Churchill

www.libtool.com.cn

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922

QA
35
.B719

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ELEMENTA MATHESEOS

AD USUM

www.libtool.com.cn

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

ELUCUBRATA

A P. MICHAELE ANGELO BONOTTO

EX ORDINE PRÆDICATORUM.

VENETIIS,

Sumptibus HEREDIS NICOLAI PEZZANA.

MDCCLXXII.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.

www.libtool.com.cn

Πρὸς πάσας μαθήσεις, ὥςε κάλλιον ἀποδέχεσθαι, ἴσμεν πε ὅτι τῷ ὅλῳ ϗ παντὶ διοίσει ἡμμένος τε γεωμετρίας ϗ μή. Plat. Lib. VII. Reip.

Illum, qui Geometriæ dedit operam, ſcimus Scientiis ceteris addiſcendis ſummopere eſſe aptiorem eo, qui omnino eſt expers. Plato VII. de Republica.

Gift
Professor William H Butts
10-14 1935

ILLUSTRISS. ATQUE EXCELL. VIRO

JOANNI WIDMANN;

SACRI ROMANI IMPERII, NEC NON ORTEMBURGI COMITI; SANCTI PATERNIANI, AC SOMMEREGGÆ L. BARONI, &c. PATRICIO VENETO, &c.

www.libtool.com.cn

P. MICHAEL ANGELUS BONOTTO
Ord. Præd. Felicitatem.

Quod maxime optaveram, Joannes Widmann, Vir Illustrissime atque Excellentissime, ut videlicet studiorum meorum Matheseos, quibus excolendis quatuor fer-

me annos consumpsi, Patronum aliquem, virtute non minus, quam genere, nobilem reperirem; id sane in Te uno ex animi sententia mihi videor consecutus. Quamvis enim multis, iisque gravissimis occupationibus districtus detineare, si quid tamen otii nancisci potes, id nulla in re libentius, quam in studiis harum Scientiarum consumere soles, eaque animi alacritate ac contentione, ut paucissimi, vel ex eorum numero qui omne tempus ætatis in hoc genere contrivere, Tui pares esse vix possint. Accedit huic summus, quo flagras, erga litteras & litteratos amor, quorum familiaritatibus delectaris mirifice, eosque benignitate tua recreas, foves, confirmas: neque ullum umquam diem abire pateris, quo non de studiis ingenuarum Artium, in primis vero Philosophiæ egregie mereri nitaris. Rarum hoc, & prodigii pene simile florenti adhuc ætate, ac in tanta fortuna, sed perpetuum in Widmanna gente; quæ cum de antiquitate, divitiis, affinitatibus, auctoritate, viris pace belloque clarissimis, paucis fere concessura sit: moderatione tamen, æquitate, clementia, comitate, aliisque humanitate dignis virtutibus, præcipue vero in Superos pietate gloriosius nihil aut præstabilius judicavit. Qua laude quid honorificentius excogitari potest? Hæc una scilicet & acceptæ a Majoribus nobilitati, & exaggeratis opibus longissime antecellit: hæc una hominum vitam caducam & fragilem, angustisque finibus circumscriptam, non solum prætergreditur, sed etiam immortalitate donare potest. Cum igitur & nobilitatis splendorem, & acumen ingenii tui, & singularem liberalitatem quum in aliis rebus multis, tum præcipue in Disciplinis ornandis, in doctis hominibus excipiendis fovendisque attentius considerarem; oblatam mihi aliquando occasionem ad significandum, quanti Te ac virtutes tuas facerem,

amit-

www.libtool.com.cn

amittere nolui; videlicet pro certo habens, hoc meum qualecumque munusculum a Te (pro Tua ista singulari ac perpetua qua es in omnes humanitate) perbenigne exceptum iri. Hic porro Liber Matheseos Elementa complectitur, in quibus ad communem studiosæ Juventutis utilitatem facili, candida, & ad tironum captum accomodata oratione expendere ac demonstrare conatus sum, quæ hactenus a nonnullis fusius, ab aliis obscure nimium ac jejune tradita fuerant. Quæ Elementa quamvis plura contineant ex summorum Mathematicorum cum veterum tum recentiorum Libris depromta, ea tamen exhibent ita immutata, eaque forma induta, ut jam alia omnino videantur: & præterea novam quamdam methodum proponunt ab illa Euclidis ceterorumque longe dissimilem, ac, nisi me rerum mearum amor valde fallit, non omnino contemnendam. Quid vero hisce meis conatibus egerim, penes doctos homines harumque rerum peritos judicium esto. Hæ sunt caussæ, quibus adductus, Te Virum Amplissimum in rerum pulcherrimarum meditatione versantem interpellare ausus sum: nunc illud Te oro atque obsecro, ut si perspectæ Sapientiæ Tuæ plurimum tribuo; si Tibi, carissimo Pignori, atque universæ Familiæ Tuæ læta & prospera omnia a Deo Optimo Maximo & precor & opto; quod facere ex animo numquam desinam; munusculum hoc meum æqui bonique consulas, meque in fidem & clientelam tuam humaniter tuo more recipias. Id si feceris, magnum pulcherrimumque laborum meorum tulisse fructum mihi videbor.

Ad Lectorem.

www.libtool.com.cn

MAxime præclarus aditus & Regia quasi semita ad Divinarum humanarumque rerum scientiam, veram nempe Philosophiam, ab antiquioribus usque temporibus habitæ semper sunt Mathematicæ Disciplinæ: sublimem illum ac conspicuum perfectionis gradum, ad quem Physices & Mechanices studia nostra hac ætate evecta conspiciuntur, non aliunde equidem profectum novimus, quam a *Continuæ* ac *Discretæ* Quantitatis recta applicatione ad naturalium Phænomenorum observationes: ipsamet hominum Societas, ac Civilis vivendi ratio nec consistere nec vigere quodammodo posset sine harum cognitionum ope, quæ ad agrorum dimensionem, ad aquarum cursum dirigendum, ad Artificum opera, ac mercaturam recte riteque aptarentur.

Præter memorata hactenus emolumenta, quæ ex Mathematicis Disciplinis in Civilem Societatem plurimasque Scientias effluere compertum est, non exiguam sane utilitatem, eamque sibi peculiarem, homines inde haurire novimus: verum enim vero Universalis Matheseos studia, *Arithmetica* nempe ac *Geometria* sunt, ut ait Divinus ille Plato, præpetes veluti validæque alæ, quibus humana mens ad veri indaginem evehitur: ex quo fit, ut harum ope e sensibilium qualitatum sphæra, queis undique circumsepta invenitur, quæque illam sæpius in errorem pertrahunt, ex una ad aliam veritatem assurgens atque progrediens, sensim ac sine sensu tali pacto sublimioribus assuescit cogitationibus, quamvis nec Logicam attigerit, nec Dialecticis institutionibus sit imbuta: atque hinc præterea acriora illa atque profundiora ingenia efformari perspicuum est, quæ tantopere miramur, quæque apud nos *Geometricarum mentium* nomen obtinent.

Nil itaque mirari debemus si præclaram hanc facultatem, quæ tanta hominibus emolumenta tamque uberrima confert, maxima alacritate ac cura tam ab antiquis quam a recentioribus fuerit exculta. Inter priores præ omnibus enituit Megarensis Euclides, cujus Opus in XII. Libros distinctum, qui præcipuas tam *Continuæ* quam *Discretæ* quantitatis proprietates complectuntur, integer ac perfectus Universalis Matheseos Tractatus dici potest. Post Scientiarum in Europa instaurationem tantii

Viri nomen ac fama in caussa fuit, ut celebriores quique Auctores qui hisce studiis operam dedere, hunc tantum veluti ducem sectarentur, atque in ejusdem scriptis corrigendis ac emendandis, obscuraque eorum significatione elucidanda maxima cura & contentione laborarent.

Haud diversa fuit illorum mens, qui ut Adolescentium his incumbentium studiis gratiam inirent, breviori quadam Matheseos methodo Euclidis Elementa veluti exemplar eisdem praeposuere. Quam in rem cum omnes ad invicem majorem perspicuitatem ac facilitatem exquirerent, unusquisque ceteris praestitisse sibi in animum induxit.

Quamvis vero maxima sint profecto Graeci Auctoris merita, magnamque laudem mereantur impensis laboribus ac studiis modo *memorati Scriptores*, medio tamen jam elapso Saeculo observari caeptum est Euclideam methodum perfici posse meliori quodam ordine, faciliori quoque magisque naturae consentaneo, praemittendo scilicet simpliciores ac magis perspicuas notiones difficilioribus illis magisque compositis, in gratiam praecipue studiosorum Adolescentium, qui in primo Scientiarum limine cum verae sive apparentes occurrant difficultates, animum despondere solent aut deterreri: paucis namque iisque perraris ingeniis peculiari numinum favore elargitum est *Cartesii* atque *Paschalii eximium* acumen acerrimamque penetrationem sortiri. Experientia deinde optima rerum magistra optimeque auspicato exitu perspicue innotuit quam recte priori illi methodo nova haec posterior esset anteferenda.

In hisce meis Universae Matheseos Elementis, quae in lucem edenda proposui, Recentiorum methodum persequi maxima ex parte curavi, Clarissimorum praecipue *Sympsonii* & *Chapelii*, qui inter ceteros magis excelluisse videntur. Quam ingenue quoque id fateor quod memoratis modo Scriptoribus me debere sentio, fidenter aeque asserere non verebor majori quam potui cura & studio adlaborasse ut eorum methodus, ubicumque fas esset, facilior ac simplicior redderetur; idque praestitum a me esse redigendo ad simplices perspicuasque definitiones quasdam ex illorum Propositionibus, pluresque alias ad Corollaria, sive, ut ajunt, consequentias ex praecipuis Propositionibus deductas: ex quibus omnibus haud inanis spes adest fore ut ingenui Adolescentes aliam quoque eamque eximiam utilitatem hauriant, ut assuescant scilicet intellectum ad longiorem cogitationum seriem persequendam: qua peculiari ut arbitror dote nisi praesens Opus esset distinctum, nil aliud profecto fuisset susceptus labor, quam *ligna in lucum*, ut ajunt, *congerere*, *noctuasque Athenas de-*

por-

portare; cum nostra hac ætate optimis hujus Scientiæ Elementis ac Tractatibus Italicæ gentes sint perabunde instructæ. Ceterum viderint docti Viri, ac studiosi præsertim Adolescentes, quorum majorem profectum atque emolumentum hoc edito Opere provehendum suscepi, an quod mihi præstandum proposui, id revera præstiterim.

www.libtool.com.cn

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del *P. F. Filippo Rosa Lanzi* Inquisitor General del Santo Officio di Venezia nel Libro intitolato: *Elementa Matheseos ad usum studiosæ Juventutis elucubrata a P. Michaele Angelo Bonotto ex Ordine Prædicatorum MS.* non v' esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimenti per Attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi, concediamo Licenza all' *Erede di Niccolò Pezzana*, che possi essere stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 20. Luglio 1772.

{ *Sebastian Zustinian Rif.*

{ *Alvise Vallaresso Rif.*

{ *Francesco Morosini 2°. Cav. Proc. Rif.*

Registrato in Libro a Carte 105. al Num. 868.

Daviddc Marchesini Segr.

Adì 23. Agosto 1772.

Registrato al Magistrato Eccellentiss. contro la Bestemia in Libro a Carte 48.

Andrea Grattarol Segr.

Cum

Cum omnis, quæ a ratione ſuſcipitur de aliqua re inſtitutio, debeat, ut inquit Cicero, a definitione proficiſci, ut intelligatur quid ſit id, de quo diſputetur; operæ prætium duco ante definire quid ſint Diſciplinæ, de quibus ego modo adjuvante Deo Opt. Max. ſum ſcripturus, & nonnullarum vocum, quibus frequentiſſime utendum erit, ſignificationem explanare.

www.libtool.com.cn

PRÆNOTIONES.

PRIMA.

Quantitas, vel *Magnitudo* dicitur id omne, quod partes habet, *ſive quidquid augeri, & minui poteſt*. Hujus generis ſunt *corpus*, ſuperficies, linea, tempus, motus, velocitas, numerus, menſura, pondus, &c.

SECUNDA.

Atque ea quantitas, quæ ex diſcretis, ſejunctiſque partibus componitur, *Diſcreta*, vel *Disjuncta* appellatur; ut numerus.

TERTIA.

Quantitas vero illa, cujus partes continuæ, connexæ, ſibique conjunctæ ſunt, *Continua* dicitur; ut corpus, ſuperficies, linea.

QUARTA.

Geometria dicitur ea Diſciplina, quæ omnia continuæ quantitatis genera, & proprietates contemplatur.

QUINTA.

Arithmetica vero eſt doctrina illa, in qua diſcretæ quantitatis, numerorum nempe proprietates, munera, & accidentia demonſtrantur.

SEXTA.

Algebra, ſeu *Arithmetica Specioſa* ea eſt Diſciplina, quæ ſpeciebus quibuſdam, nimirum Alphabeti litteris, præcipuas, atque generales tam diſcretæ, quam continuæ quantitatis proprietates explanat, atque mirabili artificio demonſtrat.

SEPTIMA.

Definitio est oratio explicans naturam alicujus rei, aut vocem illam, qua ad eandem rem significandam utimur.

OCTAVA.

www.libtool.com.cn

Propositio est oratio, in qua aliquid menti nostræ contemplandum exhibetur.

NONA.

Theorema dicitur ea propositio, in qua aliquid demonstrandum proponitur.

DECIMA.

Axioma, *Pronunciatum*, sive *Effatum* appellatur Theorema illud, cujus veritas adeo certa, & evidens est, ut cuilibet menti vel leviter cogitanti, statim ulla absque demonstratione affulgeat.

UNDECIMA.

Problema est propositio, in qua aliquid faciendum jubetur.

DUODECIMA.

Postulatum vero dicitur problema illud, cujus constructio adeo facilis, & evidens est, ut nulla prorsus indigeat demonstratione.

DECIMATERTIA.

Lemma, seu *Præsumptio*, est propositio illa, quæ alteri propositioni velut principaliori demonstrandæ inservit, atque seorsum ponitur ab illa, ne series perturbetur.

DECIMAQUARTA.

Corollarium, vel *Consectarium*, vocatur propositio illa, quæ ab alia jam demonstrata, facile, nulloque negotio deducitur.

DECIMAQUINTA.

Scholium dicitur id, quod ponitur post aliquam generalem demonstrationem, quando in ea aliquid peculiari notatione dignum continetur.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICES LIBER PRIMUS.

De Numeris Integris.

DEFINITIO PRIMA.

www.libtool.com.cn

NOtæ, vel signa, seu figuræ, quibus utimur in Arithmetica ad numerum quemlibet exprimendum, sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quæ significant unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, quibus notis, seu figuris additur cifra 0, quæ dicitur *Zero*, atque per se nihil significat, sed aliis notis ad dexteram addita (quando dicimus ad dexteram, vel ad sinistram, semper intelligendum est scribentis), ipsarum valorem decuplo majorem reddit. Si figuris quibuslibet, exempli caussa 1, 2, 3, 6, 8, &c. ad dexteram addas cifram 0, habebis numeros 10, 20, 30, 60, 80, &c., scilicet decem, viginti, triginta, sexaginta, octoginta, &c. 1.

Definitio II.

Unitas dicitur ea denominatio, per quam qualibet res dicitur una. Est autem unitas omnis numeri principium. 2.

Definitio III.

Numerus est duarum, vel plurium unitatum multitudo, sive aggregatum; unde primus numerus est duo, secundus tres, &c. 3.

Definitio IV.

Numerus dicitur *par*, quando bifariam, idest in duas partes æquales dividi potest; ideoque numeri pares sunt 2, 4, 6, 8, 10, 12, & alii infiniti. 4.

Definitio V.

Numerus vero *impar* est, qui bifariam dividi nequit. Sic numeri 3, 5, 7, 9, 11, &c. impares sunt, quia in duas æquales partes dividi nequeunt. 5.

Definitio VI.

Præcipuæ *Arithmeticæ partes*, *seu operationes* sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Divisio. 6.

Definitio VII.

7. *Additio* est duorum, vel plurium numerorum in unam summam collectio: sive datis duobus, aut pluribus numeris, est inventio alterius numeri, cujus partes omnibus datorum numerorum partibus simul sumptis sint æquales. Numerus, qui ex datorum additione conflatur, eorumdem *Summa, vel Aggregatum* appellatur.

www.libtool.com.cn

Exemplum.

Sint numeri addendi 4, 3, 2, erit ipsorum summa 9; hic enim numerus tot continet unitates, quot sunt in datis numeris 4, 3, 2, simul sumptis.

Definitio VIII.

8. *Subtractio* est inventio excessus, quo numerus major minorem superat; sive est inventio defectus, quo minor numerus a majore deficit. Excessus autem ille, sive defectus, datorum numerorum *Differentia, vel Residuum* dicitur.

Exemplum.

Subtrahendus sit numerus 3 a numero 8, differentia, seu residuum erit numerus 5: etenim numerus 8 per quinque unitates excedit numerum 3; sive, quod idem est, numero 3 quinque deficiunt unitates, ut adæquet numerum 8; quare eorumdem numerorum differentia est numerus 5.

Definitio IX.

9. *Multiplicatio* est datum numerum toties sumere, quot in alio etiam dato numero continentur partes, seu unitates.

Numeri dati dicuntur *Factores, vel Multiplicatores;* is vero numerus, qui ab ipsorum multiplicatione producitur, *Factum, seu Productum* appellatur.

Multiplicatorum major, vulgo *Multiplicandus* dicitur, minor vero *Multiplicans, vel Multiplicator* vocatur.

Exemplum.

Sit numerus multiplicandus 4, & multiplicator 2, erit ipsorum productum 8; numerus enim 8 toties continet numerum 4, quot sunt unitates in multiplicatore 2: Seu vicissim productum, sive factum 8 toties continet multiplicatorem 2, quot sunt unitates in altero multiplicatore 4.

De-

Definitio X.

Diviſio eſt ea Arithmetices operatio, in qua invenitur quoties datus numerus alium datum numerum contineat. 10.

Datorum primus vocatur *Numerus Dividendus*, alter vero *Diviſor* dicitur, & numerus inventus *Quotiens*, *Quotus*, vel *Exponens* diviſionis appellatur.

www.libtool.com.cn

Exemplum.

Sit numerus dividendus 6, & diviſor 2, quotiens erit 3; cùm numerus 6 ter numerum binarium contineat.

PROBLEMA PRIMUM.

Datum quemvis numerum Arithmeticis figuris exprimere. 11

Reſolutio.

Arabes, vel Indi, qui figuras, ſeu notas Arithmeticas invenerunt, eas hac ratione, ſeu lege inſtituerunt, ut ſcilicet quævis nota primo loco, ſive in prima ſede locata, ſimplices unitates ſignificaret; atque (a dextera ſemper procedendo verſus ſiniſtram ſcribentis) nota in ſecunda ſede locata tot decades exprimeret, quot unitates continet; in tertia ſede tot centenaria, quot unitates habet; in quarta ſede tot unitates millium, in quinta decades millium, & in ſexta millium centenaria. Nota vero in ſeptima ſede locata decies centena millia, ſeu vulgo milliones ſignificaret, quot unitates habet; in octava decades millionum, in nona millionum centenaria, in decima ſede millionum millia, in undecima decades mille millionum, & in duodecima ſede tot centena millia millionum, quot unitates continet figura in ea ſede locata.

Deinde, eodem ordine procedendo, in aliis ſex conſequentibus ſedibus poſuerunt billionum unitates, decades, centenaria, millia, decades millium, & centenaria millium billionum. Deinceps ſex trillionibus ſedes tribuerunt, ſex conſequenter quatrillionibus, ſex quinquillionibus, &c.

Quapropter unitas in prima ſede poſita unam tantum rem ſignificat; ſi in ſecunda ſede ſcribatur, decem ex iiſdem rebus indicabit, in tertia ſede centum, in quarta mille; ſi vero locata fuerit in decima ſede mille, milliones exprimet, atque ita deinceps.

Similiter nota 2 in prima ſede poſita duas res, ſeu unitates ſignificat, in ſecunda ſede viginti unitates indicat, in tertia ſede ducenas unitates, in quarta duo millia exprimit, in quinta viginti millia, &c. Idem de reliquis figuris intelligatur.

Exem-

Exemplum I.

Sit numerus octoginta septem Arabicis figuris exprimendus. Hic numerus continet octo Decades, & septem unitates; ergo primo loco, sive in prima sede scribatur figura 7; deinde ad sinistram, nimirum in secunda sede ponatur nota 8, hoc pacto 87; atque hac ratione indicabitur numerus octoginta septem.

Exemplum II.

Numerus exprimendus sit sex mille nongenta quinquaginta quatuor. Cum in hoc numero contineantur quatuor unitates, quinque decades, novem centenaria, & sex millia; in prima sede scribatur nota 4, atque (semper a dextera procedendo versus sinistram *scribentis*) in secunda sede ponatur figura 5, in tertia, quæ est centenariorum sedes, scribatur figura 9. Tandem quarto loco, sive in quarta sede scribatur figura 6, nempe hoc modo 6954; & hac lege dispositæ, numerum sex millia nongenta quinquaginta quatuor indicabunt.

Exemplum III.

Similiter numerus octingenta quinquaginta tria millia ducenta nonaginta septem sic exprimitur 853297.

Exemplum IV.

Si datus numerus sit octingenta, in quo non habentur nec simplices unitates, neque decades, sed tantum octo centenaria; cumque centenariorum sedes sit tertia, ideo tam in prima, quam in secunda sede ponatur cifra o, & in tertia scribatur figura 8; unde 800 numerum octingenta indicabit.

Exemplum V.

Eadem prorsus ratione ad quemvis alium numerum exprimendum scribatur semper cifra o in iis sedibus, quæ figuris carent. Itaque numerus sex mille quadraginta, qui non habet nec simplices unitates, neque centenaria, ita scribatur 6040.

Item numerus septuaginta milliones, mille, & triginta duo, in quo nec centenaria sunt, nec decades millium, nec centenaria millium, neque unitates millionum, hac ratione scribatur 70001032, atque ita de reliquis.

PROBLEMA SECUNDUM.

Datum quemvis numerum Arabicis figuris descriptum enunciare. 12.

Resolutio I.

Datus sit numerus quilibet exprimendus 538462. Ex dictis in antecedenti Problemate evidens est notam 2 occupare sedem unitatum simplicium, notam 6 positam esse in decadum sede, 4 in sede centenariorum, 8 in sede unitatum millium, 3 in sede decadum millium, & 5 in sede centerariorum millium; adeoque sinistrorsum incipiendo, & versus dexteram procedendo, sic exprimitur: quingenta triginta octo millia, quadringenta sexaginta duo.

Eadem prorsus ratione numerus 200034 enunciatur ducenta millia triginta quatuor, cum figura 2 sit in sexta sede, quæ est centenariorum millium; nota vero 3 in decadum simplicium sede, & nota 4 in sede unitatum simplicium.

Resolutio II.

Ad numeros vero facilius exprimendos, præsertim si prolixiores sint, 13.
hac ratione procedendum erit.

Primo a dextera procedendo versus sinistram, datus numerus in periodos, seu membra dividatur, secernendo virgula ternas quasvis figuras.

Secundo si datus numerus pluribus quam sex constat notis, supra septimam scribatur 1; intermissisque quinque figuris, supra notam decimam tertiam ponatur 2. Item intermissis iterum quinque figuris, scribatur 3 supra notam undevigesimo loco positam; atque ita deinceps, relictis semper quinque notis, scribantur numeri 4, 5, 6, &c. supra notas vigesimo quinto, trigesimo primo, trigesimo septimo loco positas, &c.

Atque hac methodo datus numerus dividatur in membra, quorum unumquodvis sex continet notas (excepto primo ad sinistram posito, quod aliquando unam, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinque tantum notas continere potest). Præterea quilibet Senarius divisus est in duo Ternaria, quorum primum dextrorsus continet unitates, decades, & centenaria dati Senarii; alterum vero ternarium sinistrorsum positum continet millia, seu unitates millium, decades millium, & centenaria millium ejusdem Senarii.

Primus Senarius est unitatum, secundus continet milliones, tertius milliones millionum, seu biliones, quartus triliones, quintus quatriliones, &c.

Quapropter sex notæ simul exprimendæ sunt, atque prolata nota, supra quam posita fuit unitas, pronuncietur vox millio, ubi positus fuit numerus 2, pronuncietur bilio, & sic deinceps. Ubi vero sola virgu-

virgula invenitur, semper proferatur vox mille. Denique, ut ante dictum est, enunciatur numerus incipiendo a sinistra, & versus dexteram progrediendo. Quæ omnia sequentibus exemplis illustrata facilius percipientur: Artes enim, ut inquit Cl. Newtonus, exemplis facilius, quam præceptis addiscuntur.

Sit datus numerus 26312, 567928, 543, qui dividatur in periodos, ut ante dictum est, ponatur nempe una virgula inter notas 5, & 8, alia inter 5, & 2; præterea ponatur 1 supra notam 7 septimo loco positam, & numerus 2 supra notam 6 in tredecima sede locatam; atque datus numerus hac ratione in membra divisus, facillime sic legitur: viginti sex biliones, tercenti duodecim mille, quingenti sexaginta septem milliones, nongenta viginti octo millia, quingenta quadraginta tria.

www.libtool.com.cn

Similiter numerus 59846, 070030, 090070, 356 sic enunciatur: quinquaginta novem triliones, octingenti quadraginta sex mille, septuaginta biliones, triginta millia milliones, septuaginta millia, tercenta quinquaginta sex.

Item numerus 128, 000004, 003200, 005000, 000, ita exprimitur: centum viginti octo millia triliones, quatuor millia, & tres biliones, ducenta millia, & quinque milliones.

PROBLEMA TERTIUM.

14. *Numeros integros in unam summam colligere.*

Resolutio I.

Primo dati numeri ordinatim scribantur, alius nempe infra alium, ita ut unitates unius sint sub unitatibus alterius, decades sub decadibus, centenaria sub centenariis, & millia millibus sibi invicem respondeant, atque ita deinceps.

Secundo infra eosdem numeros ducatur lineola.

Tertio in unam summam colligantur simplices unitates, idest notæ illæ, quæ sunt in prima columna ad dexteram scribentis posita; atque si ipsarum summa non excedit numerum 9, scribatur inventa summa infra lineam, & sub eadem columna. Eadem operatio deinceps fiat in secunda columna, in tertia, in quarta, &c., & habebitur infra lineam quæsita summa.

Sint numeri addendi 123, 231, 542, qui ordinatim scribantur, ut diximus in numero primo, & ducta lineola, inveniatur summa, quæ erit 896.

$$\begin{array}{r} 123 \\ 231 \\ 542 \\ \hline 896 \end{array}$$

Nam unitates 2, 1, 3 in prima columna in unum collectæ faciunt 6; scribo itaque 6 infra lineam, & sub eadem prima columna. Deinde in secunda columna decades 4, 3, 2 simul junctæ dant summam 9, quæ scribatur etiam infra lineam, & sub

eadem

eadem secunda columna. Tandem centenaria 5, 2, 1 faciunt octo centenaria; proindeque scribatur 8 infra lineam in tertia sede, idest sub tertia columna, & erit 896, idest octingenta nonaginta sex datorum numerorum summa.

Similiter numerorum 4200, & 5060 summa erit 9260, videlicet novem millia ducenta sexaginta.

4200
5060
9260

Quarto si autem cujusvis columnæ summa numerum novem excedat, atque unam vel plures decades contineat, tunc infra lineam, & sub eadem columna scribatur id, quod remanet supra decades, vel scribatur cifra 0, si nihil supra decades summa contineat.

www.fbtoor.com.cn

Deinde sequentis columnæ numeris tot addantur unitates, quot fuerunt decades in præcedenti columna inventæ.

Exemplum.

In unam summam colligendi sint numeri 5146, 4375, 7624, 238. Primo scribantur ut ante dictum est, eademque conditione, ut unitates sub unitatibus jaceant, decades decadibus respondeant, centena centenis, &c; atque ducta linea, in unam summam redigantur numeri primæ columnæ, scilicet unitates 8, 4, 5, 6, quæ simul junctæ dant summam 23; nam 8 plus 4 faciunt 12, & 12 plus 5 dant 17, & 17 plus 6 efficiunt 23, quæ summa 23 continet duas decades, & tres unitates; scribatur itaque nota 3 infra lineam in columna unitatum, & decades 2 cum aliis decadibus 3, 2, 7, 4 colligantur, & erit 18 decadum summa. Decem vero decades unum centenarium efficiunt; ergo inventæ summæ 18 scribatur nota 8 infra lineam in decadum sede, & 1, scilicet una decas decadum, seu unum centenarium aliis centenariis 2, 6, 3, 1 adjungatur, & erit 13 centenariorum summa. Quoniam vero decem centenaria unum mille constituunt, ideoque inventæ summæ 13 scribatur nota 3 in tertia columna, & infra lineam, atque 1, videlicet unum mille aliis millibus 7, 4, 5 adjungatur, erit 17 millium summa. Ponatur itaque 7 infra lineam sub quarta columna, videlicet in millium sede, & 1, una nempe decas millium scribatur ad sinistram ejusdem 7, scilicet in quinta sede, quæ est sedes decadum millium; atque datorum numerorum summa erit 17383, nimirum septendecim millia trecenta octoginta tria.

5146
4375
7624
238
17383

Similiter numerorum 3427, 5035, 8247 summa erit 16709, idest sexdecim millia septingenta novem.

3427
5035
8247
16709

Item numerorum 32050, 6040, 2070, 40 summa erit 40200, nempe quadraginta millia ducenta.

32050
6040
2070
40
40200

Demonstratio.

15. Additio, per Definitionem septimam hujus Libri, est inventio numeri, cujus partes, seu unitates adæquent datorum numerorum partes omnes simul sumptas; numerus vero 896 in primo exemplo, ex constructione facta, tot continet unitates, decades, & centenaria, quot sunt unitates, decades, & centenaria in datis numeris 123, 231, 542 simul sumptis; ergo numerus 896 est summa seu aggregatum eorumdem numerorum 123, 231, 542.

www.libtool.com.cn

Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Eodem ratiocinio demonstratur reliquas summas rite factas esse.

Resolutio II.

16. Primo ordinentur numeri alius infra alium, & ducatur lineola infra eosdem, ut ante dictum fuit.

Secundo operatio procedat a sinistra versus dexteram, atque nullus numerus mente retineatur, sed tota cujusvis columnæ summa statim infra lineam, & sub eadem columna scribatur, si non excedit numerum 9; si autem excedit numerum 9, & unam vel plures decades continet, tum id quod remanet supra decades, sub eadem columna describatur, & decades scribantur in altera sede ad sinistram.

Sint numeri in unam summam colligendi 58748, 94816, 5232, 803; a sinistra incipiendo dico 9 plus 5 decades millium faciunt 14, scribo infra lineam summam hanc 14, ea tamen conditione, ut nota 4 sit sub eadem columna decadum millium, & unitas, seu 1 ponatur ad sinistram in sequenti sede, quæ est centenariorum millium. Deinde colligo millia 5 cum 4, faciunt 9, & 9 cum 8 faciunt 17, quem scribo infra lineam, ita ut nota 7 sit sub columna millium, & 1 infra notam 4 primæ summæ 14. Præterea colligo centenaria 8 plus 2 plus 8 plus 7, quæ efficiunt summam 25, atque scribo 5 infra lineam sub eadem centenariorum sede, & 2 in sede millium, scilicet infra notam 7 præcedentis summæ 17. Eodem modo in unam summam redigo decades 0, 3, 1, 4, quæ faciunt 8, quem scribo infra lineam in sede decadum. Tandem in unam summam collectis unitatibus 3, 2, 6, 8, quæ dant summam 19, scribatur 9 in sede unitatum infra lineam, & 1 in decadum sede, nimirum infra notam 8 præcedentis summæ decadum. Tertio ducta alia recta linea infra numeros inventos, fiat altera additio horum numerorum; atque datorum numerorum summa erit 159599, idest centum quinquaginta novem millia, quingenta nonaginta novem.

58748
94816
5232
803
147589
12 1
159599

Corollarium.

Cum igitur duobus modis numerorum additio perficiatur, hinc nos additionem rite perfectam esse judicamus, si utroque modo facta, eandem summam inveniamus. 17.

Praeterea additionis examen etiam hac ratione fieri potest: nimirum eadem additio repetatur, sed ordine inverso, ut si prius ab imo sursum processeris, deinde a summo deorsum descendas; atque si eadem fuerit summa utroque modo inventa, nullum errorem irrepsisse probabile est.

www.libtool.com.cn

PROBLEMA QUARTUM.

Numerum quemvis integrum ex alio integro majore subtrahere. 18.

Resolutio.

Primo numerus minor infra majorem, a quo subducendus est, ordinate scribatur; ita ut unitates sint sub unitatibus, decades sub decadibus, centena sub centenis, &c. ut de additione dictum est numero primo Problematis antecedentis; atque infra eosdem numeros ducatur lineola.

Secundo, dextrorsum incipiendo, subtrahantur unitates numeri inferioris ab unitatibus numeri superioris, decades ex decadibus, centena ex centenis, &c. & id quod remanet in qualibet sede, scribatur infra lineam.

Cum vero nota superior inferiori est aequalis, tunc ponitur cifra o infra lineam. Sit exemplum: Subtrahendus sit numerus 86524 ex numero 137596. Scribatur in primis numerus minuendus 137596, & infra eundem ordinatim scribatur numerus subtrahendus 86524, ita ut 4 unitates sint sub 6 unitatibus, decades 2 sub decadibus 9, &c.; atque inferius ducta lineola, primo subtrahantur unitates 4 ex unitatibus 6, & *residuum 2 scribatur infra lineam in sede unitatum*. Secundo subducantur decades 2 ex decadibus 9, & reliquum 7 ponatur infra lineam in decadum sede. Tertio subductis 5 centenariis ex 5 centenariis, nihil remanet, proindeque scribatur o infra lineam in tertia sede. Quarto subtrahantur 6 millia ex 7 millibus, & residuum 1 ponatur infra lineam in quarta sede. Tandem quia 8 decades millium ex tribus millium decadibus subtrahi nequeunt, subtrahatur 8 ex 13, & residuum 5 infra lineam scribatur in eadem sede decadum millium; adeoque datorum numerorum differentia, seu residuum erit 51072.

$$\begin{array}{r} 137596 \\ 86524 \\ \hline 51072 \end{array}$$

Tertio si in superiori, seu majori numero, notae inveniantur, quibus o, aut nullae minoris, seu inferioris numeri respondeant; tunc illæ etiam infra lineam ſcribantur, ut ex numero 3058760 ſubtrahendo numerum 18040, reſiduum erit 3040720.

	3058760
	18040
	3040720

Quarto tandem: ſi aliqua figura, ſeu nota inferioris numeri ſubduci nequit a reſpondenti figura numeri ſuperioris, quia illa major eſt; tum ſuperiori notæ addita intelligatur decas una, & ſubducta inferiori nota, ſcribatur reſiduum infra lineam: deinde ſequens nota ſuperior ad ſiniſtram poſita unitate minuitur, vel (quod idem eſt) nota ſubſequens numeri inferioris unitate augetur.

www.fjbtool.com.cn

Ex numero majore 436052 ſubtrahendus ſit numerus 352064. Poſito numero 352064 ordinatim infra numerum 436052, atque ducta lineola, auferatur 4 ex 2, quod fieri nequit; proindeque ipſi numero 2 addita intelligatur una decas, fiet 12, ex quo ſubtrahatur 4, & remanet 8, qui ſcribatur infrà lineam. Deinde, vel ſubſequens nota inferior 6 unitate augeatur, & fiet 7, qui nequaquam ſubduci poteſt ex figurà ſuperiore 5, ideoque ipſi 5 addita intelligatur una decas, & habebitur 15, a quo demto numero 7, reſiduum erit 8; vel ſubſequens nota ſuperior 5 unitate minuatur, & remanebit 4, a quo ſubtrahi non poteſt inferior nota 6; eidem igitur numero 4 addatur una decas, fiet 14, a quo ſubducto numero 6, habetur idem reſiduum 8 infra lineam ſcribendum. Poſtea ſubſequenti inferiori notæ 0 addatur 1, fiet 1, quæ ex ſuperiore nota 0 auferri nequit, ideoque ipſi 0 addatur decas, & habebitur 10, a quo auferatur 1, & reliquum 9 ponatur infra lineam. Conſequenter addatur 1 ſubſequenti inferiori notæ 2, & fiet 3, quo ſubducto ex 6, remanebit 3, qui ſcribatur infra lineam in eadem ſede. Deinde ſubtraho 5 ex 13 (cum 5 ex 3 ſubduci nequeat), & reſiduum 8 infra lineam pono, atque transfero 1 addendum inferiori numero 3, & fit 4, quo ſubducto ex ſuperiore nota 4 nihil remanet; proindeque ponenda eſſet cifra 0, ſed inutile eſt eam in fine operationis ſcribere. Ergo reſiduum erit 83988.

	436052
	352064
	83988

Similiter ſubtrahendo numerum B ex numero A, invenitur reſiduum C. Nam ablato 5 ex 8, reſiduum erit 3 infra lineam ſcribendum. 1 ex 10, reliquum eſt 9; atque iterum 1 ex 10, reſiduum eſt 9. 3 ex 4, reſiduum eſt 1. tum 6 ex 10, reliquum eſt 4. 10 ex 11, reſiduum eſt 1. Tandem 1 ex 7, reliquum eſt 6.

A	7104008
B	962015
C	6141993

Demonſtratio.

19. Subtractio, per Definitionem octavam hujus Libri, eſt inventio exceſſus, quo numerus major minorem ſuperat; ſed in primo hujus Problematis exemplo reſiduum inventum 51072 eſt exceſſus, quo numerus major 137596 minorem 86524 ſuperat; etenim ſubtrahendo 4 unitates a 6 unitatibus, in reſiduo poſuimus 2 unitates, qui numerus 2 eſt exceſſus, quo numerus 6 numerum 4 excedit, atque ita deinceps.

Er-

Ergo numerus 51072 est residuum, seu differentia inter datos numeros 137596, & 86524. Eodem ratiocinio reliqua exempla demonstrantur.

Corollarium.

Quoniam residuum est id, quod numero minori deficit, ut adæquet numerum majorem; si igitur in unam summam colligantur numerus minor, & residuum, eadem summa æqualis erit numero majori. 20.

www.lbtool.com.cn

Quapropter subtractionis examen fit addendo residuum inventum cum numero minori subtracto, atque si eorundem summa fuerit æqualis numero majori, nullum irrepsisse errorem pro certo habeas. Ut in primo exemplo, addendo residuum 51072 cum numero subtracto 86524, oritur summa 137596, quæ adæquat numerum majorem; adeoque concludendum est subtractionem rite factam fuisse.

PROBLEMA QUINTUM.

Datum quemvis numerum integrum per alium integrum numerum multiplicare. 21.

Numerorum simplicium (simplices dicuntur numeri minores numero decem) multiplicatio memoriter perdiscenda est; ideoque sequens Tabula memoriæ mandetur.

1 in	1 facit	1
2	1	2
2	2	4
2	3	6
2	4	8
2	5	10
2	6	12
2	7	14
2	8	16
2	9	18
3	3	9
3	4	12
3	5	15
3	6	18
3	7	21
3	8	24
3	9	27
4	4	16
4	5	20
4	6	24
4	7	28

4

4	8	32
4	9	36
5	5	25
5	6	30
5	7	35
5	8	40
5	9	45
6	6	36
6	7	42
6	8	48
6	9	54
7	7	49
7	8	56
7	9	63
8	8	64
8	9	72
9	9	81

www.libtool.com.cn

Si numeri ad invicem multiplicandi pluribus constant notis, tunc Primo scribatur numerus multiplicator infra numerum multiplicandum, eodem ordine, quo eos scribere docuimus numero 1 Problematis Tertii, & infra eosdem numeros ducatur linea.

Secundo quando multiplicator unicam habet notam, tum illa in singulas numeri multiplicandi figuras multiplicetur, a dextera procedendo versus sinistram; atque si productum quodvis peculiare non excedit numerum 9, totum ponatur infra lineam: si vero unam, aut plures decades contineat, tunc infra lineam scribatur tantum id, quod remanet supra decades; si autem productum nihil præter integras decades contineat, infra lineam ponatur 0, & tot reserventur unitates sequenti producto adjiciendæ, quot decades continet illud productum. Sit

Exemplum I.

Numerus multiplicandus sit 18521, & multiplicator 7, quem scribo infra unitatem alterius numeri, atque ducta lineola, multiplico 7 in 1; sed unitas septies sumpta facit septem, scribo itaque 7 infra lineam: Deinde numerus 2 septies sumptus facit 14, scribo 4 infra lineam in secunda sede, & 1, sive unam decadem reservo sequenti producto addendam, ob unam decadem hujus producti 14. Tum 5 septies sumptus facit 35, huic addo 1 reservatum ex antecedenti producto, & fit 36; scribo 6 infra lineam in tertia sede, & reservo 3, tres nempe centenario-

$$\begin{array}{r} 18521 \\ 7 \\ \hline 129647 \end{array}$$

millenariorum decades, five tria millia sequenti producto addenda. Postea numerus 8 septies sumptus producit 56, huic addo 3, & fit 59; pono 9 infra lineam, & retineo 5. Tandem 1 septies sumptus facit 7, huic addo 5 servatum ex praecedenti producto, & fit 12, quem totum infra lineam scribo: adeoque factum, seu productum ex numero 18521 multiplicato per numerum 7 erit 129647.

Tertio si multiplicator duas, vel plures habeat notas, tunc singulae ejus notae separatim multiplicent singulas numeri multiplicandi notas; sed producta ea ratione infra lineam describantur, ut (invento producto primae notae, ut in antecedenti exemplo) primum productum secundae notae inferioris numeri in primam numeri superioris notam scribatur in decadum sede, scilicet directe sub ipsa secunda nota; reliqua vero producta ejusdem notae ordinatim sinistrorsum scribantur, ut in superiori exemplo. Similiter primum productum tertiae notae directe ponatur sub ipsa tertia nota, idest in centenariorum sede; atque ita deinceps, ut videre est in sequentibus exemplis.

Quarto ducatur linea infra inventa producta, quae in unam summam colligantur, atque erit eadem summa quaesitum productum datorum numerorum.

Exemplum II.

Sit numerus *multiplicandus* 3624, & multiplicator 23, qui ordinatim scribantur, ut antea dictum fuit numero primo; atque ducta linea, dico, numerus 4 ter sumptus producit 12, scribo 2 infra lineam, & 1 retineo sequenti producto addendum: deinde 2 ter sumptus facit 6, huic addo 1 ex alio producto reservatum, & fit 7, quem infra lineam pono in secunda sede. Postea 6 ter sumptus dat productum 18; scribo igitur 8 in tertia sede infra lineam, & 1 retineo sequenti producto adjungendum. Tandem multiplico quartam figuram 3 per eundem multiplicatorem 3, & producto 9 addo unum ex antecedenti producto retentum, & fit 10, quem totum infra lineam scribo, ita ut 0 sit in quarta sede, & 1 in quinta: atque completum erit productum ex prima nota 3 in totum numerum multiplicandum. Multiplicetur deinde numerus multiplicandus 3624 per secundam notam 2 multiplicatoris 23, & primum productum ex 2 in 4, scilicet 8, scribatur infra lineam, directe sub ipso multiplicatore 2, videlicet infra secundam notam 7 praecedentis producti, idest in decadum sede; nam multiplicator 2 non significat duas unitates, sed duas decades, seu viginti unitates, est enim in secunda sede; proindeque superior unitatum figura 4 non bis, sed vicies sumenda est; & numerus 4 vicies sumptus producit 80, ideoque productum 8 ponendum est in secunda sede, in qua octo decades, seu octoginta unitates significat, ut evidens est ex primo producto. Deinde ducatur 2 in 2, & productum 4 ponatur infra lineam in tertia

```
 3624
   23
-----
10872
7248
-----
83352
```

tia sede. Postea 2 in 6 dat 12, scribatur 2 infra lineam in quarta sede, videlicet ad sinistram præcedentis notæ 4, & 1 servetur addendum sequenti producto ex 2 in 3, quod est 6, huic addatur 1 ante retentum, & fit 7, qui scribatur in quinta sede, nempe ad sinistram præcedentis notæ 2. Tandem ducta linea infra inventa producta, in unam summam redigantur eadem producta (Problemate Tertio), quæ erit 83352; adeoque productum, quod oritur ex ductu numeri 23 in numerum 3624 est 83352.

Exemplum III.

Eadem prorsus ratione multiplicando numerum 46080 per numerum 5030 oritur productum 231782400. Nam totus numerus superior multiplicatus per 0 dat productum 0, quod scribo infra lineam in sede unitatum. Deinde 3 in 0 facit etiam 0, quam cifram pono in secunda sede. Postea 3 in 8 producit 24, scribo 4 in tertia sede, & retineo 2 adjungenda sequenti producto ex 3 in 0, quod est 0, cui addo 2, & fit 2; scribo itaque 2 in quarta sede. Dein 3 in 6 producit 18, & pono 8 in quinta sede, atque 1 reservo sequenti producto adjiciendum. 3 in 4 producit 12, cui addo 1, & fit 13, quem totum pono infra lineam, nempe 3 in sexta, & 1 in septima sede. Tertio loco multiplico totum numerum superiorem per tertiam figuram 0 multiplicatoris, & productum 0 scribo infra lineam in tertia sede, idest sub nota 4 jam inventi producti. Tandem multiplico per quartam figuram 5, & 5 in 0 facit 0; pono igitur 0 ad sinistram præcedentis, idest in quarta sede, directe sub ipso multiplicatore 5. Deinde 5 in 8 facit 40, pono 0 in quinta sede, & reservo numerum 4 addendum sequenti producto ex 5 in 0, quod productum est 0, cui adjungo 4, & summam 4 pono in sexta sede. 5 in 6 producit 30, pono 0 in septima sede, & mente retineo 3 addendum poducto 20 orto ex ductu 5 in 4, & fit 23, quem totum scribo in octava, & nona sede. Atque ducta linea, & in unam summam collectis hisce peculiaribus productis, erit ea summa quæsitum productum 231782400.

```
     46080
      5030
 ---------
   1382400
  2304000
 ---------
 231782400
```

Exemplum IV.

Item multiplicando numerum 3542 per numerum 346, oritur productum 1225532.

```
    3542
     346
 -------
   21252
  14168
 10626
 -------
 1225532
```

Demonstratio.

22\. Productum, seu factum in quavis numerorum multiplicatione (Definitione 9.a) toties continere debet unum ex multiplicatoribus, quot sunt

ſunt unitates in altero multiplicatore: atqui in primo exemplo productum 129647 toties continet numerum multiplicandum 18521, quot ſunt unitates in numero multiplicatore 7; nam numerus 18521 ſepties infra ſe ipſum ordinate ſcribatur, & ducta linea inveniatur ſumma, quæ erit idem numerus 129647: ergo hic numerus eſt productum ex numero 7 in numerum 18521.

18521
18521
18521
18521
18521
18521
18521
129647

www.libtool.com.cn

Eodem modo in ſecundo exemplo evincitur numerum 83352 eſſe productum ex numero 23 in numerum 3624. Si enim numerus 3624 viginti tres vices infra ſe ipſum ordinatim ſcribatur, & fiat additio, invenietur ſumma 83352; proindeque productum duorum numerorum 3624, & 23, eſt numerus 83352. Eadem demonſtratio fieri poteſt de alio quovis exemplo.

Multiplicationis examen fit dividendo productum per unum ex factoribus, atque ſi pro quotiente alter factor inveniatur, certum erit multiplicationem rite factam fuiſſe; ſed prius intelligendum eſt qua ratione perficiatur diviſio. Sit igitur 23.

PROBLEMA SEXTUM.

Numerum quemlibet integrum per alium integrum numerum dividere. 24.

Reſolutio.

In qualibet diviſione duo ſunt dati numeri (Definitione 10. hujus Libri), quorum unus numerus Dividendus vocatur, & alter Diviſor dicitur; tertius vero numerus, qui diviſionis ope quæritur, Quotiens, Quotus, vel Exponens diviſionis appellatur, quia exponit quoties diviſor in dividendo contineatur.

Primo ſi diviſor, & dividendus ſunt ambo numeri ſimplices, facillime invenitur quotiens; ut dividendo numerum 6 per numerum 3, quotiens eſt 2: dividendo numerum 8 per 2, quotiens eſt 4.

Secundo ſi diviſor eſt numerus ſimplex, & dividendus duabus, vel pluribus conſtat notis, tunc ita procedendum erit: ſcribatur in primis numerus dividendus, atque juxta eundem relicto dextrorſum aliquo intervallo ducatur lineola a ſummo deorſum, & prope eandem lineam, & verſus dexteram ſcribatur diviſor, & infra diviſorem ducatur alia linea tranſverſa a ſiniſtra dextrorſum. Deinde ſiniſtrorſum incipiendo, ſingulæ numeri dividendi figuræ per datum diviſorem dividantur, & ponantur quotientes ſub linea infra diviſorem ducta, ut videre eſt in ſequentibus exemplis.

Exemplum I.

Sit numerus dividendus 64820, & diviſor 2. Scribatur in primis numerus dividendus 64820, atque dextrorſum ducatur a ſummo deorſum

ſum linea AB, poſtea ſcribatur diviſor 2, & infra diviſorem ducatur linea tranſverſa BC. Deinde ſiniſtrorſum incipiendo dico 2 in 6 ter continetur; ſcribo itaque primam quotientis notam 3 ſub linea BC infra diviſorem. Item 2 in 4 bis continetur, pono igitur 2 ad dexteram præcedentis notæ 3. Poſtea dividendo 8 per 2, invenio quotientem 4, quem ſcribo ſub diviſore poſt alias duas notas jam inventas. Tum 2 in 2 ſemel continetur, unde pono 1 pro quarta quotientis nota. Tandem 2 in 0 non continetur, proindeque ſcribo 0 pro quinta quæſiti quotientis nota, & perfecta erit diviſio; adeoque dividendo numerum 64820 per 2, quotiens erit 32410.

```
        A
64820 | 2
      B32410 C
```

www.fbtool.com.cn

Exemplum II.

Numerus dividendus ſit 1380, & diviſor 4, qui ſcribantur, ut antea dictum fuit. Deinde cum diviſor in prima dividendi figura 1 non contineatur, ſumantur duæ primæ figuræ, dividatur nempe numerus 13 per 4; ſed 4 in 13 tres vices tantum continetur; ergo ſub diviſore, & infra lineam ponatur numerus 3, qui multiplicetur per diviſorem 4, & productum 12 infra membrum diviſum 13 ſcribatur, & inferius ducta parva lineola, ſubtrahatur (Problemate 4.) 12 ex 13, & ad dexteram reſidui 1 deſcendatur tertia nota 8 numeri dividendi, & fiet 18 membrum dividendum, in quo diviſor 4 non continetur quinquies, quia 4 in 5 producit numerum 20 majorem numero 18, ſed tantum quater continetur, adeoque ponatur 4 poſt notam 3 in quotiente; poſtea multiplicetur inventus numerus 4 in diviſorem 4, & productum 16 ſcribatur ſub membro diviſo 18, a quo ſubtrahatur, & reſiduo 2 dextrorſum adjungatur ultima dividendi nota 0, & fiet membrum dividendum 20, in quo diviſor 4 quinquies continetur; ſcribatur itaque quotiens 5 pro tertia quæſiti quotientis nota, atque ducto 5 in 4, productum 20 ſubducatur a membro diviſo 20, reſiduum erit 0, & completa erit diviſio. Quapropter dividendo numerum 1380 per 4, quotiens eſt 345.

```
1380 | 4
12     345
 18
 16
  20
  20
   0
```

Tertio ſi in progreſſu operationis membrum dividendum inveniatur minus diviſore, tunc in quotiente ponatur cifra 0; & alia numeri dividendi figura deſcendatur. Si autem addita alia dividendi figura diviſor nondum contineatur in eodem membro dividendo, tunc alia cifra 0 in quotiente ponatur, & alia deſcendatur dividendi figura; atque hæc operatio toties iteretur, donec membrum dividendum contineat diviſorem, aut nullæ in dividendo ſuperſint figuræ; quod videre eſt in ſequenti exemplo.

Exemplum III.

Divisor 8 in prima figura 8 numeri dividendi 801600 semel continetur, proindeque prima quotientis nota erit 1, quæ multiplicetur in divisorem 8, & productum 8 scribatur sub nota 8 numeri dividendi, a qua subtrahatur, residuum erit 0; huic dextrorsum descendatur secunda dividendi nota, quæ est 0, & erit membrum dividendum 00, in quo divisor 8 non continetur, ideoque ponatur 0 in quotiente, & membro 00 dextrorsum addatur tertia dividendi nota 1, fiet membrum dividendum 001, idest 1, quod divisorem 8 non continet; adeoque ponatur alia cifra 0 in quotiente, & membro 001 dextrorsum addatur quarta dividendi figura 6, fiet 0016, sive 16, in quo divisor 8 bis continetur; ponatur itaque 2 pro quarta quotientis figura, & productum ex 2 in divisorem 8, nempe 16, subducatur a membro diviso 16, residuum erit 0, cui dextrorsum addatur quinta dividendi figura 0, fiet 00, in quo divisor 8 non continetur; ergo ponatur 0 in quotiente, & alia dividendi figura, nempe ultima 0 descendatur; cumque divisor 8 in membro dividendo 000 non contineatur, ponatur 0 pro sexta quotientis figura, & hujus divisionis quotiens erit 100200.

801600	8
8	100200
0016	
16	
000	

www.libtool.com.cn

Quarto quando divisor pluribus constat notis, secernantur ex dividendo tot notæ sinistrorsum, quot sunt in divisore; si vero numerum efficiant minorem divisore, illis una etiam apponatur, atque puncto ab aliis secernatur; postea perficiatur divisio, ut in exemplis sequentibus.

Exemplum IV.

Sit divisor 24, & dividendus 6816, qui scribantur ut dictum fuit numero secundo hujus Problematis; postea puncto secernatur 68 ex dividendo, & quæratur quoties divisor 24 contineatur in membro dividendo 68, quod sequenti ratiocinio facillime invenitur. Prima divisoris nota 2 in primam membri dividendi notam 6 ter continetur; sed secunda divisoris figura 4 in secundam dividendi membri notam 8 non continetur ter; proindeque 68 non continet tres vices divisorem 24; unde in hoc casu 2 in 6 continetur tantum bis, & remanente 2, quæ una cum sequenti nota 8 faciunt 28, in quo altera divisoris nota 4 etiam bis continetur (nihil autem refert si pluries contineatur), adeoque 24 in 68 bis continetur. Ponatur itaque 2 pro prima quotientis nota sub divisore infra lineam, & per inventam notam 2 multiplicetur divisor 24,

68.16	24
48	284
201	
192	
96	
96	
0	

& productum 48 ponatur infra membrum divisum 68 hac ratione : multiplico 2 in 4, & productum 8 pono infra notam 8 numeri 68, deinde multiplico 2 in 2, & productum 4 scribo infra notam 6 ejusdem numeri 68, & inferius ducta lineola, subtraho 48 a numero 68, residuum est 20, huic dextrorsum addo tertiam dividendi notam 1, & fit membrum dividendum 201, quod divido per 24; dico nempe 2 in 20 novies continetur (nullus enim numerus ponitur in quotiente major numero 9), & remanent 2, quæ una cum sequenti figura 1 faciunt 21; sed 4 in 21 non continetur novies; ergo in hoc casu numerus 2 contineri nequit novies in numero 20; dico igitur 2 in 20 continetur octies, & remanent 4 (quia 2 in 8 facit tantum 16), quæ cum sequenti nota 1 faciunt 41, in quo alia divisoris nota 4 etiam octies continetur (nihil refert quod pluries contineatur); ergo divisor 24 in membro dividendo 201 octies continetur; pono igitur 8 pro secunda quotientis figura, & multiplico 8 in divisorem 24, & productum 192 scribo infra 201, & ducta lineola, subtraho 192 ex 201, & residuo 9 infra lineam posito dextrorsum addo quartam dividendi notam 6, & divido 96 per 24; idest dico, 2 in 9 quater continetur, & remanet 1, quæ nota cum sequenti 6 facit 16, in quo divisoris nota 4 etiam quater continetur; ideoque divisor 24 quater continetur in 96; consequenter pono 4 pro tertia quotientis nota, & multiplicando 4 in 24 fit numerus 96, qui subtractus ex membro mox diviso 96 dat residuum 0; ergo quotiens quæsitus est 284.

68.16 | 24
48 | 284
201
192
96
96
0

www.libtool.com.cn

25. Quando absoluta divisione aliquid remanet, tunc residuum illud scribatur post quotientem inventum supra lineolam, infra quam ponatur totus divisor; atque hinc oriuntur fractiones, de quibus inferius disputandum erit.

Exemplum V.

Numerus dividendus sit 187695, & divisor 257, qui scribantur ut antea diximus numero secundo hujus Problematis. Deinde cum tres primæ dividendi figuræ numerum constituant 187, qui minor est numero divisore 257, ideoque quatuor notæ puncto secernantur; & habebitur 1876 primum membrum dividendum, in quo divisor 257 septies continetur; nam prima divisoris nota 2 in 18 novies continetur, & nihil remanet; at secunda divisoris nota 5 non continetur novies in tertia membri dividendi figura 7, ideoque divisor 257 non continetur novies in numero 1876; proindeque quotientem 9 unitate minuo, & dico 2 in 18 continetur octies, & remanent duo, quæ cum sequenti nota

1876.95 | 257
1799 | 730 $\frac{85}{257}$
779
771
85

nota 7 faciunt 27; ſed iterum nota diviſoris 5 contineri nequit octies in 27; ergo neque totus diviſor 257 octies contineri poteſt in numero 1876: adeoque iterum unitate quotientem minuo, & dico, in hoc caſu numerum 2 contineri tantum ſepties in 18, & remanent 4, quæ cum ſequenti nota 7 faciunt 47, in quo numero ſecunda diviſoris figura 5 etiam ſepties continetur, & remanent 12, quæ una cum ſequenti dividendi nota 6 faciunt 126, in quo numero tertia diviſoris figura 7 etiam ſepties continetur. Scribo igitur 7 in quotiente, & multiplico eandem notam 7 in totum diviſorem 257, atque productum 1799 infra membrum 1876 ordinatim pono, & ſubducta linea ſubtraho 1799 ex 1876, & reſiduo 77 infra lineam poſito, dextrorſus addo ſequentem dividendi notam 9, & fit 779, in quo diviſor 257 ter continetur; nam 2 in 7 ter continetur, & remanet 1, qui una cum ſequenti nota 7 facit numerum 17, in quo nota 5 etiam ter continetur, & remanent 2, quæ cum ſequenti figura 9 faciunt 29, in quo tertia diviſoris nota 7 etiam ter continetur. Scribo igitur 3 pro ſecunda quotientis nota, & eandem multiplico in diviſorem 257, & productum 771 ſubtraho ex membro diviſo 779, reliquum eſt 8, cui dextrorſum addo ſequentem dividendi notam 5, & fit 85, in quo diviſor 257 non continetur; pono ergo 0 in quotiente, & quæſitus quotiens erit 730 una cum reſiduo 85, quod ſcribatur prope quotientem 730 ſupra parvam lineolam, infra quam ponatur diviſor 257: unde integer quotiens erit $730\frac{85}{257}$, nempe ſeptingenta triginta integra, & octoginta quinque ducenteſimas quinquageſimas ſeptimas partes unius integri.

1876.95	257
1799	$730\frac{85}{257}$
779	
771	
85	

Similiter cum diviſor major eſt numero dividendo, quotiens obtinetur ſcribendo diviſorem infra dividendum interjecta lineola: atque hinc etiam oriuntur fractiones. Sic dividendo numerum 3 per numerum 4, quotiens erit $\frac{3}{4}$, nempe tres quadrantes, ſeu tres diviſum quatuor, ideſt tres quartæ partes unius integri. 26.

Cum autem diviſor pluribus conſtat figuris, & dividendus valde prolixus eſt, illis præcipue, qui in tradita diviſionis praxi peritiores non ſunt, utiliſſima erit ſequens dividendi methodus. 27.

Sit numerus dividendus 104007488, & diviſor 328, qui ſiniſtrorſum ſcribatur, & prope hunc, interjecta lineola a ſummo deorſum ducta, ponatur 1. Poſtea diviſor 328 multiplicetur per omnes numeros ſimplices 2, 3, 4, &c. uſque ad 9, & producta 656, 984, 1312, &c. ordinatim ſcribantur ſub ipſo diviſore, & prope eadem producta infra unitatem ponantur numeri ſimplices reſpondentes, per quos nempe multiplicatus fuit diviſor: atque hoc pacto numerus ſimplex 2 indicat productum appoſitum 656 bis continere diviſorem; numerus 7 ſignificat appoſitum productum 2296 ſepties continere diviſorem 328, & ſic de reliquis. Hoc poſito, quia tres primæ dividendi figuræ 104

non

non continens divisorem 328, fiat punctum infra quartam, quæ est 0, & primum membrum dividendum erit 1040. Ut autem inveniatur quoties divisor 328 contineatur in 1040, observetur quale ex productis positis infra divisorem sit proxime minus, quam 1040, invenietur esse 984, cui apposita est nota 3. Ponatur itaque 3 in quotiente ad dexteram dividendi, & subtrahatur 984 ex membro diviso 1040, residuum erit 56, cui addatur sequens dividendi figura, videlicet quinta 0, fiet 560 secundum membrum dividendum, quod semel tantum continet divisorem; nam majus est divisore 328, sed minus numero 656, qui bis continet divisorem: ideoque ponatur 1 in quotiente, & divisor 328 subtrahatur ex 560, reliquum erit 232, cui addatur sexta dividendi nota 7, habebitur 2327 tertium membrum dividendum. Iterum observetur quale productum infra divisorem positum sit proxime minus quam 2327, patet esse numerum 2296, qui septies continet divisorem; unde ponatur 7 in quotiente, & subducatur 2296 ex 2327, invenietur residuum 31, cui dextrorsum addatur sequens dividendi nota 4, fiet numerus 314, qui divisorem non continet, ideoque ponatur 0 in quotiente, & alia dividendi figura 8 descendatur, habebitur membrum dividendum 3148: quæratur infra divisorem productum proxime minus quam 3148, & invenietur 2952, cui apposita est figura 9; ideoque novies continet divisorem; ponatur itaque 9 pro quinta quotientis figura, & subtrahatur 2952 ex 3148, remanebit 196; huic addatur ultima dividendi figura 8, erit ultimum membrum dividendum 1968, cui æquale est productum sexto loco positum infra divisorem; proindeque sexies divisorem continet. Scribatur igitur 6 pro ultima quotientis nota, & subtracto 1968 ex 1968, nihil remanet. Ergo hujus divisionis quotiens est 317096.

1	328
2	656
3	984
4	1312
5	1640
6	1968
7	2296
8	2624
9	2952

```
1040.07488 | 328
           | 317096
 984
  560
  328
  2327
  2296
    3148
    2952
     1968
     1968
        0
```

www.libtoot.com.cn

Demonstratio.

28. Divisionis quotiens (Definitione 10.) indicare debet quoties divisor in dividendo contineatur; sed in quarto hujus Problematis exemplo numerus 284 exponit quoties divisor 24 contineatur in numero dividendo 6816; si enim numerus 24 ducentas octoginta quatuor vices sibi ipsi addatur, sive, quod idem est, multiplicando numerum 24 per

24 per numerum 284, restituetur numerus dividendus 6816. Ergo numerus 24 ducentas octoginta quatuor vices continetur in dividendo 6816; proindeque numerus 284 est ejusdem divisionis quotiens. Idem de aliis exemplis intelligatur.

Corollarium.

Ex dictis evidenter sequitur divisionis examen fieri multiplicando inventum quotientem per divisorem; si erratum non sit, numerus dividendus restituitur. Sic in supradicto quarto exemplo multiplicando quotientem 284 per divisorem 24, productum erit numerus dividendus 6816. Atque ita de reliquis.

www.libtool.com.cn

ELEMENTORUM ARITHMETICES
LIBER SECUNDUS.
De Numeris Fractis.

www.libtool.com.cn

DEFINITIO PRIMA.

30. Numerus ille, qui unam, vel plures partes unius, ejusdemque rei exprimit, *Numerus Fractus*, vel *Fractio* appellatur.

31. Duobus autem numeris ad quamlibet fractionem constituendam, idest ad unam, vel plures ejusdem rei partes significandas, utimur, quorum unus infra alterum ponitur interjecta lineola: ut ad exprimendam cujuslibet rei medietatem, tertiam partem, vel quartam, vel quintam, &c, scribimus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, quod sic enunciatur, dimidium, triens, quadrans, quinta pars, &c, vel una dimidia, una tertia, una quarta pars, &c. Similiter cujusvis rei duæ septimæ partes, tres quartæ, quatuor ex quinque partibus, &c, sic exprimuntur $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c, & legitur duæ septimæ partes, tres quartæ, quatuor quintæ partes, &c, vel duo divisum septem, tres divisum quatuor, quatuor divisum quinque, &c.

Definitio II.

32. In omni fractione numerus supra lineolam positus, *Numerator fractionis* appellatur, quia numerat partes, quæ ex aliquo toto diviso sumendæ sunt. Numerus vero infra lineam scriptus vocatur *fractionis Denominator*, vel *Nominator*, seu *Divisor*, quia denominat in quales, sive in quot partes illud totum intelligatur divisum.

33. Quælibet fractio indicat quotientem, qui oritur dividendo numeratorem per denominatorem ejusdem fractionis. Sic fractio $\frac{3}{4}$ exprimit quotientem ortum ex divisione numeri 3 per numerum 4. Sint exempli causa tres argenteæ libræ nostrates in quatuor æquales partes dividendæ; quotiens hujus divisionis erit $\frac{3}{4}$ unius libræ, idest quarta pars trium librarum continet tres quartas partes unius libræ: quia tres libræ constituunt sexaginta solidos, quorum quarta pars sunt quindecim solidi, & tres quartæ partes unius libræ sunt etiam quindecim solidi, ut per se patet.

34. Similiter dividendo numerum 6 per numerum 2, quotiens 3 exprimi potest per fractionem $\frac{6}{2}$; sex enim medietates tria integra constituunt. Idem intelligatur de alia qualibet divisione.

Fractio, cujus numerator æqualis est denominatori, unitatem, sive unum integrum adæquat. Sic $\frac{4}{4}$, idest quatuor partes adæquant unum integrum. Si enim libra in quatuor æquales partes dividatur, & quispiam ex iisdem partibus quatuor accipiat, evidens est eum unam integram libram habere. Similiter $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{17}{17}$, &c, significant 1.

Qua-

Quapropter cum numerator major est denominatore, fractio plus quam unum integrum significat. Sic $\frac{5}{4}$, idest quinque quartæ partes unius libræ, significant viginti quinque solidos, seu unam integram libram, & insuper unam quartam libræ partem. 35.

Cum vero numerator minor est denominatore, tunc fractio quantitatem integro minorem significat. Sic $\frac{3}{5}$ unius libræ, viginti solidos, seu unam integram libram non significant, sed tantum duodecim solidos, qui tres quintas libræ partes constituunt. 36.

www.libtool.com.cn

Si numerator, & denominator cujusvis fractionis multiplicentur, vel dividantur per eundem numerum, fractionis valor non mutatur. Sit fractio quælibet, $\frac{3}{4}$, hujus tam numerator 3, quam denominatur 4, per eundem numerum 2 multiplicentur, producta 6, & 8 novam fractionem $\frac{6}{8}$ constituent æqualem fractioni $\frac{3}{4}$; idem enim est quartas, exempli caussa, unius libræ partes accipere, ac sex octavas ejusdem libræ partes obtinere. 37.

Item sit fractio $\frac{12}{20}$, hujus numerator 12, & denominator 20, dividantur ambo per numerum 4, quotientes 3, & 5 dabunt novam fractionem $\frac{3}{5}$ ejusdem valoris ac $\frac{12}{20}$. Ut tres quintæ partes unius libræ sunt 12 solidi, & duodecim vigesimæ partes unius libræ sunt etiam 12 solidi.

Definitio III.

Numerus dicitur alterius numeri *Mensura*, cum aliquoties sumtus alterum adæquat. Sic 3 dicitur mensura numeri 12, quia 3 quater sumtus adæquat numerum 12. 38.

Definitio IV.

Communis mensura duorum, vel plurium numerorum est numerus ille, qui aliquoties sumtus illos adæquat; sive est numerus, qui illos exacte, & sine residuo dividit. Sic numerus 3 est communis mensura numerorum 12, 15, 24, &c, quia quater sumptus producit numerum 12, quinquies repetitus dat numerum 15, & octies sumtus adæquat numerum 24. Eadem ratione numerus 2 est communis mensura omnium numerorum parium. 39.

Definitio V.

Numerus primus, sive *incompositus* est ille, quem sola unitas metitur: consequenter numeri 2, 5, 7, 11, 13, 17, &c, qui nullam aliam mensuram habent præter unitatem, sunt numeri primi, seu incompositi. 40.

Definitio VI.

Numerus compositus vocatur ille, quem, præter unitatem, aliquis numerus ab ipso diversus dimetitur; hujusmodi sunt numeri 4, 6, 8, 9, 10, &c. 41.

Definitio VII.

42. Duo, vel plures numeri dicuntur *inter se primi*, vel *incompositi inter se*, cum nullam aliam mensuram communem habent, præter unitatem. Sic duo numeri 6, & 25 sunt numeri inter se primi, quia nullus numerus utrumque dimetitur. Item numeri 5, 6, 12, 17 sunt etiam inter se primi, quia nullus est numerus, qui omnes quatuor dimetiatur.

www.libtool.com.cn

Definitio VIII.

43. *Numeri inter se compositi* dicuntur illi, quos, præter unitatem, aliquis numerus communi mensura dimetitur. Numeri 9, 12, 15 sunt compositi inter se, quia numerus 3 eos omnes dimetitur.

44. Communis autem datorum numerorum mensura potest esse unus eorumdem numerorum. Numeri 4, 12, 20 sunt inter se compositi, cum numerus 4 seipsum, & alios 12, 20, dimetiatur.

Definitio IX.

45. Numerus ille, per quem duos, vel plures numeros dividendo, quotientes obtinentur inter se primi, seu incompositi, dicitur *maxima* eorumdem numerorum *communis mensura*. Numerus 4 est maxima communis mensura numerorum 20, & 28, quia dividendo numerus 20, & 28 per 4, quotientes 5, & 7 sunt numeri inter se primi (num°. 42.).

Definitio X.

46. Fractio qualibet *minimis terminis expressa* dicitur, quando ejus numerator, & denominator sunt numeri inter se primi, ut fractio $\frac{5}{7}$, item fractio $\frac{7}{12}$, &c.

Definitio XI.

47. Fractiones, quæ habent eundem denominatorem, dicuntur *fractiones ejusdem nominis*; ideoque fractiones $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, sunt fractiones ejusdem nominis.

48. *Fractiones* vero *diversi nominis* sunt illæ, quæ habent denominatores diversos; quales sunt $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$, &c.

PROBLEMA PRIMUM.

49. *Maximam communem duorum numerorum mensuram invenire.*

Resolutio.

Dividatur major numerus per minorem, & completa divisione, si nihil remanet, tunc numerus minor erit maxima quæsita mensura. Ut

Ut numerorum 7, & 21 maxima communis mensura est 7, quia dividendo 21 per 7 nihil remanet. Ideoque si dividantur 7, & 21 per 7, quotientes 1, & 3 erunt numeri inter se primi.

Si autem diviso majore per minorem aliquid remanet, tunc neglecto quotiente, notetur residuum, & numerus minor dividatur per illud residuum. Deinde, neglecto semper quotiente, dividatur primum residuum per secundum; postea secundum residuum per tertium, & sic deinceps, donec tandem divisor inveniatur, qui præcedens residuum exacte dividat sine ullo residuo; divisor hic ultimus erit maxima communis mensura quæsita.

www.libtool.com.cn

Sint numeri 203, & 667; ut inveniatur maxima communis ipsorum mensura, dividatur 667 per 203; tum neglecto quotiente 3, per primum residuum 58 dividatur 203; deinde neglecto quotiente, *per secundum residuum 29 dividatur primum* 58, & *residuum* est 0; unde concludendum est numerum 29 esse maximam quæsitam communem mensuram. Si enim dividantur 203, & 667 per 29, quotientes erunt 7, & 23 numeri inter se primi (num°. 42.). Ergo (num°. 45.) 29 est quæsita maxima communis mensura duorum numerorum 203, 667.

667 | 203
609 | 3
203 | 58
174 | 3
58 | 29
58 | 2
0

Tandem si post omnem divisionem ultimum residuum sit 1, *signum* erit datos numeros esse primos inter se. *Ut si quæratur* maxima communis mensura numerorum 17, & 58; diviso 58 per 17, neglecto quotiente, residuum est 7; per hoc residuum dividatur 17, & invenietur residuum 3; per residuum 3 dividatur 7, & neglecto semper quotiente, residuum est 1: quod significat datos numeros 17, 58, nullam habere communem mensuram præter unitatem; consequenter esse numeros inter se primos (num°. 42.). 50.

58 | 17
51 | 3
17 | 7
14 | 2
7 | 3
6 | 2
1

PROBLEMA SECUNDUM.

Fractiones ad minimos terminos reducere. 51.

Resolutio.

Primo inveniatur maxima communis mensura inter numeratorem, & denominatorem datæ fractionis per antecedens Problema; deinde per inventam mensuram dividantur numerator, & denominator, quotientes constituent quæsitam fractionem minimis terminis expressam.

Sit fractio $\frac{32}{48}$ ad minores terminos reducenda: inveniatur (n°. 49.) maxima communis mensura numerorum 32, & 48, quæ erit 16; per 16 dividantur numeri 32, & 48, quotientes 2 & 3 dabunt fra-

 ctio-

ctionem $\frac{2}{3}$ minimis terminis expressam (num°. 46.), quia numeri 2, 3, sunt inter se primi. Praeterea fractio $\frac{2}{3}$ aequalis est fractioni $\frac{32}{48}$ (num°. 37.), quia fracti $\frac{32}{48}$ numerator 32, & denominator 48 per eundem numerum 16 divisi fuerunt; ex qua divisione orta est fractio $\frac{2}{3}$. Quapropter fractio $\frac{32}{48}$ ad minimos terminos reducta exprimitur per $\frac{2}{3}$.

Eadem ratione fractiones $\frac{5}{10}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{32}{12}$, $\frac{301}{867}$ reducuntur ad minimos terminos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{21}$; & sic de reliquis.

PROBLEMA TERTIUM.

52. *Numeros fractos ad idem nomen reducere.*

Resolutio.

Si duae fuerint fractiones ad idem nomen, seu ad eundem denominatorem reducendae, multiplicentur decussatim, nempe numerator primae in denominatorem secundae, & productum erit numerator novae fractionis aequalis primae datae, postea numerator secundae ducatur in denominatorem primae fractionis, & productum erit numerator novae fractionis aequalis secundae. Tandem multiplicentur inter se denominatores datarum fractionum, & productum erit communis denominator reductarum fractionum.

Sint duae fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{7}$ ad commune nomen reducendae. Ducatur 2 in 7, & productum 14 erit numerator primae fractionis. Postea multiplicetur 4 in 3, & productum 12 erit numerator secundae. Tandem multiplicetur 3 in 7, & productum 21 erit communis denominator; adeoque fractiones reductae, erunt $\frac{14}{21}$, & $\frac{12}{21}$ ejusdem nominis, & aequales datis. Nam fractionis $\frac{2}{3}$ numerator 2 & denominator 3 multiplicati fuerunt per eundem numerum 7, unde orta est nova fractio $\frac{14}{21}$; ergo (num°. 37.) fractio haec $\frac{14}{21}$ aequalis est fractioni $\frac{2}{3}$. Eodem modo demonstratur fractionem $\frac{12}{21}$ aequalem esse fractioni $\frac{4}{7}$.

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{7}$$

$$\frac{14}{21} \qquad \frac{12}{21}$$

53. Cum vero plures sunt datae fractiones ad idem nomen reducendae, tunc unusquisque numerator multiplicetur per omnes denominatores aliarum fractionum, & productum erit numerator ejusdem fractionis reductae. Postea fiat productum omnium denominatorum, quod erit denominator communis. Ut, datis fractis $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, &c. fiat productum 70 ex 2 in 5 in 7, quod erit numerator primae fractionis. Deinde inveniatur productum 84 ex 4 in 3 in 7, & erit numerator secundae fractionis. Insuper fiat productum 90 ex 6 in 3 in 5, quod erit numerator tertiae fractionis. Tandem fiat productum 105 ex 3 in 5 in 7, & erit communis denomina-

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{6}{7}$$

$$\frac{70}{105} \qquad \frac{84}{105} \qquad \frac{90}{105}$$

minator. Quapropter novæ fractiones erunt $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ ejusdem nominis, & æquales datis. Etenim fractionis, exempli caussa, $\frac{2}{3}$ numerator 2 & denominator 3 multiplicati fuerunt per eosdem numeros 5, 7; consequenter nova fractio $\frac{70}{105}$ æqualis est fractioni $\frac{2}{3}$. Idem de reliquis intelligatur.

PROBLEMA QUARTUM.

Datis duabus, aut pluribus fractionibus, quænam ipsarum maxima sit invenire. 54.

Resolutio.

Si fractiones habent idem nomen, ea major est, quæ majorem numeratorem habet. Sic fractionum $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{9}{11}$, major est $\frac{9}{11}$, ut per se patet.

Si autem fractiones non sunt ejusdem nominis, reducantur, per antecedens Problema, ad eundem denominatorem; atque ex majori numeratore major fractio cognoscetur.

Itaque ut major ex fractionibus $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ innotescat, reducantur ad idem nomen (num. 52, 53.), fient novæ fractiones reductæ $\frac{56}{84}$, $\frac{63}{84}$, $\frac{60}{84}$, quarum maxima est fractio $\frac{63}{84}$ æqualis fractioni $\frac{3}{4}$; consequenter datarum fractionum $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, maxima est $\frac{3}{4}$.

PROBLEMA QUINTUM.

Numerum integrum in fractionem datæ denominationis reducere. 55.

Resolutio.

Datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, & producto subscribatur datus denominator. Ut si integer 2 reducendus sit in octavas, idest in fractum, cujus denominator sit 8, multiplicetur 2 in 8, & producto 16 subscribatur datus denominator 8, erit $\frac{16}{8}$ quæsita fractio æqualis integro numero 2; nimirum duo integra constituunt sexdecim octavas partes.

Corollarium.

56. Quilibet numerus per unitatem multiplicatus non mutatur; ideoque si cuilibet numero subscribatur unitas, fiet fractio, vel quasi fractio eidem numero æqualis. Sic $\frac{8}{1}$ idem valet, ac 8; & sic de cæteris.

PROBLEMA SEXTUM.

Fractionem ad integra revocare. 57.

Resolutio.

Cum fractionis numerator major est, vel æqualis denominatori, fractio ad integra reducitur dividendo numeratorem per denominatorem.

rem. Sic fractionis $\frac{15}{5}$ dividendo numeratorem 15 per denominatorem 5, inveniuntur integra 3.

Si autem diviso numeratore per denominatorem aliquid remanet, tunc residuum ponatur supra lineolam, infra quam scribatur denominator. Fractio $\frac{27}{4}$ dat integra $6\frac{3}{4}$, idest sex integra, una cum tribus quartis unius integri partibus: exempli caussa viginti septem quartæ partes libræ nostratis constituunt sex integras libras, & solidos quindecim, qui tres quartas partes libræ efficiunt.

www.libtool.com.cn

PROBLEMA SEPTIMUM.

58. *Fractiones addere.*

Resolutio.

Cum fractiones addendæ habent eundem denominatorem, tunc simul addantur omnes numeratores, eorumque aggregato subscribatur communis denominator. Sic fractionum $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$, summa erit $\frac{6}{7}$. Similiter fractionum, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{5}{13}$, summa erit $\frac{12}{13}$.

Cum vero fractiones addendæ non habent idem nomen, tunc reducantur prius ad idem nomen (52. 53.), postea simul addantur, ut ante dictum est. Sint fractiones in unam summam colligendæ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, quæ reducantur ad idem nomen (52, 53.), habebimus $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$. In unum colligantur numeratores 70, 84, 90, invenietur quæsita summa $\frac{244}{105}$, quæ (57.) continet integra 2 cum fractione $\frac{34}{105}$.

59. Si autem integri cum fractis addendi sint, reductis fractis ad idem nomen, separatim colligantur numeri integri, & separatim fracti, quorum summa, si aliquod integrum constituat, integrorum summæ adjiciatur. Ut numerorum $8\frac{2}{3}$, $12\frac{4}{5}$, $9\frac{6}{7}$, idest (reductis fractis ad idem nomen), numerorum $8\frac{70}{105}$, $12\frac{84}{105}$, $9\frac{90}{105}$, summa erit $29\frac{244}{105}$, sive $31\frac{34}{105}$, quia fractorum summa $\frac{244}{105}$ continet duo integra, una cum fracto $\frac{34}{105}$, ut ex antecedenti numero evidens est.

8	$\frac{2}{3}$	8	$\frac{70}{105}$
12	$\frac{4}{5}$	12	$\frac{84}{105}$
9	$\frac{6}{7}$	9	$\frac{90}{105}$
31	$\frac{34}{105}$	29	$\frac{244}{105}$

PROBLEMA OCTAVUM.

60. *Numeros fractos subtrahere.*

Resolutio.

Si numeri fracti eundem habent denominatorem, subtrahatur numerator minoris ex numeratore majoris fracti, & residuo communis denominator subscribatur. Ut ex fracto $\frac{18}{25}$ subtrahendo fractionem $\frac{12}{25}$, residuum erit $\frac{6}{25}$. Si autem datæ fractiones non sunt ejusdem nominis, reducantur (52, 53.), & reliqua fiant ut antea.

Cum

Cum vero fractio subtrahenda est ab integro, tum numerus integer reducatur in fractum ejusdem nominis cum data fractione (55.), postea operetur ut antea. Sic ex integro 8 subducendo fractum $\frac{1}{3}$, reduco integrum 8 in tertias, & fit $\frac{24}{3}$ (55.), deinde subtrahendo $\frac{1}{3}$ ex $\frac{24}{3}$, residuum est $\frac{23}{3}$, sive ad integra reducendo, est $7\frac{2}{3}$ (57.). 61.

Si integer cum fracto $4\frac{2}{3}$ subtrahendus sit ab integro cum fracto $7\frac{3}{4}$; reducatur 4 in tertias (55.), fiet $\frac{12}{3}$: unde $4\frac{2}{3}$ exprimetur per $\frac{14}{3}$. Similiter numerus 7 reducatur in quartas, fiet $\frac{28}{4}$; ideoque $7\frac{3}{4}$ exprimetur per $\frac{31}{4}$. Postea duae fractiones $\frac{14}{3}$, & $\frac{31}{4}$ reducantur ad idem nomen (52.), habebitur $\frac{93}{12}$, & $\frac{56}{12}$; atque subtracto 56 ex 93, residuum quaesitum erit $\frac{37}{12}$, idest $3\frac{1}{12}$ ad integra reducendo (57.). Itaque subtrahendo $4\frac{2}{3}$ ex $7\frac{3}{4}$, residuum est $3\frac{1}{12}$. 62.

PROBLEMA NONUM.

Numeros fractos multiplicare. 63.

Resolutio.

Fractorum multiplicatio obtinetur multiplicando numeratores inter se, & inter se etiam denominatores. Sint fractiones inter se multiplicandae $\frac{5}{7}$, & $\frac{3}{4}$, multiplicentur 5 in 3, & 7 in 4, productum erit $\frac{15}{28}$. Item multiplicando $\frac{3}{11}$ per $\frac{1}{2}$, productum erit $\frac{3}{22}$. Similiter fractionum $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, productum erit $\frac{40}{189}$.

Si fractus per integrum, aut vicissim integer per fractum multiplicandus sit, tunc integro subscribatur unitas (56.), ut fiat quasi fractio, deinde operetur ut supra; sive, quod idem est, multiplicetur integer numerus per numeratorem fractionis, & producto subscribatur denominator datae fractionis. Sit numerus integer 8 multiplicandus per fractum $\frac{3}{4}$. Integro 8 supponatur unitas, fiet $\frac{8}{1}$. Deinde multiplicetur $\frac{8}{1}$ per $\frac{3}{4}$, productum erit $\frac{24}{4}$, idest integra 6 (57.). Similiter multiplicando $\frac{3}{11}$ per 7, idest per $\frac{7}{1}$, productum habebitur $\frac{21}{11}$. 64.

Si autem integer numerus cum fracto per fractum multiplicandus sit, reduc integrum in fractum ejusdem nominis cum fractione sibi adhaerente (55.), cui addatur, & reliqua fiant ut supra. Multiplicandus sit $3\frac{5}{6}$ per $\frac{2}{7}$; reducatur integer 3 in sextas (55.), fiet fractio $\frac{18}{6}$, quae addatur cum $\frac{5}{6}$, atque summa $\frac{23}{6}$ multiplicetur per $\frac{2}{7}$, habebitur productum $\frac{46}{42}$, quod (57.) unum integrum constituit, & $\frac{4}{42}$, sive $\frac{2}{21}$ (51.). 65.

Eadem ratione multiplicando $8\frac{2}{3}$ per 4, sive $\frac{26}{3}$ per $\frac{4}{1}$, obtinetur productum $\frac{104}{3}$, idest (57.) $34\frac{2}{3}$.

Tandem si integer cum fracto per integrum cum fracto multiplicandus sit, reducatur (55.) uterque integrorum ad fractum ejusdem denominationis cum fractione sibi adjuncta. Ut ad multiplicandum $4\frac{2}{3}$ per $6\frac{3}{5}$, reduco integrum 4 in tertias, quas adjungo cum $\frac{2}{3}$, & 6 in quintas, quas addo cum $\frac{3}{5}$; deinde inter se multiplico inventas fractiones $\frac{14}{3}$, & $\frac{33}{5}$, productum erit $\frac{462}{15}$, quod ad integra, & ad minimos terminos reductum (57, 51.), dat $30\frac{4}{5}$. 66.

PRO-

www.1bitool.com.cn

PROBLEMA DECIMUM.

67. *Numeros fractos dividere.*

Resolutio.

Si fractio per aliam fractionem dividenda est, decussatim, seu in crucem duc numeratorem fractionis dividendæ in denominatorem fracti divisoris, & productum pone pro numeratore quotientis; postea multiplica denominatorem fracti dividendi in numeratorem fracti divisoris, & productum erit denominator quotientis. Sit fractio $\frac{8}{19}$ dividenda per fractionem $\frac{3}{7}$; multiplicetur 8 in 7, & productum 56 ponatur pro numeratore quotientis; deinde ducatur 19 in 3, & productum 57 erit denominator quotientis; ideoque $\frac{56}{57}$ est quæsitus quotiens. Item dividendo fractionem $\frac{3}{6}$ per $\frac{4}{5}$, quotiens erit $\frac{15}{24}$; atque ita de reliquis.

68. Cum vero numerator fracti divisoris exacte dividit numeratorem fractionis dividendæ, & denominator denominatorem, fractus, qui inde oritur, est quæsitus quotiens. Sic dividendo $\frac{8}{15}$ per $\frac{2}{3}$, quia numerator 2 divisoris exacte continetur in numeratorem 8 fracti dividendi, & denominator 3 etiam exacte continetur in denominatore 15; ideoque dividantur 8 per 2, & 15 per 3, & quotientes 4, & 5 constituent fractionem $\frac{4}{5}$, quæ erit quæsitus quotiens. Si autem divisio fiat, ut in antecedenti numero, tunc invenitur quotiens $\frac{24}{30}$, qui ad minimos terminos reductus (51.), dat etiam $\frac{4}{5}$.

69. Quando numerus fractus per integrum, vel integer per fractum dividendus est, tunc integro subscribe unitatem, ut fiat quasi fractio (56.), & operare ut antea. Sic dividendo fractum $\frac{5}{7}$ per integrum 6, sive per $\frac{6}{1}$; ducto 5 in 1, & 7 in 6, invenitur quotiens $\frac{5}{42}$. Quapropter fractus per integrum dividitur multiplicando denominatorem fractionis per datum integrum numerum. Similiter si integer 7, sive $\frac{7}{1}$ dividendus sit per $\frac{2}{3}$; multiplicatis 7 in 3, & 1 in 2, quotiens erit $\frac{21}{2}$, seu 10 $\frac{1}{2}$ si fractio ad integra reducatur (57.); ideoque numerus 7 decies cum dimidio continet fractum $\frac{2}{3}$. Item dividendo 12, seu $\frac{12}{1}$ per $\frac{3}{4}$, quotiens erit $\frac{48}{3}$, idest 16. (57.). Ergo ut integrum numerum per fractum dividas, multiplica integrum per denominatorem fractionis, & producto subscribe numeratorem datæ fractionis.

70. Si integer cum fracto dividendus sit per fractum, vel per integrum cum fracto; tunc reducatur integer in fractum ejusdem nominis cum fractione sibi adhærente, cum qua in unam summam colligatur, & reliqua fiant ut supra. Sit 12 $\frac{1}{4}$ dividendus per $\frac{5}{6}$; reducatur 12 in quartas (55.), fiet $\frac{48}{4}$, qui una cum $\frac{1}{4}$ producit $\frac{49}{4}$. Dividatur $\frac{49}{4}$ per $\frac{5}{6}$, erit $\frac{294}{20}$ quæsitus quotiens. Item dividendo 8 $\frac{1}{3}$, sive $\frac{25}{3}$ per 5, quotus erit $\frac{25}{15}$. Similiter ut dividatur 9 $\frac{3}{5}$ per 7 $\frac{1}{4}$, reducendus est 9 in quintas, & 7 in quartas partes (55.), & invenietur $\frac{48}{5}$ fractus dividendus, & $\frac{29}{4}$ fractus divisor; consequenter multiplicando 48 per 4, & 5 in 29, erit $\frac{192}{145}$ quotiens quæsitus.

EL E-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ

LIBER PRIMUS.

De Calculo integrarum Quantitatum.

www.libtool.com.cn

1. IN Arithmetica Speciosa, seu Litterali, quæ vulgo Arabica voce *Algebra* dicitur, & a Græcis Analysis Speciosa appellatur, Alphabeti litteris utimur ad quamlibet quantitatem designandam; quilibet enim numerus, sive integer sit, sive fractus, appellari potest numerus a, vel numerus b, vel numerus m, &c. Item quodlibet corpus nominari potest corpus a, vel corpus b, vel corpus x, &c. Idem de alia qualibet quantitate intelligatur.

2. Cum vero numerus aliquis, vel linea, vel corpus appellatur a, ejus duplum exprimetur per 2a, triplum per 3a, quadruplum per 4a, &c. Præterea ejusdem quantitatis dimidium, tertia pars, vel quarta, hoc modo indicabitur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, vel $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{4}$. Idem de reliquis quantitatibus intelligatur.

3. Prioribus Alphabeti litteris a, b, c, d, &c. utimur ad exprimendas quantitates cognitas, seu datas. Postremis vero x, y, z, u incognitæ, & quæsitæ quantitates indicantur.

Definitio I.

4. Numeri litteris præfixi dicuntur *Coeficientes* earundem litterarum. Sic quantitatum 4a, 3m, 5x, numeri 4, 3, 5 coeficientes appellantur.

5. Litteræ, seu quantitates, quæ nullum habent coeficientem, semper intelligantur præfixam habere unitatem. Ut a idem significat ac 1a, m idem valet ac 1m, abx idem est ac 1abx.

Definitio II.

6. Quantitates dividuntur in *positivas*, seu *affirmativas*; & *negativas*, seu *privativas*. Ut argentum, quod possidemus, dicitur quantitas positiva; sed æs alienum, negativa quantitas appellatur.

Algebristæ quantitates positivas nihilo majores esse dicunt, & negativas nihilo minores; nam o, seu nihilum quantitatibus additum, eas nec auget, nec minuit; unde quidquid alicujus quantitatis valorem augere potest, dicendum est nihilo majus; quod vero quantitatem minuit, nihilo minus. Quoniam vero quantitas affirmativa alteri addita ejus valorem auget, & vicissim negativa minuit, iccirco quantitas positiva erit nihilo major, & negativa nihilo minor.

Cæterum quantitates positivæ, vel negativæ dicuntur in ordine ad alias, quas augent, vel minuunt, non autem in se spectatæ; omnis enim quantitas in se spectata positiva est, seu nihilo major.

7. Quantitates positivæ indicantur hoc signo $+$, quod dicitur *plus*; quantitates vero negativæ hoc signo $-$, idest *minus* afficiuntur; hoc vero discrimine, ut quantitates illæ, quæ nullum signum præfixum habent, semper intelligantur habere signum $+$, proindeque positivas esse; quantitatibus autem negativis semper præfigatur signum $-$. Ut 8 idem significat ac $+ 8$, a idem valet ac $+ a$, &c. Cum vero numerus 8 quantitatem negativam significat, perpetuo scribatur $- 8$. Item si quantitates 7, 5, a, m fuerint negativæ, hac ratione scribendæ erunt $- 7$, $- 5$, $- a$, $- m$.

8. Ad multiplicandas inter se quantitates aliquando utimur hoc signo $\times$, quod multiplicationis signum dicitur. Ut si quantitas a multiplicanda sit per quantitatem x, productum exprimi potest scribendo $a \times x$; quod legitur a multiplicatum x. Similiter 3×4 idem significat ac 12, productum nempe ex 3 in 4.

9. Signo $=$, idest æquale, utimur ad comparandas duas æquales quantitates, & appellatur signum æqualitatis, seu æquationis. Comparatio enim duarum quantitatum æqualium, seu ejusdem valoris, vocatur *æquatio*. Si exempli caussa duæ quantitates a & m significent duas æquales quantitates, ad exprimendam hanc æqualitatem inter a, & m, scribatur $a = m$, idest a æqualis m. Item $8 + 4 = 12$ significat summam numerorum 8, & 4 æqualem esse numero 12. Similiter $x = 7$ significat valorem quantitatis x esse 7.

Quantitas posita ante signum $=$ dicitur prima pars æquationis, & quantitas, quæ scribitur post signum, secunda æquationis pars appellatur.

Definitio III.

10. Quantitates, quæ signis $+$, & $-$ non sunt connexæ, dicuntur *simplices*, *monomiæ*, vel *incomplexæ*, ut a, $-b$, acx, $\frac{am}{c}$, &c.

11. Contra vero quantitates signis $+$, & $-$ simul connexæ, appellantur *compositæ*, *polynomiæ*, vel *complexæ*, ut $a + c$, $a - m$, $a + b - x$, &c. Atque quantitates illæ, quæ duobus terminis constant, *binomiæ* appellantur, ut $a + b$, $c - m$, &c; si tribus terminis, *trinomiæ*, si quatuor terminis, *quadrinomiæ* vocantur: & sic deinceps.

12. Primo quantitatum compositarum termino nullum præfigitur signum, quando est quantitas positiva, sed præfixum intelligitur signum $+$. Sic $a - b$ idem significat ac $+ a - b$; $5 + 3$ idem est ac $+ 5 + 3$.

PRO-

www.libtool.com.cn

PROBLEMA PRIMUM.

Algebraicas quantitates in unam summam colligere.

Resolutio.

Additio quantitatum Alphabeti litteris expressarum obtinetur scribendo datas quantitates unam deinceps post aliam cum suis signis $+$, & $-$, quæ præfixa habent, vel habere intelliguntur (7.). Unde simplicium quantitatum a, b, c, $-x$ summa erit $a+b+c-x$. 13.

www.libtool.com.cn

Item quantitatum $4a$, cx, $\frac{b}{m}$, $5am$ summa erit $4a+cx+\frac{b}{m}+5am$.

Similiter compositarum quantitatum $a+b+x$, $3c-m$, $2x+2ac-z$ summa erit $a+b+x+3c-m+2x+2ac-z$

PROBLEMA SECUNDUM.

Compositas quantitates ad simpliciores expressiones reducere.

Resolutio.

Primo cum in eadem summa eadem quantitas bis scripta invenitur, semel signo $+$, & semel signo $-$ affecta, omnino deletur eadem quantitas. 14.

Sic $+a-a$, $+5-5$, $+7am-7am$ nihil significant; signa enim $+$, & $-$ contraria sunt, & quod a signo $+$ affirmatur, idem a signo $-$ negatur. Unde summa $4a-3b+4c+x-4c$ reducitur ad simpliciorem expressionem
$4a-3b+x$, quia termini
$+4c$, & $-4c$ se invicem destruunt.

Item quantitas composita
$4a-3b+cx+3b+2c-cx$
reducitur ad simpliciorem
$4a+2c$, quia termini
$-3b+3b$, & $+cx-cx$ se se mutuo destruunt.

Secundo si in eadem summa inveniantur quantitates eisdem litteris expressæ, & eodem signo $+$, vel $-$ affectæ, tunc in unam summam colligantur ipsarum coeficientes, & summæ præponatur idem signum, & post coefficientium summam eadem quantitas semel scribatur. 15.

Sic pro summa
$5a+4a$ scribatur $9a$.

Item quantitas
$2a+b+3a+4b+7a$ ad simpliciores terminos reducta exprimitur per

12 a + 5 b.

Similiter quantitas

4 a — 3 b + a — 4 b reducitur ad simpliciorem expressionem

5 a — 7 b; atque ita de reliquis.

16. Tertio, cum autem quantitates iisdem litteris expressæ signa habent diversa, & inæquales coeficientes, tunc minor coeficiens a majori subducatur, & residuo præponatur signum majoris.

Quapropter summa

www.libtool.com.cn

12 a b + 4 b — 5 a b — 9 b, subducto coeficiente 5 ex 12, & 4 ex 9, atque posito signo + ante primum residuum 7, & signo — ante residuum 5, eadem summa brevius exprimetur per

7 a b — 5 b.

Eadem ratione quantitas

4 a + 3 c — 4 b — a + 8 b reducitur ad

3 a + 3 c + 4 b; & sic de cæteris.

PROBLEMA TERTIUM.

Algebraicas quantitates subtrahere.

Resolutio.

17. Scribatur in primis quantitas major (ea nempe, a qua altera subtrahenda est) cum omnibus suis signis +, & —, postea ei adjungatur quantitas subtrahenda, sed mutatis omnibus ejus signis, idest + in —, & — in +, atque habebitur quæsitum residuum. Ut subtrahendo c ex a, idest + c ex + a, residuum erit + a — c, idest a — c.

Item subtrahendo — m ex a, residuum erit a + m.

Similiter ex quantitate

3 a + 2 b — c subtrahendo quantitatem

m — 3 x + z, differentia, seu residuum erit

3 a + 2 b — c — m + 3 x — z.

Demonstratio.

18. In omni subtractione differentia, seu residuum, est id, quod deficit quantitati subducendæ, ut adæquet quantitatem minuendam; adeoque summa residui cum quantitate subducta restituere debet minuendam quantitatem; atqui subtractionem perficiendo eo modo, quo dictum est in numero antecedenti, si in unum colligantur residuum, & quantitas subtracta, semper restituetur quantitas minuenda: ergo subtractio quantitatum fieri debet addendo quantitati minuendæ quantitatem subtrahendam, variatis omnibus ejus signis.

Sic in antecedenti ultima subtractione, si residuum inventum

3 a

$3a + 2b - c - m + 3x - z$ addatur quantitati subtractæ
$m - 3x + z$,
fiet summa
$3a + 2b - c - m + 3x - z + m - 3x + z$, quæ ad simpliciores terminos reducta (14.), restituit quantitatem minuendam
$3a + 2b - c$;
& sic de cæteris.

www.libtool.com.cn

PROBLEMA QUARTUM.

Algebraicas quantitates multiplicare.

Resolutio I.

Primo cum quantitates omnes (6.) sint vel positivæ, vel negativæ, producta, quæ ex ipsarum quantitatum multiplicatione oriuntur, etiam positiva, vel negativa erunt; consequenter multiplicanda in primis sunt signa datis quantitatibus præfixa, ut inveniatur signum producto quæsito præponendum: quod sequentibus regulis facillime obtinetur. 19.

Regula I.

Eadem signa inter se multiplicata semper dant + in producto; nimirum cum multiplicatur + in +, vel — in —, semper in producto ponatur +. Nam multiplicare + in + est ponere positivum, ergo est affirmare. Multiplicare — in — est negare quantitatem negativam; ergo idem est ac eandem ponere, seu affirmare: duæ enim negationes affirmant. 20.

Regula II.

Signa contraria inter se multiplicata dant productum negativum; hoc est cum multiplicatur + in —, vel — in +, productum semper erit —. 21.

Etenim multiplicare + in — est ponere negativum; sed negativum ponere, seu affirmare, idem est ac negare positivum; ergo multiplicando quantitatem positivam in quantitatem negativam, productum erit negativum.

Multiplicare — in + est negare positivum; ergo idem est ac negativum ponere; consequenter quantitas negativa in positivam multiplicata dat productum negativum.

Secundo facta signorum multiplicatione juxta præcedentes regulas, si litterales quantitates præfixos habent numeros coeficientes (4.), tunc multiplicentur inter se iidem numeri coeficientes, ut in vulgari Arithmetica. 22.

Tertio tandem quantitatum litteralium multiplicatio fit per simplicem 23.

$12a + 5b$.

Similiter quantitas

$4a - 3b + a - 4b$ reducitur ad simpliciorem expressionem

$5a - 7b$; atque ita de reliquis.

16. Tertio, cum autem quantitates iisdem litteris expressæ signa habent diversa, & inæquales coeficientes, tunc minor coeficiens a majori subducatur, & residuo præponatur signum majoris.

Quapropter summa

$12ab + 4b - 5ab - 9b$, subducto coeficiente 5 ex 12, & 4 ex 9, atque posito signo + ante primum residuum 7, & signo − ante residuum 5, eadem summa brevius exprimetur per

$7ab - 5b$.

Eadem ratione quantitas

$4a + 3c - 4b - a + 8b$ reducitur ad

$3a + 3c + 4b$; & sic de cæteris.

PROBLEMA TERTIUM.

Algebraicas quantitates subtrahere.

Resolutio.

17. Scribatur in primis quantitas major (ea nempe, a qua altera subtrahenda est) cum omnibus suis signis +, & −, postea ei adjungatur quantitas subtrahenda, sed mutatis omnibus ejus signis, idest + in −, & − in +, atque habebitur quæsitum residuum. Ut subtrahendo c ex a, idest + c ex + a, residuum erit + a − c idest $a - c$.

Item subtrahendo − m ex a,

residuum erit $a + m$.

Similiter ex quantitate

$3a + 2b - c$ subtrahendo quantitatem

$m - 3x + z$, differentia, seu residuum erit

$3a + 2b - c - m + 3x - z$.

Demonstratio.

18. In omni subtractione differentia, seu residuum, est id, quod deficit quantitati subducendæ, ut adæquet quantitatem minuendam; adeoque summa residui cum quantitate subducta restituere debet minuendam quantitatem; atqui subtractionem perficiendo eo modo, quo dictum est in numero antecedenti, si in unum colligantur residuum, & quantitas subtracta, semper restituetur quantitas minuenda: ergo subtractio quantitatum fieri debet addendo quantitati minuendæ quantitatem subtrahendam, variatis omnibus ejus signis.

Sic in antecedenti ultima subtractione, si residuum inventum

$3a + 2b - c - m + 3x - z$ addatur quantitati subtractæ
$m - 3x + z$,
fiet summa
$3a + 2b - c - m + 3x - z + m - 3x + z$, quæ ad simpliciores terminos reducta (14.), restituit quantitatem minuendam
$3a + 2b - c$;
& sic de cæteris.

PROBLEMA QUARTUM.

Algebraicas quantitates multiplicare.

Resolutio I.

Primo *cum quantitates omnes (6.) sint vel positivæ, vel negativæ*, producta, quæ ex ipsarum quantitatum multiplicatione oriuntur, etiam positiva, vel negativa erunt; consequenter multiplicanda in primis sunt signa datis quantitatibus præfixa, ut inveniatur signum producto quæsito præponendum: quod sequentibus regulis facillime obtinetur. 19.

Regula I.

Eadem signa inter se multiplicata semper dant $+$ in producto; nimirum cum multiplicatur $+$ in $+$, vel $-$ in $-$, semper in producto ponatur $+$. Nam multiplicare $+$ in $+$ est ponere positivum, ergo est affirmare. Multiplicare $-$ in $-$ est negare quantitatem negativam; ergo idem est ac eandem ponere, seu affirmare: duæ enim negationes affirmant. 20.

Regula II.

Signa contraria inter se multiplicata dant productum negativum; hoc est cum multiplicatur $+$ in $-$, vel $-$ in $+$, productum semper erit $-$. 21.

Etenim multiplicare $+$ in $-$ est ponere negativum; sed negativum ponere, seu affirmare, idem est ac negare positivum; ergo multiplicando quantitatem positivam in quantitatem negativam, productum erit negativum.

Multiplicare $-$ in $+$ est negare positivum; ergo idem est ac negativum ponere; consequenter quantitas negativa in positivam multiplicata dat productum negativum.

Secundo facta signorum multiplicatione juxta præcedentes regulas, si litterales quantitates præfixos habent numeros coeficientes (4.), tunc multiplicentur inter se iidem numeri coeficientes, ut in vulgari Arithmetica. 22.

Tertio tandem quantitatum litteralium multiplicatio fit per simplicem 23.

cem litterarum conjunctionem, nullo interposito signo, vel multiplicationis tantum signo × interposito.

24. Quapropter multiplicando a per m, seu (5, 7.) + 1a per + 1m, productum erit + 1am, sive am, quod etiam hac ratione indicatur a × m.

Item multiplicando am per c, productum erit amc, vel acm; nihil enim refert, quo ordine scribantur litteræ.

Similiter abcmx, vel a × b × c × m × x, vel abc × mx, &c; significat productum ex a in b, in c, in m, in x.

Eadem ratione multiplicando — 3a per 5b, idest per + 5b, productum erit — 15ab; nam — in + dat — (21.), 3 in 5 producit 15 (22.), & a in b dat ab (23.).

Eodem modo — 4c in — 3m producit + 12cm.

Item multiplicando cm, seu + 1cm per — 7mx, productum erit — 7cmmx.

25. Ponamus quantitatem a significare numerum 6; & quantitatem b exprimere numerum 4, & quantitatem c numerum 2; ponamus nempe a = 6, b = 4, c = 2; tunc productum ab significabit 6 × 4, idest 24, & productum abc, seu ab × c indicabit numerum 6 × 4 × 2, sive 24 × 2, idest 48; quantitas vero 5abc significabit numerum 5 × 48, scilicet 240.

Resolutio II.

26. Si quantitas complexa (12.) multiplicanda sit per quantitatem simplicem (10.); tunc scribatur simplex quantitas sub primo compositæ quantitatis termino, & ducta inferius linea, multiplicetur simplex quantitas in singulos terminos quantitatis compositæ, a sinistra incipiendo, & versus dexteram progrediendo; producta vero peculiaria infra lineam ponantur cum suis signis +, & —, diligenter observando regulas omnes in præcedentibus numeris 20, 21, 22, 23, &c. traditas.

Sit quantitas a + 2b — c multiplicanda per m. Posita m sub primo termino a, & subducta lineola, multiplico m in a, & productum am infra lineam pono; postea multiplico m in + 2b, & productum + 2bm primo producto am adjungo; tandem multiplico m in — c, & productum — cm scribo tertio loco infra lineam; adeoque productum ex a + 2b — c in m erit am + 2bm — cm.

Similiter multiplicando 3a — 4c + m per 3c, oritur productum 9ac — 12cc + 3cm.

Resolutio III.

27. Cum autem complexa quantitas per aliam compositam quantitatem multiplicanda est, tum alia infra aliam scribantur datæ quantitates, & in-

& inferius ducta linea, singuli termini inferioris quantitatis multiplicentur in singulos terminos alterius quantitatis, & singula peculiaria producta ponantur infra lineam aliud deinceps post aliud cum suis signis +, & —, & habebitur productum quæsitum.

Multiplicanda sit quantitas $a + b$ per $c + x$; posita quantitate $c + x$ infra quantitatem $a + b$, & subducta linea, multiplico in primis $a + b$ per c, & pono productum (26.) $ac + bc$ infra lineam. Postea multiplico eandem quantitatem $a + b$ per x, & addo productum $+ ax + bx$ producto jam invento $ac + bc$; ergo productum, quod oritur multiplicando $a + b$ per $c + x$ erit $ac + bc + ax + bx$.

Eadem ratione multiplicando

$3a + 2b - cx$ per

$4a - c$, invenietur productum

$12aa + 8ab - 4acx - 3ac - 2bc + ccx$.

Item multiplicando

$am - 3c + 4$ per

$b - 4a + 2$, obtinetur productum

$abm - 3bc + 4b - 4aam + 12ac - 16a + 2am - bc + 8$.

Scholion I.

28. *Compositarum* quantitatum multiplicatio aliquando etiam obtinetur per *signum multiplicationis*, ducta supra multiplicatores compositos linea.

Sic $\overline{a + c - x} \times \overline{b - m}$

indicat productum ex quantitate

$a + c - x$ in quantitatem $b - m$.

Item $\overline{4a + b - am} \times c$

significat productum

$4ac + bc - acm$,

quod oritur multiplicando

$4a + b - am$ per c.

Scholium II.

29. Præterea cum molestum sit eandem litteram pluries iterare, proindeque, sicuti in Additione (15.) summa $a + a$ brevius exprimitur per $2a$, & summa $b + b + b$ per $3b$, &c; ita in quantitatum multiplicatione productum aa designatur per a^2, productum aaa per a^3. Similiter b^4 significat productum ex b in b in b in b, atque ita de reliquis.

30. Hi numeri ad dexteram, & paullo supra litteras positi dicuntur *Indices*, sive *Exponentes* earundem quantitatum, quia indicant producta ex eisdem quantitatibus per semetipsas semel, vel bis, vel pluries multiplicatis.

31. Quantitates, quæ nullum habent exponentem, semper intelligantur

tur

tur habere unitatem. Sic a significat a^1, m idem valet ac m^1; &c.

32. Quando quantitates inter se multiplicandæ iisdem litteris exprimuntur, tunc simul addantur exponentes, & habebitur earundem quantitatum productum. Sit quantitas a^3 multiplicanda per a^2, productum erit a^5.

Demonstratio.

Nam a^3 significat productum aaa (13.), & a^2 significat aa; sed quantitas aaa multiplicata per aa dat productum $aaaaa$, quod (29.) brevius exprimitur per a^5; Ergo multiplicando a^3 per a^2, productum erit a^5: consequenter summa exponentium indicat productum quantitatum, quæ iisdem litteris exprimuntur.

Itaque multiplicando b^4 per b^3, productum erit b^7; & multiplicando a, seu a^1 (31.) per a^7, productum erit a^8.

Item multiplicando $a^3 b^5$ per $a^4 b^3$, productum erit $a^7 b^8$.

Similiter quantitas $4ab^8x$ multiplicata per $3a^4b^3m$, dat productum $12a^5b^{11}mx$.

Quapropter cum quantitates inter se multiplicandæ jam sint producta plurium quantitatum, tunc tantummodo inter se addantur exponentes quantitatum iisdem litteris expressarum.

Sic multiplicando a^4c^2 & a^2bx^3 per ac^4, productum erit $a^7bc^6x^3$; atque ita de reliquis.

33. Hic sedulo notetur magnum interesse discrimen inter quantitatem habentem quemlibet numerum coeficientem, & inter eandem quantitatem quæ eundem numerum pro exponente habeat. Sic multum inter se differunt $2a$, & a^2, $3a$, & a^3, &c: etenim ponamus quantitatem a significare numerum 5, nimirum fiat $a = 5$, tunc erunt $2a$, seu $a + a = 10$, $3a = 15$, $4a = 20$ (n°. 2.); sed a^2, sive $a \times a$ erit $= 5 \times 5 = 25$; $a^3 = a \times a \times a = 5 \times 5 \times 5 = 125$, & $a^4 = 625$.

Item si fuerit $m = 10$, erit $3m = m + m + m = 10 + 10 + 10 = 30$. Sed $m^3 = m \times m \times m$, erit $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$; & sic de cæteris.

PROBLEMA QUINTUM.

Algebraicas quantitates dividere.

Resolutio I.

34. Primo in quantitatum divisione, omnino ut in multiplicatione (20, 21.), eadem signa ponunt +, & diversa —; idest si dividatur + per +, aut — per —, semper quotienti præfigatur signum +; at dividendo + per —, vel — per +, semper quotienti signum — præponatur.

35. Secundo coeficientes, si adsint, separatim dividantur juxta regulas Arithmeticæ superius traditas.

Per-

Tertio deleantur ex dividendo litteræ illæ, quæ continentur in divisore, & habebitur quæsitus quotiens. Ut dividendo ab per a, quotiens erit b, nam quotiens b in divisorem a multiplicatus, restituit dividendam quantitatem ab. 36.

Eadem ratione dividendo $aacx$ per $-ac$, quotiens erit $-ax$, quia $-ac \times -ax$ restituit dividendam quantitatem $aacx$.

Item dividendo $15abm$ per $3ab$, quotiens erit $5m$, quia $5m \times 3ab$ restituit $15abm$.

www.libtool.com.cn

Cum autem omnes divisoris litteræ non continentur in dividendo, tunc quotiens exprimitur per fractionem, cujus numerator sit dividenda quantitas, & denominator sit divisor. Ut dividendo a per b, quotiens erit $\frac{a}{b}$, & dividendo c per $-m$, quotiens erit $\frac{c}{-m}$, vel $-\frac{c}{m}$. 37.

Item dividendo $6am$ per $3bx$, quotiens erit $\frac{6am}{3bx}$, vel $\frac{2am}{bx}$, vel $2\,\frac{am}{bx}$, quia coeficiens 6 dividi potest per coeficientem 3.

Similiter dividendo acx per mx, quotiens erit $\frac{acx}{mx}$.

Si eædem litteræ inveniantur tam in divisore, quam in dividendo, atque habeant numeros exponentes (30.); tunc subtrahatur exponens divisoris ab exponente dividendi, & residuum erit exponens quotientis. Sic dividendo m^5 per m^3, quotiens erit m^2. 38.

Demonstratio.

Nam si per extensum scribantur, m^5 æquivalet quantitati $mmmmm$, & m^3 adæquat mmm, & dividendo $mmmmm$ per mmm, quotiens (36.) erit $mm = m^2$; ergo etiam $\frac{m^5}{m^3}$ adæquat m^2; unde patet exponentes divisoris subtrahendos esse ab exponentibus quantitatis dividendæ, ut habeatur quæsitus quotiens.

Similiter dividendo $-a^7$ per $-a^3$, quotiens erit $+a^4$, seu a^4.

Item dividendo $8a^3b^4c$ per $4a^3b^2c$, obtinetur quotiens $2b^2$; quia $2b^2 \times 4a^3b^2c$, restituit $8a^3b^4c$.

Præterea quælibet quantitas per semetipsam divisa dat pro quotiente unitatem, idest 1; nam quælibet quantitas seipsam semel continet; adeoque dividendo a per a, quotiens erit 1; nam quotiens 1 multiplicatus per divisorem a, restituit dividendam quantitatem a. 39.

Item dividendo $5b$ per $5b$, vel $4ax$ per $4ax$, vel $7a^2b$ per $7a^2b$, quotiens semper erit 1, ut per se patet.

Corollarium.

Hinc sequitur, quantitatem habentem pro exponente cifram 0, æqualem esse unitati. Sic a^0 significat 1; nam si dividatur, exempli caussa, quantitas a^3 per quantitatem a^3, juxta regulam traditam n. 38, subtrahendus est exponens 3 divisoris a^3 ab exponente 3 dividendi a^3, atque residuum erit 0; quod ponendum est pro expo- 40.

nente quotientis; adeoque (38.) dividendo a^1 per a^1, quotiens erit a^0: at quælibet quantitas per semetipsam divisa dat pro quotiente unitatem (39.); unde dividendo a^1 per a^1, quotiens est 1; ergo quantitas a^0 est æqualis 1.

Eadem ratione quantitates b^0, c^0, m^0 significant 1. Item a^0x^0 significat 1; quia a^0x^0 idem valet ac $a^0 \times x^0$, sive 1×1, idest 1.

Quapropter dividendo a^2b per ab, idest a^2b^1 per a^1b^1, quotiens erit ab^0, sive $a^1 \times b^0$, idest $a \times 1$, quod idem significat ac a, seu a^1.

www.libtool.com.cn

Resolutio II.

41\. Si quantitas complexa per simplicem quantitatem dividenda sit, tunc scribantur primo datæ quantitates, ut diximus in Arithmetica n. 2. Probl. 6; deinde singuli termini complexæ quantitatis dividantur per datum divisorem, ut videre est in sequentibus exemplis.

Sit quantitas dividenda

$ab + ac - ax$, & divisor sit a; posito divisore a ad sinistram quantitatis dividendæ, & ducta infra divisorem linea, primo dividatur terminus ab per a, & quotiens b scribatur infra divisorem, & erit primus quotientis terminus. Postea dividatur secundus terminus $+ ac$ per a, & quotiens $+ c$ scribatur pro secundo quotientis termino: tandem dividatur $- ax$ per a, & quotiens $- x$ erit tertius terminus quæsiti quotientis; atque erit $b + c - x$ quotiens, qui oritur dividendo quantitatem $ab + ac - ax$ per a. Nam multiplicando quotientem $b + c - x$ per divisorem a, restituitur divisa quantitas $ab + ac - ax$.

Eodem modo dividendo

$8ab - 12am + 4a$ per $4a$, invenitur quotiens

$2b - 3m + 1$.

Item dividendo

$6ac - 9abc + 12acx - 3ac$ per $3ac$, quotiens erit

$2 - 3b + 4x - 1$.

Pari ratione si dividatur

$3ab - bc - 3b + bm$ per $-b$,

invenietur quotiens $-3a + c + 3 - m$.

42\. Si quantitas dividenda terminos habeat, qui per datum divisorem dividi nequeant, tunc eorundem terminorum divisio fiat per modum fractionis; ut dividendo

$ac - cm + ab - x$ per c,

quotiens erit $a - m + \frac{ab}{c} - \frac{x}{c}$,

vel $a - m + \frac{ab - x}{c}$.

Similiter dividendo

$a + bc - x$ per m,

quotiens exprimetur per fractionem $\frac{a + bc - x}{m}$.

Re-

Resolutio III.

Cum vero quantitas complexa per aliam compositam quantitatem dividenda est, tunc ad dexteram quantitatis dividendæ, interposita linea, scribatur divisor, & sub eodem divisore ducatur alia linea, & operatio eodem modo peragatur, ac in divisione numerorum. Exempla rem declarabunt. 43.

Sit quantitas dividenda
$ab + am - ax$, & divisor
$b + m - x$

Primo dividatur terminus ab per terminum b divisoris, & quotiens a ponatur infra lineam sub divisore; postea multiplicetur inventus quotiens a in totum divisorem $b + m - x$, & productum $ab + am - ax$ subtrahatur ex quantitate dividenda, scribendo $- ab - am + ax$ infra, vel post quantitatem dividendam $ab + am - ax$, & deletis terminis æqualibus a signis contrariis affectis, residuum erit 0; proindeque a est quotiens hujus divisionis. Nam multiplicando divisorem $b + m - x$ per quotientem a, restituitur divisa quantitas
$ab + am - ax$.

Idem quotiens a obtinetur, si dividatur terminus am per secundum terminum m divisoris, vel dividatur terminus $- ax$ per $- x$.

Quapropter, quando divisoris termini æque continentur in respondentibus terminis quantitatis dividendæ, liberum est divisionem instituere per quemlibet divisoris terminum, qui tamen semel assumptus, semper adhibetur, nec unquam mutari potest, ut videre est in sequenti exemplo. 44.

Dividenda sit quantitas
$aa - bb + 2bc - cc$ per $a + b - c$;
scribantur, ut ante dictum fuit, postea instituatur divisio per quemlibet terminum divisoris, exempli gratia, per a, & dividatur terminus aa per a, quotiens (36.) erit a, qui ponatur infra lineam sub divisore ductam, & multiplicetur a in totum divisorem $a + b - c$, & productum $aa + ab - ac$ subtrahatur ex quantitate dividenda, nimirum, mutatis signis, scribatur $- aa - ab + ac$ post, vel infra quantitatem dividendam
$aa - bb + 2bc - cc$, habebitur residuum $aa - bb + 2bc - cc$ $- aa - ab + ac$; & deletis terminis $+ aa$ & $- aa$, qui nihilo æquantur, remanebit dividenda quantitas $- bb + 2bc - cc$ $- ab + ac$;
hujus quantitatis dividatur terminus $- ab$ per jam assumptum divisoris terminum a, & quotiens (34, 36.) erit $- b$, qui scribatur post primum quotientis terminum jam inventum a, & multiplicetur $- b$ in divisorem $a + b - c$, productumque $- ab - bb + bc$ subtrahatur ex quantitate dividenda, infra eandem scribendo $+ ab + bb$ $- bc$, habebitur residuum

$- bb + 2bc - cc - ab + ac + ab + bb - bc$, quod ad simpliciores terminos reducatur (14, 16.), & remanebit quantitas dividenda $bc - cc + ac$, cujus terminus $+ ac$ dividatur per assumptum divisoris terminum a; quotiens erit $+ c$, qui ponatur pro tertio quotientis termino; atque idem c multiplicetur per divisorem $a + b - c$, & productum $ac + bc - cc$ subtrahatur ex dividenda quantitate $bc - cc + ac$, residuum erit
$bc - cc + ac - ac - bc + cc$ æquale nihilo, quia bc & $- bc$, $- cc$ & $+ cc$, $+ ac$ & $- ac$ se se invicem destruunt; unde quotiens erit $a - b + c$.
Si enim multiplicetur $a - b + c$ per divisorem $a + b - c$, productum
$aa - ab + ac + ab - bb + bc - ac + bc - cc$ ad simpliciores terminos reductum (14, 15.), restituet dividendam quantitatem $aa - bb + 2bc - cc$.

45. Quando autem divisor terminos habet, qui æque non continentur in respondentibus terminis quantitatis dividendæ, tum divisio semper instituatur per divisoris terminum, qui pluries, vel saltem integras vices continetur in dividendæ quantitatis terminis. Exempli caussa

Si quantitas $a^3 - b^3$ dividenda sit per $a^2 + ab + b^2$, tunc divisio institui potest per a^2, vel per b^2, qui æque continentur in respondentibus terminis a^3, & $- b^3$; at nequaquam instituatur per ab; nunquam enim inveniretur quotiens quæsitus $a - b$.

46. Quod si facta divisione, aliquid remaneat in quantitate dividenda, quod dividi nequeat per assumptum divisoris terminum; tum illud residuum ponatur post inventum quotientem cum propriis signis $+$, & $-$, illi supponendo totum divisorem.

Sit dividenda quantitas
$aa + bb$, & divisor sit
$a - b$. Dividatur aa per a, & quotiens a multiplicetur in divisorem $a - b$, & productum $aa - ab$ subtrahatur ex quantitate dividenda, residuum erit
$aa + bb - aa + ab$, idest
$bb + ab$ (14.). Atque hujus residui dividatur terminus $+ ab$ per assumptum divisorem a, erit quotiens b, qui ducatur in divisorem $a - b$, & productum $ab - bb$ subducatur ex quantitate dividenda $bb + ab$, residuum erit
$bb + ab - ab + bb$, idest $2bb$ (14, 15.), quod dividi nequit per assumptum divisoris terminum a, ideoque in quotiente post $a + b$ scribatur $\frac{+2bb}{a - b}$; erit igitur hujus divisionis quotiens $a + b + \frac{2bb}{a - b}$.

47. Cujusvis divisionis quotiens aliquando per fractum indicatur, cujus numerator sit dividenda quantitas, & denominator sit divisor: sic $\frac{ac + bc - cm}{a + b - m}$ indicat quotientem a, qui oritur divi-

den-

www.fibtool.com.cn

dendo $ac + bc - cm$ per $a + b - m$. Et ita de reliquis.

Similiter cum nullus dividendæ quantitatis terminus dividi potest 48.
in integris per nullum divisoris terminum, tunc etiam quotiens exprimitur per fractum, cujus numerator sit dividenda quantitas, & denominator sit divisor; ut dividendo $ab + aa$ per $m - x$, quotiens erit $\frac{ab + aa}{m - x}$.

Præterea quantitatum compositarum divisio aliquando etiam expri- 49.
mitur includendo dividendum, & divisorem parenthesi, & inter illos apponendo duo puncta; ut

$(a + b) : (c - x)$ indicat quotientem $\frac{a + b}{c - x}$.

Item $(ab - x) : m$, idem significat ac $\frac{ab - x}{m}$.

Si autem inter duas quantitates parenthesi inclusas non apponantur 50.
duo puncta, tunc indicabitur earundem quantitatum productum.

Sic $(a + c)(b - m)$ exprimit productum $ab + bc - am - cm$, quod oritur multiplicando $a + c$ per $b - m$.

Similiter $(a - c + x)m$, designat productum $am - cm + mx$ ex $a - c + x$ in m.

www.jlbtool.com.cn

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ
LIBER SECUNDUS.

De Calculo Fractorum.

DEFINITIO.

www.libtool.com.cn

51. IN omni quantitatum divisione quotiens ille, qui exprimitur ponendo quantitatem dividendam supra lineolam, & divisorem infra eandem lineam, ut antea diximus, appellatur *Fractio*.

Sic dividendo a per x, quotiens est $\frac{a}{x}$, qui fractio dicitur; & quantitas a supra lineam posita vocatur *Numerator fractionis*; quantitas vero x infra lineam scripta, *Denominator fractionis* dicitur.

Axioma I.

52. Quæ eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt.

Sit $12 - 4 = 8$, & $15 - 7 = 8$, erit etiam $12 - 4 = 15 - 7$.

Similiter si fuerit $a = m$, & $b = m$, erit pariter $a = b$.

Præterea quod uno æqualium majus, vel minus est, etiam reliquo æqualium majus, vel minus erit.

Sic si erit $a = c$, & alia quantitas b sit major quantitatis a, erit etiam b major c.

Et si b erit minor quantitatis a, erit quoque b minor quantitatis c.

Axioma II.

53. Si æqualibus æqualia, vel eadem addas, quæ fiunt, sunt æqualia.

Sit $8 - 3 = 5$, & $4 = 6 - 2$, erit etiam $8 - 3 + 4 = 5 + 6 - 2$.

Similiter si habeamus $a = c$, & $m = x$, erit etiam $a + m = c + x$.

Item sit $a = b$, & addatur utrinque eadem quantitas c, fiet $a + c = b + c$.

Axioma III.

54. Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt æqualia.

Ponamus esse $a = b$, & $c = m$, erit etiam $a - c = b - m$.

Item sit $a = x$, si utrinque auferatur eadem quantitas m, fiet $a - m = x - m$.

Axioma IV.

55. Si quantitates æquales multiplicentur per eandem, vel per æquales quantitates, producta erunt æqualia.

Sit

Sit (9.) æquatio $5 - 2 = 3$, & utraque æquationis pars multiplicetur per 4; fiet nova æquatio $20 - 8 = 12$.

Similiter data æquatione $a = c$, multiplicando æquales quantitates a & c per eandem quantitatem m, fiet nova æquatio $am = cm$.

Item si habeamus $a = x$, & $c = m$, multiplicando æquales quantitates a & x per æquales c & m, producta ac, & mx erunt etiam æqualia inter se, erit nempe $ac = mx$.

www.libtool.com.cn

Axioma V.

Si quantitates æquales dividantur per eandem, vel per æquales quantitates, quotientes erunt pariter æquales inter se. 56.

Sit $15 - 9 = 6$, dividendo totam æquationem per 3, remanebit $\frac{15}{3} - \frac{9}{3} = \frac{6}{3}$, idest $5 - 3 = 2$.

Similiter dividendo æquationem $ac = cm$ per c, remanebit $\frac{ac}{c} = \frac{cm}{c}$, nimirum $a = m$.

Eadem ratione si fuerint $a = b$, & $c = m$, dividendo primam æquationem per secundam, fiet nova æquatio $\frac{a}{c} = \frac{b}{m}$; dividuntur enim æquales quantitates a & b per æquales quantitates c & m.

Axioma VI.

Quælibet quantitas appellari potest a, b, c, x, vel am, bc, mx, 57. vel $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{x}$, vel $b + c$, vel $m - a$, &c.

Quapropter quælibet data quantitas a fieri potest æqualis producto 58. bc, vel mx, vel fractioni $\frac{c}{m}$ &c. Sic numerus, exempli caussa, 5 est æqualis producto 5×1, vel $20 \times \frac{1}{4}$, vel $15 \times \frac{1}{3}$, &c., sive est æqualis fracto $\frac{10}{2}$, vel $\frac{15}{3}$, vel est æqualis $3 + 2$, vel $30 - 25$, &c.

Axioma VII.

Æquales quantitates substitui possunt æqualibus quantitatibus, ut si 59. habeatur $m = b + c - x$, & sit $c - x = a$, substituendo a in locum quantitatis $c - x$ in æquationem $= b + c - x$, fiet alia æquatio $m = b + a$ æqualis datæ $m = b + c - x$, & simplicioribus terminis expressa.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

60. *Si qualibet fractio multiplicetur per suum denominatorem, productum erit numerator ejusdem fractionis.*

www.libtool.com.cn

Data sit qualibet fractio $\frac{a}{m}$, quæ multiplicetur per denominatorem m, dico productum esse a.

Demonstratio.

Quantitas m per aliquam quantitatem, quæ vocetur x, multiplicata, efficiet productum m x æquale quantitati a. Ponamus itaque quantitates a, & m x æquales esse, seu eandem rem significare (57, 58.), nimirum ponatur $a = m x$; deinde æquales quantitates a, & m x dividantur per eandem quantitatem m, quotientes $\frac{a}{m}$, & x (axiom. 5.) erunt æquales inter se, erit nempe $\frac{a}{m} = x$. Postea quantitates æquales $\frac{a}{m}$, & x multiplicentur per eandem quantitatem m, producti $\frac{a}{m} \times m$, & m x (axiom. 4.) erunt inter se æqualia, erit nempe $\frac{a}{m} \times m = mx$; sed ex hypothesi est etiam $a = m x$; igitur (per axioma primum) erit $\frac{a}{m} \times m = a$; nimirum multiplicando fractum $\frac{a}{m}$ per denominatorem m, productum erit numerator a.

Sed a & m possunt significare quascumque quantitates integras, vel fractas, simplices, vel compositas; ideoque fractio $\frac{a}{m}$ exprimit quamvis datam fractionem. Quapropter generaliter concludendum est quamlibet fractionem multiplicatam per suum denominatorem producere numeratorem ejusdem fracti. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

61. *Si numerator, & denominator cujuslibet fracti multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem, fractionis valor non mutabitur.*

Primo sit qualibet fractio $\frac{a}{c}$, cujus numerator a, & denominator c multiplicentur per quamlibet quantitatem m, orietur nova fractio $\frac{am}{cm}$ omnino æqualis datæ fractioni $\frac{a}{c}$: erit nempe $\frac{a}{c} = \frac{am}{cm}$.

De-

Demonstratio.

Quoniam x (axiom. 6.) significare potest quamlibet quantitatem, ideo ponamus fractionem $\frac{a}{c}$ æqualem esse quantitati x, ponatur nempe $\frac{a}{c} = x$, atque hujus æquationis (9.) prima pars multiplicetur per c, productum erit a per antecedentem Propositionem. Similiter secunda pars x multiplicetur per eandem quantitatem c, productum erit c x. Sed multiplicando æquales quantitates $\frac{a}{c}$, & x per eandem quantitatem c, producta a, & c x sunt æqualia (axiom. 4.); erit nempe $a = c\,x$. Præterea æquatio hæc $a = c\,x$ tota multiplicetur per m, habebitur $a\,m = c\,m\,x$ (axiom. 4.). Tandem æquales quantitates a m, & c m x dividantur per eandem quantitatem c m, quotientes $\frac{a\,m}{c\,m}$, & x erunt æquales inter se (axiom. 5.); erit nempe $\frac{a\,m}{c\,m} = x$. Sed ex hypothesi habemus $\frac{a}{c} = x$; ergo (axiom. 1.) erit $\frac{a\,m}{c\,m} = \frac{a}{c}$. Quod erat primo demonstrandum.

Secundo data sit fractio $\frac{a\,x}{a\,m}$, cujus numerator a x, & deno- 62.
minator a m dividantur per eandem quantitatem a, habebitur nova fractio $\frac{x}{m}$ æqualis datæ $\frac{a\,x}{a\,m}$.

Demonstratio.

Nam si fractionis $\frac{x}{m}$ numerator x, & denominator m per eandem quantitatem a multiplicentur, orietur fractio $\frac{a\,x}{a\,m}$ æqualis fractioni $\frac{x}{m}$ per antecedentem Demonstrationem. Ergo fractionis $\frac{a\,x}{a\,m}$ dividendo numeratorem a x, & denominatorem a m per a, oritur fractio $\frac{x}{m}$ æqualis datæ fractioni $\frac{a\,x}{a\,m}$.

Quapropter per eandem quantitatem multiplicando, vel dividendo tam numeratorem, quam denominatorem cujusvis datæ fractionis, ejusdem fractionis quantitas, seu valor non mutatur. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Integram quantitatem in fractionem dati denominatoris reducere. 63.

Resolutio.

Multiplicetur data quantitas per datum denominatorem, & produ-

www.libtool.com.cn

ctio supponatur ipsemet denominator. Ut si quantitas a exprimenda sit per fractionem, quæ habeat denominatorem m, erit $\frac{am}{m}$ quæsita fractio.

Demonstratio.

Quantitas a exprimi potest per fractionem $\frac{a}{1}$ (unitas enim in quantitate a una vice continetur, ideoque habetur $\frac{a}{1} = a$); atque hujus fractionis $\frac{a}{1}$ multiplicatis numeratore a, & denominatore 1 per m, oritur fractio $\frac{am}{m}$ æqualis $\frac{a}{1}$, seu a, per primam partem Propositionis antecedentis.

www.libtool.com.cn

Eadem ratione integra quantitas $a + c - m$ reducitur in fractionem, cujus denominator sit b, atque fit $\frac{ab + bc - bm}{b}$.

Item quantitas $a - c + x$ reducitur ad unicam fractionem $\frac{am - cm + x}{m}$; & sic de cæteris.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

64. *Fractiones ad eumdem denominatorem reducere.*

Primo si fractiones reducendæ sunt tantummodo duæ, ut $\frac{a}{m}$, & $\frac{c}{x}$, tunc numerator a & denominator m fracti $\frac{a}{m}$ multiplicentur per denominatorem x alterius fractionis. Item numerator c, & denominator x fracti $\frac{c}{x}$ multiplicentur per denominatorem m primæ fractionis; atque erunt novæ fractiones $\frac{ax}{mx}$, & $\frac{cm}{mx}$, ejusdem denominatoris, & æquales datis $\frac{a}{m}$, & $\frac{c}{x}$.

Demonstratio.

Nam per secundam Propositionem sunt $\frac{ax}{mx} = \frac{a}{m}$, & $\frac{cm}{mx} = \frac{c}{x}$.

Secundo si plures fuerint fractiones reducendæ, ut $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{a}{x}$, &c, tunc numerator, & denominator cujusque fractionis multiplicentur per productum, quod ex aliarum fractionum denominatoribus resultat; nimirum termini a, & c fractionis $\frac{a}{c}$ multiplicentur per m x; termini vero b, & m fracti $\frac{b}{m}$ multiplicentur per c x; tandem termini a, & x fracti $\frac{a}{x}$ multiplicentur per c m; & fient novæ fractiones $\frac{amx}{cmx}$, $\frac{bcx}{cmx}$, $\frac{acm}{cmx}$, ejusdem nominis c m x, & æquales datis.

De-

Demonstratio.

Etenim per Propositionem secundam est $\frac{amx}{cmx} = \frac{a}{c}$, $\frac{bcx}{cmx} = \frac{b}{m}$, & $\frac{acm}{cmx} = \frac{a}{x}$. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

PROPOSITIO QUINTA.

www.libtool.com.cn

Problema.

Algebraicas fractiones addere. 65.

Resolutio.

Si fractiones datæ habent eundem denominatorem, colligantur in unam summam omnes numeratores (13.), summæ vero subscribatur datus communis denominator. Sic fractionum $\frac{a}{m}$, $\frac{-b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{x}{m}$, summa erit $\frac{a - b + c + x}{m}$.

Cum vero fractiones non habent idem nomen, tunc reducantur ad eundem denominatorem per antecedentem Propositionem, & reliqua fiant ut supra.

Præterea fractionum summa aliquando obtinetur sine ulla reductione, eas scribendo cum suis signis.

Sic fractionum $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, & $\frac{-a}{x}$ summa erit $\frac{a}{c} + \frac{b}{m} - \frac{a}{x}$, vel erit $\frac{amx + bcx - acm}{cmx}$, si reducantur ad eundem denominatorem.

PROPOSITIO SEXTA.

Problema.

Fractiones subtrahere. 66.

Resolutio.

Si fractiones datæ non habent idem nomen, reducantur ad eundem denominatorem (Prop. 4.).

Cum vero fractiones reductæ sunt, vel habent idem nomen, tunc subducatur numerator fractionis subtrahendæ a numeratore alterius fractionis, & producto supponatur denominator communis.

Itaque ex fractione $\frac{da}{b}$ subtrahendo fractionem $\frac{m}{b}$, residuum erit $\frac{da - m}{b}$

 Item

Item a fractione $\frac{ab - c}{x}$ subtrahendo fractionem $\frac{bm - ac}{x}$, residuum erit $\frac{ab - c - bm + ac}{x}$.

Præterea si fractio ab integra quantitate, vel vicissim integra quantitas a fractione subtrahenda sit, mutatis signis quantitatis subtrahendæ, in unam summam colligantur, & habebitur quæsitum residuum: vel reducatur integra quantitas in fractionem ejusdem nominis (Propos. 3.), postea fiat subductio, ut antea.

www.libtool.com.cn

Sic subtrahendo fractionem $\frac{c}{m}$ ex quantitate a, residuum erit $a - \frac{c}{m}$, vel reducendo (Prop. 3.), erit $\frac{am - c}{m}$.

Item ex quantitate $a - c$ subtrahendo fractum $\frac{ab + b}{m}$, residuum erit $a - c - \frac{ab - b}{m}$, vel reducendo erit $\frac{am - cm - ab - b}{m}$.

Similiter ex fracto $\frac{ax}{m}$ subtrahendo quantitatem $b + c$, residuum erit $\frac{ax}{m} - b - c$, vel reducendo ad idem nomen, erit $\frac{ax - bm - cm}{m}$.

Subtractio aliquando etiam fit sine ulla reductione, mutando signa subtrahendæ quantitati. Sic subtrahendo fractionem $\frac{c - m}{x}$ ex fractione $\frac{ab}{m}$ residuum erit $\frac{ab}{m} - \frac{c + m}{x}$.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Problema.

67. *Fractiones multiplicare.*

Resolutio.

Data sit quælibet fractio $\frac{a}{c}$ multiplicanda per fractionem $\frac{b}{m}$: multiplicentur numeratores inter se, & inter se quoque denominatores, fiet fractio $\frac{ab}{cm}$, quæ erit quæsitum productum.

Demonstratio.

Ponatur fractio $\frac{a}{c} = x$ (58.), & fractio $\frac{b}{m} = z$: deinde prima æquatio $\frac{a}{c} = x$ multiplicetur per c, fiet nova æquatio $a = cx$

ex (axiom. 4, & Prop. 1.). Similiter secunda æquatio $\frac{b}{m} = z$ multiplicetur per m, habebitur alia æquatio $b = mz$ (axiom. 4, & Prop. 1.). Postea æquatio $a = cx$ multiplicetur per æquationem $b = mz$, nimirum a per b, & cx per mz, producta ab, & cmxz, erunt æqualia (axiom. 4.), idest erit nova æquatio $ab = cmxz$. Tandem æquatio hæc $ab = cmxz$ dividatur per cm, quotientes $\frac{ab}{cm}$, & xz erunt æquales (axiom. 5.), erit nempe $\frac{ab}{cm} = xz$; sed ex hypothesi quantitas x significat fractionem $\frac{a}{c}$, & z significat fractionem $\frac{b}{m}$; consequenter productum xz exprimit productum ex fracto $\frac{a}{c}$ in fractum $\frac{b}{m}$; & ostensum est fractum $\frac{ab}{cm}$ æqualem esse producto xz; ergo etiam fractio $\frac{ab}{cm}$ adæquat productum ex $\frac{a}{c}$ in $\frac{b}{m}$: hoc autem productum $\frac{ab}{cm}$ etiam invenitur multiplicando numeratores inter se, & inter se denominatores datarum fractionum; ergo fractionum multiplicatio obtinetur multiplicando inter se numeratores, & inter se quoque denominatores datarum fractionum. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Si fractio multiplicanda sit per integram quantitatem, vel vicissim 68. integra quantitas per fractionem, tunc multiplicetur numerator datæ fractionis per integram quantitatem, & producto supponatur denominator ejusdem fractionis: ut multiplicando fractum $\frac{a}{c}$ per integram quantitatem m, productum erit $\frac{am}{c}$.

Demonstratio.

Quantitas m exprimi potest per $\frac{m}{1}$; & multiplicando $\frac{m}{1}$ per $\frac{a}{c}$, productum est $\frac{am}{1c}$, sive $\frac{am}{c}$ per antecedentem Demonstrationem. Ergo patet propositum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Problema.

Fractiones dividere. 69.

Resolutio.

Multiplicentur decussatim, idest numerator fractionis dividendæ per denominatorem divisoris, productum erit numerator quotientis; & denominator fractionis dividendæ per numeratorem divisoris, & productum erit denominator quotientis.

Sic dividendo fractionem $\frac{a}{b}$ per fractum $\frac{c}{m}$, quotiens erit $\frac{am}{bc}$.

De-

Demonstratio.

Ponatur fractio dividenda $\frac{a}{b} = x$ (58.), & divisor $\frac{c}{m} = z$. Postea prima æquatio $\frac{a}{b} = x$ multiplicetur per b, fiet æquatio $a = bx$ (axiom. 4., & Propos. 1.), quæ denuo multiplicetur per m, habebitur $am = bmx$. Similiter secunda æquatio $\frac{c}{m} = z$ multiplicetur per m, orietur nova æquatio $c = mz$, quæ iterum multiplicetur per b, & habebitur $bc = bmz$ (axiom. 4.). Tandem dividatur æquatio $am = bmx$ per æquationem $bc = bmz$, nimirum am per bc, & bmx per bmz, quotientes $\frac{am}{bc}$, & $\frac{bmx}{bmz}$, seu $\frac{x}{z}$ (62.) erunt æquales inter se (axiom. 5.), erit nempe $\frac{am}{bc} = \frac{x}{z}$: sed $\frac{x}{z}$ est quotiens, qui oritur dividendo x per z, & x significat, ex hypothesi, quantitatem dividendam $\frac{a}{b}$, & z significat divisorem $\frac{c}{m}$; consequenter $\frac{x}{z}$ significat quotientem, qui oritur dividendo fractum $\frac{a}{b}$ per fractum $\frac{c}{m}$; atque demonstravimus esse $\frac{am}{bc} = \frac{x}{z}$: ergo (axiom. 1.) $\frac{am}{bc}$ est quotiens quæsitus.

Quapropter ut fractio quælibet per aliam fractionem dividatur, decussatim, seu in crucem, multiplicentur numerator fractionis dividendæ per denominatorem divisoris, & denominator fractionis dividendæ per numeratorem divisoris, atque primum productum erit numerator quotientis, secundum vero productum erit denominator ejusdem quotientis. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

70. Fractio vero quælibet per integram quantitatem dividitur multiplicando denominatorem fracti per integram quantitatem.

Sic dividendo $\frac{c}{a}$ per m, quotiens erit $\frac{c}{am}$.

Demonstratio.

Nam quantitas m idem valet ac $\frac{m}{1}$, & dividendo $\frac{c}{a}$ per $\frac{m}{1}$, quotiens est $\frac{1c}{am}$, seu $\frac{c}{am}$, per antecedentem Demonstrationem. Ergo patet propositum.

71. Quod si integra quantitas dividenda sit per fractionem, tunc integra quantitas multiplicetur per denominatorem fracti, & producto subscribatur numerator fractionis.

Sic dividendo a per $\frac{m}{c}$, quotiens erit $\frac{ac}{m}$.

Demonstratio.

Quantitas a exprimi potest per $\frac{a}{1}$, & dividendo $\frac{a}{1}$ per $\frac{m}{c}$, habetur quotiens $\frac{ac}{1m}$, idest $\frac{ac}{m}$, per præcedentem Propositionem.

www.libtool.com.cn

ELEMENTORUM ALGEBRÆ

LIBER TERTIUS.

De Quantitatum potestatibus, & de Radicum extractione.

DEFINITIO I.

www.libtool.com.cn

PRoductum, quod fit multiplicando quamlibet quantitatem per unitatem, aut per semetipsam semel, vel bis, vel pluries, appellatur *Potestas*, *Dignitas*, vel *Potentia* ejusdem quantitatis. 72.

Definitio II.

Prima potestas cujuslibet quantitatis est ipsa quantitas semel posita, seu per unitatem multiplicata; ut $1 \times a$, idest a, est prima potestas magnitudinis a. $1bm$, seu bm, est prima dignitas quantitatis bm, &c. 1×7, idest 7, est prima potestas numeri 7; & sic de reliquis. 73.

Definitio III.

Quadratum, vel *secunda Potestas* cujuslibet quantitatis est productum, quod fit semel multiplicando datam quantitatem per semetipsam. 74.

Itaque numerus 49 est quadratum numeri 7, quia oritur ex multiplicatione numeri 7 in numerum 7. 64 est quadratum, vel secunda potestas numeri 8, quia 8×8 producit 64.

Item multiplicando a in a, productum aa, seu a^2 dicitur quadratum quantitatis a.

Similiter $9a^2b^4$ est quadratum quantitatis $3ab^2$, quia multiplicando $3ab^2$ per $3ab^2$, oritur $9a^2b^4$.

Definitio IV.

Cubus, vel *tertia Potestas* cujusvis quantitatis est productum, quod oritur multiplicando datam quantitatem per suum quadratum. 75.

Sic multiplicando a per a per a, seu aa per a, productum aaa, vel a^3 erit cubus, seu tertia potestas magnitudinis a.

Similiter 27 est cubus numeri 3, quia obtinetur multiplicando 3 in 3 in 3, sive 9 in 3.

Quod si tertia potestas, seu cubus cujuslibet quantitatis multiplicetur per primam potestatem ejusdem quantitatis, productum erit *quarta Potestas*, seu *Quadrato-Quadratum* ejusdem quantitatis.

Sic a^4 est quarta potestas quantitatis a, quia oritur ex $a^3 \times a$.

Si a^4 multiplicetur per a, fiet a^5, nempe *quinta Potestas* ejusdem quantitatis a; atque ita deinceps a^6, a^7, a^8 &c. sunt *sexta*, *septima*, *octava Potestas* ejusdem a.

De-

Definitio V.

76. Quantitas illa, cujus potestates exhibentur (quæ etiam prima potestas appellatur), dicitur *Latus*, seu *Radix* earundem potestatum.

Sic a dicitur radix quadrata, vel radix secunda quantitatis a^2; est radix tertia, seu cubica quantitatis a^3; & sic deinceps.

www.libtool.com.cn

Similiter numerus 3 est radix quadrata numeri 9, est radix cubica, seu tertia numeri 27, est radix quarta numeri 81, &c..

Definitio VI.

77. Productum, quod fit multiplicando inter se duas inæquales quantitates, etiam dicitur *Rectangulum* earundem quantitatum; & quantitates ipsæ dicuntur *Latera* ejusdem rectanguli, sumpta denominatione a lineis, ut videbimus in Geometria Plana.

Sic productum am dicitur rectangulum contentum a quantitatibus a, & m; quantitates vero a, & m vocantur latera ejusdem rectanguli.

PROBLEMA PRIMUM.

78. *Cujusvis datæ quantitatis quadratum, cubum, quartam potestatem, quintam, & alias omnes potestates invenire.*

Resolutio.

Ut inveniatur quadratum, multiplicetur data quantitas per semetipsam, & productum erit quæsitum quadratum, vel secunda potestas datæ quantitatis, ut patet per antecedentem Definitionem Tertiam.

Itaque quadratum quantitatis b erit $b \times b$, sive b^2.

Quadratum quantitatis am erit $am \times am$, idest a^2m^2. Quadratum quantitatis $5a^3b^2m$ erit $5a^3b^2m \times 5a^3b^2m$, idest $25a^6b^4m^2$.

Similiter multiplicando $a+b$ per $a+b$, productum $aa+2ab+bb$ erit quadratum ejusdem quantitatis $a+b$.

Eadem ratione quadratum fractionis $\frac{a}{b}$ erit $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, idest $\frac{a^2}{b^2}$; atque ita de reliquis.

79. Si autem quæratur cubus, seu tertia potestas datæ quantitatis, tunc per antecedentem numerum invento quadrato ejusdem quantitatis, multiplicetur quadratum illud per eandem quantitatem, & habebitur quæsitus cubus.

Itaque cubus quantitatis b erit $b^2 \times b$, idest b^3. Cubus quantitatis am erit $a^2m^2 \times am$, nimirum a^3m^3. Cubus quantitatis $5a^3b^2m$ erit $25a^6b^4m^2 \times 5a^3b^2m$, nempe $125a^9b^6m^3$.

Similiter si $aa+2ab+bb$ (quadratum quantitatis $a+b$) multiplicetur per $a+b$, productum $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ erit cubus quantitatis $a+b$.

Quod

Quod si tertia potestas iterum multiplicetur per datam quantitatem, in producto habebitur quarta potestas. Multiplicando quartam potestatem per primam, habebitur quinta potestas ejusdem quantitatis; atque ita deinceps. 80.

Quapropter multiplicando 2 in 2, fit 4, quadratum numeri 2. 2 in 4 producit 8, cubum nempe numeri 2. 2 in 8 producit 16, qui numerus est quarta potestas numeri 2. 2 in 16 facit 32, atque 32 est quinta potestas numeri 2. 2 in 32 producit 64; unde 64 est sexta potestas numeri 2. Atque ita procedendo, reliquæ potestates inveniuntur.

www.libtool.com.cn

Corollarium.

Hinc ut habeatur quælibet potestas cujuslibet simplicis quantitatis litteralis, satis erit exponentes ejusdem quantitatis multiplicare per numerum quæsitæ potestatis. Ad obtinendam exempli gratia secundam potestatem quantitatis $ab^2c^3m^6$, multiplicentur per 2 exponentes 1, 2, 3, 6, & erit $a^2b^4c^6m^{12}$ quæsitum quadratum. Nam juxta regulam præcedentis numeri 78, multiplicando $ab^2c^3m^6$ per $ab^2c^3m^6$, idem productum, seu quadratum $a^2b^4c^6m^{12}$ obtinetur. 81.

Similiter tertia potestas quantitatis ab^4c^2 obtinetur triplicando exponentes 1, 4, 2, atque erit $a^3b^{12}c^6$ cubus ejusdem quantitatis.

Eadem ratione ad obtinendam quartam potestatem multiplicentur exponentes per 4; ad obtinendam quintam potestatem multiplicentur per 5, atque ita deinceps, cum datæ quantitates sunt simplices, & positivæ.

Numeri vero coeficientes semper multiplicandi sunt inter se, juxta regulas traditas in præcedenti Problemate.

Sic tertia potestas quantitatis $4a^2b^7$ erit $4\times4\times4\ a^6b^{21}$, idest $64\ a^6b^{21}$ (79.)

Scholion.

Quantitates compositæ etiam ad quamvis potestatem elevantur scribendo ad earum dexteram exponentem quæsitæ potestatis, ducta desuper linea. Sic $\overline{a+b}^2$ significat quadratum quantitatis $a+b$, nempe $a^2+2ab+b^2$. Item $\overline{a+b}^3$ significat quantitatem $a+b$ elevatam esse ad cubum, seu tertiam potestatem. 82.

Definitio VII.

Radicis extractio est inventio illius quantitatis, cujus potestas data est. Sic extrahere radicem quadratam ex numero 64, est invenire numerum 8, cujus quadratum est numerus 64. Similiter radicem tertiam extrahere ex quantitate a^{12}, est invenire quantitatem a^4, cujus tertia potestas est a^{12}. 83.

PROBLEMA SECUNDUM.

84. *Ex dato numero radicem quadratam extrahere.*

Resolutio.

Si datus numerus est quadratus, & non excedit numerum centenum, ejus radix quadrata habetur in sequenti Tabella.

www.libtool.com.cn

Hujus prima columna sinistrorsum radices continet; altera vero dextrorsum posita, earundem radicum quadrata continet. Ex hac igitur Tabella evidens est radicem quadratam numeri 25 esse numerum 5, radicem quadratam numeri 81 esse 9; & sic de cæteris.

RADICES.	QUADRATA.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

85. Cum vero datus numerus minor centenario quadratus non est, tunc sumatur radix maximi quadrati in dato numero contenti. Sic radix quadrata numeri 28 inveniri nequit, quia nullus numerus in se ipsum ductus producere potest numerum 28; sed radix quadrata proxime minor numeri 28 est 5, quia ejus quadratum 25 est maximum quadratum contentum in dato numero 28.

Similiter radix proxime minor numeri 97 est 9, quia ejus quadratum 81 est maximum quadratum contentum in dato numero 97.

86. Quod si datus numerus major est numero centeno, ejus quadrata radix sequenti methodo inveniatur.

Primo dividatur datus numerus in membra, puncto secernendo binas quasque figuras, incipiendo a dextera, & procedendo versus sinistram. Si figurarum numerus sit par, quodlibet membrum duas continebit figuras; cum vero numerus figurarum est impar, primum membrum ad sinistram positum unam tantum habebit notam.

Præterea quot erunt membra, tot figuras habebit radix. Hisce præsuppositis, operetur ut in sequenti exemplo.

Datus sit numerus A, idest 294849, hujus radix quadrata invenienda sit. Diviso dato numero in membra, ut dictum est ante, quæratur in superiori Tabula radix quadrata primi membri 29 ad sinistram positi; cum vero numerus 29 non sit quadratus, quæratur radix proxime minor (85.); quæ est 5, quæ dextrorsum ponatur in B, interjecta lineola inter numeros A, & B.

294849 A	543 B
25	10 C
44	108 D
2916	
324	
294849	
0	

Postea multiplicetur radix 5 in seipsam, & qua-

dra-

dratum 25 scribatur sub ipso membro 29, a quo subtrahatur, residuum erit 4, cui dextrorsum addatur prima figura 4 secundi membri 48, fiet numerus 44. Deinde radix inventa 5 duplicetur, fiet divisor 10, qui scribatur in C, & dividatur 44 per 10, quotiens erit 4, qui ponatur pro secunda radicis figurâ in B ad dexteram figuræ 5, fiet 54.

Multiplicetur numerus inventus 54 per semetipsum, inveniatur nempe quadratum numeri 54, quod erit 2916, & scribatur infra numerum 44 directe, & ordinatim sub figuris 2948, quæ sinistrorsum duo priora membra numeri A constituunt; & subtrahatur quadratum 2916 ex numero 2948, residuum erit 32, cui dextrorsum descendatur prima figura 4 tertii membri 49, fiet membrum dividendum 324. Postea duplicetur tota radix jam inventa 54, & ejus duplum 108 ponatur in D, erit alius divisor, per quem dividatur numerus 324, quotiens erit 3, qui scribatur in B post 54, idest pro tertia radicis nota. Tandem fiat quadratum totius radicis inventæ 543, quod erit 294849, & subtrahatur ex tribus integris membris, idest ex integro numero A, residuum erit 0; ideoque datus numerus A est quadratus, & ejus radix quadrata est numerus 543: quia numerus 543 in seipsum ductus restituit numerum datum A.

Si quadratum jam inventæ radicis excedit numerum, a quo subtrahi debet, tunc ultima radicis figura per divisionem inventa, unitate minuatur, ut videre est in sequenti exemplo. 87.

E	3.24	18	F
	1		
	22	2	G
	324		
	0		

Quæratur radix quadrata numeri E, seu 324, qui dividatur in membra per puncta modo jam explicato. Primum membrum sinistrorsum erit 3, cujus radix quadrata proxime minor est 1, quæ ponatur in F, ejusque quadratum 1 subtrahatur ex eodem membro 3, residuum erit 2; cui dextrorsum addatur prima figura 2 sequentis membri, fiet numerus 22, qui dividatur per duplum inventæ radicis 1, idest per divisorem 2 positum in G; sed 2 in 22 novies continetur (quod autem pluries contineatur, nihil refert; nullus enim numerus ponitur in quotiente, seu in radice, major quam 9), unde quotiens 9 scribendus esset in F pro secunda radicis figura: deinde quadratum radicis 19, idest numerus 361, subtrahendus esset ex numero 324, quod fieri nequit; proinde quotiens 9 unitate minuatur, ponatur nempe 8 pro secunda radicis figura; & multiplicando radicem inventam 18 in semetipsam, obtinetur ejus quadratum 324, quo subtracto ex numero dato 324, nihil remanet; ergo numerus 18 est radix quadrata numeri 324.

Cum vero inventus divisor non continetur in membro dividendo, tunc apponitur in radice cifra 0, & membro dividendo dextrorsum addantur duæ subsequentes notæ numeri dati. 88.

Extrahenda sit radix quadrata numeri 43264, qui vocetur A. Dividatur in periodos, ut dictum fuit numero 86. Primum membrum sinistrorsus erit 4, cujus radix quadrata 2 ponatur in M, & quadra-

www.libtool.com.cn

rum hujus radicis 2, ideſt 4, ſubtrahatur ex membro 4 numeri A, reſiduum erit o, cui dextrorſus addatur prima figura 3 ſecundi membri 32, fiet o3, ideſt 3. Duplicetur radix inventa 2, & ejus duplum 4 ponatur in G, & dividatur 3 per 4; cum autem 4 in 3 non contineatur, ſcribatur o in M poſt notam 2, item ponatur o in G poſt notam 4; fiet radix 20 in M, & ejus duplum 40 in G erit diviſor. Deinde ad dexteram numeri o3 deſcendatur ſecunda figura 2 ſecundi membri 32, & prima nota 6 tertii membri 64, fiet membrum dividendum 326. Per diviſorem 40 poſitum in G dividatur numerus 326, quotiens erit 8, qui ponatur in M pro tertia radicis figura. Tandem fiat quadratum radicis 208, quod erit 43264, quo ſubtracto ex numero A, reſiduum erit o: adeoque numerus M, ideſt 208, eſt radix quadrata numeri A, ideſt 43264.

A	M
4.32.64	208
4	G
o326	40
43264	
o	

www.bilitool.com.cn

89. Si poſt ultimam ſubtractionem aliquid remanet, ſignum eſt talem numerum non eſſe revera quadratum, neque habere radicem rationalem, quæ nempe numeris exprimi poſſit. Radix vero in operatione inventa erit radix quadrata proxime minor ejuſdem numeri; ſive radix maximi quadrati in eodem numero contenti.

Quamvis autem vera radix inveniri nequeat, quando datus numerus non eſt quadratus; poteſt tamen ad veram radicem magis magiſque approximari, ita ut differentia a vera radice ſit minima. Quod ſequenti ratione obtinetur.

90. Dato numero non quadrato tot cifrarum paria addantur, quot libuerit, ideſt vel duo o, vel quatuor, vel ſex, &c, & ex dato numero una cum prædictis cifris extrahatur radix quadrata, eo modo, quo factum eſt ante.

Poſtea ex inventa radice tot notæ auferantur dextrorſum, quot cifrarum paria addita fuerunt; reliquæ notæ radicis ſiniſtrorſum poſitæ exhibebunt radicem integram proxime minorem dati numeri. Figuræ dextrorſum ablatæ ponantur ſupra lineolam pro numeratore fractionis, & pro denominatore ſcribatur unitas cum tot cifris, quot paria addita fuerunt, & integer prædictus cum fractione ſupradicta indicabunt radicem proximiorem dati numeri.

Ex-

Extrahenda sit radix quadrata ex numero 15, cujus radix proxime minor (85.) est 3 cum residuo 6; ut inveniatur radix proximior, eidem numero 15 addantur quotlibet cifrarum paria, exempli gratia duo, fiet numerus 150000, a quo extrahatur radix quadrata juxta regulas superius traditas, & invenietur 387 radix proxime minor numeri 150000, cum residuo 231. Ob duo cifrarum paria addita secernantur ex ea radice 387 duæ notæ ad dexteram, nempe 87, & numero 87 subscribatur 1 cum duabus cifris; atque erit $3\frac{87}{100}$ radix proximior, vera quidem minor, sed propinquior, & exactior, quam radix 3 primo inventa: hæc enim radix $3\frac{87}{100}$ neque una centesima unitatis parte a vera radice differt.

387

15.00.00 | $3.\frac{87}{100}$

9
60 | 16

1444
560 | 176

149769
231

Si tria, vel quatuor, vel plura cifrarum paria addita fuissent, tunc radix magis magisque veræ radici propinquior esset.

PROBLEMA TERTIUM.

Ex dato numero radicem cubicam extrahere. 91

Resolutio.

Quando datus numerus est cubus, & non excedit numerum 1000, tunc ejus radix habetur in hac Tabula, in qua evidens est radicem tertiam, seu cubicam numeri 343 esse numerum 7; radicem cubicam numeri 729 esse 9. Vicissim patet cubum numeri 7 esse 343; cubum numeri 5 esse 125, &c.

Si datus numerus minor numero 1000 non est cubus, tum accipiatur radix proxime minor, idest radix maximi cubi in dato numero contenti.

Sic radix cubica proxime minor numeri 124 est 4, quia ejus cubus 64 est maximus cubus contentus in dato numero 124.

Cum autem datus numerus excedit numerum 1000, tunc sequenti methodo extrahitur radix.

RADICES.	CUBI.	
1	1	
2	8	
3	27	
4	64	92
5	125	
6	216	
7	343	
8	512	
9	729	93
10	1000	

Invenienda sit radix tertia numeri 79507, qui vocetur A. Dividatur datus numerus in membra dextrorsum incipiendo, ita ut singula membra tres contineant figuras, excepto primo mo membro finistrorsum, quod aliquando unam tantum, vel duas habebit notas, ut in hoc exemplo apparet.

Præterea quot erunt membra, totidem erunt notæ in quæsita radice.

Postea quæratur in antecedenti Tabula radix tertia primi membri ad finistram positi; sed in dato numero primum membrum 79 non est numerus cubus, adeoque accipiatur radix cubi 64 proxime minoris, quæ est 4, & ponatur in R. Hujus radicis 4 fiat cubus 64, qui subducatur a primo membro 79, & residuum erit 15, cui dextrorsum adjungatur prima sequentis membri figura 5, fiet 155 membrum dividendum.

www.fbtooo.com.cn

A	R
79. 507	43
64	D
155	48
79507	
0	

Deinde inveniatur quadratum 16 inventæ radicis 4, & per ejus triplum 3 X 16, ideſt per 48, qui ponatur in D, dividatur membrum 155, quotiens 3 erit altera radicis figura, quæ ponatur in R.

Radicis 43 fiat cubus (79.) 79507, qui subtrahatur ex utroque membro dati numeri A; cumque nihil superſit, ſignum eſt numerum 43 eſſe radicem cubicam dati numeri A.

94. Quando cubus jam inventæ radicis excedit numerum, à quo subtrahendus eſt, tunc unitate minuatur ultima radicis figura, ut videre eſt in ſequenti exemplo.

Extrahenda ſit radix tertia a numero A, ideſt 155720872, qui dividatur in membra, ut antea diximus. Primum membrum ſiniſtrorſus erit 155, hujus radix cubica proxime minor (92.) eſt 5, quæ dextrorſum ponatur in R, ejuſque cubus 125 ſubtrahatur a primo membro 155, reſiduum erit 30, cui addatur prima nota 7 membri ſequentis, fiet 307, qui dividatur per 25 X 3, ideſt per 75 triplum quadratum radicis 5, quotiens eſt 4, qui ponendus eſſet in R pro ſecunda radicis figura, & haberetur radix 54; hujus cubus 157464 ſubtrahendus eſſet a duobus primis membris numeri A, ſcilicet a numero 155720, quod fieri nequit; proindeque quotiens 4 unitate minuatur, & ponatur 3 in radice poſt notam 5, fiet 53, cujus tertia poteſtas, ſeu cubus 148877 ſubducatur a prædicto numero 155720, reſiduum erit 6843, cui dextrorſus adjungatur ſequens nota 8 tertii membri, habebitur numerus 68438, qui diviſus per numerum C, ideſt per triplum quadratum radicis inventæ 53, quod eſt 8427, dat quotientem 8, qui ponatur in R pro tertia radicis figura. Deinde fiat cubus totius radicis 538, qui erit 155720872, & ſubtrahatur ex numero A, reſiduum erit 0; conſequen-

A	R
155.720.872	538
125	D
307	75
148877	C
68438	8427
155720872	
0	

quenter inventus numerus R, idest 538, est radix cubica dati numeri A.

Si divisor inventus non continetur in membro dividendo, tunc ponatur o in radice, & totius inventæ radicis cubus subtrahatur, ut supra dictum fuit; residuo autem semper addatur prima nota sequentis membri, & numerus, qui inde oritur, dividatur per triplum quadratum totius jam inventæ radicis. 95.

www.libtool.com.cn

Ut in apposito exemplo, quia 12 triplum quadratum jam inventæ radicis 2 non continetur in membro dividendo 9, ponitur o in radice post jam inventam notam 2: postea cubus radicis 20, idest 8000 subtrahitur ex duobus prioribus membris dati numeri, idest ex numero 8998, & residuo 998 dextrorsum additur prima figura 9 sequentis membri 912, & fit numerus 9989, qui dividitur per 1200 triplum quadratum jam inventæ radicis 20: reliqua vero fiunt ut in antecedentibus exemplis.

8.998.912.	208
8	
09	12
8000	
9989	1200
8998912	
0	

Quod si ex dato numero radix prædicto modo extrahi nequit, signum est, datum numerum non esse cubum, neque habere radicem cubicam, quæ numeris exprimi possit. 96.

Propinquior autem radix, quæ a vera insensibiliter differat, invenitur addendo aliquot cifrarum ternarios ad ipsum numerum datum, & ex eodem numero cum prædictis cifris extrahendo radicem cubicam eo modo, quo factum est supra. Deinde ab inventa radice totidem dextrorsum secentur notæ, quot cifrarum ternarii adjecti fuere; reliquæ notæ sinistrorsum dabunt radicem integram proxime minorem, atque eadem radix integra una cum fractione, cujus numerator sint ipsæ rejectæ figuræ, & denominator sit unitas cum tot cifris, quot cifrarum ternarii additi fuerunt, erit radix proximior. Sic numero 12, qui cubus non est, additis duobus cifrarum ternariis, fit numerus 12000000, cujus radix tertia proxime minor est 228, a qua sectis duabus figuris ob duos cifrarum ternarios additos, quibus subscribatur unitas cum duabus cifris, erit $2\frac{28}{100}$ radix propinquior, quæ non differt una centesima unitatis parte a vera radice. Si tres, aut plures addantur cifrarum ternarii, radix semper veræ radici proximior invenietur.

12.000.000	$2\frac{28}{100}$
8	
40	12
10648	
13520	1452
11852352	
147648	

PRO-

PROBLEMA QUARTUM,

Radicem quadratam ex Algebraicis Quantitatibus extrahere.

Resolutio.

www.libtool.com.cn

Si datæ quantitates sunt simplices, extrahitur radix quadrata dividendo per numerum binarium omnes exponentes ejusdem quantitatis. Sic quantitatis a^2 radix est a^1, seu a, quia $a \times a$ restituit a^2. Item quantitatum a^4, b^8, c^6, radices quadratæ erunt a^2, b^4, c^3. Similiter radix quadrata potestatis a^7 est $a^{\frac{7}{2}}$, & quantitatis b^3 erit $b^{\frac{3}{2}}$. Radix quadrata quantitatis $a^2\, b^2\, c^4$ erit $a\, \frac{1}{2}\, b\, c^2$, &c.

98. Si data quantitas habet numerum coeficientem, in primis extrahitur radix ex numero coeficiente, *juxta regulas traditas in præcedenti* Problemate Secundo; postea ex quantitatibus litteralibus, *juxta præcedentem* numerum. Ut radix quadrata quantitatis $81\, a^2\, b^6$ est $9\, a\, b^3$, quia $9\, a\, b^4 \times 9\, a\, b^3$ restituit $81\, a^2\, b^6$. Item radix quadrata quantitatis $324\, a^8\, b^6$ est $18\, a^4\, b^3$.

99. Si autem data quantitas sit composita, ut $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$, tunc ex aliquo termino, qui sit perfectus quadratus, ut ex a^2 extrahatur radix, quæ erit a (97.), atque ponatur dextrorsum interjecta lineola; deinde per duplum inventæ radicis a, idest per $2\,a$ dividantur omnes termini datæ quantitatis, qui dividi possunt in integris; dividantur nempe termini $+ 2ab$, & $- 2ac$ per $2a$, & quotientes $+ b$, & $- c$ ponantur in radice post jam inventum terminum a, atque erit $a + b - c$ radix quæsita. Nam fiat quadratum inventæ radicis $a + b - c$, & subtrahatur ex data quantitate, nihil remanebit; consequenter $a + b - c$ est radix quadrata datæ quantitatis.

Quod si post subtractionem aliquid remanet, signum erit datam quantitatem non esse quadratum.

100. Præterea radix quadrata cujuslibet quantitatis exprimitur ponendo eandem quantitatem sub hoc signo $\sqrt[2]{\ }$, vel $\sqrt{\ }$, quod *signum radicale* appellatur.

Sic $\sqrt[2]{64}$ idem significat ac 8; $\sqrt[2]{a^2}$, vel $\sqrt{a^2}$ idem valet ac a. Item $\sqrt{25}$ indicat radicem secundam numeri 25. $\sqrt{ab - cm}$ significat radicem quadratam quantitatis $ab - cm$. Atque hac ratione extrahitur radix quadrata ex qualibet quantitate, quæ non sit quadratum perfectum.

Corollarium.

101. Quapropter ut habeatur quadratum cujusvis quantitatis positæ sub signo radicali, satis est eam ponere extra signum.

Ut

Ut quadratum quantitatis $\sqrt{25}$ est 25; nam ex dictis $\sqrt{25}$ significat 5, & quadratum numeri 5 est 25; ergo $\sqrt{25} \times \sqrt{25}$ producit 25.

Eadem ratione $\sqrt{15} \times \sqrt{15} = 15$. Item $\sqrt{a-b} \times \sqrt{a-b}$ producit $a - b$.

PROBLEMA QUINTUM.

www.libtool.com.cn

Radicem cubicam ex Algebraicis Quantitatibus extrahere. 102.

Resolutio.

Ex quantitatibus simplicibus radix cubica extrahitur dividendo per numerum 3 omnes exponentes datarum quantitatum; ideoque radix tertia quantitatis a^3 est a, quia $a \times a \times a$ restituit a^3.

Item quantitatum a^6, b^9, c^{12}, radices cubicæ sunt a^2, b^3, c^4.

Similiter quantitatis b^2 radix tertia est $b^{\frac{2}{3}}$, quia $b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}$ producit $b^{\frac{6}{3}}$, nimirum restituit b^2 (32.).

Cum vero habent numeros coeficientes, tunc prius extrahitur radix tertia ex numeris coeficientibus, juxta regulas traditas in antecedenti Problemate Tertio. 103.

Itaque quantitatis $8a^6b^3$ radix cubica erit $2a^2b$. Item radix quantitatis $125a^{12}b^3c^6$ est $5a^4bc^2$.

Quod si data quantitas sit composita, ut 104.
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, tunc per antecedentes regulas extrahatur radix cubica ex aliquo termino, qui sit perfecte cubus, ut ex a^3, & ejus radix a dextrorsum ponatur, eritque primus radicis terminus. Postea per triplum quadratum inventæ radicis a dividantur omnes termini divisibiles, nimirum in hoc exemplo per $3a^2$ dividatur terminus $-3a^2b$, & quotiens $-b$ ponatur in radice post terminum a. Fiat cubus totius radicis $a - b$, erit
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, quo subtracto ex data quantitate, nihil remanet; adeoque $a - b$ est radix tertia datæ quantitatis. Hujus operationis ratio ex ipsa cuborum genesi patet.

Si ex data quantitate radix tertia prædicta ratione extrahi nequit, ponatur data quantitas sub signo radicali, supra quod scribatur numerus 3. 105.

Sic $\sqrt[3]{a^4 - bc}$ indicat radicem tertiam quantitatis $a^4 - bc$. Similiter $\sqrt[3]{8a^3}$ significat $2a$, idest radicem cubicam quantitatis $8a^3$. Item $\sqrt[3]{512}$ idem valet ac 8; quod de aliis quibuscumque magnitudinibus intelligatur.

Corollarium.

Hinc sequitur cubum cujusvis quantitatis sub signo radicali $\sqrt[3]{}$ positæ obtineri scribendo eandem quantitatem extra signum. Sic cubus quantitatis $\sqrt[3]{64}$ est 64; nam $\sqrt[3]{64}$ idem omnino significat ac 4; sed 106.

cubus numeri 4 est 64; ergo cubus quantitatis $\sqrt[3]{64}$ erit etiam 64. Similiter cubus quantitatis $\sqrt[3]{abc}$ est abc; atque ita de reliquis.

Scholion.

107. Si ex data fractione extrahenda sit radix quadrata, vel cubica, tum extrahatur quæsita radix tam a numeratore, quam a denominatore ejusdem fractionis. Sic radix quadrata fractionis $\frac{25}{64}$ erit $\frac{5}{8}$, radix cubica fracti $\frac{8}{27}$ erit $\frac{2}{3}$.

Similiter radix quadrata fractionis $\frac{a^6}{b^2}$ erit $\frac{a^3}{b}$. Quantitatis vero $\frac{c}{m}$ radix quadrata erit $\sqrt{\frac{c}{m}}$, vel $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}$. Item radix cubica quantitatis $\frac{a^3}{c^6}$ erit $\frac{a}{c^2}$; & quantitatis $\frac{c}{b}$ radix cubica erit $\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, vel erit $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}$. & sic de cæteris.

108. Præterea radix quadrata cujusvis fractionis invenitur multiplicando numeratorem per denominatorem, & ex producto radicem quadratam extrahendo, cui subscribatur denominator datæ fractionis.

Sic ut inveniatur radix quadrata fractionis $\frac{3}{12}$, muliplicetur 3 in 12, atque ex producto 36 extrahatur radix secunda, quæ est 6, cui subscribatur denominator 12, erit $\frac{6}{12}$, idest $\frac{1}{2}$ radix quæsita.

Atque hæc sunt, quæ de utroque Calculo, Numerico nempe, & Litterali studiosorum adolescentium utilitati consulens tradere existimavi. Nunc ut facilior iisdem ad Geometriæ Planæ Elementa percipienda aditus pateat, ad universam Proportionum Doctrinam explanandam gradum faciamus.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

De Quantitatum rationibus, & proportionibus.

DEFINITIO PRIMA.

www.libtool.com.cn

Quantitates omnes, quæ inter se comparatæ æquales sunt, vel inæquales, dicuntur *Quantitates Homogeneæ*, seu *ejusdem generis*. Duo quilibet numeri, si inter se comparentur, æquales erunt, vel inæquales; ideoque omnes numeri sunt quantitates ejusdem generis.

Similiter omnes longitudines inter se, omnes superficies inter se, &c, sunt magnitudines ejusdem generis; quia si duæ longitudines inter se comparentur, vel erunt æquales, vel una erit altera major. Idem intelligatur de reliquis quantitatibus.

Definitio II.

Quantitates vero, quæ inter se comparari nequeunt, quæ nempe æquales, vel inæquales dici non possunt, appellantur *Quantitates Heterogeneæ*, seu *diversi generis*. Sic pondus, & longitudo sunt quantitates heterogeneæ; neque enim dici potest datum quodcumque pondus æquale esse cuilibet datæ longitudini, vel ea majus, vel minus. Et sic de cæteris.

Definitio III.

Quantitates homogeneæ, quæ aliquam communem mensuram habent, dicuntur *quantitates commensurabiles*. Omnes numeri sunt commensurabiles, quia unitas est communis omnium numerorum mensura (Arith. 39.). Similiter linea septem pedum, & linea duodecim pedum longitudinis sunt lineæ commensurabiles, quia alia linea unius pedis longitudinis eas dimetitur.

Definitio IV.

Illæ vero magnitudines ejusdem generis, quibus nulla inveniri potest communis mensura, quantitates *incommensurabiles* vocantur.

Generaliter duæ quantitates dicuntur commensurabiles, quando prima ad secundam habet eandem habitudinem, seu relationem, quam habet numerus aliquis ad alium numerum. Incommensurabiles vero sunt, cum habitudo, seu ratio unius ad alteram non est sicut numerus ad numerum, nimirum numeris indicari nequit.

Definitio V.

Quoties quælibet data quantitas cum alia ejusdem generis confertur, comparatio illa unius quantitatis ad alteram appellatur *Ratio*, quæ duplex est, Arithmetica nempe, & Geometrica.

www.libtool.com.cn

Definitio VI.

Arithmetica ratio dicitur, quando consideratur differentia inter duas datas quantitates: ut comparando numerum 12 cum numero 4, si consideremus numerum 12 excedere numerum 4 per 8 unitates, tunc comparatio numeri 12 ad numerum 4 vocatur ratio Arithmetica. Similiter ratio numeri 5 ad numerum 7 erit Arithmetica, si consideremus numerum 5 per duas unitates deficere a numero 7.

Definitio VII.

Ratio vero *Geometrica* appellatur, quando animadvertitur primam quantitatem continere secundam, vel in ea contineri. Sic ratio numeri 12 ad numerum 4 dicitur geometrica, si consideremus numerum 12 triplum esse numeri 4. Similiter ratio numeri 2 ad numerum 14 erit geometrica, si nos animadvertamus numerum 2 esse septimam partem numeri 14.

Definitio VIII.

Omnis igitur ratio a duobus terminis constituitur, quorum primus, qui nempe ad alterum refertur, dicitur *Antecedens rationis*; secundus vero terminus, ad quem primus refertur, dicitur *Consequens* ejusdem *rationis*: ut in ratione 12 ad 3, numerus 12 est antecedens, & numerus 3 est consequens ejusdem rationis.

Inter antecedentem, & consequentem cujusvis datæ rationis geometricæ brevitatis caussa ponuntur duo puncta, quæ significant *ad*. Sic ratio numeri 12 ad numerum 3 ita scribitur, 12 : 3, & legitur 12 ad 3. Item c : m, legitur c ad m.

Definitio IX.

In omni ratione geometrica quantitas illa, quæ habitudinem exprimit, seu respectum antecedentis ad consequentem, appellatur *nomen rationis*, vel *quantitas*, seu *valor rationis*, vel *rationis exponens*. Itaque nomen rationis 12 : 3 est 4, quia numerus 12 quadruplus est numeri 3. Nomen, seu valor rationis 3 : 12 erit $\frac{1}{4}$, quia 3 est quarta pars numeri 12. Atque ita de reliquis.

Defi-

Definitio X.

Quapropter cujusvis geometricæ rationis nomen, seu valor invenitur dividendo antecedentem per consequentem: ut nomen rationis 18 : 6 erit $\frac{18}{6}$, idest 3. Quantitas seu valor rationis 14 : 6 erit $\frac{14}{6}$, idest $2\frac{1}{3}$ (Arith. 57.). Item rationis 7 : 21 valor erit $\frac{7}{21}$, nimirum $\frac{1}{3}$; & rationis 12 : 28 valor erit $\frac{12}{28}$, idest $\frac{3}{7}$.

www.libtool.com.cn

Similiter nomen, seu valor rationis cm : c erit $\frac{cm}{c}$, idest m; & rationis a : ac valor erit $\frac{a}{ac}$, sive $\frac{1}{c}$.

Definitio XI.

Quælibet igitur geometrica ratio æqualis est fractioni, cujus numerator sit antecedens rationis, & denominator sit consequens ejusdem rationis. Nam exempli gratia valor rationis 15 : 5, per ea, quæ diximus in antecedenti Definitione, est 3; item valor fractionis $\frac{15}{5}$ est etiam 3; ergo (axiom. 1.) ratio 15 : 5 æqualis est fractioni $\frac{15}{5}$.

Similiter ratio a : c æqualis est fractioni $\frac{a}{c}$: consequenter data qualibet ratione a : m, habemus fractionem æqualem $\frac{a}{m}$; & e converso data qualibet fractione $\frac{b}{c}$, æqualem habemus geometricam rationem b : c.

Definitio XII.

Rationes Geometricæ similes, & eædem, seu æquales dicuntur illæ, quæ habent valores æquales, sive quarum antecedentes eandem habitudinem, seu respectum habent ad suos consequentes. Itaque rationes 12 : 3, 20 : 5, 28 : 7, &c. sunt rationes æquales, quia habent idem nomen, seu eundem valorem 4; est enim $\frac{12}{3} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7} = 4$ (Arith. 57.)

Item rationes 2 : 8, 3 : 12 sunt æquales inter se, quia $\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (Arith. 51.).

Similiter ratio ac : c æqualis est rationi am : m; nam valor rationis ac : c est $\frac{ac}{c}$, idest a; & valor rationis am : m est $\frac{am}{m}$, nimirum eadem quantitas a.

Generaliter ratio a : b semper æqualis erit rationi c : m, quoties fuerit $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$; & econverso si fuerit a : b = c : m, erit etiam $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$.

Consequenter æquales rationes constituunt fractiones æquales; & vicissim æquales fractiones constituunt rationes æquales.

De-

Definitio XIII.

Quando cujusvis datæ rationis consequens antecedenti comparatur, tunc oritur alia ratio, quæ vocatur *Ratio inversa*, vel *reciproca* datæ rationis. Ut data ratione 12 : 4, ratio inversa hujus rationis erit 4: 12. Similiter rationis a : c ratio inversa erit c : a; & sic de reliquis.

www.libtool.com.cn

Definitio XIV.

Proportio, sive ut aliis placet, *proportionalitas*, vel *analogia* est æqualium rationum comparatio. Itaque si duæ æquales rationes (Defin. 12.) 12 : 4, & 15 : 5 inter se comparentur, fiet proportio ita, 12 : 4 quemadmodum 15 : 5; idest antecedens 12 eandem habitudinem, seu relationem habet ad suum consequentem 4, quam habet antecedens 15 ad suum consequentem 5.

Similiter duæ rationes æquales am : a, & bm : b constituunt proportionem am ad a, sicuti bm ad b; idest quam habitudinem, seu respectum habet am ad a, eandem pariter relationem habet bm ad b.

Definitio XV.

Quapropter, quatuor termini sunt geometrice proportionales, quando primus eodem modo ad secundum refertur, ac tertius ad quartum. Proportio vero quatuor terminorum hac ratione scribitur
12 : 4 : : 15 : 5, vel 12 : 4 ≐ 15 : 5, & legitur 12 ad 4 sicuti 15 ad 5, vel 12 ad 4 æquale 15 ad 5; & sic de cæteris.

Definitio XVI.

Quoniam proportio geometrica quatuor terminorum a duabus æqualibus rationibus constituitur, & quælibet ratio duos terminos habet, antecedentem nempe, & consequentem; hinc evidenter sequitur, in omni proportione duos esse antecedentes, primum nempe, & tertium terminum; itemque duos consequentes, secundum, & quartum terminum. Atque primus terminus dicitur *primus antecedens*; tertius vero terminus *secundus antecedens* vocatur. Secundus terminus *primus consequens* appellatur, & quartus terminus *secundus* proportionis *consequens* dicitur.

Præterea primus terminus, & quartus dicuntur *termini extremi*, vel *extrema*; secundus vero, & tertius vocantur *termini medii*, vel *media*. Insuper antecedentes inter se, & consequentes etiam inter se dicuntur termini *homologi*, idest *ejusdem nominis*. Ut in proportione 12 : 3 : : 8 : 2, termini 12, & 8 vocantur termini homologi, quia sunt ambo antecedentes. Similiter termini 3, & 2 dicuntur homologi, seu ejusdem nominis; sunt enim ambo consequentes.

Defi-

Definitio XVII.

Quoties quatuor termini sunt proportionales, & secundus terminus non est æqualis tertio, tunc ea *proportio discreta* appellatur, ut
8 : 2 : : 20 : 5, vel
a : b : : c : m.

www.libtool.com.cn

Definitio XVIII.

Cum vero secundus terminus æqualis est tertio, sive quando primus terminus ad secundum eandem rationem habet, quam idem secundus ad tertium; tunc ea *proportio continua* vocatur, & tribus solum terminis exprimitur, atque indicatur hoc signo ∺, quod eidem proportioni præponitur. Ut proportio
24 : 12 : : 12 : 6 est continua, & scribitur hoc modo ∺ 24 : 12 : 6, atque legitur, proportio geometrica continua 24 ad 12 ad 6, vel 24 ad 12 eandem rationem habet, quam idem 12 ad 6. Adeoque in proportione continua secundus terminus gerit vices consequentis, & antecedentis; est nempe consequens primi, & antecedens tertii termini.
Similiter proportio
a : b : : b : c est continua, & ita scribitur ∺ a : b : c, atque legitur a ad b, sicuti b ad c.

Definitio XIX.

Proportio Geometrica continua, quæ pluribus quam tribus constat terminis, vocatur *Progressio Geometrica*, quæ ad infinitos terminos continuari, vel extendi potest, sive termini crescant, sive decrescant.
Sic Progressio ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c. est progressio crescens.
Progressio vero ∺ 8 : 4 : 2 : 1 : $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{16}$: $\frac{1}{32}$: $\frac{1}{64}$ &c. est decrescens; atque ambæ in infinitum continuari possunt, ut per se patet.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, productum extremorum semper æquale erit producto mediorum.

Sint quatuor termini proportionales
a : b : : c : m, dico, productum am extremorum a, & m, æquale esse producto bc mediorum b, & c.

Demonstratio.

Quoniam ex hypothesi est
a : b : : c : m, sive (Defin. 15.) est

a : b

$a:b = c:m$, & æquales rationes conſtituunt fractiones æquales (Defin. 12.); ergo erit $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$. Multiplicentur æquales quantitates $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{m}$ per bm (quod eſt productum conſequentium terminorum, ſeu denominatorum b, & m), erunt (Algeb. 68.) producta $\frac{abm}{b}$, & $\frac{bcm}{m}$, ideſt (Algeb. 36.) am, & bc æqualia inter ſe (Axiom. 4.); erit nempe $am = bc$.

www.fbtool.com.cn

Quapropter datis quatuor terminis proportionalibus, ſive numeri ſunt, ſive longitudines, ſive alterius cujuſcumque generis quantitates, ſemper erit productum ex primo in quartum æquale producto ſecundi termini in tertium. Quod erat demonſtrandum.

In hac Propoſitione generaliſſime demonſtravimus quod Euclides de lineis in prima parte Propoſitionis 16. Lib. 6., & de numeris in prima parte Propoſitionis 19. Lib. 7. demonſtrat.

Sit exemplum numericum; ponamus nempe $a = 21$, $b = 7$, $c = 6$, & $m = 2$, habebitur proportio
$21:7::6:2$; & multiplicando extrema, atque media, erit æquatio
$21 \times 2 = 7 \times 6$, ideſt $42 = 42$.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Si quatuor termini ea conditione inter ſe comparati ſint, ut productum ex primo in quartum æquale ſit producto ſecundi termini in tertium, erunt iidem termini proportionales inter ſe.

Dati ſint quatuor termini
b, a, m, c, & rectangulum (Algeb. 77.) ſeu productum bc extremorum æquale ſit producto am mediorum, dico, datos terminos eſſe inter ſe proportionales; erit nempe
$b:a::m:c$.

Demonſtratio.

Etenim ex hypotheſi habemus $bc = am$, & dividendo æquales quantitates bc, & am per ac (quod eſt productum ſecundi termini a in tertium c), quotientes $\frac{bc}{ac}$, & $\frac{am}{ac}$ (Axiom. 5.) erunt æquales; erit nempe $\frac{bc}{ac} = \frac{am}{ac}$, ideſt $\frac{b}{a} = \frac{m}{c}$ (Algeb. 62.). Sed æquales fractiones conſtituunt æquales rationes (Defin. 12.); ideoque cum oſtenſum ſit $\frac{b}{a} = \frac{m}{c}$, erit pariter $b:a = m:c$; ſive $b:a::m:c$ (Defin. 15.). Ergo datis quatuor terminis cujuſvis generis, ſi productum extremorum æquale ſit producto mediorum, ſemper dati termini erunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

Hoc Theorema generalem continet Demonſtrationem ejus, quod ab Eucli-

Euclide ostenditur in secunda parte Propositionis 16. Lib. 6. de lineis, & in parte secunda Propositionis 19. Lib. 7. de numeris.

Sint numeri 7, 28, 13, 52, ejus conditionis, ut 7×52 adæquet productum 13×28, erit $7 : 28 :: 13 : 52$, ut per se patet.

Corollarium.

Quapropter duo qualibet producta æqualia, sive quælibet æquatio resolvi potest in quatuor terminos proportionales, quorum extremi sint factores unius producti, & medii termini sint factores alterius æqualis producti; quod dicitur *æquationem dissolvere*.

Sit æquatio

$12 \times 4 = 24 \times 2$, dissolvendo hanc æquationem, semper erit proportio

$12 : 24 :: 2 : 4$, vel
$12 : 2 :: 24 : 4$, vel
$4 : 24 :: 2 : 12$, vel
$4 : 2 :: 24 : 12$, vel
$24 : 12 :: 4 : 2$, vel
$24 : 4 :: 12 : 2$, vel
$2 : 12 :: 4 : 24$, vel
$2 : 4 :: 12 : 24$; quia semper productum extremorum adæquat productum mediorum; est enim
$12 \times 4 = 24 \times 2$, sive, quod idem est,
$24 \times 2 = 12 \times 4$.

Generaliter sit æquatio

$am = bc$, dissolvendo erit
$a : b :: c : m$, vel
$a : c :: b : m$, aut
$m : b :: c : a$, vel
$m : c :: b : a$, vel
$b : a :: m : c$, aut
$b : m :: a : c$, vel
$c : a :: m : b$, aut
$c : m :: a : b$; semper enim productum extremorum æquale est producto mediorum, cum ex hypothesi sit
$am = bc$.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Datis tribus terminis invenire quartum terminum proportionalem.

Dati sint tres termini a, b, m, & inveniendus sit quartus, ad quem tertius m eandem rationem habeat, quam habet primus a ad secundum b.

Resolutio.

Multiplicetur secundus b per tertium m, & productum bm dividatur per primum terminum a, quotiens $\frac{bm}{a}$ erit quartus quæsitus terminus proportionalis.

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Quia x potest significare quamlibet incognitam quantitatem (Algeb. 3.), ideo quartus quæsitus terminus vocetur *x*, atque tunc habebitur proportio a : b : : m : x; & multiplicando media, & extrema per primam Propositionem, erit productum extremorum ax = bm producto mediorum; & dividendo totam æquationem, idest duo producta æqualia ax, & bm per eandem quantitatem a, quotientes erunt æquales (Axiom. 5.), erit nempe $x = \frac{bm}{a}$. Ergo quartus quæsitus terminus æqualis est quotienti, qui oritur dividendo productum ex secundo termino in tertium, per primum terminum. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Scholion.

In hac Propositione præcipuam celeberrimamque demonstravimus Arithmetices regulam, quæ *Proportionum Regula* vocatur, atque ob ejus præstantiam, & immensam fere utilitatem *Regula Aurea* nuncupatur. Vulgo autem dicitur *Regula trium*; quia ex tribus datis numeris quartum quæsitum proportionalem invenit, ut ante demonstravimus.

Per hanc regulam, quæ facillima est iis, qui multiplicationem, & divisionem perfecte didicerunt, difficiliores quæstiones Arithmeticæ resolvuntur. Ut autem juvenes hujus regulæ utilitatem, atque excellentiam clarius intelligant, optimum erit nonnullas quæstiones resolvere.

Cum autem in omni quæstione ex tribus datis numeris duo semper sint homogenei, & alter sit ejusdem generis cum quarto quæsito; itaque in primis ordine disponendi sunt dati numeri, ita ut medium locum teneat is, qui homogeneus est cum quarto inveniendo; tertio loco ponatur is, qui quæstionem annexam habet; & is, qui huic homogeneus est, primo loco scribatur. Postea, juxta antecedentem Demonstrationem, multiplicetur secundus in tertium, & productum dividatur per primum numerum, quotiens erit quartus quæsitus numerus.

Quæstio Prima.

Est Tabellarius, qui percurrit milliaria 72 horis 12, quæritur quot horis percurret millia 420. Terminus, qui homogeneus est cum quarto quæsito sunt horæ 12; hic ponatur secundo loco. Terminus, qui annexam habet quæstionem sunt milliaria 420; hic scribatur tertio loco:

eo: primo autem loco ponatur terminus huic homogeneus, nempe millia 72; scilicet fiat

Mil. Hor. Mil. Hor.

72 : 12 : : 420 : . Multiplicetur 420 per 12, & productum 5040 dividatur per 72, quotiens 70 dat quartum quæsitum terminum; est enim 72 : 12 : : 420 : 70, quia

$72 \times 70 = 12 \times 420 = 5040$. Adeoque horis 70 Tabellarius percurret prædicta milliaria 420.

www.libtool.com.cn

Quæstio Secunda.

Argenteis libris nostratibus 192 emptæ fuerunt 16 ulnæ panni, quæritur pretium ulnarum 9 ejusdem panni. Ordine disponantur termini, ut antea diximus, nempe

ulnæ, lib. ulnæ, lib.

16 : 192 : : 9 : . Atque ducto 9 in 192, productum 1728 dividatur per 16, quotus 108 erit quæsitus numerus librarum.

Secundo cum in data quæstione plures quam tres inveniuntur termini, nimirum 5, vel 7, vel 9, aut etiam plures, tunc regula proportionum dicitur *Composita*; atque inter datos terminos tres semper sunt præcipui, alii vero minus principales, qui cum terminis principalibus componantur, ut fiant tres solum termini: sicuti videre est in exemplis sequentibus.

Quæstio Tertia.

Milites 48 diebus 6 expenderunt argenteas libras 432, quæritur quot libras expendere debeant milites 36 diebus 9.

In hoc problemate tres præcipui termini sunt milites 48, libræ 432, & milites 36. Ad milites 48 spectant dies 6, & ad milites 36 spectant dies 9; adeoque multiplicetur 48 in 6, & 36 in 9, fient duo producta 288, & 324; quorum primum 288 erit primus terminus; secundum vero productum 324 erit tertius terminus, & pro secundo ponantur libræ 432; fiat nempe

288 : 432 : : 324 :

Multiplicetur 432 per 324, & productum 139968 dividatur per primum terminum 288, quotiens 486 erit quæsitus terminus: proindeque milites 36 diebus 9 solvere debent libras 486.

Quæstio Quarta.

Mercatores 4 libris 800 mensibus 3 lucrantur libras 20; quæritur quot libras lucrati sint mercatores 6 libris 600 mensibus 8; nempe 4, 800, 3 : 20 : : 6, 1600, 8 : x. Tres præcipui termini sunt mercatores 4, libræ 20, & mercatores 6. Ad mercatores 4 spectant libræ 1600, & menses 8; adeoque multiplicetur 4 in 800 in 3, & productum 9600 erit primus terminus. Similiter multiplicetur 6 in

1600 in 8, & productum 76800 erit tertius terminus; secundus vero erunt libræ 20: itaque erit

$9600 : 20 :: 76800 : x$. Ducatur 76800 in 20, & productum 1536000 dividatur per 9600, quotiens 160 erit numerus librarum; quæ a sex mercatoribus libris 1600 mensibus 8 lucratæ fuerunt.

Tertio regula trium sive simplex, sive composita sit, semper vocatur *directa*, quoties primus terminus eodem modo ad secundum refertur, ac tertius ad quartum quæsitum, ut in antecedentibus quæstionibus. At quum data quæstio talis est naturæ, ut quanto primus terminus major, aut minor est tertio, tanto quartus quæsitus major, vel minor esse debeat secundo; tunc regula dicitur *inversa*, vel *eversa*, aut *reciproca*; atque tunc quæsitus terminus invenitur dividendo per tertium terminum productum ex primo in secundum. Exempla rem declarabunt.

Quæstio Quinta.

Ex panno habente latitudinem unciarum 32 pro vestimentis Marcelli positæ fuerunt ulnæ 9: quæritur quot ulnæ positæ sint ex panno vesti subsuto, qui latitudinem habebat unciarum 24.

Quia, ut per se patet, quo major est latitudo panni, eo minor requiritur longitudo, seu numerus ulnarum panni ad vestimenta perficienda; ideoque cum in hac quæstione latitudo 24 secundi panni minor sit latitudine 32 prioris, numerus quæsitus ulnarum secundi panni major erit numero ulnarum 9 primi panni. Consequenter quanto primus 32 major est tertio termino 24, tanto quartus quæsitus major erit secundo 9. Quapropter si quartus quæsitus vocetur x, erit proportio

$32 : 24 :: x : 9$; & multiplicando media, atque extrema (Prop. 1.), erit æquatio

$24x = 32 \times 9$, idest $24x = 288$; & dividendo totam æquationem per 24, erit (Axiom. 5.) $x = \frac{288}{24}$, idest $x = 12$; ergo quartus quæsitus terminus est 12: nimirum 12 ulnæ panni lati uncias 24 eandem vestem faciunt, ac ulnæ 9 panni habentis latitudinem unciarum 32. Quapropter in regula trium inversa quartus terminus invenitur multiplicando primum terminum per secundum, & dividendo productum illud per tertium terminum, quotiens erit quartus quæsitus terminus.

Quæstio Sexta.

In Urbe obsidione cincta ali possunt milites 1200 mensibus 8; quæritur quot mensibus ali poterunt milites 2400: paucioribus mensibus, ut patet, quia quo plures sunt milites, eo citius consumuntur annonæ. Itaque quanto primus terminus 1200 minor est tertio 2400, tanto quartus incognitus minor esse debet secundo termino 8; ideoque resolvatur quæstio per regulam inversam, nimirum multiplicetur primus 1200 per secundum 8, & productum 9600 dividatur per ter-

tertium terminum 2400, quotiens 4 erit quartus quæsitus numerus: est enim

$1200 : 2400 :: 4 : 8$, ut evidens est.

Eadem methodo resolvuntur omnes aliæ quæstiones ad regulam proportionum spectantes. Reliquæ tres Arithmetices regulæ, nimirum *Societatis*, *Positionis*, vel *Falsi*, *&* *Alligationis* ex hac proportionum regula omnino pendent: ut videre est in Arithmetices Auctoribus, quos consulant ii, qui eas perdiscere cupiunt.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO QUARTA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, primus ad tertium eandem rationem habebit, quam habet secundus ad quartum. Atque hoc argumentandi genus dicitur Alternare, *vel* Permutare *rationem.*

Sint quatuor termini proportionales
$a : b :: c : m$, alternando erit
$a : c :: b : m$.

Demonstratio.

Cum ex hypothesi sit $a : b :: c : m$, multiplicando media, atque extrema, erit (Prop. 1.) $am = bc$; & dissolvendo ex a per c (Coroll. Prop. 2.) erit $a : c :: b : m$. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 16. *Libri* 5. Euclidis.

Sit $28 : 12 :: 7 : 3$, alternando erit
$28 : 7 :: 12 : 3$, quia
$28 \times 3 = 7 \times 12$.

Corollarium.

Quapropter datis quatuor quantitatibus proportionalibus, ut $a : b :: c : m$, si prima quantitas a æqualis fuerit tertiæ c, etiam secunda b erit æqualis quartæ m; si vero prima a major fuerit tertia c, etiam secunda b major erit quarta m. Item si prima a minor fuerit tertia c, etiam secunda b minor erit quarta m, quia alternando semper habetur $a : c :: b : m$.

Est Propositio 14. *Libri* 5. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Si fuerint quatuor termini proportionales, secundus ad primum eandem rationem habebit, quam habet quartus ad tertium. Quod dicitur rationem invertere *(Defin. 13.)*.

Sint quatuor termini proportionales
$a : m :: c : b$, invertendo erit
$m : a :: b : c$.

De-

Demonſtratio.

Habemus ex hypotheſi $a : m :: c : b$; ergo (Prop. 1.) erit $ab = cm$; & diſſolvendo æquationem (Coroll. Prop. 2.) erit $m : a :: b : c$. Quod erat oſtendendum.

Eſt Corollarium Propoſitionis quartæ Lib. 5. Euclidis.

Sit $3 : 18 :: 5 : 30$, invertendo erit
$18 : 3 :: 30 : 5$, ut evidens eſt.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO SEXTA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, ſumma primi, & ſecundi eandem rationem habebit ad ſecundum, quam habet ſumma tertii cum quarto ad eundem quartum. Hoc argumentandi genus appellatur Compoſitio rationis.

Sint quatuor magnitudines proportionales
$a : m :: b : c$, componendo erit
$a + m : m :: b + c : c$.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi eſt $a : m :: b : c$, multiplicando media, & extrema erit (Prop. 1.) $ac = bm$. Utrique æquationis parti addatur cm productum conſequentium m, c, fiet (Axiom. 2.) nova æquatio
$ac + cm = bm + cm$, ideſt
$\overline{a + m} \times c = \overline{b + c} \times m$ (Algeb. 28.), quia multiplicando $a + m$ per c producit $ac + cm$, & multiplicando $b + c$ per m, dat $bm + cm$; & diſſolvendo æquationem
$\overline{a + m} \times c = \overline{b + c} \times m$, habebitur (Coroll. Prop. 2.) $a + m : m :: b + c : c$. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 18. Lib. 5. Euclidis.

Sit $8 : 2 :: 20 : 5$, componendo erit
$8 + 2 : 2 :: 20 + 5 : 5$, ideſt
$10 : 2 :: 25 : 5$.

PRO-

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Quoties fuerint quatuor magnitudines proportionales, differentia inter primam, & secundam ad secundam eandem rationem habebit, quam habet differentia inter tertiam, & quartam ad eandem quartam. Hac argumentatio dicitur Divisio rationis.

www.fiptool.com.cn

Sit $a : b :: c : m$, dividendo erit
$a - b : b :: c - m : m$.

Demonstratio.

Est $a : b :: c : m$; ergo (Prop. 1.) erit $am = bc$. Ab æqualibus productis am, & bc subtrahatur eadem quantitas bm, productum consequentium b, & m, remanebit (Axiom. 3.)
$am - bm = bc - bm$, sive, quod idem est (Algeb. 28.),
$\overline{a - b} \times m = \overline{c - m} \times b$; & dissolvendo ex $a - b$ per b (Coroll. Prop. 2.) erit
$a - b : b :: c - m : m$. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 17. Libri 5. Euclidis.

Sit $21 : 7 :: 3 : 1$, dividendo erit
$21 - 7 : 7 :: 3 - 1 : 1$, idest
$14 : 7 :: 2 : 1$.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, ita erit prima ad differentiam inter primam, & secundam, sicuti tertia ad differentiam inter tertiam, & quartam. Et hic argumentandi modus Conversio rationis *appellatur*.

Sit $a : b :: c : m$, convertendo erit
$a : a - b :: c : c - m$.

Demonstratio.

Quia ex hypothesi est $a : b :: c : m$, multiplicando media, & extrema (Prop. 1.) erit $am = bc$. Ex eodem producto ac antecedentium a, & c, subtrahantur æqualia producta am, & bc, residua erunt æqualia (Axiom. 3.), erit nempe
$ac - am = ac - bc$, idest (Algeb. 28.)

c —

$\overline{c - m} \times a = \overline{a - b} \times c$; & diſſolvendo æquationem ex a per $a - b$ (Coroll. Prop. 2.), erit proportio
$a : a - b :: c : c - m$. Quod erat demonſtrandum.
Eſt Propoſitio 19. Libri 5. Euclidis.
Sit $12 : 3 :: 28 : 7$, convertendo erit
$12 : 12 - 3 :: 28 : 28 - 7$, nempe
$12 : 9 :: 28 : 21$, quia
$12 \times 21 = 9 \times 28$.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO NONA.

Axioma.

Quantitates æquales eandem rationem habent ad aliam quantitatem. Viciſſim eadem quantitas eandem rationem habet ad æquales quantitates.

Sit $a = b$, & data ſit alia quantitas c, erit $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (Axiom. 5.); ideoque erit etiam
$a : c :: b : c$ (Defin. 12, 14.).
Similiter erit $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ (Axiom. 5.); conſequenter erit $c : a :: c : b$ (Defin. 12, 14.).
Eſt Propoſitio 7. Libri 5. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMA.

Axioma.

Magnitudines, quæ habent eandem rationem ad eandem quantitatem, ſunt inter ſe æquales. Similiter ſi eadem magnitudo eandem rationem habuerit ad alias quantitates, quantitates ipſæ erunt inter ſe æquales.

Sit $a : m :: b : m$, erit $a = b$ (Coroll. Prop. 4.), quia eſt $m = m$.
Præterea ſit $m : c :: m : b$, erit $c = b$ (Corollar. Prop. 4.), quia eſt $m = m$.
Eſt Propoſitio 9. Libri 5. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO UNDECIMA.

Axioma.

Rationes, quae sunt similes, seu aequales eidem rationi, vel aequalibus rationibus, sunt etiam aequales inter se.

Sit a : b : : f : g, & c : m : : f : g, nimirum (Defin. 15.) a : b = f : g, & c : m = f : g, (Axiom. 1.) erit a : b = c : m, ideft a : b : : c : m, ut per se patet.

Eft Propositio 11. Libri 5. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO DUODECIMA.

Theorema.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionales, seu quotcunque rationes aequales, colligendo, *ita se habebit summa omnium antecedentium ad summam omnium consequentium, sicuti quaelibet antecedens ad suam consequentem.*

Sint rationes aequales, seu quantitates proportionales am : a : : bm : b : : cm : c : : fm : f &c, colligendo erit am + bm + cm + fm : a + b + c + f : : cm : c, vel : : am : a &c.

Demonstratio.

Multiplicetur primus terminus am + bm + cm + fm per quartum c, productum erit acm + bcm + ccm + cfm.

Similiter multiplicando secundum terminum a + b + c + f per tertium cm, oritur idem productum acm + bcm + ccm + fcm; ergo (Prop. 2.) quatuor praedicti termini sunt proportionales; eft nempe am + bm + cm + fm : a + b + c + f : : cm : c, vel : : fm : f &c. Quod erat demonstrandum.

Eft Propositio 12. Libri 5. Euclidis.

Sint 8 : 2 : : 20 : 5 : : 12 : 3 : : 4 : 1 &c, erit 8 + 20 + 12 + 4 : 2 + 5 + 3 + 1 : : 8 : 2, ideft 44 : 11 : : 8 : 2, vel : : 20 : 5 &c.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, si antecedentes, vel consequentes, vel primus & secundus terminus, vel tertius & quartus terminus multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem, quatuor termini semper proportionales erunt.

Sit proportio $a : f :: b : c$, multiplicando, aut dividendo antecedentes a, & b, vel consequentes f, & c, vel primam rationem, idest terminos a, & f, vel terminos b, & c per eandem quantitatem m, quatuor termini erunt semper proportionales, nimirum $am : f :: bm : c$, vel $a : fm :: b : cm$, &c;

item $\frac{a}{m} : f :: \frac{b}{m} : c$, vel

$a : \frac{f}{m} :: b : \frac{c}{m}$, &c.

Demonstratio Partis Primæ.

Habemus $a : f :: b : c$; ergo (Prop. 1.) erit $ac = fb$; & multiplicando totam æquationem per m, (Axiom. 4.) erit $acm = fbm$, & dissolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit proportio $am : f :: bm : c$, vel $a : fm :: b : cm$, vel $am : fm :: b : c$, vel $a : f :: bm : cm$. Quod erat primo demonstrandum.

Demonstratio Partis Secundæ.

Æquatio superius inventa, nempe $ac = fb$ dividatur per m, (Axiom. 5.) habebitur $\frac{ac}{m} = \frac{fb}{m}$; & dissolvendo æquationem (Coroll. Prop. 2.) erit $\frac{a}{m} : f :: \frac{b}{m} : c$, vel $a : \frac{f}{m} :: b : \frac{c}{m}$, vel $\frac{a}{m} : \frac{f}{m} :: b : c$, vel $a : f :: \frac{b}{m} : \frac{c}{m}$; semper enim productum extremorum adæquat productum mediorum, cum ostensum sit esse $\frac{ac}{m} = \frac{fb}{m}$. Ergo patet propositum.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

Si omnes termini cujusvis datæ proportionis per eandem quantitatem, vel antecedentes per unam quantitatem, & consequentes per aliam; vel duo primi termini per unam, & duo ultimi per aliam quantitatem multiplicentur, aut dividantur, quatuor termini semper proportionales erunt.

Data sit proportio $b : a :: f : g$
primo multiplicando omnes terminos per quamlibet quantitatem m, erit nova proportio
$am : bm :: fm : gm$.

De-

Demonstratio.

Data est proportio $b : a :: f : g$; adeoque erit æquatio (Prop. 1.) $bg = af$. Multiplicetur æquatio hæc per mm, & (Axiom. 4.) habebitur $bgmm = afmm$, & dissolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit $bm : am :: fm : gm$. Quod erat primum.

Secundo dividendo omnes terminos datæ proportionis per eandem quantitatem c, erit proportio

www.fbtool.com.cn

$\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{c}$.

Demonstratio.

Inventa æquatio $bg = af$ dividatur per cc, erit (Axiom. 5.) $\frac{bg}{cc} = \frac{af}{cc}$, & dissolvendo erit

$\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{c}$. Quod erat secundum.

Tertio si antecedentes multiplicentur per c, & consequentes per m; vel prima ratio per c, & secunda per m, erit

$bc : am :: fc : gm$, vel $bc : ac :: fm : gm$.

Demonstratio.

Æquatio $bg = af$ multiplicetur per cm, & (Axiom. 4.) erit $bgcm = afcm$; & dissolvendo erit

$bc : am :: fc : gm$, vel erit $bc : ac :: fm : gm$.

Quarto si antecedentes dividantur per c, & consequentes per m, vel prima ratio per c, & secunda per m, erunt proportionales

$\frac{b}{c} : \frac{a}{m} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{m}$, vel $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{m} : \frac{g}{m}$.

Demonstratio.

Dividatur æquatio ante inventa $bg = af$ per cm, erit (Axiom. 5.) $\frac{bg}{cm} = \frac{af}{cm}$; & dissolvendo hanc æquationem (Coroll. Prop. 2.) erit

$\frac{b}{c} : \frac{a}{m} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{m}$; item $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{m} : \frac{g}{m}$. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Theorema.

Datis duabus, aut pluribus proportionibus, quæ habeant eosdem consequentes, erit summa priorum antecedentium ad communem consequentem, sicuti summa secundorum antecedentium ad eorum communem consequentem.

www.fibtool.com.cn

Si autem habuerint eosdem antecedentes, erit primus communis antecedens ad summam priorum consequentium, ut secundus communis antecedens ad summam secundorum consequentium.

Primo sint proportiones $a : m :: c : g$, $b : m :: f : g$, quæ habeant eosdem consequentes m, & g, erit
$a + b : m :: c + f : g$.

Demonstratio.

Ex datis proportionibus $a : m :: c : g$, $b : m :: f : g$ (Propos. 1.) oriuntur æquationes $ag = mc$, & $bg = mf$.

Si prima æquatio addatur secundæ, (Axiom. 2.) fiet alia æquatio $ag + bg = mc + mf$, idest (Algeb. 28.)
$\overline{a + b} \times g = \overline{c + f} \times m$; & dissolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit
$a + b : m :: c + f : g$. Quod erat primo demonstrandum.

Secundo datæ sint proportiones
$a : c :: b : m$, & $a : f :: b : g$, quæ habeant eosdem antecedentes a, & b, erit
$a : c + f :: b : m + g$.

Demonstratio.

Habemus $a : c :: b : m$, & $a : f :: b : g$; consequenter (Prop. 1.) erit $am = bc$, & $ag = fb$; atque addendo primam æquationem secundæ, (Axiom. 2.) erit
$am + ag = bc + fb$, sive (Algeb. 28.)
$a \times \overline{m + g} = b \times \overline{c + f}$; & dissolvendo erit
$a : c + f :: b : m + g$. Quod erat secundo demonstrandum.

Prima pars hujus Propositionis est Propositio 24. Libri 5. Euclidis.

Definitio XX.

Ratio illa, cujus valor adæquat productum valorum aliarum rationum, dicitur *Ratio Composita* ex aliis datis rationibus. Sic ratio $30 : 5$ dicitur composita ex rationibus $14 : 7$, & $12 : 4$, quia ejus

ejus valor $\frac{30}{5}$, ideſt 6 (Defin. 10.) æqualis eſt producto ex 2 in 3, quod fit multiplicando valorem $\frac{24}{12}$, ideſt 2, in valorem $\frac{12}{4}$, ideſt 3.

Similiter ratio cma : a dicitur compoſita ex rationibus cb : b, & mx : x, quia ejus valor $\frac{cma}{a}$, ſeu cm, adæquat productum ex quantitate c (quæ eſt valor rationis cb : b) in quantitatem m, quæ eſt valor rationis mx : x.

www.libtool.com.cn

Corollarium.

Quapropter rationes compoſitæ ab æqualibus rationibus ſunt æquales inter ſe.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Datis duabus, aut pluribus rationibus, ſi antecedentes multiplicentur inter ſe, & conſequentes etiam inter ſe, duo producta conſtituent rationem, quæ compoſita erit ex datis rationibus.

Sint rationes datæ a : b, c : m, f : t; multiplicando antecedentes inter ſe, & conſequentes pariter inter ſe, fiet ratio acf : bmt compoſita ex datis rationibus; nimirum cujus valor æqualis erit producto omnium valorum datarum rationum.

Demonſtratio.

Etenim rationum a : b, c : m, f : t valores (Defin. 10.) ſunt $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{f}{t}$, qui ſi multiplicentur inter ſe, productum erit $\frac{acf}{bmt}$ (Algeb. 67.): ſed rationis acf : bmt valor eſt pariter $\frac{acf}{bmt}$ (Defin. 10.); ergo ratio acf : bmt, cujus valor adæquat productum valorum datarum rationum a : b, c : m, f : t, compoſita erit ex iiſdem rationibus (Defin. 20.). Quod erat demonſtrandum.

Sint rationes 4 : 2, 12 : 3, atque multiplicentur antecedentes 4, & 12 inter ſe, & conſequentes 2, & 3 etiam inter ſe multiplicentur, fiet ratio 48 : 6 compoſita ex datis rationibus 4 : 2, 12 : 3; quia valor $\frac{48}{6}$, ideſt 8, adæquat productum ex 2 in 4, ſcilicet ex valore $\frac{4}{2} = 2$ in valorem $\frac{12}{3} = 4$.

PRO-

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

Si fuerint quotcunque magnitudines ejusdem generis, ratio primæ ad ultimam composita erit ex omnibus intermediis rationibus, scilicet primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, &c.

www.libtool.com.cn

Sint datæ quantitates a, b, c, d, f, l, m, ratio a : m composita erit ex omnibus intermediis rationibus a : b, b : c, c : d, d : f, f : l, l : m.

Demonstratio.

Etenim rationum a : b, b : c, c : d, d : f, f : l, l : m multiplicentur antecedentes a, b, c, d, f, l inter se, & consequentes b, c, d, f, l, m etiam inter se, producta abcdfl, & bcdflm constituent rationem
abcdfl : bcdflm, quæ (Prop. anteced.) composita erit ex omnibus datis rationibus; sed est abcdfl : bcdflm : : a : m (*Prop. 2.*), quia productum extremorum abcdflm adæquat productum abcdflm mediorum; ergo ratio primæ a ad ultimam m componitur ex omnibus intermediis rationibus a : b, b : c, c : d, &c; Quod erat ostendendum.

Sint numeri quotcunque 24, 6, 2, 18, 3 &c; ratio primi ad ultimum, nempe 24 : 3, composita erit ex omnibus intermediis rationibus 24 : 6, 6 : 2, 2 : 18, 18 : 3, quia valores, seu exponentes harum rationum sunt $\frac{24}{6}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{2}{18}$, $\frac{18}{3}$, idest 4, 3, $\frac{1}{9}$, & 6; qui si inter se multiplicentur, productum erit
$4 \times 3 \times \frac{1}{9} \times 6 = \frac{72}{9} = 8$; & valor rationis 24 : 3 est pariter $\frac{24}{3}$, seu 8; adeoque ratio hæc ex illis componitur (Defin. 20.).

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Si fuerint duo ordines quantitatum numero æqualium, sitque prima ad secundam primi ordinis, ut prima ad secundam alterius ordinis, & secunda ad tertiam primi ordinis, ut secunda ad tertiam secundi ordinis, & tertia ad quartam primi, ut tertia ad quartam secundi, atque ita deinceps; tunc datæ quantitates dicuntur esse in ratione ordinata, *& erit prima ad ultimam primi ordinis, sicut prima ad ultimam secundi ordinis; & hoc dicitur argumentari* ex æqualitate ordinata, vel ordinando.

Sint duo ordines quantitatum
a, b, c, m, &c
e, f, t, l, &c , ita ut sit

a : b

$a : b :: e : f$, $b : c :: f : t$, $c : m :: t : l$, ordinando erit $a : m :: e : l$.

Demonstratio.

Ratio primæ ad ultimam primi ordinis, idest ratio $a : m$, composita est ex omnibus rationibus intermediis $a : b$, $b : c$, $c : m$ (Prop. anteced.); Similiter per antecedentem Propositionem ratio primæ ad ultimam secundi ordinis, ratio nempe $e : l$ composita est ex omnibus intermediis rationibus $e : f$, $f : t$, $t : l$; sed rationes $a : b$, $b : c$, $c : m$ sunt ex hypothesi æquales rationibus $e : f$, $f : t$, $t : l$ (est enim $a : b = e : f$, $b : c = f : t$, $c : m = t : l$); ergo (Axiom. 4; Coroll. Defin. 20.) ratio $a : m$ composita ex primis æqualis erit rationi $e : l$ compositæ ex postremis rationibus, erit nempe $a : m :: e : l$. Quod erat demonstrandum.

In hac Propositione continentur Propositiones 20, & 22 Libri 5. Euclidis.

Sint numeri in ratione ordinata

36, 4, 12
54, 6, 18

sit nempe

$36 : 4 :: 54 : 6$, & $4 : 12 :: 6 : 18$, ordinando erit $36 : 12 :: 54 : 18$.

PROPOSITIO DECIMANONA.

Theorema.

Si in duobus quantitatum ordinibus fuerit prima ad secundam primi ordinis, ut secunda ad tertiam alterius ordinis, & secunda ad tertiam primi ordinis, ut prima ad secundam alterius ordinis; tunc quantitates datæ dicuntur esse in ratione perturbata; *atque erit prima ad ultimam primi ordinis, ut prima ad ultimam secundi ordinis: Quod dicitur argumentari* ex æqualitate perturbata, vel perturbando.

Sint duo ordines quantitatum

a, b, c
f, t, m

ejus conditionis, ut sit $a : b :: t : m$, & $b : c :: f : t$, ex æqualitate perturbata, seu perturbando erit $a : c :: f : m$.

Demonstratio.

Habemus ex hypothesi $a : b = t : m$, & $b : c = f : t$; ergo productum ex ratione $a : b$ in rationem $b : c$ æquale erit producto ex ratione $t : m$ in rationem $f : t$ (Axiom. 4; Coroll. Defin. 20.), nimirum ratio composita ex rationibus $a : b$, $b : c$, æqualis erit rationi compositæ ex rationibus $t : m$, $f : t$; sed ratio $a : c$ (Prop. 17.) composita est ex rationibus $a : b$, $b : c$, & ratio $f : m$ est composita ex ratio-

rationibus f : t, t : m; ergo ratio a : c erit æqualis rationi f : m, erit nempe a : c : : f : m. Quod erat demonstrandum.

In hac Propositione continentur Propositiones 21, & 23 Libri 5. Euclidis.

Sint duo ordines numerorum

12, 2, 4 sitque 12 : 2 : : 30 : 5, & 2 : 4 : : 15 : 30, perturbando erit
15, 30, 5
12 : 4 : : 15 : 5, ut per se patet.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO VICESIMA.

Theorema.

Duæ quælibet fractiones sunt inter se in ratione composita ex directa ratione numeratorum, & ex ratione inversa seu reciproca denominatorum. Erit nempe prima fractio ad secundam, ut productum ex numeratore primæ in denominatorem secundæ, ad productum ex numeratore secundæ in denominatorem primæ.

Sint duæ quælibet fractiones

$\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, erit

$\frac{a}{c} : \frac{b}{m} : : am : bc.$

Demonstratio.

Nam multiplicetur primus terminus $\frac{a}{c}$ per quartum bc (Algeb. 68.), productum erit $\frac{abc}{c}$, idest ab (Algeb. 36.). Similiter multiplicando secundum terminum $\frac{b}{m}$ per am, productum erit $\frac{abm}{m}$, idest ab. Ergo (Prop. 2.) quatuor termini $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, am, bc sunt proportionales, est nempe $\frac{a}{c} : \frac{b}{m} : : am : bc$. Sed ratio am : bc composita est ex duabus rationibus a : b, & m : c (Prop. 16.), quarum prima a : b est ratio directa numeratorum a, & b datarum fractionum $\frac{a}{c}$, & $\frac{b}{m}$; secunda vero m : c est ratio inversa rationis denominatorum c, & m (Defin. 13.); ergo fractiones $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$ sunt inter se in ratione composita ex directa ratione numeratorum, & reciproca denominatorum. Quod erat demonstrandum.

Sint fractiones $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, erit

$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} : : 5 \times 4 : 3 \times 7$; nimirum $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} : : 20 : 21$; ideoque fractio $\frac{5}{7}$ minor est fractione $\frac{3}{4}$.

PROPOSITIO VICESIMAPRIMA.

Theorema.

Fractiones, quæ habent eundem denominatorem, sunt inter se in ratione directa numeratorum. Fractiones vero, quæ habent eundem numeratorem sunt inter se in ratione reciproca denominatorum.

Primo sint fractiones $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ ejusdem nominis, erit $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$.

Demonstratio.

Nam multiplicando $\frac{a}{m}$ in b, & $\frac{b}{m}$ in a, producta $\frac{ab}{m}$, & $\frac{ba}{m}$ sunt æqualia; ergo (Prop. 2.) quatuor prædicti termini sunt proportionales, est nempe $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$; consequenter prima fractio est ad secundam directe, ut numerator primæ ad numeratorem secundæ. Quod erat primum.

Secundo sint fractiones $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$ ejusdem numeratoris, erit prima fractio ad secundam reciproce, ut denominator secundæ ad denominatorem primæ, erit nempe

$\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$.

Demonstratio.

Etenim multiplicando $\frac{a}{c}$ in c, productum est $\frac{ac}{c}$, idest a (Algeb. 60.), & multiplicando $\frac{a}{m}$ per m, productum est pariter a; ergo (Prop. 2.) quatuor dati termini sunt proportionales, nimirum est $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$; adeoque prima fractio ad secundam est reciproce, sicuti denominator secundæ ad denominatorem primæ. Quod erat ostendendum.

Corollarium.

Hinc si duæ inæquales quantitates a, & b dividantur per eandem quantitatem m, quotientes $\frac{a}{m}$, & $\frac{b}{m}$ erunt inter se in ratione integrarum quantitatum a, & b; est enim per primam Demonstrationem $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$; nimirum dimidium cujusvis quantitatis est ad dimidium alterius quantitatis, ut prima quantitas ad secundam; vel tertia pars primæ ad tertiam secundæ, ut prima quantitas ad secundam, atque ita deinceps.

Est Propositio 15. Libri 5. Euclidis.

L E M M A.

Æquales radices æqualia quadrata, æquales cubos &c. constituunt. Et converso quadrata æqualia, cubi æquales &c. habent radices æquales.

Primo sit $a = m$, multiplicando hanc æquationem per semetipsam, idest per $a = m$, fiet $a^2 = m^2$ (Axiom. 4.). Si autem æquatio $a^2 = m^2$ iterum multiplicetur per $a = m$, orietur $a^3 = m^3$. Eadem ratione est $a^4 = m^4$, $a^5 = m^5$ &c; atque ita deinceps.

Consequenter æquales potestates æqualium radicum sunt æquales inter se.

Secundo sit $b^2 = c^2$, erit $b = c$. Nam dissolvendo æquationem $b^2 = c^2$, erit $b : c :: c : b$; & componendo (Prop. 6.) erit $b + c : c :: c + b : b$; sed est $b + c = c + b$ (Axiom. 2.); ergo (Coroll. Prop. 4.) erit etiam $c = b$.

Eadem ratione si fuerit $b^3 = c^3$, vel $b^4 = c^4$, &c; erit pariter $b = c$; nam multiplicando æquationem $b = c$ per semetipsam, & multiplicando productum $b^2 = c^2$ per eandem æquationem $b = c$, restituitur $b^3 = c^3$; & multiplicando hanc æquationem per $b = c$, oritur $b^4 = c^4$, atque ita deinceps.

Similiter si fuerit $a^2 b^2 = c^2 m^2$, erit etiam $ab = cm$, quia quadrando æquationem $ab = cm$, restituitur $a^2 b^2 = c^2 m^2$. Item posito $a^3 b^3 = c^3 m^3$, erit $ab = cm$, & e converso.

PROPOSITIO VIGESIMASECUNDA.

Theorema.

Datis duabus proportionibus, multiplicando, vel dividendo terminos unius per respondentes terminos alterius proportionis, producta in primo casu, & quotientes in secundo erunt proportionales.

Sint duæ proportiones
$a : b :: c : e$, & $f : m :: r : t$, erit $af : bm :: cr : et$, vel etiam erit $\frac{a}{f} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{r} : \frac{e}{t}$.

Demonstratio.

Nam ex datis proportionibus $a : b :: c : e$, & $f : m :: r : t$ oriuntur æquationes (Prop. 1.) $ae = bc$, $ft = mr$; & multiplicando primam æquationem per secundam, fiet nova æquatio $aeft = bcmr$ (Axiom. 4.); & dissolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit $af : bm :: cr : et$. Quod erat primum.

Si autem æquatio $ae = bc$ dividatur per æquationem $ft = mr$, fiet (Axiom. 5.) $\frac{ae}{ft} = \frac{bc}{mr}$, sive

$\frac{a}{f}$

$\frac{a}{f} \times \frac{c}{t} = \frac{g}{r} \times \frac{b}{m}$; & dissolvendo erit
$\frac{a}{f} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{r} : \frac{e}{t}$. Quod erat ostendendum.

Si plures fuerint datæ proportiones, eadem erit ratio.

Corollarium I.

Datis igitur quatuor terminis proportionalibus $a : b :: c : m$, æquales potestates eorundem terminorum erunt etiam proportionales; nimirum $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$; item $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$ &c; si enim data proportio $a : b :: c : m$ scribatur bis, & multiplicentur inter se termini respondentes, per antecedentem Demonstrationem fiet $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$; si ter scribatur, fiet $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, atque ita deinceps.

Corollarium II.

Similiter æquales radices quatuor terminorum proportionalium erunt etiam proportionales inter se; nimirum si fuerit $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$, vel $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, erit pariter $a : b :: c : m$; nam si est $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$, erit (Prop. 1.) $a^2 m^2 = b^2 c^2$; consequenter (Algeb. 97.) extrahendo radicem quadratam, per Lemma antecedens erit $am = bc$; & dissolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit $a : b :: c : m$. Eadem ratione si fuerit $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, erit $a^3 m^3 = b^3 c^3$, consequenter per Lemma præcedens erit $am = bc$; & dissolvendo erit
$a : b :: c : m$, atque ita de reliquis.

Definitio XXI.

Ratio illa, cujus valor est quadratum valoris alterius rationis, dicitur ratio *duplicata*, vel *quadrata* alterius rationis. Si autem valor primæ rationis sit cubus valoris secundæ, tunc prima ratio dicitur *triplicata*, vel *cubica* alterius rationis. Itaque ratio $acc : a$ est duplicata, seu quadrata rationis $bc : b$, quia cc valor primæ rationis (Algeb. 78.) est quadratum valoris c secundæ rationis.

Item ratio $18 : 2$ est duplicata rationis $21 : 7$, quia valor primæ est $\frac{18}{2}$, seu 9, quadratum valoris $\frac{21}{7}$, seu 3, alterius rationis.

Similiter ratio $ac^3 : a$ est triplicata, seu cubica rationis $ac : a$, quia valor primæ c^3 est cubus valoris c secundæ. Item ratio $24 : 3$ est triplicata, seu cubica rationis $10 : 5$, quia valor primæ 8 est cubus valoris secundæ, qui est 2.

Definitio XXII.

Ratio composita ex duabus æqualibus rationibus est duplicata, seu quadrata utriusque. Ut si ex rationibus æqualibus $am : a$, & $bm : b$

Prop. 16.) fiat composita ratio $abmm : ab$, ratio hæc, cujus valor est mm, erit duplicata, seu quadrata tam rationis $am : a$, quam rationis $bm : b$, quarum valor est m. Similiter ratio ex tribus æqualibus rationibus composita, triplicata, seu cubica erit cujusvis datarum.

Ex rationibus æqualibus $am : a$, $bm : b$, $cm : c$ (Prop. 16.) componatur ratio $abcm^3 : abc$, ratio hæc triplicata erit rationis $am : a$, item rationis $bm : b$, & rationis $cm : c$, quia ejus valor m^3 est cubus valoris m aliarum rationum.

www.libtool.com.cn

Si autem ratio componatur ex quatuor æqualibus rationibus, dicatur *quadruplicata*, si ex quinque, *quintuplicata* uniuscujuslibet componentium rationum vocetur, atque ita deinceps.

Definitio XXIII.

Ratio vero, cujus valor est radix quadrata valoris alterius rationis, ratio *subduplicata*, vel *subquadrata* alterius rationis appellatur.

Si autem ejus valor sit radix cubica valoris alterius rationis, tunc dicatur ratio *subtriplicata*, vel *subcubica* alterius rationis.

Si valor sit radix quarta, dicatur ratio *subquadruplicata* alterius rationis; atque ita procedendo.

Itaque ratio $ac : a$ est subduplicata rationis $acc : a$, quia illius valor c est radix quadrata valoris cc hujus rationis.

Item ratio $ac : a$ est subtriplicata rationis $ac^3 : a$, quia ejus valor c est radix cubica valoris c^3 alterius rationis.

Definitio XXIV.

Data qualibet ratione $am : a$, si quadrentur ejus termini am, & a, quadrata (Algeb. 78.) $aamm$, & aa constituent rationem $aamm : aa$; quæ duplicata erit rationis $am : a$. Si autem fiant cubi terminorum am, & a, fiet ratio $a^3m^3 : a^3$ triplicata rationis $am : a$, ut per se patet.

Similiter ratio $a^2 : c^2$ est duplicata rationis $a : c$; quia ejus valor $\frac{a^2}{c^2}$ est quadratum valoris $\frac{a}{c}$.

PROPOSITIO VICESIMATERTIA.

Theorema.

Datis tribus terminis continue proportionalibus, productum extremorum æquale erit quadrato medii termini. Atque ratio primi termini ad tertium duplicata erit rationis primi ad secundum, sive secundi ad tertium.

Sit proportio continua $\because a : b : c$. Primo erit $ac = bb$.

De-

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi eſt $\div$ a : b : c, ſive (Defin. 18.) a : b :: b : c, erit ac = bb (Propoſ. 1.). Quod erat primum.

Secundo erit ratio a : c duplicata, ſeu quadrata rationis a : b, vel b : c.

www.libtool.com.cn

Demonſtratio.

Nam (Propoſ. 17.) ratio a : c compoſita eſt ex rationibus intermediis a : b, b : c; ſed rationes a : b, b : c ſunt æquales ex hypotheſi (eſt enim a : b :: b : c); ergo ratio a : c ex illis compoſita, duplicata erit tam rationis a : b, quam rationis b : c (Definit. 22.) Quod erat ſecundum.

Corollarium.

Ergo datis tribus terminis continue proportionalibus $\div$ a : b : c, erit primus a ad tertium c, ut quadratum aa primi ad quadratum bb ſecundi, vel ut bb quadratum ſecundi ad cc quadratum tertii. Nam per primam Demonſtrationem eſt ac = bb; & multiplicando per a (Axiom. 4.), fiet aac = abb; & diſſolvendo erit a : c :: aa : bb. Similiter multiplicando æquationem ac = bb per c, fiet acc = bbc; & diſſolvendo (Coroll. Propoſ. 2.) erit a : c :: bb : cc.

PROPOSITIO VICESIMAQUARTA.

Problema.

Datis duobus terminis tertium proportionalem invenire.

Sint duo dati termini a primus, & b ſecundus, atque inveniendus ſit tertius, ad quem ſecundus b eandem rationem habeat, quam habet primus a ad ſecundum b.

Reſolutio.

Fiat quadratum ſecundi bb, & dividatur per primum a, quotiens $\frac{bb}{a}$ erit tertius quæſitus.

Demonſtratio.

Tertius quæſitus terminus vocetur x, & erit $\div$ a : b : x; conſequenter per primam partem antecedentis Propoſitionis erit æquatio ax = bb,

quæ

quæ dividatur per a (Axiom. 5.), fiet $x = \frac{bb}{a}$; sed x significat tertium quæsitum terminum; ergo fractio $\frac{bb}{a}$, quæ ostensa est æqualis quantitati x, erit tertius quæsitus terminus.

Secundo si dati sint primus a, & tertius c, tunc medius terminus erit æqualis radici quadratæ producti ac ex primo in tertium.

www.libtool.com.cn Demonstratio.

Etenim posito secundo quæsito termino = x, erit ∺ a : x : c; & per primam partem præcedentis Propositionis erit $\frac{xx}{} = ac$; atque extrahendo radicem quadratam, invenietur $x = \sqrt{ac}$ (per Lemma Prop. 21.). Quod erat demonstrandum.

Sit primus terminus 18, tertius 2, ut inveniatur medius terminus, multiplicetur 18 per 2, & ex producto 36 extrahatur radix quadrata (Algeb. 84.), quæ est 6, hæc erit medius quæsitus proportionalis; est enim ∺ 18 : 6 : 2.

PROPOSITIO VICESIMAQUINTA.

Theorema.

In omni progressione geometrica, ratio primi termini ad quartum est triplicata rationis primi ad secundum. Ratio primi ad quintum est quadruplicata rationis primi ad secundum; atque ita deinceps.

Sit progressio geometrica ∺ a : b : c : m : f : t &c, erit $a : m :: a^3 : b^3$.

Demonstratio.

Ratio a : m composita est ex intermediis rationibus a : b, b : c, c : m (Propos. 17.); sed hæ rationes sunt ex hypothesi æquales inter se, & ratio composita ex tribus æqualibus rationibus est triplicata cujusvis ipsarum (Defin. 22.); ergo ratio a : m est triplicata rationis a : b; sive (Defin. 24.) erit
$a : m :: a^3 : b^3$.

Eodem modo demonstratur rationem a : f quadruplicatam esse rationis a : b; cum ratio a : f (Propos. 17.) componatur ex quatuor æqualibus rationibus a : b, b : c, c : m, m : f.

Similiter ratio a : t quintuplicata est rationis a : b, & sic in infinitum procedendo.

Corollarium.

Consequenter ratio a : b, primi nempe ad secundum, est subdupliplicata rationis $a : c$ primi ad tertium (Defin. 23.), subtriplicatam rationis $a : m$, ideſt primi ad quartam; atque ita progrediendo.

PROPOSITIO VICESIMASEXTA.

Theorema.

In omni geometrica progreſſione productum extremorum adæquat producta terminorum ab extremis æque diſtantium, & æquale eſt quadrato termini medii, quando terminorum numerus eſt impar.

Sit geometrica progreſſio
$\because a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6 : ac^7 : ac^8$ &c. erit $a \times ac^8 = ac \times ac^7 = ac^2 \times ac^6 = ac^3 \times ac^5 = ac^4 \times ac^4$, nimirum $= a^2 c^8$, ut per ſe patet.

PROPOSITIO VICESIMASEPTIMA.

Problema.

Cujuſvis geometricæ progreſſionis omnium terminorum ſummam invenire.

Reſolutio I.

Si progreſſio ſit creſcens, ut $\because a : ac : ac^2 : ac^3$, tunc multiplicetur ſecundus terminus ac per ultimum (in hoc caſu) ac^3, & ex producto $a^2 c^4$ ſubtrahatur quadratum aa primi termini, reſiduum erit $a^2 c^4 - a^2$, quod (Algeb. 43.) dividatur per $ac - a$, ideſt per reſiduum, quod oritur ſubtrahendo primum a ex ſecundo ac, quotiens erit $ac^3 + ac^2 + ac + a$, qui, ut patet, eſt ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis.

Sit $\because 3 : 6 : 12 : 24 : 48$ &c, multiplicetur 6 in 48, & ex producto 288 ſubtrahatur 9 quadratum primi termini 3, atque reſiduum 279 dividatur per $6 - 3$, ideſt per 3, quotiens 93 erit quæſita ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis; nimirum erit $93 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48$.

Reſolutio II.

Si autem progreſſio ſit decreſcens, ut
$\because ac^6 : ac^5 : ac^4 : ac^3 : ac^2$ &c, tunc ex quadrato $a^2 c^{12}$ primi termini ſubtrahatur productum $a^2 c^7$ ex ſecundo ac^5 in ultimum ac^2, & reſiduum $a^2 c^{12} - a^2 c^7$ dividatur per $ac^6 - ac^5$, nimirum per differentiam inter primum terminum, & ſecundum, quotiens erit $ac^6 + ac^5 + ac^4 + ac^3 + ac^2$, qui, ut per ſe patet, eſt ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis.

Sit

Sit progressio decrescens ÷÷ 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 , omnium terminorum summa erit 127 , est enim $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$.

Corollarium.

Quapropter datis primo, secundo, & ultimo termino cujusvis geometricæ progressionis, inveniri potest omnium terminorum summa per antecedentes resolutiones.

www.fbtool.com.cn

Definitio XXV.

Rationes arithmeticæ (Defin. 8.) dicuntur similes, seu æquales, quando habent differentias æquales, cum nempe antecedentes æqualiter superant suos consequentes, vel æqualiter a consequentibus deficiunt. Sic rationes $7 : 3$, & $9 : 5$ sunt æquales, quia $7 - 3$ adæquat $9 - 5$. Item rationes $a : a + m$, $c : c + m$ sunt æquales, quia antecedentes a, & c per eandem quantitatem m a suis consequentibus $a + m$, & $c + m$ deficiunt.

Si autem inter se comparentur duæ æquales arithmeticæ rationes, fiet proportio arithmetica. Sic $8 : 6$ est ut $7 : 5$, quæ sic scribitur $8 : 6 \therefore 7 : 5$. Item $a : a + m \therefore c : c + m$. Atque dicitur continua, quando secundus terminus adæquat tertium.

PROPOSITIO VICESIMAOCTAVA.

Theorema.

In omni proportione Arithmetica, summa extremorum adæquat summam mediorum.

Demonstratio.

Nam generaliter data qualibet Arithmetica proportione $a : a + c \therefore b : b + c$, evidens est $a + b + c$ extremorum, æqualem esse summæ $a + c + b$ mediorum.

Similiter data proportione $a : a - m \therefore b : b - m$, semper erit $a + b - m = a - m + b$.

Sit $5 : 8 \therefore 4 : 7$, erit $5 + 7 = 8 + 4$. Item sit $2 : 7 \therefore 4 : 9$, erit $2 + 9 = 7 + 4$.

Si autem proportio fuerit continua, ut $\div a : a + m : a + 2m$, summa $a + a + 2m$, idest $2a + 2m$ extremorum, erit dupla termini medii $a + m$, ut evidens est.

Sit $\div 8 : 11 : 14$, erit summa $8 + 14$ dupla termini medii 11.

PRO-

PROPOSITIO VICESIMANONA.

Problema.

Datis tribus Arithmeticæ proportionis terminis, quartum invenire.

Resolutio.

www.libtool.com.cn

Sint tres dati termini a, a + m, b, ut inveniatur quartus Arithmetice proportionalis, fiat summa a + m + b secundi cum tertio, ex qua subtrahatur primus terminus a, residuum a + m + b — a, idest m + b erit quartus quæsitus terminus proportionalis: est enim a : a + m ∴ b : b + m, ut per se patet.

Scholion.

In omni Arithmetica proportione termini sunt pariter proportionales alternando, & invertendo, non autem componendo, dividendo, vel convertendo.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

Theorema.

In omni Arithmetica progressione ÷ a : a + m : a + 2 m : a + 3 m : a + 4 m, summa extremorum 2 a + 4 m adæquat summam duorum quorumlibet terminorum a + m, & a + 3 m ab extremis æque distantium, & dupla est termini medii a + 2 m, ut evidens est.

Sit ÷ 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13 &c; erit 1 + 13 = 3 + 11 = 5 + 9 = 7 × 2.

Item in progressione decrescente ÷ 7 : 5 : 3 : 1 : — 1 : — 3 &c; erit summa 7 — 3 = 5 — 1 = 3 + 1, ut evidens est.

Corollarium.

Hinc cognitis primo, & ultimo Arithmeticæ progressionis terminis, & cognito etiam terminorum numero, invenietur summa omnium terminorum, si dimidium summæ primi, & ultimi multiplicetur per terminorum numerum, quando terminorum numerus est impar.

Si autem terminorum numerus sit par, tunc dimidium numeri terminorum multiplicetur per summam primi, & ultimi. Sic data progressione

÷ a : a + m : a + 2 m : a + 3 m : a + 4 m &c, ut habeatur omnium terminorum summa, addantur primus a, & ultimus $a + 4m$, fiet summa $2a + 4m$, cujus dimidium $a + 2m$ multiplicetur per terminorum numerum, qui est 5; productum $5a + 10m$ erit quæsita summa omnium terminorum, ut per se patet.

Si data progressio sit.

$\div\, a : a + m : a + 2m : a + 3m : a + 4m : a + 5m$, cujus terminorum numerus 6 est par; tunc summa $2a + 5m$ primi, & ultimi multiplicetur per 3 dimidium numeri terminorum, & productum $6a + 15m$ erit omnium terminorum summa.

www.libtool.com.cn

Similiter si progressionis

$\div\, 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : 11 : 12 : 13 : 14 : 15$ fiat summa 16 primi cum ultimo, & hujus dimidium 8 multiplicetur per numerum terminorum 15, productum 120 erit quæsita summa omnium terminorum.

Eadem ratione data progressione

$\div\, 2 : 5 : 8 : 11 : 14 : 17 : 20 : 23$, si summa 25 primi cum ultimo multiplicetur per 4 dimidium numeri terminorum, productum 100 erit quæsita summa omnium terminorum datæ progressionis.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER SECUNDUS.

www.libtool.com.cn

Geometria quantitatem continuam, sive extensionem veluti objectum considerat, ejusque partes, munera, & proprietates omnes contemplatur. Cum autem continua quantitas extendatur vel in longum, vel in longum simul, & latum, vel in longum, latum, atque profundum; hinc tria esse continuæ quantitatis genera colligitur, quæ sunt linea, superficies, & corpus: corpus enim trinam habet dimensionem, longitudinem nempe, latitudinem, & profunditatem, seu altitudinem. Quod si omnem altitudinem, seu crassitudinem a corpore ablatam esse concipiamus, remanebit extensio in longum, & latum, quæ superficies appellatur. Si autem a superficie omnis latitudo auferatur, relinquetur simplex longitudo, quæ linea vocatur; si vero a linea omnem longitudinem auferri concipiamus, nihil remanebit præter signum, seu extremum lineæ, quod punctum nuncupatur. Atque ea Geometriæ pars, in qua linearum, & superficierum proprietates, munera, & accidentia considerantur, atque explanantur, *Geometria Plana* vocatur: illa vero pars, in qua solidorum, seu corporum proprietates demonstrantur, *Geometria Solida*, vel *Stereometria* appellatur.

Universam proportionum doctrinam uberius illustratam, atque brevius dispositam in præcedenti Libro Primo demonstravimus: in hoc autem Secundo, & in subsequentibus Libris Tertio, Quarto, & Quinto de Geometria Plana differemus. Sextus vero Liber Solidorum, seu corporum proprietates, & dimensiones exhibebit.

Definitio I.

Corpus, vel *Solidum* dicitur quantitas illa, quæ habet trinam dimensionem, scilicet longitudinem, latitudinem, & profunditatem, seu altitudinem. Fig. I. Tab. I.

Definitio II.

Superficies est quantitas, quæ habet longitudinem, & latitudinem sine profunditate; est nempe extremum corporis extensum in longum, & latum sine ulla crassitudine. Fig. II. Tab. I.

Definitio III.

Linea est quantitas, quæ habet longitudinem tantum sine latitudine, & sine crassitudine; sive est extremum superficiei extensum in longum sine latitudine. Fig. III. Tab. I.

Definitio IV.

Fig. IV. Tab. I. *Punctum Geometricum* est signum in quantitate continua, quod a mente nostra concipitur sine ulla extensione; est nempe extremum, seu terminus lineæ, sine extensione; sive est signum sectionis lineæ in duas partes.

Scholium.

www.libtool.com.cn

Lineæ generari intelligitur ex fluxu puncti, superficies ex fluxu lineæ, & corpus ex fluxu superficiei.

Definitio V.

Fig. V. & VI. Tab. I. *Linea recta* est brevissima omnium linearum, quæ ab uno ad aliud punctum duci possunt.

Linea vero *curva* dicitur illa, quæ non est brevissima omnium linearum, quæ a puncto ad punctum duci possunt.

Corollarium.

Ergo unica recta linea ab uno ad aliud punctum duci potest; scilicet inter duo data puncta, duæ, vel plures lineæ rectæ duci nequeunt. Consequenter si termini unius rectæ lineæ positi fuerint supra terminos alterius rectæ lineæ, necessario illæ duæ rectæ lineæ æquales erunt, & una super alteram perfecte cadet, idest congruet.

Definitio VI.

Fig. VII. Tab. I. *Superficies plana*, sive *Planum*, est, cujus omnibus partibus linea recta accomodari potest.

Superficies autem illa, supra quam quaquaversus aptari nequit linea recta, *superficies curva* appellatur; quæ dicitur *superficies convexa*, quando est superficies externa corporis rotundi. Interna vero corporis rotundi superficies *concava* nuncupatur.

Definitio VII.

Fig. VIII. Tab. I. *Angulus planus* est inclinatio duarum linearum in eodem plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium.

Punctum concursus linearum, in quo fit angulus, *anguli vertex* appellatur; & lineæ angulum constituentes dicuntur *latera*, vel *crura* ejusdem *anguli*.

Angulus planus rectilineus dicitur ille, qui efficitur a duabus rectis lineis.

Curvilineus vocatur *angulus*, quando continetur a duabus lineis curvis.

Mixti-

Mixtilineus, appellatur *angulus* ab una linea recta, & altera curva.

Quapropter linearum rectarum AB, AC, se mutuo tangentium in puncto A, alterius ad alteram inclinatio, est angulus planus rectilineus. Fig. IX. Tab. I.

Inclinatio curvarum FE, LE, in puncto E se invicem tangentium, est angulus curvilineus. Fig. X. Tab. I.

Angulus vero constitutus a recta BM, & a curva BC, est mixtilineus. Fig. XI. Tab. I.

Quilibet angulus planus tribus Alphabeti litteris designatur, quarum media anguli verticem denotat; ut angulus contentus a lineis AB, AC, vocatur angulus CAB, vel BAC. Fig. IX. Tab. I.

www.libtool.com.cn

Unica littera prope verticem anguli posita etiam indicatur angulus planus, quando duæ tantum lineæ ad idem punctum concurrunt. Sic dictus angulus CAB, etiam appellatur angulus A.

Præterea angulus planus etiam designatur a parva littera posita in vertice anguli inter duo latera ejusdem anguli. Ut angulus ACL contentus a lineis AC, & LC, indicatur a littera x; & angulus BCA designatur a littera m. Fig. XII. Tab. I.

Corollarium.

Quoniam angulus planus in sola linearum se mutuo tangentium inclinatione consistit, ideo major vel minor linearum longitudo angulum non auget, nec minuit. Sic angulus CAB non mutatur, quamvis latera AB, AC versus B, & C indefinite producantur. Fig. XIII. Tab. I.

Definitio VIII.

Recta linea super aliam rectam insistens duos efficit angulos, qui vocantur *anguli deinceps positi*, vel *anguli consequentes*, quales sunt duo anguli m, & x, vel duo ABC, ABL. Fig. XIV. Tab. I.

Definitio IX.

Cum recta linea (AB) super aliam rectam (CL) incidens, non magis versus unam, quam versus alteram partem inclinatur, & ideo anguli consequentes (ABC, ABL) sunt æquales, tunc uterque æqualium angulorum vocatur *rectus*, & recta (AB) alteri (CL) insistens dicitur *linea perpendicularis*, vel *normalis*, aut *perpendiculum*. Fig. XV. Tab. I.

Corollarium.

Ergo ad rectam CL, & ex puncto in ea B unica recta perpendicularis BA duci potest, quia in unica positione BA linea non magis inclinatur versus unam, quam versus alteram partem.

Definitio X.

Quando recta linea (AC) super aliam rectam (BL) consistens, Fig. XVI. Tab. I.

ma-

magis versus unam, quam versus alteram partem inclinatur, ac proinde efficit angulos consequentes (m, & x) inæquales, ipsa recta (AC) alteri (BL) insistens dicitur *linea obliqua*; & inæqualium angulorum ille (ACB, seu m), qui major est recto, *angulus obtusus* vocatur; qui vero (ACL, seu x) minor est recto, dicitur *angulus acutus*.

Corollarium.

www.libtool.com.cn

Consequenter angulus rectus ille est, cui ex altera parte æqualis angulus consequens efficitur, si unum latus producatur.

Angulus obtusus est ille, cujus unum latus productum constituit angulum consequentem ipso minorem.

Acutus vero angulus est, cujus unum latus ex altera parte productum efficit angulum consequentem ipso majorem.

Definitio XI.

Lineæ *parallelæ*, seu *æquidistantes* dicuntur, quæ in eodem plano existentes eandem semper inter se distantiam servant; unde quamvis utrinque in indefinitum producantur, nunquam tamen convenient.

Fig. XVIII. Tab. I. Ut si recta terminata AB perpendiculariter moveri, seu fluere concipiatur supra CL, ejus punctum extremum A describet lineam AAM parallelam, sive æquidistantem rectæ CL.

Consequenter quando lineæ perpendiculares inter duas lineas interpositæ æquales sunt inter se, tunc illæ duæ rectæ sunt parallelæ, seu æquidistantes.

Atque vicissim quando duæ lineæ sunt parallelæ, perpendiculares inter ipsas interceptæ æquales erunt inter se.

Definitio XII.

Fig. XIII. Tab. I. *Figura* est spatium ab uno, vel pluribus terminis undique clausum.

Definitio XIII.

Fig. XIX. Tab. I. *Figura plana* est superficies plana, quæ ab unica, vel a pluribus lineis undique terminatur.

Fig. XX. Tab. I. *Rectilinea* dicitur *figura plana*, quæ a lineis rectis undique clauditur.

Fig. XXI. Tab. I. *Figura plana curvilinea* est illa, quæ a lineis curvis terminatur.

Fig. I. Tab. II. *Mixtilinea* vero appellatur *figura plana*, quæ partim a lineis curvis, partim a lineis rectis circumscribitur.

Latera figuræ planæ sunt lineæ, quæ figuram terminant, atque claudunt.

Omnes vero lineæ, quæ figuram terminant, simul sumptæ, dicuntur *Perimetros*, vel *Circuitus* ejusdem figuræ.

Con-

Corollarium.

Ergo duæ rectæ lineæ figuram constituere nequeunt, quia spatium undique claudere non possunt.

www.libtool.com.cn

Definitio XIV.

Figura solida est spatium ab unica, vel a pluribus superficiebus undique terminatum.

Scholium.

Geometriæ pars illa, in qua de figuris planis, de lineis, & angulis in plano descriptis agitur, *Geometria Plana* appellatur.

Definitio XV.

Circulus est figura plana curvilinea ab unica linea curva terminata, cujus singula puncta æqualiter distant a puncto medio.

Ut si quælibet recta linea (AC) circa alterutrum ejus extremum (C) fixum, & immobile tamdiu revolvi concipiatur in plano (ex A per B, D, E, F), donec ad idem punctum (A), sive ad eandem positionem (AC), ex qua discesserat, revertatur. Fig. II. Tab. II.

Figura plana curvilinea (ABDEFGL) ex fluxu ejusdem rectæ (AC) descripta, *Circulus* appellatur.

Linea curva (ABDEFGLA) ab altero circumductæ rectæ extremo (A) descripta, *Circumferentia* dicitur, vel *Peripheria*, vel *Perimetros circuli*; sive etiam vocatur *Linea rotundationis*, aut *Linea circinationis*.

Circumferentiæ partes (ut ABD, EF, ALG) *Arcus circuli* dicuntur.

Punctum medium (C) appellatur *Centrum circuli*.

Omnes rectæ lineæ (CA, CB, CD, &c.) a circuli centro, & a peripheria terminatæ, vocantur *Radii*, vel *Semidiametri* ejusdem circuli, qui omnes sunt inter se æquales, ut evidens est.

Definitio XVI.

Circuli *Diameter*, vel *Dimetiens*, dicitur quælibet recta per centrum circuli transiens, & utrinque ad peripheriam terminata, ut AB, quæ circulum bifariam, hoc est in duas partes æquales dividit, quæ *Semicirculi* vocantur. Consequenter *Semicirculus* est figura plana mixtilinea terminata a diametro, & a dimidia circuli peripheria, ut ABF, vel ABM. Fig. III. Tab. II.

Definitio XVII.

Circuli chorda, vel *subtensa*, vocatur quælibet recta utrinque ad pe-

riphe-

Fig. IV. Tab. II. ripheriam terminata, quæ per centrum circuli non transit, ut AM; atque circulum dividit in duas inæquales partes, quæ dicuntur *circuli segmenta*, vel *portiones*.

Unde *segmentum*, vel *portio circuli*, est figura plana mixtilinea comprehensa a circuli arcu, & a chorda.

Atque *segmentum majus* dicitur illud (ABM), in quo reperitur centrum circuli; alterum vero (APEM) vocatur *segmentum minus*.

www.libtool.com.cn

Definitio XVIII.

Fig. V. Tab. II. *Figura trilatera rectilinea, seu Triangulum rectilineum*, est figura plana rectilinea a tribus lateribus terminata, cujus species ratione laterum sunt tres; nimirum

Definitio XIX.

Fig. VI. Tab. II. *Triangulum Æquilaterum*, quod habet omnia latera æqualia.

Definitio XX.

Fig. VII. Tab. II. *Triangulum Isosceles, vel Æquicrure*, quod duo tantum latera æqualia habet.

Definitio XXI.

Fig. VIII. Tab. II. *Triangulum Scalenum*, quod habet omnia latera inæqualia.

Scholium.

Triangulorum species ratione angulorum sunt pariter tres, quia, ut demonstravimus, vel omnes tres anguli sunt acuti, vel unus est rectus, aut obtusus, & reliqui duo acuti. Unde

Definitio XXII.

Fig. IX. Tab. II. *Triangulum rectangulum, vel orthogonium* est, quod habet unum angulum rectum.

Definitio XXIII.

Fig. X. Tab. II. *Triangulum obtusangulum, vel ambligonium* dicitur, quod habet unum angulum obtusum.

Definitio XXIV.

Fig. XI. Tab. II. *Triangulum* vero *acutangulum*, vel *oxigonium* habet omnes angulos acutos.

Definitio XXV.

In quolibet triangulo rectangulo latus oppositum angulo recto vocatur *Hypothenusa*; & reliqua duo latera angulum rectum constituentia *Catheti* appellantur.

De-

Scholium.

In quovis triangulo rectilineo septem consideranda occurrunt, hoc est tria latera, tres anguli, & ipsum triangulum, videlicet superficies plana a tribus lateribus undique terminata.

Praeterea nominatis duobus trianguli lateribus, reliquum latus vocatur *Basis* ejusdem trianguli; & basis trianguli isoscelis est latus inaequale.

Definitio XXVI.

Figura plana rectilinea a quatuor rectis lineis undique terminata vocatur *Figura Quadrilatera*, vel *Figura Quadrangularis*, quia habet pariter quatuor angulos. Fig. XII. Tab. II.

Definitio XXVII.

Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela; atque dicitur *rectangulum*, quando ejus quatuor anguli sunt recti. Fig. XII. XIII. XIV. & XV. Tab. II.

Obliquangulum vero dicitur parallelogrammum, quando habet angulos obliquos.

Praeterea vocatur *aequilaterum*, quando habet omnia quatuor latera aequalia inter se.

Definitio XXVIII.

Quadratum est parallelogrammum aequilaterum, & rectangulum. Fig. XII. Tab. II.

Definitio XXIX.

Rhombus est parallelogrammum aequilaterum, & obliquangulum. Fig. XV. Tab. II.

Definitio XXX.

Figura altera parte longior, quae etiam *rectangulum*, vel *oblongum* dicitur, est parallelogrammum rectangulum, & non aequilaterum; sed habet bina opposita latera aequalia. Fig. XVI. Tab. II.

Definitio XXXI.

Rhomboides est parallelogrammum obliquangulum, & non aequilaterum; habet autem bina latera opposita aequalia inter se. Fig. XVII. Tab. II.

Definitio XXXII.

Trapezium, vel *Mensula* dicitur omnis alia figura quadrilatera, quae parallelogrammum non est. Fig. XVIII. Tab. II.

www.libtool.com.cn

Definitio XXXIII.

Figuræ planæ rectilineæ, quæ a pluribus, quam quatuor lateribus undique terminantur, *multilateræ*, vel *multangulæ*, vel *polygoniæ* figuræ vocantur.

Atque polygonum a quinque lateribus comprehensum vocatur *Pentagonum*; a sex *Hexagonum*; a septem *Heptagonum*; ab octo *Octogonum*; a novem *Enneagonum* &c; atque ita de reliquis figuris multilateris, quæ semper nomen desumunt a numero laterum, vel ab æquali numero angulorum. Fig. XIX. Tab. II.

www.libtool.com.cn

Definitio XXXIV.

Fig. XX. Tab. II. *Linea diagonalis* cujusvis figuræ est recta linea intra figuram ducta a quolibet angulo ad alium angulum oppositum, quæ linea in parallelogrammo vocatur *Diameter* parallelogrammi.

Definitio XXXV.

Fig. XXI. Tab. II. *Area* cujusvis *figuræ planæ* est superficies, sive spatium a perimetro ejusdem figuræ undique clausum. Ut area trianguli est superficies terminata a tribus lateribus ejusdem trianguli. Area circuli est spatium a peripheria ejusdem circuli comprehensum. Et sic de cæteris.

Definitio XXXVI.

Fig. XXII. Tab. II. Si quælibet recta terminata AC perpendiculariter moveri, seu fluere concipiatur supra rectam terminatam AB, & in omni positione AC, EF, GH, &c. sui vestigium relinquere, donec veniat ad positionem BL, tunc recta AC describet rectangulum ABCL.

Fig. XXII. Tab. II. Idem rectangulum AL obtinetur, si recta AB perpendiculariter fluere concipiatur supra totam AC, & in omni positione sui vestigium relinquere. Unde rectangulum AL componi intelligitur ex totidem lineis æqualibus rectæ AC, quot sunt elementa, seu puncta constituentia rectam AB; sive, quod idem est, rectangulum AL concipitur ex totidem lineis æqualibus rectæ AB componi, quot sunt elementa, seu puncta constituentia rectam AC.

Fig. XXII. Tab. II. Hinc quodlibet *rectangulum* AL *fieri*, seu *contineri* dicitur a duobus lateribus contiguis AB, AC. Atque latus AB dicitur *Basis*, & perpendiculum AC vocatur *Altitudo* ejusdem *rectanguli*.

Fig. I. Tab. III. Quapropter area cujusvis rectanguli, ABCF, invenietur multiplicando basim AB in altitudinem BC. Etenim si basis AB fuerit unciarum, seu digitorum quatuor longitudinis, & altitudo BC trium, multiplicando 4 in 3, productum 12 exhibebit aream, seu superficiem dati rectanguli AC.

Fig. II. Tab. III. Si autem basis cujuscumque rectanguli vocetur b, & altitudo vocetur m, tunc productum bm significabit aream ejusdem rectanguli.

Cum vero basis AB est æqualis altitudini AC, tunc rectangulum AF ab ipsis contentum vocatur quadratum lineæ AB, vel lineæ AC. Atque si basis AB fuerit quinque unciarum longitudinis, etiam altitudo AC continebit quinque uncias longitudinis; & productum ex 5 in 5, hoc est 25, exprimet aream ipsius quadrati. Fig. III. Tab. III.

Si quadrati basis AB vocetur a, æqualis altitudo AC erit pariter a, & productum aa, vel a^2, indicabit aream quadrati ex linea AB, vel AC.

www.libtool.com.cn

Corollarium.

Linea igitur per aliam lineam multiplicata non producit lineam, sed superficiem. Ut multiplicando lineam AB unciarum quatuor per lineam BC trium unciarum longitudinis, productum quidem est 12, sed non sunt duodecim unciæ longitudinis; sunt enim, ut apparet, duodecim superficies quadratæ, quarum qualibet habet unam unciam longitudinis, & unciam alteram latitudinis; atque hujusmodi parva superficies quadrata appellatur *uncia quadrata*. Fig. IV. Tab. III.

Quapropter *mensuræ* aliæ sunt *lineares*, quibus locorum distantias dimetimur; aliæ vero dicuntur mensuræ *superficiales*, quibus superficies omnes dimetiuntur.

Definitio XXXVII.

Rectangulum ABCF contentum a lineis AB, AC, ita indicatur AB×AC. Fig. V. Tab. III.

Quadratum vero rectæ AB sic indicatur $\overline{AB}^2$.

Præterea si linea E fuerit æqualis lateri AB rectanguli ABCF, & linea G æqualis fuerit lateri AC, tunc rectangulum AF etiam contineri dicitur a rectis E, & G.

Similiter si recta L fuerit æqualis lateri AB quadrati ACFB, tunc idem quadratum appellabitur etiam quadratum rectæ L. Fig. III. Tab. III.

Definitio XXXVIII.

Altitudo cujuslibet *figuræ rectilineæ* est perpendicularis ad basim ducta ex vertice, vel ex latere basi opposito, ut AM. Fig. VI. Tab. III.

Postulatum I.

Ex dato puncto ad aliud punctum rectam lineam ducere.

Postulatum II.

Datam rectam lineam terminatam in directum, & indefinite producere.

Postulatum III.

Dato centro, & intervallo, seu radio circulum describere.

Scholium.

Axiomatis septem jam traditis in Algebra numeris 52, 53, 54, &c. adjungenda sunt quæ sequuntur.

www.dlibtool.com

Axioma VIII.

Quæ mutuo superimposita congruunt, sunt æqualia inter se.

Ut si circulus A superimponatur circulo B, & posito centro circuli A supra centrum circuli B, circumferentia circuli A perfecte cadat supra circumferentiam circuli B; tunc duo circuli mutuo congruent, atque erunt æquales inter se, ut per se patet. Fig. VII. Tab. III.

Similiter omnes circuli habentes radios æquales si mutuo superimponantur, congruent, & æquales erunt, ut ex ipsa circuli definitione patet.

Præterea omnes rectæ lineæ æquales mutuo superimpositæ congruunt.

Item omnes anguli rectilinei æquales, si mutuo superimponantur, congruere debent, ut ex Definitionibus 5, & 7 immediate deducitur.

Axioma IX.

Totum est sua parte majus.

Sic recta AB major est qualibet parte AC, vel CD, vel DB, &c.

Axioma X.

Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

Sic tota recta AB adæquat omnes partes AC, CD, DB simul sumptas; nimirum est $AB = AC + CD + DB$.

Axioma XI.

Si inæqualibus æqualia addas, quæ fiunt, sunt inæqualia.

Axioma XII.

Si ab inæqualibus æqualia demas, quæ remanent, sunt inæqualia.

Axioma XIII.

Quæ ejusdem, vel æqualium sunt dupla, tripla, vel quadrupla, &c. sunt æqualia inter se.

Axio-

Axioma XIV.

Quæ sunt dimidium, vel tertia pars, vel quarta &c. ejusdem, vel æqualium, sunt pariter æqualia inter se.

Axioma XV.

Si fuerit totum duplum totius, & ablatum duplum ablati, etiam reliquum reliqui duplum erit.

www.libtool.com.cn

Sit numerus 24 duplus numeri 12, & ex toto 24 auferatur numerus 10 duplus numeri 5, qui auferatur ex toto 12; etiam reliquum 24 — 10 duplum erit residui 12 — 5; idest residuum 14 duplum erit residui 7. Fig. VIII. Tab. III.

Axioma XVI.

Omnes anguli recti sunt æquales inter se.

Sint rectæ AB, LG perpendiculares ad rectas CD, EF; anguli recti in B æquales erunt angulis rectis in G. Nam si recta CD superimponatur rectæ EF, ita ut punctum B cadat supra punctum G, tunc perpendicularis BA necessario coincidet cum perpendiculari GL; alioquin si hinc, vel inde a perpendiculari GL deflecteret, esset obliqua: quod est contra hypothesim; consequenter (Axiom. 14.) anguli recti in B sunt æquales angulis rectis in G, quia congruunt. Fig. IX. Tab. III.

Axioma XVII.

Duo latera cujusvis trianguli rectilinei simul sumpta, reliquo sunt majora.

Ut in triangulo ABC, evidens est duo qualibet latera, exempli caussa, AB, BC, simul sumpta, majora, seu longiora esse reliquo latere AC. Quod ab Euclide demonstratur in Propositione 20. Libri I. Fig. X. Tab. III.

Axioma XVIII.

Si ab extremis (A, & C) unius lateris (AC) cujusvis trianguli rectilinei (ABC) ad punctum aliquod (D) intra ipsum triangulum ducantur duæ rectæ lineæ (AD, CD); ipsæ simul sumptæ minores erunt reliquis duobus dati trianguli lateribus (AB, CB) simul sumptis. Nimirum semita ex A per D ad C minor est, quam semita ex A per B ad C.

Est prima pars Propositionis 21. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO PRIMA.

Problema.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum describere.

Fig. XII. Tab. III. Data sit recta AC terminata a punctis A, & C, & supra eamdem rectam constituendum sit triangulum æquilaterum.

www.libtool.com.cn

Constructio.

Ex centro A, & intervallo, seu radio AC (Post. 3.) describatur circulus CDF. Similiter ex centro C, & intervallo eodem CA describatur alius circulus ADE, cujus peripheria alicubi secabit peripheriam alterius circuli, ut in puncto D, ex quo ad puncta A, & C ducantur duæ rectæ lineæ DA, DC (Post. 1.). Dico triangulum ADC esse æquilaterum.

Demonstratio.

Rectæ lineæ AD, AC sunt radii ejusdem circuli DFC; *ideoque* (Defin. 15.) est AD = AC. Similiter est CD = CA, quia sunt radii ejusdem circuli ADE; ergo (Axiom. 1.) erit AD = DC, quia ambæ ostensæ sunt æquales eidem rectæ AC. Itaque tres rectæ AD, AC, CD erunt æquales inter se; consequenter (Defin. 19.) triangulum ADC erit æquilaterum. Ergo super data recta terminata constitutum est triangulum æquilaterum. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Est Propositio 1. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO SECUNDA.

Problema.

Ex dato puncto rectam lineam ducere æqualem datæ rectæ terminatæ.

Fig. XIII. Tab. III. Data sit recta terminata AB, & datum sit punctum D, ex quo ducenda sit linea recta æqualis datæ AB.

Constructio.

Centro A, intervallo AB (Post. 3.) describatur circulus BFE; deinde a puncto D ad punctum A (Post. 1.) ducatur recta DA. Super recta DA (Prop. anteced.) construatur triangulum æquilaterum ACD, cujus latus CA (Post. 2.) producatur usque ad periferiam in

F; po-

F; postea centro C intervallo CF (Post. 3.) describatur alius circulus FGL; tandem producatur latus CD usque ad peripheriam circuli in L, erit DL quæsita linea.

Demonstratio.

Triangulum CDA, per constructionem, est æquilaterum; igitur (Defin. 19.) erit latus CD = CA. Præterea (Defin. 15.) est radius CL = CF, quia, ex constructione, sunt radii majoris circuli FGL. Itaque ab æqualibus lineis CL, CF auferantur partes æquales CD, CA, & (Axiom. 3.) permanebit DL = AF. Atqui (Defin. 15.) est pariter AB = AF (sunt enim radii circuli minoris FBE); ergo (Axiom. 1.) erit DL = AB. Quapropter ex dato puncto ducta est recta linea æqualis datæ rectæ terminatæ. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Est Propositio 2. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, ex majori partem abscindere æqualem minori.

Datæ sint duæ rectæ inæquales, AB major, & CD minor, atque ex majori AB auferenda sit pars æqualis minori CD. Fig. XIV. Tab. III.

Constructio.

Ab extremo puncto A majoris AB (Prop. anteced.) ducatur recta AE æqualis minori CD. Deinde centro A, & radio AE (Post. 3.) describatur circulus EFG, cujus peripheria alicubi secabit lineam AB (quia hæc major est CD, seu radio AE), ut in puncto F. Dico AF esse quæsitam portionem æqualem minori CD.

Demonstratio.

Omnes radii ejusdem circuli (Defin. 15.) sunt æquales inter se; idcirco erit radius AF = AE; sed per constructionem est AE = CD; ergo (Axiom. 1.) erit AF = CD. Consequenter ex data recta majore abscissa est portio æqualis datæ rectæ minori. Quod erat propositum.

Est Propositio 3. Libri 1. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

Datis tribus lineis terminatis, quarum duæ, quomodocunque sumptæ, reliquam excedant, super ipsarum unam triangulum constituere, habens duo latera reliquis duabus datis rectis lineis æqualia.

www.libtool.com.cn

Fig. I. Tab. IV. Datæ sint tres rectæ lineæ GH, A, & C, quarum duæ omnifariam sumptæ reliqua sint majores (Axiom. 17.), atque supra GH describendum sit triangulum, cujus reliqua duo latera sint æqualia lineis A, & C, singula singulis.

Constructio.

Recta terminata GH (Post. 2.) utrinque producatur versus E, & F indefinite; deinde (Prop. anteced.) secentur partes GE æqualis lineæ A, & HF = C. Postea centro G intervallo GE (Post. 3.) describatur circulus ELM, & centro H radio HF describatur *alius* circulus LFK. Tandem ex puncto L, in quo peripheriæ se *mutuo* secant, ad puncta G, & H (Post. 1.) ducantur rectæ LG, LH; erit LGH quæsitum triangulum.

Demonstratio.

Latus GL (Defin. 15.) est æquale rectæ GE; sed recta GE (Constr.) est æqualis rectæ A; ergo (Axiom. 1.) erit latus GL æquale rectæ A. Eadem ratione est HL = HF (Defin. 15.), & HF = C (Constr.); ideoque (Axiom. 1.) erit latus HL = rectæ C. Consequenter supra GH constitutum est triangulum GLH habens reliqua duo latera GL, LH æqualia reliquis datis rectis lineis A, C. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Est Propositio 22. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Fig. I. II. & III. Tab. IV. Si omnes tres datæ rectæ fuerint æquales inter se, descriptum triangulum (Defin. 19.) erit æquilaterum; si duæ tantum æquales fuerint inter se, triangulum (Defin. 20.) erit Isosceles; si autem omnes tres fuerint inæquales, triangulum descriptum (Defin. 21.) erit Schalenum.

PRO-

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, & latus æquale lateri interposito inter angulos æquales, erunt reliqua latera reliquis lateribus æqualia, reliquus angulus reliquo angulo æqualis, & triangulum triangulo æquale erit.

www.libtool.com.cn

Duo triangula ABC, EFM habeant angulum A æqualem angulo E, angulum C æqualem angulo M, & latus interceptum AC æquale lateri interposito EM, ostendendum est latus AB æquale esse lateri EF, latus BC = FM, quæ æqualibus angulis opponuntur; angulum B æqualem esse angulo F, & triangulum ABC æquale esse triangulo EFM. Fig. IV. Tab. IV.

Demonstratio.

Intelligatur triangulum ABC ita superimponi triangulo EFM, ut punctum A cadat supra punctum E, & latus AC supra æquale latus EM; punctum C cadet in M, & mutuo congruent duo æqualia latera AC, EM, (Coroll. Defin. 5.). Cum autem ex hypothesi angulus A sit æqualis angulo E, latus AB necessario cadet supra latus EF. Similiter quia est angulus C æqualis angulo M, latus CB cadet supra MF; consequenter punctum B commune duobus lateribus AB, CB cadet supra punctum F commune duobus lateribus EF, FM, & triangulum ABC perfecte congruet cum triangulo EFM; ergo (Axiom. 14.) erit latus AB = EF, latus BC = FM, angulus B æqualis angulo F, & triangulum, seu area ABC æqualis erit areæ trianguli EFM. Quapropter, si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis æquales, utrumque utrique, & latus interpositum æquale lateri intercepto inter angulos æquales, etiam reliqua reliquis æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

Est prima pars Propositionis 26. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO SEXTA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint angulum æqualem angulo, & latera æqualia angulos efficientia æqualia inter se utrumque utrique; etiam basis æqualis erit basi, triangulum æquale triangulo, & reliqui duo anguli reliquis duobus angulis æquales erunt, quibus æqualia latera subtenduntur.

Duo triangula ADE, BCF habeant angulum A æqualem angulo B, Fig. V. Tab. IV.

latus AD = BC, & latus AE = BF; dico basim DE æqualem esse basi CF, triangulum ADE æquale esse triangulo BCF, angulum D = C, & angulum E æqualem esse angulo F, quibus opponuntur latera æqualia.

Demonstratio.

Triangulum ADE ita superimponatur triangolo BCF, ut punctum A cadat supra punctum B, & latus AD supra æquale latus BC, punctum D necessario cadet in C, quia ex hypothesi est latus AD = BC.

www.libtool.com.cn

Præterea quia angulus A est æqualis angulo B ex hypothesi, ideo latus AE cadet supra BF, & punctum E cadet in F, quia (hypoth.) est latus AE = BF; ideoque recta DE (Coroll. Defin. 5.) congruet cum recta CF (quia ex demonstratis puncta D, & E cadunt in C, & F), & triangulum ADE congruet cum triangulo BCF, angulus D cum angulo C, & angulus E cum angulo F; consequenter (Axiom. 4.) erit basis DE æqualis basi CF, triangulum ADE æquale triangulo BCF, angulus D = C, & angulus E = F. Ergo si duo triangula habuerint &c. Quod erat demonstrandum.

Est Propos. 4. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & habuerint angulum majorem angulo a lateribus æqualibus contento, habebunt etiam basim majorem basi.

Fig. VI. Tab. IV. Duo triangula ABC, EFL, habeant latus AB = FE, latus BC = EL, & angulum ABC majorem angulo E; dico basim AC oppositam majori angulo majorem esse basi FL, quæ subtendit angulum minorem.

Concipiatur triangulum EFL ita superimponi triangulo ABC, ut punctum E cadat in B, & latus FE supra æquale latus BA extendatur, punctum F necessario cadet in A ob æqualitatem laterum EF, BA.

Præterea, quia ex hypothesi angulus E minor est angulo ABC, latus EL cadet infra BC, ut in BR, & latus FL cadet in AR.

Demonstratio.

In triangulo IBC (Axiom. 17.) duo latera BI, IC simul sumpta, sunt majora reliquo BC; sed (hypoth.) est latus BC = EL, & (ex construct.) est latus BR = EL; iccirco (Axiom. 1.) erit latus BR = BC. Consequenter duo latera BI, IC, quæ ostensa sunt majora BC (secunda parte Axiom. 1.) erunt etiam majora BR; sed

sed (Axiom. 11.) est $BR = BI + IR$; igitur duo latera BI, & IC, quæ ex demonstratis sunt majora BR, (secunda parte Axiom. 1.) erunt etiam majora duobus BI, & IR; atque ab æqualibus summis $BI + IC > BI + IR$ auferendo communem partem BI (Axiom. 7.), remanebit $IC > IR$; quibus addatur communis portio IA, & (Axiom. 6.) erunt duæ rectæ IC, & IA majores duabus IR, IA; nimirum $IC + IA$, hoc est (Axiom. 11.) tota recta AC major erit duabus IR, IA; sed duæ rectæ IR, IA in triangulo IAR (Axiom. 17.) sunt majores reliqua AR; ergo (Axiom. 13.) etiam recta AC major erit recta AR. Est autem $AR = FL$ per constructionem; ideoque (secunda parte Axiom. 1.) erit pariter AC major recta FL.

Quapropter si duo triangula habuerint &c. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 24. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & basim majorem basi, habebunt pariter angulum majorem angulo a lateribus æqualibus contento.

Duo triangula ABC, EFL, habeant latera æqualia $AB = FE$, $BC = EL$, & basim AC majorem basi FL; dico angulum B majorem esse angulo E. Fig. VII. Tab. IV.

Demonstratio.

Etenim si angulus B esset æqualis angulo E, quia (hypoth.) est $BA = EF$, & $BC = EL$, tunc (Propos. 6.) etiam basis AC æqualis esset basi FL, quod est contra hypothesim. Si autem angulus B minor esset angulo E, tunc (Propos. anteced.) etiam basis AC minor esset basi FL, quod est pariter contra hypothesim. Ergo angulus B major erit angulo E, quia ex demonstratis non potest esse æqualis, nec minor eodem angulo. Quapropter si duo triangula &c. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 25. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Si duorum triangulorum singula latera singulis lateribus æqualia fuerint, etiam singuli anguli singulis angulis æquales erunt, quibus æqualia latera subtenduntur, & triangulum triangulo æquale erit.

Data sint duo triangula ACF, EBL, quæ habeant latus $AC =$

BE, latus CF = EL, & basim AF = BL; ostendendum est angulum C æqualem esse angulo E, angulum A = B, angulum F = L, & triangulum ACF æquale esse triangulo EBL.

Demonstratio.

Quoniam duo latera AC, CF (hypoth.) sunt æqualia duobus lateribus EB, EL, alterum alteri, si angulus C non esset æqualis angulo E, sed ipso major, vel minor, tunc (Propos. 7.) etiam basis AF major, vel minor esset basi BL: quod est contra hypothesim. Cum igitur sit basis AF æqualis basi BL, necesse est, ut angulus C sit æqualis angulo E; ipsi autem anguli C, & E, demonstrati æquales, continentur a lateribus æqualibus; ideoque (Propos. 6.) erit etiam angulus A æqualis angulo B, angulus F æqualis angulo L, quibus opponuntur æqualia latera; & triangulum ACF æquale erit triangulo EBL. Ergo si duorum triangulorum &c. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 8. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMA.

Problema.

Ad datam rectam lineam indefinitam, & ad punctum in ea datum; angulum rectilineum constituere æqualem dato angulo rectilineo.

Fig. IX. Tab. IV. Datus sit angulus rectilineus A, & data sit recta CE, & punctum in ea C, oportet ad rectam CE, & in puncto C angulum rectilineum constituere æqualem dato angulo A.

Constructio.

Ducatur recta FG, quæ jungat duo qualibet puncta laterum AF, AG. Deinde ex indefinita CE (Prop. 3.) secetur pars CI æqualis lateri AG, & supra CI (Propos. 4.) describatur triangulum CMI, cujus latus CM sit æquale lateri AF, & latus MI sit æquale lateri FG trianguli AFG: erit MCI quæsitus angulus.

Demonstratio.

Triangula CMI, AFG (construct.) habent latera CI = AG, CM = AF, & MI = FG; ergo (Propos. anteced.) erit angulus MCI æqualis dato angulo A, quibus opponuntur æqualia latera MI, FG. Itaque ad datam rectam lineam &c. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Est Propositio 23. Libri I. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO UNDECIMA.

Problema.

Datum angulum rectilineum bifariam dividere.

Angulus rectilineus CAB dividendus sit bifariam, hoc est in duos angulos æquales. Fig. X. Tab. IV.

www.libtool.com.cn

Constructio.

In latere AB sumatur quodlibet punctum F, & ex alio latere AC indefinite producto versus C (Propos. 3.) secetur pars AE æqualis parti AF, & (Postul. 1.) jungatur recta FE, supra quam (Prop. 1.) describatur triangulum æquilaterum EFL; deinde ex puncto L ad punctum A (Post. 1.) ducatur recta LA, quæ datum angulum CAB bifariam secabit, scilicet in duos æquales angulos CAL, LAB.

Demonstratio.

Duo triangula AEL, ALF habent latus commune AL, latus AE (construct.) æquale lateri AF, & latus FL (Defin. 19.) æquale lateri LE; iccirco (Prop. 9.) erit angulus LAE æqualis angulo LAF, quibus opponuntur æqualia latera LE, LF. Sed duo anguli LAE, LAF (Axiom. 11.) constituunt totum angulum datum CAB; ergo datus angulus bifariam divisus est. Quod erat demonstrandum. Est Propositio 9. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Problema.

Datam rectam lineam terminatam bifariam dividere.

Sit data recta AE terminata in punctis A, & E, quæ dividenda sit in duas partes inter se æquales. Fig. XI. Tab. IV.

Constructio.

Super data recta AE (Propos. 1.) describe triangulum æquilaterum ABE; deinde (Propos. anteced.) bifariam divide angulum ABE per rectam BC, quæ datam AE secet in aliquo puncto C: dico rectam AE bifariam divisam esse in C; erit nempe AC = CE.

Demonstratio.

Duo triangula ABC, BCE habent latus BC commune, & latus

AB

AB = BE (Defin. 19.); præterea (constructione) habent angulum ABC contentum a lateribus AB, BC æqualem angulo CBE contento a lateribus EB, BC; consequenter (Prop. 6.) habebunt etiam basim AC æqualem basi CE, quæ simul (Axiom. 11.) adæquant totam AE. Ergo data recta terminata bifariam divisa est. Quod facere, & demonstrare oportebat.

Est Propositio 10. Libri I. Euclidis.

www.libtool.com.cn

Corollarium.

2. Præterea in triangulis ABC, BCE (Propos. 6.) erit etiam angulus ACB æqualis angulo BCE, quibus opponuntur latera æqualia AB, BE; sed duo anguli æquales BCA, BCE sunt anguli consequentes, proindeque (Defin. 9.) erunt ambo recti, & BC erit perpendicularis ad rectam AE; ergo recta BC bifariam dividens angulum ABE contentum a lateribus æqualibus AB, BE, non solum bifariam dividit latus AE eidem angulo oppositum; sed est etiam perpendicularis ad idem latus. Quæ omnia verificantur etiamsi triangulum ABE non sit æquilaterum, sed Isosceles, cujus duo latera inter se æqualia sint AB, & AE; quia eadem erit demonstratio.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Problema.

Ad datam rectam lineam, & ex puncto in ea dato perpendicularem lineam erigere.

Fig. XII. Tab. IV. Data sit recta AB, & in ea datum sit punctum C, ex quo erigenda sit linea recta perpendicularis ad lineam datam AB.

Constructio.

In parte CA notetur aliquod punctum E, & habebitur recta terminata CE; deinde ex alia parte CB indefinite producta (Prop. 3.) secetur pars CF = CE; atque supra totam EF constituatur triangulum æquilaterum ELF (Prop. 1.). Tandem ex puncto L ad punctum datum C (Postul. 1.) ducatur recta LC, quæ erit quæsita perpendicularis.

Demonstratio.

Duo triangula LCF, LCE, habent latus CF = CE (constr.), latus CL commune, & latus LF = LE (Defin. 19.); quapropter (Prop. 9.) erit angulus LCF æqualis angulo LCE, quibus subtenduntur latera æqualia; consequenter (Definit. 9.) recta LC erit perpendicularis rectæ EF, seu AB. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Est Propositio 11. Libri 1. Euclidis.

Scho-

Scholium.

Quando datum punctum est extremum lineæ datæ, tum (Post. 2.) indefinite producatur data recta, & reliqua fiant, ut antea.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

www.libtool.com.cn

Problema.

Ad datam rectam lineam indefinitam, atque ex puncto extra ipsam dato, perpendicularem lineam demittere.

Data sit recta indefinita AB, & extra ipsam datum sit punctum C, ex quo ducenda sit recta linea perpendicularis ad datam AB. Fig. XIII. Tab. IV.

Constructio.

Ex altera parte datæ lineæ AB notetur quodlibet punctum L, & centro C, radio CL describatur circulus, vel arcus ELF, qui secet datam rectam AB in E, & F; postea subtensa EF (Propos. 12.) bifariam dividatur in G, & (Post. 1.) ducatur recta CG, quæ erit quæsita perpendicularis. Jungantur radii CE, CF.

Demonstratio.

Triangula CGF, CGE habent latus commune CG, & (constructione) latus GF = GE; latus vero CF = CE (Defin. 15.); iccirco (Propos. 9.) erit angulus CGF = CGE; consequenter (Defin. 9.) recta CG erit perpendicularis ad rectam EF, seu AB. Ergo ad datam rectam &c. Quod erat Propositum.

Est Propositio 12. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Theorema.

Recta linea super aliam rectam insistens efficit duos angulos consequentes, vel rectos, vel duobus rectis æquales.

Recta linea AB insistat supra rectam CE, efficiet duos angulos consequentes ABC, ABE, qui (Defin. 9.) erunt ambo recti, quando recta AB perpendiculariter cadit supra CE. Fig. I. Tab. V.

Si autem recta AB oblique cadit supra CE, duo anguli obliqui ABC, ABE simul sumpti, duobus rectis æquales erunt. Fig. II. Tab. V.

Con-

Constructio.

Supra rectam CE, atque ex puncto in ea B (Propos. 13.) erigatur perpendicularis FB.

Demonstratio.

Duo anguli FBC, FBE, (Defin. 9.) sunt ambo recti; angulus vero obtusus ABC excedit rectum FBC per angulum FBA, & angulus acutus ABE deficit a recto FBE per eundem angulum FBA: quapropter ab angulo obtuso ABC auferatur pars FBA, relinquetur angulus rectus FBC; angulo vero acuto ABE addatur angulus FBA ex obtuso ablatus, & (Axiom. 11.) formabitur alter rectus FBE; ergo duo anguli consequentes ABC, ABE, simul sumpti, duos rectos adæquant. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 13. Libri I. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc omnes anguli CBF, FBA, ABE &c, qui fieri possunt in puncto B a quotcumque lineis concurrentibus ex eadem parte lineæ CE, simul sumpti, semper duos rectos adæquant.

Corollarium II.

Fig. III. Tab. V. Præterea quatuor anguli, qui fiunt (in B) a duabus rectis (AE, FC) se mutuo secantibus (in B), quatuor angulis rectis æquales erunt.

Corollarium III.

Fig. IV. Tab. V. Consequenter si ad idem punctum B concurrant quotcumque lineæ rectæ ex utraque parte lineæ AE, omnes anguli, qui ab ipsis rectis efficientur in B, simul sumpti, quatuor angulis rectis æquales erunt.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Si ad punctum aliquod in data recta ex oppositis partibus concurrant duæ rectæ lineæ, quæ efficiant duos angulos consequentes duobus rectis æquales; illæ duæ rectæ lineæ in directum positæ erunt, hoc est unicam rectam lineam component.

Fig. V. Tab. V. Sit recta AC, & ad punctum in ipsa C ex oppositis partibus, ductæ sint duæ rectæ BC, FC, quæ efficiant duos angulos consequentes ACF, ACB, duobus rectis æquales; dico rectas BC, FC in directum positas esse, seu unicam rectam BF constituere.

De-

Demonstratio.

Etenim, si fieri potest, recta CF non sit in directum posita cum recta BC, sed alia recta CI in directum jaceat cum ipsa recta BC, atque tunc recta AC insistens supra rectam BCI (Propos. anteced.) efficiet duos angulos ACB, ACI, simul sumptos, duobus rectis æquales; sed ex hypothesi duo anguli ACB, ACF, simul sumpti, sunt etiam æquales duobus rectis; ergo (Axiom. 1.) duo anguli ACB, ACF erunt æquales duobus angulis ACB, ACI; & dempto communi angulo ACB, (Axiom. 3.) remanebit angulus ACF æqualis angulo ACI, scilicet totum æquale parti: quod (Axiom. 10.) repugnat. Ergo nulla alia recta linea, nisi CF, in directum jacere potest cum linea BC, quando anguli consequentes ACB, ACF adæquant duos angulos rectos. Quapropter si ad punctum aliquod in data recta, &c. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 14. Libri 1. Euclidis.

www.libtool.com.cn

Corollarium

Ergò duæ rectæ lineæ nullam partem communem habere possunt præter unicum punctum, in quo se invicem secant. Etenim si linea quantumvis minima CB esset pars communis duabus rectis IC, FC; si nempe esset ICB linea recta, & FCB alia linea recta, tunc ducta ad punctum C alia recta AC, ut antea demonstravimus, esset angulus ACF æqualis angulo ACI, quod (Axiom. 10.) fieri nequit; ideoque linea CB, quamvis minima, non potest in directum jacere cum duabus lineis rectis; consequenter duæ rectæ lineæ nullum habere possunt segmentum commune. Fig. VI. Tab. V.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

Duæ rectæ lineæ se mutuo secantes efficiunt angulos ad verticem oppositos æquales inter se.

Duæ rectæ AB, FE se invicem secent in puncto C; erit angulus x æqualis angulo ECB, & angulus m æqualis angulo z, qui sunt ad verticem oppositi. Fig. VII. Tab. V.

Demonstratio.

Recta AC incidens supra rectam FE efficit duos angulos consequentes m, & x duobus rectis æquales. Eadem ratione recta FC cadens supra AB efficit duos angulos consequentes z, & x duobus rectis æquales; consequenter (Axiom. 1.) duo anguli m, & x simul ſumpti æquales erunt duobus z, & x ſimul ſumptis; & ab æqualibus ſummis $m + x$, & $z + x$ auferendo communem angulum x, (Axiom. 3.) remanebit angulus m æqualis angulo z, ideſt ACE æqualis angulo FCB, qui ſunt ad verticem oppoſiti.

Præterea duo anguli conſequentes m, & C (Prop. 15.) adæquant pariter duos rectos; ideoque (Axiom. 1.) erunt etiam æquales duobus angulis x, & z, qui (Prop. 15.) adæquant duos rectos; erit nempe $m + C = x + z$; & auferendo angulos m, & z jam demonſtratos æquales, (Axiom. 3.) relinquetur angulus C æqualis angulo x, qui pariter ſunt ad verticem oppoſiti. Ergo duæ rectæ lineæ &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 15. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Fig. VIII. Tab. V. Si ex oppoſitis partibus in lineam rectam AB inciderint ad idem punctum C duæ rectæ FC, EC, quæ angulos ad verticem oppoſitos ACE, FCB æquales efficiant; illæ duæ rectæ FC, CE in directum poſitæ erunt. Si enim æqualibus angulis ACE, FCB addatur communis angulus ACF, (Axiom. 2.) duo anguli ACE, ACF ſimul æquales erunt duobus FCB, ACF ſimul ſumptis: atqui duo anguli conſequentes FCB, ACF (Prop. 15.) adæquant duos rectos; ergo (Axiom. 1.) etiam duo anguli ACE, ACF duobus rectis æquales erunt: conſequenter (Propoſ. 16.) duæ rectæ EC, CF in directum jacebunt.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Rectæ lineæ perpendiculares ad eandem rectam ſunt paralellæ inter ſe.

Fig. IX. Tab.V. Duæ rectæ FE, LM ſint ambæ perpendiculares ad eandem rectam AB; dico rectas FE, LM eſſe paralellas.

In recta FE ſumatur quodvis punctum S, & (Propoſ. 14.) demittatur SI perpendicularis rectæ LM: deinde ex altera parte BM (Defin. 3.) ſecetur portio $BC = BI$, & ex puncto C ad lineam FE (Propoſ. 13.) erigatur perpendicularis CR, atque ducantur rectæ CA, IA.

Demonſtratio.

Conſiderentur duo triangula ABC, ABI, quæ (conſtructione) habent latus $BC = BI$, latus BA utrique triangulo commune, & angulum ABC (Axiom. 16.) æqualem angulo ABI: ſunt enim recti ex hypotheſi; ergo (Propoſ. 6.) erit baſis $CA = $ baſi IA, angulus $z = x$, & angulus $t = y$, quibus ſubtenduntur latera æqualia.

Præterea ob lineas RC, SI (conſtruct.) perpendiculares ad rectam LM, anguli recti RCB, SIB (Axiom. 16.) ſunt æquales, a quibus

bus auferantur partes æquales, scilicet anguli z; & x, atque (Axiom. 3.) remanebit angulus ACR æqualis angulo AIS. Similiter ab angulis RAB, SAB ex hypothesi rectis, & (Axiom. 16.) æqualibus inter se demantur partes (Demonstratione) æquales, scilicet anguli t, & y, remanebit angulus RAC æqualis angulo IAS (Axiom. 3.). Quapropter duo triangula ACR, IAS (Demonstrat.) habent duos angulos RCA, RAC æquales duobus angulis AIS, IAS, & latus interpositum AC æquale lateri interposito IA; ideoque (Propos. 5.) erit latus, seu perpendiculum CR æquale lateri; seu perpendiculo IS, quæ æqualibus angulis opponuntur; consequenter duæ rectæ FE, LM (Defin. 11.) erunt parallelæ, cum perpendiculares inter ipsas interceptæ IS, CR ostensæ sint æquales inter se: quod semper verificatur, sive perpendiculares IS, CR, viciniores sint, sive remotiores a recta AB. Ergo rectæ lineæ perpendiculares &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DECIMANONA.

Theorema.

Si recta linea supra duas rectas incidens fecerit angulos alternos æquales inter se; vel angulum externum æqualem angulo interno, & opposito ad eandem partem; vel duos angulos internos & ad eandem partem positos, æquales duobus angulis rectis: illæ duæ rectæ lineæ semper erunt parallelæ.

Primo recta GF oblique secet duas rectas AB, CL, & efficiat angulum x æqualem angulo z (qui sunt anguli interni, & oppositi, & vocantur *anguli alterni*): dico duas rectas AB, CL esse parallelas. Fig. X. Tab. V.

Recta GF (Prop. 12.) bifariam secetur in puncto I, ex quo supra CL (Propos. 14.) demittatur perpendicularis IS; deinde (Propos. 3.) ex recta indeterminata GA secetur portio GR = SF, & (Post. 1.) jungatur recta IR.

Demonstratio

Triangula RGI, IFS (construct.) habent latus GI = IF, & latus RG = SF, & (hypoth.) angulum x æqualem angulo z, qui fiunt a lateribus æqualibus; ergo (Propos. 6.) erit angulus RIG æqualis angulo opposito ad verticem SIF; consequenter (Coroll. Propos. 17.) rectæ RI, IS unicam rectam RS constituunt. Præterea erit angulus IRG æqualis angulo ISF, qui (construct.) est rectus; ideoque (Axiom. 1.) etiam angulus IRG erit rectus, proindeque (Defin. 9.) recta SR erit perpendicularis rectæ AB, & (constructione) est etiam perpendicularis rectæ CL; consequenter (Propos. antec.) lineæ AB, CL erunt parallelæ, quia perpendiculares eidem rectæ SR.

Si autem ponantur æquales inter se duo anguli t, & o, qui pariter sunt *alterni*; tunc, quia (Propos. 15.) tam summa angulorum $x + t$, quam summa $o + z$ adæquat duos rectos, icciroo (Axiom. 1.) erit $x + t = o + z$; & auferendo angulos t, & o ex hypothesi æquales, (Axiom. 3.) remanebit $x = z$; consequenter (anteç. Demonstr.) lineæ AB, CL erunt parallelæ. Ergo si recta linea supra duas rectas incidens fecerit angulos alternos æquales inter se, illæ duæ rectæ erunt parallelæ. Quod erat primum.

Secundo recta CI supra duas rectas AF, GH insistens efficiat angulum externum f æqualem angulo m interno, & opposito ad eandem partem, rectæ AF, GH erunt etiam parallelæ.

Demonstratio.

Angulus t (Propos. 17.) est æqualis angulo f ad verticem opposito; sed ex hypothesi angulus m est æqualis eidem angulo f; igitur (Axiom. 1.) erit angulus t æqualis angulo alterno m: consequenter (per antec. Demonstr.) rectæ AF, GH erunt parallelæ.

Fig. XI. Tab. V. Eodem modo demonstratur rectas AF, GH esse parallelas, si fuerit angulus externus CLF æqualis angulo z interno, & opposito, & ad eandem partem.

Quapropter si recta linea supra duas rectas incidens fecerit angulum externum æqualem interno, & opposito, & ad eandem partem, ipsæ duæ rectæ lineæ erunt parallelæ. Quod erat secundum.

Tertio recta LI cadens supra rectas AF, GH efficiat angulos x, & m (vel t, & z) internos, & ad eandem partem positos simul sumptos æquales duobus angulis rectis, rectæ AF, GH erunt parallelæ.

Demonstratio.

Duo anguli consequentes z, & f simul sumpti (Prop. 15.) sunt æquales duobus rectis; sed (hypothes.) duo anguli m, & x sunt etiam æquales duobus rectis; ideoque (Axiom. 1.) duo anguli z, & m erunt æquales duobus x, & m; a quibus auferatur communis angulus m, & (Axiom. 3.) remanebit angulus z æqualis angulo alterno x; ergo per primam Demonstrationem rectæ AF, GH erunt parallelæ.

Eodem ratiocinio demonstratur lineas AF, GH esse parallelas, si alii duo anguli t, & z interni, & ad eandem partem positi fuerint æquales duobus rectis.

Ergo si recta linea supra duas rectas incidens fecerit duos angulos internos, & ad eandem partem positos duobus angulis rectis æquales, illæ duæ rectæ erunt parallelæ. Quod erat tertium.

Hæc Propositio continet Propositiones 27, & 28 Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMA.

Theorema.

Si recta linea supra duas parallelas incidens fuerit perpendicularis ad unam parallelarum, erit etiam perpendicularis ad alteram.

www.libtool.com.cn

Sint duæ rectæ parallelæ FE, LM, supra quas cadat recta AB, quæ sit perpendicularis ad rectam LM; dico eandem AB etiam perpendicularem esse ad rectam FE. Fig. IX. Tab. V.

Ex puncto B secentur æquales partes BI, BC, & (Propos. 13.) ad rectam LM erigantur perpendiculares IS, CR, junganturque rectæ IA, CA.

Demonstratio.

Quoniam triangula ABI, ABC circa angulos (Axiom. 16.) æquales ABI, ABC habent latera æqualia, IB = BC, & BA commune; ideo (Propos. 6.) erit basis IA = CA, angulus x = z, & angulus y = t.

Quapropter si ab æqualibus angulis rectis SIB, RCB auferantur æquales anguli x, & z, (Axiom. 3.) remanebit angulus AIS = ACR. Igitur duo triangula AIS, ACR habent angulum AIS = ACR (Demonstrat.), & latus IA = lateri CA, latus vero SI (Definit. 11.) æquale lateri RC, quia sunt perpendiculares inter parallelas interceptæ; consequenter (Propos. 6.) erit angulus IAS æqualis angulo RAC, quibus adjungantur anguli y, & t ex demonstratis æquales, (Axiom. 2.) erit totus angulus SAB æqualis integro angulo RAB; ideoque (Definit. 9.) recta BA erit etiam perpendicularis ad rectam FE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VICESIMAPRIMA.

Theorema.

Recta linea supra duas parallelas oblique incidens efficiet angulos alternos æquales inter se; angulum externum æqualem interno, & opposito, ad eandem partem; & duos angulos internos, & ad eandem partem positos duobus rectis æquales.

Primo duas parallellas AB, CL oblique secet recta GF; dico angulos alternos æquales esse inter se; scilicet x = z, & angulum BGF = CFG. Fig. XII. Tab. V.

A punctis F, & G ad rectas AB, CL (Prop. 14.) demittantur perpendiculares FE, GI.

De-

Demonstratio.

Quoniam (construct.) recta F E est perpendicularis rectæ A B, ideo (Propos. anteced.) erit etiam perpendicularis ad alteram parallelam C L; consequenter duæ rectæ E F, G I perpendiculares ad eandem C L (Propos. 18.) erunt inter se parallelæ. Quapropter duo triangula E F G, I G F habent latus F E = G I (Definit. 11.), quia sunt perpendiculares inter parallelas A B, C L positæ: similiter est latus E G = I F, sunt enim perpendiculares positæ inter lineas (Demonstrat.) parallelas F E, G I; latus vero F G est utrique triangulo commune; ergo (Propos. 9.) erit angulus x = z, quibus opponuntur latera æqualia E F, G I, & sunt anguli alterni. Præterea erit angulus o = t, quibus addantur æquales anguli recti E F C, I G B, & (Axiom. 2.) erit totus angulus C F G æqualis integro angulo B G F, qui sunt pariter alterni. Ergo recta supra duas rectas parallelas incidens, efficit angulos alternos æquales inter se. Quod erat primum.

Fig. XIII. Tab. V. Secundo recta C I supra duas rectas parallelas A F, G H insistens, efficiet angulum externum ſ æqualem angulo m interno, & opposito, & ad eandem partem.

Demonstratio.

Etenim (Propos. 17.) angulus ſ est æqualis angulo t; & per antecedentem Demonstrationem angulus m est æqualis ipsi angulo t suo alterno; ergo (Axiom. 1.) erit angulus ſ æqualis angulo m.

Eodem modo demonstratur angulus A L C = z, quia sunt ambo æquales eidem angulo x.

Consequenter recta linea supra duas rectas parallelas insistens efficit angulum externum æqualem angulo interno, & opposito ad eandem partem. Quod erat secundum.

Tertio recta C I secans duas rectas parallelas A F, G H, efficiet duos angulos x, & m internos, & ad eandem partem positos, duobus angulis rectis æquales.

Demonstratio.

Anguli alterni z, & x, per primam partem hujus Propositionis, sunt æquales inter se; quibus adjungatur idem angulus m, & duo anguli z, & m (Axiom. 2.) æquales erunt duobus angulis x, & m; sed anguli consequentes z, & m (Propos. 15.) adæquant duos rectos; ergo (Axiom. 1.) etiam duo anguli x, & m æquales erunt duobus angulis rectis.

Eodem ratiocinio duobus rectis æquales demonstrantur anguli t, & z; ergo recta linea incidens in duas rectas parallelas, efficit duos angulos internos, & ad eandem partem positos, æquales duobus angulis rectis. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 29. Libri I. Euclidis.

PRO-

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO VICESIMASECUNDA.

Theorema.

Rectæ lineæ (AE, CF) eidem rectæ (DL) parallelæ, inter se quoque erunt parallelæ.

www.libtool.com.cn

Ducatur recta IM eas utcumque secans in punctis I, G, M. Fig. XIV. Tab. V.

Demonstratio.

Quoniam duæ rectæ AE, DL (hypoth.) sunt inter se parallelæ; ideo (prima parte Propos. anteced.) erit angulus x æqualis alterno z. Præterea, quia rectæ CF, DL (hypothes.) sunt parallelæ, iccirco (secunda parte Propos. anteced.) erit angulus internus f æqualis angulo z externo, & opposito ad eandem partem; ergo (Axiom. 1.) erit angulus x æqualis angulo f, qui sunt alterni; consequenter (prima parte Propos. 19.) duæ rectæ AE, CF erunt parallelæ. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 30. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMATERTIA.

Problema.

Per datum punctum (C) rectam lineam ducere parallelam datæ rectæ (AF).

Ex dato puncto C ad quodlibet punctum L in recta data AF ducatur recta CL; & ad punctum C supra rectam CL (Propos. 10.) constituatur angulus LCE æqualis angulo FLC, recta EC erit quæsita linea. Fig. I. Tab. VI.

Demonstratio.

Nam anguli alterni ECL, FLC sunt æquales inter se per constructionem; ideoque (prima parte Propos. 19.) rectæ AF, EC erunt parallelæ. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Est Propositio 31. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMAQUARTA.

Theorema.

In omni triangulo rectilineo tres anguli simul sumpti adæquant duos angulos rectos: Atque producto quovis latere, angulus externus æqualis erit duobus angulis interioribus, & oppositis simul sumptis.

Primo datum sit triangulum rectilineum ACD; dico omnes ejus angu- Fig. II. Tab. VI.

angulos internos t, m, & x simul sumptos æquales esse duobus angulis rectis.

Per punctum C (Proposit. anteced.) ducatur recta G C F parallela lateri A D.

Demonstratio.

Quoniam rectæ G F, A D (construct.) sunt parallelæ; ideo recta CA in eas incidens (Propos. 21.) efficiet angulos alternos æquales, scilicet x = z. Item recta C D easdem parallelas secans efficiet angulos alternos æquales, hoc est t = s; atque æqualibus æqualia adjungendo; (Axiom. 2.) erit x + t = z + s; quibus addatur communis angulus m, & (Axiom. 2.) habebitur summa x + t + m = z + s + m; atqui (Coroll. 1. Propos. 15.) summa angulorum z, m, & s adæquat duos angulos rectos; ergo (Axiom. 1.) etiam tres anguli x, t, & m, simul sumpti, duobus rectis æquales erunt. Quod erat primum.

Fig.III. Tab.VI. Secundo producatur quodvis latus, ut A D versus E, & angulus externus C D E erit æqualis duobus angulis x, & m *interioribus*, & oppositis, simul sumptis.

Demonstratio.

Nam duo anguli consequentes t, & CDE simul (Proposit. 15.) sunt æquales duobus rectis; sed tres anguli interni x, t, & m simul (anteced. Demonstr.) sunt pariter æquales duobus angulis rectis: ergo (Axiom. 1.) duo anguli consequentes t, & C D E æquales erunt tribus angulis x, t, m simul sumptis. Dematur communis angulus t, & (Axiom. 3.) remanebit angulus externus C D E æqualis duobus angulis x, & m internis, & oppositis simul sumptis. Quod erat secundum.

Quapropter in omni triangulo rectilineo &c. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 32. Libri I. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc cujuscumque trianguli duo anguli simul sumpti semper minores erunt duobus rectis, quia per primam Demonstrationem omnes simul sumpti duos tantum rectos adæquant.

Est Propositio 17. Libri I. Euclidis.

Corollarium II.

In quolibet triangulo rectilineo, producto uno latere, angulus externus major erit utroque interno, & opposito; nam per secundam De-

Demonstrationem angulus externus CDE adæquat duos internos, & oppositos m, & x simul sumptos: consequenter major erit tam angulo m, quam angulo x, ut per se patet.

Est Propositio 16. Libri I. Euclidis.

Corollarium III.

Si recta linea BL duas rectas AF, ME incidens, fecerit angulos internos, & ad eandem partem positos ABL, & BLM majores duobus rectis; sunt reliqui duo anguli interni, & ad alteram partem positi FBL, ELB erunt minores duobus rectis; qui duo anguli consequentes in B (Propos. 15.) una cum duobus angulis consequentibus in L efficiunt quatuor rectos, a quibus si auferantur duo anguli ABL, MLB ex hypothesi majores duobus rectis, reliqui duo anguli FBL, ELB erunt minores duobus rectis. Fig. IV. Tab. VI.

Præterea lineæ AF, ME non erunt parallelæ; nam quando lineæ sunt parallelæ, (Propos. 21.) anguli interni, & ad eandem partem positi duos rectos adæquant.

Si autem (quod est Axioma Undecimum Euclidis) utrinque producantur rectæ AF, ME, utique concurrent ex ea parte, versus quam anguli interni FBL, ELB sunt minores duobus rectis; quia (Coroll. 1.) duo anguli cujusvis trianguli rectilinei, simul sumpti, semper minores sunt duobus rectis. Atque eadem ratione ex alia parte, versus quam anguli interni ABL, MLB sunt majores duobus rectis, nunquam convenient, sed magis magisque a se mutuo recedent. Unde lineæ AF, ME, dicuntur *Convergentes* versus partem FE, & *Divergentes* ex altera parte AM.

Corollarium IV.

Si a terminis A, & F unius lateris cujuslibet trianguli ACF ductæ fuerint duæ rectæ AE, FE ad aliquod punctum E intra triangulum; ipsæ rectæ continebunt angulum AEF majorem angulo ACF contento a reliquis lateribus dati trianguli ACF. Fig. V. Tab. VI.

Etenim ducta recta CEL, angulus AEL externus trianguli AEC (Coroll. 2.) major est angulo ACE interno, & opposito.

Similiter externus angulus LEF major est angulo ECF interno, & opposito; consequenter totus angulus AEF major erit interno angulo ACF.

Est secunda pars Propositionis 32. Libri I. Euclidis.

Corollarium V.

Quoniam summa trium angulorum cujusvis trianguli rectilinei (prima parte hujus Propositionis) adæquat duos angulos rectos, ideo si unus trianguli angulus fuerit obtusus, seu major recto, tunc reliqui duo

duo anguli erunt acuti, & simul sumpti minores erunt angulo recto.

Si autem unus trianguli angulus fuerit rectus, reliqui duo erunt acuti, & simul sumpti efficient unum angulum rectum.

Quapropter quando unus angulus trianguli æqualis est reliquis duobus simul sumptis, tunc angulus ille est rectus, quia æqualis dimidio summæ duorum rectorum.

www.libtool.com.cn

Corollarium V I.

Præterea quia (prima parte hujus Propositionis) summa omnium angulorum cujuslibet trianguli rectilinei semper æqualis est duobus angulis rectis, iccirco (Axiom. 1.) summa trium angulorum cujusvis trianguli rectilinei æqualis erit summæ trium angulorum alterius cujuscumque trianguli rectilinei.

Corollarium V I I.

Quapropter si duo anguli unius trianguli æquales fuerint duobus angulis alterius trianguli, etiam reliquus reliquo æqualis erit.

Similiter si unus angulus unius trianguli æqualis fuerit angulo alterius trianguli, etiam reliqui duo anguli prioris trianguli simul sumpti æquales erunt reliquis duobus angulis alterius trianguli simul sumptis, quia in utroque triangulo semper eandem summam duorum rectorum constituere debent.

Corollarium V I I I.

Summa omnium angulorum cujuslibet figuræ rectilineæ totidem rectos adæquat, quot unitates, demptis quatuor, continet numerus laterum bis sumptus.

Nimirum si datæ figuræ laterum numerus bis sumatur, & ex ipso numero duplo subtrahatur numerus quatuor, residuum indicabit quot angulis rectis æquivaleant omnes anguli interni ejusdem figuræ, simul sumpti.

Fig. VI. Tab. VI. Ut dato Pentagono I L C F G, summa omnium angulorum F C L, C L I, L I G, &c, ejusdem figuræ æquivalebit decem angulis rectis minus quatuor, hoc est efficiet sex angulos rectos.

Nam intra figuram sumatur aliquod punctum A, ex quo ad singulos angulos datæ figuræ ducantur rectæ A C, A L, A I, &c; figura divisa erit in totidem triangula, quot habet latera, scilicet in quinque; sed omnes anguli uniuscujuslibet trianguli (prima parte hujus Propositionis) adæquant duos rectos; ergo quia totidem sunt triangula, quot latera, summa omnium angulorum eorumdem quinque triangulorum æquivalebit decem angulis rectis, scilicet duplo numero laterum; anguli vero eorundem triangulorum, qui fiunt in puncto A, non spectant ad figuram, & simul sumpti (Coroll. 3. Propos. 13.)

pos. 15.) adæquant quatuor rectos; idcirco si ex decem rectis (summa omnium angulorum eorundem triangulorum) demantur quatuor recti (scilicet omnes anguli, qui sunt in A), reliqui sex anguli recti æquales erunt reliquis omnibus triangulorum angulis, nimirum æquales erunt summæ omnium angulorum dati pentagoni.

Si data figura habuerit 16. latera, omnes ejus anguli interni simul sumpti æquales erunt 32 angulis rectis minus quatuor, hoc est 28 angulos rectos constituent: quod eodem ratiocinio demonstrari potest; atque idem intelligatur de alia qualibet figura rectilinea.

www.libtool.com.cn

Corollarium IX.

Ergo omnia Polygona habentia eundem numerum laterum, habebunt etiam internorum angulorum summas æquales inter se.

Corollarium X.

Si cujuslibet figuræ rectilineæ singula latera ex una tantum parte producantur, omnes anguli externi simul sumpti quatuor rectis æquales erunt.

Etenim in figura CLFGE duo anguli consequentes LCE internus, & LCD externus simul sumpti (Propos. 15.) adæquant duos rectos: quod pariter verificatur in reliquis punctis L, F, G, E. Consequenter anguli interni simul cum externis totidem paria angulorum rectorum efficiunt, quot sunt polygoni latera; sive, quod idem est, efficiunt numerum angulorum rectorum duplum numeri laterum; scilicet in hac figura decem angulos rectos constituunt, a quibus auferantur omnes anguli interni, qui (Coroll. 8.) bis tot rectos constituunt, quot sunt latera, demptis quatuor; in hac figura sex rectos efficiunt; reliqui quatuor anguli recti erunt æquales summæ omnium angulorum externorum. Fig. VII. Tab. VI.

Eodem modo idem demonstratur de alio quolibet polygono.

Corollarium XI.

Quapropter summa angulorum externorum cujuslibet figuræ rectilineæ est æqualis summæ omnium externorum alterius cujuscumque figuræ rectilineæ.

PROPOSITIO VICESIMAQUINTA.

Theorema.

In quolibet triangulo isoscele anguli supra basim constituti sunt æquales inter se: Atque productis æqualibus lateribus, anguli infra basim constituti sunt etiam inter se æquales.

Datum sit triangulum isosceles ABC, cujus duo latera æqualia Fig. VIII. Tab. VI.

funt AB, AC, & bafis fit BC: erit angulus x æqualis angulo z, qui funt fupra bafim BC; & productis infra bafim BC æqualibus lateribus AB verfus R, & BC verfus E, erit angulus m æqualis angulo f, qui funt infra bafim.

Bafis BC bifariam dividatur in F (Propof. 12.), & ducatur ad verticem A recta FA.

Demonftratio.

www.libtool.com.cn

Duo triangula ABF, AFC habent latus AB = AC ex hypothefi, latus BF = FC per conftructionem, & latus AF utrique triangulo commune; ergo (Propof. 9.) erit angulus x = z, quibus opponitur latus commune AF.

Præterea duo anguli confequentes x, & m fimul fumpti (Propofit. 15.) funt æquales duobus rectis; fimiliter duo anguli confequentes z, & f fimul fumpti adæquant duos rectos; ergo (Axiom. 1.) duo anguli x, & m æquales erunt duobus z, & f; a quibus demantur anguli (Demonftratione) æquales x, & z, atque (Axiom. 3.) remanebit angulus m æqualis angulo f. Quapropter in quolibet triangulo ifofcele, &c. Quod erat oftendendum.

Eft celebris Propofitio 5. Libri I. Euclidis.

Corollarium I.

Quoniam duo triangula ABF, ACF (Demonftratione) habent fingula latera fingulis lateribus æqualia, ideo erit etiam angulus AFB = AFC, quibus opponuntur æqualia latera AB, AC; confequenter (Definit. 9.) recta AF ex vertice A trianguli ifofcelis ABC ad bafis medietatem F ducta, perpendicularis erit ad eandem bafim. Præterea etiam bifariam dividet angulum verticalem CAB, quia (Propof. 9.) erit etiam angulus FAB æqualis angulo FAC, qui fubtenduntur a lateribus æqualibus BF, FC.

Corollarium II.

Viciffim fi ex vertice A trianguli ifofcelis ad bafim BC (Propofit. 14.) demittatur perpendicularis AF, hæc bifariam fecabit bafim BC, & angulum oppofitum CAB. Nam (Axiom. 16.) eft angulus AFB = AFC, & angulus x = z (Demonftr. anteced.); confequenter (Corollar. 7. Propofit. 24.) reliquus angulus FAB erit æqualis reliquo FAC; & (hypothef.) eft latus AB = AC interpofito inter angulos æquales; ideoque (Propofit. 5.) erit latus FB = FC, quæ angulis (Demonftratione) æqualibus opponuntur.

Corollarium III.

Fig. IX. Tab. VI. Omne triangulum æquilaterum ACF eft etiam æquiangulum; etenim quia

quia latera CA, CF (Definit. 19.) sunt æqualia, ideo (prima parte hujus Propositionis) erit angulus A = F. Similiter quia est AC = AF, erit angulus C = F; idcirco (Axiom. 1.) erit angulus A = C: consequenter omnes tres anguli erunt æquales, & singuli continebunt tertiam partem duorum rectorum.

Corollarium IV.

www.libtool.com.cn

Ergo quilibet angulus trianguli æquilateri adæquat duas tertias partes unius anguli recti; sex enim tertiæ partes constituunt duo integra; & tres anguli trianguli æquilateri ostensi sunt æquales inter se, atque simul sumpti (Propos. 24.) adæquant duos rectos; ideoque quilibet ipsorum æqualis erit duabus tertiis partibus unius anguli recti.

PROPOSITIO VICESIMASEXTA.

Theorema.

Triangulum habens unum latus alio majus, habebit etiam angulum majori lateri oppositum, majorem angulo opposito lateri minori.

Sit triangulum ACD, quod habeat latus AC majus latere CD, erit angulus CDA subtensus a majori latere CA major angulo CAD subtenso a minori latere CD. Fig. X. Tab. VI.

Ex majori latere CA (Prop. 3.) secetur pars CB æqualis minori CD, & ducatur recta DE (Postul. 1.).

Demonstratio.

In triangulo CDE (construct.) Isoscele est (Prop. anteced.) angulus x = z; ergo totus angulus CDA, qui (Axiom. 10.) major est angulo z sua parte, erit (secunda parte Axiom. 1.) etiam major angulo x; sed trianguli ADE angulus externus x (Coroll. 2. Prop. 24.) major est interno, & opposito A; ideoque (Axiom. 13.) angulus CDA, qui ostensus est major angulo x, erit quoque major angulo A.

Ergo in quolibet triangulo latus majus subtendit angulum majorem, & latus minus sutendit angulum minorem. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 18. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Quapropter triangulum Scalenum habebit omnes angulos inæquales.

PRO-

Theorema.

Triangulum habens duos angulos inter se æquales, habebit pariter duo latera æqualia ipsis angulis opposita. Si autem triangulum habuerit angulum majorem angulo, tunc habebit latus oppositum majori angulo majus latere subtendente angulum minorem.

www.libtool.com.cn

Fig. XI. Tab. VI. Primo sit triangulum ACF, in quo sit angulus A æqualis angulo F, erit latus CF = CA.

Demonstratio.

Nam si latus CF majus, vel minus esset latere CA, tunc (Prop. anteced.) angulus oppositus A esset pariter major, vel minor angulo F, quod est contra hypothesim; ergo (Axiom. 2.) necesse est ut latus CF sit æquale lateri CA. Quod erat primum.

Fig. XII. Tab. VI. Secundo sit triangulum ACF, cujus angulus A major sit angulo F, erit latus CF majus latere CA.

Demonstratio.

Etenim si latus CF esset æquale lateri CA, tunc (Propos. 25.) esset angulus A æqualis angulo F, quod est contra hypothesim; si autem latus CF esset minus latere CA, tunc (Prop. anteced.) angulus A minor esset angulo F, quod pariter est contra hypothesim; ergo necesse est, ut latus CF sit majus latere CA, quando angulus A major est angulo F. Quod erat secundum.

Prima pars est Propositio 6; & secunda pars est Propositio 19. Libri 1. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc omne triangulum habens duos angulos æquales, erit Isosceles; & si habuerit omnes angulos æquales, si nempe fuerit æquiangulum, erit etiam æquilaterum; si autem habuerit omnes angulos inæquales erit Scalenum.

Corollarium II.

Fig. XIII. Tab. VI. Omnium linearum, quæ ex quolibet puncto C ad quamlibet rectam FE duci possunt, minima est perpendicularis CL. Nam si ducatur quælibet alia recta CA, quia in triangulo ACL angulus rectus ALC major est acuto CAL, etiam latus CA oppositum majori angulo ALC (secunda parte hujus Propositionis) majus erit latere CL subtendente angulum minorem CAL: quod semper verificatur.

Qua-

Quapropter distantia inter punctum C, & lineam FE dimetitur a perpendiculari CL; atque ab eodem puncto C ad rectam FE unica duci potest linea perpendicularis.

PROPOSITIO VICESIMAOCTAVA.

Theorema.

www.libtool.com.cn

Omne parallelogrammum habet latera opposita æqualia, angulos oppositos æquales, & bifariam dividitur a diagonali, seu diametro.

Sit parallelogrammum ACFB; erit latus AB = CF, AC = FB, angulus A = F, angulus ACF = FBA; & ducto diametro CB, erit triangulum ABC æquale triangulo CFB. Fig. XIV. Tab. VI.

Demonstratio.

Rectæ AB, CF (hypothes.) sunt parallelæ; ideo (Prop. 21.) anguli alterni z, & x sunt æquales. Similiter ob parallelas AC, FB, anguli t, & s alterni sunt æquales; proindeque duo triangula ACB, FCB habent duos angulos s, & x æquales duobus angulis t, & z; & latus CB interpositum inter angulos æquales commune est utrique triangulo; ergo (Prop. 5.) erit latus AB = FC, latus AC = FB, angulus A æqualis angulo F, & triangulum ABC æquale triangulo FCB. Insuper, quia anguli s, & z ostensi sunt æquales t, & x, idcirco (Axiom. 2.) erit totus angulus ACF æqualis integro angulo FBA.

Quapropter in omni parallelogrammo &c. Quod erat demonstrandum.
Est Propositio 34. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMANONA.

Theorema.

Figura quadrilatera habens duo latera parallela, & æqualia, habebit etiam reliqua duo latera parallela, & æqualia; scilicet erit parallelogrammum.

Figura quadrilatera ACFE habeat latus AC parallelum, & æquale lateri EF; etiam latus AE parallelum, & æquale erit lateri CF. Fig. XV. Tab. VI.

Demonstratio.

Ducatur diagonalis EC, quæ incidens in duas rectas AC, EF, (hypoth.) parallelas, (Prop. 21.) efficit alternos x, & z æquales inter se. Itaque duo triangula ACE, EFC habent latus EC commune, & (hypoth.) latus AC = EF, & angulum x = z, qui

fiunt

fiunt a lateribus æqualibus; ergo (Prop. 6.) erit AE = CF, & angulus f æqualis angulo m, qui duo anguli funt alterni; proindeque (Propof. 19.) rectæ EA, FC erunt parallelæ, & figura FA (Definit. 17.) erit parallelogrammum.

Itaque figura quadrilatera habens &c. Quod erat oftendendum.

Eft Propofitio 33. Libri 1. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO TRIGESIMA.

Problema.

Super data recta (AC) quadratum defcribere, vel aliud quodcumque parallelogrammum.

Fig. XVI. Tab. VI. Supra AC, & ex punctis A, & C erigantur (Prop. 13.) indefinite perpendiculares AB, CF, quæ ambæ (Propof. 3.) fiant æquales datæ AC; & ducatur recta FB (Poftul. 1.); erit AF quæfitum quadratum.

Demonftratio.

Nam rectæ AB, CF (conftruct.) perpendiculares eidem AC (Propofit. 18.) funt parallelæ, & (conftruct.) funt æquales; ideoque (Propof. anteced.) erit latus FB = AC, & figura AF erit parallelogrammum; fed eidem lateri AC (conftruct.) æqualia funt latera AB, CF; confequenter (Axiom. 1.) omnia latera funt æqualia; anguli vero A, & C (conftruct.) funt recti; icirco etiam anguli F, & B ipfis oppofiti, & æquales (Prop. 18.) erunt recti. Ergo figura BC erit quadratum (Defin. 28.), quia ex demonftratis eft parallelogrammum æquilaterum, & rectangulum. Quod erat primum.

Eft Propofitio 46. Libri 1. Euclidis.

Fig. XVII. Tab. VI. Secundo, quod fi æquales perpendiculares AB, CF, majores fiant, vel minores recta AC, tunc ducta recta FB, conftructa figura erit rectangulum, feu oblongum, ut per fe patet.

Fig. XVIII. Tab. VI. Tertio fi defcribendus fit Rhombus, ducatur ex puncto A recta AB = AC, quæ efficiat angulum A obliquum, acutum nempe, vel obtufum; deinde per punctum C (Propof. 23.) ducatur recta CF parallela, & æqualis rectæ AB, feu AC, jungaturque recta FB, erit AF quæfitus Rhombus.

Fig. XIX. Tab. VI. Quarto, quod fi conftituto angulo A obliquo, ponatur AB major, vel minor data AC, & compleatur parallelogrammum, habebitur Rhomboides AF. Quod erat propofitum.

Corollarium.

Ergo parallelogrammum habens unum angulum rectum, etiam reliquos angulos rectos habebit.

PRO-

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

Theorema.

Parallelogramma supra eandem basim, & inter easdem parallelas constituta inter se sunt æqualia.

www.libtool.com.cn

Duo parallelogramma ABCE, BCFG habeant communem basim BC, & inter easdem parallelas AF, BR constituta sint, erit parallelogrammum ABCE æquale parallelogrammo BCFG. Fig. XX Tab. VI

Demonstratio.

Etenim (Propos. 28.) est AE = BC, & GF = BC; ideoque (Axiom. 1.) erit AE = GF; atque addita communi portione EG, (Axiom. 2.) erit AG = FE.

Unde duo triangula ABG, EFC (Prop. 28.) habent latera BG = FC, AB = CE, & (Demonstr.) AG = FE; ergo (Prop. 9.) erit triangulum ABG æquale triangulo ECF, a quibus dematur pars communis, hoc est triangulum EIG, & (Axiom. 3.) remanebit Trapezium EIBA æquale Trapezio CFGI; quibus addatur commune triangulum IBC, & (Axiom. 2.) erit parallelogrammum ABCE æquale parallelogrammo BCFG. Ergo parallelogramma &c. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 35. Libri 1. Euclidis.

Corollarium I.

Area parallelogrammi rectanguli ABCE (Definit. 36.) invenitur multiplicando basim BC in altitudinem BA æqualem FR. Sed parallelogrammum obliquangulum BCFG ostensum est æquale rectangulo ABCE; ideoque area cujusvis parallelogrammi FGBC obtinetur multiplicando basim BC per altitudinem BA, seu FR, sive CE (Definit. 38.).

Itaque si basis parallelogrammi vocetur m, & ejus altitudo vocetur a, productum am erit area parallelogrammi, videlicet ipsum parallelogrammum significabit.

Corollarium II.

Area vero cujuslibet trianguli rectilinei ABC est æqualis dimidio producto ex altitudine BM in basim AC. Nam si per puncta AB (Propos. 23.) ducantur rectæ AE parallela lateri BC, & BE parallela lateri AC, habebitur parallelogrammum ACBE (Propos. 28.) duplum trianguli ABC; sed (Coroll. anteced.) area parallelogram- Fig. I. Tab. VII.

mi ACBE est AC×BM; ergo ejus dimidium, scilicet area triangli ABC, erit $\frac{AC \times BM}{2}$.

Itaque si basis AC vocetur b, & altitudo BM vocetur m, productum bm significabit aream parallelogrammi ACBE, & $\frac{bm}{2}$ erit area trianguli ABC.

Sed est $\frac{bm}{2} = \frac{b}{2} \times m = b \times \frac{m}{2}$; consequenter area trianguli etiam obtinetur multiplicando dimidiam basim in totam altitudinem, vel integram basim in dimidiam altitudinem.

PROPOSITIO TRIGESIMASECUNDA.

Theorema.

Triangula (ABC, FCB) super eadem basi (BC), & in iisdem parallelis (LI, BC) constituta, aequalia sunt inter se.

Fig. II. Tab. VII. Per punctum B, & C (Propos. 23.) ducantur rectae BL parallela lateri AC, & CI parallela lateri FB.

Demonstratio.

Parallelogramma ACBL, FBCI (Prop. anteced.) sunt aequalia inter se; ergo (Axiom. 9.) etiam triangula ABC, FBC aequalia erunt inter se, quum (Propos. 28.) sint medietates aequalium parallelogrammorum LC, BI. Ergo &c. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 37. Lib. 1. Euclidis.

PROPOSITIO TRIGESIMATERTIA.

Theorema.

Fig. III. Tab. VII. *Si parallelogrammum (ABCF), & triangulum (LBC) super eadem basi (BC) & in iisdem parallelis (AL, BC) posita fuerint, parallelogrammum erit duplum trianguli.*

Demonstratio.

Nam ducta diametro AC, triangulum LBC (Propos. antec.) aequale est triangulo ABC; atqui triangulum ABC (Propos. 28.) est dimidium parallelogrammi ABCF; ergo (secunda parte Axiom. 1.) etiam aequale triangulum LBC erit dimidium ejusdem parallelogrammi ABCF). Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 41. Libri I. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO TRIGESIMAQUARTA.

Problema.

Parallelogrammum constituere æquale dato triangulo (ABC), & habens angulum æqualem dato angulo (Z). Fig. IV. Tab.VII.

Ex aliquo trianguli dati angulo B ad latus oppositum si opus est productum (Prop. 14.) ducatur perpendicularis BE, quæ (Propos. 12.) bifariam secetur in F, & per punctum F (Propos. 22.) ducatur recta RM parallela basi AC. Deinde ad rectam AC, & ad punctum in ea A (Propos. 10.) fiat angulus HAC æqualis dato angulo Z. Tandem per punctum C (Propos. 23.) ducatur recta CI parallela rectæ AH: erit AHIC quæsitum parallelogrammum.

Demonstratio.

Area parallelogrammi AHIC (Coroll. 1. Propos. 31.) est æqualis producto ex altitudine FE in basim AC; sed area trianguli ABC (Coroll. 2. Propos. 31.) est pariter æqualis producto ex basi AC in FE medietatem altitudinis BE; ergo (Axiom. 1.) areæ erunt æquales, scilicet parallelogrammum AHIC æquale erit triangulo ABC. Quod erat propositum.

Est Propositio 42. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Si datus angulus Z fuerit rectus, tunc parallelogrammum descriptum erit rectangulum; si angulus Z fuerit obliquus, parallelogrammum erit obliquum.

PROPOSITIO TRIGESIMAQUINTA.

Theorema.

Triangula æqualia super eadem basi constituta, & ad eandem partem posita, erunt in iisdem parallelis, scilicet eandem altitudinem habebunt.

Supra eandem basim BC, & versus eandem partem constituta sint duo triangula æqualia ABC, FBC, ducta recta AF ex vertice A unius ad verticem F alterius trianguli, dico rectam AF parallelam esse basi BC. Fig. V. Tab.VIII.

Demonstratio.

Etenim si recta AF non esset parallela basi BC, tunc per punctum A (Propos. 23.) duceretur recta, exempli caussa, AL parallela basi BC, quæ alicubi secaret latus FB, ut in L, & ducta recta LC, triangulum LBC (Prop. 32.) æquale esset triangulo ABC, cui ex hypothesi jam æquale est triangulum FBC; ideoque (Axiom. 1.) esset triangulum FBC æquale triangulo LBC, scilicet totum æquale parti: quod (Axiom. 10.) fieri nequit. Ergo fieri non potest, ut recta AF non sit parallela basi BC. Consequenter triangula æqualia &c. Quod erat propositum. Est Propositio 39. Libri I. Euclidis.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

DEFINITIO PRIMA.

Figuræ *similes* dicuntur illæ, quæ habent eundem numerum laterum, & angulorum; & habent præterea singulos angulos *singulis* angulis æquales, & latera æquales angulos constituentia, sive *æqualibus* angulis opposita, hoc est inter angulos æquales intercepta, proportionalia inter se.

Fig. VI. & VII. Tab. VII. Singuli anguli pentagoni M æquales sint singulis angulis pentagoni N, scilicet

A = F, B = G, C = H, D = I, E = L; & insuper latera inter angulos æquales posita, proportionalia sint singula singulis, scilicet

AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IL = AE : FL,

sive alternando sit

AB : BC = FG : GH,

BC : CD = GH : HI,

CD : DE = HI : IL, &

DE : AE = IL : FL, tunc pentagona M, & N erunt duæ figuræ rectilineæ similes. Idem intelligatur de aliis quibuscumque figuris similibus.

Corollarium.

Fig. VIII. Tab. VII. Ergo rectilinea (M, & N) similia eidem rectilineo (R), erunt etiam similia inter se. Nam anguli polygonorum M, & N, quia (hypoth.) sunt æquales angulis polygoni R, singuli singulis, ideo (Axiom. 1.) erunt pariter æquales inter se. Similiter, quia rationes laterum polygonorum M, & N, sunt (hypoth.) æquales rationibus laterum polygoni R; iccirco (Axiom. 1.) erunt etiam æquales inter se.

Est Propositio 21. Libri 6. Euclidis.

Definitio II.

Fig. VI. & VII. Tab. VII. In similibus figuris latera inter angulos æquales posita dicuntur *latera homologa*: ut in antecedentibus polygonis similibus M, & N sunt latera homologa AB, & GF, item CD, & HI, &c.

Definitio III.

Figuræ *reciprocæ* vocantur illæ, quæ habent latera reciproce proportionalia; scilicet in quibus est latus unum primæ figuræ ad unum latus secundæ, sicuti aliud latus secundæ ad alterum latus primæ.

Fig. IX. Tab. VII. Sic duo triangula ABC, EDF, erunt duæ figuræ reciprocæ, si fuerit

AB

AB : DE : : DF : BC, vel
AB : DF : : DE : BC.

Definitio IV.

Triangula (ABF, ACF, AFG &c.) habentia verticem communem (A), & bases (BF, CF, FG, &c.) in eadem recta linea (BG) positas, erunt æque alta; ipsorum enim altitudo (Defin. 38. Libri 2.) est perpendicularis ducta ex communi vertice (A) ad lineam (BG), in qua reperiuntur bases. Fig. X. Tab. VII.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Parallelogramma æque alta, sive inter easdem parallelas constituta, erunt inter se in ratione basium.

Similiter triangula habentia eandem, vel æqualem altitudinem, erunt inter se in ratione basium.

Primo data sint duo parallelogramma ABCR, FGHL, in iisdem parallelis AL, BI constituta, sive habentia æquales altitudines AM = LI; dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum FH eandem rationem habere, quam habet basis BC ad basim GH; nimirum si fuerit basis BC = GH, erit parallelogrammum BR = FH; si basis BC fuerit dupla baseos GH, & parallelogrammum AC erit duplum parallelogrammi FH. Fig. XI. Tab. VII.

Demonstratio.

Etenim parallelogrammi BR basis BC vocetur b, & altitudo AM vocetur c, (Coroll. 1. Propos. 31. Lib. 2.) area parallelogrammi BR erit bc. Similiter parallelogrammi FH basis GH vocetur m, & ejus altitudo LI, quia (hypothes.) est æqualis altitudini AM, erit pariter c; unde (Coroll. 1. Propos. 31. Lib. 2.) erit cm area parallelogrammi FH. Sed (Prop. 2. Lib. 1.) est
bc : cm : : b : m, scilicet parallelogrammum BR ad parallelogrammum FH, sicuti basis BC ad basim GH. Ergo parallelogramma æque alta sunt inter se in ratione basium.

Secundo triangula BCR, HLI æque alta, sive in iisdem parallelis EM, IB posita, erunt etiam inter se sicuti bases BR, LI. Fig. XII. Tab. VII.

Secentur CM = BR, & HE = LI (Propos. 3. Libri 2.), atque ducantur rectæ BM, IE, ut (Propos. 29. Libri 2.) habeantur duo parallelogramma æque alta RM, LE.

De-

Demonstratio.

Triangulum BCR est dimidium parallelogrammi RM (Prop. 28. Libri 1.), & triangulum HIL est dimidium parallelogrammi LE; sed (Coroll. 1. Prop. 15. Lib. 1.) dimidium cujusvis quantitatis est ad dimidium alterius, sicuti prima quantitas ad secundam; ideoque erit

$\triangle BCR : \triangle HLI :: \square RM : \square LE$; at per antecedentem Demonstrationem est

$\square RM : \square LE :: BR : LI$; ergo (Axiom. 1.) erit

$\triangle BCR : \triangle HLI :: BR : LI$; scilicet $\triangle BCR$ eandem rationem habet ad $\triangle HLI$, quam habet basis BR ad basim LI. Quod erat probandum.

Est Propositio 1. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Ergo si bases parallelogrammorum æqualem, vel eandem altitudinem habentium, fuerint æquales, parallelogramma erunt pariter æqualia inter se.

Est Propositio 36. Libri I. Euclidis.

Corollarium II.

Similiter æqualia erunt inter se triangula æque alta, sive in iisdem parallelis constituta, si habuerint bases æquales.

Est Propositio 38. Libri I. Euclidis.

Corollarium III.

Si duo parallelogramma am, & bm habuerint eandem basim m, & altitudines inæquales a, & b; tunc parallelogramma erunt inter se in ratione altitudinum, quia (Propos. 2. Libri 1.) est

$am : bm :: a : b$.

Corollarium IV.

Si autem duo parallelogramma am, & bc fuerint æqualia, & habuerint bases a, & b æquales inter se, habebunt pariter altitudines m, & c inter se æquales; est enim ex hypothesi $am = bc$, & $a = b$; ideoque dividendo am per a, & bc per b, (Axiom. 1.) remanebit $m = c$. Ergo parallelogramma æqualia ad eandem partem posita, & habentia bases æquales in eadem recta linea positas, in iisdem parallelis constituta erunt.

Co-

Corollarium V.

Eadem ratione triangula æqualia, ad eandem partem posita, & habentia bases æquales in eadem recta linea constitutas, erunt etiam in iisdem parallelis posita, sive eandem altitudinem habebunt: sunt enim triangula medietates parallelogrammorum eandem altitudinem habentium.

Est Propositio 40. Libri 1. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Si in quovis triangulo (ABC) ducatur recta (FG) basi (AC) parallela, ipsa recta (FG) proportionaliter secabit reliqua duo latera (AB, CB), erit nempe (AF : FB : : CG : GB). Fig. XIII. Tab. VII.

Si autem duo trianguli (ABC) latera (BA, BC) proportionaliter secta fuerint ab aliqua recta (FG), ipsa recta reliquo lateri, seu basi (AC) erit parallela.

Demonstratio Primæ Partis.

Ductis rectis AG, FC, duo triangula AFG, CFG in iisdem parallelis AC, FG, & supra eandem basim FG constituta (Prop. 32. Libri 2.) erunt æqualia inter se; proindeque (Coroll. 5. Propos. 2. Libri I.) habebunt eandem rationem ad idem triangulum BFG; erit nempe

△AGF : △BFG : : △CFG : △BFG; sed (secunda parte Propos. anteced.) triangula æque alta sunt inter se in ratione basium: erit igitur

△AFG : △BFG : : AF : FB, &

△CFG : △BFG : : CG : GB; ergo (Axiom. 1.) erit AF : FB : : CG : GB. Quod erat primo demonstrandum.

Demonstratio Secundæ Partis.

Ex hypothesi est

AF : FB : : CG : GB; sed ductis, ut antea, rectis AG, FC (secunda parte Propos. anteced.) erit

△AFG : △BFG : : AF : FB, &

△CFG : △BFG : : CG : GB; consequenter (Axiom. 1.) erit

△AFG : △BFG : : △CFG : △BFG; ideoque triangula AFG, CFG, quæ habent eandem rationem ad idem triangulum BFG, (Coroll. 2. Prop. 3. Lib. 1.) erunt æqualia inter se; habent autem eandem basim FG, & posita sunt ad eandem partem; ergo (Prop. 35.

Libri 2.) erunt in iisdem parallelis constituta, erit nempe *FG* parallela lateri AC. Quod erat secundo demonstrandum.

Est Propositio 2. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

www.libtool.com.cn

Ex data recta (AB) quamlibet quæsitam partem (ex. cas. tertiam) abscindere.

Fig. XIV. Tab. VII. Ducatur ex puncto A indefinita AC, quæ cum data AB efficiat quemlibet angulum CAB, atque in ea secentur tres partes AE, EF, FG inter se æquales, deinde jungatur recta BG, & per punctum E (Prop. 23. Lib. 2.) ducatur recta EL parallela rectæ BG; erit AL quæsita tertia pars rectæ AB.

Demonstratio.

In triangulo BGA recta EL (construct.) ducta est *parallela lateri* GB; iccirco (prima parte Propos. 2.) erit
GE : EA : : BL : LA, & componendo (Propos. 4. Lib. 1.) erit
GE + EA : EA : : BL + LA : LA; scilicet
GA : EA : : BA : LA; atqui (construct.) recta GA est tripla rectæ EA; ergo etiam recta BA erit tripla rectæ LA; scilicet erit LA quæsita tertia pars rectæ BA. Quod erat propositum.

Est Propositio 9. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

Fig. XV. Tab. VII. *Datam rectam (AL) in eadem ratione dividere, qua alia recta (AM) secta fuerit (in punctis B, & C).*

Datæ rectæ AL, AM, ita componantur inter se, ut efficiant quemlibet angulum LAM; deinde jungatur recta LM, cui (Propos. 23. Libri 2.) ducantur parallelæ CF, BE, quæ rectam AL secabunt in partes proportionales partibus rectæ AM. Ducatur BI parellela rectæ AL.

Demonstratio.

In triangulis ACF, BIM (prima parte Propos. 2.) est AB : BC : : AE : EF, &
BC : CM : : BG : GI; sed (Proposit. 28. Libri 2.) est BG = EF, & GI = FL; ideoque æqualia æqualibus substituendo, erit

BC:

BC : CM : : EF : FL; consequenter recta AL divisa erit in partes proportionales partibus rectæ AL. Quod erat propositum.

Est Propositio 10. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Problema.

Datis duabus rectis lineis (F, & G), tertiam proportionalem invenire. Fig. XVI. Tab. VII.

www.libtool.com.cn

Fiat quilibet angulus rectilineus LCB, & ex latere CB (Proposit. 3. Libri 2.) secentur partes CA = F, AB = G, & ex alio latere CL secetur CE = G, postea ducatur recta EA; huic per punctum B (Propos. 23. Libri 2.) ducatur recta parallela BL; erit EL quæsita linea.

Demonstratio.

Nam (prima parte Propos. 2.) est
CA : AB : : CE : EL, idest
F : G : : G : EL.

Ergo duabus datis rectis inventa est tertia proportionalis. Quod erat propositum.

Est Propositio 11. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Si prima linea F vocetur a, & secunda G vocetur c, tertia inventa EL (Coroll. Propos. 9. Lib. 1.) appellabitur $\frac{cc}{a}$; ideoque inventa linea EL exprimit quotientem, qui oritur dividendo quadratum secundæ G per primam F.

Corollarium II.

Præterea quia (Demonstratione) est
F : G : : G : EL, scilicet
∺ F : G : EL; ideoque (Corollar. Proposit. 1. Libri 1.) erit
$F \times EL = G^2$, scilicet inventa linea EL multiplicata per datam F, efficit rectangulum æquale quadrato alterius lineæ datæ G.

PROPOSITIO SEXTA.

Problema.

Datis tribus rectis lineis (F, G, L) quartam proportionalem invenire. Fig. XVII. Tab. VIII.

Constituatur angulus rectilineus BCM, atque a lateribus CB, CM

(Propof. 3. Libri 2.) abfcindantur partes CA = F, AB = G, & CE = L; deinde jungatur recta AE, cui per punctum B (Pro-pofit. 23. Libri 2.) ducatur parallela BM; erit EM quæfita linea.

Demonftratio.

Etenim (prima parte Propof. 2.) eft
CA : AB : : CE : EM, fcilicet
F : G : : L : EM; quia (conftruct.) eft
CA = F, AB = G, & CE = L.

Ergo tribus datis rectis inventa eft quarta proportionalis EM. Quod erat faciendum, & demonftrandum.

Eft Propofitio 12. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Si datæ lineæ ponantur F = a, G = c, & L = m, tunc inventa recta EM (Propof. 9. Libri 1.) erit $\frac{cm}{a}$; confequenter recta EM eft quotiens, qui oritur dividendo per primam F rectangulum ex fecunda G in tertiam L.

Corollarium II.

Quoniam (Demonftratione) eft
F : G : : L : EM, ideo (Propof. 1. Libri 1.) erit
F × EM = G × L. Ut igitur fupra lineam F defcribatur rectangulum æquale rectangulo ex G in L, tribus rectis F, G, L inveniatur quarta proportionalis EM.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Triangula æquiangula habebunt latera æqualibus angulis oppofita proportionalia.

Fig. I. Tab. VIII. Sint duo triangula ABC, EFG æquiangula, quæ nempe habeant angulos æquales A = E, B = F, & C = G; habebunt latera inter angulos æquales pofita proportionalia; fcilicet erit
AB : EF : : AC : EG : : BC : FG.

Ponatur angulus F fupra æqualem angulum B; five (quod idem eft) ex lateribus BA, BC (Propof. 3. Libri 2.) fecentur partes BI = FE, BL = FG, & ducatur IL.

De-

Demonstratio.

Triangula IBL, EFG, habentia latus BI = FE, latus BL = FG, & (hypothes.) angulum B = F, (Proposit. 6. Libri 2.) erunt æqualia; erit nempe basis IL = EG, angulus LIB = E, & angulus ILB = G; sed (hypothes.) sunt anguli A = E, & C = G; ergo (Axiom. 1.) erit angulus LIB = A, & ILB = C, externus videlicet interno, & opposito ad eandem partem; ideoque (secunda parte Propos. 19. Libri 2.) erit IL parallela rectæ AC. Consequenter (prima parte Propos. 2.) erit
AI : IB :: CL : LB & componendo erit
AI + IB : IB :: CL + LB : LB; scilicet
AB : BI :: CB : BL; & substituendo latera FE, FG pro æqualibus BI, BL, erit
AB : FE :: CB : FG.

Eodem modo si angulus G superimponatur angulo æquali C, demonstrabitur
CB : FG :: AC : EG; atque (Axiom. 1.) erit
AB : FE :: AC : EG. Igitur latera æqualibus angulis opposita erunt proportionalia; hoc est
AB : EF :: AC : EG :: BC : FG; & alternando erit
AB : AC :: EF : EG, &
AC : BC :: EG : FG, &
AB : BC :: EF : FG. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 4. Libri 6. Euclidis.

Corollarium.

Hinc recta IL parallela lateri AC secat triangulum IBL simile integro triangulo ABC.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Triangula, quæ habent latera proportionalia, sunt etiam æquiangula.

Duo triangula ABC, EFG habeant latera proportionalia Fig. II. Tab. VIII.
AB : BC :: EF : FG, &
AC : CB :: EG : FG, &c;
habebunt angulos æquales, quibus opponuntur latera homologa; nimirum A = E, B = EFG, & C = EGF.

Supra FG ad punctum F constituatur angulus GFL = B (Propos. 10. Libri 2.), & ad punctum G fiat angulus FGL = C; erit (Coroll. 7. Propos. 24. Libri 2.) reliquus angulus L æqualis reliquo A.

Demonstratio.

Duo triangula ABC, FGL (construct.) æquiangula, (Proposit. anteced.) habebunt latera proportionalia; erit nempe
AB : BC : : FL : FG, &
AC : CB : : LG : FG; sed ex hypothesi est
AB : BC : : FE : FG, &
AC : CB : : EG : FG; ideoque (Axiom. 1.) erit
FL : FG : : FE : FG, &
LG : FG : : EG : FG; consequenter (Corollar. 2. Proposit. 3. Libri 1.) erit
FL = FE, & LG = EG; est insuper FG basis communis duobus triangulis FEG, FLG; itaque (Propos. 9. Lib. 2.) ipsa triangula habebunt angulos æquales, scilicet E = L, EFG = LFG, & EGF = LGF; sed (construct.) est angulus LFG = B, angulus LGF = C, & L = A; ergo (Axiom. 1.) erit angulus A = E, angulus B = EFG, & angulus C = EGF. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 5. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Fig. III. Tab. VIII. *Triangula (ABC, EFG) habentia angulum (B) æqualem angulo (F), & latera eosdem angulos constituentia, proportionalia (scilicet AB : EF : : BC : FG); habebunt reliquos angulos æquales (A = E, & C = G), quibus opponuntur latera proportionalia; atque similia erunt ipsa triangula.*

Ex lateribus BA, BC (Propos. 3. Libri 2.) secentur partes BI = EF, BL = FG, & ducatur IL.

Demonstratio.

Duo triangula ILB, EFG (construct.) habent latus BI = EF, BL = FG, & (hypothes.) angulum B = F; iccirco (Propos. 6. Libri 2.) erit latus IL = EG, angulus LIB = E, & angulus ILB = G; est autem (hypothes.)
AB : EF : : BC : FG; unde substituendo æqualia pro æqualibus, erit
AB : BI : : BC : BL, & dividendo, erit
AB — BI : BI : : BC — BL : BL, hoc est
AI : BI : : CL : BL; ergo (secunda parte Propos. 2.) recta LI erit parallela lateri CA; & (secunda parte Propos. 21. Libri 2.)

erit

erit angulus externus ILB = C, & angulus LIB = A. Sed jam demonstravimus angulum ILB = G, & angulum LIB = E; consequenter (Axiom. 1.) erit angulus A = E, & angulus C = G, atque (Propof. 7.) triangula ABC, EFG erunt similia. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 6. Libri 6. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO DECIMA.

Theorema.

Si per quodlibet punctum (I) diametri (BR) in parallelogrammo (AC) ducantur duæ rectæ (GL, FE) parallelæ lateribus ejusdem parallelogrammi, ipsæ rectæ divident totum parallelogrammum in quatuor parallelogramma, quorum duo (GF, & EL), quæ sunt circa diametrum (BR), erunt similia integro parallelogrammo (AG), & inter se. Reliqua vero duo parallelogramma (GE, FL), quæ dicuntur complementa *eorum, quæ sunt circa diametrum, erunt æqualia inter se.* Fig. IV. Tab. VIII.

Demonstratio Primæ Partis.

In triangulo BRC recta IL (hypothes.) parellela lateri RC (Coroll. Propof. 7.) secat triangulum ILB simile integro triangulo BRC; similiter in triangulo ARB recta EI (Corollar. Propof. 7.) abscindit triangulum EIB simile triangulo ABR; ideoque (Defin. 1.) erit

RC : CB : : IL : LB, &
AR : AB : : EI : EB; item
CB : BR : : LB : BI, &
BR : BA : : BI : BE; atque ordinando erit
CB : BA : : LB : BE; unde æqualibus æqualia substituendo, erit etiam
AR : RC : : EI : IL; icciroo parallelogramma AC, EL habent latera proportionalia; præterea habent angulos æquales a lateribus proportionalibus contentos, quia (secunda parte Propof. 21. Libri 2.) est angulus A = IEB, angulus C = ILB, & angulus ARC = EIL, quia (Propof. 28. Libri 2.) sunt ambo æquales opposito angulo communi ABC; ergo (Defin. 1.) parallelogrammum EL erit simile parallelogrammo AC; cui eodem modo simile demonstratur parallelogrammum GF; consequenter (Coroll. Defin. 1.) erit etiam parallelogrammum EL simile parallelogrammo GF. Quod erat primo demonstrandum.

Est Propositio 24. Libri 6. Euclidis.

Demonstratio Secundæ Partis.

Diameter BR (Propos. 28. Libri 2.) dividit parallelogramma AC, GF, EL bifariam; est nempe
△ABR = △BCR,
△IGR = △IFR, &
△IEB = △ILB; atque ab æqualibus triangulis ABR, BCR auferendo æqualia triangula IGR, EIB ex primo ABR, & IFR, ILB ex altero BCR, (Axiom. 3.) remanebit parallelogrammum GE = parallelogrammo FL: scilicet complementa erunt æqualiter se. Quod erat secundo demonstrandum.
Est Propositio 43. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Hinc si datum parallelogrammum fuerit quadratum, etiam parallelogramma circa ejus diametrum erunt quadrata, quia per primam Demonstrationem sunt similia eidem parallelogrammo dato.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Theorema.

Parallelogramma similia, similiterque posita, & habentia angulum communem, posita erunt circa eandem diametrum.

Fig. V. Tab. VIII. Duo parallelogramma BM, LG, habeant angulum A communem, sint similia, & similiter posita, scilicet sit angulus B = ILA, & latera proportionalia
AB : BC : : AL : LI, &c;
dico diametrum AI coincidere cum diametro AC.

Demonstratio.

Nam (hypothes.) est angulus B = ILA, & latera eosdem angulos efficientia sunt proportionalia, videlicet
AB : BC : : AL : LI &c; ergo (Propos. 9.) erit angulus CAB = IAL; sed latus AL coincidit cum latere AB, quia angulus A est communis utrique parallelogrammo; ideoque etiam latus AI coincidet cum latere AC; consequenter parallelogramma BM, & LG, circa eandem diametrum AC constituta erunt. Quod erat ostendendum.
Est Propositio 26. Libri 6. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO DUODECIMA.

Problema.

Super data recta (AB) terminata rectilineum describere, dato rectilineo (EFGC) simile, similiterque positum. Fig. VII. Tab. VIII.

A quovis angulo F polygoni dati EFGC ad singulos angulos oppositos ducantur lineæ diagonales, ut FC, quæ polygonum in triangula dividant. Postea supra rectam AB (Propos. 10. Libri 2.) constituantur anguli LBA = FEC, & LAB = FCE, & (Coroll. 7. Propositionis 24. Lib. 2.) erit reliquus angulus ALB = CFE. Similiter supra AL fiant anguli t = f, & r = m, reliquus angulus I æqualis erit reliquo G; atque ita progrediendo, si polygonum datum plura contineat triangula, erit ABLI quæsitum rectilineum.

Demonstratio.

Triangula AIL, GFC (constructione) sunt æquiangula; ideoque (Propos. 7.) erit
AI : AL :: CG : CF.
Similiter in triangulis ABL, EFC (constructione) æquiangulis, erit
AL : AB :: CF : CE; proindeque ordinando (Propos. 6. Libri 1.) erit
AI : AB :: CG : CE.
Eodem modo demonstratur
BL : LI :: EF : FG. Præterea (Prop. 7.) est
LI : IA :: FG : GC, &
AB : BL :: CE : EF, unde latera sunt proportionalia; anguli vero (constructione) sunt æquales B = E, I = G, IAB = GCE, & ILB = GFE: ergo (Defin. 1.) polygonum ILBA est simile polygono EFGC, & eodem modo descriptum supra AB. Quod erat propositum.
Est Propositio 18. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

Triangula similia sunt inter se in duplicata ratione, hoc est ut quadrata laterum homologorum.

Sint duo triangula similia ABC, EFI, quæ nempe (Defin. 1.) habeant angulum B = F, A = E, C = I, & latera proportionalia AC : EI :: AB : EF :: BC : FI; dico △ABC ad △EFI habere Fig. VIII. Tab. VIII.

bere rationem duplicatam lateris AC ad latus EI, vel AB ad EF, &c; erit nempe

$\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, vel $:: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$ &c.

Triangulum EFI superimponatur triangulo ABC, ita ut punctum E cadat in A, & latus EF cadat in AZ supra latus AB; alterum latus EI propter æqualitatem angulorum A, & E cadet supra AC, ut in AL, & latus FI cadat in ZL. Deinde jungatur recta LB.

www.fitbtoof.com.cn

Demonstratio.

Triangula ABC, ABL, ALZ sunt quantitates ejusdem generis (Defin. 1. Lib. 1.); ergo ratio primi ABC ad tertium ALZ (Propos. 17. Lib. 1.) composita est ex rationibus primi ABC ad secundum ABL, & secundi ABL ad tertium ALZ: sed ratio trianguli ABC ad triangulum æque altum ABL est sicuti AC ad AL (Propos. 1.), & ratio trianguli ABL ad triangulum æque altum ALZ est sicuti AB : AZ; ergo ratio primi trianguli ABC ad tertium ALZ, seu ad æquale triangulum EFI, componitur ex duabus rationibus AC : AL, & AB : AZ, ideft (Axiom. 7.) ex rationibus AC : EI, & AB : EF (est enim AL = EI, & AZ = EF per constructionem); sed ex hypothesi est AC : EI = AB : EF, consequenter ratio trianguli ABC ad triangulum EFI, composita ex duabus æqualibus rationibus AC : EI, & AB : EF, erit duplicata utriusque (Defin. 22. Lib. 1.), nimirum erit

$\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, vel $:: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, vel etiam $:: \overline{BC}^2 : \overline{FI}^2$, quia est

AB : EF :: BC : FI ex hypothesi. Quapropter triangula similia sunt inter se in duplicata ratione, ideft sicuti quadrata laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 19. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Si igitur duabus lineis AC, & EI inveniatur tertia proportionalis M (Propos. 5.), erit prima AC ad tertiam M, sicut triangulum ABC ad triangulum EFI; nam (Coroll. Prop. 23. Lib. 1.) est

$AC : M :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; & per antecedentem Demonstrationem est

$\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; ergo (Propos. 11. Lib. 1.) erit

$AC : M :: \triangle ABC : \triangle EFI$.

Corollarium II.

Præterea si latus AC fuerit duplum lateris homologi EI, videlicet si fuerit

AC : EI :: 2 : 1, tunc triangulum ABC erit quadruplum trianguli

guli EFI, quia ex demonstratis est $\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, id est :: 4 : 1. Si latus AC fuerit decuplum lateris EI, triangulum ABC centies continebit triangulum EFI &c.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

www.libtool.com.cn

Parallelogramma æquiangula (R, & S) sunt inter se in ratione composita ex rationibus (AB : BE, & BC : BG) laterum æquales angulos constituentium (erit nempe R : S :: AB×BC : BE×BG). Fig. IX. Tab. VIII.

Latera AB, BE ita in directum ponantur, ut anguli æquales ABC, EBG sint oppositi, & (Coroll. Propos. 17. Lib. 2.) latera CB, BG etiam in directum jacebunt. Producantur latera DC, FE, donec concurrant, ut in L.

Demonstratio.

Parallelogramma R, X, & S sunt quantitates ejusdem generis (Defin. 1. Lib. 1.); iccirco ratio primi R ad ultimum S (Propos. 17. Lib. 1.) composita erit ex omnibus intermediis rationibus primi R ad secundum X, & secundi X ad tertium S. At (prima parte Propos. 1.) est
$\square R : \square X :: AB : BE$, &
$\square X : \square S :: CB : BG$,
proindeque ratio parallelogrammi R ad parallelogrammum S composita erit ex duabus rationibus AB : BE, & CB : BG; scilicet erit
$\square R : \square S :: AB \times CB : BE \times BG$. Quod erat ostendendum.
Est Propositio 23. Libri 6. Euclidis.

Corollarium.

Ergo si fuerit $\square R = \square S$, erit etiam
$AB \times CB = BE \times BG$, & dissolvendo erit
$AB : BE :: BG : CB$, hoc est parallelogramma æqualia, & æquiangula habebunt latera reciproce proportionalia.

Si autem parallelogramma æquiangula habuerint latera reciproce proportionalia
$AB : BE :: BG : CB$, tunc (Propos. 1. Libri 2.) erit
$AB \times CB = BE \times BG$: consequenter erit etiam
$\square R = \square S$, quia (Demonstratione) est
$\square R : \square S :: AB \times CB : BE \times BG$;
nimirum parallelogramma æquiangula, & habentia latera reciproce proportionalia, æqualia erunt inter se.

Est Propositio 14. Libri 6. Euclidis.

Etiam triangula æquiangula, si fuerint æqualia, habebunt latera reciproce- Fig. VI. Tab. VIII.

 cipro-

ciproce proportionalia; & viciſſim ſi habuerint latera reciproce proportionalia, æqualia erunt inter ſe; quia triangula ſunt inter ſe in eadem ratione, in qua ſunt parallelogramma, quorum (Propoſ. 28. Libri 2.) ſunt dimidia.

Eſt Propoſitio 15. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

www.libtool.com.cn

Theorema.

Polygona ſimilia ſunt inter ſe in duplicata ratione, ſeu ut quadrata laterum homologorum.

Fig. X. Tab. VIII. Sint duo polygona ſimilia ABMRC, EFILG, erit polygonum ABMRC ad polygonum EFILG $: : \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, vel $: : \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$ &c.

Ab angulis æqualibus M, & I, ad angulos oppoſitos ducantur rectæ MA, MC, IE, IG, quæ polygona in ſimilia triangula, & numero æqualia ſecabunt.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi polygona ſunt ſimilia, angulus B eſt æqualis angulo F, & latera proportionalia $AB : BM : : EF : FI$; proindeque triangula ABM, EFI ſunt ſimilia (Propoſ. 9.). Eadem ratione triangula MRC, ILG demonſtrantur ſimilia. Præterea ſi ab angulis ex hypotheſi æqualibus BAC, FEG auferantur anguli ex demonſtratis æquales BAM, FEI, remanebit angulus $CAM = IEG$ (Axiom. 3.). Item angulus MCA æqualis eſt angulo IGE; conſequenter reliquus angulus AMC æqualis eſt reliquo EIG (Coroll. 7. Propoſ. 24. Lib. 2.). Ergo (Prop. 7.) triangula AMC, EIG ſunt ſimilia. Atqui ſimilia triangula ſunt inter ſe in duplicata ratione laterum homologorum (Propoſ. 14.); ergo erit

$\triangle ABM : \triangle EIF : : \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, &

$\triangle AMC : \triangle EIG : : \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$; item

$\triangle MCR : \triangle ILG : : \overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$; eſt autem ex hypotheſi $AB : EF : : AC : EG : : CR : GL$ &c; nimirum (Lemmate Prop. 23. Libri 1.) eſt

$\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 : : \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2 : : \overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$; ergo (Propoſ. 11. Libri 1.) erit

$\triangle ABM : \triangle EIF : : \triangle AMC : \triangle EIG : : \triangle MCR : \triangle ILG$; conſequenter colligendo (Propoſ. 12. Lib. 1.) erit $\triangle ABM : \triangle EFI : : \triangle ABM + \triangle AMC + \triangle CMR : \triangle EFI + \triangle EIG + \triangle IGL$, ideſt $\triangle ABM : \triangle EFI$ ſicuti polygonum ABMRC ad polygonum

EF

EFILG. Est autem $\triangle ABM : \triangle EFI :: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$; proindeque (Propos. 11. Lib. 1.) erit polygonum ABMRC ad polygonum EFILG $:: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, vel $:: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, vel $:: \overline{BM}^2 : \overline{FI}^2$ &c; quia est $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2 :: \overline{BM}^2 : \overline{FI}^2$ &c. Quapropter (Defin. 24. Libri 1.) polygona similia sunt inter se in ratione duplicata, idest ut quadrata laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

www.libtool.com.cn

Est Propositio 20. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc si fuerint tres rectæ proportionales $\div AC : EG : M$, polygonum supra primam AC descriptum, ad polygonum simile similiterque descriptum supra secundam EG (Axiom. 1.) erit ut prima linea AC ad tertiam M, quia (Coroll. Propos. 23. Lib. 1.) est pariter $AC : M :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$.

Corollarium II.

Præterea ex demonstrata Propositione sequitur polygona similia secari in similia triangula, numero æqualia, & proportionalia totis polygonis.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Si fuerint quatuor, vel plures rectæ lineæ proportionales ($AB : CD :: EF : GH$), *etiam polygona similia, & similiter ab eis descripta proportionalia erunt* (*nempe* $M : N :: R : S$). *Atque e converso, si a rectis lineis similia polygona, similiterque descripta, proportionalia fuerint; ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt* (*erit nempe* $AB : CD :: EF : GH$). Fig. XI. Tab. VIII.

Demonstratio Primæ Partis.

Primo ex hypothesi habemus $AB : CD :: EF : GH$; ideoque (per Lemma Propos. 23. Libri 1.) erit $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; sed per antecedentem Propositionem sunt rectilinea similia $M : N :: \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, & $R : S :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; ergo (Axiom. 1., & Propos. 11. Lib. 1.) erit $M : N :: R : S$. Quod erat primo demonstrandum.

Demonstratio Secundæ Partis.

Secundo est ex hypothesi $M : N :: R : S$; sed (Propos. antec.) est $M : N :: \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, & $R : S :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; ideoque (Axiom. 1. & Prop. 11. Lib. 1.) erit $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; consequenter erit etiam $AB : CD :: EF : GH$. Quod erat ostendendum.
www.libtool.com.cn

Est Propositio 22. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

In omni triangulo rectangulo si ab angulo recto supra latus oppositum demittatur linea perpendicularis, dividet totum triangulum in duo triangula similia toti, & similia inter se.

Fig XII. Tab. VIII. Sit triangulum ABC habens angulum rectum B, a quo demittatur perpendicularis BL supra latus oppositum AC: duo triangula ABL, BCL erunt similia toti ABC, & inter se.

Demonstratio.

Nam angulus rectus ABC est æqualis recto ALB (Axiom. 16.), angulus vero in A est communis duobus triangulis ABC, ABL; ergo (Coroll. 7. Propos. 24. Libri 2.) reliquus angulus C æqualis erit reliquo angulo ABL. Itaque duo triangula ABC, ABL (Propos. 7.) sunt similia; erit igitur latus AC oppositum angulo recto B, ad latus AB oppositum angulo recto L, sicuti idem latus AB oppositum angulo C, ad latus AL oppositum angulo æquali ABL, erit nempe $\div\div\ AC : AB : AL$. Similiter triangulum ABC demonstratur simile triangulo BLC; habent enim angulum C communem, & angulum rectum ABC æqualem recto BLC, unde reliquus angulus A æqualis erit reliquo angulo CBL. Itaque (Propos. 7.) erit
$AC : CB :: CB : CL$, idest $\div\div\ AC : CB : CL$.
Tandem (Coroll. Defin. 2.) similia sunt inter se triangula ABL, BLC; est enim angulus $A = LBC$, $ALB = BLC$, & $C = LBA$; ideoque (Propos. 7.) erit $AL : LB :: LB : LC$, nempe $\div\div\ AL : LB : LC$. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 8. Libri 6. Euclidis.

Scholion.

In triangulo rectangulo latera AB, BC, constituentia angulum rectum, appellantur *Catheti*, ut diximus Defin. 25; & latus AC angulo recto oppositum *Hypothenusa* vocatur.

Co-

Corollarium I.

Hinc quilibet cathetus AB, vel BC est medius proportionalis inter hypothenusam AC, & ejus segmentum AL, vel CL, interceptum inter eundem cathetum, & perpendicularem demissam ab angulo recto ad hypothenusam. Demonstravimus enim ob similitudinem triangulorum esse $\div$ AC : AB : AL, & $\div$ AC : CB : CL; consequenter (Proposit. 23. Libri 1.) erit rectangulum $AC \times AL = \overline{AB}^2$, & rectangulum $AC \times CL = \overline{CB}^2$. Atque dividendo has æquationes per AC, (Axiom. 5.) habebitur $AL = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$, & $CL = \frac{\overline{CB}^2}{AC}$: nimirum si quadratum cujuslibet catheti dividatur per hypothenusam, quotiens dabit segmentum hypothenusæ interpositum inter eundem cathetum, & perpendicularem demissam ab angulo recto ad hypothenusam.

www.libtool.com.cn

Corollarium II.

Præterea (Demonstratione) est $\div$ AL : LB : LC; ideoque perpendicularis BL ab angulo recto supra hypothenusam AC demissa, est media proportionalis inter segmenta AL, LC ejusdem hypothenusæ. Quapropter (Proposit. 23. Libri 1.) erit rectangulum $AL \times LC = \overline{LB}^2$.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Si super tria cujusvis trianguli rectanguli latera tres figuræ similes, similiterque positæ describantur, erit figura supra hypothenusam descripta semper æqualis duabus figuris simul sumptis supra cathetos descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, atque supra hypothenusam C descripta sit quælibet rectilinea figura M, si supra cathetos AB, BC describantur (Propos. 13.) duæ figuræ S, T eidem figuræ M similes, similiterque positæ (Definit. 3.); erit figura M æqualis duabus figuris ST simul sumptis. Fig. XIII. Tab. VIII.

Demonstratio.

Ab angulo recto B demittatur perpendicularis BLC (Prop. 14. Libri 2.), & ex antecedenti Propositione habebimus $\div$ AC : AB : AL; ideoque (Coroll. 1. Propos. 16.) erit M : S :: AC : AL. Similiter (Propos. anteced.) habemus $\div$ AC : CB : CL; ergo (Coroll. 1. Propos. 16.) erit M : T :: AC : CL. Quapropter habemus duas proportiones

M : S

M : S : : AC : AL, & M : T : : AC : CL, quæ habent eosdem antecedentes M, & AC; ideoque (Propos. 15. Libri 1.) erit M : S + T : : AC : AL + CL. Atqui (Axiom. 10.) est AC = AL + CL, ergo erit etiam M = S + T. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 31. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

www.libtool.com.cn

Fig. XIV. Tab. VIII. Ergo in omni triangulo rectangulo ABC quadratum hypothenusæ AC æquale est quadratis AR, BI cathetorum AB, BC: omnia enim quadrata sunt figuræ rectilineæ similes, similiterque descripta (Defin. 1.), ut per se patet. In hoc Corollario continetur nobilissimum, atque utilissimum Theorema, cujus inventor *Pythagoras*, cum, falso, a Musis se in ea inventione adjutum putaret (Deum omnis sapientiæ, doctrinæque auctorem esse fortasse *ignorans*), maximas gratias agens, hostias dicitur Diis immolavisse, *ut inquit Vitruvius* Lib. 9. Cap. 2.

Est Propositio 47. Libri I. Euclidis.

Corollarium II.

Hinc datis duobus cujusvis trianguli rectanguli lateribus, facile est tertium invenire. Etenim si dati sint duo catheti exemp. caus. AF pedum quatuor longitudinis, & AC trium pedum, atque invenienda sit longitudo hypothenusæ FC, fiant cathetorum 4, & 3 quadrata 16, & 9, quæ in unam summam colligantur, & ex eadem summa 16 + 9, idest 25, extrahatur radix quadrata, quæ erit 5; atque hæc erit hypothenusæ FC longitudo, quia ejus quadratum 5 × 5, idest 25, adæquat quadrata 16, & 9 cathetorum 4, & 3. Si autem data fuerit hypothenusa FC pedum 5 longitudinis, & unus ex cathetis AC trium pedum, & quæratur alter cathetus AF; tunc ex hypothenusæ quadrato 25 subtrahatur quadratum 9 dati catheti AC, & ex residuo 25 — 9, idest ex 16 extrahatur radix quadrata 4, quæ erit longitudo catheti AF.

Corollarium III.

Fig. XVI. Tab. VIII. Si triangulum rectangulum ACD fuerit Isosceles, tunc quadratum hypothenusæ CD erit duplum tam quadrati ex catheto AC, quam quadrati ex catheto AD. Nam ex antecedenti Corollario primo est $CD - 2 = AD - 2 + AC - 2$; sed quadrata linearum æqualium AD, AC (Arith. 182.) sunt æqualia inter se; ideo quadratum hypothenusæ CD erit duplum tam quadrati ex catheto AD, quam quadrati ex catheto AC. Sive erit quadratum hypothenusæ CD ad quadratum catheti AD, vel AC, sicuti duo ad unum; nimirum $CD - 2 : AD - 2 = 2 : 1$.

PRO-

PROPOSITIO DECIMANONA.

Problema.

Rectam lineam invenire, cujus quadratum adæquet quadrata plurium datarum linearum, A, B, C, &c.

www.libtool.com.cn

Resolutio.

Ducatur in plano recta EF = A, & supra EF erigatur perpendicularis FG = B (Propos. 11. Lib. 2.), & ducatur hypothenusa GE, cujus quadratum (Coroll. 1. Propos. anteced.) erit æquale duobus quadratis cathetorum EF, & FG, idest (constructione) linearum A, & B. Similiter ad rectam EG erigatur perpendicularis GL = C, & ducatur hypothenusa LE, cujus quadratum (Corollar. 1. Propos. anteced.) erit æquale duobus quadratis cathetorum EG, GL, sive GE, & C. Sed quadratum lineæ GE ostensum est æquale quadratis linearum A, & B; ergo quadratum rectæ LE adæquat tria quadrata linearum A, B, C simul sumpta; atque ita procedendo, si plures fuerint datæ rectæ, semper invenietur quæsita linea. Quod erat propositum. Fig. I. Tab. IX.

PROPOSITIO VIGESIMA.

Theorema.

Quadrati diameter est incommensurabilis lateri ejusdem quadrati.

Quoniam omnes numeri sunt inter se commensurabiles (Defin. 3. Libri 1.), ideo lineæ illæ dicuntur commensurabiles, quæ sunt inter se sicuti numerus quilibet ad alium quemlibet numerum; exempli caussa linea septem pedum, & linea viginti novem pedum sunt inter se commensurabiles, quia sicuti unitas est communis mensura numerorum septem, & viginti novem; ita linea unius pedis longitudinis est communis mensura linearum septem, & viginti novem pedum longitudinis: unde prima linea est ad secundam, sicuti numerus 7 ad numerum 29.

Lineæ vero incommensurabiles dicuntur (Definit. 4. Lib. 1.), quando nullam habent communem mensuram, idest quando non sunt inter se sicuti numerus ad numerum. In omni autem quadrato ABCM ratio diametri AC, ad latus AB, numeris exprimi nequit. Fig. II. Tab. IX.

Demon-

Demonstratio.

Nam in triangulo rectangulo isoscele ABC quadratum ex hypothenusa AC est duplum quadrati ex latere AB (Coroll. 3. Prop. 18.); itaque si latus AB fuerit trium pedum longitudinis, ejus quadratum erit 9 pedum quadratorum (Schol. Defin. 26. Libri 2.), cujus duplum, idest quadratum diametri AC, erit 18 pedum quadratorum; ergo diameter AC erit $\sqrt{18}$, & latus AB ex hypothesi est $\sqrt{9}$, idest 3 (Algeb. 84.): itaque est diameter AC ad latus AB :: $\sqrt{18}$: 3; atqui radix numeri 18 in numeris inveniri nequit, quia nullus numerus in seipsum multiplicatus producere potest numerum 18; ideoque ratio diametri AC ad latus AB numeris exprimi nequit: consequenter sunt lineæ incommensurabiles. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 117. Libri 10. Euclidis celebratissima apud veteres Philosophos, ita ut qui hanc nesciret, eum divinus Plato non hominem esse, sed pecudem diceret.

www.libtool.com.cn

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER QUARTUS.

DEFINITIO PRIMA.

Circuli Concentrici dicuntur, qui habent idem centrum. *Circuli* vero *Eccentrici* sunt illi, qui habent centra diversa.

www.libtool.com.cn

Definitio II.

Tangens circuli dicitur linea recta, quæ circuli peripheriam in unico puncto tangit, & utrinque indefinite producta ipsam peripheriam non secat: ut recta EB, quæ circulum tangit in puncto L. Fig. III. Tab. IX.

Angulus contactus dicitur angulus mixtilineus ELA, vel BLC, a tangente, & a peripheria circuli constitutus.

Definitio III.

Circuli æquales sunt illi, qui habent diametros, aut radios æquales, atque mutuo superimpositi congruunt.

Definitio IV.

Si a duobus peripheriæ punctis A, & C ad aliud ejusdem peripheriæ punctum B ducantur duæ rectæ AB, CB, quæ efficient angulum ABC; idem angulus ABC dicatur *contentus*, vel *inscriptus* in circuli segmento, seu portione ABC. Præterea idem angulus ABC dicitur *insistere* arcui opposito AEC, quia ejus latera BA, BC eundem arcum intercipiunt. Fig. IV. Tab. IX.

Angulus vero BAC dicitur inscriptus in segmento BAEC, & insistere arcui BC; atque ita de reliquis.

Definitio V.

Dato quovis angulo rectilineo EAB, si centro ejus vertice A, & quovis intervallo AB describatur circulus BEFC, arcus BLE interceptus a lateribus AB, AE, ejusdem anguli BAE *mensura* appellatur. Nam quo major est angulus EAB, eo major erit arcus oppositus BLE; & e converso, quo minor est angulus, eo minor erit arcus oppositus. Similiter arcus FE est mensura anguli FAE, & arcus FC est mensura anguli FAC. Arcus EFC est mensura anguli CAE; & sic de cæteris. Fig. V. Tab. IX.

Definitio VI.

Fig. VI. Tab. IX. Peripheria cujuslibet circuli ABEL dividi solet in 360 partes, seu arcus æquales, qui *Circuli gradus* appellantur. Rursus quilibet gradus dividitur in alias 60 partes æquales, quæ vocantur *minuta prima*. Quodlibet autem minutum primum adhuc dividitur in alias 60 partes æquales, quæ vocantur *minuta secunda*; atque ita deinceps de minutis tertiis, quartis &c.

www.libtool.com.cn

Quapropter semcirculus ABE, vel ALB continebit gradus $\frac{360}{2}$, idest 180; & quarta pars circumferentiæ, ut AB, vel EB, continebit gradus $\frac{360}{4}$, seu $\frac{180}{2}$, idest 90.

Definitio VII.

Fig. VI. Tab. IX. Si ex centro C supra diametrum AE erigatur perpendicularis CB, erit arcus AB æqualis arcui BE; quia linea CB non magis inclinatur versus A, quam versus E (Defin. 8. Libri 2.); ideoque mensura anguli recti ACB est arcus oppositus AB, quarta peripheriæ pars, idest arcus graduum 90. Similiter arcus BFE graduum 90 est mensura anguli recti BCE. Idem de reliquis intelligatur.

Mensura vero cujusvis anguli obtusi ACF est arcus ABF major arcu BA 90 graduum; & anguli acuti FCE mensura est arcus FE minor arcu BE graduum 90.

Corollarium.

Quapropter semicircumferentia ABE est mensura duorum rectorum ACB, BCE; & integra peripheria est mensura quatuor angulorum rectorum.

Definitio VIII.

Fig. VII. Tab. IX. Figura mixtilinea CAB comprehensa a duobus radiis CA, CB, & ab arcu intercepto BA, dicitur *Sector circuli*. Cum vero angulus BCA a radiis contentus est rectus, tunc arcus BA (Definit. antecad.) est quarta peripheriæ pars, & sector CAB appellatur *Quadrans circuli*: est enim circuli integri quarta pars.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Circuli concentrici habent peripherias æquidistantes, seu parellelas.

Fig. VIII. Tab. IX. Sint circuli concentrici BCFG, ERIL, habebunt peripherias æquidistantes.

De-

Demonstratio.

Nam a communi centro A ducantur radii AB, AC, AF, AG, &c, qui erunt æquales inter se (Defin. 15. Libri 2.), a quibus si auferantur radii, seu partes æquales AL, AI, AR, AE &c, reliquæ partes LB, IC, RF, EG &c erunt semper æquales inter se (Axiom. 3.) quod ubique verificatur; consequenter peripheriæ BCFG, ERIL erunt æquidistantes, seu parallelæ. Quod erat ostendendum.

www.libtool.com.cn

Corollarium I.

Ergo circuli, quorum peripheriæ se invicem secant, non sunt concentrici.

Est Propositio 15. *Libri 3. Euclidis.*

Corollarium II.

Similiter circuli, quorum peripheriæ se mutuo tangunt, habere nequeunt idem centrum.

Est Propositio 6. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Recta linea a centro circuli ad medietatem cujusvis chordæ ducta, est perpendicularis eidem chordæ. E converso si a centro circuli supra quamlibet chordam ducatur recta perpendicularis, eandem chordam bifariam secabit.

Primo, in circulo ABFR, & ab ejus centro C ad medietatem E chordæ BR ducta sit recta CE, erit hæc recta perpendicularis chordæ BR. Fig. IX. Tab. IX.

Demonstratio Primæ Partis.

Nam ductis radiis CB, CR, triangulum CBR erit isosceles; ergo (Coroll. 1. Propos. 25. Libri 2.) recta CE ab ejus vertice ad medietatem basis ducta, erit perpendicularis eidem basi BR. Quod erat primum.

Secundo, si a centro C supra chordam BR ducatur perpendicularis CE, hæc bifariam secabit chordam BR.

Demonstratio Secundæ Partis.

Etenim ductis, ut antea, radiis CB, CR, in triangulo isosceele ſcele CBR, recta CE a vertice perpendiculariter ducta ſupra baſim (Coroll. 2. Propoſ. 25. Lib. 2.), eandem baſim BR bifariam ſecabit, Quod erat ſecundum.

Eſt Propoſitio 3. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Fig. X. Tab.IX. www.libtool.com.cn Quapropter circuli centrum ſemper reperitur in perpendiculari ad medietatem cujuſvis chordæ ducta.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Dati circuli centrum invenire.

Fig. IX. Tab.IX. In dato circulo AFBE ducatur utcumque chorda AB, quæ (Propoſit. 12. Libri 2.) bifariam dividatur in puncto C, a quo ſupra eandem AB erigatur perpendicularis CF (Propoſit. 13. Libri 2.), quæ utrinque producatur uſque ad peripheriam in F, & E. Tandem bifariam ſecetur recta FE in puncto I, quod erit quæſitum centrum circuli.

Demonſtratio.

Quoniam a medietate C chordæ AB unica duci poteſt recta eidem chordæ perpendicularis (Coroll. Defin. 9. Libri 2.), & recta a centro ad medietatem chordæ ducta, eſt eidem chordæ perpendicularis (Propoſ. anteced.), ideo centrum circuli reperitur in perpendiculari FE; proindeque erit ipſum punctum I, in quo biſariam dividitur. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 1. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

Dati arcus centrum invenire, ut integra deſcribatur peripheria.

Fig. XI. Tab.IX. In dato arcu ABL ducantur utcumque duæ chordæ AB, BL, quæ (Propoſ. 12. Lib. 2.) bifariam ſecentur in E, & F, a quibus punctis (Propoſ. 13. Libri 2.) erigantur perpendiculares EC, FC, quæ alicubi ſe ſe mutuo ſecabunt, ut in puncto C, quod erit quæſitum centrum.

Demonſtratio.

Centrum circuli (Propoſ. anteced.) reperitur tam intra perpendiculacularem EC, quam intra perpendicularem FC; ideoque erit punctum C, quod est utrique perpendiculari EC, FC commune. Quapropter centro C, & intervallo CA, vel CB &c. complebitur integra peripheria. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

Est Propositio 25. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

www.libtool.com.cn

Eadem ratione circa quodlibet triangulum ALB, sive per tria data puncta A, B, L, non in directum posita, ductis rectis AB, BL, circulus describetur, cujus peripheria transibit per tria data puncta, seu per angulos A, B, L. Nam bifariam divisis rectis AB, BL, atque ductis perpendicularibus EC, FC, erit C quæsitum centrum, ut manifeste apparet ex antecedenti Demonstratione.

Est Propositio 5. Libri 4. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Si ab aliquo puncto intra circulum tres rectæ lineæ æquales ad peripheriam ductæ fuerint, punctum illud erit centrum circuli.

A puncto C ad peripheriam circuli EAB ductæ sint tres rectæ æquales CA, CB, CE; erit punctum C ejusdem circuli centrum. Fig. XII. Tab. IX.

Ducantur subtensæ BA, BE, quæ bifariam secentur in punctis F, & L (Propos. 12. Libri 2.), atque ducantur rectæ FC, LC.

Demonstratio.

Duo triangula CFB, CFE, habent latus FC commune, latus FB æquale FE (construct.), & latus CB æquale CE ex hypothesi; ideoque (Propos. 9. Libri 2.) erit angulus CFB æqualis angulo CFE; consequenter (Definit. 9. Libri 2.) recta FC est perpendicularis chordæ BE; ideoque (Coroll. Propos. 2.) centrum circuli erit intra perpendicularem FC. Eadem ratione singula latera triangulorum CLB, CLA sunt æqualia, proindeque anguli CLB, CLA sunt æquales, & recti, atque circuli centrum reperietur etiam intra perpendicularem LC. Ergo circuli centrum erit punctum C utrique perpendiculari FC, LC commune. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 9. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Ergo a puncto, quod non sit centrum circuli, duci non possunt tres rectæ lineæ æquales ad peripheriam; quia si ducerentur, illud punctum esset centrum circuli.

PRO-

Problema.

Per quodvis peripheriæ punctum rectam circuli tangentem ducere.

Fig. XIII. Tab. IX. A puncto L in peripheria dato, vel assumpto, ad centrum C ducatur radius LC, supra quem ex puncto L erigatur perpendicularis ALB (Propos. 13. Libri 2.); hæc erit tangens quæsita, nimirum utrinque producta, tota extra circulum cadet.

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Ex centro C ad quodlibet aliud punctum E rectæ AB ducatur recta linea CE; atque semper habebitur triangulum CLE, *cujus angulus* CLE est (construct.) rectus; ideoque (Coroll. 5. *Propos.* 24. Libri 2.) angulus CEL erit acutus; consequenter (*secunda parte* Propos. 27. Libri 2.) latus CE angulo majori oppositum *erit majus* CL opposito angulo minori; sed CL est radius; ergo linea CE *est* major radio, & ducta est a centro circuli: itaque punctum E est extra circulum. Eadem ratione reliqua puncta lineæ AB, excepto L, demonstrantur esse extra peripheriam. Ergo recta AB (Definit. 2.) est circuli tangens. Quod erat propositum.

Corollarium I.

Itaque recta AB extremitati L radii CL, vel diametri FL perpendicularis, est tangens circuli.

Præterea cum extremitati diametri unica duci possit perpendicularis: ideo una tantum recta tangere potest circulum in eodem puncto: consequenter omnes aliæ rectæ per punctum contactus ductæ circulum secabunt.

Est Propositio 16. Libri 3. Euclidis.

Corollarium II.

Fig. XIV. Tab. IX. Hinc facillime deducitur rectam CM ex centro C ad punctum contactus M ductam, perpendicularem esse tangenti AB.

Est Propositio 18. Libri 3. Euclidis.

Corollarium III.

Similiter patet rectam MC ex puncto contactus M perpendiculariter erectam supra tangentem AB transire per centrum circuli.

Est Propositio 19. Libri 3. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, quando insistant super eodem arcu.

www.libtool.com.cn

Primo anguli ACB ad centrum, & ALB ad peripheriam insistant super eodem arcu AEB, & duo ipsorum latera LA, CA conveniant, erit angulus ACB duplus anguli ALB. Fig. XVI. Tab. IX.

Demonstratio.

Nam in triangulo isoscele CBL (sunt enim radii CB = CL), anguli CBL, CLB (*Propos. 25. Libri 2.*) sunt aequales inter se; igitur ejusdem trianguli BLC angulus externus BCA, qui (secunda parte Propos. 24. Lib. 2.) est aequalis duobus angulis CBL, CLB simul sumptis, erit duplus unius CLB; nimirum angulus ACB ad centrum duplus est anguli ALB ad peripheriam.

In secundo casu, ubi latera neque conveniunt, neque se invicem secant, ducatur diameter LE, & ex antecedenti Demonstratione erit angulus ACE duplus anguli ALE, & angulus ECB duplus anguli ELB; adeoque integer angulus ACB ad centrum erit duplus totius anguli ALB ad peripheriam. Fig. XVII. Tab. IX.

Denique in tertio casu, in quo latus LB secat latus CA, ducatur diameter LI; erit per primam Demonstrationem totus angulus ACI duplus totius anguli ALI, & pars BCI est dupla partis BLI; ergo (Axiom. 15.) etiam reliquus angulus ACB ad centrum erit duplus reliqui anguli ALB ad peripheriam. Quod erat demonstrandum. Fig. XVIII. Tab. IX.

Est Propositio 20. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Quoniam (Defin. 5.) arcus AEB est mensura anguli ACB ad centrum; & angulus ALB ad peripheriam, juxta praecedentem Demonstrationem, est medietas ejusdem anguli ACB ad centrum: ideoque mensura anguli ALB ad peripheriam erit medietas arcus oppositi AEB.

PRO-

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Fig. XIX. Tab. IX. *Omnes anguli ad peripheriam (ALB, AIB, AMB &c.) & in eodem circuli segmento (ALIMB) contenti, sive qui insistunt super eodem arcu (AEB), sunt æquales inter se.*

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Quilibet enim ex illis (Propos. anteced.) est dimidius ejusdem anguli ACB ad centrum; ideoque (Axiom. 14.) sunt æquales inter se. Sive (quod idem est) quilibet ex illis habet pro mensura medietatem arcus oppositi AEB, cui omnes insistunt (Coroll. Propos. anteced.); ergo sunt æquales inter se. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 21. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Fig. I. Tab. X. *Omne quadrilaterum (ABCL) in circulo inscriptum, sive cujus anguli sunt in peripheria circuli, habet angulos oppositos (A, & C; item B, & L) simul sumptos duobus rectis æquales.*

Demonstratio.

Nam angulus BAL (Coroll. Propos. 7.) habet pro mensura medietatem arcus oppositi BCL. Similiter anguli BCL mensura est medietas arcus oppositi BAL; ideoque duo anguli A, & C simul sumpti habent pro mensura medietatem integræ peripheriæ; medietas vero integræ peripheriæ est mensura duorum rectorum (Coroll. Defin. 7.); ergo duo anguli oppositi, A, & C simul sumpti adæquant duos rectos. Eodem ratiocinio duobus rectis æquales demonstrantur reliqui duo anguli oppositi B, & L simul sumpti. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 22. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Nullum igitur parallelogrammum obliquangulum potest habere omnes angulos in peripheria circuli.

PRO-

PROPOSITIO DECIMA.

Theorema.

Angulus in semicirculo inscriptus semper est rectus.

Sit circulus ACLB, & ab extremis cujusvis diametri AL ad quodvis semiperipheriæ punctum C ductæ sint duæ rectæ AC, LC; angulus ACL in semicirculo ACFL inscriptus, seu contentus, erit rectus. Fig. II. Tab. X.

Demonstratio.

Etenim anguli ACL mensura (Coroll. Prop. 7.) est dimidium arcus oppositi ABL; sed arcus ABL est ex hypothesi semicircumferentia, quæ est mensura duorum rectorum (Coroll. Defin. 7.); proindeque ejus medietas erit mensura unius recti; ergo angulus ACL, cujus mensura est dimidium semiperipheriæ ABL erit rectus. Quod erat ostendendum. Est prima pars Propos. 31. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Problema.

A puncto extra circulum dato rectam circuli tangentem ducere.

Ex dato puncto C ad centrum A circuli dati BLF ducatur recta CA. Atque centro A, intervallo CA, describatur circulus EIC. Deinde supra CA, & ex puncto L, in quo secat dati circuli peripheriam, erigatur perpendicularis LE (Propos. 13. Libri 2.), quæ circuli EIC peripheriam alicubi secet, ut in puncto E, a quo ducatur radius EA, & ex puncto F, in quo secat peripheriam dati circuli, ad punctum datum C ducatur recta FC, quæ erit tangens quæsita. Fig. III. Tab. X.

Demonstratio.

Duo triangula EAL, CAF circa angulum communem A, habent latera LA, AE æqualia lateribus FA, AC (Defin. 15. Lib. 2.); ideoque (Propos. 6. Libri 2.) erit angulus AFC æqualis angulo ALE recto per constructionem; consequenter etiam angulus AFC erit rectus. Ergo recta FC perpendicularis extremitati diametri, seu radii AF, erit circuli tangens (Cor. 1. Prop. 6.) Quod erat propositum.

Hæc Propositio potest etiam alia ratione demonstrari. Ex puncto R ad centrum C ducatur recta RC; quæ (Prop. 12. Libri 2.) bifariam secetur in A, atque centro A, intervallo AC, vel AR, describatur semicirculus CGBR, & ex puncto G, in quo peripheriæ se mutuo secant ad punctum datum R ducatur recta GR, quæ erit tangens quæsita.

Demonstratio.

Nam ducto radio CG, angulus CGR in semicirculo CGBR inscriptus (Propos. anteced.) est rectus; ideoque recta GR perpendicularis extremitati G radii CG (Coroll. 1. Propos. 6.) erit tangens circuli LGM. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 17. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Si ex centro A radio AC describatur alius semicirculus CLR, & ducatur recta LR, eodem modo demonstrabitur ipsam rectam LR esse circuli tangentem. Consequenter ex dato puncto duæ circuli tangentes duci possunt.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Theorema.

Angulus contentus a circuli tangente, & a chorda per punctum contactus ducta, æqualis est angulo descripto in opposita, seu alterna circuli portione.

Fig. IV. Tab. X. Recta AB circulum tangat in puncto C, a quo ducta sit secans chorda CE, erit angulus ECB a tangente CB, & a secante CE contentus, æqualis angulo inscripto in segmento, seu portione opposita CRFE. Similiter erit angulus ACE æqualis angulo contento in portione CILE.

Ducatur diameter CF, quæ erit perpendicularis tangenti AB (Coroll. 2. Propos. 6.) Ducantur etiam chordæ FE, EL, LC.

Demonstratio.

Angulus in semicirculo inscriptus est rectus (Propos. 10.); ergo in triangulo EFC reliqui duo anguli EFC, ECF simul sumpti unum rectum adæquant (Coroll. 5. Propos. 24. Libri 2.). Sed duo anguli ECB, ECF adæquant pariter angulum rectum FCB (Axiom. 10.); ideoque (Axiom. 1.) duo anguli EFC, ECF æquales erunt duobus angulis ECB, ECF; atque dempto communi angulo ECF, (Axiom. 3.) remanebit angulus EFC contentus in segmento EFRC æqualis angulo ECB contento a tangente CB, & a chorda secante CE.

Præterea in quadrilatero CLEF duo anguli oppositi CFE, CLE (Propos. 9.) adæquant duos rectos; sed duo anguli consequentes ECB, ECA sunt pariter æquales duobus angulis rectis (Propos. 15. Libri 2.); ideoque erunt duo anguli CFE, CLE æquales duobus angu-

a secante CB. Quod erat demonstrandum.
Est Propositio 32. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Hinc evidens est angulum CFE inscriptum in majori segmento CRFE acutum esse; & angulum CLE contentum in minori segmento CILE obtusum esse.
Est secunda pars Proposit. 31. Libri 3. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

In circulis æqualibus, vel in eodem circulo, anguli æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti, insistunt supra arcus æquales.

Vicissim si arcus sunt æquales, anguli insistentes, sive ad centra, sive ad peripherias erunt æquales.

Primo in æqualibus circulis AMBL, ERGF, sint anguli æquales ACB, EIG ad centra C, & I; arcus oppositi AMB, ERG erunt inter se æquales. Fig. V. Tab. X.

Demonstratio Primæ Partis.

Intelligatur circulus ALBM ita superimponi circulo EFGR, ut radius CA cadat supra æqualem radium EI (Defin. 3.), congruent (Coroll. Defin. 5. Libri 2.), radius vero CB congruet cum radio GI, quia anguli ACB, EIG sunt ex hypothesi æquales; atque puncta A, & B cadent in C, & G; ideoque integer arcus AMB congruet cum arcu ERG, & (Axiom. 8.) erunt inter se æquales.
Si autem æquales fuerint anguli ALB, EFG ad peripherias, tunc ductis radiis CA, CB, IE, IG, etiam anguli ACB, EIG ad centra (Axiom. 13.) æquales erunt, quia sunt dupli angulorum æqualium ad peripherias (Propof. 7.); consequenter ex demonstratis etiam arcus oppositi AMB, ERG æquales erunt inter se, Quod erat primo demonstrandum.
Est Propositio 26. Libri 3. Euclidis.
Secundo in circulis æqualibus ALB, EFG secti sint arcus æquales AMB, ERG; anguli insistentes, sive ad centra, sive ad peripherias, erunt æquales.

Demonstratio Secundæ Partis.

Quoniam (hypothes.) arcus AMB est æqualis arcui ERG, & circuli sunt æquales, ideo superimposito circulo AMBL supra æqualem circulum ERGF, ita ut centra C, & I conveniant, & punctum A cum puncto E, arcus AMB congruet cum æquali arcu ERG, & punctum B cadet in G; consequenter congruent radii CA cum IE, & CB cum IG, atque (Axiom. 14.) angulus ACB erit æqualis angulo EIG.

www.fhtool.com.cn

Præterea (Axiom. 14.) etiam æquales erunt inter se anguli ALB, EFG ad peripherias, quia (Propos. 7.) sunt medietates angulorum æqualium ACB, EIG ad centra. Quod erat secundo demonstrandum.

Est Propositio 27. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

In circulis æqualibus (AMCL, ERGI), vel in eodem circulo,

Fig. VI. Tab. X. *æquales chordæ (AC, EG) arcus æquales (ALC = EIG, & AMC = ERG) subtendunt.*

Vicissim si arcus (ALC, AIG) fuerint æquales, etiam chordæ (AC, EG) eosdem arcus subtendentes erunt inter se æquales.

Demonstratio Primæ Partis.

Ductis radiis (Definit. 3. hujus Libri, & Defin. 15. Libri 2.) æqualibus inter se BA, BC, FE, FG, quia (hypoth.) bases AC, EG sunt æquales, ideo (Propos. 9. Libri 2.) erit angulus ABC = EFG; consequenter (prima parte Propos. anteced.) erit arcus ALC = EIG; & ab integris æqualibus peripheriis auferendo partes æquales ALC, EIG, (Axiom. 3.) remanebit arcus AMC = ERG. Quod erat primum.

Est Propositio 28. Libri 3. Euclidis.

Demonstratio Secundæ Partis.

Quoniam (hypoth.) arcus ALC, EIG ponuntur æquales, ideo ductis radiis BA, BC, FE, FG (secunda parte Propos. anteced.) erit angulus ABC = EFG, & (Defin. 3.) latera BA, BC sunt æqualia lateribus FE, FG; ergo (Propos. 6. Libri 2.) erit basis AC æqualis basi EG: consequenter æquales arcus ab æqualibus chordis subtenduntur. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 29. Libri 3. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Problema.

Datum arcum (ACL) bifariam dividere. Fig. VII. Tab. X.

www.libtool.com.cn

Ducatur chorda AL, quæ (Propof. 12. Libri 2.) bifariam fecetur in B, & (Propof. 13. Libri 2.) erigatur perpendicularis BC, quæ bifariam fecabit in C datum arcum ACL. Jungantur rectæ AC, CL.

Demonftratio.

Triangula ABC, CBL circa æquales angulos rectos ABC, CBL habent latus CB commune, & (conftruct.) latus BA = BL; ergo (Propof. 6. Libri 2.) erit AC = CL; proindeque (prima parte Propof. anteced.) arcus CMA, CRL fubtenti ab æqualibus chordis AC, CL erunt æquales inter fe. Quod erat faciendum, atque demonftrandum.

Eft Propofitio 30. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Problema.

Ex dato circulo portionem abfcindere, quæ contineat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Refolutio.

Ducatur recta CB, quæ datum circulum tangat in aliquo puncto C (Propofit. 6.), & fupra eandem CB in puncto C fiat angulus BCI æqualis angulo dato A (Propof. 10. Libri 2.), Portio CRI continebit angulum æqualem angulo ICB (Propof. 12.); confequenter (Axiom. 1.) æqualem dato angulo A. Quod erat propofitum. Fig. X. Tab. X.

Eft Propofitio 34. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

In quovis circulo (ALBC) fi duæ rectæ (AB, CL) a peripheria utrinque terminatæ fe mutuo fecent (ut in F), rectangulum contentum ex partibus (AF, FB) unius, erit æquale rectangulo contento a partibus (CF, FL) alterius rectæ (nimirum erit AF × FB = CF × FL. Fig. VIII. Tab. X.

Demonftratio.

Nam ductis rectis AC, LB, eft angulus AFC = LFB (Propof. 17.

pof. 17. Libri 2.), & (Propof. 8. hujus Libri) eſt angulus CAB = CLB, quia inſiſtunt ſupra eundem arcum CB. Similiter eſt angulus ACL = ABL; ideoque triangula AFC, BLF ſunt æquiangula: conſequenter (Propof. 7. Lib. 3.) erit AF : FL : : FC : FB; atque (Propof. 1. Lib. 2.) erit AF × FB = FL × FC. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 35. Libri 3. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Si ex quolibet puncto & extra circulum ducantur duæ rectæ, quarum una circulum tangat, & altera circulum utcumque ſecet; ſemper erit quadratum tangentis æquale rectangulo contento a tota ſecante, & ab ejus parte extra circulum poſita.

Fig. IX. Tab. X. Sit circulus BICL, quem tangat recta AL in puncto L; eumque ſecet recta AB, ſemper erit quadratum tangentis AL æquale rectangulo contento a ſecante BA, & ab ejus ſegmento CA extra circulum poſito; nimirum erit $\overline{AL}^2 = \square$ BA × AC.

Ducantur ſubtenſæ BL, CL.

Demonſtratio.

Angulus CLA contentus a tangente LA, & a chorda ſecante LC (Propof. 12.) eſt æqualis angulo LBC inſcripto in altero ſegmento, angulus vero in A communis eſt duobus triangulis ALB, ALC; ideoque (Coroll. 7. Propof. 24. Libri 2.) reliquus angulus BLA erit æqualis reliquo ACL: proindeque triangula ALB, ALC erunt æquiangula, & (Propof. 7. Lib. 3.) erit BA : AL : : AL : AC, ſcilicet erit ∺ BA : AL : AC: ergo (Prop. 23. Libri 1.) erit $\overline{AL}^2$ = BA × AC. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 36. Libri 3. Euclidis.

Corollarium I.

Ergo tangens AL eſt media proportionalis inter ſecantem BA, & ejus ſegmentum CA poſitum extra circulum: eſt enim ∺ BA : AL : AC.

Corollarium II.

Si ex eodem puncto A (Coroll. Propof. 11.) ducatur altera tangens AI, eodem modo demonſtrabitur eſſe $\overline{AI}^2$ = BA × AC; ideoque (Axiom. 1.) erit $\overline{AL}^2 = \overline{AI}^2$, & (Algebr.) habebitur AL = AI:

Problema.

Datam rectam terminatam (A B) ita in duas partes dividere, ut tota ad partem majorem eandem rationem habeat, quam habebit eadem pars major ad minorem. Quod dicitur rectam lineam media, & extrema dividere ratione. Fig. XI Tab. X.

www.libtool.com.cn

Supra datam AB, & ex puncto A (Propos. 13. Libri 2.) erigatur perpendicularis AC æqualis medietati rectæ A B. Deinde centro C, radio CA describatur circulus AEM, atque per puncta B, & C ducatur recta BCM. Tandem ex data AB secetur portio BL æqualis portioni BE: dico rectam AB media, & extrema ratione divisam esse in L; scilicet erit ∺ AB : BL : LA.

Demonstratio.

Radius CA (constructione) est dimidium rectæ BA; item CA (Defin. 15. Lib. 2.) est dimidium diametri EM; ideoque (Axiom. 13.) erit recta BA æqualis diametro ME; sed recta BA (constructione) perpendicularis extremitati A radii AC (Coroll. 1. Propos. 6.) est tangens circuli, & linea BM est circuli secans: unde (Corollar. 1. Propos. anteced.) erit MB : BA : : BA : BE, & dividendo (Propos. 7. Lib. 1.) erit MB — BA : BA : : BA — BE : BE; sed (Demonstr.) est EM = BA, (construct.) est BL = BE; ideo æqualibus æqualia substituendo in antecedenti ultima proportione, erit MB — EM : BA : : BA — BL : BL; at BA — LB significat AL, & MB — EM significat BE, cui substituatur æqualis portio BL, & habebitur BL : BA : : AL : BL; & invertendo (Propos. 5. Lib. 1.) erit BA : BL : : BL : AL, scilicet ∺ BA : BL : AL. Ergo recta AB divisa est in L media, & extrema ratione. Quod erat propositum.

Est Propositio 30. Libri 6. Euclidis.

Corollarium.

Quoniam (Demonstratione) est ∺ BA : BL : AL, ideo (Propos. 23. Libri 1.) erit $BA \times AL = \overline{BL}^2$; ergo data recta AB ita divisa est in L, ut rectangulum ex tota AB in partem AL adæquet quadratum reliquæ partis BL.

Est Propositio 11. Libri 2. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO VICESIMA.

Problema.

Fig. XII. Tab. X. *Datis duabus rectis (AB, BC) mediam proportionalem invenire.*

www.libtool.com.cn

Datæ rectæ AB, BC ita in directum ponantur, ut unicam rectam AC constituant, quæ (Propos. 12. Lib. 2.) secetur bifariam in F; & centro F, radio FA, vel FC describatur semicirculus ALMC; postea ex puncto B ad rectam AC (Propos. 13. Lib. 2.) erigatur perpendicularis BM, quæ alicubi terminetur a peripheria, ut in M: erit BM quæsita linea.

Demonstratio.

Ductis subtensis AM, CM angulus AMC in semicirculo ALMC inscriptus (Proposit. 10.) erit rectus; ergo (Coroll. 2. Propos. 18. Libri 3.) perpendicularis MB demissa ab angulo recto ad hypothenusam AC erit media proportionalis inter segmenta AB, BC ejusdem hypothenusæ: erit igitur $\div$ AB : BM : BC. Quod erat propositum.

Est Propositio 13. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Ergo (Proposit. 23. Libri 1.) erit $AB \times BC = \overline{BM}^2$. Scilicet in quovis circulo quadratum cujusvis perpendicularis BM a peripheria ad diametrum ductæ æquale erit rectangulo comprehenso a diametri partibus AB, BC, in quibus ab ipsa perpendiculari dividitur.

Corollarium II.

Fig. XIII. Tab. X. Quapropter ut describatur quadratum æquale dato rectangulo ABCR, lateribus AB, BC inveniatur media proportionalis BL, supra quam (Propos. 30. Libri 2.) fiet quadratum BM, quod (Proposit. 23. Lib. 1.) æquale erit rectangulo ABC contento a lateribus AB, BC.

Corollarium III.

Ut autem describatur quadratum æquale parallelogrammo obliquangulo ABST, demittantur perpendiculares AR, BC, & (Proposit. 31. Libri 2.) habebitur rectangulum ABCR æquale parallelogrammo obliquangulo ABST; unde quadratum BM (Coroll. antec.) æquale rectangulo ABCR (Axiom. 1.) erit etiam æquale parallelogrammo obliquangulo ABST.

Corol-

Ergo data qualibet figura rectilinea, describetur quadratum æquale ipsi figuræ, si dividatur eadem figura in triangula, deinde unicuique triangulo (Propos. 34. Lib. 2.) fiat rectangulum æquale; postea (anteced. Coroll. 2.) unicuique rectangulo describatur quadratum æquale. Tandem (Propos. 20. Libri 3.) inveniatur linea, cujus quadratum sit æquale omnibus inventis quadratis simul sumptis; & quadratum illud (Axiom. 1.) erit æquale rectilineo dato.

In hoc Corollario continetur Propositio 14. Libri 2. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO VICESIMAPRIMA.

Theorema.

Si recta (AB) bifariam secetur (in C), eique in directum addatur qualibet alia recta (BL), quadratum lineæ (CL) dimidiæ cum adjecta, erit æquale rectangulo (AL × LB) contento ex data cum adjecta (AL), & ab adjecta (BL) cum quadrato dimidiæ (CB). Fig. XIV. Tab. X.

Centro C, radio CB, vel CA, describatur circulus AFB, & ex puncto L (Proposit. 11.) ducatur tangens LF, & ducatur radius CF ad punctum contactus F.

Demonstratio.

Recta LF (Constructione) est circuli tangens, & AL circulum secat; ideo (Propos. 18.) erit $\overline{LF}^2 = AL \times LB$. Addantur quadrata æqualia radiorum CF, CB, & (Axiom. 2.) erit $\overline{LF}^2 + \overline{CF}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$. Sed (Coroll. 1. Propos. 6.) angulus CFL est rectus, & proinde (Coroll. 1. Propos. 19. Lib. 3.) erit $\overline{LF}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CL}^2$: ergo (Axiom. 1.) erit $\overline{CL}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 6. Libri 2. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMASECUNDA.

Theorema.

Si recta linea (AB) dividatur bifariam (in C), & non bifariam (in L); erit triangulum (AL×LB) contentum a partibus inæqualibus (AL, LB) una cum quadrato intermediæ (CL) semper æquale quadrato dimidiæ (CA, vel CB). Fig. XV. Tab. X.

Describatur semicirculus AIB, & ad diametrum AB erigatur perpendicularis LI, ducaturque radius CI.

Demonſtratio.

Etenim (Coroll. 1. Propoſ. 20.) eſt $AL \times LB = \overline{LI}^2$; addatur utrinque quadratum intermediæ LC, & (Axiom. 2.) erit $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{LI}^2 + \overline{LC}^2$. Sed (Coroll. 1. Propoſ. 19. Lib. 3.) in triangulo rectangulo CLI eſt $\overline{CI}^2 = \overline{LI}^2 + \overline{LC}^2$; ergo (Axiom. 1.) erit $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{CI}^2$; at eſt $\overline{CI}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2$, quia CI, CB, & CA ſunt radii; conſequenter (Axiom. 1.) erit $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{CB}^2$, vel $= \overline{CA}^2$. Quod erat oſtendendum.
Eſt Propoſitio 5. Libri 2. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMATERTIA.

Theorema.

Fig. 1. Tab. XI. *Si qualibet recta terminata (AB) dividatur utcumque (in C), quadratum totius (AB) æquale erit quadratis partium (AC, CB) una cum duplo rectangulo ab ipſis partibus contento. (erit nempe $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + AC \times CB + AC \times CB$.*

Recta AB bifariam ſecetur in F, & deſcribatur ſemicirculus ARIB; deinde erigatur perpendicularis CI, & ducantur ſubtenſæ IA, IB.

Demonſtratio.

Angulus AIB in ſemicirculo inſcriptus (Propoſ. 10.) eſt rectus; ideo (Coroll. 2. Propoſ. 18. Lib. 3.) erit $\div AC : CI : CB$, conſequenter (Propoſit. 23. Libri 1.) erit rectangulum $AC \times CB = \overline{CI}^2$. Sed in triangulis rectangulis ABI, ACI, & BCI (Coroll. 1. Propoſ. 19. Lib. 3.) eſt $\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2$, & $\overline{AI}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2$, & $\overline{BI}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$; ideoque (Axiom. 1.) erit $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$, & ſubſtituendo pro $\overline{CI}^2$ æquale rectangulum $AC \times CB$, erit $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times CB + AC \times CB + \overline{BC}^2$. Quod erat demonſtrandum.
Eſt Propoſitio 4. Libri 2. Euclidis.

Corollarium.

Si recta AB bifariam ſecta fuerit a puncto C, tunc duo quadrata partium æqualium AC, CB erunt æqualia inter ſe, & duo rectangula ex AC in æqualem rectam CB, erunt ſingula æqualia quadrato unius

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO VICESIMAQUARTA.

Theorema.

Si in aliquo triangulo (ABC) quadratum unius lateris (AC) fuerit aequale quadratis reliquorum laterum (AB , BC) , angulus (ABC) a reliquis lateribus contentus erit rectus. Fig. II. Tab. XI.

Supra latus AB www.libtool.com.cn erigatur perpendicularis $BE = BC$, & ducatur AE.

Demonstratio.

In triangulo rectangulo ABE (Coroll. 1. Propos. 29. Lib. 3.) est $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$; sed est $\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$ (construct.) , ideoque substituendo $\overline{BC}^2$ pro $\overline{BE}^2$, erit $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. At ex hypothesi est $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; ergo (Axiom. 1.) erit $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2$, & consequenter erit $AE = AC$. Itaque duo triangula ABE, ABC habentia latus AB commune , & (construct.) latus $BE = BC$, & (Demonstrat.) latus $AE = AC$, (Proposit. 9. Libri 2.) habebunt angulum $ABE = ABC$; atqui angulus ABE (construct.) est rectus , ideo (Axiom. 1.) etiam angulus ABC erit rectus , & triangulum ABC erit rectangulum . Quod erat ostendendum.

Est Propositio 48. Libri 1. Euclidis.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER QUINTUS.
DEFINITIO PRIMA.

www.lifttool.com.cn

Figuræ *regulares*, seu *polygona regularia* sunt, quæ habent omnes angulos æquales, & omnia latera æqualia: ut quodlibet triangulum æquilaterum, vel quodlibet quadratum est figura regularis.

Corollarium.

Ergo omnia polygona regularia habentia eundem numerum laterum (Definit. 1. Lib. 3.) erunt similia inter se.

Definitio II.

Figura rectilinea circulo inscripta dicitur, vel circulus figuræ circumscriptus vocatur, quando singulorum figuræ angulorum vertices in peripheria circuli reperiuntur.

Corollarium.

Itaque polygonum regulare circulo inscriptum erit, si divisa integra peripheria in partes, seu arcus æquales, ducantur chordæ eosdem arcus subtendentes, quæ (secunda parte Prop. 14. Lib. 4.) erunt æquales inter se; & anguli ab iisdem chordis contenti (secunda parte Propos. 13. Lib. 4.) erunt etiam inter se æquales.

Definitio III.

Figura rectilinea circulo circumscripta, vel circulus figuræ inscriptus vocatur, cum singula figuræ latera circulum tangunt.

Definitio IV.

Centrum polygoni regularis idem est ac centrum circuli eidem polygono circumscripti, vel inscripti.

Perpendicularis vero ex centro ad latus polygoni, seu ad circuli chordas ducta, appellatur *Cathetus*, vel *Radius rectus*.

Definitio V.

Fig. VI. Tab. XI. Superficies, seu area terminata a duabus circumferentiis duorum circulorum concentricorum dicitur *Armilla*, vel *Zona*, vel *Corona*. Excessus vero radii majoris circuli supra radium minoris, appellatur *Latitudo coronæ*, seu *zonæ*.

De-

Definitio VI.

Figuræ *Hisoperimetræ* dicuntur illæ, quæ habent perimetros æquales (Defin. 13. Libri 2.), cum nempe summa laterum unius adæquat summam laterum alterius figuræ.

www.libtool.com.cn

Definitio VII.

Arcus similes circulorum sunt illi, qui habent eandem rationem ad integras peripherias, sive in quibus inscribuntur anguli æquales.

Definitio VIII.

Portiones, vel *segmenta* circuli similia dicuntur illa, quorum arcus sunt similes, scilicet quæ continent angulos æquales. Exempli grat. omnes semicirculi sunt similes, quia omnes anguli in semicirculis inscripti (Propos. 10. Lib. 4.) sunt recti, proindeque æquales; seu quia eandem rationem habet quilibet semicirculus ad suum integrum circulum, quam alius semicirculus ad suum integrum circulum.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Si ex centro (C) circulorum concentricorum (ABEFG, HILMS) ducantur quotcumque radii (CA, CB, CE, CF, CG) secantes utramque peripheriam, & ducantur etiam chordæ (AB, BE, EF, FG, GA; HI, IL, LM, MS, SH), polygona (ABEFG, HILMS) in iisdem circulis inscripta similia erunt. Fig. III. Tab. XI.

Demonstratio.

Duo triangula ACB, HCI circa angulum communem in C habent latera proportionalia AC : CB : : HC : CI, quia (Defin. 15. Lib. 2.) sunt AC = CB, & HC = CI; ideoque (Propos. 9. Libri 3.) similia erunt ipsa triangula; erit igitur angulus CAB = CHI, angulus CBA = CIH, & AB : HI : : BC : CI, vel : : AC : CH. Similiter in triangulis BCE, ICL demonstratur angulus CBE = CIL, CEB = CLI, & BE : IL : : BC : CI, vel : : EC : CL; consequenter (Axiom. 2.) erit totus angulus ABE æqualis angulo HIL, & (Axiom. 1.) AB : HI : : BE : IL. Eodem ratiocinio demonstratur angulus BEF = ILM, angulus EFG = LMS, FGA = MSH &c, & BE : IL : : EF : LM : : FG : MS : : GA : SH : : AB : HI; proindeque (Defin. 1. Lib. 3.) duo polygona ILMSH, FGABE erunt similia. Quod erat demonstrandum.

Co-

Corollarium I.

Si anguli ad centrum, scilicet ACB, BCE, ECF &c. fuerint omnes æquales inter se; tunc arcus oppositi (prima parte Prop. 13. Lib. 4.) erunt æquales inter se; & chordæ eosdem arcus subtendentes (secunda parte Propos. 14. Lib. 4.) erunt etiam æquales inter se: ideoque polygona erunt regularia æqualia, & similia.

Corollarium II.

Quapropter anguli ad centra similium polygonorum regularium erunt æquales inter se.

Corollarium III.

Fig. IV. Tab. XI. Si autem ex centro C ad singula puncta peripheriæ AB EFG ducantur radii CA, CB, CE &c, ipsi continebunt angulos in C æquales inter se, & indefinite parvos. Præterea si ductæ concipiantur rectæ lineæ connectentes extrema eorumdem radiorum, ipsæ lineæ erunt pariter infinite parvæ, & æquales inter se, & cum peripheria coincident, atque constituent polygonum regulare infinitorum laterum. Similiter si ductæ intelligantur rectæ conjungentes puncta, in quibus prædicti radii secant peripheriam circuli HILMS, etiam ipsæ rectæ erunt infinite parvæ, & æquales, & cum peripheria coincident, & constituent aliud polygonum regulare infinitorum laterum; atque (Demonstrat. anteced.) simile alteri polygono. Ergo *circuli sunt polygona regularia similia infinitorum laterum.*

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Fig. V. Tab. XI. *Similes figuræ regulares (ABEFG, LMKRS) in circulis inscriptæ sunt inter se ut quadrata radiorum (AC, LI), vel cathetorum (CX, IZ), vel diametrorum.*

Demonstratio.

In triangulis isoscelibus ACB, LIM anguli ACB, LIM (Coroll. 2. Prop. anteced.) sunt æquales inter se, & (Coroll. 2. Propos. 25. Libri 2.) bifariam secantur a perpendicularibus CX, IZ; ideoque triangula ACX, LIZ (Axiom. 9.) habent angulum ACX = LIZ, & (Axiom. 16.) angulum AXC = LZI, & (Corollar. 7. Prop. 24. Lib. 2.) reliquum angulum XAC = ZLI; ergo (Prop. 9. Lib. 3.) erit AC : LI :: AX : LZ :: CX : IZ. Sed (Coroll. 2. Propos. 25. Lib. 2.) AX est dimidium rectæ AB, & LZ est

est dimidium rectæ LM, proindeque (Propos. 11. Lib. 1.) erit AC : LI : : CX : IZ : : AB : LM; atque (Coroll. 1. Prop. 22. Lib. I.) habebitur $\overline{AC}^2 : \overline{LI}^2 : : \overline{CX}^2 : \overline{IZ}^2 : : \overline{AB}^2 : \overline{LM}^2$. Atqui (Propos. 16. Lib. 3.) polygona similia ABEFG, LMKRS sunt inter se ut quadrata laterum homologorum AB, LM, idest sicuti $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2$; ergo (Axiom. 1.) erunt etiam inter se ut quadrata cathetorum CX, IZ, vel radiorum AC, LI, sive ut quadrata diametrorum, quia (Propos. 11. Lib. 1.) diametrorum ratio æqualis est rationi radiorum: radii namque sunt medietates diametrorum. Ergo similes figuræ regulares &c. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 1. Libri 12. Euclidis.

Corollarium I.

Quoniam (*hypothes.*) est *AB* : *LM* : : BE : MK : : EF : KR, & (*Demonstrat.*) est AB : LM : : AC : LI : : CX : IZ; ideo latera similium polygonorum regularium in circulis inscriptorum erunt inter se in ratione radiorum, sive diametrorum, vel cathetorum.

Corollarium II.

Præterea, quia (hypothes.) habemus AB : LM : : BE : MK : : EF : KR : : FG : RS : : GA : SL, ideo colligendo (Prop. 12. Lib. 1.) erit AB : LM : : AB + BE + EF + FG + GA : LM + MK + KR + RS + SL. Est autem (Demonstrat.) AB : LM : : AC : LI : vel : : CX : IZ; ergo perimetri polygonorum similium in circulis inscriptorum erunt inter se in ratione radiorum, seu diametrorum, vel cathetorum.

Corollarium III.

Quia omnes radii inter se, & omnia latera regularis polygoni in circulo inscripti sunt æqualia inter se, ideo etiam omnes catheti ejusdem polygoni æquales erunt inter se.

Corollarium IV.

Similiter circuli erunt inter se in ratione duplicata, sive ut quadrata radiorum, seu diametrorum, quia (Coroll. 3. Propos. 1.) sunt polygona regularia similia infinitorum laterum.

Est Propositio 2. Libri 12. Euclidis.

Corollarium V.

Peripheriæ vero circulorum, quia (Coroll. 3. Propos. 1.) sunt perimetri polygonorum regularium, ideo (Coroll. 2.) erunt etiam inter se ut diametri, seu radii.

Co-

Corollarium VI.

Quoniam (Demonstratione) circuli inter se, & polygona similia in circulis inscripta etiam inter se sunt ut quadrata radiorum, seu diametrorum; ideo (Axiom. 1.) circuli erunt inter se sicuti polygona similia in ipsis inscripta.

www.libtool.com.cn

Corollarium VII.

Similes arcus circulorum (Definit. 7.) sunt inter se ut integræ peripheriæ, & integræ peripheriæ (anteced. Coroll. 5.) sunt inter se ut radii, vel diametri; ergo (Axiom. 1.) similes arcus circulorum erunt inter se in ratione radiorum, seu diametrorum.

Corollarium VIII.

Quoniam (anteced. Coroll.4.) circuli sunt inter se ut quadrata radiorum, ideo radius duplus describit circulum quadruplum; radius triplus describit circulum, qui novies continebit circulum descriptum a simplici radio &c.

PROPOSITIO TERTIA.

Theorema.

Fig. VI. Tab. XI. *Circulus (AEFM) est ad zonam (BIABLFM) sibi inscriptam sicuti quadratum radii (AC) ejusdem circuli ad rectangulum (AB × BF) contentum a latitudine (AB) zonæ, & a reliqua parte (BF) diametri (AF) ejusdem circuli.*

Demonstratio.

Diameter AF bifariam divisa est in C, & non bifariam in B; ideoque (Propos. 22. Libri 4.) erit $\overline{AC}^2 = AB \times BF + \overline{BC}^2$; auferatur utrinque $\overline{BC}^2$, & (Axiom. 3.) remanebit $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF + \overline{BC}^2 - \overline{BC}^2$, idest (Algebr. n. 14.) $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$.

Est autem circulus AEFM ad circulum BLI : : $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ (Prop. anteced.); & convertendo (Prop. 8. Libri 1.) erit circulus AEFM ad circulum AEFM — BLI : : $\overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$; sed a circulo AEFM dempto circulo BLI, remanet zona, nimirum est AEFM — BLI = AIFMBE, & (Demonstr.) est $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$; ergo erit circulus AEFM ad zonam AIFMBE : : $\overline{AC}^2 : AB \times BF$: scilicet circulus erit ad zonam sibi inscriptam, sicuti quadratum radii ad rectangulum contentum a diametri partibus. Quod erat ostendendum.

Co-

Corollarium I.

Quoniam (Coroll. 4. Prop. 2.) alius quilibet circulus STU est ad circulum AEFM : $\overline{RS}^2$: $\overline{AC}^2$, & est demonstratis est circulus AEFM ad zonam AIFMBE : : $\overline{AC}^2$: AB×BF, ideo ordinando (Propos. 18. Libri 1.) erit circulus STU ad zonam AIFMBE : : $\overline{RS}^2$: AB×BF: nimirum quilibet circulus est ad quamlibet zonam, ut quadratum ex radio ejusdem circuli ad rectangulum comprehensum a latitudine zonæ, & a reliqua parte diametri majoris circuli zonam constituentis. Fig. VII. Tab. XI.

Corollarium II.

Si ex puncto B ad diametrum AF erigatur perpendicularis BZ (Coroll. 1. Propos. 20. Libri 4.), erit Fig. VI. Tab. XI.
AB×BF = $\overline{BZ}^2$; sed (Coroll. anteced.) est circulus STU ad zonam AIFMBE sicuti $\overline{RS}^2$ ad rectangulum AB×BF, & substituendo $\overline{BZ}^2$ pro æquali rectangulo AB×BF, erit
STU : AIFMBE : : $\overline{RS}^2$: : $\overline{BZ}^2$; circulus vero STU (Coroll. 1. Propos. 2.) est ad circulum descriptum a radio BZ, sicuti $\overline{RS}^2$ ad $\overline{BZ}^2$; ergo (Axiom. 1.) erit STU : AIFMBE : : STU ad circulum descriptum a radio BZ; consequenter zona AIFMBE erit æqualis circulo descripto a recta BZ, quæ (Propos. 20, Libri 4.) est media proportionalis inter segmenta AB, BF diametri ejusdem zonæ.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

In dato circulo quadratum inscribere.

Diametro AB ducatur alia diameter perpendicularis EF, & ductis subtensis AE, EB, BF, FA, erit AFBE quæsitum quadratum. Fig. VIII. Tab. XI.

Demonstratio.

Quatuor anguli ad centrum (Axiom. 16.) sunt æquales; ideo (prima parte Propos. 13. Lib. 4.) arcus oppositi æquales erunt, & (secunda parte Prop. 14. Lib. 4.) chordæ AF, FB, BE, EA eosdem arcus subtendentes erunt etiam æquales inter se. Anguli vero AFB, FBE, BEA, EAF (Prop. 10. Lib. 4.) sunt omnes recti, quia in semicirculis inscripti; ergo figura AEBF æquilatera, & rectangula, erit quadratum. Quod erat propositum.

Est Propositio 6. Libri 4. Euclidis.

tur in L, I, G, K, & ducantur subtensæ AL, LE, EI, IG &c, inscriptus erit Octogonus regularis in dato circulo.

Similiter si arcus subtensi a lateribus octogoni bifariam dividantur, & ducantur subtensæ, inscripta erit in circulo figura sexdecim laterum; atque ita procedendo describentur figuræ laterum 32, 64, &c.

PROPOSITIO QUINTA.

Problema.

www.libtool.com.cn

In dato circulo Hexagonum regulare inscribere.

Fig. IX. Tab. XI. Centro quovis peripheriæ puncto F, & radio FC dati circuli describatur alius circulus, vel arcus ACE secans peripheriam dati circuli in A, & E. Deinde ex punctis A, F, E ducantur diametri AM, FL, EB; postea ducantur subtensæ FA, AB, BL, LM, ME, EF, & inscriptum erit quæsitum hexagonum ABLMEF.

Demonstratio.

Triangulum CFE contentum a radiis FC, FE, CE circulorum æqualium est æquilaterum, ideo (Coroll. 3. Prop. 25. Libri 2.) angulus ECF erit tertia pars duorum rectorum; ergo ejus mensura, scilicet arcus EF, erit tertia pars semicircumferentiæ EFAB, quæ (Coroll. Definit. 7. Lib. 4.) est mensura duorum rectorum. Similiter in triangulo æquilatero AFC angulus ACF est tertia pars duorum rectorum, & arcus AF ejus mensura erit alia tertia pars semiperipheriæ EFAB; consequenter reliquus arcus AB erit reliqua tertia pars semicircumferentiæ, & angulus oppositus ACB erit etiam tertia pars duorum rectorum. Itaque (Axiom. 1.) tres anguli ECF, FCA, ACB erunt æquales, quibus etiam æquales sunt anguli ad verticem oppositi BCL, LCM, MCE (Prop. 16. Libri 2.). Cum igitur sex anguli ad centrum C sint æquales; iccirco (prima parte Propos. 13. Lib. 4.) arcus oppositi æquales erunt, & (secunda parte Propos. 14. Lib. 4.) subtensæ AB, BL, LM, ME, EF, FA etiam æquales erunt inter se. Præterea omnes anguli ABL, BLM, LME &c. (secunda parte Prop. 13. Libri 4.) sunt æquales inter se, quia insistunt supra arcus æquales AFEML, MEFAB &c; quilibet enim ex ipsis arcubus continet quatuor sextas partes integræ peripheriæ. Quapropter hexagonum ABLMEF erit æquilaterum, & æquiangulum, scilicet regulare, & in circulo inscriptum. Quod erat docendum, & demonstrandum.

Est Propositio 15. Libri 4. Euclidis.

Co-

Itaque (constructione) latus hexagoni in circulo inscripti est æquale radio ejusdem circuli.

Corollarium II.

Si ducantur subtensæ AE, AL, LE, triangulum inscriptum EAL erit æquilaterum (secunda parte Prop. 14. Lib. 4.)

Quod si omnes arcus subtensi a lateribus hexagoni bifariam dividantur, & ducantur chordæ, inscriptum erit circulo polygonum regulare duodecim laterum.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO SEXTA.

Problema.

Circa datum circulum polygonum circumscribere dato polygono æquiangulum.

Producantur singula dati polygoni latera versus unicam partem, & omnes anguli externi ACE, CBI &c. (Coroll. 10. Prop. 24. Lib. 2.) simul sumpti quatuor rectis æquales erunt. Postea in dato circulo ducatur quilibet radius LH, & (Propos. 10. Lib. 2.) fiat angulus HLM æqualis angulo externo ACE. Item constituatur angulus MLS = FAB (& ita progrediendo, si data figura plures habuerit angulos), erit reliquus angulus CBI æqualis angulo SLH, quia omnes anguli, qui fieri possunt in C simul sumpti (Coroll. 3. Prop. 15. Libri 2.) sunt etiam æquales quatuor rectis. Deinde per puncta H, S, M(Propos. 6. Libri 4.) ducantur tangentes RZ, TZ, RT, quæ utrinque productæ concurrent, ut in Z, T, R; atque erit RTZ quæsita figura. Fig. X. & XI. Tab. XI.

Demonstratio.

In figura quadrilatera ZHLM quatuor ejus anguli interni simul sumpti (Coroll. 8. Prop. 24. Lib. 2.) adæquant quatuor rectos; duo autem anguli LMZ, LHZ (constructione) sunt ambo recti; ideo reliqui duo HLM, HZM simul sumpti, duobus rectis æquales erunt; scilicet (Axiom. 1.) æquales erunt duobus angulis ACE, ACB, qui etiam simul sumpti (Prop. 13. Libri 2.) duos rectos adæquant. Ab æqualibus summis auferantur anguli (construct.) æquales, HLM, ACE, & (Axiom. 3.) relinquetur angulus HZM, sive TZR æqualis angulo ACB. Eodem ratiocinio demonstratur angulus T = CAB, & angulus R = ABC, atque ita de reliquis, si data figura plures habuerit angulos. Itaque figura RTZ est æquiangula figuræ

ABC; ejus vero latera RZ, RT, TZ (Coroll. 1. Prop. 6. Lib. 4.) circulum tangunt in H, S, & M; ergo (Defin. 3.) figura RTZ circulo SHM circumscripta est, & æquiangula figuræ datæ. Quod erat propositum.

In hac Propositione continetur Propositio 3. Libri 4. Euclidis.

Corollarium.

www.libtool.com.cn

Si datum polygonum fuerit regulare (Defin. 1.), tunc etiam omnes anguli T, R, &c polygoni circulo circumscripti (Axiom. 1.) erunt inter se æquales, & ductis rectis LT, LR &c, quia (Corollar. 2. Propos. 18. Lib. 4.) est tangens TS = TM, & radius SL = LM, & latus LT commune duobus triangulis STL, LTM; ideo (Propos. 9. Libri 2.) erit angulus LTS = LTM, scilicet angulus LTS erit dimidium integri anguli *STM*. Eadem ratione angulus LRS est dimidium anguli *HRS*; consequenter (Axiom. 9.) erit angulus LTS = LRS: est autem (Axiom. 8.) angulus *LST* = LSR, ideoque (Coroll. 7. Prop. 24. Lib. 2.) reliquus angulus TLS erit æqualis reliquo SLR. Latus vero LS interceptum inter angulos æquales commune est duobus triangulis STL, SLR; ergo (Prop. 4. Lib. 2.) erit ST = SR. Eodem modo ostenditur TM = MZ. Est autem TS = TM (Coroll. 2. Propos. 18. Libri 4.); icicirco (Axiom. 8.) erit TR = TZ. Similiter demonstratur TR = RZ, & sic de cæteris, si plura fuerint latera. Ergo si datum polygonum fuerit regulare, etiam polygonum circulo circumscriptum erit regulare.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Problema.

Fig. XI. Tab. XI. *In dato triangulo (RTZ) circulum inscribere.*

Duo anguli RTZ, TRZ (Propos. 11. Lib. 2.) bifariam dividantur per rectas TL, RL, quæ alicubi (Corollar. 3. Propos. 24. Lib. 2.) se invicem secabunt, ut in L, ex quo puncto ad latera trianguli (Propos. 14. Libri 2.) demittantur perpendiculares LS, LM, LH. Tandem centro L, intervallo LS, vel LM &c. describatur circulus, qui erit quæsitus.

Demonstratio.

Etenim (constructione) est angulus STL = MTL, & (Axiom. 16.) angulus TSL = TML. Præterea (Corollar. 7. Proposit. 24. Libri 2.) est angulus SLT = TLM, latus vero LT interpositum inter angulos æquales est commune triangulis LST, LMT; ideoque (Propos. 4. Libri 2.) erit LS = LM. Similiter de-

M, S, & circulus SMH erit dato triangulo RTZ inscriptus, quia latera trianguli (construct.) sunt perpendicularia extremitatibus radiorum, & (Coroll. 1. Propos. 6. Libri 4.) circulum tangunt. Quod erat propositum.

Est Propositio 4. Libri 4. Euclidis.

Scholium.

Eodem modo inscribitur circulus in quovis dato polygono regulari.

www.libtool.com.cn

Corollarium I.

Hinc patet cathetos figurarum circulo circumscriptarum, scilicet perpendiculares LH, LS, &c. æquales esse radio circuli inscripti.

Corollarium II.

Præterea evidens est perimetrum cujusvis figuræ circulo circumscriptæ majorem esse perimetro, seu peripheria circuli inscripti. Ex. caus. duæ rectæ TS, TM simul sumptæ sunt majores arcu intercepto SM: unde summa laterum RT, RZ, TZ erit major peripheria circuli SMH.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Area cujuslibet polygoni regularis est æqualis triangulo, cujus basis adæquet perimetrum, & altitudo sit æqualis catheto ejusdem polygoni.

Ex centro C dati poligoni ducantur radii CA, CB, CE, CF, CG, polygonum divisum erit in totidem triangula, quot erunt latera polygoni, quæ triangula erunt omnia æqualia inter se (Proposit. 9. Lib. 2.), quia continentur a radiis æqualibus, & ab æqualibus polygoni regularis lateribus; proindeque integrum polygonum ABEFG toties continebit unum ex ipsis triangulis ACB, quot sunt latera polygoni. Producatur AB versus H, & fiat AH æqualis perimetro polygoni ABEFGA, nimirum AH toties contineat latus unum AB, quot sunt latera polygoni. Ducatur CH, & cathetus CR. Fig. XIII. Tab. XI.

Demonstratio.

Triangulum ACH (secunda parte Propos. 1. Lib. 3.) est ad triangulum ACB, sicuti basis AH ad basim AB; sed (construct.) basis AH

AH totidem vices continet basim AB, quot sunt polygoni latera; ergo etiam triangulum ACH toties continebit triangulum ACB (Corollar. Propos. 4. Lib. 1.), quot sunt latera polygoni, proindeque (Axiom. 13.) erit polygonum ABEFG æquale triangulo ACH, cujus basis AH æqualis est polygoni perimetro, & altitudo CR est cathetus ejusdem polygoni. Quod erat demonstrandum.

www.libtool.com.cn

Corollarium I.

Ergo cujusvis polygoni regularis area obtinebitur multiplicando dimidiam perimetrum in cathetum, vel integram perimetrum in dimidium catheti.

Corollarium II.

Circulus (Corollar. 3. Propos. 1.) est polygonum regulare infinitorum laterum, cujus latera *infinite parva cum peripheria* coincidunt, & catheti, seu perpendiculares ductæ a centro ad ipsa latera infinite

Fig.XII. Tab.XI. parva, sunt ipsimet radii. Itaque area cujusvis circuli *EFB* æqualis est triangulo ABC, cujus basis BC adæquat perimetrum, seu circumferentiam ejusdem circuli, & altitudo sit radius, vel æqualis radio A *B*.

Area vero trianguli ABC (Coroll. 2. Propos. 31. Lib. 2.) est æqualis dimidio producto ex altitudine AB in basim BC; basis vero BC adæquat peripheriam EFB, & AB est radius.

Quapropter area circuli æqualis erit dimidio rectangulo ex radio in peripheriam; sive, quod idem est, adæquat rectangulum ex radio in medietatem peripheriæ, vel rectangulum ex dimidio radio in integram peripheriam. Consequenter rectangulum ex radio in peripheriam erit duplum areæ circuli; & rectangulum ex diametro in peripheriam erit quadruplum areæ ejusdem circuli.

Scholion I.

Si rectangulo ex dimidia peripheria in radium (quod ex demonstratis circuli aream adæquat) inveniatur quadratum æquale (Corollar. 2. Propos. 20. Lib. 4.), quadratum illud (Axiom. 1.) æquale erit circulo dato; proindeque inventa esset circuli quadratura (nimirum quadratum dato circulo æquale), si Geometricam regulam *haberemus* inveniendi longitudinem peripheriæ, idest rectam lineam æqualem peripheriæ. Ratio autem Geometrica inveniendi hanc lineam, in qua comparanda tantam operam, atque studium plurimi excellentissimi Geometræ posuerunt, etiamnum latet: unde est Problema adhuc irresolutum circuli quadraturam invenire.

Mechanice autem invenitur recta peripheriæ æqualis, si circulo filum circumvolvatur, vel circulus ipse juxta regulæ, seu rectæ lineæ directionem revolvatur.

Schotionis ab Archimede, aut ab aliis Clarissimis Geometris inventas.

Si enim Diameter cujusvis circuli dividatur in septem partes æquales, ut Archimedes demonstravit, ejus peripheria continebit fere viginti duas ex iisdem partibus.

Accuratior, & vero proximior est regula tradita a Metio, nimirum posita diametro partium 113, longitudo peripheriæ erit partium 355. circiter. Alias alii proximiores rationes invenerunt, & continuo inveniri possunt, sed numeris multo majoribus contentas, quas brevitatis caussa omittimus, atque in praxi communi plus laboris sunt, quam utilitatis.

Data igitur circuli diametro AB exemp. causs. longitudinis unciarum 28, ut inveniatur peripheria, instituatur hæc proportio 7 : 22 : : 28 ad quartum terminum proportionalem, qui inveniatur per Regulam auream proportionum (Proposit. 3. Libri 1.), & erit $\frac{22 \times 28}{7}$, idest $\frac{616}{7} = 88$, nimirum 88 unciarum erit longitudo peripheriæ ACBM. Fig. XIV. Tab. XI.

Si autem fiat proportio 113 : 355 : : 28 : $\frac{355 \times 28}{113}$, invenietur exactior longitudo peripheriæ unciarum $\frac{9940}{113}$, idest unciarum 87 $\frac{109}{113}$; sed cum fractioni $\frac{109}{113}$ deficiant tantum $\frac{4}{113}$ partes, ut fiat $\frac{113}{113}$, idest 1; ideoque in praxi sumitur peripheriæ longitudo unciarum 88, ut in antecedenti exemplo. Si autem data fuerit periheria unciarum 88, & quæratur diameter, tunc instituatur regula trium 22 : 7 : : 88 : $\frac{7 \times 88}{22}$, & invenietur diameter unciarum $\frac{616}{22}$, idest unciarum 28.

Vel fiat 355 : 113 : : 88 : $\frac{113 \times 88}{355}$, invenietur exactior diameter unciarum $\frac{9944}{355}$, nimirum unciarum, 28 $\frac{4}{355}$, quæ fractio $\frac{4}{355}$ in praxi ordinaria pro nihilo habetur, excedit enim octogesimam octavam partem unius unciæ, sed minor est octogesima nona parte unius unciæ, quod pro nihilo reputatur. Itaque mechanice inventis, ut supra, peripheria & diametro cujusvis circuli, per ea, quæ ante demonstravimus, obtineri potest superficies circuli multiplicando quartam diametri partem, seu medietatem radii in peripheriam, vel medietatem peripheriæ in radium, vel quartam peripheriæ partem in diametrum &c, semper enim habebitur idem productum. Sic in antecedenti exemplo area circuli ACBM erit $\frac{28}{4} \times 88 = 7 \times 88 = 616$; vel erit $\frac{88}{4} \times 28 = 22 \times 28 = 616$; vel erit $\frac{88}{2} \times 14 = 44 \times 14 = 616$ unciis quadratis.

PRO-

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Circulus est omnibus figuris regularibus sibi hisoperimetris major; sive est omnium figurarum sibi hisoperimetrarum capacissima.

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Fig. XV. Tab. XI. Figura circulo circumscripta non potest esse circulo hisoperimetra, quia perimetros figuræ circumscriptæ (Coroll. 2. Propos. 3.) major est peripheria circuli; ideoque figura ABCDE hisoperimetra circulo FLGKM erit minor figura eidem circulo circumscripta. Sed figuræ circulo circumscriptæ cathetus est ipsemet radius circuli (Corollar. 1. Propos. 7.); proindeque cathetus SI figuræ circulo hisoperimetræ erit minor radio SL. At circuli area (Cor. 2. Prop. antec.) obtinetur multiplicando radium SL in medietatem peripheriæ FLGKM, & polygoni regularis area (Corollar. 1. Propos. anteced.) invenitur multiplicando cathetum SI in medietatem perimetri ABCDE; est autem (Demonstratione) radius SL semper major catheto SI; dimidia vero peripheria est æqualis medietati perimetri polygoni, quia (Hypothesi) sunt figuræ hisoperimetræ; ergo rectangulum ex dimidia peripheria in radium majus erit rectangulo ex dimidia perimetro in cathetum: hoc est, circulus major erit polygono sibi hisoperimetro. Quod erat demonstrandum.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SEXTUS.

De Solidorum Doctrina.

www.libtool.com.cn

DEFINITIO PRIMA.

Solidum, sive *corpus*, seu figura *solida* est quantitas illa, quæ trinam extensionem habet, longitudinem nempe, latitudinem, & altitudinem, sive profunditatem; atque ejus termini sunt plures superficies planæ, vel unica superficies curva, sive partim a planis superficiebus, partim a curvis terminatur. Sic Solidi, seu Corporis AL longitudo est AB, vel EM, vel FC: latitudo BC, vel AF: & altitudo, seu profunditas est AE, seu BM, vel CL, &c; atque continetur a sex superficiebus planis, nimirum a sex parallelogrammis ABME, BMLC, EMLI, AEIF, ABCF, IFCL. Fig. XVI. Tab. XI.

Definitio II.

Recta linea AC dicitur *recta superpendicularis* ad planum STMI, dum rectos & æquales angulos efficit cum singulis rectis lineis CB, CE, CF, CL in eodem plano ductis, quæ illam contingunt in puncto C. Fig. I. Tab. XII.

Definitio III.

Si recta linea AB oblique incidat supra planum ST, & ex puncto sublimi A ducta sit AC perpendicularis ad planum ST, & a puncto C ad punctum B ducatur in plano recta BC, angulus ABC appellabitur *inclinatio lineæ* AB ad punctum, sive ad planum ST. Fig. II. Tab. XII.

Definitio IV.

Planum BKRC dicitur *perpendiculare*, vel *rectum* ad planum AMGL, si quælibet recta EI in plano BR perpendiculariter ducta supra rectam BC, (quæ est *communis sectio* planorum) fuerit etiam perpendicularis ad planum subjectum AMGL. Fig. III. Tab. XII.

Definitio V.

Si in utroque plano AMGL, BKRC ex puncto I ad communem sectionem BC erigantur perpendiculares EI, SI, & efficiant angulum EIS obliquum, tunc planum BKRC erit *obliquum* seu *in-* Fig. IV. Tab. XII.

Definitio VI.

Plana parallela dicuntur, quæ in omnem partem producta numquam inter se conveniunt, sed æqualibus intervallis ubique inter se distant.

Definitio VII.

Fig. V. Tab. XII. *Prisma* est figura solida contenta a duobus oppositis planis, seu polygonis ABC, EFL parallelis, æqualibus, atque similibus, & a totidem parallelogrammis ABFE, AELC, BCLF, quot sunt latera oppositorum planorum.

Dicitur *prisma triangulare*, quando opposita plana sunt duo triangula, ut prisma ABCLFE.

Appellatur *prisma quadrangulare*, quando plana opposita sunt figuræ quadrilateræ.

Vocatur *prisma pentagonum*, quando plana opposita sunt duo æqualia pentagona similia; & sic de cæteris.

Definitio VIII.

Fig. XVI. Tab. XI. *Parallelepipedum* est prisma, cujus duo opposita plana sunt parallelogramma; unde continetur a sex parallelogrammis, quorum bina opposita sunt parallela, æqualia, & similia: quale est solidum AL terminatum a sex parallelogrammis AEMB, ABIF, ABCF, IEML, BMLC, IFCL.

Definitio IX.

Fig. VI. Tab. XII. *Cubus* est parallelepipedum contentum a sex quadratis æqualibus: ut figura solida AM, cujus longitudo AL æqualis est latitudini LE, æqualis altitudini LC, & continetur a sex quadratis AC, AF, AE, MB, ML, MI.

Definitio X.

Angulus Solidus dicitur, qui a pluribus quam duabus rectis lineis ad idem punctum concurrentibus, & non in eodem plano jacentibus constituitur; sive est plurium planorum ad idem punctum concursus: scilicet angulus solidus est, qui a pluribus quam duobus angulis planis non in eodem plano existentibus, sed ad unum punctum constitutis Fig. VI. Tab. XII. efficitur. Sic in cubo AM angulus constitutus in C a tribus angulis planis BCL, BCM, LCM, idest constitutus a tribus rectis CB, CL, CM non existentibus in eodem plano, est angulus solidus.

Defi-

Definitio XI.

Si parallelogrammum ABCL ita revolvi intelligatur circa latus unum AL fixum & immobile, donec revertatur ad eandem poſitionem, ex qua diſceſſerat, ſolidum EC ab ipſo parallelogrammo deſcriptum appellatur *Cylindrus*. Fig. VII. Tab. XII.

Circuli æquales MFCI, ERBS, in revolutione parallelogrammi ab oppoſitis æqualibus lateribus LC, AB, deſcripti, dicuntur *Plana oppoſita*, vel *Baſes cylindri*. Superficies curva deſcripta a latere CB in revolutione, vocatur *Superficies cylindrica*. Latus vero fixum LA jungens centra oppoſitorum circulorum dicitur *Axis cylindri*. Quando axis AL eſt perpendicularis ad baſim ERBS, tunc *cylindrus* vocatur *rectus*. Si axis oblique inſiſtit ſupra baſim, dicitur *cylindrus inclinatus*, vel *obliquus*, ut FG. Cum vero cylindrus ſive rectus, ſive obliquus, ſive etiam incurvatus cavus eſt, ſeu perforatus, tunc appellatur *Sipho*, vel *Tubus*, ut AB, vel CEP. Fig. VII. Tab. XII. Fig. VIII. IX, & X. Tab. XII.

Definitio XII.

Pyramis eſt ſolidum contentum a baſi polygona, & a totidem triangulis ad unicum punctum baſi oppoſitum convenientibus, quot ſunt latera ejuſdem baſis. Punctum vero illud, in quo triangula conveniunt, dicitur *Vertex*, vel *Apex* pyramidis.

Si baſis fuerit triangulum (BCD), pyramis vocetur *trilatera*, ut pyramis ABCD. Fig. XI. Tab. XII.

Si baſis fuerit quadrilaterum (CFGI), pyramis vocetur *quadrilatera*, ut BCFGI. Si baſis fuerit pentagonum, *pentagona* dicetur pyramis. Fig. XII. Tab. XII.

Definitio XIII.

Si triangulum rectangulum ALB, cujus angulus rectus eſt in L, ita revolvatur circa latus AL fixum, & immobile, donec ad eandem poſitionem, ex qua diſceſſerat, revertatur, deſcribet figuram ſolidam ACFBE, quæ vocatur *Conus*. Circulus CFBE a catheto mobili LB deſcriptus, dicitur *baſis coni*. Superficies curva in revolutione trianguli deſcripta a latere AB, appellatur *ſuperficies conica*. Punctum ſublime A, *coni vertex*, aut *apex* dicitur. Latus immobile AL, ideſt recta ducta a vertice A ad centrum L baſis, vocatur *axis coni*. Quælibet recta AB, vel AC, vel AE, &c. a vertice coni ad peripheriam baſis BECF ducta, appellatur *latus coni*. Fig. XIII. Tab. XII.

Præterea deſcriptus conus dicitur *rectus*, quia axis L eſt perpendicularis baſi, ut ex ipſa deſcriptione conſtat. Atque cum axis LA eſt æqualis radio LB baſis, conus rectus dicitur *rectangulus*, vel *orthogonius*. Si axis LA major eſt radio LB, tunc conus rectus dici-

 tur

XII. fuerit acutus, vel obtusus, si nempe axis AL non fuerit perpendicularis basi, tunc conus dicatur *obliquus*, ut AFCBM.

Definitio XIV.

Sphæra, vel *Globus* est solidum corpus unica superficie curva contentum, cujus omnia superficiei puncta æqualiter distant a puncto medio, quod *sphæræ centrum* dicitur.

Fig. XV. Tab. XII. Generari autem concipitur sphæra ASBEC ex revolutione semicirculi ASB circa diametrum fixum, & immobilem AL, donec revertatur ad positionem, ex qua discesserat. Superficies curva in revolutione descripta a semiperipheria *ASB*, appellatur *superficies sphærica*. Centrum C semicirculi ASB dicitur *centrum sphæræ*. Omnes rectæ ad superficiem sphæricam ductæ sunt æquales inter se, & dicuntur *radii*, vel *semidiametri sphæræ*.

Diameter AB, circa quam revolvi intelligitur semicirculus, vel sphæra, appellatur *Axis sphæræ*, & ejus extrema puncta A, & B vocantur *Poli* ejusdem sphæræ. Quælibet alia recta utrinque a superficie sphærica terminata, & per centrum sphæræ transiens, dicitur *Diameter* sphæræ.

Circulus, cujus peripheria est in superficie sphærica, & cujus centrum idem est ac centrum sphæræ, appellatur *Circulus Maximus* sphæræ: ut AEBS; atque bifariam dividit sphæram, scilicet in duo *Hemisphæria*.

Itaque Hemisphærium est solidum terminatum a circulo maximo sphæræ, & dimidia superficie sphærica.

Definitio XV.

Polyedrum dicitur solidum quodcumque a pluribus figuris planis rectilineis terminatum.

Definitio XVI.

Polyedrum, vel *solidum regulare* dicitur, cum plana, a quibus continetur, sunt polygona regularia æqualia, & similia, & omnes ejus anguli solidi sunt æquales inter se.

Quinque tantum numerantur solida regularia; nimirum *Tetraedrum*, seu pyramis regularis contenta a quatuor triangulis regularibus, idest æquilateris, & æqualibus.

Cubus, seu *Hexaedrum* contentum a sex quadratis æqualibus.

Octaedrum contentum ab octo triangulis æquilateris, & æqualibus:

Dodecaedrum a duodecim pentagonis regularibus, & æqualibus.

Hicosaedrum contentum a viginti triangulis æquilateris, & æqualibus.

Cætera omnia polyedra irregularia dicuntur.

Defi-

Definitio XVII.

Solida similia dicuntur illa, quæ a planis similibus similiter positis, & numero æqualibus continentur.

Definitio XVIII.

Prismata similia sunt, quorum similes bases sunt inter se ut quadrata altitudinum.
www.libtool.com.cn

Idem intelligatur de similibus pyramidibus, de cylindris similibus, & de similibus conis.

Definitio XIX.

Quoniam circuli cylindrorum, & conorum bases sunt inter se (Coroll. 4. Propos. 2. Libri 5.) ut quadrata radiorum, vel diametrorum, ideo *cylindri similes, & similes coni* sunt, quorum quadrata radiorum, vel diametrorum basium sunt inter se ut quadrata altitudinum.

Cum vero radices quadratorum proportionalium (Coroll. Prop. 22. Libri 1.) sint etiam proportionales, iccirco cylindri, vel coni erunt similes, si radii, vel diametri basium fuerint inter se in ratione altitudinum. Præterea, ut cylindri, vel coni sint similes, necesse est ut ipsorum axes eandem habeant inclinationem ad bases.

Definitio XX.

Altitudo cujusvis prismatis, vel cylindri, est recta linea a plano superiore ad planum basis perpendiculariter ducta. Itaque in cylindro recto axis est altitudo ejusdem cylindri. Altitudo vero cujusvis pyramidis, aut coni, est perpendicularis ad basim ducta. Consequenter in cono recto axis est altitudo ejusdem coni.

Definitio XXI.

Sectio cujusvis corporis, sive solidi, est figura plana, quæ describitur in solido, cum solidum ipsum a transverso plano secatur. Ut si cylindrus AB secetur a plano EG parallelo basi AC, circulus EG, qui in ea sectione describitur in cylindro, vocatur sectio cylindri. Præterea opposita plana, seu bases cylindri, vel prismatis, etiam dicuntur sectiones oppositæ cylindri, vel prismatis. Fig. XVI. Tab. XII.

Definitio XXII.

Cylindrus sphæræ circumscriptus dicitur ille, cujus axis idem est cum sphæræ axe, & cujus diameter basis adæquat diametrum, seu axem sphæræ.

Cylindrus vero hemisphærio circumscriptus ille est, qui basim communem habet cum hemisphærio, & cujus altitudo adæquat radium sphæræ, seu altitudinem hemisphærii.

PRO-

Demonstratio.

Primo omnis recta linea in eodem plano posita est, scilicet fieri nequit ut ejusdem rectæ lineæ pars una jaceat in uno plano, & pars altera sit in alio plano elevato, ut evidens est ex Definitionibus plani, & lineæ rectæ (Defin. 5. & 6. Lib. 2.).

Secundo, omne triangulum totum jacet in eodem plano: triangulum enim (Definit. 18. Lib. 2.) *est figura plana*; ideoque repugnat (Defin. 6. Libri 2.) *unam ejusdem trianguli partem* in uno plano jacere, & alteram in alio plano positam esse.

Tertio, si duæ rectæ se mutuo secent, in eodem plano jacebunt, Fig. XVII. Tab. XII. sive per duas rectas se mutuo secantes AB, AC, semper extendi potest aliquod planum. Nam si earumdem linearum duo quælibet puncta B, & C jungantur recta BC, habebitur triangulum ABC, quod totum (secunda parte) in eodem plano ABC reperietur; ergo etiam ejus latera AB, AC, in eodem plano jacebunt.

Quarto, similiter quælibet alia figura plana semper tota in eodem plano jacet. Quod erat ostendendum

Sunt Propositiones Prima, & Secunda Lib. 11. Euclidis.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Fig. XVIII. Tab. XII. *Communis sectio (BA) duorum planorum (FG, BM) est linea recta.*

Demonstratio.

Etenim si communis sectio BA non esset linea recta, tunc quia puncta B, & A sunt utrique plano communia, in plano BM (Postul. 1) duci posset recta ALB, & in alio plano FG duceretur alia recta AEB: quod repugnat (Definit. 5. Lib. 2. & Coroll.); ergo communis sectio AB est linea recta. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 3. Libri 11. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO TERTIA.

Theorema.

Si recta linea (AC) perpendicularis fuerit ad duas rectas (BE, LF) se mutuo secantes (in C), ipsa recta (AC) erit etiam perpendicularis ad planum (ST), in quo ipsæ rectæ jacent. Fig. XIX. Tab. XII.

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Nam ducta ad punctum sublime A recta LA, si concipiatur triangulum rectangulum ACL revolvi circa cathetum fixum AC, donec redeat ad positionem, ex qua moveri cœperat, alter cathetus CL describet planum circulum LMEFB, ad quem perpendicularis erit recta CA, quia in omni positione linea AC semper est perpendicularis rectæ CL, scilicet omnibus radiis circuli; sed in eodem plano a recta CL descripto etiam reperiuntur rectæ LF, BE, quia (hypoth.) recta AC est ad eas perpendicularis: rectæ vero LF, BE (hypoth.) sunt in plano ST; ergo recta AC (Demonstrat.) perpendicularis ad planum circuli, etiam perpendicularis erit ad planum ST, in quo reperitur circulus. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 4. Libri 11. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc si recta AC perpendicularis fuerit tribus rectis BE, LF, CM, se mutuo secantibus in C, illæ tres rectæ in eodem plano positæ erunt.

Est Propositio 5. Libri 11. Euclidis.

Corollarium II.

Præterea evidens est unicam perpendicularem CA ad planum ST ex puncto C erigi posse.

PROPOSITIO QUARTA.

Theorema.

Lineæ rectæ (AB, CL) ad idem planum (EF) perpendiculares, erunt inter se parallelæ. Fig. XX. Tab. XII.

Demonstratio.

Ducatur in plano recta BC, ad quam (Definit. 2.) perpendiculares erunt ambæ rectæ AB, LC, atque concipiatur recta AB perpendicudicularitet ad planum EF moveri, & fluere supra rectam BC, donec perveniat ad punctum C, ubi coincidet cum recta CL, aliter enim alterutra ipsarum non esset perpendicularis ad planum (Coroll. 2. Prop. anteced.), atque motu suo describet planum ABCL, in quo (construct.) jacent rectæ AB, CL, quas secat recta BC, & efficit angulos internos ABC, LCB, rectos, & æquales; ergo (Propos. 18. Lib. 2.) rectæ AB, CL erunt parallelæ. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 6. Libri 11. Euclidis.

www.libtool.com.cn

Corollarium I.

Ergo rectæ parallelæ AB, CL, & recta BC in eas incidens, in eodem plano jacebunt.

Est Propositio 7. Libri 11. Euclidis.

Corollarium II.

Quod si duæ rectæ AB, CL fuerint parallelæ, & ipsarum una AB fuerit perpendicularis ad planum EF, etiam altera CL erit perpendicularis ad idem planum, quia (Coroll. 2. Prop. anteced.) ex eodem puncto C unica erigi potest perpendicularis ad planum EF, quæ (anteced. Demonstratione) parallela erit perpendiculari AB. Cum autem (hypoth.) CL sit parallela rectæ AB, erit etiam perpendicularis ad planum EF: aliter enim ex eodem puncto C eidem rectæ AB duæ parallelæ ducerentur; quod repugnat (Defin. 11. Lib. 2.)

Est Propositio 8. Libri 11. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Fig. XXI. Tab. XII. *Si eidem rectæ lineæ (EM) parallelæ fuerint aliæ duæ rectæ (AB, CL), sed non in eodem plano cum illa existentes, ipsæ quoque inter se parallelæ erunt.*

In plano AM, in quo sunt duæ parallelæ AB, EM, ducatur EA perpendicularis rectæ EM. Similiter in plano CM, in quo sunt duæ parallelæ EM, CL, ducatur recta EC perpendicularis eidem EM, jungaturque recta AC.

Demonstratio.

Recta EM (construct.) est perpendicularis duabus rectis AE, EC se mutuo secantibus in E, iccirco (Propos. 3.) erit perpendicularis plano AEC, in quo jacent ipsæ rectæ; consequenter tam recta AB, quam recta CL, quæ (hypoth.) sunt parallelæ eidem rectæ EM

(Co-

Corollarium.

Hinc facile apparet communem sectionem ME duorum planorum ABME, EMLC, quæ per lineas parallelas AB, LC extenduntur, parallelam esse utrique parallelarum AB, LC.

PROPOSITIO SEXTA.

www.libtool.com.cn

Theorema.

Si plana parallela (EF, GH) secentur ab alio plano (ABCL), planorum sectiones (AB, CL) erunt etiam parallelæ. Fig. 1. Tab. XIII.

Demonstratio.

Sectiones AB, CL sunt lineæ rectæ (Propos. 2.), & reperiuntur in eodem plano ABCL, ideoque si parallelæ non essent, productæ tandem inter se convenirent: quod fieri non potest, nisi etiam opposita plana EF, GH, in quibus illæ sectiones AB, CL continentur, inter se conveniant: quod repugnat (Defin. 6.), cum eadem plana sint ex hypothesi parallela, Ergo sectiones AB, CL erunt parallelæ. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 16. Lib. 11. Euclidis.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Si duæ rectæ (AB, BE) se invicem secantes in plano (EF) parallelæ fuerint rectis (CL, CG) se mutuo secantibus in plano (GH); duo plana (EF, GH) erunt pariter inter se parallela. Fig. 1. Tab. XIII.

Demonstratio.

Etenim rectæ AB, CL ex hypothesi parallelæ, in eodem plano ABCL reperiuntur; item rectæ parallelæ BE, CG sunt in eodem plano EBCG; proindeque plana EF, GH neque producta juxta directiones linearum AB, CL, neque secundum directiones linearum EB, GC convenire possunt, quia si concurrerent, etiam lineæ parallelæ AB, CL, vel BE, CG convenirent: quod repugnat (Definit. 11. Lib. 2.); ergo necesse est ut plana EF, GH, sint parallela (Defin. 6.). Quod erat ostendendum.

Est Propositio 15. Libri 11. Euclidis.

Si autem recta BC perpendicularis fuerit ad utramque rectam BA, BE se mutuo secantes in B, erit perpendicularis plano EF (Prop. 3.); cumque sit CL parallela rectæ BA, & CG parallela rectæ BE, recta BC erit etiam perpendicularis duabus CB, AB (Prop. 19. Lib. 2.); consequenter (Propos. 3.) etiam perpendicularis erit ad planum GH. Quapropter plana, ad quæ eadem recta linea est perpendicularis, sunt inter se parallela, & e converso.

Est Propositio 14. Libri 11. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema 8.

Quodlibet prisma polygonum dividitur in totidem prismata triangularia æque alta, quot sunt latera basis, demptis duobus.

Demonstratio.

Sit prisma pentagonum AM, & ab æqualibus angulis GBC, SAF oppositarum basium æqualium (Defin. 6.), atque similium ducantur ad oppositos angulos rectæ lineæ BM, BL, AI, AE, bases oppositæ, seu singula pentagona GBCLM, AFEIS divisa erunt in tria triangula, quorum duo GBM, ISA sunt æqualia, & similia, quia (Definit. 6.) habent latera GB = SA, GM = SI, & angulum BGM = ASI; ideoque (Propos. 6. Lib. 2.) erit BM = AI, angulus GMB = AIS: unde ab æqualibus angulis GML, EIS auferendo æquales angulos GMB, AIS, (Axiom. 3.) relinquetur angulus BML = EIA; sed (Demonstrat.) est BM = AI, & (hypoth.) ML = IE, iccirco (Propos. 6. Lib. 2., & Defin. 2. hujus Libri) triangulum BML erit æquale, & simile triangulo IAE. Eadem ratione æqualia, & similia erunt triangula BCL, AEF; atque ita de reliquis, si plura essent. Præterea, quia duæ rectæ AB, IM sunt (hypoth.) parallelæ, & æquales eidem rectæ SG, ideo (Prop. 5. & Axiom. 1.) parallelæ, & æquales erunt; consequenter (Prop. 29. Lib. 2.) æquales rectæ BL, AE erunt parallelæ. Itaque plana AB MI, ABLE sunt parallelogramma; atque secant integrum prisma AM in tres partes ABMISG, ABLEIM, & ABLEFC, quæ (Defin. 7.) sunt tria prismata triangularia, continentur enim (Demonstrat.) ab oppositis planis parallelis, æqualibus, & similibus, & a totidem parallelogrammis, quot sunt latera basis. Eodem modo demonstratur prisma hexagonum dividi in quatuor prismata triangularia; prisma heptagonum in quinque; prisma octangulare in sex prismata triangularia, & ita deinceps. Quod erat ostendendum.

Fig. II. Tab. XIII.

Co

Corollarium.

Itaque si duo plana parallela secentur ab alio plano, planorum sectiones erunt parallelæ: ut sectiones BM, AI factæ a plano AIMB secante duo plana opposita, & parallela BCLMG, AFEIS (Demonstrat.) sunt parallelæ.

Est Propositio 16. Libri 11. Euclidis.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Primo si quodlibet prisma triangulare (AM) secetur a plano transverso (BCL) basi (AFE, vel GRM) parallelo, sectio (BCL) erit similis, & æqualis basi. Fig. IIII. Tab. XIII.

Demonstratio.

Plana parallela BCL, AFE secantur a plano AR, ideo (Prop. 6. & Coroll. Prop. anteced.) sectiones BC, AF erunt parallelæ. Eadem ratione CL est parallela rectæ FE, & BL parallela rectæ AE. Sed (hypothes.) AB est parallela rectæ FC, FC parallela rectæ EL, & EL parallela rectæ AB; ideoque (Prop. 28. Lib. 2.) erit BC = AF, CL = FE, & BL = AE; proindeque (Propos. 9. Lib. 2.) erit angulus BCL = AFE, angulus CBL = EAF, & BLC = AEF: consequenter sectiones AEF, BCL erunt æquales, & similes.

Secundo si quodcumque prisma polygonum secetur a plano basi parallelo, sectio erit pariter æqualis, & similis basi.

Nam prisma polygonum (Prop. anteced.) dividitur in prismata triangularia, & oppositæ sectiones, seu bases, in totidem triangula dividuntur, quorum bina opposita æqualia sunt, & similia, ac similiter posita: unde integra sectio similis, & æqualis erit basi. Quod erat propositum.

Corollarium.

Quoniam circuli (Coroll. 3. Prop. 1. Libri 5.) sunt polygona infinitorum laterum, & bases cylindri (Defin. 11.) sunt circuli æquales, ideo cylindrus considerari potest tanquam prisma polygonum infinitorum laterum; proindeque sectio cylindri parallela basi, erit pariter circulus æqualis, & similis basi.

Theorema.

Omne prisma componi intelligitur ex totidem planis basi æqualibus, & parallelis, quot sunt elementa, seu puncta in altitudine ejusdem prismatis; atque productum ex altitudine in basim erit soliditas ejusdem prismatis.

Demonstratio.

Fig. IV. Tab. XIII. Dato quovis prismate AM, si mente concipiamus planum, seu basim ASEF motu sibi constanter parallelo & elevari usque ad altitudinem, seu ultimam positionem GKRM, & in omni altitudinis AK puncto, sive in omni positione BCLI semper sui vestigium relinquere; evidens est planum AE describere solidum prisma AM: quod de alio quolibet prismate intelligatur. Præterea, quia (Demonstrat.) prisma componitur ex totidem planis basi æqualibus, & similibus, quot sunt elementa, seu puncta in altitudine AK; ideo soliditas cujusvis prismatis erit æqualis producto ex altitudine AK, seu FR in basim ASEF. Quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Quapropter dato prismate parallelepipedo rectangulo, cujus longitudo AF sit unciarum 4, & latitudo FE sit unciarum 2, area rectanguli, seu basis AFES erit 2×4, idest 8 unciarum quadratarum. Altitudo vero prismatis, seu recta AK sit unciarum 27 longitudinis; multiplicetur altitudo 27 in basim inventam 8, productum 216 erit soliditas dati prismatis: nimirum prisma datum continebit 216 uncias cubicas.

Corollarium II.

Cylindrus (Corollar. Propos. 9.) est prisma polygonum infinitorum laterum, ideo etiam de cylindro verificantur ea, quæ de prismate demonstravimus. Itaque si (Coroll. 2. & Schol. Proposit. 8. Libri 5.) inveniatur area circuli, qui est basis cylindri, & multiplicetur per altitudinem ejusdem cylindri, habebitur cylindri soliditas.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Theorema.

Fig. V. Tab. XIII. *Si qualibet pyramis triangularis (ABCM) secetur a plano transverso (EFL) basi (BCM) parallelo, sectio (EFL) erit similis basi.*

Basis

tiis altitudinis (AI) abscissæ pyramidis (AEFIL).

Secentur CR = FE, & CS = FL; & ducantur rectæ ER, SL, RS.

Demonstratio.

Planum ABC secans plana parallela BCM, EFL efficit sectiones BC, EF (Coroll. Prop. 8.) inter se parallelas, & (construct.) sunt æquales; ideoque (Prop. 29. Lib. 2.) rectæ ER, CF erunt parallelæ, & æquales. Similiter æquales rectæ FL, CS demonstrantur parallelæ; unde etiam rectæ FC, LS erunt parallelæ, & æquales; proindeque (Propos. 5. & Axiom. 1.) etiam parallelæ, & æquales erunt inter se rectæ ER, SL: quapropter (Propos. 29. Lib. 2.) recta EL parallela, & æqualis erit rectæ RS. Ergo (Propos. 9. Libri 2.) erit angulus RCS = EFL, angulus CRS = FEL &c, & triangulum EFL (Prop. 7. Libri 3.) simile, & æquale erit triangulo RCS. Sed (Coroll. Propos. 8.) est BM parallela rectæ EL, & ipsi EL demonstravimus parallelam esse rectam RS: igitur (Propos. 5.) erit RS parallela lateri BM. Itaque (Coroll. Propos. 7. Libri 3.) triangulum RCS erit simile triangulo BCM: consequenter (Coroll. Defin. 1. Lib. 3.) etiam triangulum EFL erit simile triangulo BCM; triangulum vero BCM est ad simile triangulum EFL (Prop. 14. Lib. 3.) sicuti $\overline{CM}^2$ ad $\overline{FL}^2$, & in triangulis similibus ACM, AFL (Coroll. Propos. 7. Lib. 3.) est $\overline{CM}^2 : \overline{FL}^2 :: \overline{AM}^2 : \overline{AL}^2$, & in similibus triangulis AZM, AIL, est $\overline{AM}^2 : \overline{AL}^2 :: \overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$. Ergo (Axiom. 1.) erit basis BCM ad parallelam sectionem EFL sicuti $\overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

Idem verificatur de pyramidibus polygonis, quæ dividuntur in totidem pyramides æque altas, quot sunt latera basis, demptis duobus. Sic pyramis quadrilatera BCFGI dividitur in duas pyramides triangulares BCFI, BIGF æque altas, atque quælibet sectio AEML parallela basi similis demonstratur eidem basi CFGI; duo enim triangula IFC, IFG (Demonstr. anteced.) sunt similia triangulis LEA, LEM, & similiter posita: unde integra basis ICFG erit similis integræ sectioni AEML. Fig. VI. Tab. XIII.

Corollarium II.

Itaque in omni pyramide sectiones basi parallelæ a basi usque ad verticem procedendo continuo decrescunt in ratione quadratorum suarum altitudinum, seu distantiarum a vertice. Si ex. gr. tota altitudo Fig. V. Tab. XIII.

tudo

Praeterea quia circulus coni basis (Coroll. 3. Propos. 1. Lib. 5.) est polygonum regulare infinitorum laterum, ideo conus est pyramis polygona infinitorum laterum, atque coni sectiones basi parallelae similes erunt eidem basi: hoc est, erunt etiam circuli, qui a basi usque ad verticem progrediendo continuo decrescunt in ratione quadratorum suarum distantiarum a vertice.

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO DUODECIMA.

Theorema.

Pyramides aeque altae, sive inter plana parallela constitutae, sunt inter se in ratione basium.

Fig. VII. & VIII. Tab. XIII. Pyramides EFHM, ABCDL habeant aequales altitudines EI = AZ, erit pyramis EFHM ad pyramidem ABCDL, sicuti basis FHM ad basim BCDL.

Demonstratio.

Etenim utraque pyramis componi intelligitur ex totidem planis basi similibus, & parallelis decrescentibus in ratione quadrata distantiarum a vertice (Coroll. 2. Propos. anteced.), quot sunt elementa, seu puncta in altitudine EI, seu AZ.

Itaque ex altitudinibus aequalibus EI, AZ sumantur quaelibet partes aequales ES, AR, atque per puncta S, & R extendantur plana GKO, TRVXY basibus FHM, BCDL parallela, sectiones GKO, TVXY (Propos. anteced.) respondentibus basibus similes erunt, atque erit FHM : GKO : : $\overline{EI}^2 : \overline{ES}^2$, sive $\overline{AZ}^2 : \overline{AR}^2$ (quia est EI = AZ, & ES = AR). Similiter (Coroll. 2. Propos. anteced.) erit BCDL : TVXY : : $\overline{AZ}^2 : \overline{AR}^2$; ideoque (Axiom. 1.) erit FHM : GKO : : BCDL : TVXY; & alternando, erit basis FHM ad basim BCDL, sicuti sectio GKO ad sectionem aeque altam TVXY: quod semper verificatur de omnibus sectionibus aeque altis; proindeque colligendo, erit basis FHM ad basim BCDL, sicuti summa omnium sectionum pyramidem EFHM constituentium, ad summam omnium totidem sectionum efficientium pyramidem ABCDL: nimirum erit pyramis ad aeque altam pyramidem, sicuti basis ad basim. Quod erat demonstrandum.

Sunt Propositiones 5, & 6. Libri 12. Euclidis.

Co-

Itaque si pyramides æque altæ habuerint eandem, vel æquales bases, erunt pariter æquales inter se.

Corollarium II.

Coni æque alti sunt etiam inter se ut bases, idest ut circuli bases conorum, quia coni (Coroll. 3. Propos. 11.) sunt pyramides polygonæ infinitorum laterum.

Est Propositio 10. Libri 12. Euclidis.

Præterea si circuli bases conorum fuerint æquales, etiam coni æque alti erunt æquales inter se.

Corollarium III.

Quoniam circuli conorum bases (Coroll. 4. Propos. 2. Libri 5.) sunt inter se ut quadrata radiorum, seu diametrorum, ideo coni æque alti, qui (Demonstrat.) sunt inter se in ratione basium, erunt etiam inter se ut quadrata radiorum, seu diametrorum basium.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

Prisma est triplum pyramidis habentis eandem, vel æqualem basim, & eandem, vel æqualem altitudinem.

Demonstratio.

Primo sit prisma triangulare BCLEAF, in quo ducantur parallelogrammorum diametri BE, AB, AL. Duæ pyramides ABLC, BFEA supra bases (Definit. 7.) æquales BLC, EAF, & eandem altitudinem habentes, sive inter plana parallela BCL, ABF constitutæ (Coroll. 1. Propos. anteced.) erunt æquales inter se. Præterea si pro vertice pyramidis BEAF sumatur A, ejus basis erit EFB, & eadem pyramis ABFE (Corollar. 1. Propos. anteced.) erit æqualis pyramidi ABLE, cujus vertex est A, & basis EBL, quia habent bases EBF, EBL (Proposit. 28. Libri 2.) æquales, & habent eandem altitudinem, quæ est perpendicularis ducta ex vertice communi A ad planum EFBL, in quo reperiuntur bases. Itaque (Axiom. 1.) tres pyramides ABCL, BFEA, AELB erunt inter se æquales, & simul sumptæ (Axiom. 10.) adæquant integrum prisma BCLEFA. Ergo idem prisma erit triplum pyramidis sibi inscriptæ ABCL, sive habentis eandem basim BCL, & eandem altitudinem prismatis. Quod erat ostendendum. Fig. IX. Tab. XIII.

Est Propositio 7. Libri 12. Euclidis.

Se-

www.libtool.com.cn

omnium pyramidum triangularium simul sumptarum: idest prisma polygonum triplum erit sibi inscriptæ pyramidis polygonæ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

Similiter cylindrus est triplus coni sibi inscripti, qui nempe eandem cum cylindro basim, & eandem altitudinem habeat; quia cylyndrus est prisma infinitorum laterum, & conus est pyramis etiam infinitorum laterum.

www.libtool.com.cn

Est Propositio 10. Libri 12. Euclidis.

Corollarium I I.

Quoniam (Propos. 10. & Coroll.) prismatis vel cylindri soliditas obtinetur multiplicando basim in altitudinem; ideo pyramidis, vel coni soliditas æqualis erit producto ex basi in tertiam altitudinis partem, quia (Demonstrat.) pyramis vel conus est tertia pars prismatis, vel cylindri habentis eandem basim, & eandem altitudinem.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

Prismata æque alta sunt inter se in ratione basium.

Demonstratio.

Nam prismata (Propos. anteced.) sunt tripla pyramidum sibi inscriptarum; pyramides vero æque altæ (Propos. 12.) sunt inter se ut bases; ergo etiam prismata pyramidum tripla erunt inter se in ratione basium. Quod erat demonstrandum.

Est Propositio 32. Libri 11. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc si prismata æque alta habuerint eandem, vel æquales bases, erunt pariter æqualia inter se.

Sunt Propositiones 30, & 31 Libri 11. Euclidis.

Corollarium I I.

Hæc omnia etiam de cylindris verificantur, quia sunt prismata infinitorum laterum.

PRO-

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Theorema.

Prismata (AD, GL) habentia æquales bases (ABC = GHI) sunt inter se in ratione altitudinum (AE, GZ). Fig. XII. Tab. XIII.

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Etenim ex majori altitudine AE secetur pars AT æqualis minori GZ, & per punctum T extendatur planum TRM parallelum basi ABC; erit prisma AM æquale prismati GL; sed prisma AD est ad prisma AM sicuti AE ad AT (Coroll. 1. Propos. 12.); ideoque substituendo prisma GL pro æquali prismate AM, & GZ pro æquali AT, erit prisma AT ad prisma GL sicuti AE ad GZ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

Hinc pyramides, quæ sunt subtriplæ prismatum sibi circumscriptorum, si habuerint eandem, vel æquales bases, erunt etiam inter se in ratione altitudinum.

Corollarium II.

Idem intelligatur de cylindris, & de conis; quia cylindri sunt prismata, & coni sunt pyramides infinitorum laterum.

Est Propositio 14. Lib. 12. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Prismata quæcumque (AD, GL) sunt inter se in ratione composita ex rationibus basium (ABC, GHI), & altitudinum (AE, GZ). Fig. XII. Tab. XIII.

Ex prismate AD abscindatur, ut in antecedenti Propositione, prisma AM æque altum cum prismate GL.

Demonstratio.

Trium prismatum AD, AM, GL, primum AD est ad secundum AM, sicuti AE : AT, sive substituendo GZ pro æquali AT, est AD : AM :: AE : GZ; secundum vero AM (Propos. 14.) est ad tertium GL sicuti basis ABC ad basim GHI; ergo (Propos. 16. Lib. 3.)

Lib. 3.) erit primum AD ad tertium GL in ratione composita ex rationibus AE : GZ primi ad secundum, & ABC : GHI secundi ad tertium; ergo erit prisma AD ad prisma GL sicuti ABC × AE ad GHI × GZ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

Si prismata AD, GL fuerint similia, hoc est terminata a planis similibus, similiterque positis, & numero æqualibus, si nempe fuerit

AE : GZ : : AC : GI : : AB : GH : : BC : HI &c, & anguli respondentes fuerint æquales EAB = ZGH, EAC = ZGI, CAB = IGH &c, tunc (Propos. 14, & 16 Lib. 3.) erit basis ABC ad basim GHI sicuti $\overline{AB}^2$ ad $\overline{GH}^2$, vel sicuti $\overline{AE}^2$ ad $\overline{GZ}^2$ &c. Sed (Demonstrat. anteced.) est

AD : GL : : ABC × AE : GHI × GZ: unde substituendo rationem $\overline{AE}^2$: $\overline{GZ}^2$ pro æquali ratione ABC : GHI, erit

AD : GL : : $\overline{AE}^2$ × AE : $\overline{GZ}^2$ × GZ, scilicet AD : GL : : $\overline{AE}^3$, $\overline{GZ}^3$; atqui (hypoth.) est AE : GZ : : AC : GI : : AB : GH &c; ideoque erit etiam $\overline{AE}^3$: $\overline{GZ}^3$: : $\overline{AC}^3$: $\overline{GI}^3$: : $\overline{AB}^3$: $\overline{GH}^3$ &c; ergo (Axiom. 1.) erit

AD : GL : : $\overline{AC}^3$: $\overline{GI}^3$: : $\overline{AB}^3$: $\overline{GH}^3$ &c; nimirum prismata similia erunt inter se ut cubi laterum homologorum, vel altitudinum.

Itaque si latera unius prismatis fuerint quadrupla laterum alterius, similisque prismatis, tunc primum erit sexaginta quatuor vices majus secundo prismate.

In hoc Corollario continetur Propositio 33. Lib. 11. Euclidis.

Corollarium II.

Hæc omnia verificantur de similibus pyramidibus, quæ (Prop. 13.) sunt subtriplæ prismatum sibi circumscriptorum.

Corollarium III.

Idem verificatur de cylindris similibus, & de similibus conis, quia cylindri sunt prismata, & coni sunt pyramides infinitorum laterum: ideoque cylindri, vel coni erunt inter se ut cubi altitudinum, vel sicuti cubi diametrorum, seu radiorum basium, quia (Defin. 18.) habent diametros, seu radios basium in ratione altitudinum.

PRO-

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

Prismata, quæ habent bases in reciproca ratione altitudinum, sunt æqualia. E converso prismata æqualia habent bases in reciproca ratione altitudinum.

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Nam si est $ABC : GHI :: AE : GZ$, erit Fig. XII. Tab. XIII.
$ABC \times AE = GHI \times GZ$, scilicet prisma AD æquale prismati GL.

Vicissim si fuerit $ABC \times AE = GHI \times GZ$, dissolvendo erit $ABC : GHI :: AE : GZ$; ideſt prismata æqualia habent bases in reciproca ratione altitudinum. Quod erat ostendendum.

Corollarium.

Eadem omnia verificantur de pyramidibus, de cylindris, & de conis, ut ex antecedentibus Demonstrationibus patet.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Sphæra duas tertias partes circumscripti cylindri adæquat.

Sit quadratum ABCL, in quo ducatur diameter AC, & centro A, radio AL, vel AB, describatur arcus LFB, qui (Definit. 7. Lib. 4.) erit quarta peripheriæ pars, & triangulum mixtilineum ALB (Definit. 8. Libri 4.) erit circuli quadrans. Ducatur radius AF, & per punctum F recta ST parallela lateri AB. Si concipiatur quadratum ABCL cum triangulo ALC, & cum circuli quadrante ALB ita revolvi circa latus immobile AL, donec redeat ad positionem, ex qua discesserat; in ea revolutione quadratum ABCL (Defin. 11.) describet cylindrum; triangulum rectangulum ALC (Definit. 13.) describet conum; & quadrans ALB (Definit. 14.) hemisphærium describet; atque cylindrus (Coroll. Propos. 10.) componetur ex totidem circulis æqualibus, habentibus radios æquales AB, ST, LC &c, quot sunt elementa, seu puncta in perpendiculari AL; conus etiam construitur ab æquali numero circulorum decrescentium (Corollar. 3. Propos. 11.) ACL usque ad punctum A, quorum radii sunt rectæ LC, SR &c, scilicet elementa trianguli ALC. Similiter hemisphærium componitur ex totidem circulis habentibus radios AB, SF, &c. decrescentes a puncto A usque ad L. Consequenter tria descripta corpora ab æquali numero elementorum, idest planorum circulorum componuntur.

Demonstratio.

Sit jam ST radius unius ex æqualibus circulis constituentibus cylindrum; erit SF radius respondentis circuli in hemisphærio, & SR erit radius respondentis circuli in cono. Quoniam vero circuli (Coroll. 4. Propos. 2. Libri 5.) sunt inter se ut quadrata radiorum, ideo circuli descripti a radio ST in cylindro, a radio SF in hemisphærio, & a radio SR in cono, erunt inter se ut quadrata radiorum ST, SF, SR; sed (construct.) est $ST = AB$, & $AB = AF$, iccirco (Axiom. 1.) erit $ST = AF$, & (Coroll. Propos. 7. Lib. 3.) est $AL : LC :: AS : SR$, atque (hypoth.) est $AL = LC$, ideoque erit etiam $AS = SR$: unde pro lineis ST, SR, substituantur æquales rectæ AF, AS, & circuli descripti a radiis ST, SF, SR, qui (Demonstr.) sunt inter se ut quadrata eorumdem radiorum, erunt etiam inter se sicuti quadrata rectarum AF, SF, AS; atqui (Coroll. 1. Propos. 18. Libri 3.) est $\overline{AF}^2 = \overline{SF}^2 + \overline{AS}^2$; ergo etiam circulus a radio ST in cylindro descriptus æqualis erit duobus circulis a radiis SF in hemisphærio, & SR in cono descriptis.

Itaque si ex circulo a radio ST descripto in cylindro auferatur circulus a radio SR in cono descriptus, remanebit circulus a radio SF in hemisphærio descriptus.

Idem verificatur de singulis respondentibus circulis supradicta solida constituentibus. Ergo si a soliditate cylindri subtrahatur soliditas coni, relinquetur soliditas hemisphærii. Est autem conus (Coroll. 1. Propos. 13.) tertia pars cylindri æque alti, & ejusdem basis, ideoque hemisphærium æquale erit reliquis duabus tertiis partibus ejusdem cylindri sibi circumscripti. Quod de hemisphærio demonstravimus, idem intelligatur de ejus duplo, sive de integra sphæra, cujus cylindrus circumscriptus etiam duplus est cylindri hemisphærio circumscripti. Itaque sphæræ soliditas æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti. Quod erat ostendendum.

Est Archimedis Propositio 32. Libri de Sphæra, & Cylindro.

Corollarium I.

Ergo Sphæra est ad cylindrum sibi circumscriptum sicuti $2 : 3$; & invertendo, cylindrus est ad sphæram sibi inscriptam, sicuti $3 : 2$.

Corollarium II.

Quapropter (Coroll. 2. Propos. 10.) inventa soliditate cylindri circumscripti, si ex ejusdem cylindri soliditate dematur tertia pars, remanebit sphæræ soliditas.

PRO-

www.libtool.com.cn

PROPOSITIO DECIMANONA.

Theorema.

Sphæræ sunt inter se in ratione triplicata, idest ut cubi diametrorum.

www.libtool.com.cn

Demonstratio.

Omnes cylindri sphæris circumscripti (Definit. 22.) habent diametros basium æquales altitudinibus; ideoque (Definit. 18.) sunt similes. Cylindri autem similes (Coroll. 3. Prop. 16.) sunt inter se ut cubi diametrorum basium. Præterea, quia (Propos. antec.) cylindrus semper est ad sphæram sibi inscriptam sicuti 3 : 2, ideo (Axiom. 1.) quilibet cylindrus est ad sphæram sibi inscriptam, sicuti alius cylindrus ad sphæram sibi inscriptam; & alternando, erit cylindrus ad alium similem cylindrum, sicuti sphæra in primo inscripta ad sphæram inscriptam in altero. Cylindri vero sunt inter se ut cubi diametrorum basium; ergo (Axiom. 1.) etiam sphæræ erunt inter se ut cubi suarum diametrorum, quæ (Definit. 22.) diametros basium eorumdem cylindrorum adæquant. Sive erunt inter se ut cubi radiorum, cum radiorum, & diametrorum ratio eadem sit. Ergo sphæræ sunt inter se in ratione triplicata &c. Quod erat ostendendum.

Est Propositio 18. Libri 12. Euclidis

Corollarium.

Ergo sphæra, cujus diameter sit 2, ad sphæram, cujus diameter sit 6, erit ut 8 : 216; sed est 8 : 216 = 1 : 27, ideo diameter tripla, seu, quod idem est, radius triplus producit sphæram viginti septem vices majorem. Similiter radius quintuplus describit sphæram centum viginti quinque vices majorem sphæra descripta a radio simplo. Fig. XIV. Tab. XIII.

Elementorum Geometriæ Finis.

Propositionum Omnium, quæ in hisce Matheseos Elementis occurrunt, atque demonstrantur.

In Arithmetices Librum I.

In Arithmetices Librum II.

In Algebræ Librum I.

In Algebræ Librum II.

www.libtool.com.cn

In Algebræ Librum III.

In Geometriæ Librum I,

Qui est de quantitatum rationibus, & proportionibus.

ad

www.libtool.com.cn

In Geometriæ Librum II.

sequen-

www.libtool.com.cn

www.1fbtool.com.cn

www.libtool.com.cn

In Geometriæ Librum III.

lum

www.libtool.com.cn

In Geometriæ Librum IV.

IX.

In

In Geometriæ Librum V.

In Geometriæ Librum VI,

Qui est de Solidorum Doctrina.

www.libtool.com.cn

FINIS.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

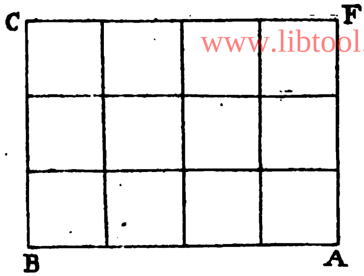
www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

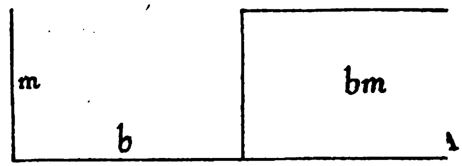
TAVOLA III.

www.libtool.com.cn

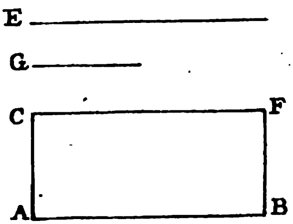
1.



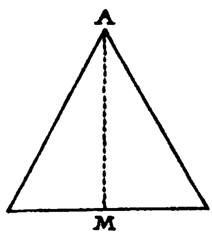
2.



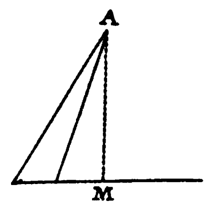
5.



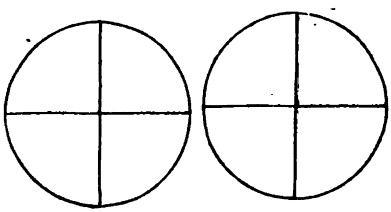
6.



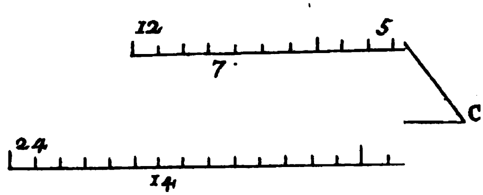
6.



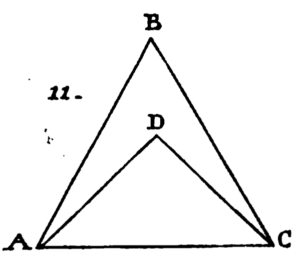
7.



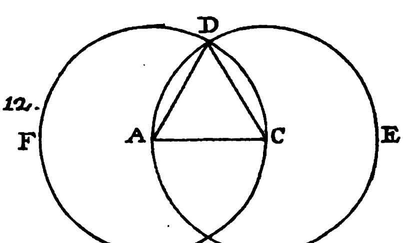
8.



11.



12.



13.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

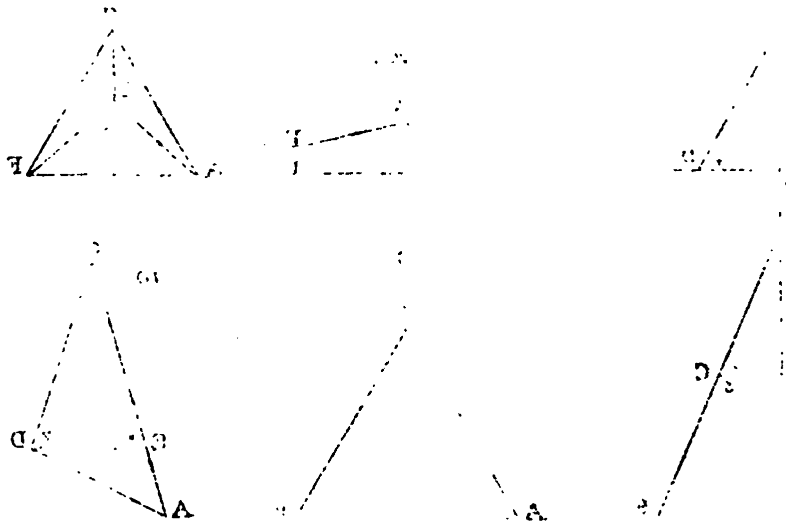
www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn



www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

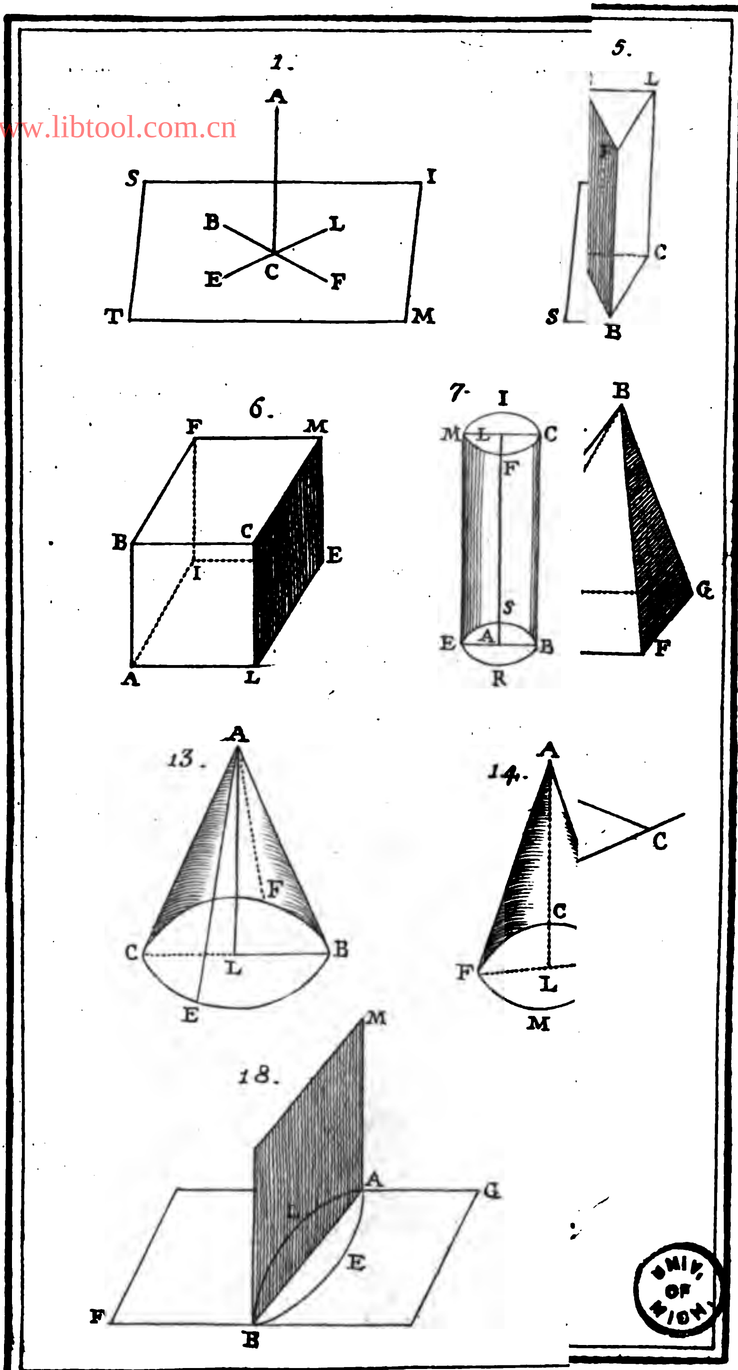
www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

TAVOLA XII.



www.libtool.com.cn

UNIV. OF MICH.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn