

GENERAL LIBRARY of the
UNIVERSITY OF MICHIGAN

—PRESENTED BY—

Pres. Angell

June 1905

LE

1587

Alb

v. 2

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Cultivo y desarrollo
de la
aptitud matemática del niño

DEL MISMO AUTOR

- Museos Escolares Argentinos y la Escuela Moderna.** Un tomo 750 páginas. 1893 — (agotada).
- La Educación del Niño y su Instrucción.** Un tomo 440 páginas (agotada).
- Plan Teórico-práctico de instrucción, combinando las escuelas primarias con los colegios nacionales.** (Premiada con medalla de oro).
- Problema de hacer práctica la instrucción en la Campaña.** (Premiado con laurel de oro).
- La instrucción del punto de vista de la evolución histórica y formación de los hábitos, teniendo presente las exigencias del medio ambiente.** (Primer Congreso científico latino-americano. Buenos Aires, 1898, sección Sociología).
- Las leyes de la Metodología del punto de vista filogenético.** (Segundo Congreso Científico latino-americano. Montevideo, 1901).
- El Positivismo Comtiano,** un tomo 160 pág. (agotada).
- La Historia del punto de vista positivo.** 1891. Polémica con el doctor Benjamín Sánchez, un tomo 425 pág.
- Notas acerca de la criminalidad infantil.** (*Archivos de psiquiatría*, etc.).
- La educación laica y la religiosa.**
- Notas acerca de la Pedología.** (1893).
- Síntesis Aritmética.** Ejercicios y problemas de recapitulación general para 5º y 6º grado.
-

www.libroscien.com

PROCEDIMIENTOS

Enseñanza de la Aritmética

por

Víctor Mercante

Director de la Escuela Normal de Mercedes de Buenos Aires
y Profesor de Psicología y Pedagogía de la misma



Libro I

Psicología
de la aptitud matemática del niño

Libro II

Cultivo y desarrollo
de la aptitud matemática del niño

www.libtool.com.cn

La. James B. Angell, el autor
cuya autorizado fincio
de sea.

www.libtool.com.cn

Libro II

Cultivo y desarrollo

de la

aptitud matemática del niño

por

Víctor Mercante



BUENOS AIRES

CABAUT y Cía., Editores

SUCESORES DE P. IGON Y Cía.

Librería del Colegio — Alsina 500

1905

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

LIBRO DESTINADO

á los

**Profesores de Pedagogía, Maestros de instrucción primaria
y Alumnos-maestros de las Escuelas Normales**

134489

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO I

LOS ELEMENTOS

I

Elemento étnico

Alumnos. — Los males obedecen á diversas causas aunadas para producirlos. Es injusto atribuir ya á los programas, ya á los maestros, ya á los gobiernos, ya á las modificaciones introducidas por un decreto de efímera duración, defectos que fluyen del conjunto y desaparecen con suma lentitud. En nuestro país, se los ha tratado uno á uno, jamás juntos y nunca con el ojo avisado del sociólogo que arriba á las conclusiones sólo después de requisitorias á través de largos períodos históricos, experimentales, diría, donde hechos y resultados se someten á un delicado examen comparativo. No arriesgamos afirmando que las reformas educacionistas de 20 años á esta parte, no han conseguido lo que el elemento étnico, en profesores y alumnos. La juventud escolar argentina,—no miramos á través de cristales rosados—es heterogénea y no presenta sino aspectos quizá sombríos, porque es el producto natural de seis, siete ú ocho razas que la ineptitud, el vicio, la desorganización doméstica, la falta de condiciones para la lucha, la evolución rezagada y tardía, arrojaron á estas playas después de sentir en los flancos el acicate de la miseria; no nos puede asombrar la intriga en unos, la hipocresía en otros, el rencor

en éste, la envidia en aquél, exteriorizados por la maledicencia, el chisme, la calumnia, la soberbia mal disimulada y una sed insaciable de aplastar y reducir á nada al semejante, un eterno contendor creado por una imaginación enviciada con las pequeñeces de una vida primaria y campestre todavía.

Este frondoso árbol que en cada hoja esconde la vanidad de un propósito inconfesable, arraiga en un cerebro duro y perezoso, indócil y arrogante á veces. Es el espíritu de la raza que no supo luchar y vencida, huyó á este continente mezclándose á los elementos aún peores que la poblaban antes del siglo XV, donde en el espacio inmenso y desierto del Atlántico al Andes, del polo sur al polo norte, los instintos brotaron con asombroso vigorío. Hay hogares para quienes el maestro es un enemigo y torpes especímenes de montañeses pirenaicos se permiten el papel de patrones amonestándoles en esquelas de estraza con disonantes frases como estas: «ayer le he preguntado á mi hijo el alfabeto salteado y no lo ha sabido; dígame al maestro que le enseñe á leer que para eso lo mando á la escuela». En un ambiente republicano, sin opresiones, la tosca personalidad corregida por una conciencia rudimentaria, recobra su vieja robustez; así, no es extraño oír á diputados de campanillas, la conveniencia de cerrar escuelas, porque los jóvenes, hijos de tales padres, les basta leer y escribir; lo demás es gollería de mal acostumbrados. No obstante, escuelas necesitamos para curar estas psicopatías de etiología atávica.

Al tender, cada año, mis ojos sobre el libro de matrícula, no dejo de sentir el escalofrío del terror cuando descubro las imperfecciones de un hogar lleno de exigencias, si el hogar existe. Aquí, una columna de jóvenes sin padre; allá, otra de huérfanos; allá otra donde la madre, único sostén de seis pequeños, hace esfuerzos sobrehumanos para ganar, cosiendo ó planchando, los dos ó tres pesos diarios con que alquila dos cuartos, viste y alimenta su prole; acullá, otra donde ó la hermana mayor, ó el tutor, ó un presunto pariente, reniega de un

fardo que desea abandonar cuanto antes; por fin, otra, donde el padre es pudiente, pero los hijos llevan en el bolsillo la llave de la puerta de calle. Pocos son aquellos que dentro de una familia acomodada, buena, sin miserias, ni angustias, ni sufrimientos, van á la escuela llevados por el solo afán de perfeccionarse y pocos aquellos que alcanzan la cima de sus deseos. La ciudad mediterránea y la aldea, ofrecen este cuadro agitado, informe, turbio y turbulento de sociedad llena de estigmas que espera del mucho tiempo la regeneración. El ansia de alcanzar la suma dicha en ambiente tan precario é indefinido, mueve á cuanto sentimiento oculta la insinceridad de la máscara, dirigido por el criterio abortado de una sociedad frívola cuya acción aniquilante refluye sobre sus propios elementos.

Maestros.—Durante los años que enseñé y que observé al maestro, he llegado á convencerme de que contribuye á la lentitud hacia la perfección, la inercia de las personas encargadas de enseñar, y, tal vez, la comparación general deficiente. Antes, ¿era todo mejor? No cometeré la ligereza de alguno de nuestros escritores. La escuela es mejor hoy que antes, congratulación que no justifica sus defectos. A veces observo clases de ex-alumnos con cinco años de trabajo, y no puede menos de asombrarme el habitual olvido de prácticas que en la Escuela Normal eran elementales; no avanzan ni conservan todas aquellas nociones saludables para levantar el espíritu de sus discípulos. ¿Por qué esta regresión? El maestro no se perfecciona por el estudio: cumple su tarea con puntualidad, pero mecánicamente, sin aquello que implica el esfuerzo propio. ¿Mal de hoy? Absolutamente. Los antiguos hacían lo mismo sin los sedimentos siempre fértiles de una instrucción normal; nos quedan, todavía, denominaciones clásicas: *maestro ciruela*, *maestro palmeta*. No obstante, ningún mal disculpa á otro. La escuela da elementos preparados, pero solos, no incuban al calor del entusiasmo, las cuali-

dades adquiridas bajo el fecundo aliento de sus profesores; *la falta de ejercicio concluye con la función y el órgano*, de manera que un maestro que cruzó las aulas resplandeciendo como un sol, es, al cabo de diez años, la representación de un imbécil, ocupado en contener las expansiones intelectuales de sus alumnos. El maestro sabe dos ó tres idiomas y no los utiliza en leer un libro que mejore sus prácticas profesionales; gana un sueldo y rara vez destina un peso á la compra de obras pedagógicas que puedan iluminar los procedimientos de la enseñanza primaria; es obsequiado por un autor amigo con sus producciones, y rara vez corta sus hojas para satisfacer el instinto de curiosar lo que contiene. Estos cargos, que excepcionalmente pueden levantarse, se dirigen contra la *maestra* más que contra el *maestro*, en manos de la que está la enseñanza primaria del país. ¿Faltan estímulos? Efectivamente; es un mal de esta y otras épocas; so pretexto de que el que trabaja sólo cumple con su obligación, la mano de nuestros superiores, agita con más gusto el chicote que la palma. Pero ninguna ley prohíbe trabajar, y la perfección, hay esperanza que algún ojo la note un día y sea motivo de mejora material.

Las instituciones públicas, generalmente buenas, no tienen la culpa; dan lo que pueden: direcciones, instrucción tal vez, hábitos de trabajo, aptitudes para perfeccionarse; pero la perfección es un triunfo del esfuerzo individual. No se explicaría, entonces, cómo de una facultad de medicina brote junto á una rama de prodigiosa frondosidad, otra raquítica y desnuda; es el eterno ser ó no ser de la instrucción pública lamentado antes como hoy, por SMITH, por COMTE, por GREARD, por CANÉ, por cuantos piensan y observan, y que no tendrá nunca más que paliativos. ¿Contagio? Sé perfectamente, y lo revelan cartas y confidencias de mis ex-alumnos, que los viejos transmiten con cierta maldad, mezcla ingenua de rencor, envidia y bestia cansada, sus mañas; ellos, los directores, recriminan al joven maestro sus bríos, el deseo de hacer, los

nobles impulsos de volcar en las aulas el inmenso caudal de conocimientos y prácticas adquiridas en unos cuantos años de lucha y aprendizaje; ellos fustigan, no hay duda, al joven subordinado, con una educación pedagógica nueva y *sui-generis*, que concluye triunfando porque la obediencia y las canas imponen.

Sin embargo, esta pasividad disciplinaria del subordinado, no justifica, del espíritu, la regresión. ¿Exceso de trabajo? Sí, lo hay; cinco ó seis horas de enseñanza diaria, con elementos deficientes, cansan, vencen, dejan profundas contrariedades, agrían el espíritu; pero no es suficiente disculpa para abandonar los libros y el estudio; llega entonces un momento en que se transmite un mínimo de enseñanza, á menudo falsa. La verdad, no fatiga; es un entretenimiento y obtiene de los alumnos el incomparable placer de la atención.

No sé, en este momento, como corregiremos un mal viejo, de hondas raíces, que tanto obstaculiza el progreso escolar de nuestro país, y que probablemente, debemos á la sangre autóctona y española, de dos razas por naturaleza, indolentes y variables, cual si fueran restos de lejanas épocas históricas. La apatía exige estímulos enérgicos para combatirla. ¿La escuela, puede cambiar la sangre del país? ¿La escuela puede emplear estímulos que acardenalen la piel ó inciensen la aplicación de los que no son ya sus alumnos? Es el problema; no nos halaguemos con otras épocas, que inútilmente se pretenden luminosas. Progresamos; es un hecho irrefutable. En virtud de una ilusión explicada por la falta de análisis de los casos presentes, los viejos juzgan mejor su época y hasta suelen no ver que ésta es hija de aquélla; la juventud, poco madura, no ve desperfectos; la madurez, en un vasto campo de contactos, con el análisis meticuloso del prejuicio desde que se tiene visión más clara del mal, juzga de otro modo los variados complejos fenómenos de la vida. Es la evolución del y optimismo al pesimismo; los viejos nos hacen poca justicia « ¡Oh, mis tiempos! decía una respetable anciana. Entonces teníamos esclavos y podía-

mos mandarles con un tiesto por la cabeza si nos hacían mal las cosas; hoy, no podemos gritar á un criado porque nos quedamos sin servicio ».

Enseñanza sin alma. ⁽¹⁾ — Es la frase... y desgraciadamente una enfermedad que produce los efectos de la adormidera en la juventud, porque la juventud toma el alma del maestro, sigue sus entusiasmos y sigue sus abatimientos, sus arrogancias y sus tristezas. Ese aspecto de vida hastiada que ofrece un crecido número de educacionistas con los pliegues de la bilis ó del tedio en el rostro; trabajadores por obligación; indolentes por hábito; dispuestos á cumplir un deber con el menor esfuerzo posible y disipar cuantos minutos puedan en amonestaciones pueriles, ó pasando lista, ó repartiendo cuadernos; toda esa negligencia, toda esa falta de entusiasmo y de cariño, toda esa mecanización inconsciente y rutinaria, toda esa falta de empeño para dar colorido y robustez á la enseñanza, repercute dolorosamente en los alumnos que desean abandonar cuanto antes un aula sin momentos amenos, ni novedades, ni emociones, ni corrientes de simpatía entre discípulos y maestros de la que, con razón, hace el director de la escuela de Goya, ANTONIO E. DÍAZ, un motivo del procedimiento pedagógico. ¿A qué se debe un espíritu generalmente frío en un recinto donde se le necesita tan ardoroso? ¿Una exteriorización tan reducida de la actividad consciente que no parece humana? En parte, á una preparación limitada sin disposiciones para mejorarla, que no fomenta el amor á las cosas, al libro, á la verdad, á las investigaciones; en parte, á los resabios de viejas esclavitudes que exigen el chicote para movernos; en parte, á la *masa de elementos amorfos* que exige estímulos que acardenalen su amor propio para cumplir sus deberes.

(1) Con este título el inspector CARLOS L. MASSA, publicó ocho páginas llenas de verdad, fruto de sus observaciones, en la *Revista de Educación*, T. II, Nº 7. La Plata.

El buen maestro sabe cuanto compensan el esfuerzo *las lecciones inteligentes con el propósito de que el niño aprenda algo, asegurándose de que lo ha aprendido.* «Si es humano tener sonrisas en los labios al percibir los haberes y alegrías en el último minuto del trabajo diario, es también humano meditar sobre la alta misión de dirigir los primeros aleteos de la vida intelectual. Ser enseñantes de verdad, apóstoles de la ciencia; connaturalizarse en todos los actos, con la línea recta que es la de la justicia, para que, en un mañana cercano, podamos tener escuelas donde se eduque la niñez, con alma». Hay un estado, dice SOLLIER, (análisis del acto mnésico) que contribuye á fijar las impresiones: es la emoción, ó mejor dicho, el tono emocional que las acompaña, cuando no es simulado. El aumento la intensidad de la atención y de esa intensidad depende la penetración del conocimiento.

Sin embargo, es una presunción demasiado académica exigir de cada maestro, compensado con 100 pesos, 8 horas de trabajo y un estado de conciencia que no es sino propio del talento. En toda estratificación del trabajo humano hay dos clases de tipos: el característico y el indiferente (VENTURI) y entre ellos, el sujeto que por tendencia se vale de la simulación (astuto, fumista) para adaptarse á las condiciones de la lucha por la vida.⁽¹⁾ Al grupo de los indiferentes pertenece la mayoría de los maestros capaces á la menor brisa del característico, de llegar á las mayores alturas ó caer revolcados en la ola de un arroyuelo. Son barcos llenos de velas, pero sin timón, por cuyo motivo no puede adivinarse su ruta ó si serán estrellados contra la playa ó sobre un escollo. PÉREZ, los llama lentos; MALAPERT, apáticos; PAULHAN, templados. Al grupo de los *característicos* (estimuladores), pertenecen ó deberían pertenecer las autoridades, inspectores de escuela, directores de tendencias

(1) INGENIEROS, «Archivos de psiquiatría, criminalología, etc.» Año II, No VIII, pág. 449. Buenos Aires.

originales y capacidad para iniciativas distintas de las habituales. Ellos son los que modelan y plasman el porvenir (INGENIEROS), los actores del drama humano en la evolución social.

De aquí, pues, que pretender de cada maestro un *meneur* capaz de moverse á sí mismo, es un ideal que los hechos no confirmarán nunca puesto que la vida humana es como es.

En cada gremio los característicos son pocos, abundantes los amorfos. Desgraciadamente, la educación es de tal naturaleza que exige para sus éxitos, de cada maestro un *meneur* lo que en otras tareas, trabajadores de un campo, obreros de una fábrica, marinería de un barco, sería perjudicial. El maestro amorfo no lee, no estudia, el campo de su preparación se estrecha constantemente, su cerebro se infantiliza hasta ser extraño á los acontecimientos notables del día y con él, infantiliza á sus educandos mediante una enseñanza pobre, de limitado radio, de escuetas nociones alrededor de las que se agrupa un reducido número de ideas afines. ¡ Se ignora ! y donde caben cien conocimientos no pueden darse sino tres.

II

Elementos para la enseñanza de la Aritmética

El aula. — La multitud adolescente, acuartelada en edificios sin luz, sin aire, incómodos y malsanos, inspiró á DESMOULINS las páginas de libros que agitaron por un momento la opinión de todos los hombres que meditan el problema de la enseñanza. Los pueblos se suicidan, educando su juventud en la atmósfera asfixiante de aulas sin oxígeno, sin luz, sin colores, sin alegrías, aglomeraciones considerables, dice GUYAU, encierros malsanos que quebrantan, á menudo, la voluntad del niño, esa voluntad que se fortifica en un ambiente de atrayentes enseñanzas.

El problema escolar es, antes que de reglamentos, programas y leyes para compulsar algo que no tiene espacio en que moverse, la construcción de buenos edificios. No es posible, con aulas estrechas, con patios pequeños, sin jardines y sin galerías; con casas mal construídas, mal situadas y de alquiler, donde el material no puede colocarse y se deteriora rápidamente, objetivar buenas ideas, prometerse ópimos frutos, conseguir de los alumnos rápidos aprendizajes. La enseñanza, dice L. CALDERÓN, sólo se ostenta lozana en grandiosos edificios que por ser grandes y cómodos, se llenan de alumnos apenas abren sus puertas. Es esta la verdadera pedagogía que el pueblo entiende, á quien en vano se le hablará de planes de estudio, métodos, régimen disciplinario, pero que, entre un palacio y una casa estrecha, no trepida en elegir. ⁽¹⁾

Felizmente, las provincias argentinas reaccionan en estos momentos; dotan á sus principales ciudades de locales amplios. Corrientes (administración FERREIRA) inició este movimiento, fructuoso para la instrucción pública; hoy es la nación misma que se propone dar á sus colegios y escuelas edificios de primer orden, satisfaciendo las exigencias de la moderna pedagogía; el Ministro de Instrucción Pública doctor JUAN R. FERNÁNDEZ no economiza actividad y empeños; dentro de poco se traducirá en hechos la ley de más trascendencia que sobre instrucción pública se haya promulgado de quince años á esta parte. ⁽²⁾ Es la enseñanza de catorce provincias y cuatro millones de habitantes que reciben los incalculables beneficios de la buena instalación de sus niños, hoy educados en cuartujos estrechos y malsanos donde lo primero que se adquiere son fobias sistemadas contra la escuela.

Pizarrones.—No trepidamos en atribuir el mal resultado de la enseñanza en las escuelas comunes que co-

(1) L. CALDERÓN, inspector de escuelas del Rosario. Informe á la D. G. de Escuelas.

(2) Las cámaras acaban de sancionar 7 millones de pesos para 27 edificios.

nocemos, á la escasez de pizarrones. ¿Cómo las autoridades escolares de catorce provincias argentinas no han parado la atención en deficiencia de tanto alcance pedagógico? Cada grado no dispone más de 1×1.40 m. de pizarrón montado sobre un caballete. Fácil es suponer que en tales condiciones no se ejercita al niño, obligado desde el pupitre, á escuchar siempre ó responder á preguntas más ó menos breves y abstractas.

La aplicación de los conocimientos no podrá ser efectiva sino en dos ó tres durante cada lección y la mayor parte de nuestros desarrollos hallarían un obstáculo insalvable; la enseñanza puede justipreciarse por la cantidad de tiza que gasta. El aula de la clase de Aritmética ha de tener en las paredes del frente y laterales anchos pizarrones á *coulisse* para aprovechar la mayor superficie posible dentro de la comodidad del alumno. El rayado no es útil y es perjudicial la mano de ciertos barnices que suele darse al pizarrón después de pintado. Completa este menaje, la pizarra giratoria para ejercicios de reconocimiento rápido. El procedimiento empleado por el profesor de trabajo manual de la escuela que dirijo, señor E. NEGRI, en la preparación, es el siguiente:

Pintar de negro y barnizar 1 pizarrón de 1 m. 50×0.90 ms.

Antes de pintar el tablero, se le pule bien para lo que se usa cepillo y papel de lija N° 1 y 0, tratando de no rayarle.

Se prepara la pintura con:

Negro de humo diamante, gramos 200. . .	\$ 0.20
Aguarrás, $\frac{1}{2}$ decilitro.	» 0.20
Barniz copal, $\frac{1}{2}$ litro	» 0.60

Se mezclan y agitan en un tarro limpio hasta que estén bien diluídos; se pasa por un tamiz de tejido de alambre muy cerrado. Se pinta la superficie del tablero con un pincel chato ó redondo N° 21 ó 22 estimando bien la pintura que acaba de prepararse y se

deja secar á la sombra durante dos días. Con lija N° 1 y 0 ó piedra pómez reducida á polvo, se pule la superficie pintada hasta que no se noten granitos ó asperezas; se despolva con un trapo, la superficie pulida; se pasa una segunda mano de pintura más liviana que la anterior, la que se obtendrá agregando un poco de barniz. Antes de usarla, se pasa por un tamiz de género, de tejido separado. Se deja secar dos días; luego se barniza usando 1 decilitro de barniz carriage (1 \$) con un pincel muy limpio y sin repetir las pinceladas en un mismo lugar.

A los dos días puede usarse.

Otro procedimiento.—En vez de prepararse la pintura puede comprarse $\frac{1}{2}$ litro de barniz negro extra, marca Japón.

Una vez alisada la madera, se le pasa una mano de ese barniz formado por los mismos ingredientes explicados para la otra pintura.

Se deja secar dos días á la sombra.

Se pule la superficie pintada, con un trapo mojado en agua y con polvo de piedra pómez hasta que quede bien lisa. Se le pasa una segunda mano del mismo barniz. Se deja secar dos días y después, puede usarse.

Este procedimiento es más económico y rápido.

Tiza.—En el primer grado es de excepcional importancia el uso de la tiza de colores para el reconocimiento y diferenciación á que se entregan cerebros que pronto se fatigan y cuyo poder comparativo es débil. Los colores tienen la preciada virtud de fijar la atención. La figura en tiza blanca, nunca será tan atractiva y fiel como la que se haga en colores.

Abaco.—Cae rápidamente en desuso el de mano como el de pie, ventajosamente substituídos por las numerosísimas colecciones de objetos que prepara el maestro ingenioso. Es uno de los tantos elementos de que el maestro se vale para determinados ejercicios. La escuela que los usare todos los días, durante 10 ó 15 minutos de clase, pronto notaría á sus educandos

invadidos por el tedio, con un aparato pertinazmente presentado. No hay motivos para que monopolice la objetividad de las lecciones, desde que puede substituirse de muchas maneras, con mecanismos que al ofrecer variedad, fijan mejor el conocimiento. En nuestros desarrollos, el abaco ha perdido la aureola de prestigio que le rodeaba, vale menos que una caja de bolitas, un montón de figuras, varios golpes de timbre ó unas cuantas hileras de rayas colocadas de cuatro en cuatro, para enseñar la tabla de multiplicar del 4. No obstante, discretamente empleado, ayuda con éxito el desarrollo de una lección. En este caso, uno es insuficiente; la ventaja del sistema simultáneo es, precisamente, el trabajo de muchos á la vez, fructuoso en la aplicación como en la pasividad contemplativa del aprendizaje. Nada menos práctico que la ejercitación de uno, cuando pueden ser diez los que escriben números, los que tomen objetos, los que cuenten, los que aparten bolillas del abaco. En punto á aplicación, es preciso decirlo, las escuelas están todavía, con perjuicio de la clase brillante y de la formación de aptitudes, dentro del sistema individual, de modo que, á no ser las pizarras murales, el maestro poco ó nunca examinaría los 40 alumnos de un grado; no alcanzaría á probar sus conocimientos prácticamente, dos veces al mes.

Mnemónomo—(calculador girante).—Este ingenioso aparato, cuya primer idea se debe á una de mis ex-alumnas maestras, la señorita MARÍA JULIA DEL UNCAL, que lo empleó con éxito enseñando *Lectura* al primer grado, se compone de una caja de 40 cent. de frente, 25 de alto y 20 de fondo, fija sobre un trípode de 1.41 m. de altura y abierta por el frente. Varios ejes horizontales que giran por los costados mediante pequeñas manivelas, arrojan y desarrollan una tela sin fin que deja á la vista del niño, un espacio como el de la parte abierta, suficientemente grande para que en él quepan cantidades hasta de cinco cifras, signos de operación, cálculos

y figuras (de palitos, bolitas, cajas, bolsitas, etc., etc.), visibles á 20 m. de distancia. La tela puede tener hasta 15 m. de longitud y llevar á cada 25 cent. un número, un signo, una operación, que desfilarán sucesivamente á la vista de toda la clase hasta donde el maestro lo quiera y con la velocidad que imprima al eje de rotación. En 15 metros pueden imprimirse hasta 70 cantidades con sus respectivos signos que se prestan á interesantes combinaciones. La tela, fija por sus extremos, con chinchas á los cilindros, puede substituirse en cualquier momento, por otra, de modo que el aparato es usable en las clases de lectura y se presta á todo ejercicio que tenga por objeto la educación de la memoria visual. Una pequeña modificación de los cilindros, en vez de móviles, fijos pero que sirvan de eje cada uno, á dos, tres, cuatro carretes, permite correr independientemente dos, tres ó cuatro cintas de 7 cent. de ancho con cifras y signos, cuyas combinaciones resultan infinitas. Aparato de tan poco costo, es un elemento insuperable para la enseñanza de la numeración, las tablas y el cálculo, particularmente á aquellos niños cuya memoria visual es frágil. Nuestros experimentos pusieron de manifiesto diferencias notables entre la reacción óptica y la acústica. Si se considera que en los casos comunes de la vida las operaciones son visometales y no audometales, se comprenderá que no es del todo práctico dar cálculos en alta voz, hablar siempre y ver poco, en este caso, usando la pizarra ó los cartelitos, aquélla que no permite graduaciones de tiempo sino con muchas dificultades; éstos, que no se prestan á ejercicios rápidos y variados. Si en la lectura está destinado á substituir los carteles, sentenciados á muerte por la micropsia infantil, en la aritmética se impone á los abacos donde el ingenio no halla sino campo reducidísimo. El aparato es un verdadero constructor de imágenes por asociaciones ópticas, destinado á producir una revolución en los métodos de enseñanza. (Véase enseñanza de las tablas).

Borradores.— El borrador, es elemento tan necesario como la tiza. Nunca debe servir uno para dos ó más alumnos, si se pretende que la economía del tiempo sea un hecho. En cada lección se mandan grupos de seis educandos á quienes se ordena ejercicios de escribir y borrar inmediatamente. Este resultado no se consigue si cada cual no dispone de un borrador, que algunos maestros atan de un clavo á la parte superior del pizarrón, tantos como niños suelen ocuparlos por vez. Los hay de diferentes clases; la esponja se la ha ensayado con resultados pésimos; el de paño se gasta antes de un mes de uso. El menos costoso y más durable es el de cuero de oveja fijo sobre un pedazo de madera de 18 cent. de largo por 6 ó 7 de ancho ó una almohadilla de paño rellena de aserrín, uno y otro, fáciles de hacer por alumnos del grado.

Punteros.— ¡ Cuántas veces y con cuánta frecuencia hemos contemplado impacientes, á niños que explicaban el análisis de un problema hecho en el pizarrón sin señalar una sola cantidad, un solo signo, una sola figura delante de una clase incapaz de seguir con los ojos sobre lo escrito, una recitación generalmente incorrecta! ¡ Y cuántas veces hemos visto apuntar con el dedo tapando con el cuerpo lo que los niños debían observar con los ojos! Un elemento, en apariencia, insignificante, contribuye, sin embargo, al éxito de una lección que se desea provechosa. Á veces el puntero es difícil de manejar por su longitud; por consiguiente, es necesario tener en cuenta estas circunstancias para poner en manos del niño, un útil cómodo y manuable. Los aconsejamos de pino, desde 70 cent. á 1.20 metro de largo.

Abanico contador.— Este aparato lo juzgamos útil para enseñar la suma, las restas mentales y las tablas, por la facilidad con que pueden moverse las varillas de derecha á izquierda, de izquierda á derecha, formar grupos y fijarlos sin mayor trabajo para el maestro. Las varillas son de 50 á 100 que giran alrede-

dor de un eje central sobre un mango del que ase la mano. Se diferencian por colores, de 10 en 10.

Museo escolar. -- *Sección aritmética.*—En dos de mis libros anteriores pongo de manifiesto la utilidad de un museo formado y seleccionado poco á poco por la escuela para que sirva á la enseñanza general y particular de cada asignatura según las reglas que el método científico ha establecido. ⁽¹⁾ El museo es de tantas secciones como ramos comprende el saber y cada sección objetiviza una materia dividida en correspondientes capítulos (lecciones).

El maestro no siempre es hábil, ó siendo hábil no siempre dispone de tiempo, ó disponiendo de tiempo no siempre es trabajador á punto de ser impecables sus clases, tocante á ilustraciones. Estos inconvenientes los salva el museo conservando una objetivación hecha para cualquier momento que el maestro la necesite. Para la enseñanza de los números, de las tablas, de las operaciones y cuanto constituye el programa general del grado, convenientemente arregladas, habrán colecciones que se consiguen formar con tiempo y trabajo.

1° Cajas conteniendo bolitas.

2° Bolsitas y cajas ordinales para la enseñanza de las decenas y centenas.

3° Colecciones de pequeñas láminas con determinado número de figuras.

4° Colecciones de fichas, varillas, portalápices.

5° Colecciones para ejercitar los alumnos en las medidas de capacidad, peso, longitud, superficie y volumen.

6° Colecciones de cartelitos en colores, con números impresos, operaciones indicadas, signos de operación.

7° Cintas contadoras y frascos de sonidos distintos (do, mi, sol,) á los que se asignan determinados valores.

(1) « La Educación del niño », 1897, pág. 242. « Museos Escolares y la Escuela Moderna », 1893.

8° Láminas que ofrezcan un rico material á la invención de problemas, tableros murales, cubos y paralelepípedos descomponibles en cubos y paralelepípedos de menor volumen.

9° Carteles de aritmética para la enseñanza de los números hasta 9; para la enseñanza de las decenas; de las centenas; de los signos de relación; de la igualdad; de las tablas; de objetivación de problemas, de tamaño suficiente para ser distinguidos por todos los niños de la clase.

10° Y cuanto el ingenio de un maestro de vocación puede descubrir, inventar y hacer.

Pizarras manuales. — Su uso es poco simpático al niño. Desde el 2° al 6°, las substituyen espontáneamente por el papel, costoso, no siempre á mano, no siempre en condiciones de limpieza, espacioso y abundante para que sirva á los ejercicios que el maestro manda hacer. Es, además, un motivo de distracción ó demora, sacar de los cajones los elementos para escribir. La pizarra es poco simpática al niño porque la escritura con el pizarrín es áspera, altera la belleza de los rasgos, proporciona espacio reducido y no se presta á escribir tanto como el papel. El pizarrín, generalmente corto y frágil, exige de los dedos un esfuerzo cansador. De aquí que propiciemos el enmarque sobre el pupitre, del vidrio esmerilado ú opaco, grueso para no romperse; se presta para ser escrito con lápiz y á ser borrado con esponja húmeda. Por otra parte, ofrece una superficie más lisa que la madera y mejores condiciones de conservación y aseo, pues en los momentos de distracción, no puede el alumno rayar el vidrio.

Debe colocarse sobre fondo blanco.

Carteles con soluciones de problemas típicos é ilustrativos de lecciones determinadas. — El cartel es un auxiliar poderoso, en un momento dado, para una lección que no hubo tiempo de preparar. Substituye al trabajo que el maestro haría en el pizarrón, con la ventaja, á veces, de ser más ordenado.

No detallaremos una ilustración que fácilmente puede hacerse, leyendo nuestros desarrollos.

Colección de pesas y medidas.— Completa para cada clase de medidas, duplicando y aun triplicando las de peso para que puedan ejercitarse varios niños á la vez. A las de longitud deben agregarse 40 reglas métricas de diversas longitudes, cordeles de uno ó dos Dms, con nudos á cada metro y jalones. Además, una colección completa de cubos de dos tamaños y diez substancias diferentes para dar, en 4º grado, las lecciones de peso específico.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO II

LOS BOSQUEJOS

I

Preparar la lección. — Cada lección es diferente y exige, en los primeros grados, una extraordinaria variedad de ejercicios que asegure la atención durante el sinnúmero de repeticiones que constituyen el éxito de la enseñanza. Lejos de ser un mecanismo sujeto á los detalles de un desarrollo único, exige la preparación cotidiana del maestro para ser fructuosa.

Desgraciadamente, estamos seguros de no equivocarnos, afirmando que una mayoría, da sus lecciones sin haberlas meditado un minuto; saben qué han de dar, cuando momentos antes, miran el horario y leen: Aritmética. Costumbres, hábitos, rutina, desidia, cansancio, lo que fuere, pero funesto todo, para una instrucción llena de defectos, que roba á la juventud sus mejores años de aprendizaje, fatigándola en un círculo de falsos conocimientos que los malos métodos graban el mayor tiempo posible.

No conocemos contra este mal, otro remedio que el de la honradez pedagógica y el de la conciencia sana que incita á consultar libros, á estudiar las manifestaciones de los alumnos y á escribir un bosquejo tratando, por lo menos, de no olvidar los principios más elementales del procedimiento.

El bosquejo exterioriza la *preparación especial* que el maestro hace de la lección y comprende:

- 1° — Grado, profesor y fecha.
- 2° — Materia.
- 3° — Tema.
- 4° — Proposición.
- 5° — Procedimiento { Principio.
(desarrollo) { Medio.
Fin.
- 6° — Aptitudes que especialmente desarrolla.
- 7° — Deberes.
- 8° — Ilustraciones.

Tema y proposición.— La mucha extensión del tema es un defecto común á los principiantes, difícil de reprimir y grave, porque los atracones no se digieren: se vuelven ó matan. A duras penas se consigue calmar la fiebre de engullir el programa de un bocado. Así, he visto tratar las propiedades del quebrado de una sola vez, en 25 minutos; he visto enseñar las medidas cúbicas de una sola vez, en 25 minutos; he visto enseñar los números de 1 á 9, de una sola vez, en 25 minutos; he visto enseñar las propiedades de las igualdades, de una sola vez, en 25 minutos; las lecciones son incompletas por el incorregible prurito de *las longitudes*, que para contrarrestarlo no sólo hemos usado la antipirina del asunto particular, insuficiente para impedir las divagaciones, que si secundarias en el bosquejo, son de cuerpo en la lección donde el alumno las toma por asuntos principales y no alcanza luego, á ordenar, de la exposición ramosa, una sola idea; sino también y sobre todo, de la proposición, que descubre anticipadamente los atacados de verborragia.

Lo más importante de una clase es la *unidad*, es decir, que medio y fin, que cuanto se diga, se pregunte y se haga, ruede alrededor del tema, del asunto particular, de la idea máter que los maestros fraccionan á menudo, con incidencias que suelen durar los treinta minutos reglamentarios, trastrocando los asuntos hasta convertir un trabajo aritmético, en ejercicios de gramática; ahora bien, práctica tan perjudicial á la buena enseñanza, se combate exi-

giendo en el bosquejo, un relato claro y conciso de lo que el alumno, al concluir la lección, debe responder de modo que, *a priori*, sin análisis pedagógico, puede considerarse bien dada, si los educandos refieren con seguridad, la proposición ó lo contrario, si trepidan ó no dicen nada. El maestro, entonces, se entrega con más recato á las divagaciones charlatanescas ó incoherentes; no se engolfa en las hinchazones del palabrerío y dilucida sin ambages, el tópico, dentro de los minutos de que dispone.

Existe el hábito de convertir las lecciones, so pretexto de explicar términos, en ejercicios de elocución, deletreo, ortografía, historia, interrumpiendo bruscamente, como pude observarlo muchas veces, desarrollos magníficos, retomándolos cuando la atención era incapaz de volver al punto en que fueron dejados. Este procedimiento que no provoca unidades psíquicas, forma la aptitud de distraerse. La proposición exige un esfuerzo poderoso de síntesis y para escribirla, es preciso dar mentalmente la clase, preguntarse *qué puede y qué debe aprender el niño de este asunto*; trabajo de verdadero valer didáctico que deseamos del maestro antes de comenzar una lección. Por último, se observan muchos casos de preparación deficiente, por holgazanería ó estrechez intelectual; se inculcan errores eficaces para confundir y cretinizar al niño por todo un ciclo escolar. La proposición descubre estas cualidades negativas y por fuerza, de un modo ú otro, se corrigen. El agregado de esta cláusula al bosquejo nos parece de una utilidad indiscutible; hagamos presente que no todas las lecciones admiten la misma forma de proposición.

No fuimos los primeros en advertir en nuestro cuaderno de observaciones, defectos tan antiguos como la escuela. El señor BAVIO, durante su regencia de la escuela normal del Paraná, los exhibió con admirable precisión en *Memorándum de un Maestro*, ⁽¹⁾ fusti-

(1) E. A. BAVIO. *Memorandum de un Maestro*, « Revista Sarmiento » 1894.

gando á los educadores y practicantes mal preparados é incapaces de interesar una enseñanza.

Ideas sintéticas é Ideas derivadas.—*Dar direcciones, formar aptitudes, enseñar poco y bueno, educar*, desde el punto de vista psicológico no puede confundirse con la instrucción cuyo objeto es transmitir conocimientos sin distinguirlos en primordiales y afines.

Una idea sintética bien adquirida implica el dominio de muchas derivadas que no necesitaron tratarse especialmente; una derivada no significa el dominio de la principal y sus afines. De aquí la diferencia entre un maestro que educa y *da direcciones* y uno que solamente *instruye*; el que educa forma aptitudes para dominar un vasto grupo de conocimientos afines; el que instruye, almacena los mismos conocimientos pero sin el parentesco de la derivación que los consolida. Da dirección, economiza tiempo, forma aptitud, fija una idea sintética, el maestro que trata la división de fracciones en un solo caso y según esta regla: para dividir quebrados, se los multiplica, invirtiendo el divisor. Si hay enteros, se los considera con el denominador 1. Así $\frac{3 \times 9}{6} : \frac{5}{9}$ es lo

mismo que $\frac{3 \times 9}{6} \times \frac{9}{5}$; $\frac{3}{7.6} : 8$, es lo mismo que $\frac{3}{7.6} : \frac{8}{1} = \frac{3}{7.6} \times \frac{1}{8}$. Por lo contrario, solamente ins-

truye el maestro que distingue tres casos sin la conveniente generalización: I Dividir un quebrado por un quebrado; II Dividir un entero por un quebrado; III Dividir un quebrado por un entero. El talento del educador consiste en distinguir las ideas sintéticas de las derivadas, enseñar aquéllas para que el educando llegue á éstas por su propio esfuerzo sin desencantos que vencer. Aquélla, que organiza vastas asociaciones celulares é interesa los centros más avanzados del cerebro constituye una enseñanza profunda, sólida, positiva, provechosa y otros adjetivos

con que los caprichos de la didascología la ha calificado; ésta, que afecta neuronas de esferas primarias sin interesar más que el reducido número de elementos de apoyo que psicogénicamente le preceden, constituye una enseñanza frívola, trivial, insubstancial, frágil, no obstante el mismo gasto de tiempo.

¿Qué educador distingue, expresadas en las mismas doce palabras, una idea sintética y nutricia de una idea pobre y sin proyecciones? ¿Qué educador es capaz de no perderse en el maremágnum de incoherentes y desaliñadas ideas donde todas pretenden imperar en la más confusa de las anarquías? El educador preparado. Nos duele oír á personas, en cuyas manos se decide más de un destino para la república, que el maestro *no necesita gran preparación* para enseñar á los niños; ¿para qué el álgebra, para qué la geometría, para qué esto, para qué aquello, si no ha de enseñarlo? ¿Y para qué las complicadas maquinarias que elaboran el rico Trapiche si no hemos de manejarlas? Pero, al beber, nos gusta vino barato y bueno. ¿Para qué tanta instrucción? Al aprender conviene al niño jugos del espíritu bien elaborados y que no cueste tomarlos.

Ideas fundamentales, ideas de fijación é ideas parásitas.

— En toda lección que no tenga por asunto *ejercicios*, deben distinguirse, del punto de vista de la transmisión, dos categorías de ideas: la fundamental (idea madre) y las circunstanciales, de sostén, de apoyo, evocadoras ó de refuerzo (de fijación ó referencia P. SOLIER⁽¹⁾). Durante la enseñanza, la atención no debe distraerse un momento de la idea madre; pero la idea madre debe formar campo (integración psíquica) asociando elementos, en cierto modo, extraños ó circunstancialmente afines, pero indispensables á la fijeza, reconocimiento y evocación de la que de otro modo quedaría sin fondo donde podérsela distinguir y de

(1) «El Problema de la Memoria», pág. 67.

consiguiente, expuesta á desvanecerse rápidamente. El recuerdo es más duradero y más pronta la reminiscencia, cuanto más elementos circunstanciales concurren á fijar la idea madre, porque cada uno, que aparte constituye una unidad psíquica, á su vez evocada por otros elementos afines, es capaz, según la teoría de GOLGI y RAMÓN Y CAJAL de revivir la idea á cuya formación contribuyera. Debe, en la práctica, temerse de que un elemento secundario forme campo, se imponga, é impere como principal, dirija hacia á sí la corriente nerviosa y fije, entonces, conocimientos fuera del propósito de la lección. Si un maestro pretende enseñar la suma de quebrados y desarrolla el *medio*, de esta manera:

M. — Para sumar fracciones, éstas deben tener un común denominador. Entonces, se suman los numeradores y la suma se divide por el denominador común, así: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, etc., (haciendo la operación). Cuando los denominadores son diferentes, se reducen á un común denominador; así: $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$, se reducen, primero, á un común denominador. ¿Qué es un común denominador?

A. — Dos fracciones tienen un común denominador cuando, etc.

M. — Denme Vds. ejemplos de dos fracciones que tengan un común denominador.

A. — (Dan los ejemplos).

M. — ¿Cómo se reducen á un común denominador?

A. — Se halla un número divisible exactamente por los denominadores.

M. — Muy bien. Piensen Vds. un número exactamente divisible por 8 y por 7.

A. — (Dan los números).

M. — Supongamos el denominador 56; ¿cuáles serían las fracciones equivalentes á $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$?

A. — (Dan las fracciones).

M. — En las fracciones $\frac{3}{11}$ y $\frac{2}{3}$ ¿cuál sería el factor común?

A. — Etc.

Los 25 minutos llegan y sorprenden á maestro y alumnos, en el denominador.

La idea circunstancial de apoyo y referencia, como se ve, del *común denominador*, se ha vuelto *característica*, dirige, en este momento, el campo de la atención relegando la *suma de fracciones*, á idea amorfa ó de segunda categoría. Esta substitución contraria al ahorro del tiempo y desventajosa al aprendizaje por tratarse de ideas afines en las que el maestro no siempre repara y á veces justifica porque no deja de ser aritmética lo que enseña, se produce á menudo; más condenable es, en verdad, la substitución de asignaturas, cuando comenzando por aritmética se termina en una acalorada explicación ortográfica.

El desarrollo de la idea madre, fija, por reciprocidad, las circunstancias evocadas por aquélla cuando se la recuerda como conocimiento para siempre conquistado. De aquí, más que conveniente, lo necesario de que tales circunstancias no sean inverosímiles, exageradas ó simplemente inútiles en el archivo general de nuestra mente. Por otra parte, una idea falsa, justo es suponer que no tenga oportunidades de presentarse; de aquí que como elemento evocador, pierda toda su eficacia. Así, de este punto de vista los enunciados de LATZINA⁽¹⁾ son combinaciones admirables, porque proporcionan circunstancialmente, multitud de datos geográficos, históricos y económicos acerca de la República Argentina y cada dato, al recordársele, evocará con más ó menos intensidad, el problema y las operaciones correspondientes. Hay maestros que los dictan de esta naturaleza: ¿Cuánto valdrán 25 kilogramos de azúcar comprados á \$ 5.032 el kilogramo? Un individuo nació 2015 años después de Cristo y murió á la edad de 85 años. ¿En qué año después de Cristo moriría? Un individuo vendió 85 corderos á \$ 15.25 cada uno. ¿Cuánto le pagaron? Un corredor compró 3000 bolsas de trigo á \$ 12 la bolsa; las vendió á \$ 15.50. ¿Cuánto ganó?

(1) «III Problemas», 1891. Buenos Aires.

Cuando se reflexiona acerca de una idea para retenerla, no se hace, en suma, sino buscar sus relaciones con otras conocidas, para tener así mayor número de puntos de referencia. Pero los niños sólo son capaces de atención espontánea; la voluntaria es difícil sino imposible; las voces de ¡atentos! ¡Miren aquí! ¡No den vuelta!, nada pueden contra una corriente de distracción. De aquí las ideas de refuerzo, el trabajo de buscarlas atrayentes, por lo común objetivas, para producir un estado emocional á cuyo influjo reaccione todo el cerebro y fije de una manera indeleble una asociación cuyo núcleo ó parte más densa, es la idea madre, característica, dirigente, involutiva, como el genio que administra los intereses de un sindicato, donde, menos él, todas son entidades anónimas.

Si la atención se mantiene por estímulos y se impone la energía de lo objetivo, no basta para adquirir un conocimiento, que se la produzca; es necesario que se reconcentre sobre la idea fundamental, el monoidismo. De aquí la unidad del tema, de aquí estímulos de la misma especie que el conocimiento, para no producir integraciones parásitas que desvíen la mente del propósito perseguido por la lección. Es presumible que se produzcan otras ideas; pero nunca han de ser de tal naturaleza que pierdan su carácter de sostén de la fundamental.

El maestro, con frecuencia, es víctima de las asociaciones parásitas (inmediatas) tanto más imperativas y extenuantes cuanto más adelantado es el grado.

Interroga acerca de las medidas de longitud y no abandona el tema, á veces, mientras dura la lección. El *principio*, pierde su carácter y su eficacia. Con frecuencia, *se infantiliza* al 4º, 5º y 6º grado con preguntas que evocan conocimientos inferiores á la capacidad del alumno. *¿Cuántos metros tiene un Dm? ¿Cuántas cifras tiene el número 7224? ¿Qué lugar ocupan las centenas? En un corral hay A ovejas en otro B ¿Cuántas ovejas en todo? Escriban 89.927.*

Procedimiento.—Entramos al desarrollo de la lección; terminada la clase, el educando debe reproducir los puntos de la proposición. Consta de *principio*, *medio* y *fin*; este reparto ya clásico de José M. Torres, necesario y fundamental, puede seguirse de dos modos: narrando la lección misma con preguntas y respuestas, calculando las equívocas, las incidentales, las manifestaciones posibles del alumno, en fin, simulando, en un todo, el caso real; ó bien indicando por medio de *pasos* sucesivos, la manera y forma de producirse. El primero es de resultados seguros, y sirve de magnífico ejercicio pedagógico y lingüístico á los practicantes, generalmente poseedores de una expresión incorrectísima, propensos á las preguntas defectuosas, á recibir mal las respuestas, á interrumpir la recitación, á olvidar los requisitos de una buena enseñanza; pero es extenso, exige papel y tiempo abundantes para hacerlo. El segundo, es bueno, sin los inconvenientes del primero, si bien no encalza tan eficazmente para el enseñante, las fórmulas pedagógicas.

Nos cuesta todos los años, dos ó tres meses de tarea para eliminar esta frase, tan cómoda para los haraganes. PRINCIPIO: *repaso de la lección anterior*; oyeron que deben unirse las lecciones, y han hallado esta manera tan sentenciosa y barata de enlace. La frase no indica procedimiento de ninguna especie; con frecuencia, el *principio* se vuelve *medio*, el repaso, lección y, cuando sólo faltan cinco minutos, se entra al grano, todo lo cual es bastante arbitrario, poco pedagógico; y poco didáctico es comenzar con un largo preludio de circunloquios y leitmotivs, sin que en cinco ó más minutos de introducción, alcance nadie á darse cuenta donde se va á parar, si en una clase de intuitivos, de lenguaje, de geografía ó de aritmética.

Ahora bien, esto lo hallamos fuera de lugar, defectuoso, perjudicialísimo á las resultas de una clase bien dada.

El *principio*, cuya duración varía de 4 á 8 minutos, tiene dos fines: a) recordar rápida y sentenciosamente cuánto hasta ese día fué enseñado de la materia me-

dian­te inter­ro­ga­cio­nes sim­ul­ta­neas que con la res­pues­ta no exijan más de 10 se­gun­dos, y b) re­cor­dar al alu­mno los co­no­ci­mien­tos pre­pa­ra­to­rios de los que van á tras­mitir­se en el *me­dio*; re­la­ción tan ín­ti­ma de lo des­co­no­ci­do con lo co­no­ci­do, para apren­der sin es­fuer­zo casi, lo que pre­ten­de­mos que ad­quiera. El éxi­to de esta parte, es­tri­ba en la ra­pi­dez de las pre­gun­tas y las res­pues­tas.

Hay cla­ses como las *de ejer­ci­cios*, que carecen de prin­ci­pio, me­dio, y fin; los ni­ños se so­meten á un ver­da­de­ro exa­men ó se les apremia para que la apti­tud se in­ten­si­fique. En­ton­ces el bosquejo in­di­ca ejer­ci­cios de la es­pecie *A*, de la es­pecie *B*, de la es­pecie *C*, sin que el con­jun­to res­pon­da á nin­gún con­cep­to unita­rio; den­tro de la es­pecie, los ejer­ci­cios de­ben ofe­recer la ma­yor va­rie­dad po­si­ble del pun­to de vi­sta ma­temá­ti­co y pe­da­gó­gi­co.

Por la de­fini­ción, se com­prende que sea la parte di­fi­cil del plan, por­que exi­ge una vasta me­mo­ria de lo que se en­se­ñó, para no re­pe­tir una mis­ma cate­go­ría de ejer­ci­cios acer­ca de una sola es­pecie de co­no­ci­mien­tos, para no ser víc­ti­ma de las aso­cia­cio­nes in­me­dia­tas, y para que el ejer­ci­cio, cla­ro y rá­pi­do, sin­te­ti­ce el ma­yor nú­me­ro de pun­tos de la asig­na­tu­ra.

Así, las pre­gun­tas: *mul­ti­pli­can­do diez mil­lo­né­si­mos por cien milé­si­mos ¿cuán­tas ci­fras hay que se­pa­rar en el pro­duc­to?* bien res­pon­di­da, su­pone el co­no­ci­mien­to de la nu­me­ra­ción de los de­ci­ma­les y de la mul­ti­pli­ca­ción, por di­fi­ci­les que se pre­sen­ten. De mo­do que pue­de in­ter­ro­gar­se acer­ca de un pun­to es­pe­cí­fi­ca­men­te dis­tin­to como ser *m. c. d.* de 15, 30 y 40? por­que aquél se do­mi­na. El as­pec­to de la cer­ti­dum­bre es otro si pre­gun­ta­se­mos al ni­ño: *¿Qué lu­gar los milé­si­mos? ¿Qué lu­gar los diez mil­lo­né­si­mos? ¿Cuán­tas ci­fras de­ci­ma­les tie­ne un mul­ti­pli­can­do, cuya úl­ti­ma es mil­lo­né­si­mo? ¿Cuán­tas ci­fras hay que se­pa­rar en el pro­duc­to si hay tres ci­fras de­ci­ma­les en el mul­ti­pli­can­do y dos en el mul­ti­pli­ca­dor?* Cin­co pre­gun­tas; cada una exi­ge el mis­mo tie­mpo que la pri­me­ra y no al­can­zan, to­das, á pro­ducir sus

efectos evocativos, porque aquélla, sintetizándolas (principio de la asociación, véase proceso de la aptitud matemática) es una integración de un número todavía mayor de asociaciones. No es, de consiguiente, fácil tarea, bosquejar un principio que evoque, recuerde, refresque, mantenga en vibración al mayor número de conocimientos en el menor tiempo posible (principio de la economía del tiempo).

El *medio*, que dura mayor tiempo, 12 ó 15 minutos, presenta el desarrollo ó el bosquejo del procedimiento para comunicar el punto nuevo de la enseñanza y del que el niño no tiene absoluta noción; mediante los pasos del objeto á la figura, de la figura á la abstracción, de lo particular á lo general y de la observación á la aplicación, el maestro expone las ideas ó las hace descubrir, uno ú otro procedimiento según el tiempo que economice, para aprovechar los cuatro ó cinco minutos de atención intensa que provoca toda novedad bien presentada.

La transmisión debe ser rápida, clara, sólida, sin palabras ni digresiones que desvíen la poderosa actividad del cerebro, ocupada en ese instante, en apresar el conocimiento.

Se ha generalizado el defecto de convertir esta parte de la lección, en un examen más ó menos penoso, más ó menos largo, sin otro resultado que agotar la atención del niño después de adquirir un mínimo de lo que se pretendía comunicar. Nuestro sistema es, por el contrario, rápido. ¿Debe enseñarse? Enseñamos; pocos minutos 3, 4, 5 de explicación, durante los que los niños miran intensamente al profesor, movidos por la novedad y aprovechados por nosotros con los artificios del buen lenguaje y la buena objetivación, para dejar en su cerebro un hondo surco donde las ideas sembradas hallen suelo fértil para crecer y multiplicarse. Nada de interrupciones, nada de idas y venidas de los bancos al pizarrón, del pizarrón á los bancos; nada, so pretexto de no decir al niño lo que sabe, de preguntas y respuestas por lo común pueriles que alargan el tiempo de enseñanza, perturban el campo de

la atención y el estado pasivo en que debe permanecer un centro mientras recibe. Compréndase esta reforma de los procedimientos y nuestro empeño en combatir el sistema tan pernicioso, molesto y aburridor de examinar siempre, siempre preguntas de examen, y nada más que de examen á título de que el niño debe descubrirlo todo por sí mismo, sin reflexionar que esas preguntas van transmitiendo, en dosis homeopáticas, el conocimiento. En 25 minutos, después de penosos esfuerzos, se da sólo una idea escuálida y seca. Nosotros en 25 minutos, damos la idea, la reforzamos con circunstanciales y conseguimos, de cada niño, la exteriorización, aplicada y repetida bajo formas variadas hasta donde la generalización traza límites.

El *fin*, que dura de 5 á 8 minutos, tiene por objeto, mediante ejercicios que el bosquejo precisará, repetir, aplicar y generalizar las ideas adquiridas en el *medio*. No es *repaso*, como vulgarmente se cree, de lo que se acaba de enseñar sino la fijación hecha con los múltiples artificios de la aplicación.

La indicación de la aptitud á desarrollar, presupone que el maestro no ignora el objeto de la enseñanza y sus aspectos difíciles desde el punto de vista psicológico, para no equivocar los pasos. Las *ilustraciones*, que se manejan, á menudo, con criterio erróneo, sirven de punto de partida y de elemento fundamental de ejercitación, á todas las lecciones. La mente del pequeño es una *tabula rasa in quod nihil est scriptum*, todas las imágenes hay que constituir las; de consiguiente, lo abstracto es un extravío pedagógico que comete un maestro, más que inexperto, indolente; todas las ilustraciones no sirven para un determinado propósito, se las necesita de ciertas condiciones y en cierta cantidad; de aquí que, en los bosquejos, ocupen la parte preferente.

El bosquejo debe, en todo caso, ser explícito en el procedimiento y los ejercicios de cada parte, de modo que resulten claros, la forma que el maestro adopte para usar las ilustraciones y los artificios para ir de un paso á otro.

Acerca de *las facultades á desarrollar*, inútil es decir cuánto se disparata en la mayor parte de los bosquejos, revelando, más que todo, ignorancia del proceso psíquico. La enseñanza es, comunmente empírica, y lo será, mientras las escuelas normales hagan de la psicología un estudio tan deficiente como el que se ha hecho hasta ahora. Decir: «se cultivará la atención, la memoria, el raciocinio», es una banalidad; condición ó resultado de todos los procesos, pero no el proceso mismo. Proponerse cultura moral y educación física en una clase de aritmética es otro contrasentido.

Que indirectamente consigamos interesar la función de todos los órganos es un hecho que realiza cualquier enseñanza. Hemos dicho que todas las células concurren á la actividad de un centro por ese espíritu de asociación que da al cerebro su admirable unidad. Pueden indicarse, sí, los centros que excitará sucesivamente una lección para fijar una idea; la mayor fijeza se debe á la manera de cómo cada centro presta su concurso en virtud de los estímulos que recibe de las organizaciones celulares de sostén ó periféricas.

A *deberes*, hemos de dedicar un capítulo. Los maestros descuidan complemento tan necesario de cada lección y dan estos trabajos de prueba para la aptitud del niño, con falta de criterio. Un solo día no hemos dejado de observar *deberes* que significaban un gasto inútil de energía y una pérdida de tiempo precioso. *Traigan ustedes copiados tales enunciados; escriban en sus cuadernos los números desde 40.000 á 50.000; traigan 50 números que terminen en 3; 25 números divisibles por 11; traigan hechas, las ocho sumas que acaban de dictarse; traigan para mañana, resueltos y razonados los 12 problemas de la serie tal. Traigan escritas las reglas que acabamos de enseñar*, etc. trabajos que roban preciosas horas y que no consiguen otro resultado que criar el odio hacia una asignatura que se presenta por una faz tan mecanizada, que tan poco excita la reflexión ó que exige la imposible tarea de analizar en dos horas, un montón de problemas.

II

Ejemplares de malos bosquejos—Tratándose de este asunto, no trepidamos en transcribir algunos *planes defectuosos* de lecciones dadas por practicantes de la escuela que dirijo y otras de la república:

1

ASUNTO PARTICULAR: Continuar la tabla; problemas.

Proposición—Haré ligeras preguntas acerca de los números de la tabla.

La base para continuar la tabla, es el número 37.

Dibujaré en el pizarrón varias filas de esferitas de color, en la primera 37, en la siguiente 38 y así escribiré varias filas á las cuales agregaré tres más.

Haré contar la primera fila ó sea las esferas de la primera fila.

Procederé de igual manera para formar los otros números.

Luego, haré problemitas: En un jardín hay dos filas de árboles, en una fila hay 32 árboles, en la otra 3 ¿cuántos árboles hay en las dos filas?

Principio: I—¿Cuánto es $21 + 3$; $32 + 3$; $16 + 3$; $19 + 3$, etc.?

II.—Tengo 25 lápices en una caja y tres en otra: ¿cuántos lápices tengo?

Medio—I. Haré contar los 37 objetos y agregaré otros tres más.

II.—Preguntaré ¿cuántos objetos tengo?

III.—Haré igualmente para formar los otros números.

IV.—Haré problemitas basándome en lo aprendido de la tabla.

Fin—Cálculo mental. (1^{er} grado).

2

ASUNTO PARTICULAR: *Problemas*

Principio.—Haré algunos ejercicios de cálculo como ser:

$$18 + 12 + 30 \div 2 = 80; 84 \div 4 - 5 \times 2 \times 2 = 64.$$

Medio.—Dictaré algunos problemitas: 1° Un hombre viajó treinta kilómetros: ¿cuántos metros recorrió? Recorrió 30.000 metros. 2° Un naranjero vendió 168 naranjas á 0.40 \$ la docena: ¿cuánto recibió? Recibió \$ 5.60. 3° Una señora compró 125 cuerdas de campo por 10.250 \$ y lo vende á 196 \$ la cuerda: ¿cuánto ganó? Escrito: $10.250 \div 125 = 82 \times 196 = 16.072 - 10.250 = 5822$ \$.

Fin.—Se hará un problema mental que comprenda varias operaciones: 2000 metros de género á 80 \$ el decámetro = 16.000; repartido este dinero entre 4 = 4.000 \$. (4° Grado 1894).

3

ASUNTO GENERAL: *Cálculos*. — ASUNTO PARTICULAR: *Problemas*

Principio. — Como principio, terminaré el problema de la clase anterior: Desde el reinado de Nabucodonosor en 3967, después de los 747 años principia la era de los cristianos, 221 años más tarde tiene lugar la era de los otomanos y 1195 años después se declara la Independencia Argentina. ¿En qué época tiene lugar cada uno de los acontecimientos mencionados?

Solución: — $3967 + 747 = 4714$ Era cristiana.
 $4714 + 221 = 4935$ Era de los turcos otomanos.
 $4935 + 1195 = 6130$ Se declara la Independencia Argentina.

Medio. — Del centro del planeta Saturno, á su más próximo satélite Mimas, hay 25.600 millas geográficas, el satélite Enceladas está 7266 millas más lejos. Thethys está 7834 más lejos que Enceladas. Dione está 11.464 millas más lejos que Thethys. Rhea está 19.246 más lejos que Dione. Titán está 97.390 millas más lejos que Rhea. Hiperión está 36.200 millas más distante que Titán y Japetus dista del centro de Saturno 319.686 millas más que Hiperión. ¿A qué distancia media se halla cada uno de los 8 satélites (ó lunas) del centro de Saturno?

25600	+	7266	=	32866	—	Encelada.
32866	+	7834	=	40700	—	Thethys.
40700	+	11464	=	52164	—	Dione.
52164	+	19246	=	71410	—	Rhea.
71410	+	97390	=	168800	—	Titán.
168800	+	36200	=	205000	—	Hiperión.
205000	+	319686	=	524686	—	Japetus.

Fin. — Terminado el problema, un pequeño cálculo: $300 \div 2 \times 3 - 50 \div 4 = 100$ (6° Grado).

4

ASUNTO GENERAL: *Cálculo*. — ASUNTO PARTICULAR: *Examen*

Dictaré problemas concretos que serán resueltos por los alumnos, como ser: 1° Un kilo de café cuesta \$ 2.50: ¿cuánto costarán 6 kilos? 2° Un viajero tiene que recorrer 30 kilómetros, recorre 11: ¿cuántos decámetros le faltan recorrer? etc.

Alternaré los cálculos concretos con los abstractos, ejemplo: $120 + 60 \div 6 \times 2$; $820 \div 2 \times 6 - 400$ etc. Multiplicar 24×25 (4° Grado 1894).

5

ASUNTO PARTICULAR: *Problemas de las series 34 y 36.*

Proposición. — Se resolverán los siguientes:

I

$$\begin{array}{rcl}
 8^{\circ} (34) & 60'' \dots\dots\dots & 800 \text{ m.} \\
 & 1'' \dots\dots\dots & 800 \\
 & & \hline
 & & 60 \\
 3965'' \dots\dots\dots & & \frac{800 \times 3965}{60} = 52860 \text{ m.}
 \end{array}$$

II

$$\begin{array}{rcl}
 1^{\circ} (36) & 1^{\circ} + 2^{\circ} + 3^{\circ} \dots\dots & 84875 + 71432 + 56743 = 168050 \text{ gr.} \\
 & \text{pérdida} \dots\dots\dots & 22820 + 17430 = 40250 \text{ gr.} \\
 & \text{resto} \dots\dots\dots & 168050 - 40250 = 122800 \text{ gr.} \\
 & 122800 \times 2 & = 245600 \\
 & 245600 \times 35 & = 8596000 \\
 & 197470 \text{ gr.} \dots\dots\dots & 1 \text{ fanega} \\
 & 8596000 \text{ " } \dots\dots\dots & \frac{8596000}{197470} = 43.53 \text{ f.}
 \end{array}$$

III

$$\begin{array}{rcl}
 \text{V del C} & = & \pi R^2 A \\
 \text{" " " } & = & 0.8^2 \times 3.1416 \times 0.6 = 0.169646 \text{ m}^3 \\
 1 \text{ m}^3 & \dots\dots\dots & 1000 \text{ dm}^3 \\
 0.169646 & \dots\dots\dots & 0.169646 \times 1000 = 169.646 \text{ dm}^3 \\
 169646 & \times 0.025 & = 4.241150 \text{ grs.}
 \end{array}$$

IV

$$\begin{array}{rcl}
 100 \text{ p-ag.} & \dots\dots\dots & 5 \text{ ac-f} \\
 1 & \dots\dots\dots & \frac{5}{100}
 \end{array}$$

$$20 = \frac{5 \times 20}{100} = \frac{100}{100} 1 \text{ litro}$$

Principio. — I. Pasarán varios alumnos al pizarrón á resolver los problemas. II. Mientras, la clase resolverá cálculos mentales.

Medio. — I. Uno de los alumnos explicará el problema.

- II. Si el razonamiento no está bien, se repetirá.
 III. De la misma manera corregiré los siguientes.
Fin. — I. Toda la clase extraerá la raíz cuadrada del número 12.432.526. (5° Grado 1902).

6

ASUNTO PARTICULAR: *Problemas 2°, 3° y 4° de la serie 39*

Proposición. — Se resolverán los siguientes problemas :

- II. 1° Se trata de saber cuántos ladrillos entran en una pared.
 2° " " " " cuántas veces un v. entra en otro.
 3° Un volumen es (ladrillo) = $a b c$ m³.
 4° Otro volumen es (pared) : = $c d e$ m³.
 5° Se trata de saber cuántos ladrillos entran en la pared ó bien cuántas veces el primer volumen entra en el segundo.
 6° Cabe $\frac{c d e}{a b c}$ = ladrillos.
 7° Reemplazando tenemos $a b c = 0.35 \times 0.17 \times 0.06 = 0.008570$ metros³.
 8° $c d e = 10 \times 50 \times 0.525 = 262.500$ m³.
 $\frac{262500}{3,570} = 73529$ ladrillos.
 III. 1° 1 dm³ ag. des = 1 kg. agua.
 2° " " " = 7 " "
 3° 7 kgr pl = $\frac{7}{11.37} = 0$ dm³ 615 cm³ 654 mm³.

Principio. — I. Designaré á varios niños para que pasen al pizarrón.

- II. Mientras, la clase responderá á estas preguntas :
 III. ¿Cuál es el cuadrado de 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ?
 IV. ¿Qué significa mm, dm, ltros, m, kgr, mm ?
 V. ¿Cómo se lee 0,0345005018 ? ¿ 7.5128456832 m³ ?

Medio. — I. Uno de los alumnos explicará el problema.

- II. Será ayudado en el razonamiento sino lo sabe.
 III. Se pasará al segundo problema y se procederá como en el caso anterior.
 IV. Se explicará el 3er problema.

Fin. — Toda la clase resolverá este problema : ¿Cuánto pesan 35 m³ 316 de mármol, sabiendo que el peso específico del mármol es 2,83 ?

7

ASUNTO PARTICULAR: *Problemas de volumen*

Proposición. — ¿Cuál es, en decímetros cúbicos, el volumen de una caja rectangular, cuyas dimensiones son ancho 0.8, alto 0.18 y largo 1.5?

$$V \text{ de un par. rect.} = a \times b \times c$$

$$0.8 \times 0.18 \times 1.5 = 0.216 \text{ dm}^3$$

II. ¿Cuál es el volumen de un cubo que tiene 4.65 m. de lado?

$$V \text{ de C} = a \times b \times c$$

$$V \text{ de C} = 4.65 \times 4.65 \times 4.65 = 100 \text{ m}^3 \text{ 544 dm}^3 \text{ 625 cm}^3$$

III. Un trozo de encina de forma rectangular tiene 2.05 de largo por 0^m.32 de ancho y 0^m.45 de espesor: ¿cuál es su peso sabiendo que su densidad es 0.82?

$$V \text{ de p. rect.} = A \times B \times C$$

$$V = 2.05 \times 0.32 \times 0.45 = 0.2952$$

$$0.2952 \times 0.82 = 0.242064 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 \dots\dots\dots 1 \text{ k}$$

$$0.242064 \dots\dots\dots 242 \text{ kg. } 064 \text{ gr.}$$

Principio. — I. Pasarán tres alumnos al pizarrón á resolver los problemas.

II. La clase responderá á estas preguntas: ¿cuál es el área de un triángulo, de un cuadrado, etc.?

III. ¿Cuál es la fórmula del volumen del prisma, pirámide, cubo, cilindro?

IV. ¿Qué significa $\pi \times R^2$? ¿ $V = \frac{A \times B}{3}$?

Medio. — I. Los alumnos explicarán los problemas que hayan resuelto. Si están mal, pasarán otros alumnos ó los hará toda la clase.

Fin. — Pasarán niños y escribirán fórmulas y cantidades que dictaré. (5° Grado 1902).

8

ASUNTO PARTICULAR: *Signos = y de sumar; y sumar 1 + 1 y 1 + 2*

Principio. — Observar una hojita dibujada y compararla con otra, y si se las encuentra parecidas en todo, se podrá decir qué son? (iguales). Enseñaré dos clavos que son iguales, bolillas que sean iguales, etc.

Medio. — Ahora yo veo en el pizarrón dos hojas iguales, no hay nada escrito que me diga que son iguales. Escribiré el signo igual (=). Que me hagan ver que dos cubitos son iguales, etc.

Conocido bien este signo juntaré á una bolita otra bolita, una figurita más otra. Reemplazaré la palabra agregar por *sumar*. Haré operaciones concretas de sumar. En el pizarrón hemos agregado ó sumado una hoja con otra, pero podemos decir, una hoja más otra hoja y reemplazar por el signo +. Así como nosotros sumamos una hoja colocándolas en la mano, con otra hoja, una sobre otra, podemos sumar los números colocando los números sobre otros.

Fin. — Preguntas y problemas para ver si han comprendido.

Ilustraciones. — Objetos, hojas, dibujos, marco contador. (Agosto de 1894; 1^{er} Grado).

9

ASUNTO PARTICULAR: *Colocación de las cantidades en la suma*

Principio. — Resumen de la clase anterior, es decir, lectura del signo = y + en problemas como estos $\square + \square + \square = 3$ y $1 + 1 + 1 = 3$.

Medio. — Continuaré, después, haciendo operaciones concretas hasta llegar á formar la tabla $1 + 1 = 2$; $1 + 2 = 3$, etc.; y luego, habiendo llegado á 10, colocaré objetos sumados unos sobre otros, para deducir que los números se pueden sumar también colocándolos unos sobre otros. Luego, trazando una línea, se suman, poniendo el signo á la izquierda.

Fin. — Ejercicios mentales de sumar y repetir la colocación de las cantidades.

Ilustraciones. — Dibujos, lápices, hojas, libros, etc. (1894).

10

ASUNTO PARTICULAR: *Sumar decenas y unidades*

Principio. — Problemas mentales sobre las decenas, por ej.: un naranjero llevaba dos canastas, cada una la había dividido en dos partes; en una tenía 1 decena y 4 unidades de naranja: ¿cuántas naranjas llevaba? (14). Escribir 1 decena y 4 unidades. En otra división llevaba tres decenas de peras: ¿cuántas peras llevaba? (30). Que escriban este número. En la 3^a tenía 1 decena y 8 limones: ¿cuántos limones tenía? (18). Y en la 4^a tiene solamente 9 naranjas, de manera que faltaban cuántas para tener una decena? (1).

Medio. — Hacerles comprender que si nosotros quisiéramos reunir ó sumar estas frutas, no podríamos hacerlo bien, no vamos á colo-

car un número en un lugar y otro en otro, á gran distancia, en el pizarrón, sino que los vamos á colocar en orden. Así, haré que arreglen figuritas y libros; es decir, si tuviesen que arreglar y guardar, no pondrían primero un libro, después una figurita, después un libro, etc. Atendiendo ahora, á los números ya escritos, en los cuales me han dicho hay decenas y unidades, ¿ cómo se deben arreglar? Las unidades debajo de las unidades y las decenas debajo de las decenas. Colocar ahora el signo $+$ y sumarlos. Si resulta de la suma de las unidades una ó más decenas, se deben sumar con las decenas, porque sino alteraríamos el orden ya indicado.

Fin. — Preguntas sobre suma de unidades y decenas.

Ilustraciones. — Una canasta dibujada, figuritas y libritos. — (1^{er} Grado; Agosto 1894).

11

TEMA: Ejercicios

Principio. — Ejercicios de cálculo mental combinando las tres operaciones.

Medio. — Pondré varios problemitas fáciles que serán resueltos inmediatamente por los alumnos. Pondrán los alumnos varios problemitas que resolverá el resto de la clase. Dictaré varios problemitas combinando las cuatro operaciones; un problema para cada fila, pero que todas deberán dar el mismo resultado.

Fin. — Un alumno analizará uno de los problemitas.

Facultades. — Atención, percepción, raciocinio, juicio y memoria.

Ilustraciones. — Pictóricas y verbales. — (1895).

12

ASUNTO PARTICULAR: Problemitas de multiplicar

Proposición. — 1° Una galleta vale tres centavos: ¿ cuánto valdrán 2528 galletas? Solución: 1 g. . . . 3 cts.; $2528 \times 3 = 7584$. 2° Un pan de jabón vale 5 cts.: ¿ cuánto valdrán 8525 jabones? 1 j. . . . 5 cts.; $8525 \times 5 = 42625$. 3° ¿ Cuánto valdrán 575 mtrs. de cinta, sabiendo que 1 m. vale 7 cts.? Solución: 1 m. . . . 7 cts.; $575 \times 7 = 4025$.

Principio. — 1° ¿ Qué puede indicar el número 2129?

2° Indicado un número pediré á la clase su nombre.

3° Cálculo dictado por mí (combinación de suma y resta).

4° 200 cts. ¿ cuántos pesos son?

5° ¿ Cuántos medios litros hay en 10 litros?

Medio. — 6° Tomarán asiento los alumnos del pizarrón quedando únicamente el alumno que debe resolver el problema N° 1.

7º Una vez explicado dicho problema se explicará el N° 2.

8º El mismo procedimiento seguiré con los siguientes problemitas.

Fin. — 9º ¿Cuánto es 7×5 ; 3×9 , 4×4 ?

Resolver el cálculo dictado por mí. Pasarán al pizarrón cinco niños con el objeto de escribir las cantidades que yo les dictaré.

PARTICULAR: Problemitas de multiplicar

Proposición. — 1º Un metro de percal vale 25 cts.: ¿cuánto valdrán 75 mtrs.? Solución: 1 m.... 25 cts.; $75 \text{ m.} \dots 75 \times 25 = 1875$.

2º Un kilo de arroz vale 45 cts.: ¿cuánto valdrán 1524 kilos? Solución: 1 k.... 45 cts.; $1524 \dots 1524 \times 45 = 68580$.

3º ¿Cuánto valdrán 827 k. de fideos, sabiendo que 1 k. vale 35 cts? Solución: 1 k.... 35 cts.; $827 \dots 827 \times 35 = 28945$.

Principio. — I. Pasarán tres niños al pizarrón con el objeto de resolver un problema cada uno.

II. Resolver el cálculo dictado por mí.

III. ¿Cuántos cts. hay en 5 \$?

IV. ¿Qué puede indicar el N° 2578?

V. Indicando un número cualquiera pediré á la clase su nombre.

Medio. — VI. Tomarán asiento los alumnos del pizarrón, quedará únicamente el alumno que debía explicar el N° 1.

VII. Una vez explicado el 1º problema se pasará al 2º.

VIII. El mismo procedimiento seguiré con los restantes problemitas.

Fin. — IX. Pasarán cinco niños al pizarrón con el objeto de escribir las cantidades que les dictaré.

X. Tomarán asiento los alumnos que se equivoquen pasando otros que designaré.

XI. ¿Cuántos medios litros hay en 5 litros? — (1902).

13

ASUNTO PARTICULAR: Reducción de fracciones decimales periódicas puras á quebrados ordinarios.

Proposición. — Para reducir una fracción decimal periódica pura á quebrado ordinario, se pone por numerador la parte periódica ó el primer periodo considerado como entero, y por denominador tantos nueves como cifras hay en el primer periodo.

Ejemplos:

$$0.393636 = \frac{36}{99} \qquad 0.128128128 = \frac{128}{999}$$

$$0.43714371 = \frac{4371}{9999}$$

Principio.— Leerán dos alumnos, un número cada uno y la clase el número siguiente, que estarán escritos en el pizarrón. Pediré que comparen esos números y observen la diferencia que hay.

Medio.— I. ¿Cuál es la diferencia que existe entre esos tres números?

II. El nombre que recibe la fracción decimal cuyas cifras son iguales de dos en dos ó de tres en tres, etc.

III. Pediré ejemplos de fracciones decimales periódicas puras.

IV. Qué procedimiento se sigue para reducir una fracción decimal á quebrado.

V. ¿Si en este caso se procede de la misma manera?

VI. Haré deducir ¿cuál es el procedimiento que se sigue en este caso?

VII. De lo que se haga deducirán los niños la regla que será repetida por varios alumnos.

Fin.— Pasará una niña al pizarrón á hacer un ejercicio; será ayudada por sus compañeras.

Ilustraciones.— Los números escritos en el pizarrón y las operaciones.

Facultades.— Juicio y raciocinio. — (4° Grado 1898).

14

ASUNTO PARTICULAR: *Enseñanza de los dos principios que siguen*

Si á los dos miembros de una igualdad se les aumenta una misma cantidad, la igualdad subsiste, y si á los dos miembros de una igualdad se les multiplica por una misma cantidad, la igualdad subsiste.

Proposición.— Si A tiene $5 \$ + 2$, y B $10 \$ - 3$, resulta que los dos tienen una misma cantidad, porque tanto $5 + 2$ como $10 - 3$ es igual á 7. Sabiendo que $5 + 2$ es equivalente á $10 - 3$ puedo colocar entre ellos el signo $=$, resultando entonces una igualdad; es decir, $5 + 2 = 10 - 3$. Lo que está antes del signo igual se llama primer miembro, y lo que está después, segundo miembro. Si al primer miembro de esta igualdad le agrego 2 \$ me resulta $5 + 2 + 2$; haciendo lo mismo con el segundo, tengo $10 - 3 + 2$, de donde me resulta otra igualdad, puesto que tanto $5 + 2 + 2$ como $10 - 3 + 2$ es igual á 9. De lo dicho deduzco que si á los dos miembros de una igualdad les agrego una misma cantidad, la igualdad no deja de serlo; es decir, que subsiste.

Si en vez de aumentar al primer miembro, 2, lo multiplico por 2, tendré $5 + 2 \times 2$; procediendo lo mismo con el segundo miembro, tendré $10 - 3 \times 2$. De donde me resulta otra igualdad $5 + 2 \times 2 = 10 - 3 \times 2$, puesto que tanto $5 + 2 \times 2$ como $10 - 3 \times 2$ es igual á 14. De lo dicho deduzco que si á los dos miembros de una igualdad los multiplico por una misma cantidad, la igualdad no deja de serlo.

Principio. — Pasando dos niñas al frente daré á una 5 \$ $\frac{m}{n}$ + 2 y á la otra 10 — 3, y dirigiéndome á la clase preguntaré cuál de las dos tiene más dinero. Al decirme que las dos tienen la misma cantidad, preguntaré el por qué. Siendo equivalente 5 + 2 y 10 — 3, preguntaré qué signo debe ir entre ambos. Al decirme el signo igual preguntaré qué nombre recibe lo que nos ha resultado. Nombre que recibe lo que está antes y después del signo =. Ejemplos de igualdades.

Medio. — 1º Paso. — A la niña A que tiene los 5 \$ + 2 le daré otros 2 \$ más, mientras que otro alumno escribirá esto, con números, en el pizarrón; es decir, 5 + 2 + 2.

2º Lo mismo haré con B que tiene 10 \$ — 3, le daré otros 2 \$, preguntando á la clase cuál de las dos tiene más número de pesos. Al decirme que iguales, preguntaré lo que nos ha resultado. Los niños me dirán que una nueva igualdad.

3º Haré notar bien que ha sido una misma cantidad la aumentada á ambos miembros de la igualdad y luego pediré ejemplos de igualdades y les aumentarán una misma cantidad.

4º Después de varios ejercicios preguntaré qué es lo que han deducido. Al decirme que, siempre que se aumente á los dos miembros de una igualdad una misma cantidad, la igualdad subsiste, aceptaré y será repetido tantas veces como sea necesario, para que se les grabe bien.

5º El mismo procedimiento que para este principio he seguido, emplearé con el otro que me propongo enseñar.

Fin. — Un niño repetirá los dos principios aprendidos, ejemplificando.

Ilustraciones. — Billetes de 5 \$, 2, 1, etc.

Facultades á desarrollar. — Especialmente, juicio y razón. — (5º Grado, 1898).

15

EJERCICIOS DE CÁLCULO MENTAL 3º GRADO

Introducción. — Por medio de una conversación hacer recaer la atención del niño sobre el cálculo y las dificultades que trae á las personas que no saben ejecutar con exactitud los ejercicios aritméticos. Ejemplos.

Cuerpo. — Diversos y variados ejercicios, entre ellos:

I.—Una señora dió á su hija 5 \$ para comprar género; la niña compró cinco metros á \$ 0,60; el tendero le cobró \$ 3,50. ¿Cuánto le cobró demás?

II.—Moreno murió á los 34 años, Belgrano tenía al morir 16 años más ¿ á qué edad murió este último?

III.—San Martín nació en 1778 y murió en 1850 ¿ á qué edad murió?

IV.—Escribir varios números en el pizarrón é ir señalando indistintamente; la maestra indicará la operación que deben efectuar.

V.—Nombrar varios picos de distinta altura. La clase indicará cual es el mayor (así se les obliga á retener las cantidades ejercitando la memoria).

VI.—Formar varias columnas que en la parte superior tengan indicado un signo de las operaciones fundamentales; á medida que la maestra escriba las cifras en cada columna, las alumnas irán efectuando la operación correspondiente.

VII.—Un cangrejo se cae á un pozo de 29 metros ¿al cabo de cuántos días llegará al borde del pozo si cada día sube 5 metros y baja 4?

Conclusión.—Hacer reconocer la importancia de la aritmética y la conveniencia de ejercitarse continuamente en operaciones de cálculo mental.

16

PROBLEMAS DE LAS CUATRO OPERACIONES 5º GRADO

Introducción.—Llamar la atención de la clase para entrar á los ejercicios.

Cuerpo.—Problemas:

I.—Un hombre salió á caminar y anduvo por una calle 20 cuadras, por otra 15 y por otra 23 ¿cuántas cuadras caminó?

II.—Un hombre ha comprado un terreno que mide 20 metros de largo por 15 de ancho ¿cuál es su superficie?

III.—Un reloj atrasa por hora 8 minutos ¿cuánto habrá atrasado al cabo de 4 horas y cuarto?

IV.—Si 10 metros de género me cuestan \$ 5 ¿cuánto me costarán 6 metros?

V.—Hallar un número que dividido por 5 dé por cociente 8 y por residuo 3.

VI.—Una persona tiene 15 piezas de cinta, vende 8 y el resto lo da en pago de una deuda á razón de \$ 1,10 la pieza ¿cuánto era la deuda?

VII.—Una persona ha pagado \$ 1850 por 15 bordalesas de vino: ¿cuánto vale cada una y á cuánto debe venderla para ganar en cada una \$ 4?

Observaciones.—*Bosquejo N° 1.*—El asunto particular, es indeterminado, aun suponiendo indicada la tabla.

La *proposición*, es un desarrollo incompleto. Debe, por el contrario, exponer lo que el niño sabrá al terminar la clase.

Constituyen, el *principio*, los enunciados de dos ejercicios y un problema que no exigen más de un

minuto; no hay pasos que den ni vaga idea del procedimiento.

El *medio*, por el contrario, anuncia 15 minutos de lección monótona é incompleta. El niño aparece como un elemento pasivamente asimilador. El *fin* desligado del *medio*, no particulariza procedimiento alguno, presupone falta de orientación pedagógica acerca de cómo debe completarse una clase.

Bosquejo N° 2.—*Asunto*, indeterminado. No hay proposición. El *principio*, no recapitula los conocimientos aritméticos que el niño debe poseer. Hay la vaga indicación de un ejercicio constantemente repetido. El *medio* es la *proposición* incompleta. No hay indicación de procedimiento para la solución de los problemas. El *fin*, es la enumeración de problemas, como el principio y medio.

Bosquejo N° 3.—Enumeración de problemas como el anterior. Sin indicación pedagógica alguna, disipa el tiempo en lo sobradamente sabido, con el reprochable procedimiento de resolver el caso en común, bajo la paternal dirección del maestro. Números grandes, operaciones largas y sin atractivos que ejercitando solo vías trilladísimas de integración, impiden destinar los 25 minutos de clase á otros ejercicios.

Bosquejo N° 4.—Es de una clase de repaso. Ninguna lección exige más tino pedagógico para aprovechar tan reducido tiempo en recorrer cuanto el maestro ha enseñado, mediante preguntas que mantengan continuamente interesado al auditorio.

Bosquejo N° 6.—Mejor que los anteriores, no es, en el *principio*, generalizador; el *medio*, vago en cuanto á procedimiento. No hay enseñanza. El *fin*, es una continuación del medio empleando una forma defectuosa para resolver problemas.

Bosquejo N° 7.—Vago en la indicación del método; presume examen más que enseñanza. El *fin* no especifica las cantidades que puedan resumir, á guisa de repetición, el medio.

Bosquejo N° 8.—No hay principio; el *medio*, indica el procedimiento en la forma de un desarrollo incomple-

to, con buenas inducciones pero sin abstracción ni generalización, complicando el aprendizaje con la dicción incorrecta: *colocando los números sobre otros*. El *fin*, repite la sugestión general de los tratados de pedagogía; pero no explica cómo averiguaremos si la clase sabe lo que nos hemos propuesto enseñar.

Bosquejo N° 10.—El *principio* indica ejercicios de distinción, pero usando un procedimiento moroso, sin dirigir la mente á las representaciones convencionales. El *medio* pretende ensayar una forma racional, engolfándose en explicaciones que no pueden obtener resultados prácticos de ninguna especie. Es rápido, por el contrario, nuestro sistema que enseña á sumar cantidades de varias cifras, llamando la atención sobre el caso, directamente. (Véanse los *desarrollos*).

Bosquejos N° 11 y 12.—Indicación vaga del procedimiento que empleará el maestro para dirigir la solución de los problemas.

Bosquejo N° 13.—No hay en el *principio*, suficiente ejercitación mental para distinguir las tres especies de fracciones decimales, preparando la enseñanza de la proporción. El *medio* comprende parte del *principio* y da como sabido por el niño, lo que va á enseñarse. La lección toma la peor forma, la del examen; no es posible exigir al niño que diga lo que aprenderá, sino después de aprendido. El *fin*, como aplicación, pésimo, pues la pizarra es suficientemente grande para admitir á la vez, seis alumnos y no uno.

Por otra parte, no sabemos si esos ejercicios serán apropiados, por cuanto no se enumeran.

Bosquejo N° 14.—Infantilización del conocimiento para alumnos de 5° grado, en perjuicio del carácter eminentemente abstracto y generalizador de la matemática. Distrae la mente y la atención en casos tan especiales y nimios, que al formar un concepto erróneo de la igualdad, inculca la idea de lo difícil que es la verdadera ecuación, que el bosquejo no menciona. Puede asegurarse que, después de la clase, el alumno ni en casos relativamente simples, aplicará los dos axiomas que menta el asunto. Del bosquejo se induce

preparación general muy deficiente sin haber llegado á comprender, en sus estudios, el espíritu de la matemática, el objeto final de la ecuación ni la escritura de expresiones.

Bosquejo N° 15.—Es tema de una lección, lo que no debe ser sino parte. El principio divaga acerca de lo que el niño no necesita instrucciones. Los problemas, siendo para 2° grado, no obedecen á un orden ni tienen por objeto recapitular. El bosquejo no indica procedimiento alguno; es una enumeración de enunciados donde nada se dice del método para resolverlos.

Bosquejo N° 16.—Otro tanto debe decirse de este bosquejo, simple enumeración de una serie de problemas cuyo propósito no es ni fijar, ni evocar, ni recapitular conocimientos de aritmética. Infantilización de la enseñanza por no corresponder, los enunciados, al 4° grado. No se hace absolutamente ninguna indicación acerca del procedimiento que se empleará en el desarrollo.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO III

PROGRAMAS

I

Programas Argentinos. — *Tipos.* Por los artículos 5 y 105 de la constitución nacional, cada provincia argentina dicta sus leyes de instrucción primaria ; de consiguiente, los programas varían según la índole de los Consejos ; hay circunscripciones que en cuatro años han ensayado hasta cuatro formas respondiendo al fatal espíritu de innovar sin propósitos definidos que, en este país, anima á ciertas administraciones para que el pueblo note la faz activa del puesto que se ocupa. No obstante, los programas de aritmética y geometría han conservado su estructura dentro de tres tipos : *sintético, sintético-analítico y cíclico*, según la evolución dogmática del ramo.

Primer tipo. — Se ensayó en Entre Ríos (dirección escolar J. Uzín) é implantó en Corrientes (administración J. A. FERREIRA), donde rige hasta hoy, « con el objeto de romper la uniformidad de la enseñanza acerca de los fines especiales del estudio, para dar sólo direcciones dentro de las que pueda desenvolverse con libertad la acción del maestro y alumno para ser así, más fecunda y mejor apreciado su valor intrínseco y extrínseco » (J. A. FERREIRA).

La materia se divide en cinco grados (ocho Entre Ríos) de la siguiente manera.

Aritmética y geometría

1^{er} Año — Cálculo mental y formas geométricas.

2^o Año — Cálculo mental, problemas escritos, formas geométricas, problemas prácticos geométricos.

3^{er} Año — Cálculo mental, problemas y operaciones aritméticas, formas geométricas.

4^o Año — Cálculo mental, problemas y operaciones aritméticas, problemas geométricos.

5^o Año — Cálculo mental, problemas y operaciones aritméticas, contabilidad.

6^o Año — Operaciones y problemas de aritmética y de contabilidad. Es fácil observar que la división no implica enseñanza de puntos fijos en determinado año. La escuela normal de Esquina desarrolló esta síntesis, de la siguiente manera (A. Bassi):

Aritmética

GRADO 1^o — 1^o Numeración oral hasta *diez*, después hasta *cien* y luego hasta *mil*, si es posible hacerlo, enseñada por medios intuitivos.

2^o Numeración escrita hasta *diez*, luego hasta *cien* y después hasta *mil*, si es conveniente hacerlo.

3^o Ejercicios orales, prácticos y variados de cada una de las cuatro operaciones fundamentales, sin pasar primero del número diez y después del número cien, valiéndose, particularmente, de procedimientos experimentales.

4^o Ejercicios escritos, prácticos y variados de la adición y sustracción, con cantidades que contengan unidades, decenas y centenas y aún unidades superiores si la capacidad del alumno lo permite.

5^o Signos $+$ $-$ $=$ y $\times$ si es necesario.

6^o Conocimiento, por la vista, de la moneda nacional.

7^o Construcción de tablas de sumar, restar y multiplicar, si la cantidad de los alumnos lo permite.

8^o Problemitas concretos y abstractos.

GRADO II. — 1^o Numeración oral y escrita.

2^o Unidades de diverso orden. Numerosos y variados ejercicios sobre la lectura y escritura de cantidades.

3^o Adición de los números enteros.

4^o Substracción de los números enteros.

5^o Multiplicación de los números enteros.

6^o División de los números enteros.

7^o Signos $\times$ y $\div$.

8^o Conocimiento del metro y de la vara con sus múltiplos y submúltiplos.

9^o Enseñar, empíricamente, á multiplicar cantidades en que uno de los factores sean *pesos* y *centavos* solos, ó sino *metros* y *centímetros* ó *centímetros* solos.

10° Relación de la vara con el metro y de la legua con el kilómetro.

11° Relación existente entre los valores de los diversos billetes de la moneda nacional.

12° Números romanos. Conocimiento de la hora en el reloj.

13° Medida del tiempo.

14° Construcción y aprendizaje de las tablas de dividir y multiplicar, con numerosos ejercicios tendientes á dar facilidad y destreza en el manejo de dichas tablas.

15° Problemas concretos y abstractos, orales y escritos de las cuatro operaciones fundamentales y su combinación.

GRADO III. — 1° Repaso de los puntos culminantes del programa de 2° grado, insistiendo particularmente en la lectura y escritura de cantidades, en el perfecto conocimiento y manejo de las tablas, y en las operaciones de multiplicar y dividir.

2° Desarrollar la idea de fracción.

3° Fracciones comunes y decimales — Modo de expresarlas y representarlas — Numerosos y variados ejercicios de lectura y escritura de los decimales.

4° Reducción de fracciones comunes á decimales.

5° Adición de decimales.

6° Substracción de decimales.

7° Multiplicación de decimales, presentando todos los casos de multiplicar entero por decimal ó decimal por entero, y decimal por decimal.

8° División de decimales, presentando los casos de dividir decimal por entero, entero por decimal y decimal por decimal.

9° *Sistema métrico de pesas y medidas.*

Palabras que expresan la relación que existe entre la unidad y sus múltiplos y sub-múltiplos.

10° Medidas de longitud: múltiplos y sub-múltiplos.

Cuáles de sus unidades son las más usadas.

11° Medidas de peso: múltiplos y sub-múltiplos.

Cuáles de sus unidades son las más usadas.

12° Medidas de capacidad para líquidos: múltiplos y sub-múltiplos.

Cuáles de sus unidades son las más usadas.

13° Medidas de superficie y agrarias: múltiplos y sub-múltiplos.

Cuáles de sus unidades son las más usadas.

14° Hacer conocer las unidades principales del sistema antiguo de pesas y medidas y sus equivalencias con el métrico.

15° Reducción de varas á metros, de varas cuadradas á metros cuadrados, de cuerdas cuadradas á hectáreas, de libras á kilogramos, de cuartas á litros, de cuartillas á hectólitros y viceversa.

16° Problemas concretos y abstractos, orales y escritos aplicando los conocimientos ya adquiridos.

17° Redacción rápida de vales, recibos y certificados.

18° Áreas de los polígonos. Problemas basados sobre estas áreas.

GRADO IV. — 1° Repaso íntegro del programa de III grado, extendiendo la enseñanza donde fuere más necesaria.

2° *Divisibilidad de los números.* — Múltiplo y factor. Números primos. Caracteres de la divisibilidad de un número por 10, 100, 1000, etc. Idem idem por 2 y 5, 3 y 9, id por 4 y 8.

3° Numerosos y variados ejercicios sobre la cancelación de factores comunes á ambos términos de un quebrado á los efectos de que puedan aplicarse estos conocimientos á la fácil solución de los problemas sobre las reglas comerciales que siguen.

4° Cantidades proporcionales. Proporciones. Modo de hallar cualquiera de sus términos.

5° Regla de tres simple. Numerosos y variados problemas resueltos por el método de reducción á la unidad.

6° Conocer á primera vista cuando un problema es de regla de tres simple directa ó inversa. Plantear y resolver la regla de tres simple inversa por medio de proporciones.

7° Problemas de regla de tres compuesta resueltos exclusivamente por el método de reducción á la unidad.

8° Partición proporcional. Regla de compañía simple y compuesta; primero por el método de reducción á la unidad; y luego, por las proporciones.

9° Regla de interés simple. Inducción de cada una de las fórmulas por medio de problemas resueltos por el método de reducción á la unidad.

Enseñanza de la fórmula general. Solución de todos los problemas por medio de la fórmula general. Solución de problemas alternando el método de la fórmula general y el de la reducción á la unidad, pero dando siempre preferencia á este último.

10° Hallar el interés compuesto.

11° Numerosos y variados problemas de regla de interés que comprendan todas las operaciones bancarias, hipotecarias, comerciales, etc.

12° Descuento comercial.

13° Regla de aligación.

14° Problemas concretos y abstractos, orales y escritos, aplicando los conocimientos ya adquiridos.

15° Redacción de recibos, vales, certificados, facturas, cuentas, pagarés, letras de cambio y cartas comerciales.

16° Relación de la circunferencia con el diámetro.

17° Área del círculo.

GRADO V. — 1° Repaso integro del programa del 4° Grado.

2° *Divisibilidad de los números.* — Múltiplo. Factor. Números primos.

3° Fracciones ordinarias. Ejercicios de lectura y escritura de las mismas.

4° Simplificación de las fracciones.

5° Reducción á un común denominador.

6° Adición de los quebrados comunes.

7° Sustracción de los quebrados comunes.

8° Multiplicación de los quebrados comunes.

9° División de los quebrados comunes.

10° Algunos problemas concretos en los cuales entre la aplicación de dichas fracciones.

11° Problemas concretos y abstractos ; orales y escritos, aplicando los conocimientos ya adquiridos.

12° Vales y pagarés. Principales prescripciones establecidas sobre ellos por el Código de Comercio.

GRADO VI. — 1° Repaso general del programa de Aritmética hecho por medio de problemas concretos ; primero ordenados y luego saltados.

2° Repaso de las principales prescripciones establecidas por el Código de Comercio sobre los vales y pagarés.

3° Principales prescripciones establecidas por el Código de Comercio sobre la manera de llevar los libros.

4° Teneduría de libros por partida doble. Simular operaciones de una casa de comercio y llevar en regla los libros " Diario y Mayor ".

5° Indicar cómo se lleva el de " Inventario " y el " Copiador de cartas ".

6° Requisitos que deben reunir los contratos sociales.

Provincia de Buenos Aires (DR. BAHÍA)

CONCEPTO. — Esta enseñanza tiene por objeto hacer que los niños se familiaricen con la práctica de los cálculos comunes en la vida.

1er Año. — Numeración hasta 1000 — Problemas de suma y resta — Conocimiento de la moneda nacional y sistema métrico.

2° Año. — Numeración hasta 1.000.000 — Problemas de las cuatro operaciones — Conocimiento de la moneda nacional y sistema métrico.

3er Año. — Numeración completa — Operaciones con enteros y decimales — Conocimiento de la moneda nacional y sistema métrico — Problemas geométricos.

4° Año. — Problemas concretos sobre las cuatro operaciones, con números enteros y decimales — Estudio completo del sistema métrico y la moneda nacional — Cálculos comerciales.

5° Año. — Aritmética comercial.

6° Año. — Revisión general de lo estudiado en los años anteriores.

Estos programashan sido desarrollados por el cuerpo de inspectores de la provincia con apropiadas indicaciones para enseñarlos, dejando libertad, por otra parte, á los maestros para extenderse hasta donde lo creyeran conveniente.

II

Segundo Tipo. — Imitados unos de otros, rigen en la mayor parte de las escuelas ; dan la materia con más ó menos detalle siguiendo el orden lógico ; no presentan la ventaja de los anteriores, porque si la preparación del maestro es deficiente, se limita á los tópicos enumerados, no amplía, y enseña con el criterio defectuoso que posee. La matemática exige condiciones que no puede indicar el programa : dominio de la asignatura y método. « La dificultad consiste en desarrollar el plan, en cómo se aplica » (P. PIZZURNO). La forma sintética en manos de un preceptor obligado á interpretarla, se vuelve analítica mediante un trabajo benéfico de investigación ; consulta textos, opiniones y decretos, en último caso imita. Ningún maestro cometería el error de invertir el orden de las operaciones ; de considerar sabida la numeración conociendo los números hasta mil ; de no dar fracciones decimales ó quebrados en 5° y 6° grado ; por una emulación explicable, se esforzaría, en el mayor número de casos, en transmitir cuanto consienta la capacidad del niño sin detenerse en fastidiosas repeticiones por no exceder el reglamento, como sucedía en la provincia de Buenos Aires (1901).

Pero, tocante á Aritmética y Geometría, el programa es una cuestión secundaria. ⁽¹⁾ Al transcribir diferentes modelos, no nos guía otro fin que el de aplicar nuestros procedimientos. La materia se divide en seis ó siete grados, del siguiente modo :

Escuelas anexas á las normales de la Nación ⁽²⁾

PRIMER GRADO. — Idea de la formación del número por la agregación sensible y sucesiva de unidades.—Numeración hasta diez y luego hasta cien enseñada por medios intuitivos — Formación de las diez cifras y de los números escritos hasta cien — Explicación

(1) LAISANT. *La Mathématique*. « Un programa es siempre malo porque es un programa ».

(2) Decreto del 31 de Diciembre de 1887.

de las expresiones: mitad, tercio, cuarto — Ejercicios prácticos y variados de cada una de las cuatro operaciones fundamentales, sin pasar del número diez y valiéndose de procedimientos experimentales — Los mismos ejercicios, exceptuando la división con números que constituyan unidades y decenas.

Noción intuitiva del metro, el litro y el gramo — El peso nacional — Cálculo mental.

SEGUNDO GRADO. — Numeración oral y escrita — Unidades de diverso orden — Valor absoluto y relativo de las cifras — Adición, sustracción, multiplicación y división de los números enteros — Noción por medio de ejemplos, de estas operaciones, de sus datos y resultados — Frecuentes ejercicios y problemas sencillos de estas operaciones — Comprobación de las mismas — Números romanos; conocimiento de la esfera del reloj — Nociones sumarias é intuitivas del sistema métrico: unidades, principales múltiplos y sub-múltiplos — Medida del tiempo — Moneda nacional; cálculo mental — Tablas aritméticas.

TERCER GRADO. — Números fraccionarios — Fracciones decimales — Numeración — Adición, sustracción, multiplicación y división de los decimales — Frecuentes ejercicios y problemas de estas operaciones — Fracciones ordinarias, numeración — Simplificación y reducción de quebrados ordinarios á un común denominador — Adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones ordinarias — Frecuentes ejercicios y problemas de estas operaciones — Reducción de fracciones ordinarias á decimales ó viceversa. Ejercicios. Medidas — Nociones del sistema métrico — Unidades, múltiplos y sub-múltiplos — Medida del tiempo — Moneda nacional — Cálculo mental.

CUARTO GRADO. — Sistema de pesas y medidas — Sistema métrico decimal, sus relaciones y ventajas — Sistema antiguo: unidades, múltiplos y sub-múltiplos — Comparación de ambos sistemas; relación entre las medidas de uno y otro — Frecuentes ejercicios de conversión ó equivalencia — Medida de tiempo — Moneda nacional — Conocimiento de las principales monedas extranjeras.

Números complejos — Reducción de los complejos á incomplejos de una denominación dada — Adición — Sustracción, multiplicación y división de números complejos — Frecuentes ejercicios y problemas.

Regla de tres y sus aplicaciones principales.

Cálculo mental.

QUINTO GRADO. — Divisibilidad, múltiplo y factor, caracteres de divisibilidad de un número por 10, 100, 1000 — 2 y 5 — 4 y 25 — 8 y 125 — 3, 6 y 9 — Frecuentes ejemplos — Máximo común divisor — Su determinación — Aplicaciones á la simplificación de quebrados — Números primos — Mínimo común múltiplo — Aplicaciones á la reducción de quebrados á un común denominador — Cálculos rápidos y abreviados — Regla de tres y sus principales aplicaciones — Problemas.

Cálculo mental.

SEXTO GRADO. — Revisión — Números enteros, fraccionarios y complejos — Sistema de pesas y medidas — Propiedades de los números (programa de los grados precedentes) — Igualdades y desigualdades — Razones y proporciones — Propiedades de toda proporción — Regla de tres simple y compuesta — Regla de interés simple y compuesta — Regla de compañía simple y compuesta — Regla de aligación directa é inversa — Regla de descuento — Regla conjunta — Frecuentes ejemplos y problemas — Elevación á potencias — Cuadrado y cubo — Equivalencia de la suma indicada de dos números elevada al cuadrado y al cubo — Extracción de la raíz cuadrada y de la raíz cúbica — Cálculo, numeración decimal — Problemas generales y de regla de interés, descuento, compañía y aligación por el método de reducción á la unidad — Relaciones entre el peso, volumen y densidad — Comparación de monedas extranjeras en circulación, con la nuestra — Cambios — Uso de tablas — Valor de las cosas artísticas — Calendarios — Calcular duraciones con el reloj y mentalmente — Problemas — Cálculo mental é invención de problemas.

III

Tercer tipo.—Programas sintético analíticos que obedecen á la «forma sistemáticamente concéntrica y cíclica en la enseñanza». Ensayados parcialmente en Bélgica, algunas escuelas de España, Norte América, Chile, Banda Oriental y de nuestro país dependientes del Consejo Nacional de Educación, han dado resultados no siempre satisfactorios. Buenos Aires los modificó dos años después de puestos en práctica. Hay que reconocer, sin embargo, que el trabajo hecho en 1896 por la comisión reformadora de los programas (administración escolar del doctor J. M. GUTIÉRREZ) se debe á propósitos severos y conscientes, de realizar una obra rigurosamente subordinada á principios y con el concurso de todos los maestros que habían de practicarlos. La asamblea adoptó cincuenta y seis bases y la reforma se produjo conforme á las indicaciones de tan alto cuerpo. El miembro informante doctor JOAQUÍN V. GONZÁLEZ escribía⁽¹⁾ «Estos programas obedecen en su estructura y en sus propósitos

(1) Doctor J. M. GUTIÉRREZ. — «Informe de Educación Común», 1897, pág. 92.

educadores é instructivos, á las reglas antes expuestas. El sistema del desarrollo cíclico y concéntrico se ha adoptado con precisión y grandes ventajas para la mayor parte de las materias del plan de estudios; á ese orden progresivo se deberá que los niños reciban en cada uno de los seis grados, un conjunto de conocimientos, bastante para determinar un punto de ascenso en la cultura individual, social y universal que la escuela se propone. Así, las vicisitudes de la vida de familia ú otros mil incidentes, pueden impedir al niño seguir concurriendo á las clases ó recorrer todos los ciclos de la instrucción primaria; y por este sistema el Estado asegura al educando un minimum de cultura que le servirá para mejorar su propio destino, é incorporarse á la sociedad en condiciones de ser un elemento útil y bueno en cualquier género de ocupación á que se consagre ».

« Un grave peligro entrañaría este método si él hubiese de confundirse con un enciclopedismo pretensioso y absorbente; pero si se tiene el acierto de tomar de cada materia aquellas nociones más definidas, concretas y apropiadas para producir en cada ciclo un estado intelectual suficiente á la edad, desarrollo y fines respectivos de la vida, y se consigue apartar, por una dirección é influencias moderadas de parte del maestro, toda idea de suficiencia ó vanidad científica, lejos de caer en aquel mal, la enseñanza progresiva y cíclica realizará todos los beneficios morales y positivos que podemos exigir de él; y para ellos que completan los cursos escolares, ó recorrer sus seis grados, suponiendo una aplicación perfecta de los programas, así en relación á los maestros, como á los libros y demás medios, el sistema adoptado les permite abandonar la escuela con una suma de preparación homogénea, aunque muy limitada con respecto al infinito campo de la ciencia, y aun al total desarrollo del hombre culto, que el Estado procura realizar con las tres grandes divisiones de la enseñanza nacional: primaria, secundaria y especial, y superior y profesional ».

« Cuando la escuela no tiene sino propósitos ó tendencias universales, con prescindencia de relaciones á un territorio, á una sociedad, á un destino social ó nacional preestablecido ó resuelto por la voluntad colectiva, y teniendo sólo en vista la universalidad, y el interés de la ciencia por la ciencia misma, el sistema cíclico impone un equilibrio y una igualdad perfectos en el desarrollo de todas las materias, así en sus alcances como en sus divisiones orgánicas; pero esta abstracción de la individualidad, del medio social ó político, del territorio, de los destinos históricos especiales, no es posible en pueblos nuevos que aun elaboran su tipo, su carácter ó los elementos de su personalidad. Entonces puede ser necesario dar á unas nociones ó principios mayor desenvolvimiento que á otros, y determinar con más ó menos fijeza y extensión la línea que el educador debe recorrer en cada uno de ellos ». Esta forma no es concéntrica ⁽¹⁾ desde el momento que nace polifurcada. La primer objeción la produce el miembro informante al observar oportunamente de no confundir este método con un enciclopedismo presuntuoso y absorbente; sin embargo, el sistema deja de ser cíclico si se le reduce y todas las lecciones de primer grado se vuelven ejercicios intuitivos y de lenguaje. Si el sistema es á veces histórico y obedece en parte, á las leyes de la evolución psicológica, no es, de un modo preciso, arborescente y diferencial según la ley del cambio (SPENCER), ⁽²⁾ desde que en primer grado como en sexto, las asignaturas son quince, ampliadas intensivamente.

El sistema cíclico está contra el principio de la diferenciación sucesiva de los conocimientos (leyes de

(1) Derivamos la palabra concéntrico de concentrar y no de la acepción geométrica comunmente adoptada; la denominación de cíclico-concéntrico que da Federico Kranks (1819) á su sistema de enseñar los números, nos parece caprichosa. Si difícil es dar esa forma á un programa general, á una asignatura, es absolutamente imposible; se oponen el orden histórico, el orden lógico, la evolución natural de los conocimientos, el proceso psíquico del niño.

(2) COLLINS « Resumé de la Philosophie de H. SPENCER »; pág 42.
La evolución es el paso de la homogeneidad indefinida á la heterogeneidad coherente.

COMTE y SPENCER) y contra el principio de la causalidad. En aritmética, lógicamente, debería admitirse este contrasentido: que la idea de *uno* es coetánea con la de 9, 10, 100; con la de suma, resta, multiplicación y división; con la de potencia y raíz. No obstante, 9 deriva de 8; 8 de 7, etc. La multiplicación es una consecuencia de la suma y así, cada rama sirviendo de tronco á nuevas divisiones. El orden histórico de la sucesión nos parece riguroso.

Si bien el programa es matemática difícilmente resiste á un análisis crítico, ⁽¹⁾ no dejará de notarse que la enseñanza de la regla del tres en primer grado, es anacrónica; que las llamadas *operaciones* son procedimientos de la numeración que, si hubo una causa para enseñar la regla del tres, debió haberla también para la regla de compañía, interés, igualdades, proporciones; que, por otra parte, la marcha del ramo no es decididamente cíclica, puesto que capítulos bien diferenciados, como la divisibilidad, aparecen ⁽²⁾ en los grados superiores. Ninguna ley nos parece tan segura y fundamental para un programa, como la de la adquisición anual de los conocimientos según el orden histórico, considerando que la evolución histológica del cerebro sigue una marcha paralela.

La materia se divide en seis grados. ⁽³⁾

PRIMER GRADO.—*Formación de los números.*—Composición y descomposición de los números hasta cien. Formación de las fracciones hasta los décimos.

Numeración.—Numeración hablada y escrita de los números enteros hasta cien y de los quebrados hasta los décimos.

Operaciones.—Problemas mentales de las cuatro operaciones con enteros que no pasen de cien y cuyo multiplicador ó divisor sea dígito. Adición y sustracción de unidades fraccionarias homogéneas que no bajen de los décimos.

(1) ARDIGÓ «Evoluzione dall'indistinto al distinto».—*Psicología*, cap. II.

(2) Que, si bien pueden darse nociones de fracción decimal en primero y segundo grado, nos parece económico abordar dicha enseñanza después de aprendidas las cuatro operaciones de enteros.

(3) JOSÉ MARÍA GUTIÉRREZ.—«Informe presentado al Ministro de Instrucción Pública», 1897, pág. 133 y siguientes.

Comparación.—Regla de tres simple y directa por el método de reducción á la unidad; problemas fáciles.

Sistema métrico decimal.—El metro, decímetro y centímetro. El kilógramo. El litro. Moneda de papel hasta cien pesos y metálica fraccionaria.

Ejercicios.—Ejercicios frecuentes para habitar á los niños á meditar y calcular distancias. Cálculo mental. Invención de problemas.

SEGUNDO GRADO.—*Formación de los números.* Composición y descomposición de los números enteros hasta mil. Formación de los números fraccionarios ordinarios y decimales hasta los milésimos.

Numeración.—Aplicación de la numeración de los enteros hasta mil y de las fracciones ordinarias y decimales hasta los milésimos. Numeración romana hasta doce.

Operaciones.—Problemas escritos y mentales de sumar, restar, multiplicar y dividir con enteros que no pasen de mil y cuyo multiplicador ó divisor sólo conste de decenas y unidades; sumar y restar decimales que no bajen de los milésimos.

Comparación.—Regla de tres directa é inversa por el método de reducción á la unidad; problemas fáciles.

Sistema métrico decimal.—Los múltiplos del metro, litro y gramo. Moneda de papel hasta mil pesos.

Ejercicios.—Para habitar á los niños á medir y calcular distancias y capacidades. Cálculo mental. Invención de problemas.

TERCER GRADO.—*Formación de los números.*—Composición y descomposición de los números enteros hasta cien mil y los fraccionarios hasta cien milésimos.

Numeración.—Numeración hablada y escrita de los enteros hasta cien mil y de las fracciones hasta los cien milésimos. Numeración romana hasta cien.

Operaciones.—Teoría y prueba de las cuatro operaciones; problemas escritos de las cuatro operaciones con enteros que no pasen de cien mil y decimales hasta cien milésimos. Problemas mentales.

Comparación.—Regla de tres directa é inversa, regla de interés simple por la reducción á la unidad. Reducción de quebrados ordinarios á decimales.

Sistema métrico decimal.—Múltiplos y sub-múltiplos del metro, litro y gramo. Moneda metálica argentina.

Ejercicios.—Ejercicios para habitar á los niños á medir ó calcular distancias, capacidades ó pesos. Cálculo mental. Invención de problemas.

CUARTO GRADO.—*Formación de los números.*—Composición y descomposición de los números enteros hasta el millón, y de los fraccionarios hasta los millonésimos.

Numeración.—Numeración hablada y escrita de los enteros hasta el millón y de las fracciones decimales hasta los millonésimos. Numeración romana hasta mil.

Operaciones.—Sumar y restar complejos referentes al tiempo. Regla de partición proporcional y de compañía simple. Regla de descuento comercial por el método de reducción á la unidad.

Sistema métrico decimal.—Unidades métricas para las áreas y volúmenes.

Ejercicios.—Continuación de los ejercicios para habitar á los niños á medir y calcular distancias, capacidades, pesos, y precios corrientes de las cosas más comunes. Redacción de recibos, vales, pagarés y cheques. Cálculo mental. Invención de problemas.

QUINTO GRADO.—*Formación de los números.*—Composición y descomposición de los números enteros hasta el billón y fraccionarios hasta los billonésimos.

Numeración.—Numeración hablada y escrita hasta el billón. Numeración romana.

Operaciones.—Divisibilidad.—Problemas de las cuatro operaciones con números enteros y fraccionarios decimales.

Comparación.—Regla de tres simple y compuesta. Regla de compañía compuesta. Regla de interés compuesto. Regla de aligación.

Sistema métrico decimal.—Sistema métrico decimal: su comparación con el antiguo sistema de pesas y medidas haciendo resaltar sus ventajas. Monedas extranjeras.

Ejercicios.—Descomposición en factores. Simplificación. Redacción de letras de cambio, facturas y cuentas corrientes. Cálculo mental. Invención de problemas.

SEXTO GRADO.—*Formación de los números.*—Composición y descomposición de cualquier número.

Numeración.—Fundamentos y consecuencias de la numeración decimal.

Operaciones.—Problemas de recapitulación.

Comparaciones.—Fondos públicos. Comisiones. Regla conjunta. Regla de cambio y arbitraje. Seguros. Averías.

Sistema métrico decimal.—Historia del sistema métrico decimal.

Ejercicios.—Ejercicios sencillos de operaciones bancarias; contabilidad y teneduría de libros. Cálculo mental. Invención de problemas.

Error grave en estos programas y los de la provincia de Buenos Aires, es la supresión de las fracciones comunes, un dique opuesto á la generalización del cálculo para reducir la solución de los problemas á una expresión terminal de operaciones indicadas que significa economía de tiempo dentro de una estética fascinadora. No nos explicamos con que criterio se han suprimido, por más que se tenga en cuenta un principio utilitario á que no obedece el conjunto. La enseñanza de los principios de la divisibilidad, por otra parte, exigidos en el programa de 5º grado, ¿á qué puede responder sino al fin práctico de la simplifica-

ción fraccionaria? Con acierto la comisión reformadora de 1899 (LATORRE, SENET y MASSA) al hacer programas sin menudencias, considerando la naturaleza sintética de toda guía, incorporan nuevamente enseñanza tan fundamental.

IV

Programa que adoptamos:

I. *Numeración*. — Nociones de más, menos é igual— Nombre y escritura de los números— Diversos órdenes de unidades — Tablas de suma, resta, multiplicación y división — Numeración romana.

II. *Operaciones*. — De sumar, restar, multiplicar y dividir — Pruebas respectivas — Potencias— Raíces cuadrada y cúbica.

III. *Divisibilidad*. — Números primos y compuestos — Múltiplo y sub-múltiplo— Divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, la unidad seguida de ceros, 25 y 50 — Mínimo común, múltiplo y máximo común divisor.

IV. *Decimales*. — Nombre y escritura de los decimales — La coma, el cero, orden de las cifras — Las seis operaciones con decimales.

V. *Fracciones comunes*. — Numeración — Propiedades de las fracciones — Las seis operaciones con quebrados ordinarios y combinados con los enteros y decimales — Formas complejas — Simplificación y cancelaciones — Reducción de fracciones comunes á decimales y viceversa.

VI. *Sistema de pesas y medidas*. — (Números concretos). — Nomenclatura de las unidades métricas— Sus múltiplos y sub-múltiplos — Operaciones de suma, resta, multiplicación y división — Reducciones de unidades de un orden superior á uno inferior y viceversa — Las denominaciones y la coma — Monedas — Medidas de tiempo.

VII. *Ecuaciones de primer grado*. — Uso de las letras — Fórmulas — Valorización de las expresiones

— La incógnita y manera de despejarla—Abreviación del cálculo.

VIII. *Densidad.* — Relación de las medidas de volumen, peso y capacidad — Combinación de la geometría y la física con la aritmética — Hallar el volumen y la superficie conociendo el valor de las líneas.

IX. *Cálculo mental y ejercicios.*—Generalización del cálculo: cantidad y expresión — Factor y término — Signos positivos y negativos — Paréntesis — Exponentes y radicales — Expresiones complejas reducibles á simples donde se combinen toda clase de operaciones y de signos aritméticos — Simplificaciones y abreviaciones.

X. *Problemas.* — De una y varias operaciones— Explicación de problemas fundamentales — De una comparación — De más de una—Relación de los datos conocidos con los desconocidos mediante una serie de pasos simples y consecutivos: la objetivación, la planteación (raciocinio) — la operación (Solución) — Uso de las igualdades — Método de reducción á la unidad—Problemas sobre el interés, descuento, compañía y aligación—Documentos y datos comerciales — Operaciones indicadas y fórmulas — Construcción de tablas—Código de Comercio: nociones aplicables.

Hemos suprimido las proporciones y sus derivadas reglas de tres, simple y compuesta porque, geométricas de origen, por abstracción han pasado al cálculo en una época que las propiedades de la igualdad eran desconocidas. Si resultan necesarias comparando líneas y figuras, no así comparando valores aritméticos que usan el insuperable método de reducción á la unidad. Por otra parte, una proporción es siempre una igualdad, á la que puede reducirse cualquier razonamiento por complicado que se presente. La proporción es un monumento histórico del que debe hablarse para mostrar las imperfecciones de un camino para llegar á soluciones relativamente simples. La misma geometría adopta el método contrario; en las planteaciones, la razón no queda satisfecha; en las operaciones, el trabajo para des-

pejar las incógnitas, es largo y sin atractivos; la enseñanza de las propiedades exigen numerosas lecciones. La rutina ha conservado en los textos este rasgo atávico, *par respect aux géomètres anciens!* decía LEGENDRE. La condición del método, sin embargo, es economizar tiempo: nuestros pedagogistas, al confeccionar programas ó escribir libros, prestarían un señalado servicio á las escuelas si meditasen puntos de tanto significado en el aprovechamiento intelectual de la juventud.

Por la poca utilidad, la poca cultura ó la falsa noción que dan del espíritu matemático, tienden á desaparecer (E. SMITH) de los textos y de los programas para ser simples aplicaciones del cálculo:

- a) Ecuaciones de pagos y seguros.
- b) Obligación.
- c) Ganancias y pérdidas; intercambios; comisiones y corretajes.
- d) Interés simple y compuesto más allá de lo elemental.
- e) Proporciones compuestas.
- f) Números denominados complejos. (Donde se usa el sistema métrico, está demás el estudio del sistema antiguo de pesas y medidas).

Como dato ilustrativo de importancia, damos la división que M. DAUZAT ⁽¹⁾ hace de la aritmética, *Teórica y práctica*; la primera comprende: I. *No-ciones y primeras verdades de la Aritmética*. II. *Numeración* hablada y escrita. III. *Operaciones*: suma, resta, multiplicación, división, potencias, igualdades y desigualdades. IV. *Propiedades de los números*: divisibilidad; m. c. d.; m. c. m.; números primos; aplicaciones de los números primos. V. *Números fraccionarios*. VI. *Números decimales*. VII. *Raíces*. VIII. *Números incommensurables*. IX. *Razones y proporciones*. X. *Aproximaciones*: errores absolutos; errores relativos. XI. *Sistema de numeración*. La

(1) «Elém. de Méthod. Mathém.», pág. 1039, 1091.

segunda comprende: I. *Métodos y procedimientos* para demostrar los teoremas. II. *Métodos y procedimientos* para resolver los problemas. III. *Resolución de los problemas* de numeración y operaciones fundamentales; de propiedades de los números; de fracciones; de potencias y raíces; de interés simple; de descuentos; de cambios; de rentas; de repartición proporcional; de compañía; de mezcla y aligación; de movimiento.

Indicaciones también debemos acerca del *cálculo mental* del que abusa la escuela norteamericana atribuyéndole virtudes educativas que no tiene. Es un ejercicio de recordación que presta beneficios y evita al razonamiento, detenerse en el mecanismo de la numeración para formar conciencia de la lectura de los números; de la colocación de las comas; del uso de las tablas; del significado de los términos aritméticos; pero de ningún modo es el desarrollo de la aptitud ni tendrá el alcance educativo del problema; será un complemento útil á la enseñanza en los ejercicios de repetición, nunca una parte esencial. Conviene que el individuo produzca reacciones positivas de conciencia en el menor número de segundos; es un trabajo selectivo de juicios que dan la aptitud de apreciar las cosas, lo que para nuestra defensa es fundamental. El cálculo mnemónico no puede exceder límites estrechos, dentro de los que, sin duda, economiza tiempo; pero no amplía el campo de la lógica, puesto que el fenómeno en sí, es una simple integración de imágenes visuales sucesivas, fácil de conservar mediante dos ó tres minutos de ejercicio cotidiano y variado.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO IV

PRIMER GRADO

I

Distribución del programa en lecciones.—No discutiremos si debe enseñarse la numeración hasta 100, hasta 1000 ó hasta 10.000; la clase de cerebros que se cultivan y el empeño que los maestros pongan en instruir, modifican fundamentalmente el resultado. Desde luego es censurable la prohibición de exceder un programa hecho según un criterio abstracto; un límite es siempre desacertado para buenos métodos y alumnos que comienzan el estudio á los 7 años.

Hay niños, en efecto, que no llegan en ocho meses á escribir 98, ni á leer cantidades de tres cifras; pero el cuadro de nuestras experiencias nos dice que constituyen la minoría á la que no debe sacrificarse el grado. En Octubre (las clases comienzan en Marzo) leían, 1934 el 98 % varones, el 66 % mujeres; de consiguiente, en la misma proporción leerían 9876, por cuanto no ofrece, del punto de vista psíquico, diferencias con 1934. El número 9030, de mayores dificultades (véase expl. exper. II) fué leído por el 66.6 % varones y mujeres; á pesar de la heterogeneidad intelectual de los grados argentinos, sin forzar los procedimientos, puede enseñarse á leer números, hasta 10.000. La escritura por audición, es simultánea y paralela, no obstante sus mayores obstáculos.

El número 1424 fué escrito por el 78 % varones y 38 % mujeres; el 1001, de coordinación más

complicada que el anterior, por el 78 % varones y 53 % mujeres. Nada, pues, nos impide extender nuestro programa de la *numeración*, parte fundamental de la enseñanza de la aritmética en 1^{er} grado, hasta 10.000.

Cuatro horas escolares por semana, durante ocho meses, dan aproximadamente, 200 lecciones, casi una por día, si el grado se divide en dos grupos, en las que deben enseñarse los guarismos, la numeración hasta 10.000; las tablas de sumar, restar y multiplicar hasta 6; la adición que dé sumas parciales dígitas; la resta donde no deba substraerse un dígito mayor de uno menor; nociones métricas y problemas mentales, más que escritos.

DISTRIBUCIÓN DEL PROGRAMA EN MESES

Marzo—Lecciones: 1^a Enseñanza del número 1.

2^a y 3^a—Enseñanza del número 2.

4^a—Ejercicios y problemas acerca de los números 1 y 2.

5^a y 6^a—Enseñanza del número 3.

7^a—Ejercicios y problemas: $1+2$, $3+1$, $3+2$.

8^a—Enseñanza del número 4.

9^a y 10^a—Ejercicios mentales de suma y resta: $1+2$, $1+3$, $4-1$, $4-2$, $4-3$.

11^a y 12^a—Enseñanza del número 5. Ejercicios mentales y problemas de suma y resta.

13^a y 14^a—Enseñanza del número 6. Ejercicios mentales y problemas de suma y resta.

15^a y 16^a—Enseñanza del número 7. Ejercicios y problemas.

17^a y 18^a—Enseñanza del número 8. Ejercicios y problemas.

19^a y 20^a—Enseñanza del número 9. Ejercicios y problemas.

21^a y 22^a—Significado de las palabras *aumentar*, *agregar*, *más*, *añadir*, *reunir* y *sumar*. Signos $+$ é $=$.

23^a y 24^a—Significado de las palabras *disminución*, *restar*, *quitar*, *menos*. Signo $-$. Signo $=$.

Abril—1ª Ejercicios abstracto-mentales de suma y resta con los números de 1 á 9.

2ª—Explicación de expresiones con los tres signos $+$, $-$ $=$.

3ª y 4ª—Ejercicios abstracto-escritos de suma y resta con los números de 1 á 9.

5ª—Plantear y escribir en números, los términos de un problema y vice-versa.

6ª—Enunciación de problemas concretos de suma y resta pensados, planteados y resueltos por el alumno.

7ª—Explicación de la palabra *veces*.

8ª—Ejercicios aplicando la palabra *veces*.

9ª—Ejercicios y problemas.

10ª—Enseñanza del 0. Ejercicios acerca de su significado.

11ª—Ejercicios y problemas.

12ª y 13ª—Enseñanza del número 10 y de la palabra *decena*. Distinguir decenas y unidades en números de dos cifras.

14ª—Idea de *lugar, de orden*, de 1º y 2º. Comparación entre *una* unidad y *una* decena.

15ª y 16ª—Ejercicios y problemas.

17ª—Enseñanza de los números 11, 12, 13.

18ª—Ejercicios y problemas.

19ª—Enseñanza de los números 14 y 15.

20ª—Enseñanza de los números 16, 17, 18 y 19.

21ª—Ejercicios y problemas: Tablas de suma, resta y multiplicación.

22ª—Ejercicios de lectura y escritura de los números desde 1 hasta 19.

23ª—Observación comparada del lugar de las decenas y del lugar de las unidades. Ejercicios concreto-abstractos.

24ª—Ejercicios y problemas. Distinguir un número mayor de otro menor.

Mayo—1ª Enseñanza de los números 20, 30, 40 y 50.

2ª—Ejercicios y problemas.

3ª—Enseñar á medir.

4ª—Ejercicios y problemas con decenas.

5ª—Enseñanza de los números 60, 70, 80 y 90.

6ª—Ejercicios y problemas con decenas.

7ª—Comparación de los números 10, 20, 30, etc.

8ª, 9ª y 10ª—Ejercicios concretos de recordación acerca de las decenas y unidades; ejercicios de lectura; ejercicios de escritura; ejercicios mentales.

11ª—Enseñanza de los números desde 20 hasta 30.

12ª y 13ª—Ejercicios mentales y escritos añadiendo ó quitando sucesivamente 1.

14ª—Problemas.

15ª—Enseñanza de los números desde 30 á 40.

16ª—Ejercicios mentales y escritos de una resta. Ejercicios de contar.

17ª—Enseñanza de los números desde 40 á 60.

18ª—Ejercicios y problemas. Contar.

19ª—Enseñanza de los números desde 60 á 99.

20ª—Ejercicios de lectura y reconocimiento.

21ª—Ejercicios de suma añadiendo un dígito á 10, primero concretos, luego abstractos.

22ª—Ejercicios de suma, orales y escritos añadiendo sucesivamente 2, desde 1 á 10; desde 10 á 20.

23ª—Ejercicio de suma añadiendo sucesivamente 2, desde 1 á 10; desde 30 á 40.

24ª—Ejercicio de suma añadiendo sucesivamente 2, desde 40 á 98.

Junio — 1ª Ejercicios de suma añadiendo 2 á cualquier número.

2ª—Ejercicios de substracción quitando sucesivamente 2, desde 10 á 0; primero concretos, luego abstractos.

3ª—Ejercicios de substracción quitando sucesivamente 2, desde 20 á 0.

4ª—Ejercicios de substracción quitando sucesivamente 2, desde 40 á 0.

5ª—Ejercicios de substracción quitando sucesivamente, 2 de 98 á 0.

6ª—Ejercicios añadiendo ó quitando 2 á cualquier número.

7ª—Añadiendo ó quitando 2 y 1.

8ª y 9ª—Tabla de sumar del 3 hasta 51. Ejercicios.

10ª—Tabla de restar del 3.

11ª—Ejercicios mentales de suma y resta combinando 1, 2 y 3, partiendo de cualquier número menor que 50.

12ª—Tabla de sumar oral y escrita, del 4 hasta 52.

13ª—Tabla de restar, oral y escrita, del 4.

14ª—Ejercicios de suma y resta combinando 3 y 4; 2 y 4; 1, 2, 3 y 4, partiendo de cualquier número menor que 50.

15ª—Problemas.

16ª—Idea de doble, triple y mitad.

17ª—Enseñanza de la suma de números dígitos.

18ª—Ejercicios y problemas.

19ª, 20ª, 21ª y 22ª—Tablas de sumar y restar del 5. Ejercicios mentales de combinación. Suma escrita.

23ª y 24ª—Tabla de sumar del 6. Ejercicios de combinación. Suma escrita.

Julio.—1ª y 2ª—Tabla de multiplicar oral y escrita del 2; substitución de la palabra *veces* por el signo $\times$. La palabra *veces* por la palabra *por*.

3ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

4ª—Tabla de multiplicar del 3.

5ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

6ª—Tablas de multiplicar del 2 y 3 en orden y sin orden.

7ª y 8ª—Enseñanza del número 100. Ejercicios; números de tres cifras.

9ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

10ª—Lugar y orden de las unidades, decenas y centenas.

11ª—Enseñanza de los números desde 101 hasta 110.

12ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

13ª—Enseñanza de los números hasta 199.

14ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

15ª—Enseñanza de los números 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 y 900.

16ª—Observación y comparación de los números 100, 200, etc.

17ª y 18ª—Ejercicios de recordación y reconocimiento acerca de las unidades, decenas y centenas. Ejercicios de lectura, de escritura y mentales.

19ª—Enseñanza de los números desde 200 hasta 300.

20ª—Ejercicios de síntesis y recapitulación.

21ª y 22ª—Enseñanza de los números de 300 á 999.

23ª y 24ª—Ejercicios de lectura y escritura. Contar. Descomposición de números en mitades, decenas y centenas.

Agosto—1ª y 2ª—Ejercicios de síntesis y recapitulación.

3ª—Enseñar á sumar verticalmente $11 + 11$; $15 + 13$; $24 + 23$; $45 + 61$; $81 + 47$. Ejercicios.

4ª—Enseñar á sumar $124 + 112$; $325 + 211$; $355 + 921 + 128$. Ejercicios.

5ª—Enseñar á sumar $21 + 32 + 44$; $44 + 22 + 53$; 432 ; $941 + 35 + 112$; $843 + 812 + 700 + 1 + 643$; etc.

6ª—Ejercicios de síntesis y recapitulación.

7ª—Tabla de sumar del 7 hasta 49.

8ª—Tabla de restar del 7 desde 49.

9ª—Ejercicios mentales de suma y resta combinando 7 con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ó partiendo de cualquier número.

10ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

11ª—Substraer por escrito, un dígito de otro dígito.

12ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

13ª—Distinguir un problema concreto de sumar.

14ª—Solución por escrito, de un problema concreto donde las cantidades sean números compuestos.

15ª—Ejercicios de objetivación y tabla de sumar del 8.

16ª—Tabla de restar del 8.

17ª—Agregar ó restar 8 á cualquier número.

18ª—Ejercicios de cálculo mental y problemas concretos de sumar.

19^a—Enseñar á restar 11 de 12; 13 de 16; 17 de 17; 24 de 29; 34 de 58; 85 de 89; 7 de 28.

20^a—Ejercicios de síntesis y recapitulación.

21^a—Enseñar á restar 111 de 112; 111 de 122; 113 de 223; 113 de 238; 27 de 848; 6 de 127.

22^a, 23^a y 24^a—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

Septiembre—1^a—Enseñanza oral y escrita de la tabla de multiplicar del 5.

2^a—Ejercicios de síntesis y recapitulación.

3^a—Enseñanza oral y escrita de la tabla de multiplicar del 6.

4^a y 5^a—Ejercicios y problemas.

6^a—Distinguir un problema concreto de restar.

7^a—Solución de problemas concretos de restar.

8^a, 9^a y 10^a—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

11^a y 12^a—Enseñanza oral y escrita de las tablas de sumar y restar del 9.

13^a—Unidades de 1^o, 2^o, 3^o y 4^o orden.

14^a y 15^a—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

16^a—Problemas concretos de sumar á varios términos; problemas concretos de restar.

17^a—Distinguir problemas de suma y resta; descomposición y objetivación.

18^a—Solución de problemas de suma y resta.

19^a—Problemas. Enunciación de problemas pensados por el niño.

20^a—Enseñanza de los números desde 1001 hasta 1010.

21^a—Ejercicios y problemas.

22^a—Enseñanza de los números 1010, 1020, 1030, 1040, etc.

23^a—Ejercicios y problemas.

24^a—Enseñanza de los números 1200, 1300, 1400 etc.

Octubre—1^a—Enseñanza de los números desde 1000 á 1100.

2^a—Ejercicios y problemas.

3ª—Enseñanza de los números desde 1100 á 1500. Ejercicios y problemas.

4ª—Enseñanza de los números desde 1500 á 1999.

5ª, 6ª y 7ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

8ª—Enseñanza de los números 1000, 2000, 3000, etc.

9ª y 10ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

11ª—Enseñanza de los números desde 2000 hasta 3000.

12ª—Descomposición de números en unidades, decenas, centenas y unidades de mil.

13ª—Enseñanza de los números desde 3000 á 5000.

14ª—Ejercicios y problemas

15ª—Enseñanza de los números desde 5000 á 9999.

16ª—Ejercicios y problemas.

17ª, 18ª y 19ª—Observación comparativa de 1, 2... 9; de 10, 20... 90; de 100, 200... 900; de 1000, 2000... 9000.

20ª—Noción de peso y centavos.

21ª—Lectura y escritura de números.

22ª—Adición de cantidades de cualquier número de cifras cuyas sumas parciales no exceden á 10.

23ª—Substraer una cantidad de cualquier número de cifras, de otra cuyos dígitos sean respectivamente mayores.

24ª—Lectura y escritura de números que tengan lugares ocupados por ceros como 1010, 2030, 102, etc.

Noviembre.—Las lecciones de este mes, serán de síntesis y recapitulación, tratando de que cada una resuma lo más posible, directa ó indirectamente, lo dado durante el año.

II

Desarrollo de las lecciones.—Apartándonos del procedimiento seguido hasta ahora por los textos de Pedagogía, hemos creído práctico para los que educan, exponer el desarrollo mismo de la lección entrando

así, en el detalle y mecanismo, donde siempre escollan los más nobles esfuerzos cuando no van dirigidos por una profunda preparación adquirida en largos años de estudio y de enseñanza.

Las obras escritas tocante á métodos, son defectuosas por su lado práctico. La clásica de DUHAMEL es un tratado de Filosofía Matemática, no de métodos, no obstante provechosas indicaciones para un profesor que desea dominar el espíritu de la asignatura. La de FÉLIX DAUGE, cuya primer edición titulada *Leciones de metodología matemática para uso de los alumnos de la escuela normal de ciencias, anexada á la universidad de Gante que aspiran á ser profesores de ateneos y colegios*, no es sino un tratado adocetrinado de Aritmética, Algebra y Geometría semejante al de DUHAMEL, que no da instrucciones acerca del mecanismo escolar, de los programas divididos en lecciones, de la manera de pasar de un punto á otro.

DAUZAT, donde tampoco hallamos los tan anhelados desarrollos, es, por la forma, más práctico quizá que los anteriores, pues cada capítulo termina en un sumario de conclusiones esenciales, eliminando todo aquello que no reviste carácter de tal. Es, pues, un programa. Pero, como DUHAMEL, de las explicaciones, el lector no obtiene sino idea del espíritu de la matemática y objeto de la enseñanza.

En cuanto á la instrucción primaria, se comete el mismo error, explicando con generalidades lo que exige riqueza de pormenores. BALLESTEROS, WICKERSHAM, TORRES, *The teacher's of manual, Normal Methods of Teaching* y tantos otros, escritos con el propósito de auxiliar al maestro, no se consultan porque no explican el mecanismo de las clases, la oportunidad y extensión de los temas, la asimilación del conocimiento. Las generalidades son hoy, para quien enseña, pueriles y trabajo perdido para quien las estudia, sin que importe desconocer su pasada utilidad.

No basta, para que un libro se llame de métodos, presentar de 200 lecciones que corresponden á un gra-

do, el desarrollo de dos como el *Quincy Methods*, pues, en 200 lecciones hay 30 ó 40 desarrollos de tipo diferente, íntimamente relacionados; esa difícilísima conexión la presentamos en este libro, al maestro que dirige un grado.

El descrédito, injusto á veces, en que ha caído la Pedagogía, se debe al espíritu de vaguedad de los textos, porque, revoloteando sólo, alrededor del procedimiento, son algo así como enciclopedias muy incompletas de gramática, anatomía, fisiología, sociología, moral, psicología y la materia cuyo método se trata, sin profundizar ningún conocimiento y viciando la definición misma de la palabra, *país*, niño *agogós*, que conduce (*παιδαγωγία*) dirigir la actividad del niño que aprende.

Innecesario y además imposible desarrollar á todas, hemos tomado una de las que se ajustan á un mismo modelo. Han sido experimentadas y corregidas en la escuela que dirijo; de modo que á los que objetaran, por prematuras, ciertas enseñanzas como la simultaneidad del reconocimiento, lectura, escritura y aplicación de los números, podríamos decirles que después de 22 días de clase, los niños de 6 $\frac{1}{2}$ á 7 años de edad, escribían perfectamente al dictado los números de 1 á 9.

LECCIÓN 1ª

Plan.—Enseñar á enunciar, escribir, leer y aplicar el número 1.

Proposición.—El número *uno* se representa así: 1. El niño, al terminar la lección, reconocerá, entre otros signos, la cifra 1; la nombrará no bien se la indique; la escribirá; tomará uno, de varios objetos.

Principio, de 4 á 8 minutos.—1º Presentando uno por uno varios objetos, pasando luego á las cosas del aula, de las cosas del aula á las de la calle, del pueblo, se llamará la atención acerca de la palabra *uno una* y la cantidad que determinan.

2º Abstracción de la palabra que indica el número 1.

Medio, de 12 á 15 minutos — 1º Representación del número en la pizarra.

2º Reconocimiento visual del número *a)* que se acaba de escribir; *b)* del número entre otros signos preparados expresamente sobre el pizarrón; *c)* del cartón entre otros, que lo contengan; *d)* de la cifra 1, 2, 3, 4, 5, etc.; en cantidades como 45.612.310.

3º Reproducción visomotora del número 1, en las pizarras; educación de la mano, *asociación de la percepción al movimiento*.

Fin. — Ejercicios generales de reconocimiento y examen asociando la idea, la imagen y la palabra. Comprobación de que el conocimiento fué adquirido.

Ilustraciones. — 1º Frutas, flores, palitos, bolitas, abaco, útiles de la clase y figuras.

2º Preparaciones en el pizarrón, de letras y números mezclados al 1; usando los trazos de color, números con la cifra 1; colección de cartoncitos con cifras, diferente cada uno.

Desarrollo de la lección. — *Principio.* — *Maestro.* — ¿Qué tengo en la mano? José.

Alumno. — Una naranja.

M. — ¿Qué tomo de la mesa? Raquel.

A. — Una flor.

M. — ¿Cuántas puertas tiene este salón? Pedro.

A. — Una.

M. — (*Señalando con la mano*). La ventana tiene... ¿Videla?

A. — Un vidrio roto.

M. — ¿Qué cantidad de niños se sienta en cada banco? Luisa.

A. — En cada banco se sienta un niño.

M. — ¿Cuántas municipalidades tiene el pueblo? María.

A. — El pueblo tiene una municipalidad.

M. — ¿Qué separo (*abaco*) Antonio?

A. — Vd. separa una bolita.

M. — ¿Cuántas cosas hemos tomado, indicado ó separado siempre? Todos.

Als. — *Una.*

Medio. — *Una* ó *Uno* es el nombre de un número que se representa así: 1.

¿Qué número he escrito en la pizarra? Tomasa.... Bernardo.... Juana.

Als. — El número uno.

M. — ¿Qué número señalo? (*Con el puntero indica la cifra mezclada á otros signos*). Juan.

A. — Vd. señala el número 1.

M. — ¿Qué número señalo ahora? Josefa.

A. — Vd. señala....

M. — ¿Pedro?

A. — Ese no es el número 1.

M. — Y ahora?

A. — Es el número uno.

M. — Señale en aquella pizarra el número 1.... Rosa. Busquen, Antonio y Augusto, cartones que tengan escrito el número 1 (*Los alumnos contestan á medida que encuentran el número*). Pasen á la pizarra Okia, Julia, Mercedes, Eke, Filito, Mario y Passo. Escriban todos el número 1 (*presentando el modelo*). Está bien; vuelvan á sus asientos.

Saquen las pizarras. Atención.

Escriban el número 1.... Otra vez.... Ahora como yo. (*Traza con menos lentitud que la primera vez, varias rayas oblicuas: / / / /, recorre rápidamente las filas y observa el trabajo de los niños para darse cuenta del aprendizaje de cada alumno; manda borrar y borra las cifras del pizarrón*).

M. — Escriban todos, nuevamente, el número 1 una sola vez.

Vuelto delante del grado, manda guardar las pizarras y pide atención.

Fin — *M.* Levanten todos una mano.... un dedo... tomen un objeto de su pupitre.

M. — Qué número enseño? Todos.

Als. — El número uno.

- M. — ¿Cuántos palitos he tomado? Servilia.
A. —
M. — ¿Y ahora?
A. — Vd. ha tomado un palito.
M. — Piensen todos en una sola cosa. Juan.
A. — Un banco.
M. — ¿Félix?
A. — Una pizarra.
M. — Que no sea de la escuela, ¿Darío?
A. — Un corral.
M. — ¿Víctor?
A. — Un buey.
M. — ¿Qué señalo? Félix.
A. — El número uno.
M. — ¿Que he escrito?
A. — El número 1, etc.
M. — Para la clase de mañana todos traen en sus pizarras, escrito el número 1.
Principios aplicados. — Entre otros, el más importante: *de lo concreto á lo abstracto y de lo particular á lo general*, que es el espíritu de la materia.

INDICACIONES

Participamos de la idea del doctor BERRA y muchos pedagogos norteamericanos, acerca de la escritura de los números; la dirección vertical es más clara; economiza espacio y economiza tiempo, porque la tendencia del niño (memoria muscular heredada) es al trazado derecho y no inclinado, fenómeno fácil de constatar en los pequeños.

LECCIÓN 2ª

Plan. — Enseñar la composición, nombre, lectura y aplicación del *número 2*.

Proposición. — Terminada la clase, el niño distin-

guirá dos cosas de una ó de varias; reconocerá la cifra 2, su significado; la nombrará no bien se la indique.

Principio. — 1º Rápido examen de los deberes, estimulando á los que hicieron bien el trabajo y corrigiendo defectos notables de escritura; 2º Ejercicios de recordación de los conocimientos de la clase anterior acerca del número *uno*.

Medio. — 1º Introducción del número dos mediante un objeto agregado á otro objeto; quitando de dos objetos, uno; 2º Generalización de la palabra *dos* aplicándola de diversas maneras; 3º Abstracción de la palabra dos; 4º Representación del número en la pizarra; 5º Reconocimiento visual del número: aislado, entre otros signos, en cartones mientras se escriben diversas cifras, etc.

Fin. — Ejercicios para recordar el número 1 y 2:

1º Pasan á los pizarrones seis ó más niños y trazan el número de rayas que se ordena, todo el grupo ó uno; 2º Toma cada uno, ó por grupos, el número de objetos que se indique; 3º Escritura de la cifra 1.

Uno y uno son dos. Las respuestas individuales alternarán con las simultáneas, participando la clase, del trabajo que los niños hacen en el pizarrón.

Ilustraciones. — Las que indique el desarrollo de la lección.

Desarrollo. — **Principio.** — *M.* — Coloquen las pizarras sobre el pupitre... (*El maestro recorre rápidamente las filas, observa el número que escribieron en sus casas; toma mentalmente, nota de los que no han hecho nada, de los que han hecho mal y de los que han hecho bien, para saber á quienes prestar preferente atención; dirige breves palabras de estímulo á los que trabajaron bien, evitando recriminaciones á los que no cumplieron, pero averiguando si es por incapacidad, olvido ó haraganería, mediante interrogaciones que hará en el transcurso de la lección*).

M. — Juan, Josefa, Enriqueta y Antonio han escrito muy bien el número 1. De los demás, unos han

escrito así l y otros, así \ y debe ser así, 1. Guarden las pizarras.

M. — ¿Qué número señalo?

A. — Vd. señala el número *uno*.

M. — Levanten una mano. Todos....

Todos. — (Levantando una mano).

M. — Nombren un objeto.

A. — Un cuchillo.

A. — Una mesa.

A. — Un hombre.

A. — Una muñeca.

M. — ¿Qué número es este?

A. — El número uno.

M. — ¿Cuántas naranjas tengo en esta mano?

A. — Vd. tiene una naranja.

M. — Y en esta otra?

A. — Tiene otra naranja.

M. — ¿Cuántas?

A. — Una naranja.

Medio. — Una y una naranja (juntando las dos en una mano) son ¿cuántas naranjas?

A. — Dos naranjas (*Los alumnos han aprendido á contar en sus hogares, hasta cinco, seis, á veces diez; de consiguiente, la enseñanza es para que aprendan á escribir el número asociando el significado á la representación*).

M. — ¿Cuántas naranjas tengo, entonces, en la mano?

A. — Vd. tiene dos naranjas.

M. — ¿Y ahora? (*escondiendo una*).

A. — Una naranja.

M. — ¿Cuántas he escondido?

A. — Una naranja.

M. — ¿Y ahora?

A. — Vd. ha escondido dos naranjas.

M. — ¿Cuántos golpes dí con el taco?

A. — Vd. dió dos golpes.

M. — ¿Cuántas rayas he trazado en la pizarra? (*trazando una*).

A. — Vd. ha trazado una raya.

M. — ¿Cuántos ojos tengo yo?

A. — Vd. tiene dos ojos.

M. — ¿Cuántas torres tiene el cabildo?

A. — Una torre.

M. — ¿Cuántas bolitas he separado? (*abaco*).

A. — Dos bolitas.

M. — ¿Una flor y una flor?

A. — Dos flores.

M. — ¿Una casa y una casa?

A. — Dos casas.

M. — ¿Una calle y una calle?

A. — Dos calles.

M. — ¿Un objeto y otro objeto?

A. — Dos objetos.

M. — ¿Un 1 y un 1? (*escribiendo*).

A. — Son dos unos.

M. — ¿Uno y uno? (*abstrayendo y preguntando á varios*).

A. — Son dos.

M. — Dos, es el nombre de un número que se representa así: 2.

M. — ¿Qué número he escrito en la pizarra?

Todos. — Vd. ha escrito el número dos.

M. — ¿Qué número señalo?

A. — El número dos.

M. — ¿Y ahora?

A. — El número uno.

M. — (*Reparte varias tarjetas*). Levanten la tarjeta que tenga el número 2.... la que tenga el número 1.... Que no tenga ninguno de los dos.

M. — (*Escribe en la pizarra cifras diversas*). Cuando escriba el número que Vds. conozcan, lo nombran. 7.... 1.

Todos. — Uno.

M. — 8.... 5.... 1.

Todos. — Uno.

M. — 2.

Todos. — Dos.

M. — Cuando vean el número 1 levantan una mano; dos cuando vean el número 2, y ninguna cuando no vean 1 ni 2.

(El maestro presenta sucesivamente, cartones con las cifras 3, 2, 5, 9, 4, 1, 2, 1).

Fin. — (Pasan al frente tantos alumnos como quepan en la pizarra, dividida en espacios por líneas verticales).

M. — Tracen todos, una raya.... borren.... tracen todos, dos rayas.... borren.

M. — Trace, Juan, una raya ... otra raya.... Clase ¿Cuántas rayas ha trazado?

Todos. — Dos rayas.

M. — Tome, Pedro, una hoja.... Josefa, dos papeletos.... Tracen todos un 1; otro 1. ¿Cuántos unos ha trazado cada niño en la pizarra? Clase.

Todos. — Dos unos.

M. — ¿Uno y uno cuánto es?

A. — Dos.

M. — Todos, una respuesta completa.

Todos. — Uno y uno son dos.

LECCIÓN 3ª

Plan. — Enseñar á escribir el número 2.

Proposición. — El número 2 tiene dos redondelitos uno arriba y otro abajo unidos por una raya; del redondelito de abajo, se desprende una rayita á la derecha. Los niños reproducirán, á la voz de *dos*, aproximadamente, el signo 2.

Principio. — 1º Observar si los lápices tienen punta y son enteros. 2º Posición de las pizarras y cuerpo.

Medio. — 1º Reconocimiento del número 2 escrito en la pizarra por el maestro. 2º Observación detenida de la manera de escribir el número 2. 3º Reproducción de las diversas partes del número 2. 4º Escritura del número entero, por imitación. 5º Varios niños pasan al pizarrón y reproducen el número 2. 6º Reproducción auditiva de los números 1 y 2. 7º Ejercicio muscular de los dos dedos.

Fin. — 1º Ejercicios de elección acerca de los números 1 y 2. 2º Análisis del signo 2. 3º Comparación

de los números 1 y 2. 4º Traer para la clase próxima un papel con el número 2, escrito.

Ilustraciones.— Gráficas de los números 2, 1 y sus partes, en la pizarra.

Desarrollo.—*Principio.*—*M.*—Saquen sus pizarras... Levanten en la mano derecha el lápiz. (*El maestro los mira, quita aquellos que no tienen longitud suficiente y hace observaciones tendientes á evitar en adelante, el uso de lápices cortos ó sin punta; algunos maestros practican el sistema de recoger y guardar útiles expuestos, si no se rompen, á perderse con frecuencia. De todos modos, conviene disponer de cierta cantidad para impedir, en estos casos, que el niño permanezca inactivo*). Coloquen la pizarra en esta posición... el cuerpo derecho, los codos sobre el banco, la cabeza alta.

M.—¿Qué número acabo de escribir? (*Pregunta á varios*).

Als.—Vd. acaba de escribir el número 2.

Medio.—*M.*—Observen todos como escribo el número dos... primero un redondelito, después una raya, otro redondelito y otra raya. Escriban todos un redondelito así... otra vez... otra vez... Ahora una raya para abajo así... en el otro redondel... en el otro... Ahora una para el lado, así... otra vez. Borren.

Escriban todos el número entero, así... otra vez... otra vez...

Envía al pizarrón los tres niños que escriben con más dificultad con otros tres que escriben con menos dificultad; dirige, si es necesario, la mano de aquéllos y manda reproducir varias veces el modelo.

Manda escribir (*todos*) el número uno... el número dos... un redondelito... una raya de arriba para abajo... para el lado... muchas veces.

M.—Borren. Tracen este signo, así $\angle$... otra vez... otra vez... el número 2. Muevan los dedos, así... (*los dedos que toman el lápiz*). Guarden sus pizarras.

- Fin.*—*M.*—Nombren dos cosas.
Als.—(*Contestan varios*).
M.—Nombren una cosa.
Als.—(*Contestan varios*).
M.—¿Una rosa y un clavel cuántas flores son?
A.—Dos flores.
M.—¿Cuántos redondelitos tiene el dos?
A.—Dos.
M.—¿Qué es más, una naranja ó dos?
A.—Dos naranjas.
M.—¿A qué lado están los redondelitos?
A.—A la izquierda de la raya.
M.—¿Qué número señalo?
A.—El número *uno*.
M.—Estos unos, ¿cuántos son?
A.—Dos.
M.—Después del número 1, ¿qué número hemos aprendido?
A.—El número *dos*.
M.—De estos números, ¿cuál es mayor? (*señalando 1 y 2 en la pizarra*).
A.—El 2.
M.—Mañana traen, en un papelito, el número 2. Quiero que Luis, María y Bernardo no vuelvan á olvidarse.

LECCIÓN 4ª

Plan. — Enseñanza, composición, nombre, lectura y aplicación del *número 3*.

Proposición.—Terminada la lección, el niño distinguirá tres cosas de una, dos ó una de varias, reconocerá la cifra 3; la nombrará no bien se la indiquen; sabrá que la repetición 1 y 1 y 1 ó 2 y 1 hacen 3.

Principio.—1º Ejercicios recordando la composición del 2. 2º Ejercicios de comparación entre el 1 y el 2. 3º Ejercicios abstractos acerca de los números 1 y 2.

Medio.—1º Conocimiento inductivo del número 3, mediante la agregación de un objeto á dos objetos. 2º Comparación en cantidad de uno, dos y tres objetos.

3º Tres, como determinativo de un grupo dado de objetos, aplicando la palabra de diversos modos y á diversas especies. 4º Abstracción. 5º Representación del número en la pizarra. 6º Reconocimiento visual del número 3.

Fin.—1º Ejercicios de comparación, elección, descomposición y recomposición para asociar la figura 3 á su significado, buscando la mayor variedad posible.

Ilustraciones.—Las que indique el *desarrollo*.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.*—¿Qué es más, una naranja ó dos naranjas?

A.—Dos naranjas.

M.—Si bebo una copa de agua y luego otra copa de agua. ¿Cuántas copas habré bebido?

A.—Vd. habrá bebido dos copas de agua.

M.—Van á levantar dos veces la mano. Todos. . . Cierren un ojo.

M.—¿Con cuántas sillas juntamos dos sillas?

A.—Con una y una más.

M.—Con un libro y una flor ¿cuántos libros tenemos?

A.—Un libro.

M.—Si de estos dos cartones quitamos uno ¿cuántos quedan?

A.—Un cartón.

M.—Si de dos quitamos uno ¿cuánto queda? Todos.

Todos.—Uno.

M.—Si á uno agregamos uno ¿cuánto tenemos?

A.—Dos.

Medio.—*M.* ¿Cuántas naranjas tengo en esta mano?

A.—Dos naranjas.

M.—¿Y en esta otra?

A.—Una naranja.

M.—*Dos naranjas y una naranja ¿cuántas son? (juntando las naranjas en una mano).*

A.—Son tres naranjas. (Si los alumnos no supiesen el maestro dirá: *dos naranjas y una naranja son tres naranjas* acompañando la expresión con el movimiento de las manos).

M.—Una naranja y dos naranjas ¿cuántas son? (*los mismos movimientos*).

A.—Tres naranjas.

M.—¿Cuántos palitos tengo?

A.—Vd. Tiene tres palitos.

M.—¿Cuántas bolitas he separado? (*abaco*).

A.—Vd. ha separado tres bolitas.

M.—¿Y ahora?

A.—Vd. ha separado una bolita.

M.—Van á dar tres golpes con la palma de la mano.
Todos.

Todos.—(*Dan tres golpes*).

M.—Van á dar un golpe.

M.—¿Cuántas plazas tiene la ciudad?

A.—Tiene tres plazas.

M.—Dos naranjas y una naranja cuántas naranjas son? (*abstractamente*).

A.—Son tres naranjas.

M.—Dos y uno ¿cuántos son?

A.—Tres.

M.—Dos y uno (*señalando las cifras 2 y 1*). ¿Cuántos son?

A.—Tres.

M.—Clase....

Als.—Dos y uno son tres.

M.—Tres, es el nombre de un número que se representa así: 3. ¿Qué número escribí en la pizarra?
Todos.

Als.—Vd. ha escrito el número 3.

M.—¿Qué número señalo?

A.—El número 2.

M.—¿Y ahora?

A.—El número 3.

M.—¿Y ahora?

A.—El número 1.

M.—¿Qué papelito, de los que están clavados en la pizarra, tiene escrito el número 3?

A.—El que está clavado en aquella pizarra.

M.—¿En qué otra parte observan Vds. el número 3?

A.—En aquel maderito.

A.—En aquel mapa.

A.—En el cartel.

M.—(*Al dar vuelta un eje pasan delante de un obturador diferentes números*). Nombren Vds. los números que conozcan.

A.—Dos....uno....dos....tres....tres.

Fin.—M.—(*Pasan seis alumnos al frente*). Tomen, Juan, tres hojas; Pedro, dos carozos; Justo, tres papeitos; los demás un cartón....Bien.

M.—Escriban en la pizarra, el número que indique la cantidad de veces que voy á tocar el timbre....

(*Los alumnos escriben 1 ó 2 según el caso*).

M.—Una bolita y una bolita y una bolita. ¿Cuántas bolitas son?

A.—Son tres bolitas.

M.—Uno, uno y uno. ¿Cuánto es? (*escribiendo la cifra*).

A.—Tres.

M.—¿Uno y uno?

A.—Dos.

M.—¿Dos y uno?

A.—Tres.

M.—Un niño cuente los dedos que levanto.

A.—Uno, dos, tres.

M.—¿Cuál es mayor de los números que hemos aprendido?

A.—El número 3.

M.—¿Cuál es menor?

A.—El número uno.

M.—Después del número uno. ¿Cuál hemos aprendido?

Todos.—El número dos.

M.—¿Después del número dos?

A.—El número tres.

M.—Acaba de tocar la campana. ¿A qué hora salimos?

A.—Salimos á las tres.

M.—Mañana traen todos, tres semillas.

LECCIÓN 7ª

Plan.—Ejercicios; problemas mentales de *suma y resta combinando los números 1, 2 y 3*.

Proposición.—El objeto de la lección, es habituar el oído al lenguaje de los problemas, formar en su mente, las representaciones exactas del enunciado; asociar unas con otras para obtener imágenes de solución.

En la práctica, el problema de las ovejas no es diferente al del teniente y el capitán; pero lógicamente, el segundo es más complicado que el primero por la forma y elementos gramaticales más generalizadores y difíciles de substantivar; si dijésemos “una gorra tiene dos galones, otra tres; la primera es de teniente, la segunda de capitán; cuántos galones tiene más la del capitán que la del teniente?” el problema es más explícito, porque en la oración ocupa lugar preferente la parte resolutive.

Ejercicios. a) 1º Indicaremos acerca de la escritura de los números 1, 2 y 3 comentando, los errores que los niños hayan cometido al escribirlos. 2º Escritura por partes, de los números 1, 2 y 3.

b) 1º Presentación de una lámina, ejercicios de contar y escritura de los números determinantes. 2º Problemas concretos de suma y resta, combinando los grupos que presenta la lámina. 3º Abstracción: cálculo mental. 4º Problemas concretos con los elementos de cada grupo. 5º Problemas de suma y resta combinando imágenes que la mente debe reproducir. 6º Ejercicios abstractos de suma y resta, por audición. 7º Ejercicios de aplicación en los pizarrones.

Desarrollo.—*Principio.*— (El maestro comenta los deberes, escritura de las cifras 1, 2 y 3, que devuelve corregidos, al terminar la clase).

M.—Hay niños como José y Mauricio, que escriben el primer palito del 1, muy largo, así (*escribe*) y debe ser así (*escribe*). Hay otros como Alda, que lo escriben inclinado, así (*escribe en la pizarra*) y debe ser así. Saquen sus pizarras. Pasen al frente José, Mauricio y Alda. Tracen todos la primera rayita,

así... de abajo para arriba. Ahora vuelvan de arriba hacia abajo, sobre la misma rayita, así (*escribe*) sin torcer la línea (*repite el ejercicio varias veces*). Los del frente pasen á sus asientos. Atención. El 2, algunos como María, lo hacen así (*escribe*). Esta rayita de abajo, va sobre el renglón, así (*escribe*).

El maestro continúa durante 9 minutos, una serie de observaciones por el mismo estilo acerca de la escritura de las cifras, sin pretender una corrección que se adquiere con el largo ejercicio.

Medio. — *M.*—Guarden la pizarra y presten atención. Observen esta lámina.

A.—Esa lámina representa mujeres y hombres ocupados en cuidar ovejas.

M.—¿Qué distinguen en el fondo?

A.—Una casa.

M.—Escriba Juan, el número que indica una casa.

M.—¿Cuántas son las mujeres?

A.—Sos tres mujeres.

M.—Cuidaban ovejas tres pastoras ; al mismo tiempo, una hilaba y las demás cosían. ¿Cuántas pastoras cosían?

A.—Dos pastoras cosían.

A.—Una pastora hilaba.

M.—Escriba Julia, el número que determina las pastoras que cosían.

M.—El invierno era frío ; necesitaban vestirse, comprar leña y alimentarse ; vendieron este y este grupo de ovejas. ¿Qué quedó de los tres?

A.—Un grupo de ovejas.

M.—¿Cuántos vendieron?

A.—Dos grupos.

M.—Tres grupos menos dos grupos. ¿Qué queda?

A.—Un grupo.

M.—Y si de los tres grupos hubiesen vendido uno, ¿cuántos grupos quedaban?

A.—Dos grupos.

M.—Si de tres cosas sacamos dos cosas. ¿Cuánto queda?

A.—Una cosa.

M.—Tres menos dos. ¿Cuánto es?

A.—Uno.

M.—¿Y tres menos uno?

A.—Es dos.

M.—¿Cuál es el grupo que tiene menos ovejas?

A.—El que está cerca de la casa.

M.—¿Cuántas ovejas tiene?

A.—Tiene dos ovejas.

M.—Si le agregásemos una, ¿cuántas ovejas habrían?

A.—Tres ovejas.

M.—Dos ovejas más una oveja, ¿cuántas ovejas son?

A.—Tres ovejas.

M.—¿Y una oveja más dos ovejas?

A.—Son tres ovejas.

M.—Dos cosas más una cosa ó una cosa más dos cosas. ¿Cuántas cosas son?

A.—Son tres cosas.

M.—Dos más uno ó uno más dos. ¿Cuánto es?

A.—Tres.

M.—En su nido una paloma puso dos huevitos; el viento hizo caer uno. ¿Cuántos huevitos quedaron?

A.—Quedó un huevito.

M.—En el dormitorio hay una cama, una mesa de luz y un lavatorio. ¿Cuántos muebles hay?

A.—Tres muebles.

M.—Si quitamos la mesa de luz y el lavatorio. ¿Cuántos muebles quedan?

A.—Queda un mueble.

M.—A un teniente cuya gorra tenía dos galones, lo hicieron capitán; su gorra tenía entonces tres galones. ¿Cuántos galones tenía más el capitán que el teniente?

A.—Un galón.

M.—¿Cuánto es dos más uno?...tres menos dos.... uno, más uno, más uno.... uno más dos.... tres menos uno.

(Pasan cinco niños; el maestro ha escrito en cada

división de la pizarra, grupos de puntos suficientemente grandes para ser vistos por toda la clase:

: : , : : , etc).

M.—Borren un punto, borren dos. ¿Cuántos quedan? Justo.

A.—Queda ninguno.

M.—¿Cuántos borró en todo? Petrona.

A.—Borró tres.

M.—¿Cuántos había?

A.—Tres.

M.—¿De tres puntos quitando tres puntos. ¿Qué queda?

A.—Nada.

M.—Agreguen dos puntos.... quiten tres.... agreguen uno....

M.—¿Cuántos quedan, Josefa?

A.—Dos.

M.—Siéntense.

LECCIÓN 8ª

Propósito de la lección.—Acostumbrar á los niños á manejar números con exactitud y rapidez.

Además, enseñarles el número 4; separaciones y combinaciones que admite.

Preparación del maestro.—1º Plan de trabajo, es decir, lo que los alumnos harán y cuándo deben hacerlo.

2º Ejercitarse en la confección de problemas y manipulación de cubitos.

3º Familiarizarse con las combinaciones y separaciones de que es susceptible el número 4.

Preparación de los alumnos.—Todos los trabajos numéricos que hayan hecho previamente y toda la facultad que ahora poseen de ver y pensar con prontitud y claridad.

Plan de la lección.—1º Breves ejercicios de repaso (que no pase de un momento) sobre el conocimiento

de los números hasta el 4. 2° Mostrar mediante cubitos, las operaciones que hay en el número 4, haciendo que los niños describan lo que se ha hecho. 3° Permitir que tomen los cubitos y los combinen á su manera. 4° Darles cinco ó seis problemas de dirección. 5° Hacer que den otros. 6° Si la clase está en condiciones de pasar al número *cinco*, terminar la lección, enviando *cuatro niños* cerca de la ventana; tratar de que los otros digan cuántos están ahí y que luego, otro que se reuna con ellos, forme *cinco*, diciendo á la clase que para la próxima lección consideraremos ese número. 7° Como trabajo de prueba, dar á los alumnos ejercicios ilustrados para que los hagan en el pizarrón, durante los veinte y cinco minutos de clase siguientes.

Lo que hay en el 4

En cuatro hay cuatro unos
En 4 hay dos 2
En 4 hay un 3 y sobra 1
En 4 hay un 4.

Tres y 1 son 4
Dos 2 son 4
Un 3 y 1 son 4
Un 4 es 4

$$\begin{array}{r} 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ 2 + 1 + 1 = 4 \\ 3 + 1 = 4 \\ 1 + 2 + 1 = 4 \\ 1 + 1 + 2 = 4 \\ 2 + 2 = 4 \\ 1 + 3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 - 4 = 0 \\ 4 - 3 = 1 \\ 4 - 2 = 2 \\ 4 - 1 = 3 \end{array}$$

Desarrollo. — *La maestra y los alumnos están alrededor de la mesa, sobre la que hay variedad de objetos, muchos de cada clase.* La maestra alza un par de objetos y pregunta: «¿Qué tengo en mis manos?» — «Dos bolitas» — «¿Y ahora?» — «Cuatro castañas». — «¿Y ahora?» — «Tres lápices». — «¿Qué tengo ahora?» — «Tres botones». — «¿Cuántos unos?» — «Tres».

«Enseñen tantos dedos como las cuentas que yo les muestro». — Cada niño levanta cuatro dedos.

« Tóquense tantos ojos como bolitas enseño ».

Los pequeñuelos se ríen, tocándose ambos ojos.

« Salten tantas veces como las pelotas que colocaré sobre la mesa ».— Los niños saltan una vez.

« Cada niño dará su nombre las veces que indica este número de tarjetas » — Hay una confusión de voces pronunciando cada niño su nombre tres veces.

—« Díganme lo que tengo en la mano ».— Abre la mano dejando ver un botón, una bolita y una castaña.

—« Tres cosas, » contestan los niños.

—« Muy bien. ¿Y ahora », agregando una nuez. « Cuatro cosas ».— Bien — ¿ Qué saben ustedes del cuatro? « ¿ Saben algo? » — « Sí, señorita, sabemos todo ».— « ¿ Sí? » — « A ver si eso es cierto ».— La maestra toma cuatro cubitos y los coloca muy arrimados uno al lado del otro, sobre la mesa.

« Voy á separar estos y ustedes deben mirar bien y decirme cuántos *unos* me resultan ».— Con un rápido movimiento de derecha á izquierda separa los cubos, dejándolos parados sobre la mesa á igual distancia uno de otro.

Después de una mirada, los niños responden en coro « Cuatro ».

Con hábil movimiento, la maestra arregla los cubitos en fila, dejando ningún espacio intermedio y pregunta « ¿ Qué es lo que acabo de hacer? » — « Vd. ha juntado todos los *unos* ». « ¿ Y de esta manera qué he hecho? » — « Vd. ha hecho *cuatro* ». « A ver si Alicia sabe contar eso? » — « Cuatro unos hacen *cuatro* ». — « Ahora voy á trabajar con rapidez ».— « Estén alerta á ver si dicen lo que he hecho, no bien termine ». Con un movimiento de cada mano la maestra divide la fila de cubos en dos grupos. — « Daniel, cuente lo que ve » — Hay dos *dos* en *cuatro*. La maestra junta los dos grupos y dice: « ¿ Qué ve Vd., Enrique? » — « Dos *dos* son *cuatro* » — Otra vez los separa, tres en un grupo y uno en el otro. — « ¿ Qué dice Ernesto? » — « En cuatro hay un *tres* y sobra *uno* ». — Los junta. — « ¿ Qué es lo que vemos ahora, Edgar? » — « Tres y uno son cuatro ». — Toman-

do los cuatro cubos en una mano, sin alterar la posición, los levanta á la vista de la clase. — « ¿ Cuántos hay, Berta ? » — « Hay un *cuatro* en cuatro ».— Teniéndolos todavía dice : « Tome cada uno de ustedes tantos cubitos como estos ». Los alumnos van al cajón y toman cada uno cuatro cubos. — Un pequeñuelo, llegando el último para tomar sus cuatro, se encuentra con que habiéndose llevado los más cercanos, los restantes quedan fuera de su alcance. Inmediatamente dice la maestra : « Si se ve á un niño que no puede alcanzar lo que desea, deben ser buenos y ayudarle ».

Apenas deja de hablar, cuando todos los niños se precipitan hacia el cajón y el niño se encuentra con los brazos llenos de cubitos.

« Así es lindo », les dice la maestra, sonriendo, « pero no necesita tantos ; ahora, cada uno de ustedes va á hacer alguna cosita con los cubos que tiene en la mano, para después contarme lo que ha hecho ».

Los niños empiezan con entusiasmo la obra de arreglar los cubitos. A medida que termina cada uno su trabajo, levanta la mano. — « A ver, Brígida, dice la maestra ». — Brígida ha parado los cubos sobre la mesa, aislado uno de otro. — Ahora dice : « Uno, y uno, y uno, y uno son cuatro » — cada vez que dice uno, toca uno de los cubos y al decir *cuatro*, los junta.

« Eso está muy bien. — ¿ Qué me dice, Margarita, de lo que ha hecho ? »

Margarita ha colocado tres cubos juntos y uno separado. — Juntándolos todos, dice : « Tres y uno son cuatro ».

— « Ahora Vd., Lillie ».

Lillie ha puesto todos los cubos juntos ; los levanta y ocultándolos debajo de la mesa, dice : « cuatro menos cuatro es nada ».

— « Alicia, diga lo que Vd. ha pensado ».

Alicia tiene los cubos separados en dos grupos de dos cubos cada uno. — Juntándolos en un solo grupo, dice : « dos y dos son cuatro ».

— « Podría contarme eso de otro modo ? »

— « Sí, señorita, dos *dos* son cuatro ».

— « Ernesto, ¿qué nos dice Vd. » ?

Los cubitos de Ernesto están juntos, sacando dos, los esconde y dice : « Cuatro menos dos son dos.

—« Vd., Berta : » Berta tiene también los cuatro cubos reunidos ; sacando uno, lo oculta y dice : « Cuatro menos *uno* son *tres* ».

— « Edgar, describa lo que ha hecho ».

El niño ha dispuesto los cubos en el siguiente orden : *uno*, después *dos*, y luego *uno*. — Ahora, indicando á su vez cada grupo, dice : « Uno, más dos, más uno, son cuatro ».

— « Mueva los cubitos como lo hicieron ayer ».

El niño coloca el *uno* junto con el *dos* y dice :

« Tres » ; luego, depositando los tres al lado del otro, uno, dice : « cuatro ».

— « Marcia, háganos saber lo que ha hecho ».

Marcia ha formado un grupo de cuatro. Tomando tres en una mano, los esconde debajo de la mesa y dice. « Cuatro menos *tres* es *uno* ».

— « Daniel, tiene alguna novedad ? »

« Sí, señorita, — Ilustrando lo que dice, con movimientos de los cubos, cuenta : « Uno, tres, cuatro ».

« Han trabajado muy bien, niños. Ahora cierran los ojos todos y escuchen lo que les voy á contar. Yo tenía dos lápices ; Margarita me regaló uno ayer y Enrique me dió uno, hoy. ¿ Cuántos tengo en todo ? »

Los niños reabren los ojos y levantan las manos ; al instante, que la maestra dice : « Hable, Marcia ».

— « Vd. tiene cuatro lápices ».

« Cuatro niñas fueron á Boston, un día y dos niñas regresaron. ¿ Cuántas se quedaron en Boston ? »

« Dos niñas, contesta el alumno designado ».

« Anita juntó cuatro rosas de su rosal y dió tres á una amigueta enferma, ¿ cuántas tiene ahora ? »

— « Una rosa ».— « Compré caramelos y dí cuatro á mi hermanito. El dió un caramelo á cada uno de sus dos compañeros. ¿ Con cuántos se quedó ? Diga, Vd. Brígida » ; « Dos caramelos ».

« Un niño fué al río á pescar, pasó largo tiempo sin pescar nada. Luego pescó cuatro peces ; pero el último escapó y después uno se perdió por un agujero del fondo del canasto. ¿ Cuántos peces llevó á su casa ? Ernesto ».— « Llevó á su casa dos peces ».

« Para comprar dos naranjas, á dos centavos cada una, ¿ cuántos centavos es preciso tener ? Lillie ».
— « Cuatro centavos ».

— « Muy bien dicho. Ahora. ¿ quién hace un cuentito como estos ? Daniel ».— « El señor F. tenía tres caballos y compró uno más. ¿ Cuántos tiene ahora ? » Los niños levantan las manos ; Daniel designa á Edgar para que lo resuelva, quien contesta : « Cuatro caballos ».

— « Daniel puede pararse al lado de la ventana y Edgar nos va á decir otro cuentito ».

Dice Edgar : « Compré cuatro higos ; los he comido á todos, cuántos me quedan ? »

Berta es indicada para dar la respuesta y contesta :
— « Ningún higo ».

— « Vaya, Edgar, á pararse al lado de Daniel », ordena la maestra, « y que haga Berta el cuentito siguiente ».

— « Yo tenía tres gatitos blancos, cuenta Bertita, y un gatito overo. ¿ Cuántos gatitos tenía ? »

— Alicia es la que debe responder y contesta :
« cuatro gatitos ».

Berta se reúne con los compañeros al lado de la ventana y Alicia, enuncia su problema.

— « Traje tres rosas blancas para mi señorita, y una encarnada. ¿ Cuántas rosas le regalé ? »

Todos levantan la mano y Marcia es indicada para responder, siendo la contestación, « cuatro rosas ».

Pasa Alicia al grupo formado cerca de la ventana y la maestra, dirigiéndose á la clase pregunta ¿ cuántos niños están parados junto á la ventana ?

Todos : « Cuatro ».

— « Pase Vd. Marcia ; ahora ¿ cuántos son ? »

La clase : « Cinco ».

— « No les parece que sería muy lindo que mañana habláramos del *cinco* ? »

Todos : «Sí, señorita.»

—«Bueno, ahora pasen al pizarrón y hagan un dibujito que trate del cuatro, mientras yo tomo lectura á la otra clase.

Los niños, que nunca se hallan más felices que cuando se les da bastante pizarrón, tiza y libertad para dibujar lo que quieren, reciben con regocijo esta indicación de la maestra.

— Los problemitas ilustrados por los jóvenes dibujantes están reproducidos en las páginas 268, 269, 270 del libro de Lelia Patridge.

Cuentito ilustrado por las figuras 1 y 2.

El señor F. tenía 4 trozos de granito en un corralón. Un hombre vino con un carrito y se llevó dos trozos. ¿Cuántos quedan en el corralón?

Cuentito ilustrado por la N° 3.

Un hombre tenía cuatro vacas en un corral. Llevó una para darle de beber. ¿Cuántas quedaron en el corral?

Cuentito ilustrado por la N° 4.

Había cuatro cerdos encerrados, se escaparon dos. ¿Cuántos quedan?

Cuentito ilustrado por la N° 5.

Puse cuatro pollos en una gallinera, se escaparon dos. ¿Cuántos quedan?

Notas y comentarios. — La actividad mental es tan necesaria y placentera para los niños, como lo es la actividad física y el maestro debe poseer el arte de guiar y controlar esa fuerza continua de sus alumnos. Una vez que los educadores hayan adquirido este arte, la rapidez y seguridad desplegadas aquí por pequeñuelos, no será cosa extraña, si se considera

como asunto para notas y comentarios, una lección que, como la descripta, combine esfuerzo intelectual intenso con emociones agradables. ⁽¹⁾

INDICACIONES

Esta lección indica la infinidad de recursos de que el maestro puede echar mano para repetir conocimientos, sirviéndose de variados ejercicios, única manera de conseguir que el cerebro del niño, constantemente atento, sea una especie de esponja.

Sin embargo, en la mayoría de nuestras aulas, no podrá darse sin modificaciones, porque los alumnos se sientan en bancos y se dispone sólo del frente con la ayuda de los pizarrones. Además, el primer grado de las escuelas argentinas, como lo decíamos en las últimas páginas del primer libro, se compone de niños cuyo carácter no se presta á la expansión de las clases norteamericanas so peligro de caer en una indisciplina que malogre los esfuerzos del maestro para transmitir determinados conocimientos. Es, así mismo, incompleta en el sentido de que no hay pasos á la abstracción, manteniéndose en un campo siempre concreto, muy propio para niños de cinco años, lección de kindergarten; no para primer grado de escuela primaria.

LECCIÓN 21*

Plan. — Significado de las palabras *agregar, aumentar, añadir, reunir*.

Proposición. — El alumno, al terminar la lección, aplicará dichos términos á diferentes actos ú operaciones.

Principio. — 1º Ejercicios mentales de resta quitando á 9, números menores. 2º Problemas de suma cuyo resultado no exceda de 9.

(1) Una de las dos lecciones que sobre números trae *The Quincy Methods* by Lelia E. Patridge, pág. 260 á 271.

Medio. — 1º *Agregar* á las bolitas de una copa las que contenga la mano. 2º Generalización del término agregar y empleo, por substitución, de la palabra *aumentar*. 3º Ejercicios de aplicación en las pizarras. 4º Uso de la palabra *añadir* en ejemplos. 5º Significado de *reunir* mediante ejemplos. 6º Mandar á los niños diferentes actos, empleando las palabras indicadas, para que los ejecuten.

Fin.—Ejercicios.—1º Cada fila añade una cantidad determinada á un número determinado. 2º Los niños se reúnen en el patio. 3º Empleo de la palabra *reunir*, por los alumnos. 4º En la pizarra: el maestro agrega rayas, números, líneas, á otras rayas, números, líneas.

Ilustraciones. — Las que indique el desarrollo.

Desarrollo. — **Principio.** — *M.* — José, cuente desde 1 hasta 9.

A. — Uno, dos, tres, cuatro, etc.

M. — ¿Cuántas varillas tiene este aparatito? (*En forma de abanico con varillas de resorte, que se doblan ó abren á voluntad*).

A. — Ocho varillas.

M. — ¿Y ahora? (*Levantando una más*).

A. — Nueve varillas.

M. — ¿De las nueve varillas quito cuatro y quedan?

A. — Cinco varillas.

M. — ¿Y si hubiese quitado seis? (*ocultando el aparato*).

A. — Hubieran quedado....

M. — Observen.... (*con el aparato*).

A. — Hubiesen quedado tres.

M. — De nueve quitando seis ¿cuánto queda?

A. — Tres.

M. — Un niño economiza el primer día, dos monedas, el 2º tres y el 4º dos ¿cuántas monedas ha economizado?

A. — Siete monedas.

Medio. — *M.* — ¿Cuántas bolitas tengo en esta mano?... ¿Cuántas hay en esta copa? (*El maestro echa las de la mano á la copa*) ¿Qué dice?

A. — Vd. echó las bolitas que tenía en la mano á la copa.

M. — Cuando en la copa hay otras bolitas, *agregamos* á las de la copa las que tenemos en la mano (*el maestro repite la operación*). ¿Qué he hecho?

A. — Vd. *agregó* las bolitas que tenía en la mano?

M. — (*A un montón de cuadernos agrega tres*) ¿Qué hice?

A. — Vd. *agregó* tres cuadernos.

M. — Levanten todos un dedo; agreguen todos, dos dedos... bien; bajen las manos.

¿En vez de *agreguen* dos dedos, podríamos decir de otro modo?

A. — Sí señor; aumenten dos dedos.

M. — Muy bien. De consiguiente, en vez de *agregar* puede emplearse ¿qué palabra?

A. — Aumentar.

M. — Saquen sus pizarras.... Tracen dos rayas.... agreguen cuatro rayas.... aumenten tres rayas.... aumenten otra.... agreguen dos más. Basta.

M. — Y en vez de *aumentar*, *agregar*, podríamos hacer uso de otra palabra....

Als. — La palabra *mayor*.... *sumar*....

M. — No, la palabra *añadir*; así, cuando digo: aumenten ó agreguen dos rayas, dos bolitas, dos objetos, podríamos decir?

A. — Añadan dos rayas, dos bolitas, dos objetos.

M. — Esta fila, piense un problema cuyo enunciado contenga la palabra *añadir*; esta otra, la palabra *agregar*; esta otra, la palabra *aumentar*. (*El maestro acepta cualquier derivado del verbo*).

Als. — (*Contestan los cinco ó seis alumnos á quienes pregunta el maestro*).

M. — ¿Cuántos palitos tengo en este plato?.... ¿Y en este otro?.... (*El maestro los echa en un tercer plato*). ¿Qué hice?

A. — Vd. ha *añadido*....

Otro. — Vd. los ha *aumentado*....

Otro. — Vd. los ha *juntado*.

M. — En este caso he *reunido* los palitos. ¿Y

ahora? (*A un montón de palitos agrega varios palitos*).

A. — Vd. agrega á los palitos del plato cinco palitos.

M. — ¿Y ahora?

A. — Vd. reúne los palitos de los dos platos.

M. — Cuando las cosas dejan su lugar para formar en otra parte un solo grupo, se *reunen*.

M. — Reúnanse alrededor de aquella mesa, José y Nilia, de esta fila; Antonio, María y Eugenia, de aquella otra.

¿Cuántos niños se han reunido junto á la mesa?

A. — Cinco niños.

M. — Agréguese tres niños, Juan, Justo y Julia, de aquella fila....

Vuelvan á sus asientos.

Fin. — Voy á decir un número y esta fila añade dos, esta otra uno.

M. — Cinco.

Filas. — Siete.... ocho.

M. — Tres.

Filas. — Cinco.... seis.... ocho.... nueve.

M. — Esta fila aumenta tres, aquélla, dos.

Cuatro....

Filas. — Siete.... nueve.

M. — Uno.

A. — Cuatro.... seis.

M. — Los alumnos que salen de sus casas y llegan al patio de la escuela ¿qué hacen?

A. — Se reúnen en el patio de la escuela.

M. — Piensen un problema cuyo enunciado contenga la palabra *reunir*.

(*Los alumnos preguntados, contestan*).

M. — ¿Qué hago?

A. — Vd. reúne las flores.

M. — ¿Y ahora? (*pizarrón*).

A. — Vd. agrega rayas.... Vd. agrega números....

M. — De otra manera....

A. — Vd. aumenta las líneas....

A. — Vd. añade agua.

M. — Bien.



LECCIÓN 22*

Plan. — El signo $+$.

Principio.—1º Ejercicios de distinguir y contar representaciones en láminas. 2º Ejercicios abstractos y mentales de suma. 3º Ejercicios de reconocimiento de las cifras.

Medio. — 1º Representación del signo $+$. 2º Manera de escribirlo. 3º Nombre del signo. 4º Reproducción en las pizarras, según indicaciones del maestro y por imitación. 5º Corrección de los defectos de reproducción después de un rápido examen de los trabajos. 6º Lectura de expresiones de la forma $a + b$ y $a + b + c$, individual y colectivamente.

Fin.— 1º Escritura de expresiones de la forma antes indicada, por los alumnos, en la pizarra y pizarrones. 2º Preguntas individuales y simultáneas acerca del reconocimiento y nombre del signo $+$.

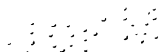
Ilustraciones. — Las que indique el desarrollo.

Desarrollo. — **Principio.** — Representando, tres láminas dispuestas en la pizarra, la una tres tajadas de melón, cuatro peras, dos racimos de uva y cinco manzanas; la otra, dos tajadas de melón, dos peras, cuatro duraznos; la otra, una pera, tres tajadas de melón, cuatro manzanas, dos duraznos. O bien, una lámina suficientemente grande donde pueda distinguirse la representación de nueve grupos aislados de objetos conteniendo cada grupo, uno, dos, tres ó cuatro, iguales ó diferentes, ó de una misma especie, repartidos en diferentes grupos. O bien, que cada alumno tenga sobre su pupitre, en las proporciones de una hoja de libro, la estampa anterior. (1)

M. — ¿ Cuántas tajadas de melón hay en las tres láminas ? ¿ Cuántos duraznos ? ¿ Cuántos racimos de uvas ?

M. — ¿ En cuántas láminas está el melón . . . la manzana ?

(1) E. LAMADRID y A. FERREIRA, « Aritmética objetiva ». Bajo el nombre de *pasos*, el libro ofrece desarrollos de preciosas lecciones en la forma que dejamos indicada.



M. — Digimos en la clase del otro día, que uno más uno era....

A. — Dos.

M. — Que tres más cinco era....

A. — Ocho.

M. — ¿Qué número señalo? Clase.

A. — Ocho.

M. — ¿Y ahora?

A. — El número seis.... cinco.... cuatro.... dos.... nueve.

Medio. — Esta bien. Ahora, obsérvese.

El maestro presenta en un cartón, perfectamente dibujado, el signo + ó bien dos alambres ó maderitas cruzadas de la misma manera. Largo de cada línea, 15 ó 20 cms.

M. — ¿Qué representa esta figura?

A. — Una cruz.

M. — ¿Este objeto?

A. — Una cruz.

M. — ¿Este signo? (*trazándolo con cierto cuidado en la pizarra, de modo que el niño note bien la manera de hacerlo, trazando la vertical primero y la horizontal después*).

A. — Una cruz.

M. — ¿Y este signo? (*señalando uno hecho de antemano en la pizarra y de tal manera estético, que deje una imagen imborrable*).

A. — Una cruz.

M. — Este signo que aparenta la forma de una cruz, se llama *signo más*.

M. — ¿Cómo se llama este signo?

A. — *Signo más*.

M. — ¿Clase?

Todos. — *Signo más*.

M. — Tomen las pizarras. Tracen el *signo más*. Así: primero esta línea | (*trazándola en la pizarra; los alumnos imitan*) y luego, esta otra—.

Tracen otra vez el signo más..... Otra vez (*El maestro recorre las filas; si observa uno ó dos casos defectuosos, los corrige individualmente; si observa*

muchos, vuelve á la pizarra, pide atención, traza el signo defectuoso de los alumnos, v. g. $\times$, junto al signo $+$, los explica de modo que, por comparación inmediata, los alumnos puedan darse cuenta del error).

M. — Tracen nuevamente el signo $+$ otra vez. . . . guarden sus pizarras.

M. — (Hay en el pizarrón preparadas, expresiones como estas: $1 + 1$; $2 + 1$; $3 + 1$; $5 + 3$; $2 + 4$, etc. cuidadosamente hechas).

Ahora, nombren á medida que yo señalo (señalando cada número y cada signo). ⁽¹⁾

Todos. — Uno más uno . . . dos más uno . . . cinco más tres, más dos, más cuatro.

M. — Está bien. (Escribe rápidamente $4 + 6$) Lea, Juan, lo que acabo de escribir.

A. — Cuatro más seis.

M. — (Escribe $1 + 3 + 2$). Lea, María.

A. — Uno, más tres más dos.

M. — (Hace dos ó tres ejercicios más, como el anterior).

Fin. — Pasen al pizarrón Josefa, Ramón, Julio, Antonio, Rosa, Alda y Pedro (cuantos admita el pizarrón). Los demás, saquen sus pizarras. Escriban: $1 + 3$; $2 + 2$; $3 + 5$; $1 + 1 + 1$, etc.

Tomen asiento. ¿Cómo se llama el signo que hemos aprendido hoy?

Todos. — El signo más.

M. — Para mañana escriban en sus pizarras, tres expresiones como estas, con números y signos $+$.

LECCIÓN 24ª

Plan. — Asunto: expresiones de la forma $a + b = c$.

Principio. — 1º Preparación en pizarra, de cuatro ejercicios ilustrativos que conduzcan á la forma $a + b$.

(1) Inoficioso nos parece recordar, para quien haya leído las conclusiones del Exp. XIII, el tamaño de 10 á 15 cms. que debe darse á los números.

2° Reconocimiento y lectura, con sus denominaciones concretas, del primer miembro de la igualdad y del segundo. 3° Comparación en cantidad, de los dos miembros.

Medio.—1° La palabra igual y el signo que representa. 2° Reconocimiento del signo mediante ejercicios del caso. 3° Lectura de expresiones donde se encuentre el signo =. 4° Sinonimia de los términos *agregar, añadir, más*, etc. 5° Expresiones escritas que representen expresiones orales. 6° Substitución de las expresiones objetivas de la pizarra por las abstractas de la cifra. 7° Lectura de estas expresiones.

Fin.—1° Ejercicios acerca del reconocimiento del signo mediante preguntas simultáneas. 2° Lectura de igualdades, individual y simultáneamente. 3° Escritura de expresiones orales dictadas por el maestro.

Ilustraciones.—Las que indique el desarrollo.

Desarrollo. — *Principio.* — El maestro tendrá preparado en la pizarra, cuatro ó cinco ejercicios de esta clase :

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 \\ 1 + 2 + 2 &= 5 \\ 3 + 4 &= 7 \\ 1 + 3 + 3 + 2 &= 9 \end{aligned}$$

pero substituidas las cifras, por la representación de igual número de frutas ó cajitas ó lo que más puede llamar la atención de los niños y sea de dibujo fácil para el maestro ; ó bien, por rayas ó puntos, de modo que resulte:

$$\cdot + \cdot = \cdot \cdot$$

$$\cdot + \cdot + \cdot = \cdot \cdot \cdot \text{ etc.}$$

M. — ¿ Cuántas guindas tengo en esta mano ?

A. — Vd. tiene dos guindas.

M. — ¿ Y en esta otra ?

A. — Una guinda.

M. — Dos guindas más una guinda (*haciendo el ademán de juntarlas*) ¿ cuántas guindas son ?

A. — Tres guindas.

M. — ¿Quién observa en la pizarra, representadas, dos guindas más una guinda? Teresa.

A. — Aquí están representadas dos guindas más una guinda.

M. — ¿Y aquí qué está representado?

A. — Una guinda, más dos guindas, más dos guindas.

M. — ¿Y aquí...? ¿Y aquí?

Medio. — Y aquí cuántas guindas están representadas? (*señalando el 2º miembro*).

A. — Tres guindas.

M. — ¿Y entre estos dos montones? (*Primer miembro*).

A. — Tres guindas.

M. — La cantidad de guindas que hay de este lado y de éste ¿cómo es? (*indicando con precisión primero un miembro después el otro*).

A. — Igual.

M. — Precisamente; la palabra igual se representa por estas dos rayitas y se lee: dos guindas más una guinda *igual á* tres guindas.

M. — ¿Qué signo es este?

A. — Signo igual.

M. — ¿Igual á? Repita... ¿Este otro?

A. — Signo más.

M. — ¿Este otro?

A. — Signo *igual á*.

M. — La clase va á leer esta expresión (*la 2ª ó 3ª señalando parte por parte con el puntero*).

A. — Tres guindas más cuatro guindas *igual á* siete guindas.

M. — Lea esta otra expresión; Diego.

A. — Una guinda más tres guindas, etc.

M. — ¿Cuántas guindas hay en esta copa?

A. — Hay dos guindas.

M. — (*Echa una en la copa*) ¿Qué hice?

A. — Vd. echó una guinda á la copa.

M. — Otra manera de decirlo.

A. — Vd. agregó una guinda á las guindas de la copa...

Otro. — Vd. añadió una guinda á las guindas de la copa...

M. — ¿Y cuántas guindas hay, ahora, en la copa?

A. — Tres guindas.

M. — Qué expresión de la pizarra indica que si á dos guindas añado ó agrego una guinda resultan tres guindas?

A. — La expresión dos guindas más una guinda igual á tres guindas.

M. — El signo más, quiere decir también, añadir, agregar, aumentar, de modo que puedo leer esta expresión, así: *á tres guindas, agregando ó añadiendo cuatro guindas resultan siete guindas.*

¿Cómo podemos leer aquí?

A. — A una guinda, añadiendo dos guindas da tres guindas.

M. — Ahora, en vez de este montoncito de guindas ¿qué números podemos escribir?

A. — El número dos (*el maestro escribe debajo*).

M. — ¿En vez de este otro?... Y de este otro? (*Resulta una expresión colocada así:*

$$\begin{array}{r} \vdots \\ 2 \end{array} + \begin{array}{r} \vdots \\ 1 \end{array} = \begin{array}{r} \vdots \\ 3 \end{array}$$

M. — Léala, José.

A. — Dos más uno igual á tres.

M. — Y en esta expresión ¿qué números escribíamos? (*Los alumnos indicarán*).

Fin. — M. — ¿Qué significa este signo?

A. — Igual á.

M. — Lean todos esta expresión.

Todos. — Dos más tres, más uno, igual á seis.

M. — Esta otra.

A. — Cinco más uno, más uno, más dos, igual á nueve.

M. — Tres más seis, ¿igual á cuánto?

A. — A nueve.

M. — Escríbalo, Pedro. (*Escribe en el pizarrón*).

M. — ¿Qué significados tiene el signo +?

A. — Quiere decir aumentar... añadir... agregar.

M. — Hagan, todos, la suma que indique el contador rodante ; atentos, porque va á girar ligero.
Als. — Etc.

LECCIÓN 3ª (Abril)

Plan. — *Asunto.* — Ejercicios abstractos—escritos de suma y resta, con los números de 1 á 9.

Principio. — 1º Ejercicios en el pizarrón, acerca de la substitución de las representaciones por cifras y signos. 2º Dada una suma ó diferencia de dos ó más términos como primer miembro de una igualdad, determinar el segundo como resultado. 3º Consideración de los trabajos hechos por los alumnos en el pizarrón.

Medio. — Tablas. 1º Por la agregación sucesiva de la unidad : expresiones escritas en el pizarrón cuyo segundo miembro determinará el niño. 2º Por la agregación de dos unidades á cada número dígito hasta 7. 3º Por la substracción sucesiva de la unidad, desde nueve ; por la substracción de dos. 4º Escritura de expresiones dictadas por el maestro y cuya suma ó diferencia determinará el niño. 5º Lectura de los ejercicios escritos por el alumno.

Fin. — 1º Ejercicios mentales de numeración de 1 á 9 y vice-versa. 2º Distinguir números abstractos de mayor ó menor valor que otro dado. 3º Señalar como deber, para la clase próxima, el siguiente : escribir en la pizarra cinco expresiones de suma ó diferencia con su resultado.

Ilustraciones. — Ninguna.

Desarrollo. — En el pizarrón, el maestro habrá preparado anticipadamente varias expresiones, dos ó tres para cada alumno de los tres que irán, en esta forma :

$$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot + : - \cdot \cdot = \\ \cdot \cdot \cdot + \cdot \cdot + : = \text{etc.} \end{array}$$

pudiendo ser puntos, rayas ó representación de cosas.

M. — Pasen Diego, Raquel y Mario á la pizarra. Escriban debajo de cada expresión, los números correspondientes y el resultado.

Pasen al pizarrón María, Delia, Francisco y Juan; los demás, saquen las pizarras. Escriban $3 + 6 = \dots$ escriban el resultado :

$$3 + 2 + 1 = \dots\dots\dots 6 - 3 = \dots\dots$$

M. — ¿Seis menos tres es cuánto, Delia? Fíjese: ¿Seis varillas menos tres varillas, cuántas quedan?

A. — Tres varillas.

M. — Por consiguiente, $6 - 3$ ¿cuánto es?

A. — Tres.

M. — Observe la clase, el trabajo de Diego, Raquel y Mario.

A. — Raquel ha escrito mal.

M. — ¿Qué ha escrito mal?

A. — Siete puntos menos tres puntos es igual á cuatro puntos.

M. — Eso es. Tomen asiento.... guarden las pizarras. Observen ahora, lo que hay escrito aquí. Un niño de esta fila lee, otro da el resultado y yo escribo. *El maestro ha preparado estos ejercicios:*

$1 + 1 =$	$1 + 2 =$	$9 - 1 =$	$9 - 2 =$
$2 + 1 =$	$2 + 2 =$	$8 - 1 =$	$8 - 2 =$
$3 + 1 =$	$3 + 2 =$	$7 - 1 =$	$7 - 2 =$
$4 + 1 =$	$4 + 2 =$	$6 - 1 =$	$6 - 2 =$
$5 + 1 =$	$5 + 2 =$	$5 - 1 =$	$5 - 2 =$
$6 + 1 =$	$6 + 2 =$	$4 - 1 =$	$4 - 2 =$
$7 + 1 =$	$7 + 2 =$	$3 - 1 =$	$3 - 2 =$
$8 + 1 =$	$8 + 2 =$	$2 - 1 =$	$2 - 2 =$

(*Después, el maestro hace leer en coro ó individualmente, los números dígitos de una columna de 1 á 9 y de 9 á 1*).

M. — Ahora saquen sus pizarras y escriban :

$$\begin{array}{l} 3 + 1 = \text{¿ cuánto ? ; } 3 + 4 = \text{¿ cuánto ?} \\ 2 + 3 = \text{¿ cuánto ? ; } 5 + 3 = \text{¿ cuánto ?} \\ 6 - 2 = \text{¿ cuánto ? etc.} \end{array}$$

Lea, José, lo que ha escrito Vd. . . .

A. — (*Lee tres ejercicios con sus resultados*).

M. — Siga, María. . . .

A. — (*Lee otros tres*).

Fin. — M. — (*Habrá borrado las tablas escritas anteriormente en el pizarrón*). Nombre los números de uno á 9.

A. — Uno, dos, tres, etc.

M. — ¿ Cuánto es $2 + 3 + 3$?

A. — Es ocho.

M. — ¿ Cuánto es $8 - 5$?

A. — Es tres.

M. — ¿ Ocho menos dos y menos tres ?

A. — Tres.

M. — ¿ Antes del 9 qué número hay ?

A. — El número 8.

M. — Piensen un número más grande que 4.

A. — El número 6.

M. — Otro. . . .

A. — El número 9.

M. — Piensen un número menor que siete.

A. — Dos. M. — Otro. A. — Seis.

M. — Otro que no se haya dicho.

A. — Cinco. M. — Otro. A. — Uno.

M. — Nombren, todos, los números de 9 hasta 1.

Todos. — Nueve, ocho, siete, seis, etc.

M. — Mañana traen en sus pizarras, escritas, cinco expresiones con números, con el signo más, con el signo igual á, y con el resultado.

INDICACIONES

Pueden hallarse buenos ejercicios de fijación en *El Monitor de la Educación Común*, Buenos Aires, N° 358; en *La Nueva Escuela*, págs. 264, 283, 307, 338, 355, 382, 440 época I; págs. 45, 145, 239 época II. La señorita EDITH W. HOWE publica en 23 lecciones, una buena cantidad de ejercicios y problemas mentales para 1°, 2° y 3° grado (700) sin otro

inconveniente que de seguir una distribución seriada, según las operaciones y no recapitulatoria, de acuerdo con las aptitudes del grado en determinada época, de modo que junto á enunciados para el mes de Abril hay enunciados para el mes de Septiembre; que corresponden á 1º, otros que corresponden á 2º.

Como ejercicios de variedad para el principio de las lecciones, véase pág. 167 de *La Nueva Escuela* por YOLE A. ZOLEZZI DE BERMÚDEZ.

LECCIÓN 4ª

Plan.—Ejercicios abstractos y concretos de suma y resta con los números de 1 á 9.

A. — 1º Examen de deberes mediante la lectura que hagan de ellos tres alumnos y una vista rápida á las pizarras. 2º Reconocimiento analítico de una lámina. 3º Problemitas de suma y resta en forma de conversación, combinando, al efecto, los elementos de la lámina.

B. — 1º Ejercicios abstractos de suma y resta por el procedimiento de la reposición de términos en cantidades incompletas. 2º Ejercicios concretos de la misma especie sin hacer uso de la pizarra, que impliquen un determinado esfuerzo de imaginación.

C. — 1º Problemas inventados, enunciados y resueltos por el alumno. 2º Para la lección siguiente cada alumno trae el enunciado de un problema capaz de resolverlo.

Desarrollo. — **A.** — **M.** — Saquen sus pizarras (*hace leer á tres ó cuatro niños las expresiones pedidas en la clase anterior y mira rápidamente las demás*).

M. — Guarden sus pizarras. Presten atención. ¿Qué ven Vds. en esta lámina?

A. — Esa lámina representa un zorro, dos patos fuera del agua y tres nadando.

M. — ¿Qué más, Josefa?

A. — Tres golondrinas sobre el alambre y otras tres volando ; una gallina y cinco pollitos.

M. — Si el zorro se comiera cuatro pollitos ¿cuántos quedarían?

A. — Un pollito.

M. — Y si en la lámina hubiesen ocho pollitos más sin contar los que el zorro comiera ¿cuántos pollitos habrían?

A. — Nueve pollitos.

M. — Si se zambulleran dos patos ¿cuántos quedarían á la vista?

A. — Á la vista quedarían tres patos.

M. — Las golondrinas que vuelan, se posan, luego, en el alambre ¿cuántas golondrinas habría en el alambre?

A. — Seis golondrinas.

M. — Y un tirador mata seis ¿cuántas quedarán?

A. — Ninguna.

B. — (*El maestro ha preparado en la pizarra estos ejercicios :*

$$5 - = 2 ; 1 + = 8 ; 3 + 1 + = 8 ;$$

$$8 - = 1 ; + 6 = 9 ; - 3 = 2$$

M. — ¿Cinco menos cuánto, es igual á 2? (*señalando con el puntero*).

A. — Menos tres.

M. — ¿Dónde colocaremos el tres?

A. — Entre el signo menos y el signo igual.

M. — ¿Uno más cuánto, es ocho?

A. — Más siete.

M. — ¿Dónde colocaremos el número siete? etc. (*hasta recorrer todos los ejercicios*).

M. — De un corral sacamos cinco ovejas y quedaron tres ¿cuántas eran las ovejas?

A. — Las ovejas eran ocho.

M. — Una persona compró dos vacas, un buey, tres ovejas y dos cabras ¿cuántos animales compró?

A. — Ocho animales.

M. — Vendió las ovejas y las cabras ¿cuántos le quedaron?

A. — Le quedaron tres animales.

M. — Si á un número le quitamos dos queda seis ¿cuál es el número?

A. — El número es 8.

M. — A otro, si le añadimos cinco nos da siete ¿cuál es?

A. — Es dos.

M. — Y á otro, si le añadimos ocho nos da nada....

A. — Es ocho.

C. — **M.** — Cada uno de Vds. piense un problemita para que lo resuelvan sus compañeros.

¿Pedro?

A. — (*Enuncia el problemita, y el maestro pide el resultado á otro alumno. Pregunta á cuatro ó cinco más.*)

M. — Si quitamos á los días de la semana el Jueves y Domingo ¿cuántos quedan?

A. — Cinco días.

M. — Mañana traen, todos, pensado un problemita de compras que hayan hecho en la casa de Vds., en la tienda ó en el almacén.

LECCIÓN 5ª

Plan. — En adelante, daremos el *plan*, sólo de aquellas lecciones que lo exijan de forma diferente; del *desarrollo* es fácil inducir las cinco partes: *proposición, principio, medio, fin é ilustraciones.*

Tema. — Plantear y escribir en números los términos de un problema y viceversa.

Desarrollo. — *Principio.* — *En la pizarra están escritas expresiones como estas:*

$$5 + 3 = ? \quad 2 + 3 + 1 = ? \quad 8 - 5 = ?$$

$$8 - 3 + 4 = ? \quad 6 - ? = 1$$

M. — (*Cálculo mental*). Tres, más dos, más uno ¿á cuánto es igual?

A. — Es igual á seis.

M. — ¿Ocho menos cinco?

A. — Tres.

M. — ¿Seis, más uno, menos tres?

A. — Cuatro.

M. — Lea, María, esta expresión

A. — Cinco, más tres igual á

M. — ¿Cuánto? José.

A. — Ocho.

M. — Lea la siguiente, Julio.

A. — Ocho, menos tres, más cuatro igual á

M. — ¿Cuánto? Cecilia.

A. — Nueve.

Medio. — M. — Ahora, con los números y signos de esta expresión (*señalando* $2 + 3 + 1 =$) vamos á enunciar un problemita.

Eran tres hermanitos: el primero comió dos duraznos, el segundo tres y el tercero uno ¿cuántos duraznos (*el maestro, con el puntero indica, simultáneamente, los números 2, 3 y 1*)?

A. — Comieron seis duraznos.

M. — ¿Dónde colocaremos el número seis?

A. — Después del signo *igual á*.

M. — Con los mismos números y signos vamos á combinar otro problema. Una niña cortó, de las plantas de un jardín, una rosa, dos claveles y tres jazmines ¿cuántas flores cortó?

A. — Cortó seis flores.

M. — Ahora, con la expresión siguiente ($8 - 5$) vamos á combinar un problema. En un corral había ocho caballos, y se escaparon cinco ¿cuántos quedaron?

A. — Quedaron tres caballos.

M. — Ocho menos cinco ¿cuánto es?

A. — Tres.

M. — Que escribiremos ¿dónde?

A. — Después del signo *igual á*

M. — Juan tiene ocho años y la hermanita 5 ¿cuántos años tiene el uno más que la otra?

A. — Tres años.

M. — Piense cada uno, un problemita con los números y signos de la misma expresión.

A. — En un corral había ocho ovejas, tres dispararon ¿cuántas quedaron?

M. — Otro que no sea de corral.

A. — Un niño tenía ocho monedas, perdió cinco, ¿cuántas monedas le quedaron?

A. — María llevaba una bandeja con ocho copas; al tropezar en un cajón se cae; al levantarse nota cinco copas sanas ¿cuántas se rompieron?

M. — Muy bien. Piensen problemas con esta otra expresión.

A. — Un jardinero plantó ocho pinos, primero; luego cuatro; los calores del verano secaron tres ¿cuántos pinos vivieron?

A. — Yo compré ocho lápices; se me rompieron tres y me regalaron cuatro ¿cuántos lápices tengo?

M. — ¿Cuántos?

A. — Nueve lápices.

M. — Voy á leer un problema escrito en este librito, y luego escribiremos en el pizarrón la expresión correspondiente. Atiendan.

M. — (*Leyendo*). Tres cabritos pacen cerca de una casa; dos de ellos entraron á la casa ¿cuántos quedaron fuera? Tres cabritos pacen cerca de una casa; dos entraron á la casa ¿cuántos quedaron fuera? (*El maestro escribe la segunda vez, los números 3 y 2*).

M. — ¿Cuántos quedaron fuera?

A. — Un cabrito.

M. — Para obtener uno ¿qué operación hemos hecho?

A. — Restar dos de tres.

M. — Qué se indica escribiendo primero

A. — El tres.

M. — Después A. — El signo menos. M. — Después

A. — El dos. M. — Después A. — El signo igual á.

M. — Después A. — El número uno. (*El maestro escribe en números y signos grandes*).

M. — Lea toda la expresión, Pedro.

A. — Cuatro menos tres igual á uno.

M. — Reproduzca el problema con esta expresión.

A. — Tres cabritos pacen.....etc.

M. — (*Leyendo*). Un guantero tiene que componer cinco guantes; entrega un par hoy ¿cuántos tiene que entregar todavía? ¿Qué expresión escribiremos en la pizarra?

A. — Cinco menos dos igual á tres. (*El maestro escribe*).

M. — (*Lee tres ó cuatro problemas más, de suma, de resta ó combinación, escribiendo en la pizarra las expresiones que el niño dicte*).

Fin. — M. — Pasen al pizarrón (*Pasan cuantos niños quepan*). Voy á dar un problema (*sin leer*) y Vds. escriben la expresión.

M. — Tres naranjas más cinco naranjas ¿cuántas naranjas son? — Un padre tiene tres hijos; al 1º da tres monedas, al segundo dos, y al tercero una ¿cuántas monedas ha repartido? — Un zapatero tiene cinco botas para componer y concluye una ¿cuántas botas le faltan para componer? — Vuelvan á sus asientos; pasen (otros seis ó siete con los que repite ejercicios semejantes, procurando enunciarlos de estructura cada vez menos explícita y sobre motivos diferentes); así: *un médico tiene cinco enfermos, da de alta á cuatro ¿cuántos quedan en asistencia?*, no obstante el mismo resultado, exige menos esfuerzo de comprensión que: *Lorenzo tenía un dedo enfermo en una mano, después se le enfermaron tres dedos más ¿cuántos dedos enfermos y cuántos sanos tiene en la misma mano?* (Volvemos á recomendar, para los maestros de imaginación tardía, las colecciones de *El cálculo infantil* de LAMADRID Y FERREIRA).

LECCIÓN 7ª

Tema : Substitución de la palabra *veces*.

Desarrollo.—*Principio.* *M.* — Cuento, Juan, y sume.

A.—Un lápiz más un lápiz, dos lápices ; más un lápiz, tres lápices ; etc., hasta nueve.

M.—¿Cuántas veces un lápiz tengo en esta mano?

A.—Nueve veces un lápiz.

M.—(*Quita tres lápices*) ¿Cuántas veces un lápiz he quitado?

A.—Tres veces un lápiz.

M.—¿Cuántas veces un lápiz queda?

A.—Seis veces un lápiz.

M.—¿Cuántas veces un lápiz tengo ahora?

A.—Cuatro veces un lápiz.

M.—¿Y ahora?

A.—Una vez un lápiz.

M.—¿Cuántas veces un cuaderno tengo?

A.—Cuatro veces un cuaderno.

M.—¿Cuántas veces una pizarra hay en el aula?

A.—Dos veces una pizarra.

M.—¿Cuántas veces una puerta?

A.—Tres veces una puerta.

M.—¿Cuántas veces una plaza hay en el pueblo?

A.—Tres veces una plaza.

M.—En cuatro lápices (*sin mostrarlos*) ¿cuántas veces un lápiz hay?

A.—Cuatro veces un lápiz.

M.—Seis veces una gallina ¿cuántas gallinas son?

A.—Seis gallinas.

M.—Y seis veces uno ¿cuánto es?

A.—Seis.

M.—¿Ocho, cuántas veces uno es?

A.—Ocho veces uno.

M.—(*Percute una botella con agua dando dos golpes por vez ó tres, sin que el niño perciba el objeto: . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . .*) ¿cuántas veces he producido tres sonidos por vez?

A.—Tres veces.

Medio. — **M.** — Lea, Juan, esta expresión escrita en la pizarra.

A. — $1 + 1 + 1 + 1 + 1 =$

M. — ¿A cuánto?

A. — A cinco.

M. — ¿Cuántas veces uno hemos escrito?

A. — Cinco veces uno que es igual á cinco.

M. — Y aquí ¿cuántas veces uno? (*están desordenadamente escritos seis unos* $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$)

A. — Seis veces uno.

M. — ¿Cuántas veces 2 se ha escrito en la pizarra?... ¿Cuántas veces 4?... ¿Cuántas veces 7?...

M. — Levanten cuatro veces dos dedos de la mano... Dos veces dos manos... dos veces una mano... tres veces tres dedos... tres veces cinco dedos... siete veces siete dedos. Está bien.

Pasen á la mesa (*cinco alumnos*).

M. — Tomen cuatro hojas... tomen cuatro veces una hoja... tomen cuatro veces dos bolitas... ¿cuántas son, clase?

Todos. — Ocho bolitas.

M. — Tomen una vez tres lápices... tres veces cuatro cubitos. Vuelvan á sus asientos.

M. — En estas ocho figuritas ¿cuántas veces una figurita hay?

A. — Ocho veces una figurita.

M. — ¿Cuántas veces dos figuritas? (*separándolas de á dos*).

A. — Cuatro veces dos figuritas.

M. — ¿Cuántas veces cuatro figuritas?

A. — Dos veces cuatro figuritas.

M. — (*Pasan al frente cinco alumnos, se da un marco contador á cada uno; si no los hay, una varilla con cuentas, ó botones, ó anillos, cualquier aparatito con objetos iguales ó movibles. El más apropiado es el de varillas en abanico con mango, que se mueve alrededor de un eje dentado; que pueden juntarse ó dividirse en los grupos que se desee*).

M. — Separen tres veces dos varillas..., cuatro veces

tres varillas... una vez cinco varillas..., dos veces seis varillas. Vuelvan á sus asientos.

Fin. — (Pasan siete alumnos á la pizarra).

M.—Escriban tres veces siete; cuatro veces 2; dos veces 1; cinco veces 5, etc. Cinco veces un punto; dos veces dos puntos; cuatro veces una raya; tres veces tres rayas. *(El maestro, á cada nuevo ejercicio, hace borrar; á los efectos de la economía del tiempo, cada alumno acostumbra, no bien llegue á la pizarra, á tomar tiza y borrador).* Vuelvan á sus asientos.

En la parte superior del pizarrón están escritas con claridad, expresiones como estas:

- a) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$.
- b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3$.
- c) $4 + 4 + 4$.
- d) $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$.
- e) $5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4$.
- f) $3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + 2$.

M.—Lea esta expresión, *(la va indicando con el puntero)*.

A.—Cinco, más cinco, etc.

M.—¿Cómo son todos los números?

A.—Iguales.

M.—¿Cuántas veces está repetido el número 5?

A.—Seis veces.

Hace reconocer del mismo modo las demás expresiones.

M.—¿Cuántos números diferentes hay en esta expresión?

A.—Hay dos clases de números diferentes: tres y dos.

M.—¿Cuántos 3 y cuántos 2?

A.—Tres 3 y cuatro 2.

M.—¿Cuántas veces 3 y cuántas veces 2?, etc.

M.—Saquen las pizarras. Escriban, todos: nueve veces 8; una expresión como esta *(señalando la del pizarrón)* que contenga tres veces 4 y cinco veces 6.

El maestro examina, recorriendo las filas, el trabajo de sus alumnos.

M.—Guarden las pizarras.

LECCIÓN 10ª

Tema : Enseñanza del 0.

Desarrollo.—*Principio : (Interrogatorio rápido).*

M.—¿Cuántos lápices tengo en esta mano?

A.—Vd. tiene cinco lápices.

M.—Quito dos ¿cuántos quedan?

A.—Quedan tres lápices.

M.—¿Y ahora? (*quitando uno*).

A.—Quedan dos lápices.

M.—¿Y ahora? (*quitando dos*).

A.—Queda nada.

M.—¿Cuántas bolitas hay en esta copa?

A.—En esa copa hay siete bolitas.

M.—Si quitamos las siete ¿cuántas quedan? (*quitándolas*).

A.—Queda ninguna bolita.

M.—Cuenten las rayas escritas en este lugar del pizarrón.

A.—Hay siete rayas escritas.

M.—¿Cuántas he borrado? (*borrándolas*).

A.—Vd. ha borrado siete rayas.

M.—¿Cuántas quedan?

A.—Queda ninguna.

M.—Un peral tenía ocho ramas; cinco las cortó el jardinero y tres las rompió el viento. ¿Con cuántas ramas quedó la planta?

A.—Con ninguna.

M.—¿Cuántas monedas tendré que quitar de seis monedas para que quede ninguna?

A.—Seis monedas.

M.—¿Cuántos cuadernos debemos disminuir de ocho cuadernos para que quede nada?

A.—Ocho cuadernos.

M.—(*En el pizarrón, preparado* $\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}$ — $\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}$ = $\text{IIII} - \text{IIII} =$). ¿Cuántos puntos hay en el grupo que señalo?

A.—Hay seis puntos.

M.—¿En este otro grupo?

A.—Hay seis puntos.

M.—Lea un alumno esta expresión.

A.—Seis puntos menos seis puntos igual á . . .

M.—¿A cuánto?

Todos.—A nada.

M.—Esta otra. . .

A.—Cinco rayas menos cinco rayas igual á . . . á nada.

M.—¿Qué número tenemos que quitar de ocho para que quede nada?

A.—El número ocho.

M.—¿Qué número tenemos que restar de tres para que quede nada?... de cinco..., de nueve..., de uno...

M.—¿Cuánto da seis menos seis?

A.—Nada.

M.—¿Qué señalo?

A.— $6 - 6 =$. M.—¿Y ahora? A.— $7 - 7 =$. M.—¿Y ahora? A.— $9 - 9 =$.

M.—¿Y cuánto da $6 - 6, 7 - 7, 9 - 9$?

A.—Nada.

Medio.—M.—Está bien. Nada, se representa por un redondelito (*trazándolo*) que se llama *cero*.

M.—¿Cómo se llama este redondel?

Todos.—Cero.

M.—¿Qué significa cero?

A.—Significa nada.

M.—Lea otra vez esta expresión, Pedro.

A.— $7 - 7 =$.

M.—¿A cuánto?

A.—A nada. . .

M.—¿O también?

A.—A cero.

M.—¿Qué escribiremos al lado del signo igual?

A.—El redondelito. . .

M.—Que se llama. . .

A.—Cero (*escribe el cero*).

M.—Lea esta expresión, Josefa.

A.— $8 - 8 =$.

M.—¿Qué cifra pondremos?

A.—Cero.

M.—Lea esta otra, Victoria.

A.—Cinco rayas menos cinco rayas igual á...

M.—¿A cuántas rayas?

A.—Ninguna.

M.—¿Qué escribiremos al lado del signo =?

A.—Cero (*lo escribe*).

M.—Saquen las pizarras y escriban todos:

$3-3=$ ¿cuánto? *Als.*—cero.

M.— $5+2-3=$ ¿cuánto? *Als.*—cuatro.

M.— $6+2-2=$ ¿cuánto? *Als.*—seis.

M.—Escriban tres veces la cifra cero. *El maestro recorre rápidamente las filas.*

M.—Guarden las pizarras.

¿Cuando de una cantidad se quita otra y queda nada, por qué se representa el resultado?

A.—Por la cifra cero.

M.—Cómo es el cero?

A.—Un redondelito.

Fin.—M.—Piensen todos un problema que dé por resultado cero (*pregunta á cuatro ó cinco*).

M.—(*Pasan al pizarrón seis ó siete niños*).

En un tarro había siete litros de leche; se vendieron luego, los siete litros ¿cuántos quedaron? Escriban todos la expresión que indica el problema.

M.—Escriban: $9-5+2=...$ Escriban el resultado $8-3-5=...$ $1+5+3-2=...$ etc. Vuelvan á sus asientos.

M.—¿Qué números señalo? Todos.

Todos.—Cinco, cuatro, cero, cero, uno; el signo más, el signo igual á; nueve.

LECCIÓN 12ª

Tema.—Enseñanza del número 10.

Desarrollo.—*Principio.*—M.—¿Cuántas veces una bolita tengo en la mano?

A.—Vd. tiene cinco veces una bolita.

M.—¿Y ahora?

A. — Tres veces una bolita.

M. — ¿Cuántas veces un lápiz tengo en la mano?

A. — Vd. tiene ocho veces un lápiz.

M. — ¿Y cuántos unos hay en ocho?

A. — En ocho hay ocho unos.

M. — Cuente, Petrona (*tomando el abaco*). A. — Una.

M. — ¿Y una más? A. — Dos. M. — ¿Y una más? A. — Tres (*hasta nueve*).

M. — ¿Cuántos unos hay en nueve?

A. — En nueve hay nueve unos.

M. — Voy á escribir nueve unos; lea Julio (*El maestro escribe $1 + 1 + 1$ etc., y el niño lee: uno, más uno, más uno, etc.*).

M. — ¿Quién ha contado los unos que he escrito?

A. — Vd. ha escrito nueve unos.

M. — Que sumados dan. . .

A. — Nueve (*escribe nueve*).

M. — Y si agregásemos un uno ¿cuántos unos serían? . . . (*los niños trepidan*).

Medio. — M. — Y si agregásemos un uno á estos nueve unos tendríamos diez unos.

M. — ¿Cuántos *unos* hay en diez?

A. — Hay diez unos.

M. — Si á estas bolitas. . . ¿cuántas son?

A. — Nueve.

M. — Agregamos esta bolita ¿cuántas bolitas tengo?

Todos. — Vd. tiene diez bolitas.

M. — Cuente, María (*haciendo pasar un montón de cuadernos*).

A. — Uno, dos, tres, cuatro. . . nueve, diez.

M. — Nueve más uno, ¿cuánto es?

A. — Diez.

M. — José, escriba $9 + 1$. ¿Cuántas figuritas hay aquí? (*En el pizarrón*).

A. — Hay siete figuritas.

M. — Y en este otro grupo.

A. — Tres figuritas.

M. — ¿Cuántas figuritas son siete más tres?

A. — Diez figuritas.

M. — Y siete más tres ¿cuánto es?

- A. — Diez.
- M. — Escriba, Antonia, $7 + 3$ debajo del $9 + 1$.
- M. — Levanten todos la mano derecha, abierta; ¿cuántos dedos tienen?
- A. — Cinco dedos.
- M. — Levanten la otra, ¿cuántos dedos tienen?
- A. — Cinco dedos.
- M. — Cuenten ahora los dedos de las dos manos, ¿cuántos dedos tienen?
- A. — Diez dedos.
- M. — (*Mostrando las manos y acompañando la acción a la palabra*). Entonces, cinco dedos más cinco dedos, ¿cuántos dedos son?
- A. — Diez dedos.
- M. — ¿Y cinco más cinco?
- A. — Diez.
- M. — Escriba cinco más cinco (*un alumno escribe $5 + 5$ debajo de $7 + 3$*).
- M. — Y cuatro más seis ¿Cuánto será? (*acompaña la pregunta mostrando un grupo de cuatro cuentas con un grupo de seis*).
- A. — Igual á diez.
- M. — Cuenten las bolitas que hay sobre esta mesa.
- A. — Diez bolitas.
- M. — (*Las divide en tres grupos*) ¿Cuántas bolitas hay en los tres grupos?
- A. — Hay diez bolitas.
- M. — ¿Cuántas en este grupo? A. — Tres. M. — ¿En éste? A. — Cinco. M. — ¿En éste? A. — Dos. M. — Tres, más cinco, más dos bolitas ¿cuántas bolitas son?
- A. — Diez bolitas.
- M. — Escriba en números y signos, tres bolitas, más cinco bolitas, más dos bolitas, Eke.
- A. — (*Escribe $2 + 5 + 3$*).

M. — Junta los montoncitos en uno y hace rápidamente la división en tres, dos, uno y cuatro; el niño preguntado, dice: tres bolitas, más dos bolitas, más una bolita, más cuatro bolitas son diez bolitas; Eke traduce la expresión en números y signos. Repite la descomposición varias veces, de modo que resultan iguales á diez, variadas sumas de números dígitos.

Fin.— Sobre la mesa coloca rápidamente, en montones separados, lo siguiente : diez cubitos, diez argollitas, diez higos, diez unos de colores diferentes, diez cintas de colores diferentes ; pasan cinco niños.

M.— María, divida los cubitos en tres montones ; Juan, las diez argollitas en dos montones ; Julio, los diez unos en tantas pilas como colores, etc. . . pronto.
¿ Cuántos tiene cada montón, Juan ?

A.— Ocho argollitas y dos argollitas.

M.— ¿ Cuántas son ocho argollitas y dos argollitas ?

Clase.— Diez argollitas.

M.— ¿ Cuántos montones ha hecho Julio ?

A.— Cuatro montones.

M.— ¿ Cuántos unos hay de color rojo ?

A.— Hay tres unos de color rojo, dos de color azul, tres de color blanco y dos de color amarillo.

M.— En cuántos montones de cuántos unos podemos descomponer los diez unos ? Emilio.

A.— En cuatro montones : el 1° de tres unos, etc.

M.— Diga, Santiago (*tomando uno á uno los montones y agregándolos sucesivamente*).

A.— Tres unos más dos unos, son cinco unos ; más tres unos son ocho unos ; más dos unos, son diez unos.

M.— ¿ Qué ha hecho Vd. María ?

A.— He dividido los diez cubitos en tres montones ; el 1° tiene seis cubitos ; el 2° dos cubitos y el 3° dos cubitos.

M.— Seis cubitos y dos cubitos son . . . (*agregando los montones como en el caso anterior*).

Todos.— Ocho cubitos.

M.— Ocho cubitos y dos cubitos ?

Todos.— Diez cubitos.

M.— Tomen asiento. Pasen al pizarrón Antonio, Alda, Mario y Josefina. Tracen diez rayas y diez puntos cada uno. Los demás atienden.

¿ Cuántas cuentas faltan á esta sarta para que sean diez ?

A.— Cuatro.

M.— ¿ Para que sean ocho ?

A.— Dos.

M.— ¿Cuántos cubitos tenemos que quitar de este montón para que queden diez ?

A.— Tres cubitos.

M.— Cuenta, Josefina, las rayitas que ha trazado.

A.— Una, dos, tres, etc... (*señalando con el puntero que el maestro le da*).

M.— Cuenta, Alda, los puntos. (*Los cuatro cuentan*).

Para mañana traen dibujado en la pizarra, una figura donde se puedan contar diez cosas, en uno, dos, tres ó más grupos. Diez soldaditos ; ó un carrito tirado por cuatro caballitos cerca de seis caballitos sueltos ; ó dos ovejas y un pastor, donde puedan contarse las piernas ; ó una casita con ventanas que tengan diez vidrios ; ó un limonero con limones ; ó diez niños jugando al rescate ; ó platitos con frutas ó tantas cosas que pueden Vds. dibujar.

LECCIÓN 13ª

Tema.—Enseñar el significado de las palabras decena y unidades en números de dos cifras. ⁽¹⁾

Desarrollo. — *Principio.* — M. — Coloquen las pizarras sobre el pupitre. ¿Qué hizo Juana?

A.—Yo dibujé diez ovejitas comiendo pasto.

M.—¿Y Vd. Víctor?

A.—Yo dibujé una casita con seis plantitas á un lado y cuatro del otro ; de cada planta sale un pajarito ; hay diez pajaritos ; después escribí tres unos, cuatro unos y tres unos.

M.—Muy bien, Víctor. (*Pregunta á cuatro ó cinco*

(1) Sin que por su forma y amplitud sea una serie de lecciones, lógicamente adaptada á un programa, á la edad y al tiempo de asimilación, *L'Arithmétique du grand Papa*, de JEAN MACÉ, suministra preciosas instrucciones tocante á procedimientos que un maestro ingenioso aprovechará con éxito, haciendo caso omiso de la exposición en forma de anécdotas, que si resulta interesante, alarga la enseñanza é impide repetir, mediante ejercicios variados, para consolidar los conocimientos.

alumnos más, usando el contador rodante). Cada vez que ven Vds. pasar un número conocido, lo nombran.

Als.—3, 8, 6, etc.

Medio.— El maestro ha preparado en la pizarra, cinco ó seis dibujos, cada uno de dos grupos de figuritas : á la derecha el de uno, dos, cinco, siete bolitas



á la izquierda el de una, tres, seis, ocho bolsitas ó cajitas de modo que las primeras ocupan el lugar de las unidades ; las segundas, el de las decenas.



Creemos oportuno recomendar el mayor tino en dibujar las figuras de modo que resulten, por la perfección, interesantes.

En vez de bolitas pueden usarse anillos, granos, clavos, etc.

M.— ¿Ayer contamos hasta cuánto?

A.—Hasta diez.

M.—En diez había ¿cuántos *unos*?

A.—Había diez unos.

M.—En diez bolitas ¿cuántas veces una bolita?

A.—Diez veces una bolita.

M.—Diez veces una cosa ó diez cosas juntas se llama *una decena*. Repita la clase....

Todos.—Una decena.

M.—Aquí tengo diez anillos que juntos hacen, ¿María?

A.—Una decena de anillos.

M.—Estos son diez dedos que juntos hacen ¿Mario?

A.—Una decena de dedos.

M.—Allí hay diez perchas que juntas hacen...

A.—Una decena de perchas.

M.—Una decena de naranjas ¿cuántas naranjas son?

A.—Diez naranjas.

M.—Está bien. Cuente, José, las bolitas (*el maestro echa hasta diez en una copa*). ¿Cuántas son?

A.—Diez bolitas ó una decena de bolitas.

M.—Estas diez bolitas las echo en ésta bolsita; la ato (*bolsita de jareta corrediza*) y tendré entonces una decena; en adelante cada bolsita será una decena; aquí tengo otras bolsitas con diez bolitas dentro, cada una; se llaman, de consiguiente.....

A.—Decenas.

M.—Vaya contándolas, Santiago.....

A.—Una bolsita.....

M.—¿Cómo?

A.—Una decena; dos decenas; tres decenas; etc.

M.—¿Y cuántas bolsitas son, siete decenas? (*enseñando las siete bolsitas*).

A.—Son siete veces diez bolitas.

M.—Muy bien; ¿y cuatro?.... ¿y tres?.... ¿y nueve?

M.—¿Quién ve, en la pizarra, dibujada una bolsita ó sea una decena?

A.—Aquí está representada una decena.

M.—¿Y aquí? (*señalando*).

A.—Tres decenas.

M.—¿Y aquí?

A.—Ocho decenas.

M.—Cada una de estas decenas ¿cuántas bolitas contiene?

A.—Diez bolitas.

M.—¿Y esta cantidad de decenas?

A.—Ocho veces diez bolitas.

M.—Y aquí ¿qué está representado?

A.—Una bolita...., dos bolitas...., siete bolitas.

M.—¿Qué es más, (*señalando*) una decena ó una bolita?

A.—Una decena porque son diez bolitas.

M.—¿Una decena de unos ó un uno?

A.—Una decena de unos.

M.—Una decena ó un uno?

A.—Una decena.

M.—Los hombres antiguos, para acordarse de las

decenas, dibujaban bolsitas; para acordarse de los unos, dibujaban las cosas mismas; de modo que aquí diría....

A.—Ocho decenas y siete bolitas.

M.—Muy bien; si en vez de bolitas hubiésemos dibujado ovejitas, diría....

A.—Ocho decenas y siete ovejitas.

M.—Muy bien; ¿y aquí?

A.—Una decena y una bolita.

M.—Pero se perdía mucho tiempo en dibujar tantas bolsitas y tantas cajas; además, no todos somos hábiles para dibujar una pera, un caballito, una casita; necesitaríamos mucha pizarra ó mucho papel para escribir siete decenas y seis cosas; nueve decenas y cinco cosas; tres decenas y cuatro cosas. Entonces.... ¿cómo recordábamos siete ventanas sin dibujarlas?

A.—Escribiendo el número 7.

M.—Pues, las decenas también se representan por números. Aquí, donde están representadas ocho bolsitas ó decenas, escribimos 8 (*escribe debajo de la figura el número 8*); aquí, donde están representadas seis bolsitas ó decenas escribiremos ¿qué número?

A.—El número 6.

M.—¿Y aquí?

A.—El número 3.

M.—¿Y aquí?

A.—El número 1.

M.—¿Y aquí donde están representadas dos bolitas?

A.—El número 2.

M.—¿Y aquí? A.—El número 5, etc. (*El maestro escribe las cifras, de modo que aparecen en el pizarrón los siguientes números: 11, 32, 65, 87, correspondiéndose con las figuras y formando columnas verticales*).

M.—¿Qué cifras indican decenas?

A.—Uno, tres, seis, ocho.

M.—¿Qué cifras indican unos ó unidades?

A.—Uno, dos, cinco y siete.

M.—¿Cuántas cifras tiene cada número?

A.—Dos cifras.

M.—¿Una es?

A.—De decenas y otra de unidades.

M.—¿A qué lado están las cifras de las unidades?

A.—A este lado.

M.—¿Qué mano es esta?

A.—La mano derecha.

M.—¿A qué lado están, entonces, las cifras de las unidades?

A.—A la derecha, y la de las decenas á la izquierda.

M.—¿Pero cuántas cifras tiene cada número?

A.—Dos cifras.

M.—En todo número de dos cifras ¿á qué lado están las decenas?... ¿las unidades?

Fin. — *M.* — Contesten todos cuántas cifras tiene el número que señale....

Todos. — Dos; dos; una; tres; dos; dos; una; cuatro.

M. — Ahora van á decir cuándo, las cifras que señalo, son decenas ó son unidades (*el maestro, en números de dos cifras, indica, ya la de la izquierda, ya la de la derecha*).

Todos. — Decenas; decenas; unidades; unidades; decenas; unidades.

M. — ¿Cuántas?

A. — Ocho decenas; cinco unidades; siete unidades; siete decenas.

M. — Ahora van á decirme cuántas decenas y unidades hay en los números que señalo ó vean en el cartón que les muestre.

A. — Cinco decenas y tres unidades; ocho decenas y seis unidades, etc.

M. — (*Pasan al pizarrón siete ó más niños*). Escriban un número de dos cifras; de una cifra; que tenga decenas y unidades; otro que tenga unidades y decenas; que tenga solo unidades.

Basta. Tomen asiento. Digan las decenas y unidades de los números que vean pasar por el numerador rodante.

Als. — 2 decenas 3 unidades; 2 decenas 4 unidades; 5 decenas 4 unidades, etc.

LECCIÓN 17ª

Tema. — Enseñar á leer y escribir los números 10, 11, 12 y 13.

Desarrollo. — *Principio.* (En la pizarra hay representaciones semejantes á las que indicamos en la Lección 13ª).

M. — ¿Qué lugares señalo?

A. — Vd. señala los lugares de las decenas.

M. — ¿Qué lugar ocupan en un número las decenas?

A. — El segundo lugar.

M. — ¿De qué lado, hacia qué lado se cuentan los lugares?

A. — De derecha á izquierda.

M. — ¿El primer lugar está dónde?

A. — A la derecha.

M. — ¿Y lo ocupan?

A. — Las unidades.

M. — Vds. dirán qué lugar señalo.

Als. — Primero; primero; segundo; primero; segundo.

M. — Ahora, si son unidades ó decenas.

Als. — Unidades; unidades; unidades; decenas; unidades.

M. — ¿Cuántas decenas hay aquí? (señalando la bolsita del número 11).

A. — Una decena.

M. — ¿Cuántas bolitas ó unidades contiene?

A. — Diez bolitas ó unidades.

M. — ¿Y aquí cuántas bolitas ó unidades indico?

A. — Una bolita ó unidad.

M. — Y todo el número ¿cuántas bolitas indica?

A. — Una decena y una bolita.

M. — Y en lugar de una decena podríamos decir?...

A. — Diez bolitas y una bolita.

Medio. — *M.* — O diez unidades y una unidad. Pero como es largo y moroso decir diez unidades y una unidad, decimos, *once*. ¿Cómo decimos?

A. — Once.

M. — Cuántas unidades son once unidades ?

A. — Diez unidades y una unidad.

M. — De modo que este número que está debajo de las figuritas se leerá ¿cómo?

A. — Once.

M. — Cuántas decenas hay en once? (*señalando la cifra del número*).

A. — Una decena y una unidad.

M. — ¿ Cuántas veces una bolita serán once bolitas ?

A. — Once veces una bolita.

M. — ¿O? (*mostrando una bolsita y una bolita*).

A. — Una bolsita y una bolita.

M. — Pero una bolsita contiene ¿ cuántas bolitas ?

A. — Diez bolitas; entonces es diez bolitas y una bolita.

M. — Diez lápices y un lápiz (*mostrándolos y juntándolos*) son ¿ cuántos lápices ?

A. — Son once lápices.

M. — Si en esta figura borramos lo que representa esta bolita ¿qué queda?

A. — Nada.

M. — ¿ Con qué representamos nada ?

A. — Con cero.

M. — ¿ Qué escribiremos para indicar que no hay unidades ?

A. — Cero.

M. — ¿ Y en lugar de este uno ?

A. — Un cero.

M. — ¿ Qué cifras tiene este número ?

A. — Un uno y un cero.

M. — Vamos á escribirlo aquí más grande (*escribe 10*).

¿ Qué lugar ocupa el cero ?

A. — El primer lugar.

M. — Que es el de las unidades ¿é indica ?

A. — Que no hay unidades.

M. — ¿ Qué lugar ocupa el uno ?

A. — El segundo lugar, el de las decenas, é indica que hay una decena.

M. — ¿O cuántas unidades?

A. — Diez unidades.

M. — Entonces ¿cuántas unidades indica este número?

A. — Indica diez unidades y cero unidades.

M. — Pero diez unidades y cero unidades (*con una bolsita en la mano y nada en la otra*) ¿cuántas unidades son?

A. — Son diez unidades.

M. — ¿Y diez unidades qué número era?

A. — El número diez.

M. — ¿Qué número es este, pues?

A. — El número diez.

M. — Y ahora qué representa la figura? (*dibujando dos bolitas junto á la bolsita*).

A. — Una decena y dos bolitas.

M. — (*Escribe debajo las cifras 1 y 2 de modo que aparezca 12*) ¿Cuántas bolitas en todo?

A. — Diez bolitas y dos bolitas.

M. — Diez bolitas y dos bolitas son muchas palabras y se acorta diciendo *doce*. ¿Qué número será, pues, este?

A. — El número doce.

M. — ¿Y éste qué número era?

A. — El número once.

M. — Si en vez de dos bolitas pintásemos tres ¿cuántas bolitas representaría la figura?

A. — Una decena y tres bolitas.

M. — (*Escribe la cifra 3 debajo de las bolitas que dibujará*). De modo que este número representa cuántas bolitas?

A. — Diez bolitas y tres bolitas.

M. — Estas también, son muchas palabras; se acorta diciendo *trece*. De modo que este número es...?

A. — El número 13.

M. — ¿Y este?

A. — El número diez. M. — ¿Y este?

A. — El número doce. M. — ¿Y este?

A. — El número once.

- Fin.* — *M.* — ¿Qué cifras tiene el número 13 ?
A. — Uno y tres.
M. — El número once.... el número diez....
M. — ¿Cuántas bolitas tiene trece más que doce ?
(*señalando la figura*).
A. — Una bolita.
M. — ¿ Y doce más que diez ?
A. — Dos bolitas.
M. — Diez bolitas y una bolita ¿ cuántas bolitas son ? (*siempre con las ilustraciones en la mano*).
A. — Once bolitas.
M. — Once bolitas y una bolita ?
A. — Doce bolitas.
M. — Doce bolitas y una bolita ?
A. — Trece bolitas.
M. — ¿ Qué número señalo ? Clase.
Todos. — Trece, diez, siete, once, diez, doce.
(*Pasan á la pizarra cinco alumnos ; el maestro dicta diferentes números y los alumnos los escriben ; vuelven á sus asientos y hace contar á todos, desde seis hasta trece*).
M. — ¿ Cuántas sillas hay que añadir á diez sillas para tener trece sillas ?
A. — Tres sillas.
M. — ¿ Cuántos pesos hay que añadir á once pesos para tener doce ?.... ¿ á diez cuadernos para tener doce ?.... ¿ Cuántos unos hay en trece ; en once ? Para mañana, los niños de esta fila, traen doce papelitos, ocho blancos y el resto de color ; los de esta otra fila, trece semillas ; cinco de maíz, tres de arroz y el resto de cualquier otra cosa. (*Y así el resto de las filas*).

LECCIÓN 18ª

Tema. — Ejercicios y problemas.

Desarrollo. — *A.* — (*Pasan al pizarrón siete ú ocho niños*).

M. — Escriban el número : 8 ; 6 ; 10 ; 0 ; 12 ; 13 ; 5.
Vuelvan á sus asientos. (*Mostrando cartoncitos*).

¿ Qué número es este ? *Todos.* Trece. *M.* — ¿ Este ?

A. — Dos. *M.* — ¿ Este ? *A.* — Diez.

M. — Un uno con dos ¿ qué número es ?

A. — El número doce.

M. — ¿ Las cifras de qué lado, indican unidades ?

A. — Las de la derecha.

M. — (*Señala una cifra en números como 95, 14, 26*). ¿ Qué son éstas ?

A. — Unidades.

M. — ¿ Cuántas ?

A. — Seis unidades.

M. — ¿ Estas ?

A. — Nueve decenas . . . una decena . . . cuatro unidades.

M. — Qué representa esta bolita ?

A. — Una decena.

M. — Que tiene ¿ cuántas unidades ?

A. — Diez unidades.

M. — ¿ Cuántas bolsitas indica esta cifra ?

A. — Ocho bolsitas.

M. — ¿ Y cuántas unidades ?

A. — Ocho veces diez unidades.

B. — (*El maestro tiene montoncitos de cartones, cubos, maderitas, letras, sobre una mesa*). *M.* — Van á contar. José. *A.* — Tres cubitos.

M. — Más dos cubitos . . . Juan. *A.* — Cinco cubitos.

M. — Más tres cubitos . . . más un cubito . . . más un cubito . . . más un cubito . . . más un cubito (*á cada pregunta añade cubitos á los que ya tiene en la mano izquierda*).

M. — ¿ Cuántos anillos son estos ?

A. — Ocho anillos.

M. — Más dos . . . más dos . . .

M. — ¿ Cuántos anillos tengo ?

A. — Doce anillos.

M. — Quito uno y quedan . . . quito dos más y quedan . . . quito tres más y quedan . . .

M. — Doce menos uno ¿ cuánto es ?

A. — Once (*El maestro escribe en el pizarrón*
 $12 - 1 = 11$).

M. — Doce menos dos ¿ cuánto es ?

A. — Diez (*escribe* $12 - 2 = 10$).

M. — Doce menos tres ¿ cuánto es ? (*Continúa en la misma forma hasta llegar á $12 - 6$, ayudándose con los objetos cuando fuere necesario*).

M. — ¿ Cuántas veces dos cubitos hay en doce cubitos ? (*Presenta á la clase, un montón de doce cubitos y los divide rápidamente en seis grupos de dos cubitos cada uno*).

A. — Seis veces dos cubitos.

M. — Seis veces dos cubitos son ¿ cuántos cubitos ?

A. — Doce cubitos (*el maestro escribe en la pizarra*
 $6 \times 2 = 12$ *y hace leer al alumno*).

M. — ¿ Cuántas veces tres cubitos hay en doce cubitos ?

A. — Cuatro veces tres cubitos.

M. — ¿ Cuatro veces tres cubitos son ?

A. — Doce cubitos (*Escribe* $4 \times 3 = 12$).

M. — ¿ Y dos veces cinco dedos ?

A. — Diez dedos (*El maestro hace varios ejercicios más de la misma naturaleza*).

C. — M. — ¿ Cuántas maderitas hay en esta bolsita ?

A. — Diez maderitas

M. — Quito tres ¿ cuántas quedan ? (*sacándolas*).
Quito otras tres ¿ cuántas quedarán ? . . . añado ahora cuatro . . . más dos . . . (*cierra la bolsita*) más dos (*colocándolas junto á la bolsita*) . . . más una . . .

M. — ¿ Una decena ó diez, más uno es cuánto ? . . . más dos . . . ? . . . más tres ? . . . (*á cada respuesta escribe en la pizarra la correspondiente igualdad*).

M. — Ocho, menos dos, más uno, más tres ¿ cuánto es ? (*con mucha lentitud*).

D. — En la plaza ¿ cuántas columnas sostienen las lamparitas de luz eléctrica ?

A. — Cuatro columnas.

M. — Cada columna sostiene tres lamparitas, ¿ cuántas lamparitas son ?

A. — Doce lamparitas.

M. — En esta estampa se ven dos postes y cada poste tiene cinco agujeros, ¿cuántos agujeros tienen los dos postes?

A. — Diez agujeros.

M. — Esta gallina estaba echada sobre trece huevos; sacó estos pollitos (*cinco*) ¿cuántos pollitos quedan por salir?

A. — Ocho pollitos.

M. — ¿O sea cuántas veces dos pollitos?.. un pollito?

M. — Son las nueve ¿cuántas horas faltan para las doce?

A. — Tres horas.

M. — Ahora vamos á repartir estos diez caramelitos entre Vds. cinco ¿cuánto les tocará á cada uno?

A. — Dos á cada uno.

M. — Estos doce bombones entre Vds. cuatro. ¿Cuántos les tocará á cada uno?

A. — Tres á cada uno.

M. — Quedan cinco niños de la segunda fila que no escribieron; voy á darles dos yemas á cada uno ¿cuántas yemas deberé sacar de la caja?

A. — Diez yemas.

M. — Saco, entonces, un cartucho ó sea una decena; *(se las da á un niño que las reparte y queda con tres en la mano)*.

M. — ¿Por qué sobran tres?

A. — En el cartucho habían más de diez yemas.

M. — ¿Cuántas yemas más?

A. — Tres yemas más.

M. — ¿Cuántas yemas contenía, entonces, el cartucho?

A. — Trece yemas.

M. — Muy bien. Pero varios niños no han recibido nada; vamos á darles tres bombones á cada uno. Mario nos va á decir, después, cuántos bombones hemos repartido. *(El maestro reparte á cuatro)*.

A. — Doce bombones.

M. — ¿Cuántas veces tres bombones?

A. — Cuatro veces.

M. — Ahora, quiero saber, cuántos bombones, yemas y caramelos he repartido. Vamos á contarlos (*comienza por el primero de la primera fila y sigue el orden en que están sentados*). Vd. Antonio, recibió ¿cuántos? A. — Dos. M. — ¿Y Vd. Julio? A. — Tres. M. — ¿Entre los dos? A. — Cinco. M. — ¿Y Vd. Pedro?

A. — Tres. M. — Que con cinco suman ¿cuánto? A. — Ocho.

M. — ¿Vd. Juana? A. — Tres, que sumados con ocho hacen once. M. — Muy bien; ¿Y Vd. Alda? A. — Dos, que sumados á los once hacen trece. M. — ¿Y Vd. Josefa? A. — Tres, que sumados á los trece hacen...

M. — ¿Ya no podemos sumar? Sí, podemos sumar. ¿En trece cuántas decenas ó diez hay?

A. — Una decena.

M. — Muy bien; pero sobran, ¿cuántos caramelos?

A. — Tres caramelos.

M. — ¿Cómo escribíamos una decena ó diez?

A. — Con un uno y un cero.

M. — Pues, apuntamos y diremos: una decena de caramelos y tres caramelos, en vez de trece caramelos. Y una decena de caramelos y tres caramelos, más los tres caramelos de Josefa ¿cuántos caramelos serán?

A. — Una decena de caramelos y seis caramelos (*así continúa sumándolos y obtiene cuatro decenas y siete bombones*).

M. — ¿Recuerdan Vds. un número que represente cuatro decenas y siete unidades?

A. — Sí, señor.

M. — ¿Cuántas cifras tiene?

A. — Dos cifras. La primera de la derecha representa las unidades; la de la izquierda las decenas.

M. — ¿Qué cifra escribiremos á la derecha, entonces?

A. — La cifra 7, y á la izquierda la cifra 4. (*El maestro escribe 47*).

M. — ¿Qué cantidad representa este número?

A. — Cuatro decenas y siete unidades.

M. — ¿Cuántos caramelos, yemas y bombones he repartido á Vds.? (*Señala cada cifra*).

Todos. — Cuatro decenas de bombones y siete unidades.

PRIMERA LECCIÓN (Mayo).

Tema. — Enseñanza de los números 20, 30, 40 y 50. (La no enseñanza en esta misma clase de los números 60, 70, 80 y 90, cuyo valor el niño conoce, desde hace días, puesto que sabe la cantidad de decenas que representan, es por el esfuerzo que exige la retención de palabras nuevas como *veinte, treinta*, etc.).

Desarrollo. — *Principio.* — M. — (*Sobre la mesa, una caja de bolsitas conteniendo diez bolitas cada una y á la derecha otra caja más pequeña de bolitas sueltas*). Esta caja ¿qué contiene? (*Tomando en la mano varias bolsitas*).

A. — Bolsitas con diez bolitas cada una.

M. — Pero cada bolsita representa, entonces, una decena; esta caja, contiene pues....

A. — Una caja de decenas.

M. — ¿Y esta de la derecha? (*Tomando un puñado de bolitas*).

A. — Una caja de unidades.

M. — Bien; pase Raúl. Saque Vd. cinco decenas y tres bolitas. (*El niño saca rápidamente lo que se le pide y enseña á la clase*).

M. — ¿Con qué cifras representamos en la pizarra cinco decenas y tres bolitas?

A. — Con un cinco y un tres. (*El maestro escribe 35, tamaño indicado, en medio del pizarrón*).

A. — No, señor. El 3 á la derecha y el 5 á la izquierda. (*El maestro escribe 53*).

M. — Saque, Raúl, dos decenas y ninguna unidad.... ¿Con qué cifras representaremos dos decenas y ninguna unidad?

A. — Con un dos y un cero. (*El maestro que borró 53, escribe en su lugar 20*).

M. — Saque tres decenas solamente.... ¿Cómo las escribiremos?

A. — Con un 3 y un 0. (*Escribe el maestro 03 y se corrige de la misma manera que el caso 53*).

M. — Saquen tres unidades....

¿Cómo las escribiremos?

A. — Con un tres solamente.

M. — Saque cuatro unidades; las representaremos ¿cómo?

A. — Con la cifra 4.

M. — Saquen cuatro decenas.... ¿las representamos?

A. — Con un 4 y un 0. (*El maestro escribe 40*).

M. — Vuelva á su asiento, Raúl. (*El maestro pasa á la pizarra giratoria; escribe detrás un número; pide atención; la da vuelta con rapidez y en ese tiempo debe, el alumno, reconocer la cantidad escrita*).

¿Qué número he escrito?

A. — El número nueve.

M. — ¿Qué número?

A. — El número diez.

M. — ¿Qué número?

A. — Tres decenas y cuatro unidades.

M. — ¿Qué número?

A. — Dos decenas.

M. — ¿Qué número?

A. — Tres decenas.

M. — ¿Qué número?

A. — Cuatro decenas. (*El éxito de este como de otros ejercicios estriba en la rapidez*).

M. — (*Sin girar la pizarra y dejando los números á la vista*). ¿Qué número escribo?

Todos. — Dos decenas; tres decenas; cuatro decenas; cinco decenas.

Medio. — Bien niños. Pero, los antiguos decían dos decenas, tres decenas; para nosotros es muy largo decir: dos decenas, tres decenas, cuatro decenas; en lugar de dos palabras empleamos una sola y muy

cortita. No decimos *dos decenas*, sino *veinte* (*señalando el número 20*); no decimos *tres decenas* sino treinta; (*etc. hasta nombrar 50*). Observen Vds. ¿Qué cifra es esta?

A. — Tres.

M. — Tres; tres, *treinta*.... ¿oyen Vds. qué parecidas las palabras?

Cuatro, cuarenta (*señalando y enunciando las palabras con intencionada lentitud*) cuatro, cuar.... cua, cua; ¿distinguen el parecido de cuatro y cuarenta? ¿cuál es?

Als. — Cua.

M. — Cuatro y cuarenta. Ahora, cinco y cincuenta: *cin*....co y *cin*....cuenta; *cin* y *cin*; ¿notan Vds. el parecido?

A. — Sí, señor: *cin*.

M. — Muy bien. De modo que cuando vean 40, saben que la palabra empieza con....

A. — Con *cua*....

M. — ¿Y es? A. — Cuarenta.

M. — Cuando vean 50, el nombre empieza con....

Als. — *Cin*..... cincuenta.

M. — Cuando tengan que leer 30 el nombre empieza con....

Als. — Con *tre*..... se dice treinta.

M. — ¿Y cuando deba leerse 20? la palabra *veinte* no se parece á *dos*. Recordemos que es *veinte*. Digan todos *veinte*.

Todos. — ¡Veinte! M. — Otra vez. Todos — ¡Veinte!

Fin. — (*Recurriendo á los cartones*).

M. — Qué número es este?

Todos — Veinte. M. — ¿Este? A. — Treinta. M. — ¿Este? A. — Cuatro. M. — ¿Este? A. — Cuarenta.

M. — ¿Este? A. — Cincuenta.

M. — (*Iguales ejercicios de reconocimiento, señalando números escritos de antemano en el pizarrón ó haciendo uso del numerador rodante*).

M. — ¿Qué número es mayor, cuarenta ó cincuenta?..... ¿Treinta ó veinte?..... ¿Nueve ó veinte?

M. — ¿Cuántas bolitas he sacado? (*saca cinco bolitas*).

A. — Cinco decenas.

M. — Pero en lugar de cinco decenas dijimos que se decía?

A. — Cincuenta.

M. — ¿Cuántas bolitas he sacado?

A. — Cincuenta bolitas.

M. — ¿Y ahora?

A. — Cuarenta bolitas.

M. — ¿Cuántas veces diez bolitas son?

A. — Cuatro veces diez bolitas.

M. — ¿Cuántas bolitas he sacado?

A. — Veinte bolitas que son dos veces diez bolitas.

M. — Un niño saca de esta caja veinte bolitas y las coloca en este plato; otro, veinte cubitos y los coloca en la mesa; otro, de este mazo, veinte palitos. (*Pasan los tres niños y al mismo tiempo siete más al pizarrrón quienes escriben los números que el maestro dicta*).

M. — Escriban 8, 10, 30, 50, 40, 19, 12, 16. Tratando de obligar al niño á escribir más ligero de lo que acostumbra con la entonación más rápida de las palabras. Los alumnos toman el hábito de ser morosos al escribir; se vuelven pesados y malogran, así, el éxito de la enseñanza que exige de la integración periférica la mayor rapidez posible á fin de que la demora no interrumpa la identificación secundaria ó vuelva en proceso conciente lo que debe ser proceso inconsciente: automatismo gráfico. El maestro suele cometer, á menudo, la grave falta, no solo de acompañarle en la lentitud sino de provocarla, dictando varios segundos después que todos han terminado de escribir, debiendo, por lo contrario, dictar uno ó dos segundos antes y esperar, á lo sumo, que concluya la mitad.

Este detalle del procedimiento es importantísimo en las clases de aritmética para hacerlas interesantes, para sostener la actividad y la atención, para economizar tiempo y como consecuencia, para hacer más efectiva la adquisición.

M. — ¿Cuántas bolitas ha puesto Vd. en el plato?

A. — Veinte bolitas. Saque primero diez y después otras diez.

M. — Muy bien. Raquel hizo cuatro montoncitos de cubos. ¿El primero, cuántos cubos? (*tomándolo en la mano*).

A. — Seis cubitos. M. — ¿Más seis cubitos? A.

— Doce cubitos. M. — ¿Más seis cubitos? A. —

Diez y ocho cubitos. *M.* — ¿ Más dos cubitos? *A.* — Veinte cubitos (*acompañando las palabras con el movimiento y agregando sucesivamente cubitos en la cantidad indicada*).

M. — ¿ Cuántos palitos sacó Vd?

A. — Veinte palitos.

M. — La clase va á contarlos.

Todos. — Uno, dos, tres, cuatro diez y nueve.

M. — ¿ Qué queda?

A. — Un palito.

M. — ¿ En esta mano tengo? *A.* — Diez y nueve.

M. — Diez y nueve palitos y un palito, juntándolos, ¿ cuántos palitos son?

A. — Veinte palitos.

M. — 19 más 1 ¿ cuánto es?

A. — Veinte. (*El maestro escribe $19 + 1 = 20$*).

M. — ¿ Cuántos cubitos sacaremos de estos 20 para que queden 19?

A. — Un cubito.

M. — 19 y 1 es?

Todos. — Veinte.

TERCERA LECCIÓN

Tema. — Enseñar á medir. Ejercicios de medición.

Desarrollo. — *A.* — *M.* — (*mostrando un metro*). ¿ En manos de quiénes han visto Vds. este pedazo de madera?

A. — En manos de los tenderos.

M. — ¿ Para qué lo usan?

A. — Para *medir* géneros, cintas. . . .

M. — ¿ No podría usarse para medir el largo de otras cosas? Observen Vds. (*mide el pizarrón*).

A. — El largo del pizarrón.

M. — ¿ De qué más?

A. — De las paredes. . . . de una cuerda. . . . de una tabla. . . . del piso. . . .

M. — Esta medida es un metro y sirve para medir

el largo de las cosas. Voy á medir el largo de esta cinta. (*Coloca el metro sobre dos soportes ó una mesa, de modo que toda la clase le vea; luego, mide con mucho despejo, la cinta comenzando por un extremo hasta acabarla*). Uno, dos, tres, cuatro, cinco metros. ¿Cuántos metros mide esta cinta?

Todos. — Cinco metros.

M. — Voy á medir el largo del pizarrón. (*Toma la vara y la aplica sobre la pizarra, señalando con tiza cada extensión de un metro*). Uno, dos, tres y cuatro.

M. — ¿Cuántos metros mide el pizarrón?

A. — El pizarrón mide cuatro metros.

M. — Ahora, quiero medir el largo de este madero. Con el metro no puedo porque es muy grande (*aplicándolo sobre el madero*). Entonces empleo esta reglita (*un decímetro*) y mido: una, dos, tres.... el madero mide tres reglitas.

M. — Veamos cuanto mide el largo de este vidrio, ¿cuenten?

A. — Uno, dos, tres, cuatro.

M. — ¿Cuánto?

A. — Mide cuatro reglitas.

M. — Si quisiéramos *medir* el largo de esta aguja, emplearíamos una reglita más chica, ésta (*mostrando la extensión de un milímetro*).

B. — *M.* — Ahora quiero saber el agua que contiene esta vasija (*sobre la mesa*). ¿Puedo medirla con esta regla? (*Haciendo ademán de medirla*). Es difícil. Entonces me sirvo de una copa, de un jarro, de una taza, de otra vasija. Y digo: una, dos, tres.... diez. ¿Cuántas copas de agua contiene la vasija?

A. — Diez copas de agua.

M. — Si en vez de la copa hubiéramos empleado el jarro ¿cómo diríamos?

A. — Diez jarros de agua.

M. — ¿Sí? Midamos la misma cantidad de agua. Cuenten.

A. — Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

M. — ¿Cuántos jarros de agua contiene?

A. — Seis jarros.

M. — Y con los seis jarros de agua ¿cuántas copas se llenan?

A. — Diez copas.

M. — ¿Qué otras sustancias podríamos medir de la misma manera?

A. — Vino.... aceite.... kerosene.... soda....

M. — ¿Y esto no podríamos medirlo de la misma manera? (*Presenta una bolsita de harina y otra de arroz*).

A. — Sí, señor. Harina.... arroz.... trigo.... maíz.

C. — M. — Está bien. ¿Pero no han visto Vds. esto en los almacenes?

A. — Sí, señor; es una balanza que sirve para pesar.

M. — Pesar es también medir. ¿Qué pesan?

A. — Azúcar.... café.... harina.... bacalao.... fideos....

M. — Vamos á pesar esta bolsita de harina (*coloca la harina en un platillo y la mide con pesas iguales*). ¿Cómo son estas pesas?

A. — Iguales.

M. — Las llamaremos por ahora cubitos. (*Echándolas en el otro platillo hasta que los dos queden en el aire*).

A. — Uno, dos, tres, cuatro.

M. — ¿Cuánto pesa la harina?

A. — Cuatro cubitos. (*Está demás decir que el maestro tendrá cuidado, en esta primera clase, de que las sustancias medidas den cantidades exactas; en otra clase, hará uso de cubos grandes y chicos; copas grandes y chicas y el peso dará, v. g., tantos cubos grandes y tantos chicos*).

M. — Vamos á pesar este libro. Cuenten.

A. — Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis....

M. — ¿Cuántos cubitos pesa?

Todos. — Seis cubitos.

D. — M. — Ahora van á medir Vds. (*Reparte cinco varitas de un metro á cinco niños y da que medir*

á cada uno, algo del salón, cinta ó cordeles; reparte cinco reglitas á cinco niños más, para que midan el largo del pupitre; á dos más, los encarga de averiguar la cantidad de copas de trigo y de maíz que contienen dos bolsitas llenas de dichos cereales; á otros, cuántas de agua caben en un recipiente; á otro, da un paquete para que lo pese; luego que todos hayan terminado la tarea que se les diera, la explican uno por uno).

M. — El largo de las cosas ¿ con qué se mide ?

A. — Con el metro.

M. — ¿ O también ?

A. — Con una regla cualquiera.

M. — Los líquidos ¿ con qué se miden ?

A. — Con copas . . . con jarritos . . .

M. — Con vasijas. ¿ Con ?

A. — Con vasijas.

M. — ¿ A quiénes han visto Vds. por la calle con vasija para medir lo que venden ?

A. — A los lecheros para vender la leche.

M. — ¿ Y la balanza para qué sirve ?

A. — Para pesar las cosas.

M. — Se puede pesar la leche ?

A. — Sí, se puede pesar.

M. — Se puede medir con una vasija, un libro ?

A. — No, señor.

M. — ¿ Cómo puede medírselo ?

A. — Pesándolo ó con una regla.

M. — Nombren cosas que puedan pesarse. (Los alumnos nombran). Que puedan medirse con vasija. (Nombran varias). Que puedan medirse con el metro. (Nombran varias).

LECCIÓN 11ª

Tema. — Enseñanza de los números desde 20 hasta 30. — **Principio.** — *M. — (En el contador girante; al aparecer los números la clase los nombra). ¿ Qué número es este ?*

A. — Quince, veinte, setenta, diez y nueve, cincuenta, dos decenas y una unidad, dos decenas y dos unidades, dos decenas y tres unidades, dos decenas y nueve unidades.

M. — Pasen Mario, Rosa, Mercedes, Dante y Molteni (*que coloca en fila frente á la clase*). Aquí tengo moneditas, ¿las conocen Vds.? Estas son de cobre ¿y éstas?

A. — Son de níkel.

M. — ¿Cuáles valen más?

A. — Las de níkel.

M. — ¿Esta, la más grande, cuánto vale?

A. — Vale veinte centavos.

M. — Esta, la más chica ¿vale?

A. — Cinco centavos.

M. — ¿Y esta, que no es ni la más chica ni la más grande?

A. — Vale diez centavos.

M. — Voy á repartirlas á cada uno de estos niños.

Estén atentos para saber cuántos centavos doy á cada uno. (*El maestro que ha distribuído las monedas por su valor, en tres platos de diferente tamaño, saca una por vez, la muestra á la clase y la deposita en la mano de Molteni*). ¿Cuántos centavos? Cuenten.

A. — Cinco centavos y cinco centavos, diez centavos; y cinco centavos, quince centavos; y cinco centavos, veinte centavos.

M. — Ahora, para Mercedes. Cuenten.

A. — Diez centavos y cinco centavos, quince centavos; y cinco centavos, veinte centavos.

M. — ¿Cuántas decenas de centavos tiene cada uno?

A. — Dos decenas de centavos.

M. — Ahora, para Rosa. Cuenten.

A. — Diez centavos y diez centavos, veinte centavos.

M. — Ahora para Dante. Cuenten.

A. — Veinte centavos.

M. — ¿Cuántos centavos tiene cada uno?

A. — Veinte centavos.

M. — O bien ¿cuántas decenas de centavos?

A. — Dos decenas de centavos.

M. — Muy bien. Y esta moneda ¿ cuánto vale ?

A. — Un centavo.

Medio. — M. — (*Reparte una á cada niño del frente*).

¿ Cuántos centavos tenían antes ?

A. — Veinte.

M. — ¿ Cuánto acabo de dar á cada uno ?

A. — Un centavo.

M. — ¿ Cuántos centavos tiene ahora, cada uno ?

A. — Veinte y un centavos.

M. — ¿ María ?

A. — Veinte y un centavos.

M. — Clase.

Todos. — Veinte y un centavos.

M. — Vuelvan á sus asientos. ¿ Y cuántas decenas y unidades son veinte y un centavos ?

A. — Dos decenas y una unidad.

M. — ¿ Qué número, de los de la pizarra, será veinte y uno, entonces ? Alda.

A. — Este número es veinte y uno.

M. — En vez de dos decenas una unidad ¿ cómo se lee, pues ? Clase (*señalando á 21*).

Todos. — Veinte y uno.

M. — *Veinte y uno (tomando al mismo tiempo una moneda de veinte, y una de uno).*

M. — ¿ Cómo diremos ahora ? (*mostrando con el mismo ademán, una moneda de veinte centavos, dos de un centavo y juntándolas á medida que el niño habla*).

A. — Veinte y dos centavos.

M. — ¿ Y ahora ?

A. — Veinte y cuatro centavos.

M. — ¿ Y ahora ? (*una moneda de veinte y otra de cinco*).

A. — Veinte y cinco centavos.

M. — ¿ Cuántas decenas y unidades hay en veinte y cinco centavos ?

A. — Dos decenas y cinco unidades.

M. — ¿ Qué número de la pizarra expresa dos decenas y cinco unidades ?

A. — Este número expresa dos decenas y cinco unidades.

M. —¿ Entonces como lo llamaremos ?

A. —Veinte y cinco.

M. —¿ Clase ?

Todos. —Veinte y cinco.

M. — ¿ Qué cifras tiene el número veinte y cinco ?

A. —Las cifras dos y cinco.

M. —¿ El número veinte y uno ?

A. —Un dos y un uno.

M. —¿ Cuál expresa veinte ?

A. —El dos; la de la izquierda.

M. —¿ Cuál las unidades ?

A. —La de la derecha, el uno y el cinco.

M. —Lean otra vez estos números (*señalándolos*).

Todos. —Veinte y uno; veinte y cinco.

M. —Y éste ¿ cómo se leerá en vez de dos decenas y tres unidades ?

A. —Veinte y tres.

M. —¿ Y este ?

A. —Veinte y seis.... veinte y siete.. veinte y nueve.... veinte y ocho.

M. —Muy bien. Van á contar los centavos que tiene el plato. (*Echando primero 20, luego de á un centavo*).

Todos. —Veinte, veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres, etc.

Fin. —Qué número vale más, ¿ 25 ó 29?... ¿ 27 ó 22?... ¿ 21 ó 24?...

M. —¿ Cuántas nueces contienen estas dos bolsitas ?

A. —Dos decenas de nueces ó veinte nueces.

M. —¿ Cuántas tengo en esta mano ?

A. —Nueve nueces.

M. —(*Echa las bolitas y las nueve nueces en un plato*).

¿ Cuántas nueces hay en el plato ?

A. —Veinte y nueve nueces.

M. —(*Echa una más*) ¿ Y ahora ? (*los niños, tal vez digan treinta ; si así no fuera, el maestro toma cada bolita y hace contar*). Estas ¿ cuántas son ?

A. —Diez nueces.... Otras diez nueces.

M. —¿ Cuántas quedan en el plato ?

A.—Otras diez nueces.

M.—¿ Cuántas decenas de nueces hay en el plato, pues ?

A.—Tres decenas de nueces. . . . Treinta nueces.

M.—Así, veinte y nueve nueces más una nuez ¿ son ?

A.—Treinta nueces.

M.—¿ Y 29 más 1 ?

A.—Treinta.

M.—Piensen un número más grande que 22. ¿Cuál?

As.—25, 24, 28.

M.—¿ Nombren los números que señale ?

Todos.—23, 20, 18, 10, 19, 29, 21, etc.

INDICACIONES

Esta lección puede darse de la manera empleada para distinguir decenas, unidades y el valor relativo de las cifras de un número, según el procedimiento ilustrado de *L'Arithmétique du grand Papa*.

LECCIÓN 20ª

Tema. — Ejercicios de numeración (lectura y reconocimiento de cantidades).

Desarrollo. — (*El maestro reparte á cada alumno un cartón de lotería* ⁽¹⁾ *y unos diez ó doce cubitos de madera ó granos de maíz*).

M. — En cada cartón hay números diferentes ; cuando diga un número que Vds. tengan en el cartón, ponen, sobre él, un cubito ; si yo digo ocho, el que tenga ocho, pone sobre el ocho, un cubito, así ¿ ven ?

(1) Ejercicio indicado por LAISANT *La Mathématique*. Interesantísimo, pero del que no debe abusarse, por cuanto *la numeración* es uno de los tantos fines de la enseñanza de la aritmética, en 1er grado ; pronto llega un momento en que es innecesario insistir en el reconocimiento de los números. El uso de los cartones sería un entretenimiento sin propósitos educativos. LAISANT atribuye importancia á este ejercicio, probablemente por la poca familiaridad con los actuales métodos de enseñanza.

El niño que primero consiga tapar con cubitos los números de una fila, de esta fila, de esta ó de esta, ese niño gana y se lleva esta pelota. Mientras vaya sacando de esta bolsita una bolilla, lea el número y lo diga, presten Vds. mucha atención á sus cartones para que no dejen de apuntar ningún número. El primero que cubra una fila, avisa inmediatamente. Atentos.

El maestro canta los números hasta que un niño haga lotería; veinte y cinco minutos alcanzan para dos jugadas; á los efectos de las indicaciones acerca del uso de los cartones, el maestro habrá dibujado en el pizarrón, un modelo en el que apuntará los números con una cruz roja.

LECCIÓN 24ª

Tema. — Ejercicios de suma. Añadiendo sucesivamente 2, desde 40 á 98.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — Van á contar desde 40 adelante. Juana.

A. — 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47

M. — Siga Teresa.

A. — 48, 49, 50, 51, 52

M. — Siga Rodolfo (*pregunta á varios, hasta contar noventa y ocho*).

M. — (*Con el marco contador haciendo correr por filas las bolitas*). Cuenten.

A. — Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta.

M. — ¿ Cuántas bolillas hay á este lado y cuántas filas ?

A. — Cincuenta bolitas y cinco filas.

M. — ¿ Cuántas ahora ? (*Corriendo una*).

A. — Cuatro filas y cuarenta bolitas.

M. — Cuenten.

A. — Cuarenta.

M. — Más (*corre á la derecha dos bolitas*).

A. — 42 ; 44 ; 46 ; 48 ;

M. — ¿ Cuántas filas son ?

A. — Cinco filas ó cincuenta bolillas.

M. — ¿Cuánto, pues, $48 + 2$?

A. — Cincuenta.

M. — ¿Y $58 + 2$? ¿ $68 + 2$

Als. — Sesenta setenta.

Medio. — M. — Dos más dos ¿cuánto es? (*Juntando dos cubitos con dos cubitos*).

A. — Cuatro.

M. — Veinte y dos más dos ¿cuánto es? (*Juntando á dos bolsitas y dos cubitos: dos cubitos*).

A. — Veinte y cuatro.

M. — ¿Treinta y dos más dos? (*Juntando á tres bolsitas y dos cubitos: dos cubitos*).

A. — Treinta y cuatro.

M. — Cuarenta y dos más dos?

A. — Cuarenta y cuatro.

M. — (*Continúa hasta 92 más 2, pronunciando con marcado énfasis la parte y DOS más DOS, á fin de que lo note el niño*).

¿Notan Vds., después de veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, las palabras y dos más dos? Y Vds. contestan siempre veinte y cuatro, treinta y cuatro, cuarenta y cuatro.

Als. — Sí, señor.

M. — Está bien. Ahora, cuatro más dos ¿cuánto es?

A. — Es seis.

M. — Y veinte y cuatro más dos?

A. — Veinte y seis.

M. — (*Continúa de la misma manera hasta 98, sin hacer uso de los objetos*).

M. — Y seis más dos ¿cuánto es?

A. — Es ocho.

M. — Veamos pues, si saben Vds. decirme cuánto sería treinta y seis más dos.

A. — Treinta y ocho.

M. — ¿Y noventa y seis más dos?

A. — Noventa y ocho.

M. — Añadiendo dos á cuarenta nos da, pues?

A. — Cuarenta y dos.

M. — ¿Más dos?

A. — Cuarenta y cuatro.

M. — ¿Más dos?

A. — etc.

M. — Añadiendo dos á cincuenta? (*como en el caso anterior*).

M. — ¿Añadiendo dos á noventa y dos? (*como en el caso anterior*).

M. — (*En la pizarra está escrito $2 + 2 = ?$; $4 + 2 = ?$; $6 + 2 = ?$; $8 + 2 = ?$*)

M. — ¿Qué números escribiremos, pues, aquí? (*Señala el lugar que ocupa el signo?*)

A.—4. M.—¿Aquí? A.—6. M.—¿Aquí? A.—8
M.—¿Aquí? A.—10. (*El maestro escribe las cifras*).

M. — (*Correspondiendo con $2 + 2 = ?$, etc., tiene escrito $42 + 2 = ?$, $52 + 2 = ?$, etc., formando columna vertical*). Cuarenta y dos más dos. ¿Qué número escribiremos aquí?

A.—44. M. —¿Y aquí? A.—46, etc.

M. — Cuarenta y ocho más dos ¿cuánto es?

A. —

M. — Ocho más dos ¿cuánto era?

A. — Diez.

M. — Cuarenta y diez ¿cuántas decenas son?

A. — Cinco decenas ó cincuenta.

M. — ¿Cuánto es, de consiguiente, cuarenta y ocho más dos?

A. — Es cincuenta.

M. — ¿Cincuenta más dos? etc.

Fin. — M. — Ahora, cada fila agrega dos, pero con mucha rapidez.

¿Cuarenta más dos?

1ª fila.—42.

M. — ¿Más dos?

2ª fila.—44

3ª fila.—46

4ª fila.—48

5ª fila.—50

1ª fila.—etc.

M. — El primer niño dice 40, el de atrás 42, el siguiente 44 y así, añadiendo siempre dos, sin equivocarse y ligero. Veamos.

1^{er} A. — 40 2^o 42 etc.

M. — Más ligero. (*El maestro salta al niño retardado*).

M. — (*Con cartones*). Todos : añadan 2 al número que yo muestre ; quiero el resultado inmediatamente. (*muestra y retira en menos de un segundo el cartón*).

Todos. — 88 ; 44 ; 56 ; 66

M. — ¿ Cómo es ? (*Vuelve á mostrar el cartón*).

Todos. — 68 ; 52 ; 94, etc.

M. — Atiendan : 42 más 2, más 2, más 2, ¿ cuánto es ?

A. — Cuarenta y ocho. (*El maestro regula la cantidad de términos y la velocidad, por el número de manos que se levanten*).

LECCIÓN 15^a (Junio)

Tema. — *Problemas*.

Desarrollo. — A. — M. — (*Presentando una caja de simpático aspecto, forrada en género rojo ó azul*). No pueden Vds. imaginarse qué cosas guarda esta caja.

Podría contener libros, un juego de té, copas, un tintero de fantasía ó bien terracotas y biscuit ; dos muñequitas. ¿ Qué creen Vds. que contendrá ?

A. — Dos muñecas.

Otro. — Libros.

Otro. — Juguetes.

Otro. — Un carrito.

M. — Pues nada contiene de lo que Vds. han dicho. Miren.

A. — Diarios.

M. — Eso es. ¿ Qué diarios conocen Vds ?

A. — *La Ley*.

A. — *El Siglo*.

A. — *El Oeste*.

A. — *El Orden*.

M. —¿Cuál es *La Ley* de estos que tengo en la mano?

A. —El diario que tiene Vd. en esa mano....

M. —¿Y este diario grandote cuántas hojas tiene?

A. —Tiene cuatro hojas.

M. —¿Qué diario será?

A. —*La Prensa*.

M. —Lean el título.

B. —*La Nación*.

M. —Cada hoja ¿Cuántas páginas tiene?

A. —Tiene dos páginas

M. —Está bien. Cuente, Juan, las columnas que tiene esta página.

A. —Una, dos, tres siete columnas.

M. —Las demás páginas. ¿Cuántas columnas tendrán.

A. —Siete columnas.

M. —¿Esta página?

A. —Siete columnas.

M. —¿Cuántas columnas tendrán las páginas del diario? Piensen un momento.

A. —Cincuenta columnas.

Otro. —Cincuenta y cuatro.

Otro. —Cincuenta y seis.

Otro. —Cincuenta y seis.

M. —En efecto, son cincuenta y seis columnas. Contemos, ahora, Bernardo. (*El maestro, á medida que enuncia el número señala una página, da vuelta la hoja en el momento oportuno, de modo que no haya lugar á confundir lo contado con lo que queda por contar*). Siete y siete.....

A. —Catorce.

M. —Continúe.

A. —Y siete veinte y uno; y siete veinte y ocho; y siete treinta y cinco, etc.

M. —Tiene, pues, ¿cuántas columnas? Clase.

A. —*La Nación* tiene cincuenta y seis columnas.

M. —Un alumno va á sumarlas, ligero.

A. —Siete y siete, catorce; y siete, etc.

- M.—Más rápido, sin que yo señale las páginas.
A.—(*El alumno recita la tabla del 7 hasta 56.*)
M.—Y las cuatro hojas del diario ¿cuántas columnas tienen?
A.—56 columnas.
M.—¿Cuántas veces siete columnas hemos contado?
A.—Ocho veces siete columnas.
M.—Y ocho veces siete columnas son, pues, ¿cuántas columnas?
A.—Cincuenta y seis columnas.
M.—¿Una hoja cuántas columnas tendrá?
A.—Catorce columnas.
M.—¿Por qué?
A.—Porque dos veces siete son catorce.
M.—¿Por qué decimos dos veces siete? (*El maestro indica las dos páginas de una hoja.*)
A.—Porque una hoja tiene dos páginas y cada página siete columnas.
M.—Dos hojas, ¿cuántas columnas tendrán?
A.—Veinte y ocho columnas.
M.—¿Y cinco páginas?
A.—Treinta y cinco columnas.
M.—¿Y seis páginas?
A.—Cuarenta y dos columnas.
M.—Y tres hojas ¿cuántas páginas tendrán?
A.—Seis páginas.
M.—Ahora contesta, toda la clase. (*Tomando las hojas*). Una vez dos páginas cuántas páginas son?
Todos.—Dos páginas.
M.—¿Dos veces dos páginas?
Todos.—Cuatro páginas, etc.
M.—Una vez siete columnas cuántas columnas son?
A.—Siete columnas.
M.—Dos veces siete columnas ¿cuántas columnas son?
A.—Catorce columnas, etc.
M.—Ahora, quito una hoja (*la quita*) ¿cuántas columnas he quitado?

A.—Vd. ha quitado, del diario, catorce columnas.

M.—¿ Y cuántas quedaron ?

A.—Cuarenta y dos columnas.

M.—De modo, pues, que si de ocho veces siete columnas (*juntando todas las hojas del diario*) quitamos dos veces siete columnas (*quitando la hoja*), quedan ¿ cuántas veces siete columnas ?

A.—Seis veces siete columnas.

M.—Quiten de 56, dos veces siete.

A.—56 menos 7 es 49; 49 menos 7 es 42.

M.—Está bien. Si quitamos tres hojas, ¿ cuántas veces siete columnas habremos quitado ?

A.—Seis veces siete columnas y quedan dos veces siete columnas, catorce columnas.

M.—Muy bien. Ahora quito dos hojas y agrego una, ¿ cuántas he quitado ?

A.—Vd. ha quitado una hoja. (*El maestro continúa haciendo varios ejercicios combinando la suma, la resta y la multiplicación*).

C. — (*Pasan á la pizarra cinco niños*).

M.—Escriban : 56, 49, 35, 42, 28, 14, 7, 0.

M.—¿ Qué número indica las columnas de dos hojas... tres páginas... cuatro hojas... una página ? Qué número indica dos veces siete columnas... cuatro veces siete columnas... que hemos quitado del diario, cuatro hojas ? (*Preguntas hechas á alumnos del pizarrón y de los bancos*). Borren.

Escriban Vds., el número que indique las columnas de dos hojas; de tres páginas; de cinco páginas; de ninguna. Escriban Vds. el número que indica dos veces siete; tres veces siete; cinco veces siete; ocho veces siete. Vuelvan á sus asientos. Mañana quiero que cada alumno traiga un diario, cuente sus hojas, sus páginas y sus columnas, para compararlos y saber cuántas columnas tendrán, cuántas más uno que otro, etc. El maestro, al día siguiente, hace ejercicios de suma y resta, por filas, añadiendo ó quitando ya las hojas, ya las páginas.

ya las columnas del diario que tiene un alumno, las del diario que tiene el alumno siguiente, y así sucesivamente, lo que, hecho con ingenio é interés, es una magnífica gimnasia intelectual para el principio de la clase en la que dará luego, idea de doble, triple y mitad. (1)

LECCIÓN 17ª

Tema. — Enseñar á sumar números dígitos.

Proposición. — Al terminar la lección el niño sabrá:
1º Colocar los números que se dicten para sumar.
2º Separar los sumandos de la suma. 3º Escribir la suma. 4º Sumar cualquier número de términos, siempre que su valor no exceda de 5.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — $2 + 2 + 3$ ¿Cuánto?

A. — Siete.

M. — ¿ $4 + 5$? ... ¿ $3 + 2$? ... ¿ $6 + 3 + 2$? ...
¿ $8 + 3 + 1$? ... ¿ $25 + 3$? ... ¿ $1 + 5$? ... ¿ $5 + 5$?
... ¿ $1 + 1 + 2 + 3$? ...

M. — Van Vds. á sumar los números que con el dedo marque en el aire. *(El maestro debe ejercitarse en esta clase de dibujo, para no producir un solo rasgo más, teniendo presente que las imágenes han de ser simétricas y deben comenzarse por la parte superior. Para sus ojos, no dibujará el cinco así 5 sino así Ɔ).*

A. — Ocho (de $5 + 3$); nueve (de $3 + 4 + 2$); doce (de $2 + 3 + 5 + 2$), etc.

M. — Van Vds. á decirme el número de sílabas que suman las siguientes palabras: *He comido en casa con dos amiguitos (enunciadas despacio y con claridad).*

A. — Trece sílabas, etc.

Medio. — *M.* — Bien. Ahora van Vds. á ver cómo se suman, en la pizarra, estos mismos números. Pres-

(1) Téngase presente, que los ejercicios de esta clase son concretos; si fueran abstractos, no serían oportunos; hubiéramos anticipado enseñanzas para las que el alumno no está preparado. De modo que hay un estudio de la talla del 7, pero objetivo, preparando el abstracto, mental y escrito que se hará más adelante, donde lo indique el programa.

ten mucha atención; si quiero sumar los números 5, 3 y 4, los coloco así (*escribiendo en números del tamaño indicado en desarrollos anteriores y en pizarra completamente limpio*):

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 3 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

el signo más á este lado y una raya abajo. Y digo: cinco (*indicando*) más tres, ocho; ocho más cuatro, doce; escribo doce debajo de la raya. ¿Ven? (*Borra*).

Vamos á sumar otras cantidades: 2, 2, 4 y 6; las coloco así:

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 2 \\ 4 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

y digo: dos más dos, cuatro; cuatro más cuatro, ocho; ocho más seis, catorce. Escribo 14 debajo de la raya. ¿Ven? (*Borra*).

M. — Voy á sumar. Den ustedes cantidades, María.

A. — Cuatro, tres, cinco, dos. (*El maestro á medida que el niño enuncia, va escribiéndolas en columna*).

M. — Trazo la raya abajo y digo: 4 más 3, siete: siete, etc.

M. — Otras, Santiago.

A. — 2, 3, 5, 2, 3, 4.

(*Como en el caso anterior*).

M. — Pasen á la pizarra José, Oscar, Alda, Okia, Antonio, Mario. Pronto. Escriban para sumar: $2 + 3 + 2$ ¿cuánto?

A. — Siete.

M. — Otro: $1 + 2 + 2 + 1$ ¿cuánto?

A. — Seis.

M. — Escriban otro: $4 + 5$ ¿cuánto?

A. — Nueve.

M. — Tomen asiento. (*Pasan otros siete; el éxito de estos ejercicios es la rapidez; no se darán cifras que*

retardan la operación, puesto que formamos el hábito de escribir en columna las cantidades, trazar la raya y colocar la suma. Ni debe esperarse á los morosos cuando éstos son dos ó tres).

Vueltos á los asientos los últimos que se mandaron al pizarrón, el maestro hace sacar las pizarras y dicta cinco ó seis ejercicios, dando á cada uno, el tiempo para que sumen, por lo menos, la mitad de los niños; pide á tres ó cuatro, el resultado y dicta un nuevo ejercicio.

Fin. — M. — Guarden sus pizarras. Para sumar ¿ cómo colocamos las cantidades ?

A. — En columna, unas debajo de otras.

M. — ¿ Qué trazamos después ?

A. — Una raya debajo.

M. — ¿ Dónde colocamos el signo más ?

A. — Á la izquierda de una cantidad.

M. — ¿ Si quisiéramos sumar el 4 con el 5 ¿ cómo colocaríamos los números ?

A. — El 4 debajo del 5.

M. — ¿ Si quisiéramos sumar 11 con 14 ? ¿ 35 con 40 ? ¿ 70 con 80 ? ¿ 6 con 1, con 3 ? ¿ 21 con 30; con 44 ?

Para mañana, en sus pizarritas, trae cada uno tres sumas. Quiero ver qué niño tiene, en las columnas, más números.

LECCIÓN 18ª

Tema. — Reconocimiento y escritura de números. Ejercicios de contar. Problemas.

A — M. — Voy á escribir. Diga cada uno un número (en la pizarra giratoria).

A. — Cuarenta y cuatro.

M. — (Escribe 44).

A. — Cincuenta y siete.

M. — (Escribe 37).

A. — El número que Vd. escribe es 37 y dije 57.

M. — ¿Cómo se escribe?

A. — Un cinco y un siete. (*Los alumnos continúan dando rápidamente, varias cantidades*).

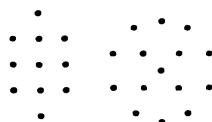
M. — ¿Cuántas decenas hay en este número?

A. — Cinco. *M.* — ¿En este? *A.* — Nueve.

B — M. — (*Pasando al pizarrón donde el maestro ha preparado seis grupos de puntos, uno de 25, otro de 39, otro de 54, otro de 60, otro de 62, otro de 69, á varios colores; en el de 62, por ejemplo, 30 de color blanco, 15 de color azul, 10 de color rojo, 7 de color amarillo, más ó menos unidos y desordenados, de modo que exijan el esfuerzo conveniente para contarse*). ¿Ven Vds.? ¿Qué son?

A. — Son puntos.

M. — Bien. Quiero que cuenten cuántos hay en cada grupo; luego, cuántos son los de cada color; después, que escriban el número correspondiente, debajo. Pasen Antonio, María, Víctor, Josefa, Luis y Marta. Mientras Vds. trabajan en el pizarrón, Bernardo cuenta los niños que hay en el grado y Teresa las bolitas contenidas en esta bandeja, pero sin tocarlas (*la bandeja estará sobre una mesita de tres pies y alta para ser observada por la clase*). Los demás cuenten en silencio los redondeles que están dibujados en la parte de arriba del pizarrón. (*En grupo, redondeles de tamaño suficiente para ser distinguidos por los niños de las últimas filas. Se dispondrá así:*)



M. — ¿Cuántos son?

Als. — Veinte y cinco.... veinte y dos.... veinte y ocho.

M. — Vuelvan á contar, primero los de un lado (*dividiendo el grupo en dos, por una raya azul*) y continúen, luego, con los del otro.

- M.* — ¿Cuánto es?
Als. — Veinte y cinco.... veinte y seis.... veinte y seis.... veinte y seis....
M. — ¿Quiénes han contado 26?... Está bien.
M. — ¿Cuántos alumnos hay en clase, Bernardo?
A. — Treinta y siete alumnos.
M. — ¿Qué cantidad de bolitas hay en el plato, Teresa?
A. — Veinte y ocho bolitas.
M. — Veamos. Cuente la clase. (*El maestro saca de á dos, de á tres y las echa en un vaso*).
Todos. — Dos bolitas.
M. — Y tres....
Todos. — Cinco bolitas.
M. — Y tres....
A. — Ocho bolitas, etc.
M. — Teresa había contado veinte y ocho. ¿En cuánto se equivocó?
A. — En dos bolitas.
M. — ¿Contó más ó menos?
A. — Contó dos bolitas menos?
M. — Siéntense los del pizarrón. Luis ha contado 62; 30 blancos, 15 azules, 10 rojos y 7 amarillos. Está bien. Marta ha contado 38 puntos; son 39. María ha contado, etc.

C — Presten atención. Sumen los números que pasen por el obturador. (*Pasan 2, 5, 3, 4, 2*).

- A.* — Diez y seis.
M. — Voy á escribir varios números; Vds. van á sumarlos. (*Escribe 2, 3, 2, 3, 4 en fila, detrás de la pizarra giratoria; hace luego, girar la pizarra hasta volverla á su posición primera*). ¿Cuánto es?
A. — Catorce.
M. — (*Repite dos ó tres veces el ejercicio*).
M. — $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ ¿cuánto es?
A. — Quince. *M.* — ¿Por qué? *A.* — Porque 3 más 3 es 6; 6 más 3, etc.
M. — Diga la tabla de sumar del 2, Francisco.
A. — Dos más dos, cuatro; más dos, etc.

M. — Quitando 3 desde 21.

A. — 18. *M.* — ¿Menos 3....? *A.* — 15.

M. — Siga, Pablo.

A. — Menos tres 12....

M. — Siga Justa.

A. — Menos 3, 9; menos 3, 6, etc.

M. — Cada golpe que doy con las dos manos, vale

2. (*Bate cuatro veces las manos*). ¿ Cuánto es ?

A. — Ocho.

M. — Ahora vale cuatro, etc.

D — *M.* — ¿ Esto es ?

A. — Una hoja de papel.

M. — (*La dobla por la mitad y la corta, hecho de manera que el alumno pueda observar bien*). ¿ Cuánto tengo de la hoja ?

A. — Una mitad.

M. — ¿ Esta regla es cuánto de esta ? (*Superponiéndolas*).

A. — El doble.

M. — Resuelvan este problema:

El libro en que aprenden Vds. á leer tiene 65 páginas; en Marzo leyeron una; en Abril 3; en Mayo 3 más y en Junio, hasta hoy, 2 más. ¿ Cuántas páginas quedan por leer ?

A. — Cincuenta y seis páginas.

M. — Cada dedo tiene tres huesos menos el pulgar, que tiene dos. ¿ Cuántos huesos tienen los dedos de nuestras manos ?

A. — Veinte y ocho huesos.

M. — ¿ Y los dedos de las demás personas ?

A. — Veinte y ocho huesos.

M. — Para mañana piensen todos un problemita; le traerán aprendido; cada uno lo dirá y entre todos le resolveremos.

LECCIÓN 1ª (Julio)

Tema. — Tabla de multiplicar oral y escrita, del 2. Substitución de la palabra *veces* por el signo $\times$

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Qué número han visto Vds. en la pizarra giratoria, Pedro?

A. — El número 35.

M. — ¿Cuántas decenas tiene y cuántas unidades?

A. — Tres decenas y cinco unidades.

M. — Otra vez.... ¿qué han visto Vds?

A. — 25 — 4 que es 21.

M. — Observen en el pizarrón. Lea, Francisca.

A. — $2 + 2 = 4$; $2 + 2 + 2 = 6$; $2 + 2 + 2 + 2 = 8$, etc. (*Hasta 12 veces $2 = 24$*).

M. — ¿Cuántas veces está dos aquí?

A. — Dos veces dos.

M. — Dos veces dos ¿cuánto es?

A. — Es cuatro.

M. — ¿Cuántas veces está dos aquí?

A. — Está tres veces.

M. — ¿Tres veces dos cuánto es? etc.

M. — De modo que 5 veces 2 se escribiría?

A. — $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

M. — ¿Y 8 veces 2? etc.

Medio. — *M.* — Como ven Vds., es muy largo repetir y escribir tantas veces dos. Se necesita mucho tiempo y mucho pizarrón. Pues los hombres que hacen cuentas, lo escriben en menos tiempo y con muy pocos números. Cinco veces dos se escribe 5×2 (*diciendo á la vez que escribe: cinco.... veces.... dos*). Este signo indica veces. Ocho veces dos, se escribe 8×2 . De modo que es mucho más corto que aquí (*indicando la expresión de suma*). En vez de $2 + 2 = 4$, escribiremos, pues, $2 \times 2 = 4$. En vez $2 + 2 + 2 = 6$, escribiremos....

A. — $3 \times 2 = 6$, etc.

M. — ¿Qué escribí, María. *A.* — Vd. ha escrito 5 veces 2. *M.* — ¿Cuánto es, Josefa? *A.* — Es 10.

M. — ¿Qué escribí, Antonio? *A.* — 8 veces 2 que es igual á 16. *M.* — (*Mental*) ¿ Dos veces 2, cuánto es? *A.* — Es cuatro. *M.* — ¿ 3 veces 2? *A.* — Es 6. *M.* — ¿ 4 veces 2? *A.* — Es 8, etc.

M. — Saquen las pizarras. Escriban el signo que indica veces.... Escriban dos veces 2; tres veces 2; cuatro veces 2, etc. Borren. Ahora (*toma el contador*). Observen cuantas veces dos varillas voy á correr....

A. — Cinco veces dos varillas.

M. — ¿ Cómo escribiremos?

A. — Cinco.... veces.... 2 (*el maestro escribe*
 5×2).

M. -- Que es igual á ¿ cuántas varillas?

A. — Diez varillas. (*Varios ejercicios semejantes*)

Fin. — Pasen al pizarrón cinco alumnos. *M.* — Escriban el signo que indica *veces*; escriban 2 veces 2 igual á.... ¿ cuánto?

Todos. -- Cuatro.

M. — Tres veces 2 igual á...., etc. Escriban cinco veces 2; cuatro veces 8; siete veces 6; doce veces 15; diez y siete veces 12. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cinco*).

M. — Escriban la expresión indicada por las bolitas que tomo. (*Toma de á dos bolitas, dos veces.... tres veces.... cinco veces.... diez veces*). Escriban.

LECCIÓN 7ª

Tema. — Idea de *cien*. Composición y descomposición en unidades y decenas.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* -- ¿ Qué tengo en la mano?

A. — Un poroto.

M. — Cuenten. Todos. (*Tomando un poroto cada vez y agregándolo á los que tiene en la otra mano*).

Todos. — Uno, dos, tres.... diez.

M. — ¿ Cómo hemos llamado á diez porotos?

A. — Una decena de porotos.

M. — (*Los echa dentro de una bolsita y la ata*).

Por consiguiente esta bolsita es....

A. — Una decena.

M. — Estas bolsitas tienen, cada una, como esta, diez porotos. Cuenten las decenas que voy á tomar...

Todos. — Uno, dos, tres, cuatro.... nueve decenas.

M. — ¿Cuántos porotos son?

A. — Noventa porotos.

M. — Vayan contando los que agregue á noventa.

A. — Noventa y uno, noventa y dos.... noventa y nueve, noventa y diez.

Medio. — M. — Pues, no se dice noventa y diez. Hay una palabrita muy corta para expresar *noventa y diez* porotos, la palabra *cien*. Repitan.

Todos. — Cien.

M. — ¿Cuál es la palabra?

A. — Cien.... Cien.... Cien.

M. — Se escribe así: (*la escribe en el pizarrón en caracteres de imprenta*)

M. — ¿Cuántas decenas de porotos son cien porotos? (*pone á la vista de los niños las nueve bolsitas y los diez porotos*) ¿No saben? Pues, cuenten.

Todos. — Una, dos, tres.... nueve....

M. — Y los diez porotos ¿qué hacen?

A. — Una decena.

M. — Entonces ¿cuántas decenas son?

A. — Son diez decenas.

M. — ¿Cien, tiene, pues?

A. — Diez decenas.

M. — En lugar de estos diez porotos sueltos podemos colocar....

A. — Una bolsita.

M. — Eso es. Aquí tenemos esa bolsita; diez bolsitas con ¿cuántos porotos cada bolsita?

A. — Con diez porotos.

M. — Y diez bolsitas hacen ¿cuánto?

A. — Cien.

M. — Cien ¿cuántas decenas tiene?

A. — Diez decenas.

M. — Y cien lápices ¿cuántas decenas de lápices serán?

A. — Diez decenas de lápices.

M. — Diez decenas de naranjas cuántas naranjas?

A. — Cien naranjas.

M. — Ocho decenas de naranjas ¿cuántas naranjas?

A. — Son....

M. — ¿Cuántas decenas hay en este número? (*señalando 80*).

A. — Hay ocho decenas

M. — ¿Qué número es?

A. — Ochenta.

M. — ¿Ocho decenas de naranjas son, pues?

A. — Son ochenta naranjas.

M. — Ahora bien, estas diez bolsitas de porotos (*tomándolas*) las echo en esta caja ¿ven? Y la cierro con llave (*puede ser una bolsita más grande; pero conviene, a los efectos del reconocimiento, una caja*) ¿cuántos porotos hay en esta caja?

A. — Cien porotos.

M. — ¿Cuántas decenas contiene?

A. — Contiene *diez decenas* de porotos.

M. — Desde hoy esta caja será cien ó *un ciento*.
¿Quién nota sobre la mesa, *cientos*? Pase Eke.

A. — Esta caja es un ciento.

M. — ¿Qué habrá dentro?

A. — Cien porotos.

A. — Diez decenas de porotos.

M. — ¿Qué otra cosa podría contener, cien qué?

A. — Cien bolitas.... cien monedas.... cien anillos....

M. — Nombren cientos de cosas grandes.

A. — Cien hombres.... cien casas.... cien bancos.

M. — ¿Cuántas decenas hay en cien? (*mostrando la caja*).

A. — Diez.

M. — ¿Cuántas veces diez decenas habrá en cuatro cientos? (*mostrando cuatro cajas*).

A. — Cuatro veces diez decenas ó cuarenta decenas.

M. — Quiero saber si Vds. son capaces de decirme

la cantidad de porotos que voy á tomar en mis manos. (*Toma dos cajas; luego tres bolsitas, por fin cinco porotos*).

A. — Dos cientos, tres decenas. . . .

M. — Pero ¿qué número valía tres decenas?

A. — Treinta

M. — Otra vez.

A. — Dos cientos treinta y cinco.

M. — ¿Y ahora?

A. — Tres cientos veinte y siete.

M. — ¿Y ahora? etc.

M. — ¿Cuántos unos hay en cien?

A. — Hay cien unos.

M. — ¿Y en diez? ¿En setenta? ¿En cincuenta y cuatro?

M. — ¿Quién sería capaz de contar cien árboles?

Als. — (*Todos levantan la mano*)

M. — Muy bien.

Fin. — M. — ¿Cuántos cientos tengo en la mano? (*tomando tres cajas*).

A. — Tres cientos.

M. — ¿Y ahora?

A. — Dos cientos

M. — ¿Y ahora?

A. — Ocho cientos.

M. — ¿Cuántas decenas tiene cien?

A. — (*balbucea*).

M. — ¿Cuántas decenas hay en esta caja?

A. — Diez decenas.

M. — Tomen las pizarras. Escriban, en sus pizarras, los números que indican las palabras que voy á escribir en el pizarrón: *tres, doce, diez, cien, nueve*, etc.

LECCIÓN 8ª

Tema.— Reconocimiento, lectura y escritura del número 100 y cantidades mayores hasta 999.

Proposición.— El alumno, al terminar la clase, reconocerá cualquier número, hasta 999, que se le señale; lo leerá y lo escribirá. Sabrá el lugar que ocupan los cientos, las decenas y las unidades, cuál de dos números es mayor. Tendrá una imagen aproximadamente exacta de la cantidad de cosas que expresa cada número.

Plan.— *Principio.*— 1º Evocación de las imágenes retenidas en la clase anterior é intensificación mediante el uso de objetos apropiados: cajas, bolsitas y porotos. 2º Noción objetiva de ciento, é intuición del todo como unidad de mayor tamaño, haciendo uso de cajas que contengan cien cosas distribuidas en diez grupos de diez objetos cada uno.

Medio.— **A.**— *Paso de las cosas á las figuras.*— 1º Tres órdenes de unidades por el lugar que ocupan en la fila y su representación: cajas que contienen bolsitas, bolsitas que contienen cosas y cosas. 2º Distribución de las representaciones, en tres columnas, la de las cajas, de las bolsitas y de las cosas. 3º Distribución del lugar que ocupa cada especie de representación. 4º Nombre de las representaciones asociadas á la especie y al lugar.

B.— *Paso de la representación á la abstracción y luego á la generalización.* 1º Asociación externa de la representación y el lugar, al símbolo. 2º Distribución del lugar que ocupa la cifra. 3º Denominación y significado de la cifra según el lugar que ocupa. 4º Lectura de los números. 5º Asociación

interna de la representación y el lugar, al símbolo : distinguir en varios números, sin figuras ilustrativas el lugar y las dimensiones. 6° Lectura de cualquier número que no exceda de tres cifras.

Fin. — 1° Reconocimiento visivo de las representaciones y símbolos, por el lugar. 2° Reconocimiento interno de las imágenes que de las cantidades conserva el niño. 3° Evocación de las imágenes y símbolos, por audición y su reproducción por el alumno. 4° Ejercicios de apreciación y discernimiento. 5° Ejercicios de reconocimiento rápido por la vista. 6° Aplicación del conocimiento en una cantidad determinada de cosas.

Ilustraciones. Las que indica el desarrollo.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿ Recuerdan Vdes. cuántos porotos tenía esta caja ?

A. — Tenía cien porotos.

M. — ¿ Y cuántas bolsitas ó decenas ?

A. — Diez bolsitas ó decenas.

M. — ¿ Cuántos cientos son estos ?

A. — Tres cientos.

M. — ¿ Y estos ?

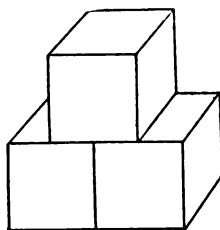
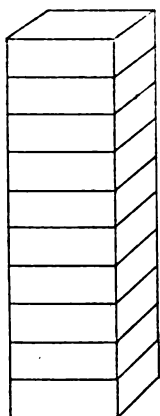
A. — Seis cientos.

M. — Cuenten ahora. (*Tomando tres cajas, dos bolsitas y tres porotos*).

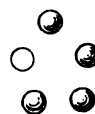
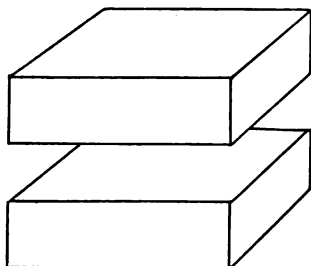
A. — Tres cientos veinte y tres porotos.

M. — ¿ Dónde ven Vdes. cajitas dibujadas ?

A. — En el pizarrón. (El maestro, como en la enseñanza del número 10, habrá preparado en el pizarrón, varios números representados por dibujos de cajas, bolsitas y bolitas dispuestas en columna vertical, de modo que las cajas se correspondan con las cajas, las bolsitas con las bolsitas y las bolitas con las bolitas, las cajas mucho más grandes que las bolsitas ó bien, representando las decenas por cajitas y las centenas por cajitas divididas en diez, así :



ó bien:



Medio.— *M.*— ¿ Cuántas bolitas ó porotos contendrá cada caja de esta columna ?

A.— Cien porotos.

M.— ¿ Y cada bolsita ?

A.— Diez porotos.

M.— Todos van á dar el nombre de lo que señale, ciento, decenas ó unidades, indicando cuántos cientos, cuántas decenas y cuántas unidades.

A.— Dos cientos... seis unidades... cuatro decenas... cinco cientos. . tres cientos, etc.

M.— Bien. Esta columna, vamos á llamarla primera de la derecha ; á esta, segunda y á esta tercera.

¿Cuál es la columna de los cientos?

A.— La tercera.

M.— ¿Cuál es la de las decenas?

A.— La segunda.

M.— ¿Cuál es la de los cientos? Todos.

Todos.— La tercer columna.

M.— ¿Cuál es la de las unidades?

A.— La primera columna.

M.— Ahora, cada una de estas filas es un número ; quiero ver si lo leen dando el nombre correspondiente á las cajitas, bolsitas y unidades. Tulio (*á medida que el maestro señala el alumno enuncia*).

A.— Doscientos... treinta... cinco.

M.— Este otro : Santiago.

A.— Cuatro cientos... cincuenta y seis. (*Se leen de la misma manera varios números*).

M.— ¿ En qué lugar ó columna colocaremos siempre las cajas de los cientos ?

A.— En la 3ª.

M.— ¿ Y las unidades ?

A.— Siempre en el primer lugar.

M.— Pues bien ; antes, cuando los viejitos no conocían los números, escribían así, las cantidades ; pero ¡ qué largo y moroso era estar dibujando cajas y bolsitas ! Entonces, la gente instruída, buscó una manera más rápida que es la que van á aprender Vds. en un momento, si todos me miran. ¿ Cuántos cientos hay aquí ?

A.— Dos cientos.

M.— Pues escribo el 2 debajo.

¿ Cuántas decenas hay aquí ?

A.— Tres decenas.

M.— Pues escribo el 3 debajo. ¿ Cuántas unidades hay aquí ?

A.— Cinco unidades.

M.— Pues escribo 5 debajo. (*Hace lo mismo con varias filas*).

De modo que este número ¿ cómo se lee ? (*Señalando los números*).

A.— Cuatro cientos veinte y siete.

M. — Este otro? etc.

M. — ¿Y éste?

A. — Doscientos veinte y dos.

M. — ¿Este otro?

A. — Trescientos treinta y tres.

M. — Se sabe, pues, cuando un 3 es de cientos, es de decenas ó de unidades por el lugar que ocupa. Cuando ocupa el tercer lugar es de? (*señalando*)

A. — Es de cientos.

M. — ¿Cuándo ocupa el segundo lugar es de?

A. — De decenas.

M. — ¿Cuándo será de unidades?

A. — Cuando ocupa el primer lugar.

M. — Veamos si Vds. distinguen en estos números las cifras de los cientos, de las decenas y de las unidades. (*En la pizarra están escritos varios números de tres cifras, de dos y de una; el maestro con el puntero, indica una cifra y los niños contestan individualmente ó en coro*).

M. — Ahora, lean el número entero.

A. — Dos cientos treinta y dos... Seiscientos ochenta y nueve, etc. (*Para quinientos y setecientos se admitirá cinco cientos y siete cientos, hasta que en lecciones posteriores se enseñe la denominación verdadera*).

M. — Y en esta fila donde no hay sino una caja, ninguna decena y ninguna unidad ¿qué pondremos debajo de la caja?

A. — Un uno; en el lugar de las decenas un cero, y en el lugar de las unidades un cero.

M. — ¿Cuántos porotos contiene la caja?

A. — Cien.

M. — Luego el número 100 que hemos escrito ¿cómo se lee?

A. — Cien.

Fin. — M. (*Pasan cinco alumnos*). Tome cada uno un puntero. Señalen en el número de la pizarra una cifra que exprese cientos... otra que exprese decenas... que exprese unidades.

Señalen el lugar de las decenas... el lugar de los cientos... Vuelvan á sus asientos.

M.—¿ Qué lugar ocupa la cifra de los cientos? Todos.

Als.— El tercer lugar.

M.— (Pasan otros cinco al pizarrón). Escriban trescientos... veinte y cuatro; seiscientos noventa y nueve; cien... etc. Vuelvan á sus asientos. ¿Cuántos cientos hay en ochocientos noventa y cinco?... cuántas decenas?... etc.

M.—¿ Qué número es más grande, doscientos ó cuatrocientos? (*Si hay trepidación recurre á las cajas*). ¿ Trescientos veinte y una ó trescientos veinte y dos? ¿ Ochocientos ó seiscientos? ¿ Qué debemos hacer para que este 1 indique cien?

A.— Agregar dos ceros.

M.—¿ A qué mano?

A.— A mano derecha.

M.— Piensen un número y voy á escribirlo.

A.— Veinte... veinte y ocho.

M.— Que tenga cientos.

A.— Trescientos.

M.— (*Escribe*). Otro.

A.— Seiscientos... cien.

M.— Que tenga decenas y unidades.

A.— Ciento cincuenta y cuatro, etc.

M.— (*En la pizarra giratoria*). Digan todos, el número que vean escrito.

A.— Ciento veinte .. Doscientos cuarenta... Noventa y ocho... doscientos noventa y ocho, etc.

M.— Ahora, quiero que Romualda tome de sobre la mesa *ciento veinte y cinco* porotos, sabiendo que las cajas contienen cien y las bolsitas diez.

A.— (*Hace lo que se le pide y el maestro repite con otros números y otros alumnos, el ejercicio*).

LECCIÓN 8 (Agosto)

Tema.— Tabla de restar del 7.

Desarrollo. — *Principio.* — El maestro, como en la tabla de sumar del 7, tiene sobre una mesa, alta lo suficiente para que los alumnos puedan ver bolsitas con siete bolitas dentro, estampas

que representen siete niños, ó bien siete ovejas, ó bien siete pajaritos ; varios atados de siete lápices. Por fin, los mismos objetos, pero sueltos. En el pizarrón habrá, dibujadas, varias hileras de círculos, herraduras, letras, números, de siete representaciones cada una, así :

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

ó bien

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

etc.

M.—¿Quién recuerda cuántas bolitas teníamos en cada bolsita, ayer? (*alzando una bolsita*).

A.—Siete bolitas.

M.—¿Cuántos lápices (*mostrando un atadito*).

A.—Siete lápices.

M.—¿Cuántos niños en esta figurita?

A.—Siete.

M.—Está bien; ahora, si añadimos á estas tres bolitas esta bolsita de bolitas ¿cuántas bolitas tendremos?

A.—Diez bolitas.

M.—¿Si añadimos estos cinco lápices á este atadito de lápices?

A.—Doce lápices.

M.—¿Si añadimos seis bolitas á las bolitas de estas dos bolsitas?

A.—.....

M.—Cuenten.

A.—Siete bolitas y siete bolitas, catorce ; y seis bolitas más (*el maestro descompone el grupo en dos, uno de cuatro y otro de dos*).

M.—Catorce y dos?¿ 16 y 4?

A.—16 y 4 veinte bolitas.

M.—Ahora, quiero saber cuántos niños estarán representados en este montoncito de estampas, sabiendo que cada una tiene siete. Cuenten todos.

Todos.—Siete . . . y siete, 14 . . . y siete, 21 . . . y siete, 28 . . . y siete, etc. (*el maestro pasa una á una las estampas de la mano derecha á la izquierda tratando de no ser rápido*).

M.—Si á estas 15 bolitas (*dos bolsitas y una bolita*) agregamos siete bolitas ¿cuántas bolitas tengo?

A.—22 bolitas.

M.—Si á estos 25 lápices (*toma tres ataditos y cuatro lápices*) agrego este atadito ¿cuántos lápices tendré?

A.—32 lápices (*Hace varios ejercicios de la misma especie*).

M.—Quiero saber cuántos círculos están dibujados en la pizarra si en cada fila hay siete. Cuente. (*El maestro señala*).

A.—Siete y siete catorce; y siete, etc.

M.—¿Cuánto es $5 + 7$? ¿ $3 + 7$? ¿ $8 + 7$? ¿ $13 + 7$? ¿ $30 + 7$? ¿ $33 + 7$? ¿ $44 + 7$? (*Los alumnos contestan á cada pregunta*).

Medio.—En esta bolsita hay 7 bolitas y quito siete (*vaciando en la mano la bolsita*) ¿cuántas quedan en la bolsita?

A.—Ninguna.

M.—7 bolitas menos siete bolitas ¿cuánto es?

A.—Ninguna bolita.

M.—Luego $7 - 7$ es?

A.—Cero (*el maestro escribe en la pizarra*).

M.—Ahora, tengo ¿cuántas bolitas?

A.—Ocho.

M.—Y quito siete ¿cuántas quedan?

A.—Una bolita.

M.—Luego $8 - 7$ es?

A.—Igual á uno (*se escribe*).

M.—Ahora tengo 11 lápices y quito 7 ¿cuántos quedan? (*quito una bolsita*).

A.—Cuatro lápices.

M.—Luego $11 - 7$ es?

De este modo el maestro va formando la tabla hasta donde creyere oportuno, pero nunca menos de 49, tratando, en los ejercicios, servirse de objetos diferentes y no según el orden

$$7 - 7 = 0$$

$$8 - 7 = 1$$

$$9 - 7 = 2$$

10 - 7 = 3 etc., si bien en el pizarrón la tabla aparecerá escrita en esa forma.

M.—Aquí tengo 46 plumas y reparto 7 ¿cuántas quedarán en la caja?

A.—39 plumas.

M.—Este cuaderno es de 20 páginas y tiene siete escritas ¿cuántas quedan en blanco?

A.—Quedan 13 en blanco.

M.—El libro de lectura tiene 28 hojas; 7 han sido cortadas, otras 7 manchadas ¿cuántas conserva limpias?

A.—14 hojas.

M.—Un niño recibe de su mamá 7 cts.; de su papá otros 7; del hermano mayor 7 más: gasta 7 en plumas y 7 se le pierden ¿con cuántos centavos queda?

A.—Queda con 7 centavos (*si los alumnos hallan dificultades para resolverlo, se pasa inmediatamente á la objetivación*).

M.—Van á quitar 7 al número que yo muestre. (*Recurriendo á los cartoncitos ó la pizarra giratoria*).

A.—2; 12; 22; 32; 42; 52; 62; 25; 35; 45; 3; 13; 23; 33; 43; 53; 63; 4; 14; 24; 34; 44, etc.

El objeto de este ejercicio, fundamental para el aprendizaje de cualquier tabla de suma y resta, cuando se suman ó substraen cifras altas como 6, 7, 8, 9, es que el niño asocie las cifras de las unidades del resto, á las del minuendo acostumbrándose por propio convencimiento, ver á una terminación 1 del minuendo, siempre una terminación 4 de la diferencia. Así 4, 14, 24, 34, son las diferencias 11 - 7; 21 - 7; 31 - 7; 41 - 7. Conviene, antes, habituarse á las diferencias 1, 11, etc.; 2, 12, etc., que conservan el mismo número de decenas que el restando.

En los otros casos es necesario que el ejercicio lo acostumbre á descomponer el substraendo 7 en 7 y 1 para disminuirlo de 36 en dos pasos: 36 - 6 = 30; 30 - 1 = 29.

M. — 5 y 2 ¿cuánto es?

A. — 7.

M. — Bien, observen Vds. que para quitar siete á estos 25 lápices, quito primeramente 5 y me quedan 20; luego 2 y me quedan 18. Para quitar 7 de 35 quito primeramente 5 y me quedan 30; luego etc. Para quitar 7 de 45 ¿cómo haré?

A. — Primero quito 5 y me queda 40; luego quito 2 y me queda 38.

M. — Y para quitar 7 de 26, primero quito 6 y me quedan 20; luego quito 1 porque 6 y 1 es 7; y me queda 19.

¿Cuánto es 36 — 7? ¿56 — 7? ¿15 — 7?

Para quitar 7 de 32 ¿qué quitaremos primero?

A. — 2 y luego 5.

M. — Muy bien. ¿Para quitar 7 de 13?

A. — Primero quitaremos 3 y luego 4.

Fin. — M. — Dos números que sumados den 7.

A. — 3 y 4; 5 y 2; 1 y 6; etc.

M. — ¿Cuántos unos están escritos en la pizarra habiendo 7 en cada hilera?

A. — 42 unos.

M. — Borro uno ¿cuántos quedan?

A. — 41 unos.

M. — Ahora quito los de color rosa ¿cuántos quedan?

A. — 34 unos.

M. — Menos las dos hileras de color azul ¿cuántos quedan?

A. — Quedan 20 unos.

M. — Dejo los de color rosa y quito las hileras azules ¿cuántos unos quedan?

A. — 27 unos.

M. — Voy á señalar una expresión y Vds. dan inmediatamente el resto. (*El maestro ha borrado los resultados de la tabla escrita anteriormente*).

A. — 3; 5; 6; 4; 1; 7; 17; 27; 37; 47.

M. — ¿Cómo quitan Vds. 7 de 14, 24, 34, 44 y 54?

A. — Quitando primero 4 y luego 3.

M. — ¿Cuánto es 5 + 2?

A.—Siete.

M.—Para quitar 7 de 95 ¿qué quitamos primero?

A.—Quitaremos 5 y después 2 que es 88. (*Ejercicios de esta naturaleza hasta terminar la clase*).⁽¹⁾

INDICACIONES

Contra todo buen sentido pedagógico, suele, la lección de tablas, darse de esta manera: $70 - 7$ es 63; $63 - 7$ es 56; $56 - 7$ es 49, etc., lo que no significa aprender á restar 7 de cualquier número. O bien: $70 - 7$ es 63; $69 - 7$ es 62; $68 - 7$ es 61, etc., lo que no significa asociar la diferencia al resultado, sino los resultados mediante la razón 1.

Se comete el error, á veces, de enunciar parte el maestro y parte el alumno que da los resultados. M.—¿ $8 + 15$ es? A—23. Es necesario que la reacción audio-verbal ó audio-visoverbal sea completa, si se quiere la imagen de asociaciones sólidamente organizadas. *Oír, ver y enunciar* la conjugación activa de estos tres verbos por el alumno, es el fundamento del aprendizaje de las tablas.

Acerca de este proceso, que nos llevara al procedimiento para enseñar las tablas, hemos hecho un detallado estudio en el libro I. (Exp. VI y VII).

La objeción que por lo abstracto del procedimiento pudiera hacerse, no es fundamental. Por la numeración, sabe qué representa 15, qué representa 8 y qué representa 7. No debe llamarse tabla de sumar del 7 á la que lo es del 1, en otros términos, á la simple operación de contar objetos, que por el hábito perdura á tal punto, de encontrar, en tercer grado, niños que acuden á los dedos para sumar. Error se comete agregando las cosas una á una

(1) Aplicación de los principios deducidos del Experimento VI, cálculo mental de $23 + 16$.

para inducir que $5 + 7$ es 12; esta enseñanza no es tabla del 7 sino numeración, el niño *cuenta*. La enseñanza de las tablas, de acuerdo con nuestra doctrina psicológica, debe ser abstracta; sólo así es posible concebir como síntesis á 5 asociado á $8 + 7$.

LECCIÓN 11ª (Septiembre)

Tema. — Sumar 9 á cualquier cantidad.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — Para quitar 8 de 34 ¿qué quitamos primero?

A. — Quitamos 4 y después otra vez 4 que es igual á 26.

M. — Para sumar 6 á 19. ¿Qué agregan Vds. primero?

A. — Agrego 1 y luego 5.

M. — Piensen dos números de dedos que sumados den 7.

Als. — $5 + 2$; $3 + 4$; $2 + 5$; $1 + 6$.

M. — Dos números que sumados den 8.

Als. — $3 + 5$; $4 + 4$; $1 + 7$, etc.

M. — Para sumar 7 á 25 ¿cómo se hace?

A. — Primero se suma 5 y después 2.

M. — Para sumar 7 á 18?

A. — Primero sumo 2 y después 5 porque $2 + 5$ es 7.

M. — Dos números que sumados den 9?

Als. — $5 + 4$; $6 + 3$; $1 + 8$; $4 + 5$; $7 + 2$, etc.

M. — Muy bien. Para sumar 9 palitos á 8. ¿Qué sumaremos primero?

A. — Sumaremos primero 2 y luego 7; 8 y 2 es 10; 10 y 7 es 17.

M. — (*El maestro acompaña la expresión del niño ó la indica, según el caso, con los palitos*). Para sumar 9 palitos á 1 ¿qué hacemos?

A. — 9 palitos y 1 palito son 10 palitos.

M. — ¿Cuántos palitos hay que agregar á 7 para que sean 10? ¿Cuántos unos hay que agregar á 6 para que sean 10? ¿Cuántos palitos faltan á 6 para que

sean 10 ? ¿ Cuántos palitos faltan á 8 para que sean 10 ?
¿ Cuánto falta á 5 para que sea 10 ? ¿ Cuánto falta á 9 para que sea 10 ?

Una de las dos cantidades que sumadas dan 9 palitos, es 4 ¿ cuál es la otra ? Uno de los dos números que sumados hacen 9, es 3, ¿ cuál es el otro ? ¿ qué número agregado á 2 suma 9 ?

Medio. — *M.* — (*El maestro usa el aritmónomo; véanse las indicaciones al fin de la lección*).

Lea, Teresa lo que aparezca escrito delante de la caja ; el resto de la clase observa con mucha atención para contestar después á mis preguntas. (*Hace girar las columnas a y d.*)

A. — 1 más 9 igual á 10 ; 11 más 9 igual á 20 ; 21 más 9 igual á 30, etc.

M. — ¿ Qué nota la clase ?

A. — Vd. solo ha movido la columna de las decenas.

Otro. — Que todos los números terminan en 1.

M. — ¿ Cuáles números ?

A. — Los que se suman con 9.

Otro. — Que todos los números de este lado terminan en 0.

M. — Muy bien. Son los resultados. Cuando un número termina en 1 y se le agrega 9, el resultado termina siempre en 0. Si agregamos 9 á 31. ¿ El resultado termina ?

A. — El resultado termina en 0 y es 40.

M. — Ahora, noten otra cosa. Cuando el número es *ochenta* y uno, el resultado es *noventa* (*señalando*). Cuando el número es *cincuenta* y uno, el resultado es *sesenta* (*sin señalar*). Cuando el número es *veinte* y uno, el resultado es *treinta*. Cuando el número es *cuarenta* y uno ¿ el resultado será ?

A. — Cincuenta.

M. — Cuando el número es *setenta* y uno el resultado será ?

A. — Ochenta.

M. — Cuánto es $81 + 9$; $31 + 9$; $41 + 9$; etc.

M. — Presten nuevamente atención (*arrolla la cinta b y la e, dos números aparecen en la abertura de la*

caja: el 3 y el 2. Vuelve las cintas a al 0 y d al 1 para arrollarlas como en el primer caso). Lea. Tomás.

A. — 3 más 9 igual á 12; 13 más 9 igual á 22, etc. (se hacen las mismas indicaciones que en el caso anterior).

M. — Vuelve las columnas d y e á las casillas de los interrogantes para ocultar los resultados, arrollando la a con más ó menos rapidez). Van á dar la suma de las cantidades que se presentan, todos.

Als. — 13 más 9, 22; 33 más 9, 42; 53 más 9, 62; 43 más 9, 52; etc.

M. — ¿ María ?

A. — 31 más 9, 40; 51 más 9, 60.

Otro. — 23 más 9, 32, etc.

M. — (Cinta e, en 5; d en 1, c en 9, b en 6 y a en 0; repite la misma clase de ejercicios considerando que la misma inducción espontáneamente generalizada, hace innecesario llegar á las últimas casillas).

Fin. — (Ejercicios con el aritmónomo, mentales, completando igualdades en el pizarrón y los carteles y otros como éste, colocando las cintas a y b en los interrogantes).

M. — ¿ Cuánto más 9, es 38 ?

A. — 29 más 9 es 38.

M. — Llenen la casilla según las cantidades que vean en las casillas de las otras cintas.

Als. — 42 más 9 es 51; 53 más 9 es 62; 66 más 9 es 75; 46 más 9 es 55; 48 más 9 es 57; etc.

INDICACIONES

Con este, son tres los procedimientos que hemos indicado para la enseñanza de las tablas sin ejercitar directamente la memoria, es decir, sin formar tantas imágenes internas como sumas parciales indiquen los números, utilizando los derivados. El aritmónomo como aparato de mucho valor pedagógico, se impone; cada tira de género, independientemente de las otras cuatro,

ofrece una sucesión de cantidades movibles en conjunto, todas las tablas de sumar en esta forma :

	a	b	c	d	e
m	0	1 +	9 =	1	0
	1	2 +	8 =	2	1
	2	3 +	7 =	3	2
	3	4 +	6 =	4	3
	4	5 +	5 =	5	4
	5	6 +	4 =	6	5
	6	7 +	3 =	7	6
	7	8 +	2 =	8	7
	8	9 +	1 =	9	8
	9	0 +	0 =	0	9
	?	? +	? =	?	?

Cintas de substitución de la tabla del 9 para la descomposición de dicho sumando en dos términos según el procedimiento asociativo indicado en la Lección 8ª mes de Agosto.

0	1 +	8 + 1	1	0
1	2 +	7 + 2	2	1
2	3 +	6 + 3	3	2
3	4 +	5 + 4	4	3
4	5 +	4 + 5	5	4
5	6 +	3 + 6	6	5
6	7 +	2 + 7	7	6
7	8 +	1 + 8	8	7
8	9 +	0 + 9	9	8
9	0 +		0	9
?	?	?	?	?

A la vista de los niños aparece siempre la sección $m\ n$; lo demás, arrollado á los cilindros, permanece oculto. Con el movimiento combinado de las cinco tiras se desarrolla, á la vista de la clase, cualquier tabla de sumar y cualquiera de restar, substituyendo la cinta b por una de signos negativos. La habilidad del maestro consiste en el ingenio para el movimiento de modo que favorecida la asociación, las imágenes se graben con mayor intensidad. Fácil es comprender que cuanto menos cintas se muevan y más correspondencia haya entre las cifras de unas y otras, la imagen, mordiendo más, será más fija y duradera. Arrollando sincrónicamente la a y la d , tabla del 9, la clase forma estas asociaciones importantes de las que ya dijimos algo: que á la terminación 1 de un número corresponde siempre la terminación 0 de la suma; que á la terminación 2 de un número, corresponde siempre la terminación 1 de la suma. Esta idea toma tanto más cuerpo cuanto que nota sólo el movimiento de las decenas diferentes; las del sumando siempre en 1 de las de la suma. A su vista se suceden estas igualdades:

$$\begin{array}{l} 1 + 9 = 10 \\ 11 + 9 = 20 \\ 21 + 9 = 30 \\ 31 + 9 = 40 \\ 41 + 9 = 50 \text{ etc.} \end{array}$$

ó estas otras, arrollando, en un lugar, la b y la e :

$$\begin{array}{l} 2 + 9 = 11 \\ 12 + 9 = 21 \\ 22 + 9 = 31 \\ 32 + 9 = 41 \\ 42 + 9 = 51 \text{ etc.,} \end{array}$$

donde recibe la impresión para no borrarse jamás, de que toda terminación 2 agregando 9, da una terminación 1; que toda terminación 4 agregando 9, da una terminación 3. Así, esto forma, en verdad, 9 imágenes fundamentales, pues, las modificaciones que debe sufrir la co-

lumna de las decenas, son derivadas y se inducen con exactitud proporcional; nunca dirá $12 + 9 = 11$ por tener en su mente visión exacta de 11 cosas y 12 cosas; por la misma causa, rara vez dirá $12 + 9 = 31$. La diferencia 2 entre las cifras 1 y 3, que la vista, ni exterior ni interiormente refiere á la columna de las unidades, sugiere, sin ninguna duda, la idea de 2 decenas muy distante de la cantidad 9 que se pretende agregar. Por el procedimiento común de la memoria directa, sin elementos asociativos de referencia, las imágenes fundamentales son muchas, en nuestro caso, tabla del 9, 90, que exigen un esfuerzo mental enorme. De aquí, el fenómeno curioso para quien no tenga antecedentes psicológicos del asunto, de que los alumnos sepan mejor las tablas de multiplicar que las de sumar, y que al pedir nosotros la tabla de sumar del seis en 1º, 2º y 3º grado (Exp. IX), se nos recitase la de multiplicar. Sin embargo, se explica; 90 imágenes (tabla de + aprendida por memoria directa) se retienen con menos facilidad que 9 (tabla de $\times$).

Cada conocimiento que transmite el maestro, requiere un estudio, á veces costoso, del método cuya sola base, del punto de vista práctico, es la asociación, una asociación de pocos elementos que constituya un vasto campo de referencia. Así, la enseñanza en poco tiempo y dentro de una ejercitación de amena sencillez, consigue maravillas en extensión, exactitud y velocidad. La psicología, al darnos á conocer el mecanismo de las funciones del sistema nervioso, echa los cimientos de una metodología sin las ampulosas, á veces pueriles, complicaciones de la orientada según las reglas de un empirismo que no amaina, porque se le combate con razonamientos también empíricos. Por vía de comparación, confrontando resultados, como hacemos nosotros, es una tarea larga y paciente á la que se dedican pocos.

Las mismas cintas se utilizan en las lecciones de reconocimiento y lectura de cantidades; á continuación de la tabla de suma, para evitar el tra-

baje de la substitución y porque el largo de la tela lo permite, están las de resta, de multiplicación y división arregladas como las de suma. En otro aritmónomo de tres cintas, se arrollarán telas para objetivar la enseñanza de los números de 1 á 10; de las unidades, de las decenas y de las centenas, según las instrucciones que se deducen de los desarrollos correspondientes (cajas, bolsitas, bolitas). Otras tres cintas de substitución llevan I, impreso los números de 0 á 9, unidades, decenas y centenas; II cálculos combinando las diferentes operaciones, así:

I

0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

II

+	0	
—	9	1
×	8	2
:	7	3
	6	4
=	5	5
+	4	6
—	3	7
×	2	8
:	1	9
		0

Los números son impresos y del mismo tamaño en las tres cintas (7×5 cms.).

En nuestros mnemónomos, los signos son cambiables y van fijos en el tabique de división, negros sobre fondo blanco, lo que economiza tela, sirviendo los mismos números para las cuatro operaciones.

CAPÍTULO V

SEGUNDO GRADO

I

Distribución del programa en meses.—*Marzo.*—Las *doce lecciones* primeras, se destinarán á recordar los conocimientos del primer grado acerca de la lectura y escritura de los números hasta 9999, de la suma y resta; de las tablas de sumar, restar y multiplicar; de los problemas concretos.

LECCIÓN 13ª.—Enseñar á sumar $19 + 12$, $15 + 18$, $27 + 59$. Ejercicios.

14ª—Enseñar á sumar $84 + 35$, $57 + 68$, $89 + 95$. Ejercicios.

15ª—Enseñar á sumar $817 + 745$, $398 + 673$, etc.

16ª—Enseñar á sumar más de dos cantidades de *tres cifras*.

17ª—Enseñar á sumar más de dos cantidades de *tres cifras*.

18ª y 19ª—Ejercicios y problemas de suma. Cálculos mentales.

20ª—Análisis y descomposición de números.

21ª—Enseñanza del número 10000, 11000, 12000, 13000, etc. hasta 100000.

22ª—Enseñanza de los números 10427, 12321, 89101, etc.

23ª—Enseñanza de los números 101000, 102000, 999000. De números compuestos, uno y otro período de cifras significativas.

24ª—Ejercicios.

Abril.—1ª División de los números en períodos de tres cifras. Lectura de cada período y escritura de números.

2ª—Ejercicios y problemas.

3ª—Lectura de cualquier número de seis cifras.

4ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

5ª—Tabla de multiplicar del 7.

6ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

7ª—Tabla de multiplicar del 8.

8ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

9ª—Enseñanza del número *un millón*.

10ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

11ª y 12ª—Enseñanza de la tabla de multiplicar del 9. Ejercicios.

13ª y 14ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

15ª—Escritura de números donde hayan lugares ocupados por ceros.

16ª y 17ª—Enseñar á restar 21--12, 42--25, 88--79. Ejercicios.

18ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

18ª y 20ª — Enseñar á restar 40 — 27, 232 — 28, 232 — 138, 832 — 584.

21ª—Ejercicios y problemas acerca de la suma de cantidades de cualquier número de cifras.

22ª—Ejercicios y problemas acerca de la resta de cantidades de cualquier número de cifras.

23ª—Prueba de la resta.

24ª—Problemas combinados de suma y resta. *Razonamiento*.

Mayo.—1ª Enseñanza de la multiplicación: 34×3 , 234×3 , 245×5 . Explicación de los términos: multiplicando, multiplicador y producto.

2ª y 3ª—Multiplicar una cantidad de cualquier número de cifras por un dígito.

4ª—Multiplicación del 0. Ejercicios de multiplicación.

5ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

6ª—Enseñanza oral y escrita de la tabla de dividir del 2.

Signos: $:$ y $\frac{a}{b}$

7ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

8ª y 9ª—Enseñanza de las tablas de dividir del 3 y del 4.

10ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

11ª—Conocimiento del metro.

12ª y 13ª—Ejercicios de medición. El decímetro. Calcular longitudes y distancias. Problemas.

14ª y 15ª—Enseñanza de las tablas de dividir del 5 y 6.

16ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

17ª y 18ª—Tablas de dividir del 7 y 8.

19ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

20ª—Tabla de dividir del 9.

21ª, 22ª, 23ª y 24ª—Ejercicios y problemas de recapitulación. Residuos en la división mental: 7:2, 13:5, etcétera.

Junio.—1ª y 2ª Lectura y escritura de números *mayores de un millón*.

3ª y 4ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

5ª y 6ª—Multiplicación de 23×14 , de 85×76 , de un número cualquiera por otro de dos cifras.

7ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

8ª—Multiplicación de un número cualquiera por otro de tres cifras.

9ª—Ejercicios y problemas.

10ª—Multiplicación de un número cualquiera por otro de cualquier número de cifras.

11ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

12ª—Prueba de la multiplicación.

13ª—Multiplicación de un número por otro de cifras iguales.

14ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

15ª—Enseñanza de los números romanos: valor de las letras.

16ª—Ejercicios.

17ª—Enseñanza de los números romanos hasta 20.

18ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

19ª y 20ª—Enseñar á leer y escribir cualquier número romano.

21ª y 22ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

23ª—Multiplicación de un número por otro con lugares ocupados por *ceros*.

24ª—Ejercicios y problemas.

Julio.—1ª Enseñar á multiplicar un número por la unidad seguida de ceros.

2ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

3ª—División exacta. Enseñar $86|2$, $96|2$, $45|3$.

4ª—Enseñar á dividir $874:2$, $964:2$, $128:2$, $102:3$.

5ª—División de cualquier número de dos ó tres cifras por un dígito.

6ª, 7ª, 8ª, 9ª y 10ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

11ª y 12ª—Enseñanza del decímetro y del centímetro. Ejercicios.

13ª y 14ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

15ª y 16ª—Enseñanza de los problemas concretos de multiplicar. Razonamientos. Diversos casos.

17ª—Ejercicios de cálculo mental con el mnemónomo.

18ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

19ª y 20ª—Enseñanza de problemas que combinen la suma y la multiplicación. Diferentes casos. Descomposición del problema en varios de segundo orden.

21ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

22ª, 23ª y 24ª—Enseñanza de problemas que combinen la resta y la multiplicación. Descomposición.

Agosto.—1ª Distinguir las operaciones que deben hacerse en diversas clases de problemas.

2ª, 3ª y 4ª—Enseñanza de problemas que combinen la suma, la resta y la multiplicación.

5ª y 6ª—Ejercicios de distinción de operaciones y descomposición de un problema.

7ª hasta 24ª—Ejercicios diarios de cálculo mental, para mantener el recuerdo de las tablas; ejercicios de lectura y escritura de números comunes y romanos; operaciones; solución razonada de problemas dispuestos en series; enunciación de problemas pensados por el niño, según datos ó condiciones dadas por el maestro.

Septiembre.—1ª y 2ª Enseñar á dividir un número de 4 ó más cifras por un dígito.

3ª y 4ª—Ejercicios de síntesis y recapitulación.

5ª—Dividir un número por otro de dos cifras: 605:55, 385:55, 7370:55.

6ª—Ejercicio. Calculador rodante.

7ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

8ª y 9ª—División inexacta. Dividir 85:4, 74:3, 3898:9. Ejercicios.

10ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

11ª y 12ª—Dividir un número cualquiera por otro de dos cifras. El caso 895:19.

13ª—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación.

14ª—Prueba de la división.

15ª hasta 24ª—Ejercicios diarios de cálculo mental, operaciones, lectura y escritura de números, etc.

Octubre.—1ª y 2ª Enseñar á dividir un número por la unidad seguida de ceros.

3ª, 4ª y 5ª—Enseñanza de los problemas concretos de dividir. Razonamiento gráfico y deductivo. Diversos casos.

6ª y 7ª—Ejercicios de distinción y enunciación de problemas pensados por el niño.

8ª y 9ª—Problemas que combinen la suma y la división.

10ª y 11ª—Problemas que combinen la resta y la división.

12ª y 13ª—Enseñanza especial del problema que combina la división y la multiplicación. Caso simple de reducción á la unidad.

14ª—Ejercicios de descomposición de problemas que combinen la división y la multiplicación.

15ª—Distinguir las operaciones de un problema.

16ª y 17ª—Problemas de diferente categoría que combinen la suma, la resta y la división.

18ª y 19ª—Problemas de diferente categoría que combinen la suma, la división y la multiplicación.

20ª—Ejercicios acerca de la distinción de problemas.

21ª y 22ª—Problemas de diferente categoría que combinen la resta, la división y la multiplicación.

23ª y 24ª—Problemas que combinen las cuatro operaciones.

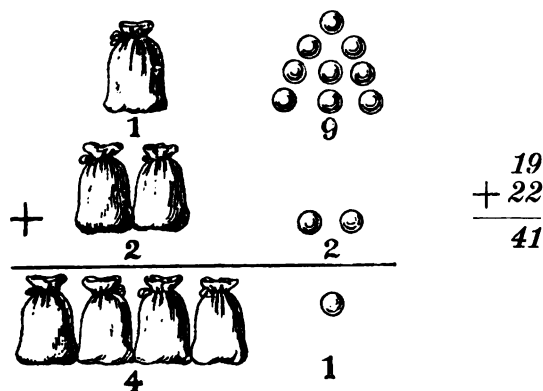
Noviembre.—Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación insistiendo acerca de aquellos puntos donde no hay rapidez y exactitud.

III

LECCIÓN 13ª (Marzo)

Tema. — Enseñar á sumar $19 + 12$; $15 + 18$; $27 + 59$.

Los procedimientos pueden tomar en este grado, verdadero aspecto matemático usando prudencialmente de la objetivación que en primer grado, desde el punto de vista de la ciencia, puede calificarse de exagerada aunque necesaria del punto de vista pedagógico. De aquí que, para enseñar las operaciones, nos atengamos á un método abstracto, pero sencillo y rápido, abandonando el que preconizan ROBINSON y el GRAND PAPA, el largo y limitado aunque seductor procedimiento de las unidades, decenas y centenas ilustradas con tanto éxito en primer grado: las unidades, por bolitas; las decenas, por bolsitas; las centenas, por cajitas, dibujadas en columnas ordinales. Así, enseñamos á sumar $19 + 22$, preparando la pizarra de este modo:



haciendo notar que nueve bolitas más dos, son 11 bolitas y en 11 bolitas hay una decena de bolitas (una bolsita) y una bolita. Pintamos debajo de la raya solo una bolita y añadimos la decena (la bolsita), á las otras bolsitas; así, nos resultan cuatro bolsitas. Pero, volvemos á repetirlo, el 2º grado no necesita llegar á detalles que quitan tiempo de ejercicio tan necesario al hábito y á la generalización.

Desarrollo. — Principio. — (*En la pizarra hay números escritos y dispuestos, los que deben sumarse, en columna.*)

M. — ¿ Cuántas decenas hay en este número ? (señalando ó mostrando cartelitos).

Todos. — Cuatro decenas.

M. — ¿ En este otro ?

Todos. — Tres decenas.

M. — ¿ Cuántas unidades ?

Todos. — Siete unidades.

M. — ¿ Cuántas decenas hay en 85 ?

A. — En 85 hay 8 decenas.

M. — ¿ Cuántas decenas y unidades hay en 19 ?

A. — Hay una decena y nueve unidades.

M. — 5 + 7 es ¿ cuánto ?.... ¿ 8 + 9 ?.... ¿ 9 + 6 ?.... En 15 ¿ cuántas decenas y unidades hay ?

A. — Una decena y cinco unidades.

M. — Las unidades ¿ qué lugar ocupan en los números ?

A. — El primer lugar de la derecha.

M. — ¿ Qué columna ? (*indicándola con el puntero*).

A. — La primer columna.

M. — ¿ Las decenas ?

A. — La segunda columna.

Medio. — *M.* — Está bien. Vamos á sumar 19 y 12 ¿ cuánto es ?

Als. — (*Unos dan un resultado, otros otro, empleando bastante tiempo*).

M. — No todos aciertan con el resultado. Voy á enseñarles un procedimiento rápido y seguro. Atiendan (*en la pizarra donde están 19 y 12 dispuestos de esta manera* :

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 12 \\ \hline \end{array}$$

Nueve y dos, once ; en 11 hay una decena y una unidad; escribo la unidad debajo de la columna de las unidades y llevo la decena para sumarla con las decenas; una decena más una decena son dos decenas; más una decena son tres decenas; escribo 3 decenas debajo de la columna de las decenas.

Resulta 31, suma de 19 y 12.

Otro ejemplo. Sumemos 15 y 18. Digo : 5 y 8 es 13, escribo 3 y llevo 1; 1 y 1 dos y uno 3, escribo 3; el resultado es 33. Otro ejemplo : sumemos 27 y 59. Digo ; 7 y 9 es 16 ; escribo 6 y llevo 1; 1 y 2 tres ; 3 y cinco 8 ; escribo 8. El resultado es 86. (*El maestro hablará despacio, pronunciará bien las palabras, marcando las principales con énfasis, pero sin ficción; indicará con la tiza ó el dedo, las cifras á medida que las vaya enunciando*).

M. — Pasen al pizarrón Antonio, María, Nemesio, Juana, Julio, Felipe, Petra y Rosa.

Sumen 15 y 15.

Observe la clase, los resultados.

www.libtool.com.cn

A. — Petra se equivocó. 5 y seis son 11; debe escribir 1.

Otro. — Felipe escribió 2 en el lugar de las decenas.

M. — 5 y 6, ¿cuánto es, Petra?

A. — Once. M. — ¿Qué cifra se escribe?

A. — Uno. M. — ¿Cuánto lleva? A. — Uno.

M. — ¿A qué columna se añade?

A. — A esta. M. — A la de las decenas. Suma.

A. — Uno y uno dos; y uno tres.

M. — Borren. Sumen: 18 y 13 (*Dan todos el resultado 31, excepto Felipe*). Sumen 16 y 19. (*Hacen la operación*). Suman 27 y 25. Vuelvan á sus asientos.

M. — (*Pasan otros seis alumnos*). Sumen: 85 y 15....; 66 y 38....; 48 y 49.... Vuelvan á sus asientos. Saquen sus pizarras; sumen: 43 y 39.... (*Después de 12 ó 15 segundos pide el resultado á dos ó tres de los que levantan la mano. Con este ejercicio se toma nota de la intensidad con que el conocimiento ha sido adquirido por la clase y qué número de alumnos no lo poseen. Si fuera casi la mitad, lo que nunca sucede en un grado bien constituido, habría entonces, que retroceder á los procedimientos del primer grado*).

M. — Sumen 48 y 57....; 65 y 18....; 36 y 42....; 89 y 19....

Este problema: 17 pesos costó la pizarra y 35 el escritorio ¿cuánto se pagó por ambas cosas?

A. — (*Dan el resultado varios*).

M. — El piso del aula tiene 44 tablas y 39 tiene el del aula contigua, ¿cuántas tablas hay en los dos?

A. — (*Dan el resultado varios alumnos*).

M. — Cada una de las ruedas de una bicicleta tiene 29 rayos ¿cuántos rayos tienen las dos ruedas?

A. — (*Dan el resultado varios alumnos*).

Fin. — Si la suma de la columna de las unidades diera 45 ¿qué cifra escribiríamos debajo?

A. — La cifra 5.

U. C. P. M.

M. — Si diera 19 ¿cuántas decenas nos llevaríamos para sumar con las decenas?

A. — Una decena.

M. — Dicten ustedes cantidades de dos cifras que yo sumaré.

A. — 37 más 45.

M. — (*Escribe y suma en voz alta*). 5 y 7 doce; escribo 2 y llevo uno; 1 y 3 cuatro y 4 ocho. Escribo 8; es 82.

A. — 49 y 27.

M. — (*Suma rápidamente y en silencio*). Ya está. Otro.

A. — 65 y 36.

M. — (*Suma rápidamente y en silencio*). Ya está.

A. — Se equivocó, señor; 5 y 6 es 11 y Vd. escribió 3 debajo de la columna de las unidades.

M. — Efectivamente; escribamos 1.

Ahora, piensen un problema. Un momentito, nada más, de tiempo.

A. — En una canasta hay 28 naranjas en otra 45, ¿cuántas naranjas hay en las dos?

M. — Muy bien. Añadiendo á las 28 naranjas de la primera canasta, las 15 de la segunda, sabremos cuántas contienen las dos. 15 más 28, etc.

A. — A este lado de la pizarra hay 36 cuadritos; al otro 49 ¿cuántos cuadritos hay á uno y otro lado de la pizarra?

M. — (*Hace rápidamente la suma*).

A. — En una caja hay 66 broches; en otra 55, ¿cuántos broches son?

M. — (*Hecha rápidamente la suma, pide á varios niños que le refieran los enunciados*).

Deberes — M. — Saquen los cuadernos y en él escriban estos ejercicios: sumar 28 y 39; 65 y 28; 19 y 76; 87 y 14. Deben resolverlos para la clase de mañana, escribir con claridad los números; conservar limpia la página y no cometer errores; para conseguirlo, sumen antes en un papel cualquiera y luego pasan al cuaderno la operación.

INDICACIONES

Cada niño de este grado, debe tener *un libro de ejercicios y problemas*. Adecuado, nadie lo ha escrito aún. Sin embargo, recomendamos como útiles : los de la *Aritmética mental y escrita* de H. ROBINSON ; *Cálculo oral y escrito* de FRANCISCO R. TISCORNIA y, particularmente, *Ejercicios y problemas de aritmética* de J. LAVERNE y L. CURY.

En estas condiciones, el maestro economiza el tiempo del dictado para instrucciones acerca de los deberes. Además, se evita el trabajo harto costoso de redactar series en condiciones de responder á las exigencias de una instrucción provechosa.

Indica la página, la serie y los ejercicios ; los alumnos escriben solamente las soluciones. Desde otro punto de vista, nuevas economías de papel y tiempo, el que se emplea para escribir un enunciado á veces incomprensible y matemáticamente, de ningún provecho.

Los desarrollos de las Lecciones 14^a 15^a 16^a y 17^a son, en lo fundamental, semejantes, variando los ejercicios de repetición. *El principio* se destina á cálculos mentales y examen de deberes que proporcionan los elementos para el desarrollo del *medio* mediante los conocimientos tratados el día antes. El examen de los deberes puede ser hecho del siguiente modo :

M. —Saquen sus cuadernos. Cámbiensen los de esta fila con los de aquella otra. Levante la mano el niño que tenga observaciones que hacer.

A. —La primer suma está mal hecha.

M. —¿ Cuánto debe ser el resultado ?

A. — 46.

M. —¿ Quiénes tienen ese resultado ?

(*Muchos alumnos levantan la mano ; el maestro escribe las cantidades, hace la operación en voz alta y los niños corrigen. Del mismo modo procede con las otras sumas*).

Se evitará en absoluto, el hábito de apuntar con tiza la cifra á llevarse para ser sumada con la columna siguiente.

Téngase presente, en ejercicios posteriores á esta lección, las observaciones que hicimos al tratar de las tablas (Exp. VII) á fin de que el niño en $8 + 9 + 5$, se habitúe á contar los resultados 8, 17, 22 y no 8 y 9, 17 ; 17 y 5, 22.

LECCIÓN 21^a

Tema ⁽¹⁾.— Enseñanza de los número 10000 y siguientes hasta 100000.

Proposición.— Los alumnos, cinco minutos antes de terminar la clase, reconocerán, leerán y reproducirán cualquier número que se les muestre ó dicte de los comprendidos entre 1 y 100000.

Desarrollo.— *Principio.* — *M.* $--2 + 3 + 4 + 1$ ¿cuánto es, Juan ?

A.—Es 10.

M. $--7 + 7 + 7 + 7 + 7$ ¿cuánto es ?

A.—Es 28.

M.—¿Cuánto es María ?

A.—Es 35.

El maestro inicia la actividad de la clase con ejercicios de cálculo mental, siempre interesantes si se observa el cuidado de mantenerse á la altura de la capacidad de los niños, enunciando, ya rápidamente los números, ya lentamente, sirviendo de admirable indicador el número de manos que se levanten. Cuando fueren cinco ó seis, el cálculo es superior á la capacidad del grado. Téngase, por otra parte, presente, que las sumas y diferencias á varios términos, son siempre, más complicadas que el cálculo donde alternen, sucesivamente, las cuatro operaciones.

Medio. — (10 minutos). El maestro, delante del pizarrón y tiza en mano, dispone las cantidades, á medida que las escribe, en columna, de esta manera :

(1) Clase dada el 16 de Marzo en el 2º grado de la escuela normal ; los alumnos al terminar la clase, escribían los números 99.999 y 100.000.

2000
3000
4000
5000
8000
10000
11 etc.

Tratando de ser rápido para aprovechar todo lo posible los siete ú ocho minutos de atención intensa que la novedad del caso provoca.

M. — Ahora presten atención. (*Escribiendo el número*).

¿ Qué número acabo de escribir, Juan ?

A. — El número 2000.

M. — ¿ Y ahora, María ?

A. — El número 3000.

M. — ¿ Qué número he escrito ?

A. — El número 4000.

M. — ¿ Y ahora ?

A. — El número 8000.

M. — Diga con más lentitud el número.

A. — Ocho mil.

M. — Con más lentitud todavía.

A. — Ocho . . . mil.

M. — Señale el número 8, Antonio.

A. — Este es el número 8.

M. — (*El maestro tapa con un cartón, las columnas de los ceros, de modo que sólo queden á la vista, las cifras de valor significativo*).

Lea, Josefa, los números de esta columna.

A. — Dos, tres, cuatro, ocho . . .

M. — Y para que estos números tomen la denominación mil, ¿ qué necesitan ?

A. — Los tres ceros.

M. — ¿ A qué lado están ?

A. — A la derecha.

M. — ¿ Cuántos ceros á la derecha de un número dan la denominación mil ?

A. — Tres ceros.

M. — ¿ Qué número he escrito ?

A. — Vd. ha escrito el número 10.

- M.* — (*El maestro agrega tres ceros á la derecha*).
 ¿ Y Ahora ?
A. — El número diez mil.
M. — ¿ Y ahora ?
A. — El número once mil.
M. — ¿ Y ahora ?
A. — El número doce mil.
M. — ¿ Y ahora ?
A. — El número veinte mil.
M. — ¿ Y este, qué número es ?
A. — 34000.
M. — ¿ Y ahora ?
A. — 56000.
M. — ¿ Y ahora ?
A. — Ochenta y nueve mil.
M. — Piensen Vds. un número con la denominación mil; yo lo escribiré ¿ Esther ?
A. — Cincuenta y cinco mil.
M. — (*Escribe rápidamente 55000*).
 ¿ Livia ?
A. — Veinte y ocho mil.
M. — 2800.
A. — Está mal escrito, señor.
M. — ¿ Qué falta ?
A. — Un cero.
M. — Escribe 02800.
A. — Hay que escribirlo á la derecha.
M. — Escribe 28000.
A. — Sesenta y ocho mil.
M. — Escribe 68000.
A. — Diez y siete mil.
M. — Escribe 170.
A. — Señor, faltan dos ceros á la derecha.
M. — Está bien. ¿ Cuántos ceros tiene 49000 ?
A. — Tres ceros.
M. — ¿ A la derecha de qué número ?
A. — A la derecha de 49.
M. — (*Pasan á la pizarra siete alumnos á quienes se dictarán rápidamente, las cantidades que mas adelante indicamos para formar hábitos activos, adiestrando*

la mano y el oído. *El maestro al principio, pronuncia con cierto énfasis el período de los millares*). Escriban: 15000, 31000, 45, 66000, 89000, 428. Tomen asiento.

(*Pasan otros siete*). Escriban: 1, 926, 28000, 59000, 99000, 8000. Tomen asiento.

M. — Y si dijésemos doce mil cuatrocientos treinta y dos escribiríamos: 12432 (*enunciando cada período con énfasis marcado*). Si dijésemos: noventa y seis mil trescientos veinte y ocho, escribiríamos: 96328.

M. — ¿Qué número acabo de escribir?

A. — Vd. ha escrito el número 27821.

M. — ¿Y ahora?

A. — Vd. ha escrito el número 45728.

M. — (*Pasan al pizarrón cinco niños*). Escriban: Ochenta y seis mil.... cuatrocientos veinte y tres, trece mil.... ciento uno; setenta y ocho mil.... doscientos dos; cuarenta y ocho mil ciento veinte y nueve; noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve; cien mil. Vuelvan á sus asientos. (*La escritura de números como 21022; 34004; etc. será asunto de la clase siguiente*).

Fin. — M. — (*Mostrando cartoncitos*) ¿Qué número es este?... Este otro.... Este otro.... (*Señalando en la pizarra números escritos de antemano*). Este otro.... Este.... ¿Cuántas cifras ó lugares se necesitan á la derecha para la denominación mil?

A. — Tres cifras ó lugares.

M. — El número 48931 ¿cuántas cifras tiene?

A. — Cinco cifras.

M. — ¿Y el número 2421?

A. — Cuatro cifras.

M. — ¿El número 26101?

A. — Cinco cifras.

M. — ¿El número 10001?

A. — Cinco cifras.

M. — ¿Cuántos ceros tiene el número 35002? (*Enunciándolo*).

A. — Dos ceros.

M. — Todos. Digan las cifras del número 89021.

Als. — Ocho, nueve, cero, dos, uno.

INDICACIONES

Evítese en absoluto, el empleo del punto ó de la coma para separar períodos. La confusión que se produce de 3^{er} grado adelante, con la de los decimales, implica todo un fracaso, que en la escuela de nuestra dirección ha costado años de lucha constante para reparar. El hábito de dividir las cantidades en períodos, lleva al caso de que se escriban decimales con dos ó tres puntos. Así, los alumnos no sabrían leer 84,455,6; 7,455,378; 4,527.

Consideramos innecesario este elemento para reconocer una cantidad. De usarse uno, aconsejamos espacio mayor entre cada tres cifras, así: 85 928, ó bien el punto arriba: 85·928.

LECCIÓN 7ª (Abril)

Tema. — Tabla de multiplicar del 8.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Cuánto es 3×4 ?, ¿ 5×6 ?, ¿ 7×6 ?, ¿ 4×4 ?, ¿ 6×1 ?, ¿ $8 + 8$?, ¿ $32 + 8$?, ¿ $56 + 8$?, ¿ $0 + 8$? (*Mostrando cartoncitos cortados con sumas ó productos semejantes á los anteriores*).

M. — ¿3 por cuánto, da 12? ¿Cuántas veces 6 es 30? ¿Cuántas veces 2 es 16?

M. — Piensen números que multiplicados den 15.... 20.... 12.... 18.... 14.... (*Será inútil dar números altos como 65, porque contestarán solamente dos ó tres alumnos, lo que indica lo inoportuno del ejercicio. Sin embargo, son pocos los maestros que atienden esta indicación silenciosa de la clase; mientras hay uno que conteste, suele empeñarse en cálculos siempre difíciles, increpando la inhabilidad de los educandos para resolverlos*).

Medio. — *M.* — Saquen las pizarras. 8 naranjas y 8 naranjas ¿cuántas naranjas son?

A. — 16 naranjas.

M. — ¿Cuántas veces 8 naranjas?

A. — 2 veces 8 naranjas.

M. — 2 veces 8 ¿es, pues?

A. — 16.

M. — Escriban $2 \times 8 = 16$. (*Escribiendo á la vez en el pizarrón*).

M. — Si á 16 naranjas, (*señalando en el pizarrón*) añadimos 8 naranjas. ¿Cuántas veces 8 naranjas tendremos?

A. — Tres veces 8 naranjas. (*Escribe 3×8 debajo de 2×8*).

M. — ¿Cuántas son 16 naranjas más 8 naranjas, ó 3 veces 8 naranjas?

A. — 24 naranjas.

M. — Luego, 3 veces 8 es igual á 24. Escriban. 24 es, pues, ¿cuántas veces 8?

A. — 3 veces 8.

M. — Y $24 + 8$ ¿cuántas veces 8 será?

A. — 4 veces 8.

M. — ¿Cuántos son 24 lápices más 8 lápices?

A. — 32 lápices.

M. — Luego, 4 veces 8 lápices serán ¿cuántos lápices?

A. — 32 lápices.

M. — Escriban $4 \times 8 = 32$.

A. — Y 5×8 ¿cuánto será.... ¿á 32 más cuánto?

A. — A 32 más 8 igual á 40.

M. — 8×5 , pues?

A. — 40. (*Escriben $5 \times 8 = 40$*).

M. — ¿Y 6×8 ?

A. — $40 + 8$ ó sea 48. (*Escriben con el maestro $6 \times 8 = 48$*).

M. — (*Escribe en columna, debajo de 6×8 , indicando, los siguientes productos: $7 \times 8 =$; $8 \times 8 =$; $9 \times 8 =$; $10 \times 8 =$ y pide luego el resultado*). Lea, Mario, la tabla que ha escrito.

A. — 2×8 , 16; 3×8 , 24; 4×8 , 32.

M. — Siga Catalina.

A. — 5×8 , 40; 6×8 , 48.

M. — Siga Antonio.

A. — $7 \times 8 = 56$; $8 \times 8 = 64$.

M. — Escribamos, ahora $1 \times 8 = 8$. Guarden las pizarras. Observen. ¿En qué cifras terminan estos productos?

A. — En 8, 6, 4, 2, 0, 8, 6, 4, 2 y 0.

(El maestro escribe:

8	6	4	2	0
8	6	4	2	0

Si 1×8 es 8, 2 por 8 es diez.... y seis (con énfasis y señalando el 6). Si 2 por 8 es 16, 3×8 es veinte.... y cuatro.

(Borra la tabla y deja los números últimamente escritos). Si 3×8 es 24, ¿cuánto será 4×8 ?

A. — 32.

M. — Si 32 es una multiplicación de 8 ¿cuál será el número que le sigue, multiplicación de 8?

A. — El número 40.

M. — Han observado Vds. cómo hemos dicho solo una vez diez, una vez veinte, una vez treinta, agregando luego, la cifra 6, 4, 2, 0? Cuando llegamos á la cifra 0, como en 40, el número siguiente de la multiplicación es 8, es cuarenta y ocho y no 58.

Si 6×8 es 48. ¿Cuánto será 7×8 ? (Señalando el 6).

A. — 56.

M. — Piensen un número que sea una multiplicación de 8.

Als. — 40; 56; 64; 16; 24; 72.

M. — ¿ 2×8 cuánto es?... ¿ 3×8 cuánto es?... ¿ 4×8 ?... ¿ 5×8 ? ¿ 6×8 ?...

M. — Piensen todos la multiplicación de un número por 8 y el resultado.

Als. — $7 \times 8 = 56$; $2 \times 8 = 16$; $9 \times 8 = 72$; $10 \times 8 = 80$.

M. — Van á decirme desde 8, todos los números que resulten de multiplicar 8 por 1, 2, 3, 4, 5, etc.

A. — 8, 16, 24, 32....

M. — Siga, Nemesia....

A. — 40, 48, 56, 64, 72, 80.

www.libtool.com.cn

Fin. — (*Pasan al pizarrón seis alumnos*).

M. — Escriban todos, la tabla del 8. Dos minutos de tiempo para que la escriban.

Atención los que están sentados.

16 es ¿cuántas veces 8?... 32 es ¿cuántas veces 8?... 24 es ¿cuántas veces 8?... 6×8 ¿cuánto es?

Vuelvan á sus asientos los del pizarrón. (*Pasan otros seis*). Lea y corrija la tabla que escribió José, María. (*Lee en voz alta é indica el error que encuentra. La clase observa*). Vuelvan á sus asientos.

La enunciación en voz alta y clara de las expresiones, es tan importante como su impresión óptica, para dejar en el cerebro fuertemente asociadas, las imágenes del producto á la de los factores, de modo que la percepción acústica ó visual de una parte evoque por contigüidad, la otra (sinestesia acústico-visiva).

Deberes. — **M.** — Para mañana, escrita en números grandes, de modo que ocupe toda la página, traerán la tabla del 8. Quiero el mayor cuidado en la escritura de los números y el signo igual. (*Estas y otras recomendaciones se hacen con el propósito de que el alumno escriba despacio las expresiones, para fijar, así, más tiempo la atención y grabar, así, más intensamente la imagen*).

INDICACIONES

El uso de tablas graduadas para fijar el producto asociado á los dos factores, nos parece de poco resultado y fastidioso, aparte de que, algunas, ofrecen combinaciones que exigen ingenio para comprender el mecanismo. La *regla de los productos*, como variedad en una lección, es interesante.

Conocido el significado de la palabra *veces* y *multiplicado por*, difícil nos es dar, y con nosotros cuantos tratadistas se han ocupado de las tablas, con un artificio que grabe, en el cerebro, rápidamente, la imagen numérica correspondiente al producto de dos números dígitos. Que la percepción por la vista ó el oído, de 7×8 (explícito) evoque inmediatamente 56 (implí-

cito). La asociación de las cifras finales que utilizamos en las tablas de suma, es, aquí, inaplicable. De modo que nos queda solo este recurso: *la tabla de los productos será aprendida bien de memoria* (J. M. TORRES, « Metodología », pág. 238) mediante ejercicios, dictando á veces, los factores, á veces el producto: ¿32 es producto de qué números? ¿32 es producto de 8 por cuánto? ¿Cuántas veces 8 da 32? ¿8 por 4, cuánto es? y exigiendo al niño la reproducción mental y escrita de las tablas, de los productos parciales, de los productos parciales en cálculos á varias operaciones, como:

$$((3 + 4) 8 - 6 - 10 - 10 - 10 - 10 - 6) 8 \text{ etc.}$$

Por otra parte, en el 2º grado, por largo é innecesario, conviene hacer uso lo menos posible del abaco, los lápices, las figuritas, los puntos, para convencer al niño por los ojos, de que 8 veces 4 es 32.

Menos anacrónico es:

$$\begin{array}{rcl} 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 & = & 32 \\ 8 \text{ veces} & 4 & = 32 \\ 8 \times & 4 & = 32 \end{array}$$

para construir la tabla, pero no para formar la aptitud de repetirla. Sin embargo, es digno de notarse que, los alumnos cometen menos errores en la multiplicación que en la suma, hallan más dificultades en esta operación que en aquélla.

Así, $8 + 7$ es de reacción más larga, y no siempre positiva, que 8×7 .

Por último, debe lamentarse el habitual descuido de los maestros, acerca de un punto, si se quiere, fastidioso, pero fundamental en el mecanismo de la Aritmética (las operaciones), razón por la que en todos los tiempos, desde los más antiguos, ha preocupado á talentos de nombradía como Pitágoras.

LECCIÓN 16ª

Tema. — Resta : 21 — 12; 42 — 25; 88 — 79.

Desarrollo. — *Principio.* — (*En la pizarra hay números escritos aquí y acullá, dispuestos en columna los que deben restarse*). — *M.* — $7 + 8 - 6$ ¿ cuánto es ? (*Hay la censurable tendencia á los cálculos largos que los alumnos no pueden resolver*).

A. — Es 9.

M. — $3 + 4 - 2 + 8 - 4$ ¿ cuánto es ?

A. — Es 9.

M. — ¿ $8 + 7$?, ¿ $6 + 7$?, ¿ $9 + 8$? ¿ $14 - 7$? ¿ $(6 + 2) 8$? ¿ $3 + 4 + 8 - 7$?, ¿ $5 + 6 - 9$? ¿ $8 \times 7 + 5$? ¿ $6 \times 3 - 7$? ¿ $(3 + 2 + 3) 8$?

M. — ¿ Cuántas decenas tiene este número ?

A. — Cuatro decenas.

M. — ¿ Cuántas unidades tiene una decena ? ¿ Tres decenas ? ¿ cuántas decenas y unidades tiene el número 36 ?

A. — Tres decenas y seis unidades.

Medio. — *M.* — Si de 21 cuadernos quitamos 12 cuadernos ¿ cuántos quedan ?

A. — 9 cuadernos.

M. — Como no es posible, de números grandes restar mentalmente números grandes sin peligro de equivocarse, vamos á hacerlo de una manera más segura, por escrito. Restemos de 21, 12. Coloco el restando arriba y el restador abajo, así :

$$\begin{array}{r} 21 \\ - 12 \\ \hline \end{array}$$

Luego resto. De una unidad no puedo restar dos unidades, pero en 21 hay dos decenas y una unidad. Tomo de las dos decenas una que vale 10 unidades ; añadidas á esta unidad son 11 unidades ; de modo, pues, que en vez de 2, aquí, nos queda 1 ; en vez

de 1 aquí, tenemos 11; en vez de 21, una decena y 11 unidades, así:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 11 \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

Quitando 2 unidades de 11 unidades, quedan 9 unidades, que coloco debajo de la columna de las unidades. Aquí nos quedó una decena; quitando una decena de una decena nos queda cero, que coloco debajo de la columna de las decenas.

Otro ejemplo. -- Restemos 25 de 42. Escribamos:

$$\begin{array}{r} 42 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$$

5 de 2 no se puede restar; tomemos una decena de 4; 5 de 12 da 7 (*escribe*), 2 de 3 queda 1 (*escribe* 1). Otro ejemplo. -- Restemos 79 de 88.

Escribamos:

$$\begin{array}{r} 88 \\ - 79 \\ \hline \end{array}$$

9 de 8 no se puede restar. De 8 decenas tomo una; aquí quedan, entonces, 7 decenas y digo: 9 de 18 quedan 9, escribo 9. Siete de siete, resta 0.

¿Todos han comprendido?

(*El maestro hablará despacio, y señalará constantemente en la pizarra á cada cifra que nombre. Si una tercera parte de la clase no hubiera comprendido, se usará, entonces, el procedimiento del Grand Papa, no sin antes haber probado nuevamente el que indicamos, descomponiendo con más proligidad el restando*).

M. — (*Pusan seis niños al pizarrón*). Resten de 35 el número 18. ¿Diga cómo ha hecho, Juan?

A. — 8 de 5 no se puede restar. Tomo una decena de 3 y digo: 8 de 15 queda 7; 1 de 2 queda 1.

M. — Resten de 82, el número 19. ¿Diga cómo ha hecho Pedro?

A. — (*Explica la operación*).

M. — Vuelvan á sus asientos.

(Pasan otros seis y hacen operaciones semejantes, acostumbrando, con preguntas y mandatos á que los alumnos sean activos y rápidos).

M. — Saquen todos, sus pizarras.

Resten, de 65 el número 27 (*después de 12 ó 15 segundos pide el resultado*); de 71 el número 13, etc.

Ahora este problema: Hay en este atado 32 lápices; quito 14 ¿cuántos quedan?

(Los alumnos hacen la operación y levantan la mano los que terminan).

¿Cuántos lápices quedan? (*Interrogando á los alumnos que no fueron á la pizarra*).

A. — 18 lápices.

M. — Un vendedor llevaba en una canasta, 53 huevos; un niño poco respetuoso, al tirar una piedra á un perro, da con ella en la canasta y rompe 16 huevos. ¿Cuántos sanos, quedaron al vendedor?

A. — 37 huevos.

M. — La mamá dió á su hijo 60 centavos, de los que gastó 45 en leña. ¿Qué vuelto debía traer?

A. — 15 centavos.

Fin. — *M.* — Guarden las pizarras.

Cuando la cifra de las unidades del sustraendo es mayor que la del minuendo ¿cuántas decenas se toma de las decenas del minuendo?

A. — Se toma una decena.

M. — De 45 para restar 18, 8 ¿de qué número debe restarse?

A. — De 5.

M. — Pero de 5 no es posible. ¿De qué número, entonces?

A. — De 15.

M. — De 71 para restar 56, 6 ¿de qué número debe restarse?

A. — De 11.

M. — Dicten ustedes dos cantidades; yo voy á restarlas.

A. — De 26 quitar 35.

M. — ¿De 26 naranjas pueden quitarse 35?

A. — No, señor.

M. — ¿Cuál de los números es siempre mayor?

A. — El restando, el de arriba.

M. — Muy bien. Luego, piensen un ejemplo posible.

A. — De 47 quitar 32.

M. — (*Hace la resta en voz alta mientras escribe el resultado*).

A. — De 82 restar 28.

M. — (*Hace la resta en voz alta*).

Piensen ahora un problema.

(*Los niños enuncian varios problemas. El maestro, elige el que convenga, pues en él, está preguntar á uno ó varios*).

Deberes. — Las mismas indicaciones que hicimos en el desarrollo de la lección de suma.

LECCIÓN 9ª (Mayo)

Tema.— Tabla de dividir del 4.

Desarrollo. — *Principio.* — (*Pasan al pizarrón seis niños*).

M. — Escriban 20 dividido por 5, de las dos maneras. (*Los alumnos escriben $20 : 5$ y $\frac{20}{5}$*), 4 dividido por 3, 1200 dividido por 150; 125 dividido por 426; 1 dividido por 6. Vuelvan á sus asientos.

M. — Resuelvan este cálculo: $2 \times 6 \div 3$ ¿cuánto es?

A. — 4.

M. — $(5 + 7 + 3) : 3$?

A. — 5.

M. — De una higuera se descolgaron 18 higos, y se los repartieron 3 chicos. ¿Cuántos higos tocó á cada uno?

A. — Seis higos.

M. — Un trabajador ganó el Lunes, Martes y Jueves, 12 pesos. ¿Cuánto ganó por día?

A. — 4 pesos.

M.— Antonio y José, dos fruteros que trabajan en sociedad, salieron á vender naranjas y tomates; el 1º sacó 2 pesos de las naranjas y 3 de los tomates. El 2º sacó 4 pesos de las naranjas y 3 de los tomates. Al repartirse el dinero, ¿qué cantidad tocaría á cada uno?

A.— 6 pesos.

M.— ¿Cuánto es $21 \div 3$? ¿ $18 \div 3$? ¿ $24 \div 3$?
¿ $9 \div 3$? ¿ $(9 - 3 + 5 + 1) : 3$? ¿ $3 \times 4 : 3$?
¿ $3 \times 8 : 3$?

Tres niños compraron 17 plumas; al repartírselas hallaron 5 que no servían. ¿Cuántas buenas tocarían á cada uno?

A.— 4 plumas.

Medio.— **M.**— (*Pasan cuatro niños al frente*). Observen Vds. ¿Cuántas reglitas tengo en la mano?

A.— Ocho reglitas.

M.— Voy á repartirlas entre estos 4 niños. (*Reparte*) ¿Cuántas reglitas tocó á cada uno?

A.— Dos reglitas.

M.— Luego, 8 cosas, ó unidades *repartidas* entre cuatro ¿cuánto toca á cada uno?

A.— Toca 2 á cada uno.

M.— En vez de *repartidas* podemos decir *divididas*; 8 unidades divididas entre cuatro personas, ú 8 dividido entre 4, es ¿cuánto?

A.— 2.

M.— Recordarán Vds. cómo se escribe 8 dividido por 4... Bien. (*Escribe el maestro enunciando en voz alta: $8 : 4 = 2$*).

M.— Ahora, tengo 4 nueces, repartidas entre los cuatro niños ¿cuánto toca á cada uno? (*repartiendo*).

A.— Una nuez á cada uno.

M.— Luego 4 dividido entre 4 es ¿cuánto?

A.— Es uno. (*El maestro escribe como la 1ª vez: $4 : 4 = 1$*).

M.— Aquí tengo 12 bolitas. Repartámoslas siempre entre los 4 niños. ¿Cuántas bolitas toca á cada uno?

A.— Toca 3 bolitas á cada uno.

M.— Escribamos, pues, ¿cómo? (*dirigiéndose á la pizarra*).

A.— Doce dividido entre cuatro es igual á tres. (*El maestro escribe*).

M.— Si tuviéramos 16 bolitas que repartir ¿cuántas tocaría á cada uno ?

A.— Cuatro bolitas.

M.— ¿ Y escribiríamos ?

A.— 16 dividido entre 4, igual á 4.

M.— Ahora, estos 20 centavos quiero dividirlos entre estos cuatro niños, ¿ cuántos daré á cada uno ?

A.— Cinco centavos.

M.— Luego 20 dividido entre 4 es igual á ¿cuánto ?

A.— Es igual á 5.

M.— Vuelvan á sus asientos. Si tuviéramos que repartir 24 centavos entre los cuatro niños ?

A.— Tocaría 6 centavos á cada uno. (*El maestro escribe rápidamente $24 : 4 = 6$*).

M.— ¿ Y 28 lápices divididos entre 4 niños ?

A.— Tocaría á cada uno 7 lápices, (*escribe rápidamente*).

M.— Y 32 vidrios repartidos entre 4 ventanas ?

A.— Tocaría á cada ventana 8 vidrios. (*Escribe*).

M.— ¿ Y 36 casas repartidas entre cuatro manzanas ?

A.— Tocaría 9 casas á cada manzana. (*Escribe*).

M.— ¿ Y 40 dividido por 4 ¿cuánto es? A.—Es 10.

M.— Estas 6 bolitas divididas, Alda, entre Juan, José, Antonio y Ruiz...

A.— No alcanzo á dar 2 á cada uno y dando una, sobran.

M.— Eso es. Luego hay cantidades que no pueden repartirse exactamente entre 4; como 7 bolitas, 11 bolitas, 13 bolitas, 5 bolitas; como... Juan?

A.— 9 bolitas.

M.— ¿ Salustiano ?

A.— 15 bolitas.

M.— ¿ $4 \div 4$, es ?; ¿ $12 \div 4 \dots$? ¿ $20 \div 4 \dots$? ¿ $36 \div 4 \dots$?

Para que la construcción de la tabla resulte clara y rápida, no conviene el procedimiento de la resta, pues no conduce ni da idea exacta de la división, empleado por algunos; ejemplos: ¿ Cuántos lápices tengo? A.— 8 lápices.

M.— ¿Cuántas veces puedo quitar 4 lápices de 8 lápices? cuente Josefa. (*El maestro quita de 8 4*).

A.— Una, dos... dos veces 4 lápices.

M.— De 8 unidades ¿cuántas veces 4 unidades podemos quitar?

A.— Dos veces cuatro unidades.

M.— Luego 4 lápices en 8 lápices están contenidos ¿cuántas veces?

A.— Dos veces.

A esta altura del desarrollo no podrá decirse : 8 lápices divididos entre 4 lápices, ni 8 unidades divididas entre 4 unidades, sino : 4 unidades en 8 unidades, que no es la idea de división ni la diferencia específica entre el dividendo y el divisor, de suma importancia que el niño la adquiera por hábito.

M.—(*Borra la tabla escrita en la pizarra*). Quiero que aprendan Vds. un modo fácil de recordar la tabla de dividir del 4, la que habíamos hecho. Diga un niño la tabla de multiplicar del 4.

A.— 1 por 4, 4; 2 por 4, 8; etc.

M.— Santiago.

A.— 6 por 4, 24; etc.

M.— Bien; esta tabla aquí la tenemos escrita.

Da vuelta la pizarra giratoria, que en números grandes y claros presenta lo siguiente :

$1 \times 4 = 4$	$4 : 4 = 1$
$2 \times 4 = 8$	$8 : 4 = 2$
$3 \times 4 = 12$	$12 : 4 = 3$
$4 \times 4 = 16$	$16 : 4 = 4$
$5 \times 4 = 20$	$20 : 4 = 5$
$6 \times 4 = 24$	$24 : 4 = 6$
$7 \times 4 = 28$	$28 : 4 = 7$
$8 \times 4 = 32$	$32 : 4 = 8$
$9 \times 4 = 36$	$36 : 4 = 9$
$10 \times 4 = 40$	$40 : 4 = 10$

M.— Lea, Rosa. (*El maestro señala $7 \times 4 = 28$*).

A.— Siete por cuatro igual á 28.

M.—(*Señala la expresión que le sigue á la fila horizontal*).

A.— 28 dividido entre 4 igual á 7.

M.—Ven Vds. *veintiocho dividido entre cuatro igual á siete.* (*Señalando cada número en la tabla de multiplicar*).

Lea, Manuel.

A.—Nueve por cuatro 36.

M.—Lea, Juana.

A.—36 dividido por 4, igual á 9.

M.—Ven Vds.; *36 dividido entre 4*, etc. De modo, que cuando decimos 32 dividido entre 4, el resultado es... (*señalando siempre en la tabla de multiplicar*).

A.—Es 8.

M.—Cuando decimos 16 dividido entre 4, el cociente es?...

A.—Es 4.

M.—Así, pues, quien sabe la tabla de multiplicar del 4, sabe la de dividir del 4.

Treinta y seis es igual á 4 ¿por cuánto?

A.—A 4 por 9.

M.—¿Cuál es, entonces, el cociente de dividir 36 entre 4?

A.—Es 9.

M.—¿40 es 4 por cuánto?

A.—Es 4 por 10.

M.—¿Cuarenta dividido entre 4 es entonces?

A.—Es diez.

M.—¿Y 40 dividido entre 10?

A.—Es 4.

M.—Estos números, divididos por los de esta columna (*señalando en la tabla de multiplicar*), dan los de esta columna; divididos por los de esta columna, dan los de esta otra.

En la enseñanza de las demás tablas podrá usarse de este solo procedimiento, asociando las de dividir á las de multiplicar; la objetivación se hace con el único fin de que los alumnos formen intuitivamente, idea exacta de la división: repartir cosas entre personas ó grupos.

Fin. — *M.*—¿Lo que dividimos entre los cuatro niños eran qué?

A.—Lápices, bolitas, reglas....

M.—¿A quiénes los repartíamos?

A.—A 4 niños.

M.—Esta columna de cuatros (*señalando los divisores*) representan, pues ?

A.—Representan niños.

M.—¿Y esta columna de números, antes de los cuatros ?

A.—Representan lápices, bolitas, monedas.

M.—(*Gira la pizarra*). Cada niño piense un número dividido entre cuatro con el resultado ó cociente ; seguiremos el orden de la fila ; primero Antonio, después José, luego Salustiano, etc.

A.—(*Los alumnos enuncian, uno por uno, lo que han pensado ; las equivocaciones se corrigen, auxiliadas por la tabla de multiplicar ; si dicen $38 : 4 = 8$, el maestro repregunta, 4 por 8 cuánto es ?*

A.—32.

M.—Entonces es igual á 8, qué número dividido por 4 ?)

M.—¿ Qué número dividido por 4 da 5 ?, dividido por 4 da 9 ?, dividido por 4 da 3 ?, dividido por 4 da 2 ?, 36 dividido por 4 da ? ¿ 28 dividido por 4 da ? ¿ 24 dividido por 4 da ? Diga, César la tabla de dividir del 4.

Deberes.—Para mañana, ocupando toda la página del cuaderno, en números grandes escritos con el mayor cuidado, en línea bien vertical, van á traerme la tabla, que acaban de aprender. Además, no bien empezamos la clase, el niño que yo pregunte acerca de la tabla, quiero que responda inmediatamente ¿ $36 \div 4$? no bien acabe de decir 4, contestará 9 ; acuérdense bien.

LECCIÓN 11 (Mayo)

Tema. — El metro. **A.** — 1º Percepción de la medida ; 2º Lo que se mide ; 3º Cómo se mide ; 4º Quiénes lo usan ; 5º Substancias de que se hace. **B.** 1º Ejercicios de aplicación manual ; 2º Ejercicios de aplicación mental con los objetos presentes ; sin los objetos. **C.** Reproducción mental de la unidad. **D.** Deberes.

Desarrollo. — **A.** — *Noción visual de la unidad y su empleo. (En una mesa está extendido el metro que usan los tenderos; el maestro mide cintas, piolines, alambres, etc.)*

M. — Observen lo que voy á hacer (*mide un metro de cinta y la corta*).

¿Qué largo tiene el pedazo de cinta?

A. — El largo de la vara de madera.

M. — (*Hace lo mismo con el piolín y el alambre*).

M. — Esta madera, es un metro y todas las cosas del mismo largo, miden un metro. (*Escribe la palabra metro en caracteres grandes en el pizarrón*). ¿Cuánto miden, pues, de largo los pedazos de cinta, de piola y de alambre que cortamos?

A. — Miden un metro de largo.

M. — Observen. (*Mide de manera que noten bien los niños, un pedazo de cordel de más de un metro, estirándolo sobre la vara*).

¿Cuánto mide este cordel?

A. — Mide más de un metro.

M. — (*Mide un bastón*). ¿Y este bastón?

A. — Mide un metro de largo.

M. — ¿Y este género?

A. — Mide un metro de largo.

M. — Midamos el ancho ¿cuánto?

A. — Mide menos de un metro.

M. — ¿A quiénes han visto ustedes esta vara para medir?

A. — A los tenderos para medir géneros, cintas.

Otro. — A los almaceneros para medir cuerdas y cadenas.

M. — (*Toma la vara y mide un pedazo de tabla*).

¿Cuánto mide?

A. — Esa tabla mide un metro.

M. — Y esta guarda, á qué altura está del piso?

A. — Está á un metro.

M. — Qué tengo en la mano?

A. — Vd. tiene en la mano un metro.

M. — Sirve para medir, ¿qué de las cosas?

A. — El largo de las cosas.

M. — Presten atención (*mide la pizarra*). ¿Qué largo tiene la pizarra?

A. — Tiene 4 metros de largo.

M. — (*Mide la pared*). ¿Qué ancho tiene la pared?

A. — Cinco metros de ancho y un poco más.

M. — (*Mide una cinta*). ¿Qué largo tiene la cinta?

A. — Tiene 5 metros de largo.

M. — (*Mide un cordel con el bastón de un metro*).
¿Cuánto mide este cordel? (*El largo de estos objetos se prepara anticipadamente*).

A. — Mide 4 metros.

M. — Si no tuviera el metro ¿con qué podría medir?

A. — Con el bastón.

M. — Pero ¿qué largo debe tener?

A. — Un metro de largo.

M. — ¿Con qué otra cosa?

A. — Con todo objeto que tenga la longitud de un metro.

M. — Muy bien. Vean Vds. el metro que usan los carpinteros y los albañiles (*aplicándolo sobre la vara*).
El que usan los sastres mide ¿cuántos metros?

A. — Dos metros.

M. — ¿Este es?...

A. — De madera; ese otro de hierro; el otro de género.

M. Si Vds. fueran al campo ¿cuál llevarían por comodidad?

A. — El de cinta ó el de madera que se dobla.

M. — ¿Si fueran tenderos?

A. — El de madera que no se dobla.

B. — (*Pasan seis niños al frente*).

M. — Juan, mida el largo del piso; Nemesia, la altura del caballete; Antonio, el ancho de la puerta; Julia, el largo de este hilo; Tobías, la cantidad de alambre que hay en ese rollo, y Vd. el ancho del patio.
(*Cada uno elige una de las varias medidas que ha llevado el maestro*).

M. — El resto de la clase, calcule la altura de la pared. ¿De cuántos metros será?

A.—Tres . . . cuatro . . . tres . . . cinco . . . cinco . . . cinco.

M.—Tiene cinco metros. ¿Calculen el largo de esta varita?

A.—Dos metros y un poco más . . . Tres metros . . . Dos metros y un poco más . . .

M.—Midámosla. Uno, dos y tres; justo. ¿Qué largo tiene el piso, Juan?

A.—8 metros.

M.—Está bien. ¿Qué ancho tiene el patio Aristides? etc. Vuelvan á sus asientos. (*Ocultá los objetos que tienen un metro de largo*). Piensen todos en un objeto, su largo y altura.

A.—La puerta tiene 3 metros de altura.

Otro.—Juan mide un metro de altura (*el maestro comprueba rápidamente*).

Otro.—Desde la pizarra al techo hay tres metros de distancia.

Otro.—El portamapas tiene dos metros y un poco más de altura.

Otro.—El largo del puntero es de dos metros (*lo comprueba*).

Otro.—La torre de la Municipalidad tiene diez metros.

M.—¿Quiénes creen que tiene diez metros?

A.—No señor, tiene más, tiene 20 metros.

M.—Tiene 25 metros.

Otro.—El ancho del río es de 8 metros.

C.—M. — Bien. Mañana averiguarán con más detención, esos largos y anchos. Ahora, quiero ver si recuerdan el largo de un metro. (*Pasan tres niños á la pizarra*). Vds. tracen una raya de un metro de largo. (*Los niños trazan una raya y el maestro la mide*). Las tres son cortas. Borren; tracen otra raya . . . Son todavía cortas. Vuelvan á los asientos. (*Pasan otros tres niños*). Rita y Pascual, tracen una recta de un metro. Jorge, saque del carretel un metro de hilo. (*El maestro mide y comprueba la exactitud*). Vuelvan á sus asientos.

D. — M. — ¿ Para qué sirve el metro ?

A. — El metro sirve para medir el largo de una cinta, el alto de una pared, el ancho de un género

Otro. — La distancia entre dos cosas, la profundidad de un pozo.

Otro. — La altura de una torre.

Otro. — El largo de un camino.

Otro. — La altura de un árbol.

M. — ¿ Quiénes lo usan ?

A. — Los tenderos, los carpinteros, los sastres

Otro. — Las costureras, el ingeniero, el agricultor, el albañil.

M. — ¿ Y su mamá ?

A. — Sí, señor ; lo usa cuando hace vestidos.

M. — ¿ De qué puede hacerse un metro ?

A. — De hilo, de madera

Otro. — De género, de hierro, de papel

Otro. — De acero, de varita.

Deber. — Bien. Ahora que saben Vds. medir, y conocen el largo, para mañana trae cada uno, un cordel, una cinta, una varita ó una tira de papel de un metro de largo y además, el largo, ó ancho, ó altura, ó profundidad de algo: la calle, el aljibe, el comedor, la vereda, la plaza, el parral, la escalera, etc.

LECCIÓN 5ª (Junio)

Tema. — Multiplicación de 23 por 14 ; de 85 por 76 ; de un número cualquiera por otro de dos cifras.

Desarrollo. — Principio. — (*Pasan al pizarrón siete niños*). **M. —** Escriban : 15 millones ; 50 mil ; 1001 ; 66909 ; 1846765 ; 5300 ; 124 mil ; 15600 (*dictará un número cada 8 segundos y no repetirá el enunciado aunque varios niños lo requieran. Cuando ningún niño escriba bien un número, explicará de acuerdo con las enseñanzas anteriores*). Vuelvan á sus asientos.

M. — ¿A qué altura del piso está colgado el almanaque?

A. — A dos metros del piso.

Otro. — A dos metros y medio.

M. — (*Mide rápidamente*). A dos metros y medio.

Un número que dividido por 9 dé 4...., dé 6.... dé 8....

(*En la pizarra escribe $7 + 8 - 4$ con mucha rapidez haciéndola girar de igual manera*). ¿Cuánto es.

Als. — 10...., 11...., 9...., 11...., 11.

M. — ¿Clase?

Todos. — Once. (*Escribe $7 \times 8 \div 8$*). ¿Cuánto es?

Als. — 7...., 7...., 7....

M. — Atentos: ($5 + 7 - 2 - 4$) $\times 9$. ¿Cuánto es?

Als. — 54...., 54...., 54.

M. — ($4 + 3$) $\times 6 \div 7$. ¿Cuánto es?

Als. — 6...., 6...., 6.

M. — $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (*rápidamente*). ¿Cuánto es?

Als. — 5...., 5...., 6...., 5...., 6...., 6...., 6.

M. — Es 6. ¿Con qué medimos el largo de una zanja?

A. — Con el metro.

M. — ¿Con qué mide el sastre la cintura del cliente?

A. — Con la cinta métrica.

M. — Digan las monedas de níquel que conocen Vds.

A. — Las de 5 centavos, de 10 y de 20.

M. — Bien. ¿ 4×5 ? ¿ 4×7 ? ¿ 6×8 ? ¿ 3×1 ? ¿ 8×2 ? ¿ 2×8 ?

Medio. — Ahora, voy á enseñarles á multiplicar un número cualquiera, por otro de dos cifras. 23, por ejemplo, por 14. (*Escribe $\begin{smallmatrix} 23 \\ \times 14 \end{smallmatrix}$*)

Observen como yo hago: 4 por 3, doce; escribo 2 y llevo 1; ocho y una que llevaba, 9; escribo 9. Una por 3, 3; escribo el 3 debajo del 9 un lugar menos hacia la izquierda. Uno por 2, 2; escribo el 2 al lado del 3, así. Ahora trazo una raya debajo y sumo en

columna: 2 es 2; 3 y 9 es 12, escribo 2 y llevo 1; 1 y 2, 3; escribo 3. Está: 23 por 14 es 322. (*Números grandes, escrupulosidad en la colocación de las cifras y que el niño, sobre todo, vea bien lo que se hace; lo importante es que quede la imagen de la posición de los productos parciales:*

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 14 \\ \hline 92 \\ 23 \\ \hline 322 \end{array}$$

M. — (*Borra*) Voy á hacer otra multiplicación: 85 por 76. (*El mismo procedimiento emplea*).

¿Se han dado cuenta Vds.? Levante la mano quien no haya comprendido. Piensen Vds. dos números, voy á multiplicarlos. Díte, Julio.

A. — 24 por 16.

M. — (*Hace rápidamente la operación en voz alta y con suma claridad*). Está. Otro.

A. — 98 por 69.

Hace rápidamente la operación, que al economizar tiempo, reconcentra cada vez más la atención, fija mejor el detalle nuevo asociado á los elementos conocidos y aguijonea el interés, pues, los niños admiran siempre la rapidez con que se hace lo que conocen, y que á ellos exige tiempo.

M. — (*Pasan cuatro niños*). Multipliquen 24 por 13. Santiago, hágalo en voz alta.

A. — Tres por 4 doce . . . , etc.

M. — Borren. Multipliquen 86 por 12. Josefina, hágalo en voz alta.

A. — Dos por 6, 12; etc.

M. — Vuelvan á sus asientos. (*Pasan cinco niños*). Multipliquen 21 por 16 . . . Multipliquen 82 por 12 . . . Vuelvan á sus asientos. (*El maestro no cometerá el error de hacer multiplicar 89 por 78, que exigiría tiempo, absorbiendo más atención el esfuerzo para recordar*

la tabla que el lugar que ocupan los productos parciales).

Saquen sus pizarras. Multipliquen : 43 por 14.

Deja pasar 20 segundos por lo menos, tiempo medio de la clase para la operación; aunque varios niños levanten la mano, preguntando ni á los retardados ni á los precoces. Creemos oportuno, en este grado ya, recomendar á los maestros toda clase de empeños para impedir, en Aritmética sobre todo, que los niños *soplen*. funestísimo hábito que inhibe las integraciones centrales y hace á los educandos, eco de uno ó dos, más que inteligentes, despejados.

Multipliquen 215 por 27, 13321 por 12, etc., (*cuyos productos el maestro conoce*).

Fin. — *M.* — Guarden las pizarras. Estos se llaman productos parciales, (*señalando*), esta suma producto total. Lea en estas multiplicaciones, un producto parcial.

A. — (*Lee un producto parcial*).

Otro. — (*Lee un producto parcial*).

M. — Lea un producto total.

A. — (*Lee un producto total*).

Otro. — (*Id. . . . id.*)

M. — Cada producto parcial ¿cuántas cifras se corre á la izquierda ?

A. — Una cifra á la izquierda .

M. — La primer cifra del 2º producto parcial ¿qué columna ocupa ?

A. — La columna de las decenas.

Deberes. — Las mismas indicaciones hechas al tratar de la suma.

LECCIÓN 13ª

Tema. — Multiplicar un número por otro de cifras iguales.

Desarrollo. — *Principio.* — ((6 + 9) : 5 + 1) 8
¿cuánto es ?

Als. — 32 . . . 32 . . . 32.

M. — (((21 - 6) : 5) × 8 + 6 + 6) : 9. ¿Cuánto es ?

Als. — Es 4.

M. — ¿Cuántos metros de ancho tiene la calle?

A. — Doce metros de ancho.

M. — (*Cálculos en la pizarra giratoria*).

M. — Tomen las pizarras. Quiero saber si 1049283 es el producto de 45621 por 23. Hagan la prueba.

A. — Sí, señor; 1049283 es el producto de 45621 por 23.

M. — Un chacarero vendió 1523 bolsas de trigo á 6 pesos la bolsa ¿cuánto obtuvo de la venta?

Als. — (*Hacen la operación y dan el resultado*).

M. — En un corral se tenían 328 ovejas, en otro 112; murieron de la lombriz 48; el resto se vendió á 5 pesos cada una. ¿Qué precio se sacó de las ovejas?

Als. — (*Hacen las operaciones y dan el resultado*).

M. — Guarden las pizarras. Pase Atilio. Multiplique 312 por 9. ¿Cuánto es?

A. — 2808.

Medio. — *M.* — Borren. Multiplique 312 por 9 ¿cuánto es?

A. — 2808.

M. — Multiplique 312 por 9.

A. — Da siempre lo mismo.

M. — En efecto. Multiplique ahora 312 por 999. ¿Cuál será el primer producto parcial?

A. — 2808.

M. — Escribalo. ¿Cuál será el 2º producto parcial?... ¿Qué números multiplicó para el primer producto parcial?

A. — 312 por 9.

M. — Para el segundo ¿qué números tiene que multiplicar?

A. — 312 por 9, los mismos.

M. — El producto será?

A. — El mismo, 2808.

M. — Escribalo. ¿Y el tercer producto parcial?

A. — Será el mismo 2808.

M. — Escribalo y sume.

Han observado Vds., que en este caso no hay necesidad de multiplicar tres veces, sino una, la primera.

Esto sucederá siempre que las cifras del multiplicador sean iguales. Siéntese Atilio. Vean Vds. como yo hago; multipliquemos:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 3333 \\ \hline 369 \\ 369 \\ 369 \\ 369 \\ \hline 409959 \end{array}$$

Tres por tres, 9; tres por dos, 6; tres por uno 3. Ahora escribo 369, 369, 369, corriendo siempre un lugar á la izquierda y luego, sumo. ¡Qué ligero se hace! Otro. Denme Vds. una multiplicación de esta clase.

A. — 328 por 2222.

M. — (*Hace rápidamente el producto*). Y cuando las cifras iguales son del multiplicando, como en:

$$\begin{array}{r} 444 \\ \times 321 \\ \hline \end{array}$$

Se escribe:

$$\begin{array}{r} 321 \\ \times 444 \\ \hline \end{array}$$

luego se procede, etc.

Fin. — (*Pasan al pizarrón cinco niños*).

M. — Multipliquen 221 por 99. (*Al llegar el momento de dar el producto borran*). Multipliquen 23 por 5555.... 222 por 34.... Vuelvan á sus asientos.

M. — (*Pasan otros cinco*). Multipliquen 111111 por 3423.... (*Borran antes de sumar*). 838 por 33.... 444 por 222 ... 888 por 132. Vuelvan á sus asientos.

M. — Hay casos como este:

$$\begin{array}{r} 134 \\ \times 2122 \\ \hline \end{array}$$

en que hay dos ó más cifras iguales en el multiplicador, pero no lo son todas. Observen cómo se hace. (*El*

maestro multiplica en alta voz y de manera que lo observen bien.) Saquen las pizarras.

M. — Cuánto cuestan 148 toneladas de pasto á 11 pesos la tonelada?

A. — (*Dan el resultado*).

M. — Cuánto valen 333 arados Collins á 45 pesos cada uno?

A. — (*Dan el resultado*).

M. — Una ciudad tiene 128 calles, cada una con 626 árboles. ¿ Cuántos árboles tienen las 128 calles?

Deberes. — Si el libro de ejercicios y problemas no tuviera adecuados, el maestro dará:

$$\begin{array}{rcl} 4527 & \times & 88888; \\ 3522317 & \times & 2211; \\ 2442 & \times & 13345; \\ 66666 & \times & 123412; \end{array}$$

recomendando que no hagan las sumas los que no quieran hacerlas.

INDICACIONES

Por innecesario y moroso, desechamos el método propiciado por algunos autores (ROBINSON) de hacer comprender al niño por qué los productos parciales deben correrse un lugar á la izquierda. Tales explicaciones nunca las ha necesitado el niño; la operación concluye por hacerla mecánicamente. En 4º, 5º ó 6º grado, multiplicará sin dar razones, por más que las haya oído en 2º. Puede enseñarse: 25×8 ; 25 se compone de 2 decenas y 5 unidades; multiplicarlas por 8 significa hallar un número que contenga 8 veces 5 unidades y 8 veces 2 decenas; 8 veces 5 unidades son 40 unidades; pero en 40 unidades hay 0 unidades y 4 decenas; 8 veces 2 decenas son 16 decenas y 4 de la anterior multiplicación, hacen 20 decenas; 20 decenas y 0 unidades ó 200 unidades. Escribamos 200. Observemos qué se ha hecho, etc.

LECCIÓN 17ª

Tema.—Enseñanza de los números romanos hasta 20.
(*Los niños, Lección 15ª, conocen el valor de las letras*).

Desarrollo. — *Principio.* — Cálculo mental en la pizarra giratoria; escribe $(3+4)$ 8. Al dar vuelta rápidamente la pizarra pregunta cuánto es; de la misma manera escribe $7+6=8$; $5+3+6=9$ para pedir su resultado.

M.—Josefa, tiene 40 centavos para repartir entre 8 compañeras, ¿cuántos centavos dará á cada una?

A.—Cinco centavos á cada una.

M.—Las ventanas del salón grande tienen 56 vidrios, cada una con 8 vidrios, ¿cuántas ventanas tiene el salón?

M.—Voy á escribir números romanos y Vds. indican su valor: *V*.

Todos. — Cinco. *M.* — *I.* *Todos.* — Uno. *M.* — *X.* *Todos.* — Diez. *M.* — *C.* *Todos.* — Cien. *M.* — *L.* *Todos.* Cincuenta. *M.* — (*Borra*). ¿Cuánto vale la *ce*?

A.—Cien.

M.—Cuánto vale la *de*?

A.—Vale quinientos.

Medio. — *M.* — Con las letras que conocemos escribimos 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, ¿qué se hace para los demás números sin otras letras que esas siete? Observen: la *I* (*escribiendo*) es el número uno, con otra *I* (*escribiendo II*) es ¿qué número?

A.—El número 2. (*Escribe II = 2*).

M. — ¿Con otra *I*?

A.—Es el número 3. (*Escribe III = 3*).

M. — ¿Con otra *I*?

A.—Es el número cuatro.

M.—En efecto, así es. Pero escribir cuatro rayas es un poco largo.

Entonces los romanos convinieron escribirlo así *IV*. Una letra menor inmediatamente antes de una mayor, le quita; inmediatamente después, le agrega. Aquí la *I* vale 1, la *V* vale 5; la *I* antes de la *V* quita á la *V* 1, queda 4; de consiguiente, este número *IV* vale?

A.—Vale 4. (*Escribe IV = 4*).

M.—¿Cómo escribiremos el número 6?

A.—Una V y una I.

M.—Muy bien. (*Escribe VI = 6*).

M.—¿Cómo escribiremos el número 7 y 8?

A.—Una V y dos I.... Una V y tres I.

M.—¿Y el número 9?

A.—Una V y cuatro I.

M.—No se escribe así. Un procedimiento más corto; las letras de menor valor antes de las de mayor valor, ¿qué hacen?

A.—Quitán el valor.

M.—Recuerden una letra que con una I antes valga 9.

A.—La X que vale 10.

M.—Bien; luego, ¿9 se escribirá?

A.—Una I y una X, (*Escribe IX*).

M.—(Con anticipación, en una parte de la pizarra, habrá escrito en bellos caracteres, los números romanos desde 1 á 20, así:

XI	XVII
XII	XVI
XIII	XX
XV	XIX
XVIII	XIV

¿Qué número será éste?

A.—Es el número 11. (*Se escribe 11 después del signo*).

M.—¿Este y este? (*Señalándolos*).

A.—12 y 13.

M.—Cuenta (*señalando cada letra del 13*).

A.—Diez, once, doce, trece.

M.—Y una *equis*, una *ve* y tres *ies*?

A.—Es el número 18.

M.—¿Dónde está escrito, en el pizarrón?

A.—Debajo del número quince.

M.—¿Una *equis* una *ve* y dos *ies*?

A.—Es el número 17.

M.—Una *i* y una *equis*?

A. — El número 9.

M. — Presten mucha atención. ¿ Una *equis* . . . una *i* y una *equis* ?

A.

M. — Una *equis* vale ?

A. — Vale diez.

M. — ¿ Una *i* y una *equis* ?

A. — Vale 9.

M. — Luego, una X más, (*señalando*) qué número será?

A. — El número 19. (*Escribe*).

M. — (*Escribe X*). ¿ Qué número ?

A. — El número 10.

M. — (*Los junta escribiendo XIV de manera que lo observen bien los alumnos*). ¿ Qué número será ?

A. — El número 14.

M. — ¿ Una *equis* y una *i* ?

A. — Es el número 11.

M. — ¿ *Equis*, *ve*, y tres *ies* ?

A. — El número 18.

M. — ¿ *Equis*, *i* y *equis* ?

A. — El número 19.

Fin. — (*Pasan al frente, seis alumnos, cuatro á la pizarra y dos á la mesa donde habrá treinta ó más cartones con los números de 1 á 20 y tres cajas de fichas con las letras I, V, y X*).

M. — Juan, Antonio, María y Teresa, escriban los números ; Paco, los busca entre los cartones ; y Alda los compone con letras de las cajitas. Con rapidez. 15 . . . ; 3 . . . ; 12 . . . ; 11 . . . ; 4 . . . ; 6 . . . ; 9 . . . Vuelvan á sus asientos. (*Repite el ejercicio con seis ú ocho niños más*).

M. — Vueltos á sus bancos, hace los siguientes ejercicios de reconocimiento, (*ya levantando un cartón, ya escribiendo, ya combinando las letras de las cajitas con agilidad y rapidez*). ¿ Qué número es ?

Todos. — El número 8 ; el 17 ; el 5 ; el 4 ; el 10 ; el 9 ; el 10 ; el 4 ; el 14 ; el 19 ; el 20 ; el 13 ; el 12.

M. — Bien, saquen sus libros de lectura.

Busque, cada uno, un número romano y dígame su valor. ¿ Santiago ?

A.—(*Levanta el libro y muestra la página*). Este es el número cinco.

Otro.—Este es el número 3.

Otro.—Este es el número 9.

Otro.—Este es el número 7.

M.—¿Dónde, pues, se escriben los números romanos?

A.—En los libros.

M.—Para indicar los capítulos. Guarden los libros.

M.—¿En qué otra parte los han visto Vds?

A.—En los relojes.

M.—Bien. (*Presenta un reloj de pared, ó bien un cartón que represente la platina de un reloj*). Van á leer Vds., los números que señale el horario, la aguja más corta (*haciéndola girar, si es posible, moviendo un tornillo de la parte posterior*).

M.—¿Qué hora señala?

A.—Las seis.

M.—¿Y ahora?

A.—Las cuatro.

M.—¿Y ahora?

Todos.—Las dos.

M.—¿Y ahora?

A.—Las 9.

M.—Ahora, lo que señale la aguja más larga, el minutero. ¿Qué señala?

Als.—Las diez....; las doce....; las tres....; las 9.

Deberes.—En los cuadernos escribirán los números de 1 á 20, en tinta, con suma limpieza y cuidado.

Para mañana.

LECCIÓN 1ª (Julio)

Tema :—Multiplicación de un número por la unidad seguida de ceros.

Desarrollo. — *Principio.* M.—De las 48 palomas que había en un palomar, 18 se volaron; las restantes, muertas y cocinadas, se repartieron entre 10 co-

mensales que pagó cada paloma, 20 cent. ¿Cuánto pagó cada comensal ?

A. — Sesenta centavos.

M. — Explique el problema, Lidia.

A. — Si volaron 18, quedarían en el palomar, 48 menos 18 ó 30 palomas. Repartidas entre 10 comensales, tocaría 3 á cada uno, que pagadas á 20 cts. cada paloma, le costarían 60 centavos.

M. — Resultado de $64 : 8 + 5 + 6 - 9$.

A. — Es 10.

M. — ¿ Por qué ?

A. — Porque $64 : 8$ es 8; más 5, 13; más 6, 19; menos 9, 10.

M. — ¿ Cuántas cifras tiene el número 125 mil ? . . . ¿ El número 1002 ? . . . ¿ El número 828429 ? . . . ¿ Cuántos ceros tiene el número 102 ? . . . ¿ El número 10401 ? . . . ¿ El número 8927 ? . . . ¿ Qué lugar ocupan las unidades de mil ? . . . ¿ Las centenas de mil ? . . . ¿ Las decenas simples ? . . . ¿ Qué, ocupan el 4º lugar ? ¿ el 5º lugar ?

M. — (*Presentando cartoncitos con números romanos*). ¿ Qué número es ? . . .

A. — 5 . . . ; 8 . . . ; 9 . . . ; 51 . . . ; 57 . . . ; 99.

M. — ¿ Qué longitud tendrá la línea que acabo de escribir ?

A. — Dos decímetros.

M. — ¿ Qué número acabo de escribir ?

Als. — 1000 ; 45926 ; 1001 ; 35303 ; 10000 ; 689404 ; 1001000.

Medio. — M. — Ahora, deseo que Vds. aprendan una manera brevísima para multiplicar un número cualquiera por 10, 100, 1000, 10000, (*Escribiendo las cantidades*) por la unidad seguida de ceros. Sea el número 428 que quiero multiplicar por 1000, (*escribiendo en cifras grandes y claras*); cuento los ceros que tiene mil: uno, dos, tres y coloco tres, á la derecha de 428, así : 428000 ; 428000 es el resultado de multiplicar 428 por 1000.

Otro ejemplo. Sea el número 42789 que quiero multiplicar por 10. Cuento los ceros de 10 ; un cero. Lo

escribo á la derecha de 42789, así: 427890 y ya tengo el número multiplicado por 10.

Otro ejemplo. Sea el número 8371 que quiero multiplicar por este otro 10000000. Cuento los ceros... siete ceros. Coloco siete ceros á la derecha de 8371 (*escribiéndolos*) y tengo el producto buscado.

Las multiplicaciones presentarán, en la pizarra, esta disposición :

$$\begin{array}{r} \times 428 \\ 1000 \\ \hline 428000 \end{array}$$

y no otra desordenada, como se acostumbra, v. g. :

$$\begin{array}{r} 428 \quad 1000 \\ 428000 \end{array}$$

M. —Denme Vds., dos números, uno que sea la unidad seguida de ceros, para multiplicar.

A. —Multiplicar 56 por 1000.

M. —(*Escribe rápidamente, observado por los alumnos* : $56 \times 1000 = 56000$). Otro.

A. —Multiplicar 8 por 100.

M. —(*Escribe*). Otro más grande.

A. —8903 por 100000.

M. —(*Escribe*). Bien. Al pizarrón, Juan, Santiago, Raquel, Alda, Víctor, Pablo.

Multipliquen : 7 por 100 ; 8422 por 10... ; 806 por 1000... ; 100 por 100... ; 100 por 86. Vuelvan á sus asientos (*Pasan otros seis*).

Multipliquen : 10 por 91... ; 847000 por 1000... ; 8007 por 1000000... ; 100 por 828... ; Vuelvan á sus asientos.

M. —Para multiplicar un número por 100 ¿cuántos números escribimos á la derecha ?

A. —Dos ceros.

M. —¿ 100000 ?

A. —Cinco ceros.

M. —Ahora, vean Vds. cómo se hace cuando en lugar del 1, es el 2, el 3, el 4 seguido de ceros; por ejemplo : multiplicar

$$\begin{array}{r} 842 \\ \times 200 \\ \hline \end{array}$$

(*multiplica por dos en alta voz ; cuenta los ceros, y á la derecha del producto escribe dos ceros. Repite el caso con números como 76×3000 ; 84×70).*

M. — (*Pasan á la pizarra seis niños*). Multipliquen 8 por 700.... ; 221 por 7000.... ; 1321 por 20000. Vuelvan á sus asientos.

Fin. — *M.* — Piensen un número que sea la unidad seguida de ceros.

Als. — 10 ; 1000 ; 10000.

M. — ¿ Por cuánto está multiplicado este número ? (*Señalando en la pizarra á 86400*).

A. — Por 100.

M. — ¿ Este otro ? (*Señala á varios*).

¿ A qué lado se colocan los ceros para multiplicar ?

A. — A la derecha.

M. — ¿ Cuánto es 86 multiplicado por 100 ?.... ¿ 94 multiplicado por 1000 ?.... ¿ 8 por 10 ?.... ¿ 28 por 10 ?.... ¿ 75 por 10 ?.... ¿ 893 por 10 ?.... ¿ 10 por 893 ? .. ¿ 10 por 12 ?

Los 825 novillos de una estancia se vendieron á 100 \$ cada uno ¿ cuántos pesos cobró el dueño ?

A. — 82500 pesos.

M. — Un peso vale 100 cent. ¿ Cuántos centavos valdrán 8 pesos ?

A. — 800 centavos.

M. — ¿ Y 85 pesos ?

A. — 8500 centavos.

M. — Un metro tiene diez decímetros ¿ cuántos decímetros tendrán 829 metros ?

A. — 8290 decímetros.

M. — Un kilogramo pesa 1000 gramos, ¿ cuántos gramos pesan 85 kilogramos ?

M. — Los 42 niños de la clase ¿ cuántos dedos tendrán en sus manos ?

A. — 420 dedos.

Deberes. — Los que, de acuerdo con la lección, contenga el libro de ejercicios y problemas ; se darán

según indicaciones anteriormente hechas. Si el libro no los tuviese se dictará :

852 por 100
1000 por 92
65 por 800
3000 por 20

Centavos que tienen 8928 \$
Centímetros que tienen 828 ms.
Gramos de 385 Kgs.

LECCIÓN 3ª

Tema.—*La división* : 86 : 2 ; 96 : 2 ; 45 : 3.

Desarrollo. — *Principio.*—*M.* — ¿ Cómo se multiplica un número por 1000 ?

A.—Se coloca á la derecha del número, tres ceros.

M. — Si el número tuviera dos ceros á la derecha ¿ por cuánto estaría multiplicado ?

A.—Estaría multiplicado por 100.

M.—Piensen dos números cuyo producto sea 20.

Als. — 5 por 4 ; 2 por 10 ; 20 por 1.

M.—Dos números cuya suma sea 20.

Als. — 19 + 1 ; 10 + 10 ; 16 + 4 ; 3 + 17.

M.—Dos, cuya diferencia sea 7.

Als.—17 — 10 ; 14 — 7 ; 57 — 50 ; 67 — 60.

M.—Otros números que no terminen en 7 ni 0, como 55 — 48.

Als.—74 — 67 ; 31 — 24.

M.—(*Pizarra giratoria*). Van á sumar los números que vean escritos. (*Escribe 8, 7, 5, 6*).

A.—26. (*Tres ó cuatro ejercicios semejantes*).

M. — 9 naranjas divididas entre 4 niños, sobran cuántas ?

A.— 2 naranjas á cada niño y sobra una.

M. — ¿ 37 dividido entre 6 y sobra ?

A. — 6 y sobra 1.

M.—(*Carteles de números romanos, pasando con rapidez de un ejercicio á otro, de la giratoria á los carteles, de los carteles al cálculo, etc.*).

¿Qué número es este? .. ¿Este?... ¿Este?...

Als.—100; 104; 9; 48; 329.

M.—El padre compró para sus tres hijitos, una caja con 27 bolitas ¿cuántas daría á cada uno?

A.—A cada uno daría 9 bolitas.

M.—Costaron 2 cts. cada una ¿cuánto dinero hubiese podido dar á cada niño?

A.—18 cts. á cada uno.

M.—Con ellos se hubiese comprado 36 cerezas, que repartidas entre 6 compañeros ¿cuántas habría tocado á cada uno?

A.—A cada compañero habría tocado 6 cerezas.

M.—Pero el frutero en vez de 36, dió 86 cerezas que el niño quiso dividir por partes iguales entre el padre y la madre ¿cuántas daría á cada uno?

Als......

M.—Noto que les cuesta obtener el resultado ¿por cuánto hay que dividir?

A.—Por 2.

Medio.—*M.*— Cuando el número que debe dividirse es grande, como en este caso, hay un procedimiento muy corto para hacerlo, usando del lápiz ó la tiza. Observen: escribo el número que debe dividirse ó dividiendo, 86, aquí; trazo estas dos líneas y dentro de ellas coloco el número que divide ó divisor.

$$\begin{array}{r} 86 \overline{) 2} \\ 06 \quad 43 \\ 0 \end{array}$$

Comienzo por la izquierda señalando la primer cifra con un punto arriba y digo: 8 decenas divididas entre 2, da 4 decenas; escribo 4 debajo de la raya. 4 decenas por 2 son 8 decenas, restadas de 8 decenas y seis unidades resta 0 decenas y 6 unidades (*escribiendo*). 6 unidades divididas entre 2 da 3 unidades, que escribo á la derecha de las 4 decenas. 3 unidades por 2 son 6

unidades ; restadas de seis unidades queda 0. Luego, 86 dividido entre 2 es 43 (*escribiendo $86 \div 2 = 43$*). El número 43 es el cociente.

Otro ejemplo. Sea

$$96 \overline{) 2}$$

Señalando la primer cifra. 9 dividido entre 2 da 4 ; 2 por 4 da 8 decenas, restadas de 9 decenas y 6 unidades resta 1 decena y 6 unidades ó 16 unidades, 16 unidades divididas entre 2, da 8 unidades. 2 por 8 es 16 restado de 16, cero.

Cociente : 48.

Otro ejemplo. (*Repíte la explicación de modo que el niño, por la vista y el oído, aprenda el mecanismo de la operación. Cada ejemplo llevará, á lo sumo, un minuto*).

M.—Denme Vds. un número para dividirlo por otro.

A. — 65 dividido por 3.

M.—(*Escribe rápidamente*).

$$65 \overline{) 3}$$

6 dividido entre 3, 2 ; 2 por 3, 6; de 6 cero ; (*escribe*) Cinco dividido por 3 es 1 ; 1 por 3, 3 ; 3 de 5, 2. Cociente : 21 y sobra 2.

Otro. (*Hace lo mismo*).

Fin.—Tomen sus pizarras, dividan : 66 entre 2....

Als. — 33...., 33...., 33.

M.—39 entre 3 ; 84 entre 4 ; 95 entre 3 ; 72 entre 3....

Guarden las pizarras. (*Pasan 6 alumnos al pizarrón*). Dividan : 38 entre 2 ; 36 entre 3 ; 93 entre 3 ; 75 entre 2. Vuelvan á sus asientos.

M.—¿Cómo se llama la cantidad que se divide ?

A.—Dividendo.

M.—Clase.

Als.—Dividendo.

M.—¿ La cantidad por la que se divide ?

A.—Divisor.

M.—¿Qué señalo ?

Todos.—El dividendo.

M.—¿Y ahora?

Todos.—El cociente.

M.—¿Por dónde se comienza á dividir?

A.—Por la izquierda.

M.—¿Cuándo es exacta la división?

A.—Cuando no sobra nada.

M.—¿Cuando sobra algo es?... .

A.—Inexacta.

M.—Cómo resolveremos este problema: 8 hectáreas de alfalfa producen 88 toneladas de pasto. ¿Cuántas toneladas produjo cada cuadra?

A.—Dividiendo 88 entre 8.

Deberes.—Ejercicios que indique el libro, ó dictados según anteriores indicaciones.

LECCIÓN 5ª (Septiembre)

Tema.—Dividir un número por otro de dos cifras.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.*—(*Pasan seis niños al pizarrón*). Escriban las siguientes cantidades: 10428, 75809, 120000, 101, 10103, 80001, 7005, 800006. Vuelvan á sus asientos.

(*Pasan otros seis niños*). Escriban en números romanos 10, 39, 16, 121.

Multipliquen 902 por 1000; tracen una línea de un centímetro de largo. El signo de dividir, $72:8=?$ Escriban el cociente.

Objetivicen: un eucalipto mide 45 metros de altura y un naranjo 5. ¿Cuántas veces es más alto el eucalipto que el naranjo?... . Vuelvan á sus asientos.

M.—¿ Cuántas veces cabe 35 en 50? ¿ 85 en 90? ¿ 28 en 16? ¿ 7 en 35?

Medio.—*M.*—Voy á enseñar á Vds. cómo se divide un número por otro de dos cifras.

$$\begin{array}{r} 605 \overline{) 55} \\ 55 \quad 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

Empezamos también por la izquierda, y separamos tantas cifras como sean necesarias para contener al divisor. Así, en 6 no cabe 55, entonces 60; en 60 está una vez; escribo 1; uno por 55, 55; lo resto de 60 y queda 5 (*escribiendo*); bajo á la derecha, la cifra siguiente; 55 en el 55, cabe una vez. Escribo 1; uno por 55, es 55 de 55 cero.

Es lo mismo que dividir por una cifra, sólo que las operaciones son más largas.

Otro ejemplo, observen:

$$\begin{array}{r} 385 \overline{) 55} \\ 385 \underline{} \\ 000 \end{array}$$

El 55 en el 38 no cabe; entonces tomo tres cifras, 385; pero es difícil saber cuántas veces cabe 55 en 385; entonces divido 38 entre 5, da 7; escribo 7 y multiplico todo el divisor por 7, restándolo de 385, así: 7 por 5, 35, etc.

Otro ejemplo (*explicado como el anterior*).

M.—(*Pasan á la pizarra cuatro niños*). Dividan 208 entre 13; 4072 entre 75; 893 entre 21. Vuelvan á sus asientos. Saquen sus pizarras. Dividan, todos, 210 entre 42; 2458 entre 41; 485 entre 97. (*Esperando el resultado de cada caso antes de dictar el siguiente*).

Fin.—Escriban: 36728 dividido entre 49; ¿cuántas cifras hay que separar á la izquierda?

A.—Hay que separar tres cifras.

M.—¿Qué debe dividirse entre 4?

A.—El número 36.

M.—Escriban 78306 dividido entre 67 ¿cuántas cifras hay que separar á la izquierda?

A.—Dos cifras porque 67 cabe en 78.

M.—Qué número hay que dividir por 6?

A.—El número 7.

M.—Piensen un número de tres cifras menor que uno de dos.

A.—... No hay números de tres cifras menores que números de dos cifras.

M.—Muy bien. Entonces, cuando dividamos por números de dos cifras ¿habrá necesidad de separar más de tres cifras á la izquierda del dividendo?

A.—No habrá necesidad.

M.—Piensen un número de dos cifras mayor que 85.

A.—87, 89, 95, 93.

M.—Menores que 85.

A.—7, 24, 69, 50.

M.—¿Cuándo separaremos á la izquierda del dividendo dos cifras solamente?

A.—Cuando esas cifras formen un número mayor que el divisor.

M.—¿Y en caso contrario?

A.—Hay que separar tres cifras.

M.—Piensen el mayor número de dos cifras que Vds. conocen.

A.—90.

M.—¿No hay otro?

A.—El 99, porque á 99 sigue 100.

M.—¿Quién conoce un número de una cifra mayor que uno de dos?

A.—No hay números de una cifra mayores que números de dos.

M.—Hay, pues, que separar, cuando el divisor es de dos cifras ¿cuántas, por lo menos, á la izquierda del dividendo?

A.—Hay que separar dos y á lo sumo tres, nunca una ni cuatro ó más.

M.—8354 dividido entre 69 ¿qué cifra, por qué cifra dividimos primero?

A.—8 entre 6 que cabe 1 vez.

M.—Con el cociente uno ¿qué hacemos?

A.—Lo multiplicamos por 69.

M.—Y ese producto lo restamos?

El número era 8354.

A.—Lo restamos de 83.

M.—A la derecha del residuo ¿qué cifra bajamos?

A.—La cifra 5.

Deberes.—Los que indica el libro de ejercicios y problemas.

INDICACIONES

La división puede enseñarse de las dos maneras :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \overset{\cdot\cdot\cdot}{8342} \\
 65 \\
 \hline
 184 \\
 130 \\
 \hline
 0542 \\
 520 \\
 \hline
 022
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 65 \\
 \hline
 128
 \end{array}
 \end{array}$$

ó bien :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \overset{\cdot\cdot\cdot}{8342} \\
 184 \\
 542 \\
 22
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 65 \\
 \hline
 128
 \end{array}
 \end{array}$$

Conviene, salvo dificultades insuperables, usar la segunda forma y no la primera, por ser posible en todos los casos, la resta mental y exigir menos tiempo la operación.

El uso de $\div$ como signo de operación debe suprimirse, y debe impedirse la costumbre de señalar con puntos las cifras de los dividendos parciales.

Tienen excepcional importancia las Lecciones 12ª y 13ª del mes de Octubre, si se considera que la casi totalidad de los problemas compuestos, sobre todo métricos y de reducción, son combinaciones de la multiplicación y la división con la reducción implícita á uno, (operaciones de proporcionalidad); se verá con cuanto fundamento insistimos sobre la importancia pedagógica de este problema, puente de Mantible del razonamiento de los escolares.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO VI

3.º GRADO I.

I

Distribución del programa en meses. — *Marzo.*— Las lecciones de este mes se destinan á recordar los conocimientos adquiridos en 1º y 2º grado, acerca de la lectura y escritura de números; de las operaciones; de las tablas; de los números romanos; del metro y en la solución de problemas á una ó varias operaciones, recorriendo cuidadosamente, todos los casos, insistiendo en los puntos débiles ó que ofrezcan duda.

Abril. — 1ª y 2ª — División de un número cualquiera por otro de cuatro cifras.

3ª y 4ª — División de un número cualquiera por otro cualquiera.

5ª — Ejercicios.

6ª y 7ª — Lectura y escritura de cualquier número.

8ª — Problemas.

9ª — División de un número entero por la unidad seguida de ceros.

10ª — Números decimales; la unidad dividida en diez partes; escritura de enteros y décimos; punto decimal.

11ª — La unidad dividida en cien partes; el décimo dividido en diez partes. Los centésimos. Lectura y escritura de enteros, décimos y centésimos.

12ª — Milésimos, diezmilésimos y cienmilésimos. Lectura y escritura.

13ª, 14ª y 15ª — Ejercicios acerca de los lugares, lectura y escritura al dictado de números decimales.

16ª— Problemas.

17ª— Ejercicios acerca de la lectura y escritura de decimales.

18ª— Problemas.

19ª— Noción de peso y centavos. Reducción de pesos á centavos.

20ª— Enseñanza de la suma de decimales. Ejercicios.

21ª— Problemas de suma de números decimales.

22ª y 23ª— Enseñanza de la resta de decimales. Ejercicios.

24ª— Problemas de substracción de números decimales.

Mayo.— 1ª— Medidas de longitud. Cadena, cintas, reglas y varas métricas. Significado de Deca, Hecto, Kilo, etc.

2ª— Múltiplos del metro, denominaciones y manera de escribirlas.

3ª— Submúltiplos del metro, denominaciones y manera de escribirlas.

4ª— Ejercicios de medición y escritura.

5ª y 6ª— Equivalencia de los múltiplos y submúltiplos del metro.

7ª— Reducción de complejos (números de varias denominaciones) á incomplejos (números de una sola denominación).

8ª— Ejercicios.

9ª— Reducción de múltiplos y submúltiplos á denominación metros.

10ª— Ejercicios de recapitulación.

11ª— Convertir un incomplejo á complejo (medidas de longitud).

12ª y 13ª— Ejercicios acerca de la denominación que corresponde á las cifras de cada orden en números como este: 4567 mts.; 897 dms.; 727.897 mts., etc.

14ª— Ejercicios de recapitulación.

15ª— Números concretos y abstractos; denominaciones homogéneas y heterogéneas; de la misma especie y de diferente especie.

16ª—Enseñar á sumar denominados del sistema métrico decimal.

17ª y 18ª—Ejercicios y problemas.

19ª—Enseñar á restar denominados del sistema métrico decimal.

20ª—Ejercicios y problemas.

21ª—Problemas obtenidos midiendo con el metro, longitudes y distancias y resueltos haciendo las operaciones en el papel ó la pizarra.

22ª, 23ª, 24ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

Junio. — 1ª — Enseñanza de la multiplicación de decimales.

2ª — Ejercicios.

3ª y 4ª — Problemas y ejercicios de recapitulación.

5ª — Enseñanza de la multiplicación de un decimal por la unidad seguida de ceros.

6ª y 7ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

8ª — Enseñanza de la división de decimales.

9ª — Ejercicios.

10ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

11ª — Dividir un número menor por otro mayor. Las divisiones inexactas.

12ª — Medidas de capacidad. El litro. Substancias que se miden.

13ª — Diversas formas del litro, materias con que se construye y dimensiones.

14ª — Dibujo de las formas en la pizarra.

15ª — Múltiplos del litro; denominaciones y manera de escribirlas.

16ª — Ejercicios.

17ª — Submúltiplos del litro; denominaciones y manera de escribirlas.

18ª — (Múltiplos). Conocimiento de las vasijas para medir líquidos y granos.

19ª — (Submúltiplos). Conocimiento de las vasijas para medir líquidos y granos.

20ª — Ejercicios de medición y escritura. Decimales métricos de capacidad.

21ª — Equivalencia de los múltiplos y submúltiplos.

22ª — Ejercicios: Calcular capacidades.

23ª y 24ª — Reducción de un incomplejo de especie superior á un incomplejo de especie inferior (capacidad).

Julio. — 1ª Reducción de un complejo á un incomplejo (capacidad).

2ª — Ejercicios.

3ª — Reducción de un complejo á la denominación litros.

4ª — Ejercicios.

5ª — Reducir incomplejo á complejo (capacidad).

6ª — Ejercicios.

7ª — Ejercicios de suma y resta de complejos (medidas de capacidad).

8ª y 9ª — Problemas de multiplicación y división de denominados métricos.

10ª y 11ª — Problemas de suma y resta de denominados métricos combinados con la división y multiplicación.

12ª, 13ª, 14ª y 15ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

16ª — Medidas de peso. El gramo.

17ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

18ª — Balanzas. Substancias que se pesan.

19ª — Ejercicios y problemas.

20ª — Múltiplos del gramo; denominaciones y manera de escribirlas.

21ª — Submúltiplos, denominaciones y manera de escribirlas.

22ª — Ejercicios.

23ª — Conocimiento de las substancias con que se construyen las pesas.

24ª — Enseñanza del valor de las pesas.

Agosto. — 1ª Uso de las pesas. Ejercicios con la balanza.

2ª — Calcular pesos con la mano.

3ª, 4ª y 5ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

6ª — Equivalencia de los múltiplos y submúltiplos de las medidas de peso.

7ª — Reducción de un incomplejo de especie superior á uno de especie inferior (peso).

8ª — Ejercicios.

9ª — Reducción de un complejo á la denominación gramos.

10ª — Ejercicios. Reducción de incomplejo de especie inferior á uno de especie superior.

11ª — Reducción de un incomplejo á complejo (peso).

12ª — Ejercicios.

13ª y 14ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

15ª — El kilogramo. ¿ Por qué suele, el comercio, tomarle por unidad de peso ?

16ª — Ejercicios y problemas de reducción, tomando el kilogramo como unidad.

17ª — Denominaciones homogéneas y heterogéneas.

18ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

19ª y 20ª — Ejercicios de suma y resta de denominados complejos (medidas de peso).

21ª y 22ª — Problemas de suma, resta, multiplicación y división de denominados métricos (medidas de peso).

23ª y 24ª — Problemas de suma y resta de denominados métricos, combinados con la división y la multiplicación.

Septiembre. — 1ª y 2ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

3ª — El quintal métrico y la tonelada métrica. Casos en que se usan.

4ª — Ejercicios y problemas.

5ª — Medidas de tiempo.

6ª y 7ª — Ejercicios y problemas acerca de las medidas de tiempo. Reducciones.

8ª y 9ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

10ª — Números divisibles y no divisibles por otro.

11ª — Ejercicios.

12ª — Número primo y compuesto; múltiplos y factores.

13ª — Ejercicios.

- 14ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
- 15ª — Números pares é impares; cifra en que terminan los números; suma de las cifras de un número.
- 16ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
- 17ª — Divisibilidad de un número por 2.
- 18ª — Divisibilidad de un número por 3 y 9.
- 19ª — Ejercicios.
- 20ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
- 21ª — Divisibilidad de un número por 4 y por 5.
- 22ª — Divisibilidad de un número por 6.
- 23ª — Ejercicios.
- 24ª — Problemas de recapitulación.
- Octubre.* — 1ª — Ejercicios generales de la divisibilidad.
 - 2ª y 3ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
 - 4ª — Divisibilidad de un número por 8.
 - 5ª — Ejercicios sobre la divisibilidad.
 - 6ª — Problemas y ejercicios de recapitulación.
 - 7ª — Divisibilidad de un número por 10, 100, 1000, etcétera.
 - 8ª — Divisibilidad por 7.
 - 9ª y 10ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
 - 11ª — Divisibilidad por 20, 30, etc. Ejercicios.
 - 12ª y 13ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
 - 14ª — Divisibilidad por 25.
 - 15ª — Ejercicios.
 - 16ª y 17ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
 - 18ª — Divisibilidad por 11.
 - 19ª — Ejercicios.
 - 20ª y 21ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.
 - 22ª — Descomposición de un número en factores simples.
 - 23ª y 24ª — Ejercicios.
- Noviembre.* — Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación, insistiendo acerca de aquellos puntos cuya rapidez y exactitud es dudosa.

II

Desarrollo de las lecciones

LECCIÓN 10ª (Abril)

Tema. — Números decimales; la unidad dividida en diez partes. Punto decimal.

Desarrollo. — *Principio.* A. — M. — ¿Qué tengo en mi mano?

A. — Una hoja de papel. M. — ¿Ahora?

A. — Una barra de jabón. M. — ¿Ahora? A. — Una manzana.

M. — Representaríamos cada uno de estos objetos, con qué cifra?

A. — Con la cifra 1. (*La escribe*).

M. — ¿Este número es?

A. — Uno ó la unidad.

M. — Está bien. (*Toma la barra de jabón y la divide en diez pedazos iguales procurando ser rápido, para lo cual las divisiones estarán casi hechas*). ¿Qué he hecho?

A. — Vd. dividió la barra de jabón en diez partes iguales.

M. — En efecto, son iguales. (*Superponiendo los pedazos*). Cada pedazo es, de la barra de jabón ¿qué?

A. — La décima parte.

M. — ¿Este pedazo es?

A. — La décima parte de la barra de jabón.

M. — ¿Este otro?

A. — La décima parte de la barra de jabón.

M. — ¿Cómo son las décimas partes de la barra de jabón?

A. — Son iguales.

B. — *M.* — Una barra de jabón la representamos por qué cifra?

A. — Por la cifra 1.

M. — ¿Y una *décima* parte de la barra de jabón, por qué cifra la representaremos?

A. — Por la cifra 1 (*la escribe el maestro*).

M. — Pero, así, no sabríamos cuándo representa la barra de jabón y cuándo la *décima* parte.

Entonces se la escribe de otra manera; atención: 0 primero, después coma é inmediatamente el 1.

Esta cifra representa la *décima* parte de ...?

A. — De la barra de jabón.

M. — ¿O de qué número es representativa la barra de jabón?

A. — Del número uno.

M. — ¿Luego, este número (0,1) representa?

A. — La *décima* parte de uno.

M. — Bien. Cuando es de 1 no se dice *décima parte* sino, sencillamente, *un décimo*. El número se lee, pues. ¿Clase?

Todos. — Un *décimo*.

M. — Pero, en vez de un pedazo tomo dos, ¿qué parte de jabón habremos tomado?

A. — Habremos tomado 2 *décimas* partes.

M. — ¿Si fueran de 1, sencillamente, se denominarían?

A. — Se denominarían dos *décimos*.

M. — ¿Que escribiríamos cómo?

A. — Allí, en vez de 1 escribiríamos 2, (*el maestro escribe 0,2*) que representa dos *décimos* de uno.

M. — En efecto, así es, ¿si tomásemos tres partes de la barra de jabón?

A. — Serían tres *décimos* y se escribirían 0 coma y 3.

M. — (*Escribe 0,6*). ¿Cómo se leerá este número?

A. — Se leerá seis *décimos*.

M. — Si se nos dijese: tome Vd., de la barra, tanto jabón como indica el número ¿cuántos pedazos de jabón tomaríamos?

A. — Seis pedazos de la barra.

M. — ¿De la barra dividida en cuántos?

A. — En diez pedazos.

M. — Porque la barra podía haberse dividido en vez de diez, en ¿cuántos pedazos?

A. — En 8.... 9.... 5 pedazos.

M. — Y este número (*escribe 0,8*) ¿cómo se lee?

A. — Ocho décimos.

M. — ¿Este otro?

A. — Nueve décimos.

M. — Y si tomásemos los diez pedazos ¿cuántos décimos tomaríamos de jabón?

A. — Tomaríamos diez décimas partes.

M. — ¿Pero los diez pedazos, ó los diez décimos constituyen qué? (*Juntando los pedazos para formar la barra*).

A. — Constituyen la barra de jabón que habíamos representado por la cifra 1.

M. — Luego, uno ¿cuántos décimos tiene?

A. — Tiene diez décimos.

M. — ¿Cómo los escribiríamos?

A. — Escribiendo 10 en lugar de 1, en 0,1.

M. — No se escribe así: 0,10; pero si diez décimos valen 1 ¿qué número representa 10 décimos?

A. — El número 1 y se escribe 1.

C. — M. — Ahora, observen Vds.: tomo esta barra de jabón y estos tres pedazos, ¿cuánto he tomado de jabón?

A. — Vd. ha tomado 13 décimos de jabón.

M. — O bien ¿cuántas barras y cuántas décimas partes?

A. — Una barra y tres décimas partes.

M. — Muy bien, ¿que representaremos por qué cifra?

A. — La barra por 1, las partes por 0,3.

M. — Bien; sería fastidioso escribir dos números separados, uno para representar las barras *enteras*,

otro, las partes ó *fracciones* de la barra. Entonces, cuando hay barras enteras que representar, estos números, que son enteros (*señalando 4; 6; 12*), se escriben en lugar del cero ó sea ¿ á qué lado de la coma ?

A.—A la izquierda de la coma.

M.—¿Y la fracción ó parte de uno ?

A.—A la derecha de la coma.

M.—Si tuviéramos que representar 7 barras de jabón y 6 décimas partes ¿ cómo escribiríamos ?

A.—Siete, coma y seis. (*El maestro escribe*).

M.—Si escribiésemos á un almacenero : mándenos 18,4 barras de jabón (*escribiendo el número*) ¿ cuánto jabón nos mandaría ?

A.—Diez y ocho barras de jabón y cuatro pedazos.

M.—Cada pedazo es ¿ qué parte ?

A.—La décima parte ; nos mandaría 18 barras y cuatro décimas partes de una barra de jabón.

M.—¿Cómo leerán Vds. este número ? (*escribiendo 425.6*).

A.—425 unidades 6 décimos.

M.—¿ Este otro 3.9 ? 0.5 ? , 50.1 ?

Si dijera á Vds. : tomen la mitad de la barra de jabón ¿ cuántos pedazos ó décimas partes tomarían de jabón ?

A.—Tomaría 5 décimas partes que se escribe cero, coma y 5.

M.—¿ A la izquierda de la coma se escribe, pues ?

A.—Los números enteros y á la derecha las partes ó fracciones.

M.—¿ Cuando no hay unidades enteras qué se escribe en su lugar ?

A.—La cifra 0.

D. — M. — Dijimos que la unidad tenía ¿ cuántos décimos ? (*mostrando la barra de jabón*).

A.—Diez décimos.

M.—¿ Y dos unidades ?

A.—20 décimos.

M.—¿ Y 9 unidades ? ¿ 12 unidades ? ¿ 425 unidades ?

A.—4250 décimos.

M.—De modo que este número puede, en vez de 425 unidades y 5 décimos, leerse?

A.—4255 décimos.

M.—Y cuando se me diga: escriba Vd. 965 décimos, yo escribo 96.5.

M.—¿Qué lugar ocupan los décimos á la derecha de la coma?

A.—El primer lugar á la derecha de la coma.

M.—(*Pasan al pizarrón seis niños*). Escriban: 0,6; 0,9; 28 décimos; 9 enteros y 8 décimos; 12 enteros; 4528 enteros y 1 décimo; 989 décimos. Vuelvan á sus asientos.

M.—¿En cuántas partes está dividida esta manzana?

A.—En diez partes.

M.—Y esta hoja de papel?

A.—En diez partes.

M.—¿Qué cosas pueden dividirse en diez partes?

A.—Todas las cosas.

M.—¿Cada parte es?

A.—Es un décimo?

M.—¿Cada parte de este metro es?

A.—Es la décima parte del metro.

M.—(*Pasan 3 niños á la mesa*). Tomando sobre la mesa tantas manzanas, barras de jabón ú hojas de papel como indique el número que escriba.

(*Escribe 1,4; 2,5; 3,8; 1,7, etc.*).

Vuelvan á sus asientos.

M.—Ven Vds. un metro dividido en diez partes. Mida, Ignacio, 3 metros y 5 décimos de metro, de cordel. (*El maestro sostiene el metro é Ignacio mide, de modo que la clase pueda observar. Repite el ejercicio con dos niños más*).

M.—Con el metro, mida Julia, el ancho de esta tabla, y escriban la cantidad, Pedro y Gilda.

A.—Siete décimos de metro.

M.—Mida el alto de Antonia.

A.—Un metro y dos décimos de metro.

M.—Mida el ancho de la puerta.

A. —Un metro y 3 décímetros de metro.

M. —Esta medida es un litro y ésta contiene la décima parte de un litro. ¿Qué cantidad de agua contiene esta botella? (*El maestro mide*). Cuenten.

A. —Siete décimos de litro.

M. —Sigan escribiendo, Pedro y Gilda. (*Lean las cantidades. Lean las cantidades escritas*).

Deberes. —Los ejercicios que indique el libro. O bien: La 1ª fila : Un hilo cuyo largo sea de 1 metro y 6 décimos.

La 2ª fila: Escritas en sus cuadernos, cinco cantidades decimales, como las que hemos escrito y al lado las palabras.

La 3ª fila : Una línea y luego otra que sea siete décimos de la primera.

La 4ª fila: Un rectángulo dividido en décimos y luego otro, que valga 3 décimos del 1º.

INDICACIONES

1º Evitar en absoluto el sistema de representar decimales sin enteros, de esta manera : ,85 ; ,66 en vez de 0.85, 0.66 ; pues, siendo el punto ó la coma signos pequeños, al escribir, se olvidan ; ó al leer se notan con dificultad ; y en todos los casos, el niño que habitualmente aprecia las cosas por el tamaño, no dedica la merecida atención á un elemento de tanta importancia en la numeración de los decimales. Hemos notado estos defectos en muchos niños habituados á un sistema que ningún texto de mérito científico usa. En cuanto á si ha de ser punto ó coma, nos parece indiferente, uno ú otra. Sin embargo, preferimos el punto.

2º El habitual desprecio á lo pequeño, lleva los niños á considerar insignificantes, signos fundamentales de reconocimiento. De aquí los contrasentidos á los que, por el tácito consentimiento del maestro, se adaptan de tal manera que ni el sentido común ni la conciencia, protestan contra lo que concluye por verse á través de

una abstracción independiente de toda realidad. Se dice (es común en profesores y alumnos, lo combato con una fuerza de voluntad digna de mejores frutos), «Luego, el volumen del sótano es 3415». ¿Qué? digo yo. El alumno, sorprendido, piensa ó no piensa para expresar la denominación que viene primero á su memoria: *metros cúbicos*. Era, en cambio, 341.5 ms. cbs. Es claro; al multiplicar, olvidó la denominación de los factores, olvidó reducirlos á una misma denominación ú olvidó, al dividir—al dividir es cuando se cometen más errores acerca del punto decimal—colocar la coma en el cociente ó donde correspondía.

LECTURA 11ª (Abril)

Tema.— La unidad dividida en cien partes; el décimo dividido en diez partes. Lectura y escritura de cantidades, hasta centésimos.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — Coloquen sobre el banco sus deberes (*Recoge los cuadernos de la 2ª y 4ª fila*). Tracemos en el pizarrón, una línea de un metro y 6 décimos de metro. (*La traza medida con el metro*).

Veamos si el hilo que trajo cada niño de esta fila mide 1 metro y 6 décimos.

(*Pasa la primer fila y superpone el hilo á la línea y dice: mide 1 metro y 6 décimos; ó mide menos; ó mide más*).

M. — (*Pasan al pizarrón, 3 niños de la 1ª fila y 3 de la 4ª*). ¿Cuál era el deber de la 3ª fila?

A. — Trazar dos líneas, una que fuera 7 décimos de la primera.

M. — Trácela. ¿Cuál era el deber de la 4ª fila.

A. — Dividir un rectángulo en décimos, y luego trazar otros que fueran 3 décimos del primero.

M. — Trácelos. ¿Qué hizo Juana para trazar una línea que fuese 7 décimos de otra?

A.—Tracé esta línea primero (*señalando la que acaba de dibujar*); luego la dividí en diez partes iguales; cada parte es un décimo. Trazo, después, una línea del largo de estas siete partes, y esta línea vale 7 décimos de esta otra.

M.—Muy bien. Escriban 7 décimos.

(*Los niños escriben*).

M.—¿Qué hizo, Mauro, para trazar un rectángulo que valiera 3 décimos de otro.

A.—Tracé este rectángulo; le dividí en diez partes iguales; cada parte es un décimo del rectángulo (*señalando*). Luego, tracé un rectángulo igual á estas tres partes, ó sea tres décimos del primer rectángulo.

M.—Vuelvan á sus asientos. (*El maestro clava con chinchas, en el pizarrón, una cinta de papel ó género de 2.5 á 3 mts. de largo, por 6 cms. de ancho, dividida en diez partes y cada una de estas partes en otras diez con verticales menos gruesas y más cortas, así:*



¿En cuántas partes está dividida esta cinta por las rayas gruesas y rojas?

A.—En diez partes iguales.

M.—Cada parte, pues, es?

A.—La décima parte de la cinta, un décimo.

M.—Ahora, observen cada décimo de la cinta; ¿en cuántas partes está dividido por las rayitas negras?

A.—Cada décimo de la cinta está dividido en diez partes. Es un décimo...

Otro.—Es un décimo de la décima parte de la cinta.

M.—Esta bien. Si en cada décima parte de la cinta (*acompañando las palabras con las indicaciones del puntero*) hay diez de estos pedacitos de cinta ¿cuántos habrá en toda la cinta? Cuenten.

Todos.—Diez, veinte, treinta, etc.

M.—¿Hay cuántos?

A.—Cien pedacitos.

M.—¿La cinta está, pues, dividida por las líneas negras?

A.—En cien partes iguales.

M.—*Cien partes iguales; muy bien.* Cada una de las cien partes, es de la cinta ¿cuánto?

A.—Es la centésima parte.

M.—Y se llama *centésimo* (*escribiendo la palabra*).

A.—La centésima parte de la cinta se llama centésimo.

M.—Luego, una cinta ¿cuántos centésimos tiene?

A.—Cien centésimos.

M.—¿Esta regla?

A.—Cien centésimos.

M.—¿Esta naranja?

A.—Cien centésimos.

M.—¿Cualquier cosa, podrá dividirse en cien partes?

A.—Sí, señor; cada parte será la centésima parte de esa cosa.

M.—Una cosa la representamos por ¿qué cifra?

A.—Por la cifra *1*.

M.—¿Y uno, cuántos céntimos tiene?

A.—Cien céntimos.

M.—Está bien. ¿A qué lado de la coma escribiremos los centésimos?

A.—Al lado derecho.

M.—Los centésimos ocupan el 2º lugar; así: 8 centésimos se escriben 0.08; esta cantidad 0.09, se lee nueve centésimos; esta otra 2.76, se lee, dos unidades, siete décimos y seis centésimos. Y 15 centésimos se escriben 0.15, un décimo y cinco centésimos; 87 centésimos se escriben 0.87. Observen Vds.: quince centésimos son un décimo y cinco centésimos; veamos si es cierto. Tenemos quince centésimos de la cinta: uno, dos, tres ... quince; hasta aquí son 15 centésimos. Pero esta parte es ¿qué cosa de la cinta?

A. — Un décimo de la cinta.

M. — ¿Y esta otra, cuántos centésimos?

A. — Cinco centésimos.

M. — Luego, ¿estos quince centésimos son, de otro modo?

A. — Un décimo y cinco centésimos.

M. — ¿Estos quince centésimos (*señalando el número*) son, leídos de otro modo?

A. — Un décimo y cinco centésimos?

M. — Tenemos, piensen.... ¿cuántos centésimos de la cinta?

A. — 54 centésimos.

M. — (*Contando en la cinta*). Diez y diez veinte; treinta, cuarenta, cincuenta y cuatro.... Hasta aquí, 54 centésimos; son 5 décimos y cuatro centésimos. ¿Escribiremos, pues?

A. — 0 unidades; coma; 5 décimos y 4 centésimos.

M. — (*Escribe 0.32*), quiero tomar de la cinta esta cantidad; pase Juan á indicarla.

A. — (*Pasa é indica un trozo de cinta 0.32*).

A. — Voy á escribir un número (*pizarra giratoria*) y Vds. lo leen. (*Escribe 0.08 ; 0.8 ; 8 ; 0.88 ; 8.8 ; 8.88 ; 7.25 ; 0.9 ; 0.06*).

M. — Un peso ¿cuántos centavos tiene?

A. — Cien centavos.

M. — Un centavo, ¿cuánto es de un peso?

A. — Es la centésima parte.

M. — ¿Cómo escribiremos 29 centavos?

A. — 0, coma, 2 y 9.

M. — 29 centésimos de qué?

A. — De pesos.

M. — Pues, cuando se trata de pesos, hay que escribir la denominación. (*Escribe 0.29 \$*).

M. — Y 129 centavos ¿cómo se escribirá?

A. — 1, coma, 29 y pesos. Uno, representa una unidad, ó sea un peso.

M. — ¿Luego, en vez de 129 centavos puede leerse?

A. — Un peso y 29 centavos.

M. — ¿Qué otra cosa conocen dividida en cien partes?

A. — El metro.

M. — Muy bien.

Fin. — M. — Dicten Vds., cantidades centesimales; yo las escribiré.

Als. — 8 centésimos; 429 centésimos; 1425 centésimos; 46 centésimos; 65 centavos; (*el maestro escribe las cantidades en columna vertical, unas debajo de otras*).

M. — (*Pasan al pizarrón seis alumnos*). Escriban en columna vertical de modo que se correspondan las comas: 1 centésimo; 4 décimos; 7 unidades; 6 centésimos; 89 centésimos; 15 décimos; 428 centésimos. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis alumnos*). Escriban: 8 décimos; 8 centésimos; 8 unidades; 88 centésimos; 45 centavos; 5 pesos con cinco centavos; 10 centavos; 30 centavos; 7 pesos con 25 centavos. Vuelvan á sus asientos.

Van á leer las cifras que yo señale. (*El maestro indica una de las que componen diez cantidades escritas en el pizarrón, como estas: 0.4257; 85; 8.93; 0.56 \$; 75.49 \$, etc.*).

Als. — 9 décimos; 9 centésimos; 85 unidades; 4 decenas; 6 centavos; 56 centavos; 5 pesos, etc.

M. — ¿Qué lugar ocupan los centésimos? ¿los décimos? ¿A qué lado del punto decimal se escriben los décimos y centésimos? ¿A la izquierda, qué parte de los números se escribe? ¿Puede dividirse un lápiz en cien partes iguales? Nombren objetos que puedan dividirse en cien partes iguales. Nombren cosas que Vds. conozcan, divididas en cien partes iguales. ¿Qué números están escritos en este aparato que se llama termómetro?

A. — 0, 10, 20, 30.... 100.

M. — ¿Entre 0 y 10 cuántas divisiones notan Vds.?

A. — Diez divisiones; luego hay cien divisiones iguales y cada división es la centésima parte de la parte numerada.

M. — De Mercedes á Buenos Aires hay 100 kms.; y de la estación del Oeste á la del Pacífico un kilómetro. ¿Qué distancia es de la de Mercedes á Buenos Aires, la que hay entre una y otra estación?

A. — La centésima parte.

M. — De Mercedes á Luján hay 35 km. ¿Cuántos centésimos de la que hay entre Mercedes y Buenos Aires?

M. — Esta cinta es la distancia entre Mercedes y Buenos Aires, 100 kms. ¿dónde estaría situado Agote, si de Mercedes á Agote hay 8 kms.?

A. — (*Pasa un alumno y señala*).

M. — Esta longitud ya la conocen Vds., es....

A. — Un metro.

M. — Que contiene cien de estas divisiones; ¿cada una, es, pues?

A. — La centésima parte del metro.

M. — Esta medida (*mostrando un palito de un centímetro de largo y superponiéndolo á una de las divisiones del metro*), es?

A. — La centésima parte de un metro.

M. — Muy bien. Midamos este lápiz (*midiendo*). ¿Qué largo tiene?

A. — 18 centésimos de metro (*escribese el decimal en la pizarra*).

M. — Midamos el alto de la pizarra (*mide con el metro primero, luego con la décima parte del metro, luego con la centésima; los niños observan*).

A. — 1 metro 45 centésimos de metro.

M. — (*Mide la longitud de las reglas métricas que usan los carpinteros y dibujantes*).

Deberes. — Para mañana traen, en sus cuadernos, escritas cinco cantidades decimales, en números y palabras; además, una varita dividida en centésimas de metro y por escrito, la longitud; además, una reglita que mida 10 centésimos de metro y dividida en 10 partes iguales.

LECCIÓN 14ª

Tema. — Ejercicios de reconocimiento y aplicación acerca de la numeración de decimales.

Damos este desarrollo, para que los señores maestros puedan formar un concepto claro de la forma de estas lecciones para fijar conocimientos minuciosos, en cada grado.

Desarrollo. — **A.** — **M.** — ¿ Cuántas cifras tiene el número cien mil uno ?

A. — Seis cifras.

M. — En 1000 unidades ¿ cuántas centenas hay ?

A. — Diez centenas.

M. — 85 multiplicado por 100 ¿ cuánto es ?

A. — 8500.

M. — 6 por 8 ¿ cuánto es ?

A. — 48. **M.** — ¿ Y 8 por 6 ? **A.** — Lo mismo, 48.

M. — De consiguiente, 6 por 8 es lo mismo que ?

A. — Que 8 por 6.

M. — ¿ 9 por 3 ?

A. — Lo mismo que 3 por 9.

M. — ¿ 9 por 7 ?

A. — Lo mismo que 7 por 9.

M. — ¿ Qué número es ? (*corriendo la manecilla sobre el cuadrante con numeración romana*).

Als. — 12; 8; 5; 11.

M. — ¿ 44 dividido entre 7 es cuánto y sobra cuánto ?

A. — Es 6 y sobra 2.

M. — ¿ 51 dividido entre 9 ?

A. — Es 5 y sobra 6.

M. — ¿ 8 por 9, menos 2 dividido por 10 más 3 más 2 ?

A. — 12.

M. — (*Pasan seis alumnos al pizarrón*). Tracen una línea de 2 decímetros de largo; de un decímetro; de medio metro. Escriban: 1002; 20000; 8004; 11111; 1 milésimo; 5 unidades y 2 millonésimos. Borren; dividan 8324 entre 25. La clase, mientras, da el resultado de las siguientes sumas: ¿ $2 + 9$? **A.** — 11. **M.** — ¿ $12 + 9$? **A.** — 21. **M.** — ¿ $22 + 9$?

A. — 31. M. — Por consiguiente, á todo número que termina en 2 si agregamos 9, da un número terminado en 1. (*El maestro hará observar 8 casos escritos anticipadamente en la parte superior de la pizarra*). Así, pueden Vds. dar el resultado con más rapidez. $82 + 9$ es 91; $52 + 9$ es 61. Sabiendo que $5 + 9$ es 14; 25 más 9 será 34; $45 + 9$ ¿será? A. — 54; $15 + 9$, 24; $55 + 9$, 64.

M. — Muy bien. Vuelvan á sus asientos los del pizarrón.

B. — M. — 6 por 0 ¿Cuánto es?

A. — Es 0.

M. — ¿0 por 81? ¿0 por 5555? ¿98 veces 0?

Van Vdes. á decirme qué decimales ocupan el 5º lugar?... ¿el 2º?... ¿el 4º?... ¿el 7º? ¿el 1º? ¿el 3º lugar?... ¿El 6º? ¿El 9º? ¿El 12º?

Als. — Milésimos; millonésimos; billonésimos; trillonésimos.

M. — Recuerden bien que de tres en tres lugares se suceden estas denominaciones. Entre el 3º y el 6º, los lugares se denominan milésimos, *diez* milésimos; *cien* milésimos. Entre el 6º y el 9º se denominan millonésimos; *diez* millonésimos; *cien* millonésimos. ¿Y entre el 9º y el 12º?

M. — Billonésimos; *diez* billonésimos; *cien* billonésimos.

M. — Si se nos dijera que escribiésemos 5401 billonésimos lo haríamos así: escribo 5401 (*escribiendo*) de la coma á los billonésimos hay 9 lugares; entonces, cuento (*comenzando del 1 á la izquierda*) uno, dos, tres... nueve, coma y cero, escribiendo cero en los lugares contados sin cifras para quedar el número escrito así: 0.000005401. Dicten Vds. un número de muchos decimales.

Observen con qué facilidad se escriben.

Als. — 325 billonésimos (*el maestro escribe según el procedimiento indicado*); 7 trillonésimos; 45 cienmilésimos.

M. — Bien. Ahora observen Vdes. con qué facilidad puede leerse un decimal de muchas cifras. Supongamos este número 0.00004256 (*escrito con rapidez, de tal manera que el niño note seguridad y que el número es uno de tantos escritos sin meditación previa*). Digo milésimos, millonésimos, (*señalando la 3ª y 6ª cifra,*) diez millonésimos, cien millonésimos: 4256 cien millonésimos. Otro; supongamos 45.004005. Digo: 45 enteros.... milésimos, millonésimos; 45 enteros, 4005 millonésimos.

(*Pasan al pizarrón cinco niños*).

Escriban como yo hice, las cifras primero y luego contando los lugares hacia la izquierda: 7 milésimos; 1 millonésimo; 35 millonésimos; 85628 millonésimos; 3 diez milésimos; 3001 centésimos. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cinco*). Escriban: 6 décimos; 85 millonésimos, 3 billonésimos; 9 diez milésimos; 8429 centésimos; 68 diez millonésimos. Vuelvan á sus asientos. En 8429 centésimos ¿cuántas unidades enteras, décimos y centésimos hay?

A.—84 unidades, 2 décimos y 9 centésimos.

M.—Van á leer las cantidades que escriba en el pizarrón, dividiendo en períodos de tres cifras. ¿Comprenden? (*El maestro rápidamente escribe, pidiendo de cada cantidad, la lectura: 0.001, 0.000001, 0.00000001, 0.00001, 0.0000001, 1.00000001, 0.008567, 896.75*).

C. — **M.**—(*Escribiendo el número 897*).

A.—El número 897.

M.—(*El maestro correrá la coma á derecha é izquierda, pidiendo cada vez, á un niño, la lectura del número, así: 89.7, 8.97, 0.000897, 0.897*).

M.—Para obtener un milésimo de puntero en ¿cuántas partes iguales debo dividirlo?

A.—En mil partes iguales.

M.—Para obtener un millonésimo de la distancia entre Mercedes y Agote. ¿En cuántas partes hay que dividirla?

A.—En un millón de partes.

M.—27 millonésimos de este papel ¿ cómo le obtendríamos ?

A.—Dividiendo el papel en 1.000.000 partes iguales y tomando 27 de ellas.

M.—Una bolsita de trigo contenía un millón de granos. Varias gallinas se comieron 825. ¿ Qué parte de la bolsita de trigo se comieron ?

A.—825 millonésimos de la bolsa.

M.—Una botella contiene 10000 gotitas de agua, cada gota es ¿ qué parte de la botella ?

A.—La diez milésima parte.

M.—Y se derraman 1825 ¿ con cuántas gotas queda el frasco ?

A.—Con 1825 milésimas partes menos.

M.—Cuando no hay enteros ¿ qué se coloca en su lugar ?

A.—Un cero.

M.—Diga el nombre de las cifras decimales por el lugar que ocupan, siguiendo el orden sucesivo de la coma hacia la derecha.

A.—Décimos, centésimos, (milésimos, etc).

INDICACIONES

Hágase comprender, en la lección siguiente, que los ceros á la derecha de los decimales, no teniendo valor absoluto ni relativo alguno, se quitan siempre.

LECCIÓN 20ª

Tema.—Suma de decimales.

Desarrollo. -- *Principio.* — *M.*—Tabla de sumar agregando siempre 7, desde 5.

A.—12, 19, 26, 33, 40, etc.

M.—Tabla de multiplicar del 8.

A.—8, 16, 24, 32, etc.

M.—Un niño compró 9 plumas á 3 centavos cada una; gastó 4, vendió el resto á 4 centavos cada una, ¿cuántos centavos desembolsó realmente?

A.—Siete centavos.

M.—(*Pizarra giratoria*). ¿Qué número es? (*Escribiendo XXXIV*).

A.—El número 34.

M.—Dónde han visto Vds. números romanos?

Als.—En los relojes, en la numeración de capítulos, junto al nombre de monarcas y papas.

M.—¿Cómo escribiríamos el siglo en que estamos?

A.—Dos X.

M.—¿Y el año en que estamos?

A.—Eme, ce, eme, y tres íes.

M.—Qué números, sumados, dan 30?

Als.— $25 + 5$, $8 + 9 + 13$, $10 + 11 + 2 + 4 + 3$.

M.—¿Qué números multiplados dan 30?

Als.—5 por 6, 3 por 10, 2 por 3 por 5.

M.—6 es el cociente de dividir ¿qué número entre qué otro?

Als.—54 entre 9, 24 entre 4, 48 entre 8, 36 entre 6.

M.—Lean el número que señale.

A.—45 diez milésimos, 8 centésimos, 4 millonésimos, etc.

M.—Qué lugar ocupan los millonésimos? los billonésimos; los diez millonésimos? A un número que colocamos cuatro ceros á la derecha ¿por cuánto le hemos multiplicado?

Medio. — M.—Ahora, quiero que aprendan á sumar cantidades decimales. La operación es la misma que acostumbran Vds. á hacer para sumar enteros. (*El maestro habrá anticipadamente, escrito las siguientes cantidades:*

$$\begin{array}{r} 81.95 \\ 36.961 \\ 7.7 \\ 0.48 \end{array}).$$

Deseamos hacer esta suma; escribimos las cantidades unas debajo de otras, de modo que coincidan verticalmente las comas; los décimos con los décimos (*señalando con el puntero*); los centésimos con los centésimos ¿Ven Vds.? Luego trazamos esta línea y comenzamos á sumar por la derecha: Uno es 1; 5 y 6, 11; y 8, 19, etc. (*El maestro, hablando, concluye la suma; luego, ejemplifica otra vez; pide, por último, varias cantidades para sumar y las escribe y adiciona á la vista de la clase, para que del mecanismo de la operación, quede una imagen óptica más clara é intensa que la que puede formarse por la vía auditiva*).

Fin. — (*Pasan 6 alumnos al pizarrón*). *M.* — Escriban, para sumar 0.25; 0.8; 3.15. Sumen. (*Los niños hacen la suma de acuerdo con lo que observaron al maestro*). Borren. Sumen estas otras: 2.34; 0.0150; 35.389. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis alumnos*). Sumen: 0.00002; 0.0002; 0.002; 0.02; 0.2; 2.

Otra: sumen 35; 1001.01; 0.035; 0.8929. Vuelvan á sus asientos.

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

LECCIÓN 2ª (Mayo)

Tema. — Múltiplos del metro, denominaciones y manera de escribirlos.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — En la lección de ayer, supimos que el metro era pequeño para medir toda clase de longitudes. Para medir alambrados, el ancho de las calles, los lados de un terreno, la distancia entre los postes de telégrafo ¿qué usábamos?

A. — La cadena métrica ó la cinta métrica, que tenían 20 y hasta 50 metros de largo. La usan los agrimensores. Nosotros, un día, vimos con ella al ingeniero Ortiz.

M.—Bien. No menos difícil sería recordar la distancia de aquí á Buenos Aires; de aquí á Europa, en metros; 100000 metros; 8 millones de metros. ¿Quién puede formar una idea, aproximada siquiera, de dimensiones expresadas en números tan grandes? Luego, ¡cuánto tiempo, qué enormes libros emplearían los ingenieros y contadores de empresas ferroviarias si tuviesen que expresar en metros las distancias recorridas por el tren! Comprenderán Vds., la necesidad de escribir cantidades que expresen longitudes más grandes. ¿Qué querrá decir Decámetro; *Deca metro*?

A.—*Deca* significa diez; *metro*, metro; diez metros.

M.—¿Y *Hectómetro*?

A.—Significa cien metros.

M.—¿Y *Kilómetro*?

A.—Mil metros.

M.—¿Y *Miriámetro*?

A.—Diez mil metros.

Medio.—*M.*—Acaban Vds. de nombrar las medidas que expresan las grandes longitudes y se llaman múltiplos del metro porque cada una de ellas es mayor y vale 10, 100, 1000 y 10000 metros, respectivamente. En la pizarra se habrá escrito el siguiente cuadro :

Cada	1 Mm.	1 Km.	1 Hm.	1 Dm.	1 m.
Vale	10000 metros	1000 metros	100 metros	10 metros	1 metro

M.—¿Cuál es más grande de los cuatro múltiplos?

A.—El miriámetro que vale diez mil metros.

M.—¿Cuál sigue, por su dimensión?

A.—El kilómetro que vale mil metros.

M.—(*El maestro escribe : 45 hectómetros*). Lea lo que he escrito?

A.—45 hectómetros ó sea 45 veces 100 metros.

M.—¿Ahora? (*escribiendo 36 veces 10 metros*).

A.—36 decámetros ó sea 36 veces 10 metros.

M.—¿Y ahora? (*escribiendo 9*).

A. —Nueve.....

M. —¿Nueve qué?

Als. —....9 metros . . ; no señor : 9 kilómetros....

M. —Ah ! bien ; no saben Vds. que medida expresa, porque falta . . .

A. —Porque no ha escrito Vd. la denominación.

M. —Eso es. Esto quiere decir que siempre, *siempre* que deban Vds. escribir un número que exprese metros, decámetros, kilómetros, deben escribir á su lado la palabra ó denominación. Así : 25 metros multiplicado por 8 (*escribiendo* 25×8) ¿ estará bien escrito ?

A. —No, señor ; debe escribirse la denominación después del 25 (*el maestro escribe* $25 \text{ metros} \times 8 = 200$).

A. —A 200 debe agregarse la palabra metros.

M. —Pero, comprenderán Vds., qué larguísimo es escribir toda la palabra ; 85 kilómetros por 8 ; entonces se abrevia, se escriben sólo dos letras, la primera y junto á la primera, una *m* y luego un punto. La *m* quiere decir metro ; Dm. (*señalando en el cuadro*), *D*, deca, *m* metro, *Dm*, Decámetro ; Km. *K*, Kilo ; *m*, metro ; *Km*. Kilómetro. En plural, en vez de metro, metros ; de Decámetro, Decámetros, se agrega una *s*, así : 5 Dms. ; 1 Km. : 15 Kms. Y, por último ¿ notan Vds. con qué clase de letras comienzan todas estas palabras, excepto metro ?

A. —Sí señor ; todas comienzan con mayúscula.

M. —No lo olviden nunca. Ahora, contéstenme. Piensen un múltiplo del metro y su valor.

A. —El Kilómetro que vale 1000 metros.

Otro. —El Decámetro que vale 10 metros.

M. —¿ Con qué letras se escribe la denominación Miriámetro ?

Eme mayúscula, eme minúscula y punto.

M. —¿ Kilómetros ?

A. —*K*, *m*, *s*, y punto.

M. —El Decámetro ¿ cuántos metros vale ?

A. —Vale 10 metros.

M. —Observen lo que escribo : 8 ms.

A. —Ocho metros.

M. —8 Mm. A. —Ocho miriámetros.

M. —No, falta algo.

A. —Falta la *s* después de la *m* porque es plural.

M. —(*Escribe la s*). Denme Vds. cantidades para que yo las escriba.

A. —92 metros; 48 Hectómetros; 1 Kilómetro; 65 Decámetros. (*El maestro escribe, á veces, la cantidad sin la denominación para que los niños corrijan la falta; ó Kilómetros en vez de Kms.; ó dm. en vez de Dm. ó mts. en vez de m.*)

Fin.—(*Limpia la pizarra y pasan cinco niños*).

M. —Mario, haga el cuadrito de los múltiplos, denominación abreviada, con sus equivalencias en metros. Los demás, escriban, mientras la clase observa las equivocaciones: 1 m.; 1 Km.; 1 Hm.; 6 mms.; 12 Kms.; 1228 ms. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cinco*). Escriban: 85 ms.; 98 mms.; 65 Kms.

A. —José escribió mal: falta la *s* después de la *m* y el punto.

M. —Corrija, José. Continúen escribiendo: 76 Kms.; 36 Kms.; 1 Dm. y 1 m.; 3 Hms.; 1 Dm. y 6 ms.

El maestro no dictará expresiones que no guarden el orden Mm., Km., Hm., Dm., m., expresiones como estas: 8 Ms., 65 Kms. y 9 Dms.; por lo menos, en las primeras lecciones para acostumbrar á sus alumnos á esa graduación, tan necesaria en las operaciones métricas y que los niños olvidan con tanta frecuencia, lo que los hace manejar con dificultad los complejos; insistimos en estos ejercicios de escritura y lenguaje métrico, porque los tropiezos que notamos en alumnos de 4° y 5° grado, que resuelven problemas siempre relacionados, directa ó indirectamente, con el sistema métrico, únicos que se prestan á una rica variedad de combinaciones provechosas para educar la aptitud matemática y formar el espíritu de aplicación á los casos de la vida diaria, se deben á olvido ó interpretaciones erróneas de la denominación. Se acostumbran á considerarla sin importancia; los números, en vez de concretos, se vuelven abstractos; se atienen á las operaciones y así es como reducen 15 m.³ de acero á Kgs. multiplicado por la densidad 8; así es como hallan la superficie de una tabla que mide 2 ms. por 8 dms.; con la operación $8 \times 2 = 16$, siéndoles indiferente la denominación ms. ó dms., ó ninguna de las dos.

M. —Digan Vds. qué falta á la denominación que escriba. (*Escribe: 5 km.; 8 dms.; 3 m.; 7 m., etc.*).

M.—¿Qué múltiplo vale 10.000 metros? ¿1000 metros? ¿45 metros?

A.—Ningún múltiplo vale 45 metros.

M.—¿Y 40 metros?

A.—Ninguno.

M.—Pero 40 ms. valen 4 veces diez metros....

A.—4 Decámetros.

M.—¿Cuáles son las cuatro mayúsculas de los múltiplos?

A.—M, K, H, D.

M.—Todos; Kilómetro se escribe?

Als.—Kms.

M.—Hectómetro se escribe? etc.

• *M.*—¿Qué no debemos olvidar nunca de escribir al lado de los números métricos?

A.—La denominación abreviada.

Deberes.—Los ejercicios que acerca de la escritura del metro y sus múltiplos, indica el libro de problemas. Además, busquen en las guías, horarios de trenes, libros, una hoja que tenga escrito cantidades métricas: metros ó múltiplos de metros.

INDICACIONES

Se notará que no siempre los *principios* versan sobre todos los puntos de la aritmética, se circunscriben al tema de la lección. Pero, en la distribución del tiempo, las lecciones de enseñanza se alternan con las de *ejercicios y problemas*. Las series de ejercicios y problemas resultan en cada lección, lo dijimos ya muchas veces, verdaderas síntesis de los conocimientos aritméticos adquiridos desde el primer grado hasta la última enseñanza, teniendo en cuenta que si mandamos multiplicar 100102 millonésimos por 24, ejercitamos la numeración de enteros y decimales; la multiplicación de enteros y decimales; y que si escribe 100 102, es seguro que escribirá cantidades con cualquier otra denominación. 100102 millonésimos es,

tocante á numeración, una cantidad sintética, de evocaciones generales ; 2 décimos, tocante á numeración, sería una cantidad particular, de evocaciones reducidas ; no nos cercioraría de los conocimientos que el alumno posee.

LECCIÓN 5ª

Tema. —Equivalencia de los múltiplos del metro.

Desarrollo. — *Principio.* (*Pasan cinco ó seis alumnos al pizarrón ; el maestro los ejercita sobre motivos del deber*).

M. —Escriban en denominación abreviada : centímetros ; centímetro ; kilómetro ; metros ; decímetros ; 2 metros ; 45 centímetros ; milímetros. Vuelvan á sus asientos.

M. —¿ Cuántos metros tiene 8 decímetros ?

A. —Ninguno, porque 8 decímetros es menor que 1 metro que tiene diez decímetros.

M. —Nombren un submúltiplo del metro.

A. —El centímetro ; el milímetro.

M. —¿ Cuántos metros vale un hectómetro ?

A. —Vale 100 metros.

M. —¿Cuál es el mayor de los múltiplos ? ¿ El mayor de los submúltiplos ? ¿Cuál, de todas las medidas, se usa más ?

A. —El metro.

M. —¿ La milésima parte del metro se denomina ?

A. —Se denomina milímetro.

M. —¿ Y mil veces un metro ?

A. —Se denomina kilómetro.

M. —¿ La primer letra de los submúltiplos es ?

A. —Es minúscula y mayúscula la primera letra de los múltiplos.

M. —¿Cuál es el múltiplo del metro, inmediato superior al Dm. ? Al Km. ? ¿ Al Hm. ?

Medio. — El maestro ha preparado, en el pizarrón, el siguiente cuadro, distinguiendo con tizas de colores, las palabras y números en bastardilla.

	Mms.	Kms.	Hms.	Dms.	ms.
1 m. vale.....					1
1 Dm. vale.....				1 ó	10
1 Hm. vale.....			1 ó	10 ó	100
1 Km. vale.....		1 ó	10 ó	100 ó	1000
1 Mm. vale.....	1 ó	10 ó	100 ó	1000 ó	10000

M. — ¿ Un metro vale ¿ cuántos metros ? (*El maestro señala las palabras del cuadro y escribe luego, la contestación del alumno*).

A. — Vale 1 metro.

M. — Un Dm. vale ¿ cuántos metros ?

A. — Vale 10 metros, etc.

M. — Pero ahora, deseamos saber ¿ cuántos Decámetros vale un metro, un Dm. un Hm. (*señalando siempre en el cuadro*). ¿ Es más grande el metro ó el Decámetro ?

A. — El Decámetro.

M. — Luego, un metro ¿ puede valer un Dm. ó más de un Dm. ?

A. — No puede valer un Dm.

M. — *Un metro vale . . .* ¿ qué cifra escribiremos en este lugar que expresa **Dms.** ?

A. — Escribiremos 0. (*Escribe*).

M. — Un Dm. vale ¿ cuántos Dms. ? (*señalando y leyendo*).

A. — Vale un Dm. ; por consiguiente, escribiremos allí, la cifra 1.

M. — Un Hm. vale . . . ; ¿ cuántos metros vale un Hm. ?

www.libtool.com.cn

A. — Vale 100 metros.

M. — Cada Dm. vale 10 ms. ¿cuántos Dms. habrá en 100 ms. ?

A. — Habrán 10 Dms. porque 10 en 100 cabe 10 veces.

M. — Luego, un Hm. ¿cuántos Dms. vale ?

A. — Vale 10 Dms. (*Escribe*).

M. — ¿ Cuántos metros ?

A. — O cien metros.

M. — Un Km. vale . . . ¿ cuántos metros vale ?

A. — Vale 1000 ms.

M. — En 1000, ¿ cuántos 10 metros caben ?

A. — Caben 100 veces diez metros ó 100 Dms. Luego, el Km. vale también 100 Dms. (*El maestro escribe*).

M. — Y 100 Dms. ¿ cuántas veces 10 Dms. contiene ?

A. — Contiene 10 veces 10 Dms.

M. — Diez Dms. valían ¿ Cuántos Dms. ?

A. — Valían 1 Hm.; 10 veces 10 Dms. valdrán 10 Hms.

M. — Entonces, 1 Km. vale ¿ cuántos Hms. ?

A. — Vale 10 Hms. (*Escribe*).

M. — Si 1000 metros valen 1 Km., 10 mil ms. ¿ cuántos Kms. valdrán ?

A. — Valdrán 10 Kms.

M. — ¿ Pero qué, vale 10 mil metros ?

A. — El Miriámetro; luego el Mm. vale 10 Kms.

M. — Cada Km. valía ¿ cuántos Hms. ?

A. — Valía 10 Hms.

M. — Y 10 Kms. ó sea 1 Mm. ¿ cuántos Hms. valdrán ?

A. — Valdrán 100 Hms.

M. — Cada Hm. valía 10 Dms. ¿ cuántos Dms. valdrán 100 Hms. ó sea 1 Mm. ?

A. — Diez veces más ó 1000 Dm.

M. — ¿ Luego, un Mm. vale ?

A. — 1000 Dm.

M. — ¿ O ?

A. — O 100 Hms.; ó 10 Kms.; ó 10000 ms.

M. — Ahora, lean Vds. (*El maestro señala en el cuadro y los niños responden*).

A. — Un Hm. vale 1 Hm.; ó 10 Dms., ó 100 ms.; un Mm. vale 1 Mm., ó 10 Kms., etc.

M. — (*Sin señalar*). Un Hm. ¿cuántos metros vale? ¿Un Km. cuántos Dms.? ¿Un Mm., cuántos Kms.? ¿Un Km., cuántos Dms.? ¿100 metros, cuánto valen?

A. — Valen un Hm.

M. — ¿Diez Hms. valen qué?

A. — Valen un Km.

M. — ¿Mil Dms. valen qué?

A. — Valen 1 Mm.

Fin. — M. — (*Borra el cuadro*). Un Km. vale ¿cuántos Hms.? ¿cuántos Dms. y cuántos ms.?

A. — Un Km. vale 10 Hms., 100 Dms. y 1000 ms.

M. — Un Mm. vale ¿cuántos Kms., cuántos Hms., etc.?

A. — Vale 10 Kms., 100 Hms., etc.

M. — ¿10, cuántas veces es mayor que 1; 100, cuántas veces es mayor que 10; 1000, cuántas veces es mayor que 100?

A. — Siempre 10 veces mayor.

M. — Luego, cada múltiplo ¿cuántas veces vale más que el inmediato inferior?

A. — Vale 10 veces más que el inmediato inferior.

M. — ¿El Km. cuántas veces más que el Dm.? ¿El Dm. diez veces más que qué? ¿El Mm. diez veces más que qué? ¿El Km. 100 qué, tiene? ¿El Mm. 100 qué, vale?

M. — 5 Dms. ¿cuántos metros valdrán?

A. — Valdrán 50 ms. porque un Dm. vale 10 ms. y 5 valdrán 5 veces más.

M. — ¿Cuántos ms. valdrán 7 Dms.; 8; 9; 10?

A. — 100 ms. ó sea un Hm.

M. — ¿Cuántos Dms. valdrán 3 Hms.; 6 Hms.; 9 Hms., 10 Hms.?

A. — 10 Hms. valen 10 Dms. ó 1 Km.

M. — Por consiguiente, para formar unidades de un múltiplo se necesita, por lo menos, diez unidades de la denominación inferior. Y 10 unidades de múltiplo inferior valen?

A. — Una del múltiplo inmediato superior.

M. — ¿Y 20?

A. — Vale 2 del múltiplo inmediato superior.

M. — ¿20 Dms. (*escribiendo*) valen?

A. — 2 Hms. (*Escribiendo*).

M. — ¿80 Dms.? ¿850 Dms.? ¿En 5? ¿En 6 Dms.?
cuántos Dms.? ¿En 5 Hms. cuántos Dms.? ¿En 8 Kms.
¿cuántos Dms.? (*Escribiendo las respuestas, así:*

$$\begin{array}{r} 6 \text{ Dms.} \\ 50 \text{ »} \\ 800 \text{ »} \\ \hline 856 \text{ Dms.} \end{array}$$

8 Kms. 5 Hms; y 6 Dms. valen, pues, ¿cuántos Dms.?

A. — 856 Dms.

M. — ¿Y 856 Dms. valen?

A. — 6 Dms., etc., (*señalando las cifras*).

M. — ¿Y 1985 Dms.?

A. — 1 Mm., 9 Kms., 8 Hms., etc. (*el maestro escribe 1985 Dms. = 1 Mm. 9 Kms. 8 Hms. 5 Dms.*)

M. — ¿Y 1728 ms?

A. — (*Descompone como en el caso anterior*).

M. — (*Pasan á la pizarra, 3 alumnos*). Escriban: 1 Mm. vale tantos Kms., tantos Hms., tantos Dms. y tantos ms.

Escriban: 100 Dms. igual á.... ¿á qué múltiplo?

A. — A un Km.

M. — Escriban: 1000 ms. igual á.... ¿á qué? etc.

LECCIÓN 6ª

Tema. — Submúltiplos del metro y sus equivalencias.

Desarrollo. — *Principio.* — M. — ¿Qué tengo en la mano?

A. — Vd. tiene un metro.

M. — ¿Qué denominación hemos dado á 100 ms. de longitud? ¿á 1000 ms. de longitud? ¿Toda unidad métrica 10, 100, 1000 veces mayor que el metro ¿es qué del metro?

A. — Es un múltiplo del metro.

M. — ¿Qué es submúltiplo?

A. — La unidad menor que el metro.

M. — ¿Qué denominación he escrito? (*Escribe cm., mms., Mm., Kms., etc.*)

M. — Pasen al pizarrón, María, Julia, Mario y Gil. Escriban: 4 décimos de m....; ¿qué falta á los números escritos?

A. — Falta la denominación, la letra *m.*

M. — Hemos dicho que no debe olvidarse. Escriban: 6 centímetros; 29 milésimos de metro; 8 décimos de metro. Vuelvan á sus asientos.

Medio. — *M.* — Observen; 0.4 m. (*señalando*) cuatro décimos de metro ¿qué son del metro? (*señalando en la vara*).

A. — Son 4 decímetros.

M. — Muy bien; 6 centésimos de metro ¿qué son del metro?

A. — Son 6 centímetros.

M. — Y 29 milésimos del metro ¿qué son del metro?

A. — 29 milímetros.

M. — ¿Luego, 38 mms. es lo mismo que?....

A. — 38 milésimos de metro.

M. — ¿8 centímetros? ¿29 decímetros? etc.

A. — 29 décimos de metro.

M. — ¿Los escribiremos también?

A. — Los escribiremos lo mismo.

M. — ¿29 centímetros lo mismo que?

A. — Lo mismo que 29 centésimos de metro.

M. — (*Pasan cinco niños*). Escriban: 8 decímetros; 3 milímetros; 85 centímetros; 898 decímetros. (*Los niños escriben 0.8 m.; 0.003 m.; etc.*) Vuelvan á sus asientos.

M. — Hemos dicho decímetros, milímetros, centímetros y hemos, sin embargo, escrito la denominación

metros, que corresponde á la primer cifra de la parte entera. Recuérdenlo bien. Este número se lee, pues, de dos maneras (*escribiendo 8.625 m.*), 8 metros y 625 milésimos de metro ó bien 8625 milímetros. Si quisiéramos escribir la denominación mm., suprimiríamos el punto decimal; entonces no colocaríamos m. porque diría 8625 metros, escribiríamos 8625 mm.

¿Pero la unidad de las medidas de longitud es?

A. — La unidad de las medidas de longitud es el metro.

M. — De consiguiente, se usa esta denominación con preferencia á las demás. De modo que cuando decimos tantos decímetros, tantos centímetros, usaremos en la escritura, ¿qué denominación?

A. — La denominación metros y el número lo escribiremos en forma decimal.

M. — ¿Un decímetro es cuánto del metro?

A. — La décima parte; el centímetro, la centésima parte y el milímetro la milésima parte.

M. — Un decímetro ¿cuántos centímetros tiene? (*mostrando el metro y señalando la longitud de un decímetro*).

A. — Tiene 10 centímetros.

M. — Un centímetro ¿cuántos milímetros contiene?

A. — Contiene 10 milímetros.

M. — Esta longitud de un decímetro vale 10 centímetros ¿cuántos milímetros valdrá?

A. — Valdrá 100 milímetros.

M. — Un metro ¿cuántos decímetros, centímetros y milímetros vale?

A. — Un metro vale 10 decímetros ó 100 centímetros ó 1000 milímetros.

M. — Saquen todos, su reglita métrica y la pizarra (*la de vidrio opaco debe preferirse á la de piedra*). Tracen una línea de la longitud que indica este número: 0.25 m.; este otro 0.09 m.; este otro 0.025 metros; este otro 6 cms.; este otro 2 dms. (*El maestro recorre los bancos*). Tracen todos, una línea de 2 cms. ¿De cuántos milímetros es?

A. — De 20 milímetros.

M.—Tracen todos una línea de 2 decímetros. ¿De cuántos milímetros es?

A.—De 200 milímetros ó de 20 centímetros.

M.—¿O de qué parte del metro?

A.—Dos décimos de metros.

Fin. — *M.* — Guarden las pizarras. ¿Cuáles son submúltiplos del metro?

A.—El decímetro, etc.

M.—¿Cuántos milímetros vale un decímetro, un centímetro? ¿Cómo se escribe la denominación de centímetro, milímetro, etc.

(*Pasan á la pizarra cinco alumnos*). Escriban : 29 milímetros, de la manera más usada. . . ; de la otra manera. Escriban 6 centímetros; 8 decímetros; 7 milímetros; 828 centímetros, de las dos maneras. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cinco*). Escriban en columna vertical de modo que las comas se correspondan :

5 decímetros; 8 centímetros; 9 milímetros; 3 metros.

5 decímetros son, ¿cuántos milímetros?

A.—Son 500 milímetros.

M.—Escriban al lado = 500 milésimos de metro ; 8 centímetros. ¿Cuántos milímetros son?

A.—80 milímetros.

M.—Escriban al lado = 80, etc.

Sumen. (*Resulta 3.589 metros*).

M.—Vuelvan á sus asientos. ¿El 3 representaba metros y ocupa?

A.—El primer lugar de la parte entera.

M.—El 5 representaba decímetros y ocupa el 2º lugar, etc. Cuando Vds. hallen, pues, escrito un decimal con la denominación metros, saben que la cifra del 3º lugar á la derecha de la coma, expresa milímetros ; ¿la del segundo lugar expresa?

A.—Centímetros.

M.—En este número (8.769 ms.) ¿esta cifra qué expresa?

A.—9 milímetros. *M.*—¿Esta otra? *A.*—7 decímetros.

Deberes. — Ejercicios que acerca de este tema indique el libro.

INDICACIONES

1ª — Acerca de los submúltiplos, el maestro obligará á que se refieran siempre al metro ; no permitirá el uso de otra denominación representativa que la m. ni la escritura de las cantidades en otra forma que la decimal, de modo que el niño se acostumbre á manejar siempre cantidades incomplejas ó á reducir inmediatamente á incomplejo de la *especie metro* cualquier complejo ó incomplejo de otra especie que se le dictare.

2ª — Nunca enseñará á escribir ni permitirá que se escriban cantidades incomplejas con dos denominaciones, como por ejemplo : 3 ms. 35 cms. ó 3.35 cms. Un contrasentido observado con harta frecuencia.

3ª — Nunca permitirá que se escriba la denominación entre la parte entera y la fraccionaria como acostumbran algunos autores ingleses y algunos maestros norteamericanos, así : 3 ms., 35 ó 3^{ms.} 35 en vez de 3.35 ms., pues al dificultar la escritura, la lectura y las operaciones fuera del espíritu eminentemente claro y simple del procedimiento matemático, confunde al niño.

4ª — No menos censurable es el uso de la coma, así : 3'35 metros, por estar fuera de las prácticas universalmente establecidas.

5ª — Y la poca atención que los maestros suelen prestar á la escritura de las denominaciones métricas ; los niños escriben : 0.45 cms., lo que es 0.45 m. ; 5.625 mms., lo que es 5.625 ms. Hemos observado á todo un grado, incluso la maestra, cometer errores de tanta magnitud sin que al hacerlo notar, produjese la menor sorpresa. Nos indica, la inconsciencia con que proceden á veces y su incapacidad para medir las consecuencias de un error. Hemos observado, durante meses, grados que no avanzan, incapaces de resolver problemas, detenidos con resultados fuera ya no de la lógica, sino del sentido común por denominaciones mal escritas ó mal relacionadas. De aquí

que el caso de aquella alumna citado por PIZZURNO, que con baldosa y media embaldosaba el patio, se repita más á menudo de lo que pueda suponerse. Considérese que en adelante, pocos problemas no tendrán que ver con el sistema métrico; considérese que la denominación determina el valor de la cantidad y nos habremos dado cuenta de la importancia que tiene un elemento de la numeración concreta, tan descuidado.

LECCIÓN 7ª

Tema.— *Reducción de un complejo á un incomplejo.*

Desarrollo.— *Principio.*— *M.*— ¿Cuántos metros vale 1 Km., 1 Hm., 2 Hms., 3 Dms., 6 Kms., 85 Kms. (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). Escriban: 29 cms., 8 dms., 75 kms., 925 ms., 83 ms., y 9 mms., 629 cms., 3 dms. y 1 m.; 6 dms., 5 dms. y 6 cms. con la denominación metros. Borren. Vuelvan á sus asientos.

Medio.— *M.*— ¿Qué número he escrito?

A.—El número 19.

M.—¿Cuántos unidades son?

A.—Son 19 unidades.

M.—Si tuviera la m aquí ¿qué serían?

A.—19 metros.

M.—(*Borra la m*). ¿En 19 unidades hay?

A.—Una decena y nueve unidades.

M.—¿Y en 19 metros hay también, cuántos decámetros y metros?

A.—Hay 1 Dm. y 9 ms.

M.—¿Qué lugar y qué cifra expresa metros?

A.—El primer lugar, la cifra del primer lugar, la cifra 9.

M.—¿Qué lugar y qué cifra expresa Dms?

A.—El segundo lugar y la cifra 1.

M.—Muy bien. Luego en 87 ms. (*escribiendo*) ¿qué cifra expresa Dms. y qué cifra expresa metros?

A.—La cifra 8 expresa Dms. y la 7 expresa ms.

M.—75 ms. podría leerse, pues ?

A.—7 Dms. y 5 ms.

M.—¿ 68 ms. ?

A.—6 Dms. y 8 ms.

M.—¿ Y 9 Dms. y 8 metros reducidos á metros, escribiríamos inmediatamente ?

A.—98 metros. (*El maestro escribe 9 Dms. 8 ms.= 98 ms.*).

M.—¿ 2 Dms. y 1 m. ?

A.—21 ms. (*escribe debajo de la anterior expresión*).

M.—En 319 (*escribe*) ¿ cuántas unidades hay ?

A.—319 unidades.

M.—Si tuvieran esta m, ¿ serían ?

A.—319 metros.

M.—129 unidades ¿ cuántas unidades, decenas, centenas son ?

A.—9 unidades, 2 decenas, 1 centena.

M.—9 unidades valen ¿ cuántas unidades ?

A.—9 unidades, 2 decenas, 20 unidades y 1 centena, 100 unidades.

M.—Si fueran ms. en lugar de unidades ¿ tendríamos, pues, en 129 metros ?

A.—9 metros, 20 metros y 100 metros.

M.—Eso es. Pero 20 metros valen ¿ cuántos Dms ?

A.—2 Dms.; y 100 metros 1 Hm.

M.—¿ Qué lugar y qué cifra expresa metros ?

A.—El primer lugar y la cifra 9.

M.—¿ Qué lugar y qué cifra expresa 20 metros ó 2 Dms ?

A.—La cifra del segundo lugar que es 2.

M.—¿ Qué lugar ó qué cifra expresa 100 ms. ó 1 Hm ?

A.—La cifra del tercer lugar ó sea 1.

M.—Luego, en 328 ms. (*escribiendo*) ¿ qué cifra expresa Hms ?

A.—La cifra 3, la 2 expresa Dms., la 8 ms.

M.—328 ms. podría leerse, pues, y equivale á ?

A.—3 Hms., 2 Dms. y 8 ms.

M.—¿ 921 ms. equivale y puede leerse ?

A.—9 Hms., 2 Dms. y 1 m.

M.—Y 5 Hms., 6 Dms. y 4 ms., reducidos á ms., podrían leerse inmediatamente ó equivaldrían ?

A.—A 564 ms. (*escribe la igualdad 5 Hms. 6 Dms. 4 ms.=564 ms. bajo de la anterior*).

M.—8 Hms. y 9 ms. reducidos á ms., podría escribirse ¿ qué número inmediatamente ?

A.—El número 809 ms.

M.—Si el primer lugar (*señalando*) expresa metros, el segundo Dms., el tercero Hms. ¿ el cuarto qué expresará ?

A.—Expresará Kms.

M.—Que corresponde, en los números, á las unidades de....

A.—A las unidades de mil.

M.—Así, en esta cantidad 4562 ¿ Qué cifra expresa Kms. ?

A.—La cifra 4.

M.—¿ Quién lo cree así ?

A.—No señor ; porque el número, no teniendo denominación, no sabemos de qué medida se trata.

M.—Muy bien. Escribamos la denominación metros.

A.—4 expresa Kms ; 5 expresa Hms.; etc.

M.—Luego 6 Kms. 8 Hms. 3 ms. (*escribiendo*) ¿ cuántos metros serán ?

A.—6803 ms.

M.—¿ 9304 ms. puede leerse ?

A.—9 Kms. 3 Hms. y 4 ms.

M.—Estos ejercicios que acabamos de hacer, se llaman de reducción; reducir una cantidad de varias denominaciones (*señalando*), á otra de una sola denominación. Vds. ven que no puede ser más sencilla la reducción de varios múltiplos á metros y de metros á varios múltiplos. Pero, alguna vez, muy rara vez, es necesario reducir á Dms. ó Hms. y no á ms.

La operación, es también sencilla. Supongamos 6 Mms., 8 Kms. y 9 Hms. (*escribiendo*), que queremos reducir á Dms.; decimos :

Seis Mms. (*escribe 6*); después de los Mms. los Kms., 8 Kms. (*escribe 8 á la derecha del 6*); después de los Kms., los Hms., 9 Hms. (*escribe 9 á la derecha del 8*);

después de los Hms. los Dms. no hay Dms., 0 (*escribe 0 á la derecha del 9*). 6890 Dms., valen los 6 Mms., 8 Kms., etc.

Para reducirlos á ms. diríamos (*señalando*): Mms., Kms., Hms., Dms. y ms. agregando un cero á la derecha de 6890. Veamos, si las cifras ocupan el lugar correspondiente.

M.—¿ Cero metros ? (*señalando*).

A.—El 1^{er} lugar.

M.—¿ Cero Dms. ?

A.—El 2^o lugar.

M.—9 Hms. (*señalando en el incomplejo y en el complejo*).

A.—En el 3^{er} lugar.

M.—¿ En el 4^o lugar ?

A.—Los 8 Kms.

M.—¿ En el 5^o lugar ?

A.—Los 6 Mms.

Fin.—Saquen las pizarras. Reduzcan á Hms, 6 Kms. 4 Hms. ¿ Cuánto ?

Als.—64 Hms; 64 Hms.

M.—Reduzcan á ms. 3 Hms., 6 Dms. y 5 ms.... reduzcan á ms., 3 Hms. y 6 Dms....; reduzcan á ms., 9 Kms., 7 Hms. y 4 ms (*cada vez hace borrar*).

Digan cuántos Dms., Hms. Kms., etc. hay en 8302 ms....; en 305 ms.; en 35 Dms.; en 856702 ms.

Guarden las pizarras.

M.—El cuarto lugar, en un número que expresa ms. ¿ lo ocupan unidades de qué denominación ?

A.—Unidades de la denominación Kms.

M.—28 Kms. reducidos á denominación ms. ¿ cuántos ceros agregaríamos á su derecha ?

A.—Tres ceros.

M.—En 8325 ms. (*escribiendo 83*) ¿ qué son ?

A.—Son Hms.

M.—832 ¿ qué son ?

A.—Son Dms.

M.—Para reducir 6 Mms. á Dms. (*escribiendo*) ¿ diríamos ?

A.—6 Mms., 0 Kms., 0 Hms., 0 Dms. 6000 Dms.

M.—Contesten todos. Voy á señalar una cifra en este número 856702 ms. y Vds. van á decir qué representa.

Als.—0 Dms.; 6 Kms.; 2 ms.; 5 Mms.; 85 Mms.; 8567 Hms.; 856 Kms.

Deberes.—Los que indique, del asunto, el libro de ejercicios y problemas.

LECCIÓN 16ª

Tema.—Sumar cantidades métricas de longitud, complejas é incomplejas.

Desarrollo.—**A.**—**M.**—(*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). Escriban, para sumar: 3 milésimos; 428 milésimos; 5 enteros; 8 centésimos. Sumen. Otra suma: 6 millonésimos; 4 décimos; 925 centésimos; 8 milésimos; 9 cienmilésimos y 5 millonésimos. Sumen. Vuelvan á sus asientos.

M.—En 1456.787 ms. (*escribiendo*) ¿qué cifra representa milímetros? ¿qué cifra centímetros? ¿qué cifra metros? ¿qué cifra kilómetros?

Marín, lea la cantidad, descomponiéndola en múltiplos y submúltiplos.

A.—1 Km.; 4 Hms.; 5 Dms.; 6 ms.; 7 dms., etc.

B.—**M.**—Si se nos diesen, para sumar, muchas cantidades de diferente especie ó denominación como: 7 Kms.; 9 Hms.; 6 Kms.; 7 Dms.; 8 Ms.; 9 Hms.; 7 Dms., se escribirían en columna, de modo que se correspondiesen los Kms. con los Kms.; los Hms. con los Hms.; los Dms. con los Dms.; se trazaría una raya debajo y se sumarían; luego, se reducirían á metros.

Si quisiéramos saber la distancia entre Mercedes y Buenos Aires, teniendo estos datos (*en la parte superior de la pizarra se ha trazado una línea, con las distancias entre cada estación, así:*

Mercedes	Agote	Rodríguez	Merlo	B. Aires
7 Kms. y 3 Dms.	41 Kms., 8 Hms.; 5 Dms.; 8 ms.	20 Kms. y 7 Dms.	20 Kms., 9 Hms.; y 7 ms.	

el maestro lee los datos), tendríamos que agregar á la distancia entre Mercedes y Agote ¿la que hay?

A.—Entre Agote y Rodríguez; entre Rodríguez y Merlo; entre Merlo y Buenos Aires.

M.—¿Luego, tendríamos que?

A.—Tendríamos que sumar 7 Kms. y 3 Dms. con 41 Kms., 8 Hms.; 5 Dms. y 8 ms., etc.

M.—Muy bien; observen Vds. cómo voy á sumar (*escribe, al mismo tiempo que enuncia en alta voz las cantidades, tratando de que los alumnos vean cuanto hace*):

Entre M. y A.:	7 Kms.	0 Hms.	3 Dms.	0 ms.
» A. y R.:	41 »	8 »	5 »	8 »
» R. y M.:	20 »	0 »	7 »	0 »
» M. y B ^a . A ^a .:	29 »	9 »	0 »	7 »
Entre M. y B ^a . A ^a .:	97 Kms.	17 Hms.	15 Dms.	15 ms.
ó bien:	98 »	8 »	6 »	5 »

Pero 15 ms. ¿cuántos Dms. y cuántos ms. son?

A.—1 Dm. y 5 ms.

M.—Escribo 5 ms. y llevo 1 Dm.; 1 Dm. y 15 Dms. son 16 Dms.; ¿pero en 16 Dms. hay?

A.—1 Hm. y 6 Dms.

M.—Escribo 6 Dms. y llevo 1 Hm.; 1 Hm. y 17 Hms. son, etc.

De consiguiente, la distancia entre Mercedes y Buenos Aires es de: 98 Kms., 8 Hms., etc.

Halleemos la distancia entre Mercedes y Chivilcoy.

(*El maestro ha preparado otra línea con kilómetros entre Mercedes y García; entre García y Suipacha; entre Suipacha y Chivilcoy; procede como en el caso anterior, tratando de ser rápido y evitar preguntas sin importancia, como: ¿Qué estación sigue á*

Mercedes ? que alargan la clase y desorientan la atención).

M.—¿Cuál era la distancia entre Mercedes y Buenos Aires ?

A.—98 Kms., 8 Hms., 6 Dms. y 5 ms.

M.—¿ A cuántos metros equivalen 98 Kms. si cada Km. equivale á 1000 metros ?

A.—Equivalen á 98000 ms. (*El maestro escribe*).

M.—¿ 8 Hms., si cada Hm. equivale á 100 ms. ?

A.—Los 8 Hms. equivalen á 800 ms.; los 6 Dms., 60 ms.; y los 5 ms., 5 ms. (*El maestro escribe las cantidades*).

M.—Muy bien. Sumando tenemos 98865 ms. que equivalen á ?

A.—A 98 Kms., 8 Hms., etc.

M.—¿Qué lugar, en esta cantidad, ocupan los Dms. ? ¿ Los Hms. ? ¿ Los Kms. ? De consiguiente, para reducir á metros, bastará que hagamos ocupar á la cifra de los Hms. ¿ qué lugar ? ; ¿ la de los Dms. qué lugar ?

C.—*M.*—Tomen las pizarras. Escriban las cantidades como hice yo ; ¿ qué distancia habrá entre Mercedes y Giles si de Mercedes al puente del molino hay 1 Km., 3 Dms., y 8 ms.; del puente al almacén de la Florida 3 Kms. y 9 Hms.; de la Florida á Giles 19 Kms., 8 Hms. y 5 Dms. ?

(*Los alumnos resuelven el problema y el maestro pide los resultados después de un minuto*).

Borren. Otro. ¿Qué distancia habrán recorrido los alumnos de una excursión, si la 1ª hora anduvieron 2 Kms. y 3 Dms.; la 2ª hora 1 Km., 6 Hms. y 2 Dms.; la 3ª hora 58 ms.; la 4ª y 5ª hora 3 Kms. y 25 Dms. ?

Guarden las pizarras. (*Pasan 3 alumnos á la pizarra*).

Sumen :

3 Kms.	8 Hms.		45 ms.
2 >	6 >	9 Dms.	8 >
4 >	—	18 >	—

El maestro será estricto en exigir la correcta escritura y colocación de los números y denominaciones, sin apretarlos; acostumbrará, por otra parte, á colocar un 0 ó una raya en el lugar de las denominaciones que faltan.

¿Cuánto ha obtenido, Eke?

A.—9 Kms., 14 Hms., 27 Dms. y 8 ms.

M.—Está bien. Pero en 27 Dms. hay Hms.; en los Hms. hay Kms.; recuerden Vds. que yo escribí, debajo, otra expresión equivalente, sacando de los Dms. los Hms., de los Hms. los Kms.; hágalo, Eke.

A.—8 ms., 8 ms.; en 27 Dms. hay 7 Dms. y 2 Hms., escribo 9 Dms. y llevo 2 Hms.; 2 Hms y 14 Hms. son 16 Hms., etc.

M.—No olviden nunca esta reducción. Sumen.

$$\begin{array}{rcl}
 3 \text{ Hms.} & - & 25 \text{ ms.} \\
 - & & 6 \text{ Dms.} \quad 8 \text{ } \rangle \\
 8 \text{ } \rangle & & 3 \text{ } \rangle \quad -
 \end{array}$$

(Los niños suman y escriben :

$$\begin{array}{rcl}
 11 \text{ Hms.} & 9 \text{ Dms.} & 33 \text{ ms.} \\
 12 \text{ } \rangle & 2 \text{ } \rangle & 3 \text{ } \rangle
 \end{array}$$

M.—¿Cuántos metros son?

Als.—(Escriben inmediatamente: 1223 ms.).

M.—Vuelvan á sus asientos. Hemos sumado hasta ahora, múltiplos.

Los submúltiplos se suman más fácilmente. Quiero saber cuál es el perímetro de este cartón (*forma trapezoidal*). Con la regla métrica, mido este lado: 225 mms.; escribo 0.225 ms.; este otro lado mide 85 mms. Escribo debajo de 0.225 ms., 0.085 ms.; este otro lado mide 2 dms. y este otro 19 cms.; escribo las cantidades; ahora sumo:

$$\begin{array}{r}
 0.225 \text{ ms.} \\
 0.085 \text{ } \rangle \\
 0.2 \text{ } \rangle \\
 0.19 \text{ } \rangle \\
 \hline
 0.700 \text{ ms.}
 \end{array}$$

El perímetro ó los 4 lados juntos, suman 700 mms. ó bien 7 dms. (*Pasan 4 alumnos y á cada uno da un cartón de forma triangular al primero; cuadrangular al segundo, etc., y una regla métrica*). Hallen el perímetro de la figura que acabo de entregarles.

M.—(*A la clase*). ¿cuántos metros son 8 Dms.? ¿5 Hms.? ¿3 Hms. y 6 Dms.? ¿5 Hms. y 9 ms.? ¿8 Hms. y 12 Dms.? ¿3 Kms., 5 Hms., 3 Dms. y 12 dms.? ¿En 325 ms., Hms. Dms. y ms., ¿hay?. Explique, Jorge, su trabajo.

A.—El perímetro es de 628 mms. Tomé la medida de cada lado: el 1º es de 75 mms.; el segundo, etc. Luego sumé; así, obtuve el perímetro.

Otro.—Yo hice lo mismo.

M.—Vuelvan á sus asientos.

Deberes.—Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

LECCIÓN 18ª

Tema. — Ejercicios y problemas.

Desarrollo. — *A.* — Piensen todos, cantidades homogéneas.

A. — 5 Kms., 4 Dms. y 8 ms.; 6 ms. y 9 Mms.; 0 Mms., 3 Dms. y 3 cms.

M. — En números concretos ó con denominación.

Als. — 4 baldosas; 5 naranjas; 6 ms.; 8 Dms.

M. — Piensen todos, en una cantidad heterogénea.

Als. — 4 ms. y 6 litros; 7 ladrillos y 4 sillas; 8 ms., 4 kilómetros y 5 litros.

M. — Cantidades abstractas ó sin denominación.

A. — 8; 9; 75; 0.08; 442.75.

M. — Una cantidad de la misma especie que Kms.

A. — 25 Kms.; 64 Kms.; 1 Km.; 38 Kms.

M. — De la misma especie que ladrillos.

Als. — 26 ladrillos; 24 ladrillos; 2 ladrillos.

M. — Expresiones con cantidades de diferente especie ó denominación.

Als. — 4 Hms.; 5 Dms.; 9 Kms., 80 ms.; etc.

(*Pasan 6 alumnos al pizarrón*).

M. — ¿Cuántos metros en 85 Kms.?

A. — 85000 ms. (*escriben*).

M. — ¿Cuántos centímetros en 22 ms.?

A. — 2200 cms.

M. — Sumen 6 ms., 8 Hms. y 3 Hms, 9 ms. (*los niños escriben*).

M. — ¿En qué orden deben escribirse los múltiplos?

A. — Primero los Kms., luego los Hms., etc.

M. — ¿Así, pues, la primera expresión deben escribirla?

A. — 8 Hms., 0 Dms., 6 ms.

M. — Escriban y sumen.

A. — 11 Hms. y 15 ms.

M. — ¿O bien? ¿en 15 ms. y 11 Hms. hay?

A. — 1 Km., 1 Hm., 1 Dm. y 5 ms.

M. — ¿Cuántos metros son?

Escriban el número de modo que cada cifra ocupe el lugar correspondiente á la denominación. ¿Diga, Juan?

A. — (*Escribe 1115 ms.; en cada cifra dice 1 Km., 1 Hm., etc.*)

Vuelvan á sus asientos.

B. — (*Pasan otros alumnos al pizarrón*).

Escriban para sumar:

229 mms.

45 »

3 cms.

Sumen.

Escriban 805 metros 406 mm.; descompongan el número y den á cada cifra su denominación.

Als. — (*Escriben 8 Hms. 0 Dms. 5 ms. etc.*)

M. — Escriban para sumar: 0 ms., 95 mms; 38 ms. 5 cms.; 134 ms. 4 dms.; sumen. (*Los alumnos escriben*

$$\begin{array}{r}
 8.095 \text{ ms.} \\
 38.05 \quad > \\
 134.4 \quad > \\
 \hline
 \end{array}$$

180.545 ms.; *debe exigirse siempre, la denominación escrita*). Vuelvan á sus asientos.

M. — ¿Cuántos décimetros hay en 9 Kms.? Vean Vds. como hago. (*Escribiendo en el pizarrón*).

9 Kms., 0 Hms., 0 Dms., 0 ms., y 0 dms. son: 90000 dms. Se escriben ceros hasta llegar á la especie pedida y se lee el número.

Ahora, Vds. ¿Cuántos centímetros hay en 3 Dms.?

A. — Dms., ms., dms., cms.; hay 3000 centímetros.

M. — ¿A los Kms. sigue?

A. — Los Hms.; luego los Dms., después los ms. . . .

M. — ¿Después, Julia? . . .

A. — Los dms., los cms, y los mms.

M. — Reduzcamos 9 Kms. y 6 Dms. á cms. Observen como hago (*escribiendo á medida que habla*).

9 Kms., 0 Hms., 6 Dms., 0 ms., 0 dms. y 0 cms. son 906000 cms. (*Pasa un niño al pizarrón*). Reduzca 8 Hms. y 6 ms. á mms.

A. — (*Repite la forma del maestro*).

M. — Reduzca 8 Mms., 6 Hms. á metros.

Pase, Félix. Reduzca 5 Dms. y 6 dms. á ms.

A. — 5 Dms. 0 ms. 6 dms.

M. — ¿Qué denominación debe escribir?

A. — La denominación ms.

M. — ¿Pero los metros, hasta qué cifra llegan?

A. — A la cifra 0: debemos colocar una coma para no confundir los dms. con los ms. Vuelva á su asiento.

C. — Saquen las pizarras y la regla métrica. Párenlas sobre el pupitre y tomen la medida de un lado. Está bien. Apunten la cantidad. Hagan lo mismo con los demás lados y sumen para darme el perímetro. (*Los niños hacen lo indicado y cinco ó seis dan á su maestro, el resultado*).

M. — Tome, cada uno, la longitud de los dedos de su mano izquierda, así (*midiendo uno de sus dedos*)

y denme la longitud total de los cinco. (*Los niños miden y después de sumar, levantan la mano*).

M. — ¿Ven Vds. esta hoja? Quiero saber qué perímetro ocupa la parte impresa. Voy á medir. Vds. harán la operación. (*Mide de manera que la clase observe*). 22 cms.; 334 mms.; 22 cms.; 334 mms.; ¿cuál es el perímetro?

Als. — (*Dan el resultado*).

M. — Qué longitud tendrá una línea equivalente á estas tres (*Hay tres líneas en la pizarra*), si la primera mide (*midiendo con el metro*) 1 m., 6 dms. y 5 cms.; la 2ª 8 dms., 5 cms., 4 mms.; la 3ª 5 dms. y 8 cms.? El resultado con la denominación metros.

A. — (*Los alumnos suman y dan la longitud pedida*).

M. — Piensen Vds., un problema de reducción ó de suma sobre las medidas de longitud.

El maestro pide varios enunciados y da, uno de ellos, de problema, á la clase.

LECCIÓN 21ª

Tema. — Problemas obtenidos midiendo con el metro, longitudes y distancias.

I. Estas lecciones pueden darse en el aula, en cuyo caso no ofrecen más trabajo que el de proporcionar objetos ó indicar determinadas partes del salón, para que los alumnos cumplan instrucciones del maestro. El ejercicio, limitado á dimensiones pequeñas, no reviste el espíritu de generalización que debe exigirse á clases de esta naturaleza. Además, ciertos límites no pueden excederse sin perjuicio del orden.

II. Pueden darse en un patio, cuando no incomodan el funcionamiento de clases próximas; los ejercicios revisten más amplitud; puede usarse de la cadena métrica y los jalones; la combinación del perimetraje geométrico con el cálculo, motiva variados y atrayentes problemas.

III. Pueden darse en el campo, en las plazas ó en los jardines, donde las aconsejamos; como se comprende, media hora es

insuficiente. Exigen una mañana ó una tarde, dos ó tres horas. Los horarios nada sufren si combinan las horas de ejercicio físico, una vez cada quince días. Un maestro empeñoso, dedicaría horas del domingo.

IV. Designado el sitio, el maestro prepara un programa. Los hay quienes parten sin saber para dónde y todo lo improvisan en el momento de la tarea. De este desorden resulta que ningún niño trabaja, que se toma la excursión por un pasatiempo, que los alumnos no atribuyen propósito serio á los mandatos del maestro; que no exteriorizan esfuerzo personal ninguno, supeditado por lo indefinido travieso del conjunto; que todos disipan el tiempo sin otro provecho que el de respirar aire más ó menos puro.

Y los hay quienes formulan un bosquejo de manera que llegados al sitio, los niños, en grupos de tres ó cuatro, comienzan inmediatamente su tarea, para emplear en ella un tiempo ya calculado. Como las longitudes excederán, muchas, de cien metros, se proveerá á cada grupo, de cadena métrica y de jalones. Aquella podrá substituirse con cordeles de dos Dms. anudados cada metro, en los primeros diez metros. Así, 8 grupos pueden, sin dificultad, proveerse de elemento tan importante.

Bosquejo de la lección. — I. Se dividirán los alumnos en 7 grupos, 5 cada grupo; dos con 2 ó 4 jalones; otros dos, con la cadena métrica; cada uno con su libreta, pero uno, apuntador de las longitudes medidas (*10 minutos*).

II. — De la escuela al sitio designado. (*12 minutos*).

III. — Los niños observarán el empleo de los jalones y de la cadena métrica para medir la distancia entre dos puntos situados á 68 ms., en campo abierto (*15 minutos*).

IV. — Designación del trabajo á cada grupo. 1º y 2º: perímetro de una manzana rodeada de zanja, hasta el cruce de cada zanja. 3º y 4º: perímetro de una manzana alambrada. 5º y 6º: colocar dos jalones en campo abierto, á 86 ms. de distancia uno de otro. 7º: dispuestos 5 jalones en direcciones diferentes, hallar la distancia entre el primero y el último, pasando por los 5 (*15 minutos*).

V. — Efectuada la primera medición, los grupos cambian de sitio: el 1º y 2º repite la operación del 3º y 4º; el 3º y 4º la del 5º y 6º; el 5º y 6º la del 7º; el 7º la del 1º y 2º, y así sucesivamente.

El maestro encargará, á uno después de otro, los apuntes, de modo que, terminadas las mediciones, cada alumno tenga un problema que resolver (30 minutos).

VI. — Formación y vuelta al aula (12 minutos).

VII. — Solución de los problemas desde sus asientos (10 minutos).

VIII. — Explicación del trabajo en el pizarrón (15 minutos).

Tiempo total: 2 horas.

Desarrollo. — I. — (*Distribución de los alumnos en grupos; formados en el patio, proveerlos de jalones y cadenas métricas*).

II. — (*Marcha de acuerdo con el plan*).

III. — *M.* — Antes de que Vds. hagan el trabajo que voy á indicar, observen cómo se mide la distancia de un punto á otro, cuando no alcanza la cadena métrica. Entre el lugar en que estamos y aquella esquina. Planto verticalmente, un jalón aquí y otro allá, con plomada para no equivocarme. Corra Manuel, plante el N° 2 allá. Luego, yo aquí y José en dirección á la esquina, hasta donde da la cadena, planta este otro jalón de modo que quede con aquel y éste en línea, para lo cual desde aquí miro y hago indicaciones con la mano antes de plantarlo, hasta que lo coloque en la dirección deseada. Vaya, José.... ¿Ven ustedes como no está en línea? (*con la mano indica cambio de lugar hasta que los tres jalones estén en posición*). Observen ahora. Esto hay que hacerlo siempre así. De aquí al jalón hay dos Dms., longitud de la cadena. Ahora voy á donde está José y los dos repetimos la operación (*lo hace así*). De aquí allá, otros 2 Dms. Apunto en la libreta 2 Dms. + 2 Dms. Arranco este jalón porque para la línea necesito solo tres y repetimos la operación anterior (*lo hace así*). Otros 2 Dms. De aquí á la esquina, alcanza la cadena; no necesito más jalones. Son 8 ms.; la distancia es, pues, 2 Dms. + 2 Dms. + 2 Dms. + 8 ms. Sumados dan 6 Dms. y 8 ms. ó 68 ms.

IV. — Ahora, cada grupo, calculará estas longitudes. (*Designa el trabajo de acuerdo con el bosquejo*). Dentro de 12 minutos, de nuevo aquí.

V. — (*Designa á cada grupo la operación que indica el plan*).

VI. — Vuelta al aula.

VII. — *M.* — Ordene cada niño sus apuntes, disponiendo las cantidades en forma y halle la longitud del perímetro que le fué encomendado.

Antonio, Juan, Ismael y David, (*cuatro de los niños que no apuntaron datos*), dibujen en el pizarrón, cada uno, el perímetro en cuya medición intervino, haciendo uso de la regla.

M. — (*Después de 6 minutos*). Explique Juvencio, lo que Vd. ha hecho.

A. — El perímetro del terreno rodeado de alambrados es de 407 ms. ó sea 4 Hms. y 7 metros.

M. — Los otros grupos ¿obtienen el mismo resultado?

Als. — Yo, obtengo 403 ms.

Otro. — Yo, lo mismo.

Otro. — 396 ms.

M. — Cada lado ¿qué longitud tiene?

A. — Lado Norte, 86 ms.

Als. — Lo mismo.

A. — Lado Oeste, 12 Dms.

Als. — Yo, 118 ms.; yo, 115 ms.

M. — Continúe.

A. — Lado Sud, 81 ms.

Als. — Yo, 79 ms.; yo, 75 ms.

M. — Continúe.

A. — Lado Este, 120 ms.

Als. — Yo, lo mismo; yo, lo mismo.

M. — Las dimensiones son: Norte 86 ms.; Oeste 1 Hm., 1 Dm. y 8 ms.; Sud 8 Dms. y 1 m.; Este 120 ms. Coloque, Antonio, esas dimensiones á la figura que Vd. ha hecho, que desde que unos lados son más largos que otros no debe ser un cuadrado, y haga la suma.

M. — Explique, Martín, lo que Vd. ha hecho, (*procede como en el caso anterior*).

Otra vez, tratarán Vds. de medir con más exactitud, pues dos ó tres metros de diferencia en la compra ó venta de un terreno cerca de la ciudad, significa la pérdida de cientos de pesos.

LECCIÓN 1ª (Junio).

Tema.—Enseñanza de la multiplicación de decimales.

Desarrollo.—*Principio.*—**M.**—Dos números que multiplicados den 42, 81, 56. ¿Qué número multiplicado por 8 da 72, 64, 48? ¿68 dividido por 9 da cuánto y sobra cuánto? Tres números que sumados den 18, 39. ¿Cuánto es $6 \times 8 \times 12 \times 0$? ¿Cuál es la unidad de las medidas de longitud? ¿Cómo se escribe kilómetro? ¿El 4º lugar á la derecha de la coma, qué lo ocupa? ¿Cuántos Hms., Dms., y ms., hay en 872 ms.?

(*Cartones con números romanos*). ¿Qué número es este? ¿Este? ¿Este? ¿Cuánto es $(8 \times 6 + 2)$: $10 + 3$ 9? En los números decimales el 3º lugar ¿lo ocupan?; el 6º lugar ¿lo ocupan?; ¿el 9º?

¿Cuántas cifras decimales hay que apartar en 25 cienmilésimos? ¿en 8 cienmilésimos? ¿Digan en su orden, los múltiplos del metro? ¿Qué longitud tendrá la línea que acabo de trazar?

Medio.—**M.**—Ahora, observen. Voy á enseñar á Vds. á multiplicar números decimales. Sea

$$\begin{array}{r} 4.25 \\ \times 1.3 \\ \hline 1275 \\ 425 \\ \hline 5,525 \end{array}$$

Multiplico como si fueran números enteros (*multiplica*); luego, separo á la derecha del producto, con una coma, tantas cifras decimales como haya en el multiplicando y multiplicador: una, dos y tres (*separa*): Y la multiplicación está hecha. Otro ejemplo.

$$\begin{array}{r} 0.05 \\ \times 3.2 \\ \hline 10 \\ 15 \\ \hline 0,160 \end{array}$$

(*Explicado como el anterior*).

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{r} 0.00000023 \\ \times 0.0000004 \\ \hline 0.000000000000092 \end{array}$$

(*Explicado como el anterior*).

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{r} 135 \\ 0.03 \\ \hline 4,05 \end{array}$$

(*Explicado como los anteriores*).

Denme Vds. dos números para multiplicar.

A.—98.768 por 0.985....

M.—No; son cantidades muy grandes que nos harían perder sin objeto, el tiempo. (*Acepta otras que exigen una operación corta, explicada como las anteriores*).

Fin. — M.— (*Pasan seis ó más alumnos al pizarrón*). Multipliquen: 0.8 por 0.05; 3.4 por 7; 0.0004 por 0.008; 1 por 0.001. Vuelvan á sus asientos.

(*Pasan otros seis quienes efectúan operaciones más ó menos parecidas con cantidades que no exijan largos productos parciales, pues, el objeto de esta lec-*

ción es habituar al alumno, á que cuente las cifras decimales de los dos factores y separe otras tantas en el producto). Vuelvan á sus bancos.

M.—¿Cuántas cifras decimales hay que separar á la derecha del producto?

A.—Tantas como haya en el multiplicando y multiplicador.

M.—Van á multiplicarse dos números que tienen: el 1º 6 cifras decimales, el 2º 4.

¿Cuántas separaremos en el producto?

A.—Diez cifras decimales.

M.—¿A qué lado?

A.—A la derecha del producto.

M.—Van á multiplicarse décimos y centésimos.

¿Qué resultará en el producto?

A.—Resultarán milésimos.

M.—Si multiplicáramos milésimos por milésimos?

A.—Resultarían millonésimos.

M.—Un individuo ha comprado 20 metros de cinta á 8 centésimos de peso ó centavos el metro. ¿Cuánto costaría la cinta?

A.—Un peso 60 centavos. (El maestro hace la operación en la pizarra).

Deberes.—Ejercicios que acerca del tema indique el libro.

LECCIÓN 8ª

Tema.— Enseñar la división de números decimales.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Cuánto es 0.003 por 0.5? 0.004 por 0.006? ¿Qué valor tiene la D; la M; la L? ¿ $6 \times 8 + 9$? ¿ $7 \times 6 + 8$? ¿ $6 + 6 + 6 + 6$? ¿ $8 + 2 + 4 + 6 + 5 + 5$? ¿Cifras del número 10001? Observen.

(El maestro multiplica

$$\begin{array}{r} 20.0003 \\ \times 100 \\ \hline 2000,0300 \end{array}).$$

Los ceros á la derecha de los decimales no valorizan, los borro y queda 2000.03. Vds. ven que es el mismo número pero con la coma corrida dos lugares á la derecha, tantos como ceros tiene 100. Pues, para multiplicar por 10, 100, 1000 se corre la coma tantos lugares á la derecha como ceros acompañen á la unidad y obtenemos el producto. Por ejemplo :

$$\begin{aligned} 0.856 \times 10 &= 8,56; \\ 1.9678 \times 10000 &= 19678. \end{aligned}$$

¿ Cuánto es 8 décimos multiplicado por 10 ?

A. — 8 enteros.

M. — ¿ 925 milésimos multiplicados por 100 ?

A. — 92 enteros y 5 décimos.

M. — En 8526 metros ¿ Qué cifra expresa Kms., Hms; ms ?

M. — Para sumar Dms. con ms. hay que hacer qué ?

A. — Reducir los Dms. á ms.

M. — 5 Kms. y 10 ms. ¿ cuántos ms. son ?

A. — Son 5015 ms.

Medio. — Saben Vds. multiplicar decimales, pero no dividir. El procedimiento es sencillo y presten toda la atención posible, que en un minuto van á saberlo.

Vamos á dividir

$$\begin{array}{r} 0.3 \text{ entre } 0.05 \\ 0.3 \overline{) 0.05} \end{array}$$

Igualo con ceros á la derecha, el número de cifras decimales, en el dividendo y divisor ; luego, suprimo las comas y los ceros de la izquierda y divido como si fueran enteros, así: uno y dos (*cuenta en el divisor*) ; uno y dos (*agregando un cero á la derecha del 3*). Tacho las comas y los ceros de la izquierda (*tachando*) y queda :

$$\begin{array}{r} 30 : 5 \\ \hline 6 \end{array}$$

que da 6, cociente de dividir 3 décimos entre 5 centésimos.

Otro ejemplo : $2.002 \overline{) 0.2}$

Uno, dos y tres ; uno, dos y tres (*agregando ceros*) ; tacho las comas y tengo (*escribiendo más abajo*)

$$\begin{array}{r} 20002 \overline{) 200} \\ 002 \quad 10 \end{array}$$

Otro ejemplo : $36 \overline{) 0.006}$ (*escribiendo el signo de dividir un poco distante del 36*). Uno, dos y tres ; 36000 $\overline{) 6}$, un entero entre otro entero, división que saben hacer. Piensen todos en dos números ; yo, voy á dividirlos.

A. — 4.525 dividido entre 3.25.

M. — (*Escribe las cantidades, iguala el número de cifras decimales, observa que son dos enteros, 4525 dividido entre 325 y evita hacer la operación*).

A. — 0.00025 dividido entre 0.07, etc.

Fin. — Acerca de la división, el maestro repite ejercicios semejantes á los de la multiplicación para adquirir los detalles de la regla.

Deberes. -- Ejercicios que indique el libro.

INDICACIONES

Más adelante, en los casos de dividir un decimal por un entero de una ó dos cifras, se hará la indicación de no igualar con ceros el número de cifras fraccionarias, teniendo cuidado de colocar la coma en el cociente no bien se llegue á la coma del dividendo como en $8.3789 \overline{) 3}$; $8.3789 \overline{) 9}$, etc.

LECCIÓN 8ª (Julio)

Tema.—Multiplicación de denominados métricos.

Desarrollo. A.—M.—Un joyero compró una cantidad de anillos de oro cuyo peso era 1 Kg., 7 Dgs. y 7 grs. á 1.85 \$ el gr. ¿cuánto gastó? (*Apuntes en el pizarra*).

El precio es de cada gramo; reduzco todo á gramos.

$$\begin{array}{rcl}
 1 \text{ Kg.} & = & 1000 \text{ grs.} \\
 7 \text{ Dgs.} & = & 70 \text{ »} \\
 7 \text{ grs.} & = & 7 \text{ »} \\
 \hline
 1 \text{ Kg. } 7 \text{ Dgs. } 7 \text{ grs.} & = & 1077 \text{ grs.}
 \end{array}$$

Si 1 gr. cuesta 1.85 \$,

1077 gr. costarán 1077 veces más ó 1.85×1077 .

Hecha la multiplicación, el producto es el precio de los anillos. Otro:

M.—Una señora, manda al almacén por un paquete de café que pesa 2 Kgs., 8 Hgs. y 70 grs. á 3 \$ el Kg. ¿cuánto gastó?

El precio es de cada kg. Reduzco primero, á gramos, luego los gramos á kgs., así:

$$\begin{array}{rcl}
 2 \text{ Kgs.} & = & 2000 \text{ grs.} \\
 8 \text{ Hgs.} & = & 800 \text{ »} \\
 70 \text{ grs.} & = & 70 \text{ »} \\
 \hline
 2 \text{ Kgs. } 8 \text{ Hgs. } 70 \text{ grs.} & = & 2870 \text{ grs.}
 \end{array}$$

En 2870 grs. hay tantos Kgs. como veces esté 1000; 2870 dividido entre 1000 es 2.870; 2.870 kgs.

Si 1 kg. . . . vale 3 \$,

2.870 kg. . . . valdrán 2.870 veces más, ó sea 3×2.87 , igual á 8.61 \$.

Como Vds. ven:

I. Reduzco todas las cantidades á una misma denominación.

II. A la denominación que indica el precio.

III. Se multiplica por el precio.

Otro ejemplo: Un tren anda por hora 45 Kms. 8 Hms. y 6 Dms. ¿cuánto andará en 7 horas?

Si en 1 hora anda 45 Kms., 8 Hms. y 6 Dms. en 7 horas andará 7 veces más ó sea:

$$\begin{array}{r}
 45 \text{ Kms.} \quad 8 \text{ Hms.} \quad 6 \text{ Dms.} \\
 \times \qquad \qquad 7 \\
 \hline
 315 \text{ Kms.} \quad 56 \text{ Hms.} \quad 42 \text{ Dms.} \\
 321 \text{ Kms.} \quad 0 \text{ Hms.} \quad 2 \text{ Dms.}
 \end{array}$$

Pero en 42 Dms. hay 2 dms. y 4 Hms., escribo 2 Dms. y llevo 4 Hms.; 56 Hms. y 4 Hms. son 60 Hms., etc.

B.—(*Pasan tres alumnos y les da problemas semejantes á los anteriores, sin exigir la multiplicación; hace lo mismo con otros tres alumnos*).

C.—**M.**—Si tuviéramos que averiguar el precio de 8 gramos, 7 dgs. y 9 cgs. de bicloruro de mercurio á 12 cts. el centígramo ¿á qué denominación tendríamos que reducir?

A.—A la denominación centígramos.

M.—¿ Si el precio fuera de gramos?

A.—Primero á centígramos, y los centígramos á gramos dividiendo por 100.

M.—Para saber cuánto carbón gastará una locomotora en 25 Kms., 8 Hms. y 3 Dms. de recorrido sabiendo que por cada Km. gasta 15 cts. ¿qué tenemos que hacer?

A.—Reducir todo á Dms. y los Dms. á Kms.; luego, se multiplica por 0.15 \$; el resultado nos dará cuánto gasta de carbón.

M.—Para reducir Hls. á litros ¿ por cuánto se multiplica?

A.—Por 100, porque 1 Hl. tiene 100 litros.

M.—Cuántos litros hay en 20 Dls.? ¿ Cuántos Hls. en 800 litros? ¿ Cuántos son 6 Hls. y 9 Dls.? ¿ Cuánto cuestan 2 Hgs. de oro á 2 \$ el gramo? Si un hombre anda por hora 4 Kms. y 1 Dm. ¿ cuánto andará en 6 horas?

Deberes.—Los que indique el libro de problemas.

LECCIÓN 2ª (Agosto)

Tema.—Ejercicios para calcular pesos con la mano.

Desarrollo.—**A.**—**M.**—(*Sobre la mesa hay una balanza de platillos; en cada pupitre de la primer fila de niños, una pesa de bronce de 1 Kg. y un cubo de madera de un Kg. en unos, de 2 Kgs. en otro*). De pie, la primer fila. Tomen, en una mano, la pesa de bronce, en la otra el cubo de madera y traten de saber cuál pesa más de los dos y cuántas veces más uno que otro?

Als.—Pesan lo mismo; lo mismo; el cubo dos veces la pesa de bronce, el cubo una vez y media la pesa de bronce; etc.

M.—Pasen la pesa y el cubo á los compañeros de la otra fila y luego se sientan.

(*Se repite el ejercicio con ésta y las demás filas*).

M.—¿Cuánto pesa el bronce?

Als.—(*Ya conocen su peso*). Pesa un Kg.; un Kg.; un Kg.

M.—Está bien. Levanten la mano, los que crean que este cubo pesa un kilogramo? ¿Los que creen que pesa más? Los que creen que pesa menos? Levanten la mano los que creen que este otro cubo pesa más? ¿Que pesa una vez y media este bronce ó un Kg. y medio? ¿Que pesa dos veces este bronce ó dos Kgs.? Veamos quiénes han acertado (*coloca en un platillo de la balanza el bronce, en el otro el cubo; el peso resulta igual*).

¿El cuerpo pesa?

Todos.—Un kilogramo.

M.—(*Coloca el bronce en un platillo y el cubo número 2 en el otro; pesa más. Coloca otro bronce, los platillos se equilibran*). ¿Pesa cuánto?

A.—Dos veces el bronce ó 2 Kgs.

B.—**M.**—Muy bien. Cada uno recuerde el peso de un kilogramo. Tomen las pizarras. (*Reparte á cada niño de la primera hilera, objetos de 800 grs.*

á uno, de 900 grs. á otro; de 600 grs. á otro; de 500 á otro). Cada niño tome el peso del objeto que acaba de repartirles y escribe en su pizarra: 1^{er} objeto, tantos gramos, recordando que 1000 gramos equivalen á un Kg.; luego, pasan los objetos á la hilera de atrás; la hilera de atrás hace lo mismo.

(Después de 10 segundos, da la orden de pasarlos y vuelve á repartir á la primera hilera, objetos de metal, vidrio, madera, libros de 1000 gramos; 1200; 1400; 1800; 2000 para que tomen y apunten el peso del 2^o objeto; hace lo mismo con un tercero. Concluidos los apuntes, toma uno de los objetos y pregunta cuánto pesa á tres ó cuatro niños de la fila que lo tomó; luego, le pesa rápidamente en la balanza para que los niños aprecien el error que cometieron; procede lo mismo con los demás.

C. — (*Pasan 5 niños al frente; cada uno toma el objeto que se le indica: un paquete de yerba; una botella con agua; una clava*). **M.**—Traten de saber un peso.

Als.—(*Después de 10 segundos da, cada uno, el peso y se comprueba con la balanza*).

M.—Vuelvan á los asientos. (*Pasan otros cinco niños*). Estos bronces pesan 10 gramos. Tomen: traten de recordar su peso (*los recoge después de 10 segundos*). Ahora digan Vds. cuántos gramos pesa el objeto que les doy (*un pisa papel; un paquetito de café; una caja de plumas; una regla; un frasco lleno de agua. Cada niño da el peso y se comprueba con la balanza*). Vuelvan á sus asientos.

Deberes.—Para mañana traen todos un objeto que pese 200 gramos.

INDICACIONES

Estos ejercicios, para que dejen en la mano el recuerdo y habitúen á la exactitud, en la apreciación de los pesos, deberán repetirse directa ó indirectamente, en todos los *principios* de lección, y extenderse á otras asignaturas en que deba traerse ilustraciones, exigiendo, como noción complementaria, su peso, lo que no distrae tiempo y mantiene en estado activo el sentido muscular.

LECCIÓN 12ª (Septiembre).

Tema.—Número primo y compuesto; múltiplos y factores.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.*—¿Qué pesas conocen ustedes?

A.—La de un Kg. ; la de 500 grs.

M.—Para distribuir 2 Hls. de vino y 9 litros entre 80 individuos ¿qué se hace?

A.—Se reduce á litros, y se divide entre 80.

M.—¿Cuánto es $8 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9$ sabiendo que $9 + 8$ es 17; observen que más 9 es 26 (*marcando la cifra de las unidades*); más 9 es 35; más 9 es 44; más 9 es 53 ¿oyen Vds. : 7, 6, 5, 4, 3?

Apliquen á este caso : $5 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9$.

Als.—Es 50.

M.—¿Cuánto es $12 + 9 + 9 + 9 + 9$?

Als.—48.

M.—72 — 8 — 8 — 8 — 8 — 8 ¿cuánto es? (*Enunciando con cierta rapidez*).

Observen que 72 es 9 veces 8; que hemos quitado 5 veces 8; que quedan 4 veces 8 ó 32.

Resuelvan este caso : $48 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6$.

Als.—Es 18.

Medio.—*M.*—¿Por qué número es divisible 3? (*escribiendo*).

A.—Por 3.

M.—Y por 1. ¿Por qué número es divisible 7?

A.—Por 7 y por 1.

M.—¿Por qué número es divisible 13? 17? 23? Todo número que es divisible por sí mismo y la unidad, se llama número *primo*. (*Escribe la palabra en la pizarra*). Piensen todos un número primo.

A.—El número 5. *Otro.*—El número 9.

M.—El número 9 es divisible por 3 también, porque 3 por 3 es 9.

A.—11. *A.*—13. *A.*—21.

M.—21 es igual á 3 por 7; luego, es divisible por 3 y por 7.

A.—El número 7. Otro.—31.

M.—Está bien. El número que además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, es divisible por otros, se llama *compuesto*. (*Escribe la palabra en el pizarrón*), 25 es compuesto porque además de ser divisible por 25 y por 1, es divisible por...

A.—Es divisible por 5.

M.—8 es compuesto porque es divisible por 2 y por 4; 81 es compuesto porque 9 por 9 es 81. Piensen un número compuesto.

Als.—21; 12; 84; 100; 1000; 2428 (*al dar el número, cada niño indica uno de los factores*).

M.—Los números compuestos son *múltiplos* de los números que los dividen exactamente y los números que los dividen exactamente son *factores*. Así, 18 es múltiplo de 9 porque contiene á 9, exactamente, 2 veces; es múltiplo de 6 porque contiene á 6, exactamente, 3 veces; es múltiplo de 3 porque contiene á 3 exactamente, 6 veces y es múltiplo de 2 porque contiene á 2, 9 veces exactamente. 35 es múltiplo de 7 y de 5; 40, es múltiplo de 2, de 4, de 5, de 8, de 10 y de 20. Piensen Vds. en un múltiplo.

Als.—15 es múltiplo de 5; 30 es múltiplo de 5 y de 6; 56 es múltiplo de 8.

M.—Piensen un múltiplo de 3.

A.—9 es un múltiplo de 3.

M.—Otro múltiplo de 3.

A.—15 es múltiplo de 3; 27; 45.

M.—Y 3 es factor ó divisor de 9, de 15, de 27, de 45 porque divide exactamente.

Piensen un factor ó divisor de 40.

A.—8 es factor de 40.

M.—Otro factor de 40.

Als.—10; 5; 2; 20.

M.—Un número primo ¿podrá ser múltiplo?

A.—No señor, porque sólo es divisible por sí mismo.

M.—¿Y un número compuesto?

A.—Siempre puede ser múltiplo.

M.—Todo número exactamente divisible por otro, es?

A.—Es múltiplo de dicho número.

M.—4 ¿ qué es ?

A.—Es múltiplo.

M.—Y 4 ¿ qué es de 12 ?

A.—Es factor de 12 porque lo divide exactamente.

Fin.—(*Pasan seis alumnos*). Escriban 4 múltiplos de 5.

Escriban 4 factores de 60. Escriban un número primo ; un número compuesto.

M.—Vuelvan á sus bancos.

Todo número que sólo es divisible por 1 y por sí mismo ¿ es cómo ?

A.—Es número primo.

M.—¿ 1 qué número es ?

A.—Es número primo.

M.—Todo número producto de otros dos ¿cómo será?

A.—Será un número compuesto.

M.—Piensen en un múltiplo de 6 ; de 9 ; de 10 ; de 11 ; de 4 ; de 12 ; de 100 ; del metro ; del Decámetro.

Piensen un número que no sea múltiplo de 5.

Als.—12, 17, 14, 8.

M.—En un número que no sea factor de 12.

Als.—5, 8, 7.

M.—Hay números que son factores ó divisores á la vez, de números diferentes ; 5 es factor de 10, de 15 y de 35 ; 3 es factor de 9, 15, 21.

Esos factores se llaman comunes ; 3 es factor común de 15 de 9 y 21.

Piensen un factor común de 4 y 8.

Als.—2 ; 4.

M.—De 24 y de 30.

Als.—2, 3, 6.

Deberes.—Para mañana, traerán escrito, en sus cuadernos, 5 números primos ; 5 compuestos ; 5 múltiplos del número 6 ; los factores de 60 ; y factores comunes á 56 y 72.

LECCIÓN 18ª

Tema. — Divisibilidad por 3 y por 9.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Cómo se divide un decimal por otro decimal?

A. — Se igualan las cifras decimales, etc.

M. — Un número tiene 4 cifras decimales y otro, 2 ¿cuántas cifras separaremos en el producto de ellos?

A. — Seis cifras decimales.

M. — ¿Cuál es la denominación de la sexta cifra decimal?

A. — Recibe el nombre de millonésimos.

M. — Para multiplicar un decimal por 1000 ¿cuántos lugares se corre la coma, á la derecha?

A. — Tres lugares á la derecha.

M. — (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). Escriban 39 en números romanos. Tracen una raya de 30 cms. Reduzcan 8 Dms. y 9 ms. á metros. Escriban un número compuesto. Dos números que sumados den 83. Descompongan 8455 grs., en Kgs., Hgs., Dgs. y gs. Vuelvan á sus asientos.

M. — (*Mostrando una damajuana de 5 litros*). ¿Cuántos litros de agua podrá contener esta damajuana?

Als. — 4 litros; 3 litros; 4 y medio; 6; 5; 4.

M. — Podría contener 5 litros. ¿Qué peso calculan Vds. á esta maza de madera? (*la da á un alumno*).

A. — 2 Kgs. y medio.

Otro. — (*tomándola*) 2 Kgs.

Otro. — 2 Kgs. y medio.

M. — Pesa 2 Kgs. y medio.

M. — Piensen un número par.

Als. — 8; 12; 108; 2004.

M. — En un factor de 72.

Als. — 2; 8; 9.

M. — En un número múltiplo de 2 ó divisible por 2.

Als. — 4; 30; 56; 2146.

Medio. — ¿Cómo sabremos si un número es divisible por 9?

Als. — (*Algunos alumnos pretenden dar explicaciones; cuando termina en 9, dice uno; dividiendo por 9 dice otro*).

M. — Supongamos este número: 8165754936. Ven Vds. que es grande; si fuéramos á probar dividiendo por 9, se necesitaría mucho tiempo. Pues, atiendan. 8 y 1, 9, fuera 9 cero; 6 y 5, 11 fuera 9, dos; 2 y 7, 9, fuera 9 cero; 5 y 4, 9 fuera 9 cero; 3 y 6, 9, fuera 9 cero. El número es divisible exactamente por 9; en efecto: 9 en el 81 (*hace la división*).

Se suman todas las cifras y si quitando todos los 9 resulta 0, el número es divisible por 9. Denme Vds. un número.

A. — 857281. (*Lo escribe*).

M. — 8 y 5 13, fuera 9 cuatro; 4 y 7, 11, etc.; hay residuo; el número no es divisible exactamente por 9. (*El maestro escribe 20010051*). Este número es divisible por 9 porque $2 + 1 + 5 + 1$ es 9, fuera 9, cero.

Se hace lo mismo para saber cuándo un número es divisible por 3; por ejemplo: 45321; 4 fuera 3, 1, 1 y 5, 6 fuera los 3 cero; 3 fuera 3, cero; 2 y 1, 3 fuera 3 cero. Es divisible por 3. Ahora, vean Vds. cómo se encuentra un número divisible por 9. (*El maestro escribe las cifras y las va sumando en alta voz: 4312575*) 4 y 3, 7; y 1, 8; y 2, 10; y 5, 15; y 7, 22; y 5, 27; 27 es divisible por 9, luego el número es divisible por 9 porque la suma de sus cifras es divisible por 9.

M. — Tomen las pizarras. Escriban todos, un número divisible por 9.

Als. — 3519, 76536, etc.

M. — Escriban un número divisible por 3.

Als. — 723, 111, 2451342.

M. — El número 9846351 ¿ será divisible por 9 ?

A. — (*Después de escrito el número y hecho sus cálculos*). Sí lo es, porque 9 fuera 9 cero, 8 y 4, 12 fuera 9, etcétera.

M. — El número 56780012 ?

A. — No lo es porque, etc.

Fin. — *M.*— Guarden sus pizarras. Si la suma de las cifras de un número es 36 el número es ?

A.—Es divisible por 9.

M.—¿ Si la suma de las cifras de un número es 15, el número es ?

A.—Es divisible por 3.

M.—Para ser un número divisible por 9 ¿ qué suma podrían arrojar sus cifras ?

Als.—9, 36, 63, 45.

M.—¿ O bien, quitando los nueves ?

A.—Dar por resultado, cero.

M.—Para que fuera divisible por 3 ¿ qué suma podrían dar las cifras ?

Als.—12, 15, 18, 27, 33, ó bien, quitando los 3, dar cero.

(*Pasan á la pizarra, tres alumnos*).

M.—¿ Será divisible por el 9 el número 4657001 ?

(*Un alumno explica en voz alta*). ¿ El número 720018 ?

(*Repite con otros alumnos, el ejercicio*).

Deberes.—Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

INDICACIONES

La divisibilidad por 7, se enseñará por el sencillo procedimiento indicado por J. M. CALVO ⁽¹⁾. Así: ¿ 9408 es divisible por 7 ?

Se multiplican las unidades, 8 por 5, da 40; se añaden á 940, da 980; se multiplican las unidades de 980 ó 0 por 5, da 0; se añade el producto á 98, da 98; se multiplica 8 por 5, da 40 y se añade á 9, da 49; si esta última suma es 7 ó múltiplo de 7, el número es divisible por 7.

Un número es divisible cuando multiplicando sus unidades por 5 y sumando el producto con las decenas, tomadas como unidades, resulta 7 ó múltiplo de 7.

(1) J. M. CALVO, «Revista Sarmiento», p. 466.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO VII

TERCER GRADO S.

I

Distribución del programa en meses. — Marzo. — Las lecciones de este mes se destinan á recordar las tablas mediante el cálculo mental; á la lectura y escritura de números difíciles; á los conocimientos adquiridos en 3^{er} grado I acerca de los decimales, lectura, escritura y operaciones; á la divisibilidad por 2, 3, 4, etc., mediante la descomposición de números compuestos; á la multiplicación y división mental de un número por 2, 3, 4, etc.

Abril. — Las lecciones de este mes se destinan á recordar, mediante ejercicios y problemas, las medidas de longitud, de peso y de capacidad, del sistema métrico; su lectura, escritura; á las reducciones y operaciones. Medidas de tiempo.

Mayo. — 1^a y 2^a — Medición de las superficies. Enseñanza del metro cuadrado.

3^a—Ejercicios.

4^a—Submúltiplos del metro cuadrado. Escritura y lectura de las denominaciones y su reducción á m.²

5^a—Ejercicios y problemas.

6^a—Múltiplos del m.² Escritura y lectura de las cantidades reducidas á la unidad m.²

7^a, 8^a y 9^a—Expresión en números, de las medidas de superficie y equivalencia del m.² en dms. cds., cms. cds., mms. cds; de los múltiplos en metros cuadrados.

10ª y 11ª—Ejercicios de recapitulación.

12ª—Denominaciones homogéneas y heterogéneas.

13ª—Determinación de las medidas de superficie por las de longitud. Problemas.

14ª y 15ª—Ejercicios. Problemas formulados por los niños.

16ª y 17ª—Escritura y lectura de números incomplejos y complejos.

18ª—Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí; si se quita ó se agrega á cantidades iguales, etc.

19ª á 24ª—Reducción de un incomplejo de especie superior á incomplejo de especie inferior. De un complejo á un incomplejo. De un incomplejo á complejo; decimales métricos de superficie. Ejercicios.

Junio. — 1ª y 2ª—Ejercicios y problemas de recapitulación.

3ª y 4ª — Problemas de suma y resta de denominados métricos (medidas de superficie).

5ª y 6ª—Problemas de multiplicación y división de denominados métricos (medidas de superficie).

7ª y 8ª—Problemas de suma y resta de denominados métricos combinados con la multiplicación y división (medidas de superficie).

9ª y 10ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

11ª y 12ª—Medición de superficie (excursión).

13ª—Cálculo aproximado de superficies. Denominación que corresponde al producto de dos dimensiones.

14ª y 15ª—Medidas cúbicas. El decímetro cúbico. Distinción de línea, superficie y volumen.

16ª—Distinción de línea recta, superficie cuadrada y cubo.

17ª y 18ª—Ejercicios acerca del decímetro cúbico.

19ª—El metro cúbico y definición.

20ª—Determinación de las medidas cúbicas por las de longitud.

21ª—Submúltiplos del metro cúbico; escritura y lectura de las denominaciones.

www.libtool.com.cn

22ª—Escritura y lectura de submúltiplos con la denominación m.³

23ª—Múltiplos del m.³

24ª — Ejercicios. Problemas formulados por los alumnos.

Julio. — 1ª—Expresión en números de las medidas cúbicas, siendo la unidad, el m.³

2ª—Ejercicios.

3ª—Comparación de las medidas cúbicas con las de longitud y determinación de las unas por las otras.

4ª — Ejercicios. Problemas formulados por los alumnos.

5ª—Ejercicios de recapitulación.

6ª y 7ª—Lectura y escritura de incomplejos métricos (medidas cúbicas).

8ª — Decimales métricos: leer 0.153 m.³, etc. Escribir 95 mm.³, etc., referidos á la unidad.

9ª y 10ª— Reducción de un incomplejo de especie superior á uno de especie inferior. Ejercicios (medidas cúbicas).

11ª—Reducción de un incomplejo á m.³ y dm.³

12ª—Reducción de un complejo á m.³ y dm.³

13ª—Ejercicios.

14ª—Reducción de un denominado complejo á un denominado incomplejo.

15ª — Ejercicios. Problemas formulados por los alumnos.

16ª — Reducción de un incomplejo á complejo (descomposición de una cantidad métrica de una sola denominación, en varias de diferentes denominaciones).

17ª y 18ª — Ejercicios y problemas de reducción.

19ª — Denominaciones homogéneas y heterogéneas.

20ª y 21ª — Suma y resta de denominados métricos (medidas cúbicas).

22ª — Ejercicios de recapitulación.

23ª y 24ª — Problemas de multiplicación y división de denominados métricos (med. cúbicas).

Agosto. — 1ª y 2ª — Problemas combinando la suma y resta de denominados métricos (med. cúbicas).

3ª y 4ª — Problemas combinando la multiplicación y la división.

5ª y 6ª — Problemas combinando las cuatro operaciones.

7ª — Denominación que corresponde al producto de tres dimensiones y cuerpo que representa.

8ª — Volumen de cuerpo ó espacios de forma cúbica.

9ª — Cálculo aproximado del volumen de cuerpos ó espacios cúbicos.

10ª, 11ª y 12ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

13ª — *Quebrados*. — Enseñanza de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc., de finición de numerador y denominador.

14ª — Enseñanza de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$; de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$.

15ª — Enseñanza de quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos.

16ª — Ejercicios: fracciones iguales á 1.

17ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

18ª — Uso de la denominación *avos*. Lectura y escritura de cualquier fracción común.

19ª — Las varias maneras de leer los quebrados; significado de la raya.

20ª — Ejercicios.

21ª — Términos de una expresión: formas diferentes de varios términos en orden horizontal. Factores.

22ª — Generalización de la lectura y escritura de los quebrados (numeradores ó denominadores de varios términos).

23ª — Ejercicios. Problemas formulados por los alumnos.

24ª — Reducción de una expresión de varios términos á uno.

Septiembre. — 1ª — Para multiplicar un producto basta multiplicar, etc. Para dividir un producto se divide uno de sus factores.

2ª — Ejercicios de síntesis y recapitulación.

3ª — Si se multiplican ó dividen ambos términos de un quebrado por un mismo número el valor de la fracción no cambia.

www.libtool.com.cn

4ª — Ejercicios.

5ª — Ejercicios de recapitulación.

6ª — Simplificación de quebrados:

De $\frac{36}{48}$; de $\frac{3 \times 8 \times 5 \times 7}{6 \times 8 \times 5 \times 11}$, etc.

7ª y 8ª — Ejercicios. Recapitulación.

9ª — Reducir dos quebrados á un común denominador, multiplicando ó dividiendo sus términos.

10ª y 11ª — Ejercicios. Reducir un entero á un quebrado.

12ª — Reducir tres quebrados á común denominador.

13ª y 14ª — Ejercicios. Problemas formulados por los alumnos.

15ª — Reducir varios quebrados á un común denominador.

16ª — Ejercicios. Ordenar varias fracciones de distinto denominador, por su valor.

17ª — Fracciones impropias y mixtas; reducción de las unas á las otras.

18ª — Ejercicios.

19ª — Enseñanza de la suma de quebrados.

20ª — Ejercicios.

21ª — Problemas acerca de las fracciones comunes.

22ª — Casos de abreviación en la suma de quebrados.

23ª y 24ª — Ejercicios. Sumas y restas á la vez; como: $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{2}{8} - \frac{7}{4}$. Generalización de las operaciones de suma y resta.

Octubre. — 1ª — Substracción de quebrados.

2ª — Ejercicios. — Problemas formulados por los alumnos.

3ª — Casos de abreviación.

4ª y 5ª — Problemas de suma y resta de quebrados.

6ª — Problemas donde se combinen la suma y la resta de quebrados.

7ª — Ejercicios de recapitulación.

8ª — Multiplicación de dos quebrados, de varios quebrados, de enteros y quebrados; de números mixtos.

- 9ª y 10ª — Ejercicios.
11ª — Ejercicios de recapitulación.
12ª — Explicar la expresión de un *quebrado de quebrado*. Operación. Forma $\frac{a}{b}$ de c de $\frac{m}{n}$.
13ª — Problemas de multiplicación de quebrados.
14ª — División de quebrados.
15ª — Ejercicios.
16ª — Problemas de división de quebrados.
17ª — Problemas de suma y multiplicación de quebrados.
18ª — Problemas de suma y división de quebrados.
19ª — Problemas de resta y multiplicación de quebrados.
20ª — Problemas de resta y división de quebrados.
21ª — Problemas de suma, resta y multiplicación combinadas, de quebrados.
22ª — Problemas de suma, resta y división combinadas, de quebrados.
23ª y 24ª — Explicación y razonamiento del problema fundamental: si $\frac{a}{b}$ vale m , $\frac{c}{d}$ de la misma especie, ¿cuánto valdrá? en los dos casos: $b=d$; $\leq d$.
Noviembre. — Ejercicios y problemas de recapitulación, insistiendo en aquellos puntos donde la rapidez y la exactitud es dudosa.

LECCIÓN 1ª (Mayo)

Tema.— Medición de las superficies.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Qué tengo en la mano?

A.—Una esfera, un cuaderno, una pizarra, una caja.

M.—¿ En geometría hemos llamado á estos objetos?

A.—Les hemos llamado cuerpos.

M.—¿ A la parte exterior de los cuerpos?

A.—Superficie. Vd. señala la superficie del cuaderno, la superficie de la caja, la superficie del pizarrón, la superficie de la pared, la superficie del piso.

M.—Hasta ahora, hemos medido con el metro, la longitud de las cosas. Pues, el hombre todo mide; mide también las superficies; usa del metro cuadrado, de sus múltiplos ó submúltiplos, el km. cuadrado, ó el dm. cuadrado, ó el cm. cuadrado. Este es el metro cuadrado (*presentando un marco hecho de cuatro varillas y papel*), este es el decímetro cuadrado, este es el centímetro cuadrado; cualquier lado mide un metro de longitud (*midiendo*); cualquier lado mide un decímetro de longitud (*midiendo*); cualquier lado mide un centímetro de longitud (*midiendo*); de modo que cualquier lado de un km. cuadrado medirá....?

A.—Medirá un km. de longitud.

M.—¿De un 'dm. cuadrado?

A.—Cada lado medirá un dm. de longitud.

M.—Para medir, pues, la superficie del pizarrón hacemos de esta manera (*superpone el metro cuadrado*) y señalamos las esquinas con tiza para acordarnos; uno, dos, tres, cuatro metros cuadrados; sobran estos pedazos donde el metro no entra, ¿con qué los mediremos?

A.—Con el decímetro cuadrado.

M.—Y si sobrasen pedacitos donde no quepa el dm. cuadrado?

A.—Se mediría con el centímetro cuadrado.

M.—Así sabríamos la superficie del pizarrón. ¿Cómo hallaríamos la superficie del piso?

A.—Del mismo modo.

M.—Y no les parece á Vds. muy larga esta manera de medir?

Als.—Es muy larga.

M.—Y fastidiosa. Pues bien, se hace de otro modo, usando el metro lineal solamente. ¿Han visto Vds. albañiles, carpinteros, ingenieros con un metro cuadrado para medir superficies?

A.—Nunca.

M.—Ni yo tampoco.

Medio. — *M.* — Tratemos de medir la superficie de esta tabla (*con líneas de lápiz, dividida en 20 dms. cuadrados*).

Con el metro cuadrado no puede medirse; ¿qué usaremos?

A.—El decímetro cuadrado.

M.—Cuenten Vds. (*Los niños observan la colocación del dm. cuadrado sobre cada cuadrado de lápiz*).

Als.—Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, etc. (*Los niños observan cuatro hileras de cinco cuadrados cada una*).

M.—¿Cuál es la superficie de la tabla?

A.—La superficie de la tabla es de 20 dms. cuadrados.

¿Cuántos decímetros cuadrados hay en la primera hilera?

A.—Hay cinco cuadrillos ó dms.²

M.—¿Cuántas hileras de cuadrillos son?

A.—Son cuatro hileras.

M.—Si una hilera tiene 5 cuadrillos ó dms.², 4 hileras tendrán 4 veces más ó sea 20 cuadrillos ó dms.² Observen Vds. cuál es el ancho de cada hilera y el ancho de cada cuadrillo.

A.—Es de un dm. lineal.

M.—¿Cuántos dms. lineales mide, pues, este lado?

A.—Mide cuatro decímetros (*apunta*).

M.—¿Cuántos mide este otro?

A.—Mide 5 dms. lineales (*apunta*).

M.—4 dms. lineales, por 5 dms. lineales, da 20 dms. cuadrados, los que mide la tabla. Por consiguiente, no es necesario el cuadrillo para medir superficies. Basta medir dos lados consecutivos, el largo y el ancho; el producto dará lo que buscamos. Así, para saber cuánto es la superficie de esta otra tabla, mido con el metro, este lado (*midiendo*), 7 decímetros lineales; mido este otro, 3 decímetros lineales; 3 por 7 es 21; 21 dms.² Veamos si es cierto (*presenta la superficie opuesta dividida en cuadrillos*); ¿cuántos decímetros cuadrados hay en esta hilera? (*señalándola*).

A.—Hay 7 decímetros cuadrados.

M.—¿Cuántas hileras de un decímetro de ancho?

A.—Tres hileras; 3 por 7, 21 cuadrillos ó dms. cuadrados.

M. —Muy bien. ¿Qué haremos para medir la superficie del pizarrón?

A. —Mediremos con el metro, el ancho y el largo; multiplicaremos y el resultado nos dará la superficie.

M. —(*Midiendo*); ancho 14 dms. (*escribe*); largo 3 ms. ó 30 dms.; 14 dms. lineales por 30 dms. lineales son 420 dms. cuadrados.

¿Qué haremos para medir esta tabla? (*De forma triangular*).

A. —Se mide el largo y después el ancho....

M. —Observen Vds. ¿Cuántas hileras de cuadritos hay?

Als. —Hay cuatro hileras.

M. —Y cada hilera tiene el mismo número de cuadritos ó dms. cuadrados?

A. —No señor; una tiene 1 y medio y otra 3 y medio..

M. —Pero en esta tabla, cada hilera ¿cuántos cuadritos tenía?

A. —7 cuadritos.

M. —Pues entonces, en este caso no podemos hacer lo mismo; ni cuando tengamos que medir la superficie de una esfera (*presentándola*), de un cono, de un trapecio. La geometría nos enseñará más adelante, la manera de multiplicar el largo por el ancho para hallar la superficie de estos cuerpos. Por ahora, hacemos lo que hemos hecho, con las superficies planas de forma de un paralelógramo, como la del pizarrón, del piso, de la puerta, de la tapa del cuaderno.

Fin. —Cada uno saque la pizarra y la regla métrica. Halle la superficie de la pizarra. Mario, averigüe la superficie del piso; Juana, la superficie de aquel vidrio. ¿Qué forma tienen todos estos objetos?

A. —De un paralelógramo.

M. —¿Qué medidas van á tomar de la pizarra?

A. —Dos medidas, el largo y el ancho, y luego las multiplicamos.

M. —Midan la superficie.

Als. —500 cms. cuadrados; mide 25 cms. de largo, y 20 de ancho.

Otro. — 567 cms. cuadrados ; mide 27 cms. de largo por 21 de ancho, etc.

M. — Cuál es la superficie del piso ?

A. — Mide 8 ms. de largo por 6 ms. de ancho ; 48 ms. cds. de superficie.

M. — ¿ Cuánto mide la superficie del vidrio ?

A. — Mide 6 dms. de largo por 5 ancho ; 5 por 6, da 30 dms. cds. de superficie.

M. — Qué señalo ?

A. — Una superficie.

M. — ¿ Qué son estos ?

A. — Cuerpos.

M. — ¿ Podemos medir la superficie de este papel multiplicando el largo por el ancho ?

A. — No, señor ; solamente con los paralelógramos haremos así.

M. — ¿ Qué es el metro cuadrado ?

A. — Una superficie que mide, cada lado, un metro de largo.

M. — ¿ Qué es un dm. cd. ?

A. — Una superficie cuyos lados miden un dm. de largo.

M. — ¿ De qué objetos, multiplicando el largo por el ancho, podríamos hallar la superficie ?

Als. — De un vidrio ; del techo ; de la tapa del libro.

M. — ¿ Necesitamos usar del metro cuadrado para medir las superficies ?

A. — No, señor. Nos basta el metro lineal.

M. — La tapa de este tintero (*Obsérvenla*) mide 12 mms. de largo por 10 de ancho ¿ cuál es su superficie ?

A. — 120 mms. cds.

M. — El ancho de este cartón (*trapezio*) es de 2 dms. y el largo de 3. ¿ cuál es su superficie ?

A. — No podemos hallarla porque el cartón no es un paralelógramo.

Deberes. — Para mañana, todos, averiguan la superficie de la cara de una tablita ó cartón que tenga el mismo largo y el mismo ancho, trayendo la tablita ó el cartón.

LECCIÓN 2ª

Tema. — El metro cuadrado; el decímetro cuadrado, etc.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Cuánto mide cada lado del metro cuadrado?

A. — Un metro de longitud.

M. — Halle, Antonio, la superficie de la tabla. (*Entregándole la tabla y el metro*).

A. — Mido el largo, primero: 7 decímetros; el ancho después, 4 decímetros. Multiplico: 28; su superficie es de 28 decímetros cuadrados.

M. — Levanten, todos, la tablita ó el cartón que han traído como deber.

Als. — (*Los alumnos levantan el objeto que el maestro examina rápidamente*).

M. — Silvio ¿cuánto mide la superficie de su cartón?

A. — 64 centímetros cds.

M. — No es posible. ¿Qué lados midió Vd.?

A. — (*Señala los lados*). Este y este.

M. — ¿Qué lados deben medirse, María?

A. — El largo y el ancho.

M. — Eso dijimos, Silvio; deben medirse dos lados seguidos ¿cuáles?

A. — (*Los señala*).

M. — ¿Quiénes midieron así?

A. — (*Todos levantan la mano*).

M. — Un lado de su cartón mide más que el otro. ¿Cuál es la superficie de su tablita, Andrés?

A. — 4 dms. cds. Mide 2 dms. de longitud de cada lado.

M. — ¿Cuánto mide la superficie de su cartoncito, Teresa?

A. — Mide 144 mms. cds. Cada lado, 12 mms. de longitud.

M. — Guarden sus cartoncitos.

Medio. — *M.* — ¿Qué dijimos que era esto, ayer?

A. — Un metro cuadrado.

M. — (*En el pizarrón hay un cuadrado dividido en cien dms. cds. alternando hileras rojas con azules*). La figura del pizarrón ¿qué superficie tiene? (*Superponiendo el m.² de papel*).

A. — Un metro cuadrado.

M. — Muy bien.

M. — Cada uno de los cuadraditos en que está dividido, es la superficie ¿de qué? (*superponiendo el decímetro cuadrado*).

A. — Es la superficie de un decímetro cuadrado.

M. — ¿A cuántos decímetros cuadrados equivaldrá un metro cuadrado? Sin contar los cuadritos.

A. — Cien decímetros cuadrados.

M. — ¿Por qué hizo Vd. tan pronto el cálculo?

A. — Porque en la primer hilera hay 10 cuadritos y las hileras son 10; 10 por 10 es 100: cien decímetros cuadrados.

M. — Muy bien. Desde que cada lado mide un metro de longitud ¿cuántos decímetros de longitud mide?

A. — Mide 10 dms. de longitud.

M. — Y 10 decímetros de longitud por 10 decímetros de longitud (*señalando los lados*) son 100 dms. cds. ¿Luego un metro cuadrado equivale?

A. — Equivale á 100 dms. cds.

M. — Y un decímetro cuadrado (*señalando*) ¿á cuántos cms. cds. equivaldrá? (*Mostrando el cm.²*)

A. — A 100 cms. cds.

M. — ¿Cuántos centímetros de longitud mide cada lado?

A. — Mide 10 cms. de longitud; 10 cms. de longitud por 10 cms. de longitud da 100 cms. cuadrados.

M. — Y un cm. cd. ¿cuántos milímetros cuadrados contendrá?

A. — 100 milímetros cuadrados.

M. — ¿Un Dm.² cuántos metros cds. desde que cada lado mediría 10 ms. de longitud?

A. — Cien ms.²

M. — Y un Km.² cuántos Hms. cds?

A. — 100 Hms. cds. desde que cada lado mediría 10 Hms. de longitud.

M.—El dm.^2 , el cm.^2 y el mm.^2 son los submúltiplos del metro cuadrado; los múltiplos ¿serán?

A.—El Dm.^2 , el Hm.^2 , el Km.^2 y el Mm.^2

M.—Muy bien. Como Vds. han podido notar, se diferencian las medidas de superficie de las de longitud en que cada unidad vale 100 de las de orden inferior. Un Dm.^2 , vale 100 ms.^2 , mientras que un Dm. lineal vale 10 ms. lineales. Deseo, antes de enseñarles á escribir las cantidades, que aprendan á escribir las denominaciones de los múltiplos y submúltiplos. La denominación metro cuadrado se escribe abreviada, de esta manera: una *m* minúscula y un pequeño 2 á la derecha y un poco arriba: m.^2 ; la denominación centímetro cuadrado, etc.

El maestro ha preparado de antemano, en una mitad del pizarrón, con todo el cuidado posible, el siguiente cuadro:

Miriámetro cuadrado.....	Mm.^2
Kilómetro cuadrado.....	Km.^2
Hectómetro cuadrado.....	Hm.^2
Decámetro cuadrado.....	Dm.^2
metro cuadrado.....	m.^2
decímetro cuadrado.....	dm.^2
centímetro cuadrado.....	cm.^2
milímetro cuadrado.....	mm.^2

Observen Vds. que escribimos las mismas denominaciones de las medidas de longitud; *pero siempre* con este 2.

M.—¿Con qué clase de letra comienzan las denominaciones de los múltiplos?

A.—Con letra mayúscula.

M.—¿Cómo escribiremos 15 metros cuadrados?

A.—15, eme minúscula, ese, y un dos arriba.

M.—¿Cómo escribiremos Kilómetro?

A.—Una K mayúscula, una eme minúscula y un dos.

M.—¿Un dos?

A.—No, señor; porque Vd. no dijo cuadrado.

M.—Oído atento, niños, ¿cómo escribiremos 48 cms. cds?

A.—48 ce, etc.

Fin. — (Pasan cuatro alumnos y manda borrar). Jerónimo, dibuje un metro cuadrado dividido en decímetros cuadrados. Los demás, escriban : 26 Kms.²; 98 cms.²; 78 Dms.²; 98 ms.²; 4 Dms y 9 ms; 85 Mms. Los decímetros cuadrados de 1 m.²; los dms.² de 8 ms.² Escriban la igualdad con sus denominaciones : 8 ms.² = 800 dms.² Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cinco ó cuantos quepan en el pizarrón*). Escriban : 728 mms.²; los decímetros á que equivale un metro; los decímetros cuadrados á que equivale un m.²; 2415987 Kms.².

Este espejito mide 14 mms. de longitud por este lado y 8 por este otro ¿cuál es la superficie de esta cara? Vuelvan á sus asientos.

M.—¿Cuántas caras tiene esta regla?

A.—Tiene seis caras.

M.—Por consiguiente, cuando hallemos la superficie de esta cara, no diremos : hemos hallado la superficie de la regla. Vamos á hallar la superficie de la regla. ¿Las caras tienen, qué forma?

A.—La forma de un paralelógramo.

M.—Para hallar la superficie de la regla ¿qué haremos?

A.—Hallaremos la superficie de cada cara y las sumaremos.

M.—El ancho de esta cara mide 5 mms. de longitud y el largo 400 mms. ¿Qué superficie?

A.—(*Escriben y hacen las operaciones*) 2000 mms.²

M.—El ancho de esta otra cara es de 5 mms. y el largo de 400 mms. ¿Cómo son esta cara y la anterior?

A.—Iguales.

M.—Lo mismo miden las caras 3 y 4. ¿Hay, pues?

A.—Cuatro caras iguales. Luego, conociendo la superficie de una, para saber la de las cuatro juntas, se multiplica por 4. Son 8000 mms. cds.

M.—¿Nos faltan, qué caras?

A.—Las caras de los extremos que son iguales.

M.—¿Cuánto mide cada lado?

A.—5 mms. La superficie de una cara es de 25 mms.², de las dos, 50 mms.² cds.

M.—¿ Y de las seis ó sea de la regla ?

A.—8000 más 50 ó sea 8050 mms.²

M.—¿ Podremos hallar de la misma manera, la superficie de esta cara de la escuadra, conociendo el ancho y el largo ?

A.—No señor, porque no es un paralelógramo.

INDICACIONES

Acostúmbrese á escribir las denominaciones en forma abreviada, nunca en palabras enteras. A usar el 2, nunca las iniciales *cds.*; á escribir siempre, después de cada número, la denominación, exigiéndola completa. La negligencia en corregir estos primeros olvidos, es de consecuencias graves en 4°, 5° y 6°, por las confusiones en que cada momento, se ven, los alumnos, envueltos; sabido es que á las medidas de superficie y volumen, se mezclan constantemente las de longitud.

LECCIÓN 3ª

Tema.—Ejercicios.

Desarrollo.—**A.**—Pase Gabriel, al pizarrón; haga un cuadro de los múltiplos y submúltiplos del m.², ordenado como el de ayer y escritas, las denominaciones, abreviadas. Una longitud multiplicada por otra longitud — el largo por el ancho — ¿ nos dá qué de un objeto ?

A.—La superficie.

M.—Metros de longitud ó lineales por metros de longitud ó lineales ?

A.—Metros cuadrados.

M.—Decímetros de longitud ó lineales por decímetros de longitud ó lineales ?

A.—Decímetros cuadrados. (*Conviene repetir á menudo, preguntas de esta especie, para inculcar la idea de que solo se pueden multiplicar longitudes de la misma denominación para hallar superficies*).

M.—¿ Cómo se divide un decimal por 1000 ?

A.—Se corre la coma tres lugares hacia la izquierda.

M.—¿ Cómo se divide un decimal por otro ? ¿ Cuánto es 300 por 900 ? ¿ Lugar de los millonésimos ? ¿ De los décimos ? ¿ 8 décimos por 5 centésimos qué da ? ¿ Lugar de las unidades de mil ? ¿ Cuántos litros contendrá este recipiente ? ¿ Cómo es la vasija para medir los granos y qué dimensiones tiene ? ¿ Aparatos que conocen Vds. para pesar ? ¿ De qué peso hay pesas ? ¿ Qué largo tendrá este lápiz ?

B.—Examine, Eleonora, el cuadro de las denominaciones hecho por Gabriel y diga los errores que note.

A.—Ningún error noto.

Otro.—No ha escrito el 2 en Km. y cm.

M.—(*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). Multipliquen 405 por 3000 ; reduzcan á ms. 7 Kms., 3 Dms. y 9 ms. ; reduzcan á la denominación ms., 7 dms. y y 6 mms. ; escriban, para sumar : 24 mms. ; 36 dms. ; 84 cms. ; 3 Dms. y 8 dms. Borren. Escriban en números romanos, 79. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis*).

Escriban : 45 Kms. cds. ; 75 ms. cds. ; 6 cms. cds. ; una raya de un dm. ; una raya de 5 cms. Borren. Un cuadrado de un dm. cd. ; una superficie que mida 10 dms. cds. ¿ Cuántos decímetros de longitud debe tener y cuántos de ancho ?

A.—10 dms. ó sea un metro de largo y un dm. de ancho, porque 1 dm. de longitud por 10 dms. de longitud da 10 dms. cds. de superficie.

M.—Dibujen una figura que mida 5 dms. cds. de superficie. Vuelvan á sus asientos.

M.—¿ Qué se mide con la tonelada métrica ? ¿ Qué es la báscula ? ¿ Una bolsa de trigo ó maíz, cuántos Kgs. suele pesar ? ¿ 5 cms. de longitud por 8 cms. de ancho qué da ?

C.—Tomen las figuras. De esta tarjeta (*midiendo*), 10 cms. por este lado, por este otro 18. ¿Cuál es la superficie?

A.—180 cms. cds.

M.—¿ Será la superficie de la tarjeta?

A.—No, señor: de una cara de la tarjeta.

M.—¿ Cuántas caras tiene la tarjeta?

A.—Tiene seis caras.

M.—Pues, hallemos la superficie del borde. Largo 18 cms., grueso 5 dimilímetros. Diez dimilímetros equivalen á un milímetro. ¿ A qué denominación hay que reducir los cms?

A.—A dmms.

M.—18 cms. ¿ Cuántos mms?

A.—180 mms. y 1800 dmms.

M.—Hallen, pues, la superficie de esta cara.

A.—9000 dmms. cds.

M.—¿ Cuántos mms. cds. son, sabiendo que uno equivale á 100 dmms. cds?

A.—90 mms. cds.

M.—Muy bien; donde parece que no hubiera caras las hay; lo pequeño da lugar á las mismas operaciones que lo grande. Escriban la diferencia de dos números.

A.—9—5; 84—70; 0.0004—0.00005; 9085—2, etc.

M.—¿ Cuántos cms cds., hay en 8 dms. cds?

A.—800 cms. cds.

M.—¿ Cuántos ms. cds. hay en seis Dms. cds?

A.—600 ms. cds. porque un Dm.² equivale á 100 ms. cds. y 6 equivaldrán á seis veces 100 ms. cds. ó sea 600 ms. cds.

M.—¿ Y á cuántos ms. cds. equivaldrá un Hm. cd?

A.—A 10000 ms. cds. porque un Hm.² equivale á 100 Dm.², á 100 veces 100 ms.² ó sea 10000 ms.²

M.—Una sociedad mandó hacer un escudo de plata de 2 Hgs. 5 Dgs. y 9 grs.; se le cobró 65 cts. por cada gramo, ¿ cuánto costó el escudo?

A.—(*Resuelven el problema, dan el resultado y explican el procedimiento*).

M.—¿ A cuántos minutos equivale un día? ¿ Den un múltiplo de 9? ¿ Un submúltiplo de 7? ¿ $3 \times 4 \times \dots$

por cuanto es igual á 36 (*escribiendo $3 \times 4 \dots = 36$*)?
 ¿ 15 dividido por cuánto es 5 (*escribe $15 \div ? = 5$*)?
 ¿ 144 dividido por cuánto es 9?

D.—M.—Guarden las pizarras. (*Pasan al frente seis alumnos con sus reglas métricas; da á cada uno, objeto diferente: una cajita vacía; una regla; un prisma de cristal; una tablita (pentágono irregular).* Cuenten Vds. los lados, mídanlos y denme la longitud total de todos ellos.

M.—Preste atención, la clase. Dos números que sumados den 48. Dos números que sumados den 9. Un número que dividido por 7 deje 3 de residuo. ¿ 3 décimos divididos por 100, cuánto es? ¿ Para reducir 1000 horas á días por cuánto dividiríamos?

A.—Por 24, porque un día equivale á 24 horas.

M.—¿ Para reducir 485 cts. á \$?

A.—Dividiríamos 485 entre 100 porque 100 cts. equivalen á un peso.

M.—¿ Y para reducir 24 \$ á cts?

A.—Multiplicaría 24 por 100; valen 2400 cts.

M.—(*Cada alumno, de los del pizarrón, explica el trabajo que ha hecho*).

LECCIÓN 4ª

Tema.— Submúltiplos del m.²

Desarrollo. — *Principio.* — **M.** — Hemos dicho, en clases pasadas que ¿ cuántos dm.² (*mostrando el cuadrado*) contenía el metro cd.?

A.— 100 dms.²

M.— (*En el pizarrón ha dibujado dos figuras, de un metro cd. de superficie cada una, divididas en dms. cds. por líneas delgaditas; con líneas gruesas y de colores, ha marcado superficies de 99, 44, 25, 12, 7 cuadrados*). ¿ Qué extensión tiene cada figura de la pizarra?

A.— Tiene un m.² y está dividida en 100 cuadraditos ó dms. cds.

M.— ¿ Cuántos cuadraditos abarcan estas líneas de color azul ? (*señala con el puntero*).

A.— 99 centímetros cds.

M.— ¿ Estas de color rojo ?

A.— 12 dms. cds.

M.— ¿ Estas de color blanco ? etc.

De consiguiente, digan Vds. una cantidad de dms. cds. que no alcance á m.² ?

Als.— 88 dms. cds., 12 dms. cds., 19 dms. cds., 75 dms. cds.

M.— ¿ La cantidad que alcance á un m. cd. ?

A.— 100 dms. cds.

M.— ¿ Una cantidad de dms. cuadrados contenidos en más de un metro cuadrado ?

A.— 115 dms. cds.; 140 ; 111, etc.

M.— ¿ Con cuántas cifras se pueden expresar cantidades de dms. cds. que no alcancen á un m. cd. ?

A.— Con dos cifras y con una.

M.— ¿ Y con cuántas cifras podríamos expresar cantidades de dms., de longitud que no alcancen á formar un metro ?

A.— Con una cifra, porque 11 decímetros son más de un metro.

Medio. — M. — Esto nos indica cómo debemos escribir las medidas de superficie; 8 ms. cds. se escriben así; 15 ms. cds. así; 98 dms. cds. así; (*escribiendo 0.98 ms. cds.*) puesto que este lugar indica la denominación y 98 dms. cds. no alcanzan á formar un metro cuadrado; 65 dms. cds. así; 70 dms. cds. así: (0.70 ms.²) ó así (0.7 ms.²), 80, así (0.80 ms.²), ó así (0.8 ms.²); 20 así (0.20 ms.²) ó así (0.2 ms.²); 2 decímetros cds. no podrán, pues, escribirse así (0.2 ms.²) porque se confundirían con las decenas de decímetros cds.; si *sesenta* y uno se escribe así (0.61 m.²) *sesenta y uno* (señalando las cifras), *uno* sin el *sesenta* se escribirá ¿ en qué lugar después de la coma ?

A.— En el segundo lugar; y como no hay sesenta, en su lugar, se escribirá un cero.

M. — *Sesenta y tres* dms. cds. se escribirán así (0.63 m.^2) ; si en vez de sesenta y tres fueran *tres* — sesenta y tres sin el sesenta — escribiríamos 0.03 m.^2 ; 8 dms.^2 , los escribiremos 0.08 ms.^2 . Este lugar es de las decenas de los décímetros cds. y este, de las unidades. No hay lugar para las centenas de los dms. cds. sino á la izquierda de la coma, porque las centenas de dms. cds. hacen ms.^2 . Cuando Vds. hallen escrita una cantidad así : 0.34 m.^2 ¿Cómo la leerán?

A. — 34 dms. cds.

M. — ¿ Así, 0.08 m.^2 ? ¿ Así, 0.98 m.^2 ? ¿ Así, 0.05 m.^2 ?
¿ Así, 6 m.^2 ? ¿ Así, 6.05 m.^2 ?

A. — 605 dms. cds.

M. — Sí, puede leerse así, ó bien 6 ms.^2 5 dms. cds.

Los dos primeros lugares á la derecha de la coma están ocupados ¿ por qué submúltiplo del metro ?

A. — Por el dm. cd.

M. — Muy bien; por la misma razón, los dos siguientes lugares, el 3º y el 4º, los ocupan los cm. cds., porque ¿ cuántos cms. cds. forman un dm. cd ?

A. — 100 cms. cds.

M. — Número de tres cifras. Por eso, 100 cms. cds. se escriben así : 0.01 m.^2 ó un dm.² De consiguiente, esta cantidad, (*escribiéndola*) 0.0045 m.^2 se lee 45 cms. cds. ; esta otra, 0.0030 m.^2 , 30 cms. cds. ; esta otra 0.0049 m.^2 , 49 cms. cds. ; esta otra, 0.0006 m.^2 , 6 cms. cds. ; esta otra, 0.004 ms.^2 , cuarenta cms. cds.; esta otra, 0.0728 m.^2 , 728 cms. cds.

M. — ¿ Cómo se leerán estas cantidades (*escribiéndolas*) 0.8925 ms.^2 ? 0.0075 ms.^2 , 0.0008 ms.^2 , 0.0089 m.^2 ?

A. — (*Contesta el preguntado, á cada número que escribe*).

M. — ¿ El primero y segundo lugar á la derecha de la coma lo ocupan ?

A. — Los dms. cds.

M. — ¿ El 1º lugar era qué de los dms. cds. ?

A. — Era decenas de los dms. cds. y el 2º unidades de los dms. cds.

M. — ¿ Y el 3º y 4º lugar qué serán de los cms. cds. ?

A. — Las decenas y unidades; el tercer lugar las

decenas de los cms. cds.; el 4º lugar las unidades de los cms. cds.

M.— De consiguiente, 60 cms. cds. ¿Cuántas decenas y unidades de cms. cds. contiene?

A.— Seis decenas de cms. cds. y ninguna unidad.

M.— ¿Escribiremos pues, qué?

A.— Un 6 en el 3º lugar; ó bien un 6 en el 3º lugar y un 0 en el 4º. Pero el 0 á la derecha de los decimales ya sabemos que no quita ni da valor.

M.— ¿Ahora, sabrían Vds. decirme qué múltiplo del metro cuadrado ocupa el 5º y 6º lugar?

A.— Sí, señor; el milímetro cuadrado.

M.— Lean, pues, estas cantidades: 0.000058 ms.²; 0.0045 ms.²; 0.48 ms.²; 0.0008 ms.²; 0.000006 ms.²; 0.000058 ms.².

Observen Vds. bien, el número de cifras y los lugares que ocupan; sigan leyendo: 0.0134 ms.²; 0.000628 ms.²; 0.000008 ms.²; 0.009 ms.² (*A cada cantidad, pregunta á un alumno*).

M.— Notan Vds. que, no obstante decir mms. cds. siempre escribimos ¿qué denominación?

A.— La denominación ms. cds.; pero siempre una coma que separe la unidad de las medidas de superficie, m. cds., de sus submúltiplos.

Fin. — *M.* — Ahora, veamos cómo escriben Vds. (*Pasan cuantos alumnos quepan en el pizarrón*). Escriban en columna vertical de modo que correspondan las comas: 8 ms. cds.; 7 dms.²; 94 cms.²; 7 mms.²; 7 cms.²; 128 cms.²; 128 ms.²; 128 dms.²; etc. Vuelvan á sus asientos.

M.— (*Manda dos alumnos, frente á cada uno de los ms.² dibujados en el pizarrón*). Van Vds. á separar, con tiza verde, la porción indicada por el número que escriba. (*Escribe 0.03 m.²; 0.99 ms.²; 0.13 ms.²; 0.002 ms.²; 0.0001 ms.² y los niños separan*). Vuelvan á sus asientos.

M.— Dicten Vds. cantidades métricas de superficie; voy á escribirlas. (*Para que el niño piense y enuncie; exteriorización de las imágenes; de modo que, pedagógicamente, se realizan los pasos: percepción,*

(adquisición), reconocimiento abstracto, exteriorización y aplicación del conocimiento.

Als.— *El maestro escribe, sea cual fuese, la cantidad que se le dicte, para que comparando, juzgue de la solidez de sus conocimientos.*

M.— (*Pizarrón completamente limpio*). Denme Vds. una cantidad en dms., cms. ó mms. cuadrados y yo voy á dibujar una superficie equivalente.

Als.— 8 dms. cds. (*el maestro, rápidamente, dibuja un rectángulo de 2 dms. por 4 dms. al mismo tiempo que dice : 2 decímetros de longitud por 4 decímetros de longitud, 8 dms. cds., etc*). 25 dms.²; 85 cms.²; 12 dms.²; 15 dms.²

M.— ¿ Y por qué no dicen 2560 cms. cds., por ejemplo ? Miren Vds. la superficie que representa un número tan grande. Cinco decímetros de longitud por cinco decímetros de longitud y otro cuadradito de 10 centímetros de longitud por 6 cms. de longitud. (*De cuando en cuando empleará la regla métrica, á fin de que el alumno use de ella para dibujar con exactitud una superficie de extensión dada ; inútil es decir, que el éxito del ejercicio consiste en la rapidez, seguridad y maestría con que el profesor maneje la regla, tome las medidas y trace líneas ; dos veces que mida las distancias para trazar un punto ; una vez que borre rectas porque les dió otra dirección ; una vez que necesite compás y no sepa trazar á pulso un ángulo recto, es suficiente para que la lección pierda sus atractivos*).

M.— ¿ Qué superficie tendrá este papel ? ¿ este cartoncito ? ¿ Esta tarjeta ? ¿ Esta parte de la tapa ? ¿ Aquel vidrio ? ¿ Esta cara del sobre ? (*Sino en todos, en varios, preguntará cómo calcula la superficie, de modo que el niño forme el hábito de multiplicar las dos dimensiones, pues, nuestros experimentos demostraron cuan difícil es aproximarse á la verdad calculando una superficie sin recurrir á la longitud, por otra parte, procedimiento natural y único dentro del espíritu matemático*).

M.— ¿ Cuántos lugares ocupan los cms.² ; los dms.² ; los mms.² ? ¿ El 3^{er} lugar lo ocupan ? ¿ el 5^o ? ¿ el 6^o ? ¿ El 1^o de la derecha de la coma decimal ?

(*Escribe 45.085079678 m.²*). Denominación de la cifra que señale.

Als.—Ms.²; decenas de cms. cds. ó bien 50 cms. cds. 79 mms.², etc.

Deberes.—Cada uno de los alumnos de 1^a y 4^a fila trae, para la próxima clase, un objeto y sobre él, escrita la superficie de una ó varias caras. El objeto puede ser la tapa de un tintero ; un espejito ; un pliego de papel ; un cartón ; la página escrita de un libro. Cada uno de los de las otras filas, averiguan qué superficie ocupa la parte impresa de todas sus páginas de cualquiera de los tres diarios más grandes que se publican en Buenos Aires.

LECCIÓN 6^a

Tema.—Múltiplos del metro cuadrado.

Desarrollo.—*Principio.*—(*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). *M.*—Escriban: 0.0070 ms.²; 8.98 ms.²; 0.0725 ms.²; 0.000068 ms.²; 98.7298 ms.² Dibujen una figura de 10 dms.²; 130 cms. cds.; dibujen un paralelógramo de 36 cms.² de superficie. Vuelvan á sus asientos. ¿Cuánto es 100 por 100? ¿mil por 100? ¿84 por 1000? ¿1000 por mil?

M.—¿Qué superficie tendrá este paralelógramo cuyo largo mide tanto como esta regla?

A.—16 dms. cds.

M.—¿Cuánto mide de superficie este otro paralelógramo cuyo largo es de 8 dms. y cuyo ancho de 2 dms?

A.—Mide 16 dms. cds.

M.—¿Cuánto mide de superficie este otro paralelógramo cuyo largo es de 8 dms. y cuyo ancho es de 2 dms?

A.—Mide 16 dms. cds.

M.—¿Luego, estas dos figuras, tienen?

A.—La misma superficie, son equivalentes.

M.—Y esta otra figura ¿qué superficie tendrá? (*dibujando un círculo de la misma extensión más ó menos, que las figuras anteriores*). Observen si ocupa un espacio más ó menos igual al de estos paralelógramos.

A.—16 dms. cds.

M.—¿Y esta otra figura? (*dibujando un triángulo la mitad de un cuadrado*).

Als.—9 dms. cds.; 8 dms. cds.; 7 dms. cds.

M.—Está bien, 8 dms. cds.

¿Cuántos dms. cds. tiene un metro cuadrado?

A.—100 dms. cds.

M.—(*Escribe $1 m.^2 = 100 dms.^2$* .)

Y si un dm.² tiene ¿cuántos cms?

A.—100 cms. cds.

M.—¿Cuántos dms. cds. tendrán 100 dms. cds.?

A.—100 veces más ó 100 por 100 que es igual á 10000 cms.² (*escribiendo el maestro*) $1m.^2 = 100 dms.^2 = 10000 cms.^2$)

M.—Luego 1 m.² ¿A cuántos cms.² equivale?

A.—A 10000 cms. cds.

M.—Si un metro equivale á 10000 cms. cds., 8 metros ¿á cuántos cms. cds. equivaldrán?

A.—A 80000 cms. cds.

M.—Por consiguiente, para reducir metros² á dms.², ¿por cuánto multiplicamos?

A.—Por 100.

M.—¿Para reducir á cms.²?

A.—Multiplicamos por 10000.

M.—Así, 8.32 ms.² para reducirlos á cms.² multiplicamos por 10000 ó corro la coma cuatro lugares á la derecha en la forma que sabemos, así: 83200, cambiando la denominación ms.² en cms.² ¿8.32 ms.² equivalen pues, á?

A.—A 83200 cms.² (*Estos ejercicios tienen por único objeto preparar las lecciones 9ª y 24ª*).

M.—¿Cuáles son los múltiplos del metro cuadrado y su equivalencia?

A.—El Dm.² que vale 100 ms.², el Hm.² que vale 100 Dms.², y el Km.² que vale 100 Hms.²

Medio. — *M.* — Estas medidas nunca se usan, no siendo el Km.², para las superficies del partido de Mercedes, de la provincia de Buenos Aires, de la República Argentina, para expresar la superficie de una nación, de una provincia ó de un partido. Las pequeñas extensiones se expresan en ms. cds., nunca en Dms. cds., ni Hms. cds. De modo que nunca diremos: la plaza tiene 80 Dms. cds. de superficie sino su equivalente en metros cuadrados, 8000 ms. cds. ¿Un Dm.² dijimos que tenía de superficie?

A. — 100 ms. cds. (*escribiéndose 1 Dm.² = 100 ms.²*)

M. — De consiguiente, 2 Dms.² ¿equivaldrán?

A. — A 200 ms. cds.

M. — ¿8 Dms.²? ¿6 Dms. cds.? ¿Para reducir los Dms.² á metros multiplicamos?

A. — Multiplicamos siempre por 100.

M. — Este número (*escribe 800 ms.²*) equivale también á Dms.²?

A. — A 8 Dms.²

M. — ¿Este, 700 m.²? ¿Este, 4800 ms.²?

M. — Un Km.² equivale ¿á cuántos Hms.²?

A. — A 100 Hms. cds.

M. — (*Escribe un 1 Km.² = 100 Hms.²*) Un Km.² equivale ¿á cuántos Dms.²?

A. — 100 Dms.²

M. — Si 1 Hm. cd. equivale á 100 Dms. cds., 100 Hms. cds. (*señalando*) ¿á cuántos Dms. cds. equivale?

A. — A 100 veces 100 Dms. cds. ó sea....

M. — (*Escribe después de 1 Km.² = 100 Hms.² × el número 100*) ¿cuántos ceros agregaremos á 100?

A. — Dos ceros (*el maestro los agrega*) 10000 Dms. cds.

M. — Y como cada Dm.² equivale á 100 ms.², 10000 Dms. cds. valdrán 10000 veces....

A. — 10000 veces 100 ó 1000000 de ms.² (*el maestro escribe después de 10000 Dms.²*)

M. — Por tanto, un Km.² ¿cuántos ms. cds. vale?

A. — Un millón de ms. cds.

M. — Sin hacer todas estas operaciones, podíamos

saberlo directamente, considerando que tiene ¿cuántos metros de ancho y cuántos de longitud?

A. — 1000 de ancho y mil metros de longitud (*el maestro dibuja un cuadrado y escribe sus dimensiones*). Multiplicando el largo por el ancho (1000×1000 se escribe) obtenemos la superficie.

Y 1000 ms. de longitud por 1000 ms. de longitud nos da (*escribe el maestro 1000000*) un millón de ms. cds.

M. — Eso es. ¿Si quisiéramos saber los ms. cds. de un Hm.²?

A. — Como es una figura que tiene 100 ms. de ancho por 100 de largo, su superficie sería 100 ms. de longitud por 100 ms. de longitud lo que equivale á 10000 ms. cds. de superficie (*El maestro escribe, anticipando la escritura del número cuando el alumno se detiene*).

M. — Si un Km.² equivale á un millón de ms. cds.; 8 Kms.² ¿á cuántos ms. cds. equivaldrían?

A. — A 8 millones de ms. cds.

M. — Muy bien.

Fin. — M. — Tomen las pizarras. ¿A cuántos ms. cds. equivalen 8 Dms. cds.?

A. — A 800 ms. cds.

M. — ¿8 Hms. cds.? ¿8 Kms. cds.? ¿A cuántos Dms. cds. equivalen 9200 ms. cds.? ¿9252 ms. cds.? ¿A cuántos metros cuadrados equivalen 3 Kms. cds. y 858 ms.²?

M. — Para hallar una superficie, siendo las dos longitudes de diferente denominación, hay que reducirlas á una misma denominación; si decimos: un terreno tiene 1 Km. de largo por 800 ms. de ancho, hay que reducir el Km. á ms. y multiplicar luego, metros por metros. Veamos: ¿cuál será la superficie de tierra que ocupa la línea del ferrocarril de aquí á Buenos Aires si tiene 97 Kms. de longitud y 30 ms. de ancho?

A. — (*Explica el problema*). 97 Kms. de longitud equivalen á 97000 mts. de longitud; por 30 ms. de ancho, es igual á 2910000 ms.² de superficie.

M. — Está bien; ¿cuántos Kms.² hay en esa cantidad de ms. cds?

A. — 2 Kms. cds. y 910 mil ms.² porque un Km.² equivale á 1000000 de ms.² En 2910000 ms.² habrá tantos Kms. cds. como millones contenga.

M. — Un terreno mide 8 Dms. de largo y 65 ms. de ancho ¿cuál es la superficie en ms. cds.? Esta regla tiene 4 dms. de largo y 5 cms. de ancho ¿cuál es la superficie de esta cara?

A. — 200 cms. cds.

M. — ¿A qué denominación redujo las longitudes?

A. — A la denominación cms.; 4 dms. de longitud equivalen á 40 cms. de longitud y 40 cms. por 5 cms. da 200 cms. cds..

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

LECCIÓN 18*

Tema. — Dos cosas iguales á una tercera, son iguales entre sí; si se quita ó se agrega cantidades iguales á cantidades iguales, resultan cantidades iguales.

Desarrollo. — *Principio.* — (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*).

M. — Escriban, en números romanos: 45; 99. Piensen un número primo. Multipliquen por 1000 á 0.0000009; á 94; á 3.55; dividan por 1000 á 9987; á 4; á 98.75; á 0.28. Vuelvan á sus asientos. (*El maestro da cálculos mentales, luego pasan otros cinco alumnos al pizarrón*). Reduzcan 240 horas á días. ¿Cuántos segundos hay en 2 horas? ¿Cuántas horas en un mes?

Dibujen una superficie de 12 dms., cds.; de 64 cms. cds. (*Se les reparte un objeto á cada uno*). Calculen su peso y escribanlo. Escriban 75 ms.; 75 ms.², 8 cms; 8 cms.² Vuelvan á sus asientos.

Medio. — **M.** — (*Presenta, sobre la mesa, tres objetos de volumen igual: tres botellas, tres copas, tres cubos,*

pero diferentes en color). ¿Cuántas botellas hay sobre la mesa?

A. — Hay tres botellas: la primera de color azul, la segunda de color verde, la tercera de color rojo.

M. — ¿El tamaño de la primera, cómo es comparado con el de la tercera?

A. — Igual.

M. — (*Escribe tamaño 1ª = tamaño 3ª*).

¿El tamaño de la 2ª cómo es, comparado con el de la 3ª?

A. — Igual; debe escribir tamaño 2ª = tamaño 3ª.

M. — Este objeto es, pues, igual á este 3º; y este otro igual al mismo 3º. ¿Cómo son entre sí por su tamaño? (*presentando los dos*).

A. — Son iguales (*Escribe tamaño 1º = tamaño 2º*).

M. — Esto se explica: dos cosas (*indicándolas*) iguales á una tercera, son iguales entre sí.

Esta copa vale tanto como este plato; este frasco vale también tanto como este plato; el plato vale 35 cts. ¿cuánto vale la copa y cuánto el frasco?

A. — El frasco vale 35 cts. y la copa vale también 35 cts.

M. — Esto quiere decir que dos cosas que valen lo mismo que una tercera, son de igual valor. La superficie de este triángulo (*presenta cartones de la forma indicada*) es igual á la de este pentágono; y la superficie de este paralelógramo, es igual á la del mismo pentágono. ¿Cómo son las superficies del triángulo y del paralelógramo?

A. — Son iguales entre sí.

M. — Este libro pesa tanto como este cubo y este otro, no pesa tanto como este cubo ¿cómo son los pesos de estos cubos?

A. — Son desiguales.

M. — Esto quiere decir que de dos cosas, cuando una es igual á una tercera y otra no lo es, las dos no son iguales entre sí.

Esta jarra contiene tanta agua como esta botella; y esta vasija tanto como la misma botella ¿cómo son las capacidades de la jarra y de la vasija?

A. — Son iguales; quiere decir, que dos cosas de peso igual á una tercera, pesan igual.

M. — (*Escribe en la pizarra*). Ahora, si

$$4 \text{ cms.}^2 = 0.0004 \text{ m.}^2$$

$$\text{y } 400 \text{ mms.}^2 = 0.0004 \text{ m.}^2$$

cómo son 4 cms.² y 400 mms.²?

A. — Son iguales (*se escribe*).

M. — Si 8 ovejas valen 44 \$ y una vaca vale 44 \$, la vaca vale cuánto?

A. — La vaca vale tanto como las ovejas.

M. — (*Escribe*). Si $3a = e$ y $5b = e$. ¿Cómo son $3a$ y $5b$?

A. — Iguales y puede escribirse $3a = 5b$.

M. — Si $25 + 5 = 30$ y $5 \times 6 = 30$. ¿Cómo son $25 + 5$ y 5×6 ?

A. — $25 + 5$ igual á 5×6 .

M. — Piensen Vds. en dos cosas iguales á una tercera.

A. — El caballo de Rodríguez es de la misma fuerza que el de Ortiz; el de Pagano de la misma fuerza que el de Ortiz. Entonces el caballo de Pagano y el de Rodríguez son de la misma fuerza. (*Varios niños dan ejemplos semejantes*).

M. — Ahora, observen. ¿Qué cantidad de agua contienen estas dos botellas?

A. — La misma cantidad de agua.

M. — Quito de esta una copa, y de esta una copa. ¿Qué cantidad de agua he quitado de una y otra?

A. — Iguales cantidades.

M. — ¿Qué cantidad de agua queda en las botellas?

A. — Cantidades iguales.

M. — Esto se expresa diciendo: si á cantidades iguales se quitan cantidades iguales, quedan cantidades iguales. ¿Cuántas monedas hay aquí y allí?

A. — 12 monedas de 10 cts. en cada montón.

M. — ¿Cuántas quito de este montón y cuántas de este otro?

A. — Del 1.^{er} montón quitó Vd. 3 y del 2.^o también 3; luego ha quitado cantidades iguales de monedas y

han quedado cantidades iguales. 9 monedas en cada montón. (*Da otros ejemplos acerca del peso y del valor*).

M. — 8 es igual á 8 (*escribe*); 2 es igual á 2; si quito este 2 de 8 y este otro 2 de 8 queda....

A. — 6 aquí y 6 allí; cantidades iguales.

M. — Muy bien. Si se quitan cantidades iguales, etc. Aquí tengo $7a = 6c$; y $3m = 2n$ dos cantidades iguales y dos cantidades iguales. Si quitamos $3m$ de $7a$ y $2n$ de $6c$ (*escribe* $7a - 3m$ y $6c - 2n$) habremos quitado cantidades iguales, de cantidades iguales; luego $7a - 3m$ y $6c - 2n$ ¿cómo serán?

A. — Serán dos cantidades iguales.

M. — (*El mismo procedimiento para demostrar inductivamente que si se agregan cantidades iguales, etc*).

Fin. — *M.* — Estos dos cuadernos tienen la misma cantidad de hojas; quitamos 20 hojas á éste y 20 á este otro. ¿Con cuántas hojas queda cada uno?

A. — Con la misma cantidad de hojas.

M. — Dos individuos han ahorrado 155 \$ cada uno; todos los días economizan 20 cts. cada uno; al terminar el año ¿cuánto tendrá el uno comparado con el otro?

A. — La misma cantidad de dinero.

M. — Juana y María tienen la misma clasificación de Pedro, 4 menos un punto, en Aritmética. ¿Cuál es la clasificación de Juana y María? etc.

LECCIÓN 5ª (Junio)

Tema.—Problemas de multiplicación de denominados métricos.

Desarrollo.—*Principio.*—*M.*—¿Cuánto es $(7 + 8 - 5)$: $10 + 5$; ¿cuánto es $8 + 2 + 5 + 5 + 6 + 4 + 3 + 6$? ¿Cuántos litros de vino caben en un pipón de 8 Hectólitros? ¿Cuánto es 825 dividido por 10, por 1000? ¿Cuántos gramos son 1 Kg., 1 Hg., 1 Dg. y 1 gr.?

¿A cuántos Kgs. equivalen 22 quintales métricos de uva? ¿Multiplicando una cantidad de tres decimales por otra de 2 decimales, el producto dará qué? ¿0.08 dividido entre 0.04 es lo mismo que dividir qué cantidades? Lugares de los mms. cds.; de los dms. cds. Para reducir cms. cds. á ms. cds. ¿por cuánto se divide? ¿Un número divisible por 5? ¿Por 3? ¿Por 2? ¿Por 6? La suma de las cifras de un número es divisible por 9 ¿por qué cifra es divisible el número? ¿Qué números dividen á 186? El producto de dos números es 24; uno de ellos es 6, ¿cuál es el otro? La suma de dos números es 35 uno de ellos es 32 ¿cuál es el otro? Descompongan en sus factores simples á 30.

M.—¿Cómo se halla la superficie de la cara de este vidrio?

A.—Multiplicando el largo por el ancho.

M.—Que, representando largo por b y ancho por a , será $b \times a$ (*escribe en la pizarra*). Pase Eduardo. Mida el largo.

A.—75 cms. de largo por 65 de ancho.

M.—¿Luego la superficie será?

A.—75 por 65 cms. cds.

M.—Muy bien.

Medio. — *M.*—Ahora, deseamos hallar la superficie del pizarrón. ¿Cómo haremos?

A.—El largo del pizarrón multiplicado por el ancho.

M.—El ancho es de 1 m. 45 cms.; el largo es de 3 ms. Luego ¿multiplicaremos 1 m. 45 cms. por 3 ms?

A.—Sí, señor.

M.—Efectivamente. Pero el resultado multiplicando metros por centímetros ¿qué daría? No lo sabríamos. No puede sino multiplicarse las mismas denominaciones: ms. por ms.; dms. por dms.; cms. por cms. Estas dimensiones, siendo de denominación diferente ¿qué debe hacerse con ellas?

A.—Reducirlas á una misma denominación, á centímetros ó bien á metros.

M.—Eso es. Reduzcámoslas á la denominación metro. ¿Cómo escribimos 1 m. y 45 cms?

A.—1 y .45 separados por la coma.

M.—(*Escribe 1, 45 m.*) Luego ¿qué multiplicaremos?

A.—1, 45 ms. por 3 m. y el resultado será ms. cds. (*se hace la multiplicación*).

M.—Este diario cobra, por cm. cd. de aviso, 20 cts. ¿Cuánto costará este aviso? ¿Qué debemos saber primero?

A.—La superficie del aviso, midiendo el largo por el ancho y multiplicando estas dos dimensiones.

M.—La superficie del aviso es de 2 dms.² y 25 cms.² Conocemos el precio de cada cm. cd.

A.—Hay que reducir todo á cms. cds.

2 dms. cds. equivalen á 200 cms. cds.

M.—Bien. $2 \text{ dms.}^2 = 200 \text{ cms.}^2$

$25 \text{ cms.}^2 = 25 \text{ cms.}^2$

Superficie del aviso = 225 cms.²

¿Ahora?

A.—Como cada cm.² cuesta 20 cts., 225, etc.

M.—Luego, cuando tenemos cantidades de diferentes denominaciones para multiplicar, ¿qué debemos hacer?

A.—Reducirlas á una sola denominación.

M.—Si tuviéramos una superficie de tierra de 3 Km.² 85 ms.² y 90 dms.² cds. que vender á 5 \$ el m. cd. ¿qué haríamos?

A.—Reducir los Kms., ms. y dms. á ms. cds.

M.—Si tuviéramos que hallar el valor de una tabla cuya longitud fuera de 8 ms. y 9 dms.; y cuyo ancho de 4 dms. y 8 cms. á 12 cts. el dm. cd. ¿qué harían Vds?

A.—Hallar la superficie de la tabla, primero, en dms. cds.

M.—¿Qué cantidades multiplicaría para hallar la superficie?

A.—El largo 8 ms. y 9 dms. reducido á dms., por el ancho 4 dms. y 8 cms., reducido á dms. El resultado nos daría dms. cds.

M.—Pues, vean un procedimiento fácil para Vds. Como para multiplicar las dimensiones necesito la

misma denominación, y la denominación más baja de una es cms., reduzco el largo á cms. y el ancho á cms. (*Escribe*). Largo = 890 cms. ; ancho = 48 cms. ; superficie 890 cms. de longitud por 48 cms. de longitud, es igual á 42720 cms.² Como el precio es de dms cds., reducimos los cms. cds. á dms. cds. diviendo por 100 ó cms. cds. á que equivale un dm.² Obtenemos, así, 427.20 dms. cds. Si cada dm. cd. vale, etc.

Fin. — Tomen las pizarras. ¿Cuál es la superficie del borde de este vidrio que mide 6 dms. de largo por 2 mms. de ancho ?

A. — 1200 mms.²

Otro. — 1200 mms.²

Otro. — Lo mismo.

M. — ¿Qué hizo Vd ?

A. — Reduje los 6 dms. á mms. ; equivalen á 600 mms. ; 600 mms. de largo por 2 mms. de ancho, da 1200 mms.², superficie del borde.

M. — Bien. ¿ A cuántos centímetros cds. equivalen ?

A. — A 12 cms. cds. porque si 100 mms. cds. equivalen á un cm.², en 1200 mms. cds. habrá tantos cms. cds. como veces quepa 100 en 1200. Cabe 12 veces, luego, la superficie, es 12 cms. cds.

M. — ¿ Cuánto cuesta un Km.² y 80 ms. cds. de terreno á 6 cts. el m. cd. ?

A. — (*Sacan el problema y lo explican*).

M. — Guarden las pizarras. Si se da el precio de un dm. cd. ¿ A qué deben reducirse todas las medidas, antes de multiplicarlas por el precio ?

A. — A dms. cds.

M. — ¿ Si se diera el precio de un cm. cd. ? ¿ de un m.² ? Antes de multiplicar las dos dimensiones para determinar la superficie de un cuerpo ¿ á qué denominación deben reducirse ?

A. — Debe reducirse el largo y el ancho á la misma denominación.

M. — ¿ Si el largo se diera en ms. y el ancho en cms ?

A. — Hay que reducir los ms. á cms., ó bien los cms. del ancho á ms.

M. — ¿ Si el largo fuera 8 Kms. y 90 ms. y el ancho 3 Dms?

A. — Para hallar la superficie se reducen los 8 Kms. y 90 ms. á ms. y los 3 Dms. á ms.; luego, se multiplican y la superficie resultaría ms. cd.

M. — (*Pasan tres alumnos al pizarrón*).

Multiplique 3 cms. de largo por 2 mm. de ancho. — 3 Dms. por 8 ms. — 1 m. 3 dms. por 2 dms. — 2 ms. 1 dm. por 3 cms — ¿ 20 ms. cds. de madera á 5 cts. el dms. cds? ¿ 3 dms. cds. y 6 cms.² de aviso á 50 cts. el cm.²?

Vuelvan á sus asientos.

LECCIÓN 14ª

Tema.—Medidas cúbicas.

Desarrollo.— A. — M. — ¿ Qué presento á Vds?

Als. — Una copa, una esfera, un litro, un cubo, una regla.

M. — ¿ Qué son estas cosas? ⁽¹⁾

A. — Son cuerpos.

M. — ¿ Qué sabemos medir de este cuerpo? (*tomando el cubo*).

A. — Sus lados, sus caras.

M. — Hasta ahora, pues, hemos medido la longitud de las cosas y las superficies. Pero tanto como la longitud y la superficie, necesitamos medir el *volumen*. Usamos el *metro cúbico* (*escribe*) que abreviado se escribe m.³, ó de sus múltiplos el Dm.³, el Km.³, etc. ó submúltiplos, el dm.³, el cm.³, el mm.³

El dm.³, es este. La misma palabra lo dice: es un cubo y todos sus lados tienen (*midiendo*) . . .

(1) De acuerdo con DELACROIX acerca de lo poco exacta y evocativa que es la denominación *sólidos*, recomendamos al maestro que use la de *cuerpos* ó *volumenes*.

A.—Un decímetro de largo.

M.—El metro cúbico, ¿qué será, pues?

A.—Un cubo cuyos lados miden un metro de largo.

M.—¿Qué será el Dm.³? ¿el cm.³?

A.—Un cubo cuyos lados miden un cm. de largo.

M.—¿Qué será este cubito?

A.—Un centímetro cúbico.

B. — M.—Con las medidas que acabamos de enunciar, se mide el volumen de los cuerpos. La operación es simplísima.

Si deseamos saber el volumen de esta caja, vemos cuántos cubos de un decímetro cúbico caben (*echa cubos de cartón hasta llenarla*) 8 cubos de un dm.³; su volumen es de 8 dms.³ Pero, ¿cómo haríamos para medir el volumen de este libro, si ninguno de estos cubitos entran, puesto que no es hueco? ¡Ah, cuántas, cuántas cosas no podemos medir como la caja! Millones de cosas: aquella tabla, ese vidrio, la pared, la botella, el lápiz. Y luego, suponiéndolas medibles como el espacio de esta aula, qué tarea larga é incómoda andar con cubos tan grandes como el del metro, por otra parte, difícil de recordar la posición, si no se usan 20 ó 30. ¿Han visto Vds. ingenieros, albañiles, andar nunca con tales cubos para medir?

C.—A.—Nunca hemos visto.

M.—Efectivamente, no se usan.

El hombre halló un método mucho más rápido, mucho más fácil, mucho más exacto. Lo vamos á explicar. Supónganse Vds. que deseáramos hallar el volumen de este cubo, el dm.³, en cms. cbs. Se mide en cms. el alto, el largo y el ancho (*señala*) tres dimensiones; se multiplican entre sí y el producto da el número de cms. cbs. que mide el dm. cb. ¿Cuántos cms. cbs. (*muestra el cubito*) creen Vds. que puede medir este dm. cb?

Als.—100, 80, 150, 200, 75.

M.—(*Apunta esas cantidades en la parte superior de la pizarra*). La vista engaña mucho. ¿Cuántos cms. mide el ancho, el largo, el alto?... Dijimos que

el producto de las tres longitudes daba el volumen ¿cuánto es 10 cms. por 10 cms. por 10 cms?

A.—Es 1000 cms. cbs.

M.—Hay, pues, en este dm.³ ¿cuántos cms. cbs?

A.—Hay 1000 cms. cbs.

M.—Muchos de Vds. dudan que pueda haber una cantidad tan grande; vamos á contar; en este caso, podemos hacerlo porque este dm.³ se deshace en cubitos. ¿Cada uno es?

A.—Un centímetro cúbico.

M.—Bueno; ¿cómo son estas tablitas y cuántas?

A.—Esas tablitas en que dividió Vd. al dm.³ son 10 é iguales.

M.—Esta tablita ¿en cuántas columnitas la hemos dividido?

A.—En 10 columnitas iguales.

M.—Si esta tablita tiene 10 columnitas, las 10 tablitas ¿cuántas tendrán?

A.—Desde que son iguales, tendrán 10 veces diez, ó sea 100 columnitas. (*El maestro escribe después de cada descomposición: 1 dm.³ = 10 tablitas = 100 columnitas = 1000 cms. cbs.*).

M.—¿Cómo son las 100 columnitas?

A.—Son iguales.

M.—Esta columnita en ¿cuántos cubitos ó cms. cbs. se divide?

A.—Esa columnita se divide en 10 cubitos iguales ó cms. cbs.

M.—Si una columnita tiene 10 cms. cbs. las 100 columnitas del dm. cb. ¿cuántos cms. cbs. tendrán?

A.—10 veces 100 ó 1000 cms. cbs.

M.—¿Ven Vds. cómo la vista los había engañado? Pero observen que el cubo se divide en tantas tablitas de un cm. de grueso como cms. mide el largo del cubo (*acompaña las palabras con el acto de medir el lado correspondiente*); que la tablita se divide en tantas columnitas del mismo grueso como cms. mide el ancho del cubo. Y que, por fin, la columnita, se divide en tantos cubitos iguales como mide el alto del cubo. Luego, conociendo el largo del cubo, sabemos el

número de tablitas en que podemos dividirlo. Conociendo el largo y el ancho, el número de columnitas en que podemos dividir el dm. cb.; conociendo el largo, el ancho y el alto, el número de cubitos en que podemos dividir cada columna; por consiguiente cada tablita, el cubo ó dm. cb. ¿Cuántas dimensiones necesitamos conocer de las cosas, para hallar su volumen?

A.—Tres dimensiones: largo, ancho y alto ó grueso.

M.—De todos los cuerpos no es posible hallar directamente esas dimensiones. De este, por ejemplo, de este etc. (*mostrando una esfera, una botella, una pirámide, etc.*). Pero sí, de estos que se llaman paralelepípedos porque todas sus caras son paralelógramos. Son las formas que más abundan; paredes, tablas, cajas, piezas y su volumen, pues, costará siempre poco sacarlo.

D. — Ahora, saben Vds. hallar el volumen; saben que la vista engaña más para hallar el volumen que para hallar la superficie; y que lo único que calculamos con aproximada exactitud, es el largo. ¿Cuántos metros cbs. creen Vds. que medirá esta pieza que tiene la forma de un paralelepípedo?

Als.— 50, 100, 80, etc. ms. cbs.

M.— Han vuelto Vds. á caer en el mismo error que cometieron al calcular los cms. cbs. del dm.³ Calculen Vds. las tres dimensiones de la pieza y multipliquen; ¿cuál es el alto?

A.— La distancia del piso al techo.

M.— ¿Cuál es el ancho? ¿cuál el largo? Calculen el volumen.

Als.— 240 ms.³; 150 ms.³; 180 ms.³; 240 ms.³

M.— ¿Cómo calculó, Gil?

A.— El ancho es de 6 ms.; el alto de 5 ms. y el largo de 8 ms.; 5 por 6, 30; 30 por 8, 240; el volumen es de 240 ms.³

M.— Las longitudes son casi exactas; luego, ese es el volumen.

M.— Para hallar el volumen de esta caja ¿qué debemos hacer?

A.— Medir el largo, el ancho y el alto.

M.— Tomen las pizarras. El largo (*midiendo*) es de 3 decímetros; el ancho de 2 decímetros, y el alto de un decímetro. Hagan las operaciones.

Als.— Su volumen es de 6 dms. cbs.

M.— En efecto (*comprobándolo*), en ella caben 6 dms. cbs.

M.— ¿Cuál es el volumen de esta tabla que mide 35 cms. de largo; 20 cms. de ancho y 2 cms. de espesor?

Als.— 1400 cms. cbs., obtenidos multiplicando las tres dimensiones.

M.— Si dos de las dimensiones fueran en cms. y la otra en milímetros. ¿Qué harían Vds.?

A.— Reduciríamos los cms. á mms. porque no pueden multiplicarse cantidades de diferente denominación.

M.— Muy bien; veamos. ¿Cuál es el volumen de este vidrio que mide 70 cms. de largo, 60 cms. de ancho y 2 mms. de grueso?

Als.— 840000 mms. cbs.; 840000 mms.³; etc.

M.— Sabrían Vds. decirme ¿á cuántos mms.³ equivale un cm. cb.?

A.— A 1000 mms.³

M.— En efecto, porque este cubito, el cm.³ mide 10 mms. de alto, 10 de ancho y 10 de largo. Como 840000 es número grande, expresen el mismo volumen en cms. cbs.

M.— Dividiendo por 1000, nos dará el volumen en cms.³; 840 cms.³ es el volumen del vidrio.

Deberes.—Busque, cada uno, un objeto de la forma de un paralelepípedo, hallen su volumen y traen, para mañana, el objeto y el problema explicado en sus cuadernos.

INDICACIONES

No me cansaré de recomendar la mayor prolijidad en la escritura exacta de las denominaciones, colocarlas á la derecha de la 1ª cifra de la derecha y fijar la idea de que de la especie de la 1ª cifra situada á la izquierda de la coma es á la que deben referirse, no al lugar que ocupan las demás cifras. Quienes hayan enseñado aritmética, saben la importancia y alcance de esta indicación que tantos contratiempos puede economizar.

LECCIÓN 21ª

Tema. — Submúltiplos del m.³

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Desde dónde hasta dónde será un Km. cd. de superficie? Piensen: ¿cuánto mide cada lado?

A. — Mide un Km. de longitud.

M. — ¿Hasta dónde es un Km. de distancia?

A. — Desde aquí á la estación del Pacífico.

Otro. — La ciudad tiene un Km.² de superficie: desde la Avenida España á la Avenida Italia y desde la calle de la plaza San Martín que va de Norte á Sur, hasta la de la estación del Pacífico.

M. — Más ó menos, ese gran espacio es un Km.²

M. — La diferencia entre dos números es 9, el mayor es 16 ¿cuál es el menor? El cociente de dividir un número entre 7 es 5 ¿cuál es el número? (*Escribe* $7 \times \dots = 56$) ¿y 7 por cuánto es 56? (*Escribe* $6 \times 9 = 54$; $7 \times 5 = 35$ etc.), 54 dividido por cuánto da 9 (*señalando*). ¿63 dividido por cuánto da 7?

M. — ¿Qué dimensiones tienen los lados de un metro cúbico?

A. — Cada lado mide un metro.

M. — ¿O cuántos decímetros?

A. — O diez decímetros.

M. — Para hallar el volumen de un $m.^3$ ¿qué se multiplicará?

A. — El largo, por el ancho, por el alto; como cada lado mide 10 centímetros, el volumen será 10 dms. de longitud, por 10 dms. de ancho, por 10 dms. de alto igual á 1000 dms. cbs.

M. — ¿Y un decímetro³, á cuántos cms.³ equivalía?

A. — A 1000 cms. cbs.

M. — Y un $cm.^3$ ¿á cuántos mms. cbs. equivaldrá, desde que cada lado tiene 10 mms. de largo?

A. — A 1000 mms.³.

M. — Un $Dm.^3$, ¿cuántos metros cúbicos?

A. — 1000 ms.³, porque cada lado mide 10 ms.

M. — ¿Un $Hm.^3$? ¿Un $Km.$ cb? Está bien.

Medio. — ¿Cuáles son los múltiplos del metro cúbico?

A. — El $Dm.^3$; el $Hm.^3$, etc. y los submúltiplos el $dm.^3$, el $cm.^3$ y el $mm.^3$.

M. — Estas dimensiones se escriben abreviadas como las demás. Las mismas letras, pero llevan arriba, siempre, un 3, de esta manera:

$Mm.^3$	$m.^3$	$dm.^3$
$Km.^3$		$cm.^3$
$Hm.^3$		$mm.^3$
$Dm.^3$		

Y se lee Miriámetro cúbico, etc.

¿Cómo escribiremos 15 metros cbs.?

A. — Después del 15 una *m* y un 3 arriba, á la derecha.

M. — ¿Cómo escribiremos 355 Kms. cbs.? ¿Cómo escribiremos 63 cms. cbs.? etc. ¿A cuántos dms.³ equivaldrán 9 ms.³?

A. — Desde que un metro cúbico equivale á 1000 dms.³, 9 $m.^3$ equivaldrán á 9000 $dm.^3$.

M. — (*Escribe* $9 m.^3 = 9000 dm.^3$). ¿Y á cuántos cms.³ equivaldrán 9 $m.^3$ ó 9000 $dm.^3$?

A. — Desde que cada $dm.^3$ equivale á 1000 $cm.^3$, 9000 $dm.^3$ ó 9 $m.^3$ equivaldrán á 9000 multiplicado por 1000 que son 9 millones (*escribe*).

M. — 9 metros de longitud ¿ á cuántos decímetros de longitud equivalían ?

A. — A 90 decímetros de longitud.

M. — 9 ms. cds. ¿ á cuántos dms. cds ?

A. — A 900 dms. cds.

M. — Y 9 ms. cbs. ¿ á cuántos dms.³ ?

A. — A 9000 dms. cbs. (*El maestro escribe las tres equivalencias*). Ven Vds. cuánto, cuánto varían estas equivalencias, según se trate de longitud, superficie ó volumen. Las primeras son 10 veces 9; las segundas 100 veces 9; las terceras 1000 veces 9.

¿ Para reducir los metros cúbico á decímetros cúbicos hay que multiplicar, pues, por cuánto ?

A. — Por 1000.

M. — ¿ Para reducir los dms.³ á cm.³ ?

A. — También por 1000.

M. — ¿ Y para reducir los metros cúbicos á cms.³ ?

A. — Se reducen, primero, á dms.³ luego á cms.³; se multiplican dos veces por 1000.

M. — Así, 125 ms.³ se reducen á cms. cbs., así : por 1000, 125000, son dms. cbs.; otra vez por 1000 son 125000000, son cms. cbs. ¿ Y si los multiplicásemos otra vez por 1000, 125000000000, serían.....

A. — Serían mms. cbs.

M. — Si tuviéramos que reducir 7 ms.³ y 43 dms.³ á dms. cbs. haríamos así :

$$\begin{array}{rcl}
 7 \text{ m.}^3 & = & 7000 \text{ dm.}^3 \\
 43 \text{ dm.}^3 & = & 43 \text{ } \\
 \hline
 7 \text{ m.}^3 \text{ y } 43 \text{ dm.}^3 & = & 7043 \text{ dm.}^3
 \end{array}$$

Fin. — (*Pasan á la pizarra cinco niños*). Escriban : Km.³; Dm.³; dm.³; cm.³; 428 mms.³ Reduzcan á mm.³ 7 dms. cbs.

M. — Explique, María.

A. — 7 por 1000, 7000 cms. cbs.; 7000 por 1000, 7000000 mms. cbs.

M. — Borren y vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cinco*). Reduzcan á dms.³ 825 ms. cbs.; 2 ms.³ á

mms.³; ¿Cuál es el volumen de un tanque en decímetros cúbicos, que mide 1 metro de alto, 2 de largo y 2 de ancho?

A.— 4000 dms. cbs.

M.— Explique.

A.— Desde que conocemos las tres dimensiones, multiplicándolas, dan el volumen del cuerpo, 4 ms. cbs. Como cada m. cb. equivale, etc.

M.— ¿Cuál es el volumen de esta regla cuyo largo es de 2 dms., el ancho de 6 cms. y el espesor de 6 mms.?

Als.— (*Escriben $200 \text{ mms.} \times 60 \text{ mms.} \times 6 \text{ mms.} = 72000 \text{ mms.}^3$ y explican el por qué; el maestro no se cansará de exigir la escritura de las denominaciones; su lucha, en este caso, debe ser constante, pues los alumnos se habitúan con dificultad á esta exigencia de las medidas métricas.*)

Deberes.— Los ejercicios que acerca de este tema indica el libro.

INDICACIONES

El objeto de la *Lección 22ª*, es acostumbrar á los alumnos á escribir los submúltiplos referidos al m.³; no 25 cms.³ sino 0.000025 m.³; se procede como en la *Lección 4ª*, medidas de superficie; haciendo notar que sólo 1000 unidades hacen una del orden inmediato superior; que, de consiguiente, cada denominación necesita tres lugares; que hay centenas, decenas y unidades del dm.³, etc.; que los dms. cbs. ocupan los tres primeros lugares á la derecha de la coma; los cms.³ los tres siguientes, etc. Luego, muchos ejercicios de reconocimiento y aplicación, para que la memoria se organice enérgicamente y evite el funesto caso de confundir, por una falsa asociación verbal, los décimos con los decímetros, los centésimos con los centímetros, de modo que en 0.4256 ms.³ suele verse 4256 dms.³ ó 425 dms.³ y 6 cms.³

Las *Lecciones 11ª y 12ª*, mes de Julio, tienen por objeto ejercitar la reducción, particularmente, de los Kms. cbs. á ms.³; de cualquier múltiplo á ms.³ y dms.³, operación tan importante, si se considera que las relaciones del dm.³ con el peso y la capacidad, son el origen de la más bella y variada colección de problemas en las aplicaciones comunes de la vida.

Harán las reducciones según este modelo :

Reducir 3 Kms.³, 8 Dm.³ y 7 m.³ á ms.³

Se dispondrá, así :

$$\begin{array}{rcllcl}
 \text{Kms.}^3 & \text{Hms.}^3 & \text{Dms.}^3 & \text{m.}^3 & \text{á} & \text{ms.}^3 \\
 3 & \times & 1000 & \times & 1000 & = 3000000000 > \\
 & & & 8 & \times & 1000 = 8000 > \\
 \hline
 3 \text{ Kms.}^3 & & & 8 \text{ Dms.}^3 & = & 3000008000 \text{ ms.}^3
 \end{array}$$

Otro :

Reducir 9 Hm.³ 3 ms.³ á dms.³

Disposición :

$$\begin{array}{rcllcl}
 \text{Hm.}^3 & \text{Dms.}^3 & \text{ms.}^3 & \text{dms.}^3 & \text{á} & \text{dms.}^3 \\
 9 & \times & 1000 & \times & 1000 & = 9000000000 > \\
 & & & 3 & \times & 1000 = 3000 > \\
 \hline
 9 \text{ Hms.}^3 & & & 3 \text{ ms.}^3 & = & 9000003000 >
 \end{array}$$

Otro :

Reducir 105 Hms. cbs. á dm.³

Disposición :

$$\begin{array}{rcllcl}
 \text{Hm.}^3 & \text{Dm.}^3 & \text{m.}^3 & \text{dm.}^3 & \text{á} & \text{dm.}^3 \\
 105 & \times & 1000 & \times & 1000 & = \text{etc.} >
 \end{array}$$

Otro :

Reducir 8 Dms.³ 95 ms.³ 68 dms.³ á ms.³

Disposición:

Dms. ³	ms. ³		dms. ³	=	á	dms. ³
8 ×	1000	×	1000	=	8000000	»
	95	×	1000	=	95000	»
			68	=	68	»
8 Dms. ³	95 ms. ³		68 dms. ³	=	8095068	dms. ³
8095068	dms. ³	=	$\frac{8095068}{1000}$	ms. ³	=	8095,068 ms. ³

LECCIÓN 24^a (Julio)

Tema.—División de denominados métricos: I. Dado el volumen a , forma incompleja ó compleja, y una dimensión, hallar el producto de las otras dos; ó dadas dos, hallar la tercera. II. Dado el valor b de un volumen a hallar el de una unidad. III. Repartir un volumen a en c partes.

Desarrollo. — *Principio.* — El producto de tres dimensiones, qué da de los cuerpos? ¿La superficie es el producto de cuántas dimensiones? Cero ms.³ y 48 mms.³ ¿cuántas cifras decimales tiene? ¿Los millo-nésimos de m.³ qué denominación tienen? Enuncien un múltiplo de 3, de 8, de 12. ¿Dm.³ multiplicado por 1000 da qué? ¿Para hallar una superficie qué se mide? ¿10 ms. lineales por 10 ms. lineales, qué dan? ¿Cómo se escriben 893 Dms.³? ¿Las denominaciones de los múltiplos con qué clase de letras comienzan? ¿Qué se hace para reducir una semana á minutos? ¿Cómo se calcula á simple vista la superficie de una cara? ¿El volumen de un cajón? ¿Si se desea saber el precio de 750 Hls. de vino y se tiene el precio de un litro, qué debe hacerse ante todo? Observen. ¿Qué he escrito en la pizarra?

A.—80 Kms.²

M.—(*El maestro escribe* 80 Km.² × 100).

Ahora ¿qué denominación corresponde?

A.—Hms.²

M.—¿Y ahora? (*multiplicando por 1000*).

A.—De ms. cbs.

M.—Por qué número es divisible 5940? (*escribiéndolo*).

Medio.—M.—El volumen de esta caja es de 4 dms. cbs. y 92 cms. cbs.; el ancho es de 22 cms. y el alto de 6 cms. ¿Cuál es el largo?

Como el volumen se expresa con dos denominaciones, lo reducimos primero, á una sola denominación, á cms. cbs.

$$\begin{array}{rcl} 4 \text{ dms.}^3 \times 1000 & = & 4000 \text{ cms.}^3 \\ \quad \quad \quad 92 & = & \quad \quad 92 \text{ »} \\ \hline 4 \text{ dms.}^3 \text{ y } 92 \text{ cms.}^3 & = & 4092 \text{ cms.}^3 \end{array}$$

El problema es, ahora, ¿cuál será el largo de esta caja cuyo volumen es de 4092 cms.³, cuyo ancho de 22 cms. y cuyo alto de 6 cms.?

Sabemos que ancho $\times$ alto $\times$ largo da el volumen; será, pues, ancho $\times$ alto $\times$ largo cms.³ = 4092 cms.³ (*escribiéndolo*). Ancho $\times$ alto, es igual á 22 cms. por 6 cms.; entonces, 22 cms. $\times$ 6 cms. $\times$ largo cms. = 4092 cms.³ Ahora, el problema es: 22 cms. $\times$ 6 cms. multiplicados por qué número dan 4092 cms.³ ¿8 multiplicado por qué número daba 40? (*escribiendo* 8 $\times$ = 40).

A.—Hay que multiplicarlo por cinco.

M.—¿Cómo hallan Vds. 5?

A.—Dividiendo 40 entre 8.

M.—Pues, ¿cómo hallaremos el número que multiplicando á 22 $\times$ 6 ó 132 dé 4092?

A.—Dividiendo 4092 entre 132.

M.—(*Hace la división y obtiene 31*). Luego, ¿en vez de qué palabra colocaremos 31?

A.—En vez de la palabra largo.

M.—(*Escribe* 22 cms. $\times$ 6 cms. $\times$ 31 cms. = 4092 cms.³). Luego, el largo es de 31 cms.

Hemos hallado el largo de la caja. En efecto (*midiéndola*) mide 31 cms. *En el pizarrón aparecen las igualdades, en este orden:*

$$\begin{aligned}
 \text{Ancho} \times \text{alto} \times \text{largo} &= 4092 \text{ cms.}^3 \\
 22 \text{ cms.} \times 6 \text{ cms.} \times \text{largo cms.} &= 4092 \text{ cms.}^3 \\
 4092 \text{ cms.}^3 \mid \text{ancho} \times \text{alto} &= \text{largo.} \\
 4092 \text{ cms.}^3 \mid 22 \text{ cms.} \times 6 \text{ cms.} &= \text{largo.} \\
 4092 \text{ cms.}^3 \mid 132 &= \text{largo.} \\
 22 \text{ cms.} \times 6 \text{ cms.} \times 31 \text{ cms.} &= 4092 \text{ cms.}^3
 \end{aligned}$$

M.—De consiguiente, en poquísimas palabras: cuando se da el volumen y dos dimensiones, para hallar la tercera, *se divide*; se divide el volumen por el producto de las dos dimensiones, reduciendo, antes, todo á una misma denominación.

Veamos otro: El volumen de este vidrio es 462 cms. cbs.; el largo es 55 cms. y el grueso 2 mms. ¿Cuál es el ancho?

$$\text{largo} \times \text{ancho} \times \text{grueso} = 462 \text{ cms.}^3$$

Reduzcamos todo á mms., primero:

$$\begin{array}{rcl}
 462 \text{ cms.}^3 & = & 462\,000 \text{ mms.}^3 \\
 55 \text{ cms.} & = & 550 \text{ mms.} \\
 2 \text{ mms.} & = & 2 \text{ »}
 \end{array}$$

Luego:

$$550 \text{ mms.} \times 2 \text{ mms.} \times \text{ancho} = 462\,000 \text{ mms.}^3 \text{ ancho es igual á}$$

$$\text{ancho} = 462\,000 \mid \frac{550 \times 2 \text{ ó } 1100}{42 \text{ mms.}}$$

Saquen las pizarras. ¿Cuál será el ancho de una pieza cuyo volumen es 150 ms.³; el largo 6 ms. y el alto 5 ms?

Als.—(*Resuelven el problema y uno lo explica*).

M.—¿Cuál será el alto de este paralelepípedo, cuyo volumen es 240 cms. cbs., el ancho 6 cms. y el largo 8 cms?

Als.—(*Resuelven el problema y uno explica*).

M.—El volumen de un objeto es de 2 ms. cbs. y 85 cms. cbs.; el ancho por el largo 50 cms.² ¿Qué haremos para hallar el alto?

A.—Dividir el volumen entre 50 cms.²

M.—Pero el volumen se expresa con dos denominaciones.

A.—Hay que reducir los ms. cbs. á dms. cbs. y, luego, dividir los dms. cbs. por el producto 50.

M.—Muy bien. Ahora, atiendan otro problema. La Municipalidad compró en el Tandil 20 ms. cbs. de granito por 3000 \$. ¿Cuánto le costó cada adoquín de un dm. cb.?

A.—20 ms. cbs. equivalen á 20000 dms. cbs.

Si 20000 dms. cbs. costaron 3000 pesos, un dm. cb. costará 20000 veces menos ó $\$ 3000 \div 20000 = 3 \div 20 = 0.15 \$$.

M.—En otra ocasión, vuelve á comprar 25 m.³ y 320 dms.³ de granito por 5064 \$. ¿Cuánto le costó el m.³?

$$\begin{array}{rcl} 25 \text{ ms. cbs} & = & 25000 \text{ dms. cbs.} \\ 320 \text{ dms. cbs.} & = & 320 \text{ } \rightarrow \text{ } \rightarrow \\ \hline 25 \text{ ms.}^3 \text{ y } 320 \text{ dm.}^3 & = & 25320 \text{ dms.}^3 \end{array}$$

Como el precio es de ms. cbs. y no de dms. cbs., reduzco 25320 dms.³ á ms. cbs. dividiendo por 1000. Son, pues, 25, 320 ms. cbs.

Si 25.320 ms. cbs. valen 5064 \$, un m.³ valdrá 25.320 veces menos, ó las veces que 25.320 quepa en 5064, para lo cual divido 5064 entre 25.320 (*hace la división*).

¿Cuántos vagones emplearía el ferrocarril del Oeste para conducir la tierra necesaria á un terraplén de 2 Kms. de largo por 6 ms. de ancho y 3 ms. de alto, sabiendo que cada vagón carga 8 ms. cbs.?

Hallamos el volumen del terraplén. Desde que nos dan las tres dimensiones, será: 2 Kms. $\times$ 6 ms. $\times$ 3 ms.; no podemos multiplicar Kms. por ms.; los reducimos á ms., 2000 ms. Ahora, la operación es 2000 ms. $\times$ 6 ms. $\times$ 3 ms. = 36000 ms. cbs. ¿Cuántos vagones se necesitan para acarrear 36000 ms. cbs. de tierra, volumen del terraplén, si cada uno carga 8 ms. cbs.? Se necesitarán tantos vagones como veces 8 ms. cbs. quepan en 36000 ms. cbs.

Luego, hay que dividir 36000 entre 8, da 4500. Se necesitan 4500 vagones. Pero la empresa no emplea sino un tren de carga de 50 vagones. ¿Cuántos viajes haría para acarrear toda la tierra?

A.—Las veces que 50 quepa en 4500; 90 viajes.

M.—Porque 90 viajes con 50 vagones es lo mismo que un viaje con 4500 vagones.

Fin.—Tomen las pizarras. El volumen de esta baldosa es de 720 cms. cbs.; el largo de 12 cms. y el ancho de 12 cms. ¿cuál es el espesor?

A.—(*Sacan el problema*).

M.—El volumen de una tabla es de 120 dms. cbs.; el largo 4 ms. y el ancho 6 dms., ¿cuál es el espesor?

Als.—(*Resuelven y explican el problema*).

M.—El gobierno de la provincia dispone que se repartan 3 Dm.³ y 125 ms. cbs. de granito entre 10 municipios para que empiedren las calles, ¿cuánta piedra toca á cada municipio?

A.—(*Resuelven el problema*).

M.—Para cavar 25 Dms. cbs. y 800 ms cbs. de tierra, el constructor del puerto de Buenos Aires, gastó 77400 pesos. ¿A cuánto pagó cada m.³?

Als.—(*Resuelven el problema y lo explican*).

Deberes.—Problemas del libro.

LECCIÓN 13ª (Agosto).

Tema.—Enseñanza de los quebrados: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

Desarrollo.—A.—M.—¿Qué tengo en mi mano?

A.—Una hoja de papel.

M.—¿Ahora?

A.—Una barra de jabón.

M.—¿Ahora?

A.—Una manzana.

M.—Representaríamos cada uno de estos objetos, ¿con qué cifra?

A.—Con la cifra 1.

M.—Este número es?

A.—Uno ó la unidad.

M.—Está bien. Observen qué voy á hacer. (*Toma la hoja de papel, la parte en dos y superpone las partes*).
¿Qué hice?

A.—Vd. dividió el papel en dos partes iguales.

M.—Cada parte ¿qué es de la hoja de papel?

A.—Es la mitad.

M.—*Una cosa dividida* en dos partes iguales,
¿qué da?

A.—Da dos mitades.

M.—¿Cómo indicamos 1 dividido entre 2?

A.—1 : 2.

M.—¿No recuerdan otra manera de indicar esta división? Pues, se indica también de esta manera $\frac{1}{2}$, la rayita horizontal y cortita, muy cortita, que cubra apenas el número, así; quiere decir 1 dividido entre 2 y se lee también 1 sobre 2, porque el 1 está sobre el 2 y se lee también, un medio (*escribe*). Vds. lean cualquiera de las tres maneras. ¿Uno sobre dos, quiere decir?

A.—Que una cosa la dividimos en dos partes.

M.—Y esto (*escribe* $\frac{1}{3}$) ¿qué querrá decir? ¿Y esto (*escribe* $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$)?

Muy bien. ¿Luego, el número que está debajo de la raya es qué, de esta división indicada?

B.—A.—Es el divisor.

M.—Eso es; pero también se llama *denominador*. (*Escribe divisor ó denominador*), y á un número de esta forma, *fracción ó quebrado*, porque expresa partes de un objeto y para tener esa parte hay que quebrarlo.

Pero Vds. notarán otro número arriba.

Indica cuántas se toman de las partes en que se divide el objeto. De modo que si digo: he tomado tantas partes del papel como las que indica este número, $\frac{2}{3}$, quiere decir que he tomado estas dos mitades.

Dos mitades hacen *una* hoja de papel ¿es verdad? Y bien, dos dividido entre dos (*señala en* $\frac{2}{2}$) es 1, la unidad.

M.—Si tomara tres mitades ¿cómo escribiríamos?

A.—Tres sobre dos. (*se escribe*).

M.—Y $\frac{7}{2}$ (*siete medios*) ¿qué significa?

A.—Que hemos tomado 7 partes de los objetos divididos en 2.

C.—*M.*—¿Qué tengo?

A.—Seis manzanas.

M.—¿Por qué cifra las representamos?

A.—Por la cifra 6. (*El maestro escribe* $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$).

M.—¿Cuántas mitades tiene cada manzana? ¿Las seis manzanas?

A.—Doce mitades.

M.—¿Con qué número representamos esta mitad? (*muestra media manzana*).

A.—Con $\frac{1}{2}$ (*un medio ó uno sobre dos*).

M.—¿Ahora, tomo éstas. ¿Qué número indicará que tomé las partes que tengo en la mano?

A.—Tres medios ó tres sobre dos.

M.—¿Qué número indica haber tomado este otro número de partes? (*el maestro escribe cada fracción*).

A.—Siete medios.

M.—Vds. ven, pues, que el divisor ó el denominador indica las partes en que se ha dividido una manzana, todas, en dos partes; y el número de arriba, expresa el de mitades de manzana que tomo; si tomo una, escribo 1; si tomo tres, escribo 3; si tomo siete, escribo 7. La cantidad de arriba es el *dividendo*, pero se llama *numerador*. El quebrado es, pues, $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$ (*lo expresa así en la pizarra*).

D.—(*Pasan seis alumnos á la pizarra*). Escriban un quebrado; otro quebrado. Seis medios, 8 medios; 9 sobre 3; 25 sobre 8; 9 sobre 825.

Vuelvan á sus asientos.

M.—Todos. Lean lo que escribo: $\frac{7}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{12}{7}$. ¿Qué señalo?

A.—El numerador; el denominador.

M.—¿Qué indica este denominador?

A.—Que se ha dividido un objeto en nueve partes.

M.—¿Qué indica este numerador?

A.—Que del objeto dividido en 5 partes se han tomado 4.

M.—(*Pasan seis alumnos al pizarrón*).

Escriban una fracción que exprese las partes que voy á tomar. (*Toma 7 medias manzanas; 4 medias manzanas; una manzana y tres mitades*).

Tomen de sobre la mesa, tantos limones como indique el quebrado escrito en la tarjeta. (*muestra $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, etc.*) Tomen dos medios. ¿Cuántos han tomado?

A.—Dos medios limones.

M.—¿Y hacen qué?

A.—Hacen un limón.

M.—Luego, cuando un quebrado tiene en el numerador y en el denominador el mismo número, expresa qué?

A.—El objeto entero.

M.—¿Cuál, de estas fracciones, expresa más número de partes, ó es mayor? ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$).

A.—Seis medios.

M.—Voy á tomar $\frac{4}{5}$ de manzana. ¿Está bién?

A.—Sí, señor.

M.—Como ven Vds., son tres manzanas enteras que se representan por 3. Luego, hay fracciones menores que 1, iguales á 1 y mayores que 1; puesto que $\frac{2}{3}$ es igual á una manzana ó 1; $\frac{1}{2}$ á media manzana ó la mitad de 1 y $\frac{4}{3}$ á 3 manzanas ó 3.

Piensen una fracción mayor que 1.

Als.— $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{12}{8}$.

M.—Si; toda fracción cuyo numerador es mayor que el denominador, es mayor que uno.

INDICACIONES

La *Lección 14^a* se comenzará de la misma manera que la 13^a, dividiendo un objeto en 3 partes; tomando una, dos, tres y escribiendo las fracciones que las representan. Luego, varios objetos de la misma especie, cada uno, dividido en tres partes iguales y represen-

tando fraccionariamente, las que se toman. Luego, se da la denominación *tercios*. El mismo procedimiento para los *cuartos*, etc. En fin, ejercicios de recapitulación.

La *Lección 15ª*, se comenzará, objetivando con una barra de jabón ú objeto fácil de dividir, haciendo ver que las cosas pueden dividirse en cuantas *partes iguales* se quiera; que, de consiguiente, el denominador puede ser cualquier número; y cualquier número el numerador, puesto que de esas partes pueden tomarse las que uno desea.

No se permitirá el uso de otra raya que no sea la horizontal y se exigirá ni más ni menos de la longitud necesaria para cubrir el número. Es el primer defecto que en la escritura de fracciones se notará en el niño y que con un poco de constancia corregirá el maestro, el primer mes.

LECCIÓN 16ª

Tema. — Fracciones iguales á 1.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿8 ms.³ á cuántos dms. cbs. equivalen? ¿El largo por el ancho qué da? ¿Qué he escrito (0.0034 ms.²)? ¿Y ahora (1.00749)? ¿Y ahora (1.000004293 ms.³)? ¿ $8 \times 9 \times \text{ancho} = 720$; á qué es igual, ancho? ¿Un número divisible por 3? (*Mostrando cartoncitos*) ¿Qué fracciones son?

Als. — $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{128}{35}$; $\frac{3}{10}$; 0.85.

M. — ¿8 dividido por 8? ¿16 dividido por 16? ¿1023 entre 1023? (*Pasan seis alumnos al pizarrón*). Trazen una superficie de 8 dms. cds. Una línea de 5 dms. Reduzcan 9 Hls. á litros. Escriban: $\frac{6}{2}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{12}$. Vuelvan á sus asientos.

Y toda cantidad separada por esta raya horizontal, de otra, es una fracción. (*El maestro escribe con la mayor rapidez, fracciones en cuyo numerador y denominador hay otras fracciones decimales, expresiones de varios términos, productos, letras, etc., etc., á fin*

de dar al término, el significado general correspondiente).

Medio. — ¿Esta barra de jabón en cuántas partes está dividida?

A. — En dos partes y cada una, se representa por $\frac{1}{2}$.

M. — Tomo dos; ¿por qué fracción la represento?

A. — Por $\frac{2}{2}$ (*escribe el maestro*).

M. — Pero, estas dos partes, juntas, ¿hacen?

A. — Hacen el jabón.

M. — Que se representa ¿por qué número?

A. — Por el número 1.

M. — ¿Luego $\frac{2}{2}$ es igual á?

A. — $\frac{2}{2}$ es igual á 1 (*se escribe*).

M. — ¿Ahora, esta misma barra, está dividida?

A. — En tres partes iguales y cada una se representa por $\frac{1}{3}$.

M. — Y las tres, ¿por qué fracción?

A. — Por $\frac{3}{3}$.

M. — ¿Pero las tres hacen?

A. — Las tres hacen la barra de jabón que se representa por 1.

M. — Luego $\frac{3}{3} = 1$. (*Escribe*). ¿Cómo son los numeradores y denominadores en estas dos fracciones?

A. — Son iguales.

M. — Luego $\frac{4}{4}$, que tiene 4 arriba y abajo ¿á qué será igual?

A. — A 1.

M. — (*Escribe*). ¿Y $\frac{5}{5}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{7}{7}$; $\frac{8}{8}$?

En efecto, no puede ser de otra manera, puesto que el quebrado es una división, el numerador dividido por el denominador; en estas fracciones, el cociente es igual á 1. Pero, desde que todas estas fracciones son iguales á 1 ¿Cómo serán entre sí?

A. — Serán iguales entre sí: $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8}$ (*el maestro escribe*).

M. — Muy bien. De aquí que todas las fracciones que tengan numerador y denominador iguales, valgan lo mismo.

¿Dénme fracciones que tengan el mismo valor que $\frac{5}{5}$?

Als. — $\frac{6}{6}$; $\frac{7}{7}$, etc.

Fin. — *M.* — Cuando tomamos tantas partes del objeto como las partes en que está dividido ¿qué tomamos del objeto?

A. — Tomamos todo el objeto.

M. — Toda fracción cuyos términos sean iguales ¿á qué es igual?

A. — Es igual á uno.

M. — (*Pasan cinco alumnos*). Escriban cinco fracciones del mismo valor que $\frac{5}{5}$.

Dos del mismo valor que uno. Dos que valgan más que uno; dos que valgan menos. Vuelvan á sus asientos.

Esta fracción $\frac{2}{5}$ de naranja ¿qué significa? ¿Esta otra: $\frac{2}{5}$ de 100 pesos? ¿Esta otra: $\frac{2}{5}$ de la distancia entre Mercedes y Agote? ¿Esta otra: $\frac{2}{5}$ de esta línea? (*trazándola*). ¿Esta otra: $\frac{2}{5}$ de una bolsa de maíz? ¿Esta otra: $\frac{2}{5}$ de un billete de lotería? (*Pasan tres alumnos; á cada uno reparte un metro dividido en decímetros y centímetros*). Indiquen 3 décimas partes del metro. 15 centésimas partes sobre 10. (*Les reparte tres varitas de diferente longitud, divididas, con rayas negras, en 8 partes cada una*). Indiquen $\frac{7}{8}$ de la varita; $\frac{3}{8}$; $\frac{10}{8}$.

A. — No es posible porque, de la varita, solo tenemos $\frac{8}{8}$.

INDICACIONES

I. Por ser más exacto, conviene decir fracciones del mismo valor que $\frac{5}{5}$ y no iguales á $\frac{5}{5}$.

II. Téngase en cuenta que todo conocimiento penetra por la vista y por el oído. De modo que el maestro, en sus ejemplos ó explicaciones, hará constantemente uso de la tiza, lo que en nuestros desarrollos, se subentiende.

LECCIÓN 21ª

Tema. — Términos de una expresión.

Desarrollo. — *Principio.* — (*Ejercicios de síntesis y recapitulación en la forma acostumbrada*).

Medio. — *M.* — (*El maestro ha escrito en el pizarrón expresiones como estas: $8 + 9 - 5$; $7 - \frac{2}{3} + 0.72513$; $1 + 8 \times 0.0003 - \frac{325}{720} + 6 \times 9 \times 5$; $a + b + \frac{1}{2}$, etc.; las hace leer una á una por diferentes alumnos*). Toda cantidad separada de otra por el signo $+$ ó $-$, se llama término; de modo que la primera expresión tiene uno, dos, tres términos (*señalandolos*); la segunda tres términos; la tercera cuatro términos, etc. Esta expresión: $7 \times 8 \times 0.45 \times \frac{1}{2}$, es un término.

Piensen expresiones de dos términos.

Als. — (*Pregunta á tres, que dan expresiones de dos términos*).

M. — Expresiones de tres términos.

Expresiones de un término.

Factores, por el contrario, son aquellas cantidades separadas por el signo $\times$, dentro del mismo término. Así: $8 \times 7 \times 3$, (*escribe*) es un solo término compuesto de tres factores; 98 es un solo término con un solo factor; $98 : 0.85 \times 4 \times \frac{1}{2}$ es un solo término de tres factores. Piensen todos, una expresión de dos términos....

Descompongamos 30 en dos términos (*escribe*): $25 + 5$; $21 + 9$; $36 - 6$; $39 - 9$. En tres términos: $5 + 15 + 10$; $48 - 8 - 10$, etc. Descompongamos á 30 en dos factores: 5×6 ; 10×3 ; 15×2 , en tres factores: $3 \times 5 \times 2$. Descompongamos en términos á 12:

Als. — $11 + 1$; $5 + 7$; $14 - 2$; $2 + 10$, etc.

M. — Descompongan á 12 en dos factores.

Als. — 3×4 ; 2×6 .

Fin. — (*Pasan cuatro alumnos al pizarrón*).

M. — Escriban una expresión de tres términos. Otra

de cuatro factores. Otra de dos términos. Descompongan á 85 en cuatro términos. A 24 en tres factores. Vuelvan á sus asientos.

(*Pasan otros cuatro*). Escriban una expresión de tres términos, en que dos sean fracciones y uno decimal. Descompongan á 210 en sus factores simples. Descompongan á 1 en cinco términos. (*Si los alumnos no supieran hacerlo, da un ejemplo: $7 + 2 - 4 - 11 + 7$*).

Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cuatro; toma un papel y lo parte en dos, de cualquier manera*). Representen con un quebrado, esta parte.

Als. — (*Algunos escriben $\frac{1}{2}$*).

M. — ¿Es un medio del papel esta parte?

A. — No es un medio.

M. — Luego, no deben Vds. representarla con $\frac{1}{2}$ puesto que no es igual á la otra. Cuando un objeto se divide en partes desiguales, sus partes no se pueden representar. Escriban una expresión de un término y tres factores; de cuatro términos. Descompongan á 5 en tres términos. Vuelvan á sus asientos.

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios.

INDICACIONES

Esta distinción, es la base de la simplificación, que tanta importancia tiene en las operaciones fraccionarias. Quien haya enseñado Aritmética y Álgebra, habrá notado cuanto cuesta conseguir que los alumnos no confundan, en las cancelaciones, término con factor. Son comunes, casos que, como en $\frac{8 + 15}{8}$ cancela los dos 8 y deja 15; que, como en $\frac{8 \times 9 \times 8 \times 7}{8}$, cancela los tres 8.

LECCIÓN 3ª (Septiembre)

Tema. — Si se multiplican y dividen ambos términos de un quebrado por un mismo número, el valor de la fracción no cambia.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — 12 multiplicado por 1 ¿cuánto es? ¿6 multiplicado por 1? ¿17 por 1? ¿Toda cantidad multiplicada por 1?

A. — Es igual á la misma cantidad.

M. — ¿El valor de la cantidad varía?

A. — No, señor, no varía, es siempre el mismo.

M. — $\frac{1}{2}$ multiplicado por 1 ¿cuánto es? Al valor de $\frac{3}{12}$ multiplicado por 1 qué le sucede?

A. — No varía, es $\frac{3}{12}$.

M. — ¿Cualquier quebrado multiplicado por 1?

A. — Conserva su valor, es el mismo siempre.

M. — Muy bien. Recuerden bien el hecho, que pronto volveremos á él. Observen esta vara. ¿En cuántas partes está dividida y cuántas he tomado? (*vara de secciones á tornillo*).

A. — La ha dividido en tres partes iguales y ha tomado Vd. dos, que se representan por dos tercios.

M. — (*Escribe $\frac{2}{3}$*). Vuelvo á juntar las partes de la vara; pero observen hasta donde llegan los dos tercios. El color de la señal, lo indica. Observen nuevamente. ¿En cuántas partes iguales está, ahora, dividida la vara?

A. — En seis partes iguales.

M. — Muy bien. ¿Y cuántas he tomado en esta mano?

A. — Ha tomado Vd cuatro, que se representan por cuatro sextos. (*escribe el maestro $\frac{4}{6}$ cerca de $\frac{2}{3}$*).

M. — Ahora, observen hasta donde llegan $\frac{4}{6}$.

A. — Hasta donde llegaban los $\frac{2}{3}$.

M. — Luego, los $\frac{2}{3}$ de la vara y los $\frac{4}{6}$ de la vara ¿cómo son?

A. — Son iguales.

M. — Luego $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. ¿No es así? puesto que representan la misma porción de la vara.

Medio. — **M.** — Ahora, presten mucha atención, $\frac{4}{3}$, no es sino $\frac{2}{3}$ cuyo numerador y cuyo denominador se han multiplicado por el número 2. $\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$.

De aquí, deducimos que cuando multiplicamos los dos términos de una fracción por un mismo número, el valor de la fracción no altera. Así, pues, aplicando este gran principio, hay miles de fracciones equivalentes ó del mismo valor que otra. Denme Vds. una.

A. — $\frac{3}{5}$.

M. — Pues, $\frac{6}{10}$ — 3 por 2 y 5 por 2 (*señalando*) — vale como $\frac{3}{5}$; $\frac{9}{15}$ — 3 por 4 y 5 por 4 — vale como $\frac{3}{5}$, etc. Denme Vds. fracciones del mismo valor que $\frac{3}{5}$.

Als. — $\frac{2}{4}$; $\frac{8}{16}$; $\frac{5}{10}$, etc.

M. — Del mismo valor que $\frac{3}{5}$

Als. — $\frac{1}{3}$, etc.

M. — Si multiplicamos el numerador y denominador de una fracción por 105 ¿qué resulta?

A. — Que el valor de la fracción no varía.

M. — ¿Si multiplicásemos solamente el numerador?

A. — Variaría.

M. — Ahora, noten Vds. que $\frac{4}{3}$, que es igual á $\frac{4}{3}$, resulta de dividir 4 entre 2 y 6 entre 2, es decir, numerador y denominador de la fracción por un mismo número. De aquí, deducimos este otro gran principio: que dividiendo numerador y denominador de una fracción, cuando son divisibles, por un mismo número, la fracción conserva el mismo valor. Así: $\frac{8}{16}$ es igual á $\frac{8 : 2}{16 : 2} = \frac{4}{8}$; $\frac{8 : 4}{16 : 4} = \frac{2}{4}$ · $\frac{12}{15}$ es igual á $\frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}$.

$\frac{7}{8}$ es igual á $\frac{7}{8}$ y no á otra fracción de términos menores, porque 7 y 8 no tienen un divisor común ó sea un número que divida los dos á la vez. Esto siempre sucede cuando el numerador y denominador son primos. Denme Vds. fracciones del mismo valor que $\frac{7}{8}$ dividiendo sus términos.

M. — Del mismo valor que $\frac{14}{16}$.

A. — $\frac{2}{3}$.

M. — ¿ Que $\frac{3}{8}$? ¿ que $\frac{5}{8}$? ¿ que $\frac{6}{8}$? etc.

Fin. — En verdad $\frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ es multiplicar, $\frac{2}{3}$ por $\frac{2}{3}$; $\frac{4 \times 5}{7 \times 5}$ es multiplicar $\frac{4}{7}$ por $\frac{5}{5}$. Como $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{5}$ son fracciones iguales á 1, multiplicamos $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ por 1 y toda cantidad multiplicada por 1 hemos dicho?

A. — Que es igual á sí misma, que conserva su valor.

M. — (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). Escriban fracciones iguales á $\frac{2}{3}$, por multiplicación. Fracciones iguales á $\frac{3}{4}$, por la división. Fracciones á $\frac{1}{5}$ por la división ó por la multiplicación. Vuelvan á sus asientos.

(*Pasan otros cinco alumnos*). Escriban fracciones del mismo valor que $\frac{5}{10}$, pero más simples, es decir, que los números del numerador y denominador sean más chicos. Fracciones del mismo valor que $\frac{6}{8}$, con números más grandes.

Deberes. — Los indicados.

INDICACIONES

Esta lección y la repetición de sus ejercicios, es importante, porque prepara el terreno para reducir las fracciones á un común denominador mediante un procedimiento fácil y expresado, generalmente, en el M. C. M.

LECCIÓN 9ª

Tema. -- Reducción de dos quebrados á un común denominador.

Desarrollo. — *Principio.* — (*Pasan seis alumnos al pizarrón*). Simplifiquen: $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{10}$.

Escriban quebrados del mismo valor que $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{7}$. Un quebrado mayor que $\frac{1}{7}$.

Vuelvan á sus asientos.

M. — Digan un divisor ó factor de 56. Un número

que divida exactamente á 6 y 3; á 15 y 30; á 9 y 18; á 5 y 20; á 35 y 85; á 162 y 18.

Enuncien una fracción igual á 1; una fracción del mismo valor que $\frac{1}{2}$.

Medio. — *M.* — Lean los denominadores de las fracciones que ven Vds. escritas en el pizarrón.

A. — 3, 2, 5, 4, 9.

M. — Lean Vds. los denominadores de las fracciones escritas en esta otra parte del pizarrón ($\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{9}$).

Als. — 5, 5, 5, 5, 5.

M. — ¿Cómo son, en un caso, y cómo en otro?

A. — En un caso son diferentes y en otro iguales.

M. — En este caso, tienen *denominador común* (*escribe*) en el otro, diferente. Ahora, quiero que sepan Vds. que todas las fracciones de denominador diferente, pueden transformarse en fracciones de *denominador común sin cambiar su valor*.

¿Cómo son los denominadores de estas dos fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$?

A. — Son desiguales.

M. — Pero $\frac{1}{2}$ es igual á $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$. ¿No es verdad? (*escribe*).

A. — Sí, señor.

M. — Y $\frac{1}{3}$ es igual á $\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$. ¿No es verdad?

A. — Sí, señor.

M. — $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$, tienen un denominador común. ¿No es verdad?

A. — Sí, señor.

M. — (*Borra*). $\frac{1}{2}$ es igual á $\frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$. ¿No es verdad?

A. — Sí, señor.

M. — Y $\frac{1}{3}$ es igual á $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$. ¿No es verdad?

A. — Sí, señor.

M. — $\frac{6}{12}$ y $\frac{4}{12}$ tienen un denominador común. (*Borra*). $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 9}{2 \times 9} = \frac{9}{18}$; $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{6}{18}$. $\frac{9}{18}$ y $\frac{6}{18}$ tienen un denominador común. De consiguiente, no es tarea difícil hallar fracciones de un mismo deno-

minador equivalentes á otras de diferente denominador. Reduzcamos $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{2}$ á un denominador común. $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20}$; $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 10}{2 \times 10} = \frac{30}{20}$; $\frac{12}{20}$ y $\frac{30}{20}$ tienen el mismo denominador. Denme Vds. dos fracciones de denominador diferente; yo hallaré dos equivalentes con el mismo denominador. (*Así lo hace*).

M. — Pero podría costar trabajo encontrar estos números; no cualquiera, al multiplicar el numerador y denominador de una fracción, dará denominadores comunes. $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4}$; y $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$; $\frac{6}{4}$ y $\frac{9}{15}$ son fracciones de denominadores diferentes. Para que esto no suceda, observen Vds. lo que primero hago. (*Borra cuanto hubiere escrito en la pizarra*). Sean $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ (*escribe*) que quiero reducir á un común denominador. Pienso un número divisible á la vez por 4 y por 6 (*señalando los denominadores*). 12 es divisible por 4 y 6; 24; 36; 48. ¿Cuál tomaré? Conviene el menor. Tomo, pues, 12. Doce dividido entre 4 es 3; entonces, $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$; doce dividido entre 6 (*señalando siempre*) es 2; entonces, 5 por 2, 10; 6 por 2, 12, $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$. Las dos fracciones tienen el mismo denominador. ¿Saben Vds. hacerlo? Denme Vds. dos quebrados de denominador diferente.

A. — $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{5}$ (*escribe*).

M. — 35 es divisible por 7 y por 5; 70 es divisible por 7 y por 5. Tomo 35; dividido entre 7 da 5; 3 por 5, 15; 7 por 5, 35; $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$. Aquí: 35 dividido entre 5 es 7; 4 por 7, 28; 5 por 7, 35; $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$. Las dos fracciones de un mismo denominador, equivalentes á $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{5}$ son $\frac{15}{35}$ y $\frac{28}{35}$.

Otro ejemplo, el último:

$$\frac{3}{9} \text{ y } \frac{6}{18}.$$

El menor número divisible por 9 y 18 á la vez, es 18; dividido por el denominador 9 da 2. 2 por 3, 6; 2 por 9, 18; luego $\frac{3}{9} = \frac{6}{18}$; la 2ª fracción, ya tiene el mismo denominador, de consiguiente, nada más tengo que hacer.

Pero, en la clase anterior, dijimos que dividiendo el numerador y denominador por un mismo número, el valor de la fracción no alteraba; entonces, observen Vds. que dividiendo entre 2 á 6 y 18 $\frac{6:2}{18:2}$ da $\frac{3}{9}$, fracción que tiene el mismo denominador que la primera. Luego, cuando se puede, en vez de multiplicar conviene dividir, porque, no lo olviden nunca, de dos quebrados del mismo valor, se prefiere siempre el que tenga números más chicos. Veamos, qué han retenido de lo que acabo de enseñar.

Fin. — *M.* — Piensen un número divisible por 2 y por 5, á la vez.

Als. — 10, 20, 30, etc.

M. — ¿Por 2 y por 3? ¿Por 4 y por 6?

(*Pasan cuantos alumnos quepan en el pizarrón*). Reduzcan á un común denominador $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{9}$. Vuelvan á sus asientos.

M. — ¿Qué se busca, primero, para reducir á un común denominador?

A. — Un número divisible, á la vez, por los denominadores.

M. — ¿Por qué número se multiplica el numerador y denominador?

A. — Por el cociente de dividir el múltiplo por el denominador.

(*Pasan otros alumnos*). Común denominador de $\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{2}$ ¿No puede hacerse dividiendo los dos términos por un mismo número?

A. — Sí, señor, $\frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}$.

M. — Común denominador de $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{4}$; de $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{4}$; de $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{8}$. Vuelvan á sus asientos. El mayor cuidado de Vds. es no olvidar que el numerador y denominador deben multiplicarse ó dividirse siempre

por un mismo número. A veces, con los dos quebrados, puede hacerse de otro modo:

$\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$; 2 y 6 son divisibles por 2; entonces $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$. ¿No es verdad? 6 y 9 son divisibles por 3; entonces $\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$ ¿no es así? $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ y $\frac{2}{3}$, tienen el mismo denominador.

(*Pasan otros alumnos al pizarrón y los ejercita en las tres maneras de reducción á un común denominador*).

Deberes. — Los ejercicios que acerca del tema vengán indicados en el libro.

INDICACIONES

En la escuela que dirigimos, el procedimiento que acabamos de indicar, practicado por la señorita T. PRÑEYRÚA, nos dió buen resultado, y, en la mayoría de los casos, los alumnos dan con el mínimo común denominador. Hemos eliminado el de multiplicar ambos términos de la fracción por los denominadores de las demás porque habitúa á un común denominador máximo, de tal manera, que la corrección es costosa cuando en 5º y 6º grado (aun en 1º y 2º año) se exige el M. C. M.

Por otra parte, el procedimiento es práctico y racional; el alumno se acostumbra, no á una operación mecánica, sino á una observación meticulosa de las cantidades que se dan; *forma la vista; saber ver*, es, en matemática, esencialísimo, tan importante como razonar.

El doctor ESTEBAN LAMADRID (*La Nueva Escuela*, pág. 336, II época) da este procedimiento, largo pero muy práctico y al alcance del 3º Grado S. para hallar el M. C. M. de varios números: sean los números 4, 10 y 20 cuyo mínimo común múltiplo queremos hallar; encontramos los múltiplos de cada uno de estos números; luego vemos cuales son comunes y de éstos elegimos el menor.

Múltiplos de 4	Múltiplos de 10	Múltiplos de 20
$4 \times 1 = 4$	$10 \times 1 = 10$	$20 \times 1 = 20$
$4 \times 2 = 8$	$10 \times 2 = 20$	$20 \times 2 = 40$
$4 \times 3 = 12$	$10 \times 3 = 30$	$20 \times 3 = 60$
$4 \times 4 = 16$	$10 \times 4 = 40$	$20 \times 4 = 80$
$4 \times 5 = 20$	$10 \times 5 = 50$	$20 \times 5 = 100$
$4 \times 6 = 24$	$10 \times 6 = 60$	etc.
$4 \times 7 = 28$	$10 \times 7 = 70$	
$4 \times 8 = 32$	etc.	
etc.		

Observo que 20, 40, 60, etc., son múltiplos comunes á los tres números porque están en las tres columnas. Elijo el menor de ellos 20. 20 es el M. C. M. de 4, 10 y 20.

De una manera idéntica se procede para hallar el M. C. D. (Obra cit., pág. 400).

Sean, v. g., 48 y 64.

Divisores de 48	Divisores de 64
$48 : 1 = 48$	$64 : 1 = 64$
$48 : 2 = 24$	$64 : 2 = 32$
$48 : 3 = 16$	$64 : 4 = 16$
$48 : 4 = 12$	$64 : 8 = 8$
$48 : 6 = 8$	$64 : 16 = 4$
$48 : 8 = 6$	$64 : 32 = 2$
$48 : 12 = 4$	$64 : 64 = 1$
$48 : 16 = 3$	
$48 : 24 = 2$	
$48 : 48 = 1$	

Divisores comunes 1, 2, 4, 8, y 16, M. C. D. es 16.

LECCIÓN 19ª

Tema: — Suma de fracciones.

Desarrollo. — Principio. — M. — Piensen todos, un número múltiplo de 3 y 4; de 7 y 8; de 2 y 3; de 12 y 6; divisible, á la vez, por 5 y 4; por 2, 3 y 5; por 6, 12, 24; por 3, 12, 9 y 18. ¿Cuál será común denominador de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$; de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$; de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$? Una fracción del mismo valor que 1; del mismo valor que $\frac{1}{2}$; ¿cómo puede hacerse á $\frac{1}{3}$ más chico sin que el valor cambie? ¿Por qué número multiplicarían el numerador y denominador de la fracción $\frac{1}{3}$ para obtener otra del mismo valor? ¿Si multiplicasen solo á 9? Por qué número multiplicarían á uno y otro término de la fracción $\frac{1}{3}$ para obtener otra cuyo denominador fuese 24? ¿fuese 40? ¿Es mayor $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{6}$? ¿Una expresión de tres términos? ¿Una de un término y cuatro factores?

Medio. — Ahora, verán Vds. cómo se suman las fracciones. ¿En cuántas partes *iguales* hemos dividido esta hoja de papel?

A. — En cuatro partes iguales.

M. — Cada parte se representa?

A. — Por un cuarto.

M. — ¿Cuántas he tomado?

A. — Vd. ha tomado $\frac{2}{4}$ de la hoja.

M. — (*Escribe $\frac{2}{4}$*) ¿Y ahora cuánto he tomado?

A. — Vd. ha tomado un cuarto.

M. — (*Escribe $\frac{1}{4}$ á la derecha de $\frac{2}{4}$*). Agrego ó sumo este *un* cuarto á los otros *dos* cuartos ¿cuántos cuartos del papel tengo en esta mano?

A. — Vd. tiene $\frac{3}{4}$ del papel.

M. — De consiguiente, dos cuartos (*señalando en la pizarra y escribiendo el signo + entre las dos fracciones*) más un cuarto son iguales á $\frac{3}{4}$.

Esta es la suma de quebrados. Observen los denominadores: ¿cómo son?

A. — Los denominadores son iguales.

M. — Muy bien; las fracciones no pueden sumarse sino cuando tienen el mismo denominador. Ahora se explicarán Vds. porque ocupamos varias lecciones en aprender una operación tan necesaria. Habrán notado, además, que no se suman sino los numeradores y que el resultado (*señalando siempre*) conserva el común denominador. Por consiguiente, para sumar $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$, desde que tienen el mismo denominador, decimos: $3 + 5$, 8 ; $8 + 2$, 10 ; $10 + 1$, 11 . Once octavos. Para sumar $\frac{7}{30} + \frac{3}{30} + \frac{5}{30}$, desde que tienen, etc. Pero si tenemos $\frac{3}{5} + \frac{5}{4}$ ¿qué tenemos que hacer antes de sumar?

A. — Se reducen á un común denominador.

M. — Así: signo =; una raya; debajo, el denominador común, 20; arriba, los nuevos numeradores: 20 entre 5, 4; 4 por 5, 20; 4 por 3, 12 (*escribiendo*); 20 entre 4, 5; 5 por 4, 20; 5 por 5, 25. Después, signo igual y la suma: $12 + 25 = 37$; $\frac{37}{20}$. (*En la pizarra, la operación presentará esta forma:*

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{4} = \frac{12 + 25}{20} = \frac{37}{20}$$

Otra suma: $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8}$; múltiplo de 4 y 8, ó común denominador 8; luego, signo igual; raya; abajo 8, arriba, etc.

Otra suma: $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5}$.

Hay cuatro fracciones ya, con el denominador común; sumo primero, éstas; signo igual: $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}, \frac{5}{5}$; $\frac{5}{5}$ más $\frac{1}{5}, \frac{6}{5}$; $\frac{6}{5}$ más $\frac{1}{5}, \frac{7}{5}$, escribo $\frac{10}{5} + \frac{7}{5}$; pero 10 y 5 son divisibles por 5; como sé que dividiendo numerador y denominador, etc. tengo $\frac{10}{5}$ igual á 2, dividido entre 1 es 2; por tanto $\frac{10}{5}$ igual á 2, dividido entre 1 es 2; por tanto $\frac{10}{5} + \frac{7}{5} = 2$ y $\frac{7}{5}$, fracción mixta.

Es claro que pueden sumarse hallando el denominador común 35, y hacer como en los casos anteriores. Pero es más largo y en Aritmética debemos seguir *siempre, siempre, el camino más corto*.

Si los números son mixtos como $3\frac{3}{4} + 2\frac{1}{4}$, se suman los enteros primero, y luego los quebrados; se obtiene, así, una fracción mixta por resultado.

3 más 2, 5; más $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$; igual á....; raya; el común denominador de $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$, 12; arriba los numeradores; 12 entre 3, 4; 4 por 2, 8; más etc. (*En la pizarra aparecerá la operación en esta forma:*

$$3 \frac{2}{3} + 2 \frac{3}{4} = 5 \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 5 \frac{8+9}{12} = 5 \frac{17}{12}.$$

Fin. — (*Pasan tres alumnos al pizarrón*).

M. — Sumen: $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$... ¿á cuánto es igual $\frac{2}{3}$?

Sumen $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{3}$; $2 \frac{1}{3}$ y $2 \frac{2}{3}$.

Vuelvan á sus asientos. (*Pasan cinco alumnos*). Sumen $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$; etc. (*El maestro dará ejercicios de operaciones rápidas y que comprendan los diversos aspectos que puede presentar la suma de fracciones, sobre todo, desde el punto de vista de la simplificación, sin lo que será imposible dominar los quebrados*).

M. — Sumemos, ahora, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$; lo mismo haremos en este caso.

El múltiplo, á la vez, de 4522 y 17 es 4522×17 . Eseribo, pues, á 4522×17 , de denominador común: 4522×17 , dividido entre 4522, 17; 17 por 32, etc.

Noten Vds., que no hago la operación al principio. En efecto, así debe hacerse siempre, porque es menos trabajo y á veces, se suma en un instante.

(*Pasan seis alumnos á la pizarra y hacen ejercicios semejantes á los anteriores*).

INDICACIONES

El maestro nunca distinguirá en las operaciones de quebrados, como en las de decimales y enteros, más de un caso general. Tales diferenciaciones, acostumbradas por muchos textos, son, á nuestro juicio, sutilezas perjudiciales á la enseñanza y orientación matemática del alumno.

El hábito de indicar las operaciones y no hacerlas sino al último, tiene dos objetos:

1° No hacer un trabajo penoso que muchas veces la simplificación evita.

2° No hacer un trabajo que, llamando hacia sí la atención, desorienta el espíritu rompiendo la unidad psíquica que estaba formándose.

LECCIÓN 8ª (Octubre)

Tema.—Multiplicación de quebrados.

Desarrollo.— *Principio.* — *M.* — ¿A cuántos decímetros cúbicos equivalen 6 metros cúbicos? El volumen de una caja es de 56 metros cúbicos; el largo 7 y el ancho 4, ¿cuál es el alto? ¿Qué cantidad he escrito en el pizarrón? (2.000148 ms.²) ¿Un número divisible por 9, por 6? ¿Qué números son divisibles por 2? Simplifiquen la fracción $\frac{8}{16}, \frac{24}{12}, \frac{3 \times 4}{2 \times 3}$ (*escribiéndolas*).

Pasen al pizarrón, Juana, José, Astulfo y Mario; dividan 884567 entre 17, los dos primeros; multipliquen 9107 por 708, los otros dos y comprueben el resultado. Los demás de la clase: uno, ¿á cuántos quintos es igual? ¿A cuántos sextos? ¿A cuántos doce avos? ¿2, á cuántos tercios? ¿A cuántos novenos? ¿Para restar $\frac{2}{3}$ de 1 qué se hace? Pedro, da de su naranja $\frac{1}{3}$ á María y $\frac{2}{3}$ á José, ¿cuánto le queda de la naranja? ¿De 3 quitando $\frac{1}{2}$? ¿De 9 quitando $\frac{5}{8}$? Una expresión de cuatro términos. (*Observa los trabajos de la pizarra*).

Medio. — Las fracciones se multiplican así:

Sean $\frac{3}{7} \times \frac{4}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}$; signo igual, una raya; arriba todos los numeradores multiplicados entre sí; abajo todos los denominadores multiplicados entre sí. Y nada más. (*En el pizarrón, las operaciones aparecerán escritas en esta forma:*

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 4 \times 1 \times 5}{7 \times 8 \times 2 \times 2} = \frac{60}{224}.$$

Si hay enteros, como en este caso: $\frac{3}{4} \times 3 \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times 2$, se escribe 1 de denominador á los enteros y se multiplican como en el caso anterior así:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 3 \times 1 \times 2 \times 2}{4 \times 1 \times 5 \times 3 \times 1} = \frac{36}{60}.$$

Como toda cantidad multiplicada por 1 es la misma cantidad, 4 por 1 es 4, no se escriben los unos; así, pues, en lugar de $\frac{3 \times 3 \times 1 \times 2 \times 2}{4 \times 1 \times 5 \times 3 \times 1}$ (*borrando*), escribiremos $\frac{3 \times 3 \times 2 \times 2}{4 \times 5 \times 3} = \frac{36}{60}$.

Si alguno de los quebrados es fracción mixta, se reduce, como en $3\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$, á quebrado y se multiplica como en los casos anteriores. $3\frac{1}{4}$ es igual á $\frac{13}{4}$; luego $3\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$. ¿Cómo se multiplican, pues, una serie de fracciones?

Multiplicando todos los numeradores entre sí; todos los denominadores entre sí y dividiendo el primer producto por el segundo. ¿Cómo se multiplican, Josefa?

A.—Multiplicando, etc.

Fin. — (*Pasan cinco alumnos*).

Multipliquen: $3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$; $4 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{12}$; $6\frac{1}{2}$ por $3\frac{2}{3}$, etc.

Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis y hacen ejercicios como los anteriores*).

M.—Vds. recordarán que dividiendo el numerador y denominador de una fracción por un mismo número el valor no cambiaba. Y que para dividir un producto indicado como este $3 \times 8 \times 9 \times 12$, por el número 8 bastaba suprimir el 8. De aquí, pues, que, como en este caso $\frac{3 \times 4 \times 5}{7 \times 8 \times 2 \times 2}$, no debe hacerse la multiplicación de las cantidades sin antes simplificar. 4 arriba, y abajo $2 \times 2 = 4$, se suprimen; queda $\frac{3 \times 5}{7 \times 8} = \frac{15}{56}$ del mismo valor que $\frac{60}{32}$, pero operación mucho más bella y corta.

(*Pasan seis alumnos*). Multipliquen: $7 \times \frac{2}{3}$ por $\frac{3}{5}$, por $\frac{2}{7}$, por $\frac{5}{2}$, etc.

Deberes.—Los que indique el libro.

INDICACIONES

I.—Las cantidades, á los efectos de la enseñanza, deben ser pequeñas para facilitar la comprensión. Y pequeñas, cuando hay el propósito de fijar un procedimiento, á fin de no dispersar la atención con largas operaciones que, del punto de vista del tema, son de carácter circunstancial ó elementos de apoyo.

II.—Préstese atención á que el niño escriba el signo = frente mismo á la línea de división; nos ha tocado corregir muchas veces la mala colocación del signo, causa, sobre todo en formas complejas, de innumerables errores. Así $8 + \frac{5}{4}$ induce fácilmente la suma $\frac{8+5}{4}$, poco que se alargue la raya de separación.

LECCIÓN 23*

Tema. — Explicación y razonamiento del problema fundamental si $\frac{a}{b}$ vale m , $\frac{c}{d}$, de la misma especie ¿cuánto valdrá ?

Desarrollo. — A. — M. — Un terreno vale 200 \$ ¿cuánto vale $\frac{1}{5}$ del terreno ? (*escrito en la pizarra*).

Objetivación

$\frac{1}{5}$	$= \frac{5}{5} \text{ ó } 1.$
$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	

M. — Representemos el terreno por esta figura. Para obtener la quinta parte ¿en cuántos partes debemos dividirlo?

A. — Hay que dividirlo en cinco partes iguales.

M. — (*Divide al paralelogramo en 5 partes iguales*). ¿Cada una de las partes, por qué fracción la representaremos?

A. — Por $\frac{1}{5}$ (*Escribe en cada una, $\frac{1}{5}$*).

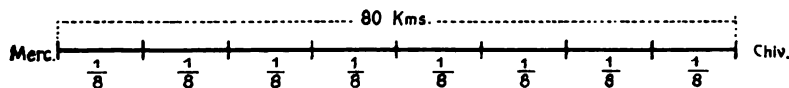
M. — Luego, todo el terreno ¿es cuánto?

A. — Es $\frac{5}{5}$ ó 1.

M. — Y razonamos así: si todo el terreno ó $\frac{5}{5}$ del terreno valen 200 pesos, $\frac{1}{5}$ del terreno, cinco veces menor, valdrá 5 veces menos ó 200 dividido entre 5, $\frac{200}{5} = 40$ \$. Observen que $\frac{200}{5}$, un quinto de 200, es $200 \times \frac{1}{5}$.

M. — Se tiende una línea telefónica entre Mercedes y Chivilcoy, distante 80 Kilómetros. Se ha construido $\frac{1}{8}$. ¿Qué extensión es?

Objetivación



Representemos la línea, por esta recta.

Para obtener $\frac{1}{8}$ en ¿cuántas partes hay que dividirla?

A. — En ocho partes iguales y cada parte la representamos por $\frac{1}{8}$; (*así se hace*).

M. — ¿Luego, toda la línea es cuánto?

Als. — $\frac{8}{8}$ ó 1 que mide 80 Kms.; deseamos conocer la octava parte.

M. — Y razonamos así: Si 8 octavos miden 80 Kms., $\frac{1}{8}$, la octava parte de 8 octavos, medirá 8 veces menos ó $\frac{80 \text{ Kms}}{8} = 10$ Kms. (*Se escribe en la pizarra*):

Si $\frac{8}{8}$ miden 80 Kms.

$\frac{1}{8}$ mide $\frac{80}{8} = 10$ Kms.

M. — Si se ha hecho $\frac{1}{8}$ ¿cuántos octavos quedan por hacer?

A. — $\frac{7}{8}$.

M. — Si se han hecho 10 Kms. ¿cuántos Kms. quedan por hacer?

A. — 70 Kms.

M. — Los $\frac{7}{8}$ miden, pues, 70 Kms.

Resuelvan Vds. Un estanciero vende, de sus 500 vacas, $\frac{1}{5}$. ¿cuántas le quedaron?

M. — Si vendió $\frac{1}{5}$, vendería la quinta parte de 500, que es 100; si vendió 100, le quedarían 500 menos 100 ó 400 vacas.

M. — (Da varios de la misma especie).

B. — M. — $\frac{1}{5}$ de un terreno vale 40 \$. ¿cuánto valdrán $\frac{5}{5}$?

Objetivación

$\frac{1}{5}$	40 \$
$\frac{1}{5}$	40 \$
$\frac{1}{5}$	40 \$
$\frac{1}{5}$	40 \$
$\frac{1}{5}$	40 \$

(ya preparada)

$$= \frac{5}{5} \text{ ó } 1.$$

Representemos el terreno por este paralelogramo.
¿De qué parte conocemos el precio?

A. — De la quinta parte ó $\frac{1}{5}$; hay que dividirlo en cinco partes iguales; (así se hace escribiendo $\frac{1}{5}$ en cada una).

M. — ¿ $\frac{1}{5}$ del terreno cuánto vale?

A. — 40 \$.

M. — ¿Cada una de estas divisiones que representa $\frac{1}{3}$ del terreno, vale pues ?

A. — Vale 40 \$.

M. — Escribamos 40 \$ en cada quinto del terreno. Deseábamos saber el valor de $\frac{2}{3}$ del terreno ; $\frac{2}{3}$, son tres divisiones reunidas. Su valor también, será estos 3 cuarentas reunidos, ó 3 veces 40 \$ que son 120 \$. Y, lo razonamos en muy pocas palabras :

Si $\frac{1}{3}$ vale, 40 \$

$\frac{2}{3}$ valdrán 3 veces más ó $3 \times 40 = 120$ \$.

M. — *Otro.* — Un empleado recibió 35 \$, $\frac{1}{6}$ de su mensualidad ; ¿cuánto es lo que gana cada mes ?

Objetivación.

$\frac{1}{6}$	35 \$
$\frac{1}{6}$	35 \$
$\frac{1}{6}$	35 \$
$\frac{1}{6}$	35 \$
$\frac{1}{6}$	35 \$
$\frac{1}{6}$	35 \$

(ya preparada)

Representemos el sueldo del mes por un billete de este tamaño.

¿Cuánto ha recibido del billete ?

A. — La sexta parte.

M. — Dividámoslo en seis partes.

A. — Cada una es un $\frac{1}{6}$.

M. — Todo el billete ó la mensualidad ¿cuántos sextos son ? Obsérvenlo. *A.* — Seis sextos.

M. — Tenemos, pues, que conocer el valor de ¿cuántos sextos ?

A. — De $\frac{2}{3}$.

M. — Según el problema ¿qué conocemos?

A. — Un sexto del sueldo del mes que es 35 \$.

M. — De consiguiente, cada parte vale?

A. — Vale 35 \$; escribiremos en cada parte ó sexto, 35 \$.

M. — La mensualidad ó seis sextos, es, pues, seis veces 35. Y lo razonamos en muy pocas palabras. El sueldo ó lo que gana por mes, es la unidad ó 1. Si un sexto de la mensualidad vale 35 \$, 6 sextos valdrán 6 veces más ó $6 \times 35 \$ = 210 \$$. (*A la explicación acompaña indicaciones sobre la figura*).

M. — Un individuo gasta, en vestirse, 40 \$, $\frac{1}{8}$ de su sueldo ¿cuánto es su sueldo?

A. — El sueldo es la unidad ú $\frac{8}{8}$; desde que $\frac{1}{8}$ es 40 \$, los $\frac{8}{8}$ valdrán 8 veces 40 \$ ó 320 \$.

M. — 2 decímetros, son $\frac{1}{5}$ de mi altura; ¿cuál es mi altura?

A. — Su altura es de 1m. 80 cms. (*Se razona*).

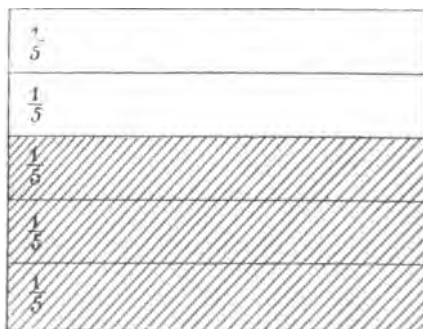
M. — Una varilla, cuya longitud es de 2 ms., es $\frac{1}{12}$ de la altura del Cabildo ¿cuál es la altura del Cabildo?

A. — (*Lo resuelve*).

M. — $\frac{1}{10}$ de una caja pesa 10 gramos. ¿Cuánto pesarán $\frac{7}{10}$?

A. — (*Lo explica y razona*).

C. — *M.* — Ahora, vamos á resolver un problema que comprenda los dos anteriores. Un terreno vale 200 \$. Cuánto valdrán $\frac{5}{5}$?



(ya preparada).

$= \frac{5}{5}$ ó 1, vale 200 \$.

¿Cómo lo resolverían Vds.? (*Los deja pensar un momento y recibe dos ó tres respuestas*).

M. — ¿Si supieran el valor de $\frac{1}{5}$ del terreno, les sería fácil averiguar el de $\frac{3}{5}$?

A. — Sí, señor; los tres quintos valdrían tres veces más.

M. — ¿Y conociendo el valor de todo el terreno ó $\frac{5}{5}$, les es fácil averiguar el de $\frac{1}{5}$?

A. — Sí, señor; valdrá cinco veces menos.

M. — Pues, entonces, se hacen dos problemas:

1º ¿Si un terreno ó $\frac{5}{5}$, vale 200 pesos ¿cuánto vale $\frac{1}{5}$? Un quinto valdrá 200 dividido entre 5 ó 40 \$.

2º Si $\frac{1}{5}$ de un terreno vale 40 \$. ¿Cuánto valdrán los $\frac{3}{5}$? Si un quinto vale 40 \$, 3 quintos del terreno valdrán 3 veces más, ó $40 \times 3 = 120$ \$, que es lo que queríamos saber (*indicando siempre en la figura*).

M. — Si $\frac{1}{5}$ del terreno valen 80 \$ ¿cuánto valdrán $\frac{3}{5}$? ¿Cómo se resuelve?

A. — Se descompone en dos problemas:

1º Si $\frac{1}{5}$ del terreno valen 80 \$ ¿cuánto vale $\frac{1}{5}$? Siendo 4 veces menor que $\frac{1}{5}$, valdrá 4 veces menos ó 80 dividido entre 4 que es 20 \$; 2º Si $\frac{1}{5}$ vale, etc.

M. — Sean quintos, sean octavos, sean doce avos, sean 87 avos, siempre, como Vds. lo han visto en todos los problemas, hay que saber primero, el valor de $\frac{1}{5}$, ó de $\frac{1}{6}$, ó de $\frac{1}{7}$, ó de $\frac{1}{8}$.

¿No es así?

Bien. Los $\frac{8}{10}$ de un número (*traza una raya de un metro, la divide en 10 partes iguales, toma 8*) es 16, ¿cuál es el número?

El número, ¿cuántos décimos serán?

A. — 10 décimos.

M. — Conocemos el valor de 8 décimos; ¿qué debemos averiguar primero?

A. — El valor de un décimo. Si 8 décimos del número es 16, etc.

M. — Si $\frac{1}{10}$ del número es 2, diez décimos ó el número entero (*indicando siempre la línea*) será 10 veces 2 ó 20. Problemas que parecen difíciles, aca-

ban Vds. de ver que son fáciles, objetivándolos, puesto que la vista nos indica las operaciones.

D. — (*Si se nota fatigada la clase, el punto D será tema de la lección siguiente*).

M. — Para concluir, otro problema, interesante más que los anteriores. Los $\frac{4}{5}$ de un terreno valen 84 \$. ¿Cuánto valen $\frac{2}{3}$ del mismo terreno?

Si dividimos la figura en quintos no sabemos á donde llegan los tercios; si la dividimos en tercios no sabemos á donde llegan los quintos; si la dividimos en tercios y en quintos á la vez, ninguna línea de los quintos coincide con la de los tercios como puede verse en la figura (*en carteles ó pizarrón, líneas de dos colores*). En este caso, de nada nos sirve conocer el valor de $\frac{4}{5}$ puesto que queremos conocer el valor de los tercios. ¿Qué se hace?... ¿Alguien malicia el secreto de la solución? Pues, si los denominadores son diferentes se reducen á un común denominador. Los $\frac{4}{5}$ y los $\frac{2}{3}$ á quebrados que no cambien sus valores, pero que tengan el

$$\begin{array}{l} \frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15} \\ \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \end{array}$$

Observen esta figura, igual á ésta; los $\frac{12}{15}$ ocupan el mismo espacio que los $\frac{4}{5}$ ¿no es verdad? y los $\frac{10}{15}$, el mismo espacio que los $\frac{2}{3}$. Pero en este caso, la figura está dividida en 15 partes iguales, cada parte es $\frac{1}{15}$ del terreno. Si en vez de $\frac{4}{5}$ decimos $\frac{12}{15}$; si en vez de $\frac{2}{3}$ decimos $\frac{10}{15}$ el problema puede enunciarse:

Si los $\frac{12}{15}$ de un terreno valen 84 \$, ¿cuánto valen los $\frac{10}{15}$ del mismo terreno?

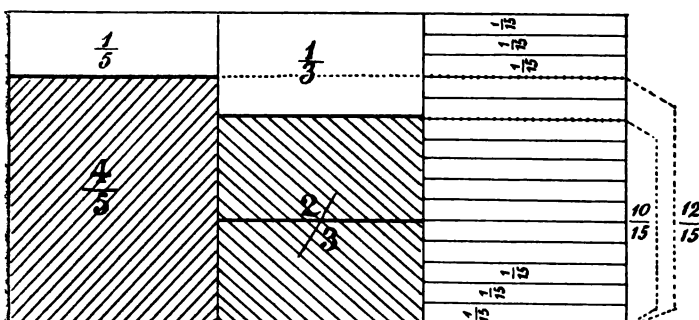
A. — Hallaremos primero, el valor de $\frac{1}{15}$; si $\frac{12}{15}$ valen 84 \$; $\frac{1}{15}$ vale, etc.

Otro A. — Si $\frac{1}{15}$ vale 7 \$, $\frac{10}{15}$ valdrán diez veces más ó $7 \times 10 = 70$ \$.

M. — Luego, si hay quebrados de diferente denominador, se hallan quebrados equivalentes, del mismo denominador y se resuelve el problema como en los anteriores casos.

Objetivación

(Tiza de colores) (ya preparada)



E.—(Pasan cuatro alumnos al pizarrón, los demás en sus pizarras).

M.—Los $\frac{2}{3}$ de una línea miden 32 cms. ¿Cuánto mide $\frac{1}{3}$?

A.—Reducio $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ a fracciones de igual denominador; 6 es divisible por 3 y por 2; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

El problema es: si $\frac{4}{6}$ de una línea miden 32 cms. $\frac{2}{6}$; etc.—(Objetiva y resuelve).

M.—Un cajón pesa 35 kgs. ¿Cuánto pesarán los $\frac{3}{4}$?

$\frac{1}{4}$ de un número es 11, ¿cuál es el número?

Si un número es 12 ¿cuánto serán $\frac{7}{8}$?

$\frac{2}{3}$ de una suma es 8 \$. ¿Cuál es la suma?

¿8 \$ es $\frac{2}{3}$ de qué suma?

Deberes.—Problemas que indique el libro.

INDICACIONES

Se exigirá, siempre, la objetivación que es, en estos grados, el raciocinio por excelencia, la preparación del deductivo por el inductivo.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO VIII

4º GRADO

I

Distribución del programa en meses. — Marzo y Abril.

— La Aritmética enseñada en 1º, 2º y 3º grado queda resumida en los problemas de números enteros, del sistema métrico y de las fracciones comunes. Mediante ejercicios y problemas convenientemente distribuidos, de simples y múltiples combinaciones, se consolidarán los conocimientos que el alumno tenga acerca de los puntos indicados. Comprobar la exactitud de los problemas resueltos. Escritura al dictado, de cantidades, expresiones y fórmulas. Reproducciones mediatas de las mismas. Simplificaciones.

Mayo. — 1ª — Uso del paréntesis.

2ª — Supresión del paréntesis.

3ª — Multiplicación y división indicada de varios términos por un mismo número.

4ª — Distinción de término y factor.

5ª — Ejercicios.

6ª — Simplificación de un quebrado de numerador y denominador compuestos de varios términos.

7ª — Simplificación de un quebrado compuesto, numerador y denominador, de varios factores.

8ª — Ejercicios de recapitulación.

9ª — Descomposición de un número en factores simples.

10ª — Hallar los divisores de un número.

11ª — Simplificación de quebrados con decimales en el numerador y denominador.

12ª — Ejercicios de recapitulación.

13ª — Problemas de recapitulación.

14ª — Máximo común divisor de dos números por la descomposición en factores simples.

15ª y 16ª — Ejercicios.

17ª — Máximo común divisor de varios números por la descomposición en factores simples.

18ª — Ejercicios.

19ª — Mínimo común múltiplo de varios números que no tengan más de dos cifras.

20ª y 21ª — Ejercicios.

23ª — Ejercicios de recapitulación.

Junio. — 1ª — Mínimo común múltiplo de dos números mayores que los de dos cifras.

2ª — Ejercicios.

3ª — Mínimo común múltiplo de varios números.

4ª — Ejercicios.

5ª — Ejercicios de recapitulación.

6ª — Suma de quebrados por el M. C. denominador.

7ª — Substracción de quebrados por el M. C. denominador.

8ª — Ejercicios.

9ª — Operaciones de multiplicar quebrados simplificando los términos.

10ª — Reducción de la división de quebrados á multiplicación.

11ª — Ejercicios.

12ª — Ejercicios de recapitulación.

13ª — Potencia de un número entero ó fraccionario.

14ª — Ejercicios.

15ª — Uso de letras en el cálculo.

16ª — Incógnitas, letras con que suelen representarse las incógnitas.

17ª — Ejercicios.

18ª — Suma de términos literales.

19ª — Ejercicios. Partes alícuotas.

20ª — Substracción de términos literales.

21ª — Ejercicios combinando las dos operaciones.

22ª — Problemas concretos con cantidades literales.

Julio. — 1ª — Valorización de las letras.

2ª y 3ª — Ejercicios.

4ª — Ejercicios de recapitulación.

5ª y 6ª — Multiplicación de cantidades literales.

Ejercicios.

7ª y 8ª — División de cantidades literales. Ejercicios.

9ª y 10ª — Potencia de un término cualquiera. Ejercicios.

11ª — Las igualdades, miembros, términos de cada miembro, etc.

12ª y 13ª — Si se agregan á uno y otro miembro de una igualdad un mismo número la igualdad subsiste. Ejercicios.

14ª y 15ª — Si se quita á uno y otro miembro de una igualdad un mismo número, la igualdad subsiste. Ejercicios.

16ª y 17ª — Si se multiplica á uno y otro miembro de una igualdad un mismo número, la igualdad subsiste. Ejercicios.

18ª y 19ª — Si se divide uno y otro miembro de una igualdad por un mismo número, la igualdad subsiste.

20ª — Dos miembros iguales á un tercero son iguales entre sí.

21ª — Términos conocidos y términos desconocidos de una igualdad. Pasar los conocidos al 2º miembro y los desconocidos al 1º.

22ª — Ejercicios.

Agosto. — 1ª — Reducir cada miembro, á un solo término. Ejercicios (Ecuaciones numéricas).

2ª y 3ª — Ejercicios de recapitulación.

4ª — Hacer desaparecer los quebrados.

5ª y 6ª — Ejercicios.

7ª y 8ª — Resolver las ecuaciones: $\frac{3x}{4} + 5 = 8$; $\frac{3x}{4} + 7 - 3 = 9$; $\frac{3x}{4} + \frac{7}{9} = 5$; $4x + 3 - 8 = 3x + 6$; etc. Ejercicios.

9ª y 10ª — Ejercicios de recapitulación.

11ª — Manera de resolver un problema por medio de las igualdades.

12ª y 13ª — Problemas y ejercicios.

14ª — Si se suman, si se restan, si se multiplican ó si se dividen miembro á miembro dos ó más igualdades resulta otra igualdad.

15ª y 16ª — Ejercicios. Escritura al dictado de números, expresiones, fórmulas.

17ª y 18ª — Problemas que se resuelven por una ecuación.

19ª y 20ª — Ejercicios de síntesis y recapitulación.

21ª — Solución de problemas complejos por el método de reducción á la unidad.

22ª — Problemas: a obreros hacen $\frac{1}{m}$ de una obra y $b \frac{1}{n}$, en un día, ¿cuánto hacen de la obra, juntos y en cuántos días, juntos, hacen la obra?

Septiembre. — 1ª á 5ª, problemas que se resuelven por ecuaciones ó por el método de reducción á la unidad.

6ª — Solución del problema fundamental: si a obreros emplean c días para hacer una obra y b obreros d días ¿cuántos días emplearán trabajando juntos?

7ª y 8ª — Problemas.

9ª y 10ª — Ejercicios y problemas de recapitulación.

11ª — Fracciones complejas; significado de las rayas. Reducción de fracciones complejas de la forma:

$$\begin{array}{r} a \times b \dots\dots \\ \hline m \times n \dots\dots \\ \hline u \times v \dots\dots \\ \hline q \times p \dots\dots \quad \text{á simple.} \end{array}$$

12ª — Ejercicios.

13ª — Reducción de fracciones complejas de la forma:

$$\begin{array}{r} a + b \dots\dots \\ \hline m + n \dots\dots \\ \hline u + v \dots\dots \\ \hline q + p \dots\dots \quad \text{á simple.} \end{array}$$

14ª — Ejercicios.

15ª — Reducción de fracciones complejas de la forma

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} : \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{n}} \text{ á simple.}$$

16ª — Problemas de recapitulación.

17ª y 18ª — Ejercicios de recapitulación.

19ª y 20ª — Problemas.

21ª y 22ª — Cantidades positivas y negativas. Ejercicios.

Octubre. — 1ª á 4ª — Problemas de recapitulación y ejercicios.

5ª — Relaciones entre el litro, el decímetro cúbico y el kilogramo.

6ª — Densidad, peso específico, igualdad de volumen y diferencia de peso.

7ª — La comparación se hace siempre con el agua. Determinación del peso específico. Densidad de las sustancias más conocidas.

8ª — Ejercicios.

9ª y 10ª — Cómo, conociendo el volumen de un cuerpo podemos saber, sin balanza, cuanto pesa. Viceversa.

Cómo, conociendo el volumen ó el peso, podemos saber la capacidad y viceversa.

11ª y 12ª — Ejercicios.

13ª — Las denominaciones. Reducción constante á dms.³, litros ó Kgs. para pasar de una medida á otra cambiando tan solo de denominación. Pasos del problema.

14ª y 15ª — Problemas.

16ª — Ejercicios de volumen, peso y capacidad usando solo el metro (regla ó cinta).

17ª — Peso y volumen de las sustancias menos densas que el agua. De líquidos y gases.

18ª — Ejercicios.

19ª — Problemas.

20ª — Uso de la fórmula, ejercitando al alumno, en las denominaciones que debe tener para usarla.

$$P \text{ (Kgs.)} = V \text{ (dms.}^3\text{)} \times D$$

$$P \text{ (gms.)} = V \text{ (cms.}^3\text{)} \times D.$$

21ª y 22ª — Problemas y ejercicios.

Noviembre. — Ejercicios y problemas de recapitulación, insistiendo sobre aquellos puntos dudosamente adquiridos.

LECCIÓN 1ª (Mayo)

Tema. — Uso de paréntesis.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — (*Pasan al pizarrón cuantos alumnos quepan*). Escriban las siguientes expresiones: $0.007 + \frac{2}{3} - 8 \times 0.75$ todo sobre $8 \times 9 \times \frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$. Otra: $0.000001 - 4 \times 0.007 + 1000202$, todo sobre 7 dividido entre 3.14159. Borren. Dibujen una figura de 19 decímetros cds. Reduzcan á dms. cbs. 4 Kms.³ Escriban, con la denominación ms.³, 35 cms. cbs.; 6 mms.³; 10025 mms.³

Vuelvan á sus asientos.

¿Cuánto es 8 dividido entre 10000? ¿0.5 dividido entre 100? ¿ $(7 \times 9 + 2) : 11$? ¿Cuánto pesará este objeto? ¿8 Hgs. y 5 gramos á cuántos gramos equivalen? ¿Cuánto es 12 por 23? Esta multiplicación es sencilla, se dice 10 por 23, 230; 2 por 23, 46; 230 + 46 igual 276; el producto es 276. Veamos: ¿18 por 11?

A. — 10 por 18, 180; 1 por 18, 18; 180 + 18 igual á 198. (*En todas las lecciones el maestro hará ejercicios parecidos, que evitan el uso de la tiza en multitud de ocasiones*).

M. — (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). Extiendan la mano (*en ellas coloca cajitas de substancias diferentes y los alumnos deben decir si están llenas ó vacías ó qué podrán contener*).

Dividan 2845 entre 19. Sumen 38, 96, 77, 49. Volumen de la tapa de este libro cuyo largo es

2 dms.; el ancho de 13 cms. y el espesor de 1 mm. (*Vuelven á sus asientos*).

Medio. — *M.* — Presten atención: estos dos signos (), se llaman paréntesis; en aritmética se emplean siempre dos, uno encurvado á la izquierda y el correspondiente, á la derecha (*señalando*). En vez de dos curvas pueden ser dos rectas [....] ó dos abrazaderas { }. Se usan para encerrar expresiones, generalmente, de dos ó más términos que deban multiplicarse ó dividirse por otra cantidad.

Si queremos multiplicar 8 por 9, escribimos 8×9 ; si queremos multiplicar $8 + 5$ por 9, no podemos escribir $8 + 5 \times 9$, porque esto significa que á 8 debe agregarse el producto 5×9 ó 45; sería, pues, $8 + 5 \times 9 = 53$. Para evitar esta confusión se encierra $8 + 5$ entre paréntesis y se escribe $(8 + 5)$ por 9 significa que debe sumarse $8 + 5$, primero; y la suma ó 13, debe multiplicarse por 9, después, así: $(8 + 5) 9 = 13 \times 9 = 117$, muy diferente de $8 + 5 \times 9 = 53$. ¿Comprenden, ahora, el uso del paréntesis? Los mismos números, los mismos signos, el mismo orden, y sin embargo, diferentes los resultados.

M. — ¿Qué quiere decir $(10 + 3) 9$?

A. — Que debemos sumar 10 y 3, 13; y 13 multiplicarlo por 9.

M. — ¿Qué quiere decir $10 + 3 \times 9$?

A. — Que debemos multiplicar 3 por 9 y agregar su producto, á 10, que da 37.

M. — Y se lee, en este caso, 10 más 3 todo multiplicado por 9. En este otro, 10, más 3 por 9.

Lean estas expresiones:

$(8 - 3 + 10) 5$; $(0.03 \times 3 + \frac{1}{7} - 2)$; $6; 5 \times 8 + 3 - 8 + 7 \times 5$; $(5 + 3 - 6) \times (8 - 2)$; antes de quitar el paréntesis, se hacen todas las operaciones dentro de él.

Así, observen: $(8 - 3 + 10) (5 + 6 - 2 - 3)$; $(7 - 0.7 - 0.3)$. Digo: 8 - 3, 5; más 10, 15; 5 + 6, 11, etc. (*Escribe, en la pizarra, $(15) \times (6)$: (6) ó 15×6 : $6 = 15$.*

Si tuviéramos que sumar $\frac{3+3+9}{9} + \frac{12-5+0.3}{4}$, necesitaríamos hacer uso del paréntesis, en este caso: reduciéndolos á un común denominador, equivalen á:

$$\frac{(3+3+9)7}{7 \times 9} + \frac{(12-5+0.3)9}{7 \times 9} = \frac{(3+3+9)7 + (12-5+0.3)9}{9 \times 7}$$

que se lee, etc.

Hacemos las operaciones y tenemos:

$$\frac{15 \times 7 + 7.3 \times 9}{7 \times 9} = \text{etc.}$$

Fin. — (*Pasan cuatro alumnos*). Escriban:

$15 + 8 - 9$ todo multiplicado por $6 - 4$; $15 + 8 - 9$ multiplicado por, paréntesis: $6 - 4$, cierren el paréntesis. Hagan esta operación: $\frac{7}{4} - \frac{3}{8}$ todo dividido por $\frac{7}{4} - \frac{3}{8}$ entre paréntesis.

(*Pasan otros alumnos á quienes hará hacer ejercicios semejantes*).

M. — Si quisiéramos quitar el paréntesis sin hacer antes las operaciones dentro de él, como en $(5 + 3) 8$, se multiplica cada término dentro del paréntesis por la cantidad fuera del paréntesis, sin cambiar los signos, así: $(5 + 3) 8 = 8 \times 5 + 3 \times 8$; en efecto: 5 más 3 es 8; 8 por 8, 64. Aquí: 5×8 , 40; 3×8 , 24; $40 + 24 = 64$; ven Vds. que el resultado es el mismo. En este otro ejemplo: $(5 - 2) \times (7 + 8)$; decimos: $5 \times (7 + 8) - 2(7 + 8)$, y á su vez: $5 \times 7 + 5 \times 8 - 2 \times 7 - 2 \times 8$. Si en vez de multiplicado por 8 fuera $(5 + 3) : 8$ se hace lo mismo, pero dividiendo, así: $(5 + 3) : 8 = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}$, en efecto, etc. (comprueba la identidad de los casos).

(*Pasan tres alumnos á quienes dicta ejercicios semejantes*).

Deberes. — Los que acerca del mismo punto indique el libro.

INDICACIONES

En la lección siguiente, hará ver la utilidad de suprimir los paréntesis en una ú otra forma; en $(1000 - 1) 97$; conviene $97 \times 1000 - 97$; en $(849 + 51) 97$, conviene 900×97 .

Las lecciones de geometría, por otra parte, exigirán el uso del paréntesis en la mayoría de los casos.

LECCIÓN 6ª

Tema.—Simplificación de un quebrado de numerador y denominador á varios términos.

Desarrollo.— *Principio.* — *M.* — Denme una expresión de cuatro términos; de un término y varios factores; reduzcan á un término $9 + 8 - 5$; á dos términos $7 + 5 - 3$; una expresión de cuatro términos que equivalga á 3; una expresión de un término y varios factores que equivalga á 24. Lean lo que voy á escribir:

$$\frac{(7 + 5 - 0.0005) (7 - 8)}{(\frac{1}{2} - 5) 8}$$

(*escribe con mucha rapidez, expresiones parecidas*).

M.— $(100 : 50 - 20 - 20) 200$, ¿cuánto es?
 $(85 - 35 + 1) 8$; $800 : 50$ multiplicado por 25.

Estos cálculos, á los que dedicará siempre 2 ó 3 minutos de cada lección, se resuelven por combinaciones que el maestro enseñará el día dedicado por nuestra distribución, á los ejercicios; la división y multiplicación mental por 25, 50, 75, 20, 30, 40, 60, etc. y la unidad seguida de ceros; de cualquier número por uno dígito; la multiplicación por 9, 99, 999; la multiplicación mental de ciertos números por otros de dos cifras como 15 por 13 descompuestos en $10 \times 15 + 3 \times 15$; 19×18 en $20 \times 18 - 18$; 87 por 11 en $87 \times 10 + 87$; las sumas $8 \times 925 + 2 \times 925$ en 8 veces 925 más 2 veces 925 = 10 veces 925; $89 + 55$ en $30 + 50 + 9 + 5$; las diferencias $15 \times 721 - 12 \times 721$ en 15 veces 721 menos 2 veces 721 = 3 veces 721, comienzo de una manera simple y agradable, del gran método de simplificación por el factorio, que no obstante abrir ancho hori-

zonte á la generalización, los maestros descuidan por no comprender quizá, su importancia en el campo de las operaciones ó, á veces, lo que es peor, por no saber cómo se factora una expresión. Así es como á menudo, se eternizan en las operaciones con el riesgo de equivocarse. $7 \times 49 + 7 \times 50 - 7 \times 95$ se reduce á un término haciendo cada multiplicación, la suma y por fin la resta, nunca de este modo:

$7 (49 + 50 - 95)$ operación que se hace mentalmente sin probabilidades de equivocarse, porque las cantidades son pequeñas.

M.—Si se divide el numerador y denominador de un quebrado por un mismo número, ¿qué resulta?

A.—Resulta un quebrado del mismo valor.

M.—¿Cómo simplificamos un quebrado?

A.—Dividiendo el numerador y denominador por un mismo número.

M.—(*Escribiendo*) ¿cómo simplificamos $\frac{24}{16}$?

A.—Dividiendo 24 entre 8 y 16 entre 8, de lo que resulta $\frac{3}{2}$.

M.—¿Cómo simplificamos $\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 4 \times 28}$? ¿Cómo simplificamos $\frac{7 \times 12 \times 12}{12}$?

A.—Suprimiendo el factor 3 en 9 y 3 en el denominador (*así lo hace el maestro*).

Otro.—Suprimiendo el factor 4 en 8 y 4 en el denominador; suprimiendo 7 en el numerador y 7 en el 28 del denominador.

(*En la pizarra, la expresión queda así:*

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7}{\underset{4}{\cancel{3}} \times \underset{4}{\cancel{4}} \times \underset{4}{\cancel{28}}} = \frac{6}{4}$$

A.—6 y 4 tienen el divisor común 2, luego, $\frac{6}{4}$ es igual á $\frac{3}{2}$.

Medio.—**M.**—¿Cuántos términos hay en el numerador de esta fracción? ¿Cuántos términos hay en el denominador?

A.—Un término arriba y un término abajo.

M.—No lo olviden. Vean Vds. cómo se simplifica un quebrado que tenga varios términos en el nume-

rador y uno ó varios en el denominador. Nada tiene de difícil.

Sea $\frac{28 + 14 - 42}{8 \times 7 - 28}$; se dividen *todos* los términos por un mismo número; de modo que si *todos* los términos no son divisibles por un mismo número, el quebrado no se puede simplificar. Esta fracción tiene cinco términos: uno, dos, etc.

Observemos si todos son divisibles por el mismo número. 28 es divisible por 7 y por 2 (*escribiéndolos*); 14 es divisible por 7 y por 2; 42 es divisible por 7 y por 2; 8×7 , lo mismo; lo mismo 28; *todos* los términos son divisibles por 7 y por 2; simplificamos la fracción dividiendo todos los términos por 7 y por 2:

$$\frac{4 + 2 - 6}{8 - 4} = \frac{2 + 1 - 3}{4 - 2} = \frac{0}{2} = 0.$$

tendremos: 28 dividido entre 7, 4; 14 dividido entre 7, 2, etc. (*escribiendo las cantidades de la manera que se indica y dividiendo por el otro factor, después; no conviene hacerlo por 14*).

Luego, lo importante es saber contar el número de términos y recordar que un término puede tener varios factores; que para dividirlo basta dividir uno de sus factores, como Vds. lo han hecho siempre. Haríamos muy mal si viendo 28 arriba y 28 abajo entre otros términos, como aquí, tachásemos los dos 28.

Otro ejemplo:

Simplifiquemos

$$\frac{8 \times 8 \times 6 - 9 \times 8 \times 6}{40}; \text{ hay tres términos.}$$

¿Qué factor divide á los tres? 8 está en el primer término, (*señalando*) en el segundo y en el tercero. Dividimos á cada uno, por 8; tachando, nos queda $\frac{8 \times 6 - 9 \times 6}{5}$.

¿Se puede simplificar más esta fracción? No; porque si estos dos términos son divisibles por 6, este otro no lo es. La simplificación es imposible.

Otro ejemplo:

$$\frac{(95 + 16) \times 16 + 24}{40}$$

¿cuántos términos hay en la expresión? Hay tres: uno, dos y tres. Porque, siempre, lo que está dentro de un paréntesis se considera, como en este caso, un factor; de modo que no hay dos factores y, todo, constituye un término.

Y se simplifica dividiendo 16, 24 y 40 entre 8.

Fin. — (Pasan cinco ó más alumnos al pizarrón).

Simplifiquen $\frac{8 \times 17 + 17}{17}$; $\frac{35 \times (8 + 13)}{7}$; $\frac{3(8 + 9) + 3(12 - 5)}{9 + 3}$;
 $\frac{8 \times 16 \times 8}{8 \times 24}$; $\frac{8 + 16 + 8}{8 + 24}$.

Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis*). Simplifiquen:

$\frac{(8 + 5) 9 - (8 + 5) 7}{(8 + 5) 12}$; $\frac{9 \times 25 \times 7 + 15}{35}$; $\frac{(8 - 7 - 2)(4 - 5) - 9(4 - 5)}{7 \times 8(4 - 5)(4 - 5)}$

Vuelvan á sus asientos.

M. — Hay casos muy bonitos; todo está en que Vds. tengan *vista* para simplificar. Este, por ejemplo:

$$\frac{2911 - 1324 + 2911 - 1324}{2911 - 1324}$$

¿Cómo simplificarían Vds. para no hacer restas y sumas tan grandes?

A. — No se puede simplificar porque todos los términos no son divisibles por el mismo número.

M. — Es cierto. ¿Cuántos términos tiene la cantidad?

A. — Seis términos.

M. — ¿Cuántos términos son $2911 - 1324$? (*escribiéndolos*).

A. — Dos términos.

M. — ¿Y ahora? (*escribiéndolos entre paréntesis*).

A. — Ahora, los dos números constituyen un término.

M. — Muy bien. Y el valor, en uno y otro caso ¿ha cambiado?

A. — No, señor.

M. — Luego, sin que la fracción altere su valor, hago esto:

$$\frac{(2911 - 1324) + (2911 - 1324)}{(2911 - 1324)}$$

¿Cuántos términos tengo, ahora?

A. — Tres términos.

M. — Cada uno es divisible por la cantidad 2911 — 1324. Divido y tengo: 2911 — 1324 dividido entre 2911 — 1324 ó por sí mismo es, 1; más: etc. (*escribiendo* $\frac{1+1}{1} = 2$). ¿Qué operación es más corta y más bonita?

A. — La que Vd. acaba de hacer.

M. — (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*). Simplifiquen:

$$\frac{8-9+8-9+8-9}{8-9+8-9}, \frac{7+5-6+7+5-6}{7+5-6}, \frac{1112-329-(1112-329)}{1112-329},$$

$$\frac{3 \times 8 - 5 \times 8}{24}$$

Vuelvan á sus asientos.

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios.

INDICACIONES

En lecciones subsiguientes simplificará expresiones como estas: $\frac{(8-24)5+32}{16}$, en que deben dividirse los términos dentro del paréntesis, es decir, los términos $8 \times 5 - 24 \times 5$. He observado hasta maestros, simplificar $\frac{8+35}{35}$, tachando los 35; simplificar $\frac{9 \times 18 \times 9}{9+18}$, tachando 18 y 9 arriba y abajo; esta evocación confusa de las imágenes, indica la necesidad de ejercitar con frecuencia estos reconocimientos, para no confundir término y factor. Pero si el maestro se equivocase en una de las lecciones de adquisición, produciría una organización mnésica difícil de destruir en lecciones subsiguientes, á punto de que después, en años posteriores, revivirá la falsa unidad psíquica.

El *medio* de la *Lección 11ª* se desarrolla así:

M. — Cuando tengamos que sumar ó restar fracciones en cuyo numerador y denominador hay decimales, se hacen desaparecer, en cada quebrado, de la manera sencilla que van Vds. á ver.

Sea $\frac{8.3}{0.856}$; igualamos con ceros el número de cifras decimales en el numerador, así: uno, dos, tres (*contando las del denominador*); uno, dos, tres (*agregando ceros al numerador*) $\frac{8.300}{0.856}$, suprimimos ahora, los puntos decimales y si hay ceros á la izquierda, también los ceros: $\frac{8300}{856}$ y tenemos, entonces, un quebrado cuyo numerador y denominador son cantidades enteras.

Otro ejemplo: sea $\frac{0.00008}{25}$; uno, dos, tres, cuatro y cinco; cinco cifras decimales; aquí, ninguna: agregamos cinco ceros $\frac{0.00008}{2500000}$ suprimimos (*tachando*) la coma y todos los ceros á la izquierda del 8; queda $\frac{8}{2500000}$.

Otro: $\frac{9.055}{0.834}$, etc. Pero, en estos casos, no hay sino un término en el numerador y un término en el denominador. Cuando hay varios términos se iguala el número de cifras decimales en todos los términos.

Así: en $\frac{9.5 + 0.45}{0.003 - 3.01}$ cada término debe tener tres cifras decimales porque el que tiene más, tiene tres (*señalando*); agregamos ceros; uno, dos, tres; uno, dos, tres, etc. (*escribiendo la fracción*: $\frac{9.500 + 0.450}{0.003 - 3.010}$). Ahora, suprimimos los puntos decimales y los ceros de la izquierda; nos quedarán, así, solo enteros (*escribiendo*) $\frac{9500 + 450}{3 - 3010}$.

Luego: hay que contar los términos y cada término debe tener un mismo número de cifras decimales, para suprimir el punto decimal. Cuando el numerador ó denominador no tienen sino un término y varios decimales, como: $\frac{0.12 \times 0.4 \times 8.0003}{8 \times 9.28}$ se iguala el número de cifras decimales contando todas las del numerador, un término, é igualando con ceros en el denominador, si tiene menos. En el numerador hay 7, en el denominador 2; agrego cinco ceros y tengo: $\frac{0.12 \times 0.4 \times 8.0003}{8 \times 9.280000}$; suprimiendo las comas y los ceros á la izquierda tengo, etc.

¿Por qué con tales modificaciones no altera el valor de la fracción? Porque multiplicamos el numerador y denominador por un mismo número que es la unidad seguida de ceros.

En efecto: $\frac{0.3}{8.39}$ la transformamos así: $\frac{30}{839}$; pero esto, es precisamente lo que resulta haciendo así:

$$\frac{0.3 \times 100}{8.39 \times 100} = \frac{30}{839}$$

porque para multiplicar un decimal por 100....

A. — Se corre la coma tantos lugares á la derecha, etc.

LECCIÓN 14ª

Tema. — Máximo común divisor de dos números por la descomposición en factores simples.

Desarrollo. — *Principio.* — M. — (*Pasan seis alumnos al pizarrón*). Escriban en números romanos, 75; 499; 1001. Escriban 25 diez millonésimos; 35 mms.³; 1425602 cms. cbs.; divisores de 1260. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis*). Dividan 425328 por 8 sin escribir dividendos parciales. Escriban cinco términos que reducidos valgan 1. Escriban:

$$\frac{(0.8 \times 0.00004 + 1) 77 + 4}{\frac{8}{3}}$$

Una expresión de tres términos con tres factores cada término. Reduzcan 8 Kgs., 9 Hgs. y 8 grs. á decigramos. Volumen de un objeto que mide 3 dms. de largo por 3 dms. de ancho y otro tanto de grueso. Vuelvan á sus asientos.

¿Cuánto es 90 por 2000? ¿35 por 20? ¿12 por 41? ¿75 + 63? ¿(8 × 5 + 2): 6 + 5 + 36? (*Pasan otros seis al pizarrón*). Sumen 1.00201 + 3 + 4.85007 + 3.1. Simplifiquen:

$$\frac{(0.30 - 0.25) 8 + (0.3 - 0.25)}{(9 - 8) (0.3 - 0.25)}$$

Vuelvan á sus asientos.

M. — ¿Qué es, mayor divisor de dos números? ¿Cuál es el mayor divisor de 10000? ¿1082 dividido por cuánto da 1? ¿95 — 0.8 dividido por cuánto da 1? ¿Qué cantidad dividida por otra da cero? ¿(0.00015 — 0.00015) 8 cuánto es? (*Traza líneas y pregunta su largo; traza rectángulos y pregunta su superficie*).

Medio. — ¿Cuál es el mayor número que divide á la vez á 120 y 700? A simple vista, como solemos hacerlo con números chicos, es difícil saberlo; entonces, recurrimos al lápiz ó á la tiza y hacemos así:

Descomponemos, primero, cada número en factores simples (*Lección 9ª; acostúmbrese al niño á comenzar por los mayores divisores simples, á la vista*).

120	5	700	7
24	3	100	5
8	2	20	5
4	2	4	2
2	2	2	2

Luego, leyendo los factores de uno solo de los números, decimos: 5, está en los dos (*escribe 5*); 3, no está en los dos, fuera; 2, está en los dos (*escribe 5 × 2*); 2, está en los dos; el tercer 2, no tiene tercer 2 en la otra cantidad, fuera; el M. C. D. es: $5 \times 2 \times 2$ ó 20

Otro ejemplo:

M. C. D. de 5720 y 5148.

(*Descompone y halla el M. C. D. como en el caso anterior*).

Fin. — (*Pasan seis alumnos al pizarrón*). M. C. D. de 36 y 66; de 75 y 600; etc. De 0.75 y 0.600; de 1 y 24; de 8 y 1000; vuelvan á sus asientos (*pasan otros seis, quienes hacen ejercicios como los anteriores*).

M. — ¿Qué es M. C. D. de dos números? ¿El M. C. D. de un número, qué número es? ¿Qué se hace para hallar el M. C. D. de dos números?

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

INDICACIONES

El M. C. M. *Lección 19ª*, de cantidades que no tienen más de dos cifras, caso que ocurre con frecuencia, se enseña de este modo, considerando que, hasta 100, se distinguen los números compuestos de los simples, siendo fácil la descomposición de aquéllos.

Medio. — ¿Cuál es el M. C. M. de 20 y 40? Desde que el M. C. M. no puede ser menor que el mayor de los números, 40 es divisible por 40 y por 20; luego, 40 es el M. C. M.

Otro ejemplo :

¿Cuál es el M. C. M. de 45 y 75? 75 ó (*escribiendo*) $3 \times 5 \times 5$ es divisible por 75 (*tomando siempre el número mayor*) ; 3 por 5, 15 (*señalando en la descomposición de 75*) por 3 (*escribiendo 3 como factor después de $3 \times 5 \times 5$*), 45; el producto $3 \times 5 \times 5 \times 3$ es el M. C. M. de 45 y 75.

Otro ejemplo :

M. C. M. de: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 y 22. Ya ven Vds. cuántos números; en un instante hallaremos el menor número divisible por todos ellos. (*Empezando por el menor, escribiendo y señalando á medida que enuncia*).

2	es divisible por 2
3×2	» » » 2 y 3
$2 \times 3 \times 2$	» » » 2, 3 y 4 porque
	2×2 es 4.
$2 \times 3 \times 2 \times 5$	» » » 2, 3, 4 y 5.

Dos por tres, 6; $2 \times 3 \times 2 \times 5$ es divisible también por 6.

7 no está en $2 \times 3 \times 2 \times 5$ (*señalando la expresión*) luego, debe escribirse como factor y $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 7$ es divisible por 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

2 por 2, 4; por 2 (*escribiendo*) 8; 8 está en $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 7 \times 2$; 9 está en 3 (*señalando*), por 3

(*escribiendo*); 10 está en 2 por 5; 11, no está; se agrega como factor (*escribiendo*). 2 por 3, 6, por 2, 12; 12 está como factor; 13 no está, lo agregaremos como factor, etc.

Así continúa el maestro, hasta obtener el M. C. M. de todos los números en un producto indicado.

LECCIÓN 15ª (Junio)

Tema. — Uso de letras en el cálculo.

Desarrollo. — *Principio.* — Cuadrado de 3, de 5, de 9, de 12; Cubo de 3, de 4; ¿cuánto es 6 por 75 más 4 por 75? ¿Fracciones equivalentes á $\frac{3}{4}$? ¿Reduzcan á impropio $2\frac{3}{4}$? ¿Un número divisible por 9? ¿Por 6? ¿El producto de milésimos por diez milésimos, qué da? ¿Fracciones equivalentes á $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{10}$, con el mismo denominador? ¿Mixto equivalente á $1\frac{13}{15}$?

Pasan cinco al pizarrón á quienes reparte objetos para que hallen el volumen unos, la superficie total, otros; después de 5 minutos, comprueba las operaciones rápidamente; durante ese tiempo, interroga á la clase acerca de puntos varios del programa ó escribiendo en el pizarrón, fracciones de uno ó varios términos enteros ó decimales, cuya simplificación indica el alumno.

Medio. — *M.* — En vez de decir: Un comerciante compró 4 Kgs. de azúcar, ó 5 Kgs. de azúcar ó 50 Kgs. de azúcar, podemos decir: compró a Kgs. de azúcar: en vez de decir el volumen de las cosas cuya forma Vds. conocen, es igual á $\text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$, se dice, por ser más corto, $a \times b \times c$; a , representa el *largo*; b , el *ancho*; c , el *alto*; adviertan que no podemos decir: es igual á $a \times a \times a$, porque, tal cosa significaría que las tres dimensiones son iguales; Vds. saben que, generalmente, no es así; tampoco podemos decir: es igual á $19 \times 19 \times 5$, porque entonces, nos referiríamos únicamente á aquel objeto que tuviera dichas dimensiones; Vds. acaban de oír de los que fueron á la pizarra, que no es así: de consiguiente, para comprender á todos los casos, decimos: $a \times b \times c$; a , b

y c ; cualquier valor que tengan, expresarán siempre el producto de las tres dimensiones. Es lo que se llama una *fórmula*, fórmula para hallar el volumen de los paralelepípedos; de modo que con ella, no hay necesidad de hacer razonamientos: si se nos da esta caja para que determinemos su volumen, recurrimos á la fórmula, la que nos dice que debemos conocer tres dimensiones; las hallamos y sustituimos luego, las letras por los números, así: $a \times b \times c = 3 \times 4 \times 2$ dms³. Esta fórmula $S = \frac{a \times b}{2}$, quiere decir que la superficie de todo triángulo es igual á la base por la altura sobre 2; de modo que, dándonos la base y la altura, no hacemos más que substituir. Si la base es 15 y la altura 12, a vale 15 y b 12; si la base es 0.0004 y la altura 0.008, a vale 0.0004 y b 0.008. De aquí que las letras no tengan valor fijo, pero expresan una verdad, una manera de hacer las operaciones cuando, para muchos casos, se emplea el mismo procedimiento.

Hemos comenzado ya, á estudiar las superficies geométricas y Vds. han notado la necesidad de expresarlas por una fórmula; si decimos: un número menos el mismo número, es igual á cero, no podemos escribir palabras porque la Aritmética no emplea palabras, sino números, letras y signos; no podemos escribir $7 - 7 = 0$ porque dice un *número*, y un número puede ser 8, 15, 0.0001, $\frac{8}{3}$; pero una letra indica cualquiera de ellos; entonces un número menos el mismo número, es igual á cero, lo expresamos así $a - a = 0$. Si se nos dice: un individuo compró cierta cantidad de azúcar á 0.50 \$ el Kg. gastando 80 \$, no conociendo la cantidad, diremos: x Kgs. por 0.50 \$ igual á 80 \$ ó $0.50 \times x = 80$. Si se nos dice: la suma de tres números es 125, escribiremos: $a + b + c = 125$; la suma de tres números iguales es 135, escribiremos: $a + a + a = 135$; la diferencia de dos números es 19, escribiremos: $a - b = 19$, sabiendo que a es mayor que b , porque solo así nos puede dar 19; el producto de cuatro números es 1, tres de éstos, iguales, escri-

biremos: $a \times a \times a \times b = 1$; la suma de dos números dividida por la diferencia de los mismos es n , escribiremos: $\frac{a+b}{a-b} = n$; la diferencia de los cuadrados de dos números es igual á la suma por su diferencia, escribiremos: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; de modo que si los números fueran 5 y 2; substituyendo, tendríamos: $25 - 4 = (5+2)(5-2)$, lo que, en efecto, es así; 21 en el primer miembro y 21 en el segundo; si los números fueran 9 y 7, substituyendo tendríamos.:

$81 - 49 = (9-7)(9+7)$ lo que, en efecto, es así, 32 en el primer miembro y 32 en el segundo; el volumen de la esfera es $\frac{4\pi R^3}{3}$, significa que si π es 3.14 el radio R , 5 ms., el volumen será:

$$\frac{4 \times 3.14 \times 5^3}{3}$$

¿Han comprendido Vds. el uso de las letras?

Para expresar números que se sabe pueden no ser iguales, se emplean letras cualesquiera, pero diferentes: así, la suma de dos números es S , podemos escribir $a+b=S$, ó bien $B+M=S$, ó bien $x+y=S$. No obstante, conviene emplear las primeras del abecedario, ó las últimas ó las iniciales; si se dice suma, suma se representa por S ; volumen por V ; producto por p ; cociente, igual dividendo sobre divisor, escríbese $C = \frac{n}{d}$: radio, por R ó r , porque usando las iniciales nos es más fácil recordar el significado ó el valor de lo que representa la letra. Así: $a-b=d$; d el valor de qué, representará? $D=2R$, ¿ R qué representará?; $\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$ R y r qué representarán?

Fin. — (Pasan seis alumnos al pizarrón.) Escriban: $a+b$ todo multiplicado por b ; $\frac{a-b}{a+b} = m$; el producto de cuatro números es igual á $m n$; la suma de dos números más la diferencia de los mismos es igual á dos veces el primero; la suma de dos números, todo, por la suma de los mismos, es igual al cua-

drado del primero, más 2 veces el producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo. Vuelvan á sus asientos (*Pasan otros seis*).

Un individuo ha comprado vacas, ovejas y caballos en igual cantidad, sumando 600 animales. Escriban la igualdad. Radio más radio, igual á diámetro. Un número dividido por la suma de otros dos, menos $\frac{m}{n}$ todo multiplicado por $\frac{1}{2}$ es igual á 0; un individuo hace a pasos hacia adelante y b pasos hacia atrás. ¿cuántos pasos ha hecho? Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis*) *M.* — ¿Cuáles es el número entero que sigue inmediatamente á a ? Si el día dura h horas ¿cuántas horas dura la noche? Si 1 metro de género cuesta m ctvs., ¿cuánto costarán n metros? Una provisión de pasto dura t días para n caballos ¿cuántos días durará para un solo caballo? ¿Cuántas veces es mayor la velocidad de una bala que recorre m metros por segundo, que la de una piedra tirada por la mano, que recorre n metros por segundo? Escriban una fracción literal; la suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo. El cuadrado de un número menos 1, todo sobre el mismo número menos 1, es igual al mismo número más 1. Sea, el número 5. Sustituyan. Vuelvan á sus asientos.

M. — ¿Por qué letras representaríamos: suma, producto, radio, circunferencia, número, perímetro, base, altura, lado, etc.?

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

INDICACIONES

Se dictarán, en lecciones sucesivas, numerosísimos ejercicios para que la mano se habitúe á escribirlos rápidamente mediante la simple asociación acústico-viso-motora. La práctica ha evidenciado toda clase de contratiempos en alumnos de cursos secundarios, que oyen una expresión, no la ven, se

equivocan en tres ó cuatro partes al reproducirla, ó interrumpen la escritura mientras forman imagen ú olvidan los signos si no se enuncian uno á uno ; ó leen mal lo que tienen por delante. La lectura y escritura de expresiones, constituyen el *lenguaje matemático*: el lenguaje es el elemento primordial de todo aprendizaje porque es la comprensión. Se le forma no con razonamientos, sino con ejercicios: oyendo, viendo, leyendo y escribiendo. Estoy seguro que para ningún profesor de álgebra pasa desapercibido este hecho: el trabajo que suele costar para que los alumnos no confundan *la diferencia de dos cuadrados* con el *cuadrado de la diferencia de dos números*, dos de las fórmulas más simples.

LECCIÓN 1ª (Julio)

Tema. — Valorización de las letras.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — Observen: $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ¿No es verdad? $\frac{3+3+3+3}{4+4+4+4}$ ó $\frac{12}{16}$ ¿á que es igual? ¿No lo notan?

Pues, á $\frac{3}{4}$; aquí, no hemos sumado estos quebrados puesto que en la suma nunca se suman los denominadores. Hemos sencillamente, hecho lo siguiente $\frac{4 \text{ veces } 3}{4 \text{ veces } 4}$ ó $\frac{4 \times 3}{4 \times 4}$; multiplicando numerador y denominador por un mismo número; de aquí que $\frac{12}{16}$ sea el valor de $\frac{3}{4}$.

De modo que dividiendo la suma de todos los numeradores por la suma de todos los denominadores de varias fracciones iguales, la fracción que resulta es del mismo valor que cualquiera de ellas. Pero las fracciones tienen que ser del mismo valor, así: $\frac{6}{7} = \frac{12}{14} = \frac{6+12}{7+14}$ ó $\frac{18}{21}$, porque $\frac{6+12}{7+14} = \frac{3 \text{ veces } 6}{3 \text{ veces } 7}$. Entonces si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ¿qué otra fracción será igual á cualquiera de ellas?

A. — $a + c$ sobre $b + d$.

M. — Observen que todo numerador de una fracción

igual á otra, es igual ó múltiplo de su numerador; lo mismo sucede con el denominador (*señalando*).

¿Cuánto es $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$?

A. — $\frac{12}{5}$.

M. — ¿Y $\frac{12}{5}$ es el valor de qué?

A. — De una sola de las fracciones.

M. — 10 Kgs. de arroz cuestan \$ 6, ¿cuánto cuestan 5?

A. — La mitad, ó sea 3 \$.

M. — 24 litros de vino cuestan 12 \$, ¿cuánto costarán 18 litros?

No hay necesidad, en este caso, de averiguar el precio de un litro; podemos conocer el de 6 litros, porque 6 es la cuarta parte de 24 y conociendo el de 6 litros conoceremos fácilmente el de 18, porque 18 es tres veces 6. Si 24 litros valen 12 \$, 6 litros valdrán 4 veces menos ó 3 \$ y 18 litros, 3 veces más ó 9 \$. (*No debe darse á las partes alícuotas mayor trascendencia que la de una simple abreviación del método de reducción á la unidad; en la Lección 19ª habrán motivado una vasta ejercitación*).

M. — Díctenme una expresión literal para escribirla.

A. — $a \times b + c$, $\frac{a^2 + a^2 + 1}{7}$; etc.

M. — Una igualdad con incógnitas y números.

A. — $8x + 7y + y = 8$; $9y + 12z = 1$; $\frac{3z}{4} + 5z - 2z = \frac{7z}{5}$, etc.

M. — ¿Cuánto es $5a + 7a + 11a - 12a$?; $29ab - 7ab$?; $8a + 4a + 5b + 3b$? etc.

Medio. — Ahora, vean Vds. cómo se valoriza una expresión literal. ¿Cuál será el volumen de ésta esfera (*presentándola*) cuyo radio es de 3 cms.? La fórmula del volumen de la esfera es $V = \frac{4 \times 3.14 \times R^3}{3}$; substituímos R por 3 cms. y tendremos $\frac{4 \times 3.14 \times 3^3}{3}$ cms.³, $4 \times 3.14 \times 3 \times 3 = 113.04$ cms. cbs.

Valorizar $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a + b + c + d}$ siendo $a = 8$; $b = 6$; $c = 4$; $d = 2$; Substituyendo en la expresión, las letras por

sus valores, tendremos $\frac{8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2}{8 + 6 + 4 + 2} = \frac{64 + 36 + 16 + 4}{8 + 6 + 4 + 2}$
¿Cómo son todos los términos?

A. — Divisibles por 2; luego podemos simplificar la expresión, resulta (*escribiendo el maestro*

$$\frac{32 + 18 + 8 + 2}{4 + 3 + 2 + 1} = \frac{60}{10} = 6).$$

M. — El cuadrado de la altura h de un triángulo es $h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$ siendo a la base, b y c los otros dos lados: ¿cuál será la altura de este triángulo (*presentando un cartón*) cuya base es de 3 dms; b vale 4 dms. y c , 2 dms.? (*Estas y otras expresiones, deben tenerse escritas con anticipación*).

Substituyendo, tengo:

$$h^2 = \frac{(3+4+2)(3+4-2)(2+3-4)(2-3+4)}{4 \times 3^2} = \frac{9 \times 5 \times 1 \times 3}{4 \times 9} = \frac{15}{4} = 3.75.$$

El cuadrado de la altura h es, pues, 3.75. Hay que buscar un número que elevado al cuadrado ó multiplicado por sí mismo dé 3.75 ó aproximadamente 3.75, ese número es 1.9; la altura mide 1.9 dms. (*La comprobación*).

Valorizar $\frac{a \times b}{a+b} - \frac{ab}{b-a}$, siendo $a = 0.0003$ y $b = 0.02$

Substituimos las letras por sus valores $\frac{0.0003 \times 0.02}{0.0003 + 0.02} - \frac{0.0003 \times 0.02}{0.02 - 0.0003}$; haciendo las operaciones tenemos: $\frac{0.000006}{0.0203} - \frac{0.000006}{0.0197}$; haciendo desaparecer los decimales: $\frac{6}{20300} - \frac{6}{19700}$ y restamos las fracciones.

Fin. — (*Pasan al pizarrón cuatro alumnos*). Valorizar $V = \frac{P}{D}$ siendo $P = 32$, $D = 8$. Escriban: $\frac{a+b+c}{5} - \frac{a+b+c}{5} - \frac{abc}{6}$; valoricen; siendo $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. (*De esta manera se darán ejercicios procurando que sean fórmulas, valores fraccionarios y operaciones cortas*).

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

INDICACIONES

El *medio* de la *Lección 11ª* puede desarrollarse en ésta forma:

A.—M.— $8=8$ (*escribiendo*) es una igualdad; $9=15$, es una igualdad falsa porque 9 no es igual á 15; 9 Kgs. = 800 grs., es una igualdad falsa porque 9 Kgs. equivalen á 9000 grs.; $8 + 9 - 5 = 17 - 5$, es una igualdad, porque $8 + 9$ es 17, menos 5, 12 y $17 - 5$ es 12 (*señalando*); $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20}$ es una igualdad; $7 \times 8 = 56$ es una igualdad; $S = a \times b$, es una igualdad; $a - b = c$, es una igualdad; $a - b = a + b$ es una igualdad falsa, porque la diferencia de dos números nunca es igual á su suma; $9x + \frac{3x}{4} = 8$, es una igualdad.

Piensen todos una igualdad.

Als.—(Dan igualdades y el maestro escribe algunas).

B.—Todas las cantidades que están á la izquierda del signo igual, constituyen el primer miembro; las que están á la derecha, constituyen el segundo miembro. ¿Cuál es el primer miembro de esta igualdad? (*indicando una de las igualdades del pizarrón ó del cartel*); ¿cuál es el segundo de ésta? ¿A qué lado está el primer miembro, el segundo? ¿Piensen una igualdad?

(*Pide á cuatro ó cinco alumnos*).

C.—¿Cuántos términos tiene el segundo miembro de esta igualdad? (*señalando*) ¿De esta otra? ¿de esta otra?

¿El primer miembro de la primera igualdad? ¿De la segunda? ¿La igualdad quinta? (*La pizarra presentará ordenadamente escritas, igualdades como estas:*

$$a b c x = 85 a b + 6; -\frac{3ax}{4} + \frac{a+b}{5} = 7x - \frac{a}{b};$$

$$0.03 \frac{(a+b)}{8} = \frac{0.03 a}{8} + \frac{b}{8}, \text{ etc.}$$

La *Lección 12ª* debe comenzarse objetivamente para fijar intensamente la imagen de que, agregando cosas iguales á cosas iguales, resultan cosas iguales.

M.—Aquí tenemos 15 bolitas y aquí otras 15, ¿cómo son ambos montoncitos?

A.—Iguales.

M.—Ahora, agregamos á uno y otro montoncito, uno y otro miembro, cinco bolitas (*agregándoselas*), los montoncitos que resultan ¿cómo son?

A.—Iguales.

M.—¿Cuántos redondeles hay en este grupo?

A.—Hay 12 redondeles.

M.—¿En éste y en éste?

A.—En el primero 7 y en el segundo 5. Siete redondeles más cinco redondeles. El primer grupo es igual á los otros dos juntos.

M.—Luego, entre ellos cabe el signo igual. Ahora, agreguemos tres redondeles aquí y tres al segundo miembro ¿resultan?

A.—15 redondeles y 15 redondeles. Resulta siempre una igualdad.

M.—Aquí tenemos $25 = 32 - 7$. Si agregamos 7 al primer miembro y 7 al segundo, así: $25 + 7 = 32 - 7 + 7$ ¿qué resultará?

A.—Otra igualdad. (*Escribe el signo igual*).

M.—Aquí tenemos $5a = 4b - 6$. Si agregamos á 5 a , $\frac{2}{3}$ y á 4 $b - 6$, $\frac{4}{10}$, que es igual á $\frac{2}{5}$, ¿resultará?

A.—Otra igualdad.

M.—De aquí, pues, que si agregamos á uno y otro miembro de una igualdad una misma cantidad, resulta siempre otra igualdad, aunque el número de términos aumente, ó varíe el valor de los miembros. Vean Vds. que importante es este hecho. Tenemos $x - 8 = 13$; si queremos que quede sólo x en el primer miembro, agregamos 8 al primero y ocho al segundo; así: $x - 8 + 8 = 13 + 8$; pero x menos 8 y más 8 es x , porque quitando y agregando el mismo número á una cantidad, la cantidad no varía; entonces, los borramos: queda $x = 13 + 8 = 21$.

En $\frac{x}{c} + \frac{a+b}{c} - \frac{m+n}{d} = 0$, podemos agregar á uno y otro miembro $\frac{m+n}{d}$ y resultará, etc. .

A a \$ quitándole 3 \$ y agregándole luego, 3 \$, ¿cuántos pesos quedan? A un montón de 28 cuadernos se quitan 10 y luego se agregan 10 cuadernos, ¿cuántos cuadernos quedan? $8 - 7 + 7$ ¿cuánto es? $m b - a + a$ ¿cuánto es? (*escribiéndolas luego, hace la misma pregunta*). De aquí, que, cuando en una expresión encontramos dos cantidades iguales, pero una con signo $-$ y otra con signo $+$ tachamos una y otra, porque no dan ni quitan, juntas valen 0.

En la *Lección 16ª*, se comenzará por la igualdad $7=7$; si hacemos á uno y otro miembro igual número de veces mayor, 5 veces, resulta una igualdad, $7 \times 5 = 7 \times 5$: se continúa con las igualdades $a = a$, $am = bm$; $a + b = 8$, teniendo presente que para hacer una expresión 5 veces mayor, se multiplica por 5, cada uno de sus términos. Se continúa con $\frac{0.03x}{a} + \frac{7x}{b} - 3 = 0$, etc., dando, á la aplicación, la mayor amplitud posible. Luego, se hará uso del paréntesis: $a + b = c$, $(a + b) 7 = 7 c$.

LECCIÓN 7ª (Agosto)

Tema.—Hallar el valor de la incógnita, en una igualdad.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — Resuelvan (*mentalmente*) $8x + 9x + 12 + 3x$, ¿cuánto es? ¿ a por a ? ¿ $5a$ por $3a$ por $2a$? ¿ $(8a + 3a - 5a)$?

(*En la parte izquierda del pizarrón, estarán escritas las siguientes ecuaciones:*

$$1^a \frac{7x}{3} = 8.$$

$$2^a 4x + 5a = b.$$

$$3^a 3x - 9 = 12.$$

$$5^a 7x = 24.$$

$$6^a \frac{9x}{3} + 5x = 2.$$

7^a $9a + 7x = 6x - a$. *Escritos el 3 de la 1^a; 5a, de la 2^a; 9 de la 3^a; 7, de la 5^a; 3 de la 6^a, y 6x y 9a, de la 7^a, con tiza roja).*

Todo lo que está escrito con tiza roja, quiero que desaparezca del miembro en que está; pero de modo que la igualdad subsista. Vds. dirán cómo. En la 1^a ecuación.

A. — Multiplicando por 3 uno y otro miembro (*el maestro escribe á la derecha $\frac{7x \times 3}{3} = 8 \times 3$*) y tachando el 3 en el numerador y denominador del 1^{er} miembro. (*Así se hace*).

M. — En la 2^a igualdad.

A. — Restando á uno y otro miembro, $5a$; resulta $4x + 5a - 5a = b - 5a$; pero $5a - 5a$ es 0; entonces queda $4x = b + 5a$.

M. — Muy bien. En la 3^a ecuación, etc.

Medio. — De modo que ya sumando, ya restando, ya multiplicando, ya dividiendo, podemos dejar en un miembro solo, el término ó la letra que se nos antoja. Esto es muy importante. Hagamos la prueba con la 1^a ecuación. Deseamos que quede en el primer miembro la x sola. Multiplicando por 3 los dos miembros, como lo acaban de indicar Vds., resulta $7x = 24$; y dividiendo los dos miembros de la última igualdad por 7, resulta $x = \frac{24}{7}$; (*escribe á la derecha de la 2^a ecuación*), tenemos la x sola, en un miembro. En este caso, nos ha bastado multiplicar y dividir. Hagamos la prueba con la segunda ecuación. Quitando $5a$ á uno y otro miembro, resulta $4x = b - 5a$; dividiendo por 4, uno y otro miembro, resulta $x = \frac{b - 5a}{4}$. Tenemos la x sola en un miembro. Nos ha bastado restar y dividir. Hagamos la prueba con la 3^a igualdad. Sumando 9, á uno y otro miembro, resulta $3x = 21$, lo que hicieron Vds. Dividiendo por 3 uno y otro miembro, resulta: $x = \frac{21}{3}$ ó 7. Otra vez sola la x . Nos ha bastado sumar y dividir. Hagamos la prueba con la 6^a. Multiplicando por 3 todos los términos de uno y otro miembro, resulta: $9x + 3 \times 5x =$

2×3 ; $9x + 15x$ son $24x$; entonces $24x = 6$; dividiendo uno y otro miembro por 24, resulta $x = \frac{6}{24}$ ó $\frac{1}{4}$, otra vez la incógnita sola en un miembro.

Hagamos la prueba con la 7ª igualdad. ¿Cuáles son términos desconocidos ó con la incógnita?

A. — $7x$ y $6x$.

M. — Muy bien. Los reunimos en el primer miembro; quitando $6x$ á uno y otro miembro, resulta: $9a + 7x - 6x = -a$; quitando $9a$, á uno y otro miembro, resulta: $7x - 6x = -a - 9a$; pero $7x - 6x$ es x ; luego $x = -a - 9a$, otra vez x sola en un miembro con solo restar. Pues, dejar la incógnita sola en un miembro, lo que se llama *aislar la incógnita*, es hallar su valor ó resolver la ecuación.

Han visto Vds. la manera sencilla para hacerlo. Saquen las pizarras.

Fin. — Hallen el valor de x ó aislen á x en $5x = 10$; $8x = 9$; $4x = a + b$; $x + 9 = 18$; $x - 5 = 1$; $x - 8 = 0$; $x + b = c + d$; $x - b = m$; $x + b - c = 1$; $3x + 4x = m$; $8x + 5x - a = b$; $x + \frac{x}{12} = 4$; $\frac{x}{12} = \frac{4}{12}$; $\frac{x}{12} = a$; $\frac{x}{12} = a + 1$; $\frac{x}{2} - 3 = 1$; $\frac{x}{2} = 0$; $8x = 7x + 8$; $8x + 7 - x = 14$; $17y + 19 - 2y = 64$; $21z - 33 = 227$; $38 - 2y = 9y - 39$; $18x = 14x + 30 + 10x + 16 - 20x$; $x = x - 9 + 3x + 2 + 12x - 15$. Guarden las pizarras. (*Pasan cinco al pizarrón*). Resuelvan las igualdades que voy á dictarles: $x + \frac{x}{4} = 15$; $\frac{7x}{8} = 35$, etc. (*al resolver una, se da otra*).

Deberes. — Los que indique el libro de ejercicios y problemas.

INDICACIONES

Para que el maestro pueda seguir un orden y evitarse el trabajo de formar series graduadas, recomendamos *Ejercicios y problemas* de MORF y TZAUT, pág. 110.

I. — En la *lección siguiente*, enseñará á resolver ecuaciones como estas :

1ª $7(y - 3) = 14$; 2ª $10(x + 2) = 11x + 17$; 3ª $3\frac{3}{4}x = 45$; 4ª $\frac{9}{x} = 12$; 5ª $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; 6ª $1.111 - 0.1111x = 0.3333$; 7ª $\frac{12-3x}{4} - \frac{3x-11}{3} = 1$; 8ª $\frac{x+15}{x-3} = 4$, cada una de las cuales responde á un tipo de ecuaciones dentro de la capacidad de un alumno de 4º, 5º y 6º grado. A otras formas, será prudentia no extenderse.

II. — Dos casos iguales á una tercera, etc., se generalizará con fórmulas geométricas. El volumen V de una esfera es $\frac{3.14 \times 4 \times R^3}{3}$; y el mismo volumen $V = \frac{4 \times \pi R^3}{3}$. ¿Cómo son las cantidades?

LECCIÓN 11ª

Tema. — Resolución de problemas por medio de las igualdades.

Desarrollo. — A. — M. — Resuelvan este problema: 3 veces un número más 5 veces el mismo número es igual á 40 menos 2 veces el mismo número. (*Escrito en el pizarrón*). ¿Cuál es el número?

Als. —

M. — (*Después de un minuto*). Parece que no lo comprenden. ¿No es verdad?

¿Qué se quiere conocer?

A. — El número.

M. — El número es, de consiguiente, una incógnita. Aquí, las igualdades nos sacarán inmediatamente de apuros. Desde que ese número es una incógnita, lo representaremos por x , una de las letras con que representamos lo desconocido. Ahora, leamos de nuevo el problema: 3 veces un número, está escrito; será entonces, $3x$; más 5 veces el mismo número, está escrito; más 5 veces x (*escribiendo* $3x + 5x$); es igual á.... escribo el signo $=$; $3x + 5x =$; 40 menos 2 veces el número; escribo $40 - 2x$;

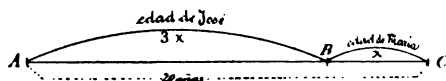
pero aquí tengo una igualdad de la que deseamos saber el valor de qué?

A. — De x , que representa el número desconocido.

M. — Pues, hay que aislar á x ; (*hallar el valor de x por el procedimiento conocido*). Resulta $x = 4$; luego 4 es el número. Comprobemos: 3 veces 4, 12; más 5 veces 4 ó 20, 32; igual á 40 — 2 por 4 que es 32. Exacto.

Otro problema.—La edad de José es tres veces la edad de María. La edad de José más la edad de María es 20 años. ¿Cuál es la edad de José y la de María?

Objetivación



Análisis: — Representemos por la línea $A C$ las dos edades juntas. $A C$ es igual á $A B + B C$, edades respectivamente de José y María; luego, $A C$ vale 20 años. La edad de María no la conocemos; la representamos por x ; la de José, dice el problema que es 3 veces la de María; entonces será $3x$; pero la suma de las dos edades (*señalando siempre en la recta*) es, según el problema, igual á 20 años; entonces $3x + x = 20$.

SOLUCIÓN

Aislemos á x ; $x = 5$; la edad de María es 5 años porque la habíamos representado por x .

Otro problema: Dividir 70 en tres números de manera que el 1º valga una unidad menos que el 2º y el 3º dos unidades más que el 2º.

Si conociéramos el 2º, conoceríamos el 1º y el 3º. No lo conocemos, es incógnita y lo representamos por x ; entonces el 1º, que vale una unidad menos, será $x - 1$; el 3º, que vale dos unidades más que el 2º,

será $x + 2$ (*escribiéndolos en columna*). Pero, dice el problema que los tres juntos ó sumados, valen 70, entonces $x - 1 + x + x + 2 = 70$. Habíamos dicho que para conocer los 3 números nos bastaba conocer el 2º que representamos por x ; entonces necesitamos aislar á x , y resulta $3x + 1 = 70$; $3x = 69$; $x = 23$; el 2º número es 23; el 1º será 22 y el 3º 25. En efecto: sumándolos dan 70.

Otro problema:— La superficie de un círculo es de 314 ms.² ¿Cuál es el valor del radio?

S. del C. = 314 ms.²

S. del C. = $3.14 R^2$ (*fórmula*).

Entonces $3.14 R^2 = 314 \text{ ms.}^2$ porque dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí. Como deseamos saber el valor del radio representado por R , hay que aislar á R ; tenemos $R^2 = \frac{314 \text{ ms.}^2}{3.14}$ ó $\frac{31400}{314} = 100$.

Para que R al cuadrado valga 100, R tiene que valer 10 porque 10 por 10 es 100. Luego el radio es de 10 ms.

Otro problema:— 3 veces la quinta parte de un número, aumentado en 7 es 34 ¿cuál es el número? ¿Cuál es lo desconocido preguntado por el problema?

B.—A. — El número y lo representaremos por x .

M. — ¿Cómo escribiremos la quinta parte del número?

A. — Escribiremos $\frac{x}{5}$; tres veces la quinta parte $\frac{3x}{5}$.

M. — 3 veces la quinta parte aumentada en 7?

A. — $\frac{3x}{5} + 7$.

M. — Y después ¿cómo completaremos la igualdad de acuerdo con el enunciado?

A. — $\frac{3x}{5} + 7$, es igual á 34.

M. — Ya tenemos la ecuación. ¿Qué debemos hacer ahora?

A. — Aislar á x ó valorizarla. Multiplicando por 5 uno y otro miembro, primero.

M. — (*Haciendo lo indicado*) $3x + 7 \times 5 = 34 \times 5$.

A. — Luego, se quita 35, etc.

M. — Pasaba un grado en excursión, conducido por su maestro; un transeunte, viendo tantos, dijo: ¿dónde van esos 100 niños?

El maestro contestó: no son 100; pero el doble de los que son menos 40 serían 100. ¿Cuántos niños conducía el maestro?

A. — Representamos por x el número de niños.

$2x - 40 = 100$, de acuerdo con el enunciado del problema.

Otro A. — Añadiendo 40 á uno y otro miembro se obtiene $2x = 140$; dividiendo por 2 se obtiene $x = 70$; 70 eran los niños que conducía el maestro.

C. — (*Pasan cuatro alumnos*). Expresen en términos lo que voy á decir: 4 veces un número más 8.

Als. — (*Escriben $4x + 8$*).

M. — Un número multiplicado por 8, más la quinta parte del mismo, menos 7 veces el mismo es igual á 90.

Als. — (*Escriben $8x + \frac{x}{5} - 7x = 90$*).

M. — La longitud de un palo menos sus $\frac{3}{5}$ partes es igual á 20 cms.

Als. — (*Escriben $x - \frac{3x}{5} = 20$ cms*).

M. — Añadiendo 27 naranjas á las naranjas que contiene una canasta resultan cuadruplicadas. ¿Cuántas había en la canasta al principio?

A. — (*Escriben la ecuación*).

M. — Un cuaderno de 160 hojas después de arrancarle cierta cantidad, queda con 85 hojas. ¿Cuántas se le arrancaron?

Vuelvan á sus asientos.

(*Pasan otros cuatro*).

M. — Expresen en igualdad, los siguientes enunciados: Si al numerador de una fracción agregamos 9 la fracción vale $\frac{11}{6}$ ¿cuál es la fracción?

Als. — (*Escribiendo la igualdad*).

M. — En un corral las gallinas son tres veces los patos; los conejos dos veces las gallinas; los patos

más las gallinas más los conejos, hacen 42 animales.
¿ Cuántos son los patos ?

Als. — (Plantean la ecuación).

*Deberes:—*Traer el enunciado y la ecuación de un problema.

LECCIÓN 1ª (Septiembre)

Tema.—Método de reducción á la unidad.

Desarrollo. — Principio. — M.—8 ovejas valen 32 \$, ¿ cuánto vale una ? Un metro de bramante vale 20 cts., ¿ cuánto valen 10 metros ? Un litro de agua pesa 1000 gramos, ¿ cuántos gramos pesarán 85 litros ? 25 tinteros iguales costaron 75 pesos, ¿ cuánto costaría cada tintero ? Un tren anduvo 400 Kms. en 10 horas, ¿ cuánto anduvo por hora ? ¿ Cuánto andará en 6 horas ? Cada ejemplar de esta historia tiene 200 páginas, ¿ cuántas páginas tendrán 8 ejemplares ? 9 ejemplares de esta revista suman 450 páginas, ¿ cuántas páginas tendrá un solo ejemplar ? 8 obreros hacen una obra en 12 días, ¿ cuántos días empleará un solo obrero para hacer la misma obra ? 8 obreros hacen una obra en 12 días, ¿ cuánto harán los 8 obreros en un día ? Entre 8 obreros han hecho una casa, ¿ cuánto ha hecho cada uno, de la casa ? Entre 8 obreros han hecho una casa, ¿ cuánto tiempo emplearía un solo obrero para hacer la misma ? 8 obreros necesitan 12 días para hacer una casa, los mismos obreros ¿ cuánto harán de la casa, en un día ?

Este procedimiento de averiguar siempre cuánto vale *uno*, lo que hace *uno*, que se hace en *uno*, ó se sabe lo que vale *uno*, lo que hace *uno*, qué se hace en *uno* es lo que se llama resolver problemas por el método de reducción á la unidad. Los problemas que mentalmente han resuelto Vds., son simples y no exigen esfuerzo. Pero los hay de dos, de tres, de cuatro combinaciones. La solución no es de ninguna manera complicada. Es más larga. Van Vds. á verlo prestando 5 minutos de atención.

Medio.—**M.**—Hé aquí un enunciado: 8 obreros trabajando 10 horas por día hacen un murallón de 45 ms. de largo, 2 de ancho y 6 de altura en 20 días. ¿Cuántos días emplearán 16 obreros trabajando 8 horas por día para hacer un murallón de 81 ms. de largo, 6 de altura y 1.5 de ancho?

Pensarán Vds. ¡qué difícil es! Nada de eso. Deseamos conocer los días que se necesitan para construir una pared diferente de otra variando las horas y la cantidad de obreros. La incógnita es, pues, x días que se emplearán para construir la segunda pared. Y razonamos, planteamos y resolvemos de esta manera:

I.—Si 8 obreros trabajando 10 horas hacen	45 ms. de largo, 2 ms. de ancho y 6 ms. de alto en.....	20 días.
II.— 16 "	81 " 1.5 " 6 " "	x " "

ANÁLISIS

L. - Si 8 obrs.	trab. 10 horas hacen 45 ms. de largo, 2 ms. ancho y 6 ms. alto en ..	20 días
1 obr.	10 " haría 45 " " " 2 " " 6 " " "	20 x 8 "
1 "	1 " 45 " " " 2 " " 6 " " "	20 x 8 x 10 "
1 "	1 " 1 " " " 2 " " 6 " " "	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45}$
1 "	1 " 1 " " " 1 " " 6 " " "	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45 \times 2}$
1 "	1 " 1 " " " 1 " " 1 " " "	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45 \times 2 \times 6}$

¿Notan Vds. todo reducido á la unidad? Ahora de la unidad pasemos á satisfacer las condiciones de la segunda parte:

III.—Si	1 obr. trab.	1 h. diaria	hace una muralla de 1 m. largo	1 m. ancho	y 1 m. alt. en	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45 \times 2 \times 6}$ dias
16 "	"	1 "	"	1 "	"	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45 \times 2 \times 6}$
16 "	"	8 "	"	1 "	"	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45 \times 2 \times 6 \times 16}$
16 "	"	8 "	"	1 "	"	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45 \times 2 \times 6 \times 16}$
16 "	"	8 "	"	1 "	"	$\frac{20 \times 8 \times 10}{45 \times 2 \times 6 \times 16 \times 8}$
16 "	"	8 "	"	1.5 "	"	$\frac{20 \times 8 \times 10 \times 81}{45 \times 2 \times 6 \times 16 \times 8}$
16 "	"	8 "	"	1.5 "	"	$\frac{20 \times 8 \times 10 \times 81 \times 1.5}{45 \times 2 \times 6 \times 16 \times 8}$
16 "	"	8 "	"	1.5 "	"	$\frac{20 \times 8 \times 10 \times 81 \times 1.5 \times 6}{45 \times 2 \times 6 \times 16 \times 8}$

que es precisamente lo que pide el problema. (*El maestro explicará de este modo: Si 8 obreros trabajando 10 horas diarias hacen una muralla de 45 ms. de largo por 2 de ancho y 6 de altura en 20 días; un obrero trabajando las mismas horas y el mismo murallón, empleará 8 veces más días. El mismo obrero trabajando 1 hora en lugar de 10 diarias, el mismo murallón, empleará 10 veces más días que en el caso anterior ó $20 \times 8 \times 10$ días, etc*). Simplificando esta fracción tenemos:

$$\frac{20 \times 8 \times 10 \times 2 \times 9 \times 1.5 \times 6}{45 \times 2 \times 6 \times 16 \times 8} =$$

$$\frac{20 \times 9 \times 1.5}{16} = \frac{20 \times 9 \times 15}{160} = \frac{9 \times 15}{8} = 16.875 \text{ días}$$

Como en los dos casos la altura de la pared es la misma, no teníamos necesidad de reducirla á 1 puesto que dividimos por 6 y luego multiplicamos por 6. Nos hubiésemos ahorrado estas dos líneas, lo cual conviene para economizar tiempo. Por otra parte, si observan la expresión notarán en el denominador (*señalando*) el largo por el ancho, por la altura ó el volumen de la pared que se hace en 20 días; en el numerador notarán el volumen de la pared que se hace en x días; de consiguiente, hubiésemos economizado seis líneas más, si hubiésemos abreviado el problema: Si 8 obreros trabajando 10 horas diarias hacen un pared de $45 \times 2 \times 6$ ms.³ en 20 días, 16 obreros, trabajando 8 horas por día, ¿cuántos días hubiesen empleado para hacer una pared de $81 \times 1.5 \times 6$ ms.³?

Fin.—Pase Cambra; resuelva por el método de reducción á la unidad el problema cuyo enunciado tiene Vd. escrito en aquel pizarrón. Escriba primero la síntesis, teniendo presente que la incógnita es siempre el último término de la segunda línea y haga, después, el análisis.

800 \$ ganan en 4 años 360 \$. ¿Qué interés ganarán 1200 pesos en 2 años?

(Resuelve el problema dirigido por la clase, interrogada por el maestro; dará nuevos problemas hasta agotar el tiempo de la lección).

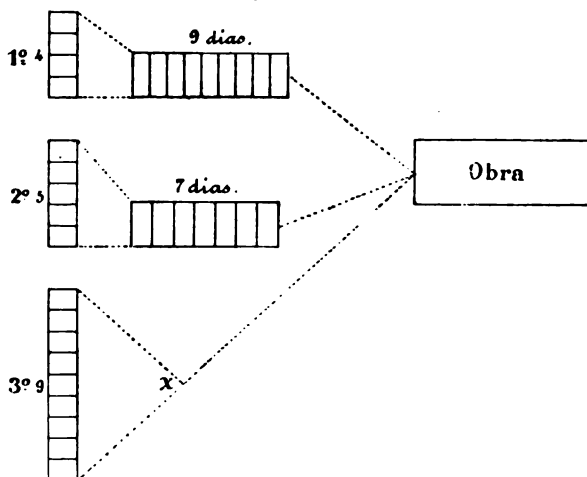
LECCIÓN 6ª

Tema. — Enseñar la solución del problema típico: si a obreros emplean c días para hacer una obra y b obreros d días ¿cuántos días emplearán trabajando juntos?

Desarrollo. A. — M. — Dijimos en las clases anteriores que la pregunta indica la especie.

Resolvamos este problema. Si 4 obreros emplean 9 días para hacer una obra y 5 obreros emplean 7 días para hacer la misma ¿cuántos días emplearán trabajando juntos?

Objetivación



Representan, estas figuras, número de obreros, y número de días para trabajar la misma obra en ¿cuántos casos?

A. — En tres casos.

M. — En los tres casos necesitamos saber número de obreros, número de días y obra á trabajar. ¿En los tres casos conocemos el número de obreros?

A. — Sí, señor: en el 1º trabajan 4; en el 2º 5; en el tercero, se juntan, es decir, son 9.

M. — ¿En los tres casos conocemos los días que trabajan?

A. — En el primer caso trabajan 9 días; en el 2º 7; en el 3º no sabemos y es lo que el problema nos pide que averigüemos.

M. — ¿En los tres casos, conocemos la obra que van á trabajar?

A. — Sí, señor, porque es la misma obra.

M. — Muy bien. ¿Los 4 y 5 obreros del 1º y 2º caso, trabajando juntos, emplearán más ó menos días de los que necesita cada grupo — que 5 y que 7 días — para hacer la misma obra?

A. — Emplearán menos días.

A. — ¿Cada obrero del primer grupo será de la misma fuerza que cada obrero del segundo grupo?

A. — Sí, señor.

M. — Precisamente, no es de la misma fuerza; uno trabaja más ligero que el otro. Si fueran de la misma fuerza, el problema no tendría porque distinguirlos en dos grupos, porque, sabiendo lo que trabajan 4, sabríamos inmediatamente lo que trabaja uno, lo que trabajan cinco, seis, siete obreros.

Como Vds. pueden notarlo, este es un problema compuesto. Hay, por consiguiente, que descomponerlo.

¿De qué manera?

A. — Si 4 obreros hacen la obra en 9 días ¿cuántos días empleará, para hacer la misma obra, un obrero?

M. — Obtenemos 36 días. Un obrero del 2º caso emplearía 35 días. Como Vds. ven, no son de la misma fuerza. ¿Qué hacen Vds. con estos datos?

A. — Si fueran los dos de la misma fuerza

M. — Sí; si uno y otro hiciesen la obra en 36 días 9 obreros cuántos días emplearían para hacer la misma obra?

A. — 9 veces menos tiempo ó $\frac{36}{9} = 4$ días.

M. — Pero uno emplea 36 días y el otro 35.

A. — Los dos juntos emplearán la mitad de 36 más 35.

M. — Que son 35 días y medio; creen Vds. que si uno solo la hace en 35 días, juntos, van á emplear medio día más?

Als. — No, señor.

B. — M. — Están Vds. desorientados. Esto, simplemente, quiere decir que la descomposición indicada por Martí, es mala; hay que buscar otra descomposición.

Resuelvan, antes, este problema.

3 obreros, hacen, en un día $\frac{1}{4}$ de una obra; y 2 hacen en un día, $\frac{1}{5}$ de la misma. ¿Cuánto harán de la obra, en un día, trabajando juntos?

A. — Harán $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ de la obra, trabajando juntos ó los cinco obreros.

M. — Muy bien. Ahora resuelvan este otro. ¿Cuántos días necesitarán 5 obreros para hacer una obra si en un día hacen $\frac{9}{20}$?

A. — Necesitarán tantos días como veces $\frac{9}{20}$ quepa en 1 que es $1 : \frac{9}{20} = \frac{20}{9}$ días.

M. — Ahora, volvamos al problema. ¿Podemos saber lo que cada uno hace de la obra por día?

A. — Sí, señor.

M. — Formulen, pues, los problemas simples, descomponiendo de otra manera.

A. — Si 4 obreros hacen una obra en 9 días ¿cuánto harán de la obra en un día? En un día harán nueve veces menos ó $\frac{1}{9}$ de la obra.

M. — El otro problema de la descomposición ¿cuál es?

A. — Si cinco obreros hacen una obra en 7 días, ¿cuánto harán de la obra en un día?

Los 5 obreros harán en un día, la séptima parte ó sea $\frac{1}{7}$.

M. — (La descomposición estará hecha de antemano detrás de la pizarra giratoria ó en carteles, para eco-

nomizar el tiempo que llevaría escribiéndola correctamente; los problemas se van escribiendo á medida que los niños los enuncian).

M.—El tercer problema, ¿cuál es?

A.—Si 5 obreros hacen en un día $\frac{1}{5}$ de una obra y 4 hacen $\frac{1}{4}$ de la misma, ¿cuánto harán juntos, en un día? (*Descubre el problema*). Los 9 obreros harán en un día $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$.

M.—Que es $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$. Ya descompusimos al problema principal en tres; ¿cuál será el 4º problema?

A.—Si 9 obreros hacen en el día $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ de una obra, ¿cuántos días emplearán para hacer la obra? (*descubre el enunciado*).

Una cosa entera se representa siempre por la unidad. Si los 9 obreros, para hacer $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ de una obra emplean un día, para hacer una, emplearán tantos días como las veces que $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ quepa en uno que es $\frac{20}{19}$.

M.—Lo que da 3 días y $\frac{1}{19}$ de día.

Los 9 obreros hacen la obra ¿en cuántos días? (*señalando en la pizarra*).

A.—En $3 \frac{1}{19}$ días, que se colocará en lugar de la x .

M.—El problema se razona de esta manera:

I.	Si en 9 días	4 obreros hacen	1 (la obra)
	» 1 día	4 »	harán $\frac{1}{9}$ (de la obra)
II.	Si » 7 días	5 »	hacen 1 (la obra)
	» 1 día	5 »	harán $\frac{1}{7}$ (de la obra)
III.	Si » 1 día	4 »	hacen $\frac{1}{4}$ (de la obra)
	y » 1 día	5 »	hacen $\frac{1}{5}$ (de la obra)
	Juntos, » 1 día ó 9	»	harán $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ (de la obra)
IV.	Si 9 obreros hacen	$\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ de la obra,	en 1 día,
	9 »	harán 1 ó la obra en $1 : \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20}{19}$ días.	

(Este análisis, anticipadamente preparado; así, el maestro economiza el tiempo, su explicación es continua y evita amontonamiento de palabras y números que el apuro deforma en perjuicio del alumno, puesto que los efectos de lo confuso nunca son iguales á los de la nitidez).

C.—Tomen las pizarras y resuelvan este problema:

12 caballos comen 20 quintales de maíz en 5 días; 8 cerdos comen 16 en 8 días. ¿En cuántos días, juntos, se comerán 40 quintales de maíz?

(Si el tiempo lo permite, después de explicado, el maestro dará otro problema semejante).

INDICACIONES

Las dificultades con que se tropieza en la solución de estos problemas, se deben á los residuos numéricos que deja este otro: Si a obreros hacen una obra en c días, ¿en cuántos días la harán b obreros?

De aquí, la tendencia á reducir á la unidad de acción y no de tiempo, por ser aquélla, en el campo psíquico del alumno, idea principal y la otra secundaria.

En el problema asunto de la lección, no hay precisamente, unidad de esfuerzo, puesto que un obrero del primer grupo, no hace lo que un obrero del segundo.

LECCIÓN 11*

Tema.—Fracciones complejas. Significado de las rayas y su reducción á simples.

Desarrollo.—**A.**—**M.**—(Escribe $\frac{3}{5} : \frac{8}{9}$) Lea, Marín.

A.— $\frac{3}{5}$ dividido por $\frac{8}{9}$.

M.—Lea, Lamas.

A.— $\frac{8}{15}$ dividido por $\frac{1}{5}$.

M.—Lea, Manzano.

A.—8 dividido por $\frac{7}{5}$.

M.—Lea, De Miguel.

A.— $\frac{8}{7} : 5$.

M.—Lea, Real.

A.— $\frac{8}{5} \times \frac{7}{8} : \frac{3}{4} \times 9$.

M.—Muy bien. Todas son divisiones indicadas. Muchas veces dijimos, que la división de dos cantidades podemos expresarla de otra manera. ¿Cómo?

A.—Escribiendo en forma de quebrado.

M.—De modo que $\frac{8}{5} : \frac{8}{5}$ podemos escribirlo :

$$\frac{\frac{8}{5}}{\frac{8}{5}}; 8 : \frac{7}{5}, \frac{8}{7}; \frac{8}{7} : 5, \frac{8}{7}; \frac{8}{5} \times \frac{7}{8} : \frac{8}{4} \times 9, \frac{\frac{8}{5} \times \frac{7}{8}}{\frac{8}{4} \times 9}; \text{ estas, son}$$

también fracciones porque son divisiones explícitas, sólo que, más complicadas ; por eso se llaman *complejas*, es decir, cuando en el numerador ó en el denominador, ó en uno y otro (*señalando*) hay fracciones; se leen $\frac{8}{5}$ sobre 5 ; $\frac{8}{7}$ por $\frac{7}{8}$ todo, sobre $\frac{8}{4}$ por 9.

B.—Pero, notarán Vds. unas rayas más gruesas que otras. En efecto, hay que hacerlo así para evitar confusiones ; así, esta fracción es diferente de esta otra y se lee 8 sobre $\frac{7}{5}$, mientras que esta se lee $\frac{8}{7}$ sobre 5, no obstante ser parecidas, menos en la raya. Todo lo que está arriba de la raya gruesa constituye el numerador ó dividendo ; todo lo que está abajo constituye el denominador ó divisor. No pueden confundirse nunca. Denme fracciones complejas para escribirlas.

Als.—(Pregunta á 8 ó 9 alumnos).

C.—M.—Basta. Una fracción compleja debe reducirse siempre á simple, lo que se hace sin dificultad alguna que vencer.

Sea $\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{4}}$ que queremos simplificar.

Según dijimos, la fracción equivale á $\frac{8}{5} \div \frac{2}{4}$; división de dos quebrados simples, igual á $\frac{3 \times 4}{2 \times 5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$; ya tenemos la fracción compleja reducida á simple.

Pero, para no escribir tantos números se multiplican los términos de más afuera (3 y 4) y forman el numerador de la fracción simple (*señalando siempre*); se multiplican los términos del medio y forman el denominador de la fracción simple, así (*uniendo con una curva á la izquierda los términos exteriores y con una curva á la derecha las centrales*). $\frac{3 \times 4}{2 \times 5}$, lo mismo que obtuvimos de esta otra manera.

Si hay enteros como aquí $\frac{8}{5}$ para no equivocarse se coloca al entero el denominador 1, así $\frac{8}{5}$ y se procede como en el caso anterior: $\frac{8 \times 5}{5} = \frac{40}{5}$.

Aquí, se hace lo mismo: $\frac{8 \times 7 \times 4}{5 \times 6 \times 3 \times 9}$ fracción simple.

Otro ejemplo: — (*El maestro inculca el procedimiento, generalizando; tres ó cuatro casos semejantes á los que hemos expuesto, con números decimales*).

D. — (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*).

M. — Simplifiquen $\frac{3}{4}$ sobre $\frac{1}{5}$; $\frac{3 \times 8}{4}$ todo, sobre $\frac{7}{5}$; $9 \times 8 \times 7$ sobre 5×9 todo sobre $\frac{8}{5} \times \frac{9}{3}$; 0.03×0.5 sobre 5 todo, sobre $\frac{3}{8}$ por 9. Vuelvan á sus asientos.

Si tuviéramos $\frac{\frac{3}{5} : \frac{4}{8}}{9 \frac{7}{8} : \frac{2}{3}}$ Se simplifica el numerador

y el denominador aparte, así:

$\frac{3}{5} : \frac{4}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 4}$; $9 \times \frac{7}{8} : \frac{2}{3} = \frac{9 \times 7 \times 3}{8 \times 2}$; entonces la frac-

ción compleja es $= \left(\frac{\frac{3 \times 8}{5 \times 4}}{\frac{9 \times 7 \times 3}{8 \times 2}} \right) = \frac{3 \times 8 \times 8 \times 2}{5 \times 4 \times 9 \times 7 \times 3} \times \frac{2 \times 8 \times 2}{5 \times 9 \times 7}$ etc.

(*Pasan otros cinco alumnos á quienes da ejercicios como los anteriores, números pequeños, y recorriendo las fracciones mixtas, decimales, multiplicación y división de quebrados, exigiendo la simplificación antes de las operaciones; los ejemplos serán de tal naturaleza que el alumno aplique la divisibilidad de 2 á 11 y no tenga que hacer sino operaciones mentales*).

Deberes. — Los que indique el libro de problemas y ejercicios.

LECCIÓN 5ª (Octubre)

Tema. — Relaciones entre el litro, el decímetro cúbico y el kilogramo.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Qué cantidad he escrito?

A. — Vd. ha escrito 35 cms. cbs.

M. — ¿Y ahora?

A. — Vd. ha escrito 129 en números romanos.

M. — $8 \times 25 - 6 \times 25$ ¿cuánto es?

A. — 2 veces 25 ó 50.

M. — Cuadrado de 0.5; cubo de 0.02; 5 milésimos por 3 centésimos ¿cuánto es?

A. — 15 cienmilésimos.

M. — 8 por 25 dividido por 100, multiplicado por 18, dividido por 9 ¿cuánto es?

A. — Es 4 porque, etc.

M. — ¿Qué superficie tendrá esta baldosa?

A. — 4 dms. cds.

M. — ¿Qué altura tendrá esta silla?

A. — 70 cms.

M. — ¿A qué fracción sin decimales, equivale 3 millonésimos sobre 4 millonésimos?

A. — $A \frac{3}{4}$.

M. — ¿28 milésimos sobre 7 centésimos?

A. — $A \frac{28}{70}$.

M. — Simplificando ¿cuánto es?

A. — $\frac{4}{10}, \frac{2}{5}$.

M. — Reduzcan á impropia $3, \frac{8}{9}$.

A. — $\frac{35}{9}$.

M. — Reduzcan á fracción, 12.

Als. — $\frac{24}{3}, \frac{36}{3}, \frac{48}{4}$.

M. — Todo número sobre 1 ¿cuánto da?

A. — El mismo número.

M. — 25 *a* sobre 5 *a* ¿cuánto es?

A. — Es 5.

M. — $3x - 4$ igual á 0; ¿cuál es el valor de *x*?

A. — Es $\frac{4}{3}$.

M. — En el numerador hay un decimal cuyo 21° lugar está ocupado por un 8; en el denominador otro cuyo 19° lugar está ocupado por un 8 también ¿á qué es igual la fracción?

A. — A $\frac{8}{800}$ que simplificada da 1 centésimo.

M. — En 98 ¿cuántas veces está 8?

A. — Cabe 12 veces y sobra 2.

M. — ¿Cuántas veces por 1000 tendremos que multiplicar 28 kms.³ para reducirlos á ms.³

A. — Tres veces por 1000.

Medio. — *M.* — (*Presentando un recipiente de un dm.³*). ¿qué es esto?

A. — Una vasijita de un decímetro cúbico.

M. — ¿Y esto?

A. — Un litro.

M. — ¿Y esto?

A. — Una pesa de un kilógramo.

M. — Llenemos el litro de agua de aljibe ¿qué cantidad de agua contiene la vasija?

(*Estas manipulaciones deben ser hechas con la mayor desenvoltura y sobre una mesa, donde, todo preparado, pueda la clase observar cómodamente; toda demora, debida á manos poco hábiles, perjudicará el éxito*).

A. — Contiene un litro de agua.

M. — Volquemos el litro de agua en el decímetro cúbico; ¿cuánto ha quedado en el litro. (*Mostrándolo boca abajo*).

A. — Ni una gota.

M. — Observe, Míguez, el decímetro cúbico.

A. — Está completamente lleno.

M. — Y no hemos derramado una gota. ¿Luego, un decímetro cúbico equivale?

A. — Un decímetro cúbico equivale á un litro. (*El maestro escribe 1 litro = 1 dm.³*).

M. — 25 dm.³ ¿A cuántos litros?

A. — A 25 litros.

M. — 800 litros ¿á cuántos dms. cbs.?

A. — A 800 dms. cbs.

M. — Un metro cúbico ¿á cuántos litros?

A. — A 1000 litros, porque un metro³ equivale á 1000 dms.³

M. — Un Dm.³ ¿á cuántos litros?

A. — A 10000 litros.

M. — ¡Ep! Un Dm.³ ¿á cuántos ms.³?

A. — A 1000 ms. cbs.

M. — Y 1000 ms. cbs. ¿á cuántos dms. cbs. ó litros?

A. — A un millón de litros.

M. — Y 10 Hls. ¿cuántos dms. cbs.?

A. — A 1000 dms. cbs. ó un m.³

M. — Ahora que conocemos esto, tan importante, pasemos á otra cosa más importante. Pesemos este decímetro cúbico de agua. (*Le coloca en la balanza y lo contrapesa con las pesas, que sabiendo de antemano cuales son, hará todo en menos de 10 segundos á fin de no distraer la atención de los alumnos con tanteos de mal efecto*). Pesa 1225 gramos (*escribe*). Pero esto es el peso del dm. cb. de agua, más el de la vasija. Volvamos el agua al litro . . . pesemos la vasija sin agua para saber el del agua. 225 gramos (*escribe debajo de 1225*). Luego el agua sola ¿cuánto pesa?

A. — El agua sola pesa 1000 gramos ó un kilógramo.

M. — En efecto, un litro de agua ó un dm.³ de agua pesa y pesará siempre un kg., ni más ni menos de un kg.

M. — Como hay aguas que no son puras, pues si á esta le echamos sal, ven Vds., no se derrama una gota, pero evidentemente pesará más, conviene decir agua pura, ó agua de aljibe, ó agua destilada. ¿Cuántos kgs. pesarán, 20 litros de agua pura?

A. — Pesarán 20 kgs.

M. — ¿Cuánto pesarán 85 dms.³ de agua?

A. — 85 kgs.

M. — ¿Qué volumen ocuparán y qué peso tendrán 1500 litros de agua?

A. — Ocuparán el volumen de 1500 dms.³ y pesarán 1500 kgs.

M. — Llenemos el decímetro cúbico de municiones. ¿Cuántos balines, en litros?

A. — Un litro de balines.

M. — Pesemos... 11 kilogramos. El volumen de los balines es igual al volumen de ¿qué otra cosa que pesamos poco antes?

A. — Al volumen de agua.

M. — *En igualdad de volumen*, las cosas pues, tienen peso muy diferente. El plomo, porque los balines son de plomo como Vds. acaban de verlo, pesa 11 veces más que el agua. Pongamos harina en vez de balines. Pesemos: 800 gramos; el volumen es igual; *en igualdad de volumen* pues, unas cosas pesan más y otras menos. En efecto, en el mundo no hay, no hay dos substancias que en igualdad de volumen pesen lo mismo.

Es una manera de evitar que nos engañen. Si se nos vendiese por oro una vasija de bronce tomaríamos un volumen igual de lo que nos consta que es oro y si la vasija pesa lo mismo, es de oro, sino, nó.

Conociendo, pues, el volumen de una vasija, conocemos su capacidad y cuánto pesaría el agua que contuviese. He aquí, un cajón ¿cuántos litros de harina podría contener? ¿cuántos kilogramos de agua?

A. — Hallaremos antes su volumen en dms. cbs. multiplicando sus tres dimensiones.

M. — Eso es. Mide ancho 35 cms., largo 5 dms. y alto 4 dms. Su volumen es $50 \times 40 \times 35$ cms. ó 70.000 cms. cbs. Pero para averiguar la cantidad de litros necesitamos dms.³ Luego reducimos los 70.000 cms.³ á dms.³ Dividiendo?

A. — Por 1000, lo que da 70 dms. cbs. que equivalen á 70 litros y el agua que llenase el cajón pesaría 70 Kgs.

Fin. — ¿Cuántos Kgs. pesarán 28 dms. cbs. de agua? ¿Qué volumen de agua representan 1000 Kgs. de agua? ¿2 ms. cbs. de agua cuántos litros y cuántos Kgs son? ¿3 Dm.³ cuántos litros y cuántos Kgs. son? ¿800 Kgs. de agua qué volumen y qué capacidad representan? (*Pasan cuatro alumnos al pizarrón*). Reduzcan 25.000 dms. cbs. á Hls.; 2 ms.³ y 45 dms.³ ¿Cuántos litros son y cuánto pesan si

son de agua? ¿Qué volumen representan 25 Hls., 8 Dls. y 9 ls.? ¿Cuánto pesaría el agua contenida en estas cajas (*da á cada niño una caja, mientras hace preguntas al resto de la clase*).

INDICACIONES

Esta enseñanza hay que hacerla paso á paso y rigurosamente inductiva, pues, por experiencia nos consta la ofuscación de los alumnos acerca de estas tres relaciones, cuando no fueron instruídos con método y se pretendió en una lección, dar idea del peso específico de todos los cuerpos; no menos reprochable es dar, desde el principio, la fórmula $V = P \times D$. Durante dos años, no obstante el esfuerzo continuo del maestro, los alumnos de 5º y 6º grado, averiguaban cualquiera de los tres datos sin reducir jamás á dms. cbs. ó establecer la relación de las tres unidades mediante las denominaciones del caso. De aquí, contrasentidos sin ejemplo, disimulados con la práctica habitual de no escribir esas mismas denominaciones después de los números, como si se tratara de un requisito insignificante. ¿Cuál es el peso de una masa de granito de 3 ms. de largo por 2.5 ms. de alto por 2.5 ms. de ancho?

Decían: $V = 3 \times 2.5 \times 2.5 = 18.75$ $P = V \times D$; substituyendo, tenemos: $P = 18.75 \times 2.5$ igual á 46 Kgs. 875 gramos.

El sentido común les decía que no; pero allí, la fórmula se erguía imperativa.

LECCIÓN 6ª

Tema.—Densidad, peso específico, etc.

Desarrollo.—*Principio.*—*M.*—La clase tratará de explicarme lo que hicimos y aprendimos ayer.

A.—Ayer aprendimos que un dm.³ de agua equivalía á un litro; que un dm.³ de cualquier substancia

equivale á un litro, que un decímetro cúbico de agua, por consiguiente, un litro de agua, pesa siempre un Kg.

Otro.—Nos dijo, que el agua debe ser pura, y que la más pura es la de aljibe.

Otro.—Todas las cosas en igualdad de volumen pesan diferente. Un decímetro cúbico de balines pesa 11 Kgs. en vez de uno que pesa el agua; un dm.³ de harina pesa 800 gramos.

Otro.—Que conociendo el volumen de un cajón podemos saber la cantidad de litros que contendría de cualquier cosa y el peso que tendría si lo llenásemos de agua.

Otro.—No solamente de un cajón sino de cualquier recipiente y vasija. Se necesita hallar, solamente, su volumen. Así, si una pileta tiene 6 ms. cbs. podrá contener hasta 6000 litros de agua ó de cualquier líquido.

Otro.—No sólo conociendo el volumen. Conociendo la capacidad podremos averiguar el volumen de una damajuana y el peso del agua que contendría.

M.—Muy bien, Lamas. ¿Cómo harían Vds. para hallar el volumen de una damajuana que no es un paralelepípedo y no se la puede medir exactamente con el metro?

A.—Yo, señor, la llenaría de agua hasta la boca, después la vaciaría con un jarro de un litro y contaría el número de jarros ó litros que sacase. Como cada litro equivale á un dm.³, si hubiese sacado 18 litros, la damajuana tendría 18 dms. cbs. de volumen.

M.—Lo que dice Lamas es admirable; otro tanto deben hacer sus compañeros, observar, pensar; he allí todo. Los maestros enseñamos muy poco, damos, sólo una dirección, abrimos un camino que Vds. deben ser hábiles, inteligentes y trabajadores para aprovecharlo y aprender, con su propio esfuerzo, cien veces más de lo que nosotros hemos enseñado. Muy bien, Lamas. Y, de otra manera, podríamos también averiguar el volumen y la capacidad. Pesando la damajuana vacía y la damajuana llena de agua, la diferencia, como hi-

cimos ayer con el dm. cb., nos daría el peso del agua que ocupa exactamente el volumen de la damajuana. ¿Si pesa 18 Kgs. la damajuana contendrá?

A.—Contendrá 18 litros y su volumen será de 18 dms. cbs.

Medio.—Ayer dijimos que en igualdad de volumen, todas las cosas diferentes tenían diferente peso. ¿Y las mismas substancias?

A.—Las mismas substancias en igualdad de volumen, pesan lo mismo.

M.—En efecto, un dm.³ de agua pesará siempre un Kg.; 3 dm.³ de agua pesarán siempre 3 Kgs; pero, no obstante, comprobemos con otras substancias. ¿Qué muestro á Vds.?

A.—Dos cubos de hierro.

M.—En efecto, son de hierro puro. Mide cada lado (*midiéndolo*) 5 cms. ¿cómo son los volúmenes de uno y otro cubo?

A.—Los volúmenes de uno y otro cubo son iguales: 125 cms cbs.

M.—Muy bien. Pesémoslos (*colocando un cubo en cada platillo*).

A.—Pesan exactamente lo mismo.

M.—En efecto (*quitándolos*) aquí tenemos otros dos cubos de hierro. Son más grandes que los anteriores, pero los lados de uno y otro (*midiendo*) miden un decímetro.

A.—Son del mismo volumen: un dm. cb. cada uno.

M.—Pesémoslos (*Coloca uno en cada platillo*).

A.—Pesan exactamente lo mismo. (*Quita los cubos de los platillos*).

M.—Aquí tenemos dos cubitos de madera de pino, exactamente del mismo volumen; cada lado mide 10 cms. Pesémoslos..... Pesan exactamente igual; aquí tenemos dos cubitos de vidrio ¿cómo son?

A.—Son iguales, tienen el mismo volumen.

M.—Cada lado mide 5 cms. (*Para medir, el maestro usará una reglita de 5 cms, ó de 10, no de mayor largo, para que la clase observe la exactitud de las medidas*). Pesémoslos.... El mismo peso.

M.—De estas pruebas ¿qué deducimos, pues?

A.—Que el mismo volumen de una misma substancia, pesa siempre lo mismo.

M.—¿Cómo son, todos estos cubitos? (*Presentando uno de vidrio, otro de pino, otro de quebracho, otro de hierro, otro de plomo de 5 cms. de lado*).

A.—Son todos iguales.

M.—¿Iguales en qué?

A.—En volumen.

M.—En adelante hay que decir siempre *en qué* porque podría entenderse iguales en substancia, en peso, en color, en superficie; hay necesidad de decir siempre *en qué* son iguales. Iguales en volumen ¿y en substancia?

A.—Todos diferentes; uno es de vidrio, otro de madera, de pino, otro, etc.

M.—Comparemos sus pesos. Uno en cada balanza. El cubito de plomo y el de hierro.

A.—Diferentes en peso.

M.—¿El de madera de pino y el de quebracho?

A.—Diferentes en peso é iguales en volumen.

M.—¿El de vidrio y el de hierro?

A.—Diferentes en peso é iguales en volumen.

M.—Ahora, estamos convencidos que en igualdad de volumen si las substancias son las mismas, pesan lo mismo, si son diferentes, pesan diferente, en *igualdad de volumen*. Vamos á comprobar otro hecho notable, que nos permitirá conocer el peso no sólo del agua sino de todas las substancias, conociendo su volumen.

Este cubo ¿qué volumen tiene y de qué es?

A.—Ese cubo es de hierro y su volumen de un decímetro cúbico.

M.—¿Este otro?

A.—Es de madera de pino y del mismo volumen que el cubo anterior.

M.—¿Este otro?

A.—Es de plomo. Los tres son substancias diferentes y del mismo volumen.

M.—Y, por fin, este decímetro cúbico de agua. Pesemos. ¿El dm.³ de agua sabemos que pesa?

A. — Pesa 1000 gramos.

M. — *Escribe sucesivamente en el pizarrón :*

1 dm. ³ agua = 1000 gramos	1 dm. ³ hierro = 7500 grs.
125 cms. ³ agua = 125 "	125 cms. ³ hierro = 937.5 "
8 cms. ³ agua = 8 "	8 cms. ³ hierro = 60 "

Pesemos el dm.³ de hierro.... 7500 grs. ¿Cuánto pesa más el dm.³ de hierro que el dm.³ de agua?

A. — Pesa tantas veces más como 1000 esté contenido en 7500.

M. — (*Escribe y hace la división $\frac{7500}{1000} = 7.5$*). Es decir, que este cubo de hierro pesa más que este cubo de agua. ¿Cuántas veces?

A. — 7 veces y media.

M. — Pesemos estos otros dos cubos. ¿Qué son?

A. — Son iguales de volumen.

M. — El agua contenida en este cubo pesa: 150 gramos menos 25 que pesa la vasijita de vidrio, 125 gramos (*escribe*). El cubito de hierro pesa 937.5 gramos. ¿Cuánto entonces, pesará más este cubito de hierro que este cubito de agua, uno y otro del mismo volumen?

A. — Pesará tantas veces más como 125 esté contenido en 937.5.

M. — (*Hace la división $\frac{937.5}{125} = \frac{9375}{1250} = \frac{375}{50} = \frac{15}{2} = 7.5$*). Está contenido 7.5 veces. ¿Es decir, que este cubo pesa más que el otro?

A. — 7.5 veces.

M. — Pesemos estos otros dos que tienen exactamente el mismo volumen, 8 cms.³ de agua y 8 cms.³ de hierro.

A. — El agua pesa: 11 gramos menos 3 de la vasijita de vidrio, 8 gramos (*escribe*).

El cubito de hierro pesa, 60 gramos. ¿Cuánto entonces, pesará más este cubito de hierro que el cubito de agua, iguales en volumen?

A. — Las veces que 60 contenga á 8.

M. — 60 dividido entre 8 es $\frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7.5$. ¿Pesa, pues?

A. — 7.5 veces más.

M. — Como Vds. ven, en igualdad de volumen, el hierro pesa siempre más que el agua, 7.5 veces. De consiguiente, el peso de 1000 metros cúbicos de agua comparado con el peso de 1000 ms. cbs. de hierro ¿Cuánto será más el del hierro que el del agua?

A. — Será 7.5 veces más.

M. — Si el agua de esta botella pesa 2 Kgs., un volumen igual de hierro ¿cuánto pesaría?

A. — Pesaría 7.5 veces más, ó 15 Kgs.

M. — Muy bien. Este número constante que indica cuántas veces en igualdad de volumen, pesa más el hierro que el agua, se llama *peso específico* ó *densidad* del hierro, peso de la especie hierro.

De la misma manera hallaríamos el peso específico de cada substancia; sabiendo ya que en igualdad de volumen, una misma substancia pesa siempre el mismo número de veces más que el agua; hallemos el peso específico del plomo. Tomemos este cubito de 8 cms. cbs. 88 gramos. El mismo volumen de agua ¿cuánto pesa?

A. — Pesa 8 gramos. Luego, el plomo pesa más que el agua 11 veces: su peso específico es 11.

M. — Pase Ruiz; halle el peso específico de este cubito de cobre.

A. — (*Pesando*). Pesa 66 gramos. Su volumen es de 8 cms. cbs. El mismo volumen de agua pesa 8 gramos. Pesa, pues, más que el agua, tantas veces como 8 quepa en 66 que es $\frac{66}{8} = \frac{33}{4} = 8.2$.

El peso específico es 8.2.

M. — Saben, pues, qué es peso específico ó densidad y cómo se halla. Vds. comprenderán que nosotros no somos los primeros en hacer este trabajo, mas, tratándose de una cantidad constante tan necesaria para conocer el peso de las cosas sin pesarlas y de no poco trabajo, si tuviéramos que hallar el peso específico á cada momento, de todos los metales, de todas las maderas, de todas las piedras; los sabios han construido una tabla, aquí la tienen Vds.

en esta Física, donde se expresa la densidad de 45 substancias. La densidad del oro es 19. ¿Qué quiere decir?

A. — Que en igualdad de volumen pesa 19 veces más que el agua.

M. — La densidad de la plata es 10. ¿Qué quiere decir?

A. — Que en igualdad de volumen la plata pesa 10 veces más que el agua.

M. — La densidad de la madera de quebracho es de 0.9. ¿Qué quiere decir?

A. — Que el quebracho en igualdad de volumen pesa 9 décimos veces más que el agua.

M. — Así, si una cantidad de agua pesa 80 gramos. ¿Cuánto pesará igual volumen de quebracho?

A. — 80×0.9 gramos = 72 gramos (*el maestro escribe*).

M. — Luego, cuando el peso específico es un decimal sin parte entera, la substancia ¿pesa más ó menos que el agua?

A. — La substancia pesa menos que el agua y cuando el peso específico es mayor que 1, la substancia pesa más que el mismo volumen de agua.

M. — Muy bien. Cuando pesan menos que el agua, en igualdad de volumen, es cuando flotan; cuando pesan más se van á fondo. Así, una substancia cuyo peso específico es de 898 milésimos ¿flotará ó se irá á fondo?

A. — Flotará.

M. — Otra cuyo peso específico es de 123 centésimos ¿flotará ó se irá á fondo?

A. — Se irá á fondo.

Fin. — ¿Un decímetro cúbico de agua ¿cuánto pesa? ¿Un centímetro cúbico? ¿Qué es peso específico? En igualdad de volumen las mismas substancias ¿qué peso tienen? En igualdad de volumen diferentes substancias ¿qué peso tienen? En volúmenes desiguales las mismas substancias ¿qué peso tienen? ¿Si fueran diferentes substancias? ¿Cuál es el peso específico del agua? ¿Del hierro, del cobre, del plomo?

Si multiplicamos el peso de una cantidad de agua por el peso específico de un cuerpo ¿qué obtenemos?

A. — El peso del mismo volumen de ese cuerpo.

M. — Si el peso específico es mayor que 1 ¿qué sucede con el cuerpo echado en una pileta?

A. — Se va á fondo.

M. — ¿El peso específico de este cartón será mayor ó menor que 1?

Als. — Es mayor, es menor....

M. — (*Lo tira al agua*).

A. — Es mayor porque se va á fondo.

M. — Cuando decimos: el hierro es más pesado que el vidrio ¿qué queremos decir?

A. — Que en igualdad de volumen el hierro pesa más que el vidrio.

M. — Muy bien. ¿Qué volumen ocupa un gramo de agua? ¿cuántas veces el hierro pesa más que el agua? ¿cuántas veces el agua pesa menos que el plomo? ¿cuántas veces el cobre pesa más que el agua?

A. — 8 veces más.

M. — ¿Pesa más el cobre que el agua? (*echando una moneda de cobre al agua*).

A. — Pesa 8 veces más que el agua.

Deberes. — Para mañana traen tres objetos que pesen menos que el agua; tres que pesen más. Luego, indicarán con el N° 1, el que pesa menos; con el N° 2 el que pesa más que el 1; con el N° 3 el que pesa más que el 2 y así sucesivamente.

INDICACIONES

El *Medio* de la *Lección 7ª* se desarrollará así:

Hallar la densidad, peso específico ó lo que un cuerpo pesa más que el agua.

M. — Hé aquí, un plato cuya densidad ó lo que pesa más que el agua, deseamos conocer.

A. — Lo pesamos y obtendremos las veces que pesa más que el agua.

M. — Pesa 500 gramos.

A. — Pesa 500 veces más que el agua.

M. — ¿Qué cantidad de agua ?

A. — Pesaría un gramo ; de consiguiente, su volumen . . . ; no señor. Su volumen sería un cm.³ y el plato es mucho más.

Otro. — Entonces hallamos su volumen.

M. — Muy bien. ¿Cómo ?

Als. — No lo sabemos.

M. — Pues, muy sencillamente, así : (*rompe el plato en muchos pedazos*). Lo echamos al almirez y le reducimos á polvo . . . ; ya está. Ahora, dentro de esta cubeta de vidrio bien apisonado convertimos al plato en un paralelepípedo. Ancho 5 cms. ; largo, 5 cms. ; alto 10 cms. Su volumen 250 cms. cbs. Si fuera agua pesaría 250 gramos ; pero por ser loza, pesaba 500 gramos ; en igualdad de volumen pesa, pues, más que el agua ?

A. — Las veces que 500 contenga á 250, 2 ; luego pesa 2 veces más que el agua ; 2, es la densidad ó peso específico del plato.

M. — ¿Cuál será la densidad ó peso específico de este cartucho de sal ? (*Los alumnos indican la solución del problema*).

LECCIONES 9ª y 10ª

Tema.—I. Conociendo el volumen, determinar el peso y viceversa, de un cuerpo cualquiera. II. El de igual volumen de agua, conociendo el de un cuerpo cualquiera. III. El de un cuerpo cualquiera, conociendo el de un cuerpo cualquiera. (*Entre ellos debe existir una relación de igualdad : la de volumen ó la de peso ; los enunciados, escritos en el pizarrón*).

1^{er} Problema.—¿Cuál es el volumen de este pedazo de hierro (*presentando un cuerpo irregular cuyo volumen no puede hallarse por ninguna fórmula geométrica*).

2^o—Averiguar el peso de esta vara de hierro sin usar la balanza.

3º—¿ Cuánto pesaría una cantidad de agua igual al volumen de esta varita de cobre ?

4º—¿ Qué volumen ocuparía una cantidad de agua que pesase tanto como esta moneda ?

5º—¿ Cuánto pesaría esta moneda si fuese de oro ?

6º—¿ Qué volumen tendría una moneda de oro que pesase tanto como esta de níquel.

(*Este tema se desarrollará en dos lecciones*).

Desarrollo A. — M. — Aquí tienen Vds. una masa de hierro que no afecta forma regular conocida, ni paralelepípedo, ni cilindro, ni esfera, ni cono, ni prisma, nada que pueda sujetarse á una fórmula. No obstante, necesitamos conocer su volumen. ¿ Alguien imagina el procedimiento ?

A. — Pesándolo.

Otro. — Conociendo el peso ¿ cómo halla el volumen ?

Otro. — De la misma manera que hallamos el volumen conociendo el peso del agua; 25 Kgs. de agua ocupan un volumen de 25 dms. cbs.

Otro. — Sí, porque un dm. cb. pesa un Kg.; pero ese objeto es de hierro.

Otro. — Ah! Señor; el hierro pesa 7.5 veces más que el agua. Entonces....

M. — Todo cuánto han dicho Vds. es exacto y va á servirnos para resolver este problema que no exige esfuerzo, casi, para comprenderse.

En efecto, si tuviéramos un volumen igual de agua, con pesar el agua y multiplicar ese peso por 7.5 nos daría el de esta masa de hierro ¿ no es verdad ? Pero.... (*colocando el hierro en la balanza*) tenemos el peso del hierro 1750 gramos, conocemos su densidad, ó lo que pesa más que el agua, en igualdad de volumen.

A. — Un mismo volumen de agua pesará 7.5 veces menos.

M. — ¿ Cuántos gramos pesaría, pues ?

A. — $\frac{1750}{7.5} = \frac{700}{3} = 233$ gramos.

M. — El volumen de agua igual á este volumen de

hierro pesa, pues, 233 gramos. Escribamos, antes, para recordar:

I.—Volumen x de agua = volumen x de hierro:

II.—Volumen x de hierro pesa 1750 gramos.

III.—Volumen x de agua pesa 233 gramos.

Pero, 233 gramos de agua ¿qué volumen ocupan?

A. — Ocupan 233 cms. cbs.

M. — Escribamos:

IV.—Volumen x de agua = 233 cms. cbs.

M.— Pero, el volumen x del agua era igual?

A. — Era igual al volumen x de ese pedazo de hierro. Luego, el volumen del hierro es 233 cms. cbs.

M. — Escribamos, pues:

V. — Volumen x del hierro = 233 cms. cbs. que es lo que deseábamos saber.

M. — ¿Cómo hallaremos, sin medirla, el volumen de esta medalla tan irregular de plata?

A. — Pesándola; dividiendo el peso por la densidad y luego, reduciendo ese cociente, peso de igual volumen de agua, á medidas de volumen.

M. — Hallen, pues, su volumen; pesa 3 gramos.

A. — El volumen es 0.3 cms.³; le obtuve dividiendo 3 entre 10, densidad de la plata que da 3 décimos de cm. cb.

M. — ¿Cuánto en 3 décimos de cm. cb.?

A. — Un cm.³ equivale á 1000 mms.³; tres décimos de 1000, son 300 milímetros cúbicos.

M. — Está bien.

B. — Aquí tienen Vds. esta barra de hierro bastante grande, cuyo peso deseamos conocer en este momento. ¿Alguien imagina el procedimiento?

A. — Pesándola en la balanza.

M. — Es verdad. Pero el platillo se dobla y no tenemos suficientes pesas para contrapesar.

Als. —

M.— Pues, esta vez es tan fácil hallar el peso como en el caso anterior, hallar el volumen. Esta barra de hierro tiene la forma de un paralelepípedo, no pudiéndola pesar, averiguamos de ella lo que pode-

mos averiguar, su volumen. Midamos: largo 2 mts.; ancho 5 cms.; espesor 2 cms. Su volumen es, pues, $200 \times 5 \times 2 \text{ cms.}^3 = 2000 \text{ cms. cbs.}$ ó 2 dms. cbs. Sí; ya veo que van Vds. sabiendo. Si los dos dms. cbs. fueran de agua, pesarían 2 Kgs. Escribamos:

I. — 2 dms.³ de agua = 2 dms. cbs. de hierro.

II. — 2 dms.³ de agua pesan 2 Kgs.

Pero el hierro es 7.5 veces más pesado que el agua. Luego si 2 dms. cbs. de agua pesan 2 Kgs., el mismo volumen de hierro pesará 7.5 veces 2 Kgs., ó 15 Kgs.

Escribamos, pues:

III. — 2 dms. cbs. de hierro pesan 2 Kgs. $\times 7.5 = 15 \text{ Kgs.}$

Hagamos la prueba: aquí tengo 7 pesas de 2 Kgs. y 1 de 1 Kg., que Vds. no las habían visto. Exactamente el peso. Esta vez, la barra puede pesarse; pero supongan Vds. que estuviese de barrote en un lugar donde no pudiera sacarse; supónganse Vds. la columna de un corredor, de la que nos es fácil tomar sus dimensiones pero nó colocarla en el platillo de una balanza y comprenderán lo útil que es resolver de esta manera el problema.

C. — Esta es una barrita de cobre. Deseamos saber cuánto pesaría una cantidad de agua del mismo volumen. ¿Cómo creen Vds. que puede hacerse?

A. — Pesando la barrita y dividiendo por 8.5 que es lo que el cobre pesa más que el agua.

M. — En efecto, es un procedimiento exactísimo. Pero supongan Vds. que no pudiésemos pesarla. ¿Qué haríamos?

A. — Hallaríamos el volumen de la barrita que tiene la forma de un paralelepípedo, multiplicando sus tres dimensiones.

M. — Un decímetro de largo, un centímetro de ancho y otro de espesor.

A. — El volumen es $10 \text{ cm.} \times 1 \text{ cm.} \times 1 \text{ cm.} = 10 \text{ cms. cbs.}$

Otro. — El agua tendría 10 cms. cbs. y pesaría 10 gramos, porque un cm.³ pesa un gramo.

M. — Está bien. ¿Necesitamos, para esto, conocer la densidad?

A. — No la necesitamos.

D. — **M.** — He aquí una moneda. Deseamos conocer el peso de la misma cantidad de agua.

A. — Hallamos el volumen de la moneda. Igual volumen de agua pesará 6.5 veces menos, porque el agua es 6.5 veces menos pesada que el níkel.

M. — En efecto. ¿Quién halla el volumen de esta moneda?

A. — Es un cilindro y el volumen del cilindro....

M. — ¿Qué son las bases de un cilindro?

A. — Son círculos.

M. — Les parece á Vds. que las caras de esta moneda son círculos?

A. — No, señor, porque hay una cara y letreros; el borde es dentado.

M. — Luego, la moneda no es un cilindro y no nos es fácil hallar su volumen. Lean otra vez el enunciado.

A. — Entonces podemos pesarla; 4 gramos justos.

A. — Si la moneda fuera de agua tendría el mismo volumen: en igualdad de volumen, pesaría 6.5 veces menos que el níkel ó sea $\frac{4}{6.5}$ (*escribe el maestro*).

$$M. - \frac{4}{6.5} \times \frac{40}{65} = \frac{8}{13} = 0.615.$$

E. — **M.** — Pero una señora se dirige á un joyero con esta moneda de níkel á quien ordena una exactamente igual, de oro. ¿Cuántos gramos de oro necesita el joyero?

A. — Desde que el oro es 19 veces más pesado que el agua y sabemos que un volumen de agua igual al de la moneda pesa 0.615 gramos, la moneda de oro de igual volumen pesará 19 veces más ó $0.615 \times 19 \text{ grs.} = 6.085 \text{ gramos}$. Luego, este problema se descompone en dos:

I. — Conociendo el peso de la moneda de níkel, hallar el de igual volumen de agua.

II. — Conociendo el peso del agua, hallar el de igual volumen de oro.

M. — ¿ Y hacemos qué para obtener el peso del oro?

A. — I. Pesamos la moneda de níkel. II. Dividimos el peso por la densidad del níkel. III. Obtenemos, así, el peso de igual volumen de agua. IV. Multiplicamos el peso del agua por la densidad del oro. V. Obtenemos, así, el peso de igual volumen de oro.

M. — Sintetizando de esta manera :

$$P(\text{oro}) = \frac{P(\text{níkel}) \times D(\text{oro})}{D(\text{níkel})} = \frac{4 \times 19}{6.5}, \text{ etc.}$$

F. — *M.* — Pero, la señora, pareciéndole caro su capricho, da contraorden al joyero y sólo pide una moneda de oro que pese tanto como la de níkel. ¿ De qué volumen resultará?

A. — Ya está : 4 gramos.

M. — Luego, la moneda de oro debe pesar 4 grs.

El agua que ocupase el mismo volumen ¿ cuánto pesaría ?

A. — 19 veces menos $\frac{4}{19} = 0.210$ grs.

M. — Y, 0.210 grs. de agua ¿ qué volumen ocupan ?

A. — Ocupan 210 mms. cbs.

M. — Como acabamos de decir, *agua que ocupa el mismo volumen que la moneda de oro*, la moneda de oro, ocupa, pues; ¿ qué volumen ?

A. — 210 mms. cbs.

INDICACIONES

El tema, desarrollado en dos lecciones, comprende la 1ª, los tres primeros problemas. La 2ª, los otros tres; dentro de los seis, están todos los casos directos de hallar el peso por el volumen y viceversa, sirviendo el agua como elemento de comparación. Problemas del tipo de este: Una medalla hecha con *a* partes de plata y *b* partes de cobre pesa *m* gramos.

¿Cuánto es el peso de la plata y cuánto el del cobre?

No se darán sino en 6° grado. La lección terminará llamando al pizarrón cuantos alumnos admite y dando un objeto de densidad conocida para hallar el peso ó el volumen, según el caso; ó bien determinar lo mismo de otro cuerpo, previa una relación de igualdad que permita generalizaciones, como en este ejemplo: ¿Cuál será el costo de una medalla de oro a veces más grande que una de cobre, sabiendo que un argentino (5 \$ oro) pesa 8.0645 gramos. Inútil es que hagamos notar, dado su carácter sintético, que estos problemas constituyen por sí, el más bello repaso del sistema métrico, de las fracciones comunes, complejas y decimales; de las fórmulas geométricas; de los casos de divisibilidad; de las operaciones; de la simplificación, etc., etc., de modo que el conocimiento general de la aritmética se consolida con gran economía de tiempo, y sin otro esfuerzo didáctico que el de presentar buenos problemas. Sólo las lecciones de problemas exigirán variación del asunto, pues no todos se adaptan á los tipos de la densidad.

LECCIÓN 20ª

Tema. — Uso de la fórmula: $P = V \times D$.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Cuántas veces pesa más el oro que el agua?

A. — 19 veces más.

M. — ¿En igualdad de qué debe entenderse?

A. — En igualdad de volumen.

M. — ¿Qué se llama densidad ó peso específico de un cuerpo?

A. — Lo que en igualdad de volumen pesa más ese cuerpo que el agua pura.

M. — ¿Un decímetro cúbico de aceite pesará como el agua?

A. — Pesa menos porque nada sobre el agua.

M. — Peso específico del cobre, del níkel, del pino, del granito, del aceite de olivo, de la mampostería. ¿Cuánto pesa un dm. cb. de agua? ¿Un m.³ de hierro? ¿3 mts. cbs. de plata? ¿Cuántos litros contendrá una pileta de 15 mts. cbs. 155 dms. cbs? ¿Un botellón contiene 12 litros de agua, ¿cuál es su volumen? ¿Cuántos gramos son 2 dms. cbs. de agua? Si dividimos el peso de una moneda de níkel entre 6.5 ¿qué obtendremos? ¿Cómo hallarían el peso de una columna maciza de hierro de forma cilíndrica? De un tablón de quebracho? ¿De un vidrio colocado en una puerta? ¿El volumen de una bala de plomo?

Medio. — Hay una fórmula conocidísima cuyo uso evita estos razonamientos no siempre cortos, si se la sabe aplicar. Esta fórmula es $P = V \times D$ y quiere decir: peso de un cuerpo cualquiera, es igual al volumen por su densidad.

En efecto, para hallar el peso de esta varita de hierro, hallamos su volumen, 10 cms. cbs.; pero 10 cms. cbs. pesan 10 gramos, convertidos en agua; entonces hay que multiplicar por D la densidad para obtener el peso del hierro. Vds. ven que el número 10, siempre es 10; una vez 10, expresa *volumen del metal*; otra vez 10, expresa *igual volumen del agua*; y otra vez 10, expresa *peso del agua*. Pero esta curiosa transformación, donde el 10 no varía, exige que recordemos, qué denominación tiene el volumen para saber qué denominación hemos de dar al peso. Es aquí donde los niños se descuidan y cometen contrasentidos. Pero esto no sucederá nunca si Vds. recuerdan que cuando la denominación del volumen es dms. cbs., la denominación del peso será kgs.; cuando la denominación del volumen es cms. cbs. la denominación del peso será gramos; cuando la denominación del volumen es ms. cbs. la del peso será de tonelada que equivale á 1000 kgs. Para no equivocarnos, escribiremos la fórmula, siempre de esta manera: $P \text{ (Kgs.)} = V. \text{ (dms. cbs.)} \times D$ y tendremos presente estas otras dos: $P \text{ (grs.)} = V. \text{ (cms. cbs.)} \times D$, gramos. $P \text{ (tonelada)} = V \text{ (ms. cbs.)}$

$\times D$, toneladas. Si quisiéramos saber el peso de 12 ms. cbs. de hierro, aplicaríamos la fórmula así:

$$P \text{ (toneladas)} = (12 \text{ ms.}^3 \times 7.5) \text{ toneladas.}$$

$$P \text{ (toneladas)} = 12 \times 7.5 = 90 \text{ toneladas.}$$

$$P \text{ (Kgs.)} = 90 \times 1000 \text{ Kgs.} = 90000, \text{ que se lee: peso en Kgs. } 90000.$$

A dms.³ corresponde siempre Kgs.; á cms.³ corresponde, etc.

Con esta fórmula y teniendo presente lo que hemos dicho acerca de las denominaciones, resolveremos cualquiera de los problemas tratados anteriormente. Veamos. ¿Cuál será el volumen de este compás?

A. — Dada su forma irregular lo pesaremos.

M. — Pesa 26 gramos. A peso gramos corresponde ¿qué volumen?

A. — Corresponde cms. cbs. volumen.

M. — Fórmula:

$$P \text{ (gramos)} = V \text{ (cms. cbs.)} \times D.$$

Valoricemos ahora, las letras por las cantidades que conocemos: ¿ P ó peso del compás?

A. — 26 gramos. (*Escribe debajo de la fórmula 26 gramos =*).

M. — ¿Volumen del compás? es lo que tratamos de averiguar: luego es la incógnita; escribimos, pues, $V \text{ (cms. cbs.)}$. ¿Densidad de la substancia del compás. Es níquel.

A. — Su densidad es 6.5.

M. — Tenemos 26 gramos. $= V \text{ (cms.}^3) \times 6.5$
Dividiendo los miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad subsiste. Dividamos por 6.5 para aislar la incógnita $\frac{26}{6.5} = V \text{ (cms.}^3)$

26 dividido entre 6.5 da 4; luego $4 = V \text{ (cms.}^3)$
El volumen del compás es de 4 cms.³

Otro. — M. — ¿Cuánto pesará este cubo de plomo sin hacer uso de la balanza?

A. — Hallamos su volumen.

M. — Es de $5 \times 5 \times 5$ cms. cbs.

A. — Basándonos en la fórmula y teniendo presente que á cms.³ corresponden gramos, tendremos: P (gramos) = $125 \times 11 = 1375$ grs. El peso es de 1375 gramos. (*Comprueba el peso con la balanza, para lo que es preciso no olvidar lo conveniente de que todo esté preparado con anticipación*).

A. — ¿Cuánto pesarán 25 Hectólitros de vino cuya densidad es 0.990?

25 Hectólitros son: 2500 litros que equivalen á 2500 dms. cbs.

Fórmula: P (Kgs.) = V (dms. cbs.) $\times D$; substituyendo, obtenemos: P (Kgs.) = $2500 \times 0.990 = \text{etc.}$

Otro. — ¿Cuál será el peso de 20 ms. cbs. de piedra cuyo peso específico es 2.5?

Fórmula: P (toneladas) = V (ms.³) $\times D$.

Valorizándola obtendremos:

$$P \text{ (toneladas) } = 20 \times 2.5 = 50.$$

Pesan 50 toneladas. En Kgs., pesarán 50 por 1000 Kgs. ó 50000 Kgs.

Fin. — (*Se mandarán alumnos al pizarrón, á quienes de la manera establecida, se ejercitarán en el uso de la fórmula*).

Deberes. — Problemas que indique el libro.

INDICACIONES

No obstante, preferimos que este grado y el quinto resuelvan casos sin aplicar la fórmula por cuanto sólo es usable cuando una de las sustancias es agua. Problemas del tipo 5º y 6º es necesario descomponerlos. De aquí, el mal empleo que se hará con frecuencia de lo que no está inmediatamente aconsejado por el razonamiento, sino por la práctica.

CAPÍTULO IX

5º GRADO

I

Indicaciones acerca del método.— La atención se reconcentra sobre las series de ejercicios y problemas que, impresos en un libro, deben proporcionarse al alumno. Evocar en el menor tiempo posible el mayor número de conocimientos de tal manera combinados que pongan á prueba, dentro del interés, la capacidad analítica del estudiante, es el fin.

Un problema simple, de enunciado explícito, es anómalo; un ejercicio de operaciones directas sin la simplificación disimulada entre signos, números y paréntesis, es trivial y fastidioso. Hemos publicado esas series en 1901 bajo el nombre de *Síntesis Aritmética*. Susceptibles de modificación y de agregados dan, en conjunto, idea del principio que se tuvo en vista al hacerlas. Las instrucciones en cuerpo menor, son breves, con el objeto de recordar conocimientos adquiridos en grados anteriores.

La *M* indica que el ejercicio es mental, de *Principio*; el maestro amplía la pregunta, con otras de la misma especie, si nota insuficiencia. La *P*, indica ejercicio de pizarrón, al que se mandan, indefectiblemente, al comenzar la clase, cinco ó seis alumnos, libro en mano, para que cada uno prepare, en 10 minutos, el análisis del problema correspondiente á la serie que se diera el día anterior, para que estudiara en su casa.

SERIE 1

I.—Se llaman términos de una expresión matemática, á las cantidades separadas por los signos $+$ ó $-$.

II.—Los números de una cantidad, separados por el signo de multiplicar, se llaman factores.

1°—P. ¿Cuántos términos tiene $4 + 4 - 27 + 129 - 98$?

2°—P. ¿Cuántos términos hay en $7 \times 15 \times 97 \times 13$?

3°—¿Cuántos factores tiene la misma cantidad?

III.—Los términos precedidos del signo $+$ se llaman positivos; los términos precedidos del signo $-$ se llaman negativos; así: $+8$; $+1001$; $+1$ ó simplemente 8, 1001, 1 son positivos; -8 ; -1001 ; -1 son negativos.

4°—M. Que cada alumno de la clase dé una cantidad positiva.

5°—M. Que cada alumno de la clase dé una cantidad negativa.

6°—P. ó M. En $8 + 9 - 5 - 10$, ¿cuántos términos positivos hay y cuántos negativos?

7°—M. Que cada alumno dé una cantidad con tres términos positivos y dos negativos.

IV.—Para reducir á un solo término, una expresión aritmética, 1° se suman todos los términos positivos, 2° se suman todos los negativos, 3° se busca la diferencia entre una y otra cantidad y 4° se le pone el signo de la mayor.

Ejemplo:

Reducir á un solo término $8 + 10 - 5 + 6 - 2$.

Digo: 8 más 10 más 6 = 24 ($+$)

5 más 2 = 7 ($-$)

Diferencia entre 24 y 7 = 17;

signo de la cantidad mayor 24, es más; luego, el de la diferencia, es más; el término pedido es $+17$ ó 17.

Ejemplo 2°:

Reducir á un solo término $-28 - 5 + 23 - 14 + 7 + 12$.

Digo : 23 más 7, más 12 es 42 (+)
28 más 5, más 14 es 47 (—).

Diferencia entre 42 y 47 es 5; signo de la cantidad mayor es menos ; luego, el término pedido es — 5.

Es más breve hacer de este otro modo :

—28 y —5 es—33;—33 más 23 es igual á—10;—10 y—14 es—24;—24 más 7 es—17;—17 más 12 es—5.

8º—P. Reducir á un solo término :

$$\begin{aligned} &9 + 8 - 5. \\ &- 6 + 12. \\ &8 + 7 + 5 - 6 - 11. \\ &5 - 4 - 6 + 3 - 12. \end{aligned}$$

9º—M. Descomponer 8 en tres términos.

» 8 » » factores.

V. Factores de una cantidad, son aquellos números que multiplicados entre sí dan la misma cantidad.

10º—P. Dar cinco términos que reducidos den 1.

11º—M. Buscar dos término que reducidos den 0.

12º—P. Reducir á un término : $1222 + 450 + 321 - 2000$.

13º—M. ¿ Cuántas horas son 0.35 de día ?

SERIE 11

1º—P. Hacer desaparecer los decimales en $\frac{9 \times 4}{0.0002}$; en $\frac{8.28 \times 0.9}{55}$; en $\frac{0.0000121 \times 5.42 \times 0.00003}{4 \times 3 \times 11.0000}$ y simplificar el resultado.

2º—P. El largo del salón es 8.55 ms.; el ancho 6.64. ¿ Cuántos listones de pino de 9 cms. de ancho por 8.55 ms. de largo se necesitan para ponerle piso ?

3º—M. ¿ Cuántos litros hay en 2 ms. cbs. y 45 dms. cbs. ?

¿ Cómo van las medidas de superficie ? ¿ Cuántos Kgs. pesa una tonelada métrica ?

4º—M. Dar una fracción equivalente á $\frac{9}{11}$.

5º—P. Padre é hijo, tienen juntos 92 años; el hijo

nació cuando el padre tenía 30 años. Edad de uno y de otro.

6°—P. Descomponer en factores simples el numerador y denominador de la fracción $\frac{189}{100}$.

7°—M. Dar una cantidad negativa; otra positiva. ¿Cuánto es $7 - 12$; $5 + 6 - 3 + 4 - 20$?

8°—M. Cálculo mental combinando las cuatro operaciones.

9°—P. ¿ $(4\frac{3}{5} + 3\frac{3}{10} - 7)$: 0.425 es igual á?

10°—M. El cociente de dos números es $\frac{2}{3}$; ¿cuáles son los números?

11°—P. ¿Qué volumen tendrá una esfera de plomo de 7 Kgs.?

12°—P. Cada ladrillo, con la mezcla, mide 0.35 ms. de largo, 0.17 ms. de ancho y 0.06 de alto ¿cuántos entrarán en una pared de 10 ms. de altura por 50 de largo y ladrillo y medio de espesor?

SERIE 40.

1°—P. Expresar en hectáreas la superficie de un terreno cuadrangular de 386 ms. de largo por 78 de ancho.

2°—P. ¿Cuánto costará el adoquinado de una calle de 2 Kms., 8 Hms., 5 Dms. y 6 ms. de largo por 30 ms. de ancho, si cada adoquín vale 12 cts. y ocupa una superficie de 134 cms. cds.?

3°—P. Reducir:

$$\frac{3.4333 + \dots \times 0.99 + \dots}{(0.95 + 3.22) \times (3.2666 + \dots - 0.0666, \dots)}$$

á fracción simple.

4°—M. ¿Cuántos pliegos de papel hay en una resma y seis manos?

5°—M. ¿Cuánto pesarán 100 esterlinas sabiendo que 6 pesan 47.928 gramos.

6°—P. Resultado de $-7(\frac{1}{11} + \frac{3}{7}) + 3 \times 4$
 $(-\frac{2}{9} - \frac{3}{5})$ y ¿cuántos términos contiene?

8°—P. Valorizar

$$\frac{p + \frac{3 - \kappa}{3p - s}}{\kappa} \text{ siendo } p = 8; s = 15; g = 7.$$

9°—P. Valor de x en $\frac{7x - 6x + 8}{2} = 128.$

10°—M. Quitando 15 de un número da 24. ¿Cuál es el número? 8 veces un número es 248 ¿cuál es el número?

11°—P. Un caño llenaría una fuente en 3 horas; otro, en 5; otro la vaciaría en 4. ¿En cuántas horas se llenaría la fuente con los tres caños abiertos?

12°—P. ¿Una casa y un jardín han costado 86.000 \$; la casa ha costado 9 veces el jardín ¿cuánto ha costado la casa y cuánto el jardín?

13°—¿Cuánto costará, cercado con cinco filas de alambre, un campo cuadrado cuyo lado norte mide 2 Kms. y 6 Hms., sabiendo que el rollo de 241 metros vale \$ 2.41; cada poste colocado á 10 ms. y agujereado, vale 1.50 \$, cada hoyo 10 cts. y los torniquetes cada 241 ms. \$ 0.40 cada uno?

La serie 11, en 25 minutos, trata los siguientes puntos de la aritmética:

I.—Lectura y escritura de decimales de 7 cifras.

II.—Simplificación de quebrados y divisibilidad de los números.

III.—Análisis de un problema de tres combinaciones, medidas de superficie y división de denominados.

IV.—Medidas de capacidad y cúbicas.

V.—Transformación de las fracciones en otras equivalentes.

VI.—Análisis de un problema por medio de las igualdades.

VII.—Múltiplos y factores de los números.

VIII.—Signos positivos y negativos.

IX.—Ejercicios mentales de +, −, × y :

X.—Reducción de formas complejas.

XI.—Principios de la división.

XII.—Problemas acerca del volumen, peso y densidad combinados.

XIII. — Medidas de volumen, cantidades complejas, división.

El orden es necesario para adquirir un conocimiento, pero contraproducente para dominarlo. Observamos graduación, en cuanto á la complejidad de los casos no en cuanto á su especie; la 2ª serie trata decimales, quebrados, medidas métricas, densidad, ecuaciones, formas complejas como la 4ª; pero en la 4ª la suma de fracciones se ejercita con este ejemplo :

$\frac{0.03}{3.002} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{4}} + \frac{8 \times 9.0004}{7.5}$; en la segunda, la suma de fracciones, se ejercita con este otro $\frac{3}{5} + \frac{8}{9} + 3 + \frac{7}{5}$.

Una causa del resultado poco satisfactorio de la enseñanza de la aritmética, es la *no repetición*, bajo variados aspectos, de los conocimientos que trasmite el maestro. El *quebrado* y el *decimal*, elementos fundamentales de las operaciones, no se domina lo que entorpece la rapidez del cálculo.

Los profesores, el programa y los métodos, á menudo, sólo ejemplifican el asunto de la lección; durante el año, gran parte de la materia no vuelve á tratarse. Del mismo defecto adolecen las colecciones seriadas que conocemos, porque siguen la división del ramo, así: *problemas de suma, problemas de resta, problemas de multiplicación..... problemas sobre medidas de capacidad, sobre medidas de volumen..... sobre interés simple*; resuelta una serie, no vuelven á tratarse casos de la misma especie.

Abandonado semejante sistema, cada párrafo trata cuestiones de índole muy diversa, lo cual, en el primer momento, parece desordenado; precisamente, es el mérito de la colección que permite evocar de una manera atrayente, toda la aritmética, desde la numeración hasta los cálculos bancarios, en menos de 25 minutos; el alumno adquiere pocos conocimientos, pero repasa para conservarlos, penetra nuevas relaciones que dan ese tan ambicionado dominio de la materia.

Las lecciones, son de ejercitación; la teoría, siendo poca, se adquiere explicando problemas típicos ó de

aplicación que el alumno estudia en su casa, economizando el tiempo que algunos pierden copiando los enunciados, mediante el uso de un texto. En las tres ó cuatro lecciones semanales destinadas á la solución de problemas, el maestro procede así:

1º—Envía al pizarrón cuatro ó cinco alumnos, para que en 10 minutos cada uno, prepare el análisis del *problema ó ejercicio* que se le indicare.

2º—El resto de la clase, mientras, resuelve los ejercicios de la lección, señalados por una *M*.

3º—O bien, cuando el caso lo exija; todos apuntan al dictado los datos de un mismo ejercicio; los del pizarrón vuelven al banco después de resuelta parte de una serie; relevados cada tres ó cuatro minutos, al cabo de 30, casi todos han ejercitado la mente y la mano: han practicado.

4º—Cuando fuera necesaria una explicación, el maestro será breve, procurando, con la tiza y la pizarra, de que el conocimiento penetre más por la vista que por el oído, lo que, por otra parte, economiza palabras. *La Aritmética se aprende á fuerza de ejercicio y no de teoría*; así, el niño realiza dos esfuerzos provechosos: el de asimilación y el de reproducción, arco reflejo completo.

Distribución del programa en meses. — *Marzo.* — Ejercicios y problemas de síntesis y recapitulación de lo enseñado en 1º, 2º, 3º y 4º grados, de tal manera que con la solución de una ó dos series á cada dos lecciones, sin otro esfuerzo que el individual, recorra el alumno todos los conocimientos matemáticos, aritméticos y geométricos, adquiridos en sus estudios anteriores. Las series que, no obstante recordar los mismos puntos, deben ofrecer los rasgos peculiares y constantes de la variedad y de la generalización, sirven para completar la enseñanza aritmética de aquellos puntos que indicaremos más adelante y casos especiales de abreviación ó razonamiento que el *libro de ejercicios y problemas* debe presentar con empeñoso cuidado.

Abril.—1ª y 2ª—Reducir un quebrado á decimal. Ejercicios.

3ª—Series.

4ª—Reducir una fracción decimal á quebrados. Ejercicios.

5ª, 6ª y 7ª—Series.

8ª y 9ª — Fracciones decimales periódicas. Ejercicios.

10ª y 11ª—Series.

12ª, 13ª y 14ª—Reducir una fracción periódica pura á quebrado. Ejercicios.

15ª y 16ª—Series.

17ª y 18ª—Reducir una fracción periódica mixta á quebrado. Ejercicios.

19ª y 20ª—Series.

21ª y 22ª—Series.

Mayo.—1ª y 2ª—Enseñanza de la raíz cuadrada. Ejercicios.

3ª y 4ª—Series.

5ª y 6ª—Ejercicios de raíz cuadrada.

7ª y 8ª—Idea de un banco y sus operaciones.

9ª—Series.

10ª y 11ª—Problemas de interés.

12ª—Series.

13ª—Problemas y ejercicios de interés.

14ª—Series.

15ª—Letras de cambio y descuento.

16ª—Series.

17ª y 18ª—Pagarés. Cuentas. Facturas.

19ª—Series.

20ª—Problemas y ejercicios acerca del interés y descuento.

21ª—Series.

22ª—Giros, cheques, acciones, letras, etc.

Junio.—1ª—Series.

2ª—Depósitos á plazo fijo y en cuenta corriente. Caja de ahorros.

3ª—Series.

4ª—Comisionistas y comisiones. Bolsa de comercio.

5ª y 6ª—Idea de sindicato, trust, sociedad anónima.

7ª y 8ª—Ejercicios y problemas de repaso de los puntos enseñados en 5º Grado.

9ª y 10ª—Series.

11ª—Tablas. Construcción de una tabla de multiplicar y su empleo.

12ª—Series.

13ª—Tablas. Construcción de tabla de potencias y su empleo.

14ª y 15ª—Series.

16ª y 17ª—Tablas. Construcción de una tabla de raíces y su empleo.

18ª—Series.

19ª—Tablas. Construcción de una tabla de interés simple.

20ª y 21ª—Series.

22ª—Construcción de una tabla de cocientes á divisor fijo, v. g. $\frac{a+b+c+d+e}{5}$ donde a, b, c, d y e enteros ó fraccionarios varían de 0 á un límite fijo y el divisor siempre igual al número de términos.

Julio.—1ª y 2ª—Series.

3ª—Ejercicios acerca de las tablas.

4ª y 5ª—Ejercicios y problemas de interés, descuento, etc.

6ª, 7ª y 8ª—Series.

9ª—Ejercicios y problemas de interés, descuento, etc.

10ª y 11ª—Series.

12ª y 13ª—Enseñar á resolver problemas de compañía.

14ª—Series.

15ª—Problemas de compañía.

16ª—Idea de proporción (objetiva) y generalizada por la igualdad de dos quebrados.

17ª—Enseñar á resolver problemas de mezcla.

18ª—Problemas de mezcla. (De fijación).

19ª—Series.

20ª—Problemas de mezcla.

21ª y 22ª—Series.

Agosto.—1ª y 2ª—Ejercicios y problemas de recapitulación (5º Grado).

- 3ª y 4ª—Series.
 5ª—Relaciones entre el peso oro y el peso papel.
 Reducciones.
 6ª y 7ª—Series.
 8ª y 9ª—Valor del franco, del marco y de la libra esterlina en moneda argentina.
 10ª—Series.
 11ª y 12ª—Problemas acerca de la reducción de moneda argentina á moneda extranjera. (De fijación).
 13ª y 14ª—Series.
 15ª—Ejercicios y problemas de recapitulación (5º Grado).
 16ª—Tablas monetarias de reducción.
 17ª y 18ª—Series.
 19ª—Tablas monetarias. Ejercicios.
 20ª, 21ª y 22ª—Series.
Septiembre, Octubre y Noviembre.—Las lecciones de estos meses se dedicarán á resolver series, alternadas con clases dedicadas á recordar la enseñanza especial del grado.

II

Desarrollo de las lecciones

LECCIÓN 8ª (Abril)

Tema.—Fracciones decimales periódicas.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — Piensen, todos, una fracción decimal. ¿ Cuánto es 8 centésimos reducidos á quebrado simplificado? ¿ 12 décimos? ¿ 125 milésimos? ¿ 5 centésimos? ¿ A qué equivalen $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{15}$ reducidos á decimal? ¿ Densidad del cobre, del oro, de la plata, del hierro? ¿ Cuadrado de los 8 primeros números? ¿ El volumen dividido por la longitud, qué da? ¿ Cómo se divide un decimal por otro? Un hombre hace en 8 días $\frac{3}{5}$ de

una zanja, ¿cuánto hará de la zanja en un día? Un caño echa 3 Hls. de agua á una fuente en dos horas, otro echa 6 en tres horas, ¿cuánto echarán las dos en una hora? Si echan 4 Hls. y 5 Dls. en una hora, quinta parte de una fuente, ¿de qué capacidad es la fuente?

Medio. — **M.** — Al reducir una fracción común á decimal ¿han notado Vds., que no de todas se consigue un cociente exacto? ¿Que al dividir un entero por otro entero tampoco se obtiene siempre cociente exacto por más cifras que se escriban?

Probemos: 7 dividido entre 3. (*Hace la división en voz alta hasta la 4ª ó 5ª cifra*).

$$\begin{array}{r}
 7 \quad | \quad 3 \\
 10 \quad 2.3333 \dots \\
 10 \\
 10 \\
 10 \\
 10 \\
 1
 \end{array}$$

Y si continuamos ¿qué cociente seguiremos obteniendo?

A. — Siempre 3 de cociente y 1 de residuo.

M. — ¿Creen Vds. que acabaríamos alguna vez de dividir?

A. — Nunca acabaríamos de dividir. Entonces, á la derecha de la última cifra escribimos puntos suspensivos; significa continuación del mismo cociente.

Otro ejemplo: — Dividamos 9 entre 11.

$$\begin{array}{r}
 9 \quad | \quad 11 \\
 90 \quad 0.818181 \dots \\
 20 \\
 90 \\
 20 \\
 90 \\
 20 \\
 9
 \end{array}$$

En este caso, sucede como en el anterior. El cociente es siempre 8 y 1, 8 y 1, 8 y 1; los residuos siempre 2 y 9, 2 y 9, 2 y 9; no concluiríamos nunca de dividir. En $7:3$ se repetía á la derecha de la coma, la cifra 3; aquí, á la derecha de la coma, se repite el número 81. Otros números que buscásemos nos darían cocientes como estos:

0.832832....; 39.231231....; 1.11251125.... en donde se repite, á la derecha de la coma, 832, ó 231, ó 1125. Ahora bien, este grupo de cifras, que se repite constantemente, se llama *período* (*escribe la palabra*) y periódicas las fracciones decimales que, por presentar dichos períodos, nunca concluyen; por eso llevan á la derecha, puntos suspensivos, para distinguirlas de aquellas finitas. Así, dividiendo 100 $\overline{18}$

$$\begin{array}{r} 100 \quad 5.5\overline{5} \dots \\ 100 \\ 10 \end{array}$$

Obtenemos un cociente periódico. De aquí, la necesidad de no confundir $5.5\overline{5}$ con $5.55 + \dots$. Suele colocarse un pequeño signo *más* y puntos suspensivos para indicar que el cociente continúa en la misma forma. Lean el período de los siguientes decimales: (*escribiéndolos rápidamente*) $0.8989 + \dots$; $938.1515 + \dots$; $0.9 + \dots$; $9.328 + \dots$; $3.111 + \dots$; 3.1212 . Dicten Vds. una fracción decimal periódica; antes, voy á indicarles su lectura: 89 centésimos más; 15 centésimos más ó bien, 1515 diez milésimos más. Pero basta leer el período.

Als.— (Enuncian decimales que el maestro escribe).

M.— Pero hay fracciones decimales cuyo período comienza inmediatamente después del punto, como en los ejemplos que hemos visto hasta ahora; y hay fracciones decimales cuyo período comienza después de una, dos, tres ó más cifras como en: $0.38151515 + \dots$; $48.761111 + \dots$; entonces, hay que distinguirlas.

A las primeras se las llama fracciones *periódicas puras* (*escribiendo*); á las otras, *fracciones periódicas impuras* (*escribiendo*).

cas mixtas. Estas cifras constituyen la *parte no periódica*; estas otras, la *parte periódica*. Se lee la parte no periódica con el primer período, indicando el período. Así: 3815 diez milésimos más, período 15. Lean los decimales que voy á escribir: 0.1616 + ...; 0.98....; 0.3555 + ...; 8.712323 + ..., etc. Dicten oraciones decimales periódicas mixtas (*el maestro escribe las de cuatro ó cinco*); dicten fracciones decimales periódicas puras; dicten decimales comunes.

Fin. — (*Pasan cinco alumnos al pizarrón*).

M. — Escriban 25 centésimos; 25 centésimos más; 3528 milésimos más, período 28; 75 centésimos más. Dividan 5 entre 3, é indiquen qué clase de decimal resulta en el cociente. Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros cinco*).

Dividan 17 entre 3; digan qué clase de fracción resulta. Dividan 8 entre 5 y digan qué clase de fracción resulta. Reduzca, Menica (*indica un inteligente*) $\frac{17}{13}$ á decimal, y diga qué clase de fracción resulta. Escriban los demás, una fracción periódica pura; una común; una periódica mixta. Siéntense, menos Menica.

A. — Obtuve este cociente, pero no sale ni exacto ni periódico.

$$\begin{array}{r} 17 \quad | \quad 13 \\ 40 \quad 1.30769 \\ 100 \\ 90 \\ 120 \\ 3 \end{array}$$

M. — Siga V. dividiendo.

A. — (*Obtiene las cifras 2 y 3 de cociente; nota el residuo 4 y 1*). Señor, es periódica pura. Aparecen los mismos dividendos parciales 40 y 10; el otro será 90; luego 120, de modo que las cifras del cociente serán: 3, 0, 7, 6, 9, 2; de nuevo 3, 0, 7, etc.

M. — Muy bien; desde el momento que aparece uno de los dividendos parciales anteriores, el cociente es periódico y no hay necesidad de continuar divi-

diendo porque se repiten las cifras. Vuelvan á sus asientos.

Deberes. — Reduzcan á decimal, las siguientes fracciones:

$$\frac{23}{8}, \frac{31}{9}, \frac{7}{15}, \frac{0.17}{1.2} \text{ y } \frac{52}{225}.$$

LECCIÓN 3ª (Mayo)

Tema : — Serie 12.

1º—P.—Simplificar $\frac{4 \times 5 \times 6 - 5 \times 2 \times 8 + 5 \times 11}{5 \times 22 - 9 \times 5 + 7 \times 8 \times 11}$.

2º—M.—Dividir 0.1 entre 0.00001.

3º—M.—Submúltiplos del metro cuadrado y múltiplos del metro cúbico.

4º—La suma de dos números es 27, su diferencia 13 ¿cuáles son los números?

5º—P.—Procedimiento más abreviado para multiplicar 9999999×75278 .

6º—M.—Dar en números romanos 7, 11, 98, 502.

7º—M.—¿Cuánto es $\frac{7}{5} + \frac{2}{5} + \frac{9}{5} - \frac{3}{5}$ todo, multiplicado por 4?

8º—P.—Valorizar $\frac{(a-b)^5 \times (a+b)^3}{(a-b)^6 \times (a+b)^2}$ siendo $a = 4$, $b = 2$.

9º—P.—Reducir á fracción simple.

$$\frac{3.4333 + \dots \times 0.99 + \dots}{(0.95 + 3.22) \times (3.2336 + \dots - 0.0666)}$$

10º—P.—¿A cuántos minutos, horas, días y meses equivalen 20 años?

11º—P.—Se ha pintado un letrero de varios colores: $\frac{1}{3}$ de blanco, $\frac{2}{5}$ de verde, $\frac{1}{5}$ de negro y el resto, un metro, de colorado, ¿cuál es el largo del letrero?

12º—P.—Una cuadra de alfalfa da tres cortes al año y cada corte 5 toneladas; vendidas á 11 \$ los 1000 Kgs. ¿cuánto produce la cuadra y representa el 12 % de qué capital?

Desarrollo.—A.—M.—Pasen á la pizarra con el libro, Balado, Ferrari, Fernández, Osafrain, Reina, y La-

casa. Resuelvan, Balado, los ejercicios 1 y 5; Ferrari, el 8; Fernández, el 9; Osafrain, el 10; Reina, el problema 11; Lacasa, el problema 12.

Disponen de 10 minutos para preparar el análisis y la solución del problema.

Clase: resultado de dividir 1 décimo entre 1 cienmilésimo.

Als.—1000; 10000; 10000.

M.—¿ Por qué ?

A.—Igualando el número de cifras decimales y suprimiendo las comas, obtenemos 10000 dividido entre 1 que es 10000.

M.—Submúltiplos del m.²

A.—El dm.², que se escribe *dm* y un pequeño 2 arriba y á la derecha; el cm.² y el mm.²

M.—¿ A cuántos mm.² equivale un metro cd.

A.—A 1 con seis ceros ó un millón de mms. cds.

M.—Múltiplos del m.³ y su equivalencia.

A.—El Dm.³ que equivale á 1000 ms. cbs.

M.—¿ Otro, Lendino ?

A.—El Hm. cb. que equivale á un millón de ms. cúbicos.

M.—¿ Otro, Uncal ?

A.—El Km. cb. que equivale á mil millones de ms. cbs.

M.—La suma de dos números es 8 y su diferencia es 6 ¿ cuáles son los números ?

A.—7 y 1 porque si á la suma agregamos la diferencia obtenemos dos veces el mayor.

M.—¿ 7 en números romanos ?

A.—Una V y dos II.

M.—¿ 98 ?

A.—Una L, una V, otra L y tres III.

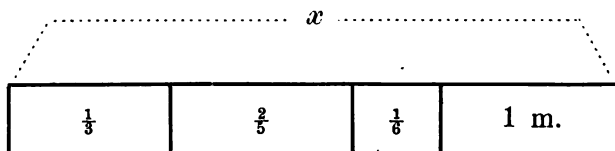
M.—Resuelvan este cálculo :

$$(5 + 12 + 3 + 31) : 17 \times 8 + 6 + 6 + 6.$$

B.—Explique, Reina, su problema.

A.—(Tomando el puntero é indicando lo que haya hecho en el pizarrón; el maestro interrumpirá

solo para exigir que señale; correcto ó erróneo el razonamiento, hasta que el alumno manifieste no tener más que decir). Aquí, se trata de averiguar el largo del letrero que represento por x metros y esta figura.



$\frac{1}{3}$ del letrero, más $\frac{2}{5}$ del letrero, más $\frac{1}{6}$ del letrero, más el resto ó 1 metro, equivalen, según el problema, al letrero ó sea x ; 1 metro equivaldrá, pues, á todo el letrero ó x , menos esto ó su tercera parte, su sexta parte, y sus dos quintas partes; $x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{5} - \frac{x}{6} = 1$.

Ahora, aislo x , hallando el mínimo común denominador de 3, 5 y 6, que es 30. Tengo $30x - 10x - 12x - 5x = 30$, de donde $3x = 30$ y $x = 10$. El letrero tiene 10 metros de largo.

M.—Está bien. Explique lo que ha hecho Balado.

A.—Simplificar, etc.

Hay seis términos que no tienen divisor común; entonces efectúo las operaciones y tengo:

$$\begin{array}{rcl} 4 \times 5 \times 6 & = & 120 \\ 5 \times 2 \times 8 & = & 80 \\ 5 \times 11 & = & 55 \end{array}$$

120 menos 80 es 40, más 55 es 95;

95 por numerador; por denominador:

$$\begin{array}{rcl} 5 \times 22 & = & 110 \\ 5 \times 9 & = & 45 \\ 7 \times 8 \times 11 & = & 616 \end{array}$$

110 menos 45, es 65; 65 más 616 es 681.

El quebrado es $\frac{95}{681}$.

M.—¿Nadie ve un procedimiento más corto? Pues, 6 por 4 es 24 (*señalando*); 2 por 8 es 16; 24 veces 5 menos 6 veces 5 ¿cuántas veces 5 es?

A.—8 veces 5 ó 40.

M.—Más 55 da 95. En el denominador 22 veces 5, menos 9 veces 5 son 13 veces 5 ó 65 más 616.

Explique el otro ejercicio.

A.—9999999 $\times$ 75278 es lo mismo que (10000000 — 1) 75278; esto es igual á

$$\begin{array}{r} 75278000000 \\ - 75278 \\ \hline 75277992472 \end{array}$$

M.—Explique, Ferrari, su trabajo.

A.—Para valorizar, substituyo las letras por sus respectivos valores y tengo:

$$\frac{(4-2)^3 \times (4+2)^3}{(4-2)^6 \times (4+2)^2} = \frac{2^3 \times 6^3}{2^6 \times 6^2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6}$$

cancelando tengo, $\frac{6}{2} = 3$.

M.—Explique Fernández.

A.—No lo puedo resolver.

M.—Vuelva á su asiento. Vaya Esther Miranda á sacarlo. Explique Osafrain.

A.—Cada año tiene 365 días, 20 tendrán 365×20 ó 7300 días. Cada día tiene 24 horas, 7300 días tendrán 7300×24 horas; luego, los 20 años equivalen á 7300 días ó 7300×24 horas; cada hora tiene 60 minutos; las 7300×24 horas, tendrán etc.

M.—Explique Lacasa.

A.—Si una cuadra de alfalfa da tres cortes al año y cada corte tres toneladas, al año producirá 15 toneladas ó 9000 Kgs. porque una tonelada pesa 1000 Kgs. á 11 \$ los 1000 Kgs. equivale decir 11 \$ la tonelada. 15 toneladas valdrán $15 \times 11 = 165$ \$.

La segunda pregunta no la comprendo.

M.—Presten atención. Se pregunta: 165 pesos es el 12 por ciento de qué capital? Este problema significa lo siguiente: Si 100 \$ producen una ganancia ó un interés de 12 \$. ¿Qué capital producirá una ganancia de 165 \$?

Si 12 \$ los producen 100 \$ de capital,
 1 \$ lo producirá $\frac{100}{12}$ \$ »
 y 165 \$ los » $\frac{100 \times 165}{12}$ \$ de capital.

lo que da $25 \times 55 = 1375$ \$; luego, 165 es el 12 por 100 de 1375 \$. ¿Qué hizo Vd. Miranda? No es haciendo las operaciones como se resuelve. ¿No recuerdan Vds. la reducción de fracciones periódicas á quebrados? Observen. No quiero apuntes de ninguna especie, ni libros, ni papeles sobre el pupitre; deseo atención. 3.4333..... es fracción periódica mixta.

Cuando el número se compone de parte entera y parte decimal, se separa, ¿lo recuerdan? Entonces $3.4333 + \dots = 3 + 0.4333\dots$; la parte no periódica es 4 y el período 3; luego $0.43 = \frac{43 - 4}{90} = \frac{39}{90} = \frac{13}{30}$.

0.99..... es fracción periódica pura, de consiguiente, igual á $\frac{9}{9} = 1$; el numerador es, $3 \frac{13}{30}$ ó $\frac{103}{30}$. $0.95 + 3.22$ es 4.17; y $3.2666 - 0.0666$ es 3.2000;

El denominador es, pues, 4.17×3.2 , y la fracción igual á

$$\frac{\frac{103}{30}}{4.17 \times 3.2} = \frac{103}{4.17 \times 3.2 \times 30} = \frac{10300}{417 \times 32 \times 3} = \frac{2575}{417 \times 8 \times 3}$$

etcétera.

Para mañana, este mismo ejercicio, y la serie 13; en sus cuadernos, analizan el problema 8 y el ejercicio 5°.

LECCIÓN 7ª

Tema. — Idea de un banco y sus operaciones.

Desarrollo. — A.— M.— Saben Vds. que hay gente rica y gente pobre. El pobre, suele pedir al rico dinero en calidad de préstamo, para devolvérselo un mes, tres meses, un año, dos años después. Si el pobre es trabajador y de confianza, el rico le presta.

Fácilmente se comprende, que la bondad nunca llega hasta dar 1000 pesos para recibir, después de un año ó dos, nada más que 1000 \$ con los que el pobre, haciendo negocios, habría ganado algunos cientos de pesos. El rico, pues, cobra, además de su dinero, 1000 \$, que desde hoy llamaremos *capital* otra suma de dinero, 70, 80, 100 \$ según lo convenido con el pobre que los recibió en préstamo, que constituye la ganancia y se le suele llamar *interés*.

Naturalmente, cuanto mayor es el *capital* ó la suma *prestada*, mayor será el interés que el rico cobre; cuanto mayor sea el *tiempo* que dure el préstamo, también mayor será el interés que cobre. De aquí, que tanto el prestamista como el que recibe prestado, para no cobrar menos interés el uno, ni pagar más interés el otro, tienen en cuenta tres cosas: el *capital* ó la cantidad de dinero que se presta; el *tiempo* por que prestan y el *interés* que han de cobrar.

Pero, la gente, no es toda honrada y la confianza nunca llega á tal punto de entregar 1000 \$ á un individuo, así no más, sin una constancia por lo menos. Si el que recibió, se le antoja decir al prestamista: de Vd. no he recibido nada — será lo malo que se quiera; pero sin un papel en que conste el préstamo y la obligación de volver el dinero á su dueño, no puede cobrársele. El juez sólo reconoce el derecho de reclamar, en este caso. De aquí que el pobre, al recibir dinero del rico, entrega al rico un recibo en forma de pagaré donde consta el capital prestado; el interés que percibe; el tiempo que durará el préstamo y, para que pueda exigirse el pago por la vía judicial, en caso de que el que reciba el dinero niegue la deuda, el documento lleva los sellos que marca la ley: aquí tienen Vds. uno de esos pagarés (*mostrando un pagaré*) otorgado por N. N. á X de quien recibió prestado 450 \$. (*Lo lee*).

B.— Pero gente que preste no abunda, porque la ganancia es poca. Si uno de nosotros fuéramos á pe-

dir 500 pesos prestados, seguramente, no encontraríamos quien nos los diese.

Sin embargo, la gente honrada, capaz de devolver el dinero que pide, es mucha. Para satisfacer estas necesidades ¿qué se ha hecho? La gente rica se junta y forma entonces, una sociedad, una *sociedad anónima*. Contribuye cada persona con el dinero que le place 1000, 5000, 20.000, 100.000 pesos y juntas, fundan una casa, un Banco, el *Banco Popular* por ejemplo, que Vds. conocen, cuyo único objeto es prestar ese dinero al trabajador de confianza que lo solicite y recibir, para guardarlo, el dinero de aquellas personas que temen tenerlo en sus bolsillos ó en los armarios y desean ganar interés, porque el Banco paga interés por el dinero que le llevan. De modo que el Banco presta y le prestan. ¿Cómo el Banco gana mucho?

1° Porque sólo se ocupa de prestar ó recibir dinero; 2° Porque si son 80 las personas que lo formaron, solo 5 ó 6, la comisión directiva, se ocupa en el trabajo de prestar; 3° Porque no queda un día con el dinero en caja, es decir, en el armario, sin ganar interés. Todo lo prestan inmediatamente, porque siempre hay gente que pide prestado; 4° Porque todo el dinero que recibe en depósito, para guardar, lo prestan; y si paga por 100 \$, 5 de interés al que lo depositó, el Banco cobra 9 \$ de interés al que presta; gana, pues, 4 \$, por el solo trabajo de guardar un dinero ajeno. Se ocupan, además, en otras operaciones: cobrar cuentas de los comerciantes cuando están en forma de pagaré; encargarse de mandar á otra ciudad dinero ó hacer giros por cuenta del interesado. Si necesito mandar á mi padre, que está en Buenos Aires, 50 \$, no hago un viaje, ni los entrego á una persona que pueda quedarse con ellos; doy al Banco los 50 \$, explico mi deseo y obtengo un papel, un giro, con una orden contra un Banco de Buenos Aires, relacionado con éste, para que pague á mi padre, Fulano de Tal, los 50 \$ no bien se presente.

Con esto, mis apreciables jóvenes, he querido dar

una idea de lo que es Banco, capital, interés, préstamo, pagaré, giro, etc.

Todos estos papeles que se dan, se renuevan, se sellan, se imprimen, no tienen otro objeto que evitar los engaños y las trampas. Sin embargo, á pesar de esas precauciones, se les suele estafar. Si la gente fuera de una honradez acrisolada y tuviera buena memoria de sus actos, tales papeles, que en lenguaje bancario se llaman *documentos*, no se necesitarían.

Los pagarés que uno firma al Banco, son éstos (*los muestra*) y se llaman letras. Dice lo siguiente (*lee el documento*). Estas líneas negras, que á muchos parecerá un adorno, tienen por objeto impedir que algún tramposo raspe las palabras, escriba seiscientos por setecientos, sin que el Banco se aperceiba y pague menos de lo que debe. El pagaré se imprime porque se escriben todos de la misma manera y solo varían en la cantidad ó *capital*, en el *tiempo* por el cual se presta y en el *interés* que se cobra, precisamente los tres claros que Vds. notan en la letra que lleva el que pide prestado y firma el documento. Pero como el interés se cobra adelantado y es, por cada 100 pesos, siempre el mismo, no se hacen indicaciones acerca de él. Si pido 1000 \$ prestados firmo un pagaré ó letra por 1000 \$; pero me dan 1000 pesos menos los intereses. Será desfavorable al que pide, pero es así.

Así impreso, el Banco no pierde tiempo en dictar el texto del pagaré á los muchos que no saben hacerlo. Las cantidades se escriben en palabras, porque en números sería fácil agregar una cifra á cualquier lado; de modo que si firmo hoy un documento donde diga: A los noventa días de la fecha pagaré á N. N. 1000 \$ etc.; á los noventa días de la fecha se me puede cobrar un documento donde diga: A los noventa días de la fecha pagaré á N. N. 10.000 \$, etc. Precauciones, siempre precauciones contra la gente malvada que, se comprende, ronda siempre los bolsillos.

C. — **M.** — ¿Qué es un Banco? ¿Cómo se constituye? ¿En qué condiciones se presta dinero? ¿Por cuánto tiempo? ¿La cantidad que se presta cómo se llama? ¿Lo que la cantidad gana? ¿Cómo se asegura un Banco de la cantidad que presta? ¿Cómo es una letra y qué dice? ¿Un pagaré? etc.

LECCIÓN 10ª

Tema. — Hallar el interés. Diferentes casos.

Desarrollo. — *Principio.* — **M.** — ¿Qué es tanto por ciento?

A. — El interés de 100 pesos durante un tiempo determinado, generalmente un mes ó un año.

M. — ¿Qué interés ganan, comunmente, 100 pesos?

A. — 9 \$, 8, 7, 6, 5: también 12, 18, 3, 1. Es muy variable. Pero se considera buena ganancia desde el 7 %.

M. — ¿A quiénes presta el Banco?

A. — A las personas que pueden devolver el dinero, á los trabajadores, á los que garanten la suma recibida.

M. — ¿Cómo se pide dinero á un Banco?

A. — Se llena una solicitud impresa que proporciona el mismo Banco, en la que se declara la cantidad, los bienes que uno posee y el tiempo. La firman dos personas; de modo que si no paga una paga la otra, aunque no haya gozado del préstamo.

Medio. — **A.** — Ahora, enseñaré la manera de hallar el interés. He prestado 850 \$ al 8 % anual. Quiero saber que interés me producirán en 3 años. Empleamos siempre el método de reducción á la unidad.

Si 100 \$ en 1 año producen 8 de interés

1 » » 1 » producirá $\frac{8}{100}$ » »

850 » » 1 » » $\frac{8 \times 850}{100}$ » »

Y 850 » » 3 años » $\frac{8 \times 850 \times 3}{100} = 204$ \$.

No ofrece, pues, mayor dificultad la solución de estos problemas. Pero, deseamos saber el interés que producen en 3 años y 6 meses. Entonces, el tiempo se reduce á meses y decimos:

Si 100 \$ en 12 meses producen \$ 8 de interés

1 » » 1 mes producirá \$ $\frac{8}{100 \times 12}$ »

850 » » 1 » » $\frac{8 \times 850}{100 \times 12}$ » .

850 » » 42 meses, » \$ $\frac{8 \times 850 \times 42}{100 \times 12} = \text{etc.}$, que es lo que deseábamos saber.

Si no fueran 3 años y 6 meses, sino 2 años, 3 meses y 15 días, reducimos todo á días y decimos:

Si 100 \$ en 360 días (un año) ganan \$ 8 de interés,

1 » » 1 » ganará \$ $\frac{8}{360 \times 100}$ »

850 » » 1 » ganarán » $\frac{8 \times 850}{360 \times 100}$ »

y 850 » » 825 » (2 años, 3 meses y 15 días) ganarán $\frac{8 \times 850 \times 825}{360 \times 100} = \frac{4 \times 85 \times 165}{360} = \frac{17 \times 55}{6}$ \$.

Otro problema:

125 \$ ganan 12 \$ en 90 días ¿cuánto ganarán 300 \$ en 8 meses?

Si 125 \$ en 90 días ganan 12 \$

1 » » 1 día ganará $\frac{12}{125 \times 90}$;

300 » » 1 » ganarán 300 veces más ó $\frac{12 \times 300}{125 \times 90}$

y 300 » » 240 días » 240 veces más que en un día ó sea $\frac{12 \times 300 \times 240}{125 \times 90}$ \$.

Simplificando.... etc.

B. — M. — Hay casos en que un Banco se hace esta pregunta: ¿Qué capital debo prestar para que dentro de 2 años me dé 8000 \$ de interés, al 9 % anual.

El análisis no ofrece mayor dificultad que los problemas anteriores:

Si 9 \$ de interés son producidos, en 1 año, por 100 \$ de capital

1 \$ de interés será producido, en un año, por $\frac{100}{9}$ de capital.

1 \$ de interés será producido, en 2 años, por un capital dos veces menor que el anterior ó sea $\frac{100}{9 \times 2}$ \$.

Y 8000 \$ en 2 años, deben ser producidos por un capital 8000 veces mayor ó $\frac{100 \times 8000}{9 \times 2}$, etc.

(*El maestro explica, escribiendo las cantidades, de manera que se correspondan y con suma claridad*).

Noten Vds. que si tratamos de averiguar el interés, las cantidades que expresan el interés van al último, en el análisis del problema; si tratamos de averiguar el capital, las cantidades que lo expresan van al último; siempre al último, la especie de la incógnita.

C. — Supongamos que el capitalista tiene sólo 5000 \$ y desea saber á qué tanto por 100 debe prestar ese dinero para ganar en 2 años, 1800 \$.

La incógnita es el interés que ganarán 100 \$ en 1 año. Razonamos así:

5000 \$ de C ganan en 2 años 1800 \$ de I

1 » » » ganará » 2 » $\frac{1800}{5000}$ » » »

1 » » » » » 1 » $\frac{1800}{5000 \times 2}$ » » »

y 100 » » » » » 1 » $\frac{1800 \times 100}{5000 \times 2}$ » » » que es lo que deseábamos saber; simplificado obtenemos:

$$\frac{180}{5 \times 2} = 18 \$$$

Debe prestar al 18 %.

Fin. — Pase Calvo. Resuelva este problema:

Hallar el interés de 1000 \$ prestados al 10 % anual durante un año y ocho meses.

(*El maestro dará problemas, sin distinguir los casos, hasta que el tiempo lo permita*).

INDICACIONES

Conviene silenciar en absoluto el empleo de las proporciones y de la fórmula; complican lo sencillísimo; el alumno olvida las reducciones del tiempo; no se acostumbra á un razonamiento tan frágil como: *á mayor capital menos tiempo*, etc.; la confusión se apropia del cerebro y halla un maremágnum donde no hay más que un problema que acostumbra á resolver por el método de reducción á la unidad, lógico por excelencia.

Por otra parte, es, como rápido, superior al de las proporciones, puesto que inmediatamente arriba á la fórmula; sin dificultad puede acortarse el análisis, reduciendo á 1, en una sola línea y pasando á los datos condicionales del problema, en otra línea. ¿Cuánto ganarán 3500 \$ al 7 % en 4 años?

100 \$ ganan en 1 año 7 \$
 1 » gana » 1 » 0.07
 3500 » ganarán » 4 años $3500 \times 4 \times 0.07$ \$.

Hay maestros poco avisados que á cada línea permiten á sus alumnos las operaciones. De esta manera, eternizan la solución de un problema que no aprovecha los beneficios de la cancelación. Acerca de este punto nunca se será demasiado exigente.

LECCIÓN 19ª

Tema. — Construcción de una tabla de interés simple y su empleo.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Cuál es el objeto de una tabla?

A. — Dijimos el otro día, que el objeto de una tabla era evitar el razonamiento y las operaciones, dándonos sumas, ó productos, ó diferencias, ó cocientes ya hechos.

www.libtool.com.cn

M. — ¿Cómo se las usa?

A. — Según las indicaciones de la tabla; generalmente, se trata de buscar un número situado en la casilla de encuentro de dos columnas, una vertical y otra horizontal. Así, 8ª potencia de 4, se halla buscando el 4 en la columna vertical izquierda; 8ª potencia, en la línea horizontal superior. Del 4, se corre hacia la derecha; de 8ª potencia, se corre hacia abajo; en el encuentro de ambas líneas hallamos el número.

M. — ¿Cuándo una tabla presta verdadera utilidad?

A. — Cuando se trata de cantidades cuyo uso es frecuente. Así, las raíces cuadrada y cúbica de los 100 primeros números, se usan con frecuencia en los problemas de geometría sobre superficie y volúmenes. Como las exactas son poquísimas, hay que hacer la operación, lo que, al exigir tiempo, expone á equivocaciones. No obstante, la mayor aproximación al resultado verdadero no obliga á hallar la raíz cúbica de 87, por ejemplo, hasta la 3ª cifra decimal por lo menos. La tabla nos evita todo este trabajo, dándonos inmediatamente, la raíz que necesitamos.

Medio. — *M.* — Ahora, enseñaré á Vds. cómo se hace una tabla de interés simple ó su empleo cuando se la tiene, porque muchas tablas, por ejemplo ésta, están impresas en los libros de aritmética.

Interés simple que 1 \$ produce desde 1 hasta 12 meses, al 2, al 3, al 4, al 5, al 6, al 7, al 8 y al 9 % anual.

Antes, hacemos este cuadro (*ya preparado en el pizarrón*).

Mes	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %		
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										

Y luego resolvemos este problema :

I. — ¿Qué interés ganará, 1 \$ de capital al 2 % anual en 1 mes ?

Resuélvalo Miguez.

Si 100 \$ ganan en 12 meses.... 2 \$
 1 > ganará en 1 mes..... $\frac{2}{1200} =$

$\frac{1}{600} = 0.0016667$. Resultado que escribimos en la primera casilla, aquí.

Ahora ya no necesitamos resolver problemas. Si en un mes da 0.0016667, en 2 meses el mismo peso, al mismo tanto por ciento, dará el doble (*hace la operación y escribe la cantidad*). En tres meses dará lo de un mes y lo de dos meses juntos ó la suma de las dos cantidades que acabamos de escribir. En 4 meses, etc.

Llenemos, ahora, la 2ª columna.

100 pesos ganan en 12 meses, 3 pesos de interés.

1 peso gana en 1 mes $\frac{3}{1200} = \frac{1}{400} = 0.0025$.

En la primera casilla escribimos 0.0025, en la 2ª el doble, por ser doble el tiempo ; en la 3ª ; etc.

Llenemos, ahora, la 4ª columna :

Si al 2 % da un peso en 1 mes (*señalando en el cuadro*), 0.0016667, al 4 % dará el doble ó 0.0033333, (*haciendo la operación como en los casos anteriores, llena la columna, interrogando*) ¿ cómo llenaremos la 3ª casilla 3ª columna ?

A. — Sumando 0.0033333 con 0.0066667, ó las dos cantidades que anteceden.

M. — ¿ Cómo llenaremos la 1ª casilla de la 4ª columna ?

A. — Al 5 % equivale á sumar lo que gana al 2 y al 3 %.

M. — Muy bien. (*Hace la suma*).

Saben Vds. como se hace la tabla por si no la hallaran impresa. Pero la tienen Vds. en su libro de ejercicios y problemas, pág. . . . N° Veamos cómo se usa resolviendo unos problemas. ¿ Qué interés producirán 3528 \$ en 3 años y 4 meses al 6 % anual ?

3528 \$ en 3 años al 6 % — busquemos la última casilla de la 5ª columna donde encontramos en 1 año 0.06 \$ — dan :

$$\$ 3528 \times 3 \times 0.06$$

En 4 meses — 4ª casilla, \$ 3528 $\times$ 0.02 .

en 3 años y 4 meses :

$$3528 \times 3 \times 0.06 + 3528 \times 0.02 =$$

$$3528 \times 0.18 + 3528 \times 0.02 = 3528 \times 0.2 = 705.6 \$.$$

(*El maestro resuelve otro problema como el anterior*).

Fin. — Tomen las tablas. (*Da problemas semejantes á los que él resolviera*).

INDICACIONES

En la lección siguiente, empleará la tabla para resolver problemas en que deba hallarse ya el tiempo, ya el tanto por ciento.

¿ En cuánto tiempo 3500 \$ al 7 % anual producirán 200 \$ de interés ?

$$3500 \times 0.0058333 \times x \text{ meses} = 200$$

$$x \text{ meses} = \frac{200}{3500 \times 0.0058333}$$

¿ A qué tanto por ciento 3500 \$ habrán producido 150 de interés en 9 meses ?

Dividiendo 150 entre 3500 obtenemos el interés de 1 \$ en 9 meses. Es $\frac{15}{350} = \frac{3}{70} = 0.042857$, cantidad que se busca en la línea horizontal que parte del 9 (9 meses); está comprendida entre la 4ª y 5ª columna, lo cual significa que el tanto por ciento, entre el 5 % y el 6 %, es : 5.6.

Tabla que indica el interés simple que 1 \$ produce por mes durante 1 año

Meses	2 o/o	3 o/o	4 o/o	5 o/o	6 o/o	7 o/o	8 o/o	9 o/o
1	0,0016666	0,0025	0,0033333	0,0041667	0,005	0,0058333	0,0066667	0,0075
2	0,0033333	0,005	0,0066667	0,0083333	0,01	0,0116667	0,0133333	0,015
3	0,005	0,0075	0,01	0,0125	0,015	0,0175	0,02	0,0225
4	0,0066667	0,01	0,0133333	0,0166667	0,02	0,0233333	0,0266667	0,03
5	0,0083333	0,0125	0,0166667	0,0208333	0,025	0,0291667	0,0333333	0,0375
6	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
7	0,0116667	0,0175	0,0233333	0,0291667	0,035	0,0403333	0,0466667	0,0525
8	0,0133333	0,02	0,0266667	0,0333333	0,04	0,0466667	0,0533333	0,06
9	0,0150000	0,0225	0,03	0,0375	0,045	0,0525	0,06	0,0675
10	0,0166667	0,025	0,0333333	0,0416667	0,05	0,0583333	0,0666667	0,075
11	0,0183333	0,0275	0,0366667	0,0458333	0,055	0,0641667	0,0733333	0,0825
12	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

LECCIÓN 22ª

Tema. — Construcción de una tabla de cocientes á divisor fijo, con aproximación de centésimos.

$$\frac{a + b + c + d + e}{5}$$

donde a , b , c , d y e , varían de 0 á 5.

T A B L A D E L B

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
01	1	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00	3.20	3.40	3.60	3.80	4.00	4.20	4.40	4.60	4.80
05	1.01	1.21	1.41	1.61	1.81	2.01	2.21	2.41	2.61	2.81	3.01	3.21	3.41	3.61	3.81	4.01	4.21	4.41	4.61	4.81
10	1.02	1.22	1.42	1.62	1.82	2.02	2.22	2.42	2.62	2.82	3.02	3.22	3.42	3.62	3.82	4.02	4.22	4.42	4.62	4.82
15	1.03	1.23	1.43	1.63	1.83	2.03	2.23	2.43	2.63	2.83	3.03	3.23	3.43	3.63	3.83	4.03	4.23	4.43	4.63	4.83
20	1.04	1.24	1.44	1.64	1.84	2.04	2.24	2.44	2.64	2.84	3.04	3.24	3.44	3.64	3.84	4.04	4.24	4.44	4.64	4.84
25	1.05	1.25	1.45	1.65	1.85	2.05	2.25	2.45	2.65	2.85	3.05	3.25	3.45	3.65	3.85	4.05	4.25	4.45	4.65	4.85
30	1.06	1.26	1.46	1.66	1.86	2.06	2.26	2.46	2.66	2.86	3.06	3.26	3.46	3.66	3.86	4.06	4.26	4.46	4.66	4.86
35	1.07	1.27	1.47	1.67	1.87	2.07	2.27	2.47	2.67	2.87	3.07	3.27	3.47	3.67	3.87	4.07	4.27	4.47	4.67	4.87
40	1.08	1.28	1.48	1.68	1.88	2.08	2.28	2.48	2.68	2.88	3.08	3.28	3.48	3.68	3.88	4.08	4.28	4.48	4.68	4.88
45	1.09	1.29	1.49	1.69	1.89	2.09	2.29	2.49	2.69	2.89	3.09	3.29	3.49	3.69	3.89	4.09	4.29	4.49	4.69	4.89
50	1.10	1.30	1.50	1.70	1.90	2.10	2.30	2.50	2.70	2.90	3.10	3.30	3.50	3.70	3.90	4.10	4.30	4.50	4.70	4.90
55	1.11	1.31	1.51	1.71	1.91	2.11	2.31	2.51	2.71	2.91	3.11	3.31	3.51	3.71	3.91	4.11	4.31	4.51	4.71	4.91
60	1.12	1.32	1.52	1.72	1.92	2.12	2.32	2.52	2.72	2.92	3.12	3.32	3.52	3.72	3.92	4.12	4.32	4.52	4.72	4.92
65	1.13	1.33	1.53	1.73	1.93	2.13	2.33	2.53	2.73	2.93	3.13	3.33	3.53	3.73	3.93	4.13	4.33	4.53	4.73	4.93
70	1.14	1.34	1.54	1.74	1.94	2.14	2.34	2.54	2.74	2.94	3.14	3.34	3.54	3.74	3.94	4.14	4.34	4.54	4.74	4.94
75	1.15	1.35	1.55	1.75	1.95	2.15	2.35	2.55	2.75	2.95	3.15	3.35	3.55	3.75	3.95	4.15	4.35	4.55	4.75	4.95
80	1.16	1.36	1.56	1.76	1.96	2.16	2.36	2.56	2.76	2.96	3.16	3.36	3.56	3.76	3.96	4.16	4.36	4.56	4.76	4.96
85	1.17	1.37	1.57	1.77	1.97	2.17	2.37	2.57	2.77	2.97	3.17	3.37	3.57	3.77	3.97	4.17	4.37	4.57	4.77	4.97
90	1.18	1.38	1.58	1.78	1.98	2.18	2.38	2.58	2.78	2.98	3.18	3.38	3.58	3.78	3.98	4.18	4.38	4.58	4.78	4.98
95	1.19	1.39	1.59	1.79	1.99	2.19	2.39	2.59	2.79	2.99	3.19	3.39	3.59	3.79	3.99	4.19	4.39	4.59	4.79	4.99

Desarrollo.—A.—M.—¿Saben Vds. cómo se obtiene la clasificación semestral de cada ramo?

A.—Sí, señor; se suma la de todos los meses, Abril, Mayo y Junio, con las dos del examen de Julio y se divide entre 5.

M.—¿Cuál es la mayor clasificación que puede obtenerse?

A.—Cinco es la mayor clasificación que puede obtenerse y cero la menor; entre 0 y 5, nuestras clasificaciones pueden ser: 1, 1.50, 1.80, 2.33, 4, 4.66, etc.

M.—Está bien. Las cantidades 0 y 5, se llaman *límites*, entre que varían las clasificaciones que Vds. sacan, porque 5 es el *máximum* y 0 el *mínimum* con que pueden ser clasificados. Si 2 y 7 fueran la menor y la mayor, ¿qué serían 2 y 7?

A.—Serían los límites, 2 *mínimum* y 7 *máximum*.

M.—Es fácil comprender que para dar á cada alumno, en Julio, la clasificación de los 12 ramos, sería un trabajo inmenso, sumar cinco decimales y dividir el total por 5.

La escuela educa 400 alumnos; son 4800 operaciones que á 2 minutos cada una exigirían 9600 ó 160 horas, á 5 por día de trabajo, 32 días dedicados exclusivamente á sacar promedios, para lo cual es necesario un escribiente con 100 pesos de sueldo, dedicado por completo á los registros de clasificaciones. Pues, el vicedirector, encargado de la tarea, hace mentalmente la suma y suprime la división, que exigiría apuntes con lápiz, mediante el uso de una tabla.

B.—Se llama la tabla del 5; tiene escrito los cocientes que pueden arrojar la suma de todos los números divididos entre 5, cuando son 5 y varían entre 0 y 5.

Se construye de la siguiente manera:

La mayor suma que pueden dar las 5 clasificaciones, es 25, en el caso que el alumno obtuviese todos cinco. La menor es 0, en el caso que obtuviese todos ceros, lo cual nunca sucede; ni que obtenga menor total de 5, salvo uno que otro caso; escribimos desde la suma

mínima 5 hasta la máxima 25 todos los números en línea horizontal, así: (*como indica el cuadro preparado con anticipación en la pizarra*), y trazamos otras tantas verticales de modo que cada número del 5 al 24, encabeza una columna. En la 1ª de la izquierda escribimos 01, 05, 10, 15, etc. la parte decimal de la suma de las clasificaciones.

No escribimos 02, 03, 04, etc., porque el divisor 5, da 1, 2, 3, 4, dividiendo á 5, 10, 15, 20; en los otros casos da fracción de centésimos ó milésimos, que, como Vds. saben, no se computan.

Así, la línea horizontal, combinada con los números de la columna vertical, representa todas las sumas posibles de las clasificaciones hasta centésimos. Si fuera 6.76 encontramos 6 encabezando la segunda columna; 76 (*tomamos 75, cantidad más próxima*) encabezando la 16ª línea. Hallamos el cociente de esa suma dividida entre 5, en el lugar de encuentro de la vertical con la horizontal, como en las otras tablas. Ahora, las columnas se llenan con los cocientes; alguno de Vds. quizá piense que para obtener esa cantidad no pequeña de cocientes, representa un trabajo enorme.

En efecto, así sería; pero el autor de la tabla, señor CAMPI, hizo todo en 15 minutos, de esta manera: $\frac{5}{5}$ es 1 (*señalando y escribiendo*): $\frac{5.05}{5}$ es 1.01; $\frac{5.10}{5}$ es 1.02; $\frac{5.15}{5}$ es 1.03; evidentemente, á 1.03 sigue 1.04, á 1.04 sigue 1.05 y, de esta manera, es fácil llegar hasta el fondo, empezar la segunda columna, llenarla, llenar la 3ª, 4ª, 5ª y concluir la última, hasta llegar al último cociente que es $\frac{25}{5}$ ó 5. Ahora comprenderán Vds. que el trabajo, sólo fué de escribir 440 números y 21 raya. Una *tabla del 3*, con las mismas clasificaciones y las mismas sumas, variaría la columna de la izquierda: 01, 03, 06, 09, etc.; de consiguiente, tendríamos muchas más líneas horizontales de números; para escribir los cocientes, averiguaríamos su *ley de formación* y después, no nos exigiría mayor trabajo que la tabla del 5, donde la *ley de formación* es 0.01, agregar siem-

pre un centésimo al número anterior para obtener el siguiente (*señalando*).

C.—Ahora, veamos cómo se la usa.

Supongamos que las clasificaciones fuesen: 3, 4.50, 3.67, 2.50 y 3.

Sumo los enteros, 15; la de los decimales es 1.67; agregada á 15, obtenemos 16.67. Con el índice de la derecha, marco el 16 de la columna horizontal: con el de la izquierda, marco el 67 ó 65 de la columna vertical, los corro de esta manera y en el punto de encuentro está el cociente; como no nos ha sido posible escribir 440 números en el pizarrón consultemos la tabla del papel: 3.33. El promedio buscado ó el cociente de dividir 16.67 entre 5. En efecto, dividamos: (*hace la división*). Sumen Vds. 5 clasificaciones y yo les daré inmediatamente el cociente de dividir las por 5.

A.—17.75. M.—3.55.

A.—21.54. M.—4.31, etc.

M.—Pase Balado al pizarrón.

La suma de las clasificaciones obtenidas por Jofré en Aritmética durante los meses de Marzo, Abril, Mayo y el examen es de 19.26. ¿Cuál es su término medio? Halle el lugar en el cuadro del pizarrón.

(*Halla el lugar y el maestro da el número; consulta la tabla; repite ejercicios de la misma naturaleza*).

Deberes.—Construir la tabla para el lunes próximo.

INDICACIONES

La construcción de estas tablas, se deben al vicedirector señor JOSÉ CAMPI, utilizadas en el cálculo de promedios según las instrucciones del decreto del Superior Gobierno, de Marzo de 1899. Han sido hechas las del 3, 4, 5 y 7. Conviene que éstas, como las del interés, se construyan según el mismo sistema y se usen empleando el mismo procedimiento.

LECCIÓN 12ª (Julio).

Tema. — Problemas de compañía.

Problema típico: Rodríguez, Costa y Hernández hicieron compañía en un negocio de tienda. Rodríguez puso a pesos por m tiempo; Costa puso b pesos por n tiempo; Hernández puso c pesos por t tiempo. Se ganó P pesos. ¿Cuánto toca á cada uno?

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Qué quiere decir almacén y tienda de Gutiérrez y Cía?

A. — Quiere decir que varios individuos se han unido y son dueños de la tienda.

M. — ¿En qué sentido se han unido?

A. — Que han contribuido con sumas de dinero para comprar muchas mercaderías, venderlas luego y ganar plata.

M. — ¿Con qué cantidad contribuiría cada uno?

A. — Con la misma cantidad.

M. — ¿Creen Vds. necesario que contribuyan con la misma cantidad?

A. — No, señor; uno puede poner más que el otro.

M. — En efecto. ¿Cuánto tiempo puede durar esta *compañía* para la explotación de un negocio? ¿Creen Vds. posible que un socio se retire de la compañía, después de un año, otro después de dos años, otro después de cinco años?

A. — Sí, señor; si así lo convinieron al formar la compañía.

M. — Es justo que quien ha puesto más dinero al repartir las ganancias, reciba más; que quien ha dejado su capital por más tiempo, reciba también más interés; viceversa, si fueran pérdidas, repartirlas de la misma manera.

M. — Propongámonos este problema (*escrito*). Costa y Rodríguez formaron compañía en un negocio de tienda; el 1º puso 2000 \$, el 2º 3000 durante el mismo tiempo. Ganaron 6000 \$. ¿Qué toca á cada uno?

Representamos por x la ganancia que corresponde á cada peso.

Si á 1 \$ corresponde x \$

á 2000, corresponderán 2000 x \$
ganancia del 1°;

á 3000 \$ corresponderá 3000 x \$.
ganancia del 2°;

á los dos juntos ó á 5000 \$, corresponderá \$
 $2000 x + 3000 x = 5000 x$ de ganancia.

Pero, á los dos juntos ó á 5000 \$, según el problema corresponden 6000 pesos de ganancia. Entonces $5000 x = 6000$; x ó ganancia de 1 \$, es $\frac{6000}{5000} = 1,2$ \$. Ganancia de 2000 \$ ó de la del 1° será $2000 \times 1,2 = 2400$ \$.

Ganancia del 2° ó de 3000 \$ (*señalando*) será $3000 \times 1,2 = 3600$ \$; $2400 + 3600 = 6000$ \$.

Propongámonos este otro :

Costa y Rodríguez forman compañía; los dos ponen el mismo capital, pero uno durante dos años y otro durante 3 años. Ganan 6000 \$. ¿Qué corresponde á cada uno ?

M. — Representemos por x , la ganancia del capital de Costa en *un año*; en dos años será $2 x$.

Como el capital de Rodríguez es el mismo que el de Costa, en un año ganará lo mismo, ó x ; en 3 años, ganará $3 x$.

Juntos, habrán ganado, con el mismo capital, pero en 2 y 3 años respectivamente, $2 x + 3 x$ ó $5 x$ \$; pero, según el problema, juntos han ganado, con el mismo capital, en 2 y 3 años respectivamente, \$ 6000; luego $5 x = 6000$ \$; x , ó ganancia de un año es 1200 \$; $2 x$, ó ganancia de Costa (*señalando siempre*) será 2400 \$; $3 x$ ó ganancia de Rodríguez, será 3×1200 ó 3600 \$; 2400 y 3600 es igual á 6000 \$.

Medio. — Propongámonos este otro (*escrito*). Costa, Rodríguez y Hernández hicieron compañía en un negocio de tienda; Costa puso 2000 pesos y se retira á los dos años; Rodríguez puso 3000 pesos y se retira después de 3 años; Hernández puso 2500 pesos y queda después de 3 años solo con el negocio. La ganancia,

era de 6000 pesos hasta empezar el 4º año ; ¿ cuánto retiraron Rodríguez y Costa ?

A un peso, en un año, sea de Rodríguez ó de Costa le corresponderá, de los 6000 pesos, una ganancia fija, que llamaremos x .

Si á 1 \$ corresponde en 1 año \$ x de ganancia,

A 2000 corresponderán en 2 años \$ $2000 \times 2 \times x$ de ganancia.

I. — A Costa, corresponde, pues, $2000 \times 2 \times x$ de ganancia y retiró, á los dos años, el capital que puso más la ganancia, ó $2000 + 2000 \times 2 \times x$.

— — —

Si á 1 \$ corresponde, en 1 año \$ x de ganancia,

A 3000 \$ corresponderán en 3 años $3000 \times 3 \times x$ de ganancia.

II. — A Rodríguez corresponde, pues, $3000 \times 3 \times x$ de ganancia y retirará, á los dos años, $3000 + 3000 \times 3 \times x$.

— — —

III. — Y á los 3 años, Hernández, quedará, por la misma razón, con la ganancia de 2500 \$ en esos 3 años ó $2500 \times 3 \times x$ más los 2500 \$ ó $2500 \$ + 2500 \times 3 \times x$. Pero la ganancia que corresponde á Rodríguez más la ganancia que corresponde á Hernández, es la ganancia que obtuvieron en el negocio ó 6000 \$.

Entonces :

$2000 \times 2 \times x + 3000 \times 3 \times x + 2500 \times 3 \times x$
= 6000 de donde :

$4000 x + 9000 x + 7500 x = 6000$ ó $20500 x = 6000$.

$$x = \frac{60}{205} = \frac{12}{41}.$$

Luego, substituyendo el valor de x en I, á Costa le corresponderá, de la ganancia.

$$4000 \times \frac{12}{41} = \text{etc.}$$

A Rodríguez le corresponderá, substituyendo x en II por su valor, $9000 \times \frac{12}{41} = \text{etc.}$

A Hernández le corresponderá $7500 \times \frac{12}{41} = \text{etc.}$

Y Costa retirará \$ $2000 + 4000 \times \frac{12}{41}$:

Rodríguez » » $3000 + 9000 \times \frac{12}{41}$:

Hernández quedará con $2500 + 7500 \times \frac{12}{41}$.

Otro ejemplo :

Repartir 400 \$ de ganancia obtenidos entre 4 naranjeros, durante un mes ; el 1º, contribuyendo con 600 \$ de capital ; el 3º con 200 \$ y su trabajo de repartir calculado á 3 \$ por día ; el 4º 500 \$ de capital y su trabajo de repartir, remunerado á 3 \$ por día.

Si el 3º puso además de 200 \$, su trabajo á 3 \$ por día, su trabajo, en un mes, valdrá 90 \$; habrá ganado, pues, lo que corresponde á un capital de 290 \$.

Si el 4º puso, además de 500 \$, su trabajo á 3 \$ por día, en un mes su trabajo valdrá 90 \$ también ; le tocará de 400 \$ la ganancia que corresponde á un capital de 590 \$.

Representemos por x , la ganancia que corresponde á 1 \$ de capital, en un mes :

Al capital del 1º corresponderá $600 x$ \$ de ganancia.

» » » 2º » $300 x$ » » »

» » » 3º » $290 x$ » » »

» » » 4º » $590 x$ » » »

Luego, al capital de todos juntos, en un mes, corresponderá la ganancia $600 x + 300 x + 290 x + 590 x$ ó $1780 x$.

Pero, según el problema, al capital de todos juntos corresponde, en un mes, la ganancia de 400 \$; entonces $1780 x = 400$ \$.

$$x = \frac{400}{1780} = \frac{40}{178} = \frac{20}{89} \$.$$

Substituyendo x por su valor, tenemos :

Ganancia del 1º $600 \times \frac{20}{89}$ \$:

» » 2º $300 \times \frac{20}{89}$ \$

$$\begin{array}{rcl} \text{Ganancia del } 3^{\circ} & \frac{290 \times 20}{89} & \$ \\ & \frac{590 \times 20}{89} & \$ \end{array}$$

M. — ¿Quién encuentra dudas en las explicaciones que acabo de hacer? . . . ¿Ninguno halla dudas? Como Vds. ven, el problema se compone de otros que se resuelven por el método de reducción á la unidad y se procede: I—Dando como conocida la ganancia de un peso de capital en la unidad de tiempo representada por x ; II—Con ese dato, se calcula la ganancia de cada asociado según el capital y según el tiempo; III—La suma de esas ganancias con la incógnita x , es la misma ganancia que da el problema sin la incógnita; IV—Se determina el valor de x , aislándola. De ese modo averiguamos lo que gana 1 \$ de capital en la unidad de tiempo; V—Con el dato, ya no desconocido, volvemos como al principio, á calcular la ganancia de cada asociado.

Fin. — (*Pasan al pizarrón dos alumnos*).

M. — Repartir 100 \$ de ganancia entre dos individuos que pusieron el mismo capital durante el mismo tiempo.

A. — Toca, á cada uno, 50 \$.

M. — Repartir 100 \$ de ganancia entre dos individuos que pusieron durante el mismo tiempo (un año por ejemplo) uno 200 \$ de capital y el otro 300 \$ de capital.

Explique, Vila.

A. — Si 1 \$ de capital gana x en un año, 200 \$ ganarán $200x$ \$; 300 \$ ganarán $300x$ \$. Luego la ganancia de 200 \$ y de 300 \$ ó de 500 \$ es de $200x + 300x$ ó $500x$; pero, según el problema, la ganancia de 500 \$ es también de 100 \$; entonces $500x = 100$; $x = \frac{1}{5} = 0.2$. Luego la ganancia que corresponde al primer individuo es $200 \times 0.2 = 40$; la que corresponde al 2º es $300 \times 0.2 = 60$.

M. — Repartir 100 \$ de ganancia, entre dos individuos que pusieron el mismo capital, pero el 1º durante 4 meses y el otro durante 6 meses.

Explique, Reyna.

A. — Sea x lo que gana el capital de uno de ellos en un mes, x también, ganará el capital del otro en un mes por ser el mismo. El mismo capital ganará, en 4 meses $4x$; el mismo capital ganará en 6 meses, $6x$. El 1° y 2° individuo, ganarán, $4x + 6x$ ó $10x$; pero, según el problema, los dos ganaron 100 \$; entonces $10x = 100$; $x = 10$ \$. Luego, al 1° le tocará de los 100 \$, substituyendo x por su valor, 4×10 ó 40 \$; al 2° 6×10 ó 60 \$. (*se exigirán las indicaciones con el puntero*).

M. — Repartir 100 \$ de ganancia entre dos individuos que pusieron, el 1° 200 \$ de capital durante 4 meses; el 2° 300 \$ de capital durante 6 meses.

Explíquese, Vila. (*Como en los ejemplos anteriores*).

Deberes. — Los que el libro indique.

LECCIÓN 17ª

Tema. — Problemas de mezcla.

I. — ¿Qué cantidad de vino de 25 cts. el litro debe mezclarse á 10 litros de vino de 40 cts. el litro, para que la mezcla valga 30 cts. el litro?

II. — ¿En qué cantidad deben mezclarse vinos de 20, 32, 36 y 40 cts. el litro para que el precio de la mezcla valga 30 cts. el litro?

III. — Se mezclan 12 litros de vino de 35 cts. el litro con 15 litros de vino de 25 cts. el litro, ¿cuánto vale el litro de la mezcla?

Desarrollo. — *Principio.* — M. — Tengo, en esta copa, trigo; en esta otra, maíz; vuelco una y otra clase de granos, en esta vasija y los revuelvo.

¿Qué hice?

A. — Vd. los ha mezclado.

M. — Se llama una *mezcla* (*escribe la palabra en el pizarrón*). Tengo harina de trigo en este cartucho,

harina de maíz en este otro; las junto y revuelvo en esta copa ¿qué resulta?

A. — Resulta una mezcla de las dos harinas, que no conserva ni el color, ni el sabor, ni el olor, ni el tacto de la de trigo, ni de la de maíz, pero sí, algo de las dos.

M. — He aquí dos copas, una con vino francés, otra con agua; al colocarlas en el mismo recipiente ¿qué resulta?

A. — Una mezcla, que no es ni vino francés ni agua; pero participa de las cualidades de ambos.

M. — Un litro de vino francés vale 60 cts ¿cuánto vale un litro de vino francés?

A. — Lo mismo; 60 cts.

M. — Luego, una *misma* cantidad de la misma substancia ¿cuánto vale siempre?

A. — Vale siempre lo mismo.

M. — Podemos mezclar vinos más baratos con vinos más caros; harinas de trigo de buena calidad con harinas de trigo de inferior calidad. Las mezclas participarán de las cualidades de las substancias mezcladas; la harina que resulte no será tan buena como la de superior calidad; pero tampoco será tan mala como la de inferior calidad; el pan que se haga, conservando las mismas cualidades, podrá venderse más barato que el que se hiciera con la harina de mejor calidad, aunque más caro que el que se hiciera con la harina de peor calidad.

¿Comprenden Vds. ahora el objeto de las mezclas? Todavía más. En esta copa hay tanta cantidad de vino como cantidad de agua hay en esta otra. La mezcla resultaría de partes iguales. Pero puedo mezclar la copa de vino con sólo una parte de la copa de agua; si tuviera que venderse, para no perder, la segunda mezcla costaría más que la primera. De aquí, que varíe la manera de mezclar dos substancias, tanto como varían los precios de las substancias mezcladas, y que se conozcan harinas de 1ª clase, de 2ª clase, de 3ª clase.

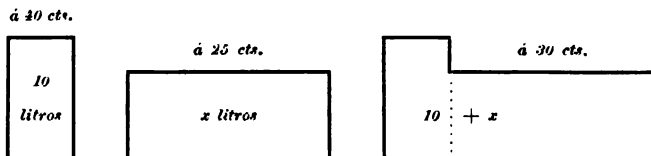
Por otra parte, no sólo dos clases de vino pueden mezclarse. Este es francés, este es barbera, este de

Mendoza y esta es agua; los cuatro líquidos en cantidades diferentes darían un sólo vino con las cualidades de todos, sin ser ninguno de ellos.

Propongámonos, ahora, resolver problemas acerca de este punto.

Medio. — (*Escrito*). ¿Qué cantidad de vino de 25 cts. el litro debe mezclarse á 10 litros de vino de 40 cts. el litro para que la mezcla valga 30 cts. el litro?

Objetivación



Representemos por x la cantidad de vino de 25 cts. el litro que debe mezclarse á los 10 litros de vino (*señalando las figuras*). ¿Cuántos litros de vino tendrá la mezcla?

A. — $10 + x$ litros.

M. — Los 10 litros, á 40 cts., valen 40×10 cts.; los x litros á 25 cts., valen $25 x$ cts. ¿Cuántos centavos valdrán los 10 litros junto con los x litros?

A. — $10 \times 40 + 25 x$ cts.

M. — Pero según el problema, esa misma cantidad de litros mezclados $10 + x$, valen 30 cts. el litro ó todos, $(10 + x) \times 30$ cts. Por una parte el vino vale $400 + 25 x$ cts.; por otra, el mismo vino vale $(10 + x) \times 30$ cts.; los dos valores serán, entonces, iguales, porque una misma cosa no puede tener dos diferentes; entonces

$$400 + 25 x = (10 + x) \times 30.$$

$$\text{de donde } 400 + 25 x = 300 + 30 x.$$

$$100 = 5 x.$$

$$x = 20.$$

x representaba la cantidad de litros de vino de 25 cts. que debíamos agregar á los 10 litros de 40 cts. Luego, debemos agregarle 20 litros, para que la mezcla valga 30 cts. el litro. En efecto, comprobemos: 10 litros á 40 cts. valen 400 cts.; 20 litros á 25 valen 500 cts.; los 30 litros de la mezcla, valdrán 900 cts., un litro de la mezcla valdrá $\frac{900}{30} = 30$ cts.

Si quisiéramos, al mismo precio, mayor cantidad, mezclando vinos de 40 y 25 cts., el problema no ofrecería mayores inconvenientes. 20 litros es doble cantidad de 10; con mezclar siempre de manera que á cada litro de vino de 40 cts. se pongan 2 del otro (doble cantidad), la mezcla resultará siempre de 30 cts. el litro. Esto se llama *proporción*, en la proporción de 1 á 2 ó 1 parte de una clase por cada 2 de la otra.

II. — ¿ En qué cantidad, etc... ?

Si mezcláramos en igual cantidad, un litro, vinos de 32 cts., de 36 cts. y de 40 cts., el litro de la mezcla valdría $\frac{32 + 36 + 40}{3}$ cts. ó $\frac{108}{3} = 36$ cts.

Ahora, el problema se reduce á averiguar la cantidad de vino de 20 cts. que debemos mezclar á un litro de vino de 36 cts., para que la mezcla valga 30 cts. el litro, problema que resolvemos como el anterior. Representemos por x los litros de vino de 20 cts. que necesitamos agregar al litro de vino de 36 cts. para que la mezcla valga 30 cts. Tendremos :

$$\begin{aligned} 20 \times x + 36 \times 1 &= (1 + x) \times 30 \\ 20x + 36 &= 30 + 30x \\ 6 &= 10x \\ x &= 0.6 \end{aligned}$$

A cada litro de la primera mezcla tenemos que agregar seis decilitros del vino de 20 cts. Desde que en el primer litro se pusieron partes iguales de vino, quiere decir que del vino de 40 cts. pondremos 33 centilitros; del de 36 cts. 33 centilitros; del de 32 cts. 33 centilitros y del de 20 cts. sesenta centilitros.

El problema no tiene solamente esta solución, porque ningún dato nos impide que mezcleemos en igual cantidad vino de 20 cts. con vino de 32 cts. ; y en igual cantidad, vino de 36 con vino de 40 ; en el primer caso, obtendríamos un litro de vino cuyo precio sería $\frac{20 + 32}{2}$ ó 26 cts. y en el 2º obtendríamos un litro de vino cuyo precio sería $\frac{36 + 40}{2} = 38$ cts.. Ahora, se trata de ver qué cantidad de vino de 26 cts. hemos de mezclar á un litro de vino de 38 cts. para que la mezcla valga 30 cts. litro, el primero de los problemas que hemos resuelto.

Y otras soluciones podríamos obtener.

Si el precio de los vinos fuese de 32, 36, 38, 40 cts. el litro ¿podríamos obtener una mezcla cuyo precio fuese de 30 cts. el litro ?

A. — No, señor ; porque el precio de todos los vinos es mayor que el precio que pretendemos obtener. Todos los vinos son mejores que el que deseamos. Y de lo mejor no podemos sacar lo peor. Se necesitan calidades inferiores y calidades superiores, para obtener lo mediano.

Por último, este otro problema, mucho más común que los anteriores.

III. — Un almacenero mezcla 12 litros de vino de 35 cts., etc.

12 litros á 35 cts. el litro, valen 12×35 cts.

15 » » 25 » » » » 15×25 »

La mezcla $12 + 15$ litros ó 27 litros, valdrá

$$12 \times 35 + 15 \times 25 \text{ cts.}$$

un litro de la mezcla, valdrá :

$$\frac{12 \times 35 + 15 \times 25}{27} = \frac{4 \times 35 + 5 \times 25}{9} = \frac{140 + 125}{9} = \frac{265}{9}$$

= 29.4 cts. el litro.

Fin. — (El maestro da problemas de la especie I, II y III).

INDICACIONES

Los problemas denominados de mezcla, se resuelven por ecuaciones indeterminadas.

Todo procedimiento que no encauce dentro de dicha forma, ofrecerá una complicación inútil y confusa. Nos permitimos, de consiguiente, recomendar á los maestros de no dar, acerca de este punto, las nociones enredadas con teoremas, que presentan la mayor parte de las aritméticas.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO X

6° GRADO

I

Distribución del programa en meses. — No hay enseñanza de puntos determinados, pero se consolidan los conocimientos de la Aritmética y de la Geometría en sus relaciones con la Geometría, distribuyendo, las series del *libro de ejercicios y problemas de recapitulación*, proporcionalmente á los ocho meses de clase y prestando atención á los puntos débilmente poseídos, deteniéndose el tiempo necesario en aquellos desconocidos y que la serie ofrezca oportunidad de enseñar; no rehuyendo el uso, significado y valorización del mayor número de fórmulas.

Las partes de cada problema serán objetivadas y traducidas en líneas, ejercicio que no solo hace este grado sino el 2°, 3°, 4° y 5°.

Por último, se habituará el niño, dentro de lo elemental y á los fines de la simplificación, á las operaciones con los exponentes enteros y fraccionarios; al manejo del radical con diferentes índices; para cada caso, dos lecciones, desde el mes de Abril, por semana.

1ª *Lección.*—Idea de base, exponente, índice, radical, etc.

2ª $a^m \times a^n = a^{m+n}$; ej.: $10^3 \times 10^5 = 10^8$.

3ª $a^m \times b^m = (ab)^m$; ej.: $2^3 \times 5^3 = (1 \frac{3}{5})^{10} \times (1 \frac{2}{5})^{10}$.

$$4^a \quad (a^m)^n = a^{mn}; \text{ ej.: } (5^4)^6 = 5^{24}.$$

$$5^a \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \text{ ej.: } \frac{8^6}{8^3} = 8^{6-3} = 8^3.$$

$$6^a \quad a^m : b^m = (a : b)^m; \text{ ej.: } \frac{51^3}{17^3}; \quad \frac{9^3 \times 13^3}{78^3}.$$

$$7^a \quad \sqrt[n]{a^m} = a^m = a^{\frac{m}{n}}; \text{ ej.: } \sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^4 \times 3} = 2^4.$$

$$8^a \quad a = \sqrt[m]{a^m}; \quad a \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}.$$

$$9^a \quad \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}; \quad \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}; \text{ ej.: } \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2048}; \quad 2 \sqrt[3]{405}.$$

$$10^a \quad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mn]{a^{pn}}.$$

$$11^a \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$12^a \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \sqrt[4]{\frac{5}{8}}; \quad \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

$$13^a \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

$$14^a \quad \frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \sqrt[n]{b}}{b}.$$

$$15^a \quad \text{Desarrollo de } (a \pm b)^m.$$

Se cometería un grave error considerar á estos sencillísimos ejercicios, como estudios de álgebra; con ellos se da un conocimiento indispensable á la generalización del cálculo aritmético y al estudio elemental de la geometría, ahora que en los colegios nacionales de nuestro país se acostumbra enseñarla antes del álgebra y á veces sin otras nociones aritméticas que las que el niño lleva de 6° grado. Si, por otra parte, se tiene en cuenta que los más bellos y útiles problemas numéricos de la geometría plana y aún del espacio se basan en el teorema de Pitágoras y sus derivados, se comprenderá lo necesario de una enseñanza que no ofrece dificultad alguna, tan simple como operar con quebrados.

Recordamos, con este motivo, todo el tiempo que nos distrajera el *cálculo de π* en primer año y el número de transformaciones que fué necesario hacer para explicar

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hé aquí una de las series:

Serie 50 ⁽¹⁾ — 1° — P. — ¿ Con qué siembras podría beneficiarse y de qué manera 35 Hectáreas de campo, de modo que, deducidos los gastos, dejaran un producto líquido de 2500 \$ al año ?

2° — P. — Transformar en común.

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8}}}$$

3° — M. — Escribir el valor de 45 con cuatro cifras iguales.

4° — Reducir $-7 \left(\frac{1}{11} + \frac{3}{7} \right) + 3 \times 4 \left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \right)$.

5° — En qué proporción deberán mezclarse trigos de \$ 5, 5.40, 6 y 7 \$, para que la mezcla resulte á 6 \$ la bolsa, pero sabiendo que, de 5 \$ hay que poner 50 bolsas ?

6° — Un Banco ha repartido 12.000 \$ entre sus accionistas, con un dividendo del 6 %; ¿ de cuántas acciones de 50 \$ se compone el capital ?

8° — Un individuo habiendo prestado los $\frac{4}{5}$ de lo que tenía al 4 % y $\frac{1}{5}$ al 5 %, obtuvo, al cabo de un año, por capital é intereses \$ 2940; ¿ qué suma tenía prestada ?

9° — Tres obreros cavan un pozo en 6 días; por separado, el 2° en $\frac{3}{2}$ días del 1° y el 3° en $\frac{2}{3}$ días del 2°. ¿ Cuántos días emplearía cada uno por separado ?

(1) De la Síntesis Aritmética.

10. — Volumen de un vidrio rectangular cuyos catetos miden 0.48 y 0.18 ms. y cuyo espesor es 0.003 ms.

11. — ¿Cuánto costará el adoquinado de una calle de 2 Kms., 8 Hms., 5 Dms. y 6 ms. de largo por 22 ms. y 8 dms. de ancho si cada adoquín vale 3 cts. y ocupa una superficie de 134 cms. cds.?

12. — ¿Cuántas toneladas pesará una pirámide de granito á base cuadrada, cuya altura es de 162 ms. siendo el lado de la base 343 ms.? (Densidad del granito 2.70).

2ª LECCIÓN (Abril)

Tema.— $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Desarrollo.—*Principio.*—*M.* (En el pizarrón). Léase lo que voy á escribir: a^4 , 6^3 , $\sqrt[4]{8}$, $(a+b)^5$, $\sqrt{2} + 7$, $\sqrt{2+7}$, $\sqrt{2+V7}$, $\sqrt{2} + \sqrt{7}$.

Als.—(Preguntados uno por uno, responden al maestro).

M.—Qué es mayor 0.5 ó 0.54? ¿ $\frac{1}{3}$ ó $(\frac{1}{3})^5$? ¿ $\frac{3}{4}$ ó $(\frac{3}{4})^2$? ¿ $\frac{5}{3}$ ó $(\frac{5}{3})^3$? ¿2, 1^8 ó 0.2^{10} ? ¿Cómo se eleva una fracción á la quinta potencia? ¿ $(\frac{4}{5})^3$ es igual á qué? ¿ $4 \times 4 \times 4$, es? $m \times m \times m \times m$, es? etc. ¿Cuál es la base en $(\frac{8}{9})^4$, 12^5 ?

Medio.—*M.*— $10 \times 10 \times 10$ (escribiendo) es igual á 10^3 ; $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$ (escrito debajo) y $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ ó $10^3 \times 10^6$ es igual á 10^9 (señalando cada parte como derivadas de las igualdades anteriores); pero 9 es igual á 3 + 6 (señalando los exponentes de 10) entonces $10^3 \times 10^6 = 10^{3+6}$ ó 10^9 ?

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman sus exponentes; si la base no es la misma, no se pueden sumar sus exponentes (dicha en voz

clara é insinuante, señalando los ejemplos). Así $8^9 \times 8^5$ es 8^{14} , la misma base y el exponente, suma de 9 y 5; $6^3 \times 4^5$, no puede escribirse en un solo número, porque 6 y 4 son bases diferentes; 2×2^3 es 2^4 , porque 1 y 3 es 4; $13 \times 13 \times 13$ es 13^3 , porque etc.; $7^4 \times 7^8 \times 7^6 \times 7$ es 7^{19} porque, etc.; $(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^3 \times (\frac{2}{3})^5 = (\frac{2}{3})^{10}$, porque, etc.; $0.015 \times 0.015 \times 0.015^3 = 0.015^{10}$ porque, etc. $5^{\frac{1}{2}} \times 5^2 \times 5^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}$ porque, etc. $a^2 \times a^3 \times a^5 = a^{10}$ porque, etc.

M.—¿A cuánto es igual (*escribiendo*) $8^2 \times 8^8$?

A.—Es igual á 8^{10} porque, teniendo esos factores la misma base, se suman sus exponentes; $2 + 8$ es 10; 8^{10} .

M.—¿A cuánto es igual $0.9^{\frac{1}{2}} \times 0.9^{\frac{1}{2}}$? (*El maestro ejercita á la clase con ocho ejemplos parecidos á los que sirvieron para la enseñanza*).

Y viceversa, cuando tenemos 9^8 podemos transformarle en un producto de factores de la misma base con tal que los exponentes sumen 8 (*señalando*); así $9^8 = 9^{5+3} = 9^5 \times 9^3$, porque $9^5 \times 9^3 = 9^8$; $9^8 = 9^{2+3+3} = 9^2 \times 9^3 \times 9^3$, porque etc.; el mismo número $9^8 = 9 \times 9^2 \times 9^2 \times 9^3$ porque etc.; $0.2^{15} = 0.2^{10} \times 0.2^5$, porque etc.

Piense cada uno, un producto equivalente á 15^{11} , cuyos factores tengan la base 15.

Als.— 15×15^{10} ; $15^5 \times 15^6$; $15^4 \times 15 \times 15^6$, etc.

M.—Muy bien. Si tenemos un producto como este: $8 \times 9 \times 8 \times 8^2 \times 9^3$, se observan dos bases 8 y 9. El objeto de los exponentes, como Vds. han podido notarlo, es abreviar las expresiones y escribir menos números. Como el orden de los factores no altera el producto, tenemos que $8 \times 9 \times 8 \times 8^2 \times 9^2 = 8 \times 8 \times 8^2 \times 9 \times 9^2$, pero $8 \times 8 \times 8^2 = 8^4$ y $9 \times 9^2 = 9^3$; entonces $8 \times 9 \times 8 \times 8^2 \times 9^2 = 8^4 \times 9^3$. El producto de $5^3 \times 6^4 \times 5 \times 26^3 \times \frac{4}{5} \times 0.05^2 \times \frac{4}{5} \times 26^7$ es igual á $5^4 \times 6^4 \times 26^{10} \times (\frac{4}{5})^2 \times 0.05^2$. Y del mismo modo, si fueran letras, se sumarían sus exponentes cuando las bases fueran iguales: $a^5 \times b^3 \times a^3 \times b^{\frac{1}{2}} = a^8 \times b^{3+\frac{1}{2}}$; $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Fin.—(*Pasan seis alumnos al pizarrón y se les ejercita en la forma conocida*).

Deberes.—Ejercicios indicados por el libro.

INDICACIONES

Debe prestarse mucha atención á la escritura exacta del signo $\sqrt{}$; el alumno acostumbra á no colocar el índice ó á trazar mal la línea horizontal; á veces oblicua, generalmente más corta ó más larga de lo que conviene. Así:

$$\sqrt{2 \times 7} \text{ por } \sqrt{2} \times 7; \sqrt{2} + \sqrt{7} \text{ por } \sqrt{2 + \sqrt{7}}.$$

LECCIÓN 10ª (Abril)

Tema. — $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}; \sqrt[p]{\frac{a}{b}}; \sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt[p]{\frac{1}{2}}.$

Desarrollo.—*Principio.*—*M.*—¿Cuál es la base en $(3\frac{1}{2})^6$? ¿En ab^m ? ¿Una cantidad con exponente fraccionario? ¿Qué indica el numerador de un exponente? ¿el denominador? ¿Cuánto es 8^6 dividido entre 2^6 ? ¿ 8^6 dividido entre 6^6 ? ¿1229 elevado á $\frac{6}{5}$, elevado á $\frac{10}{5}$?

(*Pasan seis alumnos á la pizarra mural*).

Simplifiquen $9^{12} : 9^4$; $(1\frac{2}{3})^{10} \times (1\frac{2}{3})^{10}$; $\frac{3^7 \times 5^7}{3^{21} \times 12^5}$.

Escriban con exponente fraccionario á $\sqrt[4]{0.5^6}$;

$\sqrt[3]{x^3}$; $\sqrt{a^4 \times a^6}$, etc. Con radical á $(9 \times 4)^{\frac{6}{7}}$ etc.
(*Vuelven á sus asientos*).

Medio.—*M.*—Raíz cúbica de 12 á la cuarta potencia (*escribiendo $\sqrt[4]{12^4}$*), dijimos que podía escribirse con exponente fraccionario, así: $12^{\frac{4}{4}}$; también sabemos que multiplicando numerador y denominador de

una fracción por un mismo número la fracción no varía de valor, es decir, que $\frac{4}{3} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{4 \times 13}{3 \times 13} = \frac{4 \times 4}{3 \times 4}$;

entonces $12^{\frac{4}{3}}$ será igual á $12^{\frac{4 \times 5}{3 \times 5}}$; á $12^{\frac{4 \times 13}{3 \times 13}}$; á $12^{\frac{4 \times 4}{3 \times 4}}$; y, de consiguiente

$$\sqrt[3]{12^4} = \sqrt[3 \times 5]{12^4 \times 5} = \sqrt[3 \times 13]{12^4 \times 13} = \sqrt[3 \times 4]{12^4 \times 4}$$

De modo que si multiplicamos el índice y el exponente de la cantidad situada debajo del radical por un mismo número, la cantidad conserva su valor.

Así, pues, $\sqrt[3]{7^8}$ es igual á $\sqrt[3+3]{7^{8+8}}$; $\sqrt[4]{10^{0.5}} = \sqrt[8]{10^{0.5 \times 8}} = \sqrt[8]{10^4} = 10^{\frac{4}{8}} = 10^{\frac{1}{2}} = 10^2 = 100$, con cuyo ejemplo pueden Vds. ver, la ventaja de estas multiplicaciones.

(Pasan á la pizarra cinco ó seis alumnos).

M.—Escriban raíz $\frac{1}{4}$ de 12 elevado á 0.05; escriban la misma cantidad con exponente fraccionario; multipliquen por 20 ambos términos de la fracción; simplifiquen y escriban el radical en forma más simple sin que el valor altere.

Escriban radicales equivalentes á $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a^{\frac{1}{2}}}$; valor de $\sqrt[7]{1^{0.8}}$.

Vuelvan á sus asientos.

Y si tuviéramos $\sqrt[6]{7^5 \times 9^3}$, es decir, siempre factores, nó términos debajo del radical, el valor del radical no alteraría multiplicando el índice y los exponentes de los factores por un mismo número, puesto que sabemos que $\sqrt[6]{7^5 \times 9^3} = 7^{\frac{5}{6}} \times 9^{\frac{3}{6}}$ y que $7^{\frac{5}{6}} \times 9^{\frac{3}{6}} = 7^{\frac{5 \times 2}{6 \times 2}} = 9^{\frac{3 \times 2}{6 \times 2}} = \sqrt[6 \times 2]{7^{5 \times 2} \times 9^{3 \times 2}}$.

(Pasan cinco alumnos al pizarrón y ejercitan esta parte).

M.—Pero si tuviéramos $\sqrt[3]{8^5 + 6^4}$ no podríamos hacer lo mismo, puesto que $8^5 + 6^4$ son términos y no factores, haríamos así: $\sqrt[3]{(8^5 + 6^4)^2}$, considerando, mediante el paréntesis, un solo término á $8^5 + 6^4$.

Fin.—*M.*—Piensen un radical con índice ó exponente decimal ó fraccionario.

A.—Raíz $\frac{1}{12}$ de 24 elevado á $\frac{1}{8}$.

M.—(*Escribiendo*). $\sqrt[12]{24^{\frac{1}{8}}}$ es igual, multiplicando por 12 índice y exponente, á $\sqrt[1]{24^2} = 24^2$.

A.— $\sqrt[12]{3^4 \times 5^3}$.

M.—Multiplicando por 5 índice y exponentes tengo :

$$\sqrt[4]{3^{\frac{5}{4}} \times 5^{15}}.$$

A.— $\sqrt{(\frac{1}{8})^2}$.

M.—Es igual á $(\frac{1}{8})^{\frac{2}{2}} = (\frac{1}{8})^1 = \frac{1}{8}$. He dividido el índice y el exponente entre 2, porque dividiendo el numerador y denominador de una fracción por un mismo número el valor de la fracción no varía. Así :

$$\sqrt[12]{a^8} = a^{\frac{8}{12}}; \text{ pero } \frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \text{ entonces } a^{\frac{8}{12}} = a^{\frac{2}{3}} :$$

volviendo á la forma radical, $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, simplificación importante para evitar engorrosas operaciones.

Si se nos dice: hallar el valor de $\sqrt[10]{9^5}$, en vez de elevar 9 á la quinta potencia operación larguísima y extraer la raíz décima, operación imposible con los conocimientos que Vds. tienen, procederíamos dividiendo entre 5 índice y exponente; hallaríamos

$\sqrt[3]{9}$ que sabemos es 3.

Deberes.—Los que el libro indique.

INDICACIONES

Acerca de la Lección 15ª, el maestro enseñará el desarrollo, de acuerdo con esta regla :

I.—Si el binomio que se eleva es una suma, todos los términos del desarrollo tienen el signo $+$; si es una diferencia, los signos de los términos del desarrollo, van alternados: $+$ $-$ $+$ $-$ $+$ etc.

II.—Excepto el primero y último, todos los términos tienen á a y b como factores. El primer término es a elevado á m , el último b elevado á m . En los siguientes al 1º, el exponente de a disminuye sucesivamente en 1, es $m-1$ en el 2º término; $m-2$, en el 3º, etc.; el de b aumenta en 1.

III.—Los coeficientes se obtienen multiplicando el exponente de a del último término hallado por el coeficiente y se divide por el número de términos.

Ejemplo :

Sea $(8 - \frac{1}{4})^4$; aplicando la regla, se desarrolla de esta manera :

$8^4 - 4 \times 8^3 \times \frac{1}{4} + 6 \times 8^2 \times (\frac{1}{4})^2 - 4 \times 8 \times (\frac{1}{4})^3 + (\frac{1}{4})^4$; el alumno simplifica esta expresión de cinco términos, por los procedimientos conocidos, donde hay ocasión de aplicar los principios que conciernen á los exponentes :

$$8^4 - 8^3 + 6 \times (\frac{8}{4})^2 - 4 \times (\frac{2}{4})^3 + (\frac{1}{4}) = 7 \times 8^3 + 6 \times 4 - \frac{4}{8} + \frac{1}{4}, \text{ etc.}$$

No se ignora que los alumnos maestros imitan, al dar las clases de aritmética, á sus profesores de matemática. De aquí que, prácticamente, influyan más, acerca del método, estas lecciones que las especiales de metodología, sobre todo, en la forma que se acostumbra á darlas, con horarios exigüos y textos deficientes. De aquí que, en los cursos superiores de las escuelas normales, las lecciones deberían revestir un carácter eminentemente pedagógico, lo que por desgracia, pocas veces sucede en perjuicio del alumno y del alumno maestro. Se señala tal lección y tales

problemas; los profesores se limitan á tomarlas, generalmente con el breve análisis que el texto indica. ¿Qué relaciones se establecen entre estos conocimientos y los que el futuro maestro debe transmitir? Ninguna. Se nota tanta distancia, que justificamos, á veces, lo que la inconsciencia hace exclamar á algunos «¿para qué estudiamos ésto, si nunca vamos á enseñarlo?» Sin embargo, de todo, aún del conocimiento más complicado del álgebra ó de la geometría, la escuela primaria aprovecha algo, dentro de la generalización, que en cualquier caso, debe presentar la materia.

CAPÍTULO XI

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

I

Ejercicios.—*Su objeto; de lo particular á lo general.*— El carácter del ejercicio es eminentemente operativo; tiene por objeto el manejo de las cantidades, de los signos y de las denominaciones; la evocación y reproducción de expresiones y fórmulas, transformadas por el camino más corto; en fin, que el cálculo aritmético sea una integración periférica, automática si es posible y no analítico-conciente. Debe llegar la aptitud á tal grado de perfección, que, presente el caso, la mente auxiliada por la vista, descubra inmediatamente el mecanismo que nos conduce al resultado. Es *oral* ó *escrito*, adaptado á la capacidad del alumno, recordativo y combinatriz el primero, combinatriz el segundo; generalmente, para reducir á simple, formas compuestas, expresiones de más de un término, de más de un factor, de más de una denominación, de numeradores y denominadores complejos por el arte de operaciones hechas poniendo en juego toda clase de artificios para abreviarlas.

Con los ejercicios, el maestro se propone siempre uno de estos dos fines: *fixar* directa ó indirectamente el conocimiento que acaba de ser transmitido; *evocar* directa ó indirectamente conocimientos mediatos, con el objeto de que persista el estado latente ó activo de ciertas integraciones necesarias á cualquier trabajo mental de carácter matemático (*mantener vivo el re-*

cuerdo). En uno y otro caso es necesaria la *frecuencia* (*repetición de vías*) para que los procesos, en un principio concientes, se vuelvan habituales. Es tal, á veces, la huella del hábito así formado, que diez años de orientación opuesta no alteran la facilidad para el proceso psíquico que se acostumbraba en época lejana.

El problema no realiza el objeto del ejercicio así como el ejercicio nunca el del problema, y se comete un error al pretenderlo. El mejor análisis sólo exige, á veces, la multiplicación y división de un reducido número de cantidades enteras. ¿Qué enunciado nos daría esta planteación:

$$\frac{\frac{2\frac{1}{2}x-2}{2}}{4} - \frac{\frac{10x-1}{2}}{?} = \frac{\frac{x-8}{4}}{5} - 3\frac{1}{2}?$$

Hay que recurrir á las leyes físicas y á los teoremas geométricos. Resolver ejercicios no es formar la aptitud para resolver problemas.

Las *series de fijación* sirven de tema á lecciones inmediatas, con el objeto de que el alumno, elemento activo, lo trate para dominarlo, en todos los casos de presentación posible, siempre del punto de vista de su mayor generalidad. Los textos (*recomendamos para 2º, 3º y 4º grado* LAVERNIÉ Y CURY), suelen ofrecer, en este caso, excelentes colecciones, pero graduadas, con frecuencia, sin aprovechar la ocasión de resumir enseñanzas de meses y años anteriores.

Las *series de evocación* no se refieren á conocimiento inmediato ninguno; verdaderas síntesis, tratan de dar unidad, mediante ingeniosas combinaciones, al mayor número de enseñanzas lejanas ó próximas que el estudio ordenado de la asignatura no puede traer á cuento. Una serie de fijación acerca de la suma de decimales, ofrecería ejercicios como estos: $0.1 + 0.001 + 5$, $0.15 + 3.12 + 1.00002$, desde los más simples á los más complicados, pero siempre de suma; una serie de evocación (*textos con ejercicios de esta especie no conocemos más que el nuestro para 5º y 6º grado*) ofrecería ejercicios como estos:

- 1.—Cálculo mental.
- 2.—Escritura de 99, 125 en números romanos.
- 3.—Sumar 1.000 457 con 349 con 3.010101.
- 4.—Dividir 942567 entre 1000, etc.

Aparte de que unas y otras son verdaderos temas, unas se utilizan en el *fin* de las lecciones, otras en el *principio*, cuando tienen más carácter oral que escrito. Estas últimas constituyen el deber cotidiano de los alumnos. En las series de recapitulación, se mezclan á los problemas los ejercicios, para que pueda, el conjunto, servir de tema á una lección de abundantes y variados conocimientos que exciten todos los centros de la aptitud matemática.

La matemática es una eterna marcha de lo particular á lo general, de lo elemental á lo sintético, de modo que una ecuación, por ejemplo, resume varios problemas de reducción á la unidad, sin que nos apercibamos de ello.

El ejercicio de evocación de cada lección, sintetiza los anteriores, eliminándolos del punto de vista particular, p. ej.:

1^{er}. GRADO.—*Marzo*: Reconocimiento de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y lectura de $4 + 9 + 5$.

Abril: $9 - 7 + 5 - 6$ y lectura de 18, 13, 14 y 15.

Mayo: Reconocimiento y descomposición de 10, 20, 30, 40, 50; $10 - 1 - 1 - 1 - 2 - 2$, etc.

Junio: Reconocimiento y descomposición de 71, 86, 94, 53; $98 - 2 - 2 - 2 + 1 + 1 + 1$, etc.

Julio y Agosto: Sumar $743 + 812 + 520 + 1 - 563$.

Septiembre y Octubre: Sumar $8300 + 2015 + 9060 + 42 - 1101$.

Los ejercicios de la última forma, v. g. ejercitan el reconocimiento, lectura y escritura de los números, evocando las cantidades de 1 á 9000, unidades, decenas y centenas, el lugar y valor relativo de cada cifra; las tablas de sumar, las de restar, el uso de los signos, las operaciones de suma y resta.

2^o GRADO.—*Abril*: Hallar el resultado de $19427 + 18321 + 10100 - 6032$.

Mayo : Hallar el resultado de $8001 \times 90 + 35607 - 701 \times 8$.

Julio : $8001 \times 90 + 35607 \times 100 + 7011 : 9$.

Octubre : $8001 \times 90 - 35607 \times 100 + 7012 : 9$.

3^{er}. GRADO I. — **Abril** : Resultado de $0.008001 + 19427 + 356007 : 100 + 10\ 100 : 325$.

Mayo : ¿Cuántos metros quedan si de 3 Kms. 0.00301 Hms. y 15678 milímetros quitamos 78 mms. y 225 Dms.?

Julio : Gasto exigido por 6 Kgs. 7 gramos y 8 miligramos de cierta substancia á 12.08 \$ el Hg. y por 25 Kgs., 7 Dgs. y 25 cgs. de otra á 5.80 el Hg.

Octubre : Después de efectuar las siguientes operaciones :

$230.08 \times 0.0002 - 830.08 \times 0.0001 + 22930.92$, indicar los factores del resultado.

3^{er}. GRADO S. — **Junio** : ¿Qué volumen suman tres paralelepípedos de las siguientes dimensiones :

1° 1.3 ms. por 4 dms. por 1.8; 2° 0.25 ms. por 0.08 ms. por 0.085 ms.; 3° 4 dms. por 5 cms. por 25 ms.; pero al primero se le quitó un pedazo equivalente á 3425 cms. cbs.

Octubre : — Resultado de $\frac{4}{5} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{5} - \frac{2}{4} + \frac{8 \times 5 \times 12}{16 \times 25} - \frac{4}{3} \times \frac{36}{8}$ efectuando la división final.

4° GRADO. — **Julio**. — Aislar á x en $\frac{4}{5} \left(\frac{a+5a+3b}{a \times b} \right) = \frac{3}{4} + 6a$ siendo $a = 0.0001$ $b = 0.0002$.

Octubre. — Reducir á fracción simple :

$$\frac{0.002}{4} + 8 \times \frac{5}{6} - 0.02 \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{8}{9} : \frac{(3 \times 4 + 2)(8-7)}{21}$$

5° GRADO. — Reducir á su menor expresión :

$$\left(\frac{9}{5} + \frac{9}{8} \right) \times 9 + 8$$

$$\frac{0.358181... \times \frac{9900}{3546}}{3 - \frac{3}{5}} + \frac{7 + 8 \times 12}{11 \times 35 : 2 \times 21}$$

6° GRADO. — El ejercicio del capítulo II, Primer Libro, sintetiza las formas operativas de los anteriores y evoca cuantos conocimientos se han transmitido acerca de los enteros, decimales, quebrados, relaciones y simplificación.

No es fácil escribir ejercicios de evocación que comprendan mucho en poco. El último, que un alumno de 6° grado, sin mayor esfuerzo que el normal puede resolver en 25 minutos, sintetiza estos conocimientos :

1ª Término

1° Reconocimiento, lectura y escritura de cantidades de cualquier número de cifras.

2° Operaciones exponenciales.

3° Reducción de formas complejas á simples y ejercicios acerca de la divisibilidad de los números.

$$\frac{742500^9}{133} = \frac{742500^9}{133 \times 742500} = \frac{742500}{133}$$

4° Reconocimiento de los numeradores y denominadores de una fracción compleja.

5° Reconocimiento y lectura de decimales.

6° Fracciones decimales periódicas mixtas.

7° Multiplicación y división de fracciones.

8° Reducción de fracciones decimales á quebrados.

9° Simplificación aplicando los principios de la divisibilidad.

$$0.263838 \dots = \frac{2638 - 26}{9900} = \frac{2612}{9900};$$

$$\frac{2312}{9900} \times \frac{28}{990} : \frac{7}{2} = \frac{2312 \times 28 \times 2}{9900 \times 990 \times 7}.$$

10° Suma de fracciones mixtas y complejas.

11° Reducción de las fracciones continuas :

$$4 \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{3 + \frac{1}{6}} = \frac{13}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{19}{6}} = \frac{13}{3} + \frac{1}{19} = \frac{13 \times 19 + 3}{3 \times 19}$$

12° Fracciones decimales periódicas puras, su reducción á quebrados, resta y multiplicación de quebrados. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

13° Simplificación, cancelando factores grandes. Manejos de los paréntesis.

$$3.2121 \dots - \frac{21}{99} = 3 + \frac{21}{99} - \frac{21}{99} = 3.$$

$$4 \times \frac{6}{7} \times 3 (8 - 5) = \frac{4 \times 6 \times 3 \times 3}{7}.$$

$$\frac{\frac{3}{4 \times 6 \times 3 \times 3}}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 6 \times 3 \times 3} = \frac{7}{4 \times 6 \times 3}.$$

14° División de fracciones.

$$\frac{13 \times 19 + 3}{3 \times 19} : \frac{7}{4 \times 6 \times 3} = \frac{250 \times 4 \times 6 \times 3}{3 \times 19}.$$

$$\frac{2612 \times 28 \times 2}{9900 \times 990 \times 7} : \frac{250 \times 4 \times 6}{19} = \frac{2612 \times 28 \times 2 \times 19}{9900 \times 990 \times 7 \times 250 \times 4 \times 6}$$

$$= \frac{2612 \times 19}{9900 \times 990 \times 250 \times 3}$$

15° División y simplificación de fracciones, supresión de paréntesis y substitución de signos de relación:

$$\frac{2612 \times 19}{9900 \times 990 \times 250 \times 3}$$

16° Supresión de abrazaderas y multiplicación de fracciones en su forma más general. Aplicación de los principios de la divisibilidad y reducción á forma simple de uno de los términos del numerador general.

$$\frac{742500}{133} \times \frac{19}{990 \times 250 \times 3} = \frac{7425}{7 \times 99 \times 25 \times 3} = \frac{25 \times 3 \times 99}{7 \times 99 \times 25 \times 3}$$

$$= \frac{1}{7}, \text{ resultado simpático por su simplicidad al que se llega operando con el caso más complejo que pueda presentarse al alumno.}$$

2º Término

1º Distinguir operaciones entre cantidades encerradas por paréntesis ó sin paréntesis. El numerador y denominador presentan los mismos números y los mismos signos.

2º Casos abreviados de multiplicación de enteros.

3º División y multiplicación de sumas ó diferencias indicadas, por sumas ó diferencias indicadas.

$$\begin{aligned}
 12 \times 9 + \frac{6}{5} : \frac{3}{4} - \frac{10}{15} &= 12 \times 9 + \frac{6 \times 4}{15} - \frac{10}{15} = 12 \times 9 + \frac{14}{15} \\
 &= \frac{12 \times 9 \times 15 + 14}{15}; \left(12 \times 9 + \frac{6}{5} \right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{10}{15} \right) = \\
 &= \frac{12 \times 9 \times 5 + 6}{5} : \frac{3 \times 15 - 40}{4 \times 15} = \left(\frac{12 \times 9 \times 5 + 6}{5 \times 5} \right) 4 \times 15 = \\
 &= \left(\frac{6 \times 9 \times 2 \times 5 + 6}{5} \right) 3 \times 4 = \frac{91 \times 6 \times 3 \times 4}{5} \text{ de donde} \\
 &= \frac{12 \times 9 \times 15 + 14}{15} : \frac{91 \times 6 \times 3 \times 4}{5} = \frac{12 \times 9 \times 15 + 14}{91 \times 6 \times 3 \times 3 \times 4}.
 \end{aligned}$$

4º División de potencias con la misma base y multiplicación de fracciones:

$$\frac{817}{9828} \times \frac{9828}{817^2} = \frac{9828}{817}.$$

5º Descomposición de números en factores:

$$\begin{aligned}
 \frac{9828}{817} &= \frac{7 \times 4 \times 9 \times 3 \times 13}{817} \\
 &= \frac{12 \times 9 \times 15 + 14}{91 \times 6 \times 3 \times 3 \times 4} \times \frac{7 \times 4 \times 9 \times 3 \times 13}{817} = \\
 &= \frac{(6 \times 9 \times 15 + 7) \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \times 3 \times 13}{13 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 817 \times 4} = \left(\frac{6 \times 9 \times 15 + 7}{817} \right) \\
 &= \frac{817}{817} = 1.
 \end{aligned}$$

6º Manejo de paréntesis, operaciones con quebrados y cálculo mental.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{9}{5} \times \frac{8}{7} \times \frac{3}{8} \times \frac{7}{6} : \frac{120 - 33 - 40 - 7}{2} \right) : \frac{42}{240} &= \\
 \frac{9 \times 8 \times 3 \times 7 \times 2 \times 240}{5 \times 7 \times 8 \times 6 \times (120 - 80) \times 42} &= \frac{9 \times 240}{5 \times 40 \times 42} = \\
 \frac{9 \times 6 \times 4 \times 10}{5 \times 40 \times 42} &= \frac{9}{35}
 \end{aligned}$$

Resumen :

$$\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{15}} = \frac{1}{5} : \frac{1}{5} = 1 : \frac{1}{5} = \frac{5}{1} = 5$$

Complicaciones sucesivas de un ejercicio abstracto.—
Partiendo de 1. de acuerdo con el grado y aptitud
de los alumnos, realizando el propósito evocativo de
los anteriores:

- 1º Escribir los números de 1 á 9.
- 2º Escribir los números 10, 20, 30.... 90.
- 3º Escribir los números 11, 12, 13.... 20.
- 4º Escribir los números 100, 205, 112, 690....
- 5º Escribir los números 2000, 3110, 4205, 5112, 7690....
- 6º Escribir 11001, 14000, 15020, 28100, 33110, 44112, 97690.
- 7º Escribir 11000, 67690, 0.0001001, 44112, 0.0033110.
- 8º Escribir $\frac{0.00067}{670} = \frac{14000}{44112} = \frac{44.003311}{0.00067} = \frac{0.001001}{0.0012 \times 8.75}$
- 9º Valorizar $\frac{(a-b)}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a-b)}{a^2} = \frac{(a-b)}{b^2}$ siendo $a = 44.003311$; $b = 44.00097$; $c = 0.0001001$.
- 10º Simplificar $\frac{\frac{9}{8} + \frac{3}{8} - \frac{2}{5} \times \frac{6}{7}}{\frac{0.44112}{0.0033} + 0.0012 \times 8.75}$

Ejercicios de fijación.—Comprenden ejercicios orales y escritos que pueden darse en el *fin* de las lecciones, como deberes ó como temas, en cuyo caso se manda estudiar la serie, para someter al niño á un examen con el que se aprecia su capacidad y el grado de penetración de los conocimientos transmitidos.

Conviene que una serie de fijación lo sea también de evocación; dedicamos al primer caso contadas lecciones. No constituyen la serie solamente ejercicios; se mezclan problemas con los que se realizan los dos propósitos, á veces, con admirable éxito, particularmente en 5º y 6º grado donde se recurre á la geometría y á las relaciones de volumen, peso y capacidad.

Los textos no ofrecen series de fijación como las siguientes: después de la Lección 18ª, mes de Marzo. 1º Grado. (PERKINS y TISCORNIA):

1º — Cuántos dedos tiene Vd. en la mano derecha, sin contar el pulgar? ¿Cuántos tiene Vd. con el pulgar? Cuatro y uno cuántos son?

2º — Dos niños llegan á la escuela por una calle y dos por otra. ¿Cuántos niños llegarán á la escuela? ¿Dos y dos, cuántos son?

3º — Pedro tiene tres bolas en una faltriquera y dos en la otra. ¿Cuántas bolas tiene en las dos? ¿Dos y tres cuántas son?

4º — Si tu hermanita tiene dos plumas, y tu hermanito cuatro, cuántas plumas reunirán los dos? ¿Dos y cuatro cuántos son?

5º — Si Vd. estudia dos días en esta semana, y cinco en la que viene, cuántos días estudiará Vd. en las dos semanas? ¿Dos y cinco, cuánto son?

6º — ¿Cuántos reales tendré que pagar por una pizarra que vale dos reales, y un libro que vale seis reales? ¿Dos y seis, cuántos son?

7º — ¿Si Vd. gasta tres pesos en libros, y tres en papel ¿cuántos pesos gastará Vd por todo? ¿Tres y tres, cuánto es?

8º — Emilia tiene tres agujas y cinco alfileres; ¿cuántos son, contando ambas cosas sin hacer distinción? ¿Tres y cinco, cuántos son?

9º — Si Juan tiene tres tazas y pierde una de ellas: ¿cuántas le quedarán?

10. — Eduardo dió cuatro lecciones, pero no supo bien una de ellas; ¿cuántas dió bien?

11. — Barbarita cogió una de ocho peras en un cesto; ¿cuántas quedaron en el cesto?

12. — Mariana puso dos piñas en la mesa, y Fernando cuatro; pero Conchita quitó tres de ellas; cuántas piñas quedaron en la mesa?

13. — Había cuatro manzanas maduras y cuatro verdes en una bandeja; Pedro se comió tres; cuántas quedaron por todo en la bandeja?

14. — Si de ocho días en el campo Vd. ha pasado cuatro enfermo; ¿cuánto ha estado Vd. bueno?

15. — Doy el número *doce* una parte de él siendo siete, nueve, once, ocho, diez, seis, cuatro, cinco.

16. — Si Santiago dió ocho reales á Ricardo y siete á Juan, ¿cuánto recibió el uno más que el otro?

LECCIÓN 24ª (Junio, 2º Grado)

1º — Multiplicar 120 por 30; 301 por 20; 600×500 ; 101×45 ; 4008×81 .

2º — M. — 20×30 ; 12×30 ; 60×50 ; $30 \times 20 \times 50$; 200×30 ; 300×20 .

3º — M. — ¿Cuántos alumnos habían en las 20 escuelas del partido si cada escuela tiene 4 aulas y cada aula 40 alumnos?

4º — P. — 20005 por 205; 205 por 20005; 2809×101 ; 304×342 ; 12000×239 ; 1010×26 .

5º — M. — Un número cuyas decenas y centenas tengan ceros; cuyas unidades de mil sean ceros.

6º — M. — ¿ 9×0 es? ¿ 25428×0 ? ¿ 0×87 ? ¿ 9825 veces 0 es?

7º — M. — ¿ 30 Kgs. de azúcar á 50 cts. el Kg. cuánto importa? 200 veces 25 metros es la altura de una montaña. Cuál es su altura? Un empleado gana 101 \$ por mes ¿cuánto habrá ganado en 9 meses de trabajo?

8º — P. — *Giratoria*. — 103×3 ; 104×2 ; 202×4 ; 903×3 ; 801×9 ; 3×300 .

9º — P. — 20202×81 ; 909×30005 ; 8008×983 ; 1000020003×33 .

10. — P. — 25×22 ; 205×22 ; 20005×22 ; 20005×220 ; 20005×2020 .

LECCIÓN 12ª (Agosto) 3º GRADO I.

1º — M. — ¿ Cuántos Dgs. y gs. hay en 525 gs.?
¿ En 428 gs ? ¿ Cuántos Kgs., Hgs., Dgs. y gs.
hay en 8426 grs ? ¿ En 9800 gs ? En 380 Hgs ?

2º — P. — Reducir 48.28 Kgs. á gramos; á Dgs.;
á decigramos á Miriágramos.

3º — P. — Descomponer en múltiplos de gramos á
85348 gramos; á 385 Dgs.

4º — P. — Reducir 3 gramos á denominación Kgs.;
á Dgs., á decigramos.

5º — M. — ¿ En una caja hay una esfera que pesa
1 Kg., un cubo que pesa 3 Hgs.; dos anillos que pe-
san 85 gramos. ¿ Cuántos gramos pesa todo ?

6º — P. — Cada Hg. de café se vende á 30 cts.
¿ cuánto valdrán 5 Kgs. ?

7º — P. — Redúzcanse 28583 centigramos sucesiva-
mente á gramos, Kgs., Hgs., Dgs., corriendo la coma.

8º — P. — Los alumnos dictan cantidades incom-
plejas que el maestro descompone en complejas.

9º — M. — ¿ Qué es más 500 gs. ó 9 Dgs. ? ¿ 8 Kgs.
ó 759 Dgs. ? ¿ 72 Hgs. ó 6425 gramos ?

10º — M. — ¿ Qué es más 700 gramos de acero ó 900
de paja ? ¿ 1000 Kgs. de pasto ó 1000 Kgs. de
piedra ?

11º — M. — Nombrar substancias más pesadas que
el agua; menos pesadas que el agua.

12º — P. — Reducir inmediatamente á gramos las
siguientes cantidades: 8 Kgs., 3 Dgs.; 5 Hgs. 7 Dgs.
y 6 gramos; 25 Kgs. 9 Dgs.

13º — M. — Ejercicios acerca del lugar que ocu-
pan los Kgs.; Hgs., Dgs., dgs. egs., en la denomina-
ción gramos.

14º — M. — ¿ Qué denominación corresponde á una
cantidad de gramos divididos por 100; por 1000;
por 10.

LECCIÓN 2ª (Julio. 4º Grado)

1º—M.—Valorizar $7a, 5b, 12b, 4a+b, 5a+2b, 6a+3b, 5b+2a, 12a-3b, 3a \times b, 4a \times 2b, \frac{9a}{2b}, \frac{9a+b}{6}, \frac{5a-b}{7}$ siendo $a=2, b=3$.

2º—P.—Escribir y valorizar $\frac{m}{5} + 8n; \frac{11m+5n-80n}{825m}$
 $\frac{(m-n)(m+n)}{(m+n)(m+n)}; \frac{(m \times m) - (n \times n)}{(m+n)(m+n)}; m \times m - 2mn + n \times n$
 siendo $m=5; n=1$.

3º—P.—Valorizar $\frac{4\pi R \times R}{3}; \frac{2\pi R + 2\pi R}{2} \times A;$
 $\pi R \times R \times A$ siendo $\pi=3.14, R=2, A=3$.

4º—P.—Valorizar $\pi(R \times R - r \times r); \frac{\pi R}{r} + \frac{\pi r}{R};$
 $\frac{\pi R}{\pi} + \frac{\pi r}{\pi} - \frac{R \times r}{r};$ siendo $\pi=3.14, R=2, r=0.4$.

5º—P.—Valorizar $\frac{a+b+c-d-e}{a \times b \times c - d \times e},$ siendo $a=\frac{1}{4},$
 $b=\frac{2}{5}, c=\frac{3}{4}, d=\frac{1}{5}, e=\frac{1}{8}.$ Valorizar lo mismo
 siendo $a=0.003, b=0.8, c=4, d=0.000005, e=1.$

6º—M.—Valorizar $V \times D$ siendo $V=3 \text{ cms.}^3,$
 $D 11;$ siendo $V=8 \text{ dms.}^3; 9 \text{ ms.}^3.$
 Valorizar $1000 V \times D, 3000 \times V \times D.$

7º—P.—Valorizar $\frac{(C+I)}{100 + (t \times T)},$ siendo $C=800, I=200, T=3, t=7.$

8º—M.—Dar el significado de algunas letras.

9º—P.—Valorizar $7abc + 5bcd + 4cde + 3acd$
 $- 10ace$ siendo $a=1, b=2, c=3, d=4, e=0.$

10º—P.—Escribir la suma de varios productos literales y valorizarlos.

11º—P.—Valorizar $a \times a \times a - 3a \times a \times b$
 $+ a \times b \times b - b \times b \times b$ siendo $a=5, b=4.$

12º—P.—Valorizar $\frac{a \text{ ms.} \times b \text{ cms.}}{c \text{ mms.}}, \frac{a \text{ ms.}^3}{b \text{ mms.}^3}, \frac{a \text{ cms.}^3 + b \text{ dms.}^3}{10}$
 $= ? \text{ Kgs.}$ siendo $a=3; b=5; c=12.$

Serie de evocación y mixtas.⁽¹⁾ — Comprenden ejercicios orales y escritos que pueden darse en el *principio*, como deberes ó como temas de lección, en cuyo caso el educando estudia la serie en su casa para examinársele en la escuela á fin de apreciar su potencia evocadora y la cantidad de conocimientos retenidos. Su objeto primordial es mantener vivo, con el menor esfuerzo y en el menor tiempo posible, cuantos conocimientos se transmitieron hasta ese momento, acerca de la materia.

La brevedad exige ejemplos que interesen, á la vez, al mayor número de memorias organizadas con lo que, por otra parte, se contribuye á la simultaneidad de las ideas haciéndolas servir de apoyo á otras más generales.

Las series de evocación al combinar ejercicios y problemas suelen ser mixtas.

Son las series que de 30 á 40 para cada grado deben presentar los textos; consta cada una, de 8 á 20 ejercicios y problemas según las dificultades, pero combinados de modo que en treinta minutos, previa preparación, puedan ser explicados de una manera completa. Antes de ejemplificar con lecciones desarrolladas, vamos á dar, por vía de ejemplo, algunas, fijando el mes y día á que corresponden.

Serie para la Lección 21, mes de Septiembre, 1^{er} Grado

1^o — Escribir al dictado número de tres cifras en el pizarrón.

2^o — Dar el precio de los principales artículos de consumo.

3^o — Objetivar frases de enunciados.

4^o — Un poste de telégrafo de 8 ms. de altura tiene 6 ms. fuera del agua ¿cuántos metros hay dentro del agua ó clavado en la tierra.

(1) E. CLAPAREDE. — « Le mécanisme de l'association », p. 53.

5° — Si un caño puede llenar un aljibe en 84 horas ¿cuántos caños del mismo grueso se necesitarán para llenarlo en 12 horas? (*En series anteriores el maestro ha enseñado el análisis de problemas de este tipo*).

6° — Se regalaron nueces á tres niños; Roberto recibió 20, Guillermo 2 veces tantas como Roberto menos 15; Ramón tantas como Roberto y Guillermo juntos. ¿Cuántos recibió Ramón?

7° — Tabla de multiplicar del 4.

8° — Agregar 90 á 2; 30 á 2; 50 á 2; Agregar 6 á 26; á 47, 57, 17.

9° — Si un caballo camina 7 millas en una hora ¿cuántas millas caminará en 8 horas?

10° — Si cuatro hombres hacen una pared en 6 días ¿cuántos días necesitará un hombre para hacerla?

11° — Dí 198 pesos por un barril de vino y 80 pesos por un cajón de aceite ¿cuántos pesos costó más el vino que el aceite?

12° — Compré un reloj en 12 pesos; una mesa en 25 y una percha en 10 ¿cuántos pesos quedarían después de la compra si en la cartera llevaba 55 pesos?

Serie para la Lección 7ª, mes de Mayo, 2º Grado

1° — M. — Cálculos mentales que combinen las cuatro operaciones.

2° — M. — Reconocimiento y significado de +, —, $\times$, : y $\frac{a}{b}$.

3° — P. — Ayer, por el Sud, entraron al Mercado Central 7008 cueros; por el Oeste 2001; por el Central Argentino 498; por el ferrocarril del Rosario 876; cada uno se vendió, término medio, á 6 \$. ¿Qué suma de dinero obtendrán sus dueños?

4° — P. — Un chacarero cosechó 2101 bolsas de lino: vendió 508 á 7 \$ la bolsa, el resto á 6 \$ la bolsa ¿cuánto le produjo el lino?

5° — P. — Escribir las siguientes cantidades 16680; 3550; 76500; 59768; 14630; 32001; 90000; 284630; 5000000; 12300; 100101.

6° — P. — Escribir en el pizarrón cantidades como las anteriores, y que el niño las lea.

7° — M. — Tabla de sumar del 8 desde el 5.

8° — M. — Restar 9 á todos los números terminados en 3, desde el 83.

9° — M. — Indicar las unidades, ó las decenas, ó las centenas, etc., de los siguientes números: 805; 1202; 90848; 10001.

10° — M. — Decenas y unidades que hay en 85678; 983; 80. Decenas á que equivalen 12 centenas; 8 centenas y 6 decenas, etc.

11° — P. — Escribir en palabras los números de los ejercicios anteriores. Si un hombre hace un trabajo en 27 días ¿cuántos se precisan para hacer el mismo en 3 días?

12° — M. — Dar cantidades concretas, abstractas, concretas de la misma especie.

13° — P. — Sarmiento murió en 1888, á los 77 años de edad; ¿en qué año nació?

14° — P. — De la chimenea del molino de Nogués á la chimenea del molino del Tajamar hay 2000 metros; de la chimenea del molino de Nogués á la de la usina de la luz eléctrica hay 198 ms. ¿Qué distancia hay de la usina al tajamar?

15° — P. — Un muchacho, la 2ª vez, alcanzó la punta del palo jabonado. El palo medía 15 ms. La 2ª vez subió seis metros más que la 1ª ¿A qué altura llegó la 1ª vez?

16° — P. — Un cajón contiene 409 cajas de botones; en otro pueden caber 199: se llena éste ¿cuántos quedan en aquél?

INDICACIONES

I. — El objeto de estos problemas es acostumbrar el grado, á diferentes objetivaciones y al análisis lógico de los enunciados por el oficio de los substantivos, pronombres, adjetivos, verbos y complementos.

II. — Cada serie es el límite donde deben llegar los ejercicios y problemas que comprendan lo enseñado hasta ese momento desde primer grado.

III. — La serie jamás debe componerse de ejercicios y problemas del mismo tipo y complejidad á fin de ofrecer el carácter de sintética y recapitulatoria.

Serie para la Lección 8ª, 3º grado I., mes de Septiembre

1º — P. — Escribir 0.1058 ; 30.415901 ; 728001 ; 999999999 ; 0.00000801.

2º — P. — Dividir 0.00003 entre 0.2 ; 10029 entre 49 ; 32.92903 entre 0.345029 ; 985 entre 19.

3º — M. — ¿Cómo se escribe en números romanos 49, 55, 1000, 999999 ?

4º — M. — Dividir entre 100 á 9 ; 985 ; 1,3667 ; veces que 75, 150, 350, 125 contienen á 50 ; producto de 80, 15, 19 por 11.

5º — P. — Una hormiga trabajó durante 8 días á razón de 6 horas por día y 2 viajes por hora, acarreando con otras, los brotes de una parra. Se desea saber cuánto habrá caminado si la distancia del lugar de la cueva donde depositaba su carga á la rama de donde la sacaba era de 1 Dm. 8 ms. y 7 dms. ¿Cuánto tiempo emplearía para acarrear 1 gramo y 8 decigramos si cada carga era de 2 centigramos ?

6º — M. — Dar el peso, la longitud y la capacidad de los objetos y vasijas que el maestro presente.

7º — M. — La suma de dos números es 15 y la diferencia 7. ¿Cuáles son los números ?

8º — P. — Un almacenero compró 28 bordalesas de vino á 48 \$ cada una y las vendió á 50 \$ c/u. ¿Cuánto ganó ?

9° — P. — Un almacenero compró 28 bordalesas de vino á 45 \$. ¿A cuánto debe vender cada una para ganar 140 \$?

10° — P. — Se quiere saber cuántas bordalesas de vino compró un almacenero que ganó con ellas 140 \$ y en cada una 5 \$.

11° — P. — Cuántas bordalesas de vino compró un almacenero sabiendo que gastó 1260 \$; que las vendió en 1400 \$ y que ganó en cada bordalesa 5 \$?

12° — P. — Las 28 bordalesas al envasarlas la bodega de Benegas (Mendoza) contenían 219 litros cada una, de vino; pero, por el camino sufrió la siguiente merma: 2 lts., 3 dls. por derrame y 4 dls. por evaporación ¿cuántos litros recibiría el almacenero?

13° — P. — Vendiéndolo aquí, á 50 \$ la bordalesa, ¿á cuánto lo vendería por litro? ¿cuánto ganaría por litro si en Mendoza lo compró á 28 cts. y le costó, de flete 6 cts. por litro?

Serie para la Lección 5ª, 3er Grado S., mes de Septiembre

1°—M.—Ejercicios de cálculo mental.

2°—M.—Ejercicios acerca de la multiplicación y división de un número por 10, 100, 1000; acerca de las abreviaciones de kilómetro cúbico, de altura, de círculo, de medidas del sistema métrico. Dar números divisibles por 6, por 7, por 9.

3°—P.—La isla de Ceilán posee el árbol más viejo del mundo, tiene 2193 años. ¿En cuánto su edad pasa á la de un olmo plantado el año 1609 en la plaza de Sordo-mudos de París?

4°—P.—Simplificar $\frac{80}{105}$; $\frac{2310}{5544}$; $\frac{92}{96}$, fracciones equivalentes á $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{7}$.

5°—M.—Cantidades de la misma especie que 8 ms.², que 7 caballos, que 9 ms.³ Escribir 45 con cuatro cifras iguales.

6°—P.—Reducir 3 mms.³ á ms.³; Escribir 1022 cms.³; escribir con la denominación milímetros cuadrados, 7 mms.² 28 cms.² y 5 dms.²

7°—P.—Multiplicar por mil á 85 diez milésimos; dividir entre 100 á 7 millonésimos, á 3 décimos y 85 milésimos; ¿cuántas veces 9 cgs. están contenidos en 4 grs.; determinar cual de estas cantidades es mayor: $\frac{2}{5}$ de grs. $\frac{2}{5}$ de Dgs. ó 13 dgs.

8°—P.—¿Cual será el volumen de tres vigas que miden respectivamente: la 1ª 5 ms. de largo 35 cms. de ancho y 3 dms. de espesor; la 2ª 3.20 ms. por 20 cms. por 18 cms.; la 3ª 2.50 ms. de largo por 0.26 de ancho por 18 cms. de espesor.

9°—P.—¿Qué capacidad tendrá que darse á un cajón para contener 150 cajas de 25 cms. de lado y 100 cajas de 2.5 dms. de largo por 125 mms. de ancho y 5 cms. de alto.

10°—P.—La cal viva se paga á razón de \$ 4.3 el m.³ ¿qué valdrían 3 $\frac{1}{2}$ dms.³?

11°—P.—Un obrero gasta 2.85 \$ al día y trabaja 24 días al mes; al cabo de un año sus economías alcanzan á 300 \$. ¿Cuánto gana por día?

12°—P.—Un campo tiene la forma de un triángulo equilátero. Su perímetro es de 48 ms. y su altura mide 1.58 ms. menos que su lado ¿cuál es la superficie de este campo y su valor á razón de 80 \$ el área?

13°—P.—Tres personas se propusieron economizar para un viaje lo más posible. La primera alcanzó á juntar $\frac{2}{5}$ de la suma; la 2ª $\frac{3}{10}$ y la 3ª $\frac{3}{10}$. ¿cuál economizó más? Si el viaje importaba 60 pesos, ¿cuánto economizó cada uno?

14°—P.—Una caja contiene 12 docenas de plumas y se vende en 1.80 \$. ¿cuántas plumas pueden comprarse por 90 cts?

Serie para Lección 13ª, mes de Mayo, 4º Grado

1°—P.—Súmese a cm.³, b mm.³ y d dm.³ Si fuera oro sabiendo que cada cm.³ pesa 19.26 grs. ¿cuánto pesarían dando á a el valor de 15, á b de 190 y d de 1.

2°—M.—La milésima parte de un milímetro cúbico ¿ cuánto es ? ¿ de 50 cm.³ ? ¿ cuántas cifras decimales tienen 3 mms.³, 3 mms.² ?

En 1302 millonésimos ¿ qué lugar ocupa el 1, el 2, el 3 ?

3°—P.—Un boticario arregla en su vidriera frascos de esencia cuya capacidad es respectivamente de $\frac{3}{4}$ litros $\frac{3}{4}$ l. $\frac{5}{7}$ l. y $\frac{1}{4}$ l. ¿ cómo los colocará en orden de tamaño ?

4°—P. Simplificar

$$\frac{2.64 + 11(31 - 7)}{33 + 2.2} + 2; \frac{(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{3}{8}) \times 5}{5 \times \frac{3}{8} + 10}; \frac{0.0001 + 1}{1.0457 - 2 \times 0.0228}.$$

5°—P.—Dos comerciantes reunieron las sumas provenientes de la venta de sus mercaderías.

El primero de 20 piezas de paño á 90 \$ la pieza, el 2° de 35 barriles de vino á 28 \$ el barril. ¿ cuánto le corresponde á cada uno de una ganancia de 590 \$?

6°—P.—¿ Cómo se pueden medir 336 litros con medidas de un Dl. y $\frac{1}{4}$ litro empleando la una tantas veces como la otra ?

7°—P.—Un viajero ha hecho 3040 Kms., así: 3 veces y $\frac{1}{4}$ más por agua que por tierra ¿ cuánto hizo por tierra y cuánto por agua ?

8°—P.—¿ Cuánto tendrá que gastar una municipalidad en granito para empedrar una calle que tiene 1 Km., 2 Hms., 3 Dms. y 8 ms. de largo por 20 $\frac{1}{4}$ ms. de ancho con adoquines de 8 cms. de ancho, 1 dm. y 5 cms. de largo, sabiendo que la mitad los recibe gratis y la otra mitad debe pagarlos á 0.15 \$ cada uno ?

9°—P.—¿ A qué distancia estará un cazador de mí, si después de 4 segundos de ver el fogonazo oigo el tiro ? La velocidad del sonido es de 340 por segundo ?

10°—P.—Se sabe que el mercurio es 13.59 más pesado que el agua, y que un gr. de agua equivale á un cm.³ ¿ Qué cantidad de mercurio necesitaremos pesar para llenar un tubito de 0.000004 ms.² de base por 2 dms. de altura ?

11°—P.—Un chacarero recoge trigo, maíz, lino y alfalfa. Hace los siguientes cálculos: vender el trigo á

6.45 \$ la bolsa, el maíz á 3.70 \$ la bolsa, el lino á 7 \$ y el pasto en 800 \$ y cosecha 328 bolsas de maíz, otras tantas de trigo, 125 menos de lino y 100 toneladas de pasto que hubiera vendido al precio calculado ; pero se le quema una parva de 30 toneladas ¿ cuánto ha sacado en efectivo de sus productos, si á esto debe agregarse el beneficio de 8 chanchos y 200 gallinas que le produjeron $\frac{1}{2}$ de lo que valía el trigo ?

12°.—P.—Un caño puede llenar una pileta en 5 horas, otro en 3, otro puede vaciarlo en 4. ¿ En cuántas horas se llenará estando los tres abiertos ?

Serie para la Lección 15ª. Mes de Abril. 5º Grado

1°—P.—Sale un correo del pueblo A en dirección al pueblo B, al mismo tiempo que de B sale otro en dirección á A. El primero anda con una velocidad de 18 Kms. por hora y el segundo con la de 15. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 300 Kms., ¿ qué tiempo transcurrirá desde la partida de los correos hasta que éstos se encuentren ? (De F. SAQUÉS).

2°—P.—Un industrial contrata á un operario ofreciéndole 3 \$ con 50 por día de trabajo con la expresa condición de retenerle 0.75 \$ cada día que no trabaja. Después de 35 días recibe 92 \$ con 75 cts., ¿ cuántos días ha dejado de trabajar. (F. SAQUÉS).

3°—P.—Un fabricante ha hecho en 12 días 120 ms. de tela. Empleó 54 Kgs. de hilo á 4.50 el Kg. ¿ A cuánto debe vender esta tela para ganar 3.25 \$ por día ?

4°—P.—Un campo de forma rectangular mide 150 ms. de largo por 115 de ancho. Para el drenaje se emplean 18 tubos por área que valen 112 \$ el mil. La mano de obra cuesta 6 \$ cada 100 tubos, ¿ cuál es el precio de esta operación y en cuántos años el propietario se resarcirá de los gastos, sabiendo que la cosecha aumenta 178 \$ por año ?

5°—P.—Un vaso vacío pesa 950 gramos, lleno de mercurio 26 Kgs; ¿ cuánto pesará al sacársele la mitad del líquido y cuál es su capacidad ?

6°—P.—Un carpintero ha comprado 15 vigas de la misma dimensión: 3.40 ms. por 0.63 ms., por 0.40 ms.; 5 de encina, 5 de nogal y 7 de haya, ¿qué flete deberá pagar si se le cobra 0.45 \$ los 100 Kgs.? Densidad de la encina 0.93, del nogal 0.685, del haya 0.852.

7°—P.—Seis Kgs. de chocolate y 5 de azúcar valen juntos 20 \$ con 50 cts., pero 12 Kgs. de azúcar y 4 de chocolate valen 42 \$, ¿cuánto vale el Kg. de cada cosa?

8°—P.—Multiplicar la suma 28 más 19, más 2122 por 49. Escribir en números romanos 100 102. Sumar:

$$\frac{0.003}{0.1} + \frac{145}{0.01} + \frac{0.00008}{0.001} + 1.$$

9°—M.—El producto de dos números es 0.000004 uno de ellos es 2, ¿cuál es el otro? Reducir á fracción impropia $8\frac{3}{4}$, $9\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{0.4}$.

10. — P. — Simplificar:

$$\frac{85 \times 9 \times 39 - 26 \times 15}{195}; \left(3\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{22}\right);$$

$$\frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}; \frac{\frac{8}{7} - \frac{6}{14} \times \frac{8}{28}}{4 - \frac{4}{6} \times \frac{17}{18}}; \text{producto de } (10000 - 4) \times 723.$$

11 — P. — Sumar $142567890 + 34 + 1111111 + 30009903 + 402 + 770707 + 1 + 25540861$. Valorizar $g^{\frac{t}{2}}$ siendo $g = 9.806$ y $t = 9$.

12—M—¿Qué son términos?... factores. Enunciar una cantidad de siete cifras decimales. Un número divisible por 7; dos números que den 1 por cociente, que den —1. Fórmula del volumen de la esfera, dar una fracción común equivalente á 0.3434 + ...

13—P.—Entre el relámpago y el trueno transcurren 8 segundos. ¿A qué distancia está la nube tempestuosas?

Serie 26 para una lección del mes de Junio, 6° Grado

1°—M.—Simplificar:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{3}}; 1\frac{2}{2}; \sqrt[3]{81} \left(\frac{2}{5}\right)^6 \times \left(\frac{5}{2}\right)^6 \sqrt[3]{9^{12}}$$

¿Qué es mayor 0.5 ó 0.5'; $\frac{1}{3}$ ó $(\frac{1}{3})'$; $(\frac{1}{3})'$ ó $(\frac{1}{3})''$? ¿Cómo se dividen decimales? Fórmulas para el área total del cilindro, para el volumen de un cono truncado á base paralelas.

2°—P.—Hallar el peso del cobre, de la plata y del oro que contiene una moneda de 2 centavos, una de 20 y otra de 5 \$.

3°—P.—Las varias maneras de hallar la altura de un árbol.

4°—P.—La distancia entre Mercedes y Navarro, situados entre dos paralelos distintos, es de 40 Kms.; la distancia entre los paralelos es de 20 Kms.; se quiere saber qué ángulo formará con el paralelo de Mercedes, una línea de ferrocarril construída entre las dos poblaciones.

5°—P.—Una columna de mercurio que pesa un gramo ocupa 150 mms. en un tubo capilar. ¿Cuál es el diámetro del tubo?

6°—P.—¿Qué peso deberá tener un cuerpo á 98°5, cuyo calor específico fuese 1.565 para que fundiera en el calorímetro 5.5 Kgs. de hielo? Se sabe que 1 Kg. de hielo absorbe 79 calorías cuando se derrite; que dos cuerpos en contacto se ponen á la misma temperatura; que el peso de un cuerpo, por su calor específico y por su temperatura, expresa el número de calorías que puede dar.

7°—P.—¿Hasta qué altura de un cajón cuya base cuadrada tiene 0.45 de lado, ocupará un espejo de 2 ms. por 0.90 m. por 0.009 m. reducido á polvo?

8°—P.—Valorizar $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$ siendo $x = 0.3$, $y = 01$.

9° - P.—Para valorizar $\frac{\sqrt[3]{11} \times \sqrt[3]{12} \times 23^6}{19^4 \times \sqrt[3]{7^5 \times 31}}$ se obtie-

ne su logaritmo haciendo las siguientes operaciones :

$$\frac{1.041893}{5} + \frac{1.079181}{3} + 6 \times 1.361728 - (4 \times 1.278754 + 5 \times \frac{0.845098 + 1.491362}{4}) \quad \text{¿cuál es el logaritmo?}$$

10—P.—Un viajero trajo un monstruo cuya cabeza tenía 7 decímetros; la cola tan larga como la cabeza, más la mitad del cuerpo y el cuerpo tan largo como la cabeza y la cola juntas. Se quiere saber cual es la longitud de la cola y cual la del cuerpo

11—M.—Si el divisor es 9 y el cociente 70, ¿cuál será el dividendo?

12—M.—El dividendo es 12865 y el cociente 21, ¿cuál es el divisor?

13—P.—Una cuadra de alfalfa da tres cortes durante el año y cada corte tres toneladas; vendida á 11 \$ los 1000 Kgs. ¿Cuánto produce la cuadra, y representa el 12 % de qué capital?

14—P.—Reducir á un monomio las siguientes expresiones:

$$3995 + 29997 + 5 + 3; \quad 24 + 17 + 76 + 83.$$

$$7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6} + 2\frac{1}{3} + 16\frac{1}{4} + 25\frac{3}{8}.$$

II

Problemas. — *El análisis: lenguaje, objetivación y sentido común.* Cuanto hemos tratado hasta aquí bajo el nombre de lecciones de aritmética, no constituye, en verdad, sino *enseñanza de operaciones*, auxiliares de la parte útil, práctica y aplicada de la asignatura, el problema. Es, no obstante, curioso el solícito afán con que maestros, escuelas y programas inculcan los conocimientos del primer carácter y la despreocupación é indiferencia con que forman las aptitudes, para tratar los segundos.

Para nosotros, aprender aritmética es analizar enunciados para descubrir operaciones y hacerlas. Este sencillísimo concepto de la asignatura indica también

un método sencillísimo para enseñarla dentro de un espíritu eminentemente generalizador. Generalizador decimos, porque verbigracia, la suma de fracciones no es, de este modo, sino una suma de cocientes, enteros divididos por enteros; la multiplicación de decimales no es sino una multiplicación y división de enteros. El razonamiento de un problema, no es sino el análisis de un período gramatical complejo que, al descomponérsele, deben distinguirse proposiciones principales y subordinadas, el significado exacto de las palabras y las asociaciones que modifican la idea (adjetivos, complementos).

El ejercicio no es un problema y el problema difiere de las cuestiones que acostumbra á tratar la aritmética. El ejercicio tiene por objeto hacer comprensible, mediante la aplicación, una regla; su carácter es operativo. El problema, por el contrario, se atiene más á la lógica, al lenguaje, basándose en principios para llegar á una conclusión ó respuesta.

Hay problemas difíciles, únicamente por las palabras y giros del enunciado; por las partes que suprime (condiciones implícitas) y, de consiguiente, á cargo del calculador encontrarlas; por el número de datos, proposiciones y sobre todo leyes, principios, teoremas, que deben combinarse y resumirse.

Hay problemas difíciles cuyas operaciones, son simples cálculos mentales. Por lo general, un ejercicio complicado no supone un problema difícil ni un problema difícil supone un ejercicio complicado.

El ejercicio es una combinación de operaciones mientras el problema lo es de proposiciones.

El análisis de un problema es una cuestión de lenguaje, sentido común y objetivación destinada á evocar en nuestra mente, ideas de relatividad.

Ejemplos: *¿Qué altura tendrá un aljibe que contiene 5740 dm.³ de agua hasta el nacimiento de la bóveda?; sus dimensiones son: 2 ms. de largo por 1.30 ms. de ancho.* (L. y C., 938); caso observado por nosotros: la palabra aljibe sugiere la forma de un cilindro y se objetiviza en tal sentido. Pero la

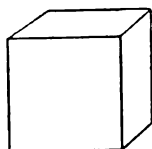
imagen no corresponde á los datos; el alumno trepida hasta que después de una detenida discusión inductiva, se convence de que la imagen es falsa; largo y ancho diferentes, puede corresponder á una base rectangular no á un círculo. Se trata, pues, de un paralelepípedo y no de un cilindro.

El litro de aire pesa 0.001293 Kgs. y el de un litro de agua 1 Kg. ¿Cuántas veces sobrepasa el peso del agua al del aire? (L. y C., 1032) la palabra *sobrepasa* sugiere la idea de resta; se la toma con el modificativo *cuántas veces* y parece lógico que se disminuya de un peso otro peso para obtener *a* Kgs. de resultado, sin observar que la denominación no puede ser Kgs. sino veces, privilegio exclusivo de la división, para enterarnos de las veces que una cantidad de una misma especie contiene á otra de la misma especie. Sin duda alguna, la perturbadora palabra *sobrepasa*, no solo está demás en el problema sino que desempeña un oficio que no le corresponde; pero los enunciados son así; la discusión inductiva, entre sus fines, tiene el de corregir la dualidad de los términos.

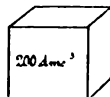
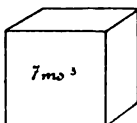
La objetivación establece las relaciones de los datos mediante la percepción y su exactitud, depende del sentido común de la persona, esa suma de aptitudes adquiridas en la vida diaria, para evocar y reproducir inmediatamente imágenes. De ella depende, en gran parte, la solución; asocia gráficamente, elementos difíciles de unir, fiados á la atención interna; se trata, no de reproducir el objeto sino la proporcionalidad entre las partes consideradas como factores de relación. Si se nos dice: una pared tiene 80 ms. de largo y otra 20 ¿cuántas veces una es mayor que la otra? poco acertado, del punto de vista de la economía del tiempo, sería dibujar dos paredes, para caer quizá en el error fundamental de darles la misma longitud gráfica.

Por lo contrario basta representarlas con dos líneas rectas, pero una cuatro veces la otra, lo más aproximadamente posible. Hemos observado lo poco escrupulosos que suelen ser los maestros al admitir, con

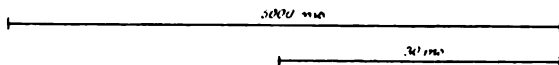
mucha frecuencia, objetivaciones falsas del punto de vista aritmético. Murallas de 15 ms. $\times$ 0.50 ms. $\times$ 3 ms. representadas:



Volúmenes de 7 ms.³ al lado de cajas de 200 dm.³ representados:



Montañas de 5000 ms. al lado de árboles de 30 ms. representados:



Una tal exteriorización de las imágenes sugiere un análisis erróneo del problema ó implica la falsedad del primer paso de todo razonamiento matemático: la comparación.

Otras veces, las figuras se hacen de dimensiones tan reducidas, que la vista solo percibe una reproducción confusa de las longitudes, superficies ó volúmenes; la objetivación es la exteriorización de las imágenes evocadas por el enunciado. Si es incompleta ó falsa, es porque las ideas del enunciado han sido mal interpretadas y, de consiguiente, el análisis resulta erróneo por defectuosos elementos de comprensión ó carencia de ellos.

La objetivación se hace del punto de vista de la proporcionalidad (extensión relativa,), dijimos, nunca de la forma, siempre que la del volumen responda á tres

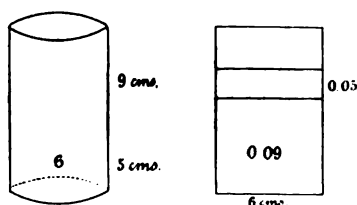
dimensiones; la de la superficie á dos; la de la línea á una. De aquí que las longitudes, distancias, alturas de montañas, árboles ó casas; edades, ganancias, capitales, exportación de mercaderías, estén bien exteriorizadas por líneas rectas. Las superficies de patios, terrenos, paredes, corrales, grupo de casas y cuanto de forma que expresamente no se indique, esté bien exteriorizado por rectángulos ó círculos. Dos volúmenes que se comparen, dos objetos, dos columnas, dos vasijas, están bien exteriorizadas por su corte seccional, por una figura plana, por el paralelepípedo ó cilindro, salvo indicación expresa de la forma. Pero si la forma es secundaria y conviene un dibujo fácil de observar, la objetivación de todos los datos, su exacta colocación en la figura y la proporcionalidad de las partes es fundamental, porque una cuestión aritmética no lo es de forma sino de comparación y compara bien quien ve bien, en quien el enunciado evoca imágenes exactas. Este fenómeno explica la importancia que para nosotros tiene esta parte del análisis matemático en niños que no han traspasado el umbral de la enseñanza primaria.

El alumno que representa: *el largo de una cuerda es de 15 ms; el de otra 3...* por dos líneas iguales; ó aplicando el 3 á la más larga y el 5 á la más corta; ó dibujando una línea mayor que la mitad de la otra, ese alumno no puede comprender el enunciado de que dicha frase forma parte. (L. DUGAS — *L'Imagination*, pág. 248).

El alumno que representa: *una bola de hierro de 0.35 ms. de radio desplaza igual volumen de agua y pesa tanto como otra de oro*, por tres secciones iguales de la esfera; ó *qué cantidad de arena se necesita para cubrir un patio de 4 ms. de ancho por 12 de ancho si la capa es de 0.05 ms. de espesor*, por un rectángulo en que 12 ms. se aplica al ancho y 4 al largo y la capa de arena presenta el aspecto de un cubo, ese alumno hará, á no dudarlo, un mal análisis del problema. La proporcionalidad no debe ser rigurosa, pero sí aceptable; no pretendamos que dos milímetros de espesor

aparezcan casi imperceptibles sobre una base de 3 ms. por 2, pero sí, disminuídos hasta donde la claridad no se oponga. La objetivación de una montaña y de un árbol comparados, no sería posible dentro de la estrictez matemática. Pero se supone una evocación de imágenes exactas cuando la vertical del árbol aparece bastante pequeña junto á la vertical de la montaña cortada por puntos de continuación.

Hay objetivaciones incompletas ó simuladas que indican ausencia de imágenes; así, *una copa cilíndrica se llenó hasta 0.05 ms. con agua; al echarsele aceite, el líquido se elevó á 0.09 ms.; el radio es 0.06 cms. ¿Cuál es el volumen del aceite?* suele, gráficamente, traducirse:



En este caso, la figura es un elemento de perturbación ó revela que el enunciado no evoca imágenes claras y que, por consiguiente, no es comprendido.

Sentido común.—Para cultivar ese gran rectificador de análisis, el sentido común, del que tan desprovista anda la escuela cual si la escuela fuese un ambiente extraño al en que comunmente vivimos y tratara asuntos ajenos á las habituales circunstancias de nuestra vida, se darán enunciados con datos erróneos ó resultados de contrasentido fácil de apreciar para que juzguen la razón ó sinrazón del caso. En un corral había 2528 ovejas, en otro 3402, en otro 987; todas suman 85902 ovejas. ¿Es ó no aceptable el resultado? (2º grado) indicándoles la manera rápida de comprobar: 3 mil; 2 mil y mil con sus picos, no dan, evidentemente, 85 mil. Una esfera de cobre macizo tiene 0.50 ms. de radio. ¿Cuánto pesará? Se da 9534 Kgs. por resul-

tado. ¿ Por qué no puede ser ? Porque evidentemente, su volumen es mucho menos de un metro cúbico. Si fuera un metro cúbico, pesaría 8 veces 1000 Kgs. y un pico que no alcanzaría á 8000. Luego, la esfera debe pesar menos. Los niños se rectifican á sí mismos. Es de los maestros, por la autoridad que ante ellos tienen, que aceptan cuanto se dice sin beneficio de examen, tanto más, si el maestro afirma su prestigio mediante un poco de preparación. En 2º grado notamos este caso: la practicante solicita de S. un problema ; S. enuncia: *En un aula hay cuatro niños (movimiento de sorpresa en los compañeros); el primero tiene 30 dientes ; el segundo 45* tumultuosa manifestación de protesta que obliga á S. á sentarse.

En 3º, este otro (dicta el practicante) ¿ cuál es el área de un pentágono regular que mide 0.25 ms. de lado por 0.25 ms. de apotema ? No señor, no señor, dicen los alumnos ; esos datos no pueden darse sin medírseles, porque sino uno ú otro sale mal.

Al insistir sobre este factor del análisis, lo hacemos en vista de la importancia que tiene como rectificador inmediato de nuestros juicios y los resultados que se obtienen cuando en las lecciones se acude á él ; y lo hacemos, en vista de la frecuencia con que se producen contrasentidos que sencillamente dejan en un maestro la más honda impresión de asombro.

Los contrasentidos son frecuentes en problemas de multiplicación y división de decimales, sobre todo, al tratar medidas métricas, por la arraigada costumbre de operar sin denominaciones, de no reducir y no fijarse en la especie. Estamos seguros que en esta clase de problemas, el despropósito es muy habitual en las escuelas argentinas ; estamos seguros que poquísimos jóvenes de 4º, 5º y 6º grado, nos darían un resultado exacto de este problema : ¿ Cuánto pesa el agua contenida en un vaso cilíndrico de 8 cms. de radio por 0.2 ms. de altura ? ó de este otro : ¿ Cuántos ladrillos contiene una pila de 12 ms. de largo por 8 ms. de ancho y 3.50 de alto, sabiendo que cada ladrillo mide 28 cms. de largo, por 14 de ancho y 4 de espesor ?

Sin esta clase de ejercicios, ⁽¹⁾ nos explicamos que un alumno diga: si un hombre hace una zanja en 6 días, 3 hombres la harán en 3 veces más tiempo. Si un vapor en aguas tranquilas anda 12 millas, remontando un río andará $12 + x$. ¿Si A paga á B y C tantos chelines, cuántos tenía cada uno (A tenía a ; B, b ; C, c)? A tendrá $a + b + c$; B tendrá $b + a + c$; C tendrá $c + a + b$, ó bien, A tendría $a - 2a - 2b - 2c$; B tendría $b + a + c$ y C $c + a + b$. Que si un metro cúbico tiene 1000000000 de milímetros cúbicos, 496 milímetros cúbicos tendrán 1000000000 de veces más ó 496000000000 ms. cbs. Trenes que andan 48000 ms. por minuto, balas que recorren 12 ms. por segundo: casos anotados en nuestra cartera observando á alumnos de 6º grado y curso normal de 16, 17 y 18 años.

Las dificultades consisten en:

I.—Ver simple á un todo compuesto.

II.—Interpretar erróneamente el significado de las palabras; asociar al sustantivo, atributos y complementos que no le corresponden.

III.—Hacer caso omiso de oraciones subordinadas que modifican condicionalmente á la principal.

IV.—Ser incapaz de conceptos acerca del tiempo y del espacio que establezcan la relatividad de los datos.

V.—No asociar á los sujetos sus modificativos inmediatos, lo que justificaría el propósito de LEIBNITZ de crear símbolos que sintetizasen las frases.

VI.—Comprender el concepto de un enunciado, pero no evocar con él las asociaciones mediatas (condiciones que el problema no especifica porque se suponen del bagaje mental del alumno.) ¿Cuál es la superficie de un cuadrado cuya base mide a metros? Falta la segunda dimensión, pero si se sabe que el área es igual á la base por la altura, no debe igno-

(1) CLIFFORD. « Common Sense of the exact Sciences ».—Este importante libro que pusimos en manos de los cursos que estudian inglés, muestra hasta donde el sentido común es una guía en matemática, aun en cuestiones de difícil análisis. N. R. D'ALFONSO. « Psicología del linguaggio », p. 58. Lenguaje y lógica.

rarse que la altura es igual á la base y que, de consiguiente, mide a .

VII.—Leer incorrectamente el enunciado y clasificar mal las oraciones por una puntuación deficiente.

VIII.—Considerar como típicos á todos los problemas, sin afiliarlos á grupos, afines del punto de vista del procedimiento, para resolverlos. De modo que se ignoran las series derivadas ó de apoyo. Se tratan éstas como típicas y á las típicas como derivadas sin otro criterio que el eventual. Se enseñan y no se enseñan casos que exigen una lección; se enseñan y no se enseñan casos que no exigen una lección.

IX.—No comenzar el análisis por la pregunta, elemento de unidad al que deben referirse las objetivaciones, inducciones y deducciones que se hagan.

X.—No hacer análisis enumerados: I, II, III, etc. que permite un estilo sentencioso, conciso y favorable á una expresión correcta. La complejidad de las oraciones es un motivo de constante confusión para alumnos que escriben y puntúan mal, incapaces de abarcar con la atención un extenso período de proposiciones íntimamente ligadas unas á otras.

XI.—Un individuo recorre una distancia de manera que después de 6 horas, vuelve al punto de partida. A la ida anda 8 millas por hora, á la vuelta 4. ¿Qué distancia ha andado?

Transformación en otro más explícito:

Un individuo va de Mercedes á Luján en coche á razón de 8 millas por hora; por el mismo camino vuelve de Luján á Mercedes, pero andando 4 millas por hora. ¿Qué distancia hay entre Luján y Mercedes si entre ir y venir empleó 6 horas?

XII.—Emplear mal las abreviaturas y olvidar su significado cuando desempeñan el oficio de denominación.

Damos, por estas circunstancias, excepcional valor á los siguientes ejercicios preparatorios del razonamiento:

I.—Objetivación (versión gráfica) de enunciados y partes de enunciados. Exteriorización de las imágenes evocadas por la lectura; dan inmediatamente la claridad con que se ha comprendido.

II.—Descomposición de un enunciado en otros enunciados de una proposición, sin alterar ni los datos ni el concepto del problema.

III.—Presentar el mismo enunciado, bajo otra forma, en lenguaje más común y más explícito.

IV.—Hacer, con los datos y condiciones de un problema, el mayor número de inducciones posibles, asociando elementos que el texto no enuncia, pero que por los datos pueden suponerse.

V.—Asociar las inducciones y deducciones unas á otras para una nueva condición (conclusión parcial).
Ejemplo: Un problema analizado según las predichas indicaciones, con exceso de detalles: A y B, salen al mismo tiempo, el uno hacia el otro, partiendo de puntos opuestos; A, á razón de 3 millas por hora y B, de 4 millas por hora. Al mismo tiempo, C parte con A caminando 5 millas por hora; después que encuentra á B, vuelve atrás hasta juntarse nuevamente con A: el tiempo transcurrido hasta este último encuentro, es de 10 horas, desde que salió. ¿Qué distancia había entre los puntos de donde partieron A y B? (ROBINSON, Álgebra, p. 90). Los estudiantes lo consideran difícil. En efecto, delante de un enunciado de siete líneas donde no se ve más que un todo, ninguna mente puede relacionar ocho ó nueve condiciones á la vez; pero, dejemos el todo y tratemos de comprender las partes empezando por la pregunta.

I.—¿Qué distancia hay entre los puntos de donde partieron A y B?

a) Los dos puntos son de partida.

b) ¿Puede partir un mismo individuo de los dos puntos á la vez? El sentido común nos dice que no: luego, un punto corresponde á A y otro punto á B.

c) Pero esto supone que A y B parten de puntos diferentes. En efecto, así es, puesto que el problema nos lo dice al principio: *partiendo de puntos opuestos*.

d) Luego, podemos hacer esta objetivación, que si el problema no está mal concebido, será exacta en cualquier caso sin que nada pueda destruirla:



que quiere decir: A y B parten de dos puntos opuestos A y B , el uno hacia el otro. Deseamos conocer la distancia entre A y B .

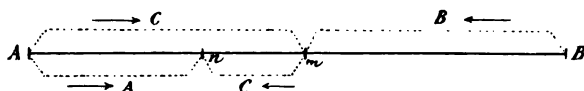
II. — a) Leyendo el problema, nos encontramos que con A sale un tercero, C , *al mismo tiempo*, pero andando más.

b) C debe encontrar á B que viene hacia A , antes que A . De esto inducimos lo que el problema no dice: que C recorre el camino de A y B en la dirección AB y no otra. Que los tres viajan por el mismo camino.

c) C anda más ligero que A y parte al mismo tiempo que A y B . Es lógico, que aventaje desde el primer momento á A , encuentre á B , pueda volver y encontrarse nuevamente con A .

d) Pero de aquí inducimos que si parte con A al mismo tiempo, también se encuentran al mismo tiempo con A , pues ningún encuentro es nunca en diferentes instantes; entonces A y C , han andado el mismo número de horas.

e) Luego, podemos hacer esta otra objetivación:



m , punto de encuentro de C con B ; n , punto de encuentro de A con C , al volver C de m ; m B distancia recorrida por B hasta el momento de encontrarse con C ; A $m + m$ n , distancia recorrida por C hasta encontrarse con A ; A n , distancia recorrida por A hasta encontrarse con C .

f) Por la vista, sacamos esta noción: que A $n + m$ $n + m$ $B = AB$. Que conociendo el valor de esas tres distancias, obtendremos la de AB .

III. — *a*) Evidentemente, la manera común de determinar distancias, es multiplicando lo que se anda por hora, por el número de horas, noción implícita del problema, que poseemos por aquella forma específica, muchas veces tratada: Si un tren anda a Kms. por hora ¿cuántos Kms. andará en b horas?

b) Leyendo otra vez el problema, nos encontramos con que cada uno recorre una distancia conocida, por hora.

c) que C anda 10 horas á razón de 5 millas por hora ó 50 millas en 10 horas, desde que sale con B hasta encontrarse con A , ó que la distancia $Am + mn$ es igual á 50 millas.

d) Pero A , hasta encontrarse con C , anda, digamos, en 10 horas, á 3 millas por hora, 30 millas. Pero en e , digimos que an era también distancia recorrida por A hasta encontrarse con C ; entonces la distancia $An = 30$ millas, con lo que determinamos la longitud de una parte de la línea.

e) De la objetivación, sacamos que $Am = An + nm$; si An es igual á 30, $Am = 30 + nm$.

f) Pero en III *c*, dijimos que $Am + mn = 50$ millas. Entonces $30 + mn + mn = 50$; $2mn = 20$ millas; mn será 10 millas, con lo que determinamos la longitud de otro pedazo de la distancia AB .

IV. — *a*) Nos resta á determinar la distancia mB , para conocer la de A á B .

b) La distancia mB , es la recorrida por B á razón de 4 millas por hora, en ¿cuántas horas?. Satisfecha esta pregunta el problema está resuelto.

c) Recordemos que B , partió de B al mismo tiempo que C de A ; recordemos que en m se encontró con C ; recordemos que $Am = An + mn$ ó $30 + 10 = 40$ millas; recordemos, por fin, que si C y B salieron al mismo tiempo, también se encontraron al mismo tiempo y que en el mismo tiempo, cada uno, ha recorrido respectivamente Am ó 40 millas y Bm ó las millas que vamos buscando.

d) Pero C anda 5 millas en una hora; 40 millas las habrá andado en $\frac{40}{5}$ ú 8 horas; luego B , empleó 8 horas para ir de B á m .

e) B anda 4 millas por hora, en 8 habrá andado 32 millas; la distancia Bm es de 32 millas.

V. — Resumiendo :

AB ó distancia que buscamos entre A y B es igual á $An + nm + mB$; $An = 30$; $nm = 10$; $mB = 32$; luego $An + nm + mB$ ó la distancia $AB = 30 + 10 + 32 = 72$ millas.

Este problema sencillo, del punto de vista operativo, no ofrece dificultades del punto de vista de la comprensibilidad pero sí del punto de vista de sus numerosas asociaciones y aun más numerosas inducciones, favorecidas, no obstante, por la versión gráfica y por la no necesidad de seguir el orden de sucesión adoptado por nosotros, con tal que, cuanto hagamos, aclare una circunstancia de la pregunta y sirva al propósito de determinar la longitud AB .

Descomposición y condiciones de una serie.— Un problema es una serie de problemas típicos unidos á definiciones, axiomas, principios y teoremas, en que el último contiene la pregunta del todo. La suma de los razonamientos parciales constituye el razonamiento total. De manera que, para formar la aptitud analítica, seguiremos el procedimiento de dar todos complejos para descomponerse en formas simples; pero antes se comienza con enunciados de una sola condición; se combinan, luego, con otros, ó de dos en dos, de tres en tres, para que el alumno vuelva á los simples, por el análisis.

Ejemplo: Dividir 54 \$ entre 3 obreros que han trabajado 7, 6 y 5 días respectivamente.

Ejercitación preparatoria para resolver el problema típico:

I. — En 18 días de trabajo se ha ganado 54 \$.
¿Cuánto se ha ganado por día?

II. — Una obra es hecha de la siguiente manera: trabajando 7 días un individuo; 6 días otro de la

misma fuerza y 5 días otro de la misma fuerza. ¿Si trabajase uno solo ¿cuántos días emplearía para hacer la obra?

III. — Trabajando un día, un obrero gana 3 \$: trabajando 7 ¿cuánto ganará? ¿Trabajando 6, trabajando 5?

IV. — Si tres obreros son de la misma fuerza y hacen la obra trabajando las mismas horas por día ¿cuánto se le debe pagar á cada uno por día?

V. — Por los 7 días que trabajó uno, por los 6 que trabajó otro y por los 5 que trabajó el tercero, se pagó 54 \$ ¿cuánto gana cada uno por día?

En la elaboración de una serie de problemas distribuida en meses, debe tenerse presente:

1° — La especie del problema por la operación ú operaciones que exige.

2° — La complejidad del problema por el número de proposiciones.

3° — La cantidad de números de la proposición y el número de cifras del número.

4° — La forma del enunciado desde el punto de vista del lenguaje (syntaxis).

5° — La naturaleza del problema por las relaciones implícitas á que dan lugar los datos.

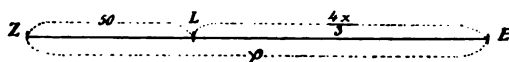
6° — La discriminación de cada forma típica según este orden: perceptiva, pictórica y abstracta.

7° — La exactitud con que el enunciado evoca las imágenes internas.

8° — La naturaleza de las relaciones teniendo presente que las de movimiento (combinación de espacio y tiempo en sujetos diferentes) son las de más complicada comprensión por una duplicidad de imágenes con los mismos datos, fácilmente confundibles como en el siguiente caso, caso de los correos, de las manecillas del reloj, etc.:

Una liebre lleva 50 saltos á un zorro que la persigue; 3 saltos de la liebre equivalen á 2 del zorro; pero mientras el zorro hace 3, la liebre hace 4. ¿Cuántos saltos deberá hacer el zorro para alcanzar la liebre?

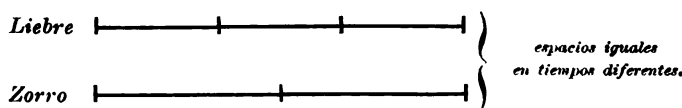
Objetivación



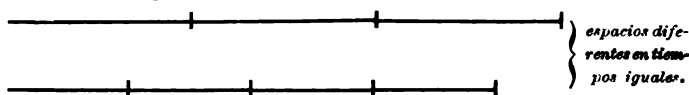
Z y L , posición respectiva del zorro y la liebre en el momento de comenzar la persecución. E , punto de encuentro. Débese determinar la distancia $Z E$ medida en saltos de zorro ó el valor de X .

Imágenes cuyo significado suele confundirse en perjuicio del razonamiento :

3 saltos de la liebre equivalen á 2 del zorro (imágenes de espacio) :



Mientras el zorro da 3 saltos, la liebre da 4 (imágenes de espacio) :



INDUCCIONES

I. — En el mismo tiempo que el zorro va de Z á E , la liebre va de L á E .

II. — Desde que los datos nos dan unidades de medida diferentes, saltos de zorro y saltos de liebre, y el problema nos exige la distancia en una sola unidad de medida, nos es forzoso medir los espacios con una misma unidad de medida ó reducir los saltos de un animal en saltos del otro.

III. — Toda reducción se precisa por el método de la unidad.

Descomposición. — I. — Mientras el zorro hace x saltos ó recorre la distancia $Z E$ ¿ cuántos saltos

dará la liebre ó en cuántos saltos recorre la distancia LE ? II.— Los x saltos del zorro ¿ á cuántos saltos de liebre equivalen?

Análisis. — I. — Si mientras el zorro da 3 saltos la liebre da 4, mientras el zorro da 1 la liebre dará tres veces menos ó $\frac{4}{3}$ y mientras el zorro da x , la liebre dará $\frac{4x}{3}$. Luego, mientras el zorro da x ó recorre la distancia ZE , la liebre da $\frac{4x}{3}$ recorrido de la distancia LE .

La distancia ZE en saltos de liebre, equivale pues, á $50 + \frac{4x}{3}$.

II. — Si 2 saltos del zorro equivalen á 3 de la liebre, un salto del zorro equivaldrá á $\frac{3}{2}$ de la liebre, y x saltos del zorro equivaldrán á $\frac{3x}{2}$ de la liebre. Luego, la distancia ZE , en saltos de liebre, equivale á $\frac{3x}{2}$.

Conclusión. — Si la distancia ZE por una parte equivale á $50 + \frac{4x}{3}$ saltos de liebre, y por otra á $\frac{3x}{2}$ saltos de liebre, $50 + \frac{4x}{3} = \frac{3x}{2}$.

9º — Que cada serie presente nunca más de un problema típico; los demás, sin ser repetición, que sean derivados con el propósito de evocar análisis típicos hechos anteriormente á fin de ejercitárselos con frecuencia de acuerdo con su complejidad, teniendo en cuenta que dichos análisis pueden estar comprendidos en enunciados compuestos, en cuyo caso no es necesario repetir la forma simple.

Son problemas derivados ó afines aquellos cuya solución se sujeta á una misma fórmula general y á un desarrollo analítico semejante, ofreciendo condiciones implícitas ó explícitas, homólogas.

Así, todos los problemas que se resuelven por esta fórmula $i = \frac{c \times t \times r}{100}$ sea cual fuere la incógnita, son derivados del principal en que se conocen tres datos.

Los enunciados. — Cada especie ofrece variedades en cuanto á la cantidad de números de cada proposición, que si no exigen mayor esfuerzo razonativo lo exigen de atención sobre las operaciones que en circunstancias dadas, como digimos en capítulos anteriores, perturban, por retardo, la discriminación central. Desde este punto de vista, son diferentes :

a) En una quinta cortaron 12 perales y 5 manzanos ¿cuántas quedaron de las 25 plantas que hay? y

b) En una quinta cortaron 12 perales, 5 manzanos, 2 cerezos, 4 naranjos, 6 aromos ¿cuántas quedaron de las 35 plantas que había?

De la misma manera, hay retardo con números grandes, lo que en los primeros grados ha de tenerse en cuenta por la dificultad con que se retiene el concepto del enunciado cuando el tiempo para discriminar se alarga con integraciones que automáticas todavía recurren á los dedos. Una misma proposición, desde el punto de vista del lenguaje, puede ser más ó menos atrayente, más ó menos clara, según el juego que se dé á los inacabables recursos de la sintaxis. Acerca de este punto, la elaboración de las series exige tanto cuidado como en el caso de las combinaciones, sobre todo, tocante á la inversión de las frases y á la supresión de términos y proposiciones que deben suponerse por los demás datos. Las mayores dificultades de los problemas no tienen otro origen. Mediante algunos ejemplos, haremos comprender este punto fundamental de la discriminación aritmética.

Se resuelven de la misma manera los cinco problemas siguientes :

1º

a) ¿Cuál es la diferencia entre 94 y 53?

b) ¿En cuánto excede 94 á 53?

c) ¿Cuánto es más 94 que 53?

d) ¿Cuánto hay que agregar á 53 para obtener 94?

e) ¿Diferencia entre 53 y 94.

2°

Los tres siguientes :

a) María economizó 40 pesos y gastó 25 ¿ cuánto le quedó ?

b) María, la hermana de Juanita consiguió, á fuerza de trabajo, economizar 40 pesos ; gastó 25 en ropa ¿ cuánta le quedó ?

c) María, la hermana, etc. economiza 40 pesos ; en vez de comprar un vestido nuevo, prefirió comprar 10 hermosas gallinas y 2 gallos por 25 pesos ¿ cuántos pesos no gastó ?

3°

Los siguientes :

a) Pedro compró tres cortapapeles, tres raspadores y tres gomas de borrar y le regalaron un escritorio ¿ cuántos útiles de escritorio adquirió ?

b) Pedro adquirió los siguientes útiles: tres cortapapeles, tres raspadores, tres gomas y una escribanía ¿ cuántos útiles adquirió ?

c) Pedro compró : el Lunes, tres cortapapeles ; el Martes, tres raspadores ; el Miércoles, tres gomas y le regalaron una escribanía ¿ cuántos útiles de escritorio adquirió ?

d) Pedro adquirió tres cortapapeles, cantidad igual de gomas y raspadores y una escribanía ¿ cuántos útiles de escritorio son ?

4°

Un problema compuesto :

a) En una estancia hay cuatro corrales : el 1° con 111 ovejas ; el 2° con 220 ; el 3° con 403 y el 4° con 212 ; se murieron 11 en el 1° ; 200 del 2° se vendieron ; del 3° se murieron 100 y del 4° se escaparon 50 ¿ cuántas ovejas quedaron en los corrales ?

b) Los cuatro corrales de una estancia tienen respectivamente 111, 220, 403 y 212 ovejas; de todas se vendieron 200; se murieron 11 y 100; se escaparon 50 ¿cuántas quedaron vivas en los corrales?

c) En el corral de una estancia había 111 ovejas de las que murieron 11; en otro había 220 de las que se vendieron 200; en otro había 403 de las que murieron 100; en otro había 212 de las que escaparon 50. Total de ovejas que quedaron en los corrales.

d) Quiere saberse cuántas ovejas quedan á un estanciero que se le mueren 100 y luego 11; que vende 200 y se le escapan 50, si cada corral tiene respectivamente 111, 220, 403 y 212.

De tanta ó más importancia es el *asunto* del problema, que dentro de la misma especie, se presta á una rica variedad de enunciados; los autores no utilizan otro elemento para hacerlos atrayentes y variados. Por el asunto, además, es posible eliminar del problema datos, frases ó dar al enunciado una forma donde las operaciones se indican de una manera indirecta.

Para ejemplificación de este caso, bástanos tomar una serie de cualquier buen tratado, ROMAY, WHITE, LAFFERRIÈRE Y MÉNDEZ, LATZINA, ROYO ó RITT. No obstante ser todos de resta (especie —) exigen capacidad diferente para ser comprendidos y resueltos; unos, un área mnésica más extensa; otros, asociaciones de carácter mediato; otros, conocimientos, que no siendo matemáticos son, empero, necesarios; otros penetrar la construcción gramatical.

Además, unos tienen sólo presente la cultura matemática; otros, añaden la histórica; otros, la geográfica; otros, la anatómica; en fin, al mismo tiempo que forman la aptitud para tratar una cuestión aritmética transmiten conocimientos útiles al alumno. Es fácil comprender sus ventajas, cuando pueden variar de especie y de lenguaje para ser interesantes, lo que no es sencilla tarea si se examinan las series de LATZINA y RICALDONI, donde la operación viene indicada en la

mayoría de los casos, de la misma manera. De aquí que las de Royo sean más estéticas y ofrezcan los 18 problemas de la misma especie en cuanto á operacion, más variedad que los 24 de RICALDONI, pues en los primeros hay 11 especies de enunciados, y en los segundos, sólo 3.

Serie de Royo ⁽¹⁾ (de resta).—Hagamos, antes presente, que deben considerarse desde el punto de vista de las condiciones 4ª y 5ª.

- 1—¿Cuál es el exceso de 17399 sobre 8947?
- 2—¿Cuál es la diferencia entre 2629 y 1846?
- 3—¿Qué número es preciso añadir á 738 para hacer 947?
- 4—Caldas nació en Popayán el año 1770; por ser sabio y patriota, los españoles le fusilaron en 1816. ¿Cuántos años vivió este ilustre granadino?
- 5—La independencia de la Confederación Granadina fué proclamada en el año 1810, y estamos en el año 1869: ¿cuántos años hace que se proclamó la independencia?
- 6—La primera cruzada tuvo lugar en 1096 y la séptima y última en 1270. ¿Cuántos años duraron las cruzadas?
- 7—Un ejército de 36450 hombres perdió en una sola campaña 12475 hombres: ¿cuántos hombres le quedaron?
- 8—En 1844 la población de la Confederación Granadina era de 1.932.279 habitantes; en 1854 era de 2.243.837 habitantes: ¿cuánto había aumentado la población?
- 9—Una caja. vacía, pesa 25 Kgs.; llena de mercancía pesa 147 Kgs. ¿cuál es el peso de la mercancía contenida en ella?
- 10—Un padre tenía 28 años cuando nació su primer hijo. ¿Cuál será la edad del hijo cuando el padre tenga 56 años?
- 11—La mayor distancia del sol á la tierra es de 35.183.000 leguas y la menor de 34.017.200 leguas. ¿cuál es la diferencia?
- 12—Se compró una prenda de 502 pesos y se vendió en 693 pesos: ¿cuál es la ganancia?
- 13—Una sala tiene 59 metros de largo y 17 de ancho ¿cuánto excede el largo al ancho?
- 14—El cometa que apareció en 1835 había estado 76 años invisible. ¿En qué año pues, tuvo lugar su precedente aparición?
- 15—La República Granadina se fundó en 1831; corre el año 1869: ¿cuántos años han pasado desde la fundación de la República?
- 16—El radio de la tierra por los polos es igual á 6356324 metros y por el Ecuador igual á 6376964: ¿cuál es pues el aplastamiento de la tierra hacia los polos?

(1) «Aritmética metódica, 1869», p. 37.

17 — Un sujeto ha pagado 599 \$ sobre una letra de 2000 pesos ¿cuánto debe todavía?

18 — Las aguas del Magdalena tenían ayer 180 centímetros de altura; hoy han bajado 19 centímetros: ¿Qué altura tienen hoy las aguas de dicho río?

Presenta, desde el punto de vista de la construcción y del asunto, 11 especies de problemas diferentes.

En el 1 la palabra *exceso* exige una construcción diferente á la de la palabra *diferencia*. La última, al dar idea de disminución, sugiere inmediatamente la resta; la primera, al dar idea de aumento sugiere la suma. De aquí que el problema 2 sea más accesible que el 1 y el 3 donde ocurre lo mismo con la palabra *añadir*.

En el problema 4, como en el 3, el substraendo aparece antes que el minuendo, inversión que no acostumbra el niño; á la acción de fusilar debe asociarse la de muerte; y los actos de nacer y morir, ser considerados como límites extremos de los años que se vive.

Hay, pues, necesidad de la línea que objetivice.

El caso se simplifica diciendo: Caldas murió en 1816 y nació en 1770. ¿Cuántos años vivió?

La noción histórica, al hacerlo más atrayente, comunica datos útiles de diferente categoría científica.

El 10 asocia el 0 y la edad del hijo, á 28: no obstante ser las personas, por la edad, diferentes, los años aumentan para uno y otro de la misma manera; por consiguiente, la distancia de 0 á 28 se conserva á cualquier edad y mientras las personas vivan. El caso es muy diferente, enunciado de esta otra manera: Un padre muere á los 56 años: ¿Cuál será la edad del hijo que tiene 28 años menos?

En el 17, la preposición *sobre* da idea de *añadir*; substituída por *de*, el concepto se aclara inmediatamente. El régimen de *sobre* es, sin embargo, más apropiado.

Serie de Lafferrière y Méndez. ⁽¹⁾ — 1—426 es la suma de dos cantidades, 312 es una de ellas ¿cuál es la otra?

2—(Igual al 2 de Royo).

3—De 4836, réstese 2925.

4—Un sujeto pagó 599 pesos sobre una letra de 2000 pesos ¿cuánto debe todavía? (El 17 de Royo).

5—(El 11 de Royo).

6—(El 16 de Royo).

7—¿Cuántos años han pasado desde el descubrimiento de América?

8—(Semejante al 5 de Royo).

9—Si se calcula que la altura de la atmósfera es 96000 varas sobre el nivel del mar; ¿á qué altura quedará ese supuesto límite sobre el monte más alto (10400 varas)?

10—Al efectuar una suma se ha puesto 7 en vez de 5 en las centenas y 9 en vez de 6 en la de los millares. ¿En cuánto está aumentada la suma?

Los demás son ejercicios ó problemas donde se combinan dos ó más operaciones.

Presenta, pues, del punto de vista de la construcción, 8 tipos de enunciados, uno, diferente al de Royo.

Serie de Latzina. ⁽²⁾ — 1—El *Mont Blanc*, la más elevada cumbre de los Alpes, se eleva á la altura de 9760 — 4490 metros. ¿Cuál es la altura?

El 2 y 3 del mismo tipo que 1.

4—La gran pirámide de Jeezeh, á 14 Kms. al Sur de El Cairo, construida según Herodoto, por Cheops, 2170 años antes de Jesús, tiene una altura de 148 metros, siendo uno de los lados de su base cuadrangular de 232 metros, y el perimetro de toda la base de 928 metros. ¿En cuánto supera a) uno de los lados de la base á la altura; b) en cuánto excede el perimetro de la base á la altura?

5—El río Amazonas tiene un longitud de 9457 — 3157 kilómetros. ¿Cuál es la longitud?

El 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 del mismo tipo y enunciado que el 5 tratando ríos diferentes.

13—La gran pirámide de Jeezeh, (también suele decirse de Gizeh) tiene una altura de : $(1424 + 519) - 1011 - (588 + 195) =$ metros. ¿Cuál es la expresión más sencilla de esa altura?

14—Semejante al 8 de Royo.

15—La cuenca del río Marañón (ó Amazonas) es de 5170680 kilómetros cuadrados, y la del río Paraná de 3120510. ¿En cuánto excede la primera á la segunda? (tipo 1 de Royo).

16—El perimetro del actual municipio de la capital federal es de $a - b$ kilómetros. ¿Cuál es?

(1) « Lecciones de Aritmética », 1898. Paraná, p. 41.

(2) IIII Problemas. 1893, p. 51.

- 17—Semejante al anterior.
- 18—¿ Cuándo empezó la guerra de los treinta años, que terminó en 1648 ?
- 19—¿ Qué número debe sumarse con 3152 para que se obtenga 6107 ?
- 20—¿ Qué número debe restarse de a para obtener b ?
- 21—¿ En cuánto es 95700 mayor que 17395 ?
- 22—Del tipo 12 de Royo.
- 23—El precio de compra de un terreno es de 6510 \$ y el de la venta de 5927 pesos, ¿ cuánto es la pérdida ?
- 24—Un año bisiesto tiene 31622 400 segundos; un año común 31536000. ¿ En cuántos segundos difieren estos dos años ? (tipo 8 de Royo).
- 25—Federico el Grande murió en 1786 á la edad de 74 años; ¿ cuándo nació ?
- 26—Del tipo 6 y 7.
- 27—El *Champagui*, la más elevada cumbre de Comechingones, en la provincia de Córdoba, tiene una altura de 8029 -- 5179 -- metros. ¿Cuál es la altura ?
- Del 28 al 33 el mismo tipo que el anterior.
- 34—El planeta *Marte* se mueve en una elipse al rededor del sol que ocupa uno de los focos.
- Quando *Marte* está en los extremos del eje mayor, está á la mayor y menor distancia del sol. La mayor distancia (la del afelio) es de 248 millones de kilómetros; la menor, (la del perihelio) es de 206 millones de Kms. Se pregunta: ¿ en cuántos millones de Kms. es aquella distancia superior á esta ?
- 35—Del tipo anterior.
- 36—Según Bischoff, pesan las materias sólidas del cuerpo humano el 44 %/. ¿ Cuánto pesan las líquidas ?
- 37— La mayor hondura sondeada en el Océano Pacífico es de 8513 m.; la del Océano Atlántico 7086; la del Océano Indico 5523; la del mar Artico 4846 m. y la del mar Antártico 3612 m. ¿ En cuánto excede la mayor hondura del Océano Pacífico á las demás ?
- 38—Siendo la extensión del Brasil de 8301508 Kms. cuadrados y la de la República Argentina de 2894257, se pregunta: ¿ en cuánto excede la superficie de aquel país á la de éste ?
- 39— Como el anterior.
- 40—El asteroide Ceres, el primero de los del numeroso grupo cuyas órbitas ocupan el espacio interplanetario que se extiende entre Marte y Júpiter, fué descubierto en Palermo por Piazzzi, el 1° de Enero de: $7539 - 7345 + 6982 - 5375 =$ ¿Cuál fué el año del descubrimiento ?
- Del 41 al 50, del mismo enunciado que el anterior, excepto el tópico, pues la averiguación del año responde á diversos descubrimientos.

La originalidad de estos ejercicios estriba en la noción geográfica ó cronológica que, resolviéndolos

adquiere el alumno. El fastidio de las operaciones se atenúa por la naturaleza del dato, tendiente á satisfacer curiosidades más ó menos interesantes. El argumento, desde ese punto de vista, es variado. Pero los 50 problemas no ofrecen sino ocho tipos de construcción; en la mayoría, la resta viene directamente indicada.

Serie de J. M. Arechaga. (1) — 1—De una pieza de cinta que mide 28 varas, se han vendido 15 varas. ¿Cuántas varas quedan?

2—La suma de dos números es 756, uno de los sumandos es 306. ¿Cuál es el otro? (Como el 1 de LAFFERRIÈRE y MÉNDEZ).

3—Un comerciante tuvo de ganancia en el año de 1874 la cantidad de 20000 \$, y en el de 1875, 18385 \$. Se desea saber cuál sería la diferencia entre el 1º y el 2º año?

4—Una biblioteca que puede contener 1500 volúmenes, no consta más que de 912, ¿cuántos volúmenes puede recibir todavía?

5—Salió del Paraguay un buque cargado con 576000 naranjas y en la travesía se picaron 566000 que tuvo el capitán que arrojar al agua. ¿Cuántas le quedaron? (tipo 7 de ROYO).

6—Cristóbal Colón tenía 51 años cuando descubrió la América en 1492. ¿En qué año había nacido?

7—Como el 12 de ROYO.

8—Tengo una tabla que tiene 25 pies de largo, á la cual necesito cortar 18 pies de largo; ¿de qué largo quedará?

9—Dos obreros hacen 255 vs. de zanja en 6 días; ¿cuántas varas habrá trabajado el 2º si se sabe que el 1º ha hecho 118 vs.?

10—Es el 12. como el 5 ROYO.

11—Un capitalista retiró del Banco de la Provincia 276450 \$; ¿qué cantidad había reeditado, si se sabe que el capital primitivo era de 200 000 \$?

12—La ciudad de Roma contaba 2535 años en 1882; ¿en qué año fué fundada? (tipo 14 de ROYO).

13—El río de la Plata tiene de longitud 70 leguas y el Uruguay 171; ¿cuántas leguas más tendría que tener el Plata para tener igual longitud que el Uruguay? (tipo 15 de LATZINA).

14—Un tranvía vacío pesa 30 arrobas y lleno de pasajeros 136 arrobas; ¿cuál será el peso de los pasajeros que contiene? (tipo 9 de ROYO).

15—Como el 10 de ROYO.

16—Benito compró 6 caballos á 85 \$ y José María 6 á 97. ¿Quién gastó más?

17—El año pasado compré 750 toneladas de carbón el cual pagué á 17 \$. y este año he comprado la misma cantidad y lo he pagado á 15 \$ tonelada; deseo saber ¿cuál es la economía sobre el año anterior?

(1) « Nuevo Aritmético Argentino », 1901. p. 26.

Esta serie no ofrece sino dos tipos de construcción diferente á los de ROYO y LAFFERRIÈRE, sin presentar todos los de aquéllos.

Serie Lavernhe y Cury. (1) — De \$ 354 que tenía he gastado \$ 189; ¿ Cuánto me queda? (Tipo 12 de ROYO).

2 — El Monte Blanco tiene una altura de 4810 metros y el Aconcagua 6970 metros; ¿ en cuánto sobrepuja al Monte Blanco?

3. — Los ferrocarriles franceses y argentinos, dan un total de 57761 kilómetros. ¿ Cuál será la longitud de los que posee la República Argentina si los de Francia alcanzan á 41568 kilómetros? (Tipo 36 de LATZINA).

4 — Si de 442 metros se saca la altura de la más alta pirámide, es decir, 142 metros, se obtendrá la altura de la torre Eiffel ¿ cuál será ésta?

5 — Tengo que pagar una factura de \$ 374 ¿ qué cantidad desembolsaré si me hacen una rebaja de \$ 29?

6 — ¿ Cuántos años han transcurrido desde que Bartolomé Díaz descubrió el Cabo de Buena Esperanza, en 1486, hasta nuestros días?

7 — ¿ En qué año había nacido Vespucio, sabiendo que cuando murió, en 1513, tenía 62 años?

8 — Al revender un coche en \$ 1946 se han ganado \$ 338, ¿ en qué precio se había comprado?

9 — Un dependiente que ganaba al entrar en una casa \$ 170 mensuales, recibe hoy un sueldo de \$ 185, ¿ cuánto se le ha aumentado?

10 — Un carro venía cargado con 2000 kilogramos de asfalto; se han descargado 850 kgs., ¿ cuántos quedan?

11 — ¿ Qué debe una persona después de haber dado á cuenta \$ 845 sobre una factura de \$ 1787?

12 — ¿ Cuántos años transcurrieron desde la fundación de la catedral en 1580 hasta nuestros días?

13 — Napoleón I nació en 1769 y murió en 1821, ¿ qué edad tenía al morir?

14 — En 1790 la población de los Estados Unidos era de 4000000 de habitantes, habiendo alcanzado, en 1890, la cifra de 62488000 h., dígame cual fué el aumento.

15 — San Martín murió en 1859, á la edad de 72 años, calcúlese el año de su nacimiento.

16 — Una torre tiene 35 metros de altura, ¿ cuántos metros le faltan para alcanzar á 38 metros?

17 — Un barril lleno pesa 180 kilos, vacío 16 kilos, ¿ cuál es el peso del líquido?

18 — ¿ En qué año estábamos hace 40 años?

19 — ¿ Cuándo nació un niño que tiene 14 años?

(1) « Ejercicios y Problemas de Aritmética », 1902, p. 7.

20 — El Río Paraná tiene un curso total de 4500 kms., el l'aguay 2000; ¿qué diferencia existe entre los dos?

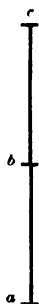
21 — Dos números suman 480, el menor es 227. ¿cuál será el mayor?

22 — ¿Qué número hay que agregar á 2543 para llegar á 11.450?

23 — ¿Cuál es el exceso de 25000 sobre 5701?

La trascripción de estas series, que no presentan sino problemas de una resta, nos muestra la variedad de tipos que para el dominio de la operación no deben pasar en silencio; la comprensión es también una consecuencia del hábito á determinadas formas de lenguaje y de la noción de espacio y tiempo que sugieren en nuestra mente, ciertas ideas. Sin duda, mientras una colección de problemas viene distribuída en capítulos con el título de *Problemas de suma, problemas de substracción, problemas de substracción y suma*, etc., sólo proposiciones simples de una operación, el niño no hace esfuerzos de lógica para descubrir lo que está indicado. Pero, las series que suprimen lo que bien puede ser un defecto, dan, al alumno, por única guía, su propio razonamiento.

La sexta condición es rigurosa para cada especie si se desea dejar en la mente estados psíquicos, imágenes y asociaciones susceptibles de ser rápidamente evocadas por casos análogos (teoría de la memoria). En efecto, la objetivación será siempre confusa, á menudo falsa y con frecuencia tardía sin el concurso de la visión interna. De aquí. pues, que antes de dar al niño enunciados abstractos como este: «A qué altura quedará el supuesto límite de la atmósfera desde el monte más alto si sobre el nivel del mar está á 80 Kms. y el monte más alto tiene 9?» Lo acostumbraremos á la forma, con ejercicios como este: *a)* ¿Qué longitud será la de este puntero parado sobre la mesa si desde el suelo á la punta hay 3 metros y la mesa tiene un metro de altura? presentando las ilustraciones. *b)* Cuál será la longitud de la porción *b c* de la línea *a b*, si *a c*



mede 6 metros y a b , 3? c) Si a es el llano; b el pico de un monte y c el lugar donde está un globo ¿á qué distancia estará el globo del pico b si el monte mide de altura 2 Kilómetros y el globo está del llano á 5 Kilómetros? (dibujando el llano, el monte y el globo, unidos por la línea vertical).

Formada en la mente, por los objetos y las figuras, la imagen de la línea vertical, con sus dos dimensiones conocidas, la imagen despertará nítidamente toda vez que un enunciado abstracto lo exija y entonces el niño objetivará sin esfuerzo lo que aprendió abstrayendo de las cosas y figuras.

La claridad y rapidez con que un enunciado evoca las imágenes ó, en otros términos, la más ó menos facilidad con que puede objetivarse, depende de dos circunstancias pertinentes al lenguaje: cuando, de redacción correcta, no puede ser comprendido sino medianamente, por los datos ó proposiciones implícitas; v. g.: Cinco naranjas cuestan 20 centavos, ¿cuánto valen doce?; cuando los datos explícitos ó implícitos se prestan á varias interpretaciones, por una redacción confusa ó poco cuidada.

Los textos vertidos al español de otro idioma, suelen pecar en este caso, de defectuosos. Los problemas de una combinación, comúnmente expresados en una sentencia simple ó una oración compuesta de dos simples, ó una compleja compuesta de una principal y otra subordinada, no son difusos. La obscuridad

suele notarse en los de múltiples combinaciones que, del punto de vista del lenguaje, exigen, antes, el análisis lógico y la más delicada atención para descubrir las relaciones y descomponerlos en problemas simples. Es difuso el siguiente enunciado: ⁽¹⁾ Con 2000 \$ ¿qué cantidad debo acumular para comprar una obra cuyo importe es de 2300 pesos, dejando 500 pesos? Solo después de varias lecturas y por inducciones de sentido común nos penetramos de su concepto. No fuera así, redactado de esta otra manera: Tengo 2000 pesos; quiero saber cuánto debo añadir á dicha suma para comprar una casa de 2300 pesos y quedarme con 500.

No hay para qué comentar lo defectuosa de una colección que divide los ejercicios y problemas por *especies* de modo que resueltos los de resta en tres ó cuatro lecciones sucesivas, no se vuelve á ellos, sino cinco meses después, con motivo del repaso. La memoria ó el hábito es una consecuencia del ejercicio casi diario, durante meses y años. Por otra parte, dijimos que la vía de integración para resolver un problema de resta, no es la misma para resolver un problema de multiplicación; de modo que una serie, no conserva siquiera las unidades psíquicas trabajadas por otras. No es una novedad para los maestros, el común fenómeno de que los niños olviden á fin de año, lo que sabían al principio, cuando han sido poco previsores á punto de no ejercitar, por la repetición, lo que fué enseñado una vez; no la repetición directa y poco pedagógica de los mismos casos, sino de los mismos conceptos, en problemas de múltiples combinaciones, de modo que la solución (integración general), exija la actividad concurrente de varias unidades psíquicas. La combinación $+$, $-$, $\times$, es un problema compuesto que presenta tres simples de tipo diferente; en particular, ejercita la $+$, la $-$ y la $\times$, lo que significa economía de esfuerzo y tiempo, acerca de la misma en-

(1) F. ROMAY. «Aritmética», p. 26.

señanza. De aquí que no nos cansemos de propiciar, para todos los grados, colecciones semejantes á las que hemos hecho para 5° y 6° grado con los que tantos éxitos hemos alcanzado durante cuatro años. El Director General de Escuelas de la provincia de Buenos Aires doctor BAHÍA, profesor de matemáticas y decano de la Universidad de Buenos Aires, que visitó la escuela y presencié las clases de Aritmética de 6° grado, desde La Plata, en nota oficial ⁽¹⁾ dice: « mis calurosas felicitaciones por el notable éxito de sus clases de Aritmética en sexto grado, el cual me ha causado verdadera sorpresa ». Trascibimos esta apreciación espontánea de una persona doblemente autoridad, por su cargo y sus conocimientos, para que, al hacer afirmaciones de cierta naturaleza, no se nos crea obcecados por el amor propio.

Los 2000 ejercicios y problemas de LAVERNHE Y CURY, colección, aunque mal distribuída, de las más completas para grados primarios, presenta XXXVI series, excepto muy pocos, de problemas á una ó dos combinaciones y tocante á 36 puntos distintos de la Aritmética, sin que unos comprendan á otros ni saque suficiente partido de la geometría, de la física y de las cosas infinitamente pequeñas para hacer de los decimales una aplicación atrayente y llena de recursos. Los números, operaciones y ejercicios juegan dentro de límites, lejos de ser los de la generalización con que se domina la materia.

La serie de recapitulación (p. 19) con 50 problemas, es hermosa y presenta, en cuanto á operaciones, cuarenta especies de enunciados, pobres en números y en conocimientos, pero admirables en construcción, sin que, naturalmente, lleguen á ofrecer todas las combinaciones y permutas posibles con los cuatro signos $+$, $-$, $\times$, $:$, tomados de á dos, de á tres y de á cuatro y repitiendo los signos como en: $- -$,

(1) Nota N° 1625 — 11 de Mayo de 1903.

$\times \times$, $+$: $\times - - \times$, etc. Antes bien, suele repetirse la especie; muy frecuente la combinación de dos y rara vez la de cuatro, en cuyo caso repite la multiplicación, por lo general, tres veces; estos defectos son comunes á cuantas colecciones de problemas se han hecho hasta ahora.

No obstante, la enseñanza no cuestionaría este punto si estas especies, que exigen, cada una, integración diferente, se repitiesen en las series sucesivas ó cada tantas páginas, para conservar, mediante el ejercicio, dicha integración.

La enseñanza del primer grado es de tal naturaleza que el enunciado nunca se dará escrito, sino ocasionalmente, aun aquellos de cantidades que exigen apuntes con la tiza y el lápiz. El 2º grado vuelve otra vez á los problemas de suma, resta, multiplicación y sus combinaciones, pero desde el punto de vista general y abstracto. Entonces, se da al alumno, un libro de ejercicios y problemas y cuaderno para que escriba las soluciones sin otra ayuda que la propia. La serie de suma será como la de LAVERNE y CURY y no como la de PERKINS ó FERREIRA, donde no hay, un trabajo de discriminación que el niño pueda hacer en su casa, estudiando los problemas de un libro ó de un cuaderno de deberes. El carácter de la enseñanza en 1º es mental y las aplicaciones aritméticas nunca de tal naturaleza que requieran más de un minuto en cada caso. La clase de ejercicios y problemas exige del maestro la preparación de 12 ó 15 enunciados para recapitular conocimientos acerca de las operaciones y comprender la forma gramatical. Explicando las condiciones á que se ajustan, hemos ejemplificado cada especie y tipo.

Geometría y Física. — Toda asignatura puede evocarse en las lecciones de Aritmética; pero excepto la Geometría y la Física, no son concurrentes.

La primera, tomada del punto de vista numérico, combina con la Aritmética, las longitudes de la recta, pocas veces de la curva, á no ser la circunferencia; las superficies de los polígonos, círculo y laterales de los

sólidos; los volúmenes de los cuerpos, sobre todo, de los regulares y de éstos, el paralelepípedo: los problemas acerca de líneas, superficies, volúmenes, capacidad y peso, suelen, desde 4º grado, introducir un gran elemento de relación, el peso específico que permite de cualquier cuerpo, sea cual fuere su forma, averiguar cuánto en él es métrico. El objeto de la Geometría numérica, no es otro; determinar lo inmedible de las cosas, por lo medible. Al alumno damos, en vez de enunciados, objetos para que mida líneas, superficies y volúmenes desconocidos, por lo conocido empleando la fórmula como un factor simple del análisis; sobre ellos, por otra parte, el sentido común rectifica mejor. El uso de decimales á muchas cifras, tiene en estos casos, una explicación satisfactoria; π , vale forzosamente 3,1415, la capacidad de un cilindro que mide 3 ms. de diámetro por 4 de altura, es forzosamente $3,1415 \times 1.5^2 \times 4 \times 1000$ litros.

La Física, concurre de la misma manera: por sus leyes y sus fórmulas, la ley enunciado casi siempre, de la fórmula que la sintetiza; debe el alumno, familiarizarse con ellas tanto como con las de Geometría, para acostumbrarse de este modo, al lenguaje de una ciencia, hoy mal estudiada del punto de vista del cálculo.

La demostración de las leyes es, en efecto, experimental; pero se usa la fórmula como elemento de problemas, cuyo análisis, eminentemente matemático, ha de responder á la cuestión que nos hemos propuesto. A nuestra vista las colecciones de P. BANET y RIVET ⁽¹⁾, de MUÑOZ DEL CASTILLO ⁽²⁾, de GANOT, presentan problemas numéricos, algunos gráficos y muy pocos de laboratorio.

El cálculo debe extenderse á todas las partes de la física mediante enunciados cuyo análisis evoque sus leyes, fórmulas y conocimientos puestos á contribución para hallar el resultado. Verbi gracia:

(1) BANET Y RIVET. «Problèmes de Physique et de Chimie». Paris, 1895, 700 problemas.

(2) DEL CASTILLO. «Ejercicios Prácticos de Física». Madrid, 1901, 200 problemas.

Gravedad.—1.—El peso relativo de un cuerpo es, en París, de 8 Kgs. Se pregunta su peso absoluto en el ecuador, expresado en Kgs. de París. En París $g = 9.81$ m; en el ecuador 9.78 m.

2.—Un fardero con su hijo, se proponen llevar un peso de 140 Kilogramos colgado de un palo y saben que el chico sólo puede con 32 Kgs. ¿Dónde debe suspenderse el peso?

3.—Un cuerpo ha recorrido 800 ms. en 7 segundos, con movimiento uniformemente acelerado. Valor de la aceleración.

4.—Un cuerpo pesa 2 Kgs. en la superficie de la tierra, ¿Cuánto pesaría si el planeta duplicase su diámetro y con él su masa?

5.—¿Cuál será el tiempo que ha durado una caída de 1300 ms., en Buenos Aires?

6.—En una balanza de brazos desiguales, se coloca una cantidad de azúcar sucesivamente en uno y otro platillo. En el primero pesa 81 Kgs., en el segundo pesa 9 Kgs. ¿Cuál es el peso del azúcar?

7.—¿Qué longitud deberá tener un péndulo, en París, para que emplee 3 segundos en cada oscilación?

8.—Al nivel del mar, un péndulo que bate los segundos, tiene 0.991033 ms. de largo; á 10.000 metros de altura, ¿qué longitud debería tener para batir los mismos segundos?

Hidrostática.—9.—Dado un cuerpo *A*, que pesa en el aire, 7 gramos, en el agua 5 y en otro líquido *B*, 6; determinar la densidad del cuerpo *A* y del líquido *B*.

10.—Una taza de forma cónica, que tiene 6 centímetros de diámetro en su parte más ancha, ha sido llenada con mercurio, agua y aceite de tal manera que cada líquido tiene el mismo espesor, de cinco centímetros; calcular el peso de cada substancia.

D mercurio 13.59. *D* aceite 0.915.

11.—¿Cuál será la presión sobre el fondo de un tanque cilíndrico de dos metros de altura y de dos de radio, lleno de mercurio?

12.—Se desea saber si será de oro una bolita amarilla de metal de 0.03 cms. de radio, que pesa, dentro del agua, 1819.26 grs.—*D* = 15.

13.—¿Qué densidad tendrá una esfera de 18,84955 cms. de circunferencia que en el agua pesa 1819.26 gramos?

14.—Un tubo cilíndrico de vidrio pesa, vacío 90 gramos; con una columna de mercurio de 9 cms., 150 gramos. Se desea saber el diámetro interior del tubo.

15.—Una columna que pesa un gramo, ocupa 150 mms. en un tubo capilar: ¿Cuál es el diámetro?

16.—Un pedazo de cuarzo tiene en su interior cierta cantidad de oro. El trozo pesa 2 Kgs. Metido en el agua pierde 450 grs. ¿Cuánto oro hay?

Gases.—17.—La densidad de un gas es de *D* á la presión barométrica *H*. ¿Cuál será la densidad *D'* bajo la presión de 0.76?

18.—¿Cuántas atmósferas de presión se necesitan para reducir 100 ms. cúbicos de oxígeno al contenido de un barril cuyo diámetro mayor es de 1.32 y cuyo diámetro menor es de 1 m.; la distancia entre las dos bases es de 2 mts.

Calor.—19.—Una vejiga llena de aire á 30° y 760 mm. de pre-

sión, ocupa un volumen de 4 litros. ¿Cuál será este volumen sumergido en un lago de 4° y á 100 ms de profundidad?

20.—Una marmita de Papin contiene 2 Kgs. de agua á 150°; abierta la válvula, se escapa vapor y la temperatura baja á 98°. ¿Cuánto vapor ha salido?

21.—En 25.45 Kgs. de agua á 12° 5, se introducen 6.17 Kgs. de un cuerpo á la temperatura de 80°; la mezcla llega á 14° 17. Se pregunta el calor específico de este cuerpo.

22.—Un termómetro centígrado marca 35° ¿Qué deberá marcar en el mismo momento, uno de Reaumur, uno de Fahrenheit?

23.—¿Qué cantidad de agua contendrá una pieza de $4 \times 4 \times 6$ mts. á la temperatura de 27°, marcando el higrómetro 35 grados?

24.—Un cilindro que resiste una presión de 8 atmósferas á 38 grados se desea saber cuánto deberá ser la temperatura para que el mismo cilindro resista 10 atmósferas.

Acústica.—25.—Un tubo abierto da el *re*; otro da el *sol*, otro da el *fa*, juntándolos por sus extremos y haciendo un solo tubo, se desea saber qué nota darán. El diámetro es igual.

26.—Dos cuerdas de materias diferentes, del mismo largo y de igual sección tienen la densidad de d y d' . Tendidas cada una de ellas por un peso igual á su propio peso, se pregunta cuál es la relación de los sonidos que pueden dar.

27.—¿Qué peso deberá tender á una cuerda de acero de 75 cms. de largo por 0.002 de diámetro para que dé el *la* (870 vibraciones).

28.—Una flauta de 0.75 ms. da el *la*. ¿Qué longitud deberá tener otra en idénticas condiciones, para que dé el *Re grave*?

29.—El sonido de un tiro de cañón ha empleado 15" para transmitirse de un lugar á otro á la temperatura de 22°. Se pregunta la distancia entre estos dos lugares. (233 v. del sonido.)

Óptica.—30.—Un punto luminoso situado en el centro de una esfera de 1.50 m. de radio, alumbra interiormente á cada unidad de superficie con una intensidad de 100. ¿Cuál será la intensidad x , si la esfera tuviese 5 m. de radio?

Electricidad.—31.—¿Cuántos watts consume una lámpara de 2 amperios y 34 voltios en 6 horas?

32.—Se tienen dos superficies 7 y 13 cargadas uniforme y respectivamente con las cantidades de electricidad 4 y 19. ¿Cuál es la densidad eléctrica en cada una de ellas y cuál la relación entre la mayor y la menor?

Problemas prácticos.—La palabra *práctico* es elástica. Todos los problemas tienen por objeto la cultura mental del individuo y son prácticos si por prácticos se entiende formar la aptitud de resolverlos. Pero ese calificativo á un concepto ajeno al número de combinaciones del problema, quizá distinga aquellos que anoticen datos acerca de la industria, comercio, geo-

grafía, historia del país, de aquellos apreciados como trabajo de lógica.

Dentro de una combinación que exija un esfuerzo de análisis *n*, debe preferirse el enunciado cuyos datos precisen un tema de provechosos conocimientos para el alumno: que tenga al alumno al corriente de lo que produce, compra y vende el país; de lo que elabora, gasta y explota una fábrica; de lo que vale la construcción y el trabajo de las máquinas; expresado en cifras, no más ó menos aproximadas, sino exactas, para lo que fuente de valor para consulta, es la parte comercial de los grandes diarios, y las conversaciones con los agricultores, consignatarios, comisionistas, directores de fábrica, banqueros y personas ocupadas en los trabajos de la localidad. Abren un vasto horizonte, ponen á prueba el talento, son eminentemente prácticos, problemas como estos: I. Dispongo de 2000 \$; ¿cuánto, en un mes, podría ganar, dedicándolos á la compra de pasto en Mercedes, para venderlo en Buenos Aires? II. ¿Cuánto cuesta un viaje de Mercedes á Montevideo para volver á los 15 días? III. ¿Qué necesito para trabajar 100 hectáreas de tierra, qué gastos de instalación y qué beneficio pueden darme arrendadas, durante tres años? IV. ¿Con qué siembras y de qué manera podrían beneficiarse 35 hectáreas de campo flor situadas en Suipacha de modo que, deducidos los gastos, dejaran una ganancia de 2500 \$ al año?

Damos, como ejemplo, una solución hecha por un alumno de 6º grado poniendo á contribución un vasto bagaje mental de conocimientos no siempre exactos, pero especímenes halagadores del espíritu de investigación.

RAZONAMIENTO

1 hectárea de terreno produce 20 bolsas de trigo, 35 hectáreas producirán 35 veces más ó sea $35 \times 20 = 700$ bolsas; sé que una bolsa tiene 70 kilos, 700 bolsas tendrán tantos kilos como sea $700 \times 70 = 49000$ kilos; sé que una bolsa ó 70 kilos valen 8 \$ del trigo

bueno ; 1 kilo valdrá 70 veces menos ó sea $\frac{8}{70}$: en 49000 kilos ganará el chacarero

$$\frac{49000 \times 8}{70} = 5600 \text{ \$}.$$

vendido á un consignatario, dando éste las bolsas y mandándole el carro para traer dichas bolsas á la estación.

La siembra dura seis meses, pero, antes de sembrar, hay que arar el campo durante dos meses y entonces el tiempo desocupado es 4 meses ; el hombre cría 32 pares de gallinas ó 64 gallinas de buena clase y las vende á 2 \$ la yunta : saca una ganancia de 128 \$ de las gallinas : los huevos los gasta para su familia.

Este hombre tiene algunos gastos ; no tiene arado, y lo tiene que comprar : como es pobre, compra uno regular que le cuesta 40 \$; tiene que comprar bueyes que cuestan la yunta 100 \$: una vez hecha la parva de trigo, necesitó lona á 350 \$: la trilladora la alquila y le cobra 1.80 por 100 kilos para 1 kilo le cobrarán 100 veces menos ó sea $\frac{1.80}{100}$ en 49000 kilos que es lo que tiene, le cobrarán

$$\frac{1.80 \times 49000}{100} = 882 \text{ \$} :$$

las gallinas le comen por día 20 kilos, pues él las quiere alimentar bien para sacar ganancia y compra maiz á 3.80 los 100 kilos y 1 kilo le cobrarán $\frac{3.80}{100}$ y en cuatro meses las gallinas consumen 1200 kilos ; si 3.80 valen 100 kilos 1200

$$\frac{1200 \times 3.80}{100} = 45.60 \text{ \$} :$$

luego, el hombre tiene que hacer un galpón para guardar el trigo hasta que el consignatario lo mande buscar ; 800 \$ le cuesta ; luego, para saber lo que el hombre gana sacando todos los gastos, la diferencia de la ganancia y de los gastos, es 3639.60 \$; ha sacado este producto porque dicho hombre no ha comprado la semilla pues el año anterior la cosecha fué muy buena y él guardó esta semilla para sembrarla al año siguiente. — *María G. Ahumada.*

Pero poco debe fiarse en la imaginación creadora de los alumnos, que elimina, generalmente, aquellas combinaciones fuera de sus hábitos analíticos ; entonces,

el enunciado precisa datos, y de su análisis, el alumno adquiere conocimientos útiles acerca de la industria, del comercio y de las cosas, como en estos ejemplos :

I. Los $\frac{3}{4}$ del vino de una pipa han sido puestos en 12 botellas de 0.80 ls., ¿cuál es el contenido de la pipa y cuántas botellas de 0.75 ls. se necesitan para envasar el resto ?

II. Un pan de manteca se vende á 30 cts. y pesa 150 gramos. Se desea saber qué ganancia cada mes obtiene un lechero de sus 12 vacas, sabiendo que saca de cada una 12 litros de leche al día ; que de cada litro obtiene 80 gramos de manteca. Que gasta en alimentación de las 12 vacas 4 \$ al día y en peón para cuidarlas 1.80 \$?

III. Un negociante vende á otro cierta cantidad de azúcar á 45 \$ los 100 Kgs. Debe recibir, en pago, 522 Kgs. de café y 228.75 \$ en dinero ; pero en el momento de hacer la operación, no puede sino dar $\frac{3}{5}$ de la cantidad de azúcar que había vendido y recibe en pago 525 Kgs de café y 99.15 \$. ¿Cuántos Kgs. de azúcar debía el 1^{er} negociante suministrar el 2^o y cuál es el precio del Kg. de café ?

Lección modelo de aritmética acerca de conocimientos útiles al alumno (para 5^o ó 6^o grado).

Tema. — Ejercicios y problemas comerciales de bolsa, productos y ganados, navegación y mercados de acuerdo con los valores en plaza, obtenidos de *La Nación* del 28 de Octubre de 1903.

Desarrollo. — **A.** — **M.** — Como lo indicara á Vds. en la lección de ayer, vamos á combinar enunciados y resolver problemas, con los datos que nos suministre la sección comercial de los grandes diarios de la mañana ; cada uno de Vds. la ha leído, ha de saber explicar la mayor parte de los términos, puesto que no es la primera vez que nos ocupamos del punto. Aquí dice *metálico*. ¿Qué indica este título ?

A. — Indica una serie de operaciones de bolsa bancarias ó de conversión, en las que los particulares compran monedas de oro con papel moneda ;

porque hay mucha gente, los dueños de casas introductoras, que compran en Inglaterra é Italia, mercaderías que no hay aquí y para pagarlas necesitan esterlinas, onzas, marengos y no papel que vale solo en la República Argentina.

M. — ¿ En qué parte suele comprarse el oro ?

A. — Más comunmente, en la Bolsa ó en la Caja de Conversión, que lo da á cambio de papel.

M. — Tomen sus cuadernos de ejercicios. Dice aquí : durante la 1ª rueda se efectuó una operación en oro por 2000 \$ á 227.27 al contado ; ahora, pregunto yo : ¿ cuántos pesos papel debió entregar el comprador ?

A. — (*Los alumnos resuelven el problema y se indica á uno para que lo razone*).

M. — ¿ Qué stock en oro existiría ayer en la Caja de Conversión si el saldo era, á la mañana de 37418209.93\$; salieron 9253.56 \$ y entraron 970.37 \$?

A. — (*Una parte de la clase resuelve este problema, mientras otra, atiende otro enunciado*).

M. — Según los datos fidedignos de este diario, los pesos ^{m/n} que circulan en el país, ascienden á 378290819 \$; ¿ Qué entrada, en metálico, necesitaría la Caja de Conversión para substituir todo ese papel por oro, teniendo en cuenta el encaje de hoy ?

Als. — (*Los alumnos dan el resultado y explican*).

M. — Ahora, apunten los enunciados, con los que formaremos una serie que prepararán Vds. para ser tratada en la lección de mañana. ¿ Qué significa la palabra *títulos* en la sección comercial ?

A. — (*El alumno explica*).

M. — ¿ Cómo se hizo el empréstito popular de 1898 y de qué valor eran las acciones ?

A. — (*Explica lo que se pregunta*).

M. — Apunten este problema : Un individuo compró, dos años hace, 100 acciones de 100 \$ cada una á 92.30 ; ayer las vendió el contado á 96 ; cobró semestralmente un interés de 7 % anual. ¿Cuál fué la ganancia total sobre el dinero empleado ?

M. — Los 100 Kgs. de maíz del Río de la Plata, se pagaron ayer en Amberes á 10.75 francos : se quiere

saber el exceso sobre el precio de compra en Mercedes, sabiendo que el chacarero le vendió á 2.80 \$ la bolsa de 80 Kgs.

M. — ¿ Cuáles son las materias primas que exporta en más abundancia la República Argentina ?

A. — Según la sección comercial de los diarios que Vd. nos ha indicado, exporta maíz, lino y trigo para Liverpool, Amberes, Hamburgo ; lanas para el Havre. Pero deben entenderse, estas plazas, como mercados principales. Porque en *navegación*, hemos leído vapores italianos y españoles cargando las mismas substancias para otros puertos.

M. — ¿ Qué es el Mercado Central y dónde está situado ?

A. — (*Contesta á la pregunta*).

M. — Escriban este enunciado : Desde el 1º de Julio entraron al Mercado Central 6372594 Kgs. de lana peinada ¿ qué cifra hay á favor de este año, si el año pasado, en igual período, sólo entraron 4372359 Kgs., pero vendiéndose á 8.80 los 10 Kgs. y este año á 8.60 ?

M. — Este otro : En calle Méjico 3445 se vendió una propiedad de 8.66 ms. por 34.60, en 5600 \$ ¿ á qué precio se vendió el metro cuadrado ?

B. — *M.* — ¿ Qué datos exactos puede suministrar-nos la sección comercial ?

A. — (*Contesta á la pregunta*).

M. — Un agricultor ¿ qué conocimientos puede obtener de interés, acerca de la venta de sus productos ?

A. — (*Contesta*).

M. — En la sección *navegación*, los diarios nos hablan del puerto de San Fernando. San Fernando no es un puerto de entrada, sino de salida, de productos nacionales y algunos paraguayos. De consiguiente, nada tiene que ver con la importación europea. Su principal comercio es el mimbre, la leña, la madera y la fruta, que producen en extraordinaria abundancia las islas del Delta: poco significaría tanta producción si San Fernando no estuviese á 25 Kms. de Buenos Aires, á 25 Kms. de un millón de habitantes que elaboran y consumen, lo que la cuarta parte de la población de

la República. De aquí que sus entradas se prestan á un comercio activísimo y lo coloque entre los principales puertos fluviales. Leamos el movimiento de ayer : 23 embarcaciones procedentes de las islas y cargadas con los siguientes productos: 240 carradas astillas de sauce; 460 mazos junco; 1650 Kgs. mimbre amarillo pelado; 190 mazos paja; 1200 ms. álamo; 1280 ms. sauce; 3600 Kgs. palo amarillo. San Fernando, es, pues, un mercado y una plaza comercial para esta clase de artículos. Sus precios sirven de tipo á los precios de substancias similares, producidas en otros puntos, por la sencilla razón de que puede satisfacer cualquier pedido, es el punto de producción más próximo á Buenos Aires que es, en reducido espacio, la que más consume. De modo que si Mercedes quisiera negociar con Buenos Aires en astillas y sauce, el productor necesitaría, por lo menos, vender al mismo precio que en San Fernando, menos la diferencia del flete.

Deberes. — Además de los problemas cuyos enunciados han escrito, Vds. buscan, en la misma sección, datos acerca de los Bancos.

La multiplicación y la división. — La multiplicación y división de enteros, graba en el niño, la idea errónea de que el cociente es siempre una cantidad menor que el dividendo y que el producto, es siempre una cantidad mayor que los factores del producto. Está creencia, legítima, mientras la enseñanza se particulariza á los enteros, se vuelve perturbadora del razonamiento, en fracciones comunes y decimales concretos. Así, es necesario una demostración experimental para convencerle de que la operación que da $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de una cosa, es la de multiplicar; que el volumen de 500 Kgs. de agua, si fuera de aire pesaría 0,0013 veces 500 y no $500 : 0,0013$. Esta idea errónea de la multiplicación y división, imputable al maestro, se debe á una falsa asociación de las denominaciones ó á que no se inculca el verdadero significado de las operaciones. El carácter del cociente es abstracto é independiente de la especie de las canti-

dades que se dividen. Expresa siempre el *número de veces que una cantidad contiene á otra*; se comprenderá, entonces, cómo una fracción de 1 dividida por una fracción de 1 pueda dar enteros en el cociente; cómo $\frac{1}{5} : \frac{1}{5}$ dé 1. Si m cosas valen a , una vale $\frac{a}{m}$ \$: este cociente, no obstante la denominación del dividendo, es un término de este problema: Si una casa vale $\frac{a}{m}$ \$. ¿Cuántas podrán comprarse con a \$?: veces que a contenga á $\frac{a}{m}$ y depende de esta idea intuitiva de proporcionalidad: una cosa está contenida m veces en m cosas; el precio de m cosas está contenido m veces en el precio de m cosas ó expresa las veces que el precio de m cosas puede repartirse entre m cosas (principios de la división $a \$: b \$ = m \text{ veces una cosa}$; $a \$ = m \times b \$$; $a \$$ dividido por m cosas igual $b \$$.) De aquí resulta que la denominación fundamental de un cociente, es *veces* y la de los términos que se dividen, siempre de la misma especie; dividimos a cms. entre b cms. y no a cms. entre b dms.; a árboles entre b árboles y no a árboles entre b filas.

0.01×0.002 es, en verdad, hacer 0,01 tantas veces mayor como unidades hay en 0.02; pero 0.02, representa una operación, dos ideas sintetizadas en una, 2, y 2 dividido entre 100. De modo que 0.01×0.02 se descompone en 0.01 por 2, ó hallar un número dos veces mayor; y $0.02 : 100$ ó el número de veces que 0.02 contiene á 100, porque al multiplicar 0.01 por 2, hemos hecho á 0.01 cien veces mayor de lo que debía ser. Sin llevar más lejos esta disertación, conviene fundamentalmente á la práctica, que el niño comprenda por medios intuitivos el significado de la división y la multiplicación fraccionaria. Si el aire fuese 13 veces más pesado que el agua, el aire que ocupase el volumen de 500 Kgs. de agua pesaría 500×13 Kgs.; pero al darle 13 le hemos dado un peso 10000 veces mayor del verdadero; luego, el verdadero de 500 dms. es $\frac{500 \times 13}{10000}$ Kgs. ó 500×0.0013 Kgs.

Hemos observado la frecuencia con que los niños suman ó restan soldados y batallones ; multiplican ó dividen medidas de longitud por medidas de peso : metros por centímetros. Todo esto, resultado de ejercicios deficientes, no produce sino las más horribles confusiones de las que el niño, no se desenrieda sino tarde, con detrimento del aprendizaje, de la parte más práctica y fundamental de la matemática : la medida de las cosas. En la distribución del tiempo, hemos dedicado lecciones especiales á la denominación y distribución de especie en homogénea y heterogénea. No es para aprender á no confundir un metro con un decímetro ; un soldado con un batallón ; un árbol con un cuaderno, sino para grabar á fuego este principio : que solo se suman cantidades concretas de la misma denominación ; que cuando las cantidades concretas son de la misma especie, sólo pueden dividirse si tienen la misma denominación, en caso contrario, deben reducirse ; si la reducción es imposible la operación es imposible. Que para determinar la superficie ó volumen, sólo pueden multiplicarse longitudes de la misma denominación. Conviene que el hábito se forme dictando siempre, aun en la operación más elemental, cantidades concretas, nunca abstractas ; dense las veces que 35 gallinas estén contenidas en 1430 gallinas y no, divídase 1430 entre 35.

Sistema métrico decimal. — Las escuelas no ejercitan con la frecuencia necesaria esta parte, no solo la más interesante de la aritmética sino la más útil por las vastas aplicaciones á que se presta, combinada con la geometría y la física. Por otra parte, su misma simplicidad la vuelve difícil. Un niño no comete tantos errores operando con medidas antiguas como operando con denominaciones métricas decimales. Los maestros, á veces, con esa habitual despreocupación de considerar á los conocimientos de la misma importancia y de la misma dificultad, por el hecho de juntarse en un programa, dedican apocando todo lo posible los casos, uno ó dos meses al estudio de las medidas ; creen sal-

vado el compromiso de la enseñanza desde que recorrieron uno por uno los puntos del sistema métrico y libres desde ese momento, de no volver sobre él; de modo que en 5° y 6°, se habla accidentalmente de metros cúbicos, de Decágramos, de centilitros y el sistema métrico, hacia el que, el niño, no pudo formar juicio utilitarista, matemático y estético, no vuelve á preocupar hasta que un nuevo programa llama sobre él la atención. Así se explica que en 2° y 3° año hayamos tenido que abandonar el álgebra por dos ó tres meses, porque el curso no sabía reducciones, confundía las especies, combinaba de la manera más desatinada las medidas de volumen, peso y capacidad.

Los textos contribuyen con injustificable imprevisión á estas prácticas poco generalizadoras y evocativas, presentando incompleto el único medio de recapitularlas, las series que no son sino áridos elementos de fijación.

Dentro del sistema métrico, caben del primero al último, los capítulos de la aritmética. No hay más razón que la de un olvido pecaminoso, el de que no se hagan en cada lección ejercicios de este parágrafo tan importante en las diarias relaciones de nuestra vida. Ningún sacrificio cuesta introducir en un problema, como elemento de análisis, una denominación métrica que obligue á reducir medidas de capacidad, de peso, de superficie ó de volumen. Se trata de una ó dos combinaciones más. Aseguramos que ninguna página de la asignatura es más confusa y debe ser más evocada, del punto de vista de la generalización, para que el niño logre formar, rápidamente, imágenes claras para no concluir, lo que á menudo sucede, en disparates sin nombre; aconsejamos como una profilaxis salvadora estas prácticas:

1° Ejercitar al 3°, 4°, 5° y 6° Grado, dos veces por semana, en problemas métricos que exijan esfuerzos de generalización.

2° Ser intransigente en el empleo exacto de las denominaciones.

3° Evitar en lo posible el manejo de grandes deci-

males, usando denominaciones pequeñas. Así, en lugar de 0.000304 ms.³, escribir 304 cms.³

Enunciados concebidos por el alumno. — Aparte de las observaciones que hicimos acerca de la imaginación hemos constatado torpeza para crear problemas típicos. En las pruebas se han dado combinaciones incoherentes ó derivadas, excepcionalmente, casos que sobrepujasen en originalidad y belleza á los que acostumbra á resolver; no propiciamos las teorías de aquellos pedagogos tolstoyistas, que pretenden, en este asunto, que la lección se concrete á los casos que el niño busca ó concibe sin someter sus investigaciones á un orden que, graduando las dificultades, conduzca rápidamente á las atrayentes generalizaciones de un mundo que nunca penetraría sin la inmediata dirección del maestro; sus enunciados corresponderán á análisis habituales. Pero, como ejercicio de fijación y evocativo, es importantísimo; poniendo á prueba su aptitud para asociar los elementos, se habitúa á comparar antes de la combinación, para no escribir contrasentidos.

Para evitar copias, divagaciones y proporcionar un punto de apoyo, conviene que nunca se pida el trabajo de esta manera: *para mañana traigan un problema inventado por Vds., de suma; ó de suma y resta; ó acerca de la multiplicación de quebrados; ó de densidad*; debe indicarse el objeto que servirá de partida para el problema, mostrando, por vía de ejemplo los enunciados á que da origen uno, presentado por él, de acuerdo con la capacidad del grado.

Relacionado con la instrucción que acaba de darse, el maestro dictará expresiones como estas:

$$1^{\text{a}} \quad 7 + 8 + 9;$$

$$2^{\text{a}} \quad 429 \times 3 - 258 \times 2;$$

$$3^{\text{a}} \quad \frac{14}{14} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right);$$

$$4^{\text{a}} \quad \frac{3.14 \times 4 \times 8}{3};$$

$$5^a \quad \frac{4}{3} \frac{\pi R^3}{3};$$

$$6^a \quad \frac{65 \div 34 + \sqrt{65 \times 3}}{3}$$

etc., etc., para que inventen los enunciados origen de tales soluciones.

Serán recibidos, generalmente, en lecciones que no traten otros puntos; el maestro hace leer diez ó doce; se habrá fijado en los dos mejores y en los dos peores; unos y otros, se analizan en el pizarrón, con las observaciones del caso, especificando los defectos y bondades según detalles que los ponga de relieve.

Ejemplo—Redactar un enunciado acerca de dos cajones conteniendo piezas de dos géneros diferentes, cuyo análisis dé la siguiente expresión:

$$\frac{601.94 \$ \left(\frac{615.24 \$ - 601.94 \$}{208.4 \text{ ms.} - 31.04 \times 5 \text{ m.}} \right) \times 155.2}{\$ 38.05 \times 8}$$

Enunciado—Dos cajones encierran cada uno, 8 piezas de paño de 38.05 ms. cada una; el 1° contiene, además, 5 piezas de bramante de 31.04 ms. cada una; el 2° 7 piezas que suman 208.40 ms.

Sabiendo que el primer cajón de mercadería vale 601.94 y el 2° 615.24 \$, encontrar el precio del metro de paño y del metro de bramante.

En un caso, los alumnos de 5° grado presentaron á la maestra esta bellísima cuestión:

¿Se puede hallar el volumen de los poliedros regulares conociendo un lado? Se les dijo que sí; quisieron saber cómo, pero la explicación era imposible para ellos.

En primer grado, es un excelente ejercicio de generalización exigir enunciados acerca de objetos ó láminas que representan cosas, grupo de personas ó paisajes. Y viceversa, exigir la objetivación de números, sumas ó diferencias. Así la expresión $4 + 4 + 2$ se representaría dibujando dos coches de 4 ruedas y uno de

2; ó bien tres grupos de cajones, uno de 4, otro de 4 y otro de 2; ó bien un rosal con tres gajos y 4 flores en uno, 4 en otro y 2 en otro.

El lenguaje matemático.—*La escritura.*—Si bien la sintaxis de las cláusulas para expresar cualquier especie de ideas no varía, hay un tecnicismo preciso á la vez que diferencial para cada ciencia al que, el individuo que la estudia, debe habituarse.

La perfección de la matemática, de este punto de vista, es prodigioso: ninguna asignatura ofrece un lenguaje más sencillo, más universal y más sintético. Comprende tres partes: expresión oral, expresión escrita y lectura, formación de otros tantos hábitos en el alumno. El lenguaje simbólico, se adquiere con tanta más facilidad y tanto más contribuye á la formación de las ideas, cuanto menos signos emplea, mayor significado tengan y más afinidad haya entre ellos, propósito que realiza la ciencia que nos ocupa, pues, ninguna expresa tanto con un reducido número de combinaciones, gracias á su forma de asociación eminentemente evocativa, *la contigüidad*; una idea es siempre la inmediata consecuencia de otra próxima ó la síntesis (fusión) de otras en cantidad fija, que el espíritu halla inmediatamente sin entregarse á penosos esfuerzos de comprobación.

Así, $(a+b)^2$ nos recuerda inmediatamente la suma de tres términos; el producto que expresa el segundo; la substitución de las letras por cualquier valor que demos á a y á b ; la posibilidad de simplificar, muchas veces, una potencia transformándola en una suma; la multiplicación de un número por sí mismo, etc., etc.

La lógica matemática, ⁽¹⁾ estudia el razonamiento propio de las ciencias deductivas y los símbolos para expresar en una fórmula sus leyes. Mientras los términos del lenguaje común asumen, con frecuencia, diverso valor y significado, según el lugar que ocupen en el período, causa de las numerosas excepciones á

(1) C. BURALI FORTI. « Lógica Matemática ». Prefazione.

que están sujetas las reglas gramaticales, los símbolos de la lógica matemática conservan el mismo significado siempre, sin ser jamás susceptibles de excepción; la verdad se afirma de un modo absoluto. Además, mientras los términos del lenguaje común ofrecen combinaciones propias de la sintaxis estructural de cada idioma, los símbolos de esta ciencia, constituyen un sistema de escritura independiente de lo que podríamos llamar veleidades y coqueterías de la lengua, estrechamente ligado al elemento estético de la forma cuya vida es de novedad.

Los méritos corresponden incontestablemente á LEIBNITZ que por primera vez enunció, tal como el título de la obra lo indica, ⁽¹⁾ la propiedad asociativa y conmutativa del producto lógico y el primero que concibió el grandioso proyecto de crear una escritura universal, mediante la que, cualquier idea (sintética) pudiera expresarse por ideas simples representadas mediante un signo para cada una, lo que importaba la descomposición como base, del problema, de trascendencia en nuestros análisis, donde los enunciados complejos son innumerables y los simples limitados.

La fórmula $\frac{4 \pi R^3}{3}$ es una expresión compuesta de muchas palabras, el teorema acerca del volumen de la esfera: π , relación entre la circunferencia máxima de la esfera y su diámetro; R , radio de la esfera; R^3 , radio de la esfera elevado al cubo; πR^3 , producto de una relación y tres dimensiones; $\frac{4}{3}$, multiplicación por 4 y división por 3 de ese mismo producto. Autores hay (BOOLE, ⁽²⁾ SCHÖDER, ⁽³⁾ PEANO ⁽⁴⁾), que han pretendido en punto á escritura, llegar con la representación uniliteral, hasta suprimir por completo el uso de las palabras, como por ejemplo: *el producto de tres*

(1) «Dissertatio de arte combinatoria», 1666.

(2) «On investigation of the laws of thought», 1854.

(3) «Algebra der Logik», 1890.

(4) «Arithmetices principia, nova methodo exposita», 1889.

números enteros consecutivos es un múltiplo de 6. FORTI lo expresa así:

$$x \in N. \text{ } \mathfrak{S}. x(x+1)(x+2) \in N6$$

donde x representa un número entero; ϵ , *es un*; N , número entero positivo; $\mathfrak{S}$, *se dice*; $x(x+1)(x+2)$, los tres números consecutivos, etc.

Sin entrar en mayores detalles, de todo esto se deduce la necesidad de acostumbrar al niño al lenguaje matemático, preciso, sobre todo, tocante á escritura; si nada hay que decir acerca del uso de las cifras y símbolos de operación, mucho hay, en cambio, que observar acerca del descuido con que se manejan los símbolos de relación, las abreviaciones y se procede á la lectura de las cantidades.

Tocante á números y operaciones, los maestros han ganado, por fin, la batalla; tocante á expresiones complejas, fórmulas y denominaciones, las deficiencias abundan tanto, que en la mayor parte de los casos sólo se reconoce un lenguaje fragmentario, sin propiedad y alagunado de elipsis.

Las abreviaciones, tan importantes como los números, suelen usarse sin criterio alguno, llegándose á lastimosas confusiones por la inexactitud con que se escribe, interpretándose los de la misma manera. Las bases de un cono se representan por S y S ; el perímetro, á veces, por P , á veces por $\bar{P}$, á veces por Per ; Kilómetro por $k.$, por $Kl.$, por $kmt.$; lado por l , por la ; suma por su , producto por $Pr.$; centímetros cúbicos por $cent. cbs.$; densidad por $Den.$; hombre, hora, hondo, por h ; altura por al ; interés por in ó ins ; lado del cubo por LC ; ancho por a ó an ; volumen por vol ; peso por pe ; volumen ó superficie del cono, por c ó co ; volúmenes, áreas ó dimensiones diferentes, por las mismas iniciales; círculo por c ; circunferencia por c ; las palabras banco, mesa, calle, pared, casa, ventana, piso, con letras como si se tratara de denominaciones matemáticas; el área de un triángulo abc , se la representa por $\frac{a \times b}{2}$, por S ó por abc . Hay un desorden

que constantemente repercute en los análisis para concluir en un resultado erróneo. Consideramos necesario que los maestros presten atención á este punto é instruyan á los alumnos acerca del uso de las letras como símbolos de términos matemáticos y de palabras comunes. El *principio* de muchas lecciones debe destinarse á la evocación de fórmulas y abreviaturas, por ejemplo:

M.—¿ Con qué letras se representa interés, capital, circunferencia, radio ?

A.—Con *i* mayúscula, *c* mayúscula ; con *c* y con *r* mayúsculas ó minúsculas.

M.—¿ Cómo se expresa el área de un triángulo ?

A.—Por $\frac{a \times b}{2}$.

M.—Letras con que se expresan Decímetros cúbicos.

A.—Con *Dms. cbs.* ó bien *Dms.*³

M.—¿ Qué representan *V*, *a*, *S*, *P*, *A*, *N*, una coma á la derecha de un número, un cero arriba y á la derecha de un número ? Fórmula para hallar el área lateral de una pirámide, el volumen de una esfera, etc.; además, frecuente ejercicio de escritura (expresiones matemáticas) al dictado y frecuente lectura de expresiones escritas.

III

Razonamiento ó análisis de los problemas. — ¿ *Qué es razonar un problema ?* — Muchos creen haber razonado un problema después de planteado ; otros pretenden lo mismo después de explicadas las operaciones ; otros pretenden lo mismo apoyados en desarrollos (síntesis hechas) que por habituales, se toleran como axiomas.

En este caso, problemas como *en una probeta de 26 litros de capacidad se vierten 76 Kgs. de mercurio ¿ á qué altura ascenderá si el peso específico es 13.6 teniendo la probeta $1\frac{1}{2}$ cm.² de base ?* se consideran bien razonados con este análisis :

76 Kgs. de mercurio ocupan un volumen de $\frac{76}{13.6}$ dms.³; por consiguiente, el volumen de la probeta con mercurio es de $\frac{76}{13.6}$ dm.³; pero, si representamos por x la altura del mercurio en la probeta, su volumen será $1.5 \text{ cm.}^2 \times x$; de donde $1.50 \times x \text{ cm.}^3 = \frac{76}{13.6} \times 1000 \text{ cm.}^3$; $x = \frac{76000}{13.6 \times 1.5} \text{ cms.}$

El razonamiento es bello y seductor por su brevedad; pero se dan por hechos, análisis que no se exigirían á un ingeniero, pero que un estudiante de 5º, 6º grado ó cursos secundarios, sin ellos quedaría á oscuras. Si el estudiante es razonador, preguntará: ¿por qué 76 Kgs., divididos por 13.6 da dms.³? ¿Por qué $1.5 \text{ cms.}^2 \times x$ nos da ese mismo volumen de mercurio?

Los análisis sintéticos, asociación que parece paradójica, no puede hacerlos quien no los ha hecho antes analíticos; por ellos hay que pasar, antes de hacer uso de una forma propia de mentes muy cultivadas y que al escribir, por todo razonamiento, dan la ecuación:

$1.5 x = \frac{76}{13.6}$, porque hay una rápida integración mental que no exige concurrencia de partes. Pero un alumno de 6º grado no es capaz de semejante cerebración, y si lo fuera, debemos comprobarla para cerciorarnos de que no se trata de síntesis simuladas, conocidas bajo el nombre de reproducción mnésica de imágenes visuales.

Creemos equivocado á DAUZAT («Méth. Math.» pági-164) al decir que no existe un método general para la resolución de problemas de Aritmética; lo hay, para tomar conocimiento exacto y completo del enunciado que vale concebir el análisis del problema; lo hay para constituir, mediante el estudio minucioso de las relaciones entre los datos conocidos y desconocidos, una serie de casos cada vez más simples á que referir las condiciones del problema y lo hay, para lo que, según nosotros, debe ser un razonamiento en la escuela pri-

maria : llegar á una descomposición tal de las partes que resulten evidentes por sí mismas, es decir, que se expliquen por los sentidos (discusión intuitiva); de allí, recomponer é ir de fusión en fusión, de consecuencia en consecuencia, de *deducción en deducción* á contestar la pregunta.

Se desciende, pues, á la razón de las razones, la razón concreta, (intuición) y de allí nos elevamos á la forma abstracta con elementos y relaciones desde ese momento, conocidas en el análisis, constantes visuales y de referencia en las que el proceso mental se apoya como la locomotora en un riel. ¿ Por qué 76 Kgs. de mercurio ocupan $\frac{76}{13.6}$ dms.³? Por qué 76 Kgs.

si fuesen de agua, ocuparían 76 dms.³? (el niño, al tratar de la densidad, vió que un dm.³ de agua pesaba un Kg.). Por qué en igualdad de volumen el mercurio pesa 13.6 veces más que el agua? (noción obtenida por la vista). Por qué una cosa más pesada, en igualdad de peso, ocupa menos volumen? Por qué 76 Kgs. de una cosa 13.6 veces más pesada, como el mercurio, ocupa 13.6 menos volumen que 76 Kgs. de una cosa 13.6 veces menos pesada que el agua? (noción obtenida por la vista). Por qué una cantidad se la hace 13.6 veces menor, dividiéndola? ¿ Por qué $1.5 \times x$ cm.³ es el volumen de ese mismo mercurio? ¿ Por qué suponemos la probeta de la forma de un cilindro ó de un paralelepípedo? Por qué el mercurio, toma la forma de la vasija que lo contiene? Por qué dentro de la probeta llega á la altura x cm.? Por qué el volumen de un cilindro ó de un paralelepípedo es igual á la base por la altura?; se comprenderá, ahora, por qué no nos satisfacen, como razonamiento, las demostraciones de aquellos niños incapaces de llegar hasta el punto de partida de los análisis, la observación de las cosas ó la experimentación, fuentes primarias de nuestros conocimientos y se comprenderá qué entendemos por criterio matemático; utilizamos como elementos de análisis, solo aquellas síntesis ya demostradas (principios, teore-

mas, reglas) ó que exprofeso y transitoriamente, dado lo escabroso de sus análisis por una parte y la necesidad de ellas por otra, aceptamos como tales (fórmulas geométricas y físicas).

El análisis tiene por objeto convencernos de que una afirmación es exacta ó falsa; la lógica positiva emplea dos procedimientos generales de convicción: el inductivo (intuitivo-experimental) y el deductivo, (combinatorio y abstracto); éste, que comienza donde aquél concluye, es más vasto, más rápido, menos sujeto á detalles comprobatorios y de consecuencias más generales. Pero, evidentemente, la deducción parte de los elementos proporcionados por la inducción; el *por qué*, no acaba sino en las percepciones adonde llegamos de consecuencia en consecuencia y donde la duda ya no es posible, por cuanto el objeto da la razón de su propia existencia. Siendo tal la lógica, tal pretendemos que la ejerciten cerebros jóvenes no habituados á suplir con imágenes internas procesos objetivos que deben preceder á los subjetivos (centrales ó deductivos).

Todo alumno que á su propio esfuerzo debe la solución de un problema, realiza el análisis en la forma indicada, exteriorizado á veces, de una manera incompleta mediante frases truncas, ú olvidadas, ó vulgares, ó sin el *por qué* de una operación, dando por hechas discriminaciones á las que no debe habituarse mientras el maestro no está seguro de que toda forma implícita, hueco en la exteriorización del razonamiento, no es también un hueco del proceso interno, en cuyo caso nos hallaríamos en presencia de una peligrosísima simulación llevada á cabo por la memoria de los centros de la locuela.

Solución de los problemas. — El objeto, principal quizá, de esta enseñanza es cultivar la razón. Ninguna asignatura realiza este propósito en la escuela primaria, como la matemática, ninguna liga tan sencillamente lo inductivo con lo deductivo, para detenerse en un campo exclusivamente abstracto. Nos parece, del punto

de vista del método, desprovista de significado la división que suele acostumbrarse: *solución, análisis y respuesta* ó, *planteación, análisis y respuesta*. La solución es precisamente, el análisis; la planteación, si no es el mismo análisis, es un conjunto de operaciones, el resultado del problema expresado en una fórmula final; nuestro propósito es dar direcciones para el análisis. Primero, comprender al problema por partes mediante la *objetivación*, la *descomposición* y las *inducciones*, hechas á la vez ó sucesivamente. Segundo, *integración* de las partes asociando las inducciones para una conclusión que á su vez toma el carácter de elemento para conclusiones más sintéticas hasta la que satisface la pregunta (*análisis deductivo*).

Desde luego, deben distinguirse dos grandes categorías de problemas: *simples*, cuya conclusión no exige otras de apoyo ó circunstanciales; *compuestos* cuyo resultado se debe á la solución concurrente de uno ó más problemas que explícita ó implícitamente contiene el enunciado.

Problemas simples.—No exigen sino una operación: escasos de palabras, fundados en una definición, sin condiciones implícitas que lo subjetivicen, más de sentido común que de análisis abstracto, no ofrecen otra dificultad que la de la interpretación que debe darse á ciertas palabras ó datos, por el oficio gramatical que desempeñan en el enunciado.

Estos problemas se analizan según este orden:

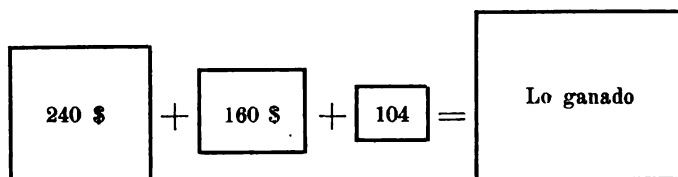
I — *Objetivación*; II — *Análisis inductivo*, (discusión de los datos); III — *Deducciones*; IV — *Conclusión*.

Son características de la parte inductiva, las palabras *tenemos* ó *según el problema*; de la parte condicional la palabra *si* con que indefectiblemente comienza toda clase de razonamiento. Hay que exigir al niño el uso de dicho adverbio hasta formar el hábito. Se está seguro, así, de que, por la natural cadencia de la oración, el niño busca la consecuencia. De la parte deductiva, las palabras *de donde*, *en consecuencia*, *de consiguiente*; de la conclusión, la palabra *luego*. Pero

se resumen todas en el significado de estas dos : *si*, condición, *luego*, conclusión que ningún análisis las dejará de usar. Es necesario prevenirse contra la costumbre, fomentada á veces por el maestro con la pregunta *¿qué hay que hacer?*, de dar como razón lo que es consecuencia : la operación. No obstante sus numerosas especies, como cultura su valor es insignificante ; pero con ellos el alumno prepara unidades funcionales, elementos de integración para resolver problemas de proposiciones combinadas.

Ejemplos. — Un obrero ha ganado 240 \$ en 48 días ; 160 en 24 días y 104 en 26 días. ¿ Cuántos pesos ha ganado ?

Objetivación



Inducciones. — (Implícitas ó explícitas que la mente hace discutiendo los datos del enunciado).

I. — Las diversas cantidades de dinero son ganancias de un mismo individuo.

II. — Al preguntarse cuánto ha ganado, debe entenderse : las tres veces que trabajó.

III. — Ganancia significa adquirir, aumentar lo que se tiene.

Deducciones. — I. — Si las tres veces ha ganado, las tres veces ha adquirido.

II. — A una cantidad debe agregar otra.

III. — Agregar significa juntar, sumar. Luego el individuo junta sus tres ganancias.

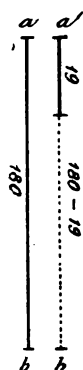
IV. — Las tres ganancias se juntan, sumándolas.

V. — Las tres ganancias juntas constituyen lo ganado.

Conclusión : El individuo ha ganado 504 \$. La enumeración de los días está de más.

Las aguas del Magdalena tenían ayer, 180 centímetros de altura ; hoy han bajado 19 centímetros. ¿ Qué altura tiene hoy ?

Objetivación



Inducciones. — (Implicitas ó explícitas que la mente hace).

I. — De b fondo del río hasta a superficie del agua, hay 180 cms.

II. — El fondo no sube ni baja : sube ó baja la superficie.

III. — Bajar la superficie a significa aproximarse al fondo b ó disminuir la longitud de la vertical ab , por la parte superior.

Deducciones. — I. — Bajar 19 centímetros significa, pues, disminuir la altura ab en 19 cms.

II. — Entonces quedará una altura de 180 cms. disminuida en 19 cms.

Conclusión: La altura que tienen hoy las aguas del Magdalena es de $180 - 19 = 161$ cms.

Pero el enunciado en vez de *han bajado 19 cms.*, dice ahora: *han bajado á 19 cms.*

Inducciones. — Las mismas del caso anterior.

Deducciones. — I. — Bajar á 19 cms. significa llegar á un punto situado á 19 centímetros del fondo.

II. — La superficie del agua está en dicho punto.

III. — Como altura del agua, es la distancia del fondo á la superficie, el agua del Magdalena tiene hoy 19 cms.

¿Cuántos metros de cinta tienen 87 piezas de 92 metros cada una?

Objetivación



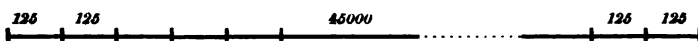
Inducción. — I. — Las piezas de cinta son todas de la misma longitud.

Deducciones. — I. — Las 87 piezas son 87 veces la repetición de 92 metros de longitud.

Conclusión: 87 veces 92 metros dan la longitud de las 87 piezas de cinta. Las piezas miden 87×92 ms.

¿ Cuántas veces se podría substraer 125 de 45000 ?

Objetivación



Inducciones. — Quitar cuantas veces sea posible 125 de 45000 es lo mismo que averiguar cuántas veces cabe 125 en 45000.

Deducciones. — I. — Pero para averiguar cuántas veces cabe 125 en 45000 hay que dividir.

Conclusión : Luego 125 puede restarse de 45000 $\frac{45000}{125}$ veces.

En un ejército la caballería es $\frac{2}{5}$ de la infantería y la artillería $\frac{4}{7}$; ¿ á qué parte de la infantería equivalen la caballería y la artillería juntas ?

Objetivación

$\frac{4}{7}$	o'	$\frac{20}{35}$
$\frac{2}{5}$	o'	$\frac{14}{35}$

Inducciones. — I — Caballería y artillería juntas, indica una suma.

II. — Las fracciones solo pueden sumarse con un mismo denominador :

III. — $\frac{2}{5}$ es $\frac{14}{35}$; $\frac{4}{7}$ es $\frac{20}{35}$.

IV. — La caballería es $\frac{14}{35}$ de la infantería y la artillería $\frac{20}{35}$ de la misma infantería.

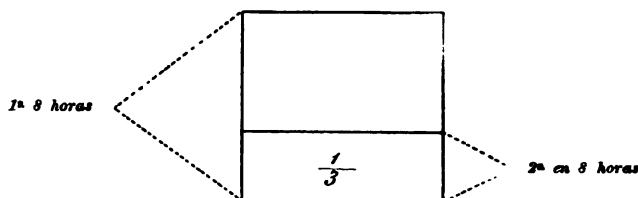
V. — $\frac{14}{35}$ y $\frac{20}{35}$ son fracciones de la misma cosa; $\frac{1}{35}$ de una cosa es igual á $\frac{1}{35}$ de la misma cosa; sumándolas tomaremos tantas partes iguales de la misma cosa.

Deducciones. — I. — Luego $\frac{1}{3}$ de infantería $\frac{3}{5}$ de infantería da $\frac{3}{5}$ de infantería.

Conclusiones: Luego, $\frac{3}{5}$, expresan qué parte de la infantería, son la caballería y la artillería juntas.

Una fuente puede llenar un depósito en 8 horas; ¿qué parte del mismo depósito llenará en 1 hora, otra fuente que fluya 3 veces menos cantidad de agua que la primera?

Objetivación



Inducciones. — I. — Fluir 3 veces menos, debe entenderse que en el mismo tiempo arroja tres veces menos agua.

II. — En 8 horas, la 1ª llena el depósito.

III. — En 8 horas, la 2ª echa al depósito 3 veces menos que la primera.

Deducciones. — I. — Si echa 3 veces menos que la primera llenará $\frac{1}{3}$ del depósito.

II. — Si en 8 horas llena $\frac{1}{3}$ del depósito, en una hora llenará la octava parte de $\frac{1}{3}$.

Conclusión: $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{9}$; luego, llena $\frac{1}{9}$ del depósito.

Un obrero se vió en la necesidad de dejar una obra cuando solo había concluido $\frac{1}{3}$, por lo que se le pagaron 70 \$; ¿cuánto se le hubiera pagado si la hubiese concluido?

Objetivación

$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$

Inducciones. — I. — La obra se compone de $\frac{1}{2}$.

II. — Hizo $\frac{1}{2}$, faltan $\frac{1}{2}$ para concluir la.

III. — Hay que conocer el valor de los $\frac{1}{2}$.

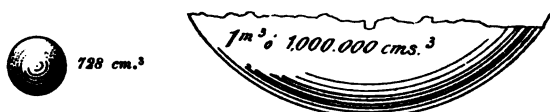
IV. — $\frac{1}{2}$ de lo hecho, cuesta igual que $\frac{1}{2}$ de lo por hacer.

Deducciones. — I. — $\frac{1}{2}$ de lo hecho vale $\frac{7}{10}$ \$.

II. — La obra, $\frac{1}{2}$ valdrá 12 veces más ó $\frac{7}{10} \times 12 = 84$ \$.

¿ Cuántos metros cbs. hay en 728 cms.³ ?

Objetivación



Inducciones. — I. — ¿ Un m.³ es mayor que 728 cms.³ ?

II. — Averiguar cuánto hay de una cosa en otra, es ver cuántas veces podemos sacar aquélla de ésta.

III. — En verdad, no podemos sacar una cantidad mayor de una menor.

IV. — El problema sería más concreto enunciado en esta forma:

¿ A cuánto del m.³, equivalen 728 cms.³ ?

V. — Si 1 cm.³ equivale á $\frac{1 \text{ m.}^3}{1000000}$.

Deducciones. — 728 cms.³ equivalen á 728 veces más ó $\frac{1 \text{ m.}^3 \times 728}{1000000}$
ó 0.000728 cms.³

Conclusión. — Luego, etc.

Problemas compuestos. — Innumerables en cuanto á tipo, especie y variedad, una clasificación no sería posible, sino del punto de vista de los más frecuentes.

Dentro de las mismas combinaciones varía mucho la dificultad por el número de condiciones explícitas ó no explícitas que deben tenerse presente y la interpretación que debe darse á los vocablos y frases, según conceptos fijos, á veces netamente científicos. En los problemas: ¿ Cuánto pesa una bola de plomo de 0.08 ms. de diámetro ? ¿Cuál es el área de un triángulo

equilátero que mide 100 ms. de base? las condiciones implícitas son teoremas ó fórmulas que exigen el conocimiento de la geometría; entonces hay á nuestra disposición síntesis de tal manera hechas que nuestro trabajo se reduce á substituir cantidades literales por numéricas. En los problemas: Después de 4 segundos de visto el fogonazo se oye el tiro. ¿A qué distancia está el cazador de nosotros? Una chapa de hierro de forma cuadrada tiene 4 ms. de lado á 0° . Calcular la superficie á 64° sabiendo que el coef. de dilatación lineal es igual á 0.0000123—las condiciones implícitas son leyes de física que nos dicen las operaciones que debemos hacer. De modo que el trabajo se reduce á buscar los principios cuya aplicación, á veces, menos difícil que la de una regla cualquiera de aritmética, constituye el análisis.

Un problema compuesto, sin que esto pueda servir de regla, ofrece tantas combinaciones y problemas simples como operaciones exige para resolverlo.

Los signos $+$, $-$, $\times$, $:$ pueden entre sí y unos con otros combinarse y permutarse hasta lo infinito; de aquí que no haya límite á la complicación y que dependa de nuestra potencia creadora escribir un enunciado de muchas proposiciones sintetizables para responder á una sola pregunta.

Los enunciados de dos ó tres preguntas no constituyen para nosotros, un solo problema, sino dos ó tres; de modo que puede ser simple lo que en apariencia es compuesto, como: Un estanciero vendió 70 vacas en 3500 \$ y 45 en 1800 \$. ¿Cuántas vacas vendió y cuánto recibió por ellas?

Pero, ¿es posible exceder ciertos límites? ¿hay en la escuela primaria un límite para cada grado? Depende de las aptitudes que el maestro forma; pero debe alarmarnos el hecho de que los textos no presentan entre 100 enunciados sólo 5 compuestos rara vez de tres combinaciones, de los signos $+$ y $\times$.

Cada combinación en problemas explícitos constituye un tipo, un procedimiento de solución. ¿De cuántos tipos no tiene el niño noción siquiera!

Las series mentales de 1^{er} grado, comprenden problemas ordenados, en cuanto á las operaciones de este modo: $+$; $-$; $++$; $+-$; $--$; $-+$; $+++$; $++-$; $-++$; $---$; $+-+$; $-+-$; $+-$; $-$; $\times$; $+\times$; $\times+$; $-\times$; $\times-$; $++\times$; $+-\times$; $-+\times$; $\times++$; $\times+-$; $\times-$.

Creemos que si puede llegarse á problemas compuestos de tres proposiciones explícitas sería aventurado darlos de cuatro. El experimento que hicimos en Noviembre (Exp. XVIII) en 1^{er} grado con un problema abstracto de la combinación $\pm$ á enunciado de un análisis implícito, nos dió el 17 % (varones) y el 31 % (mujeres) de positivos.

Tocante á operaciones deben, pues, distinguirse en las series de primer año, veinte especies de problemas por lo menos, que por vía de ejemplificación, damos en una serie, sin variar el asunto.

1^a *Especie.* ($+$) Un corral tiene a ovejas, otro b y otro c . ¿Cuántas ovejas hay en los tres corrales? Otro: Un pastor al morir repartió sus ovejas entre sus dos hijos; al 1^o dió a , al 2^o c más que al 1^o. ¿Cuántas ovejas recibió cada uno?

2^a *Especie.* ($-$) Un corral tiene a ovejas; se vendieron b . ¿Cuántas ovejas quedan?

3^a *Especie.* ($++$) Una estancia está dividida en cuatro ensenadas. En la 1^a pacen a vacas y m ovejas; en la 2^a b vacas; en la 3^a c vacas y n ovejas; en la 4^a p ovejas. ¿Cuántas ovejas y cuántas vacas pacen en la estancia.

4^a *Especie.* ($--$) Las a ovejas de un corral costaron m pesos; se vendieron b ovejas por n pesos; quiere saberse qué cantidad de ovejas quedan aún y la suma de dinero á reembolsarse.

5^a *Especie.* ($+-$) En un corral hay a ovejas, en otro b ovejas; se venden c ovejas; quiere saberse cuántas quedan al dueño.

6^a *Especie.* ($-+$) Con a ovejas más que yo tuviera, podría devolver las b que debo y me quedarían c . ¿Cuántas ovejas tengo? Otro: Debo b ovejas y solo devuelvo a ovejas; ¿cuántas debería tener aún para

no deber ninguna y quedar en mi poder c ovejas todavía?

7ª *Especie*. ($++-$) En un corral hay a ovejas; en otro b ; en otro c . Del primero se vendieron m ovejas; del 2º n ; del 3º p ; quiere saberse cuántas quedan.

8ª *Especie*. ($--+$) Las ovejas de un corral se han repartido del siguiente modo entre tres individuos: al 1º se dieron a ; al 2º m ovejas menos que al primero; al 3º n ovejas menos que al 2º. ¿Cuántas ovejas había en el corral?

9ª *Especie*. ($-++$) Se murieron b ovejas de un corral, el resto se vendió en dos partidas, la primera de c ovejas, la segunda de m ovejas menos que la primera; ¿cuántas ovejas había en el corral?

10ª *Especie*. ($+ - +$) Hay a ovejas en un corral, b en otro y c en otro; la epidemia mata m ovejas, pero se compra una partida igual á la que queda y n ovejas más; ¿cuántas hay en los tres corrales?

11ª *Especie*. ($-+-$) Un pastor dejó, al morir, a ovejas para repartir á sus tres hijos; el 1º recibió b ovejas, el 2º c ovejas menos que el 1º; ¿cuántas recibió el 3º?

12ª *Especie*. ($+--$) Un pastor dejó al morir, a ovejas para repartir á sus tres hijos; el 1º recibió b ovejas, el 2º c ovejas; ¿con cuántas quedaría el 3º si se le ahogaron m ovejas?

13ª *Especie*. ($---$) Un pastor distribuye sus ovejas en 4 ensenadas: en la 1ª coloca a ovejas; en la 2ª b menos que en la 1ª; en la 3ª c menos que en la 1ª; en la 4ª d menos que en la 2ª; ¿cuántas ovejas colocó en cada ensenada?

14ª *Especie* ($\times$). ¿Qué ganancia darán a ovejas si en cada una se gana c pesos?

15ª *Especie* ($+\times$). Si cada oveja cuesta a pesos, qué capital tendrá un pastor que en un corral tiene b ovejas; en otro c y en otro d ?

16ª *Especie* ($\times+$). En un corral hay a ovejas que se compraron á b pesos cada una; se quiere vender ganando en la majada c pesos. ¿Por cuánto debe venderse?

17ª *Especie* ($-\times$). Un individuo tenía a ovejas; se le mueren b y el resto lo vende á c pesos cada una ¿cuánto sacó de sus ovejas?

18ª *Especie* ($\times-$). Un pastor vende la lana de b ovejas por a pesos; por la alimentación de cada una pagó durante el año, c pesos; ¿quiere saber la ganancia que obtuvo sin contar los corderitos?

19ª *Especie* ($\times\times$). La mantención de cada oveja exige, por mes, un gasto de a pesos; cuánto gasto exigirán b ovejas en un año? Otro: ¿Cuántas ovejas tendrá una majada a veces mayor que otra que tiene b veces una de c ovejas?

20ª *Especie* ($++\times$). Las cuatro ensenadas de una estancia tienen las siguientes ovejas: la 1ª a ; la 2ª b ; la 3ª c y la 4ª d ; se venden las del 1º y 3º corral á m pesos cada una ¿cuántas ovejas quedan por vender y cuánto se sacó de las vendidas?

21ª *Especie* ($+ - \times$). Un estanciero si hubiese vendido todas sus ovejas, hubiera obtenido de la primer partida a pesos; de la 2ª b pesos; pero dejó de vender m ovejas calculadas en c pesos; en cambio cada oveja le dió d kilogramos de lana ¿quiere saberse cuántos pesos y cuánta lana sacó el estanciero?

Otro:— En un corral hay a ovejas y en otro b ; se murieron c y el resto se vendió á m pesos cada una ¿cuánto produjeron las ovejas?

22ª *Especie* ($- + \times$). Un pastor reparte á los dos hijos, sus ovejas en la siguiente forma; al 1º a ovejas; al 2º b ovejas menos que al 1º. Quiere saberse cuánto dinero habría distribuido si hubiese vendido las ovejas á m pesos cada una?

23ª *Especie* ($\times++$). Un pastor, después de realizar la lana de sus ovejas por a pesos, vende b á c pesos cada una; una creciente le ahoga m : contadas las sobrevivientes, resultan ser n ovejas. ¿Qué capital hubiera tenido el pastor en dinero y animales si la creciente no lo hubiera damnificado?

24ª *Especie* ($\times+ -$). Al cabo de un año un pastor realiza sus a ovejas después de la esquila, vendiéndolas á b pesos cada una. De la lana obtuvo m pesos.

Quiere saber la ganancia si al instalarse había gastado n pesos.

Otro :— A b pesos cada oveja, un pastor compraría, con su dinero a ovejas ; pero quiere reservarse m pesos para hacer el rancho y n pesos para el corral ¿cuántos pesos destinó á la compra de las ovejas ?

25ª *Especie* ($\times - +$). A b pesos cada oveja, un pastor compraría con su dinero, a ovejas ; pero reserva m pesos para hacer el corral y compra ovejas con el resto ; las vende al cabo de un año, ganando n pesos. ¿Cuál será el dinero del pastor ?

En 2º grado, puede llegarse, en orales, con los signos $+ - \times$: á cuatro combinaciones, en escritos, con $+ -$, á cuatro ; con $+ - \times$: , á tres ; pocas veces á cuatro si las condiciones son explícitas, pues téngase presente que en esta clase principia la enseñanza de la reducción á 1 (: $\times$) mediante el análisis subjetivo de las imágenes y habituamos al alumno á darse cuenta de las proposiciones implícitas como elementos de resolución.

En 3º grado, las combinaciones orales no son de análisis sino de apoyo ; revisten, de consiguiente, formas poco complicadas. En escritas puede llegarse hasta cinco combinaciones, ó más repitiendo uno de los signos, $+ \text{ ó } \times$; pero, el sistema métrico, primera osculación de la geometría con la aritmética, presenta el lado simpático de las reducciones, otros tantos problemas de multiplicación y división por el método de la unidad, desapercibidos, porque el hábito de resolverlos mediante una rápida integración sin lápiz ni tiza, facilitada por el sistema decimal, los vuelve casos de simple operación fraccionaria.

En 4º grado, las fracciones ordinarias dan otro aspecto al análisis, pero dentro de condiciones explícitas y con el auxilio de las relaciones entre el peso, la capacidad y el volumen puede llegarse hasta 12.

Un problema simple que deba resolverse por la vía fraccionaria, no es, en la mayoría de los casos, simple, puesto que exige análisis de reducción á uno, otras tantas proposiciones. Suelen sí tomarse ciertos

datos, como síntesis hechas, en cuyo caso aparentan la forma simple que no pueden ofrecer sino las seis operaciones.

En 5° y 6° grado, el número depende de la extensión del enunciado y de los signos que se combinen. Los cuatro á la vez, repitiéndolos de esta manera: $\times + - \times : + : -$ daría lugar á un enunciado de difícil análisis.

No todas las combinaciones de igual número de signos ofrecen la misma dificultad. Así, $+ \times \times$ es enunciado más analizable que $: + : .$ Por otra parte, las formas simples del 1° ó 2° grado se repiten en 4° ó 5°, pero dentro de problemas compuestos; cada curso tiene formas simples que le son propias; en 4°, por ejemplo, los primeros análisis de la densidad; en 5°, los primeros del interés en los que debe aplicarse el concepto que se tiene acerca de definiciones y principios particulares de la Aritmética. Por eso son *específicos* ó *típicos*; toda forma compuesta, combina formas *específicas*, dos, tres, cuatro ó cinco para asuntos que se estudian en cursos determinados. No quiere esto decir, que los conocimientos matemáticos no derivan unos de otros; pero se complican con principios, definiciones y propiedades que alejan ese parentesco inmediato de los problemas *afines*.

¿Cuánto, 800 \$ de capital, producen de interés en 3 años, al 8 % anual? ¿Cuánto deberá producir de ganancia un negocio en el que se invierten 5000 \$ para que la ganancia resulte del 5 %? Son problemas afines. ¿En cuánto tiempo 5000 \$ de capital, al 5 % anual, producirán 2000 de interés? Es un problema *derivado* de los anteriores, casi típico. Uno de éstos y uno de compañía, son típicos. Un compuesto nunca es típico sino por el número de combinaciones ó cuando una de éstas es implícita; exige el trabajo de la descomposición, á veces complicada por las relaciones que deben establecerse entre las partes.

De donde resulta la imperiosa aplicación del principio *ir de lo simple á lo compuesto, de lo particular á lo general*, nunca el análisis de una forma compuesta

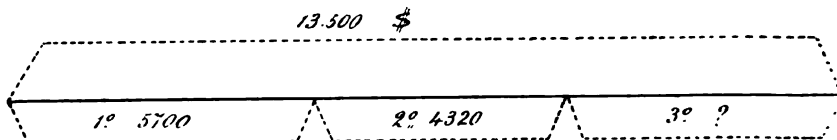
sin antes haber hecho el de las formas simples que puedan componerlo y sus combinaciones dos á dos primero, tres á tres después, cuatro á cuatro, etc. No sería correcta una enseñanza que diera la combinación $+\times$: sin previo análisis, por separado, de problemas dentro de las especies $+, \times, :, +\times, \times+, +:, \times:, :+, : \times$, suponiendo que $+\times \div$ fuera menos compleja que $\times+ :$. La escuela debe entrar decididamente por un camino que corrija el tradicional hábito de los alumnos, de resolver los problemas sin dar el *por qué*, porque no lo saben ó ignoran su forma correcta.

Un problema compuesto, se analiza según este orden: I. *Objetivación y análisis inductivo*. II. *Descomposición* en problemas simples. III. *Deducciones parciales*. IV. *Análisis deductivo*. V. *Conclusiones parciales y final*. Como cultura de la mente, nada magnifica el razonamiento de una manera tan poderosa y nada pone más á prueba la solidez del cerebro; la inteligencia de un estudiante se mide por la rapidez con que analiza estos problemas, que exigen la actividad perfecta de los centros más elevados para que el subtráctum no resulte erróneo, pues en matemática la dualidad es imposible y no pueden sostenerse dos opiniones contrarias acerca de un punto: es ó no es.

La descomposición se hace de modo que la conclusión de cada problema simple sirva de elemento de análisis al problema siguiente ó siguientes; sin ser indispensable, conviene un orden de sucesión.

Ejemplos: $(+ -)$ Un banquero debe recibir 13.500 \$ en tres pagos: el 1º de 5700 \$, el 2º de 4320. ¿Cuál será el tercero?

Objetivación



Discusión inductiva: (Análisis inductivo).—I. 13.500 \$ se compone de los tres pagos. II. Se conocen dos pagos, el 1° y 2°. III. Si de una suma compuesta de tres partes se conocen dos, la otra será el todo menos las partes.

Descomposición.—I. Un banquero recibe dos pagos, uno de 5700 \$ y otro de 4320 \$. ¿Cuánto recibió en pago?

II. Un banquero debe recibir en pago 13.500 \$, recibió 10.020 \$ ¿qué pago le queda por recibir?

Análisis deductivo.—I. Si un pago fué de 5700 \$ y otro de 4320, los dos pagos equivaldrán á $5700 + 4320$.

II. Los dos pagos suman 10020 \$.

III. Si debe recibir 13500 \$ y en dos pagos recibió 10020 \$, en el tercer pago debe recibir lo que falta á 10020 \$ para completar 13500 \$.

IV. Pero una cantidad mayor menos la menor, es lo que falta á la menor para ser igual á la mayor.

V. Luego, $13500 - 10020$ \$ debe ser el tercer pago.

Conclusión.—El tercer pago es de 3480 \$.

Análisis que debe hacerse.—I. Si en un pago recibió 5700 \$ y en otro 4320 \$, en los dos pagos recibiría $5700 + 4320$ ó 10.020 \$.

II. Si debe recibir 13500 \$ y recibió 10020 \$, le falta recibir $13500 - 10020$ \$.

III. Luego, lo que debe recibir como tercer pago para saldar la deuda, es de 3480 \$.

(: + : :) Un comerciante ha recibido 463 cajas de mercancías por las cuales ha pagado 26.854 \$; revendiendo con un beneficio de 2315 \$ ¿cuánto ganará sobre cada caja y á qué precio sale cada una en la reventa?

Objetivación

<i>Costo :</i> 26854 \$ 463 cajas	<i>Venta :</i> 26854 + 2315 \$. 463 cajas

Discusión (Inducciones).—I. Hay que saber el costo de cada caja.

II. Hay que saber á cuánto se vendió cada caja.

III. Hay que saber cuánto ganó en cada caja.

IV. El costo más el beneficio, da el valor de la venta.

Descomposición.—I. 463 cajas costaron 26.854 \$ ¿cuánto costó cada caja?

II. 463 cajas costaron 26.854 \$ y se vendieron ganando 2315 \$. ¿Por cuánto se vendieron?

III. 463 cajas se vendieron por $26854 + 2315$ \$ ¿á cuánto se vendió cada una?

IV. En 463 cajas se ganó \$ 2315 ¿cuánto se ganó en cada una?

Análisis deductivo.—I. Si 463 cajas costaron 26.854 \$, una caja costará 463 veces menos ó sea $26.854 : 463$.

II. Si 463 cajas costaron 26854 \$ y se vendieron ganando 2315 \$. se venderían por \$ $26.854 + 2315$.

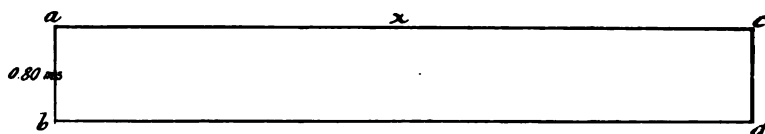
III. Si 463 cajas se vendieron en 26.854 \$ + 2315 \$, una caja se vendería en $\frac{26854 + 2315}{463}$ \$.

IV. Si en 463 cajas se ganó 2315 \$, en una caja se ganaría 463 veces menos ó \$ $\frac{2315}{463}$.

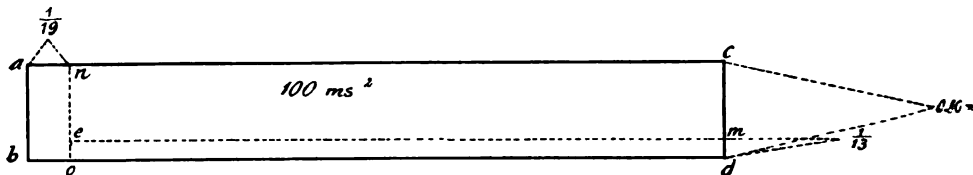
(: , $\times$, $\times$, : , : , $\times$) Una tela, después de mojada, disminuye $\frac{1}{19}$ de su largo y $\frac{1}{13}$ de su ancho. ¿Qué largo deberá tener la tela que mide, antes de la inmersión en el líquido 0,80 ms. de ancho, para tener 100 ms.² después de la inmersión?

Objetivación

Antes de la inmersión



Después de la inmersión



Discusión inductiva.—I. — $a c = x$ ó largo de la tela antes de mojarse.

$a b = 0.80$ ó ancho de la tela antes de mojarse.

II. — $a n = \frac{1}{19}$ ó lo que disminuye el largo de la tela después de mojarse.

$n c = \frac{1}{1} \frac{8}{9}$ largo de la tela después de mojada.

III. — $m d = \frac{1}{1} \frac{3}{3}$ ó lo que disminuye la tela después de mojada.

$m c = \frac{1}{1} \frac{2}{3}$ ancho de la tela después de mojada.

$c d$ ó $a b = \frac{1}{1} \frac{3}{3}$ ó ancho de la tela antes de mojarse.

IV. — $\frac{1}{1} \frac{3}{3}$ ó ancho de la tela equivalen á 0.80 ms.

V. — La forma de la tela es un rectángulo.

IV. — $n c$, $\frac{1}{1} \frac{8}{9}$, largo de la tela después de mojada.

VII. — $\frac{1}{1} \frac{9}{9}$ largo de la tela antes de mojarse.

VIII. — Los $\frac{1}{1} \frac{8}{9}$ de largo, por los $\frac{1}{1} \frac{2}{3}$ de ancho es la superficie de la tela después de mojada ó 100 ms.²

Descomposición. — I. — Si $\frac{1}{1} \frac{3}{3}$ de ancho de una tela miden 0.80 metros ¿cuánto medirán $\frac{1}{1} \frac{2}{3}$?

II. — ¿Cuál será el largo de una tela rectangular de 100 ms.² cuyo ancho es $\frac{1}{1} \frac{2}{3}$ de 0.80 ms.?

III. — Los $\frac{1}{1} \frac{8}{9}$ de largo de una tela equivalen á tantos metros ¿á cuántos metros equivaldrán los $\frac{1}{1} \frac{9}{9}$?

Análisis deductivo. — I. — Si los $\frac{1}{1} \frac{3}{3}$ del ancho de una tela miden 0.80, $\frac{1}{1} \frac{3}{3}$ medirá $\frac{0.80}{1}$ y los $\frac{1}{1} \frac{2}{3}$ medirán $\frac{0.80 \times 12}{13}$ mts. = $\frac{9.6}{13}$ ms.

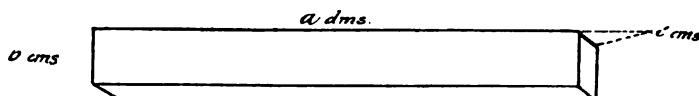
II. — La tela mide 100 ms.² de superficie y es un rectángulo: si mide de ancho $\frac{1}{1} \frac{2}{3}$ de 0.80 ms. ó $\frac{9.6}{13}$ ms., su largo será $100 \div \frac{9.6}{13}$ ms. = $\frac{13 \times 100}{9.6}$ ms., ó dimensión $n c$, $\frac{1}{1} \frac{8}{9}$ del largo de la tela.

III. — Si los $\frac{1}{1} \frac{8}{9}$ del largo de la tela miden $\frac{13 \times 100}{9.6}$ ms., $\frac{1}{1} \frac{9}{9}$ medirá $\frac{13 \times 100}{9.6 \times 18}$ ms., y $\frac{1}{1} \frac{9}{9}$ medirán $\frac{13 \times 100 \times 19}{9.6 \times 18}$ ms.

Respuesta: luego $a c$ ó los $\frac{1}{1} \frac{9}{9}$ del largo de la tela, miden, etc.

(X X X) — ¿Cuál es el volumen de una varilla de bronce que tiene a dms. de largo, b cms. de ancho y c mms. de espesor?

Objetivación



Discusiones -- (Inducciones) — I. La forma de la varilla es de un paralelepípedo.

II. — Su volumen es largo por ancho por grueso.

III. — Siendo, el producto, de una sola denominación, una sola denominación no puede resultar multiplicando denominaciones diferentes.

IV. — Luego, hay que reducir las longitudes á una sola denominación.

Deducciones parciales. -- I. — Si un decímetro equivale á 100 mms., a dms. ó largo de la regla, equivaldrán á $100 a$ mms.

II. — Si un centímetro equivale á 10 mms., b cms. equivaldrán á $10 b$ mms., ancho de la regla.

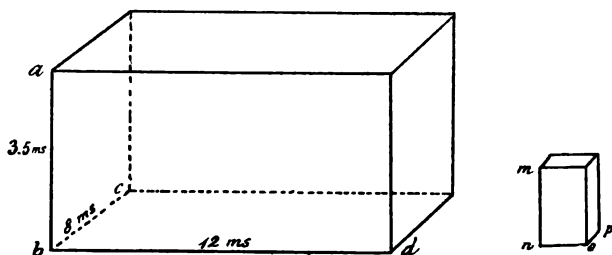
III. — Grueso de la regla c mms.

Análisis deductivo. — Siendo la forma de la regla un paralelepípedo, su volumen será igual á largo, por ancho, por grueso ó $100 a$ mms. $\times$ $10 b$ mms. $\times$ c mms. = $100 a \times 10 b \times c$ mms.³ = $1000 a b c$ mms.³

Respuesta. — El volumen de la varilla de bronce, etc.

($\times \times \times : \times \times : \times \times$) — ¿Cuántos millares de ladrillos de 28 cms. de largo, 14 de ancho y 4 de espesor, contendrá una pila de 12 ms. de largo, 8 de ancho y 3.50 de alto y cuál será su valor á 18 \$ el 1000?

Objetivación



Pila: $a b$, alto, = 3.50 ms.; $b d$, largo, 12 ms.; $b c$, ancho, = 8 ms.

Ladrillo: $m n$, largo = 28 cms. $n o$, ancho = 14 cms.; $o p$, alto = 4 cms.

Discusión inductiva. — I. — Se trata de averiguar cuántas veces un volumen contiene á otro.

II. — Necesitase conocer, expresados en números de la misma denominación, los dos volúmenes.

III. — De cada uno, se nos da las tres dimensiones, es posible, de consiguiente, hallar el volumen.

IV. — Para hallar el volumen de un cuerpo necesitamos conocer la forma.

V. — La forma es la de un paralelepípedo; no puede ser otra porque solo el paralelepípedo es constante en cada dimensión. Si fuera una pirámide, se nos daría el alto, pero no el espesor, porque el espesor no es fijo, varía de la base á la altura; por otra parte, los enunciados acostumbran, menos el del paralelepípedo, á nombrar la forma y solo cuando se trata del paralelepípedo se dice: *largo* tanto, *ancho* tanto, *altura* tanto.

VI. — Para averiguar el precio de la pila de ladrillos necesitamos conocer los miles que en ella hay.

VII. — Las veces que el volumen del ladrillo está contenido en el de la pila, nos dará la cantidad de ladrillos de la pila, porque el cociente nos indica el número de veces que el volumen pequeño *un ladrillo*, cabe en el volumen de la pila.

Descomposición. — I. — ¿Cuál es el volumen de una pila de ladrillos de forma de un paralelepípedo que mide, etc.?

II. — ¿Cuál es el volumen de un ladrillo forma de un paralelepípedo que mide, etc.?

III. — ¿Cuántas veces a cms.³, volumen del ladrillo, está contenido en b ms.³, volumen de la pila?

IV. — Si 1000 ladrillos valen 18 \$ ¿cuánto valdrán $\frac{1000^2 a}{b}$ ladrillos?

Análisis deductivo. — I. — Si el volumen del paralelepípedo es ancho $\times$ alto $\times$ largo, el volumen de la pila será $12^m \times 8 \times 3.50^m$ ms.³

II. — Por la misma razón el volumen del ladrillo será $28^{cm} \times 14^{cm} \times 4^{cm}$ cms.³

III. — El volumen del ladrillo está contenido en el de la pila tantas veces como sea el cociente de $\frac{12 \times 8 \times 3.50 \text{ ms.}^3}{28 \times 14 \times 4 \text{ cms.}^3}$.

IV. — Como no se pueden dividir cantidades de la misma especie y de diferentes denominaciones, reduzco los ms.³ á cms.³

V. — Un metro cúbico equivale á un millón de cms.³, $12 \times 8 \times 3.5$ ms.³ equivaldrán á $12 \times 8 \times 3.5$ veces 1000000 de cms.³ ó $12 \times 8 \times 3.5 \times 1000000$ cms.³

VI. — Luego, en la pila hay $\frac{12 \times 8 \times 3.5 \times 1000000}{28 \times 14 \times 4}$ ladrillos.

VII. — Si 1000 valen 18 \$, 1 valdrá \$ $\frac{18}{1000}$ y $\frac{12 \times 8 \times 3.5 \times 1000000}{28 \times 14 \times 4}$ valdrán \$ $\frac{12 \times 8 \times 3.5 \times 1000000}{28 \times 14 \times 4} \times \frac{18}{1000}$.

VIII. — Simplificando la expresión nos da:

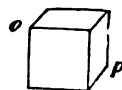
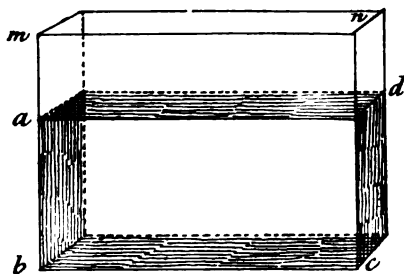
$$\frac{3 \times 2 \times 0.5 \times 1000 \times 18}{2 \times 7} = \frac{1.5 \times 18 \times 1000}{7} = 3857 \$.$$

IX. — Cabe, dentro del sentido común, que una pila de 12 ms. $\times$ 8 por 3 y medio valga 3857 \$? Sí, cabe. Es un resultado admisible. (Una niña, que no llevó como nosotros, á una forma final las operaciones, obtuvo 3 \$ y fracción, precio que expresó,

completamente ajena al disparate que decía; la hicimos rectificar por el sentido común, y quedó asombrada de lo que había hecho. Revisó las operaciones y halló el error; mala reducción de los ms.³ á cms.³)

($\times \times + \times \times +$) — Se ha cavado un sótano de 6.50 ms. de largo por 4 de ancho y 2.60 de altura; ¿qué costará la excavación si se pide 1.10 \$ por m.³ y se paga 0.55 \$ por cada viaje de carro que lleva $\frac{1}{2}$ m.³ de tierra? La tierra removida, aumenta $\frac{1}{4}$ de su volumen.

Objetivación



$a b c d$, volumen del sótano.
 $m d e n$, volumen de la tierra removida.
 $o p$, volumen de cada carrada de tierra.

Discusión inductiva. — I. — Hay que hallar el volumen del sótano.

II. — Por las razones expuestas en el problema anterior, la forma del sótano es la de un paralelepípedo.

III. — El jornalero cobra por el metro cúbico de excavación y no de tierra removida.

VI. — El carrero cobra por el volumen de tierra removida.

V. — El costo de la excavación se compone de lo que cobran el jornalero y el carrero

VI. — El volumen de tierra removida es el del sótano más $\frac{1}{4}$ del mismo volumen.

VII. — Lo que se paga por viaje es lo que se paga por 0.500 ms.³

Descomposición. — I. — ¿Cuál es el volumen de un sótano de forma de un paralelepípedo que mide etc.? — a ms. cbs.

II. — ¿Qué costará una excavación de a ms.³ si se paga 1.10 \$ el m.³?

III. — ¿Cuál es el volumen de la tierra removida del sótano? b ms.³

IV. — Cuánto costará el acarreo de b ms.³ de tierra si se paga 0.55 \$ por 0.500 ms.³?

V. — ¿Cuánto costará el todo, si la excavación costó m \$ y el acarreo n \$?

Análisis deductivo. — I. — Si el volumen de un paralelepípedo es largo $\times$ ancho $\times$ altura, el volumen del sótano será $6.5^m \times 4^m \times 2.6^m = 6.5 \times 4 \times 2.6$ ms.³, volumen de la tierra excavada por el jornalero ó antes de removerse.

II. — Si por 1 m.³ de excavación se paga 1.10 \$, por $6.5 \times 4 \times 2.6$ ms.³ de excavación se pagarán $6.5 \times 4 \times 2.6$ veces más ó $6.5 \times 4 \times 2.6 \times 1.10$ \$.

III. — Si la tierra removida aumenta $\frac{1}{4}$ del volumen que tiene antes de removerse, el volumen de la tierra sacada del sótano y que debe acarrear el carrero será

$$6.5 \times 4 \times 2.6 \text{ ms.}^3 + \frac{6.5 \times 4 \times 2.6}{4} \text{ ms.}^3$$

IV. — Si para acarrear 0.500 ms.³ de tierra se paga \$ 0.55 para acarrear 1 m.³ se pagará 2×0.55 y para acarrear toda la tierra removida se pagará

$$\left(6.5 \times 4 \times 2.6 + \frac{6.5 \times 4 \times 2.6}{4} \right) \text{ veces } 2 \times 0.55 \text{ $}.$$

V. — Si la excavación costó $6.5 \times 4 \times 2.6 \times 1.10$ \$ y el acarreo

$$\left(6.5 \times 4 \times 2.6 + \frac{6.5 \times 4 \times 2.6}{4} \right) 2 \times 0.55,$$

el todo habrá costado la suma.

Respuesta. — Simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{5 \times 6.5 \times 4 \times 2.6 \times 2 \times 0.55}{4} + 6.5 \times 4 \times 2.6 \times 2 \times 0.55 = \\ & \frac{5 \times (6.5 \times 4 \times 2.6 \times 2 \times 0.55) + 4 (6.5 \times 4 \times 2.6 \times 2 \times 0.55)}{4} = \\ & 9 \times 6.5 \times 2.6 \times 1.10 = \text{etc. \$ que costó el sótano.} \end{aligned}$$

Por el método de las ecuaciones. — La forma del análisis no varía, pero las relaciones entre las partes son más fáciles de establecer. *La igualdad* une, por comparación, los datos ó condiciones de un problema á la cuestión ó pregunta, considerada como elemento conocido.

Se comienza por la pregunta: lo que se pregunta es la incógnita, x , y no debe representar jamás otra parte del enunciado. Hecha la ecuación, trabajo que constituye el razonamiento, el resolverla, es el ejercicio de aislamiento y valorización de una letra mediante operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La fórmula, es una ecuación en la que la

incógnita ocupa un miembro y el otro no es sino una combinación de operaciones aritméticas. Por eso en la escuela primaria es posible tratar el volumen y superficie de los cuerpos, su caída y peso; hidrostática, calor y sonido, no para cometer el desatino de deducir la fórmula mediante el proceso razonativo, sino para emplearla como síntesis de un análisis ya hecho, en infinidad de cuestiones que el alumno necesita resolver. ¿Acaso no usa el mismo procedimiento el ingeniero? ¿No tiene su memorándum, no es un valorizador de fórmulas? ¿No es esta una práctica en matemática, razonar con síntesis consideradas como elementos de nuevos análisis?

La mayor parte de los problemas, de penosa solución usando métodos puramente aritméticos, resultan sencillísimos en ecuaciones: no hay que escribir sino lo que dice el problema.

Esta simplicidad se explica considerando que la ecuación, sin que nos apercibamos, resume varios problemas simples sin que, para resolverlos, necesitemos del largo análisis aritmético.

Por ejemplo: Un individuo recibió en pago de una deuda de 1600 \$, 25 vacas y 500 \$. ¿Cuánto valía cada vaca? Aritméticamente, necesitamos descomponer en dos el problema. I.— Si un individuo recibió por 1600 \$ 25 vacas y 500 \$ ¿cuánto valían las vacas? — II. Si 25 vacas valían a \$ ¿cuánto valía cada una?

Algebráicamente, nos basta escribir una igualdad siguiendo el enunciado: Sea x el precio de cada vaca; las 25 valdrían \$ 25 x . Entonces $25x + 500 = 1600$ \$.

Para valorizar x , quitamos 500 y dividimos por 25, basados únicamente en propiedades de la igualdad como ejercicio abstracto y no por indicaciones analíticas del problema.

Ejemplos. — Una tela, después de mojada, disminuye $\frac{1}{10}$, etc.

I. — Sea x el largo de la tela antes de la inmersión, dato que se pide; hechas las inducciones obtenemos.

II. — Superficie antes de la inmersión $0.80 \times x \text{ ms.}^2 = a b c d$.

III. — Pero $a b c d = 100 \text{ ms.}^2 + a n b o + o c m d$; luego.

IV. — $a b c d = 100 \text{ ms.}^2 + 0.80 \times \frac{x \text{ ms.}^2}{19} + \frac{18 x}{19} \times \frac{0.80}{13} \text{ ms.}^2$, según se desprende de la objetivación.

V. — Entonces, $0.80 x = 100 + \frac{0.80 x}{19} + \frac{18 x}{19} \times \frac{0.80}{13}$

Hasta aquí el razonamiento.

VI.— Hay una ecuación, hay una incógnita: despejamos x por los procedimientos conocidos, basados en las propiedades de la igualdad.

Todo se reduce á encontrar la superficie de tres rectángulos cuya suma equivale á otro, considerando á x como una longitud conocida. La objetivación, inductivamente, sin esfuerzo analítico, da las dimensiones de los rectángulos, sus áreas y la igualdad de la primera á la suma de las otras tres.

Las dos agujas de un reloj están superpuestas á medio día. Se pregunta á qué hora tendrá lugar la superposición siguiente.

Transformación del enunciado.—Las dos agujas de un reloj están superpuestas á medio día; se pregunta á qué hora tendrá lugar la superposición siguiente, sabiendo que en el momento de avanzar, el horario lleva al minuterio 60 divisiones de ventaja y mientras el horario anda 1 en 12 minutos, el minuterio anda 12.

Transformación del problema en derivados.—Dos trenes recorren el mismo camino con velocidades distintas. En el momento de partir, son las 12 y uno lleva al otro 60 Kms. de ventaja; pero el que va atrás anda 12 Kms. mientras anda 1 el que va adelante. Se pregunta ¿á qué distancia del punto de partida encontrará el 1º al 2º y á qué hora si su velocidad es de 1 Km. por minuto?

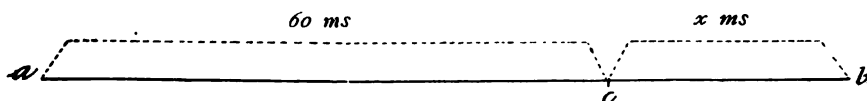
Otro.—Un perro corre una gallina á 60 ms. de distancia en el momento de la persecución; pero mientras el perro avanza 12 ms. en 12 minutos, la gallina avanza solo 1. ¿A qué distancia del punto de partida alcanzará el perro á la gallina y á qué hora, si la persecución comienza á las 12?

Aritméticamente el problema queda resuelto* con este sencillísimo análisis:

I. Si cada 12 minutos el perro avanza 12 y la gallina 1 metro, el perro, cada 12 minutos le aventaja 11 ms.

II. Para aventajarle los 60 ms. tendrá que andar tantas veces 12 minutos como veces 11 esté contenido en 60 ó $5 \frac{5}{11}$ veces 12 minutos ó 1 h. 5 minutos y $\frac{5}{11}$ de minutos.

Objetivación



a punto de partida del perro; c punto de partida de la gallina; b punto de encuentro.

Discusión inductiva.—I. ab es la distancia que recorre el perro para alcanzar en b a la gallina.

II. ab es igual á 60 ms. $+ x$ ms.

III. (Homóloga de la I) cb ó x ms., es la distancia que recorre la gallina antes de ser alcanzada por el perro.

IV. El perro y la gallina corren el mismo tiempo, puesto que sale la gallina de c al mismo tiempo que el perro de a , es decir, que $60 + x$ ms. y x ms. son recorridos en el mismo tiempo por dos animales diferentes ó, en otros términos, mientras el perro anda $60 + x$ ms. la gallina anda x ms.

V. Mientras el perro anda 12 ms. en 12 minutos, la gallina anda 1 m. en el mismo tiempo.

Descomposición.—I. Si un perro anda 12 ms. en 12 minutos, cuántas veces 12 minutos empleará para recorrer $60 + x$ ms.?

II. (Homólogo). Si una gallina anda 1 m. en 12 minutos, ¿cuántas veces 12 minutos necesitará para recorrer x ms.?

III. Sabiendo que el perro y la gallina emplean el mismo tiempo para recorrer respectivamente $60 + x$ ms. y x ms., formar la igualdad y hallar el valor de x .

IV. Tiempo que el perro necesita para recorrer $60 + x$ ms., sabiendo que anda 12 ms. en 12 minutos.

Análisis deductivo.—I. Si anda 12 ms. en 12 minutos, empleará para recorrer $60 + x$, tantas veces 12 minutos como 12 ms. quepan en $60 + x$ ms. ó $\frac{60+x}{12}$ veces 12 minutos.

II. Si la gallina anda 1 m. en 12 minutos, empleará para recorrer x ms. tantas veces 12 minutos como veces 1 m. quepa en x ms. ó $\frac{x}{1}$ veces 12 minutos.

III. Pero el tiempo que emplea el perro es el mismo que el que emplea la gallina. Entonces: $\frac{60+x}{12} \times 12 = 12 \times \frac{x}{1}$.

Solución del ejercicio.— $\frac{60 \times x}{12} = x$; $60 + x = 12x$, $11x = 60$, $x = 5 \frac{5}{11}$.

IV. Si anda 12 ms. en 12 minutos, anda un metro en un minuto; para andar $60 + x$ ms. empleará $60 + x$ minutos ó $60 + 5 \frac{5}{11} = 65 \frac{5}{11}$.

Respuesta.—La distancia x es de $5 \frac{5}{11}$ ms. La distancia recorrida por el perro será $60 + 5 \frac{5}{11}$ ó $65 \frac{5}{11}$ ms. El tiempo para recorrerla de 1 hora y $5 \frac{5}{11}$ de minutos.

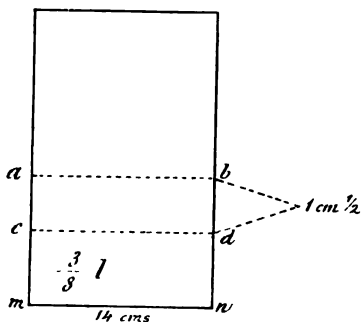
Relaciones con el problema típico.—El perro representa al minuto y la gallina al horario. Las distancias son las divisiones del cuadrante que recorren las manecillas del reloj, expresadas en ms.

Luego, el minuterero recorre desde las 12, $65\frac{5}{11}$ divisiones; cada una, por coincidencia de espacio y tiempo, en un minuto; luego, alcanza al horario (se sobrepone) á los $65\frac{5}{11}$ minutos ó á la 1 y $5\frac{5}{11}$ minutos de la tarde, porque partieron á las 12.

Sin las inducciones, la solución del problema es difícil por sus varias condiciones implícitas, desde luego una importante: la de que los minutos son, á la vez, espacio y tiempo, de modo que la confusión de dos hechos tan distintos es fácil para el poco avisado; para las agujas, en la misma unidad de tiempo, varia el espacio; en la misma unidad de espacio varia el tiempo; de modo que no es posible para ambas, decir: en 1 minuto de tiempo recorren 1 minuto de espacio. Estos problemas, en que el espacio recorrido por dos móviles á velocidades diferentes, se relaciona con el tiempo para recorrerlo, responden á un solo tipo tratado por los textos bajo el nombre de *Problema de los correos*, y no obstante ofrecen á los alumnos, siempre dificultades invencibles, debido á la falta de referencia y de inducciones objetivadas.

Para calcular el volumen de objetos pequeños de forma irregular, nos hemos servido de un cilindro de 14 cms. de diámetro en el cual se habían echado $\frac{3}{8}$ de un litro de agua. Con la inmersión de los objetos, se elevó el agua 1 cm. y $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la altura del agua en el cilindro y cuál el volumen de los objetos?

Objetivación



Discusión inductiva.—I. El agua toma la forma de la vasija que la contiene: $m c d n$, $a b c d$, y $m a b n$ son todos cilindros.

II. Volumen del cilindro es $\pi R^2 A$.

III. $\frac{3}{8}$ de litro representa un volumen de $\frac{3 \times 1000}{8}$ cms.³ ó 375 cms.³ porque un litro equivale á 1000 cms.³

IV. Altura del agua en el cilindro es $m c + c a$ ó $m a$.

V. $m c d n$ es el volumen del agua en el cilindro antes echar los objetos, $\frac{3}{8}$ de litro ó 375 cms.³

VI. $a b c d$ es aumento del volumen del agua después de echar los objetos; representa, evidentemente, el volumen de los objetos.

VII. Debemos determinar el volumen $a b c d$ y la altura $a m$.

VIII. $c d = m n$.

Descomposición.—I. ¿Cuál es el volumen del cilindro $a b c d$ si el diámetro de la base mide 14 cms. y la altura 1.5 cms.?

II. ¿Cuál es la altura $m c$ de un cilindro si su volumen es 375 cms.³ y el diámetro de la base 14 cms.?

III. ¿Cuál es la altura $m a = m c + c a$ de un cilindro, si $c a$ mide 1.5 cms. y $m c$ el cociente dado por el problema anterior?

Análisis deductivo.—I. Volumen del cilindro $a b c d$, valorizando la fórmula $\pi R^2 A$, es $3.14 \times 7^2 \times 1.5$ cms.³, volumen de los objetos y objeto del problema según las inducciones VI y VII.

II. Volumen del cilindro $m c d n$ es de 375 cms.³; pero, por otra parte, el volumen del mismo cilindro $m c d n$ es $\pi \times 7^2 \times m c$, entonces (dos cosas iguales á una tercera, etc.) $\pi \times 7^2 \times m c = 375$ cms.³ Aislando $m c$, tengo $m c$ cms. = $\frac{375}{3.14 \times 7^2}$ cms.

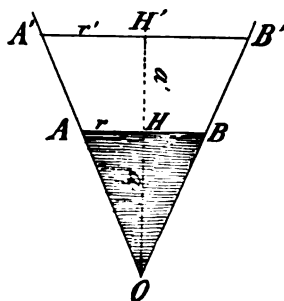
III. La altura $m a$ ó $m c + c a$, es 1.5 cms. + $\frac{375}{3.14 \times 7^2}$ cms., contestación á la otra pregunta del problema.

+ $\times \times$:, fórmulas, valorización y sustitución.

Un vaso vacío contiene cierta cantidad de mercurio á 0°. ¿A qué temperatura es necesario elevarlo para que la altura del nivel de mercurio aumente $\frac{1}{185}$ de su altura primitiva?

Coef. de dilat. absoluta del mercurio $\frac{1}{5550}$.

Objetivación



Representemos por x la temperatura buscada.

Discusión. Inducciones.—I. ABO , es un cono, volumen que ocupa el mercurio á 0° .

II. $A'B'O$, otro cono, volumen que ocupa el mercurio á x grados.

III. AH , radio r de la superficie libre del mercurio á 0° ; $A'H'$ radio r' de la superficie libre á x grados: a y a' las alturas OH y $O'H'$.

Condiciones: I. HH' es $\frac{1}{185}$ de OH .

II. (Implicita del problema). En GANOT, busco *calor, dilatación cúbica de los sólidos*; en pág. 268 encuentro: *fórmulas que sirven para pasar de un volumen á 0° á un volumen á T grados*: $v' = v (1 + 3k t)$ en donde v' es el volumen que ocupa el cuerpo á t grados, v el que ocupa á 0° , $3k$ coeficiente de dilatación absoluta. Relacionando estas iniciales con los datos del problema, tendremos:

$v' =$ cono $O'A'B'$; $v =$ volumen del cono ABO ; $3K = \frac{1}{5550}$; $t = x$.

III. Los triángulos $A'H'O$ y AHO son semejantes de donde $\frac{r}{a} = \frac{r'}{a'}$.

Descomposición.—I. Siendo HH' , $\frac{1}{185}$ de HO , ¿cuánto será $O'H'$?

II. Cuál es el volumen del cono ABO y del cono $O'A'B'$?

III. Valorizar x en la fórmula $v' = v (1 + 3k x)$, substituyendo las letras por sus valores respectivos.

IV. Conociendo a' y a y sabiendo que $\frac{a'}{a} = \frac{r'}{r}$, valorizar $\frac{r'^2}{r^2}$.

Análisis deductivo.—I. Si HH' es $\frac{1}{185}$ de HO , HO ó a será $\frac{185}{185}$ y $HH' + HO = O'H' = a'$, será $\frac{185}{185} + \frac{1}{185} = \frac{186}{185}$.

II. Volumen v del cono ABO , aplicando la fórmula, es: $v = \frac{\pi r^2 a}{3} = \frac{r^2 \times 3.14}{3} \times \frac{185}{185}$.

III. Volumen v' del cono $O'A'B'$, aplicando la fórmula, es: $v' = \frac{\pi r'^2 a'}{3} = \frac{r'^2 \times 3.14}{3} \times \frac{186}{185}$.

IV. Valorización de la fórmula por substitución:

$$\frac{r'^2 \times 3.14 \times 186}{3 \times 185} = \frac{r^2 \times 3.14 \times 185}{3 \times 185} \left(1 + \frac{x}{5550}\right)$$

De donde $186 r'^2 = 185 r^2 \left(1 + \frac{x}{5550}\right)$ y $\frac{r'^2}{r^2} = \frac{185}{186} \left(1 + \frac{x}{5550}\right)$

$$\text{V. } \frac{a'}{a} = \frac{r'}{r}; a' = \frac{186}{185} \text{ y } a = \frac{185}{185}; \text{ entonces } \frac{r'}{r} = \frac{186}{185} \div \frac{185}{185} \\ = \frac{186}{185} \text{ y } \frac{r'^2}{r^2} = \frac{186^2}{185^2}.$$

VI. Substituyendo en la igualdad de IV tendremos

$$\left(\frac{186}{185}\right)^2 = \frac{185}{186} \left(1 + \frac{x}{5550}\right).$$

$$\text{De donde } 1 + \frac{x}{5550} = \left(\frac{186}{185}\right)^3.$$

Respuesta. — $x = 99^{\circ}$.

Una cocinera da á un cazador 100 \$ para que el cazador le entregue 100 piezas á razón de 5 cts. cada chingolo; de 5 \$ cada liebre y de 1 \$ cada perdiz. ¿Qué cantidad de chingolos, de liebres y de perdices entregaría el cazador á la cocinera, de manera que las 100 piezas importasen 100 \$?

I. Representemos por x , por y y por Z , respectivamente, los chingolos, las liebres y las perdices que el cazador entregó á la cocinera por 100 \$.

II. Tendremos $x + y + Z = 100$. (1)

III. x chingolos, á 0.05 \$ c. u., valdrán \$ 0.05 x ; y liebres á 5 \$. \$ 5 y ; Z perdices á 1 \$ Z ; luego $0.5 x + 5 y + Z = 100$. (2)

IV. Comparando la igualdad (1) con la (2), eliminamos Z y obtendremos $x - 0.5 x + y - 5 y = 0$ ó $0.95 x - 4 y = 0$ de donde $19 x - 80 y = 0$.

V. De aquí se induce que 19 veces los chingolos es igual á 80 veces las liebres.

Discusión inductiva deductiva.—I. El valor de x y de y no puede ser una fracción, porque tal cosa supondría que el cazador vendió piezas que no eran enteras, contrario al enunciado del problema.

II. Siendo x é y números enteros; siendo $19 x$ igual á $80 y$: siendo 19 primo con 80, 19 es factor de y , y 80 factor de x .

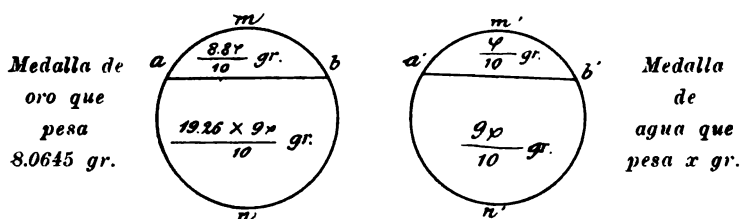
III. Si 19 es factor de y , y es 19 ó un múltiplo de 19; si 80 es factor de x , x es 80 ó un múltiplo de 80.

IV. x no puede ser 2 veces 80 (el menor múltiplo de 80) porque $2 \times 80 = 160$, resultarían 160 chingolos, cantidad que excede al total de las piezas.

V. Luego, x es 80. Los chingolos son 80. Substituyendo en $19 x = 80 y$, el valor de x , obtenemos $y = 19$; substituyendo en (1) $Z = 1$.

¿Cuánto pesa la cantidad de oro que contiene una medalla del mismo peso que un argentino, pero la aleación se hizo considerando el volumen de las partes y no el peso, es decir, 900 partes volumétricas de oro por 100 partes volumétricas de cobre?

Objetivación



Análisis inductivo.—I. El argentino pesa 8.0645 gramos.

II. 9 partes en volumen son de oro y una de cobre.

III. En todo problema donde interviene la densidad como elemento de análisis ó se trata de relacionar volumen y peso, debe compararse al agua, tomándola en igualdad de peso ó en igualdad de volumen.

IV. Supongamos la igualdad de volumen, ó que la medalla fuese de agua; representemos por x los gramos que pesa esta medalla de agua, del mismo volumen que la de oro.

V. Dividamos una y otra medalla en 10 partes: una parte, la $a m b$ será cobre; 9 partes, $a b n$, será oro.

VI.—La décima parte $a m b$, será igual en volumen, á la décima parte $a' m' b'$ y $a b n$ á $a' b' n'$.

Análisis deductivo.—I. Si la medalla de agua pesa x gramos, la décima parte, ó $a' m' b'$, pesará $\frac{x}{10}$ gramos.

II. Igual cantidad de cobre (igual parte, igual volumen) pesará $\frac{x}{10} \times 8.8$ ó el peso del agua por lo que el cobre pesa más (su densidad).

I.—(Análogo). Si la medalla de agua pesa x gramos, los $\frac{9}{10}$ ó $a' b' n'$ pesarán $\frac{9x}{10}$.

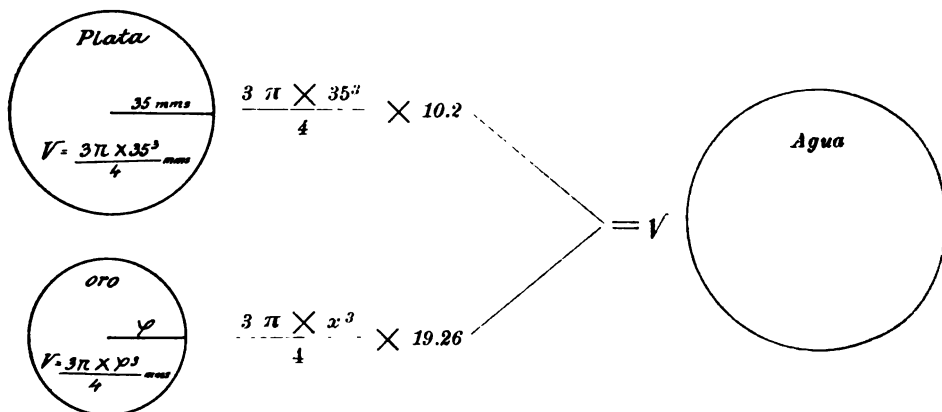
II. Igual cantidad de oro pesará $\frac{9x \times 19.26}{10}$.

III. Luego, si $a m b$ pesa $\frac{8.8x}{10}$ y $a b n$ $\frac{19.26 \times 9x}{10}$ $a m b + a b n$ ó sea la medalla de oro, pesará $\frac{8.8x}{10} + \frac{19.26 \times 9x}{10}$, de donde $\frac{8.8x}{10} + \frac{19.26 \times 9x}{10} = 8.0645$; $x = \frac{80.645}{28.03} = 0.442$ grs., peso de la cantidad de agua igual al volumen del argentino.

R.—El oro de la medalla pesaba grs. $\frac{19.26 \times 9x}{10}$: substituyendo el valor de x . etc.

¿Cuál será el diámetro de una bola de oro que pesa tanto como una de plata de 35 mms. de radio?

Objetivación



Discusión inductiva. — I. Las dos bolas tienen la forma de una esfera.

II. Pesan lo mismo.

III. Podemos hallar un volumen de agua que pese tanto como la bola de plata y tanto como la de oro.

IV. Ese volumen, por pesar lo mismo, por ser de la misma substancia debe ser el mismo.

Descomposición. — I. ¿Cuál es el volumen de una bola de plata de 35 mms. de R ?

II. ¿Cuál es el volumen de una bola de oro de x mms. de R ?

III. ¿Cuál es el volumen de una esfera de agua del mismo peso que la bola de plata?

IV. ¿Cuál es el volumen de una esfera de agua del mismo peso que la bola de oro?

V. Plantear la ecuación.

Análisis deductivo. — I. Siendo $\frac{3\pi R^3}{4}$ el volumen de una esfera, la bola de plata, tiene de volumen $\frac{3\pi \times 35^3}{4}$ mms.³

II. Por la misma razón, el volumen de la bola de oro es, representando por x su radio, $\frac{3\pi \times x^3}{4}$ mms.³

III. Desde que la plata es 10.2 veces más pesada que el agua, igual peso de agua ocupará un volumen 10.2 veces mayor que el de la

plata. Luego, el volumen de la esfera de agua *que pesa tanto como la de plata*, será $\frac{3\pi \times 35^3 \times 10.2}{4}$ mms.³

IV. Desde que el oro es 19.26 veces más pesado que el agua, igual peso de agua ocupará un volumen 19.26 veces mayor que el del oro. Luego, el volumen de la esfera de agua *que pesa tanto como la de oro*, será $\frac{3\pi \times x^3 \times 19.26}{4}$ mms.³

V. Pero la de oro y la de plata, pesan lo mismo; lo mismo pesarán las dos esferas de agua, y, de consiguiente, su volumen es igual. Entonces

$$\frac{3\pi \times 35^3 \times 10.2}{4} \text{ mms.}^3 = \frac{3\pi \times x^3 \times 19.26}{4} \text{ mms.}^3$$

una igualdad, en la que debe hallarse el valor de su única incógnita, x .

VI. Eliminando por división á $\frac{3\pi}{4}$ y dividiendo por 6 los términos que quedan, obtenemos $35^3 \times 1.7 = x^3 \times 3.21$ de donde x , etc.

Las series son, como las de ejercicios, de fijación ó de evocación, con la diferencia de que aquí se trata no solo de fijar ó evocar operaciones, sino axiomas, principios, teoremas, leyes, fórmulas, conocimientos de física, geometría, química, historia y geografía; y, por último, procedimientos analíticos con relación á determinados tipos, variando la forma de derivados fijos en cuanto á estructura.

Como es fácil notar en la distribución de las lecciones, las de fijación alternan con las de evocación, éstas más numerosas que aquéllas y constituyendo, mezcladas á los problemas, series mixtas.

IV

Las lecciones. — *Lecciones deficientes.* — Los problemas, cual los ejercicios, son de *solución oral* ó de *solución escrita*, lo que depende no de las combinaciones sino de las cantidades.

Todo razonamiento de forma típica ó derivada, persiste organizado mediante la ejercitación verbomental por ser del punto de vista del tiempo, más rápi-

da que la escrita; en números pequeños la atención se reconcentra sobre el análisis y no sobre la operación; las imágenes resultan claras y el trabajo provechoso; jamás la enseñanza de un problema típico comenzará por el caso más general; se llega á él por los particulares aparte de la descomposición si el problema es compuesto, que constituye una serie de problemas sin tiza, ni lápiz, ni pizarra, ni papel, de rápidas soluciones. Por ejemplo:

Caso típico. — Hallar dos números cuya suma sea s y el cociente de su división c .

Descomposición. I — El cociente de dividir un número por otro es c , ¿Cuántas veces es mayor uno que otro? II — Un número es c veces mayor que otro; juntos ¿cuántas veces el menor representa? III — Un número, más otro c veces mayor, suman s . ¿Cuáles son los números?

Particularización verbomental. (Objetivando). I — Dividiendo un número entre 3, obtenemos 4 de cociente ¿cuál es el número? II — Dividiendo un número por otro obtenemos 4 de cociente ¿cuántas veces es mayor el primero que el segundo? III — 12 es 4 veces 3; juntos, ¿cuántas veces el menor valen? IV — El dividendo de una división exacta es siempre ¿cuántas veces mayor que el divisor? deducido de preguntas como estas: ¿12 : 3 es cuánto? ¿12 es cuántas veces 3? 21 ÷ 7 es cuánto? ¿21 es cuántas veces 7? V — El divisor es ¿cuántas veces el divisor, siempre? VI — El dividendo y el divisor ¿cuántas veces el divisor es? VII — Un número es 4 veces otro, juntos ¿cuántas veces el menor? VIII — Un número más otro 4 veces mayor es 15 ¿cuáles son los números? IX — El cociente de dividir un número por otro es 4; la suma de los dos números es 15 ¿cuáles son los números?

Generalización escrita. I — El cociente de dos números es 40; juntos ¿hacen cuántas veces el menor? II — Un número más otro 40 veces mayor suman 32062. ¿Cuáles son los números? III — Hallar dos números cuya suma sea 32062 y el cociente de su división 40.

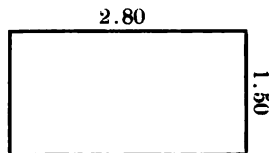
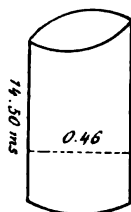
Las soluciones escritas deben precederse por una larga ejercitación verbamental de casos paralelos partiendo de la base que: todo problema de Aritmética á una ó muchas combinaciones, puede resolverse sin auxilio de apuntes, adaptando las cantidades á nuestra capacidad mnésica. Hay grados como el 1º donde puede llegarse, desde Abril, á problemas orales de tres combinaciones; mientras que escritos, de dos, se razonan sólo en Septiembre. No trepidamos en atribuir la escasa aptitud de los alumnos para analizar problemas, al mal procedimiento de los textos adoptados por los maestros, que no preparan la mente con ejercitaciones orales, descomponiendo y objetivando los casos. El problema que nos ha servido de ejemplo (de división en la serie de LAVERNHE) se daría sin otras indicaciones que las del texto, *problemas de dividir*; el alumno después de una hora de inútiles esfuerzos, volvería al siguiente día aduciendo el eterno estribillo de *no lo pude sacar*, al que se responde con enojos é improperios poco aparentes para disponer el ánimo á favor de la asignatura. Al sermón sucede la habitual pregunta: *¿quién lo ha sacado?* Dos levantan la mano; el epílogo es que uno de los dos va á la pizarra mural; diez ó doce minutos de evasivas á los insistentes *por qué* del maestro y, luego, conclusión ninguna.

El maestro, con un auditorio de nervios excitados, se decide, entonces, á enseñar el problema sin descomponerle, ni objetivarle, como si se tratara de una forma sobradamente conocida. Los niños, entre tanto hueco sin llenar, resuelven el problema sí, pero ignoran absolutamente el por qué de las operaciones. Esta forma se arraiga de tal manera, que luego hallan natural que las operaciones respondan al *por qué* de la operación misma.

De lo que hemos dicho se desprenden innumerables objeciones a los textos de Aritmética y problemas, guías de maestros que mal haríamos en llamar rutinarios, pero sí, cortos de vista; no hay tal seriación: un tipo sucede á otro sin descomposiciones que gra-

dúen las dificultades; las aritméticas enseñan lo que menos enseñanza exige y en la conciencia de los autores que los problemas constituyen el alma de la asignatura, eluden el compromiso de dar direcciones acerca del análisis de series extensísimas impresas al fin de los capítulos que los grados nunca resuelven. O muy fáciles ó muy difíciles, no sirven ni de fijación ni de evocación, puesto que nunca recapitulan. Para que las de LAVERNHE resultasen útiles, mezclamos los problemas: tres de suma, tres de resta, tres de multiplicación, tres de suma y resta, tres de suma y multiplicación, constituían una serie para 2º grado al comenzar las lecciones de dividir; tales arreglos responden difícilmente á las exigencias de la enseñanza; pero mientras no se disponga de un texto de ejercicios y problemas adaptado al método que propiciamos, habrá que servirse de ellos. Hoy mismo, momento antes de concluir este capítulo, una alumna de 5º grado dá como resultado del siguiente problema: *¿ Cuántas planchas de plomo se necesitan de 2.8 ms. de largo por 1.50 ms. de ancho para construir con ellas un caño cilíndrico de 0.46 ms. de diámetro por 14.50 metros de largo ?* 498642 CHAPAS, escrito en la pizarra y leído con voz ingenuamente alta, sin que ningún alumno de los 40, indicase el error y aceptado con el *está bien* de la que practica. ¿ Cómo es posible un despropósito semejante? El análisis estaba bien hecho. Pero con estos defectos elementales, perturbadores del proceso:

I. — La objetivación:



la chapa de la misma altura que el cilindro; desproporción gráfica entre la altura y el diámetro del cilindro.

II. — Ninguna inducción hecha, la de imaginar el tubo ó la chapa en su extensión real.

III. — Las cantidades, menos una, sin denominaciones. De modo que cada conclusión parcial no era ni podía ser rectificada por el sentido común. Por eso escribimos en su bosquejo : ¡ LAS DENOMINACIONES SEÑORITA ! frase que ya levanta callo en nuestros dedos.

IV. Olvido del punto decimal por tener para el alumno menos importancia que la de una cifra exacta del cociente.

V. No someter el resultado al sentido común para rectificarlo; comparando la cantidad de chapas con las que aproximadamente se necesitarían para el caño.

VI. El resultado inverosímil, por cuanto no se hacen caños de plomo de las dimensiones indicadas.

Pero, errores que descubren procedimientos habituales deben atribuirse á incapacidad para comprender ? Absolutamente ; reflejan la mala preparación del maestro. La practicante había preparado el bosquejo, con esta proposición :

$$S L = \text{Cir} \times A.$$

$$S L = 2 \pi \times A.$$

$$S L = 2 \times 3.14 \times 0.23 \times 14.50.$$

$$S L = 20.943 \text{ ms.}^2 \text{ área del cilindro}$$

$$\text{Area de la hoja} = 2.8 \times 1.5 = 4.2 \text{ ms.}^2$$

$$\frac{20.943}{4.2} = \frac{20.943}{4200} = 498.$$

Los mismos defectos que exteriorizó el alumno al razonar por su cuenta.

Estamos convencidos de que hay maestros que trabajan por hábito y no por conciencia ; el hábito es el triunfo de una lucha larga y constante para encauzar una actividad que cada momento tiende á desviarse por otros hábitos. Los alumnos, consentidos por el

profesor, usan el análisis de forma compleja: las faltas de construcción y concordancia, factores inmediatos de perturbación en todo desarrollo lógico, son así frecuentísimas. Por nuestra parte, empeñosos siempre, conseguimos del niño que expusiera el raciocinio, las reglas, las inducciones, las deducciones, diciendo: 1° tal cosa, 2° tal otra, 3° tal otra. De aquí que actualmente posean lenguaje matemático, exacto y conciso, dos condiciones que llamaron la atención de la señorita DOLORES DE LAS CARRERAS, directora de la Escuela Normal de Buenos Aires en su visita al establecimiento. Me admira el lenguaje tan preciso con que se expresan estos alumnos, nos dijo; de otra manera, no exteriorizarían conocimientos de aritmética ó geometría en forma lógica y coherente.

Hay escuelas, resabios de la égida norteamericana, en cuyos horarios se destinan día por medio, lecciones al *cálculo mental*, ejercicios de tablas y combinaciones orales de $+$, $-$, $\times$ y $:$. Monótonas por no ser los ejercicios sino de una especie, no las resiste la atención, 25 minutos; nos parece más segura esta enseñanza, hecha todos los días durante dos ó tres minutos del principio.

Todo esfuerzo es concurrente. Una suma, ejercita más la tabla de sumar que la misma tabla. El cálculo llamado oral, es una reacción verbo-auditiva; hemos dicho muchas veces que en la práctica es visomotora. Es cierto que los visomotores transforman la reacción en verbo-auditiva, espontáneamente; no obstante, lo contrario, es más simple.

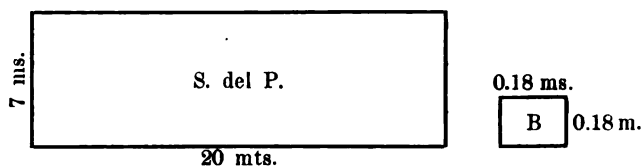
Las lecciones de problemas — Hay que distinguir las de *enseñanza* de las de *examen*. En las de enseñanza el maestro trata sólo *un problema típico*; da instrucciones acerca de su objetivación, descomposición y análisis sirviéndose, al efecto, de la pizarra donde plantea, dentro de una forma abreviada rigurosamente correcta, la solución, insistiendo mucho acerca de la colocación de los términos, uso de las líneas, abreviaciones y denominaciones á fin de prevenir los erro-

res que instintivamente el niño comete ; haciendo notar las equivocaciones en que se cae y las consecuencias de la mala interpretación. Así (casos observados en 4º grado) un alumno plantea el problema : *¿ Cuántas baldosas se necesitan de 0.18 ms. de lado para empi-sar un patio de 20 ms. de largo por 7 de ancho ? de esta manera :*

$$\begin{aligned} A P &= B \times A \\ L \text{ --- } 20 & \quad A \text{ --- } 7 \text{ ms.} \\ A P \text{ --- } 20 \times 7 &= 140 \text{ m.} \\ A B &= C.^2 \\ .18 \text{ mts.} \times .18 \text{ mts.} &= .0324 \text{ m.} \end{aligned}$$

R. 140 : .0324 = 432 baldosas, resultado inexplicable que se debe á una planteación cuyos defectos, por hábito, son fáciles de notar, comparándola con la que debía haber hecho el alumno :

Objetivación



$$\begin{aligned} S. \text{ del } P &= L \times A. \\ L &= 20 \text{ ms.} \\ A &= 7 \text{ ms.} \\ 20 \times 7 \text{ ms.}^2 &\text{ ó } 140 \text{ ms.}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S. \text{ de la } B &= L^2. \\ S. \text{ de la } B &= 0.18^2 \text{ ms.}^2 \text{ ó } 0.0324 \text{ ms.}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S \text{ del } P}{S \text{ de la } B} &= \text{número de baldosas.} \\ \frac{140 \text{ ms.}^2}{0.0324 \text{ m}^2} &= \frac{140000 \text{ cm.}^2}{324 \text{ cm.}^2} = 4320 \text{ baldosas.} \end{aligned}$$

para ser analizada en la forma ya conocida.

En las *lecciones de enseñanza*, el alumno es espectador, interrumpe, sólo para interrogar acerca de lo que no comprende. En las *lecciones de examen* se trata una serie de problemas; la misión del maestro es I. Distribuir los problemas de la serie á los alumnos que manda al pizarrón. II. Hacer el interrogatorio oral de recapitulación de *el principio* (5 á 8 minutos). III. Recibir las recitaciones y apreciar el trabajo hecho por los alumnos en la pizarra. IV. Corregir ó hacer corregir los errores deslizados en el análisis, si estos son de naturaleza tal que no exijan una lección para subsanarlos. V. Designar series para la lección próxima y hacer indicaciones acerca de problemas que las exijan, ya porque concurren conocimientos de que no está seguro el alumno, ya porque ignora un principio necesario para una discriminación rápida de las partes.

Este sistema de lecciones con el texto impreso de los enunciados resulta económico, provechoso y agradable; el alumno estudia las soluciones, en su casa, donde el horario escolar no pone límites al tiempo que se necesita para un análisis, diferente en cada sujeto; mientras unos emplean 6 minutos otros emplean 40; el esfuerzo mental sin plazos apremiantes, resulta fructuoso para el desarrollo de la aptitud y sólo así pueden conseguirse reacciones completas sin que el alumno se sienta impelido, frente á las dificultades, á buscar concursos extraños para hacer el trabajo; ningún maestro ignora cuanto se lucha, no para convencer sino para que el alumno haga sus análisis sin recurrir á la ayuda del compañero más inteligente; se colige, cuan absurdo es, no tratándose de problemas simples y muy conocidos en cuyo caso no llegamos al fin que nos proponemos, llamar los niños al pizarrón, darles un problema nunca visto, y pretender dentro de plazos apremiantes que centuplican las dificultades, apreciar su capacidad matemática. Los inteligentes y los tardíos se confunden en un común fracaso, que nos obliga al más grave de los errores, á infantilizar la enseñanza por juzgar arriba de la apti-

tud del grado, casos que no analiza en circunstancias que el maestro considera favorables.

Por otra parte, el análisis de un problema exige operaciones á veces largas, que un 5° ó 6° grado, ningún interés tiene en verlas. Si llamamos á un alumno cada vez y exigimos que trabaje bajo la atención nuestra y del grado, se impone una actitud pasiva, mientras se hace una multiplicación de 5 minutos : mientras se hace una división de 8. En 25 minutos trabaja un niño y examinamos un problema. Cada serie, en vez de una lección, ocupará cinco y por este camino el principio de hacer *mucho en poco* es una quimera.

De un problema, por difícil que parezca, es imposible que no puedan escribirse algunas inducciones, algunas deducciones, algunos enunciados de la descomposición. Si no se alcanzó á satisfacer la pregunta, debe apreciarse el esfuerzo y no comprender bajo la reprobación del que nada hizo, al que de alguna manera exteriorizó sus empeños para vencer las dificultades ; estos estímulos al que trabaja, cultivan lo que tanto necesita el desarrollo de la aptitud matemática : confianza en sí mismo, fé en la propia capacidad.

Las explicaciones que los alumnos den del problema son de tres especies : 1° Perfectas tocante á lenguaje y análisis. 2° Aceptables, pero incorrectas tocante á lenguaje é incompletas tocante á análisis. 3° Inaceptables del punto de vista del análisis por resultar erróneo.

Ninguna de las tres debe interrumpirse por ningún motivo. La explicación debe escucharse por economía de tiempo y para dejar, al alumno, oportunidad de juzgar, por sí mismo, el trabajo que ha hecho. Pero la 2ª, no bien termine, será comentada y corregida rápidamente. La 3ª, rechazada in limine, substituyendo al alumno, por otro, si se trata de un caso dentro de la capacidad del grado ó reservándolo para tema de la lección siguiente si sus dificultades se juzgan invencibles por la mayoría del grado.

Primer grado.— El primer grado se inicia en el razonamiento, con casos mentales, de carácter objetivo: suma primero, resta después, suma y resta y resta y suma, á dos términos, á tres, á cuatro, etc. Desde el mes de Agosto, á los problemas mentales, se agregan los que, por sus números obligan á usar la tiza ó el lápiz. De construcción como los anteriores, adquieren, á la vista de los alumnos, más importancia, exigen más tiempo, abarcan mayor número de elementos y dan á la enseñanza aspecto más general y panorámico, combinando solo operaciones de suma y resta á proposiciones sencillas y explícitas. El problema mental á números pequeños, es un tema constante de las lecciones durante todo el año y la aplicación inmediata de los conocimientos aritméticos que el alumno asimila. Los hay, pues, de multiplicación y de la multiplicación combinada con la suma y resta.

A los objetos suceden las figuras y á las figuras las imágenes (visión interna), marcha inalterable para cada especie de problemas si deseamos evitar discriminaciones confusas que de tantas falsedades mentales suelen ser origen, malogrando no pocos entusiasmos y esfuerzos de maestros empeñosos. Así, no diríamos: « En una plaza hay tres caminos, el 1º con 8 árboles; el 2º con 6, y el 3º con 9; ¿cuántos árboles tienen los tres caminos? » antes que: miren Vds.: « Sobre esta mesa hay 8 cuadernos: 6 sobre aquélla; y sobre aquélla 9, ¿cuántos cuadernos son, juntándolos? »

Poner en manos del alumno un texto, sean cuales fueren sus bondades pedagógicas, es un error.

El libro con figuras y discretas explicaciones, nunca sobrepujará á aquellos métodos que emanan directamente del maestro que usa las cosas, la pizarra y pone á contribución los cien recursos y habilidades del hombre activo con la vista de los niños, no sobre el papel, sino dirigida á su persona; que mueve y fija donde conviene, mediante el uso de aparatos, figuras, colores, cosas; que maneja el niño observando

el amplio y variado panorama de las mesas y pizarrones, donde todo cambia, todo es vistoso, vitalizado por el lenguaje activo del maestro y las prácticas de los alumnos.

No obstante, como útiles auxiliares para elegir los problemas que el maestro dará á la clase, recomendamos *El Cálculo Infantil* de LAMADRID y FERREYRA; ningún libro conocemos con ejercicios mejor combinados para las lecciones de los primeros meses. *El Cálculo oral y escrito* de F. TISCORNIA, *El Cálculo mental* de H. ROBINSON, y la *Aritmética elemental* « basada en el nuevo sistema mental y práctico, adoptado en las principales escuelas de los Estados Unidos », de JORGE R. PERKINS. Entendido que estos libros no deben ir á manos de los alumnos de primer grado, sino del maestro, quien se servirá de ellos para preparar el desarrollo de sus lecciones, teniendo presente que no son ricas en cuanto á *especies de problemas*.

El problema, dijimos, puede, desde el punto de vista de las combinaciones, ser simple ó compuesto, un todo cualitativo descomponible ó no en partes. El todo compuesto no es sino la reunión de proposiciones simples. La solución general no es sino un agregado de las soluciones particulares, una, la última, con la pregunta del problema.

El razonamiento (discriminación) exige la misma forma :

a) *Descomposición* del enunciado en problemas simples.

b) *Objetivación* particular (expresión gráfica del enunciado).

c) *Solución razonada* de cada caso particular.

d) *Integración general* aparte de las operaciones sucesivas que van conduciendo á la fórmula final.

No es didáctico, en este menos que en otro grado, el procedimiento de aquellos maestros que dividen la solución en dos partes :

a) *Planteación* (fórmula y operaciones).

b) *Análisis ó razonamiento*, pues la planteación es el resultado del análisis.

El primer grado, en los primeros meses, resuelve problemas mentales de una ó varias combinaciones con los objetos á la vista; las operaciones hechas moviendo los objetos, agrupándolos ó separándolos según las indicaciones del enunciado, dibujando en la pizarra y escribiendo una igualdad. El trabajo es, en los últimos meses, inverso; del enunciado se pasa á las cosas ó á la expresión gráfica que es más generalizadora y puede con ella, tratarse dimensiones fuera del ambiente escolar, como de ríos, montañas, rebaños, etc., para deducir, luego, las operaciones. Sin embargo, estos análisis no alcanzarán la amplitud que deben tener en los siguientes grados.

La solución de problemas es una enseñanza que debe hacerse como la de cualquier otro punto de la Aritmética. De cada una de las series graduadas, según la especie (número de combinaciones) se tomarán dos ó tres problemas que el maestro descompondrá y objetivará delante de los niños.

Luego, se acostumbra á los alumnos al mismo ejercicio por los procedimientos comunes; por fin, prácticos en la versión gráfica de los enunciados y en la descomposición, comenzarán el razonamiento, tratando de ser, en los problemas que resuelvan, lo más individual posible; no ignoramos el desacertado sistema que emplean algunas escuelas de enseñar problemas como si fueran temas de adquisición y no de aplicación; el niño repite lo que le fué inculcado y nó elaborado. La honradez pedagógica, más aun que el principio, exige el abandono de prácticas tan perjudiciales.

Este asunto no reviste la importancia que tienen otros.

Desarrollo de algunas lecciones

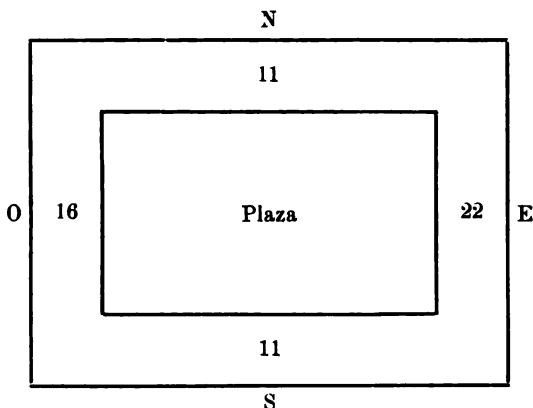
LECCIÓN 14 (Agosto) 1^{er} grado

Tema. — Solución por escrito, de problemas de suma y resta, números compuestos. (Enseñanza.)

Proposición. I — Quiere saberse cuántos bancos

hay en una plaza si se han colocado en los caminos del norte y sud 11 bancos en cada uno ; en el del oeste 16 y en el del Este 22.

Objetivación



Descomposición

No hay, puesto que el problema es simple.

Razonamiento

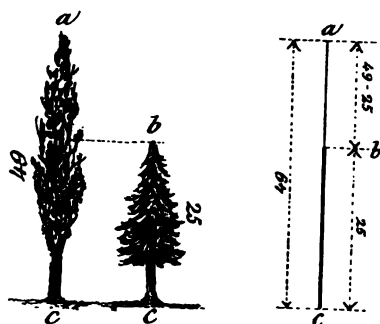
Si en un camino hay 11 bancos ; en otro 16; en otro 11 y en otro 22, en los cuatro caminos habrá tantos bancos como la suma de $11 + 16 + 11 + 22$ que es igual á 60.

Respuesta

En la plaza hay 60 bancos.

Ejemplo. II — Un eucalipto tiene 49 metros de altura ¿ Cuánto más debe crecer un pino de 25 metros para alcanzarlo ?

Objetivación



$a c$ es el eucalipto de 49 metros.

$b c$ es el pino de 25 metros.

$a b$ es la diferencia entre la altura de una y otra planta.

Descomposición

No tiene.

Razonamiento

Si el pino tiene 25 metros y el eucalipto 49, el eucalipto es más alto y le falta al pino para alcanzarlo, la porción $a b$ que es igual á 49 menos 25 ó sea 24 metros.

Respuesta

El pino debe crecer 24 metros para tener la altura del eucalipto.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — ¿Cuántos cuadernos son 8 cuadernos y 3 lápices? (*mostrando los objetos*).

A. — Son 8 cuadernos.

www.libtool.com.cn

M. — ¿Cuántos vidrios son 12 vidrios y 9 cerraduras?

A. — Son 12 vidrios.

M. — ¿Cuántos vidrios son 6 vidrios y 11 vidrios?

A. — Son 17 vidrios.

M. — Presten atención, 9 naranjas y 6 duraznos ¿cuántas frutas son?

A. — Son 15 frutas.

M. — En efecto, 9 naranjas son 9 frutas, y 6 duraznos 6 frutas; luego, podríamos decir 9 frutas y 6 frutas, ¿cuántas frutas son? Hemos dicho que para sumar las cantidades deben tener el mismo nombre, la misma denominación. ¿Podremos sumar ladrillos con árboles?

A. — No podemos sumar ladrillos con árboles porque son de diferente denominación.

M. — ¿Podremos sumar una cantidad de metros de género con otra cantidad de varas del mismo género?

A. — No, señor, porque en un caso son metros, en otros varas.

M. — (*Pasan á la pizarra, seis alumnos*). Objetiven las frases que voy á enunciar:

La distancia entre Mercedes y Luján.... (Todos dibujan una recta á la que ponen las iniciales M y L.

La altura de un árbol es de 12 metros.... (Como en el caso anterior, escribiendo la dimensión).

En un montón hay 18 naranjas; en otro 25 y en otro 2.... (Dibujan tres circunferencias de diferente tamaño, dentro de las que escriben el correspondiente número).

Vuelvan á sus asientos. (*Pasan otros seis*).

M. — Objetiven: *Una jarra contiene 6 litros de leche otra 3.... (Dibujan dos secciones rectangulares).*

Se quiere saber cuántos metros tiene más de altura un eucaliptus que un peral....

En un terreno se han cavado 5 pozos....

De una jarra que contenía 7 litros de leche se derramaron 2 litros....

Un árbol tiene 5 ramas, 2 rotas....

Una copa contiene aceite y vinagre (algunos escriben A en la división inferior y V en la superior).

M. — ¿Quién ha visto aceite y vinagre juntos?

A. — El vinagre queda abajo y el aceite arriba.

M. — ¿No lo ha observado Vd. así, Tomasa? Corrija. Vuelvan á sus asientos.

Medio. — M. — Vamos á resolver este problema, (*lee el problema*). Primeramente lo objetivamos, así: (*el dibujo de la proposición*). Esta figura representa la plaza, la plaza San Martín. ¿Cuántos costados tiene la plaza?

A. — Tiene cuatro costados.

M. — En efecto: uno arriba, otro abajo y dos laterales (*señalando*). En cada costado ¿cuántos caminos hay?

A. — En cada costado hay un camino.

M. — De modo que la plaza tiene un camino aquí, otro aquí, otro aquí y otro aquí. Total, cuatro caminos. Pero el enunciado, no dice *un camino aquí, otro aquí, y otro aquí*, porque el enunciado no tiene dedos para señalar al que se refiere. Entonces dice *camino norte*. ¿A qué lado está el Norte?

A. — Hacia aquel lado (*indicando*).

M. — Este costado de la figura representa la parte Norte de la plaza (*escribe N*).

Camino Sud ¿hacia qué lado está?

A. — (*Indica*).

M. — ¿Qué lado de la figura está al Sud?

A. — El lado de abajo.

M. — (*Escribe S.*) Este otro lado representa el Oeste y este otro el Este.

Quiere saberse cuántos bancos hay en una plaza si se han colocado en los caminos del N. y S. 11 bancos en cada uno. Esto quiere decir que en el camino de este costado se han colocado 11 bancos (*escribe 11*) y en el del S. otros 11. Sigamos leyendo el enunciado: en el del Oeste 16 y en el del Este 22; es decir 16 bancos aquí y 22 aquí. Estos (*señalando*), son todos los bancos que contiene la plaza: 11, 16, 22 y 11. ¿Cuántos son en todo? Si en un camino hay 11 bancos y en otro 16, en los dos caminos habrá (*señalando siempre*) $11 + 16$ bancos (*escribiendo*) si en es-

tos dos caminos hay $11 + 16$ bancos y en este 11 bancos, en los tres habrá $11 + 16 + 11$ bancos; si en los tres primeros hay $11 + 16 + 11$ bancos y en el 4º 22; en los 4 caminos habrán 11 bancos + 16 bancos + 11 bancos + 22 bancos ó (*hace la suma*) 60 bancos.

Debajo de la objetivación el maestro plantea así el problema :

N		11	banco
O	+	16	>
S	+	11	>
E	+	22	>
Total		60	>

Resolvamos este otro. Un eucaliptus, etc.

Objetivemos. El eucaliptus es más alto que el pino, puesto que mide 49 ms. de altura mientras el pino sólo mide 25. Entonces, ¿cuál de estas dos figuritas representa el eucaliptus ?

A. — La de aquí.

M. — Indique, leyendo las letras.

A. — La figurita *ca*; y *cb* al pino.

M. — Bien: 49 ms. ésta y 25 ms. ésta (*escribiendo*).

Para mayor sencillez, representemos al eucaliptus con una línea de la misma altura y al pino, de la misma manera. Esta es la altura del eucaliptus (*trazando la curva de puntos*). ¿Qué número escribiremos ?

A. — 49 metros.

M. — Y esta, la del pino. ¿Qué número escribiremos ?

A. — 25 metros.

M. — Transportemos la altura del pino sobre la del eucaliptus. . . . este pedazo es lo que le falta al pino para ser de la misma altura que el eucaliptus. Para saber cuánto mide, quitamos de la altura del eucaliptus (*señalando*) ó 49 ms. la altura del pino ó 25 ms. Evidentemente, nos queda este pedazo, ó la medida de este pedazo, ó la diferencia entre la altura de los dos árboles.

Para quitar de 49 ms., 25 ms. restamos, así :

$$\begin{array}{r} 49 \text{ ms.} \\ - 25 \text{ ms.} \\ \hline 24 \text{ ms.} \end{array}$$

Luego, el pino debería crecer 24 ms. más para tener la misma altura del eucaliptus.

Fin. — (Pasan cuatro niños al pizarrón y el resto saca sus pizarras).

M.—Resuelvan este problema. Un peral tiene cuatro ramas : la 1ª con 12 frutas ; la 2ª con 30 ; la 3ª con 26 y la 4ª con 43. ¿ Cuántas frutas carga el peral ?

Als. — (*Objetivan y hacen la operación*).

M.—Explique, Alejandro, diciendo antes el problema.

A. — Un peral tiene 4 ramas, etc.

Represento el peral por estas líneas : este es el tronco y estas las ramas. En la primera rama pongo 12....

M.—¿ Pongo ?

A.—Escribo 12 porque carga 12 peras. En la 2ª escribo 30 porque carga, etc.

M.—¿ Quiénes lo han hecho así ?

A.—Para saber cuántas carga el peral, tengo que sumar....

M.—¿ Por qué debe sumar ?

A.—Porque si la primer rama carga 12 frutas la 2ª 30, la 3ª, etc., las cuatro juntas ó el peral cargarán tanto como lo que carga la 1ª más lo que carga la 2ª, más lo que carga la 3ª, más lo que carga la 4ª que es igual á la suma de etc.

M.—Recuerden que al razonar un problema, no quiero que me digan *para hacer este problema hay que sumar*, sin antes decir por qué. Recuerden que se comienza siempre por la palabra *Si*: *si* esta rama carga tanto, esta otra tanto, etc.

M.—Vuelvan á sus asientos los de la pizarra. (*Pasa un niño*). Resuelvan este otro problema :

La chimenea de la usina de las aguas corrientes tenía, antes de caerse, 38 ms. Lo que queda en pie, mide 13 ms. ¿cuántos metros de chimenea se ha caído ?

Als. — (*Objetivan y hacen las operaciones*).

M. — Explique, Josefa.

A. — Esta línea representa la chimenea antes de caerse ; esta otra, la parte que quedó en pie después de la caída. Esta línea menos esta, representará la parte que se cayó. Si esta línea ó la chimenea mide 38 ms. y esta otra 13 ms., la parte que se cayó, medirá este largo menos este largo ó sea $38 - 13$ que es 35 ms.

Deberes. — Se dan dos problemas derivados para el día siguiente.

LECCIÓN 17ª (Septiembre)

Tema. — Enseñar á descomponer un problema compuesto, en simples ; á resolver cada uno y á integrar las respuestas para analizar el todo.

Proposición. — Un particular ha comprado un caballo en 41 pesos ; una vaca en 26 y un carnero en 12 ; se quiere saber cuánto ha ganado si vende el caballo en 52 pesos, la vaca en 32 y el carnero en 15 pesos.

DESCOMPOSICIÓN

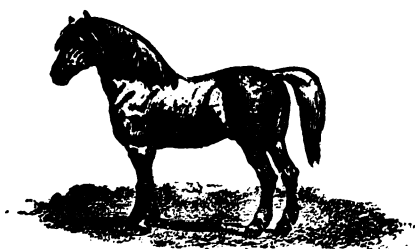
1ª Problema. — Un particular ha comprado un caballo en 41 pesos, una vaca en 26 y un carnero en 12, ¿ cuánto ha gastado en los tres animales ?

2ª Problema. — Ha vendido el caballo en 52 pesos, la vaca en 32 y el carnero en 15, ¿ cuánto ha recibido ?

3ª Problema. — Un particular ha comprado tres animales por.... \$ y vendidos los mismos por ... \$ ¿ cuánto ha ganado ?

Objetivación

1er PROBLEMA



Gastó: 41 \$



12 \$



26 \$

2º PROBLEMA



Recibió: 52 \$

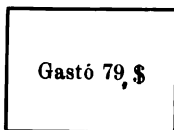


15 \$

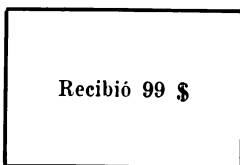


32 \$

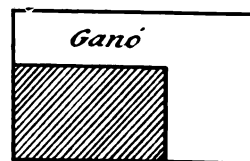
3er PROBLEMA



(líneas rojas)



(líneas blancas)



Razonamiento

1° Si compró un caballo por 41 pesos, una vaca, etc., gastaría tantos pesos como la suma de $41 + 26 + 12$ que es igual á 79 \$.

2° Si vendió el caballo en 52 \$, etc., recibirá tantos pesos como la suma de $52 + 32 + 15$ que es igual á 99 \$.

3° Si gastó 79 \$ en los tres animales y recibió 99 por los mismos, ganaría tantos pesos como tenga demás 99 que 79 \$ que es 20 \$.

Respuesta

Ganó 20 pesos.

Desarrollo. — A. — M. — Piense cada uno un problema de sumar.

A. — Tres carros llevan trigo á la estación : uno 56 bolsas, otro 65 bolsas, otro 49 bolsas ; ¿cuántas bolsas de trigo llevan ?

Pide el enunciado á dos más.

M. — ¿Qué operaciones deberán hacerse para resolver este problema : un pozo de 22 ms. de profundidad, después de echársele tierra, no tiene sino 15 ms. ¿ hasta qué altura se le ha rellenado ?

A. — Hay que hacer la operación de restar.

M. — Ahora, observen. Esta caja está vacía ; echo en ella 7 bolitas ; después 5 más ; luego 10 más ; luego 4 ; ¿cuántas bolitas contiene ?

A. — 26 bolitas.

M. — ¿Qué han resuelto Vds ?

A. — Un problema de sumar. (*Preparación en la pizarra*).

M. — Muy bien. Quito de esta caja que contiene 26 bolitas, 8 bolitas primero (*quitándolas*) ; 6 bolitas después y 11 bolitas luego (*juntándolas en otra caja*). ¿Cuántas bolitas he quitado de la caja ?

A. — Vd. ha quitado 25 bolitas.

M. — ¿Qué han resuelto Vds.?

A. — Hemos resuelto un problema de sumar.

M. — ¿Cuántos problemas han resuelto Vds. acerca de las bolitas y esta caja?

A. — Hemos resuelto dos problemas de sumar.

M. — Ahora, en esta caja habían 26 bolitas, he quitado 25 ¿cuántas bolitas quedan?

A. — Queda una bolita.

M. — ¿Qué problema han resuelto Vds.?

A. — Un problema de restar.

M. — ¿Cuántos problemas acerca de la caja y las bolitas?

A. — Tres problemas.

M. — Ahora vamos á juntar estos tres problemas en un solo enunciado, para que sea más corto, y digo:

Juan echó á una caja 7 bolitas; Josefa 5 bolitas y Santiago 10 y 4; vino María y se llevó 8; vino Alda y se llevó 6; vino Teresa y se llevó 11; ¿cuántas bolitas quedaron en la caja?

En este problema largo, hay tres cortitos, los mismos que acaban Vds. de resolver. Y se resuelve, resolviendo los cortitos. Por eso hay que descomponerlo en cortitos, sino no puede resolverse. El 1^{er} cortito es: Si Juan echó en una caja, etc. ¿cuántas bolitas se echaron á la caja?

El 2^o cortito es: Si María se llevó 8 bolitas, etc. ¿cuántas bolitas se llevaron?

El 3^o cortito es: Si tres niños echaron á la caja $7 + 5 + 10 + 4$ bolitas y otros tres, etc. ¿cuántas bolitas quedaron en la caja?

Una vez escritos estos problemitas, se resuelven: al resolverlos queda razonado el problema largo, así:

El 1^o: Si Juan echó en una caja 7 bolitas, Josefa echó 5, etc., entre los tres habrán echado tantas bolitas como la suma, etc.

El 2^o: Si María quitó, etc.

El 3^o: Si unos niños echaron á la caja 26 bolitas y otros quitaron 25, en la caja, etc., que es lo que preguntaba el problema largo.

(El maestro, tanto en la recomposición como en la descomposición, habrá hecho lo siguiente :

1°	2°	3°
$\begin{array}{r} 7 \\ + 5 \\ + 10 \\ + 4 \\ \hline 26 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ + 6 \\ + 11 \\ \hline 25 \end{array}$	$\begin{array}{r} 26 \\ - 25 \\ \hline 1 \end{array}$

De modo que todo problema que exige más de una operación debe descomponerse en problemas cortos ó de una operación, para razonarlos).

M. — Descompongan Vds. en problemas cortos ó simples á este problema :

En un nido de gallina habían 8 huevos (*objetivando con un círculo y con 8 en el medio*); en otro 11 huevos; la comadreja se comió 6 ¿cuántos huevos quedaron en los nidos?

A. — Quedaron 13 huevos.

M. — No pregunto el resultado. Descompóngalo en problemas más cortitos, en los que Vds. han hecho para resolverlo.

A. — En un nido de gallina habían 8 huevos y en otro 11 ¿cuántos huevos habían?

M. — Bien. Habían 19 huevos (*escribe la operación en la pizarra*). Otro problema simple ó corto que nos dé la solución del largo.

A. — En dos nidos habían 19 huevos. La comadreja se comió 6; ¿cuántos huevos quedaron?

M. — Eso es. Quedaron 13 huevos, que es la respuesta á la pregunta del problema largo. ¿Hay cuántas operaciones que hacer?

A. — Hay dos.

M. — ¿En cuántos problemas cortitos se descompuso el largo?

A. — En dos problemas?

M. — Luego, todo problema, para razonarlo, hay que objetivarlo y descomponerlo.

B. — M. — Analicemos éste: Un particular, etc, (*problema escrito con anticipación en la pizarra y objetivado, como se indica al principio*). Traduzcamos el enunciado en figuras. (*A medida que enuncia, señala*). Un particular ha comprado un caballo en 41 \$; una vaca en 26 y un carnero en 12; se quiere saber cuánto ha ganado si vende, etc.

Se han comprado estos animales y se han vendido los mismos; si restamos de lo que cuestan (*señalando siempre*) lo que produjo la venta nos da la ganancia. Descompongámoslo:

1º Un particular ha comprado, etc. ¿cuánto gastó?

Resolviéndolo: si un particular gastó en un caballo 41 \$; en etc., en los tres animales habrá gastado 41 \$, + 26 \$, + 12 \$ ó 79 \$.

2º Si un particular vendió el caballo en 52 \$, etc., ¿en cuánto ha vendido los tres animales?

Resolviéndolo: Si un particular vendió, etc.

3º Si un particular compró un caballo, una vaca y un carnero en 79 \$ y vendió los mismos animales en 99 \$, ¿cuánto ganó?

Resolviéndolo: Si en la compra gastó 79 \$ y en la venta obtuvo 99 \$, ganaría tantos pesos como la cantidad que recibió menos la que gastó ó 99 — 79 que es 20 \$, es decir, este cuadro que representa 99 \$ menos este que representa 79, para quedar este.

C. — Tomen las pizarras. Descompongan en problemas cortos á éste:

En un canasto se rompieron 15 huevos; en otro 14; quedaron en uno y otro 30 sanos. ¿Cuántos huevos contenían los canastos al principio?

Als. — (Después de un rato). En un canasto se rompieron 15 huevos y en otro 14 ¿cuántos huevos se rompieron?

A. — Se rompieron 29 huevos de los que contenían dos canastos y 30 quedaron sanos ¿cuántos huevos había en los canastos?

M. — (Ejercita á sus alumnos en la descomposición y razonamiento de enunciados semejantes á los que sirvieron de tema).

INDICACIONES

En primer grado conviene que la objetivación sea hecha con la representación misma de las cosas para pasar poco á poco á los esquemas ó diagramas, de carácter convencional.

LECCIÓN 5ª (3º grado S. ; Septiembre)

Tema. — Ejercicios de objetivación y descomposición de enunciados.

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — Pasen Marín, Prando, Rodríguez, Videla, Lombán y Etcheverry con sus textos de problemas, á la pizarra : (*supongamos la serie mixta apuntada en el Cap. IX, pág. I para este grado*). Marín, objetive el 3º y 11º problema ; Prando, el 8º ; Rodríguez, el 9º y 12º ; Videla, descomponga en enunciados simples el problema 13º ; Lombán, en enunciados simples, el 14º ; Etcheverry, en enunciados simples, el 9º.

M. — (*A la clase*). — Una distancia de 15 Kms. se anda en 3 horas ¿cuántos Kms. se andan en una hora ?

A. — Si en 3 horas se anda 15 Kms. en una hora se andará 3 veces menos ó $\frac{15}{3} = 5$ Kms.

M. — ¿ Cuántas horas se emplearán para andar una distancia de 15 Kms. á razón de 3 Kms. por hora ?

A. — Si para andar 3 Kms. se necesita una hora, para andar 15 Kms. se necesitarán tantas horas como veces esté 3 contenido en 15 ó $\frac{15}{3} = 5$ horas.

M. — Distancia dividida por distancia ¿qué da ?

A. — Tiempo : horas, días, años, minutos.

M. — Efectivamente; cuando se trata de una distancia fija recorrida por un cuerpo en movimiento. ¿ Distancia dividida por tiempo da ?

A. — Da distancia en una hora, un día, un minuto, etc.

M. — Un correo, en una hora, anda 12 Kms. ; otro, en el mismo tiempo, anda 9 Kms. ¿ Cuántos Kms. anda uno más que el otro ?

A. — El 1° anda 3 Kms. más que el 2°, porque si aquél recorre en una hora 12 Kms. y éste, en el mismo tiempo, sólo 9, la diferencia entre las dos distancias, nos dará lo que en una hora este último queda atrás.

M. — Bien. Pero, no queremos, ahora, saber los Kms. que el uno aventaja al otro, sino las veces que el uno anda, en una hora, más que el otro.

A. — Quiere decir las veces que lo que recorre el uno es más que lo que recorre el otro. Es lo mismo que averiguar cuántas veces un número ó una distancia, es mayor que otra ó 12 Kms. mayor que 9. Un número es mayor que otro tanto como veces le contiene ; 9 en 12 está contenido $\frac{12}{9}$, porque toda fracción expresa un cociente ; luego el 1° anda $\frac{12}{9}$ más que el 2°.

M. — (*Objetivando*). Ahora, el primer correo anda, en 3 horas, 15 Kms. y el 2° anda la misma distancia á razón de 3 Kms. por hora. ¿ Cuántas veces la velocidad del uno es mayor que la del otro *en el mismo tiempo* ?

A. — Si el 1° correo, en 3 horas, anda 15 Kms. en 1 hora andará 3 veces menos ó 5 Kms.

Otro. — Si el 1° en 1 hora, anda 5 Kms. y el 2° 3 Kms. en el mismo tiempo, el 1° andará más que el 2° tantas veces, etc.

M. — Tengan Vds., en adelante, presente, que al preguntarse cuántas veces la velocidad de una cosa es mayor que la de otra, no es necesario decir *en el mismo tiempo* ; se subentiende. Se ha convenido que siempre sea así. De modo que el problema puede resolverse de esta otra manera : Si el 2° anda 3 Kms. por hora, en 3 horas andará 9 Kms. ; si el 1° en 3 horas, anda 15 Kms. y el 2° 9, la velocidad del primero será tantas veces la del 2°, como 9 esté contenido en 15 ó $\frac{15}{9}$ veces mayor, lo que, en resumidas cuentas, es lo mismo que sacó Arfanotti, pues, $\frac{15}{9}$ simplificado, es $\frac{5}{3}$; y nos daría siempre una fracción igual, siempre que

averigüemos lo que anda uno y otro en el mismo tiempo : 3, 4, 5, 8, 20 horas.

M. — El minuterio de un reloj anda 60 divisiones de la esfera mientras el horario anda 5, ¿cuántas veces anda más el minuterio que el horario ?

A. — (*Resuelve*).

M. — ¿ Cuántas veces más tiempo empleará el horario para andar las mismas divisiones del minuterio ?

A. — (*Resuelve*).

Medio. — M. — Explique, Marín, su trabajo.

A. — (*Sin leer en el texto*). Se dice que en la isla de Ceilán hay un árbol muy viejo que tiene 2193 años ; represento su edad por esta línea recta ; que en una plaza de París hay un olmo plantado en 1609. Su edad será los años transcurridos desde 1609 hasta hoy ó 1903 — 1609 = 294. La represento por esta otra recta mucho más corta que la primera porque representa 294 años mientras que aquélla representa 2193. Se quiere saber en cuánto, la edad del árbol de Ceilán pasa á la del de París ; quitando del valor de la vertical más larga, el valor de la vertical más corta.

M. — Explique la objetivación del 11.

A. — Un obrero gasta 2.85 \$ al día y trabaja 24 días al mes, etc.

Represento lo que economiza en un año ó 360 días, por esta horizontal ; lo que economiza en un día, que es $\frac{1}{360}$ de 300 \$, por este pedacito de línea. Lo que gasta en un día ó 2.85 \$, por esta recta ; lo que economiza por día ó $\frac{300}{360}$ \$, por esta otra. Lo que gasta y lo que economiza, constituye lo que gana por día, esta raya más esta otra.

M. — (*Pide las explicaciones á los demás*).

Díganos Videla, lo que ha hecho.

A. — Tres personas trataron de economizar para un viaje, lo más posible. La 1ª alcanzó á juntar, etc. La primera parte no se puede descomponer porque es simple. Para saber cuál economizó más, hay que saber cuál de estas tres fracciones es mayor $\frac{25}{60}$, $\frac{84}{184}$ ó $\frac{33}{99}$.

2° ¿Cuánto es $\frac{25}{60}$ de 60 \$?

3° ¿Cuánto es $\frac{84}{184}$ de 60 \$?

4° ¿Cuánto es $\frac{33}{99}$ de 60 \$?

M. — Explique su descomposición, también.

A. — 1° Una caja contiene 12 docenas de plumas ¿cuántas plumas contiene ?

2° 144 plumas valen 1.80 \$ ¿cuánto cuesta una pluma ?

3° ¿ Si una pluma vale $\frac{1.80}{144}$ \$ cuántas plumas podrán comprarse con 90 cts. ó 0.90 \$?

M. — Explique, Etcheverry.

A. — 1° ¿ Cuántas cajas caben en un cajón de 25 centímetros de lado ?

2° ¿Cuál es el volumen de 100 cajas de 2.5 dms. de largo por 125 mms. de ancho y 5 cms. de alto ?

M. — ¿ Es posible resolver el primer problema de Etcheverry ?

A. — No, señor ; porque no se dan las dimensiones de las cajas que van á entrar en el cajón.

Otro. — El problema está descompuesto mal ; porque se quiere construir un cajón grande que contenga á 150 cajas de 25 cms. de lado y 100 cajas de otra capacidad.

M. — En efecto, es así.

A. — Luego, hay que conocer el volumen que ocupan las 150 cajas y las 100 cajas para no construir un cajón más chico ó más grande.

M. — Observaciones muy bien hechas. ¿ La descomposición, sería, Etcheverry ?

A. — 1° ¿Cuál es el volumen de 150 cajas de 25 centímetros de lado cada una ? Serán de la forma de un cubo.

2° ¿Cuál es el volumen de 100 cajas que miden 2.5 dms. de largo, etc.

3° Si 150 cajas tienen un volumen de $0.25 \times 0.25 \times 0.25 \times 150$ cms.³ y 100, un volumen de 2.5 dms. $\times 125$ mms. $\times 5$ cms. $\times 100$. ¿ Qué volumen ocupan todas ? Que será la capacidad que hay que dar al cajón.

Fin. — *M.* — ¿Cómo objetivaremos esta frase de un enunciado: Recibí 85 \$ por la venta de cierta cantidad de papas; 139 por la venta de cierta cantidad de frutas y 5 por la venta de lechugas?

A. — Por tres líneas unidas por el signo más; la más larga representando 139 \$; la más corta, etc.

A. — También, por tres cuadraditos de diferente tamaño, etc.

M. — La altura de un eucaliptus es doble de la de un naranjo. . . .

A. — Dos verticales: la que representa el eucaliptus, calculada doble de la que representa el naranjo.

M. — Se compraron 2 Kgs. y 30 Dgs. de café. . .

A. — Un cuadrado representando 2 Kgs. + un cuadrado más chico representando 30 Dgs.

M. — Con una docena de botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿cuántos vasos de $3\frac{1}{4}$ decilitros podrán llenarse?

A. — Con un cuadrado grande dividido en 12 chicos é iguales; cada chico, con el N° $\frac{3}{4}$ l. Luego, un cuadrado más chico que los anteriores, puesto que representará la copa que contiene menos que cada botella. Se trata de ver cuántas veces el cuadrado chico está contenido en los otros doce ó en el grande, que es la suma de todos ellos, para lo cual bastará dividir.

M. — El caracol anda 0.0015 ms. por segundo, ¿cuánto tiempo tardará en dar la vuelta á un patio de forma cuadrada, que tiene 5.50 ms. de cada lado?

A. — Dibujo, primeramente, un cuadrado; á cada uno de sus cuatro lados escribo la dimensión 5.50 ms. Luego, trazo una línea muy larga que equivalga más ó menos al contorno del cuadrado; en esa línea señalo una pequenísima extensión que represente 1.5 mms.; cuántas veces esta medida esté contenida en la línea, nos dará los segundos que emplea el caracol para recorrer el perímetro, porque una distancia fija, dividida por la distancia que anda un animal, nos da tiempo.

M. — Descompónganlo en enunciados simples.

A. — ¿Cuánto medirá el contorno de un patio cuadrado, si cada lado mide 5.50 ms. ?

A. — ¿Cuánto tiempo empleará un caracol que anda 0.0015 ms. por segundo, en recorrer tantos metros de distancia ?

Deberes. — Para pasado mañana, resuelven los problemas de esta serie y traen, como deber, el análisis del problema 13.

LECCIÓN 7ª. — (3^{er} grado superior. Septiembre)

Tema. — Solución de los problemas de la serie anterior por los alumnos. Lección de examen y de enseñanza.

Desarrollo. — *A.* — *M.* — Dejen sus deberes sobre el banco y pasen al pizarrón. Echegaray, Moreno, Spencer, Emilia y Victoria con el texto de ejercicios y problemas. Echegaray, el problema 8; Moreno, el 10; Spencer, el 12; Emilia, el 4 y 6; Victoria, el ejercicio 7. No disponen más que de 8 minutos para preparar sus trabajos.

M. — Recoja la primera fila, los deberes . . . Atiendan, ahora. ¿Cuánto es 13 por 12 ?

A. — 156, porque 10 veces 13, 130 y 2 veces 13, 26; 130 + 26 igual á 156.

M. — Ocho más 5, más 5, más 3, más 9, más 6, dividido por 9, multiplicado por 11, menos 5, dividido por 13 ¿cuánto es ?

A. — Es 3.

M. — Agreguen siempre 9 al número que voy á dar: conteste, Magri: 14, 84, 34, 54, 32, 52, 82, 102. Ortiz, agregue ocho, 8, 23, 33, 53, 63, 203, 13; 85, 5, 65, 95; 89, 7, 65, 13.

¿ Abreviación de Kms. ?

A. — *Ka* mayúscula, etc.

M. — ¿ Abreviación de círculo ?

A. — Una *C*.

M. — Números divisibles por 9 que tengan más de tres cifras y ninguna cifra 9.

Als. — 45315, etc.

M. — ¿Qué números son divisibles por 6?

A. — Los que lo son por 2 y por 3.

M. — ¿44 dividido entre 100? ¿9826 dividido entre 10, etc.? ¿Fracciones del mismo valor que $\frac{1}{2}$? ¿Qué $\frac{1}{3}$? ¿Lugar de la cifra 8 cms.³, siendo la denominación ms.³? ¿Cuál es el mayor número de mms.³ que podemos tener sin llegar á un cm.³?

M. — Al decir cuántas veces es mayor un barril que otro barril ¿qué queremos indicar?

A. — Las veces que el uno contiene al otro, lo que se averigua por la división.

M. — Al decir, las salidas exceden á las entradas en 8 \$, ¿qué queremos indicar?

A. — Que las salidas son mayores; que las entradas son menores en 8 \$ que las salidas.

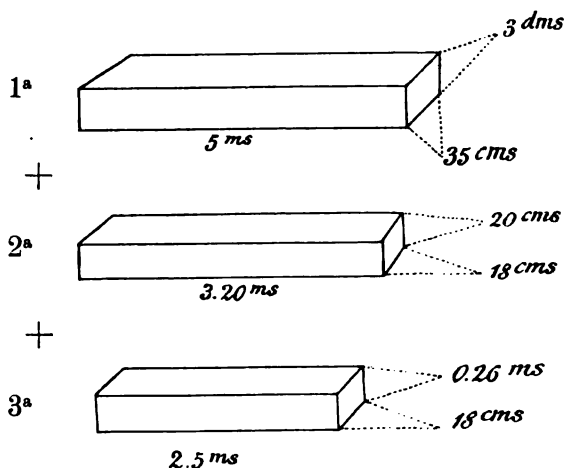
M. — Piensen un problema ó parte de un enunciado en que haya que hacer 25 veces menor un número?

A. — En 20 días un obrero ganó 100 \$, ¿cuánto ganó por día?

A. — Una escalera de 12 ms. tiene 25 peldaños. ¿A qué distancia está uno de otro?

B. — **M.** — Explique, Echegaray, su problema.

A. — *Con el puntero en la mano, enuncia el problema sin leerlo; ejercicios de esta especie, hechos con frecuencia durante el principio de las lecciones de EJERCICIOS Y PROBLEMAS, harán, del alumno, un hábil reproductor de conceptos. De acuerdo con lo que se ha enseñado durante el año, Echegaray, en los 8 minutos, hizo esta preparación:*

Objetivación.*Planteación*

$$V. \text{ de la } 1^{\text{a}} \text{ viga: } 5 \text{ ms.} \times 3 \text{ dms.} \times 35 \text{ cms.} = 5 \times 0.3 \times 0.35 \text{ ms.}^3 = 0.525 \text{ ms.}^3$$

$$V. \text{ de la } 2^{\text{a}} \text{ viga: } 3.20 \text{ ms.} \times 20 \text{ cms.} \times 18 \text{ cms.} = 3.2 \times 0.2 \times 0.18 \text{ ms.}^3 = 0.1152 \text{ ms.}^3$$

$$V. \text{ de la } 3^{\text{a}} \text{ viga: } 2.5 \text{ ms.} \times 0.26 \text{ ms.} \times 18 \text{ cms.} = 2.5 \times 0.26 \times 0.18 \text{ ms.}^3 = 0.117 \text{ ms.}^3$$

$$V. \text{ de las tres vigas: } 0.525 \text{ ms.}^3 + 0.1152 \text{ ms.}^3 + 0.117 \text{ ms.}^3 = 0.7572 \text{ ms.}^3$$

En este problema, hay cuatro simples que resolver:

1º ¿Cuál será el volumen de una viga que tiene, etc.?

2º ¿Cuál será el volumen de otra viga que tiene, etc.?

3º ¿Cuál será el volumen de otra viga etc.? 4º ¿cuál será el volumen de tres vigas sabiendo que el de la 1ª es de 525 dms.³; el de la 2ª, etc.?

Primero, hago la objetivación. La más larga es la 1ª y la más corta la 3ª; por eso, represento á las tres con figuras de diferente tamaño. Antes debo pensar en la forma de cada viga. Por los datos, las tres tienen la forma de un paralelepípedo.

Para cuerpos de esta forma, se halla el volumen multiplicando entre sí, las tres dimensiones. De consiguiente, el volumen de la 1ª viga le obtendremos *largo* $\times$ *ancho* $\times$ *espesor*; como los números tienen diferente denominación, los reduzco á la denominación ms. y tengo que 5 ms. $\times$ 3 dms. $\times$ 35 cms. es igual á etc.

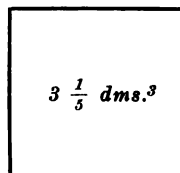
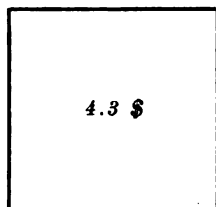
Por las mismas razones el volumen de la 2ª viga será, etc.; el de la 3ª, etc.

Ahora, si el volumen de una viga es de 525 dms.³, el de la otra de 115200 cms.³ el de la otra de 117 dms.³ el de todas será tanto como la suma de etc. que es la respuesta al problema.

M. — Explique Moreno, el suyo.

A. — *Ha hecho la siguiente preparación.*

Objetivación.



Planteación

1 mt. 4.3

$$3 \frac{1}{5} \quad \frac{4.3}{3 \frac{1}{5}} = 4.3 : \frac{16}{5} = 4.3 : 3.2 = 1.3$$

Un metro cúbico lo represento por esta figura que vale 4.3 \$, $3 \frac{1}{5}$ dms.³ lo represento por esta otra figura. Si un m. cb. vale 4.3 \$, $3 \frac{1}{5}$ dm.³ valdrán menos ó sea 4.3 dividido entre $3 \frac{1}{5}$ que es igual á 1.3.

M. — Nada más?

A. — No señor.

M. — Indique, la clase, los errores que note.

A. — La objetivación está mal. Un m.³ es muchísimo más grande que $3\frac{1}{2}$ dm.³ porque equivale á 1000 dms.³.

M. — Objetivemos, entonces, bien. (*El maestro en una parte perfectamente limpia del pizarrón, traza dos cuadrados que se aproximen á la verdad*).

Otro alumno — En la planteación hay muchos números sin denominaciones $3\frac{1}{2}$, 4.3, casi todos. Sin denominación nos confundiremos, porque no sabremos qué significan.

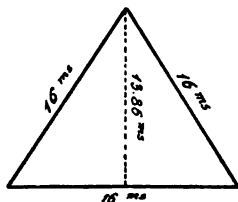
Otro alumno — El problema está mal hecho, porque no se hace así; primero, hay que averiguar cuánto cuesta un dm.³, para saber cuánto cuestan $3\frac{1}{2}$ dm.³.

Otro alumno — Hay que descomponerlo en dos problemas simples: 1° Si un m.³ ó 1000 dm.³ de cal valen \$ 4.3 ¿cuánto vale un dm.³? 2° Si un dm.³ vale tanto ¿cuánto valen $3\frac{1}{2}$ dms.³?

M. — Cuánto se ha dicho está bien; ahora, atención. Completemos las figuras. Desde que esta representa $3\frac{1}{2}$ dms. cbs. y se ha escrito este número, dms. cbs. deben escribirse en esta otra, es decir, 1000 dms. cbs. Desde que valen 4.3 \$, escribiremos 1000 dms.³ á 4.3 \$ y aquí, puesto que vamos á averiguarlo, $3\frac{1}{2}$ dms.³ á . . \$, forma que ya empleamos otras veces. Desde que necesitamos averiguar el precio de 1 dm.³, entre una y otra figura, intercalaremos esta otra, más pequeña con esta inscripción 1 dm.³ á ... El resto lo han dicho Vds. Pase Parodi y resuélvalo.

M. — Explique Spencer.

A. — He hecho la siguiente preparación.



$$P = 48 \text{ ms.}; l = \frac{48}{3} \text{ ms.}$$

$$A = 16 - 2.14 = 13.86 \text{ ms.}$$

$$S = \frac{16 \times 13.86}{2} = 8 \times 13.86 = 110.88 \text{ ms.}^2$$

$$1 \text{ área} = 100 \text{ ms.}^2$$

$$100 \text{ ms.}^2 \dots\dots 80 \text{ \$}.$$

$$1 \text{ m.}^2 \dots\dots \frac{80}{100} \text{ \$}.$$

$$110.88 \text{ ms.}^2 \dots\dots \frac{80 \times 110.88}{100} \text{ \$}.$$

Represento al terreno por un triángulo equilátero; si el perímetro mide 48 ms. cada lado medirá la 3ª parte ó 16 ms. porque el triángulo equilátero, como su nombre lo indica, tiene sus tres lados iguales. La altura medirá 13.86 ms. porque es 2.14 ms. menos que uno de los lados.

Ahora, descompongo en problemas simples. 1º ¿Cuál es la superficie de un triángulo equilátero que mide 16 ms. de base y 13.86 de altura? 2º ¿Cuánto valen 110.88 ms.² de terreno á \$ 80 el área? (*Varios alumnos levantan la mano para indicar otra descomposición; pero cumple su máxima pedagógica de no interrumpir al alumno, mientras explica*).

1º Si un triángulo tiene de base 16 ms. etc.

2º Si un área vale 80 \$.... averiguar el precio de una superficie expresada en ms. cds.; hay que reducir el área á ms. cds. Pero un área equivale á 100 ms.cds. Si 100 ms. cds. valen 80 \$, un m.² valdrá 100 veces menos ó $\frac{80}{100}$ \$. Si un m.² vale, etc., que es el precio del terreno. Yo lo hubiera descompuesto de esta manera:

1º Si el perímetro de un triángulo equilátero es de 48 ms. ¿cuánto medirá el lado? 2º Si el lado de un triángulo es de 16 ms. y la altura 2.14 ms. menos ¿cuánto medirá la altura? 3º ¿Cuál es la superficie de un triángulo que mide 16 ms. de base y 13.86 de altura? 4º Si un área vale 80 \$ ¿cuanto valdrá un m.²?

5º Si un m.² de terreno cuesta $\frac{80}{100}$ \$ ¿cuánto valdrán 110.88 ms.²?

M. — Su descomposición es más completa y, de consiguiente, más clara que la de Spencer.

Explique, Emilia, el suyo.

A. — Simplificar $\frac{80}{105}$; dividiendo por 5 uno y otro término del quebrado, obtengo $\frac{16}{21}$; 16 y 21 no tienen factores comunes. Simplificar $\frac{2310}{5544}$, etc.

1000000000 de mms.³ equivale á ms.³

1 mm³ equivaldrá á $\frac{1}{1000000000}$ m.³

3 dividido entre 1000000000 es 0.000000003 ms.³

(La última, explica como los anteriores, su trabajo).

INDICACIONES

Si la serie ha sido bien explicada y $\frac{3}{4}$ del grado son capaces de resolverla, el maestro indica otra serie. Si alguno de los problemas ofrece muchas dificultades, servirá de tema á una lección de enseñanza. Si la deficiencia notada en los problemas, se debe á descuidos del alumno y no á conocimientos mal digeridos, el maestro exigirá la misma lección, haciendo observaciones tendientes á corregir la pereza. Es necesario, como ejemplo, que de vez en cuando el maestro dicte á los alumnos, análisis modelos de problemas típicos, guía poderosa para un trabajo descansado y provechoso. Las indicaciones hechas desde el pizarrón, no bastan, puesto que ofrecen poco escrito, y el alumno debe recapitular por los oídos; á nosotros, el sistema nos ha dado un magnífico resultado. El examen de 1903 nos brindó la ocasión de apreciar los resultados de las varias reformas introducidas en los métodos y nos hallamos plenamente satisfechos de la sencillez, corrección y lógica de los análisis que mejoraron comparados á años anteriores, en la razón de 1 á 50.

LECCIÓN 1ª (Marzo, 5º grado)

Tema.—Serie primera de ejercicios y problemas.

Desarrollo.—**A.**—**M.**—Desde hoy nuestro texto de aritmética será este librito de ejercicios y problemas dividido en series, como quien dice en lecciones, puesto que cada serie es el tema de una lección.

El provecho que Vds. pueden obtener de mi enseñanza, se deberá, ante todo, al esfuerzo que Vds. hagan en sus casas para resolver cada uno de los ejercicios y problemas que constituyen la serie. No pretendo que todos resulten fáciles á punto de que no necesiten de vez en cuando ayuda. Pero nunca la voluntad de Vds. será tan débil para quedar vencidos á los tres ó cuatro minutos. Si no consiguen la victoria en 4 minutos empleen 8; si no bastan 8, 30; si no bastan 30 una hora, dos horas. Derrotados, pero después de una lucha tenaz: entonces habrán hecho méritos ante mí; alabanzas y no reproches deben esperar y sin ningún recelo pueden decirme: Señor, el problema es difícil y no lo hemos podido resolver; explíquenos Vd. Si efectivamente es difícil, lo habré notado antes que Vds. y satisfaré inmediatamente vuestros deseos. En todo caso, quiero que absolutamente ninguno recurra á un extraño.

Aparte de que será fácil para mí, descubrir al desobediente, la consecuencia de la falta de esfuerzo, será que encuentren Vds. cada vez más dificultades y que jamás hagan una buena recitación. Si un alumno me dice « no he podido hacer tal cosa » no siendo un indolente, nunca será motivo de que se le amoneste ó clasifique mal.

Cada uno tendrá dos cuadernos: uno, para el análisis abreviado de todos los problemas; otro, para el análisis extenso de aquellos de mayor importancia. En uno y otro, trabajarán Vds. en sus casas, nunca en la escuela; en el 1º, resolverán toda la serie que les haya designado como lección sin escribir los enunciados, de esta manera:

B. — Escriben en la parte superior de la hoja, *Serie 46 (lo hace en la pizarra)*. Luego, ejercicio ó problema 1. Leen el enunciado, tratan de comprender su objetivación, los problemas simples en que pueda descomponerse, escriben ambas cosas, en el papel, plantean y hacen las operaciones, sin dejar constancia de las inducciones y los análisis, de esta manera, después de leer el enunciado que dice:

Las clasificaciones de Brioso en Aritmética, Idioma, etc., son respectivamente 3.45 ; 2.89 ; 5 ; 4.36 ; 2.67 ; 3.33 ; 4.03 ; ¿ cuál es el término medio ?

Objetivación. — Innecesaria.

Descomposición. — Problema simple.

SOLUCIÓN

El promedio de varias cantidades se obtiene sumándolas y dividiendo por el número de términos.

$$\frac{3.45 + 2.89 + 5 + 4.36 + 2.67 + 3.33 + 4.03}{7} \text{ etc.}$$

Se procede lo mismo con el 6º, 7º y 8º.

C. — En el segundo cuaderno se resolverán uno ó dos problemas por semana, aquellos más interesantes de la serie en cuanto á objetivación, descomposición y razonamiento. Debiéndose escribir con orden, limpieza y cuidado ; el análisis, en un borrador primero, para pasarlo, luego, al cuaderno que revisaré y clasificaré. Se atenderán al modelo que voy á dictarles ; supongamos el problema 10º de la serie 64.

(*El maestro dicta el análisis según este orden : objetivación, inducciones, descomposición, deducciones, respuestas*).

¿ Quién tiene dudas acerca de cuanto he dicho ?

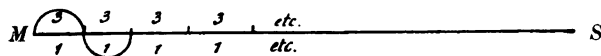
Para la clase próxima la serie 1ª.

LECCIÓN DE ENSEÑANZA TOCANTE Á LA SOLUCIÓN DE UN
PROBLEMA TÍPICO (5º grado)

Tema.—Sale un correo del pueblo *A* en dirección al pueblo *B*, al mismo tiempo que de *B* sale otro en dirección *A*. El 1º anda con una velocidad de 18 Kms. por hora y el 2º con la de 15. Sabiendo que la distancia entre *A* y *B* es de 300 Kms. ¿Qué tiempo transcurrirá desde la partida de los correos hasta su encuentro ?

Desarrollo. — *Principio.* — *M.* — En la última clase de *ejercicios y problemas*, me dijeron Vds., que no podían resolver el 1º problema de la serie. Les dije que lo tendríamos de lección para hoy. Como éste, se ofrecerán en adelante, muchos ; presten, por eso, mucha atención. Nadie haga apuntes porque el que escriba no podrá seguir mi análisis. Llegarán todos á comprenderlo sin dificultad.

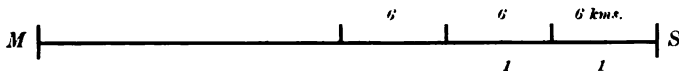
Supongamos un individuo en marcha de Mercedes á Suipacha, distancia de 27 Kms. que representamos por esta recta



á 3 Kms. por hora ¿cuántas horas emplearán ?

Evidentemente, para recorrerla empleará tantas veces una hora como veces quite pedacitos de 3 Kms. de la distancia 27 Kms. (*señalando*).

Supongamos, ahora, otro individuo en marcha, de Suipacha á Mercedes á razón de 6 Kms. por hora.

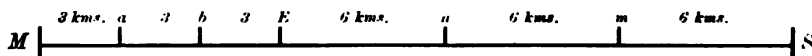


Evidentemente, para recorrerla empleará tantas veces una hora como veces quite pedacitos de 6 Kms. á 27 Kms. lo que sabemos, dividiendo 27 entre 6.

Ahora, supongamos á los dos individuos en marcha uno de Mercedes hacia Suipacha, el otro de Suipacha hacia Mercedes. Estos individuos pueden salir al mismo tiempo ó uno después de otro. El 1º, andando 3 Kms. por hora, emplearía 9 horas para ir de Mercedes á Suipacha ; si el 2º saliese 9 horas después del 1º, evidentemente nunca se encontrarían entre Mercedes y Suipacha, el encuentro sería en Suipacha, porque en el momento de partir el 2º, el 1º llegaba á Suipacha. Si saliese 6 horas después del 1º éste habría andado 18 Kms. en el momento de partir el 2º ; el encuentro sería entre el Km. 18 y Suipacha, nunca entre Mercedes y el Km. 18 ni en Suipacha. Esta discusión es para que Vds. se acostumbren á ver y á deducir.

Pero los individuos salen al mismo tiempo ; el encuentro será entre Mercedes y Suipacha ; ¿ dónde ? vamos á averiguarlo de varias maneras.

Si salen al mismo tiempo, en *una hora* de viaje el 1º quitará 3 Kms., el pedacito *Ma* á la distancia 27 Kms. y el 2º en esa misma hora, quitará 6 Kms. ó el pedacito *Sm* á la distancia 27 Kms.



Entre los dos, habrán quitado á la distancia de Mercedes á Suipacha durante la 1ª hora de viaje 9 Kms. y les quedará por recorrer, la distancia *am* ó 18 Kms ; durante la 2ª hora el 1º habrá llegado á *b* y el 2º á *n* ; habrán recorrido, los dos, 9 Kms. ó *bn*.

En la 3ª hora el 1º habrá andado 3 Kms. más ó estará 9 Kms de Mercedes ; en la 3ª hora el 2º habrá andado 6 Kms. más ó estará á 18 Kms. de Suipacha. Pero, si á las 3 horas el uno está á 9 Kms. de Mercedes hacia Suipacha y el otro á 18 de Suipacha hacia Mercedes, los dos estarán juntos, porque entre los dos han recorrido 27 Kms. es decir $ME + ES$, la distancia entre Mercedes y Suipacha (*Siempre señalando*).

Luego, á las 3 horas de partir, están juntos.

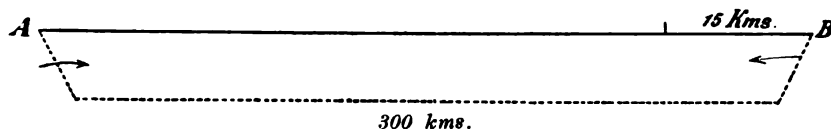
Observemos. Para obtener el número de horas, hemos averiguado cuántas veces lo que anda uno y otro en una hora ó 9 Kms. se ha podido quitar de 27 Kms. ó la distancia entre Suipacha y Mercedes.

En verdad, ir dos individuos al encuentro uno de otro (*señalando siempre*) es recorrer la distancia MS entre dos, lo mismo que si la anduviera uno solo, pero con la velocidad de uno y otro, á razón de 9 Kms. por hora. Entonces, el enunciado puede transformarse en éste : ¿ cuántas horas necesita un individuo para recorrer 27 Kms. andando 9 Kms., por hora? Observen Vds. que esta recta, está dividida en tres partes iguales porque podemos formar tres pedazos iguales juntando Ma con Sm con nm ; bE con En .

B.—Ahora, hallarán Vds. muy fácil la solución del problema que motiva esta lección.

Objetivemos:

Un correo sale de A en dirección á B y otro de B en dirección A ; distancia entre A y B , 300 Kms.



Induzcamos.—1° Si parte uno de A y otro de B á encontrarse, en el momento del encuentro, entre los dos, habrán recorrido la distancia AB ó 300 Kms. ni más ni menos. 2° Averiguar el tiempo que necesitan para recorrer AB , es, entonces, averiguar el número de horas que necesitan para encontrarse. 3° Desde que parten juntos y se encuentran al mismo tiempo, uno y otro andarán exactamente el mismo número de horas.

Descompongamos.—1° Si dos individuos recorren una distancia el uno hacia el otro, el 1° á razón de 18 Kms. por hora el 2° á razón de 15. ¿ cuántos Kms. recorren de la distancia los dos juntos ?

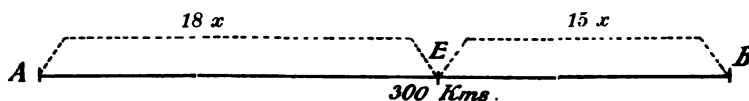
2° Si dos individuos recorren en una hora 33 Kms. de una distancia ¿ cuántas horas necesitarán para recorrer 300 Kms ?

Deduzcamos.—1° Si uno anda por hora 18 Kms. y el otro 15, los dos, cada hora, andarán de los 300 Kms 33 Kms. 2° Si andan 33 Kms. en una hora, 300 los andará en $\frac{300}{33}$ horas.

El encuentro se verifica á los $\frac{300}{33}$ horas de partir.

C.—Pero quiero enseñarles, ahora, un procedimiento más corto, más claro, menos inductivo más razonado que todo esto, el procedimiento de las igualdades.

Objetivemos :



El primer correo sale de A, el segundo de B. Sea E el punto de encuentro.

Induzcamos.—1° ¿Cuál es la pregunta? ¿Qué tiempo transcurrirá desde la partida, etc.? representemos ese tiempo por x ; ya saben Vds. que la pregunta es siempre la incógnita.

2° Si E es el punto de encuentro, la distancia AE la ha recorrido el 1° correo y la BE el segundo.

3° Desde que salen al mismo tiempo, la distancia AE es recorrida en el mismo número de horas que EB.

4° La distancia AE es recorrida en x horas y EB en x horas, puesto que x es tiempo transcurrido desde el momento de la partida hasta el momento del encuentro.

Deducimos.—Si el 1°, anda 18 Kms. por hora, en x horas andará $18x$ Kms. que es la distancia AE: 2° Si el 2° correo anda 15 Kms. por hora, en x horas andará $15x$ Kms. que es la distancia EB; 3° Pero $AE + EB$ Kms. es AB ó 300 Kms; entonces $18x + 15x = 300$ Kms.

Solución.— $33x = 300$ $x = \frac{300}{33}$ horas, lo que buscábamos.

D.—¿ Quién encuentra algo que no comprende ?

Para la clase próxima, el análisis detallado de este problema en el cuaderno de deberes. De lección, los ejercicios, etc.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO XII

DEBERES Y TEXTOS

I

La escuela dispone de escaso tiempo para la enseñanza de la aritmética ; dos ó tres horas por semana, si no contara con la autoinstrucción del alumno mediante el ejercicio, no bastarían para darle la amplitud con que la concebimos. El maestro inicia la enseñanza con ideas sintéticas correctamente transmitidas y el alumno completa con multitud de repeticiones analíticas de su propio esfuerzo, más eficaces que la pasividad receptiva del aula.

Los deberes de aritmética no deben exigir, fuera de la escuela, más de una hora y media de trabajo diario. Cada niño, provisto de un cuaderno acartonado, de 100 á 160 páginas, donde no escribe los enunciados por tenerlos en el texto, prepara el razonamiento, uno ó dos problemas cada lección, según este plan :

Problema 8 — Serie 15

- I. — Objetivación.
- II. — Inducciones.
- III — Descomposición.
- IV -- Análisis numerado.
- V. — Respuesta.

Exigiéndosele orden, claridad, limpieza y tinta ; los restantes de la serie, se resuelven mediante breves anotaciones según forma establecida, en un cuaderno

borrador, con esta recomendación constante : *de no economizar papel*, de no amontonar las cantidades, de disponer todo producto ó dividiendo parcial con el mayor orden posible ; de evitar cifras mal escritas y cuanto perjudique el buen resultado ú obligue á fastidiosos trabajos de revisión, que no sólo roban tiempo, sino que matan todo aliciente para la asignatura. Además, no nos cansaremos de repetirlo, impídase que las operaciones se hagan antes de haberlas expresado en una fórmula final, por dos razones : 1º gran economía de tiempo, 2º menos probabilidad de equivocarse por las simplificaciones á que suelen prestarse las cantidades.

Lo que de los deberes debe corregirse primero. —

La mayor parte de los alumnos pertenecen al tipo pasivo (indolente) que se mueve bajo la acción de estímulos enérgicos, obligados por algo que contrariando sus hábitos de inercia, los vuelva activos. El maestro no debe ilusionarse : todos los atractivos con que puede nimbar sus procedimientos, no bastan para que sus alumnos sean empeñosos en sus deberes hasta á hacer con agrado cuanto pueden hacer : habrá una parte dispuesta á salvar el compromiso con el menor esfuerzo posible. Para darnos inmediata cuenta de lo que decimos, déseles un problema á resolver en sus casas, después de instruídos acerca del análisis, recomendándoles el cuidado ; recójase los al día siguiente. Notaremos, al examinarlos :

1º Si no se indicó cuaderno, una gran variedad de papeles, tocante á tamaño, calidad, rayado y limpieza que dan una acabada idea del desorden y la necesidad de formar hábitos contrarios ; de que un deber no está bien presentado en papel de nota, en papel de esquila, en papel de cuenta, en hojas cuadriculadas ó arrancadas de un tirón á un cuaderno : en recortes de hojas ; en papeles de varias calidades ; y, por último, manchados con grasa ó con las impresiones del pulgar y el índice de una mano que no se lava á menudo.

2º Escritos, unos con tinta, otros con lápiz, otros con lápiz y tinta ó dos tintas diferentes.

3° El 42 % no escribe el enunciado ni indica el número y la serie á que pertenece, de modo que no es posible, sin otros antecedentes, saber de qué se trata.

4° En el 55 %, no se indican las partes de la solución: objetivación, inducciones, descomposición, análisis. Presentan una serie no interrumpida de planteaciones numéricas que, con mucha dificultad, descubren lo que se quiere decir.

5° Ninguno (el análisis exige una larga redacción, pues, es de este problema: ¿cómo pueden beneficiarse 35 hectáreas de terreno para que al cabo de un año den 2000 \$ de renta?) es la copia de un análisis hecho antes en borrador; redacción corrida tal como se produjo en el primer momento y como la haría el profesor más avezado; no presenta una sola palabra tachada.

6° La escritura es al correr de la pluma, sin mayores cuidados de claridad y estética, generalmente apretada y utilizando los últimos espacios de la página hasta colocar tres y cuatro renglones donde no debió escribirse uno solo.

7° Muy pocos han objetivado; pocos han descompuesto el problema en enunciados simples; pocos han hecho inducciones; todo se confunde en un razonamiento sin proposiciones á que referirse y de difícil ilación por cuanto siendo muchas sus partes, ninguna aparece discutida ni diferenciada como sucede en este ejemplo:

2000 kilos.....		$\frac{2800 \times 10}{100} = 280$
1 hectárea.....		8 \$.
35 >		$35 \times 8 = \$ 280$
Trilladora 100 kilos		\$ 1.20
» 1 » 		$\frac{1}{1.20}$
51250		$\frac{51250 \times 1.20}{100} = \$ 615$

Ganancia total..... $5125 + 2320 = \$ 7445$
 Gastos = $1240 + 2320 + 280 + 615 + 350 = 5085 \$$
 Ganancia libre = $7445 - 5085 = \$ 2360$.

RAZONAMIENTO

Si un señor tiene un terreno de 25 Hectáreas y en una hectárea quiere poner 25 bolsas de maíz, en las 35 hectáreas sembrará más ó $35 \times 25 = 875$ bolsas. Una bolsa tiene 70 kilos, las 875 bolsas tendrán más ó sea $875 \times 70 = 1750$ kilos. Si una hectárea tiene 1750 kilos en las 35 hectáreas habrá más ó sea $35 \times 1750 = 1250$ kilos. Los 100 kilos le cuestan \$ 10, 1 kilo le costará 10 veces menos ó sea $\frac{1}{10}$; si 1 kilo le cuesta $\frac{1}{10}$ de \$ 51250 kilos le costarán más ó sea

$$\frac{51250 \times 10}{100} = 5125.$$

Para 1 hectárea alquila 8 caballos, para 35 hectáreas tendrá que pagar más por el alquiler ó sea $35 \times 8 = \$ 280$. Un caballo, come por mes \$ 6 de pasto, 20 caballos comerán más ó sea $20 \times 6 = \$ 120$. En un mes gasta en los caballos 120 \$ en 5 meses gastará más ó sea $120 \times 5 = \$ 600$. Si para un arado paga 310 \$ para 4 arados pagará más ó sea $310 \times 4 = 1240 \$$; 1 yunta de bueyes le cuesta 290 \$ 8 yuntas le costarán más ó sea $290 \times 2320 \$$; á un peón le paga por mes 70 \$, á 5 peones tendrá que pagar más ó sea $70 \times 5 = \$ 350$. Si en un mes paga 70 \$ en 4 meses pagará más ó sea $70 \times 4 = \$ 280$. Si en una hectárea entra 1 bolsa en 35 hectáreas entrarán más ó sea $35 \times 1 = 35$ bolsas. Si una bolsa tiene 80 kilos 35 bolsas tendrá más ó sea $35 \times 80 = 2800$ kilos; 100 kilos le cuestan \$ 10; 1 kilo le costará menos ó sea $\frac{1}{100}$ si un kilo le cuesta $\frac{1}{100}$ de \$, los 2800 kilos le costará más ó sea

$$\frac{2800 \times 10}{100} = 280.$$

Si una hectárea le cuesta 8 \$ las 35 hectáreas le costarán más ó sea $35 \times 8 = 280$ \$. Si por 100 kilos paga una trilladora \$ 1.20 para un kilo pagará menos ó sea $\frac{1.20}{100}$, para 51250 kilos pagará más ó sea

$$\frac{51250 \times 1.20}{100} = 615 \text{ \$}$$

Problema (solución).

1 Hectárea	25 bolsas de maíz
35 »	$35 \times 25 = 875$ bols. de maíz
1 bolsa	70 kilos
25 »	$25 \times 70 = 1750$ kilos
1 Hectárea	1750 kilos
35 »	$35 \times 1750 = 51250$ kilos
100 kilos..	\$ 10
1 »	$\frac{1}{10}$
51250 kilos.....	$\frac{51250 \times 10}{100} = 5125$
1 Hectárea.....	8 caballos
35 »	$35 \times 8 = 280$ \$
1 caballo en 1 mes ...	6 \$ pasto
20 » » » »	$20 \times 6 = 120$ \$ pasto
1 mes.....	120 \$
5 »	$120 \times 5 = 600$ \$
1 arado	310 \$
4 »	$310 \times 4 = 1240$ \$
Una yunta bueyes.....	290 \$
8 » »	$290 \times 8 = 2320$ \$
1 peón mensual.....	70 \$
5 » »	$70 \times 5 = 350$ \$
1 mes.....	70 \$
4 »	$70 \times 4 = 280$ \$
1 Hectárea	una bolsa
35 »	$35 \times 1 = 35$ bolsas

1 bolsa	80 kilos
35 »	$35 \times 80 = 2800$ kilos
100 kilos	\$ 10
1 »	$\gg \frac{1}{10}$

Para saber la ganancia libre del señor, tengo que sumar primeramente la ganancia total y es igual á $5125 + 2320 = 7445$ \$; ahora tengo que sumar las pérdidas y es igual á $1240 + 2320 + 280 + 615 + 350 = 5085$ \$. Como quiero saber la ganancia libre, tengo que restar de la ganancia total los gastos que ha tenido y es igual á $7445 - 5085, \$ 2360$.

C***.

8° Los treinta análisis responden á cinco ó seis tipos; está de manifiesto que la mayor parte no hizo esfuerzos de investigación; se preocupó de copiar ó imitar la solución hecha por uno de los compañeros.

9° Por último, el 12 % en un grado superior y cumplido, no trae nada: unos, porque lo olvidaron; otros, porque se sintieron enfermos; otros porque, ocupados en sus casas, no dispusieron de tiempo; otros, porque no lo sabían hacer; otros, porque no tenían tinta ó se manchó la hoja.... disculpas variadas y multicolores, según la viveza de cada alumno para mentir, arma natural de defensa en los adolescentes.

Al revelar, estos hechos, mal ánimo del alumno para el trabajo, espíritu de desorden, tendencia á la pereza, el valor mal apreciado de los deberes escolares, arraigados hábitos de descuido, desatención y malas maneras, reflejo seguro de un hogar donde no preocupan ciertos detalles, iluminan al maestro el camino de su enseñanza y los hábitos que debe corregir primero y formar después. Exíjase los deberes en cuaderno, si es posible, uniformes; póngase en práctica el sistema de las reacciones naturales para conseguir limpieza, una letra hecha con cuidado y tinta; no se dé, para sus casas, más

de un problema escrito, á la vez, pero en cada lección; exíjase el análisis en la forma que se indique y empléese la repetición como medio de obtener algo perfecto; préstese á los deberes una atención tal que el niño note el interés del maestro y toda la importancia que se atribuye á esta parte de la didáctica escolar; sírvase de toda su autoridad moral, cimentada por la preparación y el empeño sincero de mejorar á sus alumnos para que los alumnos aprendan; y, averigüese el estado de las aptitudes una vez cada 15 días, sometiéndolas á una prueba, *in situ*, repartiendo papel y designando problemas para ser analizados bajo la inmediata vigilancia del maestro. El enunciado será de los resueltos que ofrezcan mejores combinaciones, ó uno nuevo, dentro de tipos conocidos. El apremio es uno de los elementos de mayor perturbación para el trabajo matemático; no obstante, conviene, como dijimos antes, que el maestro se asegure de la capacidad del alumno y hasta qué punto es propio el esfuerzo empleado en hacer los deberes, pues, las precauciones no serán nunca suficientes para evitar que el perezoso ó sin aspiraciones, recurra, en su casa, á un extraño para hacer lo que se encomienda á él solo.

La revisión. — La corrección es un trabajo penoso para maestros ocupados cinco horas en la enseñanza, que deben tener sus registros al día, que deben preparar sus lecciones y visar deberes de otras asignaturas. ¿Pero es útil para el alumno? ¿Es provechoso que pase á otro cuaderno, *poner en limpio* un análisis corregido por el maestro y que el niño tenga como propio? Es un punto que merece atención. Desde el momento que el niño entrega su deber, hizo todo el esfuerzo de que era capaz acerca de lo que debía. La corrección pocas veces es leída con el cuidado que exige un análisis generalmente nuevo, substituido al erróneo del alumno, mucho menos si es confuso; de aquí que consideremos sin objeto tan enorme trabajo, tanto como el de la *V* en tinta roja, que candorosamente escriben otros.

Pero es necesario convencer al alumno de que se han visto, á fin de que no disminuyan sus cuidados para el trabajo más provechoso del aprendizaje matemático. Otros procedimientos suelen usarse.

I. — El de la revisión sin enmendadura escrita para tratar en clase los errores más graves ó frecuentes.

II. — El de tratarlos como tema de lección, en cuyo caso no es posible darse cuenta del esfuerzo de cada uno, si bien las indicaciones hechas á cuatro ó cinco son provechosas para todos.

III. — Permutar los deberes entre los alumnos para que cada cual haga un estudio crítico de el del compañero.

Nosotros aconsejamos este rápido y eficaz procedimiento : 1° No recargar de trabajo al alumno. 2° Recoger los deberes antes de comenzar la lección. 3° Limitarse á una lectura detenida de ellos y anotar en el cuaderno de observaciones, los errores más graves y comunes, tratando excepcionalmente lo que, además de ser insignificante, no es general. 4° Calcular con este trabajo el provecho que sacó la clase de la enseñanza, su capacidad, las bondades del método y los puntos que deben reforzarse con nuevas lecciones. 5° Repartir los deberes antes de comenzar las clase y con las anotaciones á la vista detenerse en las deficiencias generales, luego en las particulares, á fin de que no vuelvan á producirse ó tomando la determinación que el caso aconseja, proceder á nueva enseñanza de los puntos, si la mayor parte de la clase revela confusión ; proceder á nuevas explicaciones de los análisis si la mayor parte de la clase se manifiesta poco poseída del asunto ; exigir nuevo análisis si la mayoría de los razonamientos ofrecen defectos de importancia. En todo caso, debe mostrarse pertinaz en la corrección de los detalles, insistir en uno hasta verle desaparecer para siempre. Solo así llenaremos la mente de conceptos, de los que podrá esperarse lo que tanto anhelamos los maestros de nuestros discípulos, integraciones completas y perfectas acerca del punto que se ha estudiado.

El concurso de los padres. — La pereza contra la que tanto debe luchar la escuela argentina, por ser ella una característica étnica de los elementos que le incumbe educar, está favorecida por la acción demasiado abierta del hogar. El niño, valido de la mentira, elude fácilmente la compulsión de un padre que nunca averigua el mecanismo escolar á que está sometido el hijo. «¿No tienes deberes que hacer?» — «El maestro no nos ha dado deberes». — «¿Has concluído lo que tenías que hacer?» — «Sí, papá; ¿quienes que juegue?» Cuando hay un padre que sigue de cerca á sus hijos, cuando el hijo no gobierna sus actos, ó no manda en la casa, ó no hace lo que se le antoja ó al padre se le importa que se instruya, la tarea de la escuela no tropieza con esa montaña de obstáculos que oponen aquellos hogares para quienes los hijos son hijos de la libertad y la asistencia al aula un simple motivo para quitarse de encima un estorbo.

En la *enquête* hecha por el presidente del Consejo Escolar de La Plata, señor DELLA CROCE, la causa que contribuye á malograr los esfuerzos de la escuela, resulta ser la decidida paterna. En nuestro país, el padre no atribuye valor á la educación de sus hijos y el maestro es, en no pocas ocasiones, un tipo despreciable. Ellos, acaso, incitan á la insolencia; ellos, en los momentos de la cena, suelen tener una frase dura para este modesto paladín de la cultura, que el hijo se aprende de memoria y al día siguiente hace gala del menosprecio que para él merecen las órdenes escolares. No solo falta el colaborador; hay una acción negativa que la escuela neutraliza á costa de sus mejores energías.

II

Texto. — El alma de la enseñanza de la aritmética es el libro de ejercicios y problemas: de él depende el ser buena ó mala, estrecha ó amplia, provechosa ó árida, fecunda ó estéril, tardía ó rápida.

¿ Por qué el libro que acaba de publicarse es escaso de ilustraciones, mal impreso y presenta solo ejercicios de forma simple ? Porque la impresión es costosa, el mercado estrecho y los maestros capaces de apreciar las ventajas de un buen libro, pocos.

Un texto bien presentado se vende á 3 \$ el ejemplar ; no resiste la competencia de otro á 1.20, aunque el papel sea de estraza, el tipo exija un esfuerzo extraordinario de acomodación visual, los problemas revelen un autor ignorante y la colección un propósito de negociar con la juventud. ¡ Que la institución oficial de los concursos protege lo bueno ! Puede ofrecerse una maravilla, pero si las cuñas no son de buen madero, el libro es desalojado por 130 ó 140 páginas cosidas en 10 ó 12 días, el tiempo necesario para juntar recortes de quince ó veinte libros, que le salen al encuentro en nombre de la baratura. ¿ Qué importa este aderezo de olla podrida ? El negocio por sobre todo. Si puede realizarse manejando la tijera ¿ es, comercialmente lógico, trabajar dos años manejando la pluma ? Estas consideraciones hechas por el autor que contestaba á la pregunta que le hacíamos, son exactas ; hasta puede asegurarse que algunos textos de 15 años atrás eran mejores. Estos males, seguramente, tienen una patria universal. Somos de los que creen que la autoridad debe buscar al texto y no el texto á la autoridad.

La escuela primaria no necesita otros textos de matemática, que los de *Ejercicios y problemas*. La enseñanza es oral y nada para el aprendizaje de las operaciones, puede substituir la explicación del maestro. El texto de aritmética en manos de niños, exige dos horas lo que se adquiere en cinco minutos sin el peligro del estudio de memoria. ¡ Triste oficio del profesorado si su tarea se redujese á examinar siempre, á vigilar el estudio de sus alumnos, á tomar lecciones ! Para estos papeles, inútil es la pedagogía que investiga un método de enseñanza rápido y ameno ; inútiles las escuelas normales donde se la estudia ; inútil los maestros con diplomas que legalizan sus aptitudes.

Para cada grado, desde el 2º, hay un libro de *Ejercicios y problemas* con 30 ó 40 series cada uno, de fijación unas, de recapitulación casi todas, donde se mezcla á la forma oral, la escrita; los ejercicios, á los problemas, distribuidos de lo particular á lo general, de lo simple á lo compuesto, en días y meses de acuerdo con el saber del grado, en épocas determinadas del año y en número (de 8 á 15) tal, que cada serie pueda servir de tema á las lecciones que el programa destina para ese objeto. Cada serie, en tipo pequeño, dará explicaciones sucintas acerca de la solución de problemas típicos ó recordando los conocimientos de aritmética que entran en juego para resolver ejercicios de la manera más breve. Los casos fundamentales se analizarán desde la objetivación.

Debe procurarse la novedad, hacer un repaso en cada serie, de la mayor parte de la aritmética estudiada hasta ese momento y proponerse:

1º Rapidez en las operaciones; 2º Dominio de los quebrados y decimales; 3º Manejo de las fórmulas; 4º Manejo de los signos y paréntesis; 5º El hábito de la cancelación por complicada que se presente; 6º Generalización del cálculo aritmético á todos los casos; 7º Objetivación, descomposición y reconocimiento gramatical de los enunciados; 8º Huir de lo vulgar con ejercicios y problemas atrayentes por el método, por la forma y por las generalizaciones, hasta tratar las cantidades negativas y el cálculo exponencial, porque ninguna razón hay para estrechar el campo de una materia tan útil á la cultura, aún guiados por un falso concepto acerca de las aptitudes del niño; 9º Solución del mayor número de problemas difíciles por su especie y tipo.

Por qué exigimos un texto de ejercicios y problemas.

— I. Porque la solución sistemática de problemas, lógicamente seriados, es fundamental en el aprendizaje de la Aritmética; pocos son los maestros á cargo de un grado, constantes y capaces del ímprobo trabajo de escribir 40 series de ejercicios y problemas generalizadores, variados, atrayentes, típicos, que fijen los

conocimientos y evoquen cada momento, cuanto el niño ha adquirido desde que asiste á la escuela. Por desgracia, la despreocupación acerca de este punto es epidémica. Los maestros se limitan á dar el conocimiento y á ejemplificarlo con los problemas sugeridos en ese instante por el tema. De aquí enunciados insignificantes y llenos de contrasentidos : locomotoras que andan 5 Kms. por hora ; azúcar que vale 12 \$ el Kg. ; peones que ganan 45 \$ por día ; albañiles que hacen casas en una semana ; hectáreas de tierra que producen 15.000 \$ al año ; trilladoras que desgranán 25 bolsas de trigo cada 12 horas ; ladrillos cuya densidad es 24 ; maderas que pesan más que el hierro ; aljibes de 12.500 ms. cbs. ; baldosas de 1.50 ms. de ancho ; alfajías de 0.005 ms. de grueso ; naranjas que valen 1 peso cada una ; palomas que ponen 6 huevos ; individuos que cavan pozos de 180 ms. en la superficie de un terreno ; paredes de 8 ms. de ancho por 2 de alto y 4 de largo ; plumas que pesan 6 gramos ; apotemas más largas que los radios ; monedas de 20 cts. que llegan á pesar 7 Kgs. ; alturas de equiláteros dobles de la base ; majadas de 2800 ovejas que pertenecen al paisano que las cuida quien las vende luego á 85 \$ cada una ; chacareros que emplean 6 bolsas de trigo para sembrar una cuadra y recogen 2000 ; personas que compran cuatro chalets en Morón uno de 847.578 \$; otro de 928.456 \$; otro de 639.482 y otro de 799.875 \$; para qué continuar espigando en este ilimitado campo de despropósitos que dejan en la mente del niño una espesa sedimentación de errores donde brotarán mentiras ó indiferencias por la verdad. Y cuando hubo maestro empeñoso que comprendiendo el valor primordial del ejercicio y del problema en la instrucción matemática, escribió sus series, resultaban de mucha extensión, ó de un solo tipo, sin otras diferencias que la de tener un problema, números mayores que otro y operarse, unas veces, con árboles, otras con vacas, otras con bolsas.

Así, obra en mi poder, acerca de las áreas de los triángulos, esta serie de enunciados :

1° Un triángulo mide de base 28 ms., de altura 38, ¿cuál es su área?

2° Un terreno de forma triangular mide de base 750 metros, de altura 108 metros ¿cuál es su superficie?

3° Un hojalatero ha cortado 25 chapas triangulares iguales que miden 0.50 de base por 0.28 de altura, ¿cuál es la superficie de la lata que empleó para hacerlas?

4° En un pizarrón se ha dibujado un triángulo que tiene *3.75 ms. de base por 4.29 ms. de altura*, ¿cuál es la superficie del triángulo?

5° De una araña cuelgan 180 cristales de forma triangular; cada uno mide 0.05 ms. de base por 0.03 de altura ¿cuál es la superficie de los 180 cristales?

6° Un cuadrilongo se lo ha dividido en dos triángulos, ¿cuál será la superficie de uno de los triángulos si mide de base 3.55 ms. y de altura 1.80?

La misma forma presentan los ocho restantes.

Si esta tarea, á cargo de maestros trabajadores, resulta deficientísima ¿cómo resultará á cargo de los que se acuerdan del tema en el momento de dar la lección; que hilvanan el ejercicio apremiados por el tiempo?

Nadie juzga la preparación del alumno sino por los problemas que resuelve; de aquí, la general creencia de que dejan el 4°, 5° ó 6° grado sin saber aritmética; porque, en efecto, no han hecho sino sumar, restar, multiplicar y dividir números simples y problemas á tipo de operación directamente indicada, que no exige esfuerzo en el momento del análisis.

II. — Suponiendo en manos de cada maestro una buena colección de ejercicios y problemas, la media hora no bastaría para dictar una serie ó se emplearía el año para dictar ó en vez de 40 series se resolverían 10. En uno y otro caso, el dictado, ejercicio que no es de Aritmética ni ameno, roba un tiempo enorme á la enseñanza. De este modo las 170 ó 200 lecciones del programa se reducen á 80 ó 100; por otra parte, estas copias al dictado son mal puntuadas, mal

escritas, equivocados los números y de su lectura resulta una torpe comprensión. El niño hace mal un trabajo por lo poco simpático que son los desordenados manuscritos de esta especie.

Los dictados han sido, con justicia, severamente condenados por SMITH, en nombre del sentido común : hacen perder el tiempo y son la fuente de continuos errores para el que copia. Si alguien arguyera que los niños no pueden gastar en un libro de 1.20 \$, les diríamos que lo mismo valen los cuadernos para copiarlos.

III. — El texto, en manos del alumno, es indispensable, si se pretende una enseñanza eficaz, amena y rápida. Entonces, el maestro, en pocos segundos señala las series y da las instrucciones del caso acerca de las soluciones. El niño no copiará los enunciados ; en los cuadernos hará la objetivación y el análisis del problema, indicando el número y la serie según este orden :

PROBLEMA N° 8. — SERIE 12

Objetivación.

Descomposición.

Análisis.

Planteación.

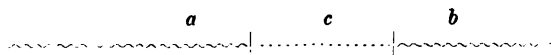
Cuando se le llame al pizarrón, el maestro indica la serie y el número del problema que debe resolver, economizando la lectura de un enunciado que los niños conocen y que referirá cuando explique.

Series solucionarias. — *Las respuestas.* — No debiéramos mencionarlas ; pero hay maestros de tan poca dignidad pedagógica que en la época de comenzar los cursos recorren las librerías en busca de un texto de problemas resueltos que sirva de texto á sus alumnos. Hay autores que, aguijoneados por la necesidad

de ganar dinero, cometen la herejía de publicar colecciones donde á los enunciados siguen los análisis. Nos referimos, se comprende, á libros de problemas cuyo objeto es cultivar las aptitudes del alumno y no á los de ejemplificación.

Cada conocimiento, una organización mnésica determinada de nuestro cerebro, exige un esfuerzo que constituye el *coeficiente de adquisición*. Mientras el esfuerzo no se produce, el conocimiento, como fenómeno consciente, no existe. Puede exteriorizarse simulado por una buena expresión, tal como un inteligente joven recitara un canto de la « Divina Comedia »; pero sólo habrá palabras de sentido hueco para quien las dice ó interpretadas con el espíritu infantil de quien no formó criterio para comprenderlas.

Nunca un alumno resolverá un problema del tipo *a*, mientras no resuelva por sí mismo uno, mientras recurra á un extraño para el análisis. Se comprende: según la teoría de TANZI:



la proximidad de los elementos *a* y *b* determina la asociación, la fijación consciente de la idea *n*, ó la aptitud para llegar, sin obstáculos, á ella. Mientras el espacio *c* no disminuye, la idea no existe. El contacto se produce en virtud del esfuerzo de atención para constituir la unidad psíquica, que es la agrupación orgánica del conocimiento. Cuando el problema es enseñado, integran otras vías de asociación, las de apoyo, pero no las del análisis, *a*, *b*, quedándonos de esta manera, sin camino para ulteriores trabajos de la misma especie. Por el contrario, el esfuerzo personal, hiperhemiza el centro que las asocia, habilitando la única vía por la que formamos criterio acerca de la solución. Vencida la resistencia propia á todo camino sin transitar, limpio ya de malezas y pedruscos, nada se opone á futuras penetraciones que ahonden la

huella, hasta integrar los neurones al menor estímulo automáticamente casi.

Puede, no obstante, volverse la aproximación difícil por una enfermedad ó, cuando no se la ejercita periódicamente, por atrofia de las prolongaciones. De aquí la necesidad de los repasos que mantengan directa ó indirectamente en estado de vibración constante al cerebro.

Hay maestros extremos, que objetan los libros al lado de cuyos enunciados van escritas las respuestas. Lo contrario opinamos nosotros; el conocimiento del resultado antes de la solución, bajo ningún concepto es un elemento de análisis; y se consiguen tres fines: 1º Que el alumno no admita como bueno un razonamiento falso, eximiéndose de nuevos análisis que corregirían los anteriores hasta dar la integración verdadera y, de consiguiente, única positiva del punto de vista del desarrollo de la aptitud; 2º Evitar análisis comprobatorios, esfuerzos innecesarios y penosos de jóvenes laboriosos ante la duda que inspira siempre un resultado, cuando el análisis se complica con largas operaciones; 3º Y por último, la satisfacción de carácter emocional, poderoso excitante del trabajo, que se siente al estar seguros del análisis que se ha hecho y la fé que concluye por tenerse en la propia aptitud, autosugestión, que da una gran consistencia á las unidades psíquicas.

En poquísimos casos el conocimiento anticipado de la respuesta es un inconveniente; contribuye, por lo contrario, al éxito pedagógico de las lecciones; hemos observado siempre falta de interés, trabajos incompletos y mal hechos, cuando los alumnos no han tenido á su disposición una clave. En problemas muy simples ó ejercicios sin combinaciones, el requisito, fácil es presumirlo, no es necesario.

Ahora ¿qué guía tendrá el alumno sin el resultado para ratificar su análisis? Desde luego, debe acostumbrársele á la prueba mediante el análisis inverso, partiendo de la conclusión para llegar á una de las condiciones dadas. Pero, ante todo, el sentido

común es un gran rectificador de resultados ; esa especie de intuición, vista de águila del calculador, para situar, después de la lectura del problema y del análisis de la pregunta, el resultado entre dos cantidades de diferencia mínima, que evita contra-tiempos y contrasentidos. Discernir: *este resultado es imposible* ó *este resultado es posible*, es tener de la tarea, hecha la mayor parte. Un alumno capaz de darse cuenta que 188 baldosas de 0.25 ms.² son insuficientes para embaldosar un patio en cuyas dimensiones entran metros ; que dentro de datos lógicos, tocante á velocidad es imposible que un tren recorra 2490 kilómetros en 8 horas ; que dentro de datos lógicos tocante á mano de obra, es imposible que un jornalero haga, en 4 días, una pared de $55 \times 2 \times 0.75$ ms.³; que dentro de datos lógicos es imposible que en tres años resulte el interés mayor que el capital ; que venta es costo más ganancia ó pérdida, es no presentar sino excepcionalmente soluciones deficientes, porque los errores rara vez están comprendidos entre la máxima y mínima que el sentido común indica.

www.libtool.com.cn

CAPÍTULO XIII

Defectos observados con frecuencia en la enseñanza de la Aritmética

I

En preguntas y respuestas. — 1º Comenzarlas con estas frases: *quién sabe...., quién puede...., á ver el niño que pueda...., que sepa*, que fomentan el hábito de levantar la mano por cualquier motivo; de contestar *yo, señor*; de alzarse del banco. Se produce la indisciplina; se pervierte la atención; el maestro en vez de cuatro preguntas por minuto, hace dos y rompe la unidad, obligado á reprimir los cuchicheos con *bueno, silencio, cállese Vd.; María, esté atenta; mire que si no se calla no vamos á seguir....pero, ¿por qué conversa? Justo, está mirando atrás; deje ese lápiz; miren aquí*. Abundancia de gritos, gasto de palabras, mucha fatiga y mucho fastidio de una y otra parte, porque la atención, cada vez más débil, inutiliza las buenas cualidades que tuviere la clase. Estos defectos, propios del principiante, forman hábitos que el esfuerzo y la aptitud pedagógica extinguen. 2º Preguntar solamente á los niños que levantan la mano; á los de adelante y olvidar los últimos de la fila.

El objeto de la pregunta es excitar la mente, impidiendo que el estado de pasividad continua agote la atención; por otra parte, perenne sostén del tonus psíquico, ofrece la ocasión para probar la solidez de los conocimientos adquiridos. Una lección

es buena, salvo especialísimos casos, cuando se pregunta á todos los alumnos una vez por lo menos. Empero, observamos cada día maestros que interrogan sólo á los explosivos ó inquietos y dejan sin mover de sus asientos durante semanas, á pequeñuelos silenciosos que piensan mucho quizá, quizá poco, pero que por hurañería tal vez, tal vez por ignorancia, no dan destempladas señales de su presencia. 3º Indicar, al que debe responder, con el dedo ó con la palabra *Vd.* Este defecto complementa al anterior. El maestro necesita llamar quien responda á su pregunta; la demora debilita por impaciencia, la atención; ignorando los nombres indica, fácil es de suponer, al que más se exterioriza. La lección así, es para 7 ú 8 no para 40, si es que la impavidez de los 32 restantes no arrastra á todos, pues nada aplasta más que la desatención de quienes deben atender. 4º No interrogar con la rapidez necesaria, sin ambigüedades, en voz alta y clara. El defecto tan generalizado de la lentitud en las interrogaciones del *principio y fin*, promueve desórdenes porque la impaciencia por responder, obliga á los niños á levantar exageradamente la mano para llamar sobre sí, la atención del maestro. Además, no se aprovecha el tiempo de la mejor manera posible; diez preguntas valen menos que veinte de igual radio psíquico. Lo ambiguo, la voz baja y sin matices, desorienta, rompe la unidad del momento psíquico, produce ese vago estado de sopor ó confusión mental conocido bajo el nombre de obnubilación. Por otra parte, nada agota la atención de los alumnos tanto como el no dar descanso á la lengua, (logorrea, lalomanía, polifrasia de KUSSMAUL, de que adolecen no pocos maestros y es tan perjudicial como el mutismo de que se hallan afectados otros. 5º Abusar de palabras y modismos (monofrasia adquirida) como estos: *vamos á ver; perfectamente; ¿eh?; como sabemos; ¿no es así?; muy bien; bueno, ahora... ¿no les parece á Vds?* y aprobar, por hábito, buenas y malas respuestas. De frases para dar tiempo á nuevas preguntas ó para evitar el silencio entre una

pregunta mal hecha y una respuesta morosa ; no estimulan ni significan nada, roban corrección al lenguaje y tiempo á la clase. 6° Hacer repetir una respuesta fácil ó trivial á seis ó siete alumnos. V. g. : ¿ Cuánto es $2 + 3$? Todos levantan la mano ; el primero dice 5. No obstante, se pregunta lo mismo á un segundo alumno, á un tercero, á un cuarto, á un quinto. ¿ Qué número acabo de escribir ? *A.* — 12 ; *Otro* — 12 ; *Otro* — 12 ; *Otro* — 12. Pérdida de tiempo y un constante atentado al interés y al trabajo de la mente. 7° Dar á la pregunta y respuesta siguientes :

M. — ¿ Cómo se suman cantidades ?

A. — Para sumar cantidades, escribo unas debajo de otras de modo que las unidades se correspondan ; las decenas se correspondan ; las centenas se correspondan. Trazo una raya debajo y luego, etc.

Esta otra forma :

M. — ¿ Cómo se suman cantidades ?

Para sumar cantidades....

A. — Se escriben unas debajo de otras....

M. — Que se correspondan....

A. — Las unidades con las unidades....

M. — Las decenas....

A. — Con las decenas....

M. — Se tira luego....

A. — Una raya debajo y se empieza á sumar por la derecha, etc.

8° Cuando el maestro enseña, la clase debe ser absolutamente pasiva á fin de no perturbar los tres ó cuatro minutos de atención intensa con preguntas importunas y respuestas que retarden la explicación del caso. Si se trata de enseñar la suma

$$\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 2 \\ 2 \ 1 \ 3 \\ 3 \ 3 \ 2 \\ \hline \end{array}$$

no se hará de esta manera :

M. — Para sumar estas cantidades se suma primero la columna de la derecha, como Vds. ya saben, escri-

biendo el resultado abajo. Pase Juan : sume la primer columna. (*Pasa Juan y suma*).

M. — Está bien. Después se suma la segunda columna. Pase María, sume. (*María suma, pero se equivoca ; con este motivo se produce un diálogo á media voz, de carácter individual, entre la maestra y la alumna para corregir la suma, corriendo así el tiempo*).

M. — Vuelva á su asiento. Y después se suma la 3ª columna. La cantidad que resulte escrita abajo, ¿ qué será ? David.

A. — Será el resultado.

9º Dirigir la atención, mediante una serie de preguntas, sobre una idea secundaria pasando casi por alto, ideas principales. Por la extensión del interrogatorio, juzgan los niños la importancia del punto.

10º El éxito de la lección depende de la seguridad con que el maestro la desarrolla, de la exactitud de las preguntas, del tiempo que emplea para hacerlas después de una respuesta ó el que deja transcurrir hasta llamar al alumno.

En ilustraciones. — 1º — Usar ilustraciones que dirijan la atención á puntos diferentes de los que el maestro se propone. La medida de la instrucción que una persona recibe acerca de una cosa, depende (MEYNERT, TANZI, CAJAL) del grado de atención que por más largo tiempo, sobre esa cosa, ponga ; ahora bien, he observado maestros buscar con afán ilustraciones llamativas ; juguetes con espejitos, canastillas de vistosos colores, objetos fascinadores para los ojos : dar la lección y quedar satisfechos del prodigioso interés que despertaron en los educandos. Sin embargo, los resultados han sido nulos. No consiguieron enseñar lo que pretendían, tanto más cuanto comenzaron por describir los objetos. La razón es obvia : hay que distinguir dos clases de atención : la que los niños prestan al asunto y la que prestan á puntos ajenos al asunto. Un objeto novedoso y atractivo cautiva, verdad, desde el primer momento ; pero no para adquirir nociones acerca del número ó

las operaciones, sino acerca de los colores, la forma, el mecanismo de la chuchería. Si bien es cierto que no deben presentarse objetos antipáticos, tampoco deben ser tales que den al cerebro una orientación diferente de la que el maestro se propone.

La ilustración en Aritmética, es un medio, *no de atención sino de comprensión*. La variedad de las repeticiones, la clase de ejercicio, la calidad estética del desarrollo matemático, es lo que debe seducir.

El juego de las barajas no puede ser ilustración más vulgar y pobre. ¿Qué sería del que durante la partida dedicara su atención á las figuras y no á las alternativas y combinaciones de cada jugada? No obstante la poca variedad del objeto, nadie osará discutir la fuerza de atención del interesado durante una ó más horas.

Permítasenos, de paso, decir que el principio de JACOTOT, *todo está en todo*, suele interpretarse de una manera contraria al principio de la unidad. Con canastitas llenas de flores para enseñar el número 9, se pretende á la vez, en 25 minutos, dar nociones acerca de los olores, de los colores, de la inflorescencia, de la canasta, del mimbre y llevar adelante el proceso pedagógico de la enseñanza aritmética. Inútil es extendernos acerca de un procedimiento negado por los principios psicológicos. Esta reconcentración (forma concéntrica) es admisible en los casos de la enseñanza no sistemada, en asignaturas de un período en que el niño (jardín de infantes) no tiene por delante sino cosas y propiedades que no provocan otro proceso que el de la identificación primaria.

Lo que se gana extensivamente se pierde intensivamente. La atención repartida, no profundiza hasta el análisis los conocimientos, ni llega á la abstracción. La educación es intuitiva y la lección, *de cosas*, nunca de Aritmética puesto que sus vías, propias y características, son de identificación secundaria.

2º— Manejar con manos inseguras las ilustraciones ó no tenerlas preparadas. El maestro debe ser una especie de prestidigitador en ligereza y habilidad

mientras cuida con la vista y la atención á su público, la clase. Con frecuencia hemos observado maestros cambiar de mano en mano un objeto, darlo vuelta para hallar lo que busca; ó bien enredar los dedos con el metro y la cinta, consiguiendo medir á duras penas; ó bien ir de una mesa á otra, de esta caja á aquélla para dar con lo que necesita; ó bien desenvolver láminas que ocupan las dos manos é impiden apuntar las figuras de enseñanza.

3° — No tener presente que la atención principia por las cualidades atrayentes (estetismo). Una palan-gana sucia, una caja de cartón mal hecha, colores sombríos, cartelitos mal recortados, números escritos sin cuidado, predisponen mal el ánimo. De ningún modo este concepto acerca de las ilustraciones, contradice al que emitimos antes.

4° — Hallarse en apuros para ilustrar una lección, sin recordar que las farmacias, tiendas y almacenes interesados en que conozcan sus productos, distribuyen á montones figuritas atrayentes que pueden utilizarse en la enseñanza de las tablas; que la tiza de colores es un recurso siempre eficaz y nuevo; que un ramo de flores, una colección de hojas, los cabellos de una trenza, las hebras de un cordel resuelven pedagógicamente, una clase. Convenimos, no obstante, que el ingenio no basta para improvisar las ilustraciones en el momento mismo de presentarlas.

5° — No emplear la tiza de colores ó abusar de ella, extremos uno y otro, censurables. He observado maestros que para escribir un 4, lo hacen con tiza azul; para escribir una tabla, lo hacen con tiza roja; ignoran el objeto de los colores, cual es, de concurrir á la adquisición de los conocimientos, diferenciándolos desde la objetivación, pero del punto de vista de su descomposición sistemada. El uso exclusivo de la tiza blanca ilustra con menos éxito las lecciones, por cuanto el esfuerzo para distinguir y conocer diferencias, es mayor.

6° — Presentar láminas ó escribir signos y números demasiado pequeños ó demasiado grandes sin tener

en cuenta los principios de la percepción visual en niños de corta edad. Este error se comete con frecuencia, en perjuicio de la vista, de la atención y del aprendizaje; niño que no ve, no aprende. Hay maestros empeñados en que distinga los granos de maíz que presenta en la mano; que cuente alfileres; que nombre las figuritas de una lámina; que sume las cifras apenas perceptibles de un cartelito.

7° — Tener el frente ocupado por ilustraciones extrañas á la lección ó moverse en él, personas que entran, salen ó preparan otras clases.

Es muy común notar en el pizarrón donde van á escribirse números, palabras, líneas, inscripciones y dibujos extraños á la lección; todo tiende á distraer; el caso varía si sobre el fondo obscuro se destacan nítidos, la ilustración ó el número que utiliza dicho momento de la enseñanza. Interrumpe de igual modo, esa germinación de la idea, una persona que atravesando el frente de la clase, oculta por un momento la superficie donde todos miran.

Conviene que la pizarra esté dividida por líneas verticales imborrables, en tantas partes como niños quepan.

8° — Presentar ilustraciones complicadas, ó cuyo mecanismo cautive el espíritu siempre curioso del niño. Las formas simples como la esfera, el cubo, el cilindro ó los objetos sueltos, son insuperables para la enseñanza de la numeración. Las láminas deben ofrecer elementos nítidos y fáciles de ser observados.

9° — Preparar desordenadamente los ejercicios en los pizarrones; trazar, sin arte, signos, números y cantidades; descuidar los principios de simetría, belleza y claridad que hacen atrayente una lección aun antes de que el maestro hable: por el aspecto de los preparados.

10° — En ejercicios de reconocimiento, escribir distante los números unos de otros y pocas veces la cantidad que debe buscarse. Si fuera 5, una distribución así:

8	9	7	5	4
	2		8	
9	6	4	3	
				7 3
		1	8	
			0 5	
7	3			4 9

exigiría á niños con un mes ó dos de clase, mucho tiempo para hallarlo. La demora es la causa primordial en niños que piensan poco, de la desatención y de sus consecuencias.

11°—Colocar los pizarrones lejos de la primera fila de alumnos ; tapar con el cuerpo, mientras se escribe, las cantidades ó expresiones que deben observarse.

12°—No exigir posición conveniente cuando señalan con el puntero ó toman un objeto para mostrarlo á la clase. No exigir que indiquen con precisión y hablen al mismo tiempo. Suelen empuñar el puntero con las dos manos, dar la espalda, tener los objetos contra el vientre, dentro de los puños, señalar para sí mismos, olvidando que son 42 los alumnos que quieren ver, aparte de lo que para las maneras y buenas costumbres debe hacerse en cada momento.

En lenguaje.—1° Usarlo incorrecto, repetir las palabras ; hacer largas pausas ó donde no corresponden ; emplear vocablos innecesarios ; desorientar al niño con la falta de propiedad ó malas construcciones. No necesitamos ocuparnos de las funestas consecuencias de estos defectos tan comunes en el maestro principiante ó en el que no estudia lo que enseña ; la práctica, la buena preparación y el empeño de mejorar, corrige casi siempre este abundoso cuadro de dislogias, dislalias y disartrias rara vez patológicas, porque constituyen un modo natural de ser en la mujer, las primeras ; en el hombre joven, las segundas cuando no se estudia.

2° Repetir las respuestas porque fueron incompletas, ó muy bajas ó para dar tiempo á meditar otra pregunta. Este defecto (ecolalía) es propio de los que comienzan á enseñar y creen que la voz propia, reso-

nando constantemente en el aula, mantiene más activa á la clase.

3º Hablar mucho (verborragia) so pretexto de emplear el *método expositivo* y no sostener el encadenamiento lógico, á lo que contribuyen las asperezas de una elocución incorrecta, poca variada y nada atractiva. En primer grado solo cabe la explicación tan corta como puede serlo una sentencia simple destinada á inculcar, sin rodeos ni aspavientos elocutorios, un conocimiento por la razón suprema de los sentidos.

4º No usar de voz fuerte, lenguaje agradable, movimientos activos y un rostro risueño que revele interés y ánimo predispuesto á la lección que da.

El éxito de la enseñanza depende del lenguaje. Los efectos de un interrogatorio ó una exposición monótona, apresurada, sin acentuación de palabras ni de frases, sin elocuencia didáctica, amontonando vocablos uno tras otro á la vista de una clase, primero sorprendida, luego indiferente, distraída más tarde y por fin, indisciplinada, porque en presencia de un desfile de innumerables ideas, sin diferenciación fonéticas, la atención no puede fijar ninguna : son desastrosos.

5º Divagar, explicando puntos que se apartan de la lección ó que siendo de la lección no necesitan aclararse.

6º Abusar de los gestos y ademanes, tocar á los alumnos, palmearlos, besarlos. Suele caerse de tal manera en lo *ridículo*, que el maestro llega á ser víctima de la *tomada*. Un maestro, joven inteligentísimo que pretendió captarse la voluntad de su primer grado con dicho sistema, llegó un día que á la salida fué blanco de burlas que nos fué imposible reprimir.

En Procedimiento. — 1º Comenzar el interrogatorio sin la atención de todos los alumnos, con voces desatempladas ó habiendo, sobre los pupitres, cuadernos, papeles, libros, lápices, poderosos elementos de distracción en cualquier momento débil de la clase.

2º Repetir la forma de un desarrollo varias clases consecutivas. Labor constante y fatigosa para

nosotros, ha sido tratar de que los maestros pongan á prueba su ingenio y escapen á la rutina, presentando sus lecciones, siempre bajo nuevos aspectos. No puede ser más odiosa, en aritmética, la repetición diaria del mismo interrogatorio, de los mismos ejercicios y hasta de las palabras y ademanes que caracterizan no á un ser inteligente sino á un organillo con su repertorio de cuatro ó cinco piezas.

3° Recibir deberes en papeles sucios, rotos, arrugados ; permitir el uso de lápices cortos ó sin punta. No tener suficiente borradores, tiza y pizarras. Por una parte, acostumbran á no valorizar la enseñanza, á apreciar poco los esfuerzos y mandatos del maestro, de lo que resulta un aprendizaje descuidado é intermitente : por otra, cuando seis alumnos se sirven de un borrador ó hay que buscar tiza en momentos que se la necesita, se pierde un tiempo que es oro en una lección cuyo desarrollo ha comenzado, aparte de lo que el interés decae con interrupciones tan inoportunas. Esta manera de perder minutos es tan común hoy en las escuelas, que, casi podríamos afirmar, ninguna lección dura el tiempo reglamentario ; los 20 ó 25 minutos son nominales ; reales no son sino 10 ó 12.

Si fuera posible detener al tiempo no tendríamos porque afligirnos del minuto hurtado por nuestros descuidos. Pero, desgraciadamente, hora perdida es hora irre recuperable ; no se aprovecha lo mismo un año á 12 minutos por lección que á 20 ; niño que repite un curso es un año de edad desaprovechado. Siendo, en nuestra sistemada organización escolar, imposible la reposición del tiempo, para emplearlo, exige todas las atenciones del maestro.

4° Dar en los ejercicios de síntesis (finales de cada clase), á los que pasan al pizarrón, trabajos que exijan mucho tiempo. Por ejemplo (Lección 1ª mes de Abril) : *tracen nueve veces nueve puntos*.

5° No destinar una parte de cada lección, durante los seis primeros meses, al reconocimiento, lectura y escritura de cantidades ó expresiones. La memoria conserva su organización por un tiempo cada vez más

largo, mediante repeticiones continuas durante la época del aprendizaje. De no, queda de las imágenes, una reminiscencia cada vez más atenuada.

Por otra parte, recordemos que la asistencia del primer grado, cuando es buena, nunca excede del 84 % mensual. De aquí, el riesgo de los fracasos, empeñándonos en asuntos nuevos, insistiendo poco en los anteriores. Los niños que no asistieron á la lección *del diez* comprenderán con dificultad el 20, 30, 40, etc. No nos equivocamos atribuyendo el general atraso de la enseñanza en muchas escuelas comunes, á la inasistencia de los niños, para quienes el año escolar es de seis, no de nueve meses.

6° Confundir la tabla $3 + 3 = 6$; $9 + 3 = 12$; $12 + 3 = 15$, etc.; con $1 + 3 = 4$; $2 + 3 = 5$; $3 + 3 = 6$; considerando aquélla y no ésta, de suma. Una tabla de suma del 3 enseña á añadir 3 á cualquier cantidad.

7° Ejercitar á una clase que conoce los números hasta 100, en contar ó hacer operaciones con los diez primeros números.

8° Proponerse vencer, en cada lección, más de una dificultad importante ó, para transmitir un conocimiento, dar como sabido, otro que el niño ignora. Dar por adquirido lo que nunca se enseñó, para atribuir las dificultades de las nuevas enseñanzas á su incapacidad, pretendiendo corregirla con procedimientos tan condenables como las malas notas, las amonestaciones colectivas y las penitencias, algunas fuera de todo criterio pedagógico, como escribir tantas veces una suma, tantas veces la solución de un problema; es un error cometido con frecuencia.

Hay maestros (he tenido que criticar á mis practicantes, semanalmente este defecto) que en dos meses desarrollan un programa de seis meses, sin estar seguros de si lo que enseñaron fué aprendido por la mayoría de la clase. Sus interrogatorios deficientes porque suelen preguntar á 12 de 40, no están hechos con el ánimo de cerciorarse hasta donde el conocimiento ha penetrado. Hay censurable descuido tocante

á problemas : el maestro tiene la pésima costumbre de ayudar un análisis que evidentemente no puede el alumno hacer, considerándolo, no obstante, apto, sin averiguar el origen de las dificultades, para dar otra dirección al método. La adquisición de los primeros conocimientos sirven de base á los demás por complejos que sean. El problema prueba la capacidad del alumno : sólo una vez debe enseñarse el procedimiento para resolverlo. Un problema enseñado es para el alumno, una integración periférica ; resuelto por esfuerzo propio, es una integración central.

9° Resolver un problema entre muchos alumnos y el auxilio del profesor ; en vez de ocupar 25 minutos en diez ó doce casos, ocuparlos en uno.

10° Confundir la *enseñanza con el examen* ó pretender que el niño descubra sin consideraciones al esfuerzo y al tiempo, cuanto debe aprender. Esta desatinada aplicación del principio de Rousseau, no forma sino un espíritu de animosidad hacia la asignatura, de resultados contraproducentes. Mientras el éxito no varíe, debe seguirse el procedimiento corto.

11° No pasar rápida pero lógicamente, de lo concreto á lo abstracto, de lo particular á lo general. Cada lección debe exteriorizar el espíritu de la materia, á fin de que en ningún momento pueda formarse de ella otro concepto que el indicado por sus métodos de investigación.

Menos justificable es aún la lección abstracta indicada objetiva por sus desarrollos. Las palabras, por sí, en cerebros de siete años, no despiertan sino imágenes vagas ó falsas. No siendo los fenómenos mentales sino imágenes ó combinación de imágenes, se comprende la excepcional importancia de grabar nítidamente las primarias mediante el común procedimiento de la percepción por las vías ópticas.

12° Abusar de la pizarrita, mandándola sacar y guardar más de una vez cada clase ó trabajar en ella más de cuatro minutos : la labor es individual y pasiva por cuyo motivo el interés decae rápidamente ; además, lo que hagan 40 niños, por cierto, defectuoso,

nunca podrá ser observado como se merece, en pocos minutos y las indicaciones del maestro rara vez serán provechosas, porque la clase ignora lo que haya hecho uno de sus niños.

13° Detenerse en explicaciones ajenas á la lección convirtiendo la clase de aritmética en clase de ortografía, de historia, de higiene, de moral ó, mediante divagaciones por ningún motivo justificadas, olvidar el tema y seguir un desarrollo sin unidad, lo que para la cultura del espíritu es desastroso, puesto que no es posible dar solidez á ninguna asociación mental (unidad psíquica) si no se construye alrededor de la idea única.

14° Hacer escribir los enunciados lo que, siendo una disipación del tiempo, es contrario al cultivo de las tres condiciones de la memoria de concepto.

15° Explicar la teoría de la Aritmética ó detenerse en definiciones como estas: ¿Qué es Aritmética? ¿Qué es número? No obstante parecer un error pedagógico imposible de cometerse, conocemos maestros que dan lecciones de esa naturaleza. ⁽¹⁾

16° Escribir los cálculos verbometales en la pizarra para que el alumno ejercite la vista en preparaciones falsas. a) El hecho de ser verbometales indica su propósito de acostumbrar el oído; b) La escritura resulta tan compleja que sólo el 6° grado, cuando su preparación es buena, puede leerla. c) Pero una practicante escribe:

$$\begin{array}{l} 5 - 3 \times 6 + 12 \text{ en vez de } (5 - 3) \times 6 + 12; \\ 5 + 8 - 3 \times 6 \gg \gg (5 + 8 - 3) \times 6; \\ 9 - 8 \times 3 + 6 \gg \gg (9 - 8) \times 3 + 6; \end{array}$$

y el niño calcula de esta manera: $5 - 3$ es 2; 2 por 6 es 12 ; $12 + 12$ es 24 ; lo que debe ser calculado de esta otra: 3 por 6 , es 18 ; $5 - 18$, es -13 ; $-13 + 12$ es -1 . La consecuencia de estos errores es fu-

(1) El inspector F. BRUNET observó lecciones de esta naturaleza en una escuela de Rojas.

nesta para la generalización del cálculo matemático que no hace sino uso de paréntesis. Nos explicamos de esta manera, la eterna lidia de los profesores de Aritmética y Algebra para que los alumnos usen un signo al que nunca dieron importancia desde que se acostumbraron á multiplicar y dividir sumas y diferencias indicadas sin empleo de signos.

17° No aprovechar el tiempo en instruir, ejercitar y cultivar la mente. Las clases son limitadas, tantas por semana y la que se pierda por divagaciones, explicaciones inoficiosas, desarrollos mal concebidos ó cosas que el niño sabe, es irrecuperable.

18° Hay quienes cometen el error de enseñar uno por uno los números como agregaciones de unidades simples. Este sistema, llamado de *la unidad fija*, no solo es largo sino degrada el trabajo mental. Concebir una ciencia eminentemente deductiva, como una mata de yerbas y no como un vigoroso roble de múltiples ramificaciones, derivadas unas de otras, en virtud de sencillos al par que maravillosos artificios como los de la operación, es convertir en pobre luz de bujía un procedimiento que en el campo de la lógica fulgura como un sol.

19° Seguir en la enseñanza de tablas, el orden $4 - 4 =$; $5 - 4 =$; $6 - 4 =$; $7 - 4 =$, etc.

Detenerse en cada resta, objetivar demasiado lo que debe ser sintético y abstracto, en el sentido de que lo que debe quedar en la mente, es la representación 5 asociada á $9 - 4$; 7 asociada á $11 - 4$, etc. y por último, las imágenes auditivas asociadas á las visuales. Hacer esta enseñanza exclusivamente objetiva, además de la demora que implica, se acostumbra por fuerza, á restar 4 de 9, por unidades (con los dedos) y no la síntesis 4 de la síntesis 9.

La practicante L. con el uso de lápices, golpes de timbre, bolitas, portalápices, por las razones antedichas, no conseguía la rapidez que es necesaria en la enunciación de estas tablas; de la tabla del 4, en una lección, alcanzaba á enseñar hasta $16 - 4$, sin poder hacer ejercicios de repetición, abstracción y aplicación.

20° No emplear un medio rápido para recoger ó distribuir los deberes. Es doloroso decirlo, pero muchos maestros válense de ese pretexto para pasar el tiempo. Ellos recogen 40 cuadernos, banco por banco; ellos los reparten, uno á uno, leyendo con una lentitud capaz de impacientar al más pachorriento de los educandos, cada nombre; ellos, roban á la enseñanza el tiempo más precioso para aprender y predisponen, no bien entran, á la indisciplina, hija rolliza del tedio.

21° Mandar niños á la pizarra ó al frente para que señalen un número, para que digan una palabra, para que tomen un objeto y lo vuelvan á dejar, interrumpiendo la lección con frecuentes correrías por los caminos que separan las filas, sin otro resultado que el de perder el tiempo y matar la atención.

M. — ¿Qué número acabo de escribir?

A. — El número 4.

M. — Pase, Juan, á señalar. . . . Siéntese.

M. — ¿Cuatro cuadernos, más tres cuadernos, cuántos cuadernos son?

A. — Son siete cuadernos.

M. — Pase, María, tome siete cuadernos. . . . Siéntese.

22° Hay maestros que comienzan la lección (enseñanza del 10) de este modo: « *M.* — ¿Qué número he escrito? *A.* — El número 1. *M.* — ¿Y ahora? *A.* — El cero. *M.* — Ahora, poniéndolos así, 10, ¿qué número resulta? (No responden). *M.* — Este número es el diez. Donde se contraviene el principio que dice: « dar la idea primero y luego la palabra »; consecuencia, retardar la enseñanza de los demás números, puesto que no resultan derivados unos de otros, dando una idea falsa de la composición.

Otros defectos — 1° Abusar de los elogios, aprobando lo que está mal.

2° Dar á la enseñanza aspectos fingidos pretendiendo engañar á los alumnos con cariños y alegrías que no exteriorizan el habitual modo de ser del maestro (fumismo pedagógico ó simulación consciente).

3° No mantener, dentro del afecto, el principio de autoridad; sentarse entre ellos; recurrir á medios violentos, enojos, gritos, malos ceños.

4° No conservar la posición del frente, pasearse, caminar entre las filas mientras se pregunta ó los niños hablan.

5° No recibir la respuesta completa del alumno ó esperar demasiado la contestación.

6° No ver á todos los alumnos sin fijar la vista en ninguno.

7° So pretexto de animación, dar á la clase un carácter jocoso que comprometa la afable seriedad del maestro y la atención de los alumnos á la enseñanza.

8° Recoger deberes en mitad de lección.

9° La producción de ruidos extraños á la clase como los de las pisadas de la calle, de las clases vecinas, alargan el tiempo de reacción psíquica (OBERSTEINER). ⁽¹⁾

Parte de los defectos que acabamos de indicar son tolerables en aquellos maestros que han conseguido un gran ascendiente sobre sus alumnos y consiguen, sin el artificio pedagógico, atención y respeto. Pero debemos confesar que esa clase de maestros son escasos en la República Argentina, por la heterogeneidad de los niños á quienes debe educar.

10° Tutear á los alumnos ó llamar *señor Fulano* á chicos de 1°, 2° y 3° grado. El tratamiento de Vd. nos parece natural y menos chocante que el de tú ó de señor; forma adecuada á la familiaridad y respeto que deben existir entre maestros y alumnos.

II

De mis anotaciones, observando la práctica de los alumnos maestros.

Primer Grado. — 1. — Falta el método para enseñar la tabla del seis de sumar: « 6 y 6, 12; 12 y 6,

(1) Experimental researches on attention, I, p. 439.

18, etc.», que los niños repiten, haciendo uso, á veces, de lápices y á veces del timbre, de modo que $6 + 6 = 12$, no se toma como una síntesis, sino como una agregación sucesiva de unos.

2. — Voz baja; lenguaje, espacioso é incongruente: miradas á la calle (el aula da á la calle).

3. — *a.* — No se dan problemas que convenzan de que sólo pueden sumarse magnitudes concretas de una misma denominación.

b. — El motivo de los problemas es un cuento; pero hay más cuento que problemas.

c. — No se transmite algo nuevo en cada lección.

d. — La voz es baja, los ejercicios poco variados; se recorren las filas como obedeciendo á una obsesión ambulatoria, lo que contribuye á que la atención no forme campo por no tener la vista un punto fijo de apoyo.

4. — Se escriben números pequeñísimos en el pizarrón. Las respuestas no son completas y se las recibe tumultuosamente.

5. — Se mandan niños de á uno al pizarrón para ejercicios que pueden hacerlos 8 á la vez.

6. — Se ejercita mucho en las pizarras manuales y poco en las murales, de modo que se ignora si el niño exterioriza bien el conocimiento.

2º Grado. — 1. — Los problemas no responden á la forma recapitulatoria. Cuando más se los necesita para fijar y evocar los conocimientos transmitidos, se infantilizan dándolos de una operación, de suma ó de resta.

2. — En lección de ejercicios y problemas se manda un solo niño á la pizarra con su problema; así, transcurren 12 minutos en que el alumno, sin tiempo para reflexionar bajo las molestas preguntas del maestro, no sabe lo que hace.

3. — Se justifican las operaciones de un problema, por la operación misma: el niño no conoce el análisis que comienza por la objetivación.

4. — Los ejercicios no son acumulativos y concurren-

tes, porque es constante la repetición de una misma forma.

5. — El practicante no tiene de antemano los resultados, de modo que emplea 3 ó 4 minutos para comprobar las operaciones.

6. — Se dan problemas como éste, inverosímil, pobre, antipático, improvisado por una mente sin ingenio: *Para hacer una pared se necesitan 4987 ladrillos. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán para hacer 2135 paredes?*

7. — Se dan cálculos mentales sin tino. De uno, da el resultado solo un alumno; acto continuo se da otro más complicado, aceptando como respuesta del grado, la de un solo niño.

8. — El practicante, se pasea por entre las filas mientras interroga, con la vista en los cerros de Ubeda.

9. — Distribuye mal las preguntas; interroga al que primero levanta la mano con el *Vd.*; á ver *Vd.*

10. — Dedicar 8 minutos á explicar el sitio del signo +, enseñanza que corresponde al 1^{er} grado y que no es de valor en el análisis aritmético.

11. — Recibe respuestas apenas perceptibles, sin tener en cuenta que la de un alumno enseña á los demás.

3^{er} Grado. — 1. — Se da este enunciado: «Si á Mendoza hay 190 leguas y un chasque anda 13.5 por día. ¿Cuántos días emplearía San Martín en recibir noticias de Pueyrredón?»

2. — Se dice: «Si 0.08 ms. ocupan una columna de la *Gaceta*» en vez de: *Si una columna mide 0.08 ms. de ancho.*

3. — Los niños escriben Mlt.: mts.; Klm.; reducen 3 dms.³ á Hms.³, así: 0.0000003.

4. — El razonamiento del problema: Si *a* objetos valen *c* \$ ¿cuántos pesos valdrán *b* objetos de la misma especie? Se presentó embrolladísimo, sin hacer uso de las cosas, pues esta convicción fundamental de la proporcionalidad, mediante la reducción á uno, no puede hacerse abstractamente. Si 12 lápices (*presentándolos*) valen 60 centavos, un lápiz, que es

12 veces menor, valdrá 12 veces menos. Repitiendo el caso con bolitas, cajas, frutas; pasándose luego á objetos que no están á la vista para dejar en la mente, grabada la imagen del procedimiento para resolver el problema típico de la tan frecuente combinación, : $\times$.

5. — Los niños, después de contestar, acostumbran permanecer de pie, de modo que á los pocos minutos 6 ó 7 estorban la atención de todos.

6. — Acerca de la suma de quebrados, no se escribe el signo entre las fracciones reducidas á común denominador : $\frac{4}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{16}{20} + \frac{15}{20} + \frac{10}{20}$.

7. — No se corrige con empeño el lenguaje; se admite: Si un Dm. tiene 10 ms., 12 tendrán 125; por decir que 12 Dms. y 5 ms. equivalen á 125 ms.

8. — En cantidades decimales, se tolera el olvido de la coma y de la denominación. De donde, el niño, desde el principio, no da importancia á los conocimientos fundamentales de la escritura matemática que se adquieren por hábito muscular, (asociación audio-visomotora).

9. — Se tiene hasta 8 minutos á los mismos niños en la pizarra mural, en lecciones de ejercitación.

10. — En lecciones de problemas, se da uno para todos los que trabajan en la pizarra, de modo que todos repiten el mismo razonamiento sin mayor provecho para la clase.

11. — Comienza la enseñanza de la reducción á la unidad, sin objetivación y con problemas compuestos.

12. — No se dan problemas como deberes que el niño hará en su casa.

13. — Nunca se recurre al sentido común. Se dicen con toda ingenuidad, los mayores despropósitos : « Si 1 kilo vale 1.08 \$, 2450 valdrán 440 \$ ».

14. — Se hace repetir el mismo razonamiento á varios niños, contraproducente del punto de vista de la cultura mental. Repetir las palabras que acaba de decir otro, no significa exteriorizar las ideas que uno tiene ó poseer las ideas que ellas expresan.

15. — Los alumnos se expresan en un lenguaje incorrecto porque se les obliga á la forma gramatical compleja de la que son incapaces. Si se les acostumbra á la más natural, á la oración simple (análisis numerado) la expresión mejoraría.

16. — Ningún niño multiplica bien, casos como este : 4.32498×0.0022 , consecuencia de una explicación incomprensible que se diera del caso.

17. — Para formar el hábito de manejar la coma, se dan cantidades grandes que dirigen la atención á las operaciones y no al propósito de la lección.

18. — En ocho clases sucesivas acerca de los decimales, no se ha dado un problema ni se ha generalizado los ejercicios.

19. — Se dá este cálculo mental : 24.6 por 100. Cuatro niños levantan la mano, uno responde cero, otro 246. No obstante, el practicante pasa á ejercicios de índole diversa, tan conforme del resultado erróneo como si fuera exacto ó no tuvieran importancia la pregunta ni la contestación.

20. — Durante la enseñanza del Dm.², se dice : « cada uno de estos cuadraditos tiene un metro de cada lado, es decir, que tienen un metro á cada lado » expresión incorrecta que evoca imágenes difusas.

21. — El maestro nunca se cerciora de si el conocimiento ha sido adquirido por todos los alumnos ; de un asunto pasa á otro sin ejercicios de fijación ni de examen para asegurarse si, por los menos, $\frac{3}{4}$ de la clase posee lo que se quería que aprendiese. Al efecto, el maestro debe distinguir niños buenos, regulares y malos. Si los regulares contestan bien no hay necesidad de interrogar á los buenos para cerciorarse de que saben.

22. — Acerca de la suma de decimales que el practicante explica por primera vez, pide cantidades y en vez de comenzar con números simples comienza con estos :

$$\begin{array}{r} 18.0000530 \\ + 12.240 \\ \hline 3.80340 \end{array}$$

que no escribe con seguridad delante de quienes es necesario el prestigio de la preparación.

23.—En ejercicios acerca de la multiplicación de decimales, se dá á los seis niños de la pizarra, cantidades como estas : 82.542×9.032 ; dos niños escribieron el producto así : 39, 129, 174.

24.—Los niños no ejercitan la multiplicación y más de la mitad efectúa mal esta resta : $0.000863 - 5.004$.

25.—No se aprovechan las *lecciones de ejercicios* para escribir cantidades como 1000100.

26.—La sustracción de decimales que acaba de enseñarse, se ejercita con cantidades como estas :

$$\begin{array}{r} 15.000000000009 \\ - 12.00000000043 \\ \hline \end{array}$$

comenzando por lo más general del caso.

27.—Como ejercicio mental, se da :

M.—¿ Décimos + centésimos + milésimos da ?

A.— Da milésimos.

Curioso ejercicio mal derivado del de multiplicación, que no conduce á nada.

28.—Los lápices con que escriben, cortos.

29.—Se clasifica á todos, con 4 ó 5; hay, no obstante, quienes merecen 0 ó 1; otros 2 y 3.

La clasificación es una recompensa al esfuerzo del alumno. Si recibe 4 el que merece 0, engendra una idea falsa de sus propias aptitudes.

30.—Deben enseñarse centésimos y milésimos : el practicante no enseña, examina. Los niños no aprenden ; sus preguntas no son contestadas ; se les habla como de algo que estaban obligados á saber.

31.—Los décimos son mayores que los centésimos, dice ; con la hoja de papel en la mano, no lo muestra objetivamente.

32.—No hay ejercicios de repetición.

33.—En una lección acerca de la escritura de cantidades decimales :

a.— Los alumnos no siguen la prodigiosa rapidez de las explicaciones ; se repiten todas las respuestas

y se manda á la pizarra, para ejercicios de aplicación (escritura de números decimales) un alumno á la vez.

b.—Pregunta solamente á los niños de las primeras filas que levantan la mano y sobre puntos nimios como este : ¿ á qué lado de la coma están los decimales ? ¿ El primer lugar qué lo ocupan ? ¿ El segundo ? ¿ El tercero ? Las respuestas son incompletas.

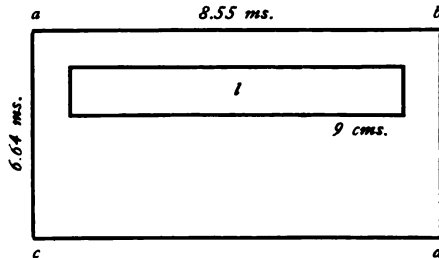
c.—No da deberes.

34. En una lección acerca de los denominados, se notan estos defectos.

a.—La falta, cien veces criticada, de no escribir las denominaciones ; resulta la confusión de los números concretos con los decimales abstractos, sin saber, el alumno, si aquellos centésimos son de metro, de Kilómetro, ó de decímetro ; en consecuencia, suma, resta, multiplica y divide cantidades heterogéneas teniendo en cuenta solo el punto decimal y dando, á los resultados, denominaciones antojadizas.

b.—El problema *¿ cuántos listones de 9 cms. de ancho se necesitan para un piso de 8.55 ms. de largo por 6.64 ms. de ancho ?*

Se objetiviza de esta manera .



donde el listón *l* del mismo largo del salón, según el problema, aparece en la figura más corto.

c.—De este otro problema : *de una calle que tiene 2 Kms., 8 Hms., 5 Dms. y 6 ms. de largo, apunta los datos, así : 2 K., 8 Hm. 5 Dm. 6m.*

www.libtool.com.cn

35. En una lección del 3^{er} Grado S. acerca del *metro cuadrado* (Abril 1899), el practicante comete estos errores :

a.— No presenta ilustraciones y comienza con esta pregunta. ¿ Qué es un metro cuadrado ? Ninguno contesta.

b.— Trata de sus múltiplos y submúltiplos. Demás está decir, que extraño el asunto á los conocimientos del alumno, no se pudo fijar ninguna idea de orientación.

c.— En el ejercicio. ¿ A cuántos ms.² equivalen 2 Kms.² y 1 Dm.² ? 12 levantaron la mano, pero ninguno contestó bien sin que esto sirviese para volver atrás ó se simplificase el interrogatorio.

d.— Se enseña con la abundancia y desenvoltura con que lo hace un profesor en primer año.

e.— El interrogatorio se dirige á los mejores.

36. En una lección acerca de las monedas argentinas, notamos estos defectos : dar idea de todas en una sola lección. Presentarlas después de haber explicado sus cualidades. Maestra poco animosa y clase desatenta á los 15 minutos.

4^o Grado. -- 1. — Los niños escriben *arias* y, lección de problemas (aplicación de la resta de denominados), se dio sólo uno para resolver en casa; el *medio* de la lección lo constituye este único: En un jardín de 3 Hect. y 60 áreas se construye un estanque de 1 Hect. y 3 ms.² ¿ Qué queda para el jardín ?

2. — Un parque rodeado por 285 árboles distante uno de otro 2.5 ms. ¿ Cuánto habrá que andar para recorrerlo ? La practicante razona así: si cada árbol tiene 2.50, los 285 árboles tendrán etc. No hay objetivación ni inducciones.

3. — Se observa, repetidísimo, este defecto: de mandar á la pizarra mural sólo dos ó tres alumnos cuando, en ella, caben 7 ú 8.

4. — Los alumnos hallan en Noviembre ya, toda clase de dificultades para razonar problemas de tres combinaciones acerca del sistema métrico, porque no

se ha seguido un orden desde el principio, que fuera salvando una á una las dificultades.

5. — Es casi general, desde el 2º Grado, este fenómeno: que los alumnos rara vez dan un problema bien resuelto, si es de dos ó tres combinaciones y que los practicantes, no obstante, pasan á tipos nuevos, sin volver al que se analizó mal.

6. — Se nota esta falta de orden: la densidad primero y luego las medidas de peso; lo cual produce una confusión enorme en la mente de los educandos. Uno dice: « un decígramo vale diez metros ».

7. — Acerca de las fracciones comunes:

a. — La practicante enseña en la misma lección, *fracciones y suma de fracciones*.

b. — Principia la suma con este ejemplo:

$$\frac{83}{24} + \frac{10}{8} + \frac{15}{4} + \frac{6}{32} + \frac{2}{2};$$

interrumpe cien veces sus explicaciones con preguntas de examen que el alunino contesta siempre mal.

8. — Hay momentos en que todos hablan discutiendo las repuestas, consecuencia de que participan en la exposición.

9. — Se habla de *m c d*. En los ejemplos, el denominador mayor es múltiplo de los demás; de manera que el niño, al denominador mayor lo considerará, en adelante, múltiplo de los demás.

10. — Acerca de la simplificación de $\frac{48 + 12 + 4}{8 + 4}$ se acepta el factor común 2, en vez de acostumbrar á los mayores divisores, en este caso, 4.

11. — No sabe el nombre de los educandos; pasan al pizarrón, indicados con la palabra *Vd*.

12. — Se generaliza la escritura de ceros á la derecha de los decimales; el practicante dicta 420 milésimos; 8500 diezmilésimos.

13. — Acerca de la multiplicación de decimales, se da esta explicación confusa. « Si no hay tantas cifras decimales en el producto como en los factores, colóquense ceros en los lugares correspondientes ».

14. — En una lección acerca de la reducción de va-

www.libtool.com.cn

rios términos á uno: apenas un alumno comienza la enunciación de una regla, es interrumpido por la interrogación hecha á otro, acerca de un punto extraño á la reducción que se trataba.

15. — Se hacen pocos ejercicios y se enuncian muchas reglas. La enseñanza de la aritmética obedece á este proceso: I. Saber lo que debe enseñarse; II. Comunicarlo por exposiciones concisas y claras. III. Grabarlo con ejercicios hechos por el alumno.

16. — Llama seis alumnos al pizarrón y dicta ejercicios que se resuelven en 8 segundos como: $3 \times 15 + 8 + 12 - 25 \times 2$, uno á cada uno, con lo que no se economiza tiempo y se convierte en central una integración que debe ser periférica.

17. — Hay 38 alumnos, se han interrogado sólo 12 de los situados adelante, varios, hasta cuatro veces, dejándose sugerir por los que acostumbran á levantar la mano con exageración.

18. — La practicante no es segura en el desarrollo de la lección; poco animada, no abarca con la vista al grado, ve una parte de sus alumnos y no nota cómo la distracción invade rápidamente.

19. — No hay generalización; pide términos de tres factores: los niños dan $2 \times 2 \times 2$; $3 \times 3 \times 3$; $5 \times 5 \times 5$; ella se satisface y pasa á otro punto. Se ignora que $\frac{9}{5} \times 0.13 \times 9$, $\frac{0.832}{2} \times \frac{1}{3.9} \times 725$, etc. son términos de tres factores. Los ejercicios no presentan sino números dígitos.

20. — Los alumnos sacan los ojos con las manos, llamando á la actividad y la practicante alarga el tiempo para llamar al niño, alarga el tiempo que separa una pregunta de otra.

21. — La explicación, difusa á causa de un lenguaje sin inflexiones, alargando las vocales, arrastrando las palabras, haciendo pausas donde no corresponden y que no sugieren la palabra inmediata que completa el sentido.

22. — Se nota, desde hace un mes, que el grado no ejercita los quebrados, ocupado exclusivamente en el sistema métrico.

23. — Se da este problema: « En una hectárea de terreno se plantaron 160 Kgs. de trigo que produjeron 1685 Kgs. ¿Cuánto ganó si vendió á 4 \$ el Kg. y compró al mismo precio? »

24. — Hay confusión en las preparaciones de la pizarra; palabras amontonadas, una cantidad escrita así: 0. ms. 425 mms.; otra, así; 0.35 m.²

25. — La preparación del maestro, deficiente en simplificación de fracciones. Se deja corregir por los alumnos y se manifiesta perplejo cuando el niño P. insiste en que es 2000, el número, en la transformación de $\frac{0.12 + 0.012 + 2}{0.86}$ ó $\frac{120 + 12 + 2000}{860}$.

26. — Después de 20 minutos de *principio*, se tratan los trabajos de la pizarra mural, objeto de la lección.

27. — Se hace esta suma: $\frac{8}{5} + \frac{0.48}{5} + \frac{0.12}{5} + \frac{0.40}{5}$, así: $\frac{8}{5} + \frac{48}{500} + \frac{12}{500} + \frac{40}{500} = \frac{800}{500} + \frac{48}{500}$ etc. en vez de sumar los numeradores sin reducción.

28. — Se enseñan las medidas de peso en una lección y no se aprecia lo que es aproximadamente el peso de un Kg.

29. — Ejercicios mentales, se hacen escritos, contra la economía del tiempo y á favor de la infantilización.

30. — Se escribe $\sqrt[3]{\frac{32}{243}}$ por $\sqrt[3]{\frac{32}{342}}$.

31. — El bosquejo indica: serie 25; de los 14, se tratan solamente seis; se dejan los problemas; se resuelven mal los ejercicios y se da serie 26, de lección siguiente.

32. — Se dan problemas acerca de las igualdades para que el alumno los resuelva por su propio esfuerzo sin que, hasta ahora, se diera noción alguna del asunto.

33. — Se dirige con preferencia al pizarrón del costado y no del frente.

34. — En $4 \times 4 \times 4$ se dice: « hemos multiplicado á 4, tres veces »; se dice: « encontrar la razón, es ha-

www.libtool.com.cn
llar un número que divida exactamente á uno y otro número» contrariamente á la definición exacta de los alumnos, lo cual desprestigia al practicante.

35. — Los inteligentes preguntan el *por qué* de esta y aquella operación; el practicante los manda callar; el desorden cunde.

36. — Como fundamento de los análisis, se da y acepta la operación: «Si a ovejas valen b \$, para saber cuanto vale una, tengo que dividir».

37. — Todas las reducciones son á la unidad m.³ lo que habitúa á una viciosa y complicada forma de planteación por la cantidad de cifras decimales que se manejan, exponiéndose á mayor número de errores.

38. — En este y otros grados, no se enseña á resolver problemas típicos tomados uno cada vez en asunto de lección.

5º Grado. — 1.—Se escriben sin corregir $\frac{3 \times 9 \times 15}{9 \times 7 \times 19}$ en vez de $\frac{3 \times 9 \times 15}{9 \times 7 \times 19}$; $\sqrt[3]{16} = 2$. *Se dice: lo dividido por 7.*

2.—Es la centésima vez, quizá, que anotamos esto :

No deben las explicaciones interrumpirse con preguntas á los alumnos, manera de disimular ineptitudes para un discurso correcto durante 4 ó 5 minutos.

3.—Se toleran, como demostración del problema, las operaciones mismas. « Si a vale b , 1 valdrá lo que resulta de dividir b por a .

4. — En ejercicios de descomposición de cantidades:

a — El practicante da las espaldas á la clase para observar lo que los alumnos hacen en el pizarrón.

b — Los alumnos no dominan la divisibilidad.

c — La descomposición de 888000, número inapropiado para ejercitar los principios de la divisibilidad, se comienza por el factor 2 y no por

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 5 \text{ etc.}$$

d — Para la lección siguiente se dan dos series en lugar de una, 12 problemas y 8 ejercicios; el exceso de trabajo impide que el estudio sea provechoso.

5.— a — En cálculo mental, notamos casos de infantilización durante los 6 minutos del principio:

P. — ¿ $3 + 3$? A. — 6. — P. — ¿ Más 3 ? A. — 9, etc.

P. — ¿ $4 + 4$? A. — 8. — P. — ¿ Más 4 ? A. — 12, etc.

b — Pasearse, motivo continuo de distracción, mientras se da al cálculo.

c — No disimula el artificio, al dar cálculos como este:

$5 + 5 + 3 + 7 + 8 + 2 + 4 + 6$; las inflexiones y pausas descubren inmediatamente la suma 10 á cada dos términos.

6. — En la solución del ejercicio $\frac{3.15 + 8 - 0.0025}{7.44 + 3.1}$ los alum-

nos dicen: *igualo el número de cifras decimales en el numerador y denominador . . . en vez de: igualo el número de cifras decimales de cada término del numerador y denominador . . .*

7. — Se da el siguiente problema: ¿ Qué pesará más, un cilindro ó una esfera de cobre que tienen de superficie respectivamente 0.1040 25 ms.² siendo sus radios iguales de 0.14² ms. ?

Este caso y parecidos á este, confirman la necesidad de poner en manos del maestro un texto de enunciados á fin de que no entregue á la meditación de los alumnos contrasentidos fatales para la orientación matemática de toda una clase que, como lo observamos, analizaba el problema desapercibida de que en cuerpos como la esfera no puede darse, para hallar el volumen, la superficie y el radio.

O, de no, se infantiliza la enseñanza; ante una interpretación dudosa el maestro más precavido que pensador, opta por enunciados fáciles.

8. — En una lección de 5º Grado (problemas, cuando los alumnos no tenían textos), notamos:

a — Problemas de suma y resta de segundo y tercer grado que al no exigir esfuerzo, forman una idea estrecha del campo matemático.

b — Si 8 obreros hacen una obra en 15 días ¿ cuántos días emplearán para hacerla 16 obreros ? Es el problema fósil y archisabido del método de reducción á la unidad.

c — El practicante pide á cada alumno un problema de su propia cosecha, resultan muy sencillos y de un

mismo tipo. El enunciado es una creación á la que contribuyen todas las aptitudes mentales del alumno.

Sur valor pedagógico depende del número de asociaciones mediatas que sintetiza y del número de combinaciones que elimina (implícitas). Trabajos de esta naturaleza no pueden ser fruto de un momento de meditación; exige las horas tranquilas y sin apremio del hogar.

9.—Se repite el tema de la lección anterior, infantilización con problemas que no responden á ningún propósito y lo que es más criticable, de un solo tipo.

10.— Precede la enseñanza de la divisibilidad por 9 y 11, por la de los teoremas.

Del punto de vista práctico, los resultados son pobresísimos. Hasta 1898, estas demostraciones interpretando mal el programa, se hacían en el 5º Grado de la escuela que dirijo sin que los alumnos pudieran exteriorizarlas más que de memoria; absorbían el tiempo que hubiera sido provechoso dedicado al ejercicio. En 6º Grado y 1º año, los alumnos no recordaban ni los teoremas ni las aplicaciones de la regla.

De 1899 adelante, substituídas las demostraciones por las cancelaciones en problemas que las exigían, nunca fué necesario indicar la manera de reconocer un caso de divisibilidad, antes bien, el reconocimiento era, por lo común, inmediato.

11.—En una lección (1897) sobre ejercicios y problemas, donde hay dos pizarrones, uno en la pared del frente y otro en la lateral, anotamos estos defectos:

a — Envía á los pizarrones, solo tres alumnos que ocupan el lateral y no el del frente.

b — Se da á los tres alumnos, uno de los doce problemas y ejercicios de la serie que habían resuelto en sus casas.

c — Se pide la lectura, en voz alta, del enunciado y se permite su copia en el pizarrón teniendo en manos el texto.

d — Transcurren 30 minutos sin resolverse más de un problema y ejercitar, en el razonamiento, á un solo alumno.

e — Al sumar (el problema, al no ser más que de una operación no correspondía al 5° Grado) se dice : 24 y 5, 29 ; 29 y 2, 31 en lugar de 24, 29 y 31.

f — Las preguntas se dirigen siempre á los buenos alumnos, nunca á los regulares ó deficientes que deben interrogarse, en el principio, más que en el medio y fin.

g — No se generaliza ni recapitula. Comenzó con cálculos orales combinando tablas de las cuatro operaciones sin variar durante 12 minutos.

h — No da tema, ni deber, ni alude á la lección siguiente:

i — Se dice: hallar el m. c. m. de $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ en vez de m. c. m. de 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

j — Se pierde el tiempo en recibir la misma explicación trivial á tres alumnos.

k — Se dice M. C. M. de un número, en lugar de dos ó más números.

l — En el bosquejo hay problemas mal resueltos, lo que indica preparación deficiente y pronostica una lección de pésimos resultados.

ll — Se da la lección sentándose de costado, en un banco entre los alumnos ; desde allí pregunta, desde allí imparte la enseñanza, desde allí recibe las respuestas comenzando por sugerir la idea de fatiga y la necesidad de descanso.

12. — Acerca de la divisibilidad, pide números divisibles por 9 ; se dan siempre de dos cifras y queda, el practicante, conforme. En cambio, una maestra pide números de 4 ó 5 cifras divisibles por 9, pero sin cifras 3 ni 9, ni de dos sucesivas que sumen 9, lo que abre un inmenso horizonte de generalización.

13. — A cada cinco ó seis páginas de mi cuaderno de observaciones, hallo estas palabras :

1° HAGAN ESCRIBIR LAS DENOMINACIONES. 2° HAGAN ESCRIBIR BIEN LAS DENOMINACIONES.

6° Grado. — 1. — Se piden cantidades negativas y los niños dan 4 — 5 — 8 ; 12 — 6 — 3, etc.; como es natural, no hay generalización como en, v. g.: — 8 ;

— a ; — $5 \times 8 \times 3$; — $\frac{0.004}{3}$; — $(4 \times 5 - 8)$;
— $\frac{2}{3} \times 7$, etc.

2. — Es constante este defecto: no dejar en análisis de problemas, hablar al alumno, interrumpirle, no seguir, en silencio, la ilación de su razonamiento.

3. — Rara vez se resume la solución en una expresión final; los alumnos, acostumbran á hacer las operaciones inmediatamente; de modo que, en un problema de 3 minutos, emplean 12 y es muy frecuente multiplicar por una cantidad para dividirla, luego, por la misma.

4. — Acerca del interés: Los alumnos no comprenden el significado de 6%. No saben cómo aplicar el método de reducción á la unidad, á la solución de los problemas.

5. — Mientras en la pizarra mural, un alumno discrimina lo más importante del análisis, se le interrumpe con preguntas tan vagas é importunas como esta: ¿Por qué hace Vd. uso del paréntesis antes de que haya resuelto el problema?

6. — Es evidente el hecho de que en 6º retoñan vigorosamente las malas enseñanzas que se dieron en los grados anteriores, aún aquellas que cayeron en el cerebro como semillas perdidas ó accidentales, exigiendo extraordinarios esfuerzos para extirparlas. Si en 3º se permitió escribir 3'14; ó 5^{ms}.6; ó el uso de la fórmula $V = \frac{P}{D}$ sin denominaciones, ó la supresión del signo = entre $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \frac{5+8}{20}$, el hecho se reproducirá de tiempo en tiempo, no obstante ejercicios contrarios en 4º y 5º.

7. — Hemos notado en este y otros grados, una arraigada tendencia, peculiar á la mujer, de no dar importancia al punto decimal y á la denominación. Es más significativo, en 45,728, este error: 45,627 que este otro, 4,5728; en 0.4675 ms.², este error: 0.3275 ms.² que este otro 0.4675 cms.² Toda la atención es para lograr cifras exactas y no números exactos; substituir en un resultado, una denominación por

otra ó correr la coma un lugar más ó menos, es de poca monta, asombrándose de que eso pueda ser motivo de una mala clasificación. Otro tanto sucede con un resultado que debe ser -15 y no $+15$.

8. — Los ejercicios de principio no son sintéticos ni generalizan. Durante dos semanas no se hizo una pregunta acerca del sistema métrico.

9. — Se clasifica con 3, explicaciones que merecen 0. De consiguiente, el haragán no se corrige y el esfuerzo no se halaga.

10. — Se dejan dos ó tres problemas de cada serie los que, precisamente, cultivarían mejor las aptitudes del niño, los que son típicos ó dan á la serie carácter de recapitulatoria. La enseñanza, con solo lo fácil se infantiliza.

11. — Los alumnos leen á $\frac{7 \times 6 + 8}{7}$ así: 7 por 6 más 8 séptimos.

12. — Se acostumbra en los análisis que el alumno debe explicar, á interrumpirle, enseñarle, decirle lo que debe hacer, de lo cual resulta que ni el alumno ni el maestro hacen un razonamiento correcto, con la consiguiente pérdida de tiempo.

13. — Se dan problemas en los que debe conocerse la raíz cuadrada sin haberse enseñado esta operación.

14. — El bosquejo indica una lección sobre la serie 55 y resulta una lección de enseñanza acerca de la división de decimales.

15. — Se enseña haciendo uso de un pizarrón lleno de números, figuras, composiciones, donde el practicante se hace un poquito de lugar con el borrador, mientras que, como primera previsión al comenzar cualquier enseñanza, es dejar la pizarra completamente limpia.

16. — Acerca de un problema que pregunta: volumen de un depósito que tiene 3 metros de alto por 4 de ancho y 5 de largo; se admite que el alumno diga: multiplico el ancho por el alto por el largo y obtendré el volumen, etc., sin discutir antes la forma.

17.—La practicante nunca ejercita á los alumnos en dividir y multiplicar mentalmente por una cifra.

18.—Se hacen preguntas indeterminadas que desorientan al niño: las cantidades ¿de qué están precedidas ?

19.—Se dice : *extraiga* Vd. los factores primos de 5325, en vez de : *descompóngala* Vd. á 5325 en sus factores. La matemática es más exigente que cualquier otra asignatura en la propiedad del lenguaje.

20.—Hay poca rapidez en los cálculos mentales de modo que la mente integra con esfuerzos débiles de atención lo que no constituye una cultura de la mente.

21.—*Elijan Vds. un número y descomponganlo en sus factores simples*, dice á los seis alumnos que manda á la pizarra. Los alumnos los eligen de dos cifras que, á lo sumo, pueden descomponerse en potencias de 2 y 5.

22.—En una lección de 6º Grado (ejercicios y problemas 1899), el practicante comete este error :

Interrumpe la explicación del alumno por defectos que nota en su lenguaje y concluye por razonar él el problema.

23.—Hay un problema típico cuyo método de solución no ha sido detallado por el maestro mediante una lección especial de enseñanza.

No divide anticipadamente la pizarra en tantas partes como alumnos iban á ocuparla, de donde resulta que unos toman menos espacio que otros ; un confuso amontonamiento de palabras, signos y números difíciles de ser entendidos por el mismo que los ha escrito.

24.—De otro alumno, aprueba, cuanto ha hecho ; sin embargo, escribió $\frac{0.21}{7} = 0.003$; cantidades sin denominaciones ; hizo de los metros cúbicos, Kilógramos aplicando $P = V \times D$ sin recordar que si V es ms.³ P vale toneladas métricas.

25.—En otra lección de 6º Grado (ejercicios y problemas) se notan estos defectos :

a.— Nuevamente, el maestro no manda á la pizarra sino dos alumnos siendo, no obstante, seis los problemas de la serie que necesitan preparación.

b.— Da al *principio*, un cuarto de hora; el otro cuarto no alcanza para el análisis de otros problemas, de modo que lo fundamental se vuelve circunstancial.

c.— Uno de los problemas, se explica en una forma deficiente á la que se mezclan indicaciones inoportunas del practicante; el razonamiento resulta incorrecto; las aclaraciones del maestro enturbian y roban de tal manera el tiempo que, á veces, llega la hora sin que se note luz alguna,

d.— No se pregunta, á la clase, qué dudas tiene y qué no comprende para cerciorarse de si hay ó no motivo para una *lección especial*, de si la duda es de pocos ó de muchos alumnos.

e) — Hay un continuo abuso de números, operaciones é igualdades, escribiéndose en la pizarra lo que debe ser mental; se comete contra la rapidez el inveterado error de hacer, no bien se presenta, la operación, en lugar de reservarse para una fórmula final donde será siempre posible simplificar.

Para valorizar x en $\frac{3}{4}x + 8 = 29$.

Se escriben :

$$\frac{3}{4}x = 29 - 8; \frac{3}{4}x = 21$$

$$3x = 21 \times 4; 3x = 84$$

$$x = \frac{84}{3}; x = 28$$

26. — El enunciado, después de planteado el problema en el pizarrón, no se expresa de memoria, se lee en el texto.

27. — Los problemas típicos no se resuelven; se dejan y se pasa á otros que mantienen la infantilización del grado.

28. — En 6° Grado no debe atenderse una operación de dividir de 4 ó 5 cifras en el cociente.

III

Ejemplos de lecciones defectuosas

(Del natural) Enseñanza del núm. 10.

Principio. — *M.* — Si á uno agregamos uno ¿ cuánto tenemos? . . . A ver, pronto. A ver, Vd. . . .

A. — Tenemos dos.

M. — Muy bien; ¿ cuánto tenemos, Juan ?

A. — Tenemos dos.

M. — ¿ Cuánto, María ?

A. — Dos.

M. — Muy bien; dos. ¿ Y agregando uno á dos ? aquel niño que está desatendiendo; por eso no sabe; fíjese como contestan los demás. A ver, José.

A. — Dos más uno, es tres.

M. — Muy bien. Vd. está atento. ¿ Tres más uno ¡ atiendan ! ¿ cuánto es ?

A. — Es cuatro.

M. — Bueno; ahora fíjense; quien puede escribir el número 4 en el pizarrón ? Vd.

A. — (*Pasa y escribe el número*).

M. — Está bien; siéntese. Otro que lo escriba mejor.

A ver, Juana que siempre levanta la mano.

A. — (*Pasa Juana y escribe mejor el número, pues es la más inteligente del grado*).

M. — Así deben escribirlo todos; siéntese, Juana. ¿ Cuánto es $5 + 1$?

A. — Es seis.

M. — Seis, muy bien. ¿ Y $6 + 1$? Pronto, pronto.

Aquel niño está jugando. Voy á tener que apuntar en la pizarra á los que se portan mal. ¿ Cuánto es $6 + 1$?

A. — Es . . .

M. — Siéntese; Vd., nunca atiende.

Otro. — Es 7.

M. — ¿ Ocho más uno ? Todos.

Todos. — (*Unos contestan nueve, otros ocho, otros siete, otros no contestan*).

M. — Está muy mal así, 8 más 1 es 9. ¿ A ver quién repite?

A. — (*Todos sacuden la mano*). Ocho más uno es nueve.

M. — Está bien. Ahora van á ponerse en posición, todos. Pongan, todos, las manos sobre el pupitre. Marta.... Antonio. Guarde ese lápiz, Pedro. Miren todos acá. ¡ Cuándo dejará de hacer ruido con los pies, Rosa! Quiero que nadie se de vuelta ni diga una palabra.

Medio. — *M.* — Si á nueve naranjas agregamos una naranja. ¿ Cuántas naranjas tendremos? ¿ Quién puede contestar?

Un niño. — Son diez naranjas.

M. — Eso es. (*Escribe la palabra diez que los niños no saben leer*). ¿ Y quién sabe cómo se escribe? Si ninguno sabe, yo les voy á enseñar. Se escribe un *uno* y un *cero*. Dónde pondremos el uno? Vd.

A. — Al lado del cero.

M. — ¿ Vd.?

A. — Un cero y un uno.

M. — Sí; pero á qué lado colocarían Vds. el uno?

A. — Al lado del cero.

M. — No, no me comprenden. Fíjense, voy á escribirlo. (*Escribe 10*). ¿ Dónde he escrito el número 10?

A. — Vd. ha escrito el número 10 en la pizarra.

M. — ¿ Qué mano tiene Vd. á aquel lado?

A. — La mano izquierda.

M. — La mano izquierda. Todos.

Todos. — La mano izquierda.

M. — ¿ A qué lado está entonces el 1? A la iz....

A. — A la izquierda.

M. — Eso es. ¿ Y el cero?.... A la de....

A. — A la derecha.

M. — A la derecha. ¿ Vd.? *A.* — A la derecha.

M. — ¿ Vd.? *A.* — A la derecha. *M.* — ¿ Vd.? *A.* — A la derecha. *M.* — ¿ El que está allá atrás que nunca levanta la mano? *A.* — A la derecha.

M. — Muy bien. Ahora va á pasar un niño al frente á contar diez bolitas. Pase.... Antonina.

A. — (*Pasa y cuenta diez bolitas*).

M. — Ahora, saquen todos sus pizarras : uno, dos, tres. Escriban todos el número diez. (*Recorre las filas para examinar lo que cada uno ha hecho; transcurren con este motivo, tres minutos*). Algunos no saben escribir el número 10 y otros no han hecho nada.

M. — Borren. Van á escribirlo otra vez. (*Lo escriben*).

M. — Guarden las pizarras.

Fin. — ¿ Qué número hemos aprendido hoy ?

Levanten todos la mano. ¿Cuál, Juana?

A. — El número diez.

M. — ¿ Cómo lo escribiría Vd. ?

A. — Con un 1 y un 0.

M. — Con un uno y un cero. ¿ A qué lado colocaría el 1 ? Vd. misma, Juana.

A. — Al lado izquierdo.

M. — Siéntese. ¿ Y el cero ? Todos están desatentos. Voy á parar algunos niños al frente, Vd., Eugenio, es insoportable. No lo voy á tener más en mis clases. Bueno, si se están quietos, voy á mostrarle una linda figurita. (*En este momento da la hora de salida*).

Tema. — PROBLEMAS. — (*Los niños conocen los números hasta 20*).

M. — (*Presenta un loro en una jaula*).

Bueno, basta de reirse. Levanten la mano los que saben qué animal es este.

A. — (*Muchos, sin ser preguntados, dicen : Ve el loro ; mirá el loro ; lorito real. El loro grita y todos los niños rien*).

M. — Basta ya ; no hablen. No se levanten de sus asientos. Si siguen así, voy á llevar la jaula afuera. ¿ Qué animal es el que están Vds. viendo ?

A. — Es un loro.

M. — Perfectamente. ¿Dónde han visto Vds. loros?

A. — En las casas.

M. — Perfectamente. Es un ave trepadora y mansita. ¿Y qué hace?

A. — Habla.

M. — Perfectamente, habla; ¿habla como nosotros?

A. — Dice *lorito real*.

Otro. — No señor; habla cuando le enseñan, pero no sabe.

M. — No sabe hablar; repite no más las palabras.

Bueno, basta de loro. Ahora, vamos á ver un problemita. Un amigo mío que llegó ayer del Paraguay, trajo este loro, junto con cinco loros más; tres loros se volaron y cuatro se cayeron al río ¿cuántos loros compraría mi amigo?

A. — Compraría 13 loros.

M. — Perfectamente. ¿Vd?

A. — Trece loros. *M.* — ¿Vd.? *A.* — Trece loros. *M.* — ¿Vd.?

A. — Trece loros. *M.* — Trece loros. (Deja la jaula y saca una botella con agua teñida de color vino).

M. — ¿Quién sabe lo que es esto? Víctor, lleve la jaula afuera. ¿Quién sabe lo que es esto?

A. — Esa es una botella de vino.

Otro. — Es vino.

Otro. — Vino.

Otro. — Vino.

A. — Vamos á olerlo; (*pasa la boca de la botella por la nariz de algunos niños*).

A. — No es vino.

Otro. — No es.

M. — A ver ¿quién lo quiere probar?

Als. — Yo, yo, yo.

M. — Pruébalo Vd.

A. — Es agua.

M. — Bueno, supongamos que fuera vino.

Otro amigo trajo de Mendoza 7 botellas de vino de Marsala, 5 de vino francés y 4 de vino blanco. ¿Cuántas botellas de vino trajo?

A. — 14 botellas.

A. — Trece. *Otro.* Catorce. *Otro.* Quince.

A. — Catorce.

M. — No son catorce. A ver, fíjense: siete y cinco ¿cuánto es?

A. — Once. *Otro.* Trece. *Otro.* Doce.

M. — Eso es, doce. ¿Y doce y cuatro?

A. — 16.

M. — Perfectamente. Entonces, ¿cuántas botellas trajo?

A. — Trajo 16 botellas de vino.

M. — Atiendan ahora. Si trazo 15 rayitas en la pizarra y borro 1. ¿Cuántas rayitas quedan?

A. — 16.

M. — No, ¿cuántas quedan? ¿Vd.?

A. — Quedan 14.

M. — Perfectamente. ¿Si borro 3 más? Aquel que levanta la mano allá atrás.

A. — Quedan 11.

M. — Van á sacar mentalmente este cálculo; $4 + 3 + 3$. ¿Cuánto es?

A. — (*Uno que levanta la mano*). 10.

M. — Perfectamente. $8 - 3 + 2$. ¿Cuánto es?

A. — (*El mismo*) 7.

M. — Y los demás, ¿por qué no levantan la mano? A ver si levantan todos la mano.

Voy á decir más ligerito: $2 + 3 + 2 + 3 + 4 - 5$.

¿Cuánto es?... ¿No hay más que dos que sepan?

¿Ya se olvidaron de las tablas? ¿Cuánto es, José?

A. — Es 9.

M. — Nueve. Perfectamente. ¿Cuánto, Justa?

A. — Nueve.

Otro. — Nueve.

Otro. — Nueve.

M. — Una persona compró un kilo de azúcar por 3 pesos; otro de café por 2 \$; otro de té por 4 \$; otro de harina por 1 \$. ¿Cuántos pesos gastó? A ver quién lo saca más ligero.

A. — Diez pesos.

M. — Perfectamente, diez pesos.

A. — ¿Quién más, tiene diez?

Als. — (*Todos los que atienden, levantan la mano*).

M. — (*Pasan cinco niños al frente*). Yo tengo un cartucho de caramelos. Doy un caramelo al primer niño ; tres al 2º ; cinco al 3º , nada al 4º y seis al 5º ¿ cuántos caramelos he repartido ?

(*Toca hora de salida*).

M. — Se sientan. Van á salir. Uno, dos, tres. Salgan. Más silencio.

Tema. — RESTA DE QUEBRADOS. — (3º Grado S.)

Desarrollo.—*Principio.*—M.—Tomen todos, buena posición. Ninguno hable. A ver, Moretti, diga la regla para sumar quebrados.

A. — Para sumar quebrados se suman los numeradores...

M. — ¿ Los numeradores ?

A. — Sí, Señorita. ; se suman los numeradores.

Otro. — No, Señorita. Antes hay que reducirlos á un común denominador.

Moretti. — Es cierto Señorita. ; se reducen á un común denominador y se suman.

M. — Vd. no sabe bien la regla ; ¿ por qué no la ha estudiado ? ¿ no la escribió Vd. cuando la dictamos ? Otra vez voy á ponerle un cero. A ver, otro que la sepa mejor.

A. — Para sumar quebrados se reducen á un común denominador y luego se suman los numeradores ; á esta suma se pone por denominador el denominador común.

M. — Otro que la repita.

A. — (*Repite la regla*).

M. — ¿ Quién trajo un problema de sumar quebrados ? (*Muchos levantan la mano y se alzan de sus asientos*).

Nadie se levante ; bajen todos, las manos ; no quiero ruidos. ¡ Josefa ! ¡ Siempre la desordenada ! A ver su problema, Legarra.

A. — $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$ ¿ cuánto es ?

M. — Pero ese no es un problema. Yo les pedí un problema. A ver otro.

A. — $\frac{3}{4}$ de una barrica de azúcar más $\frac{3}{4}$ de una barrica de azúcar más $\frac{3}{4}$ de una barrica de azúcar. ¿ Qué cantidad de azúcar es ?

M. — Diga el suyo. Ojea.

A. — Un individuo el primer día gastó un quinto de su dinero ; el segundo día un sexto y el tercero un octavo ¿ cuánto dinero gastó ?

M. — Diga el suyo Farrell.

A. — Un individuo gastó $\frac{3}{4}$ de su dinero ; después $\frac{5}{8}$; después $\frac{3}{11}$ ¿ cuánto dinero gastó ?

M. — Diga el suyo, López.

A. — Un individuo tenía una cantidad de dinero ; gastó $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ ¿ cuánto dinero gastó ?

M. — (*Pregunta á cinco niños más*). Ahora, saquen sus anotadores y escriban.

Medio. — M. — Para restar quebrados, se reducen, primero, á un común denominador; después se restan los numeradores y la diferencia se divide por el denominador común hallado.

Lea, Irribarren, lo que ha escrito.

A. — (*Lee lo que ha escrito*).

M. — Como Vds. ven, para restar quebrados, se reducen, primero, á un denominador común y después ¿ Teresa ?

A. — Se restan los numeradores y ... y se divide la diferencia por el denominador hallado.

M. — Pase Campos. Díctele, Ortiz, una resta de fracciones.

A. — De $\frac{425}{837}$ restar $\frac{1428}{893}$.

M. — Pero eso no es posible. ¿ No ve Vd. que la segunda fracción es más grande que la primera ?

A. — De $\frac{3}{8}$ restar $\frac{3}{8}$.

M. — Reste, Campos.

A. — Se reducen á un común denominador. El común denominador es....

M. — ¿ Cuánto es el común denominador ?

A. — El común denominador es 54. (*El alumno escribe $\frac{9}{8} - \frac{2}{9} = 54$.*)

M. — Pero ¿ dónde escribe Vd. 54 ? A ver, Rodríguez ¿ dónde se escribe ?

A. — Se traza una raya y se escribe abajo.

M. — Borre Campi. Frente al signo igual trace una raya. Ahora escriba 54 abajo. ¿ No vé Vd. que 54 es denominador ? ¿ Qué se hace después ?

A. — Después se hallan los numeradores, 54 dividido entre 6, 9; 9 por 8 es 72 (*escribe 72*). 54 entre 9 es 6; 6 por 3 es 18 (*escribe 18*). Ahora se resta. 8 de 14, 6; 1 y 1, dos; 2 de 5, 3; 36 es el resultado. Escrito $\frac{36}{54}$.

M. — Pero ¿ qué debe Vd. escribir antes de $\frac{36}{54}$?

A. —

Otro. — El signo igual.

M. — Siéntese. Pase otro; á ver Roca. Díctele, Sara, un problema.

A. — Restar de $\frac{3}{327}$ la fracción $\frac{18}{928}$.

Roca. — Hallo el común denominador y multiplico 327 por 928. (*Hace la multiplicación, la que resulta equivocada: se corrige y luego se procede á efectuar la resta de los numeradores en cuyo momento toca la campana de salida*).

Fin. — M. — Para mañana piensen todos un problema, de resta de quebrado parecido á los de suma y traen, bien aprendida, la regla. Tengan presente que al que no sepa le voy á poner cero. Salgan.

Tema. — EJERCICIOS Y PROBLEMAS. — Serie 65. — (6° (Grado)).

Desarrollo. — Principio. — M. — ¿ Quiénes han sacado los problemas?... bajen la mano. Vamos á recoger los deberes. Recójalos Vd. Magdalena. (*Tres minutos*).

Pase al pizarrón Cámpora y Ballerini. Vd. Cámpora resuelva este problema: Sabiendo que una bala de fusil recorre 611 ms. por segundo, etc.

Es mejor que tome el texto; tomen el texto. Vd. Cámpora, ese problema y Ballerini el problema 1°. A ver la clase.

A. — Señor, el 4° problema no lo hemos podido resolver.

M. — Bueno, luego vamos á verlo; ahora, atiendan ¿ cuánto es $9 + 5$? ¿ $12 + 7$? ¿ $6 + 6 + 6 + 6 + 6$?
¿ Cuántos litros tiene un Dl.? ¿ Un Hl.? ¿ Un Kl.?
¿ Para reducir á centésimos por cuánto se multiplica?
¿ Un número divisible por 9?

Als. — 99; 72; 63; 27.

M. — Bueno. ¿ Un número divisible por cinco?
¿ Cómo se hace para simplificar un número por 3?

A. — Se divide por 3.

M. — ¿ Cómo por 3? Explíquese bien; se dividen los términos por 3. A ver, repita.

A. — Se dividen los términos por 3.

M. — Diga lo mismo, Rodríguez.

A. — Se dividen los términos por 3.

M. — Hay muchos de Vds. que no saben todavía simplificar porque no prestan atención. Es una vergüenza que en 6° Grado no se sepa simplificar. Extraigan los factores de 55.

A. — 5 y 11.

M. — ¿ No tiene más factores? ¿ 1 y 55 no son también factores? *Extraigan* los factores de 35?

A. — 5, 7.

Otro. — 1 y 35.

M. — Si cada letra valiese 4 \$ ¿ Cuánto valdría la palabra María?

A. — Valdría 20 \$.

Otro. — Pero también se pueden considerar como factores.

M. — Es cierto. Pero si fueran sumandos, está bien.

M. — ¿ Cuántos dm.³ tiene un m.³?

A. — 1000 dms.³

M. — Bueno. Ahora van á decirme cómo se hace para escribir milésimos.

A. — Se escriben tres lugares á la derecha de la coma.

Medio. — **M.** — ¿ Los de la pizarra no han concluído todavía? A ver Ballerini.

A. — Este es el blanco y este el espacio que recorre la bala...

M. — ¿ Qué les parece á Vds. la objetivación de este niño?

A. — Que está bien.

M. — Bueno. Si nadie hace observaciones va Vd. á continuar.

A. — ¿ Qué velocidad tendrá una bala que á los 6 segundos cae sobre un blanco situado á 3000 ms. ? Este problema es de dividir. Divido 3000 entre 6 y me da la velocidad de la bala.

M. — Está bien, pero un poquito más claro el razonamiento. Bueno, ¿ cuántos metros recorre?

A. — 500 ms.

M. — ¿ Quién ha sacado otro resultado? ¿ Todos han sacado el mismo? A ver, Cámpora, su problema.

A. — Sabiendo que una bala de fusil recorre 611 ms. por segundo ¿ á qué distancia estaría una paloma que cae después de 1 segundo y 13 terceros de dispararle el tiro?

M. — Ya les he dicho muchas veces que no quiero que me lean el problema. Vds. saben que el director quiere que lo digan de memoria. Acuérdese para otra vez. Siga.

A. — La objetivación es esta.

M. — ¿ Cómo ha objetivado Vd?

A. — He dibujado la paloma aquí; he supuesto el tirador aquí; entonces esta es la distancia que tenemos que saber. La represento por x .

M. — Bueno. Razónelo.

A. — ¿ Qué distancia hay de aquí á aquí, si la bala anda 611 ms. por segundo?

M. — Y Vd. no hace ninguna inducción, lo mismo que Ballerini; como si las inducciones no hicieran falta. ¿ Qué inducciones pueden hacerse? Piense.

www.libtool.com.cn

A.

Otro. — Que hay que reducir los segundos á terceros.

A. — Esa no es una inducción.

M. — ¿ Quiénes creen que es una inducción ? y ¿ quiénes creen que no es ? (*á esta pregunta la mayoría levanta la mano*).

Es claro : esa no es inducción. Bueno. siga razonando Cámpora.

A. — Reduzco los segundos á terceros : ¿ cuántos terceros hay en 1 segundo y 13 terceros ?

Un segundo tiene 60 terceros y 13 terceros son 73 terceros. Ahora, si en 60 terceros la bala anda 611 ms.

en un tercero andará $\frac{611}{60}$ y en 73 terceros andará 73 veces más que es lo que queríamos saber.

M. — ¿ Nadie tiene nada que observar ?

A. — No ha escrito las denominaciones.

Segundos se escribe con dos comitas....

M. — Si, falta eso. Siéntese Cámpora.

Vamos á ver si alcanzamos á sacar otro problema. Pase Cárcova. Vd. debe ser pariente del pintor ¿ eh ? (*Risas*). A ver si es tan buen matemático como pintor. Hacer desaparecer los decimales en (*dictando*).

$$\begin{array}{r} 14 \times 8 \times 0.02 + 1 \\ -- 3 + 8 \times 6 \times 3.0032 \end{array}$$

A. — Aquí hay dos decimales....

M. — ¿ Qué se hace primero ? ¿ Qué se hace primero ? A ver, clase.

A. — Se cuentan los términos.

M. — ¿ No lo sabía Vd. Cárcova ?

A. — Hay cuatro términos. Se ve el número de cifras decimales que hay en cada término y en el que hay más....

Otro. — Se agrega á la derecha del último factor de cada término....

Cárcova. — Ah ! Tantos ceros hasta tener el número de cifras decimales del término que tiene más. Agrego dos ceros á la derecha del 2 porque el mayor número de cifras decimales es cuatro; tengo (*escribiendo*)....

www.libtool.com.cn

(*Toca en ese momento la campana de salida*).

M. — Siéntese. Para la otra clase, la serie 66.

Un alumno. — ¿Y el problema 4º, señor. ?

M. — Bueno. Siéntese y guarden silencio ó los dejen sin recreo. Van á salir : uno, dos y tres.

(La serie 65 consta de cinco problemas y cinco ejercicios; los más atrayentes, más complicados y generalizadores, típicos del grado, son los que no se han resuelto).

Finalicemos el libro, con esta frase sintetizadora de su doctrina: PREPARACIÓN Y MÉTODO. POSITIVIDAD Y RAPIDEZ.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

LOS ELEMENTOS

	Páginas
I. — Elemento étnico. — Los alumnos.....	1
Los maestros: característicos é indiferentes.....	3
Enseñanza sin alma.....	6
II. — Elementos para la enseñanza de la aritmética. El aula....	8
Pizarrones.....	9
La Tiza. — El abaco.....	11
Mnemónomos.....	12
Borradores. Punteros. Abanico contador.....	14
Museo Escolar, Sección Aritmética.....	15
Pizarras manuales. Carteles. Pesas y medidas.....	16

CAPÍTULO II

LOS BOSQUEJOS

I. — Preparación de la lección. — Preparación especial.....	19
Tema y proposición. — La unidad. — Las lecciones extensas.....	20
Ideas sintéticas é ideas derivadas.....	22
Ideas fundamentales, ideas de fijación é ideas parásitas	23
Procedimiento: Carácter del <i>Principio</i> , del <i>Medio</i> y del <i>Fin</i> en el desarrollo de una lección.....	27
II. — Ejemplares de malos bosquejos. — Quince, correspondientes á diversos grados y escuelas.....	32
Análisis crítico de los bosquejos.....	42

CAPÍTULO III

PROGRAMAS

I. — Programas argentinos. Primer tipo. — Forma sintética, ensayada en Corrientes.....	47
Desarrollo del mismo en la Escuela Normal de Esquina.....	48
II. — Segundo tipo. — Forma sintético-analítica. — El de las escuelas anexas á las normales de la Nación...	52
III. — Tercer tipo. — Forma cíclica, ensayada en las escuelas de Buenos Aires. — Apreciación crítica del Dr. Joaquín V. González.....	54
La supresión de las fracciones comunes.....	59
IV. — Programa que adoptamos	60
Observaciones acerca del cálculo mental.....	63

CAPÍTULO IV

PRIMER GRADO

I. — Distribución del programa en lecciones y meses.	66
II. — Desarrollo de las lecciones. — Las obras escritas tocante á métodos.	72
<i>Lección 1ª</i> — Enseñar á enunciar, escribir, leer y aplicar el número 1. Plan.....	74
Desarrollo de la lección.....	75
<i>Lección 2ª</i> — Enseñar la composición, nombre, lectura y aplicación del número 2. Plan y desarrollo.....	77
<i>Lección 3ª</i> — Enseñar á escribir el número 2. Plan y desarrollo.....	81
<i>Lección 4ª</i> — Enseñanza del número 3. Plan y desarrollo.....	83
<i>Lección 7ª</i> — Ejercicios y problemas mentales, combinando los números 1, 2 y 3, en suma y resta.....	87
<i>Lección 8ª</i> — Acerca del número 4, de Lelia E. Patridge (Quincy Methods).....	90
<i>Lección 21ª</i> — Significado de las palabras <i>agregar, aumentar, añadir, reunir</i>	97
<i>Lección 22ª</i> — El signo + ...	101
<i>Lección 24ª</i> — Expresiones de la forma $a + b = c$..	103
<i>Lección 3ª</i> (Abril). — Ejercicios abstractos-escritos de + y — con los números de 1 á 9.....	107
<i>Lección 4ª</i> — Ejercicios abstractos y concretos con los números de 1 á 9.....	110

<i>Lección 5ª</i> — Plantear y escribir en números los términos de un problema y viceversa	112
<i>Lección 7ª</i> — Explicación de la palabra <i>veces</i>	116
<i>Lección 10ª</i> — Enseñanza del 0	119
<i>Lección 12ª</i> — Enseñanza del número 10.....	121
<i>Lección 13ª</i> — Significado de las palabras decenas y unidades en números de dos cifras.....	125
<i>Lección 17ª</i> Enseñar á leer y escribir los números 10, 11, 12 y 13.....	130
<i>Lección 18ª</i> — Ejercicios y problemas de fijación acerca de los números conocidos.....	133
<i>Lección 1ª</i> (Mayo). — Enseñanza de los números 20, 30, 40 y 50.....	138
<i>Lección 3ª</i> — Enseñar á medir.....	142
<i>Lección 11ª</i> — Enseñanza de los números desde 20 hasta 30.....	145
<i>Lección 20ª</i> -- Ejercicios acerca de la numeración. Lectura y reconocimiento de cantidades. (Proc. Laisant)	149
<i>Lección 24ª</i> — Ejercicios de suma.....	150
<i>Lección 15ª</i> (Junio). — Problemas de + y —.....	153
<i>Lección 17ª</i> — Suma escrita de dígitos.....	157
<i>Lección 18ª</i> — Ejercicios de contar.....	159
<i>Lección 1ª</i> (Julio). — Tabla de multiplicar del 2.....	163
<i>Lección 7ª</i> — Idea de <i>cien</i>	164
<i>Lección 8ª</i> — Reconocimiento, lectura y escritura del número 100 y cantidades hasta 999.....	168
<i>Lección 8ª</i> (Agosto). — <i>Tablas</i> , la de restar del 7....	173
Indicaciones acerca de la enseñanza de las tablas	178
<i>Lección 11ª</i> (Septiembre). — Sumar 9 á cualquier cantidad. (Tabla del 9).....	179
Indicaciones acerca de la enseñanza de las tablas mediante el aritmónomo.....	181

CAPÍTULO V

SEGUNDO GRADO

I. — Distribución del programa en meses y lecciones.....	187
II. — Desarrollo de las lecciones.	
<i>Lección 13ª</i> (Marzo). — Suma escrita de los números. Indicaciones acerca del uso de un libro de problemas y del examen de los deberes.....	192
<i>Lección 21ª</i> — Enseñanza de los números desde 10.000 hasta 100.000.....	198
Indicaciones acerca del uso del punto para separar periodos.....	202

<i>Lección 7ª</i> (Abril). — Tabla de multiplicar del 8. Indicaciones.....	202
<i>Lección 16ª</i> — Enseñanza de la substracción.....	207
<i>Lección 9ª</i> (Mayo) — Tabla de dividir del 4.....	210
<i>Lección 11ª</i> — El metro. Plan y desarrollo.....	215
<i>Lección 5ª</i> (Junio). — Enseñanza de la multiplicación.....	219
<i>Lección 13ª</i> — Multiplicación de un número por otro de cifras iguales.....	222
Indicaciones acerca de la multiplicaciones.....	225
<i>Lección 17ª</i> — Enseñanza de los números romanos hasta 20.....	226
<i>Lección 1ª</i> (Julio). — Multiplicación de un número por la unidad seguida de ceros.....	229
<i>Lección 3ª</i> — División de números de dos cifras por otras de una.....	233
<i>Lección 5ª</i> (Septiembre). — Dividir un número por otro de dos cifras.....	236
Indicaciones acerca de la división.....	239

CAPÍTULO VI

TERCER GRADO I.

I. — Distribución del programa en meses.....	241
II. — Desarrollo de las lecciones. — <i>Lección 10ª</i> (Abril). Números decimales. La unidad dividida en diez partes. Punto decimal.....	247
Indicaciones acerca de la escritura de decimales....	252
<i>Lección 11ª</i> — La unidad dividida en cien partes. Centésimos	253
<i>Lección 14ª</i> — Ejercicios de fijación.....	259
<i>Lección 20ª</i> — Suma de decimales.....	262
<i>Lección 2ª</i> (Mayo). — Múltiplos del metro.....	264
Indicaciones acerca de los ejercicios.....	268
<i>Lección 5ª</i> — Equivalencia de los múltiplos del metro.....	269
<i>Lección 6ª</i> — Submúltiplos del metro y sus equivalencias.....	273
Indicaciones acerca de la escritura de las denominaciones y del punto decimal.....	277
<i>Lección 7ª</i> — Reducción de un complejo á un incomplejo	278
<i>Lección 16ª</i> — Suma de cantidades métricas de longitud complejas é incomplejas.....	282
<i>Lección 18ª</i> — Ejercicios y problemas de fijación (sistema métrico).....	286
<i>Lección 21ª</i> — Problemas, midiendo con el metro longitudes y distancias (con bosquejo).....	289

<i>Lección 1ª</i> (Junio). — Enseñanza de la multiplicación de los decimales.....	293
<i>Lección 8ª</i> — Enseñanza de la división de los números decimales.....	295
<i>Lección 8ª</i> (Julio). — Multiplicación de denominados métricos.....	298
<i>Lección 2ª</i> (Agosto) — Ejercicios para calcular el peso con la mano.....	300
<i>Lección 12ª</i> (Septiembre). — Número primo y compuesto. Múltiplos y factores.....	302
<i>Lección 18ª</i> — Divisibilidad por 3 y 9.....	305
Divisibilidad por 7.....	307

CAPÍTULO VII

TERCER GRADO S.

I. --- Distribución del programa en meses.....	309
<i>Lección 1ª</i> (Mayo). — Medición de la superficie.....	314
<i>Lección 2ª</i> — El metro cuadrado, el decímetro cuadrado, etc.....	319
<i>Lección 3ª</i> — Ejercicios acerca de las medidas eds....	323
<i>Lección 4ª</i> — Submúltiplos del m. ² .. .	326
<i>Lección 6ª</i> — Múltiplos del m. ³ .. .	331
<i>Lección 18ª</i> — Principios acerca de las igualdades....	335
<i>Lección 5ª</i> (Junio). — Problemas. Multiplicación de denominados métricos.....	338
<i>Lección 14ª</i> — Medidas cúbicas.....	342
Escrituras de las denominaciones.....	347
<i>Lección 21ª</i> — Submúltiplos del m. ³	347
Indicaciones acerca de las lecciones tocante á lectura, escritura y operaciones sobre medidas cúbicas.....	350
<i>Lección 24ª</i> — División de denominados métricos (problemas).....	352
<i>Lección 13ª</i> (Agosto). — Enseñanza de los quebrados. Indicaciones.....	356
<i>Lección 16ª</i> — Fracciones iguales á 1.....	359
<i>Lección 3ª</i> (Septiembre). -- Principios de las fracciones.....	365
<i>Lección 9ª</i> — Reducción de dos quebrados á un común denominador.....	367
Indicaciones acerca del M. C. M.....	371
<i>Lección 19ª</i> -- Suma de fracciones.....	373
<i>Lección 8ª</i> (Octubre) — Multiplicación de quebrados. Indicaciones acerca de la escritura de quebrados.....	376
<i>Lección 23ª</i> — Explicación y razonamiento de problemas fundamentales.....	378

CAPÍTULO VIII

CUARTO GRADO

Distribución del programa en meses.....	387
Lección 1ª (Mayo). — Uso del paréntesis.....	392
Lección 6ª — Simplificación de un quebrado con numerador y denominador de varios términos.....	395
Indicaciones acerca de la simplificación.....	399
Lección 14ª — Máximo común divisor de dos números por la descomposición en factores simples.....	401
Lección 1ª (Julio). — Valorización de las letras.....	408
Indicaciones acerca de la enseñanza de las igualdades	411
Lección 7ª (Agosto). — Hallar el valor de la incógnita en una igualdad. Indicaciones.....	413
Lección 11ª. — Solución de problemas mediante igualdades	416
Lección 1ª (Septiembre). — Método de reducción á la unidad. (El caso más complejo).....	420
Lección 6ª — Enseñar la solución de un problema típico (proporciones compuestas, por reducción á la unidad).....	424
Lección 11ª -- Fracciones complejas. Significado de las rayas y su reducción á simples	428
Lección 5ª (Octubre). — Relaciones entre el litro, el decímetro cúbico y el kilogramo.....	431
Indicaciones acerca de la fórmula $V = P \times D$	435
Lección 6ª — Densidad, peso específico.....	435
Indicaciones. Lo que un cuerpo pesa más que el agua.	442
Lecciones 9ª y 10ª — Conociendo el volumen, determinar el peso y viceversa, de un cuerpo cualquiera. (Seis problemas típicos).....	443
Lección 20ª — Uso de la fórmula $P = V \times D$	449

CAPÍTULO IX

QUINTO GRADO

Indicaciones acerca del método.....	453
Distribución del programa en meses.....	459
Lección 8ª (Abril). — Fracciones decimales periódicas	462
Lección 3ª (Mayo). — Manera de tratar una serie de ejercicios y problemas.....	466
Lección 7ª — Idea de un Banco y sus operaciones.....	470
Lección 10ª — Interés. Diferentes casos.....	474
Indicaciones acerca del uso de las proporciones.....	477

<i>Lección 19ª</i> — Construcción de una tabla de interés simple y su empleo. Indicaciones.....	477
<i>Lección 22ª</i> — Construcción de una tabla de cocientes á divisor fijo.....	482
<i>Lección 12ª</i> (Julio). — Problemas de compañía.....	487
<i>Lección 17ª</i> — Problemas de mezcla.....	492

CAPÍTULO X

SEXTO GRADO

Desarrollo del programa en meses	499
<i>Lección 2ª</i> (Abril). — $a^m \times a^n = a^{m+n}$	502
<i>Lección 10ª</i> — $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$	504
Indicaciones.....	507

CAPÍTULO XI

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

I. — Ejercicios: Su objeto. Orales y escritos. Series de fijación y series de evocación.....	509
Ejercicios de fijación. — Ejemplos.....	516
Series de evocación y mixtas.....	521
II. — Problemas. — El análisis: lenguaje, objetivación y sentido común.....	531
Condiciones de una serie de problemas.....	543
Los enunciados. — Series de Royo, de Lafferrière y Méndez, de Latzina, de Areehaga, de Lavernhe y Cury.....	547
Concurso de la Geometría y la Física.....	560
Problemas prácticos.....	568
Lección modelo acerca de conocimientos útiles para 5º grado, con datos obtenidos de la sección comercial del 28 de Octubre de 1903.....	566
La multiplicación y la división: ideas erróneas que graban.....	569
Sistema métrico decimal y sus denominaciones.....	571
La invención de enunciados por el alumno.....	573
El lenguaje matemático.....	575
II. — Razonamiento ó análisis de los problemas. — ¿Qué es razonar un problema?.....	578
III. — Solución de problemas. — Problemas simples: ejemplos de análisis.....	581

Problemas compuestos: ejemplos de análisis.....	587
El método de las ecuaciones: ejemplos de análisis...	601
IV. — Las lecciones. — Lecciones deficientes. — Particularización verbamental y generalización escrita.....	611
Lecciones tocante á problemas. — De enseñanza. — De examen.....	616
Carácter de la enseñanza de problemas en primer grado. — Lecciones de enseñanza.....	620
<i>Lección 5ª</i> (3er. grado S.; Sept.) Ejercicios de objetivación y descomposición.....	635
<i>Lección 7ª</i> — De examen y de enseñanza.....	640
Indicaciones.....	646
<i>Lección 1ª</i> (Marzo, 5º grado). — Acerca de una serie de ejercicios y problemas.....	647
Lección de enseñanza tocante á la solución de un problema típico.....	649

CAPÍTULO XII

DEBERES Y TEXTOS

I. — El deber de aritmética. — Tiempo. — Corrección. Revisión. Presentación del deber.....	655
II. — Textos. — El libro de ejercicios y problemas. Las series. Por qué es necesario un texto de ejercicios y problemas en manos del alumno.....	663
Series solucionarias. — Las respuestas. — El coeficiente de adquisición.....	668

CAPÍTULO XIII

DEFECTOS OBSERVADOS CON FRECUENCIA

I. — En preguntas y respuestas.	673
En ilustraciones.....	676
En lenguaje y procedimiento.....	680
II. — Anotaciones, observando la práctica de los alumnos maestros. — En primer grado y segundo.....	688
En tercer grado.....	690
En cuarto grado.....	695
En quinto grado.....	699
En sexto grado.....	702
III. — Lecciones defectuosas. — Ejemplos.....	707

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Víctor Mercante

www.libtool.com.cn

Cultivo y desarrollo de la
aptitud matemática del niño



CABAUT y C^{ia}

Editores

BUENOS AIRES



www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

