0,70 1.20

E… …EN.

Nr. 2. …rkehrten …iehungs- …ngerin.

» 5. … Wan-

» 14. …Functio- (81 S.)

» 17. …) Übers. …lasius.

» 19. …Laplace …irichlet

» 46. …Abhand- …97) und …el. Mit

» 47. …e (1762, 1770), Legendre (1786) und Jacobi (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 54. **J. H. Lambert,** Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausgeg. von A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) ℳ 1.60.

» 55. **Lagrange** u. **Gauss,** Abhandlungen über Kartenprojection. (1779 und 1822.) Herausgeg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

Nr. 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:
$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot\cdot$$
(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. **J. C. G. Jacobi,** Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner,** Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch. auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

Nr. 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) und **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen (1847). Herausgegeben von Heinrich Siebmann. (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie (1798). Übersetzt und herausgegeben von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren in dem Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems. über quadratische Reste. Herausgegeben von Eugen Netto. (111 S.) ℳ 1.80.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen (1826). Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.—.

» 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier,** Die Auflösung der bestimmten Gleichungen. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) ℳ 4.—.

» 129. **Johann Friedrich Pfaff,** Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren (1815). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. (84 S.) ℳ 1.40.

» 130. **N. J. Lobatschefskij,** Pangeometrie (Kasan 1856). Übersetzt und herausgegeben von Heinrich Liebmann. Mit 30 Figuren im Text. (96 S.) ℳ 1.70.

» 133. **J. H. Lambert's** Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen. Insigniores orbitae Cometarum proprietates (1761). Observations sur l'Orbite apparente des Comètes (1771). Auszüge aus den »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« (1772). Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von J. Bauschinger. Mit 35 Figuren im Text. (149 S.) ℳ 2.40.

» 143. **C. Sturm,** Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen (1835). Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Alfred Loewy. (66 S.) ℳ 1.20.

2·9

Alexander Ziwet

Abhandlung

über die

Auflösung der numerischen Gleichungen

(1835)

Von

Charles

C. Sturm

Aus dem Französischen übersetzt

und herausgegeben

von

Alfred Loewy

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1904

[273]

Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen.

Von

C. Sturm.

Aus den Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. royale des sciences de l'Institut de France, t. 6, Paris. 1835.)

Die Auflösung der numerischen Gleichungen ist eine Frage, die die Mathematiker seit dem Beginn der Algebra bis auf unsere Tage unaufhörlich beschäftigt hat. Wir wollen nicht alle Prozesse, die zur Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen in Vorschlag gebracht wurden, aufzählen. *Lagrange*[1]) hat zuerst zu diesem Zwecke eine strenge Methode angegeben; sie besteht darin, an die Stelle der Unbekannten eine Reihe von Zahlen in die Gleichung einzusetzen. Die einzusetzenden Zahlen wachsen von der oberen Grenze für die negativen Wurzeln bis zu derjenigen der positiven Wurzeln und sind so gewählt, daß zwischen zwei aufeinanderfolgende eingesetzte Zahlen nur eine einzige Wurzel der Gleichung fallen kann. Die Vorzeichenwechsel, die man in der Reihe der Resultate erhält, geben diejenigen Zahlen an, zwischen denen wirklich eine Wurzel liegt. Daß zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgende eingesetzte Zahlen nur höchstens eine Wurzel fallen kann, das erreicht man, indem man Zahlen einer arithmetischen Progression einsetzt, bei der die Differenz zweier Glieder kleiner als die kleinste zwischen den reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung mögliche Differenz ist. Zur Bestimmung einer solchen Größe gelangt man auf folgende Art: Man bildet eine Hilfsgleichung [274], deren Unbekannte die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu Werten hat, und sucht eine untere Grenze für die positiven Wurzeln dieser neuen Gleichung. Die Quadratwurzel aus dieser Größe oder jede kleinere Größe kann als Intervall für die sukzessiven

Substitutionen, die bei der Gleichung auszuführen sind, verwandt werden.

Vom rein theoretischen Standpunkte betrachtet, läßt diese Methode in bezug auf Strenge nichts zu wünschen übrig. Bei der Anwendung erweist sich dieses Verfahren aber wegen der Länge der Rechnung, die zur Bildung der Gleichung für die Quadrate der Wurzeldifferenzen nötig ist und infolge der vielfachen Substitutionen, die man möglicherweise auszuführen hat, als fast unausführbar. Obgleich *Lagrange* auch einige Vereinfachungen angegeben hat, so sind die erforderlichen Rechnungen doch immer sehr mühsam; daher hat man auch andere Lösungen versucht. *Fourier*[2]) hat ein Theorem, das die *Descartes*sche Zeichenregel als Korollar enthält, entdeckt. Vermöge dieses Theorems kann man nachweisen, daß eine Gleichung zwischen zwei gegebenen Grenzen keine Wurzel hat, oder daß die Anzahl der zwischen diesen Grenzen gelegenen Wurzeln eine leicht bestimmbare Zahl sicherlich nicht überschreitet. Da dieses Theorem aber nicht die genaue Anzahl Wurzeln angibt, so kann die Anwendung dieser Methode dazu führen, Wurzeln in Intervallen, in denen sie nicht existieren, zu suchen; um diese Unsicherheit zu beseitigen, sind neue Regeln erforderlich.

Das Theorem, dessen Darlegung Zweck dieser Abhandlung ist, hat mit dem *Fourier*schen viel Analogie. Es liefert ein sicheres Mittel, die Anzahl reeller Wurzeln, die eine Gleichung zwischen irgend zwei Zahlen besitzt, zu finden. Diese Kenntnis genügt zur wirklichen Bestimmung aller reellen Wurzeln, ohne daß man auf die Gleichung der Differenzenquadrate zurückzugehen nötig hat.

[275] 1.

Es sei:

$$Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0$$

eine numerische Gleichung beliebigen Grades, deren sämtliche reelle Wurzeln man bestimmen will.

Zuerst führt man an der Gleichung das Verfahren aus, durch das man entscheiden kann, ob sie gleiche Wurzeln hat; dabei geht man auf die von uns anzugebende Art vor: Wir bezeichnen die ganze Funktion $Nx^m + Px^{m-1} + \cdots$ mit V und die Abgeleitete, die man erhält, wenn man jedes Glied von V mit dem Exponenten des x in diesem Gliede multipliziert und den Exponenten um eine Einheit erniedrigt, mit V_1. Dann muß man den größten gemeinsamen Divisor der zwei Polynome V und V_1 suchen. Zunächst dividiert man V durch V_1, und, wenn man zu einem Reste von niedrigerem Grade als dem des Divisors V_1 gelangt ist, so ändert man die Vorzeichen aller Glieder des Restes (die Vorzeichen $+$ in $-$ und $-$ in $+$). Mit V_2 bezeichnen wir den Ausdruck, in den der Rest nach der Vorzeichenänderung übergegangen ist. Auf dieselbe Art dividiert man V_1 durch V_2. Man findet, nachdem man die Vorzeichen des Restes noch geändert hat, ein Polynom V_3 von niedrigerem Grade als dem von V_2. Die Division von V_2 durch V_3 führt ebenso zu einer Funktion V_4, die der Rest der Division nach der Vorzeichenänderung ist. Die Reihe der Divisionen ist fortzusetzen, und dabei ist immer darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Vorzeichen der Glieder jedes Restes zu ändern sind. Diese Vorzeichenänderung, die zum Zweck der Auffindung des größten gemeinsamen Divisors der Polynome V und V_1 unnötig wäre, ist für die Theorie, die wir darlegen, durchaus notwendig. Da die Grade der aufeinanderfolgenden Reste abnehmen, so gelangt man schließlich entweder zu einem numerischen Rest, der unabhängig [276] von x und von Null verschieden ist, oder zu einem Reste, der Funktion von x und Divisor des voraufgehenden Restes ist. Diese zwei Fälle untersuchen wir getrennt.

2.

Zuerst nehmen wir an, daß man nach einer gewissen Anzahl von Divisionen zu einem numerischen Rest, der mit V_r bezeichnet sei, gelangt.

In diesem Fall hat die Gleichung $V=0$ keine gleichen Wurzeln; denn die Polynome V und V_1 haben keinen gemeinsamen Divisor, der Funktion von x ist. Bezeichnet man die bei den aufeinanderfolgenden Divisionen erhaltenen Quotienten, die $-V_2$, $-V_3$, …, $-V_r$ als Reste ergeben, mit Q_1, Q_2, …, Q_{r-1}, so hat man die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} V &= V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 &= V_2 Q_2 - V_3, \\ V_2 &= V_3 Q_3 - V_4, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ V_{r-2} &= V_{r-1} Q_{r-1} - V_r. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Betrachtung des Funktionensystems $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ liefert ein sicheres und leichtes Mittel, zu erkennen, wieviel reelle Wurzeln die Gleichung $V = 0$ zwischen zwei beliebig großen Zahlen A und B beliebigen Vorzeichens besitzt; B soll dabei größer als A sein. Die fragliche Regel, die den gewünschten Aufschluß ergibt, lautet: Man setze die Zahl A in alle Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots, V_{r-1}, V_r$ an die Stelle von x ein, schreibe die Vorzeichen der Resultate der Reihe nach in eine Zeile und zähle die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die sich in dieser Vorzeichenreihe finden. [277] Ebenso schreibe man die Reihe von Vorzeichen hin, welche die gleichen Funktionen durch Einsetzen der anderen Zahl B annehmen, und zähle die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die sich in dieser zweiten Reihe finden. Soviel Vorzeichenwechsel, wie die zweite Reihe weniger als die erste hat, soviel reelle Wurzeln hat die Gleichung $V = 0$ zwischen den zwei Zahlen A und B. Hat die zweite Reihe ebensoviel Vorzeichenwechsel wie die erste, so hat die Gleichung $V = 0$ zwischen A und B keine Wurzel. Da B größer als A sein soll, so kann die zweite Reihe nicht mehr Vorzeichenwechsel als die erste Reihe besitzen.

3.

Wir beweisen dieses Theorem dadurch, daß wir prüfen, wie sich für irgend einen Wert von x die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die die Vorzeichen der Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ ergeben, ändern kann, wenn sich x ändert.

Wie auch immer die Vorzeichen der angegebenen Funktionen für einen bestimmten Wert von x sein mögen, so kann nur dann in der Vorzeichenreihe, wenn x allmählich über den ursprünglichen Wert hinaus wächst, eine Änderung eintreten, wenn eine der Funktionen ihr Vorzeichen ändert und folglich auch Null wird. Daher sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob diejenige Funktion, die verschwindet, die erste V oder irgend eine der anderen zwischen V und V_r gelegenen Funktionen $V_1, V_2, \ldots, V_{r-1}$ ist. Die letzte Funktion kann, da sie eine positive oder negative Zahl ist, ihr Vorzeichen nicht ändern.

4.

Wir untersuchen zunächst, wie sich die Vorzeichenreihe ändert, wenn x kontinuierlich wächst [278] und dabei einen Wert erreicht und überschreitet, der die erste Funktion V annulliert. Diesen Wert bezeichnen wir mit c. Für $x = c$ kann die Funktion V_1, die Abgeleitete von V, nicht mit V gleichzeitig Null werden; denn die Gleichung $V = 0$ hat nach Voraussetzung keine gleichen Wurzeln. Übrigens ersieht man, ohne sich auf die Theorie der gleichen Wurzeln zu berufen, aus den Gleichungen (1), dass, wenn für $x = c$ die Funktionen V und V_1 gleichzeitig Null würden, auch alle anderen Funktionen V_2, V_3, ... und endlich V_r gleichzeitig ebenfalls Null werden würden. Nach Voraussetzung ist aber im Gegensatz hierzu V_r eine von Null verschiedene Zahl. Daher hat V_1 für $x = c$ einen von Null verschiedenen, positiven oder negativen Wert.

Betrachten wir sehr wenig von c verschiedene Werte des x. Bezeichnet man mit u eine beliebig klein gewählte positive Größe und setzt der Reihe nach $x = c - u$ und $x = c + u$, so nimmt die Funktion V_1 für diese zwei Werte des x das gleiche Vorzeichen wie für $x = c$ an; denn man kann u genügend klein wählen, daß, während x von dem Werte $c - u$ bis zu $c + u$ wächst, V_1 nicht verschwindet und sein Vorzeichen nicht ändert.

Man muß jetzt das Vorzeichen von V für $x = c + u$ bestimmen. Wir bezeichnen für einen Augenblick V mit $f(x)$, V_1 mit $f'(x)$, und die anderen abgeleiteten Funktionen des V in üblicher Weise mit $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$. Setzt man $x = c + u$, so wird V gleich $f(c + u)$. Dann hat man:

$$f(c+u) = f(c) + f'(c)\,u + \frac{f''(c)}{1\cdot 2}u^2 + \frac{f'''(c)}{1\cdot 2\cdot 3}u^3 + \cdots,$$

oder, wenn man beachtet, daß $f(c)$ Null ist, und $f'(c)$ nicht verschwindet:

$$f(c+u) = u\left[f'(c) + \frac{f''(c)}{1\cdot 2}u + \frac{f'''(c)}{1\cdot 2\cdot 3}u^2 + \cdots\right].$$

[279] Aus diesem Ausdruck für $f(c + u)$ ersieht man, daß, wenn man dem u sehr kleine positive Werte erteilt, $f(c + u)$ das gleiche Vorzeichen wie $f'(c)$ und folglich auch wie $f'(c + u)$ besitzt; denn $f'(c + u)$ hat dasselbe Vorzeichen wie $f'(c)$. Für

$x = c + u$ hat daher die Funktion V dasselbe Vorzeichen wie V_1.

Ändert man in der voraufgehenden Formel u in $-u$ ab, so hat man:

$$f(c-u) = -u\left[f'(c) - \frac{f''(c)}{1\cdot 2}u + \cdots\right].$$

Hieraus ersieht man, daß $f(c-u)$ entgegengesetztes Vorzeichen wie $f'(c)$ hat; folglich ist für $x = c - u$ das Vorzeichen von V entgegengesetzt zu demjenigen von V_1.

Ist daher das Vorzeichen von $f'(x)$ oder V_1 für $x = c: +$, so wird das Vorzeichen von V für $x = c + u: +$ und für $x = c - u: -$. Ist hingegen das Vorzeichen von V_1 für $x = c: -$, so wird das Vorzeichen von V für $x = c + u: -$, und für $x = c - u$ wird es $+$. Überdies hat V_1 für $x = c + u$ und für $x = c - u$ dasselbe Vorzeichen wie für $x = c$.

Die gewonnenen Resultate werden durch folgendes Schema wiedergegeben:

$$\begin{array}{lccccc} & V & V_1 & & V & V_1 \\ \text{für}\begin{cases} x = c - u \\ x = c \\ x = c + u \end{cases} & \begin{array}{c} - \\ 0 \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array} & \text{oder} & \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} & \begin{array}{c} - \\ - \\ - \end{array} \end{array}.$$

Verschwindet also die Funktion V, so bildet, ehe x den Wert c, der V annulliert, erreicht, das Vorzeichen von V mit dem von V_1 einen Vorzeichenwechsel; dieser Zeichenwechsel ändert sich, nachdem x den fraglichen Wert überschritten hat, in eine Vorzeichenfolge.

Jede der anderen Funktionen $V_2, V_3, \ldots$ wird, vorausgesetzt, daß keine für $x = c$ gleichzeitig mit V verschwindet, ebenso wie V_1 sowohl für $x = c + u$ als auch für $x = c - u$ dasselbe Vorzeichen wie für $x = c$ annehmen.

[**280**] Die Vorzeichenreihe der Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ verliert daher, wenn x wachsend einen Wert c, der die erste Funktion V, aber keine der anderen Funktionen $V_1, V_2, \ldots$ annulliert, überschreitet, einen Vorzeichenwechsel. Man muß noch untersuchen, was eintritt, wenn eine dieser Funktionen verschwindet.

5.

V_n sei eine zwischen V und V_r gelegene Funktion, die für $x = b$ Null wird. Dieser Wert des x kann weder die Funktion V_{n-1}, die V_n unmittelbar voraufgeht, noch die

Funktion V_{n+1}, die auf V_n folgt, annullieren. Zwischen den drei Funktionen V_{n-1}, V_n, V_{n+1} besteht nämlich folgende Gleichung, die eine der Gleichungen (1) ist:

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}.$$

Diese Gleichung beweist, daß, wenn die zwei aufeinanderfolgenden Funktionen V_{n-1} und V_n für denselben Wert des x Null werden würden, es auch gleichzeitig V_{n+1} würde. Da man ferner:

$$V_n = V_{n+1} Q_{n+1} - V_{n+2}$$

hat, so würde man außerdem noch $V_{n+2} = 0$ und so weiter fort finden; schließlich hätte man auch gegen die Voraussetzung $V_r = 0$.

Die zwei Funktionen V_{n-1} und V_{n+1} haben daher für $x = b$ von Null verschiedene Werte, ausserdem sind diese Werte von entgegengesetztem Vorzeichen, denn die Gleichung:

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}$$

ergibt für $V_n = 0$:

$$V_{n-1} = - V_{n+1}.$$

Wir beachten dies und setzen an die Stelle von x zwei Zahlen $b - u$ und $b + u$, die von b sehr wenig verschieden sind. Die zwei Funktionen [281] V_{n-1} und V_{n+1} werden für diese zwei Werte von x dieselben Vorzeichen wie für $x = b$ haben; denn man kann u genügend klein wählen, daß weder V_{n-1} noch V_{n+1} das Vorzeichen wechselt, wenn x im Intervall $b - u$ bis $b + u$ wächst. Wie auch immer das Vorzeichen von V_n für $x = b - u$ ist, so bilden, wenn man es zwischen die Vorzeichen von V_{n-1} und V_{n+1}, die entgegengesetzt sind, setzt, die Vorzeichen der drei aufeinanderfolgenden Funktionen V_{n-1}, V_n, V_{n+1} für $x = b - u$ entweder eine Vorzeichenfolge, auf die ein Vorzeichenwechsel folgt, oder einen Vorzeichenwechsel, auf den eine Vorzeichenfolge folgt; dies ersieht man aus folgendem Schema:

$$\begin{array}{lccccccc} & V_{n-1} & V_n & V_{n+1} & & V_{n-1} & V_n & V_{n+1} \\ \text{für } x = b - u & + & \pm & - & \text{oder} & - & \pm & +\,. \end{array}$$

Unabhängig davon, wie auch immer das Vorzeichen von V_n ist, bilden die Vorzeichen der drei Funktionen V_{n-1}, V_n,

V_{n+1} für $x = b + u$ ebenfalls einen und auch nur einen Vorzeichenwechsel.

Überdies hat jede der anderen Funktionen, vorausgesetzt, daß sie nicht gleichzeitig mit V_n für $x = b$ Null wird, für $x = b - u$ und $x = b + u$ gleiche Vorzeichen.

Die Vorzeichenreihe aller Funktionen V, $V_1, \ldots, V_r$ enthält folglich für $x = b + u$ genau ebensoviel Vorzeichenwechsel wie für $x = b - u$. Geht daher irgend eine zwischenliegende Funktion durch Null, so ändert sich in der Vorzeichenreihe die Anzahl der Vorzeichenwechsel nicht.

Zu demselben Schlusse gelangt man augenscheinlich, wenn mehrere nicht aufeinanderfolgende, zwischenliegende Funktionen für denselben Wert des x verschwinden. Annulliert dieser Wert aber auch die erste Funktion V, so bringt, wie wir in Nr. 4 sahen, der Zeichenwechsel dieser Funktion in der Vorzeichenreihe einen Vorzeichenwechsel zum Fortfall.

[282] 6.

Wir haben also bewiesen, daß jedesmal, wenn die Variable x allmählich wächst und dabei einen Wert erreicht und überschreitet, der V annulliert, die Vorzeichenreihe der Funktionen V, V_1, $V_2, \ldots, V_r$ einen Vorzeichenwechsel verliert; er wurde durch die Vorzeichen von V und V_1 gebildet und wird durch eine Vorzeichenfolge ersetzt. Die Vorzeichenwechsel der zwischenliegenden Funktionen V_1, $V_2, \ldots, V_{r-1}$ können die schon vorhandene Anzahl der Vorzeichenwechsel weder vermehren, noch vermindern. Nimmt man daher irgend eine positive oder negative Zahl A und irgend eine andere Zahl B, die grösser als A ist, und läßt x von A bis B wachsen, so enthält die Vorzeichenreihe der Funktionen V, V_1, $V_2, \ldots, V_r$ für $x = B$ soviel Zeichenwechsel weniger als die Vorzeichenreihe für $x = A$, wie es Werte x zwischen A und B gibt, die V annullieren. Dies ist das zu beweisende Theorem.

Um die Anwendung zu erleichtern, ist es nötig, dem voranstehenden mehrere Bemerkungen beizufügen.

7.

Bei den voraufgehenden Divisionen, die zur Bildung der Funktionen V_2, $V_3, \ldots$ dienen, kann man jedes Polynom, bevor man es als Dividendus oder Divisor verwendet, mit einer positiven Zahl multiplizieren oder durch eine solche dividieren.

Die Funktionen V, V_1, $V_2, \ldots, V_r$, die man so erhält, differieren von den früher betrachteten, [283] die in den Gleichungen (1) auftreten, nur durch positive numerische Faktoren; beide Funktionsgattungen werden also für jeden Wert von x gleiche Vorzeichen haben.

Infolge dieser Modifikation kann man, wenn die Koeffizienten der Gleichung $V = 0$ ganze Zahlen sind, Polynome V_2, $V_3, \ldots$ bilden, deren Koeffizienten ebenfalls ganzzahlig sind; aber man muß besonders darauf achtgeben, daß die numerischen Faktoren, die man einführt oder unterdrückt, immer positiv sein müssen.

8.

Es kann eintreten, daß für $x = A$ oder $x = B$ eine der Funktionen V_1, $V_2, \ldots, V_{r-1}$ Null wird. In diesem Fall genügt es, die Vorzeichenwechsel, die in der Vorzeichenreihe der Funktionen V, V_1, $V_2, \ldots, V_r$ wirklich auftreten, abzuzählen und diejenige Funktion, die Null ist, fortzulassen. Dies folgt aus dem in Nr. 5 für den Fall gegebenen Beweis, daß eine zwischenliegende Funktion verschwindet. Wir haben nämlich gesehen, daß, wenn V_n für $x = b$ Null wird, und man dem x einen von b sehr wenig verschiedenen Wert $b - u$ oder $b + u$ beilegt, die drei aufeinanderfolgenden Funktionen V_{n-1}, V_n, V_{n+1} einen und auch nur einen Vorzeichenwechsel besitzen. Dieser Vorzeichenwechsel bleibt auch noch, wenn man $x = b$ setzt und in der Vorzeichenreihe das zwischen den zwei entgegengesetzten Vorzeichen von V_{n-1} und V_{n+1} stehende Resultat Null fortlässt.

Wird für $x = A$ die Funktion V Null, so schließt man zunächst, daß A eine Wurzel der Gleichung $V = 0$ ist; dann erteilt man dem x einen Wert $A + u$, der A um eine beliebig kleine Größe übersteigt. Für diesen Wert $A + u$ bildet [284], wie wir in Nr. 4 gesehen haben, das Vorzeichen von V mit dem von V_1 eine Vorzeichenfolge, bei den übrigen Vorzeichen der Reihe von V_1 bis V_r ist dieselbe Anzahl von Vorzeichenwechseln wie für $x = A$ vorhanden. Durch die allgemeine Regel findet man daher, wieviel Wurzeln die Gleichung $V = 0$ zwischen $A + u$ und B hat, d. h. wieviel Wurzeln größer als A und kleiner als B sind.

Ist B eine Wurzel der Gleichung $V = 0$, so bestimmt man nach derselben Regel die Anzahl der zwischen A und $B - u$ gelegenen Wurzeln und beachtet, daß für $x = B - u$ das

Vorzeichen von V mit dem von V_1 einen Vorzeichenwechsel bildet (Nr. 4), und in dem Reste der Vorzeichenreihe von V_1 bis V_r ebensoviel Vorzeichenwechsel wie für $x = B$ vorhanden sind.

9.

Kann man erkennen, daß eine der zwischen V und V_r gelegenen Hilfsfunktionen V_n für alle Werte von x zwischen A und B beständig dasselbe Vorzeichen behält, so braucht man die auf V_n folgenden Funktionen nicht zu betrachten. Es genügt, die zwei Zahlen A und B in die Funktionen höheren Grades V, V_1, V_2, ... zu setzen, bei V_n Halt zu machen und die Vorzeichen der Resultate hinzuschreiben. Die Gleichung $V = 0$ hat zwischen A und B so viel Wurzeln, wie die Reihe der Funktionen V, V_1, V_2, ... bis V_n, diese Funktion eingeschlossen, für $x = A$ mehr Vorzeichenwechsel als für $x = B$ besitzt.

Um dies zu zeigen, kann man auf das Teilsystem der Funktionen V, V_1, V_2, ..., V_n den gleichen Beweis anwenden, den wir für das vollständige Funktionensystem V, V_1, V_2, ..., V_n, V_{n+1}, ..., V_r, dessen letzte Funktion eine konstante Zahl ist, geführt haben. Nach unserer Voraussetzung behält V_n, ohne einen konstanten Wert zu haben, [285] für alle von A bis B wachsenden Werte von x dasselbe Vorzeichen. In Nr. 4 und 5 sahen wir, daß die Vorzeichenreihe der Funktionen V, V_1, V_2, $\cdots$, V_n jedesmal dann einen Vorzeichenwechsel verliert, wenn V Null wird, und daß das Verschwinden der zwischen V und V_n gelegenen Funktionen die Zahl der Vorzeichenwechsel weder vermehren, noch vermindern kann. Die Gleichung $V = 0$ hat daher zwischen A und B so viel Wurzeln, wie die in die Funktionen V, V_1, V_2, ..., V_n eingesetzte Zahl B weniger Zeichenwechsel als die Zahl A ergibt. Dies war zu beweisen erforderlich.

10.

Wächst x von A bis B, und ändert dabei V_n nicht sein Vorzeichen, so erhält man, wenn man A oder B oder jede andere zwischen A und B gelegene Zahl in die Teilreihe der Funktionen V_n, V_{n+1}, ..., V_r einsetzt, wie man sieht, beständig dieselbe Anzahl von Vorzeichenwechseln. Man darf aber nicht glauben, daß auch umgekehrt, wenn die in diese Funktionen eingesetzten zwei Zahlen A und B dieselbe Anzahl

Zeichenwechsel ergeben, V_n für alle von A bis B wachsenden Werte von x dasselbe Vorzeichen besitzen muß. Dieses umgekehrte Verhalten findet nur dann statt, wenn die Funktionen V_n, V_{n+1}, ..., V_r außerdem noch gewisse Bedingungen erfüllen, die wir hier nicht auseinandersetzen zu sollen glauben. Wir geben nur an, daß dieses Verhalten im besonderen dann eintritt, wenn die Grade der aufeinanderfolgenden Funktionen V_n, V_{n+1}, V_{n+2}, ... immer um eine Einheit abnehmen, und das erste Glied jeder Funktion positiv ist. In einer anderen Abhandlung wollen wir diese sowie mehrere andere Eigenschaften, die gewissen Gleichungen zukommen, darlegen[3]).

[286] 11.

Wie wir unser Theorem in Nr. 9 modifiziert haben, läßt es sich oft leichter anwenden. Gelangt man bei dem auf V und V_1 anzuwendenden Verfahren zu einem Polynom V_n (z. B. zu einem solchen zweiten Grades), das nur für imaginäre Werte von x verschwindet, so braucht man die Divisionen nicht weiter fortzusetzen; denn dieses Polynom hat für alle reellen Werte von x beständig das nämliche Vorzeichen wie sein erstes Glied. Man kann dieses Polynom daher als letzte der Hilfsfunktionen V_1, V_2, ... verwenden. Man könnte sogar auch bei einem Polynom V_n, das für reelle Werte von x Null wird, Halt machen, wenn man seine sämtlichen Wurzeln bestimmen kann. Bezeichnet man nämlich diejenigen Wurzeln, die zwischen A und B gelegen sind, ihrer Größe nach geordnet, mit dem kleinsten Werte beginnend, mit p, q, r, ..., so beachte man, daß V_n für alle Werte von x, die zwischen A und p gelegen sind, das gleiche Vorzeichen behält. Durch Anwendung unseres Theorems, wie wir es in Nr. 8 und 9 modifiziert haben, findet man, wie viel Wurzeln die Gleichung $V = 0$ zwischen A und $p - u$ hat; dabei ist u eine sehr kleine Größe. Da V_n für alle Werte von x, die zwischen p und q liegen, konstantes Vorzeichen hat, so findet man, wie viel Wurzeln $V = 0$ zwischen $p + u$ und $q - u$, d. h., wenn man u genügend klein nimmt, zwischen p und q besitzt. Ebenso erkennt man, wie viel Wurzeln $V = 0$ zwischen q und r und so weiter hat. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Gleichung $V = 0$ keine gleichen Wurzeln besitzt, und daß kein Wert von x, der V_n annulliert, auch gleichzeitig V annulliert.

[287] Diese Verhältnisse, bei denen man die Anzahl der Hilfsfunktionen vermindern kann, verdienen ausdrücklich

hervorgehoben zu werden; denn die zur Bestimmung der Hilfsfunktionen notwendigen Rechnungen sind besonders bei den letzten Funktionen wegen der Größe ihrer numerischen Koeffizienten sehr lang.

12.

Das allgemeine Theorem gibt auch ein Mittel dafür an, die Gesamtzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $V=0$ zu bestimmen. Ist eine ganze rationale Funktion von x gegeben, so kann man, ohne die Werte von x, welche die Funktion annullieren, zu kennen, dem x einen derartigen positiven Wert beilegen, daß für ihn und alle größeren Werte von x das Polynom beständig das gleiche Vorzeichen wie sein erstes Glied hat; analog verhält es sich mit allen negativen Werten von x, die jenseits einer bestimmten Grenze liegen. In gebräuchlicher Weise bezeichnen wir eine beliebig große Zahl mit dem Symbol ∞. Um die Anzahl aller reellen Wurzeln der Gleichung $V=0$ zu finden, die zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen, genügt es, an die Stelle von A und B in die Funktionen V, V_1, V_2, ..., V_r $-\infty$ und $+\infty$ zu setzen und die zwei Vorzeichenreihen für $-\infty$ und $+\infty$ hinzuschreiben. Für $x=+\infty$ hat jede Funktion dasselbe Vorzeichen wie ihr erstes Glied. Jede Funktion geraden Grades, einschließlich der Konstanten V_r, hat für $x=-\infty$ dasselbe Vorzeichen wie für $x=+\infty$; hingegen nimmt jede Funktion ungeraden Grades für $x=-\infty$ entgegengesetztes Vorzeichen wie für $x=+\infty$ an. Der Überschuß der Anzahl der Vorzeichenwechsel, den die Vorzeichen der Funktionen V, V_1, ..., V_r für $x=-\infty$ über die Anzahl der Vorzeichenwechsel für $x=+\infty$ ergeben, [288] zeigt die Gesamtzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $V=0$ an.

13.

Bei den meisten Gleichungen kann man zur Bestimmung der reellen und imaginären Wurzeln sich einer noch einfacheren Regel bedienen.

Die Anzahl der Hilfsfunktionen V_1, V_2, ... ist meistens gleich dem Grade m der Gleichung $V=0$; denn bei der Aufsuchung des größten gemeinsamen Divisors von V und V_1 ist der Grad jedes Restes gewöhnlich um eine einzige Einheit niedriger als der des voraufgehenden Restes. Wenn die

Anzahl der Funktionen V_1, V_2, ... genau gleich m ist, kann man die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung $V=0$ aus dem bloßen Anblick der Vorzeichen der ersten Glieder der Funktionen V_1, V_2..., einschließlich der letzten Funktion, bestimmen; diese letzte Funktion enthält x nicht mehr und wird gerade durch V_m dargestellt. Die Gleichung $V=0$ hat so viel Paare imaginärer Wurzeln, als in der Vorzeichenreihe der ersten Glieder der Funktionen V_1, V_2, ... bis zum Vorzeichen der Konstanten V_m, dieses eingeschlossen, Vorzeichenwechsel auftreten. Dieser Satz läßt sich auf folgende Art beweisen:

Aus der gemachten Voraussetzung folgt, daß von zwei aufeinanderfolgenden Funktionen V_{n-1} und V_n die eine von geradem, die andere von ungeradem Grade ist. Haben diese zwei Funktionen für $x=+\infty$ gleiche Vorzeichen, so haben sie für $x=-\infty$ entgegengesetzte Vorzeichen. Haben sie umgekehrt für $x=+\infty$ entgegengesetzte Vorzeichen, so haben sie für $x=-\infty$ gleiche Vorzeichen. Schreibt man daher die zwei Vorzeichenreihen der Funktionen V, V_1, V_2, ..., V_m für $x=-\infty$ und für $x=+\infty$ untereinander, [**289**] so entspricht jedem Vorzeichenwechsel in der einen Reihe eine Vorzeichenfolge in der anderen Reihe. Die Anzahl der Vorzeichenfolgen für $x=-\infty$ ist folglich gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel für $x=+\infty$.

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel für $x=+\infty$ sei mit i bezeichnet; i kann dabei auch Null sein. Die fraglichen Vorzeichenwechsel werden durch die Vorzeichen der Koeffizienten, welche die höchsten Potenzen von x in den Hilfsfunktionen V_1, V_2, ..., V_m multiplizieren, gegeben; dabei sind die ersten Glieder von V und V_1 positiv angenommen.

Die Vorzeichenreihe muß für $x=-\infty$, wie wir soeben gesehen haben, i Vorzeichenfolgen enthalten; sie umfaßt daher $m-i$ Vorzeichenwechsel, denn die Anzahl der Funktionen V, V_1, V_2, ..., V_m beträgt $m+1$, und in einer Reihe von $m+1$ Vorzeichen ergibt die Anzahl der Vorzeichenwechsel und Vorzeichenfolgen zusammen die Summe m.

Infolge des allgemeinen Theorems muß die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $V=0$, die zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen, gleich dem Überschuß der Zahl $m-i$ der Vorzeichenwechsel für $x=-\infty$ über die Zahl i der Vorzeichenwechsel für $x=+\infty$ sein. Die Gleichung $V=0$ hat daher $m-2i$ reelle und folglich $2i$ imaginäre Wurzeln;

diese treten bekanntlich paarweise in der Form $a \pm b\sqrt{-1}$ auf. Die Anzahl der Paare ist mithin gleich i. Dies war zu beweisen.

14.

Für $i = 0$ folgt folgendes Korollar: **Sind die ersten Glieder von V und V_1 positiv, beträgt die Anzahl der anderen Funktionen V_2, V_3, ..., einschließlich der Konstanten, die x nicht mehr enthält, $m - 1$, und ist bei [290] allen das erste Glied positiv, so sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $V = 0$ reell.**

Sind umgekehrt sämtliche Wurzeln der Gleichung $V = 0$ reell, so muß die Anzahl der Hilfsfunktionen V_2, V_3, ... bis zu der, die x nicht mehr enthält, diese eingeschlossen, $m - 1$ betragen (anders ausgedrückt, der Grad jeder dieser Funktionen ist um eine Einheit niedriger, als der der voraufgehenden) und außerdem müssen die sämtlichen ersten Glieder der Funktionen positiv sein.

Wäre die Anzahl der Funktionen V_2, V_3, ... kleiner als $m - 1$, so würde die Vorzeichenreihe der Funktionen V, V_1, V_2, ... für $x = -\infty$ eine geringere Anzahl von Vorzeichenwechseln als m haben. Sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $V = 0$ reell, so muß die erwähnte Vorzeichenreihe m Vorzeichenwechsel mehr als die Vorzeichenreihe für $x = +\infty$ haben. Zunächst muß also die Anzahl der Funktionen V_2, V_3, ... gleich $m - 1$ sein. Außerdem muß der Koeffizient jeder Funktion, ebenso wie bei V und V_1, positiv sein; denn sonst würde die Vorzeichenreihe der Funktionen V, V_1, V_2, ... für $x = +\infty$ einen oder mehrere Vorzeichenwechsel aufweisen, und die Gleichung $V = 0$ würde so viel Paare imaginärer Wurzeln besitzen, wie die Anzahl dieser Vorzeichenwechsel beträgt.

Sind die Koeffizienten der Gleichung $V = 0$ unbestimmt und werden sie durch Buchstaben dargestellt, so sind die Polynome V_2, V_3, ..., die man bei der Aufsuchung des größten gemeinsamen Divisors von V und V_1 findet, vom Grade $m - 2$, bez. $m - 3$, usw. Die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in diesen Polynomen, V_m eingeschlossen, sind Buchstabengrößen, die aus den Koeffizienten der Gleichung $V = 0$ gebildet sind. Die Bedingungen für die Realität sämtlicher Wurzeln der Gleichung $V = 0$ reduzieren sich daher darauf, daß jede dieser Größen positiv werden muß, und keine [**291**] verschwinden darf. Die Zahl dieser Bedingungen ist nicht größer als $m - 1$, sie kann aber, da einige in den anderen enthalten sein können, kleiner werden.

15.

Wie unser Theorem für die Aufsuchung der reellen Wurzeln einer Gleichung $V = 0$ ohne gleiche Wurzeln zu verwerten ist, ist jetzt von selbst klar.

Nachdem man die Funktionen $V_2, V_3, \ldots, V_r$, von denen die letzte x nicht mehr enthält, aufgesucht hat, bestimmt man zunächst die Gesamtzahl der reellen Wurzeln der Gleichung, indem man die Vorzeichen der Funktionen $V, V_1, \ldots, V_r$ für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ hinschreibt.

Dieses Verfahren haben wir in Nr. 12 oder für den allgemeinen Fall, in dem die Zahl der Hilfsfunktionen $V_2, V_3, \ldots$ $m - 1$ beträgt, durch die Regel in Nr. 13 angegeben.

Um die positiven Wurzeln zu finden, setzt man in die Funktionen $V, V_1, \ldots, V_r$ an die Stelle von x eine Reihe von wachsenden Zahlen $0, A, B, C, D, \ldots$ ein und schreibt die Vorzeichenreihe der Resultate, die jede der eingesetzten Zahlen ergibt, hin. Geht man von der Vorzeichenreihe, die eine eingesetzte Zahl ergibt, zu der Vorzeichenreihe, welche die folgende Zahl ergibt, über, so liefert infolge des bewiesenen Theorems die Anzahl der verlorenen Vorzeichenwechsel die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $V = 0$, die zwischen diesen Zahlen liegen. Auf diese Weise findet man diejenigen Zahlen, zwischen denen Wurzeln liegen, und auch die Anzahl der Wurzeln, die sie umfassen.

Um keine unnötigen Substitutionen auszuführen, muß man Halt machen, sobald man zu einer Zahl kommt, die soviel Vorzeichenwechsel wie eine unendlich große Zahl ergibt. Die Substitution einer unendlich großen Zahl weist soviel Vorzeichenwechsel auf, wie [**292**] die Vorzeichenreihe der ersten Glieder der Polynome $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ besitzt. Eine derartige Zahl, wie wir sie soeben angaben, ist eine obere Grenze für die Wurzeln der Gleichung; denn zwischen dieser Zahl und $+\infty$ kann keine Wurzel liegen.

Nehmen wir an, daß zwischen A und B mehrere Wurzeln liegen. In diesem Falle wird man eine oder mehrere zwischenliegende Zahlen einsetzen. Die bei dem Übergang von einer eingesetzten Zahl zu der ihr unmittelbar folgenden verlorenen Vorzeichenwechsel geben immer die Anzahl der zwischen den zwei Zahlen gelegenen Wurzeln an.

Unter Umständen genügen einige Substitutionen, um die Trennung der Wurzeln vollständig auszuführen, d. h. für jede Wurzel zwei Grenzen, zwischen denen sie allein gelegen ist, zu bestimmen. Sind die Wurzeln sehr nahe beieinander gelegen, so ist man genötigt, zu ihrer Trennung eine größere Zahl von Substitutionen auszuführen. Wir werden übrigens bald sehen, daß diese Trennung zur Berechnung der Wurzeln nicht unbedingt notwendig ist, und daß der ganzzahlige Bestandteil der Wurzeln ausreicht. Setzt man in die Funktionen V, V_1, ..., V_r negative Zahlen, oder ändert man, was auf dasselbe hinauskommt, in allen Funktionen x in $-x$ und setzt positive Zahlen ein, so findet man ebenso diejenigen Zahlen, zwischen denen die negativen Wurzeln liegen.

Die Substitutionen können so ausgeführt werden, daß man zunächst die Ziffer höchster Ordnung jeder Wurzel, dann die Ziffer der unmittelbar folgenden niedrigeren Ordnung, usw. findet.

16.

Den angenäherten Wert jeder Wurzel kann man bis auf eine Einheit oder auch sogar bis auf einen gewissen [**293**] Bruch bestimmen; der noch unbekannte Teil ist dann durch ein rascheres Näherungsverfahren zu finden. Hierzu kann man entweder die *Newton*sche oder die *Lagrange*sche Näherungsmethode[4]) verwenden.

Man weiß, daß es Fälle gibt, in denen die erstere versagt. Dann bedient man sich vorteilhafter der *Lagrange*schen; diese erhält durch unser Theorem, wie wir auseinandersetzen werden, die notwendige Ergänzung.

Die Anwendung dieser Methode setzt voraus, daß nur die zu berechnende Wurzel zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gelegen ist. Durch eine Transformation führt man hierauf auch leicht den Fall zurück, in dem eine Wurzel zwischen zwei bekannten Grenzen gelegen ist. Hat eine Gleichung aber Wurzeln, die um sehr kleine Größen untereinander differieren, so gelangt man nur nach mehrfachen Substitutionen, die lange Rechnungen erfordern, dazu, für jede Wurzel zwei Grenzen zu finden. Durch Verbindung unseres Theorems mit der *Lagrange*schen Methode kann man diesen Mißstand vermeiden.

Es handelt sich um die Berechnung der Wurzeln der Gleichung $V = 0$, die zwischen den zwei ganzen aufeinanderfolgenden Zahlen a und $a + 1$ liegen. Gibt das Theorem an, daß die zwei Zahlen nur eine Wurzel umfassen, so setzt man nach dem bekannten Verfahren $x = a + \frac{1}{y}$ in die Gleichung $V = 0$. Da die Unbekannte y nur einen einzigen positiven Wert, der größer als die Einheit ist, besitzen soll, so setzt man in die für y transformierte Gleichung an die Stelle von y die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., bis man zu zwei aufeinanderfolgenden Zahlen b und $b + 1$ gelangt, die Resultate entgegengesetzten Vorzeichens ergeben. Diese Zahlen umfassen den gesuchten Wert von y. Dann setzt man in die Gleichung für y: $y = b + \frac{1}{z}$; hierbei hat z nur einen einzigen positiven Wert, der größer als 1 ist. Hierauf sucht man den ganzzahligen Bestandteil c von z, indem man die Zahlen 1, 2, 3, ... einsetzt. [294] Fährt man so fort, so erhält man den Wert von x in Form des Kettenbruches:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots}}$$

Nehmen wir jetzt an, daß unser Theorem die Existenz mehrerer Wurzeln zwischen den zwei ganzen Zahlen a und $a + 1$ anzeigt. Auch dann setzt man zunächst noch $x = a + \frac{1}{y}$ in die Gleichung $V = 0$. Die Unbekannte y muß soviel positive Werte, die größer als 1 sind, besitzen, als x Werte zwischen a und $a + 1$ hat. Die einfache Substitution der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... in die transformierte Gleichung für y genügt im allgemeinen nicht, um alle Werte von y zu finden; denn zwei oder mehrere Werte des y können denselben ganzzahligen Bestandteil haben. Daher muß man x nicht nur in der Funktion V, sondern auch in den Hilfsfunktionen V_1, V_2, ... durch $a + \frac{1}{y}$ ersetzen und bei einer Funktion V_n, deren Vorzeichen für alle Werte von x zwischen a und $a + 1$ dasselbe bleibt, Halt machen.

Sind die Polynome $V, V_1, V_2, \ldots, V_n$ auf diese Weise in Funktionen von y transformiert, so setze man an die Stelle von y die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... und schreibe die Vorzeichenreihe, die jede eingesetzte Zahl ergibt, hin. Die Differenz der zwei Anzahlen von Vorzeichenwechseln, die zwei ganze aufeinanderfolgende Zahlen b und $b+1$ ergeben, zeigt an, wieviel Werte des y zwischen den zwei Zahlen liegen und die Gleichung $V=0$ befriedigen. Dies ergibt sich auf folgende Weise: Wir setzten $x = a + \frac{1}{y}$ und führten die zwei Zahlen b und $b+1$ in die Polynome $V, V_1, V_2, \ldots, V_n$ ein, nachdem wir die Polynome als Funktionen von y ausgedrückt hatten. Hierdurch erhält man dieselben Resultate, als wenn man $a + \frac{1}{b}$ und $a + \frac{1}{b+1}$ in die gleichen Polynome [**295**] in ihrer ursprünglichen Form als Funktionen von x setzen würde. Die Differenz der zwei Anzahlen von Vorzeichenwechseln, welche die Vorzeichen dieser Resultate ergeben, gibt die Anzahl der Werte von x, die zwischen $a + \frac{1}{b}$ und $a + \frac{1}{b+1}$ liegen und Wurzeln der Gleichung $V=0$ sind, an. Diesen Wurzeln entsprechen ebensoviel Werte von y, die zwischen b und $b+1$ liegen.

Findet man, daß b und $b+1$ mehrere Werte von y umfassen, so setzt man $y = b + \frac{1}{z}$ und führt in die Polynome $V, V_1, V_2, \ldots,$ die schon als Funktionen von y ausgedrückt sind, $b + \frac{1}{z}$ für y ein. Man braucht nicht bis V_n zu gehen, sondern macht bei einem Polynom V_k, das für alle Werte von y, die zwischen b und $b+1$ liegen, immer dasselbe Vorzeichen annimmt, Halt. Dann setzt man in die Polynome $V, V_1, V_2, \ldots, V_k$ an die Stelle von z die Zahlen 1, 2, 3, ...

Die Differenz der zwei Anzahlen von Vorzeichenwechseln, die zwei ganze aufeinanderfolgende Zahlen c und $c+1$ ergeben, kündigt die Anzahl der Werte von z an, die zwischen c und $c+1$ liegen und Wurzeln der Gleichung $V=0$ entsprechen. Fährt man auf die angegebene Art und Weise fort, so entwickelt man alle Werte von x, die zwischen a und $a+1$ liegen, in Kettenbrüche.

Hat eine der aufeinanderfolgenden Unbekannten y, z, ... nur einen einzigen Wert, der zwischen zwei ganzen aufeinanderfolgenden Zahlen liegt, so braucht man, um diesen Wert in einen Kettenbruch zu verwandeln, nicht die Hilfsfunktionen V_1, V_2, ... Dann genügt es schon, das gewöhnliche Verfahren anzuwenden, das wir oben für den Fall auseinandersetzten, daß ein Wert von x, der zwischen den zwei Zahlen a und $a+1$ allein liegt, in einen Kettenbruch zu entwickeln ist.

Soll man Wurzeln, die sehr wenig voneinander verschieden sind, mit großer Annäherung berechnen, [**296**] so kann man zunächst durch die von uns angegebenen Mittel einen genügend nahen Wert für jede Wurzel finden und dann, um einen exakteren Wert zu erhalten, zu der *Newton*schen Näherungsmethode übergehen.

Bemerkungen: 1. Stellt man die Funktion von V durch $f(x)$ dar, so wird für $x = a + \frac{1}{y}$:

$$V = f\left(a + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^m}\left\{f(a)y^m + f'(a)y^{m-1} + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}y^{m-2} + \cdots\right\}.$$

Für jede positive Zahl, die man an die Stelle von y setzt, braucht man nur die Vorzeichen und nicht die numerischen Werte der Polynome V, V_1, V_2, ... zu kennen. In dem für V hingeschriebenen Ausdruck kann man daher den positiven Faktor $\frac{1}{y^m}$ unterdrücken und für V einfach die ganze Funktion $f(a)y^m + f'(a)y^{m-1} + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}y^{m-2} + \cdots$ nehmen. Diese Bemerkung läßt sich auf alle Funktionen V, V_1, V_2, ..., in denen x durch $a + \frac{1}{y}$ ersetzt wird, sowie auf alle transformierten Funktionen, die man im Laufe der Rechnung benutzt, anwenden.

2. Bewahrt die Funktion V_n für alle Werte von x, die zwischen a und $a+1$ liegen, wie wir voraussetzten, dasselbe Vorzeichen, so ist es nicht nötig, in der Funktion V_n x durch $a + \frac{1}{y}$ zu ersetzen; denn V_n wird für alle Werte von y, die größer als 1 sind, dasselbe Vorzeichen besitzen.

Ebenso wird man sich davon befreien können, $b + \frac{1}{z}$ für y in V_k zu setzen, falls V_k für jeden Wert von y, der zwischen b und $b+1$ liegt, konstantes Vorzeichen besitzt.

[297] 17.

Wenden wir unsere Methode auf einige Beispiele an!

Erstes Beispiel.

Die Gleichung sei:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$ [5]).

Hier ist:

$$\begin{aligned} V &= x^3 - 2x - 5, \\ V_1 &= 3x^2 - 2. \end{aligned}$$

Um V_2 zu bilden, dividiere man V durch V_1. Zur Vermeidung von Brüchen multipliziere man zunächst V mit 3 (Nr. 7). Als Rest erhält man $-4x - 15$; durch Vorzeichenänderung findet man:

$$V_2 = 4x + 15.$$

Dann dividiert man V_1 durch V_2 und multipliziert, um Brüche zu vermeiden, die Funktion V_1 ebenso wie den dann verbleibenden Rest mit 4.

Der von x unabhängige Rest, zu dem man gelangt, ist $+643$. Daher wird:

$$V_3 = -643^*).$$

Die Existenz dieses numerischen Restes beweist, daß die vorgelegte Gleichung keine gleichen Wurzeln hat. Die Anzahl der Hilfsfunktionen V_1, V_2, V_3 ist gleich dem Grade [298] der Gleichung, und die Reihe der Vorzeichen der ersten Glieder, einschließlich V_3, lautet:

$$+ + -.$$

---

*) Wären die Koeffizienten von V_1 und V_2 größere Zahlen, so würde man die Division von V_1 durch V_2 vermeiden, indem man bemerkt, daß infolge der Relation $V_1 = V_2 Q_2 - V_3$ das gesuchte Vorzeichen von V_3 entgegengesetzt zu dem ist, das man erhält, wenn man in V_1 den einzigen Wert von x, der V_2 annulliert, einsetzt. Das Vorzeichen dieses Resultates findet man aber leicht, indem man prüft, ob der Wert von x, der V_2 annulliert, zwischen denen, die V_1 annullieren, liegt oder nicht liegt.

Da diese Reihe einen Vorzeichenwechsel aufweist, schließt man nach dem Satz in Nr. 13, daß die Gleichung ein Paar imaginärer Wurzeln und folglich eine reelle Wurzel besitzt. Dies kann man auch ersehen, wenn man die Vorzeichen der Funktionen V, V_1, V_2, V_3 für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ hinschreibt und die Differenz der zwei Zahlen der Vorzeichenwechsel nimmt.

Da nur eine einzige reelle Wurzel existiert, so ist es nicht nötig, um ihren ganzzahligen Bestandteil zu finden, die Hilfsfunktionen V_1, V_2, V_3 zu betrachten. Es genügt, verschiedene Zahlen in die Funktion V allein zu setzen. Da 0 und $+\infty$ in V gesetzt, Resultate entgegengesetzten Vorzeichens ergeben, so sieht man zunächst, daß die Wurzel positiv ist. Setzt man $x = 2$ in V, so erhält man ein negatives, hingegen liefert $x = 3$ ein positives Resultat. Die Wurzel liegt daher zwischen 2 und 3. Mit Hilfe des gewöhnlichen Näherungsverfahrens, an das in der voraufgehenden Nummer erinnert wurde, findet man beliebig gute Näherungswerte. Man erhält:

$$x = 2{,}094\,551\,48\,.$$

Zweites Beispiel.

Wir suchen die notwendigen Bedingungen dafür, daß die Gleichung:

$$x^3 + px + q = 0$$

nur reelle Wurzeln besitzt.

Man hat:

$$\begin{aligned} V &= x^3 + px + q, \\ V_1 &= 3x^2 + p. \end{aligned}$$

[299] V_2 und V_3 findet man durch die aufeinanderfolgenden Divisionen. Um Brüche zu vermeiden, ist der Dividendus bei der ersten Division mit 3, bei der zweiten mit der positiven Größe $4p^2$ zu multiplizieren (Nr. 7).

Man findet:

$$\begin{aligned} V_2 &= -2px - 3q, \\ V_3 &= -4p^3 - 27q^2. \end{aligned}$$

Die Bedingungen der Realität der Wurzeln der vorgelegten Gleichung (Nr. 13 und 14) lauten:

$$-2p > 0, \qquad -4p^3 - 27q^2 > 0.$$

Diese sind gleichbedeutend mit:

$$p < 0, \qquad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Die erste Bedingung ist in der zweiten enthalten; das gefundene Resultat ist übrigens bekannt.

Auf gleiche Art würde man die dafür notwendigen Bedingungen finden, daß die Gleichung:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

nur reelle Wurzeln hat.

Drittes Beispiel.

Im folgenden Beispiel werden wir zeigen, wie man zwei Wurzeln, deren Differenz sehr klein ist, berechnen kann.

Die Gleichung laute:

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

[**300**] Man hat:

$$\begin{aligned} V &= x^3 + 11x^2 - 102x + 181, \\ V_1 &= 3x^2 + 22x - 102, \\ V_2 &= 854x - 2751, \\ V_3 &= +441. \end{aligned}$$

Zunächst ersieht man aus dem Satze in Nr. 14, daß die Gleichung drei reelle Wurzeln besitzt.

Um die positiven Wurzeln zu finden, setze man in die Funktionen V, V_1, V_2, V_3 an die Stelle von x die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 ... und schreibe die Vorzeichen der Resultate hin.

Man findet:

	V	V_1	V_2	V_3		
für $x = 0$	$+$	$-$	$-$	$+$	2 Vorzeichenwechsel	(a)
$x = 1$	$+$	$-$	$-$	$+$		
$x = 2$	$+$	$-$	$-$	$+$		
$x = 3$	$+$	$-$	$-$	$+$	2 Vorzeichenwechsel	
$x = 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 »	
$x = +\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 »	

Diese Tafel zeigt, daß die Gleichung zwei positive Wurzeln besitzt, und diese zwischen 3 und 4 liegen.

Wir bestimmen jetzt den Wert dieser Wurzeln bis auf die erste Dezimale. Zur Erleichterung der Rechnung setzen wir $x = 3 + y$ und ersetzen nicht nur in V, sondern auch in V_1 und V_2 x durch $3 + y$; denn aus der voraufgehenden Tafel ersieht man, daß für die Werte 3 und 4 jede der Funktionen V_1 und V_2 ihr Vorzeichen ändert. Infolge der angegebenen Transformationen gehen die Funktionen V, V_1, ... über in:

$$\begin{aligned} V &= y^3 + 20y^2 - 9y + 1, \\ V_1 &= 3y^2 + 40y - 9, \\ V_2 &= 854y - 189, \\ V_3 &= +. \end{aligned}$$

[301] Man setzt der Reihe nach $y = 0$, $y = 0{,}1$, $y = 0{,}2$, ..., bis die Vorzeichenreihe der Funktionen V, V_1, V_2, V_3 die zwei Vorzeichenwechsel, die sie für das dem $x = 3$ entsprechende $y = 0$ besitzt, verliert, oder V sein Vorzeichen wechselt.

		V	V_1	V_2	V_3
$y = 0$	ergibt	+	−	−	+
$y = 0{,}1$	»	+	−	−	+
$y = 0{,}2$	»	+	−	−	+
$y = 0{,}3$	»	+	+	+	+.

V wird daher für zwei Werte von y, die zwischen 0,2 und 0,3 liegen, oder für zwei Werte von x, die zwischen 3,2 und 3,3 liegen, Null.

Die Ziffer für die Hundertstel jeder Wurzel bestimmt man, indem man in dieselben Funktionen für y die Zahlen 0,20 ..., 0,21 ..., 0,22 ..., ... so lange einsetzt, bis die Vorzeichenreihe zwei Vorzeichenwechsel verliert, oder V sein Vorzeichen wechselt. Man findet:

	V	V_1	V_2	V_3	
für $y = 0{,}20$	+	−	−	+	
$y = 0{,}21$	+	−	−	+	$V = + 0{,}001\,261$
$y = 0{,}22$	−				$V = - 0{,}001\,352$.

Aus dem Vorzeichenwechsel des V ersieht man, daß einer der zwei gesuchten Werte von y zwischen 0,21 und 0,22 fällt, und daß der andere größer als 0,22 sein muß. Die zwei Wurzeln sind mithin jetzt getrennt. Man braucht daher nicht mehr die Hilfsfunktionen V_1, V_2, V_3. Man setze für y den

Wert 0,23 in die Funktion V. Dann findet man das positive Resultat $+ 0{,}000\,167$; hieraus folgt, daß der zweite gesuchte Wert von y zwischen 0,22 und 0,23 fällt.

[**302**] Durch neue Substitutionen, die man auf V ausführt, findet man, daß die Ziffer der Tausendstel für die kleinere Wurzel 3 und für die größere Wurzel 9 lautet. Die zwei positiven Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$$

werden daher bis auf drei Dezimalen gleich 3,213 und 3,229.

Wendet man auf die Gleichung selbst oder die transformierte Gleichung in y die *Newton*sche Regel an, so findet man für jede Wurzel drei weitere Dezimalziffern. Man findet die Werte 3,213 128 und 3,229 521, die bis auf ein Millionstel exakt sind.

Dieselben Werte kann man auch nach dem *Lagrange*schen Verfahren erhalten, wenn man die Wurzeln in Form von Kettenbrüchen aufsucht. Nachdem man mit Hilfe der Tafel (a) erkannt hat, daß die Gleichung $V = 0$ zwischen 3 und 4 zwei positive Wurzeln besitzt, setzt man $x = 3 + \frac{1}{y}$. y hat dann zwei positive Werte, die größer als 1 sind. Man ersetzt hierauf x nicht nur in V, sondern auch in V_1 und V_2, die ihr Vorzeichen ändern, wenn x von 3 bis 4 wächst, durch $3 + \frac{1}{y}$. Unterdrückt man, wie am Ende von Nr. 16 angegeben wurde, die positiven Faktoren $\frac{1}{y^3}$, $\frac{1}{y^2}$, ..., so wird:

$$\begin{aligned} V &= y^3 - 9y^2 + 20y + 1, \\ V_1 &= -9y^2 + 40y + 3, \\ V_2 &= -189y + 854, \\ V_3 &= +. \end{aligned}$$

In diese Funktionen setzt man $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Für $y = 1$ findet man dieselben Resultate wie für $x = 4$, nämlich:

$$y = 1: + + + +.$$

Für $y = 4$ werden die Vorzeichen $+ + + +$, und für $y = 5$ lauten die Vorzeichen $+ - - +$.

[**303**] Die zwei gesuchten Werte für y fallen, wie man sieht, zwischen 4 und 5. Man setzt dann $y = 4 + \frac{1}{z}$;

hierbei hat auch z noch zwei Werte, die größer als 1 sind. Die Funktionen V, V_1, ... lauten:

$$
\begin{aligned}
V &= z^3 - 4z^2 + 3z + 1\,,\\
V_1 &= 19z^2 - 32z - 9\,,\\
V_2 &= 98z - 189\,,\\
V_3 &= +\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llcccc l}
 & & V & V_1 & V_2 & V_3 & \\
z = 1 & \text{ergibt} & + & - & - & + & (\text{wie } y = 5),\\
z = 2 & \quad » & -, & & & & \\
z = 3 & \quad » & +. & & & &
\end{array}
$$

Der eine der Werte des z fällt mithin zwischen 1 und 2, der andere zwischen 2 und 3. Ist man an diesem Punkte angelangt, so braucht man nicht mehr die Hilfsfunktionen V_1, V_2, V_3. Man entwickelt den kleinsten Wert von z in einen Kettenbruch, indem man $z = 1 + \frac{1}{t}$ setzt. Die voraufgehende Gleichung:

$$z^3 - 4z^2 + 3z + 1 = 0$$

wird dann:

$$t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0\,.$$

Die Größe t kann nur einen einzigen positiven Wert, der größer als die Einheit ist, annehmen. Setzt man für t die ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., so findet man, daß 2 und 3 entgegengesetzte Vorzeichen ergeben. Man setzt daher $t = 2 + \frac{1}{u}$, wobei $u > 1$ ist. Ebenso findet man $u = 4 + \frac{1}{v}$, $v = 20 + \frac{1}{r}$, usw.

[**304**] Die kleinste positive Wurzel der Gleichung $V = 0$ wird daher durch den Kettenbruch:

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{r}}}}}}$$

ausgedrückt. Bildet man die Näherungsbrüche und verwandelt den sechsten, der $\frac{3965}{1234}$ lautet, in einen Dezimalbruch, so findet

man bis auf Millionstel: $x = 3{,}213\,128$.

Auf gleiche Weise findet man den zweiten Wert von x, der zwischen 2 und 3 liegt. Man erhält der Reihe nach:

$$x = 2 + \frac{1}{t'}, \quad t' = 1 + \frac{1}{u'}\,{}^{*)}, \quad u' = 4 + \frac{1}{v'}, \quad v' = 20 + \frac{1}{r'}, \ \ldots.$$

Daher wird:

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cdots}}}}};$$

die zweite positive Wurzel der vorgelegten Gleichung ist folglich:

$$x = 3{,}229\,521.$$

[305] 18.

Bisher haben wir angenommen, daß die vorgelegte Gleichung $V = 0$ keine gleichen Wurzeln hat. Man kann es stets so einrichten, daß man nur Gleichungen, die diese Bedingungen erfüllen, zu lösen hat. Wie man weiß, kann man die Auflösung einer Gleichung mit gleichen Wurzeln auf diejenige von Gleichungen niedrigeren Grades mit nur ungleichen Wurzeln, die der vorgelegten Gleichung genügen, zurückführen. Mit Hilfe der im voraufgehenden auseinandergesetzten Prinzipien kann man daher alle reellen Wurzeln bestimmen.

Trotzdem wird es nicht unnötig sein, den Nachweis dafür zu führen, daß, selbst wenn die vorgelegte Gleichung $V = 0$ gleiche Wurzeln hat, das in Nr. 2 ausgesprochene Theorem noch weiter richtig bleibt. Auch in diesem Falle kann es noch dazu dienen, alle reellen Gleichungswurzeln aufzufinden, ohne

*) Die transformierte Gleichung in u' lautet ebenso wie die Gleichung in u, zu der man bei der Berechnung der ersten Wurzel gelangte.

daß man die Gleichung in zwei oder mehrere Gleichungen mit ausschließlich ungleichen Wurzeln zu zerlegen nötig hat.

Nehmen wir an, daß man beim Aufsuchen des größten gemeinsamen Teilers von V und V_1, wie es in Nr. 1 auseinandergesetzt ist, zu einem Reste V_r gelangt, der Funktion von x ist und den voraufgehenden Rest V_{r-1} ohne Rest teilt. Dieser letzte Rest V_r ist dann der größte gemeinsame Teiler von V und V_1, und die Gleichung $V = 0$ hat gleiche Wurzeln.

Die aufeinanderfolgenden Divisionen ergeben die Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} V &= V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 &= V_2 Q_2 - V_3, \\ &\vdots \\ V_{r-2} &= V_{r-1} Q_{r-1} - V_r, \\ V_{r-1} &= V_r Q_r. \end{aligned} \tag{2}$$

[306] Wie man sieht, teilt V_r gleichzeitig alle Funktionen V, V_1, V_2, ... Bezeichnet man mit T, T_1, T_2, ..., T_r die Quotienten, welche die Division von V, V_1, V_2, ..., V_r durch V_r ergibt, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} T &= T_1 Q_1 - T_2, \\ T_1 &= T_2 Q_2 - T_3, \\ &\vdots \\ T_{r-2} &= T_{r-1} Q_{r-1} - T_r, \end{aligned} \tag{3}$$

und schließlich:

$$T_r = +1.$$

Wie wir jetzt beweisen werden, läßt sich das in Nr. 2 für das Funktionensystem V, V_1, V_2, ..., V_r ausgesprochene Theorem, das für die Gleichung $V = 0$ ungleiche Wurzeln voraussetzte, auch auf die neuen Funktionen T, T_1, T_2, ..., T_r anwenden, trotzdem T_1 nicht mehr die abgeleitete Funktion von T ist.

Zunächst weiß man, daß der größte gemeinsame Divisor V_r von V und V_1 sich aus dem Produkt der mehrfachen Faktoren von V zusammensetzt; jeder Faktor tritt dabei in einer Potenz auf, deren Exponent um eine Einheit kleiner als bei V ist. Hieraus folgt, daß der Quotient T, der sich bei der Division von V durch V_r ergibt, alle Faktoren von V, sowohl die einfachen als auch die mehrfachen, in der ersten Potenz enthält. Die Gleichung $T = 0$ hat daher dieselben Wurzeln wie die vorgelegte Gleichung $V=0$; jede dieser Wurzeln tritt aber bei $T=0$ nur einmal auf.

Wir wollen untersuchen, wie die Vorzeichenreihe der Funktionen $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$, wenn x verschiedene Werte annimmt, Vorzeichenwechsel verliert oder gewinnt. Die Vorzeichenreihe kann sich nur infolge der Vorzeichenwechsel ändern, welche die Funktionen $T, T_1, T_2, \ldots$ bei ihrem Verschwinden erleiden.

Wir behandeln zuerst den Fall, daß die erste Funktion T gleich Null wird. [**307**] c sei ein Wert von x, der T zu Null macht. Die Funktion T_1 kann nicht gleichzeitig mit T Null werden; denn würden T und T_1 für denselben Wert von x gleichzeitig Null, so würden auch infolge der Gleichungen (3) sämtliche andere Funktionen $T_2, T_3, \ldots$ und schließlich T_r gleichzeitig Null. Dies kann aber nicht eintreten, da $T_r = +1$ ist. Für $x=c$ besitzt T_1 daher einen von Null verschiedenen Wert. Legt man mithin dem x Werte $c-u$ und $c+u$, die sehr wenig von c verschieden sind, bei, so wird T_1 für diese Werte dasselbe Vorzeichen wie für $x=c$ haben.

Der Wert c, der T annulliert, ist auch eine Wurzel der Gleichung $V=0$. Nehmen wir an, daß c p-fache Wurzel von $V=0$ ist, oder, anders ausgedrückt, daß V durch $(x-c)^p$ teilbar ist. Bezeichnet man den Quotienten mit $\varphi(x)$, so hat man:

$$V=(x-c)^p \cdot \varphi(x);$$

die abgeleitete Funktion V_1 nimmt den Wert an:

$$V_1=(x-c)^{p-1} \cdot [p\,\varphi(x)+(x-c)\cdot\varphi'(x)].$$

Hieraus folgt:

$$\frac{V}{V_1}=\frac{(x-c)\,\varphi(x)}{p\,\varphi(x)+(x-c)\,\varphi'(x)}=\frac{x-c}{p+\dfrac{(x-c)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}}.$$

Nun ist aber:

$$V=T V_r \quad \text{und} \quad V_1=T_1 V_r,$$

daher wird:

$$\frac{V}{V_1}=\frac{T}{T_1}$$

und folglich:

$$\frac{T}{T_1}=\frac{x-c}{p+\dfrac{(x-c)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}}. \tag{4}$$

Diese Formel läßt erkennen, daß der Quotient $\frac{T}{T_1}$ für Werte von x, die ein klein wenig größer als c sind, positiv und [**308**] für Werte von x, die ein klein wenig kleiner als c sind, negativ wird. Für $x = c + u$ hat mithin T dasselbe Vorzeichen wie T_1, für $x = c - u$ ist das Vorzeichen von T entgegengesetzt zu dem von T_1. Verschwindet keine der anderen Funktionen T_2, T_3, ... für $x = c$, so hat jede von ihnen sowohl für $x = c - u$ als auch $x = c + u$ dasselbe Vorzeichen wie für $x = c$. Hieraus folgt, daß die Reihe der Vorzeichen der Funktionen T, T_1, T_2, ..., T_r einen Vorzeichenwechsel verliert, wenn x einen Wert, der die Funktion T allein annulliert, bei seinem Wachsen überschreitet.

Verschwindet eine der anderen Funktionen T_1, T_2, ..., T_{r-1} für einen Wert von x, der nicht gleichzeitig T auf Null reduziert, so bleibt die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Vorzeichenreihe dieselbe. Nehmen wir nämlich an, daß T_n für $x = b$ Null wird, so werden infolge der Gleichungen (3) die zwei benachbarten Funktionen T_{n-1} und T_{n+1} für $x = b$ von Null verschiedene Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen haben. Würde T_{n-1} oder T_{n+1} gleichzeitig mit T_n verschwinden, so müßten, wie man sieht, alle Funktionen bis T_r, dieses eingeschlossen, ebenfalls Null werden. Das ist aber unmöglich; denn T_r ist gleich 1. Wie auch immer das Vorzeichen von T_n für $x = b - u$ ist, so bilden, wenn man es zwischen die Vorzeichen von T_{n-1} und T_{n+1}, die entgegengesetzt sind, setzt, die drei Vorzeichen einen und nur einen Vorzeichenwechsel. Ebenso ist es auch für $x = b + u$. Hieraus folgt, daß in der Reihe der Vorzeichen von T, T_1, T_2, ..., T_r, falls eine zwischenliegende Funktion verschwindet, ohne daß die erste Funktion gleichzeitig Null wird, sich die Anzahl der Vorzeichenwechsel nicht ändert. Verschwindet aber die erste Funktion T, so verliert, wie wir oben gesehen haben, die Vorzeichenreihe einen Vorzeichenwechsel.

Hieraus folgt, daß, wenn x von A bis B wächst, soviel Werte von x zwischen A und B die Funktion T auf Null reduzieren, als die Reihe der Vorzeichen der Funktionen [**309**] T, T_1, T_2, ..., T_r für $x = B$ weniger Vorzeichenwechsel als für $x = A$ enthält.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die reellen Wurzeln der Gleichung $T = 0$, die auch die der vorgelegten Gleichung

$V = 0$ sind, bestimmen, ohne daß man hierbei auf die Funktion T und ihre Abgeleitete die Operation des größten gemeinsamen Divisors auszuführen braucht. Es genügt, V und V_1 nach der Methode des größten gemeinsamen Divisors zu behandeln.

Da die Gleichung $T = 0$ nur ungleiche Wurzeln hat, so muß man, nachdem man eine von ihnen berechnet hat, noch wissen, wievielmal sie in der vorgelegten Gleichung $V = 0$ auftritt. Wie oben bezeichnen wir mit c eine Wurzel der Gleichung $T = 0$, die p-fach in $V = 0$ auftritt. Da T nur einmal durch den Faktor $x - c$ teilbar ist, setzen wir:

$$T = (x - c)\,\psi(x).$$

Bezeichnet man mit T' die abgeleitete Funktion von T, so hat man:

$$T' = \psi(x) + (x - c)\,\psi'(x)$$

und folglich:

$$\frac{T}{T'} = \frac{x - c}{1 + \dfrac{(x - c)\,\psi'(x)}{\psi(x)}}.$$

Dividiert man den Wert von $\dfrac{T}{T'}$ durch den von $\dfrac{T}{T_1}$, der oben durch Formel (4) gefunden wurde, so erhält man:

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{p + \dfrac{(x - c)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{1 + \dfrac{(x - c)\,\psi'(x)}{\psi(x)}}.$$

Hieraus folgt, wenn man $x = c$ setzt:

$$\frac{T_1}{T'} = p.$$

[**310**] Hat man eine Wurzel c der Gleichung $T = 0$ berechnet, so setzt man sie in die zwei Funktionen T_1 und T'. Der Quotient, den man erhält, wenn man das erste Resultat durch das zweite dividiert, drückt aus, wievielfach diese Wurzel in der Gleichung $V = 0$ enthalten ist. Ist die Wurzel c irrational, so erhält man für T_1 und T' nur Näherungswerte; ihr Quotient wird aber nur sehr wenig von einer ganzen Zahl, die p ist, differieren. Übrigens kennt man auch andere Mittel,

um den Grad der Vielfachheit jeder Wurzel der Gleichung $V = 0$ zu bestimmen.

Schließlich ist noch zu bemerken nötig, daß man sich von der Ausführung der Division von $V, V_1, V_2, \ldots$ durch V_r befreien kann. Man hat:

$$V = TV_r,\ V_1 = T_1 V_r,\ V_2 = T_2 V_r,\ \ldots,\ V_r = T_r V_r.$$

Hat daher für einen gegebenen Wert von x die Funktion V_r einen positiven Wert, so hat für diesen Wert von x die Funktion V dasselbe Vorzeichen wie T, V_1 hat dasselbe Vorzeichen wie T_1, V_2 wie T_2, und so weiter, schließlich hat V_r dasselbe Vorzeichen wie T_r, denn T_r ist gleich $+1$. Hat aber V_r einen negativen Wert, so sind die Vorzeichen von $V, V_1, \ldots, V_r$ entgegengesetzt zu denjenigen von $T, T_1, \ldots, T_r$. Wie auch immer das Vorzeichen von V_r ist, es weist die Vorzeichenreihe von $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ die gleiche Anzahl von Vorzeichenwechseln wie die Vorzeichenreihe von $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$ auf. Aus dieser Bemerkung und dem voraufgehenden Satze folgert man, daß die Anzahl der reellen verschiedenen Wurzeln der Gleichung $V = 0$, die zwischen A und B liegen, wenn man von dem Grade der Vielfachheit jeder Wurzel absieht, gleich ist dem Überschuß an Vorzeichenwechseln der Vorzeichenreihe der Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ für $x = A$ über die für $x = B$. Unser Theorem ist so auf den Fall, daß die vorgelegte Gleichung $V = 0$ gleiche Wurzeln hat, ausgedehnt.

[311] 19.

Man kann wissen wollen, wie die Vorzeichenreihe der Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ sich zu verändern hat, damit sie jedesmal beim Verschwinden von V einen Vorzeichenwechsel verlieren kann.

In Nr. 4 und 18 haben wir gesehen, daß, wenn c eine einfache oder mehrfache Wurzel der Gleichung $V = 0$ ist, die zwei Funktionen V und V_1 für $x = c - u$ entgegengesetzte und für $x = c + u$ gleiche Vorzeichen besitzen müssen. Bezeichnet man mit c' die c unmittelbar folgende, einfache oder mehrfache Wurzel der Gleichung $V = 0$, so daß zwischen c und c' keine andere Wurzel gelegen ist, so sind für $x = c' - u$ die Vorzeichen von V und V_1 entgegengesetzt. V hat für alle Werte von x, die zwischen c und c' liegen, beständig dasselbe

Vorzeichen. Da V_1 für $x = c + u$ dasselbe, hingegen für $x = c' - u$ entgegengesetztes Vorzeichen wie V hat, so sieht man, daß V_1 für $x = c + u$ und $x = c' - u$ zwei Werte entgegengesetzten Vorzeichens besitzt. Wächst x folglich von $c + u$ bis $c' - u$, so muß V_1 einmal oder eine ungerade Anzahl von Malen sein Vorzeichen ändern.*)

γ sei der einzige oder der kleinste Wert von x zwischen c und c', bei dem V_1 sein Vorzeichen wechselt. V und V_1 haben dann für $x = \gamma - u$ dasselbe gemeinsame Vorzeichen [312] wie für $x = c + u$. Für $x = \gamma + u$ hat V dasselbe, V_1 hingegen entgegengesetztes Vorzeichen. V_2 wird für die drei Werte $\gamma - u$, γ, $\gamma + u$ (Nr. 5) entgegengesetztes Vorzeichen wie V annehmen. Ist z. B. V für $x = c + u$ positiv, so hat man folgende Tabelle:

	V	V_1	V_2
für $x = \gamma - u$	$+$	$+$	$-$
$x = \gamma$	$+$	0	$-$
$x = \gamma + u$	$+$	$-$	$-$.

Bevor x den Wert c erreichte, der V annulliert, bildeten die Vorzeichen von V und V_1 einen Vorzeichenwechsel. Dieser ändert sich, nachdem x den Wert c überschritten hat, in eine Vorzeichenfolge. Diese Vorzeichenfolge bleibt erhalten, bis V_1 sein Vorzeichen geändert hat. Nachdem V_1 sein Vorzeichen gewechselt hat, wird die Vorzeichenfolge in einen Vorzeichenwechsel übergehen. Gleichzeitig ändert sich aber ein Vorzeichenwechsel, der durch die Vorzeichen von V_1 und V_2 gebildet wird, in eine Vorzeichenfolge. Mithin wird in der Gesamtreihe der Vorzeichen die Anzahl der Vorzeichenwechsel weder vermehrt, noch vermindert.

Ändert V_1 bei einem neuen Wert von x, der zwischen c und c' liegt, zum zweiten Male sein Vorzeichen, so wird der

*) Diese Eigenschaft, die das Fundament der *von Rolle* und *de Gua* zur Auflösung der Gleichungen vorgeschlagenen Methode bildet, ist bekanntlich nicht bloß auf die rationalen Funktionen beschränkt. Man beweist diese Eigenschaft für irgend eine Funktion $f(x)$ einer Variablen x leicht durch die Bemerkung, daß, wenn die abgeleitete Funktion $f'(x)$ für alle Werte von x zwischen zwei gegebenen Grenzen positiv oder negativ ist, die Funktion $f(x)$ in dem Intervall beständig wachsen oder abnehmen muß. Hieraus folgt, daß die Funktion $f(x)$ nicht für zwei zwischen diesen zwei Grenzen gelegene Werte verschwinden kann.

Vorzeichenwechsel, den die Vorzeichen von V und V_1 bilden, ehe x diesen Wert erreicht, von neuem durch eine Vorzeichenfolge ersetzt. Wegen des V_2 bleibt indessen in der Vorzeichenreihe die Anzahl der Vorzeichenwechsel ungeändert. Da V_1 auf diese Art nur eine ungerade Anzahl von Malen sein Vorzeichen ändern kann, so bilden nach der letzten Änderung die Vorzeichen von V und V_1 einen Vorzeichenwechsel, der bestehen bleibt, bis x den Wert c', der V annulliert, erreicht. Der Fall, daß V_1 ohne Änderung seines Vorzeichens verschwindet, ist hier nicht zu betrachten.

[313] 20.

Ist V_1 die abgeleitete Funktion von V, so wissen wir, daß, wenn V für $x = c$ Null wird, V für $x = c - u$ entgegengesetztes und für $x = c + u$ dasselbe Vorzeichen wie V_1 hat. Kürzer kann man dies auf die folgende Art ausdrücken: der Quotient $\frac{V}{V_1}$ geht beim Verschwinden von V immer vom Negativen zum Positiven über.

Für das Folgende nehmen wir an, daß V_1 nicht mehr die abgeleitete Funktion von V, sondern irgend ein Polynom von niedrigerem Grade als dem von V sei, das mit V keinen reellen Faktor gemeinsam hat. Ebenso wie man sich in Nr. 1 des abgeleiteten Polynoms bedient hat, wird man das jetzige Polynom V_1 benutzen können, um andere Polynome $V_2, V_3, \ldots$ von abnehmendem Grade herzustellen.

Wir betrachten das neue Funktionensystem $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, das auch die Gleichungen (1) befriedigt. Erreicht und überschreitet x, wenn es wächst, einen Wert c, der V annulliert, so kann der Quotient $\frac{V}{V_1}$ vom Negativen zum Positiven oder vom Positiven zum Negativen übergehen oder endlich sein Vorzeichen überhaupt nicht ändern. Im ersteren Fall verliert die Vorzeichenreihe der Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ einen Vorzeichenwechsel, im zweiten Fall gewinnt sie dagegen einen Vorzeichenwechsel, im dritten Fall ändert sich die Anzahl der Vorzeichenwechsel nicht. Das Verschwinden einer zwischen V und V_r gelegenen Funktion kann die Anzahl der Vorzeichenwechsel nicht ändern. (Nr. 5.) Hieraus ergibt sich leicht folgendes Theorem, das für den Fall, daß V_1 nicht mehr die abgeleitete Funktion von V ist, das in Nr. 2 ersetzt:

Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $V = 0$, die zwischen den zwei Zahlen A und B liegen, und für die der [314] Quotient $\frac{V}{V_1}$ vom Negativen zum Positiven übergeht, weniger der Anzahl der Wurzeln derselben Gleichung, die zwischen A und B liegen, und für die $\frac{V}{V_1}$ vom Positiven zum Negativen übergeht, ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel, die sich in der Vorzeichenreihe der Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ für $x = A$ vorfinden, weniger der sich für $x = B$ ergebenden Anzahl von Vorzeichenwechseln.

Die Anzahl aller zwischen A und B gelegenen Wurzeln der Gleichung $V = 0$ kann daher nicht kleiner als die Differenz dieser zwei Zahlen von Vorzeichenwechseln sein; sie kann aber gleich dieser Differenz werden oder sie um eine gerade Zahl übertreffen. Damit sie ihr genau gleich sei, muß V_1 die abgeleitete Funktion von V sein oder eine Funktion vorstellen, die für alle reellen Werte von x zwischen A und B, die V annullieren, stets das gleiche oder stets entgegengesetztes Vorzeichen wie die Abgeleitete besitzt. Da man eine solche Funktion a priori nicht kennt, so ist man genötigt, um alle reellen Wurzeln der Gleichung $V = 0$ sicher bestimmen zu können, für V_1 die Abgeleitete von V zu nehmen.

21.

Ist V_1 die abgeleitete Funktion von V, so ist das System der Hilfsfunktionen $V_1, V_2, V_3, \ldots$, das man nach dem Verfahren des größten gemeinsamen Teilers aus V und V_1 herleitet, nicht das einzige, das man zur Aufsuchung der reellen Wurzeln der Gleichung $V = 0$ verwenden kann. Wir werden sofort zeigen, daß man eine unendliche Anzahl anderer Funktionen bilden kann, die dieselben Eigenschaften besitzen.

Wir multiplizieren die abgeleitete Funktion V_1 mit $px + q$, wobei p und q Unbestimmte sind, und ziehen [315] von dem erhaltenen Produkte die Funktion V ab. Als Resultat erhalten wir ein Polynom $m$ten Grades. Dieses dividieren wir durch eine Funktion zweiten Grades der Form $ax^2 + bx + c$; dabei sind a, b, c bekannte Zahlen. Diese Zahlen sind so gewählt, daß die Form $ax^2 + bx + c$ für jeden reellen Wert von x beständig positiv ist oder wenigstens nur für einen einzigen reellen Wert von x, der V_1 nicht annulliert, verschwindet, für jeden anderen reellen Wert von x aber positiv wird. Die Division des Polynoms $V_1(px+q) - V$ durch ax^2+bx+c liefert einen Quotienten, der eine Funktion $m-2$ten Grades in x ist; wir bezeichnen sie mit V_2. V_2 enthält p und q in allen seinen Gliedern im ersten Grade. Bei der Division erhalten wir außerdem noch einen Rest ersten Grades der Form $Kx+L$, bei dem die Koeffizienten K und L die Unbestimmten p und q im ersten Grade enthalten. Wir setzen die Größen K und L gleich Null und bestimmen hieraus Werte für p und q, die gewöhnlich endlich und bestimmt ausfallen. Diese Werte substituieren wir in den Quotienten V_2, der ein völlig bekanntes Polynom wird. Die durch diese Rechnung bestimmte Funktion V_2 hängt mit V und V_1 durch die Gleichung:

$$V_1(px+q) - V = V_2(ax^2+bx+c) \qquad (5)$$

oder: $$V = V_1(px+q) - V_2(ax^2+bx+c) \qquad (6)$$

zusammen.

Ist der Koeffizient von x^{m-2} in V_2 nicht gleich Null, so bildet man auf dieselbe Art eine Funktion V_3 vom Grade $m-3$, indem man das Polynom $V_2(rx+s) - V_1$ durch einen neuen Divisor zweiten Grades ex^2+fx+g dividiert. Dieser Divisor soll auch für alle reellen Werte von x positiv sein und nur für einen einzigen Wert von x, der jedoch V_2 nicht annulliert, verschwinden können. r und s bestimmt man so, daß [316] der Rest der Division Null wird; die gefundenen Werte führt man in V_3 ein. Man hat dann:

$$V_1 = V_2(rx+s) - V_3(ex^2+fx+g). \qquad (6)$$

Wäre V_2 vom Grade $m-3$, so würde man das Binom $rx+s$ durch ein Trinom rx^2+sx+t ersetzen. In diesem Falle wäre $V_2(rx^2+sx+t) - V_1$ durch ex^2+fx+g zu dividieren und r, s, t so zu bestimmen, daß der Quotient V_3 höchstens vom Grade $m-4$ würde. V_3 hätte dann der Gleichung:

$$V_1 = V_2(rx^2+sx+t) - V_3(ex^2+fx+g) \qquad (6)$$

zu genügen. Auf gleiche Art sind die Funktionen V_4, V_5, ... zu berechnen.

Hat die Gleichung $V=0$ keine gleichen Wurzeln, so kommt man zu einer letzten Funktion V_r, die x nicht mehr enthält. Käme man nämlich zu einer Funktion V_r, die x enthält, und wäre die folgende Funktion V_{r+1} identisch Null, so würde V_r

infolge der Gleichungen (6) gleichzeitig alle voraufgehenden Funktionen und daher auch V_1 und V teilen; dies ist aber gegen die Voraussetzung.

Beachtet man das voraufgehende, so hat das Theorem, das wir für die in Nr. 1 definierten Funktionen $V, V_1, V_2, \ldots,$ welche die Gleichungen (1) befriedigen, aussprachen, auch für die neuen Funktionen, deren Bildungsweise wir eben auseinandersetzten, Geltung. Auf das neue Funktionensystem $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ kann man nämlich das ganze in Nr. 3, 4 und 5 dargelegte Beweisverfahren anwenden. Da V_1 immer die abgeleitete Funktion von V ist, so wird die Vorzeichenreihe der angegebenen Funktionen jedesmal, wenn V verschwindet, einen Vorzeichenwechsel verlieren. Hingegen bleibt die Anzahl der Vorzeichenwechsel ungeändert, wenn eine der zwischenliegenden Funktionen [317] $V_1, V_2, \ldots$ verschwindet; denn die zwei Nachbarfunktionen haben dann von Null verschiedene Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen. Dies folgt leicht aus den Gleichungen (6) und unseren Annahmen.

Für das neue Funktionensystem $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ behält, vorausgesetzt, daß keines der Trinome $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g, \ldots$ die Funktion V teilt, das Theorem auch noch in dem Fall seine Gültigkeit, daß $V = 0$ gleiche Wurzeln hat.

Da der Divisor zweiten Grades $ax^2 + bx + c$, der zur Bildung der Funktion V_2 dient, bis auf die oben ausgesprochenen Bedingungen willkürlich gewählt werden kann, so wird man unendlich viele Funktionen, die mit V_2 bezeichnet werden dürfen, erhalten. Ebenso wird man aus V_1 und einer der Funktionen V_2 eine unendliche Menge von Funktionen V_3 herleiten, usw. Daher ist es möglich, eine unendliche Menge von Systemen von Hilfsfunktionen zu bilden, die zur Auflösung der Gleichung $V = 0$ geeignet sind.

Das durch die Gleichungen (1) definierte Funktionensystem, das wir in dieser Abhandlung besonders betrachtet haben, ist unter denen, die wir soeben angegeben haben, enthalten. Man kann es aus den allgemeinen Gleichungen (6) dadurch herleiten, daß man die Trinome $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g$ auf die Einheit oder einfach auf eine positive Zahl reduziert.

Es gibt noch ein anderes besonderes Mittel, das ebenso einfach wie das in Nr. 1 auseinandergesetzte ist und die Hilfsfunktionen zu bilden gestattet. Hat man zwei aufeinanderfolgende Funktionen V_{n-1} und V_n, so kann man die folgende

V_{n+1} dadurch bilden, daß man die Polynome statt, wie es gewöhnlich geschieht, nach fallenden, nach steigenden Potenzen von x anordnet. Die Division wird einen Quotienten [318] der Form $p + qx$ und einen durch x^2 teilbaren Rest ergeben. Vertauscht man die Vorzeichen aller Glieder dieses Restes und dividiert ihn durch x^2, so hat man die Funktion V_{n+1}. Sie hängt mit V_{n-1} und V_n durch die Relation:

$$V_{n-1} = V_n(p + qx) - V_{n+1}x^2$$

zusammen.

Reduziert man die Trinome $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g$ in den allgemeinen Gleichungen (6) auf das einzige Glied x^2, so kommt man auf die zuletzt angegebene Relation.

Um V_{n+1} zu erhalten, kann man die Division von V_{n-1} durch V_n auf zwei verschiedene Arten ausführen; man kann die Polynome nach steigenden oder nach fallenden Potenzen von x anordnen. Die Kombination dieser zwei Prozesse ergibt mehrere Systeme von Hilfsfunktionen, die zur Auflösung der Gleichung $V = 0$ gleichmäßig geeignet sind. Hieraus folgen auch mehrere Größensysteme, die von den Koeffizienten der Gleichung abhängen, und deren Vorzeichen die Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung kennen lehren.

Auch noch andere Mittel würden zur Bildung der Hilfsfunktionen existieren. Ausführlichere Einzelheiten über diesen Gegenstand würden aber überflüssig sein.

Anmerkungen.

Charles Sturm wurde am 29. September 1803 in Genf, wo er auch seine Schulbildung erhielt, geboren. Mit fünfzehn Jahren trat er als Studierender in die Akademie seiner Vaterstadt ein. Durch seine Fähigkeiten zog der Student die Aufmerksamkeit seines als Mathematikers wohl bekannten Lehrers *Simon Lhuilier* (1750—1840), der ihm eine glänzende Zukunft voraussagte, auf sich. Der Tod des Vaters im Jahre 1819 zwang den Jüngling, private Lehrtätigkeit auszuüben, um als ältestes von vier Kindern für sich und die Familie zu sorgen. Im Jahre 1825 siedelte *Sturm* mit seinem Jugendfreunde *Daniel Colladon*, der später in Genf als Professor für Physik wirkte, nach Paris über, wo er schon vorher (1823) als Begleiter seines Schülers, eines Sohnes der Frau *von Staël*, kurze Zeit gewesen war. 1827 empfingen *Sturm* und *Colladon* für ihre gemeinsam ausgeführten Untersuchungen über den Druck der Flüssigkeiten (1834 erschienen im fünften Bande der Mémoires des savants étrangers) den großen mathematischen Preis der Pariser Akademie. In das Jahr 1829 fällt die erste Veröffentlichung von *Sturms* berühmtem algebraischen Fundamentalsatz. 1830 verschaffte *Aragos* Protektion *Sturm* eine Professur am Collège Rollin in Paris. 1836 wurde der Gelehrte als *Ampères* Nachfolger Mitglied der Pariser Académie des sciences. Vorher (1834) hatte sie ihn zum zweiten Male, und zwar für seine algebraischen Untersuchungen, durch ihren großen mathematischen Preis ausgezeichnet. Satzungsgemäß sollte der Preis dem Verfasser der wichtigsten, in den letzten Jahren gemachten mathematischen Entdeckung verliehen werden. 1840 erhielt *Sturm* die Professur für Analysis an der École polytechnique, sowie auch die Professur für Mechanik an der Faculté des sciences in Paris; die letztere hatten als seine Vorgänger *Laplace* und *Poisson* innegehabt. Im Jahre 1851 wurde *Sturm* leidend. Am 18. Dezember 1855 setzte der Tod seinem an Erfolgen und Ehren reichen Leben ein Ziel.

Die Persönlichkeit des hervorragenden Gelehrten schilderte sein Freund *Joseph Liouville* (1809—1882) in der am 20. Dezember 1855 gehaltenen Grabrede mit folgenden Worten: »Meinen Augen erschien er wie ein zweiter Ampère. Offenherzig und gleichgültig gegen das Glück und die Eitelkeiten des Lebens verbanden sie beide mit dem erfinderischen Geiste ein enzyklopädisches Wissen. Vernachlässigt und gering geachtet von den auf ihren eigenen Vorteil bedachten Männern, die nur nach Macht gelüsten, übten sie beide auf die Jugend in unseren Schulen, an denen das Genie nie eindruckslos vorübergeht, einen hohen Einfluß aus. Ohne es zu wünschen, ja vielleicht selbst ohne es zu wissen, besaßen sie große Popularität«.

Die wissenschaftlichen Arbeiten *Sturms* sind vorzugsweise Fragen der theoretischen Physik, der Algebra und der Theorie der Differentialgleichungen gewidmet. Hier heben wir nur seine klassisch gewordenen Resultate über gewisse Eigenschaften reeller Lösungen reeller linearer homogener Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, die rein mathematisch wie auch physikalisch wichtig sind, hervor. Eine eingehende Würdigung dieser Untersuchungen, die das von *F. Klein* (Göttinger Nachrichten, März 1890) sogenannte Oszillationstheorem betreffen, und eine Schilderung der hervorragenden Stellung, die ihnen in der modernen Literatur zukommt, findet man in dem Aufsatze von *M. Bôcher*: »Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Diffentialgleichungen«, der sich im zweiten Bande der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, S. 437—463 befindet.

Biographische Nachrichten, sowie eine vollständige Aufzählung und teilweise Charakterisierung sämtlicher *Sturm*scher Arbeiten gibt *Prouhet* (1817—1867), ein Schüler von *Sturm*, im Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathém. (1856), S. 72—89 (Supplement zum 15. Bde. der Nouvelles Annales de Mathématiques). Der Aufsatz ist auch in dem erst nach *Sturms* Tode erschienenen Cours d'analyse wieder abgedruckt. Ebenfalls posthum ist der Cours de mécanique. Beide Werke, eine Frucht von *Sturms* Lehrtätigkeit, sind von *Prouhet* herausgegeben und haben eine stattliche Anzahl von Auflagen erlebt.

Die bedeutendste Leistung von *Sturm* ist in dem hier zum ersten Male in deutscher Übersetzung erscheinenden »*Mémoire sur la résolution des équations numériques*« niedergelegt. Diese Schrift ist unzweifelhaft diejenige Arbeit, der wir den hervorragendsten Fortschritt in der Behandlung der numerischen Auflösung der algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten verdanken. Die Abhandlung ist dem nach des Verfassers Namen genannten *Sturm*schen Lehrsatze gewidmet, der zum ersten Male die genaue Anzahl reeller Wurzeln einer reellen numerischen Gleichung zwischen zwei gegebenen Zahlen zu bestimmen gestattete, während die früheren Kriterien nur eine Grenze für jene Zahl lieferten. In der schon erwähnten Grabrede rühmt *Liouville* mit Recht die in der vorliegenden Arbeit erzielten Resultate in folgenden Worten: »Durch diese grundlegende Entdeckung hat *Sturm* die Elemente der Algebra mit neuen Resultaten bereichert und sie hierdurch gleichzeitig vereinfacht wie vervollkommt. . . . Er hat das Glück gehabt, eine derjenigen Wahrheiten zu finden, welche die Jahrhunderte überdauern, ihre Gestalt nicht verändern und den Namen des Erfinders wie Kugel und Zylinder den des Archimedes bewahren.«

Die Anregung zur Beschäftigung mit der Gleichungstheorie verdankt *Sturm* *Fourier*s algebraischen Arbeiten; diese sind erst 1831 nach *Fourier*s Tode in seiner Analyse des équations déterminées, die ich auch als Nr. 127 der *Ostwald*schen Klassiker der exakten Wissenschaften in deutscher Übersetzung herausgegeben habe, vollständig erschienen. Sein Verhältnis zu *Fourier* hat *Sturm* selbst im elften Bande des Bulletin des sciences de Férussac, wo er 1829 seinen berühmten Satz ohne Beweis mitteilte, auf folgende Art dargestellt: »Das Werk, das seine gesamten Arbeiten über algebraische Analysis in sich vereinigen soll, ist noch nicht erschienen. Ein Teil des Manuskriptes, das diese kostbaren Untersuchungen enthält, ist einigen Personen mitgeteilt worden. Herr *Fourier* hat mir gern dessen Lektüre gestattet, ich konnte es infolgedessen mit Muße studieren. Ich erkläre daher, volle Kenntnis aller noch nicht herausgegebenen Arbeiten von Herrn *Fourier* zu haben, die sich auf die Auflösung der Gleichungen beziehen, und ich benutze diese Gelegenheit, um ihm meine Dankbarkeit für seine Güte zu bezeugen. Dadurch, daß ich mich auf die von ihm geschaffenen Prinzipien stützte und seine Beweise nachbildete, habe ich die neuen Theoreme, die ich hier ausspreche, gewonnen.«

Zur Geschichte der Erfindung des *Sturm*schen Theorems enthält der sechste Band der zweiten Serie der Nouvelles Annales de Mathématiques (1867) eine interessante Polemik zwischen *Prouhet* (a. a. O., S. 238) und *Duhamel* (a. a. O., S. 428).

Es möge hier in Übersetzung folgende Mitteilung von *Duhamel* folgen: »Eines Tages, als wir von der Akademie zurückkehrten, fragte ich ihn, wie er zu seiner Entdeckung gekommen wäre. Mit der ihm eigenen Einfachheit und Gutmütigkeit antwortete er sogleich: Die Unvollkommenheit des *Fourier*schen Theorems war, wie ich bemerkte, darin begründet, daß die betrachtete Reihe von Polynomen Vorzeichenwechsel verlieren kann, ohne daß das erste Polynom Null wird, d. h. ohne daß man eine Wurzel der Gleichung passiert. Hieraus folgt, daß die Differenz zwischen den Vorzeichenwechseln, die zwei gegebenen Zahlen entsprechen, nur eine obere Grenze, nicht aber die genaue Anzahl der Wurzeln zwischen diesen zwei Zahlen angeben kann.

Infolgedessen fragte ich mich, ob es nicht möglich wäre, solche Funktionen zu finden, bei denen, wenn x von der unteren Grenze der reellen Wurzeln einer Gleichung zu der oberen Grenze kontinuierlich übergeht, nur in dem Falle Vorzeichenwechsel verloren würden, wenn x einen Wert, der gleich einer Wurzel ist, passiert. Daß mir dies gelungen ist, wissen Sie.«

Der von *Duhamel* weiter ausgesprochenen Ansicht kann man wohl nur beipflichten: »Auf welche Art und Weise *Sturm* dazu gekommen ist, die Reste, zu denen die Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zwischen der linken Seite der Gleichung und ihrer Abgeleiteten führt, mit veränderten Vorzeichen zu nehmen, können wir unmöglich wissen. Vielleicht ist ihm selbst die Spur hiervon verloren gegangen; dies geschieht ja oft bei denjenigen Erfindungen, für die logische Deduktionen sich als ungenügend erweisen, und die das erfordern, was man mit Genie bezeichnet. Eine plötzliche Erleuchtung des Geistes tritt ein, sie hängt sicher von den vorher gesammelten Ideen ab, hierfür verlischt aber das Gefühl bei dem Erfinder selbst so plötzlich, daß er, wie man es oft gehört hat, fast zu glauben geneigt ist, nur dem Zufalle seine Erfindung zu verdanken.«

Sturm hat seinen Lehrsatz im Mai 1829 der Pariser Akademie vorgelegt und ihn hierauf, wie bereits erwähnt, im Bulletin des sciences de Férussac veröffentlicht. Ein Beweis des Satzes wurde 1830 von *v. Ettinghausen* im 7. Bande der Wiener Zeitschrift für Mathematik und Physik gegeben. (Reproduziert im 13. Bande des Crelleschen Journals f. d. r. u. ang. Math. [1835], S. 119.) 1832 erschien auch in der ersten Auflage der Algebra von *Choquet* und *Mayer* ein Beweis des

*Sturm*schen Satzes. (Vgl. *Prouhet*, Bulletin de bibliographie etc. [1856], S. 83). Die hier vorliegende Arbeit hat *Sturm* im 6. Bande der Mémoires présentés par divers savans à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France (1835), S. 271—318, publiziert. Die unserer Übersetzung in eckigen Klammern beigefügten Zahlen beziehen sich auf die Seiten der Originalabhandlung.

Die in *Sturms* Aufsatze bei der Operation des Aufsuchens des größten gemeinsamen Teilers von V und $V_1 = \frac{dV}{dx}$ auftretenden Reste $V_2, V_3, \ldots, V_r$ (vgl. Gleichungen (1), S. 5) hat zuerst *J. J. Sylvester* (1814—1897) im 15. Bande des London and Edinburgh Philosophical Magazine (1839), S. 434, durch die Gleichungswurzeln auszudrücken versucht. Ist $V = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_m)$, wobei $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \ldots \neq \alpha_m$ sei, $V_1 = \frac{dV}{dx} = V \sum_{k_1=1}^{k_1=m} \frac{1}{x - \alpha_{k_1}}$, so wird für den sogenannten allgemeinen Fall, d. h. der Grad jeder Funktion $V_i \, (i = 1, 2, 3, \ldots)$ ist immer nur um eins kleiner als der der voraufgehenden Funktion, wie *Sturm* dies in Nr. 13 der vorliegenden Arbeit annimmt,

$$V_i = \frac{V}{\lambda_i} \sum \frac{\Delta(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_i})^2}{(x - \alpha_{k_1})(x - \alpha_{k_2}) \ldots (x - \alpha_{k_i})}, \quad i = 2, 3, \ldots, m. \quad \text{(I)}$$

$\Delta(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_i})^2$ ist hierbei das Quadrat des aus $\frac{i(i-1)}{2}$ Faktoren bestehenden Differenzenproduktes der i Wurzeln $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_i}$ der Gleichung $V = 0$. V_i ist eine Summe von $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i}$ Summanden, die erhalten wird, indem man in dem hinter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck für $k_1, k_2, \ldots, k_i$ auf alle möglichen Arten i verschiedene der m Zahlen $1, 2, \ldots, m$ setzt. Die Größen λ_i sind bestimmt durch

$$\lambda_2 = m^2, \quad \lambda_i \cdot \lambda_{i+1} = \left[\sum \Delta(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_i})^2\right]^2, \quad i = 2, 3, \ldots, m-1.$$

Es ist $\sum \Delta(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_i})^2$ eine ganze rationale symmetrische Funktion der Gleichungswurzeln von $V = 0$; folglich werden die Größen λ_i augenscheinlich Quadrate rationaler symmetrischer Funktionen der Gleichungswurzeln von $V=0$ und drücken sich daher als Quadrate rationaler Verbindungen der Gleichungskoeffizienten von $V=0$ aus. Da sämtliche Koeffizienten von $V=0$ reell sein sollen, so besitzen die λ_i ausschließlich positive Werte. Zur Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung $V=0$ mit reellen Koeffizienten zwischen den Grenzen A und B kann man nach Nr. 7 (vgl. S. 10) von den positiven Faktoren λ_i absehen, so daß man für den betrachteten regulären Fall statt der durch (I) gegebenen Funktionen V_i die Funktionen $\lambda_i V_i$ benutzen kann.

Den ersten Beweis für das von *Sylvester* unbewiesen angegebene Resultat lieferte *Sturm* selbst in der Arbeit »Démonstration d'un théorème d'algèbre de *M. Sylvester*« (Journ. de math., **7**, 1842, 356); hierbei hat er auch die von *Sylvester* nicht exakt angegebenen λ_i bestimmt. In seiner großen, 1853 in den Philosophical Transactions, **143**, 407—548 veröffentlichten Arbeit: »On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of *Sturm*'s functions and that of the greatest algebraical common measure«, hat dann *Sylvester* noch weitergehend die Darstellung der beim *Sturm*schen Restverfahren sich ergebenden Reste durch die Gleichungswurzeln behandelt.

Wir können hier nicht die zahlreichen Arbeiten, die durch die *Sturm*sche Abhandlung angeregt wurden, sämtlich aufzählen, wir beschränken uns darauf, die Beziehungen des *Sturm*schen Problems zu der Theorie der reellen quadratischen Formen zu besprechen. Dieses fruchtbare und wesentlich neue Moment der Verknüpfung der Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Koeffizienten zwischen zwei gegebenen Grenzen mit der Theorie der reellen quadratischen Formen verdankt man *Charles Hermite* (1822—1901) (Sur l'extension du théorème de *M. Sturm* à un système d'équations simultanées, Compt. rend. de l'acad. de Paris, **35**, 1852, 52, ferner Remarques sur le théorème de *M. Sturm*, ibidem **36**, 1853, 294) und *Sylvester* in der zuletzt genannten Arbeit. Hat die Gleichung $m$ten Grades $V=0$ mit reellen Koeffizienten die m verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, und bedeutet $\varphi(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von x mit reellen Koeffizienten, so adjungiert *Hermite* der Gleichung $V=0$ die für reelle Werte von x reelle quadratische Form:

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{x-\alpha_k}(u_1+\varphi(\alpha_k)u_2+\varphi(\alpha_k)^2u_3+ \\ +\varphi(\alpha_k)^3u_4+\cdots+\varphi(\alpha_k)^{m-1}u_m)^2$$

der m reellen Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Aus ihr leitet er eine wegen der willkürlichen Funktion $\varphi(x)$ unendliche Mannigfaltigkeit von Funktionensystemen ab, von denen jedes die genaue Anzahl der zwischen zwei gegebenen Grenzen liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $V=0$ zu bestimmen gestatten soll. (Vgl. S. 57.) *Sylvester* beruft sich in den Phil. Trans. (1853), S. 483 ff. bei Einführung der allgemeineren reellen quadratischen Form:

$$g=\sum_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q(\psi_1(\alpha_k)u_1+\psi_2(\alpha_k)u_2+\cdots+\psi_m(\alpha_k)u_m)^2,$$

wobei q eine ungerade, positive oder negative ganze Zahl, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\ldots$, $\psi_m(x)$ willkürliche ganze rationale Funktionen von x mit reellen Koeffizienten bedeuten, auf eine Mitteilung von *Hermite*. Durch sie hatte er Kenntnis, daß die von ihm gegebenen $\frac{\lambda_i V_i}{V}$ [vgl. S. 44, Gleichungen (I)] Determinante bezüglich Hauptunterdeterminanten der für die besondere Funktion $\varphi(x)=x$ spezialisierten, am Anfange der Seite angegebenen quadratischen Form werden. (Vgl. S. 57.)

Sylvester bringt am eben angeführten Orte, ausgehend von der quadratischen Form g, das *Sturm*sche Problem mit dem von ihm gefundenen und von ihm sogenannten Trägheitsgesetze der reellen quadratischen Formen (zuerst mitgeteilt im Philosophical Magazine, (4) **4**, [1852], 142, dann bewiesen in Phil. Trans. [1853], 481) in Zusammenhang. Dieses Trägheitsgesetz besagt, daß, wie auch immer eine quadratische Form mit reellen Koeffizienten in eine Summe von positiven und negativen Quadraten linear unabhängiger, reeller, linearer, homogener Formen transformiert wird, die Anzahl der positiven ebenso wie die Anzahl der negativen Quadrate unveränderlich ist. Bezüglich der Geschichte des Trägheitsgesetzes wissen wir, daß *Riemann* (1826—1866) sowohl das Gesetz als auch dessen bekannten einfachen Beweis aus *Gauß*' Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate, die *Riemann* wahrscheinlich 1846/47 hörte, kannte. Vgl. *Bernhard Riemanns* ges. Werke, Nachträge, herausgeg. von *M. Noether* und *W. Wirtinger* (1902), S. 59. Auch *Jacobi* (1804—1851) war seit 1847, also vor *Sylvesters* Publikation, auf das Trägheitsgesetz und dessen Beweis geführt worden. *Jacobis* Beweis ist aus seinen hinterlassenen Papieren 1857 von *Borchardt* (1817—1880) im 53. Bande des *Crelle*schen Journals f. d. r. u. ang. Math., S. 275 mitgeteilt worden. Der gleiche Band enthält auch einen Beweis des Prinzips von *Hermite*, sowie interessante Bemerkungen zu *Jacobis* und *Hermites* Aufsätzen von *Borchardt*.

Für die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen dem Trägheitsgesetze der reellen quadratischen Formen und dem *Sturm*schen Problem können wir in der quadratischen Form g — man kann übrigens statt g eine noch etwas allgemeinere quadratische Form zugrunde legen (*Brioschi*, Nouvelles Annales de Math., 15, 1856, 272) — jede der willkürlichen ganzen rationalen Funktionen $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ mit reellen Koeffizienten, da sie nur für die Wurzeln von $V = 0$ betrachtet wird, mit Hilfe von $V = 0$ vom Grade $m - 1$ oder von niedrigerem Grade annehmen. Es sei:

$$\psi_i(x) = b_0^{(i)} x^{m-1} + b_1^{(i)} x^{m-2} + \cdots b_{m-1}^{(i)},$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Für das Folgende setzen wir voraus, daß die willkürlich zu wählenden Funktionen $\psi_i(x)$ linear unabhängig seien, d. h. die Determinante

$$| b_j^{(i)} | \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m-1; \; i = 1, 2, \ldots, m)$$

von Null verschieden ist.

Die imaginären Wurzeln von $V = 0$ ordnen sich wegen der reellen Koeffizienten von $V = 0$ in Paare von konjugiert imaginären; diese mögen mit $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2, \ldots, \alpha_{m_1}, \bar{\alpha}_{m_1}$ bezeichnet sein. Die reellen Wurzeln von $V = 0$ mögen $\alpha_{2m_1+1}, \alpha_{2m_1+2}, \ldots, \alpha_m$ lauten. Nach Voraussetzung habe $V = 0$ lauter verschiedene Wurzeln.

Die quadratische Form g läßt sich in Teile zerlegen. Der Teil:

$$(x - \alpha_k)^q (\psi_1(\alpha_k) u_1 + \psi_2(\alpha_k) u_2 + \cdots \psi_m(\alpha_k) u_m)^2,$$

der einer der reellen Wurzel $\alpha_k = \alpha_{2m_1+k_2}$ $(k_2 = 1, 2, \ldots, m - 2m_1)$ entspricht, ist, da die ψ_i reelle Koeffizienten $b_j^{(i)}$ haben und für x nur reelle Werte in Frage kommen, reell. Jedem Teile von g:

$$(x-\alpha_k)^q \cdot (\psi_1(\alpha_k)u_1 + \psi_2(\alpha_k)u_2 + \cdots \psi_m(\alpha_k)u_m)^2,$$

der einer der imaginären Wurzeln $\alpha_k = \alpha_{k_1}$ $(k_1 = 1, 2, \ldots, m_1)$ entspricht, läßt sich der Teil von g zuordnen, der zu der entsprechenden konjugiert imaginären Wurzel $\overline{\alpha}_{k_1}$ $(k_1 = 1, 2, \ldots, m_1)$ gehört. Mithin ist g eine reelle quadratische Form.

Wir setzen:

$$(x-\alpha_{k_1})^q = \varrho_{k_1}(\cos\varphi_{k_1} + i\sin\varphi_{k_1}), \quad i=\sqrt{-1},$$
$$k_1 = 1, 2, \ldots, m_1,$$

und folglich, da x reell ist, die konjugiert imaginäre Größe:

$$(x-\overline{\alpha}_{k_1})^q = \varrho_{k_1}(\cos\varphi_{k_1} - i\sin\varphi_{k_1}), \quad i=\sqrt{-1},$$
$$k_1 = 1, 2, \ldots, m_1.$$

Unter $\sqrt{\varrho_{k_1}}$ verstehen wir einen willkürlich zu wählenden, aber, wenn einmal gewählt, festen Wert der zwei möglichen reellen Werte, die die Quadratwurzel aus der positiven Größe ϱ_{k_1} annehmen kann. In g führen wir die m neuen reellen Variablen $w_1, w_2, \ldots, w_m$ durch die Gleichungen:

$$w_{k_1} + i\,w_{k_1+m_1} = \sqrt{\varrho_{k_1}}\left(\cos\frac{\varphi_{k_1}}{2} + i\sin\frac{\varphi_{k_1}}{2}\right) \times$$
$$\times\,(\psi_1(\alpha_{k_1})u_1 + \psi_2(\alpha_{k_1})u_2 + \cdots + \psi_m(\alpha_{k_1})u_m),$$

$$w_{k_1} - i\,w_{k_1+m_1} = \sqrt{\varrho_{k_1}}\left(\cos\frac{\varphi_{k_1}}{2} - i\sin\frac{\varphi_{k_1}}{2}\right) \times$$
$$\times\,(\psi_1(\overline{\alpha}_{k_1})u_1 + \psi_2(\overline{\alpha}_{k_1})u_2 + \cdots + \psi_m(\overline{\alpha}_{k_1})u_m),$$
$$k_1 = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$w_{2m_1+k_2} = \psi_1(\alpha_{2m_1+k_2})u_1 + \psi_2(\alpha_{2m_1+k_2})u_2 + \cdots$$
$$\cdots + \psi_m(\alpha_{2m_1+k_2})u_m,$$
$$k_2 = 1, 2, \ldots, m-2m_1,$$

ein.

Die Determinante der Koeffizienten von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in den eben angegebenen Transformationsgleichungen wird gleich $\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_{m_1}|\psi_i(\alpha_k)|$; dabei ist $|\psi_i(\alpha_k)|$ die Determinante der m^2 Größen $\psi_i(\alpha_k)$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, m)$, wo unter $\alpha_{k_1+m_1}$ die Wurzel $\overline{\alpha}_{k_1}$ $(k_1 = 1, 2, \ldots, m_1)$ zu verstehen ist. Nach dem Multiplikationssatze für Determinanten wird $|\psi_i(\alpha_k)|$ gleich dem Produkt aus der nach Annahme von Null verschiedenen Determinante $|b_j^{(i)}|$ der linear unabhängigen Funktionen $\psi_i(x)$ in die Potenzdeterminante von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; diese ist gleich dem Differenzenprodukt der m Wurzeln, das nicht verschwindet, weil $V = 0$ nach Annahme lauter verschiedene Wurzeln hat. Da x reell sein soll, α_{k_1} $(k_1 = 1, 2, \ldots, m_1)$ imaginär ist, so kann $(x - \alpha_{k_1})^q$ nicht Null werden; mithin sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{m_1}$ von Null verschiedene Größen. Hieraus folgt, daß die Determinante der Koeffizienten von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in den Transformationsgleichungen nicht verschwindet, also $w_{k_1} + i\, w_{m_1+k_1}$, $w_{k_1} - i\, w_{m_1+k_1}$ $(k_1 = 1, 2, \ldots, m_1)$, $w_{2m_1+k_2}$ $(k_2 = 1, 2, \ldots, m - 2m_1)$ und daher auch $w_1, w_2, \ldots, w_m$ m linear unabhängige, lineare Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sind.

Durch Einführung der neuen Variablen $w_1, w_2, \ldots, w_m$, die reelle, lineare, homogene Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sind, geht g in die neue quadratische Form G:

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=m_1} (w_{k_1} + i\, w_{m_1+k_1})^2 + (w_{k_1} - i\, w_{m_1+k_1})^2 +$$

$$+ \sum_{k_2=1}^{k_2=m-2m_1} (x - \alpha_{2m_1+k_2})^q \cdot w_{2m_1+k_2}^2 =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{k_1=m_1} 2(w_{k_1}^2 - w_{m_1+k_1}^2) + \sum_{k_2=1}^{k_2=m-2m_1} (x - \alpha_{2m_1+k_2})^q \cdot w_{2m_1+k_2}^2$$

über.

Setzt man in G für x die reelle Zahl A, so hat die quadratische Form G offenbar $m_1 + \mu$ Quadrate mit negativen Faktoren; dabei bedeutet μ die Zahl der $m - 2m_1$ reellen Wurzeln von $V = 0$, die größer als A sind. Ist nämlich $A < \alpha_{2m_1+k_2}$, so wird $(A - \alpha_{2m_1+k_2})^q$, weil q eine ungerade Zahl ist, negativ und ist ferner auch, wenn A keine Wurzel von $V = 0$ ist, was wir ausschließen, von Null verschieden.

Setzt man in G für x die reelle Zahl B, und sind μ' der $m - 2m_1$ reellen Wurzeln von $V = 0$ größer als B, so haben $m_1 + \mu'$ der in G auftretenden Quadrate negative Koeffizienten; daß B Wurzel von $V = 0$ ist — charakterisiert durch $V(B) = 0$ — schließen wir aus. Die Differenz $\mu - \mu'$ gibt folglich die genaue Anzahl der zwischen A und B ($B > A$) gelegenen reellen Wurzeln von $V = 0$ an. Bedenkt man noch, daß nach dem Trägheitsgesetze für jede reelle, lineare, homogene Transformation von nicht verschwindender Determinante die Zahlen $m_1 + \mu$ und $m_1 + \mu'$ invariant sind, so ergibt sich der Satz:

Transformiert man die reelle quadratische Form g durch reelle, linear unabhängige, lineare, homogene Transformationen, nachdem man in g erst $x = A$ und dann $x = B$ gesetzt hat, in eine Summe von reellen Quadraten, und findet man im ersten Falle N_A, im zweiten Falle N_B Quadrate mit negativen Vorzeichen, so ist die genaue Anzahl der zwischen A und B ($B > A$) gelegenen Wurzeln von $V = 0$ gleich der Zahl $N_A - N_B$.

Die reelle quadratische Form g kann in der Form

$$\sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=m} C_{rs}\, u_r\, u_s$$

geschrieben werden, dabei ist:

$$C_{rs} = \sum_{k=1}^{k=m} (x - \alpha_k)^q\, \psi_r(\alpha_k) \psi_s(\alpha_k)\,.$$

Die Koeffizienten C_{rs} der quadratischen Form g sind als symmetrische Funktionen der Wurzeln von $V = 0$ rational durch die Koeffizienten von $V = 0$ ausdrückbar, sind also reell; außer den Gleichungskoeffizienten hängen die C_{rs} noch von einem Parameter x ab. In der reellen quadratischen Form g hat man $x = A$ und $x = B$ zu setzen und die Zahlen N_A und N_B zu bestimmen. Es ist noch zu bemerken, daß, da A und B die Gleichung $V = 0$ nicht befriedigen sollen, die Determinante von g für $x = A$ und für $x = B$ nicht verschwindet; denn ersichtlich hat die transformierte Form G, wenn für x keine Gleichungswurzel gesetzt wird, keine verschwindende Determinante. Die Lösung des *Sturm*schen Problems ist daher auf die Aufgabe der Bestimmung der Anzahl der negativen Quadrate bei der reellen Transformation einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante in eine Quadratsumme zurückgeführt.

Die letztere Frage läßt sich auf folgende Weise erledigen: Ist $\sum_{r=1}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=m} C_{rs}\, u_r\, u_s$ irgend eine quadratische Form von nicht

verschwindender Determinante, so kann man die Indizes 1, 2, $\ldots, m$ stets in der Form $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, wobei $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ eine Permutation von 1, 2, $\ldots$, m bedeuten, anordnen, daß in der Kette der Hauptunterdeterminanten:

$$\Gamma_m = \begin{vmatrix} C_{\sigma_1 \sigma_1} & C_{\sigma_1 \sigma_2} & C_{\sigma_1 \sigma_3} & \cdots & C_{\sigma_1 \sigma_m} \\ C_{\sigma_2 \sigma_1} & C_{\sigma_2 \sigma_2} & C_{\sigma_2 \sigma_3} & \cdots & C_{\sigma_2 \sigma_m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{\sigma_m \sigma_1} & C_{\sigma_m \sigma_2} & C_{\sigma_m \sigma_3} & \cdots & C_{\sigma_m \sigma_m} \end{vmatrix}, \quad \Gamma_{m-1} = \frac{\partial \Gamma_m}{\partial C_{\sigma_m \sigma_m}},$$

$$\Gamma_{m-2} = \frac{\partial^2 \Gamma_m}{\partial^2 C_{\sigma_m \sigma_m}\; C_{\sigma_{m-1} \sigma_{m-1}}},$$

$$\Gamma_{m-3} = \frac{\partial^3 \Gamma_m}{\partial^3 C_{\sigma_m \sigma_m}\; C_{\sigma_{m-1} \sigma_{m-1}}\; C_{\sigma_{m-2} \sigma_{m-2}}}, \quad \ldots,$$

$$\Gamma_1 = C_{\sigma_1 \sigma_1}, \quad \Gamma_0 = 1$$

nicht zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder verschwinden. Hat man die Indizes in der angegebenen Weise geordnet, so enthält die reelle quadratische Form $\sum_{r=1}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=m} C_{rs}\, u_r\, u_s$ bei der Transformation in eine Summe von Quadraten reeller, linearer, linear unabhängiger, homogener Funktionen genau ebensoviel negative Quadrate als die Reihe $\Gamma_m, \Gamma_{m-1}, \ldots, \Gamma_1, \Gamma_0$ Vorzeichenwechsel darbietet, wenn man bei der Zählung der letzteren die etwa vereinzelt auftretenden Nullen fortläßt. Vgl. hierzu *Gundelfinger* in den Zusätzen zur dritten Auflage von *Hesse*s Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, Leipzig (1876), S. 460 und in *Crelle*s Journ. f. d. r. u. ang. Math., **91**, 1881, 221, Über die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten, sowie *H. Weber*s Darstellung im ersten Bande seiner Algebra, S. 290 ff. der zweiten Aufl. (1898).

Ist keine vorherige Umstellung der Indizes nötig, bestimmen also im besonderen die Vorzeichenwechsel der Kette von Hauptunterdeterminanten:

$$A_m = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{vmatrix}, \quad A_{m-1} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1\,m-1} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2\,m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{m-1\,1} & C_{m-1\,2} & \dots & C_{m-1\,m-1} \end{vmatrix},$$

$$A_{m-2} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1\,m-2} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2\,m-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{m-2\,1} & C_{m-2\,2} & \dots & C_{m-2\,m-2} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_1 = C_{11}, \quad A_0 = 1$$

die Anzahl negativer Quadrate bei der reellen Transformation der reellen quadratischen Form $\sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=m} C_{rs}\, u_r\, u_s$ in eine Summe von Quadraten, so spricht man von dem regulären Falle, auf den sich *Hermite* in *Crelles* Journ. f. d. r. u. ang. Math., 52, 1856, 40, *Jacobi* in einer nachgelassenen Arbeit, ebenda, 53, 1857, 270 und *Sylvester* in der mehrfach genannten Abhandlung (1853), S. 481 unter der Voraussetzung beschränken, daß auch nicht isolierte Determinanten der oben angegebenen Kette verschwinden. Daß aber der reguläre Fall nicht stets eintritt, beweist das Beispiel der reellen quadratischen Form $u_1^2 + 2u_2u_5 + 2u_3u_4$. Man erhält die Größenreihe $A_5 = 1$, $A_4 = 0$, $A_3 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 = 1$, $A_0 = 1$, die bei Fortlassung der Nullen überhaupt keinen Vorzeichenwechsel besitzt. Die angegebene quadratische Form kann aber

$$u_1^2 + \tfrac{1}{2}(u_2 + u_5)^2 - \tfrac{1}{2}(u_2 - u_5)^2 + \tfrac{1}{2}(u_3 + u_4)^2 - \tfrac{1}{2}(u_3 - u_4)^2$$

geschrieben werden; folglich treten bei einer Umwandlung in eine Summe von Quadraten zwei Quadrate mit negativen Vorzeichen auf. Die Permutation der Indizes 1, 2, 3, 4, 5 in 1, 2, 5, 4, 3 liefert $\Gamma_5 = 1$, $\Gamma_4 = 0$, $\Gamma_3 = -1$, $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_0 = 1$ und mithin bei Fortlassung der isoliert stehenden Nullen die richtige Zahl 2 für die Vorzeichenwechsel.

Mit Hilfe der angegebenen Resultate ist aus der quadratischen Form g, nachdem man $x = A$ gesetzt hat, N_A und ferner aus g, nachdem man $x = B$ gesetzt hat, die Zahl N_B zu bestimmen. Die auseinandergesetzte Methode verdient, wie schon *Sylvester* (a. a. O., S. 486) bemerkt, deswegen besondere Aufmerksamkeit, weil sie nicht wie alle vorangegangenen Prozesse zur Entscheidung der Frage nach der genauen Zahl reeller Wurzeln einer Gleichung zwischen zwei Grenzen beim Beweise sich auf Stetigkeitsbetrachtungen stützt.

Wegen der Willkürlichkeit der in der Form g auftretenden ψ_i sowie der ungeraden Zahl q können N_A und N_B durch die Vorzeichen einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Größen bestimmt werden.

Wählt man im besonderen $\psi_1(x) = 1$, $\psi_2(x) = \varphi(x)$, $\psi_3(x) = \varphi(x)^2$, $\psi_4(x) = \varphi(x)^3$, $\ldots$, $\psi_m(x) = \varphi(x)^{m-1}$, wobei $\varphi(x)$ eine ganze rationale Funktion von x mit reellen Koeffizienten bedeutet, und sind 1 sowie die Reste, die $\varphi(x)$ und dessen Potenzen bei der Division durch $V(x)$ ergeben, linear unabhängig, so gelangt man zu einer für unsere Frage brauchbaren quadratischen Form:

$$h = \sum_{k=1}^{k=m} (x-\alpha_k)^q \cdot (u_1 + \varphi(\alpha_k) u_2 + \varphi(\alpha_k)^2 u_3 + \cdots \varphi(\alpha_k)^{m-1} u_m)^2,$$

deren Koeffizienten:

$$C_{rs} = \sum_{k=1}^{k=m} (x-\alpha_k)^q \cdot \varphi(\alpha_k)^{r-1} \varphi(\alpha_k)^{s-1}$$

lauten. Setzt man in die Form h für $x = A$, bestimmt dann für h die Anzahl negativer Quadrate N_A und sucht ebenso die Anzahl negativer Quadrate N_B, wenn $x = B$ wird, so ist die Differenz $N_A - N_B$ gleich der Anzahl der zwischen A und B gelegenen Wurzeln von $V = 0$. Betrachten wir für die angegebene quadratische Form h das Funktionensystem:

$$A_{m-j} = |C_{rs}| \quad (r = 1, 2, \ldots, m-j;\ s = 1, 2, \ldots, m-j),$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

sowie $A_0 = 1$!

Zunächst spezialisieren wir noch die Form h, indem wir $\varphi(x) = x$ wählen und $q = 1$ setzen. Für $\varphi(x) = x$, sind auch $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ linear unabhängig. Für diesen speziellen Fall werden die Koeffizienten von h:

$$C_{rs} = \sum_{k=1}^{k=m} (x-\alpha_k) \cdot \alpha_k^{r+s-2} = x S_{r+s-2} - S_{r+s-1},$$

dabei ist $S_i = \sum_{k=1}^{k=m} \alpha_k^i$, also gleich der Summe der $i$ten Potenzen aller Wurzeln von $V = 0$. A_{m-j} nimmt den Wert an:

$$\begin{vmatrix} xS_0 - S_1 & xS_1 - S_2 & \ldots\ xS_{m-j-1} - S_{m-j} \\ xS_1 - S_2 & xS_2 - S_3 & \ldots\ xS_{m-j} - S_{m-j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ xS_{m-j-1} - S_{m-j} & xS_{m-j} - S_{m-j+1} & \ldots\ xS_{2m-2j-2} - S_{2m-2j-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{m-j-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{m-j} & x \\ \vdots & & & & \vdots & \\ S_{m-j} & S_{m-j+1} & S_{m-j+2} & \dots & S_{2m-2j-1} & x^{m-j} \end{vmatrix},$$

wie sich ergibt, wenn man die Elemente jeder Zeile der zweiten Determinante mit Ausnahme der letzten Zeile mit x multipliziert, von denen der folgenden Zeile subtrahiert und dann die erhaltene Determinante nach den Elementen der letzten Kolonne entwickelt. Diese besondere Reihe von Determinanten hat *Joachimsthal* (1818 bis 1861) auf anderem Wege aufgestellt und bewiesen, daß der Unterschied der Vorzeichenwechsel, den diese Reihe für $x = A$ mehr als für $x = B$ hat, die Anzahl der zwischen A und B gelegenen Wurzeln von $V = 0$ angibt (*Crelle*s Journ. f. d. r. u. ang. Math., 48, 1854, 400). Dieses Resultat ist jedoch nur im allgemeinen richtig; denn die der Herleitung zugrunde liegende quadratische Form: $\sum_{r=1}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=m}(xS_{r+s-2} - S_{r+s-1})\, u_r\, u_s$ liefert nicht stets, wenn man $x = A$ bez. $x = B$ setzt, sowohl zur Bestimmung von N_A als auch zur Bestimmung von N_B den regulären Fall. Betrachtet man z. B. die Gleichung $x^4 = 1$, so wird für sie die quadratische Form $4xu_1^2 - 8u_1u_4 - 8u_2u_3 + 8xu_2u_4 + 4xu_3^2$ zu untersuchen sein. Als Werte der Hauptunterdeterminanten findet man:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 4x & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4x \\ 0 & -4 & 4x & 0 \\ -4 & 4x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4^4x^4 + 4^4, \quad A_3 = -64x,$$

$$A_2 = 0, \qquad A_1 = 4x, \qquad A_0 = 1.$$

Man erhält für

$x = -\frac{1}{2}$ die Vorzeichenr. $+, +, 0, -, +$, also zwei Vorzeichenwechsel,
$x = \ \ 0$ » » $+$, 0, 0, 0, $+$, » keine » ,
$x = \ \ 2$ » » $-, -, 0, +, +$, » einen » .

Die Vorzeichenreihe für $x = 0$, die nicht nur isolierte Nullen enthält, ist nicht brauchbar. Um N_0 zu bestimmen, beachte man, daß die der Deduktion zugrunde liegende quadratische Form: $4xu_1^2 - 8u_1u_4 - 8u_2u_3 + 8xu_2u_4 + 4xu_3^2$ für $x = 0$ in $-8u_1u_4 - 8u_2u_3$ übergeht. Diese Form bietet, wie man sieht, nicht den regulären Fall zur Bestimmung der negativen Quadrate dar. Permutiert man die Indizes 1, 2, 3, 4 in 1, 4, 3, 2, so bestimmt man nach der S. 51 gegebenen Regel die Anzahl der negativen Quadrate für die Form $-8u_1u_4 - 8u_2u_3$ richtig gleich 2; folglich ist $N_0 = 2$. Es wird $N_{-\frac{1}{2}} - N_0 = 0$, $N_0 - N_2 = 1$ entsprechend der Tatsache, daß $x^4 = 1$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 keine, zwischen 0 und 2 eine reelle Wurzel hat.

Gehen wir zu der allgemeineren quadratischen Form h (S. 53) mit Koeffizienten:

$$C_{rs} = \sum_{k=1}^{k=m} (x-\alpha_k)^q \cdot \varphi(\alpha_k)^{r-1}\,\varphi(\alpha_k)^{s-1}$$

zurück und betrachten für sie $A_{m-j} =$

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q, & \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k), & \ldots, & \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k)^{m-j-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k), & \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k)^2, & \ldots, & \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k)^{m-j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k)^{m-j-1}, & \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k)^{m-j}, & \ldots, & \sum\limits_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\varphi(\alpha_k)^{2m-2j-2} \end{vmatrix},$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Die Determinante A_{m-j} wird erhalten, indem man die Elemente der zwei Matrizes mit $m-j$ Zeilen und m Kolonnen:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varphi(\alpha_1) & \varphi(\alpha_2) & \ldots & \varphi(\alpha_m) \\ \varphi(\alpha_1)^2 & \varphi(\alpha_2)^2 & \ldots & \varphi(\alpha_m)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(\alpha_1)^{m-j-1} & \varphi(\alpha_2)^{m-j-1} & \ldots & \varphi(\alpha_m)^{m-j-1} \end{Vmatrix}$$

und:

$$\begin{Vmatrix} (x-\alpha_1)^q & (x-\alpha_2)^q & \ldots (x-\alpha_m)^q \\ (x-\alpha_1)^q\,\varphi(\alpha_1) & (x-\alpha_2)^q\,\varphi(\alpha_2) & \ldots (x-\alpha_m)^q\,\varphi(\alpha_m) \\ (x-\alpha_1)^q\,\varphi(\alpha_1)^2 & (x-\alpha_2)^q\,\varphi(\alpha_2)^2 & \ldots (x-\alpha_m)^q\,\varphi(\alpha_m)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x-\alpha_1)^q\,\varphi(\alpha_1)^{m-j-1} & (x-\alpha_2)^q\,\varphi(\alpha_2)^{m-j-1} & \ldots (x-\alpha_m)^q\,\varphi(\alpha_m)^{m-j-1} \end{Vmatrix}$$

zeilenweise komponiert. Nach einem bekannten Determinantensatz (vgl. *Ostwalds* Klassiker, Nr. 77, S. 40) wird das zu untersuchende A_{m-j} gleich einer Summe von Determinantenprodukten, die dadurch gebildet werden, daß man aus den zwei Matrizes alle Determinanten mit $m-j$ Zeilen und $m-j$ Kolonnen bildet und immer zwei entsprechende miteinander multipliziert. Die Determinanten der zweiten Matrix unterscheiden sich von denjenigen der ersten nur um Faktoren der Form:

$$(x-\alpha_{k_1})^q\cdot(x-\alpha_{k_2})^q\ldots(x-\alpha_{k_{m-j}})^q;$$

daher wird:

$$A_{m-j}=\sum(x-\alpha_{k_1})^q\cdot(x-\alpha_{k_2})^q\ldots(x-\alpha_{k_{m-j}})^q\times$$

$$\times\left\{\left|\begin{matrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \varphi(\alpha_{k_1}) & \varphi(\alpha_{k_2}) & \ldots & \varphi(\alpha_{k_{m-j}})\\ \varphi(\alpha_{k_1})^2 & \varphi(\alpha_{k_2})^2 & \ldots & \varphi(\alpha_{k_{m-j}})^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi(\alpha_{k_1})^{m-j-1} & \varphi(\alpha_{k_2})^{m-j-1} & \ldots & \varphi(\alpha_{k_{m-j}})^{m-j-1}\end{matrix}\right|^2\right\};$$

die Summe ist zu bilden, indem man für $k_1, k_2, \ldots, k_{m-j}$ auf alle möglichen Arten $m-j$ verschiedene der Zahlen 1, 2, ..., m setzt. Es ist:

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \varphi(\alpha_{k_1}) & \varphi(\alpha_{k_2}) & \ldots & \varphi(\alpha_{k_{m-j}})\\ \varphi(\alpha_{k_1})^2 & \varphi(\alpha_{k_2})^2 & \ldots & \varphi(\alpha_{k_{m-j}})^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi(\alpha_{k_1})^{m-j-1} & \varphi(\alpha_{k_2})^{m-j-1} & \ldots & \varphi(\alpha_{k_{m-j}})^{m-j-1}\end{matrix}\right| =$$

$$=\Delta\{\varphi(\alpha_{k_1}),\ \varphi(\alpha_{k_2}),\ \ldots,\ \varphi(\alpha_{k_{m-j}})\},$$

wobei Δ das aus den $\dfrac{(m-j)\,(m-j-1)}{2}$ Faktoren bestehende Differenzenprodukt der $m-j$ Größen $\varphi(\alpha_{k_1})$, $\varphi(\alpha_{k_2})$, ..., $\varphi(\alpha_{k_{m-j}})$ bedeutet. Für die untersuchte Form h wird folglich:

$$A_{m-j}=$$

$$=\sum(x-\alpha_{k_1})^q\cdot(x-\alpha_{k_2})^q\ldots(x-\alpha_{k_{m-j}})^q\left[\Delta\{\varphi(\alpha_{k_1}),\ \varphi(\alpha_{k_2}),\ \ldots,\ \varphi(\alpha_{k_{m-j}})\}\right]^2.$$

Für $q = -1$ sind diese Formeln von *Hermite* (Compt. rend., **36**, 294) gegeben worden, aber auch sie sind wie die *Joachimsthal*schen Funktionen nur im allgemeinen zur Bestimmung der reellen Wurzeln von $V(x) = 0$ zwischen den Grenzen A und B verwendbar. Setzt man noch $\varphi(x) = x$, so wird:

$$A_{m-j} = \sum \frac{[\Delta\{\alpha_{k_1}, \ \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_{m-j}}\}]^2}{(x-\alpha_{k_1})(x-\alpha_{k_2})\ldots(x-\alpha_{k_{m-j}})};$$

dies sind die *Sylvester*schen Funktionen $\dfrac{\lambda_{m-j}\,V_{m-j}}{V}$ (vgl. S. 44 und S. 46), die auch das Problem nur im allgemeinen lösen.

Historisch ist noch zu bemerken, daß die Adjunktion einer reellen quadratischen Form und die Verwendung des Trägheitsgesetzes zur Lösung der von *Sturm* stammenden Problemstellung *Jacobi* bereits vor Veröffentlichung der *Hermite*schen und *Sylvester*schen Arbeiten bekannt waren. Wie *Borchardt* berichtet (*Crelles* Journ. **53**, S. 281), stellte *Jacobi* seine Untersuchungen zum Beweise des noch zu erwähnenden *Borchardt*schen Satzes an. Zu diesem Zwecke bildete er sich die reelle quadratische Form:

$$g_1 = \sum_{k=1}^{k=m} (u_1 + \alpha_k u_2 + \alpha_k^2 u_3 + \cdots + \alpha_k^{m-1} u_m)^2.$$

Diese quadratische Form geht aus g (S. 46) hervor, indem man $q = 0$ setzt und $\psi_i(x) = x^{i-1}$ wählt. Das auf S. 48 und 49 angewandte Beweisverfahren lehrt, daß, wenn $V = 0$ m_1 Paare imaginärer Wurzeln hat, so besitzt g_1 bei einer Transformation in eine Summe von Quadraten reeller, linear unabhängiger, linearer, homogener Funktionen m_1 Quadrate mit negativen Vorzeichen. g_1 kann in der Form geschrieben werden: $\sum\limits_{r=1}^{r=m}\sum\limits_{s=1}^{s=m} S_{r+s-2}\, u_r\, u_s$, wobei $S_i = \sum\limits_{k=1}^{k=m} \alpha_k^i$ ist. Liegt der reguläre Fall vor, so wird für die reelle quadratische Form $\sum\limits_{r=1}^{r=m}\sum\limits_{s=1}^{s=m} S_{r+s-2}\, u_r\, u_s$ die Anzahl m_1 negativer Quadrate bestimmt durch die Vorzeichenwechsel der Reihe von Determinanten:

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ \vdots & & & \\ S_{m-1} & S_m & \dots & S_{2m-2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-2} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{m-1} \\ \vdots & & & \\ S_{m-2} & S_{m-1} & \dots & S_{2m-4} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad S_0, \quad 1.$$

Der *Borchardt*sche Satz (Journ. de math. **12** [1847], 58), den sich *Jacobi* auf diese Weise bewies, lautet: Die Gleichung $V = 0$ hat soviel Paare imaginärer Wurzeln wie die obige Reihe Vorzeichenwechsel besitzt. Das *Borchardt*sche Theorem ist sicher richtig, wenn in der obigen Größenreihe die Nullen nur isoliert auftreten. Daß es aber auch versagen kann, lehrt die Gleichung $x^5 = 1$. Für sie hat man nach dem *Borchardt*schen Satze die Größenreihe: 3125, 0, 0, 0, + 5, 1 zu betrachten. Um die richtige Zahl 2 für die Paare imaginärer Wurzeln von $x^5 = 1$ zu finden, ist die $x^5 = 1$ entsprechende quadratische Form $g_1 = 5u_1^2 + 10u_2u_5 + 10u_3u_4$ zu untersuchen, die sich von der S. 52 behandelten nur um den unwesentlichen positiven Faktor 5 unterscheidet.

Betrachten wir noch die reelle quadratische Form h_1:

$$\sum_{k=1}^{k=m} (x - \alpha_k)^q \cdot (u_1 + \alpha_k u_2 + \alpha_k^2 u_3 + \cdots + \alpha_k^{m-1} u_m)^2,$$

die durch Spezialisierung aus h (S. 53) hervorgeht. Die gegebene Gleichung $V = 0$ mit reellen Koeffizienten möge lauten: $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m = 0$. Es seien $t_1, t_2, \dots, t_m$ m reelle Variable; wir setzen dann (*Hermite*, Compt. rend. **46**, 1858, 961):

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_0 t_1 + a_1 t_2 + a_2 t_3 + \cdots\cdots + a_{m-1} t_m, \\
u_2 &= \phantom{a_0 t_1 + {}} a_0 t_2 + a_1 t_3 + \cdots\cdots + a_{m-2} t_m, \\
u_3 &= \phantom{a_0 t_1 + a_1 t_2 + {}} a_0 t_3 + a_1 t_4 + \cdots + a_{m-3} t_m, \\
&\vdots \\
u_{m-1} &= \qquad\qquad\qquad\qquad a_0 t_{m-1} + a_1 t_m, \\
u_m &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_0 t_m.
\end{aligned}$$

Durch diese lineare, homogene, reelle Transformation, deren Determinante a_0^m ist, also nicht verschwindet, geht die Form h_1 in eine neue reelle quadratische Form H_1 über, die lautet:

$$\sum_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\cdot\left[a_0 t_1+(a_1+\alpha_k a_0)t_2+(a_2+\alpha_k a_1+\alpha_k^2 a_0)t_3+\right.$$
$$\left.\cdots(a_{m-1}+\alpha_k a_{m-2}+\alpha_k^2 a_{m-3}+\cdots+\alpha_k^{m-1}a_0)t_m\right]^2.$$

Infolge des Trägheitsgesetzes wird die neue reelle quadratische Form H_1, wenn man in ihr $x = A$ und $x = B$ setzt, ebenso wie die ursprüngliche Form h_1 zur Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln von $V = 0$ zwischen den Grenzen A und B geeignet sein.

Für $q = 1$ und $q = 0$ kann H_1 bequem berechnet werden. Zu dem Zweck verstehen wir unter ξ und η zunächst willkürliche Parameter und bilden $\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}$ und $\frac{V(\eta)}{\eta-\alpha_k}$. Da $V(\alpha_k)=0$ ist, so wird:

$$\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}=\frac{V(\xi)-V(\alpha_k)}{\xi-\alpha_k}=$$
$$=a_0\frac{\xi^m-\alpha_k^m}{\xi-\alpha_k}+a_1\frac{\xi^{m-1}-\alpha_k^{m-1}}{\xi-\alpha_k}+\cdots+a_{m-2}\frac{\xi^2-\alpha_k^2}{\xi-\alpha_k}+a_{m-1}$$
$$=a_0\xi^{m-1}+(a_0\alpha_k+a_1)\xi^{m-2}+(a_0\alpha_k^2+a_1\alpha_k+a_2)\xi^{m-3}+\cdots$$
$$+(a_0\alpha_k^{m-2}+a_1\alpha_k^{m-3}+\cdots a_{m-3}\alpha_k+a_{m-2})\xi+$$
$$+(a_0\alpha_k^{m-1}+a_1\alpha_k^{m-2}+a_2\alpha_k^{m-3}+\cdots+a_{m-2}\alpha_k+a_{m-1})\xi^0.$$

Versteht man das gefundene $\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}$ symbolisch, daß nämlich in der Entwicklung von $\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}$ nach Potenzen von ξ für ξ^{m-1} die Variable t_1, für ξ^{m-2} die Variable t_2, usw. für ξ die Variable t_{m-1} und für ξ^0 die Variable t_m zu setzen ist, so ist der Ausdruck, der bei der Bildung der Summanden von H_1 zu quadrieren ist, das symbolische $\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}$. Analog führen wir symbolisch $\frac{V(\eta)}{\eta-\alpha_k}$ ein und verstehen darunter den Ausdruck, den man erhält, wenn man $\frac{V(\eta)}{\eta-\alpha_k}$ nach Potenzen von η entwickelt und nach der Entwicklung für η^{m-1} die Variable t_1, für η^{m-2} die Variable t_2, usw. für η die Variable t_{m-1} und für η^0 die Variable t_m setzt. Die symbolischen $\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}$ und $\frac{V(\eta)}{\eta-\alpha_k}$ sind also identisch. H_1 kann dann symbolisch $\sum_{k=1}^{k=m}(x-\alpha_k)^q\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}\frac{V(\eta)}{\eta-\alpha_k}$ geschrieben werden; diese Schreibweise bedeutet, daß man die in bezug auf jede der zwei Variablen ξ und η ganze rationale Funktion vom Grade $m-1$ nach Potenzen $\xi^i\eta^k$ entwickeln soll und dann für $\xi^i\eta^k$ $(i=0, 1, 2, \ldots, m-1;$ $k=0, 1, 2, \ldots, m-1)$ $t_{m-i}\,t_{m-k}$ zu setzen hat. Auf diese Weise erhält man die quadratische Form H_1.

Für $q=1$ wird der symbolische Ausdruck, der H_1 ergibt:

$$\sum_{k=1}^{k=m}\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}\cdot\frac{V(\eta)}{\eta-\alpha_k}\cdot(x-\alpha_k)=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{V(\xi)\cdot V(\eta)}{\xi-\eta}\left[\frac{\xi-x}{\xi-\alpha_k}-\frac{\eta-x}{\eta-\alpha_k}\right].$$

Bedeutet $V'(x)$ die erste Abgeleitete von $V(x)$, so wird:

$$\sum_{k=1}^{k=m}\frac{V(\xi)}{\xi-\alpha_k}=V'(\xi) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{k=m}\frac{V(\eta)}{\eta-\alpha_k}=V'(\eta).$$

Unter der Annahme $q=1$ lautet daher der symbolische Ausdruck für H_1:

$$\frac{V(\eta)\cdot V'(\xi)\cdot(\xi-x)-V(\xi)\cdot V'(\eta)\cdot(\eta-x)}{\xi-\eta}.$$

In dieser Form treten nicht mehr die Wurzeln von $V=0$ auf, und H_1 ist folglich für $q=1$ bequem zu berechnen. Wir haben also den Satz: Ordnet man den symbolischen Ausdruck:

$$\frac{V(\eta)\cdot V'(\xi)\cdot(\xi-x)-V(\xi)\cdot V'(\eta)\cdot(\eta-x)}{\xi-\eta}$$

nach Potenzen $\xi^i\eta^k$ und führt für diese $t_{m-i}\,t_{m-k}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, m-1;\ k=0, 1, 2, \ldots, m-1)$ ein, so ist die Differenz der Anzahl negativer Quadrate, die die entstehende reelle quadratische Form der m Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ bei einer reellen Transformation in eine Quadratsumme aufweist, wenn man die Form für $x=A$ und $x=B$ betrachtet, gleich der Zahl der Wurzeln der Gleichung $V=0$ zwischen den Grenzen A und B. (*Hermite*, *Crelles* Journ. f. d. r. u. ang. Math., 52 [1856], 51).

Für $q=0$ erhält man den symbolischen Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{k=m}\frac{V(\xi)\cdot V(\eta)}{(\xi-\alpha_k)(\eta-\alpha_k)}=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{V(\xi)\cdot V(\eta)}{\xi-\eta}\left[\frac{1}{\eta-\alpha_k}-\frac{1}{\xi-\alpha_k}\right]=$$

$$=\frac{V(\xi)\cdot V'(\eta)-V(\eta)\cdot V'(\xi)}{\xi-\eta}.$$

Die reelle quadratische Form, die dem letzteren Ausdruck entspricht, geht offenbar aus der *Jacobi*schen reellen quadratischen Form g_1 (Vgl. S. 57) durch reelle, lineare Transformation hervor; daher sei sie mit G_1 bezeichnet. Die reelle quadratische Form G_1 wird nach *Sylvester* (a. a. O. S. 511) als Bézoutiante bezeichnet. Die symbolische Schreibweise für die Bézoutiante G_1 ist von *Cayley* (1821—1895) angegeben worden. Vgl. *Sylvester*, a. a. O., S. 517, sowie *Hermite* (*Crelles* Journ. f. d. r. u. ang. Math., **52** (1856), 44, *Cayley*, ebenda, **53** (1857), 366, *Borchardt*, ebenda, **53** (1857), 367. Erinnert man sich des für g_1 gültigen Resultats, so folgt: Die Anzahl negativer Quadrate, die die reelle quadratische Form G_1, die Bézoutiante, bei einer reellen, linearen, homogenen Transformation in eine Summe linear unabhängiger Quadrate besitzt, ist gleich der Anzahl von Paaren imaginärer Wurzeln von $V = 0$.

Wir führen ein: $V_1(x) = mV(x) - xV'(x)$. Ist:

$$V(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m,$$

so wird:

$$V_1(x) = a_1 x^{m-1} + 2a_2 x^{m-2} + 3a_3 x^{m-3} + \cdots + (m-1)a_{m-1} x + m a_m .$$

$V_1(x)$ ist also die partielle Abgeleitete der binären Form:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \cdots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m$$

nach y, wenn nach der Differentiation $y = 1$ gesetzt wird. Infolge der Relation:

$$V_1(x) = mV(x) - xV'(x)$$

wird:

$$V(\xi) = \frac{1}{m}\left(V_1(\xi) + \xi V'(\xi)\right),$$

$$V(\eta) = \frac{1}{m}\left(V_1(\eta) + \eta V'(\eta)\right),$$

und der symbolische Ausdruck für G_1 nimmt die Form an:

$$\frac{1}{m}\,\frac{V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi)}{\xi - \eta} + \frac{1}{m}\cdot V'(\xi)\cdot V'(\eta).$$

In der nicht symbolischen Schreibweise ist $V'(\xi)\cdot V'(\eta)$ gleich $\left[m a_0 t_1 + (m-1)a_1 t_2 + (m-2)a_2 t_3 + \cdots + a_{m-1} t_m\right]^2$, also ein volles Quadrat einer reellen, linearen, homogenen Funktion von $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

$$\frac{V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi)}{\xi-\eta}$$

wird als höchste Potenzen von ξ und η die $m-2$ten aufweisen, schreibt man daher

$$\frac{V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi)}{\xi-\eta}$$

nicht symbolisch, so enthält es nur die $m-1$ Variablen t_2, $t_3, \ldots, t_m$. Führt man auf G_1 jetzt die folgende reelle, lineare, homogene Substitution:

$$T_1 = ma_0 t_1 + (m-1)a_1 t_2 + (m-2)a_2 t_3 + \cdots + a_{m-1} t_m,$$
$$t_2 = t_2, \quad t_3 = t_3, \quad \ldots, \quad t_m = t_m$$

aus, so geht G_1 in eine neue reelle quadratische Form über, die symbolisch geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{m}\frac{(V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi))}{\xi-\eta} + \frac{T_1^2}{m}$$

und als transformierte Form dieselbe Anzahl negativer Quadrate wie G_1 ergeben wird. T_1 tritt in

$$\frac{1}{m}\frac{(V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi))}{\xi-\eta}$$

überhaupt nicht auf. Folglich ergibt

$$\frac{1}{m}\frac{(V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi))}{\xi-\eta} + \frac{1}{m}T_1^2$$

dieselbe Anzahl negativer Quadrate wie

$$\frac{1}{m}\frac{V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi)}{\xi-\eta}$$

oder

$$\frac{V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi)}{\xi-\eta}.$$

Hieraus folgt der Satz von *Sylvester* (a. a. O. S. 513): Die Gleichung $V=0$ hat soviel Paare imaginärer Wurzeln wie die reelle quadratische Form von $m-1$ Variablen $t_2, t_3, \ldots, t_m$, die symbolisch $\frac{V_1(\xi)\cdot V'(\eta) - V_1(\eta)\cdot V'(\xi)}{\xi - \eta}$ geschrieben ist, bei einer Transformation in eine Summe von Quadraten reeller, linear unabhängiger, linearer, homogener Formen negative Quadrate besitzt. V_1 und V' bedeuten die partiellen Differentialquotienten des als binären Form gedachten V. Die angegebene reelle quadratische Form der $m-1$ Variablen wird als Bézoutiante von V_1 und V' bezeichnet; *Sylvester* nennt sie die Bézoutoide. Den Zusammenhang zwischen dem *Jacobi*schen g_1 und seiner Bézoutoide hat *Sylvester* nicht gekannt. Während er auf die Form g erst durch *Hermites* Mitteilungen geführt wurde, ist er auf G_1 und seine Bézoutoide hiervon ganz unabhängig gekommen.

Eine eingehende historische Würdigung der an den *Sturm*schen Satz anknüpfenden Literatur gibt *Noether* in der Biographie von *Sylvester*, Math. Ann., **50**, (1898), 139, Darstellungen findet man in *Nettos* Vorlesungen über Algebra, (1896), Bd. 1, 238—271, *H. Webers* Algebra, Bd. 1 (2. Aufl. 1898), 301—340, und in *Hattendorffs* Monographie »die *Sturm*schen Funktionen« (2. Aufl. 1874).

Anmerkungen zum Text.

1) *Zu S. 3.* *Lagranges* (1736—1813) Methode ist zu finden in seinen Oeuvres, 8, S. 24 ff. und S. 140 ff. Nach *Lagranges* eigener Angabe (a. a. O. S. 143) gebührt jedoch dem englischen Mathematiker *Waring* (1736—1798), der zu dem gleichen Zwecke in seinen Miscellanea analytica (1762) die Gleichung für die reziproken Werte der Wurzeldifferenzen der ursprünglichen Gleichung aufstellte, die Priorität für diese Untersuchungen. Zur Zeit der ersten Veröffentlichung (1769) waren *Lagrange* *Warings* Untersuchungen noch unbekannt. Eine Vereinfachung der *Lagrange*schen Methode, die darin besteht, daß man ohne Untersuchung einer Hilfsgleichung eine positive Größe findet, die kleiner ist als der absolute Betrag der kleinsten Differenz irgend zweier reeller Wurzeln der vorgelegten Gleichung, ist von *Cauchy* (1789—1857) in seiner Analyse algébrique (1821), Note III, angegeben worden. Oeuvres de *Cauchy*, IIe sér., t. III, 396 ff.

2) *Zu S. 4.* Der von *Fourier* in seiner Analyse des équations déterminées hergeleitete Fundamentalsatz (deutsche Ausgabe Nr. 127 der *Ostwald*schen Klassiker, S. 92 ff.) lautet: Ist $V(x) = 0$ eine Gleichung $m$ten Grades mit reellen Koeffizienten, und bedeuten $V'(x)$, $V''(x)$, ..., $V^{(m)}(x)$ die Abgeleiteten von $V(x)$, so ist die Anzahl der reellen Wurzeln von $V(x) = 0$ zwischen zwei reellen Zahlen A und B $(A < B)$, die nicht Wurzeln von $V(x) = 0$ sind, höchstens gleich der Differenz der Vorzeichenwechsel der zwei Reihen:

$$V(A),\ V'(A),\ V''(A),\ \ldots,\ V^{(m)}(A),$$
$$V(B),\ V'(B),\ V''(B),\ \ldots,\ V^{(m)}(B)$$

oder unterscheidet sich von dieser stets positiven Zahl $Z_A - Z_B$ um eine gerade Zahl. Jede Wurzel ist dabei nach dem Grade ihrer Vielfachheit zu zählen. Für $A = 0$ und $B = \infty$ folgt