-i} x_i \end{array} \right.$$

e queste mettono in evidenza come il sistema di riferimento sia disposto rispetto

alla correlazione (\*), e permettono di scrivere tosto le equazioni dei luoghi degli elementi corrispondenti incidenti.

Una correlazione rappresentabile con equazioni della forma

$$\rho x_i = k_i \eta_{n-i}$$

non muta in generale la curva (S') nella propria sviluppabile osculatrice ; perchè ciò accada devono le costanti  $\frac{k_n}{k_i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ) essere proporzionali alle potenze successive di una stessa quantità divise pei corrispondenti coefficienti dello sviluppo della potenza  $n^{\text{mo}}$  di un binomio. Ecc. ecc.

Se la proiettività binaria sulla curva è involutoria, rappresentandola coll'equazione

$$\lambda \mu = k$$

essa darà origine alla correlazione individuata dalle relazioni

$$(20) \quad r \xi_i = (-1)^i \binom{n}{i} k^i y_i;$$

questa è la polarità rispetto alla quadrica di equazione

$$\sum_0^n (-1)^i \binom{n}{i} k^i x_i^2 = 0,$$

quadrica rispetto a cui è auto-coniugato il dato  $(n + 1)$ -edro di osculazione della curva  $C_{1,n,n}$ . Ecc. ecc.

Mantova, 15 Settembre 1888.

(\*) Si noti che le (19) rientrano nelle forme canoniche a cui son riducibili le equazioni di una correlazione generale dello spazio a  $n$  dimensioni.

UN TEOREMA NELLA GEOMETRIA  
DI UNA CERTA CLASSE DI CORRISPONDENZE

P E L

Dott. A. D E L R E.

---

Il Chiarissimo Prof. De Paolis in un breve articolo inserito nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Anno 1886) ha generalizzato, estendendolo al caso di due involuzioni proiettive, un notissimo teorema sulle omografie binarie. Questo teorema consiste in ciò che, data una omografia binaria  $\mathfrak{F}$ , un elemento qualunque ed il suo coniugato armonico rispetto ai due elementi che gli corrispondono in  $\mathfrak{F}$  e nella inversa di  $\mathfrak{F}$ , sono coniugati armonici anche rispetto agli elementi uniti di  $\mathfrak{F}$  (\*). Ora, siccome si ha nel piano, nello spazio ordinario ed in generale in uno spazio lineare qualunque, un teorema analogo, il quale si enuncia dicendo che, data una correlazione  $\Gamma$  di questo spazio, un punto qualunque ed il suo  $S'_{n-1}$  (piano per  $n=3$ , retta per  $n=2$ ) armonico rispetto ai due  $S'_{n-1}$  che gli corrispondono in  $\Gamma$  e nella inversa di  $\Gamma$ , sono armonici (polari) pure rispetto alla  $F^2_{n-1}$  (quadrica per  $n=3$ , conica per  $n=2$ ) luogo dei punti che appartengono agli  $S'_{n-1}$  corrispondenti (\*\*), così si domanda se questo teorema può generalizzarsi, e nel caso affermativo dare la generalizzazione.

---

(\*) Di questo teorema si trova una prima menzione nella *Géométrie supérieure* di Chasles; è ricordato nella memoria dello Smith « *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* » Ann. di Mat. t. III. serie II; e stante la sua importanza nella teoria delle proiettività binarie è stato posteriormente trattato da diversi altri geometri. Vedi, p. e., Wiener « *Rein Geometrische Theorie der Darstellungen bindrer formen*. An. 1885; Segre « *Le coppie di elementi imag. etc.* Atti della R. Acc. di Torino An. 1886; e *Les homographies binaires et leurs faisceaux*, Crelle 100. Si è posto poi a base di quasi tutto il meccanismo geometrico della teoria delle trasformazioni lineari reali nelle « *Lezioni di Geometria Proiettiva* » del Prof. Sannia.

(\*\*) Questo teorema pel piano e per lo spazio credo sia stato dato per la prima volta in una memoria di Schroeter, Giornale di Crelle, vol. 75. Si trova an-

Scopo della presente nota è precisamente di rispondere ad una tale domanda.

Si ponga fra i punti  $\alpha, \alpha'$  di due spazii sovrapposti  $S, S'$ , lineari e ad  $n$  dimensioni una corrispondenza algebrica tale che i punti  $\alpha'$  di  $S'$  corrispondenti di un dato punto  $\alpha$  di  $S$  generino una varietà  $S^{(m')}_{n-1}$  di  $n-1$  dimensioni e di ordine  $m'$ , e che i punti  $\alpha$  di  $S$  corrispondenti di un dato punto  $\alpha'$  di  $S'$  generino una varietà  $S^{(m)}_{n-1}$  di egual numero di dimensioni, e di ordine  $m$ . Allora vi sarà

che nella memoria del sig. Montesano « *Su la corrispondenza reciproca di due sistemi dello spazio*, Napoli, 1885, ed in quella di Sturm « *Zur Theorie der Collineation und corre'lation* Math. Ann. Bd. XXVIII. È stato poi esteso alle correlazioni in uno spazio qualunque dal Segre nella memoria « *Ricerche sulle omografie e correlazioni in generale*, Atti della R. Acc. di Torino, An. 1885 Non credo però che se ne abbia una dimostrazione la quale non lasci nulla a desiderare dal punto di vista della sintesi pura. Mi permetto perciò, cogliendo l'occasione, di darne una pel piano, che pare risponda interamente allo scopo, enunciando intanto il teorema nella forma più completa che segue: *Se di ogni punto M del piano di una correlazione l' si prende la polare m, rispetto alle rette  $m_2, m_1$  che gli corrispondono ordinatamente in  $\Gamma$  e  $\Gamma^{-1}$ , M ed m si corrisponderanno rispetto ad uno stesso sistema polare, e correlativamente. Si avranno così due sistemi polari: questi si corrisponderanno involutoriamente in  $\Gamma$ , e l'omografia risultante dal loro prodotto è un' omologia; sicché essi sono bitangenti.*

Di vero, se si fa percorrere al punto  $M$  una retta arbitraria  $p$ , supponendo che a  $p$  corrispondano in  $\Gamma$  e  $\Gamma^{-1}$  ordinatamente i punti  $P_2, P_1$ , al variare di  $M$ , le rette  $m_2, m_1$  descriveranno rispettivamente intorno a  $P_2, P_1$  fasci proiettivi alla punteggiata descritta da  $M$ , e tali che, posto  $m_2 p \equiv M_2, m_1 p \equiv M_1$ , i punti  $MM_2$  descriveranno una proiettività  $\Gamma_p$ , descritta pure evidentemente dai punti  $M, M$ . Sia  $\mathfrak{F}_p$  l'involuzione unita di  $\Gamma_p$ , posto  $mp \equiv M'$ , siccome è  $M'$  il coniugato armonico di  $M$ , rispetto ad  $M_1 M_2$ , sarà  $M'$  il coniugato di  $M$  in  $\mathfrak{F}_p$ , e perciò da una parte la  $m$  corrispondente del punto  $M'$  passa per  $M$  (circostanza che serve appresso), e dall'altra eseguendo il prodotto  $\Gamma_p \mathfrak{F}_p$ , in questo prodotto, che per la permutabilità di  $\Gamma_p$  e  $\mathfrak{F}_p$  è uguale a  $\mathfrak{F}_p \Gamma_p$  si hanno le corrispondenze  $\begin{matrix} M_1, M \\ M M_2 \end{matrix}$ . Sicchè, proiettando ordinatamente da  $P_1, P_2$  le due punteggiate proiettive che danno luogo alla  $\Gamma_p \mathfrak{F}_p$ , e posto  $P_2 M \equiv m_2', P_1 M \equiv m_1'$  si ha fra i fasci di centri  $P_1, P_2$  una proiettività nella quale  $m_1, m_1', m_2, m_2'$  sono coppie di raggi corrispondenti; e quindi la retta  $m$ , la quale unisce i punti  $m_1, m_2, m_1', m_2'$  passa costantemente pel centro di proiettività di tali fasci, intorno al quale, giusta la circostanza notata sopra, descrive un fascio involutorio alla punteggiata descritta da  $M$ . Si conclude dunque che, al variare di  $M$ , questo punto e la retta  $m$  descrivono un sistema polare  $\Pi_1$ .

Applicando a  $\Pi_1$  la correlazione  $\Gamma$  si ha un altro sistema polare  $\Pi_2$ : questo è il luogo delle coppie (rette e punti) che si ottengono associando ad ogni retta del

una varietà  $S^{(m+m')}_{n-1}$ , dell'ordine  $m + m'$ , luogo sia dei punti  $x$  che appartengono alle corrispondenti varietà  $S^{(m')}_{n-1}$  che degli analoghi punti  $x'$ ; ed il teorema che stabilisce la generalizzazione domandata può enunciarsi nella maniera seguente :

*L'  $S'_{n-1}$  polare di un punto arbitrario rispetto all' insieme delle due varietà  $S^{(m')}_{n-1}$ ,  $S^{(m)}_{n-1}$  che gli corrispondono una volta considerandolo come punto di  $S$ , un'altra come punto di  $S'$ , è lo stesso dell'  $S'_{n-1}$  polare del punto rispetto alla varietà  $S^{(m+m')}_{n-1}$ .*

Di vero, sia, simbolicamente,

$$\varphi = a_x^m a'_x{}^{m'} = 0 \tag{1}$$

ove

$$a_x = \sum_1^{n+1} a_i x_i \quad , \quad a'_x = \sum_1^{n+1} a'_i x'_i$$

ed  $x_i, x'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ) sono le coordinate dei punti  $x, x'$ , l'equazione della corrispondenza. Ponendo, in  $\varphi$ ,  $x_i \equiv x'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ), si avrà in

$$f = a_x^m a'_x{}^{m'} = 0$$

l'equazione di  $S^{(m+m')}_{n-1}$ .

Ora l'  $S'_{n-1}$  polare di un punto  $y$  di coordinate  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ) rispetto ad  $S^{(m+m')}_{n-1}$  ha per equazione :

$$\sum_1^{n+1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_i \equiv y_i} x_i = m a_y^{m-1} a'_y{}^{m'} a_x + m' a_y^m a'_y{}^{m'-1} a'_x = 0 \tag{2}$$

piano il suo polo rispetto alla coppia di punti che alla retta corrispondono in  $\Gamma$  ed in  $\Gamma^{-1}$ , come è evidente per le proprietà della trasformazione ; ed applicando di nuovo  $\Gamma$  a  $\Pi_2$  si ritorna a  $\Pi_1$ . Sicchè da una parte  $\Pi_2$  è il sistema polare generato, rispetto a  $\Gamma$ , correlativamente al modo come si è generato  $\Pi_1$ , e dall'altra resta dimostrato che  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  si corrispondono involutoriamente in  $\Gamma$ .

Sia ora  $p'$  la retta che unisce i punti  $P_1, P_2$ ; a  $p'$  corrisponderanno in  $\Gamma$ , ed in  $\Gamma^{-1}$ , due punti  $P'_2, P'_1$  situati sopra  $p$ , e la polare  $q$  del punto  $pp' \equiv Q$  in  $\Pi_1$ , passa pei punti  $Q_1, Q'_1$  coniugati armonici di  $Q$  ordinatamente rispetto alle coppie  $P_2 P_1, P'_2 P'_1$ , i quali coniugati armonici sono i poli in  $\Pi_2$  delle rette  $p, p'$ . Ma, dicendo  $P'$  il polo di  $p'$  in  $\Pi_1$ ,  $P'$  è pure situato in  $q$ ; e nel prodotto  $\Pi_1 \Pi_2$  si hanno,

per quel che ora si è detto, le corrispondenze  $\begin{matrix} P & P' \\ Q_1 & Q'_1 \end{matrix}$ , dunque la retta  $q$  è retta

unita in un tal prodotto ; e perciò, poichè  $m$ , in sostanza, non è che la congiungente di due punti corrispondenti qualunque di  $\Pi_1, \Pi_2$ , ne segue che  $\Pi_1, \Pi_2$  è un'omologia, come volevasi dimostrare.

è quello polare di  $y$  rispetto all'insieme delle due varietà corrispondenti  $S^{(m)'}_{n-1}$ ,  $S^{(m)}_{n-1}$ , le cui equazioni dedotte dalla (1) sono

$$\varphi_y = a_y^m a'_x{}^{m'} = 0$$

$$\varphi'_y = a_x^m a'_y{}^{m'} = 0,$$

ha per equazione :

$$\sum_1^{n+1} \left[ \frac{\partial (\varphi_y \varphi'_y)}{\partial x_i} \right]_{x_i \equiv y_i} x_i = (\varphi'_y)_{x_i \equiv y_i} \sum_1^{n+1} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i} \right)_{x_i \equiv y_i} x_i + (\varphi_y)_{x_i \equiv y_i} \sum_1^{n+1} \left( \frac{\partial \varphi'_y}{\partial x_i} \right)_{x_i \equiv y_i} x_i$$

$$= a_y^m a'_y{}^{m'} (m a_y^{m-1} a'_y{}^{m'} a_x + m' a_y^m a'_y{}^{m'-1} a'_x) = 0, \quad (3)$$

ed il confronto della (3) colla (2) dimostra il teorema.

Esempii :

|                |   |                        |   |
|----------------|---|------------------------|---|
| Per $m=m'=1$ e | { | $n = 1$                | si ha il teorema sulle proiettività binarie |
|                |   | $n = 2$                | » » » correlazioni piane                    |
|                |   | $n = 3$                | » » » dello spazio                          |
|                |   | $n = \text{qualunque}$ | » » » in uno spazio qual.                   |

Per  $m = 1$ ,  $m' = 2$ ,  $n = 2$  si ha il seguente teorema sulle reciprocità quadratiche piane: *Se avendo posto fra due piani sovrapposti  $\sigma$ ,  $\sigma'$  una reciprocità quadratica si prende di un punto arbitrario  $M$  la polare  $m$ , rispetto alla cubica decomposta nella retta e nella conica che al punto  $M$  considerato ora come appartenente a  $\sigma$ , ora come appartenente a  $\sigma'$ , corrispondono rispettivamente in  $\sigma'$ ,  $\sigma$ ,  $M$  ed  $m$  saranno pure polo e polare rispetto alla cubica luogo dei punti che appartengono alle rette (e quindi alle coniche) corrispondenti.*

Etc. Etc.

## SOPRA ALCUNE SUPERFICIE E CURVE

**NOTA**

**DI**

**GEMINIANO PIRONDINI.**

.....

1. Indichiamo con  $R$  il raggio vettore che da un punto fisso (origine degli assi) va ai punti di una superficie  $S$ , e con  $\theta$  l'angolo che questo raggio vettore fa colla normale ad  $S$ .

Se per la superficie  $S$  si ha la relazione :

$$(1) \qquad \qquad \qquad \cos \theta = \varphi (R) ,$$

dove  $\varphi$  è il simbolo di una funzione qualunque, si ha che dando a  $R$  un valore particolare  $R_0$ , si ottiene :

$$\cos \theta_0 = \varphi (R_0) = \text{costante} ,$$

la quale eguaglianza esprime che le sfere che hanno il centro nell'origine, tagliano la superficie sotto un angolo costante lungo ciascuna di tali intersezioni. Tali intersezioni sono dunque linee di curvatura e la superficie  $S$ , avendo un sistema di linee di curvatura poste sopra sfere concentriche, avrà le linee di curvatura dell'altro sistema poste sopra piani passanti per il centro comune delle sfere, e verrà generata da un profilo piano invariabile di forma il cui piano rotola, senza strisciare, sopra un cono arbitrario.

Troviamo questo profilo; siccome esso è una geodetica della superficie  $S$ , la questione è ridotta a trovare le curve piane in cui è verificata la relazione (1) fra il raggio vettore  $R$  e l'angolo  $\theta$  che esso forma colla normale. Siccome le coordinate di una curva piana si possono mettere sotto la forma :

$$x = R \cos u \qquad , \qquad y = R \sin u ,$$

si avrà per i coseni direttivi della tangente :

$$\cos \alpha = \frac{R' \cos u - R \sin u}{\sqrt{R'^2 + R^2}}, \quad \cos \beta = \frac{R' \sin u + R \cos u}{\sqrt{R'^2 + R^2}},$$

e perciò :

$$\cos \theta = -\frac{x}{R} \cos \beta + \frac{y}{R} \cos \alpha = \frac{R'}{\sqrt{R'^2 + R^2}},$$

e la condizione (1) ci dà allora :

$$(2) \quad u = \int \frac{\varphi(R)}{R \sqrt{1 - \varphi^2(R)}} dR + \text{costante.}$$

Dunque : « le superficie, in cui fra il raggio vettore uscente da un punto  $O$  e l'angolo che esso forma colla normale ha luogo la relazione (1) sono generate dalla curva piana rappresentata in coordinate polari  $u, R$  dalla (2), la quale rimane invariata di forma, nel mentre che il suo piano rotola, senza strisciare, sopra un cono arbitrario col vertice nell'origine  $O$  dei raggi vettori ».

Se supponiamo  $\varphi(R) = \cos \theta = \text{costante}$ , si ha :

$$u = \cot. \theta (\log R - \log a) \quad \text{d'onde} \quad R = ae^{\frac{u}{\cot. \theta}},$$

equazione polare di una spirale logaritmica.

Dunque : « la superficie i cui raggi vettori rispetto a un'origine  $O$  sono egualmente inclinati sulla normale alla superficie, è generata da una spirale logaritmica invariabile di forma il cui piano, senza strisciare, rotola sopra un cono arbitrario, il cui vertice si trova nel polo  $O$  della spirale ».

Questo teorema è stato dimostrato dal Chiarissimo prof. Turazza (\*).

Se supponiamo  $\cos \theta = \frac{R}{a}$ , dovremo nella (2) fare  $\varphi(R) = \frac{R}{a}$  e risulta :

$$u = \int \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}} = \text{arc. sen } \frac{R}{a},$$

d'onde

$$R = a \text{ sen } u,$$

equazione polare di una circonferenza.

(\*) Annali di Tortolini, 1851.

Dunque: « *la superficie in cui i raggi vettori uscenti da un punto fisso sono inclinati sulla normale alla superficie di un angolo il cui coseno è proporzionale al raggio vettore, è generata da un cerchio invariabile di grandezza, il cui piano rotola, senza strisciare, sopra un cono arbitrario col vertice in un punto della curva* ».

Possiamo facilmente risolvere la questione inversa, poichè se,

$$(3) \quad u = f(R)$$

è l'equazione polare di una curva piana, confrontando quest'equazione colla (2) abbiamo:

$$f(R) = \int \frac{\varphi(R) dR}{R \sqrt{1 - \varphi^2(R)}},$$

da cui si deduce facilmente:

$$\varphi(R) = \frac{Rf'(R)}{\sqrt{1 + R^2 f'^2(R)}}.$$

Dunque: « *se si fa rotolare senza strisciamento, il piano di una curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione (3) sopra un cono arbitrario col vertice nell'origine dei raggi vettori, si ottiene una superficie i cui raggi vettori formano colla normale un angolo  $i$  dato dall'equaglianza*

$$\cos i = \frac{Rf'(R)}{\sqrt{1 + R^2 f'^2(R)}}.$$

Così se la curva da cui si parte è una sviluppante d'un cerchio di raggio  $a$ , si ha:

$$u = f(R) = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} - \arccos \frac{a}{R},$$

e quindi per la superficie generata risulta soddisfatta la relazione:

$$\cos i = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}.$$

2. Chiamiamo  $\Delta$  la distanza dell'origine degli assi ai piani tangenti di una superficie  $S$  ( $\Delta$  esprimerà anche la proiezione del raggio vettore sulla normale); se  $\theta$  ha il medesimo significato di prima, avremo:

$$\Delta = R \cos \theta, \quad \text{da cui} \quad \cos \theta = \frac{\Delta}{R}$$

e quindi se mettiamo la condizione  $\Delta = \varphi(R)$ , per ottenere la superficie corrispondente basterà nella (2) sostituire  $\frac{\varphi(R)}{R}$  a  $\varphi(R)$ ; così facendo, risulta :

$$(4) \quad u = \int \frac{\varphi(R)}{R \sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}} dR + \text{costante}.$$

Perciò « la superficie tale che la distanza da un punto fisso O ai piani tangenti (ovvero tale che la proiezione dei raggi vettori sulle normali) è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore, è generata dalla curva piana espressa in coordinate polari dalla (4) il cui piano, senza strisciare, rotola sopra un cono qualunque col vertice O ».

Osservando che il piano rettificante di una geodetica di una superficie o il piano osculatore di un'assintotica di una superficie coincidono col piano tangente alla superficie stessa, potremo dire « le geodetiche e le assintotiche delle superficie determinate hanno la proprietà che i loro piani rettificanti, e i loro piani osculatori distano dal punto fisso O di un segmento che è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore ».

Se poniamo  $\varphi(R) = \text{costante} = a$ , risulta :

$$u = \text{arc. sen } \frac{a}{R}, \quad \text{d'onde} \quad R \text{ sen } u = a,$$

equazione polare di una retta; tale retta, nel movimento più volte ricordato, genera una superficie sviluppabile e tocca il cono, sul quale avviene il rotolamento del piano mobile, nei vari punti di una geodetica.

Dunque « le sole superficie, aventi per podaria una sfera, sono le sviluppabili che hanno per spigolo di regresso una geodetica d'un cono ».

3. Chiameremo  $\delta$  la distanza dell'origine delle coordinate dalle normali a una data superficie ( $\delta$  esprimerà anche la proiezione del raggio vettore sul piano tangente); dalla relazione :

$$\delta = R \text{ sen } \theta,$$

si deduce :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{R^2 - \delta^2}}{R}.$$

Se dunque  $\delta$  si esprime in funzione del raggio vettore R per mezzo dell'equazione :

$$(5) \quad \delta = \varphi(R),$$

si avrà

www.libtool.com.cn

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}}{R}.$$

Se ora nelle (2) alla funzione  $\varphi(R)$  si sostituisce l'altra  $\frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}}{R}$  si deduce :

$$(6) \quad u = \int \frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}}{R \varphi(R)} dR + \text{costante}.$$

Perciò : « le superficie, tali che la distanza di un punto fisso dalle normali (ovvero tali che la proiezione dei raggi vettori sui piani tangenti) si esprime in funzione del raggio vettore per mezzo della relazione (3), è generata dalla curva piana rappresentata in coordinate polari dalla (6), la quale rimane inalterata di forma nel mentre che il suo piano rotola, senza strisciare, sopra un cono arbitrario col vertice nell'origine dei raggi vettori ».

Osservando che la normale principale di una geodetica di una superficie o la binormale di un'assintotica coincidono colla normale della medesima superficie, avremo : « le geodetiche o le assintotiche delle superficie determinate hanno la proprietà che le loro normali principali, o le loro binormali, distano dal punto fisso O di un segmento che è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore ».

Se supponiamo  $\varphi(R) = \text{costante} = a$ , si ha :

$$u = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} - \text{arc. sen } \frac{a}{R},$$

cioè la curva generatrice è una sviluppante di cerchio.

Se  $\varphi(R) = aR$ , allora

$$u = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} \log R$$

cioè la generatrice è una spirale logaritmica.

4. Presa una curva L dello spazio, l'equazione del piano normale nel punto  $x, y, z$  è :

$$\Sigma (X - x) \cos \alpha = 0$$

e la distanza di questo dall'origine degli assi è :

$$\Sigma x \cos \alpha.$$

Supponendo che tale distanza sia una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio

vettore, si avrà :

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\sum \frac{x}{R} \cos \alpha = \frac{\varphi(R)}{R}.$$

Si osservi che il primo membro è il coseno dell'angolo  $\theta$  sotto il quale i raggi vettori tagliano la curva  $L$ , e quindi tale quantità non cambia se anche sviluppiamo quel cono sopra un piano; la linea  $L$  si trasforma in una linea piana, le cui coordinate si possono esprimere nel modo seguente :

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u,$$

ed allora per i coseni direttivi della tangente abbiamo :

$$\cos \alpha = \frac{R' \cos u - R \sin u}{\sqrt{R'^2 + R^2}}, \quad \cos \beta = \frac{R' \sin u + R \cos u}{\sqrt{R'^2 + R^2}},$$

da cui :

$$\cos \theta = \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} = \frac{R'}{\sqrt{R'^2 + R^2}}.$$

Dobbiamo dunque avere :

$$\frac{R'}{\sqrt{R'^2 + R^2}} = \frac{\varphi(R)}{R},$$

dalla quale si deduce :

$$u = \int \frac{\sqrt{R'^2 - \varphi^2(R)}}{R \varphi(R)} dR + \text{cost.},$$

che coincide colla (6).

Dunque : « le curve dello spazio, tali che la distanza dei piani normali da un punto fisso (ovvero tali che la proiezione del raggio vettore sulla tangente) è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore, si ottengono prendendo le curve piane rappresentate in coordinate polari dalla (6), e avvolgendo il loro piano sopra un cono qualunque, che abbia il vertice nel polo ».

Osservando che i piani normali di una linea sono i piani osculatori dello spigolo di regresso della sviluppabile polare di quella linea, potremo dire : « le curve dello spazio, tali che la distanza dei piani osculatori da un punto fisso (ovvero tali che la proiezione del raggio vettore sulla binormale) è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore, sono i luoghi dei centri delle sfere oscu-

latrici delle curve che si ottengono avvolgendo le linee piane, rappresentate dalla (6), sopra un cono arbitrario avente il vertice nel polo ».

I piani normali di una linea sono i piani rettificanti di una sviluppata qualunque di quella linea ; dunque : « le curve dello spazio, tali che la distanza dei piani rettificanti da un punto fisso (ovvero tali che la proiezione del raggio vettore sulla normale principale) è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore, sono le sviluppate delle curve che si ottengono prendendo le linee piane rappresentate in coordinate polari dalla (6) e avvolgendo il loro piano sopra un cono qualunque col vertice nel polo ».

Si è trovato che per  $\varphi(R) = aR$  l'equazione (6) rappresenta una spirale logaritmica, avvolgendo questa curva sopra un cono avente il vertice nel polo, si ha evidentemente sul cono una traiettoria isogonale delle generatrici, cioè un'elica conica.

Dunque : « la curva dello spazio in cui la distanza di un punto fisso dai piani normali, ovvero dai piani osculatori, ovvero dai piani rettificanti è proporzionale al raggio vettore, è rispettivamente un'elica conica, il luogo dei centri delle sfere osculatrici di un'elica conica e una sviluppata qualunque di un'elica conica. Il punto fisso risiede nel vertice del cono ».

5. Si può determinare le linee in cui il coseno dell'angolo  $\theta$ , che il raggio vettore fa colla tangente, ovvero colla binormale, ovvero colla normale principale è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore.

Infatti, conducendo in un punto A di una linea il raggio vettore OA e la perpendicolare OB alla tangente, abbiamo :

$$AB = OA \cdot \cos \theta, \quad \text{cioè} \quad AB = R \varphi(R)$$

Per avere dunque le curve domandate, basterà applicare il teorema 1° del n.° 4, sostituendo nella (6) a  $\varphi(R)$  la funzione  $R \varphi(R)$ , il che dà :

$$(7) \quad u = \int \frac{\sqrt{1 - \varphi^2(R)}}{R \varphi(R)} dR + \text{costante.}$$

Abbiamo dunque il teorema : « le curve dello spazio in cui il raggio vettore che parte da un punto fisso forma colle tangenti, ovvero colle binormali, ovvero colle normali principali un angolo  $\theta$  esprimibile in funzione del raggio vettore per mezzo della relazione

$$\cos \theta = \varphi(R),$$

si ottengono prendendo le curve piane rappresentate in coordinate polari dalla (7) e avvolgendo sopra un cono arbitrario, avente il vertice nel polo, il loro

piano ; ovvero prendendo il luogo dei centri delle sfere osculatrici, ovvero una sviluppata qualunque della linea a doppia curvatura ottenuta ».

Se p. e. poniamo  $\varphi(R) = \frac{a}{R}$ , risulta dalla (7):

$$u = \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} dR = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} + \text{arc sen } \frac{a}{R} ,$$

equazione di una sviluppante di cerchio di raggio  $a$ . Ora quando il piano di tale linea si avvolge sopra un cono avente il vertice nel centro del cerchio evoluta, la linea si dispone secondo una sviluppante geodetica di una linea di curvatura sferica di quel cono.

Abbiamo dunque il teorema : « la linea dello spazio in cui il raggio vettore uscente da un punto fisso è inclinato sulle tangenti, ovvero sulle binormali, ovvero sulle normali principali di un angolo il cui coseno è inversamente proporzionale al raggio vettore, è una sviluppante geodetica di una linea di curvatura sferica di un cono qualunque col vertice nel punto fisso, ovvero il luogo dei centri delle sfere osculatrici, ovvero una sviluppata qualunque di questa stessa linea ».

6. Determiniamo le linee nelle quali la distanza di un punto fisso dalla tangente, ovvero dalla binormale, ovvero dalla normale principale è una data funzione del raggio vettore.

Dalla stessa figura che ha servito pel precedente problema, si deduce

$$OB = OA \text{ sen } \widehat{OAB} ,$$

d' onde :

$$\cos OAB = \frac{\sqrt{OA^2 - OB^2}}{OA} = \frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}}{R} .$$

Cambiando nella (7)  $\varphi(R)$  in  $\frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}}{R}$ , si ottiene :

$$u = \int \frac{\varphi(R)}{R \sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}} dR + \text{cost.} ,$$

che coincide colla (4).

Applicando allora il 1° teorema del n° precedente, si ha : « le curve dello spazio in cui la distanza di un punto fisso O dalla tangente o dalla binormale o dalla normale principale è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore,

si ottengono avvolgendo sopra un cono arbitrario di vertice  $O$  una curva piana rappresentata in coordinate polari dalla (4), ovvero prendendo il luogo dei centri delle sfere osculatrici, ovvero una sviluppata qualunque della linea a doppia curvatura ottenuta ».

7. Determiniamo le linee in cui il raggio vettore è inclinato sul piano normale, ovvero sul piano osculatore, ovvero sul piano rettificante di un angolo  $\theta$  definito dalla relazione :

$$\cos \theta = \varphi(R),$$

essendo  $\varphi$  il simbolo d'una funzione qualunque. Chiamando  $\delta$  la distanza di un punto qualunque  $O$  dal piano normale, si ha :

$$\delta = R \sin \theta = R \sqrt{1 - \varphi^2(R)}.$$

Volendo dunque applicare il 1° teorema del n° 4, bisognerà nella (6) porre, per  $\varphi(R)$  la funzione  $R \sqrt{1 - \varphi^2(R)}$ , con che risulta :

$$u = \int \frac{\varphi(R)}{R \sqrt{1 - \varphi^2(R)}} dR + \text{cost.},$$

la quale coincide colla (2).

Dunque : « le curve dello spazio in cui il coseno dell'inclinazione del raggio vettore sul piano normale, o sul piano osculatore o sul piano rettificante è una determinata funzione  $\varphi(R)$  del raggio vettore si ottengono avvolgendo sopra un cono arbitrario, avente il vertice nell'origine dei raggi vettori, una curva piana rappresentata in coordinate polari dalla (2), ovvero prendendo il luogo dei centri delle sfere osculatrici ovvero una sviluppata qualunque della linea a doppia curvatura ottenuta ».

Supponendo  $\varphi(R) = \text{costante}$ , si ha (come si è visto) una spirale logaritmica, la quale, avvolgendola sul cono, dà luogo a un'elica conica. Dunque : « la curva dello spazio in cui il raggio vettore è inclinato sul piano normale, ovvero sul piano osculatore, ovvero sul piano rettificante di un angolo costante, è l'elica conica, ovvero il luogo dei centri delle sfere osculatrici di un'elica conica, ovvero una sviluppata qualunque di un'elica conica ».

8. Le geodetiche e le assintotiche delle superficie ricordate nell'enunciato del 2° teorema del n° 2, hanno i loro piani rettificanti, ovvero i loro piani osculatori, distanti da un punto fisso di un segmento  $\varphi(R)$  e quindi hanno la generazione indicata dai teoremi 3° e 4° del n° 4.

Le geodetiche e le assintotiche delle superficie ricordate nell'enunciato dell'ultimo teorema del n° 3, hanno le loro normali principali, ovvero le loro binormali, distanti da un punto fisso di un segmento  $\varphi(R)$  e quindi hanno la generazione indicata dal teorema del n° 6.

Potremo dunque dire : « le geodetiche e le assintotiche delle superficie generate da una curva piana rappresentata in coordinate polari da una delle due equazioni :

$$(8) \quad u = \int \frac{\varphi(R)}{R \sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}} dR, \quad (9) \quad u = \int \frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}}{R \varphi(R)} dR,$$

la quale rimane invariata di forma nel mentre che il suo piano rotola senza strisciare sopra un cono col vertice nel polo, sono rispettivamente sviluppate, ovvero i luoghi dei centri delle sfere osculatrici, delle curve che si ottengono avvolgendo sopra un cono il piano della linea rappresentata in coordinate polari dalle equazioni :

$$(9) \quad u = \int \frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}}{R \varphi(R)} dR, \quad (8) \quad u = \int \frac{\varphi(R)}{R \sqrt{R^2 - \varphi^2(R)}} dR,$$

colla condizione che il polo delle coordinate polari coincida col vertice del cono ».

Questo teorema dimostra che a una linea piana A corrisponde un'altra linea piana B e la corrispondenza in ordine al teorema enunciato è tale, che alla linea B considerata come primitiva, corrisponde la linea A. Questa corrispondenza si potrebbe esprimere dicendo che le linee A e B sono coniugate.

Per  $\varphi(R) = \text{costante}$  la (8) diviene l'equazione di una retta (n° 2) e la (9) diviene l'equazione di una sviluppante di cerchio (n° 3); conseguentemente la coniugata di una retta è una sviluppante di cerchio.

Applicando il teorema precedente a questa coppia di linee, avremo :

« le geodetiche delle sviluppabili osculatrici di una geodetica conica sono sviluppate delle sviluppanti geodetiche delle linee di curvatura sferiche di un cono ».

« Le geodetiche e le assintotiche delle superficie generate da una sviluppante di cerchio il cui piano rotola senza strisciare sopra un cono col vertice nel centro del cerchio evoluta, sono sviluppate di geodetiche coniche, ovvero i centri delle sfere osculatrici di geodetiche coniche ».

Per  $\varphi(B) = aR$ , la (8) diviene :

$$u = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} \log R$$

e la (9) diviene :  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$u = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \log R ,$$

che sono le equazioni polari di due spirali logaritmiche, seganti i raggi vettori sotto angoli complementari.

Conseguentemente la coniugata di una spirale logaritmica è un'altra spirale logaritmica. Applicando il precedente teorema a questa coppia di linee, avremo : « le geodetiche, o le assintotiche, delle superficie in cui i raggi vettori sono inclinati sulle normali dell'angolo costante  $\theta$ , sono rispettivamente sviluppate o i luoghi dei centri delle sfere osculatrici di eliche coniche, seganti le generatrici dei coni sotto l'angolo  $\frac{\pi}{2} - \theta$  ».

Parma, luglio 1888.

## FASCI DI OMOGRAFIE BINARIE

### E RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEGLI ELEMENTI IMMAGINARI

DEL

Dott. FEDERICO AMODEO

---

È noto quali vicende abbiano subite gli elementi immaginari prima di essere geometricamente definiti da Staudt, e come egli, non trovando sufficiente la introduzione delle *coppie di elementi immaginari*, li separò, aggiungendo alla involuzione ellittica, che rappresenta una coppia, il senso col quale essa si può immaginare descritta (\*).

La rappresentazione geometrica delle coppie è già nel dominio dello insegnamento della Geometria proiettiva per la contribuzione che ad essa hanno arrecato diversi geometri ed ultimamente i chiarissimi professori Segre e Sannia (\*\*); non così è successo per gli elementi immaginari separatamente considerati, con tutto che questa seconda parte della creazione Staudtiana fosse stata illustrata ed ampliata da August, Klein, Pfaff, Lüroth (\*\*\*), ecc.

In questa nota io mi propongo di fare osservare che la rappresentazione geometrica degli elementi immaginari, separatamente considerati, potrebbe essere resa più generale mediante ognuna delle omografie unite alla involuzione che li

---

(\*) V. *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Imaginäre Elemente § 7 n. 116 a 132.

(\*\*) Sannia. *Lesioni di Geometria proiettiva*, § 65 a 75 Napoli, Pellerano (in corso di stampa).

Segre, *Le coppie di elementi immaginari nella Geometria proiettiva*, Mem. della R. Acc. di Torino, serie II, Vol. 38, p. 3. Anche il chiar. prof. F. Aschieri ha inserito nella seconda ediz. della sua *Geometria proiettiva* un cap. sul medesimo argomento (V. cap. 7 p. 233 a 261) in cui riassume le ricerche del Segre.

(\*\*\*) V. fra gli altri Lüroth, *Das imaginäre in der Geometrie und...*, Math. Ann. Bd. VIII p. 155 a 214.

rappresenta, e che in qualche caso potrebbesi utilmente applicare questa rappresentazione.

Ogni elemento reale o immaginario di una forma verrebbe determinato, e quindi rappresentato da quattro elementi reali della stessa forma, i quali non sono gli elementi delle due coppie di una involuzione, ma elementi consecutivi di una omografia binaria; un elemento esclusivamente immaginario potrebbe invece essere rappresentato da tre soli elementi reali.

Premetterò all'uopo diverse osservazioni sulle omografie binarie che hanno la stessa involuzione unita.

1. È noto che una omografia binaria di punti, di rette o di piani è individuata dalla sua involuzione unita e da una coppia di elementi corrispondenti.

Tenendo fissa la involuzione unita ed uno degli elementi e facendo variare l'elemento corrispondente si hanno tutte le omografie che hanno quella involuzione per involuzione unita; le quali costituiscono un fascio di omografie binarie (\*).

E anche noto che :

a) *Gli elementi corrispondenti successivi di un qualunque elemento arbitrario di una omografia binaria, i cui elementi uniti sono reali e distinti (omografia iperbolica) tendono ad avvicinarsi ad uno degli elementi uniti, (elemento unito positivo) e gli elementi consecutivi della omografia inversa tendono ad avvicinarsi all'altro elemento unito (elemento unito negativo) (\*\*).*

b) *Gli elementi successivi di un elemento arbitrario di una omografia binaria, i cui elementi uniti coincidono (omografia parabolica) tendono ad avvicinarsi a questo elemento in una determinata direzione (direzione positiva) e gli elementi successivi della omografia inversa tendono ad avvicinarsi al medesimo elemento nella direzione opposta (direzione negativa).*

Si può distinguere quale dei due elementi uniti della omografia iperbolica, o dei due sensi della omografia parabolica è l'elemento unito o il senso positivo della omografia nel seguente modo :

---

(\*) Altri fasci di omografie sono stati studiati da Segre nella nota: *Sur les omographies et leur faisceaux*, Journ. für Math. Bd. C. Heft 3, p. 317 a 330. Questi sono costituiti da tutte le omografie ed involuzioni che trasformano una involuzione data in un'altra parimenti data.

(\*\*) Questo teorema fu già dimostrato fin dal 1863 dal chiar. prof. Battaglini per mezzo dei rapporti anarmonici e pubblicato nel primo volume del suo *Giornale di Matematiche* a p. 231.

La dimostrazione geometrica di esso e dei teoremi b) c) d) e) f) l'abbiamo data nelle *Lezioni sulle omografie binarie* dettate nel corso di Geometria proiettiva dell'anno accademico 1887-88, n. 4 e 5.

c) Siano  $a_1, a_2$  i due elementi corrispondenti che assieme agli elementi uniti individuano la omografia, si cerchi l'elemento  $a'_1$ , coniugato armonico di  $a_1$  nella involuzione unita alla omografia, l'elemento unito che si trova compreso nel segmento  $a_1 a_2 a'_1$ , ovvero il senso indicato da  $a_1 a_2 a'_1 \equiv a_1 a_2 e$  (con  $e$  indichiamo l'elemento unito della omografia parabolica) è l'elemento o il senso positivo della omografia.

Deriva da ciò che :

d) Tutte le omografie di un fascio la cui involuzione unita  $(e, f)$  è iperbolica si distinguono in due serie : l'una che comprende quelle che hanno  $e$  per elemento unito positivo, e l'altra che comprende quelle che hanno  $f$  per elemento unito positivo.

e) Tutte le omografie di un fascio la cui involuzione unita  $|\delta|$  è parabolica si distinguono in due serie, a secondo che hanno l'una o l'altra direzione della forma per direzione positiva.

f) Le omografie del fascio che segnano il termine di passaggio dall'una all'altra serie sono la omografia identica e la involuzione unita.

2. In un fascio di rotazioni  $(\Omega)$  sia  $a_1$  un raggio ed  $a'$ , il suo coniugato nella involuzione circolare unita; in tutte le rotazioni che hanno il raggio  $a_2$ , corrispondente di  $a_1$ , compreso nel medesimo segmento  $a_1 a'_1$ , ovvero (qualora si prenda il senso del segmento  $a_1 a_2 a'_1$  come senso positivo degli angoli) per le quali l'angolo  $a_1 a_2$  sia  $<$  di un retto, e perciò l'angolo  $a_1 a_2$  minore di due retti, avviene che rotando  $a_1$  nel senso positivo adottato per gli angoli incontrerà prima  $a_2$  poi  $a_3$ , e perciò descriverà ciascuna di quelle rotazioni sempre nel medesimo senso qualora si mantenga la convenzione, che, per descrivere la forma, l'elemento  $a_1$  non possa pervenire sopra  $a_3$  senza essere passato sopra  $a_2$ .

Per quelle rotazioni invece, per le quali l'angolo  $a_1 a_2$  è maggiore di un retto cioè per le quali  $a_2$  si trova nell'angolo  $a'_1 a_1$ , essendo l'angolo  $a_1 a_2$  maggiore di due retti,  $a_3$  si troverà nell'angolo  $a_1 a'_1$ , perciò, se  $a_1$  rota nel senso positivo, incontrerà prima  $a_3$  poi  $a_2$ , e quindi per descrivere la omografia rappresentata da ciascuna di quelle posizioni di  $a_2$  deve rotare nel senso opposto al primo. Lo stesso avverrebbe se l'angolo  $a_1 a_2$ , mantenendosi minore di un retto, cambiasse segno.

Dunque, tutte le rotazioni determinate dalle diverse posizioni di  $a_2$  sono generate in un senso o nell'altro secondo che  $a_2$  si trova nell'uno o nell'altro dei segmenti  $a_1 a'_1$  della forma, e se supponiamo che  $a_2$  occupi successivamente tutte le posizioni della forma, avremo il cambiamento di senso nella descrizione delle rotazioni quando  $a_2$  coincide con  $a_1$  o con  $a'_1$ . Perciò la identità e la involuzione sono le forme di passaggio dalle rotazioni descritte in un senso alle rotazioni descritte nell'altro.

Ciò che abbiamo detto per le rotazioni vale per ogni fascio di omografie ellittiche, poichè si sa che due involuzioni della stessa specie sono sempre realmente

proiettive (\*) e quindi ogni involuzione ellittica di raggi si può sempre trasformare in una involuzione circolare e perciò ogni forma di omografie ellittiche si può sempre trasformare in un fascio di rotazioni.

Possiamo dunque affermare che :

a) Tutte le omografie di un fascio ad involuzione unita iperbolica, parabolica o ellittica si distinguono in due serie, una delle quali contiene tutte le omografie che tendono ad un determinato elemento unito, o sono descritte con un determinato senso, l'altra contiene le omografie che tendono all'altro elemento unito o sono descritte con il senso contrario.

b) Appartengono alla medesima serie tutte le omografie che hanno per corrispondente dell'elemento  $a_1$  un elemento  $a_2$  che trovansi nel medesimo dei due segmenti che gli elementi  $a_1, a_2'$ , determinano nella forma.

c) Sono omografie di separazione o passaggio da quelle dell'una a quelle dell'altra serie la omografia identica e la involuzione unita.

Come per le omografie ad elementi uniti reali ciascuna di queste serie determina e quindi rappresenta uno degli elementi uniti, così conveniamo che per le omografie ad elementi uniti immaginari ciascuna di queste serie determini e quindi rappresenti uno dei due elementi uniti immaginari.

3. Prima di insistere su questa rappresentazione degli elementi, siano reali siano immaginari, esaminiamo un poco le mutue relazioni delle omografie di uno stesso fascio.

a) Tutte le omografie di uno stesso fascio sono fra loro *commutative*, cioè ognuna di esse trasforma ciascuna delle altre in sè stessa; di conseguenza la proprietà della involuzione unita di una omografia di essere l'unica involuzione della forma che trasformi quella omografia in sè stessa non è superiore a quella che hanno tutte le altre omografie del fascio medesimo, ma dipende solo dal fatto che in ogni fascio di omografie vi è una sola involuzione.

b) E nemmeno questa è una proprietà speciale della involuzione, poichè in ognuna delle serie del fascio non vi sono due omografie trasformabili l'una nell'altra, cioè proiettive fra loro.

Infatti supponiamo che vi fossero nella serie due omografie  $P, Q$  proiettive fra loro e supponiamo che in  $P$  ad  $a_1$  corrisponda  $a_2$  ed in  $Q$  ad  $a_1$  corrisponda  $b_2$ ; la omografia  $R$  del fascio individuata dagli elementi corrispondenti  $a_2, b_2$  dovrebbe trasformare  $P$  in  $Q$  e quindi essa avrebbe per elemento unito  $a_1$ , cioè sarebbe una identità il che è assurdo.

c) Ogni omografia di una serie del fascio è proiettiva ad una omografia dell'altra serie (la sua inversa). Difatti i due gruppi caratteristici di 1<sup>a</sup> specie di

---

(\*) V. Sannia, l. c. n. 73 c), d), e).

queste omografie  $a_1 a_2 a_3 a_4$  ed  $a_1 a_3 a_2 a_4$  sono proiettivi fra loro; oppure perchè ogni involuzione armonica alla prima la trasforma nella seconda.

Nel fascio non vi sono altre omografie proiettive diverse da queste.

d) *In ogni fascio di omografie ellittiche ve ne sono infinite cicliche.* Infatti in ogni fascio di rotazioni, ogni rotazione il cui angolo è la  $n^{\text{ma}}$  parte di  $\pi$  è una rotazione ciclica  $R$  del fascio dell'ordine  $n$ , e quindi al variare di  $n$  si hanno infinite rotazioni cicliche.

Tutte le altre rotazioni cicliche dello stesso ordine si ottengono elevando la rotazione  $R$  alle potenze i cui esponenti sono primi con  $n$  e minori di  $n$ .

La involuzione sola, fra tutte le omografie cicliche, è comune pure ai fasci di omografie iperboliche e paraboliche.

4. Ciò premesso risulta che scegliere la involuzione del fascio per la rappresentazione degli elementi uniti vuol dire imporre la restrizione di scegliere una fra le tante omografie che lo costituiscono. Vediamo se la preferenza è opportuna.

Fino a tanto che noi ci limitiamo a voler sapere se la coppia di elementi rappresentati è reale o immaginaria, la involuzione si presta mirabilmente; ma in quanto alla separazione di questi elementi non potendo bastare da soli gli elementi di un ciclo di 2° ordine  $a_1 a_1'$ , a determinare il senso col quale la forma vien descritta si ha bisogno di ricorrere agli elementi di un altro ciclo  $a_2 a_2'$ , il quale, essendo del tutto arbitrario, in quanto al senso non precisa nulla più del primo.

Invece se il fascio di omografie è iperbolico, quattro elementi consecutivi  $a_1 a_2 a_3 a_4$  di una qualunque di esse, determinano l'omografia e permettono di costruirne la coppia di elementi uniti; dippiù determinano la serie a cui la omografia appartiene e quindi precisano uno degli elementi uniti. Prendendoli in ordine inverso  $a_4 a_3 a_2 a_1$ , determinano l'altro elemento unito, il quale perchè rappresentato inseparabilmente dal primo si potrebbe chiamare *elemento reale coniugato* a quello, anche perchè ambedue sono di fatto coniugati in tutte le involuzioni armoniche alle omografie del fascio. Dippiù gli elementi  $a_1 a_2 a_3 a_4$  ci permettono di costruire ogni altra omografia del fascio, e quindi costruire infinite altre quaterne che rappresentano gli stessi punti.

Se il fascio è di omografie ellittiche, anche per esso quattro elementi consecutivi  $a_1 a_2 a_3 a_4$  di una delle sue omografie, determinano la serie a cui la omografia appartiene; poichè, il senso di  $a_1 a_2 a_3 a_4$  è determinato dal sapere che per andare da  $a_1$  ad  $a_2$  non si deve passare su  $a_3$ , e per andare da  $a_2$  ad  $a_3$  non si deve passare su  $a_4$  ecc.: infine che il senso  $a_1 a_2 a_3$  coincida con quello di  $a_2 a_3 a_4$  è chiaro dal fatto che  $a_1 a_2 a_3$ ,  $a_2 a_3 a_4$  sono segmenti corrispondenti di due forme concordi.

Quindi possiamo dire:

*Quattro elementi reali di una forma geometrica, considerati in un certo ordine come elementi consecutivi di una omografia, determinano e quindi rappresentano un altro elemento reale o immaginario della forma stessa.*

*Gli stessi elementi presi nell'ordine inverso rappresentano l'elemento reale o immaginario della forma coniugato al precedente.*

www.librtool.com.cn  
Che questa rappresentazione includa quella di *Staudt* si riconosce immediatamente; prendendo gli elementi  $a'_2 a'_3$  coniugati di  $a_2 a_3$  nella involuzione unita alla omografia, gli elementi  $a_2 a_3 a'_2 a'_3$  che per ciò che si è detto al n. 2 rappresentano il medesimo elemento di prima, adesso lo rappresentano al modo ideato da *Staudt*.

La costruzione degli elementi  $a'_2 a'_3$  è utile quando si voglia sapere se l'elemento rappresentato è reale o immaginario.

5. Nei casi in cui si debba considerare esclusivamente un elemento immaginario della forma, esso viene rappresentato con vantaggio, dalla omografia ciclica del 3° ordine. Infatti la omografia ciclica del terzo ordine è determinata da 3 soli elementi consecutivi  $a_1 a_2 a_3$  e quindi un elemento immaginario verrebbe determinato da una qualunque delle terne  $a_1 a_2 a_3$ ,  $a_2 a_3 a_1$ ,  $a_3 a_1 a_2$ , ed il suo coniugato da una qualunque delle permutazioni inverse alle precedenti. Quindi :

*Un elemento immaginario di una forma di 1ª specie può essere rappresentato da una qualunque delle infinite terne di punti che insieme a quello formano un gruppo equianarmonico (\*).*

Nè si può obiettare che tutte le terne di elementi di una forma potrebbero rappresentare un medesimo elemento immaginario; perchè, sebbene due terne di elementi di una forma siano sempre proiettive, due terne arbitrarie non possono appartenere alla medesima omografia ciclica del 3° ordine, chè altrimenti si potrebbero assegnare in una omografia 6 coppie di elementi corrispondenti arbitrarie.

Per ora ci limitiamo a far notare che lo aver bisogno di tre elementi e non di quattro per determinare un elemento immaginario fa sì che nelle costruzioni e nelle dimostrazioni in cui necessita mettere in relazione di prospettiva le rappresentazioni di due elementi immaginari posti sopra sostegni diversi, non si ha bisogno di ricorrere alle rappresentazioni proiettive o armoniche di quei punti. Così, p. e. per dimostrare che due punti immaginari  $A_1 A_2 A_3$ ,  $A'_1 A'_2 A'_3$ , che non stanno sulla stessa retta reale, determinano una retta immaginaria di 1ª o di 2ª specie che passa per essi, si direbbe :

Se i punti non giacciono nello stesso piano reale, le rette  $a_1 \equiv A_1 A'_1$ ,  $a_2 \equiv A_2 A'_2$ ,  $a_3 \equiv A_3 A'_3$ , nell'ordine  $a_1 a_2 a_3$  rappresentano una retta immaginaria di 2ª specie che passa per i punti  $A_1 A_2 A_3$ ,  $A'_1 A'_2 A'_3$ .

Se i punti giacciono in uno stesso piano reale, sia  $P_1$  il punto d'incontro delle due rette, e  $P_1 P_2 P_3$ ,  $P'_1 P'_2 P'_3$  altre due rappresentazioni dei medesimi punti, il fascio di raggi  $p_1 p_2 p_3$  proiettivo ad entrambi rappresenta una retta immaginaria di 1ª specie che passa per i punti  $A_1 A_2 A_3$ ,  $A'_1 A'_2 A'_3$ .

---

(\*) Ciò è chiaro quando, indicando con  $e$  l'elemento unito positivo, si consideri che è  $a_1 a_2 a_3 e \wedge a_2 a_3 a_1 e \wedge a_3 a_1 a_2 e$ .

## SUL MOTO DI UN PUNTO IN UN MEZZO RESISTENTE

PER

ALBINO NAGY

Studente di Matematica.



1. Un punto di massa  $m$  e con una velocità  $c$  si muove in un mezzo, resistente in proporzione ad una certa funzione  $f(c)$ , della velocità stessa.

Allora, preso un sistema di coordinate ortogonali tale che il punto mobile si trovi nell'origine al tempo  $t=0$ , e che la gravità agisca nel senso delle  $-y$ , le equazioni del moto sono

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -A f \left( \frac{dx}{dt} \right);$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - A f \left( \frac{dy}{dt} \right);$$

valendo la prima anche per la sostituzione di  $z$  per  $x$   
Poniamo

$$\frac{dx}{dt} = u,$$

$$\frac{dy}{dt} = v,$$

$$A = \frac{mg}{f(k)},$$

dove  $k$  è la velocità per la quale la resistenza è uguale al peso assoluto  $mg$ , e

le equazioni di prima diventano  
[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = -\frac{g}{f(k)} f(u),$$

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{f(k)} \{f(k) - f(v)\},$$

e integrando

$$(3) \quad \frac{gt}{f(k)} = -\int_{u_0}^u \frac{du}{f(u)},$$

$$(4) \quad \frac{gt}{f(k)} = -\int_{v_0}^v \frac{dv}{f(k) - f(v)},$$

essendo per

$$t = 0, \quad (x = 0, y = 0) \quad u = u_0, \quad v = v_0.$$

Se, eseguendo queste integrazioni, si possono ricavare dalle (3) e (4) i valori di  $u$  e  $v$  così che

$$u = \psi(t),$$

$$v = \chi(t),$$

si ha, con una nuova integrazione il risultato :

$$x = \int_0^t \psi(t) dt,$$

$$y = \int_0^t \chi(t) dt.$$

2. Come esempio, si prenda il caso  $f(c) = c^n$ . Le equazioni sono

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = -g \frac{u^n}{k^n},$$

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{k^n} (k^n - v^n),$$

e la (1) si lascia integrare subito.

Si ricava :

www.libtool.com.cn

$$t = \frac{k^n}{(n-1)g} (u^{1-n} - u_0^{1-n}),$$

$$u = \left( u_0^{1-n} - \frac{gt(1-n)}{k^n} \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

$$x = \frac{k^n}{g(2-n)} \left\{ (-u_0)^{2-n} - \left( \frac{gt(1-n)}{k^n} - u_0^{1-n} \right)^{\frac{2-n}{1-n}} \right\}$$

così che il problema è risolto rispetto alle due componenti verticali alla gravità, in particolare essendo per  $n = 1$

$$u = u_0 e^{-\frac{gt}{k}},$$

$$x = \frac{u_0 k}{g} \left( 1 - e^{-\frac{gt}{k}} \right),$$

e per  $n = 2$

$$u = \frac{u_0 k^2}{gt u_0 + k^2},$$

$$x = \frac{k^2}{g} \log \left( \frac{gt u_0 + k^2}{k^2} \right).$$

3. Non egualmente facile è il ricavare  $v$  ed  $y$  in funzione di  $t$ . Integrando la (2) si ha

$$\frac{gt}{k^n} = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^n - k^n},$$

e, chiamate

$$a_v = a_v + i b_v = k \left( \cos \frac{2v\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2v\pi}{n} \right) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

le radici dell'equazione binomia

$$\varphi(v) = v^n - k^n = 0$$

la funzione  $\frac{1}{\varphi(v)}$  è decomposta in frazioni semplici, scrivendo

$$\frac{gt}{k^n} = \int_{v_0}^v \sum_{v=1}^n \frac{dv}{\varphi'(a_v)(v-a_v)}.$$

Infine, ponendo  $\frac{1}{\varphi'(a_v)} = P_v + iQ_v$ , e tenendo conto delle radici coniugate, si ha

$$\frac{gt}{k^n} = \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}} P_v \log \frac{(v-a_v)^2 - b_v^2}{(v_0-a_v)^2 - b_v^2} - 2 \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}} \varphi_v \arctan \frac{(v-a_v)b_v - (v_0-a_v)b_v}{b_v^2 - (v-a_v)(v_0-a_v)},$$

se  $n$  è pari, e

$$\begin{aligned} \frac{gt}{k^n} &= \frac{1}{\varphi'(k)} \log \frac{v-k}{v_0-k} + \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} P_v \log \frac{(v-a_v)^2 - b_v^2}{(v_0-a_v)^2 - b_v^2} - \\ &- 2 \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \varphi_v \arctan \frac{(v-a_v)b_v - (v_0-a_v)b_v}{b_v^2 - (v-a_v)(v_0-a_v)}, \end{aligned}$$

se  $n$  è dispari.

Però in queste equazioni differenziali, della forma

$$t = F\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

la separazione delle variabili in generale non riesce, ma solo per valori particolari di  $n$ .

4.  $n=0$ .

$$gt = \int_{v_0}^v dv,$$

$$v = gt + v_0,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_0 t$$

n = 1.

www.libtool.com.cn

$$\frac{gt}{k} = \frac{1}{\varphi'(k)} \log \frac{v-k}{v_0-k}, \quad \varphi'(k) = 1,$$

$$v = (v_0 - k) e^{\frac{gt}{k}} + k,$$

$$y = \frac{k}{g} (k - v_0) \left( 1 - e^{\frac{gt}{k}} \right) + kt.$$

n = 2.

$$\frac{gt}{k^2} = \int_{v_0}^v \sum_{\nu=1}^2 \frac{dv}{\varphi'(\alpha_\nu)(v - \alpha_\nu)}, \quad \varphi'(\alpha_\nu) = \pm \frac{1}{2k},$$

$$= -\frac{1}{2k} \log \left\{ \frac{k+v}{k-v} \cdot \frac{k-v_0}{k+v_0} \right\},$$

$$e^{-\frac{2gt}{k}} = \frac{k+v}{k-v} \cdot \frac{k-v_0}{k+v_0},$$

$$v = \frac{(k-v_0) e^{\frac{gt}{k}} - (k+v_0) e^{-\frac{gt}{k}}}{(k-v_0) e^{\frac{gt}{k}} + (k+v_0) e^{-\frac{gt}{k}}},$$

$$y = \frac{k^2}{g} \log \frac{(k-v_0) e^{\frac{gt}{k}} + (k+v_0) e^{-\frac{gt}{k}}}{2k}.$$

5. n = 4.

$$\frac{gt}{k^4} = \int_{v_0}^v \sum_{\nu=1}^4 \frac{dv}{\varphi'(\alpha_\nu)(v - \alpha_\nu)}, \quad \varphi'(\alpha_\nu) = \pm \frac{1}{4k^3}, \quad \pm \frac{1}{4ik^3};$$

$$\frac{4gt}{k} = \int_{v_0}^v \frac{2k dv}{v^2 - k^2} + \int_{v_0}^v \frac{2k dv}{v^2 + k^2},$$

$$\frac{2gt}{k} = \operatorname{arc tan} h \frac{k(v - v_0)}{k^2 - vv_0} + \operatorname{arc tan} \frac{k(v - v_0)}{k^2 + vv_0},$$

per note formole di trigonometria.

Ponendo, senza ledere la generalità,  $v_0 = 0$ , e sviluppando il membro di destra in serie si ottiene

$$gt/k = \frac{v}{k} + \frac{1}{5} \left(\frac{v}{k}\right)^5 + \frac{1}{9} \left(\frac{v}{k}\right)^9 + \dots + \frac{1}{4n-3} \left(\frac{v}{k}\right)^{4n-3} + \dots;$$

Per un tempo  $t$  finito, dovrà la serie a destra essere sempre convergente, quindi

$$\left| \frac{v}{k} \right| < 1$$

e allora si può con sufficiente approssimazione porre

$$gt = \frac{dy}{dt} + \frac{1}{5k^4} \left(\frac{dy}{dt}\right)^5.$$

Nei casi particolari  $k$  ha un valore numerico, e, risolvendo la quintica per  $\frac{dy}{dt}$ , si può effettuare la separazione delle variabili e sciogliere il problema con semplici quadrature.

Vienna, maggio 1888.

## SUR UNE FONCTION DISCONTINUE

PAR

M. L E R C H

à Prague--Vinohrady.

Nous allons développer un exemple de série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

dont les termes sont des fonctions continues d'une variable réelle  $x$  et dont la somme est une fonction partout discontinue de cette variable. La série que nous allons étudier se compose des termes de la forme

$$(1) \quad \varphi_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \sin^2(x - a_v) \cos^n(x - a_v),$$

les quantités  $c_v$  étant des termes d'une série absolument convergente et les  $a_v$  étant des quantités réelles représentées par des points dont l'ensemble est condensé dans toute la partie de l'intervalle  $(0 \dots 2\pi)$ . Je suppose ensuite que les  $a_v$  sont différents entre eux et qu'aucune des différences  $a_p - a_q$  n'équivaut à  $\pi$ .

Cela étant on voit facilement que chacune des fonctions  $\varphi_n(x)$ , ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) est finie et continue dans l'intervalle  $(0 \dots 2\pi)$  et que la somme  $\sum \varphi_n(x)$  est convergente et peut se mettre sous la forme

$$(2) \quad f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_v) \cos^n(x - a_v).$$

Soit maintenant  $x$  un nombre appartenant à l'intervalle  $(0 \dots 2\pi)$  et tel qu'aucune des différences  $x - a_v$ ,  $x - a_v \pm \pi$  ne s'évanouit. Dans ce cas toutes les quantités  $\cos(x - a_v)$  seront moindres que l'unité et nous aurons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_v) \cos^n(x - a_v) = 2 \cos^2 \frac{x - a_v}{2},$$

et par conséquent

www.libtool.com.cn

$$(3) \quad f(x) = 2 \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cos^2 \frac{x - a_v}{2}.$$

Soit en second lieu  $x = a_p$ . Comme aucune des différences  $a_v - a_p$ ,  $a_v - a_p \pm \pi$  ne devra s'évanouir il est clair que toutes les quantités  $\cos(x - a_v)$  sauf  $\cos(x - a_p)$  seront moindres que l'unité (en valeur absolue), de sorte qu'il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_p) \cos^n(x - a_p) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_v) \cos^n(x - a_v) = 2 \cos^2 \frac{x - a_v}{2}, \quad v > p.$$

Il s'ensuit alors

$$(4) \quad f(a_p) = 2 \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cos^2 \frac{a_p - a_v}{2} - 2c_p$$

et les formules (3) et (4) font voir qu'en prenant les quantités  $x$ ,  $a_p$  assez voisines la différence  $f(x) - f(a_p)$  ne diffère de  $2c_p$  que d'une quantité aussi petite que l'on veut, de sorte que la fonction  $f(x)$  définie par la série  $\sum \varphi_n(x)$  est discontinue aux points de la forme  $x = a_p$  qui se présentent dans chaque partie de l'intervalle  $(0 \dots 2\pi)$ ; en d'autres mots cette fonction est partout discontinue.

Il est intéressant d'observer que la convergence de la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

ne peut être uniforme dans aucune partie du domaine de la variable  $x$  sans quoi la fonction serait continue.

Cerný Kostelec en Bohême, le 9 Septembre 1888.

## SULLA DISTRIBUZIONE DELLE CORRENTI SULLE SUPERFICIE

DI

ADOLFO CAMPETTI.



La distribuzione delle correnti stazionarie sopra una superficie qualunque (quando su di essa si conosca un sistema di coordinate isometriche) può essere utilmente determinata in modo analogo a quello che si tiene per una superficie piana. Faremo vedere in breve il metodo aggiungendo un esempio dei più semplici non ancora considerato.

Se si parte dal teorema di Green generalizzato per una superficie aperta qualunque  $\sigma$  di contorno  $s$  (\*) cioè :

$$(1) \quad \int_{\sigma} (\nabla \Delta^2 U - U \Delta^2 V) d\sigma = \int_s \left( U \frac{\partial V}{\partial u} - V \frac{\partial U}{\partial u} \right) ds$$

e si suppone che una delle due funzioni (la  $V$  p. e.) soddisfi al  $\Delta^2 = 0$ , se ne ricava

$$(2) \quad \int_{\sigma} \nabla \Delta^2 U = \int_s \left( U \frac{\partial V}{\partial u} - V \frac{\partial U}{\partial u} \right) ds.$$

Supponiamo ora che sulla superficie che si considera sia

$$ds^2 = \lambda^2 (d\mu^2 + dv^2)$$

e prendiamo

$$U = \log \sqrt{(\mu - \mu_1)^2 + (v - v_1)^2} = \log R$$

La quantità indicata con  $R$  non è più la distanza fra i due punti della superficie  $(\mu, v)$   $(\mu_1, v_1)$ , ma (come il log della distanza di due punti nel piano) soddisfa al  $\Delta^2 = 0$ . Siccome però  $\log R$  diventa infinito nel punto  $\mu_1, v_1$  per applicare la formula (1) converrà escludere una porzione  $\omega$  di superficie attorno al punto  $(\mu_1, v_1)$

(\*) V. p. e. Beltrami. *Delle variabili complesse sopra una superficie*. Annali di Matematica, 1868.

con un contorno arbitrario  $\tau$ . Ora è facile dimostrare che

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{\omega} \log R \Delta^2 V d\omega = 0$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\tau} \log R \cdot \frac{\partial V}{\partial u} d\tau = 0$$

mentre :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\tau} V \frac{\partial \log R}{\partial u} d\tau = -2\pi$$

si ha quindi la formula :

$$2\pi V' = \int_s \left( V \frac{\partial \log R}{\partial u} - \log R \frac{\partial V}{\partial u} \right) ds$$

ed introducendo la funzione  $G$  analoga a quella di Green che soddisfi cioè sulle superficie al  $\Delta^2 G = 0$  e per cui sia al contorno  $s$  :

$$\frac{\partial}{\partial u} (G + \log R) = 0.$$

$$(3) \quad 2\pi V' = - \int_s (G + \log R) \cdot \frac{\partial V}{\partial u} ds.$$

Questa formula ci dà il modo di determinare il valore di  $V$  in un punto qualunque della superficie noti i valori di  $\frac{\partial V}{\partial u}$  sul contorno ; se supponiamo quindi che sul contorno della superficie , vengano in un certo numero di punti fili conduttori pei quali passino correnti di intensità note, (le intensità non saranno tutte indipendenti), la formula (3) ci darà il valore di  $V'$  che, come è noto, risulta determinato a meno di una costante.

In particolare potrà avvenire che siano due soli i punti di inserzione della corrente e allora , se  $I$  è l'intensità della corrente che attraversa il filo conduttore,  $k$  la resistenza del conduttore che si considera, si otterrà :

$$V' = \frac{I}{2\pi k} \left\{ (G + \log R)_{\alpha} - (G + \log R)_{\beta} \right\}$$

se cogli indici  $\alpha$  e  $\beta$  si indicano i valori che si ottengono ponendo in  $G + \log R$  le coordinate dei punti del contorno in cui viene la corrente.

Il caso in cui la superficie è chiusa ovvero i punti di inserzione delle correnti non sono sul contorno si riconduce subito al caso precedente analogamente a quanto si fa per una superficie piana ecc. (\*).

*Esempio* : Per dare un esempio dei più comuni che si possano presentare con-

(\*) V. p. e. I. Neumann *Vorlesungen über Elektrische Strömung*, Leipzig.

sideriamo il conduttore formato da una lamina ottenuta tagliando lungo un parallelo la superficie di un toro: e supponiamo che due punti del contorno siano posti rispettivamente in comunicazione coi due poli.

Se si introducono le coordinate dipolari  $(u, v, \psi)$ , l'equazioni a derivate parziali cui la  $V$  deve soddisfare assume la forma

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{1}{\sinh^2 u} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0$$

( $u$  il parametro della superficie che si considera).

Ponendo

$$\psi = \sqrt{\sinh u} \varphi$$

essa diverrà:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

La funzione  $G$  potrà essere presa sotto la forma:

$$G = \Sigma a_m \sin mV \cos m(\varphi - \varphi')$$

ed i coefficienti  $a_m$  funzioni di  $v'$  dovranno essere scelti in modo che

$$\frac{\partial \log R}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \quad \text{per} \quad v = v_0$$

essendo  $v_0$  il parallelo che serve di contorno.

Nel caso particolare in cui il parallelo contorno sia il parallelo di simmetria  $v = 0$   $v = \pi$  nella formula che dà il potenziale  $V$  la  $G$  viene sparire e si ottiene quindi  $V$  sotto la forma semplice:

$$(2) \quad V = \log \sqrt{\frac{v'^2 + (\varphi_1 - \varphi')^2}{v'^2 + (\varphi_2 - \varphi')^2}}$$

se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono i due valori di  $\varphi$  corrispondenti ai punti cui vengono le correnti.

Se in luogo di essere limitata la superficie dal parallelo  $v = 0$   $v = \pi$  fosse limitata da  $v = v_0$   $v = v_1$ , basterebbe porre

$$w = \alpha(v - v_0)$$

e allora  $w = 0$  per  $v = v_0$  e si può determinare la costante  $\alpha$  in modo che per  $v = v_1$  sia  $w = \pi$  e però siamo ricondotti al caso precedente.

Dalla formola (2) si vede che sarà  $V = 0$  quando

$$\varphi' = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

cioè quando

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$$

come appunto deve essere per la simmetria ecc.

www.libtool.com.cn

Il metodo qui tenuto varrebbe analogamente per altre superficie come p. c. l'ellissoide per cui le coordinate possono ridursi isometriche ecc. Nel caso della superficie toroidale le linee di livello saranno definite da

$$\sqrt{\frac{v'^2 + (\varphi_1 - \varphi')^2}{v'^2 + (\varphi_2 - \varphi')^2}} = \text{cost.}$$

le traiettorie ortogonali saranno le linee di correnti.

Pisa, Luglio 1888.

#### ERRATA - CORRIGE.

Nella memoria « *Sulle curve osculatrici* » inserita in questo vol. del Giornale, a pag. 257 e segg., vanno fatte le seguenti correzioni:

Al § 2, le (6) si possono sostituire, poichè nel punto A è  $\frac{\rho}{r} = \frac{\sigma}{a}$ , colle altre più semplici:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \sqrt{a^2 + \sigma^2} \operatorname{sen} \alpha, \quad z_0 = \sqrt{a^2 + \sigma^2} \operatorname{cos} \alpha.$$

I coseni direttivi dei nuovi assi rispetto agli antichi non sono quelli notati, ma i seguenti:

$$\begin{aligned} \cos(\xi x) &= -\frac{a}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}, & \cos(\xi y) &= 0, & \cos(\xi z) &= \frac{\sigma}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} \\ \cos(\eta x) &= \frac{\sigma \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}, & \cos(\eta y) &= -\operatorname{cos} \alpha, & \cos(\eta z) &= \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} \\ \cos(\zeta x) &= \frac{\sigma \operatorname{cos} \alpha}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}, & \cos(\zeta y) &= \operatorname{sen} \alpha, & \cos(\zeta z) &= \frac{a \operatorname{cos} \alpha}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}. \end{aligned}$$

Le formole (7) vanno allora corrette in base alle dette modificazioni.

Geminiano Pirondini.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.jibao.com.cn](http://www.jibao.com.cn)

UNIVERSITY OF MICHIGAN  
3 9015 06941 5910

[www.librocl.com.cn](http://www.librocl.com.cn)

[www.lib.uct.ac.za](http://www.lib.uct.ac.za)