N. Akimoff

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

GROUPES DE TRANSFORMATIONS

PROFESSÉES À L'UNIVERSITÉ DE MESSINE

Par G. VIVANTI.

TRADUITES

Par A. BOULANGER,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES À L'UNIVERSITÉ DE LILLE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

GROUPES DE TRANSFORMATIONS.

34133 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

GROUPES DE TRANSFORMATIONS

PROFESSÉES A L'UNIVERSITÉ DE MESSINE

Par G. VIVANTI.

TRADUITES

Par A. BOULANGER,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'UNIVERSITÉ DE LILLE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

INTRODUCTION.

La théorie des groupes de transformations est due presque entièrement au mathématicien norvégien Sophus Lie qui commença, dès avant 1870, à publier sur ce sujet quelques Mémoires écrits en langue norvégienne (1) et restés peu connus. A ces Mémoires, l'illustre géomètre en fit succéder d'autres en allemand (2), jusqu'à ce que, bien plus tard, devenu professeur à l'Université de Leipzig, il se décida à donner une forme didactique à l'ensemble de ses recherches : aidé de son élève, M. Engel, il publia, dans une période d'environ cinq ans (1888-1893), trois gros Volumes comprenant près de 2000 pages (3). Le premier de ces Volumes contient les propriétés générales des groupes de transformations; le second traite principalement des transformations dites *de contact;* le troisième est consacré à l'application de la théorie générale à des questions spéciales. Ce travail con-

(1) Ces Mémoires furent insérés dans les *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* et dans les *Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania.*

(2) Surtout dans les *Mathematische Annalen.*

(3) *Theorie der Transformationsgruppen,* Iter Abschnitt, 1888; IIter Abschnitt, 1890; IIIter und letzter Abschnitt, 1893. Leipzig, Teubner.

sidérable a reçu encore de nouveaux développements dans d'autres Ouvrages publiés par Lie avec la collaboration de M. Scheffers ([1]).

La théorie de Lie trouve son application dans de nombreuses branches des Mathématiques, reliant entre elles celles mêmes qui semblent présenter le moins d'analogies. Elle a permis de résoudre d'une manière analytique rigoureuse les problèmes relatifs aux fondements de la Géométrie et dont s'étaient déjà occupés Riemann et Helmholtz; elle a trouvé son utilisation dans l'étude des nombres complexes à n unités principales, dans celle des équations différentielles, etc. Pour faire sentir l'importance du rôle de cette théorie, nous signalerons dès maintenant un résultat auquel elle conduit dans l'analyse des équations différentielles ordinaires.

Les cas dans lesquels on peut intégrer une équation différentielle ordinaire du premier ordre $F(x, y, y') = 0$ sont, comme on sait, peu nombreux; pour chacun de ces cas, on a recours à un procédé ou à un artifice particulier. La théorie de Lie est venue apporter de l'unité dans ces méthodes si diverses en apparence. Regardons les deux variables x et y comme les coordonnées d'un point d'un plan. Imaginons qu'on imprime à tous les points de ce plan des déplacements infiniment petits de manière à amener un point quelconque (x, y) en un point infiniment voisin (x_1, y_1) : nous aurons ce qu'on appelle la *représentation géométrique d'une transformation infinitésimale*, transformation dont la définition précise sera donnée ultérieurement. La dérivée de y subira alors une variation corrélative, et le premier membre de l'équation considérée aura en général, après

([1]) *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, 1891. — *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*, 1893. — *Geometrie der Berührungstransformationen*, I[ter] Abschnitt, 1896. Leipzig, Teubner.

cette transformation, une forme nouvelle. S'il arrive que le premier membre ainsi transformé coïncide avec celui de l'équation primitive, ou du moins n'en diffère que par un facteur indépendant de la dérivée de y, on dit que *l'équation considérée est invariante par rapport à la transformation infinitésimale en question*. Ces définitions données, voici le résultat obtenu par Lie : *Toute équation différentielle ordinaire qu'on sait intégrer est telle qu'on peut déterminer une transformation infinitésimale par rapport à laquelle l'équation soit invariante, et réciproquement.*

Dans les Leçons qui suivent, nous nous proposons d'exposer les principes de cette théorie des groupes de transformations, si importante et si féconde en résultats; nous parcourrons les deux premiers Volumes du grand ouvrage de Lie, en cherchant à montrer les grandes lignes et à fixer les points fondamentaux de la nouvelle doctrine; nous consacrerons aussi quelques pages à l'application des vues de Lie aux équations différentielles ordinaires.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

GROUPES DE TRANSFORMATIONS.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS.

I. — Généralités sur les transformations.

Soient

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n fonctions uniformes des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En égalant ces fonctions respectivement à n nouvelles variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, on forme le système d'équations

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour abréger l'écriture, nous désignerons $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par $f_i(x)$.

Si les fonctions $f_i(x)$ sont analytiques, et par suite dérivables (¹), et si leur déterminant fonctionnel $\left(\text{déterminant qu'on a l'habitude de désigner par le symbole } \frac{D[f_i(x)]}{D[x]}\right)$ n'est pas identiquement nul (ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que ces fonc-

(¹) Nous supposerons toujours que les fonctions auxquelles nous avons affaire sont analytiques et monodromes.

tions soient indépendantes), le système (1) représente une *transformation* que nous indiquerons par le symbole S.

Supposons qu'outre la transformation S on ait la transformation T définie par le système

$$x'_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En appliquant aux variables x_i la transformation S, puis au résultat la transformation T, nous obtenons

$$\left.\begin{array}{l} x'_i = f_i(x) \\ x''_i = g_i(x') \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système d'équations

$$(2) \qquad x''_i = g_i[f_1(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)],$$

qui résulte de l'élimination des x' entre les équations précédentes, satisfait à son tour à la condition $\frac{D[g]}{D[x]} \not\equiv 0$ [1], car on a

$$\frac{D[g]}{D[x]} = \frac{D[g]}{D[f]}\,\frac{D[f]}{D[x]},$$

et, par hypothèse,

$$\frac{D[f]}{D[x]} \not\equiv 0, \qquad \frac{D[g]}{D[f]} = \frac{D[g]}{D[x']} \not\equiv 0.$$

Le système (2) représente donc une transformation qui est dite le *produit* des deux transformations S et T, et qui s'indique par le symbole ST.

Il est évident qu'en général le produit ST sera distinct du produit TS. S'il arrive que ces produits représentent la même transformation, on dit que les transformations S et T sont *permutables*.

La plus simple transformation est celle qui conserve les variables x; elle est dite *transformation identique* et s'indique par l'unité : 1.

Sont dites *inverses* deux transformations dont le produit est l'unité.

Il est évident qu'on obtient l'inverse de la transformation (1) en résolvant les équations (1) par rapport aux x.

A une transformation correspond toujours son inverse,

---

[1] En écrivant $\varphi \not\equiv 0$, nous entendons exprimer que la fonction φ n'est pas identiquement nulle.

puisque, les fonctions f_i étant indépendantes, les équations (1) définissent les x comme fonctions des x'.

Si $S.S = 1$, la transformation S est sa propre inverse.

Cela posé, imaginons que dans les fonctions f_i du système (1) entrent r paramètres arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_r$; nous aurons alors en général ∞^r transformations définies par ce système, mais il peut arriver que nous n'en ayons que ∞^s, avec $s < r$. Ainsi, par exemple, bien que dans l'équation $x' = (a_1 + a_2)x + a_3$ figurent trois paramètres, cette équation ne définit qu'une double infinité de transformations. La chose n'est d'ailleurs pas toujours aussi facile à reconnaître.

Pour que, r étant le nombre des paramètres apparents, on ait seulement une s^{uple} infinité de transformations ($s < r$), il faut que le système

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

puisse s'écrire

$$x'_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_s),$$

avec

$$b_j = \varphi_j(a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

On dit dans ce cas que *les paramètres a ne sont pas tous essentiels*.

Nous nous proposons de rechercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, et à cet effet nous établirons d'abord un lemme.

Si $\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_{n-1}(y)$ sont $(n-1)$ fonctions des n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il existe toujours une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre dont les fonctions ψ sont des intégrales.

Soit en effet f une fonction inconnue; l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières de la fonction inconnue f, se trouve satisfaite si l'on égale cette fonction f à l'une des fonctions ψ; les ψ sont donc des intégrales de cette équation aux dérivées partielles.

Ce lemme s'étend immédiatement au cas de moins de $(n-1)$ fonctions. Soient $\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_t(y)$ les fonctions données $[t < n-1]$; prenons arbitrairement $(n-1-t)$ autres fonctions $\omega_1(y), \omega_2(y), \ldots, \omega_{n-1-t}(y)$; d'après le lemme établi, il existera une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, dont $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_t$ seront des intégrales, en même temps que ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{n-1-t}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Pour que, dans le système d'équations

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les r paramètres a ne soient pas tous essentiels, il faut et il suffit que les fonctions f_i, regardées comme fonctions des a, soient intégrales d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre de la forme

$$\lambda_1(a)\frac{\partial f}{\partial a_1} + \lambda_2(a)\frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots + \lambda_r(a)\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ étant des fonctions de $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

En effet, si les r paramètres a ne sont pas tous essentiels, nous pouvons les réduire à $s(< r)$ nouveaux paramètres

$$b_i = \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

lesquels seront, d'après le lemme précédent, intégrales d'une équation différentielle de la forme indiquée. Comme toute fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$ de ces intégrales sera à son tour une nouvelle intégrale de la même équation, les fonctions

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) = F_i[x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s],$$

qui sont des fonctions des b_i, c'est-à-dire des φ_i, seront des intégrales de cette équation. La condition énoncée est donc nécessaire.

Pour démontrer qu'elle est suffisante, supposons que les f_i soient intégrales de l'équation différentielle de l'énoncé. Celle-ci admet seulement $(r-1)$ intégrales indépendantes que nous appellerons $\psi_1(a)$, $\psi_2(a)$, ..., $\psi_{r-1}(a)$; toute autre intégrale aura donc la forme $F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{r-1})$; telle devra être aussi la forme des f_i. Les a apparaissent donc dans les f_i par leur groupement en $(r-1)$ fonctions; par suite ils ne sont pas tous essentiels.

De là résulte une méthode pratique pour reconnaître si, dans un système donné (3) de transformations, les r paramètres sont essentiels ou non.

Dans les équations

$$(4) \qquad \lambda_1 \frac{\partial f_i}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_i}{\partial a_2} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial f_i}{\partial a_r} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ représentent des quantités indéterminées, donnons aux variables $x_1, \ldots, x_n$ des valeurs déterminées, mais générales; nous obtiendrons n équations linéaires homogènes en λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$, à coefficients dépendant des a. De ces équations, il ne saurait y en avoir plus de r distinctes. S'il en existe précisément r, leur système n'admet pas d'autre solution que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$, et les paramètres sont essentiels. Si le nombre des équations indépendantes est $r' < r$, remplaçons, dans les équations (4), les x par d'autres valeurs déterminées, distinctes des précédentes; soit r'' le nombre des nouvelles équations, distinctes entre elles et distinctes des précédentes, ainsi obtenues. Si $r' + r'' = r$, les paramètres sont essentiels; si, au contraire, $r' + r'' < r$, on donnera aux x de nouvelles valeurs, et ainsi de suite. Après un certain nombre h d'opérations, on arrivera à ne plus obtenir de nouvelles équations indépendantes : les équations (4), pour des valeurs tout à fait quelconques des x, seront des conséquences des $[r' + r'' + \ldots + r^{(h)}]$ équations trouvées. Les paramètres seront essentiels ou non, selon que la somme $(r' + r'' + \ldots + r^{(h)})$ sera égale ou inférieure à r.

II. — Groupes de transformations.

Conformément à la définition générale du groupe d'opérations, nous dirons que l'ensemble des ∞^r transformations précédemment définies, à r paramètres supposés tous essentiels, forme un *groupe* de transformations à r paramètres quand le produit de deux transformations quelconques de l'ensemble est encore une transformation du même ensemble.

Un tel groupe sera dit *fini* pour exprimer que le nombre r des paramètres est fini, et *continu* pour exprimer que nous supposons les fonctions f_i analytiques, et par suite continues, par rapport aux variables x et aux paramètres a. Nous ne nous occuperons dans ces Leçons que des groupes finis et continus de transformations.

Soient S et T deux transformations d'un groupe, définies la première par les valeurs a_j des paramètres, la seconde par des valeurs b_j $(j=1, 2, \ldots, r)$. Le produit ST sera une transformation définie par certaines valeurs c_i des mêmes paramètres. On aura, en écrivant pour abréger $f(x, a)$ au lieu de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$:

$$\left.\begin{array}{ll} x'_i = f_i(x, a), & \text{en appliquant la transformation S} \\ x''_i = f_i(x', b), & \text{en appliquant la transformation T} \\ x''_i = f_i(x, c), & \text{en appliquant la transformation ST} \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura par suite les relations suivantes, identiques par rapport aux x,

$$f_i(x, c) = f_i[f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a); b_1, \ldots, b_r] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où il résulte que les c doivent être fonctions des a et des b:

$$(1) \qquad c_h = \varphi_h(a, b) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Il est aisé de démontrer que les déterminants fonctionnels $\frac{D[\varphi(a, b)]}{D[a]}$ et $\frac{D[\varphi(a, b)]}{D[b]}$ ne sont pas identiquement nuls. En effet, des équations $x'_i = f_i(x, a)$, qui peuvent être résolues par rapport aux x, on déduit $x_i = F_i(x', a)$, en sorte que l'on a

$$f_i(x', b) = f_i(x, c) = f_i[F(x', a), c].$$

Les relations

$$f_i(x', b) = f_i[F(x', a), c]$$

sont donc vérifiées identiquement et définissent les b comme fonctions des a et des c; par suite le système (1) peut être résolu par rapport aux b. On démontrerait d'une manière analogue que ce système peut être résolu par rapport aux a, ce qui établit notre assertion.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

Si les équations $x'_i = f_i(x, a)$ *définissent un groupe à*

r paramètres, les équations $x_i = F_i(x', a)$, qui s'en déduisent par résolution relativement aux x, représentent aussi un groupe à r paramètres.

En effet, avec les notations précédentes, on a, par hypothèse,

$$(2) \qquad x'_i = f_i(x, a), \qquad x''_i = f_i(x', b), \qquad x''_i = f_i(x, c);$$

par suite,

$$x_i = F_i(x', a), \qquad x'_i = F_i(x'', b), \qquad x_i = F_i(x'', c);$$

de là les relations

$$F_i(x'', c) = F_i[F_i(x'', b), a],$$

qui expriment, puisque les c sont fonctions des a et des b, que les équations $x_i = F_i(x', a)$ définissent un groupe.

Supposons maintenant que ce groupe soit à moins de r paramètres, c'est-à-dire que les r paramètres qui figurent dans ses transformations ne soient pas tous essentiels. Alors, ces r paramètres pourront être exprimés au moyen de $s < r$ paramètres b_1, b_2, ..., b_s, en sorte que l'on aura

$$x_i = \Phi_i(x', b).$$

En résolvant ce système d'équations par rapport aux x', nous aurons les équations

$$x'_i = \varphi_i(x, b),$$

qui doivent coïncider avec celles du groupe donné, c'est-à-dire que ce dernier contiendrait seulement $s < r$ paramètres, contrairement à l'hypothèse.

Exemple. — L'ensemble ∞^2 de transformations défini par

$$x' = a_1 x + a_2$$

forme un groupe. En effet le produit de deux transformations de l'ensemble est donné par

$$x'' = b_1(a_1 x + a_2) + b_2 = a_1 b_1 x + (a_2 b_1 + b_2) = c_1 x + c_2,$$

en posant

$$c_1 = a_1 b_1, \qquad c_2 = a_2 b_1 + b_2.$$

III. — Interprétation géométrique des transformations.

Regardons les x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ comme les n coordonnées d'un point (réel ou imaginaire) dans un espace à n dimensions; une transformation n'est qu'une correspondance entre les divers points de cet espace, telle qu'à deux points distincts correspondent deux autres points distincts; ou encore, une *permutation* des points de cet espace entre eux.

Un groupe de ∞^r transformations, à r paramètres essentiels, est un ensemble r fois infini de telles permutations ayant la propriété suivante : si l'on effectue successivement deux permutations quelconques, on obtient le même résultat final qu'en exécutant une certaine autre permutation du groupe.

Il est clair qu'un groupe donné de permutations d'un espace à n dimensions peut être exprimé analytiquement d'une infinité de manières différentes, puisqu'on peut varier à l'infini le système des coordonnées et le choix des paramètres.

IV. — Équations différentielles auxquelles donne lieu un groupe de transformations.

Reprenons les formules (2) du n° II :

$$f_i(x', b) = f_i(x, c).$$

Des deux systèmes de variables x et x', nous pouvons à volonté considérer comme indépendantes soit les unes, soit les autres; des trois systèmes de paramètres a, b et c, nous pouvons en regarder deux comme indépendants, soit les a et b, soit les b et c, soit les c et a. Nous choisirons les quantités indépendantes de la manière la plus avantageuse suivant les cas. Pour le moment, nous prendrons les x, a et c, en sorte que les x' et les b seront des fonctions des x, a, c. En dérivant l'équation écrite par rapport à l'un des a, nous aurons

$$\frac{\partial f_i}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial a_k} + \frac{\partial f_i}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_k} = 0.$$

Laissons fixe l'indice k, faisons varier i de 1 à n et imaginons qu'on ait fait passer au second membre les termes contenant les dérivées relatives aux b; nous aurons ainsi un système de n équations linéaires par rapport à $\frac{\partial x'_h}{\partial a_k}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$. Ce système sera résoluble par rapport à ces n quantités, car le déterminant de ses coefficients est $\frac{D[f(x', b)]}{D[x']}$, et, par hypothèse, n'est pas identiquement nul; les inconnues seront exprimées par des fonctions linéaires et homogènes des seconds membres qui, à leur tour, sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{\partial b_1}{\partial a_k}, \ldots, \frac{\partial b_r}{\partial a_k}$, en sorte que l'on aura

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \Phi_{1h}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \Phi_{2h}\frac{\partial b_2}{\partial a_k} + \ldots + \Phi_{rh}\frac{\partial b_r}{\partial a_k},$$

les Φ étant des fonctions des x' et des b, indépendantes de l'indice k. Pour abréger, nous écrirons

$$(1) \qquad \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \Phi_{\rho h}(x', b)\frac{\partial b_\rho}{\partial a_k}.$$

Considérons maintenant les x' comme fonctions des b, qui à leur tour sont fonctions des a; nous avons

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \frac{\partial x'_h}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial x'_h}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_k};$$

par comparaison avec l'équation (1) et si l'on tient compte de ce que $\frac{D[b]}{D[a]} \not\equiv 0$ [1], on trouve immédiatement

$$(2) \qquad \Phi_{\rho h} = \frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho},$$

en considérant comme indépendants, non plus les a, mais les b. Prenons alors l'équation connue $c_s = \varphi_s(a, b)$ et dérivons-la par

---

[1] En effet, des équations $c_s = \varphi_s(a, b)$, on déduit les équations $b_s = \psi_s(a, c)$ et $a_s = \omega_s(b, c)$, dont les dernières peuvent être regardées comme résultant de la résolution des avant-dernières par rapport aux a; par suite, il faut que le déterminant fonctionnel $\frac{D[b]}{D[a]}$ ne soit pas identiquement nul.

rapport à a_k; il vient

$$-\frac{\partial \varphi_s}{\partial a_k} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_s}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_k}.$$

Dans cette relation, laissons k fixe et donnons à s les valeurs 1, 2, ..., r; nous obtiendrons un système de r équations linéaires par rapport aux $\frac{\partial b_\rho}{\partial a_k}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, r$), résolubles par rapport à ces quantités, puisque le déterminant des coefficients, qui est $\frac{D[\varphi]}{D[b]}$, n'est pas identiquement nul; on en déduit

$$\frac{\partial b_\rho}{\partial a_k} = \Psi_{\rho k}(a, b),$$

et par suite l'équation (1) devient

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \Phi_{\rho h}(x', b)\,\Psi_{\rho k}(a, b). \tag{3}$$

Laissons h fixe et donnons à k les valeurs 1, 2, ..., r; nous aurons un système d'équations linéaires en $\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \ldots, \Phi_{rh}$, dont le déterminant, c'est-à-dire le déterminant des Ψ, ou $\frac{D[b]}{D[a]}$ (les b étant considérés comme fonctions des a), n'est pas identiquement nul; ces équations sont donc résolubles, et l'on a

$$\Phi_{\rho h} = A_{\rho 1}\frac{\partial x'_h}{\partial a_1} + A_{\rho 2}\frac{\partial x'_h}{\partial a_2} + \ldots + A_{\rho r}\frac{\partial x'_h}{\partial a_r},$$

les A étant des fonctions des a et des b, indépendantes de l'indice h. Plus brièvement, nous écrirons

$$\Phi_{\rho h} = \sum_{k=1}^{k=r} A_{\rho k}(a, b)\frac{\partial x'_h}{\partial a_k}. \tag{4}$$

Ces équations étant à leur tour résolubles par rapport aux $\frac{\partial x'_h}{\partial a_k}$ [comme on le voit d'après les équations (1) qui en fournissent la résolution], il s'ensuit que le déterminant formé par les A n'est pas identiquement nul.

En tenant compte de (2) et de (4), on obtient

$$(5) \qquad \frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho} = \sum_{k=1}^{k=r} \mathrm{A}_{\rho k}(a, b) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k},$$

et la comparaison de cette équation avec l'identité

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho} = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial b_\rho}$$

fournit la signification des A :

$$\mathrm{A}_{\rho k} = \frac{\partial a_k}{\partial b_\rho},$$

les a étant regardés comme fonctions des b.

Dans ces équations les c n'entrent pas; par suite, nous pouvons prendre arbitrairement non seulement les a, mais encore les b, et poser $b_i = \beta_i$, en désignant par les β_i des valeurs arbitraires, mais fixes. Alors, les $\Phi_{\rho h}(x', \beta)$ sont des fonctions des seuls x', qu'on peut représenter par $\xi_{\rho h}(x')$. Posons de même $\Psi_{\rho k}(a, \beta) = \psi_{\rho k}(a)$, et enfin $\mathrm{A}_{\rho k}(a, \beta) = \alpha_{\rho k}(a)$. Les équations (3) deviennent alors

$$(6) \qquad \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a).$$

Il nous faut maintenant démontrer une propriété des fonctions ξ :

Il ne saurait exister n relations de la forme

$$(7) \qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho \xi_{\rho h}(x') = 0,$$

dans lesquelles les g soient indépendants des x', à moins que les g ne soient tous nuls.

D'après (4), nous avons

$$\xi_{\rho h} = \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k}.$$

Si donc les équations (7) existaient, on aurait

$$o = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho \alpha_{\rho k}(a),$$

ou encore

$$o = \sum_{k=1}^{k=r} P_k \frac{\partial x'_h}{\partial a_k},$$

en posant

$$P_k = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho \alpha_{\rho k}.$$

Les P_k étant des fonctions des a seuls, la condition nécessaire et suffisante (n° I) pour que les r paramètres a ne soient pas tous essentiels, se trouvera satisfaite, contrairement à l'hypothèse, à moins toutefois que les P_k ne soient tous nuls. Dans ce dernier cas, les relations $P_k = o$ forment un système de r équations linéaires homogènes par rapport aux g, dont le déterminant est différent de zéro, car le déterminant des A n'est pas identiquement nul et ne le devient pas pour des valeurs *arbitraires* β_i attribuées aux b_i, qui le font coïncider avec le déterminant des α. Il s'ensuit que les équations $P_k = o$ ne peuvent être satisfaites que pour des valeurs toutes nulles des g. La propriété des ξ est donc démontrée.

Nous avons ainsi établi le

Premier théorème fondamental (1). — *Si les équations*

$$x'_i = f_i(x, a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un groupe à r paramètres, les x', considérés comme

---

(1) Dans la dernière Partie du troisième Volume de son grand Ouvrage, Lie présente comme points essentiels de sa théorie trois théorèmes qu'il nomme *premier, second* et *troisième théorèmes fondamentaux*. On parlera des deux derniers ultérieurement. Le premier comprend le théorème que nous venons d'énoncer sous ce nom, et aussi sa réciproque sous la forme suivante :

Si les x' satisfont au système (6) *et si en outre le système donné de transformations comprend la transformation identique, sans que toutefois les valeurs des paramètres relatives à cette transformation identique annulent le déterminant des ψ, le système donné définit un groupe à r paramètres.*

Cette seconde partie, que nous ne démontrerons pas pour le moment, s'obtiendra dans la suite comme conséquence d'autres recherches.

fonctions des x et des a, satisfont à un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x')\,\psi_{\rho k}(a) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r);$$

dans ce système, le déterminant des ψ n'est pas identiquement nul, et les ξ possèdent la propriété de ne satisfaire à aucun système d'équations de la forme

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho \xi_{\rho h}(x') = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

où les g sont indépendants des x' et ne sont pas tous nuls.

Nous allons maintenant former un autre système d'équations différentielles. Observons que, d'après la propriété des déterminants réciproques, nous avons

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \mathrm{A}_{\rho k}\Psi_{\rho k} = 1; \qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=k} \mathrm{A}_{\rho k}\Psi_{\rho i} = 0 \qquad (k \neq i);$$

en donnant aux b les valeurs β susdites, on a donc

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \alpha_{\rho k}\,\psi_{\rho i} = \varepsilon_{ki},$$

ε_{ki} étant 1 ou 0 selon que $k = i$ ou $k \neq i$.

Revenons alors aux équations (5); nous les écrirons, en tenant compte des équations (6),

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho} = \sum_{k=1}^{k=r} \mathrm{A}_{\rho k} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma h}(x')\,\psi_{\sigma k}(a);$$

ordonnons le second membre par rapport aux $\xi_{\sigma h}(x')$

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma h}(x') \sum_{k=1}^{k=r} \mathrm{A}_{\rho k}(a, b)\,\psi_{\sigma k}(a);$$

en posant

$$\sum_{k=1}^{k=r} \mathrm{A}_{\rho k}(a, b)\,\psi_{\sigma k}(a) = \theta_{\sigma\rho}(a, b),$$

il viendra

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma h}(x')\,\theta_{\sigma\rho}(a, b),$$

et, par suite, d'après (2),

$$\Phi_{\rho h}(x', b) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma h}(x')\,\theta_{\sigma\rho}(a, b).$$

On peut regarder les a comme fonctions des b et des c, et, puisque les c n'entrent pas dans les équations précédentes, il s'ensuit que l'on peut regarder les a et les b comme indépendants; de même on peut prendre les x' comme variables indépendantes au lieu des x; par suite, en dérivant par rapport à a_k, on a

$$0 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma h}(x')\,\frac{\partial\theta_{\sigma\rho}(a, b)}{\partial a_k};$$

le système d'équations ainsi formé est de la forme (7), et il entraîne $\frac{\partial\theta_{\sigma\rho}(a, b)}{\partial a_k} = 0$ pour toutes les valeurs de σ et de ρ. Les $\theta(a, b)$ sont donc indépendants des a et nous pouvons les représenter par $\theta(b)$. Nous aurons ainsi

$$(8) \qquad \frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma h}(x')\,\theta_{\sigma\rho}(b).$$

D'une manière analogue, en changeant les x' en x et les b en a, nous aurons

$$(9) \qquad \frac{\partial x_h}{\partial a_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma h}(x)\,\theta_{\sigma\rho}(a).$$

Les systèmes d'équations (6), (8) et (9) forment la base de l'étude des groupes de transformations.

Considérons encore dans les équations $x'_i = f_i(x, a)$ les x' et les a comme indépendants; en dérivant par rapport à a_k, il vient

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial a_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial a_k}$$

ou

$$o = \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\rho} \frac{\partial x_\rho}{\partial a_k};$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (6) et de (9),

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma i}(x')\,\psi_{\sigma k}(a) + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\rho} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma\rho}(x)\,\theta_{\sigma k}(a) = o;$$

ce système peut être regardé comme un système d'équations aux dérivées partielles définissant les x' en fonction des x.

L'équation qu'on vient d'écrire est susceptible d'une forme un peu plus symétrique.

Soit $F(x')$ une fonction quelconque des variables x'. En multipliant les deux membres de l'équation précédente par $\frac{\partial F(x')}{\partial x'_i}$, on a

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma i}(x')\,\psi_{\sigma k}(a) \frac{\partial F(x')}{\partial x'_i} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\partial F(x')}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\rho} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma\rho}(x)\,\theta_{\sigma k}(a) = o;$$

d'où, en sommant par rapport à l'indice i,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F(x')}{\partial x'_i} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma i}(x')\,\psi_{\sigma k}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\partial F(x')}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\rho} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma\rho}(x)\,\theta_{\sigma k}(a) = o.$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F(x')}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\rho} = \frac{\partial F(x')}{\partial x_\rho}.$$

Si donc on désigne par ρ l'indice i de la première sommation, on obtient

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\partial F(x')}{\partial x'_\rho} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma\rho}(x')\,\psi_{\sigma k}(a) + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\partial F(x')}{\partial x_\rho} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \xi_{\sigma\rho}(x) \frac{\partial F(x')}{\partial x_\rho} = o,$$

ou enfin

$$(10) \quad \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \psi_{\sigma k}(a) \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \xi_{\sigma\rho}(x') \frac{\partial F(x')}{\partial x'_\rho} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \theta_{\sigma k}(a) \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \xi_{\sigma\rho}(x) \frac{\partial F(x')}{\partial x_\rho} = o.$$

Dans cette équation, les deux termes ont la même forme, sauf que dans le second les θ remplacent les ψ du premier.

Les équations différentielles trouvées sont des conditions nécessaires pour que les équations données définissent un groupe de transformations; mais ces conditions ne sont pas suffisantes, comme on pourrait le montrer par des exemples.

V. — Groupes de transformations à un paramètre.

Nous commencerons par l'étude de ces groupes, car c'est sur elle qu'est basée la théorie des groupes à plusieurs paramètres. Il nous faut tout d'abord établir le lemme suivant :

Soit un système de n équations différentielles ordinaires à une seule variable indépendante y et à n fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$\frac{dz_i}{dy} = \varphi_i(y, z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

On peut mettre, d'une manière et d'une seule, son système intégral général

$$(\alpha) \qquad z_i = g_i(y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

sous une forme telle, que pour une certaine valeur y_0 de y, les z_i se réduisent à des fonctions données de n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$z_i = h_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Observons que le déterminant fonctionnel $\frac{D(g)}{D[C]}$ ne saurait être identiquement nul, parce que, dans le cas contraire, les constantes arbitraires qui figurent dans le système (α) pourraient se réduire à moins de n. Il s'ensuit que les équations

$$g_i(y_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = h_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

sont résolubles par rapport aux C

$$C_i = \lambda_i(y_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en sorte que le système (α) devient

$$z_i = g_i[y, \lambda_1(y_0, c_1, \ldots, c_n), \ldots, \lambda_n(y_0, c_1, \ldots, c_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou, plus simplement,

$$z_i = \psi_i(y, c_1, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les ψ étant des fonctions parfaitement déterminées. Notre lemme est donc démontré.

Ceci posé, étudions les groupes à un seul paramètre, définis par un système d'équations de la forme

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les x'_i satisfont au système des équations (6) du n° IV, qui, dans ce cas, deviennent

$$(2) \qquad \frac{dx'_h}{da} = \xi_h(x'_1, \ldots, x'_n)\psi(a) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

On a là un système d'équations différentielles ordinaires dont les équations (1) forment un système intégral, les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentant des constantes arbitraires. Il est clair que les équations (2) ne définissent pas un groupe unique de transformations, tel par exemple que celui défini par (1), puisque les x' ne sont pas déterminées comme fonctions des x par les équations différentielles (2). En vertu du lemme précédent, pour que les équations (2) définissent un groupe unique, il suffit qu'on se soit donné une transformation du groupe, c'est-à-dire qu'on sache que, pour $a = a_0$, on a certaines relations

$$(3) \qquad x'_i = h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Voyons cependant quelle forme possèdent les intégrales. Changeons le paramètre de (2); prenons comme nouveau paramètre t la quantité

$$(4) \qquad t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da, \qquad \text{d'où} \qquad dt = \psi(a)\, da.$$

Nous obtenons alors

$$\frac{dx'_h}{dt} = \xi_h(x'_1, \ldots, x'_n),$$

et dans ce système la variable indépendante t ne figure plus explicitement. Ce système peut s'écrire

$$\frac{dx'_1}{\xi_1(x')} = \frac{dx'_2}{\xi_2(x')} = \ldots = \frac{dx'_n}{\xi_n(x')} = dt.$$

Si on laisse de côté le dernier rapport, on a un système de $(n-1)$ équations différentielles entre n variables, dont le système intégral a la forme générale

$$\Omega_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = c_i \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

les c_i étant des constantes arbitraires; ceci suppose que les $(n-1)$ fonctions Ω sont indépendantes, c'est-à-dire qu'un au moins des n déterminants fonctionnels des Ω par rapport aux x' n'est pas identiquement nul; pour fixer les idées, admettons que le déterminant fonctionnel relatif aux $(n-1)$ premières variables x', $\frac{D(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1})}{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1})}$, ne soit pas identiquement nul. En résolvant alors le système intégral précédent par rapport à x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_{n-1}, nous avons

$$x'_i = \varphi_i(x'_n, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

Pour obtenir la dernière intégrale (la $n^{\text{ième}}$) du système différentiel proposé, considérons l'équation

$$\frac{dx'_n}{\xi_n(x')} = dt,$$

que nous pouvons écrire

$$dt = \frac{dx'_n}{\xi_n[\varphi_1(x'_n, c_1, \ldots, c_{n-1}), \varphi_2(x'_n, c_1, \ldots, c_{n-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x'_n, c_1, \ldots, c_{n-1}), x'_n]}.$$

L'intégration en est immédiate et donne

$$t + c_n = \Omega(x'_n, c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

Si dans Ω on remplace les c_i par les Ω_i, Ω devient une fonction des seuls x', que nous représenterons par $\Omega_n(x'_1, \ldots, x'_n)$. Ainsi se trouve obtenu complètement le système des équations intégrales

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 \ \ (x'_1, \ldots, x'_n) = c_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\Omega_{n-1}(x'_1, \ldots, x'_n) = c_{n-1}, \\
&\Omega_n \ \ (x'_1, \ldots, x'_n) = c_n + t.
\end{aligned}$$

Nous devons particulariser ce système en nous assignant une transformation du groupe. Imaginons que cette transformation soit la transformation identique, supposée contenue dans le groupe [1]; cela revient à dire que les équations (3) ont la forme

$$x'_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La valeur correspondante du paramètre t est, en vertu de (4), $t = 0$. Le groupe est ainsi déterminé, puisque, pour $t = 0$, nous avons

$$\Omega_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \Omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1, n).$$

Les équations qui définissent ce groupe sont dès lors

$$(5) \qquad \begin{cases} \Omega_1 \ (x'_1, \ldots, x'_n) = \Omega_1 \ (x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{n-1}(x'_1, \ldots, x'_n) = \Omega_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \\ \Omega_n \ (x'_1, \ldots, x'_n) = \Omega_n \ (x_1, \ldots, x_n) + t. \end{cases}$$

On voit de suite que l'ensemble des transformations définies par le système (5) forme bien un groupe, car en faisant le produit de la transformation définie par la valeur t_1 du paramètre t, et de la transformation définie par la valeur t_2 du même paramètre, on obtient la transformation définie par la valeur $t_1 + t_2$ du paramètre. En outre, on reconnaît que toutes les transformations du groupe sont permutables, et qu'à toute transformation définie par la valeur $\bar{t}$ de t, correspond la transformation inverse définie par la valeur $-\bar{t}$.

Il est facile d'interpréter géométriquement ces groupes de transformations à un seul paramètre contenant la transformation unité. En effet, dans un espace à n dimensions, les $(n-1)$ premières équations du système (5) représentent chacune une *surface* (espace à $n-1$ dimensions), et leur ensemble définit une *ligne*

---

[1] Tous les groupes ne contiennent pas la transformation unité. Si un groupe la contient, soient a_i les valeurs correspondantes des paramètres, b celles qui correspondent à une transformation T, et c celles qui correspondent à la transformation-produit T.1 = T : des relations connues $a_i = \psi_i(b, c)$, nous déduirons les a_i en faisant $b_h = c_h$ $(h = 1, 2, \ldots, r)$. Or, il peut bien arriver que les ψ_i soient de telle nature qu'elles cessent d'avoir un sens pour $b_h = c_h$; dans ce cas, le groupe ne contient pas la transformation unité.

(espace à *une* dimension) sur laquelle chaque point de l'espace reste situé durant la transformation. Changeons alors de variables : transformons l'espace Σ à n dimensions, de coordonnées x, en un espace Σ_1 à n dimensions, de coordonnées y, au moyen des relations

$$y_1 = \Omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad y_n = \Omega_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Les équations du groupe deviendront

$$y'_1 = y_1, \qquad y'_2 = y_2, \qquad \ldots, \qquad y'_{n-1} = y_{n-1}, \qquad y'_n = y_n + t;$$

elles expriment que, à toute transformation du groupe dans le premier espace Σ, correspond, dans l'espace Σ_1, une *translation* parallèle au $n^{\text{ième}}$ axe de coordonnées.

VI. — Transformations infinitésimales.

Gardons le paramètre t défini plus haut. Puisque $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ est une fonction analytique des variables $x_1, \ldots, x_n, t$, prenant pour $t = 0$ la valeur x_i, on aura, en la développant en série de Mac-Laurin,

$$x'_i = x_i + \frac{p_{i1}}{1!} t + \frac{p_{i2}}{2!} t^2 + \ldots,$$

avec la notation

$$p_{ik} = \left(\frac{d^k x'_i}{dt^k}\right)_{t=0}.$$

Les coefficients p_{ik} se calculent ainsi ; d'abord, comme

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'),$$

et que, pour $t = 0$, les x' sont égaux aux x, on a

$$p_{i1} = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

il en résulte que

$$p_{i2} = \left(\frac{d\xi_i(x')}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \xi_i(x')}{\partial x'_1} \frac{dx'_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \xi_i(x')}{\partial x'_n} \frac{dx'_n}{dt}\right)_{t=0},$$

ou

$$p_{i2} = \left(\sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x') \frac{\partial \xi_i(x')}{\partial x'_h}\right)_{t=0} = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x) \frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_h},$$

et ainsi de suite.

Désignons l'opération $\sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}$ par le symbole Xf, dans lequel X peut être appelé un *opérateur différentiel;* nous aurons

$$\begin{gathered} X x_i = \xi_i(x), \\ XX x_i = X^2 x_i = X \xi_i(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

En conséquence

$$p_{i1} = X x_i; \qquad p_{i2} = X^2 x_i, \qquad \ldots,$$

d'où enfin

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1!} X x_i + \frac{t^2}{2!} X^2 x_i + \ldots,$$

ce qui donne *une nouvelle forme des équations finies d'un groupe à un paramètre contenant la transformation identique.*

Une fonction quelconque $F(x)$ des x peut être développée en série suivant les puissances symboliques de l'opérateur X. On a en effet

$$F(x') = F(x) + \frac{t}{1!} \left(\frac{dF(x')}{dt}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{d^2 F(x')}{dt^2}\right)_{t=0} + \ldots$$

Or

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF(x')}{dt}\right)_{t=0} &= \left(\sum_{h=}^{h=n} \frac{\partial F(x')}{\partial x'_h} \frac{dx'_h}{dt}\right)_{t=0} \\ &= \left(\sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x') \frac{\partial F(x')}{\partial x'_h}\right)_{t=0} = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_h \frac{\partial F(x)}{\partial x_h} = X F(x), \end{aligned}$$

et ainsi de suite, en sorte que l'on obtient

$$F(x') = F(x) + \frac{t}{1!} X F(x) + \frac{t^2}{2!} X^2 F(x) + \ldots.$$

Je vais maintenant établir une propriété importante du symbole X : si l'on effectue un changement de variables, ce symbole se change en un autre symbole de même nature.

En effet, dans l'égalité de définition

$$X F(x) = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_h},$$

introduisons, à la place des variables x, de nouvelles variables y;

posons

$$F(x) = \Phi(y);$$

nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_h} + \ldots + \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_h}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} X\,F(x) &= \sum_{h=1}^{h=n}\sum_{i=1}^{i=n} \xi_h(x)\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_h} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_i}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial y_i}{\partial x_h}\xi_h(x)\right) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \Phi(y)}{\partial x_h}X(y_i); \end{aligned}$$

en exprimant dans $X(y_i)$, qui est une fonction des x, ces variables x en fonction des y, il vient

$$X(y_i) = \eta_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \eta_i(y);$$

donc

$$X\,F(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i(y)\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_i},$$

et notre assertion se trouve justifiée.

L'opération indiquée dans le second membre peut être désignée par le symbole $Y\,\Phi(y)$, et l'on écrira

$$X\,F(x) = Y\,\Phi(y),$$

où Y est un *opérateur différentiel* de la nature de X.

Nous allons passer de là à une définition fondamentale. Si, dans les équations qui définissent un groupe à un paramètre contenant la transformation identique, nous donnons à t une valeur aussi petite qu'on veut (ou infinitésimale), que nous désignons par δt, nous obtenons ce qu'on appelle une *transformation infinitésimale;* une telle transformation se trouve donc donnée par les équations

$$x'_i = x_i + \delta t\,X(x_i) = x_i + \xi_i(x)\,\delta t,$$

en négligeant, bien entendu, les termes d'ordre supérieur en δt.

Un opérateur différentiel donné X engendre une transformation infinitésimale parfaitement déterminée, qui sera quelquefois dite la *transformation infinitésimale* X.

Chacun des groupes à un paramètre précédemment définis contient, comme il est évident, une transformation infinitésimale et une seule, et celle-ci le détermine complètement.

Une transformation infinitésimale, considérée comme une transformation d'un espace à n dimensions en lui-même, fait correspondre à chaque point un point infiniment voisin, ou plutôt une *direction* déterminée par les n cosinus directeurs

$$\frac{\xi_i(x)}{\sqrt{\sum_{h=1}^{h=n} \xi_h^2(x)}}.$$

Physiquement, en supposant $n = 3$ et en ne considérant que les valeurs réelles des x, une transformation infinitésimale représente le mouvement infiniment petit d'un fluide compressible durant le temps δt. Les $\xi_i(x)$ sont alors les composantes de la vitesse au point x, et le mouvement du fluide durant un temps fini t (qui correspond à la transformation finie de paramètre t) se détermine par l'intégration des équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x)} = \frac{dx_3}{\xi_3(x)} = dt.$$

Le mouvement du fluide est stationnaire, puisque la vitesse ne dépend pas explicitement de t. Comme on le voit facilement, c'est là l'expression du fait que les transformations correspondant aux diverses valeurs de t forment un groupe.

Si $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x^{(0)})$ est un point quelconque, la particule de fluide qui, à l'origine du temps, se trouve en ce point décrit une ligne dont les équations paramétriques sont

$$x_i = x_i^{(0)} + \frac{t}{1!}\xi_i(x^{(0)}) + \frac{t^2}{1.2}(X\xi_i)_{x=x^{(0)}} + \ldots \qquad (i = 1, 2, 3);$$

en éliminant t entre elles, on trouve les équations

$$\Omega_i(x) - \Omega_i(x^{(0)}) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

VII. — Construction des systèmes et des groupes de transformations à plusieurs paramètres au moyen des transformations infinitésimales.

Supposons données r transformations infinitésimales définies par les opérateurs différentiels

$$X_1 f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{1i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$X_r f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ri}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

nous dirons que ces transformations sont *indépendantes* s'il n'existe entre les opérateurs correspondants aucune relation identique de la forme

$$c_1 X_1 f + c_2 X_2 f + \ldots + c_r X_r f = 0,$$

où les c sont des quantités indépendantes des x et non toutes nulles.

Cette identité peut s'écrire

$$c_1 \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{1i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \ldots + c_r \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ri}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

ou en ordonnant, par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x_i}$,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i} [c_1 \xi_{1i}(x) + c_2 \xi_{2i}(x) + \ldots + c_r \xi_{ri}(x)] = 0,$$

elle doit être vérifiée par des valeurs quelconques des x et par une fonction f quelconque; par suite, les coefficients des dérivées partielles de f doivent être identiquement nuls, et il faut qu'on ait les n identités

$$(1) \qquad c_1 \xi_{1i} + c_2 \xi_{2i} + \ldots + c_r \xi_{ri} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Telles sont les conditions pour que les r transformations infinitésimales susdites *ne soient pas* indépendantes.

Pour que les équations (1) admettent une solution commune (formée de valeurs non toutes nulles des c), il faut et il suffit que la matrice

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rn} \end{matrix} \right\|$$

ait sa caractéristique [1] inférieure à r. Mais, cette condition étant satisfaite, il peut arriver qu'il n'existe aucune solution formée de constantes. On peut donc dire que cette condition [que la caractéristique de la matrice (2) soit moindre que r] est nécessaire, mais non suffisante, pour que les transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$ ne soient pas indépendantes.

Cela posé, établissons le théorème suivant :

Au moyen de r transformations infinitésimales indépendantes, on peut construire un ensemble de transformations à r paramètres tous essentiels.

Soient en effet $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, r)$ r paramètres quelconques; formons la transformation infinitésimale

$$Zf = \sum_{h=1}^{h=r} \lambda_h X_h f,$$

où nous laissons les λ indéterminés. Pour tout système de valeurs des λ, cette transformation infinitésimale est déterminée, et donne naissance à un groupe à un paramètre dont les équations finies sont

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1!} Z x_i + \frac{t^2}{2!} Z^2 x_i + \dots.$$

En appliquant cette formule à une fonction f quelconque, on a

$$f(x') = f(x) + \frac{t}{1!} Zf(x) + \frac{t^2}{2!} Z^2 f(x) + \dots,$$

---

(1) Nous dirons qu'une matrice, dont les éléments sont fonctions d'une ou de plusieurs variables, a pour caractéristique h quand tous ses mineurs d'ordre $> h$ sont *identiquement* nuls, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour tous ses mineurs d'ordre h.

ou, si l'on substitue à Z l'expression précédente

$$f(x') = f(x) + \frac{t}{1!}\sum_{h=1}^{h=r} \lambda_h X_h f + \frac{t^2}{2!}\sum_{k=1}^{k=r} \lambda_k X_k\left(\sum_{h=1}^{h=r} \lambda_h X_h f\right) + \ldots.$$

Puisque l'opérateur X est sans effet sur les λ, on peut écrire

$$X_k\left(\sum_{h=1}^{h=r} \lambda_h X_h f\right) = \sum_{h=1}^{h=r} \lambda_h X_k X_h f,$$

soit

$$Z^2 f = \sum_{k,h} \lambda_k \lambda_h X_k X_h f,$$

k et h variant indépendamment l'un de l'autre de 1 à r. On a donc

$$f(x') = f(x) + \frac{t}{1!}\sum_{h=1}^{h=r} \lambda_h X_h f + \frac{t^2}{2!}\sum_{k,h} \lambda_k \lambda_h X_k X_h f + \ldots,$$

où le terme général du second membre contient en facteur l'expression de $Z^p f$ sous forme d'une fonction homogène de degré p ($p = 1, 2, 3, \ldots$) des λ. Il s'ensuit que, dans le second membre, il n'intervient en somme que r paramètres, à savoir les produits $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t$, que nous désignerons par $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$. Donc

$$f(x') = f(x) + \frac{1}{1!}\sum_{h=1}^{h=r} \tau_h X_h f + \frac{1}{2!}\sum_{k,h} \tau_k \tau_h X_k X_h f + \ldots.$$

Si l'on écrit n équations comme celle-ci, dont les premiers membres soient $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, on forme un ensemble de ∞^r transformations formant ∞^{r-1} groupes à un paramètre [1]; mais on peut se demander si les r paramètres ne sont pas tous essentiels. Nous allons démontrer que *les r paramètres sont toujours essentiels quand les r transformations infinitésimales sont indépendantes et alors seulement.*

En effet, si les transformations susdites ne sont pas indépendantes, il existe, entre leurs symboles, au moins une relation linéaire homogène à coefficients constants; supposons qu'il y ait

---

[1] Nous verrons ensuite quelles conditions doivent être satisfaites pour que ce système constitue un groupe à r paramètres.

$s(<r)$ semblables relations, permettant d'exprimer linéairement s des X au moyen des $(r-s)$ autres; soit

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}X_{s+1} + a_{12}X_{s+2} + \ldots + a_{1,r-s}X_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_s &= a_{s1}X_{s+1} + a_{s2}X_{s+2} + \ldots + a_{s,r-s}X_r. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}f = \quad & \lambda_1(a_{11}X_{s+1} + \ldots + a_{1,r-s}X_r) + \ldots \\ & + \lambda_s(a_{s1}X_{s+1} + \ldots + a_{s,r-s}X_r) + \lambda_{s+1}X_{s+1} + \ldots + \lambda_r X_r. \end{aligned}$$

Si l'on réunit les termes en X_{s+1}, ..., en X_r, on obtient

$$= \mu_1 X_{s+1} + \ldots + \mu_{r-s}X_r,$$

c'est-à-dire une expression à $(r-s)$ paramètres; comme il ne figure dès lors, dans le développement en série correspondant, que $(r-s)$ paramètres, on reconnaît que les r paramètres primitifs ne sont pas tous essentiels.

Il reste à démontrer que, si les transformations sont indépendantes, les r paramètres sont tous essentiels.

Supposons d'abord que l'on ait $r \leqq n$, et que la caractéristique de la matrice (2) soit égale à r. En dérivant la relation

$$(3) \qquad x'_i = x_i + \frac{1}{1!}\sum_h \tau_h X_h x_i + \ldots,$$

par rapport au paramètre τ_h, on a

$$\frac{\partial x'_i}{\partial \tau_h} = \xi_{hi}(x) + \ldots,$$

les termes non écrits à la suite du premier contenant au moins l'un des paramètres τ en facteur. Si l'on fait $\tau_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, r)$, on a

$$x'_i = x_i \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial x'_i}{\partial \tau_h}\right)_{x'=x} = \xi_{hi}(x).$$

Considérons alors la matrice suivante

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x'_1}{\partial \tau_1} & \dfrac{\partial x'_2}{\partial \tau_1} & \ldots & \dfrac{\partial x'_n}{\partial \tau_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x'_1}{\partial \tau_r} & \dfrac{\partial x'_2}{\partial \tau_r} & \ldots & \dfrac{\partial x'_n}{\partial \tau_r} \end{matrix} \right\|.$$

Quand les x' tendent vers les x, les éléments de cette matrice tendent vers les éléments correspondants de la matrice (2), et, par suite, dans l'hypothèse faite, la matrice (4) aura aussi pour caractéristique r. D'après un théorème connu, cela revient à dire qu'on peut éliminer les r paramètres entre les équations (3) et réduire ces équations à $(n - r)$ équations entre les x' et les x. Mais alors, si les r paramètres n'étaient pas tous essentiels, les équations (3) pourraient s'écrire de manière à contenir $(r - s)$ paramètres, et l'élimination de ces $(r - s)$ paramètres entre les équations donnerait $(n - r + s)$ équations au moins entre les x' et les x, ce qui est en contradiction avec le résultat qu'on vient d'obtenir. Par suite notre assertion est établie.

Considérons alors le cas général où r et n sont quelconques et où la matrice (2) a une caractéristique quelconque. Imaginons d'écrire les équations (3) successivement r fois avec r systèmes différents de variables

$$(5)\qquad \left\{\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rn}. \end{matrix}\right.$$

Posons

$$\xi_{hi}(x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{si}) = \xi_{shi},$$

$$X_{sk}f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ski} \frac{\partial f}{\partial x_{si}}.$$

Nous aurons la transformation

$$x'_{si} = x_{si} + \frac{1}{1!} \sum_h \tau_h X_{sh} x_{si} + \dots,$$

pour rn variables, et avec r paramètres; et nous pouvons observer que dans les transformations en question le nombre des paramètres est nécessairement moindre que celui des variables. Écrivons alors la matrice des ξ

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{111} & \xi_{112} & \dots & \xi_{11n} & \xi_{211} & \xi_{212} & \dots & \xi_{21n} & \dots & \xi_{r11} & \xi_{r12} & \dots & \xi_{r1n} \\ \xi_{121} & \xi_{122} & \dots & \xi_{12n} & \xi_{221} & \xi_{222} & \dots & \xi_{22n} & \dots & \xi_{r21} & \xi_{r22} & \dots & \xi_{r2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1r1} & \xi_{1r2} & \dots & \xi_{1rn} & \xi_{2r1} & \xi_{2r2} & \dots & \xi_{2rn} & \dots & \xi_{rr1} & \xi_{rr2} & \dots & \xi_{rrn} \end{matrix} \right\|.$$

Si cette matrice a pour caractéristique r, on rentre dans le cas particulier déjà traité, et les r paramètres τ, étant tous essentiels pour ce nouvel ensemble, le seront aussi pour le premier ensemble considéré. Si l'on suppose, au contraire, la caractéristique de cette matrice inférieure à r, tous les éléments des diverses colonnes devront satisfaire à une même relation linéaire et homogène; c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$(6_1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\xi_{111}+\alpha_2\xi_{121}+\ldots+\alpha_r\xi_{1r1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \alpha_1\xi_{11n}+\alpha_2\xi_{12n}+\ldots+\alpha_r\xi_{1rn}=0,\end{array}\right.$$

$$(6_2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\xi_{211}+\alpha_2\xi_{221}+\ldots+\alpha_r\xi_{2r1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \alpha_1\xi_{21n}+\alpha_2\xi_{22n}+\ldots+\alpha_r\xi_{2rn}=0,\end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(6_r)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\xi_{r11}+\alpha_2\xi_{r21}+\ldots+\alpha_r\xi_{rr1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \alpha_1\xi_{r1n}+\alpha_2\xi_{r2n}+\ldots+\alpha_r\xi_{rrn}=0,\end{array}\right.$$

relations où les α ne sont pas tous identiquement nuls et dépendent des rn variables (5).

Puisque certainement les éléments de la matrice (2) ne sont pas tous identiquement nuls, dans une au moins des équations (6_1) les ξ ne seront pas tous nuls. La même chose peut se dire des équations (6_2), ..., (6_r). En outre, les équations (6_1) ne sauraient être conséquence des équations (6_2), ..., (6_r); en effet, dans le cas contraire, une fois trouvé un système de valeurs α_1, α_2, ..., α_r satisfaisant à ces dernières équations, ce système devrait satisfaire aussi aux équations (6_1); mais, les α obtenus ne dépendant pas des x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, les équations (6_1) admettraient les solutions α_1, α_2, ..., α_r indépendantes des variables qui figurent dans les ξ_{1ik}, et par suite les X_{11}, X_{12}, ..., X_{1r}, ou bien les X_1, X_2, ..., X_r ne seraient pas indépendants. Les systèmes (6_1), (6_2), ..., (6_r) contiennent donc au moins r équations indépendantes, et, par suite, n'admettent que la solution

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0.$$

Il est donc impossible que la matrice ait sa caractéristique inférieure à r, et par suite le théorème se trouve complètement démontré.

Soit maintenant un système de ∞^r transformations

$$x'_i = f_i(x, a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

pour lequel se trouve vérifié un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x')\, \psi_{\rho k}(a) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r), \tag{8}$$

le déterminant des ψ étant supposé non identiquement nul. Ces équations (8) peuvent aussi s'écrire, en conservant les notations précédemment employées,

$$\xi_{\rho h}(x') = \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, r). \tag{8'}$$

Si l'on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ r quantités indéterminées, on a par suite

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x') = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \alpha_{\rho k}(a).$$

Introduisons à présent un nouveau paramètre t, avec la condition que les a puissent être regardées comme des fonctions des λ et de t vérifiant les équations différentielles

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \alpha_{\rho k}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

où nous avons employé le signe de dérivation ordinaire, parce que nous considérons t comme variable et les λ comme paramètres ([1]).

([1]) Ceci équivaut à exprimer les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ au moyen des nouveaux paramètres $t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots, t\lambda_r$, par les formules suivantes

$$a_k = a_k^{(0)} + \frac{t}{1!} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \alpha_{\rho k}(a^{(0)}) + \ldots,$$

où $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_r^{(0)}$ sont les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_r$ qu'on veut faire correspondre à la valeur 0 de t, ou aux valeurs toutes nulles des paramètres $t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots, t\lambda_r$. Évidemment ces valeurs $a^{(0)}$ doivent être telles que le déterminant des ψ, et par suite celui des α, soit fini et non nul.

Nous aurons alors

$$(9)\qquad \sum_{\rho} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x') = \sum_{k} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} = \frac{dx'_h}{dt}.$$

Formons, avec les ξ, r opérateurs différentiels distincts

$$X_\rho f = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}.$$

Multiplions par λ_ρ et sommons par rapport à ρ :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho X_\rho f = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f}{\partial x_h} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x).$$

Posons enfin

$$(10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho X_\rho f = X f, \\ \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x) = \xi_h(x), \end{cases}$$

et nous aurons

$$(11)\qquad X f = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}.$$

Cette relation définit une transformation infinitésimale. Donc les équations (9) qui, jointes aux équations (10), donnent

$$(12)\qquad \frac{dx'_h}{dt} = \xi_h(x'),$$

définissent un groupe à un paramètre contenant la transformation identique.

Dans les équations

$$a_k = a_k^{(0)} + \frac{t}{1} \sum_{\rho} \lambda_\rho \alpha_{\rho k}(a^{(0)}) + \ldots,$$

posons comme précédemment $t\lambda_\rho = \tau_\rho$. Pour affirmer que ces équations sont résolubles par rapport aux τ, il suffit de démontrer que le déterminant fonctionnel n'est pas identiquement nul, et par suite il suffit de vérifier qu'il n'est pas nul pour des valeurs particulières des τ. Or, si nous faisons $\tau_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), ce déterminant se réduit à celui fourni par les expressions

$$\left(\frac{\partial a_k}{\partial \tau_\rho}\right)_{\tau=0} = \alpha_{\rho k}(a^{(0)}),$$

lequel, par hypothèse, est différent de zéro. Nous sommes donc certains qu'au lieu des a nous pouvons introduire les paramètres τ, et, si les paramètres a sont tous essentiels, les paramètres τ le seront aussi.

Imaginons alors qu'en intégrant le système (12), on ait trouvé

$$\Omega_1(x', \tau) = c_1, \qquad \ldots, \qquad \Omega_n(x', \tau) = c_n;$$

d'où, en particulier,

$$\Omega_1[f(x, a^{(0)}), 0] = c_1, \qquad \ldots, \qquad \Omega_n[f(x, a^{(0)}), 0] = c_n,$$

et par suite

$$\Omega_1(x', \tau) = \Omega_1[f(x, a^{(0)}), 0], \qquad \ldots, \qquad \Omega_n(x', \tau) = \Omega_n[f(x, a^{(0)}), 0].$$

Il résulte de là que l'ensemble des transformations représentées par (12) s'obtient en faisant le produit d'une transformation déterminée par les transformations de ∞^{r-1} groupes à un paramètre. Si nous appliquons en effet la transformation

$$\overline{x_i} = f_i(x, a^{(0)}), \tag{13}$$

nous aurons les équations

$$\Omega_1(x', \tau) = \Omega(\overline{x}, 0), \qquad \ldots, \qquad \Omega_n(x', \tau) = \Omega_n(x, 0), \tag{14}$$

qui sont les équations du groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale (11). Cette transformation dépend de r constantes arbitraires, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; mais il est facile de reconnaître que deux transformations (11), dans lesquelles les λ sont proportionnels, engendrent un même groupe, en sorte que les équations (14) définissent ∞^{r-1} groupes à un paramètre.

Les équations (14) peuvent aussi s'écrire (n° VI) sous la forme

$$x'_i = \overline{x_i} + \frac{t}{1!}X\overline{x_i} + \frac{t^2}{2!}X^2\overline{x_i} + \ldots,$$

ou, en remplaçant X par son expression et en posant $t\lambda_k = \tau_k$,

$$(15) \qquad x'_i = \overline{x}_i + \frac{1}{1!}\sum_k \tau_k X_k \overline{x}_i + \frac{1}{2!}\sum_{k,j} \tau_k \tau_j X_k X_j \overline{x}_i + \ldots.$$

Supposons alors, en particulier, que le système donné contienne la transformation identique $\overline{x}_i = x_i$; si l'on prend cette transformation pour transformation (13), les équations du système deviennent

$$(16) \qquad x'_i = x_i + \frac{1}{1!}\sum_k \tau_k X_k x_i + \frac{1}{2!}\sum_{k,j} \tau_k \tau_j X_k X_j x_i + \ldots,$$

et il est utile d'observer que si l'on veut exprimer une transformation donnée du système sous les deux formes (15), (16), les valeurs des paramètres dans les deux formules sont nécessairement distinctes.

Soient ensuite $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ deux transformations quelconques de l'ensemble donné, correspondant aux valeurs $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ des paramètres primitifs, et soient $\tau^{(2)}$ les valeurs des nouveaux paramètres τ qui, substitués dans (16), donnent la transformation $T^{(2)}$. La transformation $T^{(1)}$ étant définie par

$$x'_i = f_i(x, a^{(1)}),$$

la transformation $T^{(1)}T^{(2)}$ sera donnée par

$$(17) \qquad x''_i = x'_i + \frac{1}{1!}\sum_k \tau_k^{(2)} X_k x'_i + \ldots.$$

Si donc nous avions pris $a^{(0)} = a^{(1)}$, nous aurions $\overline{x} = x'$, et les équations (15) deviendraient (en y remplaçant x' par x'' pour éviter l'équivoque)

$$(18) \qquad x''_i = x'_i + \frac{1}{1!}\sum_k \tau_k X_k x'_i + \ldots.$$

En comparant ces équations (18) aux équations (17), on voit que ces dernières représentent une transformation particulière T du système donné, et qui s'obtient en donnant dans les équations (18) les valeurs $\tau^{(2)}$ aux paramètres τ. Nous concluons donc de là que le produit de deux transformations quelconques du système considéré est encore une transformation de ce système, c'est-à-dire que ce système forme un groupe. Ainsi :

Si l'on a un ensemble de ∞^r transformations

$$x'_h = f_h(x, a) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

qui satisfont à un système d'équations différentielles

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x')\,\psi_{\rho k}(a) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r),$$

l'ensemble contenant la transformation identique et les valeurs des paramètres a relatives à cette transformation n'annulant pas le déterminant des ψ, l'ensemble considéré forme un groupe à r paramètres.

Ce théorème constitue (*voir* la note de la page 12) la **seconde partie du premier théorème fondamental de Lie.**

La relation déjà écrite

$$Xf = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho X_\rho f,$$

met en évidence le fait que toutes les transformations infinitésimales du groupe considéré peuvent s'exprimer linéairement au moyen de r d'entre elles $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$. Celles-ci sont indépendantes, puisque, (nº IV), il n'existe aucun système de constantes non toutes nulles $g_1, g_2, \ldots, g_r$ pour lequel on ait

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho\, \xi_{\rho k}(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc :

Tout groupe à r paramètres essentiels contenant la transformation identique renferme r et seulement r transformations infinitésimales indépendantes.

Observons encore que la transformation infinitésimale la plus générale du groupe, soit Xf, ne change pas de forme si l'on introduit les variables x' au lieu des variables x.

Rappelons-nous en effet la relation

$$\sum_\sigma \psi_{\sigma k} \sum_\rho \xi_{\rho\sigma}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_\rho} + \sum_\sigma \theta_{\sigma k} \sum_\rho \xi_{\sigma\rho}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\rho} = 0.$$

Puisque l'on a

$$\sum_\rho \xi_{\sigma\rho}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\rho} = X_\sigma f, \qquad \sum_\rho \xi_{\sigma\rho}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_\rho} = X'_\sigma f,$$

elle devient

$$\sum_\sigma \psi_{\sigma k} X'_\sigma f + \sum_\sigma \theta_{\sigma k} X_\alpha f = 0.$$

Multiplions par λ_k et sommons par rapport à k :

$$\sum_k \sum_\sigma \psi_{\sigma k} \lambda_k X'_\sigma f + \sum_k \sum_\sigma \theta_{\sigma k} \lambda_k X_\sigma f = 0;$$

en posant

$$\sum_k \lambda_k \theta_{\sigma k} = e_\sigma, \qquad \sum_k \lambda_k \psi_{\sigma k} = -e'_\sigma,$$

il vient

$$\sum_\sigma e'_\sigma X'_\sigma f = \sum_\sigma e_\sigma X_\sigma f,$$

ce qui démontre notre assertion.

Cherchons enfin les relations entre les e et les e' : nous allons voir que ces relations sont linéaires et homogènes.

Multiplions e'_σ par $\alpha_{\sigma i}$ et sommons par rapport à σ :

$$\sum_\sigma \sum_k \lambda_k \psi_{\sigma k} \alpha_{\sigma i} = -\sum_\sigma e'_\sigma \alpha_{\sigma i};$$

mais on a

$$\sum_\sigma \psi_{\sigma k} \alpha_{\sigma i} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad k \neq i, \\ 1 & \text{pour} \quad k = i; \end{cases}$$

donc

$$\sum_\sigma \sum_k \lambda_k \psi_{\sigma k} \alpha_{\sigma i} = \lambda_i \qquad \text{ou} \qquad \lambda_i = -\sum_\sigma e_\sigma \alpha_{\sigma i};$$

et enfin

$$e_\sigma = -\sum_k \sum_\sigma e'_\sigma \alpha_{\sigma k} \theta_{\sigma k} = -\sum_\sigma e'_\sigma \sum_k \alpha_{\sigma k} \theta_{\sigma k}$$

(C. Q. F. D.)

VIII. — Digression sur la théorie des équations différentielles.

Nous allons rappeler quelques théorèmes connus relatifs aux équations différentielles, à commencer par ce théorème de Jacobi :

Une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans laquelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les variables indépendantes et z la fonction, peut toujours être transformée en une autre dans laquelle z figure comme une nouvelle variable indépendante et où la fonction inconnue est une nouvelle fonction f qui n'y figure que par ses dérivées prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Si l'équation proposée est en outre linéaire, la transformée est linéaire et homogène par rapport aux dérivées de f, c'est-à-dire qu'elle a la forme générale

$$c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + c_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + c_{n+1} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

En vertu de ce théorème, nous pourrons supposer qu'à toute équation linéaire on en ait substitué une autre linéaire, homogène, ne contenant pas explicitement la fonction inconnue, et nous nous limiterons à considérer des équations de ce genre.

Soient donc q équations différentielles à n variables, linéairement indépendantes

$$\begin{aligned}
X_1 f &\equiv a_{11} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_{1n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\
X_2 f &\equiv a_{21} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_{2n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_q f &\equiv a_{q1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{q2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_{qn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,
\end{aligned}$$

où $q < n$, car si $q \geqq n$, l'unique solution possible du système serait $f =$ const.

Il est facile de voir comment on peut, de ces équations linéaires, en déduire d'autres. Considérons à cette fin les deux premières équations

$$X_1 f \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad X_2 f \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Effectuons le *produit* $X_1 X_2$; nous avons

$$X_1 X_2 f = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{h=1}^{n} a_{2h} \frac{\partial f}{\partial x_h}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{h=1}^{n}\left(a_{2h} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_h} + \frac{\partial a_{2h}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_h}\right)$$

ou

$$X_1 X_2 f = \sum_i \sum_h a_{1i} a_{2h} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_h} + \sum_i \sum_h a_{1i} \frac{\partial a_{2h}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_h}.$$

De même

$$X_2 X_1 f = \sum_i \sum_h a_{2i} a_{1h} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_h} + \sum_i \sum_h a_{2i} \frac{\partial a_{1h}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_h}.$$

Si l'on fait la différence de ces deux *produits*, en observant que les premiers termes des seconds membres se détruisent, puisqu'on peut permuter h et i, il vient

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = \sum_h \frac{\partial f}{\partial x_h}\left(\sum_i a_{1i} \frac{\partial a_{2h}}{\partial x_i} - \sum_i a_{2i} \frac{\partial a_{1h}}{\partial x_i}\right)$$

ou encore

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = \sum_h (X_1 a_{2h} - X_2 a_{1h}) \frac{\partial f}{\partial x_h};$$

les dérivées secondes de f ont disparu de cette combinaison, et l'on a une expression linéaire homogène du premier ordre qu'on indique par $(X_1 X_2) f$; ainsi par définition

$$(X_1 X_2) f \equiv X_1 X_2 f - X_2 X_1 f.$$

Les opérateurs X possèdent des propriétés remarquables.

Nous avons déjà vu, par exemple, qu'en effectuant un changement de variables indépendantes, les Xf se transforment en expressions de même nature.

Voici encore une importante identité qui est immédiatement démontrée :

Si l'on considère trois opérateurs quelconques X_1, X_2, X_3, *on a identiquement*

$$\big((X_1 X_2) X_3\big) f + \big((X_2 X_3) X_1\big) f + \big((X_3 X_1) X_2\big) f = 0$$

En effet, d'après la définition qu'on vient de donner, on a (en omettant d'écrire f)

$$\big((X_1X_2)X_3\big) = (X_1X_2 - X_2X_1, X_3) = (X_1X_2, X_3) - (X_2X_1, X_3),$$

car l'opérateur X jouit manifestement de la *propriété distributive*. Nous avons donc

$$\big((X_1X_2)X_3\big) = X_1X_2X_3 - X_3X_1X_2 - X_2X_1X_3 + X_3X_2X_1.$$

Il suffit de permuter circulairement les indices pour obtenir

$$\big((X_2X_3)X_1\big) = X_2X_3X_1 - X_1X_2X_3 - X_3X_2X_1 + X_1X_3X_2,$$
$$\big((X_3X_1)X_2\big) = X_3X_1X_2 - X_2X_3X_1 - X_1X_3X_2 + X_2X_1X_3.$$

En ajoutant ces trois égalités, on obtient de suite l'identité écrite.

Revenons à notre système d'équations. On voit que si f satisfait aux deux équations $X_1f = 0$, $X_2f = 0$, elle satisfera aussi à l'équation $(X_1X_2)f = 0$.

Conséquemment, toute intégrale commune aux q équations données sera aussi commune aux équations $(X_1X_2)f = 0$, ..., $(X_1X_q)f = 0$, ..., $(X_{q-1}X_q)f = 0$, qui s'en déduisent. Ainsi le système donné se trouve *amplifié*. Il peut alors se faire que quelqu'une des nouvelles équations soit une combinaison linéaire des q premières équations : une telle équation est à supprimer.

On continuera de la sorte à former de nouvelles équations, parmi lesquelles on a à supprimer celles qui sont des combinaisons linéaires des précédentes. Si l'on arrive ainsi à un système contenant au moins n équations, le système donné sera manifestement de ceux qui n'admettent pas d'intégrales communes. Mais il peut aussi se faire qu'on arrive à un système de $p\,(< n)$ équations tel que, de ces équations, on ne déduise, par le procédé indiqué, que des équations combinaisons linéaires des précédentes; dans ce cas, le système des p équations est appelé un *système complet*. Il est clair qu'un système d'équations linéaires homogènes, ou bien n'admet aucune intégrale, ou bien peut se transformer en un système complet. D'après cela, il suffira d'étudier seulement les systèmes complets d'équations différentielles linéaires homogènes

Au sujet de ces systèmes, il convient de citer les théorèmes suivants :

1° *Un système complet de p équations différentielles linéaires homogènes à n variables* $(p < n)$ *admet* $(n - p)$ *intégrales indépendantes;*

2° *Si, sur un système complet, on opère un changement des variables indépendantes, le système obtenu est encore un système complet;*

3° *Si l'on a un système complet et qu'à un groupe de ses équations on substitue un groupe équivalent d'équations, le nouveau système obtenu est encore un système complet.*

Je rappellerai, à propos de ce dernier théorème, que deux systèmes d'équations différentielles sont dits *équivalents* quand chaque équation de l'un est une conséquence de l'autre, de telle sorte que toute intégrale de l'un soit aussi une intégrale de l'autre.

Arrivons à un quatrième théorème :

4° *Étant donné un système complet de p équations linéaires homogènes à n variables* $(p < n)$, *et une fonction quelconque* $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-p})$ *de* $(n - p)$ *des susdites variables, on peut toujours trouver une intégrale du système qui, pour*

$$(1) \qquad x_{n-p+1} = \alpha_1, \qquad x_{n-p+2} = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = \alpha_p$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *étant des valeurs prises arbitrairement*), *se réduise à cette fonction* ψ *des* $(n - p)$ *autres variables.*

En particulier, on peut toujours trouver une intégrale qui, pour les valeurs (1) des variables $x_{n-p+1}, \ldots, x_n$, se réduise à une certaine des autres variables.

IX. — Fonctions et équations qui admettent des transformations données.

On dit qu'une fonction $f(x)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est *invariante par rapport à une transformation donnée*, ou *admet cette transformation* quand, en appliquant aux x cette transformation, on trouve que ladite fonction reste invariante.

Considérons maintenant l'équation $f(x) = 0$ et appliquons aux x la transformation donnée : il peut arriver que la nouvelle équation à laquelle on parvient se présente sous la forme

$$f(x')\,Q = 0,$$

le facteur Q étant une simple constante ou une fonction des x ; dans le premier cas, la nouvelle équation est dite *équivalente* à la proposée et, dans l'un et l'autre cas, on dit que la proposée *admet* la transformation considérée.

Si une fonction ou une équation admet toutes les transformations d'un groupe, on dit qu'elle *admet* ce groupe de transformations.

Nous voulons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit invariante par rapport à un groupe de transformations à un paramètre. Nous rappellerons pour cela le développement

$$f(x') = f(x) + \frac{t}{1!}Xf + \frac{t^2}{2!}X^2f + \ldots,$$

où t est le paramètre du groupe défini par l'opérateur X. Comme par hypothèse $f(x) \equiv f(x')$, il faut que l'on ait $Xf = 0$. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car, si elle est vérifiée, on a $X^2f = 0$, $X^3f = 0$, ... et, par suite, $f(x') \equiv f(x)$. Nous avons donc démontré ce résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ soit invariante par rapport à un groupe de transformations à un paramètre défini par l'opérateur différentiel X, *est que cette fonction soit intégrale de l'équation différentielle* $Xf = 0$.

Nous dirons, par définition, qu'une fonction f *admet la transformation infinitésimale* Xf si elle est intégrale de l'équation $Xf = 0$. Nous pourrons alors donner à ce théorème la forme suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ admette un groupe de transformations à un paramètre est que cette fonction admette la transformation infinitésimale contenue dans le groupe.

Si l'on observe qu'une fonction intégrale des deux équations

$X_1f = 0$, $X_2f = 0$ est aussi intégrale de l'équation $(X_1X_2)f = 0$, on a ce théorème :

Si une fonction admet les transformations infinitésimales X_1f, X_2f, *elle admet aussi la transformation infinitésimale* $(X_1X_2)f$.

Soit maintenant un système d'équations, supposées indépendantes,

$$(1) \qquad \Omega_1(x) = 0, \qquad \Omega_2(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{n-m}(x) = 0.$$

Si ce système admet toutes les transformations d'un groupe à un paramètre Xf, cela revient à dire que les équations

$$\Omega_i(x) + \frac{t}{1!}X\Omega_i(x) + \frac{t^2}{2!}X^2\Omega_i(x) + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m)$$

doivent être vérifiées par tous les systèmes de valeurs des x qui vérifient le système donné, et cela quel que soit t. Au système qu'on vient d'écrire, on peut évidemment substituer le suivant :

$$(2) \qquad X\Omega_i(x) + \frac{t}{2!}X^2\Omega_i(x) + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m);$$

et il est clair que, pour que ce système soit satisfait, quel que soit t, par toutes les valeurs des x qui vérifient le système donné, il faut que pour ces valeurs de x on ait

$$(3) \qquad X\Omega_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m).$$

En effet, si, pour un certain système de valeurs vérifiant (1), les équations (3) n'avaient pas lieu, il serait aisé d'assigner une valeur de t pour laquelle ce système de valeurs ne satisferait pas à toutes les équations (2).

Si nous disons, par définition, qu'un système d'équations (1) *admet* une transformation infinitésimale Xf quand les équations (3) sont conséquences des équations (1), nous aurons cette conclusion :

Pour qu'un système d'équations admette les transformations d'un groupe à un paramètre, il est nécessaire qu'il admette la transformation infinitésimale génératrice de ce groupe.

Nous démontrerons sous peu que cette condition est aussi suffisante.

Puisque les équations (1) sont supposées indépendantes, la matrice

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\Omega_{n-m}}{\partial x_1} & \frac{\partial\Omega_{n-m}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Omega_{n-m}}{\partial x_n} \end{matrix}\right\|$$

aura pour caractéristique $(n-m)$, c'est-à-dire qu'un au moins de ses mineurs d'ordre $(n-m)$ ne sera pas identiquement nul. Supposons, pour fixer les idées, que le déterminant $\frac{D(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-m})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m})}$ ne soit pas identiquement nul. Résolvons le système (1) par rapport aux $(n-m)$ premières variables, ce qui se peut d'après l'hypothèse faite; nous aurons

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1 \quad (x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-m} &= \varphi_{n-m}(x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

En remplaçant les $(n-m)$ premiers x par les φ dans une quelconque des équations données, on obtient une identité. Pour indiquer le remplacement de ces x par les φ dans une fonctian F des x, nous enfermerons la fonction F dans une parenthèse carrée; c'est-à-dire que nous poserons

$$[F] = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots, x_n).$$

Avec cette notation, pour une quelconque des fonctions Ω, nous avons

$$[\Omega_i] \equiv 0.$$

Soit alors la transformation infinitésimale considérée

$$XF = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x) \frac{\partial F}{\partial x_h};$$

d'où, en introduisant les φ,

$$[XF] = \sum_{h=1}^{h=n} [\xi_h(x)] \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right],$$

et, en se souvenant que $\xi_h = Xx_h$,

$$[XF] = \sum_{h=1}^{h=n} [Xx_h] \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right].$$

D'autre part, si l'on se rappelle que l'on a en général

$$XF(\psi_1, \psi_2, \ldots) = \frac{\partial F}{\partial \psi_1} X\psi_1 + \frac{\partial F}{\partial \psi_2} X\psi_2 + \ldots,$$

il vient

$$X[F] = \sum_{h=1}^{h=n-m} \frac{\partial [F]}{\partial \varphi_h} X\varphi_h + \sum_{h=n-m+1}^{h=n} \frac{\partial [F]}{\partial x_h} Xx_h,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$X[F] = \sum_{h=1}^{h=n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right] X\varphi_h + \sum_{h=n-m+1}^{h=n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right] Xx_h.$$

Il s'ensuit que

$$[X[F]] = \sum_{h=1}^{h=n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right][X\varphi_h] + \sum_{h=n-m+1}^{h=n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right][Xx_h],$$

et, par conséquent,

$$(4) \quad \begin{cases} [XF] - [X[F]] = \displaystyle\sum_{h=1}^{h=n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right] \{[Xx_h] - [X\varphi_h]\} \\ \qquad\qquad\qquad\;\; = \displaystyle\sum_{h=1}^{h=n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_h}\right] [X(x_h - \varphi_h)]. \end{cases}$$

Or, avec notre nouvelle notation, la condition nécessaire trouvée peut s'écrire

$$[X\Omega_i] \equiv 0.$$

D'autre part, comme $[\Omega_i] \equiv 0$, on a aussi

$$X[\Omega_i] \equiv 0, \qquad [X[\Omega_i]] \equiv 0.$$

Si donc on applique aux Ω_i la formule (4), il vient

$$\sum_{h=1}^{h=n-m} \left[\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_h}\right] [X(x_h - \varphi_h)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m);$$

mais, comme par hypothèse le déterminant des $\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_h}$ est différent de zéro, on doit avoir

$$[X(x_h - \varphi_h)] = 0.$$

Il résulte de là, d'après (4), que l'on a, quelle que soit la fonction F,

$$[XF] - [X[F]] = 0.$$

Si donc $F = 0$ est une conséquence du système (1), c'est-à-dire si $[F] \equiv 0$, comme il s'ensuit que $X[F] \equiv 0$ et $[X[F]] \equiv 0$, on a aussi $[XF] \equiv 0$. Donc, enfin :

Si l'équation $F = 0$ *est une conséquence du système donné, il en est de même pour l'équation* $XF = 0$ (*et, par suite, aussi pour les équations* $X^2F = 0$, $X^3F = 0$, ...).

En d'autres termes, *si le système* $\Omega_i = 0$ *admet la transformation infinitésimale* Xf, *toute équation qui en est une conséquence admet la même transformation infinitésimale.*

En particulier, *deux systèmes équivalents admettent les mêmes transformations infinitésimales.*

Revenons à la question qui nous occupait tout à l'heure et supposons que les équations données admettent la transformation infinitésimale Xf, c'est-à-dire que les équations (3) soient conséquences des équations (1); il s'ensuivra, d'après le théorème qu'on vient de démontrer, qu'il en est de même pour les équations

$$X^2\Omega_i(x) = 0, \qquad X^3\Omega_i(x) = 0, \qquad \ldots,$$

et, par suite, aussi pour les équations (2), en sorte que le système admet le groupe considéré.

Nous conclurons de là ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que le système des équations $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_{n-m} = 0$ *admette un groupe à un paramètre défini par l'opérateur* Xf, *est que les équations* $X\Omega_1 = 0, \ldots, X\Omega_{n-m} = 0$ *soient des conséquences du système donné.*

Ce théorème peut encore s'énoncer sous cette autre forme :

Un système d'équations admet un groupe à un paramètre *quand il admet la transformation infinitésimale de ce groupe, et alors seulement.*

Supposons qu'un système d'équations (1) admette deux transformations infinitésimales X_1, X_2. Cela veut dire que les équations $X_1\Omega_i = 0$, $X_2\Omega_i = 0$ sont des conséquences du système. Mais, d'après la remarque que l'on vient de faire, il s'ensuit que les équations $X_2X_1\Omega_i = 0$, $X_1X_2\Omega_i = 0$ sont des conséquences du système, et l'on pourra donc dire la même chose des équations $(X_1X_2)\Omega_i = 0$. Ainsi :

Si un système d'équations admet les transformations infinitésimales X_1, X_2, *il admettra aussi la transformation* (X_1X_2).

Tout ceci posé, arrivons à la solution d'un important problème :

Étant donnée la transformation infinitésimale Xf, *trouver tous les systèmes possibles d'équations qui admettent cette transformation infinitésimale.*

A cet effet, commençons par diviser tous ces systèmes possibles en deux classes : à la première appartiendront tous les systèmes tels que les équations $\xi_1(x) = 0, \ldots, \xi_n(x) = 0$ n'en soient pas toutes des conséquences; à la seconde appartiendront tous les autres.

Partons de l'équation $Xf = 0$ et supposons qu'on soit parvenu à trouver le système de première classe

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{n-m} = 0.$$

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ un système d'intégrales indépendantes de $Xf = 0$. Un changement de variables ne changeant pas la forme de cette équation, prenons en particulier comme nouvelles variables les y (qui sont des fonctions φ des x) et l'un des x, $y_n = x_n$: l'équation se réduira à la forme $\frac{\partial f}{\partial y_n} = 0$. En effet, on a

$$\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial y_n}.$$

Multiplions respectivement par $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ajoutons et rappelons-nous que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sont des intégrales de l'équation donnée; nous aurons

$$\xi_n \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0.$$

Par l'introduction des y, les $\Omega_h(x)$ prendront la forme $\Phi_h(y)$ et nous aurons

$$\Phi_1(y) = 0, \quad \Phi_2(y) = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_{n-m}(y) = 0.$$

Si le premier système admet la transformation infinitésimale Xf, le second admettra la transformation $\frac{\partial f}{\partial y_n}$ qui est la transformée de la première avec les nouvelles variables; le second système, ou ne devra donc pas contenir y_n, ou devra pouvoir être transformé en un autre système ne contenant pas y_n : en d'autres termes, le système transformé ne devra pas pouvoir être résolu par rapport à y_n. En effet, si l'on pouvait en déduire

$$y_n - \psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0,$$

comme cette équation doit admettre la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial y_n}$ (puisqu'elle est conséquence d'un système admettant cette transformation), on aurait l'absurdité $1 = 0$.

Le système des Φ devra donc, ou être de la forme, ou être réductible à un système de la forme

$$\begin{array}{l} \psi_1 \quad (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{n-m}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0. \end{array}$$

En observant que les premiers membres de ces équations sont des intégrales de $Xf = 0$, on peut dire que, pour avoir un système de la première classe, il suffit d'égaler à zéro un certain nombre d'intégrales de $Xf = 0$. Réciproquement, tout système ainsi obtenu appartiendra évidemment à la première classe. Ainsi *les systèmes d'équations de la première classe sont exclusivement tous ceux qui s'obtiennent en égalant à zéro un certain nombre d'intégrales de l'équation différentielle* $Xf = 0$.

Si ψ est une fonction quelconque, pour toutes les valeurs des x annulant les ξ, on a évidemment $X\psi = 0$. Considérons alors le système d'équations

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \xi_n = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots,$$

où ψ_1, ψ_2, ... sont des fonctions quelconques; désignons par f le premier nombre d'une quelconque de ces équations; on a toujours $Xf = 0$ comme conséquence de ces équations, en sorte qu'on peut dire que le système admet la transformation infinitésimale considérée. Réciproquement, tout système dont les équations $\xi_1 = 0$, ..., $\xi_n = 0$ sont conséquences, doit contenir ces équations (ou au moins doit pouvoir être mis sous une forme telle qu'il les contienne). Donc :

Les systèmes de seconde classe sont exclusivement tous ceux qui s'obtiennent en adjoignant aux équations $\xi = 0$ d'autres équations quelconques, compatibles toutefois entre elles et avec celles-là.

D'après cela, tous les systèmes possibles résultent en dernière analyse de l'intégration de l'équation $Xf = 0$.

Nous allons maintenant traiter cet autre problème plus général :

Étant données les transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$, trouver tous les systèmes possibles d'équations qui les admettent.

Ce que nous avons dit précédemment nous fait présumer que le rôle essentiel sera joué par le système des équations différentielles $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$, ..., $X_r f = 0$, système qui, en général, ne sera pas complet.

Il suffit toutefois de traiter le cas où ce système est complet. En effet, on sait que si un système d'équations admet les transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_2 f$, il admettra aussi la transformation $(X_1 X_2) f$.

Par suite le système que nous cherchons admettra aussi les transformations $(X_1 X_2) f$, $(X_1 X_3) f$, ..., $(X_{r-1} X_r) f$, parmi lesquelles nous ne retiendrons que celles qui ne sont pas des combinaisons linéaires des précédentes transformations. En continuant de la sorte, nous arriverons à adjoindre aux transformations données les nouvelles transformations $X_{r+1} f$, $X_{r+2} f$, ..., $X_q f$, en dehors desquelles il ne sera pas possible d'en trouver qui ne soient des combinaisons linéaires de $X_1 f, \ldots, X_q f$. Le système des équations différentielles qu'on est ainsi conduit à considérer

$$X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_r f = 0, \quad X_{r+1} f = 0, \quad \ldots, \quad X_q f = 0,$$

sera complet; c'est ce que nous voulions démontrer.

Supposons donc complet le système des équations obtenues en égalant à zéro les transformations données, que nous admettons être indépendantes. Les équations pourront n'être pas linéairement indépendantes (c'est-à-dire qu'il peut arriver que certaines d'entre elles soient des combinaisons linéaires, à coefficients non constants, des autres équations); soit p le nombre de celles qui sont linéairement indépendantes. Posons

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

et formons la matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \ldots & \xi_{rn} \end{Vmatrix};$$

celle-ci aura pour caractéristique p. Cela posé, divisons comme plus haut tous les systèmes cherchés d'equations en deux classes. Appartiendront à la première classe tous ceux qui n'entraînent pas la nullité de tous les mineurs d'ordre p de la précédente matrice; appartiendront au contraire à la seconde classe tous ceux qui entraînent comme conséquence la nullité de tous les mineurs d'ordre p de cette matrice. Cette dernière classe peut se diviser à son tour en p sous-classes qui s'obtiennent en supposant que le système entraîne seulement la nullité des mineurs d'ordre p, ou bien aussi celle des mineurs d'ordre $(p-1)$, etc.

Envisageons le problème dans le cas où l'on recherche les systèmes de la première classe. Soient $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\ldots$, $\Omega_s = 0$ les équations du système cherché, et soit

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,n-p+1} & \xi_{1,n-p+2} & \ldots & \xi_{1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{p,n-p+1} & \xi_{p,n-p+2} & \ldots & \xi_{p,n} \end{vmatrix}$$

le mineur d'ordre p qui, non seulement n'est pas identiquement nul, mais même ne s'annule pas en vertu des équations du système. Résolvons les équations $X_1 f = 0$, ..., $X_p f = 0$ par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}}$, $\frac{\partial f}{\partial x_{n-p+2}}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$, et mettons-les sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}} + \sum_{i=1}^{i=n-p} \eta_{1,i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{i=n-p} \eta_{p,i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

les η n'étant ni indéterminés, ni identiquement nuls en vertu des équations. Nous obtenons ainsi un système équivalent au système des équations $X_i f = 0$ $(i = 1, 2, \dots, q)$, donc un système complet; nous désignerons par $Y_1 f$, $Y_2 f$, ..., $Y_p f$ les premiers membres des équations de ce système, les Y étant de nouveaux opérateurs différentiels. Cela étant, ce système complet de p équations à n variables admet $(n - p)$ intégrales indépendantes que nous désignerons par

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots \quad y_{n-p} = \varphi_{n-p}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Effectuons un changement de variables indépendantes en introduisant, au lieu des x, les y définis par ces dernières relations et par

$$y_{n-p+1} = x_{n-p+1}, \quad y_{n-p+2} = x_{n-p+2}, \quad \dots, \quad y_n = x_n.$$

Les équations $Y_1 f = 0$, ..., $Y_p f = 0$ se réduisent à

$$\frac{\partial f}{\partial y_{n-p+1}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0$$

(*voir* plus haut), équations que nous écrirons

$$Z_1 f = 0, \quad \dots, \quad Z_p f = 0.$$

Le système des équations $\Omega_i = 0$ admet par hypothèse les transformations infinitésimales $X_1 f$, ..., $X_p f$ et, par suite, les transformations $Y_1 f$, ..., $Y_p f$, d'après ce qui a été dit précédemment. Si donc nous posons $\Omega_h(x) \equiv V_h(y)$, nous aurons le système des équations

$$V_1(y)=0, \qquad V_2(y)=0, \qquad \ldots, \qquad V_p(y)=0,$$

qui admettra les transformations infinitésimales $Z_1 f$, $Z_2 f$, ..., $Z_p f$. On déduit de là que ce système d'équations ne contient pas les y_{n-p+1}, y_{n-p+2}, ..., y_n, ou du moins ne les contient qu'en apparence et peut se réduire à un système équivalent ne les contenant pas. En effet, s'il les contenait effectivement, le système serait résoluble par rapport à ces variables, en sorte qu'on en pourrait déduire

$$\begin{aligned} &y_{n-p+1}-\psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n-p})=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &y_n \qquad -\psi_p(y_1, y_2, \ldots, y_{n-p})=0, \end{aligned}$$

et ces équations devraient admettre les transformations Zf. Or on voit que, par exemple, en appliquant la transformation $Z_1 f$ à la première de ces relations, on obtient l'absurdité $1=0$, et ainsi des autres. Chacune de ces relations n'admet donc pas toutes les transformations Zf, d'où il suit que le système de ces équations n'est pas conséquence du précédent, et cela justifie notre assertion.

Ainsi, le système des équations $V=0$ pourra se réduire à un système dont les premiers membres soient des fonctions seulement de y_1, y_2, ..., y_{n-p}, c'est-à-dire soient des intégrales du système complet.

On voit donc immédiatement que, pour avoir un système d'équations de la première classe, il suffit d'égaler à zéro un certain nombre d'intégrales du système complet d'équations différentielles considéré.

Naturellement cette détermination devra se répéter pour tout déterminant du $p^{\text{ième}}$ ordre non nul.

Proposons-nous maintenant de rechercher un système d'équations de la seconde classe, ou, d'une manière plus précise, un système d'équations d'une sous-classe déterminée comprise dans la seconde classe. Nous allons montrer que ce problème se réduit à la recherche d'un système d'équations de la première classe relatif à un autre système de transformations infinitésimales.

Supposons, pour fixer la sous-classe, que le système des équations cherchées entraîne la nullité de tous les mineurs de la précédente matrice d'ordre supérieur à h, mais n'entraîne pas la nullité de tous ceux d'ordre h (h étant, bien entendu, inférieur à p). Formons tous les mineurs Θ qui ne s'annulent pas identiquement, mais qui s'annulent en vertu du système cherché, et écrivons

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_s = 0.$$

Rappelons qu'un système de s équations définit un espace à $(n - s)$ dimensions compris dans l'espace général à n dimensions. Le fait analytique que ce système admet une transformation infinitésimale se traduit par ce fait géométrique : si l'on donne à cet espace à $(n - s)$ dimensions le déplacement représentant la transformation infinitésimale, cet espace ne change pas. Mais il se peut que cet espace soit décomposable en parties telles qu'en appliquant le déplacement susdit, ces parties se changent les unes dans les autres, et que l'ensemble reste inaltéré : au point de vue analytique, cela signifie que le système d'équations est *réductible;* il se compose de systèmes d'un nombre moindre d'équations, systèmes n'admettant pas la transformation infinitésimale considérée, et qui, si on leur applique cette transformation, se changent les uns dans les autres; de la sorte, le système total reste inaltéré, il admet ladite transformation.

Dans ce cas, soit

$$(5) \qquad \Delta_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_t = 0 \qquad (t < s)$$

une partie irréductible du système considéré, n'admettant pas la transformation infinitésimale $X_k f$. Nous devrons adjoindre au système (5) les nouvelles équations

$$X_k \Delta_1 = 0, \quad \ldots, \quad X_k \Delta_t = 0,$$

puis, comme d'ordinaire, égaler à zéro les *produits* $(X_k X_l)$, en écartant les équations qui sont des combinaisons linéaires des précédentes, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ne trouvions plus d'équations nouvelles. De cette manière, nous parviendrons soit à un système d'équations indépendantes et incompatibles, soit à un système d'équations indépendantes et compatibles admettant le système donné de transformations infinitésimales. Écrivons ce système

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0. \quad \ldots, \quad \Omega_q = 0.$$

Considérons un des déterminants d'ordre h définis plus haut, qui ne s'annulent ni identiquement, ni en vertu des équations du système cherché :

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,n-h+1} & \xi_{1,n-h+2} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{h,n-h+1} & \xi_{h,n-h+2} & \cdots & \xi_{h,n} \end{vmatrix}.$$

Écrivons encore les équations obtenues en appliquant à $\Omega = 0$ les transformations $X_k f$:

$$X_k \Omega = \sum_{l=1}^{l=n} \xi_{kl} \frac{\partial \Omega}{\partial x_l} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, h).$$

Si le système d'équations $\Omega_i = 0$ contenait les seules variables $x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \ldots, x_n$, dans les sommes précédentes les $(n - h)$ premiers termes manqueraient et l'on aurait h équations linéaires homogènes en $\frac{\partial \Omega}{\partial x_{n-h+1}}, \frac{\partial \Omega}{\partial x_{n-h+2}}, \ldots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_n}$, ce qui n'est pas possible, le déterminant susdit des coefficients étant différent de zéro. Par suite, chacune des fonctions Ω devra nécessairement contenir au moins une des autres variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-h}$, et tous les Ω devront, comme on voit, contenir toutes les variables; on pourra donc résoudre le système des équations $\Omega = 0$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-h}$ et l'on trouvera, par exemple :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \quad = \varphi_1 \quad (x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_{n-h} = \varphi_{n-h}(x_{n-h+1}, x_{n-h+2}, \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

En d'autres termes, le système des équations $\Omega = 0$ devra se transformer en ce système d'équations et en un autre que nous désignerons par

$$(7) \qquad V_1 = 0, \qquad V_2 = 0, \qquad \ldots,$$

les V étant supposés déjà mis sous forme de fonctions des seuls $x_{n-h+1}, \ldots, x_n$. On pourra dire la même chose du système cherché.

Soit maintenant en général $F(x)$ une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; indiquons par le symbole $[F]$ l'expression déduite de $F(x)$ en remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_{n-h}$ par les expressions précédentes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-h}$. Nous pourrons dès lors écrire $V_j \equiv [V_j]$.

Or

$$X_k V_j = \xi_{k1}\frac{\partial V_j}{\partial x_1} + \xi_{k2}\frac{\partial V_j}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{kn}\frac{\partial V_j}{\partial x_n},$$

se réduit à

$$X_k V_j = \xi_{k,n-h+1}\frac{\partial V_j}{\partial x_{n-h+1}} + \ldots + \xi_{kn}\frac{\partial V_j}{\partial x_n};$$

par suite

$$[X_k V_j] = [\xi_{k,n-h+1}]\frac{\partial V_j}{\partial x_{n-h+1}} + \ldots + [\xi_{kn}]\frac{\partial V_j}{\partial x_n}.$$

Puisque le système (6), (7) admet les transformations infinitésimales $X_k f$, les équations

$$X_k V_j = 0$$

devront être des conséquences du même système, c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$[X_k V_j] \equiv 0$$

ou

$$\sum_{i=n-h+1}^{i=n} [\xi_{k,i}]\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = 0.$$

Ceci montre que le système d'équations (7) admet le système de transformations infinitésimales

$$[X_k f] = \sum_{i=n-h+1}^{i=n} [\xi_{k,i}]\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

où k varie de 1 à h.

Si nous formons la matrice

$$\left\| \begin{matrix} [\xi_{1,n-h+1}] & \cdots & [\xi_{1,n}] \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ [\xi_{h,n-h+1}] & \cdots & [\xi_{h,n}] \end{matrix} \right\|,$$

ses déterminants d'ordre h ne s'annulent pas identiquement. Nous nous trouvons donc avoir transformé notre problème, c'est-à-dire la recherche des équations de la sous-classe considérée admettant les transformations $X_k f$, en un autre problème dans lequel on a à déterminer les équations de la première classe admettant les transformations infinitésimales $[X_k f]$.

Notre problème se trouve de la sorte entièrement résolu.

X. — Systèmes d'équations différentielles qui admettent des transformations données.

Soit le système complet d'équations différentielles linéaires

$$(1) \qquad X_j f \equiv \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{jh}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, q).$$

Appliquons-lui une transformation $x'_i = f_i(x)$; il se transforme en un autre système complet (n° VIII), en général différent,

$$(2) \qquad X'_j f \equiv \sum_{h=1}^{h=n} \xi'_{jh}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_h} = 0.$$

Mais, si la transformation est telle qu'entre les Xf et les $X'f$ aient lieu des relations de la forme

$$(3) \qquad X_k f = \sum_{j=1}^{j=q} \omega_{kj}(x') X'_j f$$

(où il est entendu que $X_k f$ est exprimé en x'), ou qu'entre les ξ et les ξ' aient lieu des relations de la forme

$$\xi_{kh}(x') = \sum_{j=1}^{j=q} \omega_{kj}(x') \xi'_{jh}(x'),$$

alors le système (2) est équivalent au système (1), où l'on accentuerait les variables; en d'autres termes, la transformation change le système (1) en ce nouveau système

$$(4) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{jh}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_h} = 0.$$

Quand il en est ainsi, on dit que le système (1) *admet la transformation* $x'_i = f_i(x)$.

Supposons donc que le système (1) admette la transformation $x' = f_i(x)$. Alors, si $\varphi(x)$ est une intégrale du système (1), $\varphi(x')$

sera une intégrale du système (4), ou du système (2); d'autre part, si $\varphi(x')$ est une intégrale du système transformé, $\varphi[f(x)]$ sera une intégrale du système primitif. Nous concluons donc que, si $\varphi(x)$ est une intégrale du système (1), $\varphi[f(x)]$ est une intégrale du même système.

Réciproquement, supposons que, $\varphi(x)$ étant une intégrale quelconque du système (1), $\varphi[f(x)]$ en soit aussi une intégrale. De $X_k\varphi(x)=0$, il suit que $X'_k\varphi(x')=0$ ou $X'_k\varphi[f(x)]=0$; mais, comme on a aussi par hypothèse $X_k\varphi[f(x)]=0$, on voit que les $X_k f$ s'annulent en même temps que les $X'_k f$ et inversement; d'où résulte l'équivalence entre les deux systèmes.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système complet d'équations différentielles linéaires

$$X_i f=0 \qquad (i=1,2,\ldots,q)$$

admette une transformation définie par les équations

$$x'_i=f_i(x) \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

est que, quelle que soit l'intégrale $\varphi(x)$ du susdit système complet, $\varphi[f(x)]$ soit aussi une intégrale de ce système.

Proposons-nous, après cela, de rechercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système complet de q équations différentielles $Xf=0$ admette toutes les transformations d'un groupe à un seul paramètre défini par la transformation infinitésimale Yf.

A cet effet, rappelons le développement

$$x'_i=x_i+\frac{t}{1!}Yx_i+\frac{t^2}{2!}Y^2x_i+\ldots,$$

où les diverses valeurs attribuées au paramètre t individualisent les transformations du groupe. Attribuons à t une valeur particulière; d'après le théorème précédent, si $\varphi(x)$ est une intégrale du système complet considéré, il devra en être de même de l'expression

$$\varphi\left[x_i+\frac{t}{1!}Yx_i+\frac{t^2}{2!}Y^2x_i+\ldots\right]=\varphi(x)+\frac{t}{1!}Y\varphi(x)+\frac{t^2}{2!}Y^2\varphi(x)+\ldots.$$

Il est, par suite, nécessaire que $Y\varphi(x)$ soit aussi une intégrale de notre système. En effet, l'expression

$$\varphi\left(x_i + \frac{t}{1!}Yx_i + \ldots\right) - \varphi(x)$$

devra être une intégrale, et il en sera de même, pour toute valeur de t, de

$$\frac{\varphi\left(x_i + \frac{t}{1!}Yx_i + \ldots\right) - \varphi(x)}{t} = Y\varphi(x) + \ldots;$$

mais, pour $t = 0$, ceci se réduit à $Y\varphi(x)$.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, notre système complet de q équations à n variables possède $(n-q)$ intégrales indépendantes que nous appellerons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-q}$. Par suite, $Y\varphi(x)$, que nous supposons être aussi une intégrale, devra avoir la forme

$$Y\varphi(x) = \psi[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-q}];$$

d'où

$$Y^2\varphi(x) = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1}Y\varphi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_2}Y\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_{n-q}}Y\varphi_{n-q}.$$

Si l'on tient compte de ce que, les φ étant des intégrales, les $Y\varphi_1$, $Y\varphi_2, \ldots, Y\varphi_{n-q}$ sont aussi des intégrales, c'est-à-dire des fonctions des φ, on reconnaît que $Y^2\varphi(x)$ est une intégrale du système. Et ainsi de suite. On en conclut que le système donné admet la transformation considérée.

De là ce théorème :

Pour que le système complet $X_i f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ admette un groupe de transformations à un paramètre défini par la transformation infinitésimale Xf, il faut et il suffit que, $\varphi(x)$ étant une intégrale du système, $Y\varphi(x)$ soit aussi une intégrale de ce système.

Ce théorème peut encore se mettre sous une autre forme. Exprimons, à cet effet, que si φ est une intégrale du système considéré, $Y\varphi$ en est aussi une intégrale ; c'est-à-dire que si $X_k\varphi = 0$, on a aussi $X_kY\varphi = 0$. Or, de $X_k\varphi = 0$, il résulte que $YX_k\varphi = 0$: donc $(X_kY)\varphi = 0$, ce qui exprime que toutes les intégrales du système donné sont des intégrales de l'équation différentielle $(X_kY)f = 0$. Mais celle-ci, étant linéaire homogène du premier ordre, doit être une combinaison linéaire des équations du système donné ; on devra donc avoir

$$(X_k Y)f = h_{k1} X_1 f + \ldots + h_{kq} X_q f,$$

relations qui expriment une condition nécessaire pour que le système $X_k f = 0$ admette le groupe à un paramètre Yf. Cette condition est aussi suffisante. En effet, toute intégrale φ, si l'on suppose vérifiée cette condition, sera intégrale de $(X_k Y)f = 0$, ou de $X_k Yf - YX_k f = 0$. Mais $YX_k\varphi = 0$; donc $X_k Y\varphi = 0$, c'est-à-dire que $Y\varphi$ est une intégrale de système (C. Q. F. D.). Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système complet $X_i f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ admette le groupe des transformations à un paramètre défini par la transformation infinitésimale Yf, est que les expressions $(X_k Y)f$ soient des combinaisons linéaires des Xf.

Ce théorème a, au point de vue pratique, une plus grande importance que le précédent, parce qu'il donne le moyen de reconnaître si un système admet un groupe donné sans qu'on ait préalablement intégré le système.

Du dernier théorème et de l'identité connue de Jacobi, nous pouvons déduire cet autre résultat :

Si le système complet $X_k f = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ admet les transformations infinitésimales Yf, Zf, il admet aussi la transformation $(YZ)f$.

En effet, écrivons l'identité

$$\Big((X_k Y)Z\Big)f + \Big((YZ)X_k\Big)f + \Big((ZX_k)Y\Big)f = 0.$$

D'après l'hypothèse faite, on a

$$\Big((X_k Y)Z\Big)f = \left(\sum_{r=1}^{r=q} h_{kr} X_r, Z\right)f = \sum_{r=1}^{r=q} (h_{kr} X_r, Z)f,$$

$$\Big((X_k Y)Z\Big)f = \sum_{r=1}^{r=q} h_{kr}(X_r, Z)f - \sum_{r=1}^{r=q} Z h_{kr} . X_r f \text{ [1]};$$

---

[1] Si φ, ψ sont deux fonctions quelconques des variables x, il est facile de démontrer que

$$(\varphi X, \psi Y)f = \varphi\psi . (X, Y)f - \psi . Y\varphi . Xf + \varphi . X\psi . Yf.$$

$(X_r, Z)f$ étant linéaire en $X_1 f, \ldots, X_q f$, on peut en dire autant du premier terme de l'identité. Un calcul analogue s'appliquerait au troisième terme $[(X_k Z)Y]f$. Il en résulte que le second terme $\big((YZ)X_k\big)f$, est, lui aussi, une combinaison linéaire des Xf, ce qui justifie notre assertion, d'après le précédent théorème.

XI. — Retour à la génération des groupes de transformations au moyen de transformations infinitésimales.

Revenons maintenant à l'étude des groupes. Considérons les équations finies

$$x'_i = f_i(x, a),$$

indépendantes et vérifiant les équations différentielles habituelles

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_\rho \xi_{\rho h}(x')\, \psi_{\rho k}(a),$$

$$\xi_{\rho h}(x') = \sum_k \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k}.$$

En résolvant les équations données par rapport aux x, nous obtenons

$$x_i = F_i(x', a),$$

et, par suite,

$$x_i = F_i[f(x, a), a],$$

équation identique par rapport aux x et aux a. Nous aurons donc, par dérivation relative à a_k,

$$o = \sum_h \frac{\partial F_i}{\partial x'_h} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i}{\partial a_k},$$

qui est aussi une identité. Multiplions par $\alpha_{\rho k}(a)$ et sommons par rapport à k; il vient

$$o = \sum_k \sum_h \frac{\partial F_i}{\partial x'_n} \alpha_{\rho k}\, a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} + \sum_k \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial F_i}{\partial a_k},$$

c'est-à-dire

$$\sum_h \xi_{\rho h}(x') \frac{\partial F_i}{\partial x'_h} + \sum_k \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial F_i}{\partial a_k} = 0,$$

qui est une identité.

Nous voyons par suite que le système des r équations différentielles

$$\sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_h} + \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r)$$

est satisfait par chacune des fonctions F_i. Ce système de r équations différentielles linéaires à $(n+r)$ variables indépendantes est résoluble par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial a_k}$, puisque le déterminant des α n'est pas identiquement nul; ces r équations sont donc linéairement indépendantes. Elles constituent de plus un système complet, car, dans le cas contraire, elle admettraient moins de n intégrales indépendantes, tandis qu'elles admettent les n intégrales indépendantes $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Posons

$$X'_\rho f = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_h}, \qquad A_\rho f = \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k};$$

nous pourrons écrire le système sous la forme

$$X'_\rho f + A_\rho f = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r),$$

ou encore, avec un symbole unique,

$$\Omega_\rho f = X'_\rho f + A_\rho f = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r).$$

Puisque le système est complet, on aura

$$(\Omega_h \Omega_\rho) f = \sum_s \theta_{h\rho s} \Omega_s f,$$

les θ étant en général des fonctions des x' et des a. Or

$$(\Omega_h \Omega_\rho) f = (X'_h X'_\rho) f + (X'_h A_\rho) f + (A_h X'_\rho) f + (A_h A_\rho) f,$$

et il est facile de voir que les $(X'_h A_\rho)f$, $(A_h X'_\rho)f$ sont nuls; donc

$$(\Omega_h \Omega_\rho)f = (X'_h X'_\rho)f + (A_h A_\rho)f = \sum_s \theta_{h\rho s} X'_s f + \sum_s \theta_{h\rho s} A_s f,$$

ce qui entraîne

$$(X'_h X'_\rho)f = \sum_s \theta_{h\rho s} X'_s f,$$

$$(A_h A_\rho)f = \sum_s \theta_{h\rho s} A_s f.$$

Nous allons montrer que les θ ne dépendent ni des x', ni des a. Il suffit de noter qu'on a la relation

$$(A_h A_\rho)f = \sum_k [A_h(\alpha_{\rho k}) - A_\rho(\alpha_{hk})] \frac{\partial f}{\partial a_k};$$

ou encore

$$\sum_s \theta_{h\rho s} A_s f = \sum_s \theta_{h\rho s} \sum_k \alpha_{sk} \frac{\partial f}{\partial a_k} = \sum_k [A_h(\alpha_{\rho k}) - A_\rho(\alpha_{hk})] \frac{\partial f}{\partial a_k};$$

donc

$$\sum_s \theta_{h\rho s} \alpha_{sk} = A_h(\alpha_{\rho k}) - A_\rho(\alpha_{hk}).$$

Si nous laissons fixes h, ρ, et que nous fassions varier k de 1 à r, nous obtiendrons r équations linéaires en $\theta_{h\rho s}$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$; le déterminant des coefficients n'est pas identiquement nul, par suite le système de ces équations est résoluble par rapport à ces θ, lesquels sont par suite fonctions des seuls a. Mais ils ne contiennent pas même les a. Nous pouvons en effet remplacer f, dans la relation

$$\sum_s \theta_{k\rho s} X'_s f = (X'_h X'_\rho)f,$$

par une fonction indépendante des a; nous aurons alors, en tenant compte de ce que les ξ ne contiennent pas les a :

$$\sum_s \frac{\partial \theta_{h\rho s}}{\partial a_k} X'_s f = 0,$$

quel que soit k. Comme les X' sont indépendants, ces dernières relations ne peuvent subsister à moins que l'on ait

$$\frac{\partial \theta_{h\rho s}}{\partial a_k} = 0,$$

c'est-à-dire que les θ soient indépendants des a. Cette dernière condition doit donc nécessairement avoir lieu.

Ainsi, en dernière analyse, les θ seront des constantes numériques que nous désignerons par c, et nous écrirons les relations trouvées de la manière suivante

$$(X'_h X'_\rho)f = \sum_s c_{h\rho s} X'_s f,$$

$$(A_h A_\rho)f = \sum_s c_{h\rho s} A_s f.$$

Lors donc que nous avons un ensemble de transformations à r paramètres essentiels satisfaisant aux équations différentielles habituelles, les r transformations infinitésimales définies par

$$X'_\rho f = \sum_h \xi_{\rho h}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_h}$$

satisfont aux relations qu'on vient d'écrire.

Si cet ensemble constitue un groupe contenant la transformation identique, les $X'f$, écrits avec les variables primitives, ne sont autres que les r transformations infinitésimales Xf génératrices du groupe. Nous pouvons alors écrire

$$(X_h X_\rho)f = \sum_s c_{h\rho s} X_s f.$$

Nous allons maintenant démontrer que si, réciproquement, nous avons r transformations infinitésimales satisfaisant à ces dernières relations, ces transformations engendrent un groupe à r paramètres. Introduisons, comme au n° VII, les variables

$$x_{11},\quad x_{12},\quad \ldots,\quad x_{1n};\quad x_{21},\quad x_{22},\quad \ldots,\quad x_{2n};\quad \ldots;\quad x_{r1},\quad x_{r2},\quad \ldots,\quad x_{rn}.$$

Posons

$$X_{\mu\rho} f = \sum \xi_{\mu\rho h} \frac{\partial f}{\partial x_{\mu h}};$$

formons la matrice

$$\left\|\begin{array}{cccccccccc} \xi_{111} & \dots & \xi_{11n} & \xi_{211} & \dots & \xi_{21n} & \dots & \xi_{r11} & \dots & \xi_{r1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1r1} & \dots & \xi_{1rn} & \xi_{2r1} & \dots & \xi_{2rn} & \dots & \xi_{rr1} & \dots & \xi_{rrn} \end{array}\right\|,$$

qui, comme on l'a alors démontré, a r pour caractéristique, si les transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$ sont indépendantes. Posons

$$U_\rho f = \sum_\mu X_{\mu\rho} f,$$

et considérons les équations

$$U_1 f = 0, \qquad \dots, \qquad U_r f = 0,$$

qui seront à leur tour indépendantes. En les combinant deux à deux comme les parenthèses ordinaires, nous avons

$$(U_h U_\rho) f = \sum_{\mu\nu} (X_{\mu h} X_{\nu\rho}) f.$$

Observons que, pour $\mu \neq \nu$, les $(X_{\mu h} X_{\nu\rho})$ sont nuls, parce que les opérateurs $X_{\mu h}$ et $X_{\nu\rho}$ se rapportent à des variables différentes. Donc

$$(U_h U_\rho) f = \sum_\mu \sum_s c_{h\rho s} X_{\mu s} f = \sum_s c_{h\rho s} U_s f;$$

cela revient à dire que les U satisfont aux mêmes relations que vérifient les X. Il s'ensuit que les équations $U_\rho f = 0$ forment un système complet de r équations à rn variables, système qui possède $(rn - r)$ intégrales indépendantes que nous désignerons par $u_1, u_2, \dots, u_{rn-r}$ et que nous introduirons comme nouvelles variables, en leur adjoignant r autres variables que nous appellerons a. Il vient alors, comme on l'a vu dans une autre occasion,

$$U_\rho f = \sum_{i=1}^{i=r} \eta_{\rho i} \frac{\partial f}{\partial a_i},$$

les η étant des fonctions des u et des a; si nous rendons les u constants, les η deviennent fonctions des seuls a, et nous avons, en appelant $A_\rho f$ ce que deviennent dans ces conditions les $U_\rho f$ et en désignant par $\alpha(a)$ les η où les u sont égalés à des constantes,

$$A_\rho f = \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_{\rho i}(a) \frac{\partial f}{\partial a_i};$$

les opérateurs A vérifient les relations

$$(A_h A_\rho) f = \sum_s c_{h\rho s} A_s f.$$

Ceci posé, considérons la transformation infinitésimale

$$\Omega_\rho f = X'_\rho f + A_\rho f,$$

où nous écrivons X′ pour exprimer que nous substituons les variables x' aux variables x. Les $\Omega_\rho f$ forment un ensemble de ρ transformations infinitésimales, indépendantes si les X et les A le sont.

Formons les combinaisons habituelles par parenthèses

$$(\Omega_h, \Omega_\rho) f = (X'_h, X'_\rho) f + (A_h, A_\rho) f,$$

les $(X'_h, A_\rho) f$, $(X'_\rho, A_h) f$ étant nulles. Par suite

$$(\Omega_h, \Omega_\rho) f = \sum_s c_{h\rho s} X'_s f + \sum_s c_{h\rho s} A_s f = \sum_s c_{hks} \Omega_s f,$$

et ces relations expriment que le système des équations

$$\Omega_\rho f = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r)$$

est complet; il comprend $(n+r)$ variables et admet donc n intégrales indépendantes; désignons ces intégrales par

$$F_i(x', a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et rappelons-nous que

$$X'_\rho f = \sum_h \xi_{\rho h}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_h};$$

nous aurons

$$(1) \qquad \sum_h \xi_{\rho h}(x') \frac{\partial F_i}{\partial x'_h} + \sum_h \alpha_{\rho h}(a) \frac{\partial F_i}{\partial a_h} = 0.$$

Écrivons

$$x_i = F_i(x', a);$$

puisque les F_i sont indépendants, nous déduirons de là

$$x'_i = f_i(x, a),$$

en sorte que les x' deviennent des fonctions des x et des a. En dérivant par rapport à a_k, nous avons

$$0 = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial F_i}{\partial x'_h} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i}{\partial a_k},$$

ce qui est une identité, puisque les x n'y entrent plus. Multiplions par $\alpha_{\rho k}$ et sommons par rapport à l'indice k :

$$\sum_k \sum_h \frac{\partial F_i}{\partial x'_h} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \alpha_{\rho k} + \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial a_k} \alpha_{\rho k} = 0.$$

Retranchons membre à membre cette équation de l'équation (1); nous aurons

$$\sum_h \frac{\partial F_i}{\partial x'_h} \left\{ \xi_{\rho h}(x') - \sum_k \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \right\} = 0.$$

En faisant varier i de 1 à n, nous obtenons n équations linéaires homogènes entre les n^2 dérivées des F par rapport aux x'. Comme les coefficients mis entre parenthèses $\{\,\}$ ne dépendent pas de l'indice i, il s'ensuit qu'ils sont les mêmes dans toutes les n équations; le déterminant des coefficients de ces équations où nous regardons les $\{\,\}$ comme inconnues, qui n'est autre que le déterminant fonctionnel des F par rapport aux x', n'est pas identiquement nul; par conséquent les expressions susdites mises entre parenthèses sont nulles, et l'on a

$$\xi_{\rho h}(x') = \sum_k \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k};$$

la résolution de ces équations par rapport aux $\frac{\partial x'_h}{\partial a_k}$ donne

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_\rho \psi_{\rho k}(a)\, \xi_{\rho h}(x').$$

On conclut de là que, si les r transformations infinitésimales considérées satisfont aux conditions définies plus haut, on en déduit un système d'équations $x'_i = f_i(x, a)$ tel que les x' satisfont aux équations différentielles bien connues. Il est vrai que cela ne suffit pas, comme on sait, pour affirmer que ces équations finies définissent un groupe de transformations. Observons toutefois que nous pouvons choisir les intégrales indépendantes F_i de manière que, pour des valeurs arbitrairement choisies de r des variables, par exemple pour $a_1 = \overline{a_1}$, $a_2 = \overline{a_2}$, ..., $a_r = \overline{a_r}$, on ait

$$F_i(x', \overline{a}) = x'_i,$$

et, par suite,

$$f_i(x, \overline{a}) = x_i.$$

Donc l'ensemble des transformations considérées contient la transformation unité. Nous pouvons encore supposer les $\overline{a}$ choisis de telle sorte que le déterminant des ψ ne s'annule pas. Remarquons que, les f_i étant indépendants, il en est de même des F_i. En outre les a sont tous essentiels; en effet, les f ne satisfont pas à des relations de la forme

$$\sum_k \theta_k(a) \frac{\partial f_i}{\partial a_k} = 0,$$

attendu que, si elles y satisfaisaient, on aurait

$$\sum_k \theta_k(a) \sum_\rho \psi_{\rho k}(a) \xi_{\rho i}(x') = 0,$$

ou encore

$$\sum_\rho \xi_{\rho i}(x') \sum_k \theta_k(a) \psi_{\rho k}(a) = 0;$$

et puisque les Xf sont supposés indépendants, ces relations ne pourraient subsister que si l'on avait

$$\sum_k \theta_k(a) \psi_{\rho k}(a) = 0;$$

ces relations, à leur tour, ne peuvent subsister que si tous les θ sont nuls. D'où il suit que les a sont tous essentiels, comme nous l'avions affirmé. Tout cela étant établi, d'après la seconde partie du premier théorème fondamental, nous pouvons conclure que les équations $x'_i = f_i(x, a)$ représentent un groupe à r paramètres.

Partant, nous pouvons énoncer ce

Deuxième théorème fondamental. — *La condition nécessaire et suffisante pour que r transformations infinitésimales indépendantes* $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$ *engendrent un groupe de transformations à r paramètres essentiels, est qu'il existe entre elles* $r(r-1)$ *relations de la forme*

$$(X_h X_k)f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} X_s f \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, r;\ h \gtrless k),$$

où les c_{hks} *sont des constantes.*

Les constantes c_{hks}, dites *constantes de structure* du groupe, sont au nombre de r^3.

De ce que nous savons que $(X_h X_k)f = -(X_k X_h)f$, nous déduirons aussitôt

$$\sum_s c_{hks} X_s f = -\sum_s c_{khs} X_s f$$

ou

$$\sum_s (c_{hks} + c_{khs}) X_s f = 0,$$

et, puisque les Xf sont indépendants,

$$c_{hks} + c_{khs} = 0.$$

Pour trouver d'autres relations entre les c, partons de l'identité bien connue

$$\Big((X_i X_h), X_k\Big)f + \Big((X_h X_k), X_i\Big)f + \Big((X_k X_i), X_h\Big)f = 0;$$

le premier terme a pour expression

$$\left(\sum_s c_{ihs} X_s, X_k\right) = \sum_s c_{ihs}(X_s, X_k) = \sum_s c_{ihs} \sum_t c_{skt} X_t f,$$

et les deux autres termes se déduisent du premier par la permutation circulaire de i, h, k; ainsi :

$$\sum_{s,t}(c_{ihs}c_{skt}+c_{hks}c_{sit}+c_{kis}c_{skt})X_t f=0,$$

et, comme les Xf sont indépendants,

$$\sum_{s}(c_{ihs}c_{skt}+c_{hks}c_{sit}+c_{kis}c_{skt})=0.$$

Nous pouvons donc énoncer la *première partie* du

Troisième théorème fondamental. — *Les r^3 constantes c_{hks} de structure d'un groupe à r paramètres sont liées par les relations*

$$(A)\qquad c_{hks}+c_{khs}=0,$$

$$(B)\qquad \sum_{s=1}^{s=r}(c_{ihs}c_{skt}+c_{hks}c_{sit}+c_{kis}c_{sht})=0.$$

La seconde partie du théorème affirme que, étant données les r^3 constantes c_{hks} liées par les relations (A), (B), il existe toujours un groupe à r paramètres dont elles sont les constantes de structure; elle sera démontrée beaucoup plus loin (IIIe Partie, n° IX, *in fine*).

XII. — Transitivité et primitivité des groupes de transformations.

Soit un groupe de transformations défini par les équations $x'_i=f_i(x,a)$; ce groupe est dit *transitif* si, étant donné un système de valeurs x quelconques et un système de valeurs x' quelconques, il existe dans le groupe une transformation qui permette de passer du premier système au second. En utilisant le langage géométrique habituel, nous dirons qu'un groupe est transitif quand il comprend toujours une transformation permettant de passer d'un point quelconque à un autre point quelconque de l'espace à n dimensions.

Examinons les conditions à réaliser pour qu'un groupe soit transitif. Il faut que l'on ait $r\geqq n$ (c'est-à-dire que le nombre des paramètres a ne soit pas inférieur à celui des variables x), et qu'en outre les équations finies du groupe soient résolubles par rapport à n des paramètres. Une fois ces conditions vérifiées, nous pouvons exprimer les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en fonction des x, des x' et des autres paramètres $a_{n+1}, \ldots, a_r$, de telle sorte que, étant donnés les x et les x', la transformation correspondante sera déterminée au choix près des valeurs $a_{n+1}, \ldots, a_r$ qui restent arbitraires; ce choix fait, les valeurs de $a_1, \ldots, a_n$ se trouvent fixées par les équations finies du groupe. D'ailleurs, si le système n'était pas résoluble par rapport à n des a, on en pourrait déduire un certain nombre de relations indépendantes des a (entre les x et les x'), et les x, x' ne pourraient être pris arbitrairement. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe de transformations soit transitif est que le nombre des paramètres ne soit pas inférieur au nombre n des variables, et qu'en outre le système des équations finies du groupe soit résoluble par rapport à n de ces paramètres.

Si, en particulier, $r = n$, les $a_1, \ldots, a_n$ se trouvent exprimés en fonction des seuls x, x', et, pour tout système de valeurs x, x', il existe une seule transformation qui permette le passage des x aux x' : le groupe sera dit *simplement transitif*. De même le groupe sera dit deux fois, trois fois, etc. transitif, selon que le passage des valeurs x aux x' peut se faire par ∞, ∞^2, ... transformations.

Dans un groupe transitif, il existe toujours des transformations qui laissent invariant un point (système de valeurs des variables) : ou bien il y a la transformation identique si le groupe est simplement transitif, ou il y a une infinité de transformations qui conservent le point considéré si le groupe est plusieurs fois transitif.

Nous avons supposé le groupe donné par ses équations finies. Supposons-le donné maintenant par ses transformations infinitésimales

$$X_k f = \sum_k \xi_{kh} \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

et écrivons

$$x'_i = x_i + \frac{1}{1!} \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k \xi_{ki} + \ldots.$$

Le raisonnement fait plus haut est encore valable pour ces équations, et l'on voit que, pour que le groupe soit transitif, il faut qu'on ait $r \geqq n$, et que les équations soient résolubles par rapport aux τ; la matrice

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial x'_1}{\partial \tau_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial x'_n}{\partial \tau_r} \end{matrix} \right\|$$

devra donc avoir pour caractéristique n. Démontrons alors ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe considéré soit transitif est que l'on ait $r \geqq n$ et que la matrice

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \cdots & \xi_{rn} \end{matrix} \right\|$$

ait pour caractéristique n.

En effet, les ξ sont les valeurs des $\frac{\partial x'}{\partial \tau}$ quand $\tau_i = 0$; si donc la matrice (2) a n pour caractéristique, il en sera de même pour la matrice (1), et le groupe, comme on voit, sera transitif. Si, d'autre part, le groupe étant transitif, la matrice (2) a pour caractéristique $q < n$, la matrice (1) aura sa caractéristique $\geqq q$, et par suite ses mineurs d'ordre q ne seront pas tous nuls; il s'ensuit que le système des équations

$$x'_i = x_i + \frac{1}{1!} \sum \tau_k \xi_{ki} + \ldots$$

sera résoluble par rapport à q des paramètres τ. Nous pourrons donc former au plus $(n - q)$ relations entre les x et les x'. Observons alors que, d'après l'hypothèse faite sur la matrice (2), parmi les équations $X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$, il n'y en a que q qui soient indépendantes, soit $X_1 f = 0, \ldots, X_q f = 0$. D'après le second théorème fondamental, ce système d'équations est complet; il admet donc $(n - q)$ intégrales indépendantes : $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{n-q}(x)$. Comme $X_h \psi_k(x) = 0$, les fonctions $\psi_k(x)$ admettent toutes les transformations du groupe, c'est-à-dire que l'on a

$$(3)\qquad \psi_1(x') = \psi_1(x), \qquad \psi_2(x') = \psi_2(x), \qquad \ldots, \qquad \psi_{n-q}(x') = \psi_{n-q}(x).$$

On voit donc que les $(n-q)$ équations qui peuvent au plus exister, existent effectivement, de sorte que le groupe est sûrement intransitif, et notre assertion se trouve démontrée.

Les fonctions $\psi_1(x)$, ... $\psi_{n-q}(x)$ sont, comme on l'a dit précédemment, *invariantes* par rapport au groupe, et il n'y a que ces $(n-q)$ invariants. Géométriquement, cela veut dire que l'espace à n dimensions se trouve divisé en ∞^{n-q} espaces à q dimensions, représentés par les équations (3), chacun d'eux n'étant pas altéré par les transformations du groupe et prenant pour cette raison le nom de *variété invariante*.

Un groupe intransitif admet donc un certain nombre d'invariants qui fournissent une division de l'espace à n dimensions en ∞^{n-q} variétés à q dimensions, dont chacune est invariante par rapport au groupe.

Le théorème établi en dernier lieu peut encore s'énoncer ainsi :

Pour que le groupe à r paramètres engendré par les transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$ soit transitif, il faut et il suffit que l'on ait $r \geqq n$ et que les r équations $X_h f = 0$ soient indépendantes.

Il peut arriver qu'à un certain groupe corresponde une division de l'espace en ∞^{n-q} variétés à q dimensions, telle que ces variétés se changent les unes dans les autres par les transformations du groupe. Dans ce cas, le groupe est dit *imprimitif*. Tout groupe non imprimitif est dit *primitif*.

Évidemment *tout groupe intransitif est imprimitif*.

Soient

$$\varphi_1(x) = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-q}(x) = \text{const.}$$

les équations des variétés en question; on pourra déterminer un système complet

$$(4)\qquad Y_1 f = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_q f = 0$$

dont φ_1, ..., φ_{n-q} soient un système d'intégrales indépendantes.

Toute transformation du groupe change une intégrale du système (4) en une intégrale du même système; c'est-à-dire que le système (4) admet le groupe donné. Nous devons donc avoir, d'après nos résultats antérieurs, des relations de la forme

$$(Y_h X_k) f = \sum_s \psi_{hks} Y_s f.$$

L'existence d'un système complet (4) satisfaisant à des relations de cette forme est l'expression analytique de l'imprimitivité du groupe considéré.

XIII. — Variétés invariantes.

Si, à un point P de l'espace à n dimensions, on applique toutes les transformations d'un groupe G, on obtient une variété à r dimensions qui sera désignée par M_P. Soit P' un point quelconque de M_P; il existera une transformation S du groupe G telle que $P' = S(P)$. Si T est une autre transformation de G et que $P'' = T(P')$, on en déduit $P'' = ST(P)$. Mais ST est une transformation de G, et par conséquent P'' appartient à M_P; c'est-à-dire que *les transformations du groupe* G *changent les points de* M_P *en points de* M_P; ou encore que M_P *est une variété invariante par rapport à* G.

D'après cela, si nous désignons par G_P l'ensemble des transformations de G qui changent un certain point P en lui-même, G_P est évidemment un groupe contenant l'identité et l'inverse de chacune de ses transformations.

Si la transformation S *change le point* P *en un point* P', *toute transformation ayant la même propriété a la forme* TS, T *étant une transformation du groupe* G_P.

En effet, qu'une transformation TS possède cette propriété, la chose est évidente.

D'autre part, si V est une transformation qui change P en P', VS^{-1} laissera invariant le point P et sera par suite une certaine transformation T de G_p; conséquemment, $V = TS$ (C. Q. F. D.).

Il en résulte que :

S'il existe ∞^m transformations qui laissent invariant un point P, *et s'il existe une transformation changeant* P *en* P', *il existe ∞^m transformations changeant* P *en* P'.

S *étant une transformation qui change* P *en* P', *les transformations qui changent* P' *en lui-même sont exclusivement toutes les transformations de la forme* $S^{-1}TS$, *où* T *appartient à* G_p.

En effet, que $S^{-1}TS$ change P' en lui-même, c'est chose évidente. D'autre part, si V change P' en lui-même, SVS^{-1} change aussi P en lui-même, et par suite $SVS^{-1} = T$; donc $V = S^{-1}TS$ (C. Q. F. D.)

Il en résulte que :

S'il existe ∞^m transformations qui laissent invariant un point P, *et s'il existe une transformation changeant* P *en* P', *il existe ∞^m transformations laissant invariant le point* P'.

Par conséquent :

L'ensemble des points qui admettent ∞^m transformations en eux-mêmes, m étant un entier déterminé, constitue une variété invariante,

puisque, d'après les théorèmes précédents, les transformations du groupe changent toujours un de ces points en un autre de même nature.

La transformation $S^{-1}TS$ est dite la *transformée de* T *par* S. Si la transformation T change P en Q et si S change P en P', Q en Q', il est aisé de voir que la transformation $S^{-1}TS$ change P' en Q'; en effet S^{-1} change P' en P, T change P en Q et S change Q en Q'. Ainsi :

La transformée de T *par* S *permute les points de l'espace transformé au moyen de* S, *de la même manière que* T *permute les points correspondants de l'espace primitif.*

Si en particulier $S^{-1}TS = T$, il s'ensuit que $TS = ST$, et les deux transformations sont *permutables*.

Si nous avons une transformation $\overline{x}_i = f_i(x)$ que nous désignerons par T, et qu'aux variables qui y figurent nous appliquions la transformation $x'_i = \varphi_i(x)$, soit S, nous obtiendrons une nouvelle transformation $\overline{x}'_i = F_i(x')$, soit T', entre les variables x'_i et les $\overline{x}'_i$ définis par $\overline{x}'_i = \varphi_i(\overline{x})$. Il est facile de voir que $T' = S^{-1}TS$. En effet, avec les notations qu'on vient d'employer, si les x sont les coordonnées de P, les $\overline{x}$, x', $\overline{x}'$ sont respectivement celles des points Q, P', Q', et l'on reconnaît que T' change P' en Q'.

La détermination des variétés invariantes d'un groupe, défini par ses équations finies, se fait en éliminant les paramètres entre les équations du groupe. Si le groupe est donné par ses transformations infinitésimales indépendantes, le problème rentre comme cas particulier dans une question déjà résolue précédemment, à savoir celle qui consiste à trouver tous les systèmes d'équations admettant r transformations infinitésimales données.

XIV. — Systèmes invariants de transformations infinitésimales.

Un système de q transformations infinitésimales indépendantes

$$X_k f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

est dit *invariant* par rapport à une certaine transformation $x'_i = f_i(x)$, si, en désignant par $X'_k f$ les transformations infinitésimales écrites avec les nouvelles variables, on a

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k f = \sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k f,$$

les e'_k dépendant seulement des e_k.

On a d'ailleurs, en introduisant dans f les x' au lieu des x,

$$X_k f = \sum_{i=1}^{i=n} X_k x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i},$$

ou, en posant $X_k x'_i = \zeta_{ki}(x')$,

$$X_k f = \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

D'autre part

$$X'_k f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

On devra donc avoir

$$\sum_{k=1}^{k=q} e_k \zeta_{ki}(x') = \sum_{k=1}^{k=q} e'_k \xi_{ki}(x') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remplaçons, dans ces identités, les x' successivement par les q systèmes de variables

$$x'_{11}, \quad x'_{12}, \quad \ldots, \quad x'_{1n}; \quad x'_{21}, \quad x'_{22}, \quad \ldots, \quad x'_{2n}; \quad \ldots; \quad x'_{q1}, \quad \ldots, \quad x'_{qn}:$$

nous obtiendrons un système de nq équations. Désignons par $\xi'_{\mu ki}$ les ξ'_{ki} où, au lieu des x', on écrit les x'_μ. Comme on l'a démontré dans une autre occasion (n° VII), à cause de l'indépendance des transformations infinitésimales données, la matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi'_{111} & \cdots & \xi'_{11n} & \cdots & \xi'_{q11} & \cdots & \xi'_{q1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi'_{1q1} & \cdots & \xi'_{1qn} & \cdots & \xi'_{qq1} & \cdots & \xi'_{qqn} \end{Vmatrix}$$

a nécessairement pour caractéristique q, et par suite les nq équations formées contiennent au moins un système de q équations résolubles par rapport aux e'. On a donc

$$(2) \qquad e'_k = \sum_{h=1}^{h=q} \rho_{kh} e_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

les ρ étant indépendants des x'_i. Le déterminant des ρ n'est pas nul, parce que les équations doivent être résolubles par rapport aux e, les e et les e' figurant symétriquement dans la définition posée au début.

Dans le système des transformations $\sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k f$, il y en a au moins une qui se change en elle-même par la transformation $x'_i = f_i(x)$. Pour que ceci ait lieu, on doit avoir $e'_k = \omega e_k$, ω étant une quantité indéterminée pour le moment. Il en résulte que

$$\omega e_k = \sum_{h=1}^{h=q} \rho_{kh} e_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, q);$$

mais la coexistence de ces équations entraîne

$$\begin{vmatrix} \rho_{11} - \omega & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1q} \\ \rho_{21} & \rho_{22} - \omega & \cdots & \rho_{2q} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{q1} & \rho_{q2} & \cdots & \rho_{qq} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Toute racine ω de cette équation donnera lieu à une transformation infinitésimale qui se change en elle-même.

Supposons le système des Xf invariant par rapport à toutes les transformations du groupe à un paramètre Yf. Posons

$$Yf = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et par suite

$$Y x_i = \eta_i(x).$$

Nous avons

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1!} Y x_i + \ldots = x_i + \frac{t}{1!} \eta_i + \ldots.$$

Posons encore

$$\xi_{ki}(x') = \xi'_{ki}, \qquad X'_k f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi'_{ki} \frac{\partial f}{\partial x'_i}, \qquad \eta'_i = \eta_i(x');$$

nous aurons

$$X'_k x'_i = \xi'_{ki} = \xi_{ki} + \frac{t}{1!} Y \xi_{ki} + \ldots,$$
$$X'_k \eta'_i = X_k \eta_i + \ldots,$$

les termes omis contenant des puissances de t supérieures à celles figurant dans les termes écrits. Comme $-t$ est le paramètre de la transformation inverse, on a

$$x_i = x'_i - t\eta'_i + \ldots,$$
$$X'_k x_i = X'_k x'_i - t X'_k \eta'_i + \ldots = \xi_{ki} + t Y \xi_{ki} - t X_k \eta_i + \ldots,$$
$$X'_k x_i = \xi_{ki} + t(Y\xi_{ki} - X_k \eta_i) + \ldots.$$

Multipliant par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et sommant par rapport à i, on obtient

$$X'_k f = X_k f + t(YX_k)f + \ldots. \tag{3}$$

D'après cela, si toute transformation infinitésimale $X'_k f$ doit appartenir à l'ensemble $\sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k f$ pour une valeur quelconque de t, la transformation $(YX_k)f$ devra appartenir au même ensemble; on devra donc avoir

$$(YX_k)f = \sum_{i=1}^{i=q} g_{ki} X_i f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

les g étant des constantes.

Il reste à démontrer que ces conditions, trouvées nécessaires, sont aussi suffisantes.

Dérivons (3) par rapport à t. Comme nous n'avons pas déterminé la loi suivant laquelle procèdent les termes du développement du second membre, nous ne pouvons calculer cette dérivée directement. Aussi aurons-nous recours à un artifice; écrivons dans (3) $t + \tau$ au lieu de t, et cherchons le coefficient de la première puissance de τ; ce coefficient sera la dérivée demandée. A la valeur $t + \tau$ du paramètre correspondra une autre transformation $X'' f$ du groupe, laquelle sera le produit des deux transformations du même groupe correspondant aux valeurs t et τ du paramètre. Cette transformation peut donc s'écrire

$$X''_k f = X'_k f + \tau(YX'_k)f + \ldots,$$

en sorte que

$$\frac{\partial}{\partial t}(X'_k f) = (YX'_k)f = \sum_{i=1}^{i=q} g_{ki} X'_i f,$$

puisque l'équation (3), qui est une identité, subsiste évidemment encore si l'on écrit x' à la place de x.

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial}{\partial t}(e'_k X'_k f) = \frac{de'_k}{dt} X'_k f + e'_k \sum_{i=1}^{i=q} g_{ki} X'_i f,$$

et, en sommant par rapport à l'indice k, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k f = \sum_{k=1}^{k=q} \frac{de'_k}{dt} X'_k f + \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{i=1}^{i=q} e'_k g_{ki} X'_i f$$

ou

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k f = \sum_{k=1}^{k=q} X'_k f\left(\frac{de'_k}{dt} + \sum_{i=1}^{i=q} g_{ik} e'_i\right).$$

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires, linéaires, homogènes, à coefficients constants

$$(5) \qquad \frac{de'_k}{dt} + \sum_{i=1}^{i=q} g_{ik} e'_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

On sait que l'intégrale générale de ce système peut être mise sous la forme

$$(6) \qquad e'_k = \sum_{i=1}^{i=q} e_i \rho_{ki}(t),$$

où e_i est la valeur que prend e'_i pour $t = 0$. Si dans (4) nous remplaçons les e'_k par les expressions (6), il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k f = 0,$$

et par suite

$$\sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k f = \text{const.};$$

mettons dans le second membre, à la place de la constante, la valeur que prend le premier membre pour $t = 0$, et nous aurons enfin

$$\sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k f = \sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k f,$$

relation qui justifie notre assertion.

Si, dans les équations (6), nous regardons les e comme un système de variables primitives, les e' comme le système des variables transformées, et t comme un paramètre, ces équations (6) représentent les transformations d'un groupe à un paramètre, transformations de forme spéciale, puisque les seconds membres de ces équations sont linéaires. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont

$$\sum_i g_{ik} \frac{\partial f}{\partial e_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Nous avons ainsi démontré ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de transformations infinitésimales indépendantes

$$X_k f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

admette toutes les transformations du groupe à un paramètre défini par la transformation infinitésimale Yf, *est que l'on ait les relations*

$$(YX_k)f = \sum_{i=1}^{q} g_{ki} X_i f,$$

où les g_{ik} *sont des constantes.*

On déduit de là cet autre théorème :

Si un système de transformations infinitésimales indépendantes admet les groupes à un paramètre définis par les transformations infinitésimales $Y_1 f, Y_2 f, \ldots, Y_q f$, *ce système admettra tous les groupes définis par les transformations infinitésimales* $c_1 Y_1 f + c_2 Y_2 f + \ldots + c_q Y_q f$, *où les* c *sont des constantes quelconques.*

En effet, pour le cas des deux groupes seulement, $Y_1 f$, $Y_2 f$, on voit que $(Y_1, X_k)f$ sera, d'après l'hypothèse faite, une fonction linéaire des $X_i f$, et il en sera de même pour $c_1(Y_1, X_k)f$; on peut dire la même chose à l'égard de $c_2(Y_2, X_k)f$. Il en résulte que $(c_1 Y_1 + c_2 Y_2, X_k)f$ sera une fonction linéaire des $X_i f$, ce qui démontre notre assertion. La démonstration se généralise aisément.

On a encore ce théorème :

Si un système de transformations infinitésimales indépen-

dantes admet les groupes définis par les transformations infinitésimales $Y_1 f$, $Y_2 f$, *ce système admettra aussi le groupe défini par* $(Y_1, Y_2) f$.

Écrivons, en effet, l'identité connue

$$\Big((Y_1 Y_2), X_k\Big) f + \Big((Y_2 X_k), Y_1\Big) f + \Big((X_k Y_1), Y_2\Big) f = 0,$$

où, d'après l'hypothèse faite, $(Y_2, X_k) f$ et $(X_k Y_1) f$ sont des fonctions linéaires des X ; si donc on combine la première parenthèse avec Y_1 et la seconde avec Y_2, on trouve que le second et le troisième terme de l'identité sont des fonctions linéaires des X ; il en sera par suite de même du premier terme de l'identité, et le théorème se trouve démontré.

Quand un système de transformations infinitésimales admet toutes les transformations d'un groupe à un paramètre, nous dirons qu'il *admet* la transformation infinitésimale génératrice du groupe. Avec cette locution, les derniers théorèmes démontrés peuvent être énoncés différemment. Par exemple, on peut dire :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de transformations infinitésimales indépendantes

$$X_k f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

admette une transformation infinitésimale Yf, *est que l'on ait les relations*

$$(Y_1 X_k) f = \sum_{i=1}^{i=q} g_{ki} X_i f,$$

où les g_{ki} *sont des constantes.*

De même pour les deux autres théorèmes.

Supposons que la transformation Yf appartienne au système donné ; alors elle est elle-même une fonction linéaire des Xf :

$$Yf = \sum_{h=1}^{h=q} c_h X_h f,$$

et l'on a, d'après le théorème démontré :

$$\left(\sum_{h=1}^{h=q} c_h X_h, X_k\right) f = \sum_{i=1}^{i=q} g_{ki} X_i f,$$

ou

$$\sum_{h=1}^{h=q} c_h (X_h, X_k) f = \sum_{i=1}^{i=q} g_{ki} X_i f.$$

Si, en particulier, le système admet toutes ses propres transformations infinitésimales, toutes les $(X_h, X_k) f$ devront être des fonctions linéaires des Xf, et réciproquement. Ainsi :

Pour qu'un système de transformations infinitésimales admette toutes ses propres transformations, il faut et il suffit que les combinaisons par parenthèses des transformations du système soient exprimables linéairement au moyen de ces mêmes transformations, c'est-à-dire encore que ces transformations soient aptes à engendrer un groupe.

Des résultats obtenus au n° VI, il suit qu'une transformation infinitésimale, par un changement de variables, se change en une autre transformation infinitésimale; et il est clair que toute transformation du groupe à un paramètre engendrée par la première se change en celle des transformations du groupe engendré par la seconde, pour laquelle le paramètre a la même valeur. Si donc l'ensemble des ∞^{q-1} transformations infinitésimales $\sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k f$ se change en lui-même par une transformation donnée, il en résulte que, par la même transformation, on change en lui-même l'ensemble des ∞^q transformations finies constituant les ∞^{q-1} groupes à un paramètre engendrés par $\sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k f$. Puisque la transformation infinitésimale $\sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k f$ se change en une autre $\sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k f$, où les e' sont fonctions des e, la transformation

$$\bar{x}_i = x_i + t \sum_{k=1}^{k=q} e_k X_k x_i + \ldots \tag{7}$$

se changera en cette autre

$$(8) \qquad \overline{x'_i} = x'_i + t \sum_{k=1}^{k=q} e'_k X'_k x'_i + \ldots;$$

c'est-à-dire que, si $te_k = \tau_k$ sont les paramètres de la transformation (7), $te'_k = \tau'_k$ seront ceux de la transformation (8), les τ'_k étant liés aux τ_k par les mêmes relations qui lient les e'_k aux e_k.

Supposons, en particulier, $q = 1$; l'équation (2) donne $e' = e$, et, par suite, on a $\tau' = \tau$.

D'après cela, étant donné un groupe à un paramètre Xf, soit à trouver la condition pour que ses transformations soient invariantes par rapport aux transformations d'un autre groupe à un paramètre Yf et aussi permutables avec ces dernières transformations. Nous savons que e', comme fonction de t, doit satisfaire aux équations (5), qui, dans le cas actuel, se réduisent à une seule

$$\frac{de'}{dt} + ge' = 0;$$

d'autre part $e' = e$; donc $\frac{de'}{dt} = 0$ et, par suite, $g = 0$; d'où

$$(Y, X)f = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, les transformations des deux groupes sont permutables, parce que, si $g = 0$, il s'ensuit $\frac{de'}{dt} = 0$, et $e' = \text{const} = e$.

En appelant *permutables* deux transformations infinitésimales Xf, Yf entre lesquelles a lieu la relation $(Y, X)f = 0$, nous pouvons conclure par ce théorème :

Pour que les transformations de deux groupes à un paramètre soient permutables, il faut et il suffit que les transformations infinitésimales de ces deux groupes soient permutables.

XV. — Groupe adjoint.

Nous savons que, si les transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$ sont aptes à engendrer un groupe à r paramètres,

on a

$$(1) \qquad (X_h, X_k)f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} X_s f,$$

et le système des Xf est invariant par rapport aux transformations du même groupe.

Soient $x'_i = f_i(x, a)$ les équations finies du groupe à r paramètres défini par les Xf. Appliquons à une transformation infinitésimale $\sum_{k=1}^{k=r} e_k X_k f$ la transformation finie du groupe relative aux valeurs a des paramètres; les coefficients e' de la transformation infinitésimale transformée $\sum_{h=1}^{h=r} e'_k X'_k f$ seront liés aux e par les relations

$$e'_k = \sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(a).e_h,$$

où l'on a écrit $\rho_{kh}(a)$ pour mettre en évidence que les coefficients ρ dépendent des paramètres a.

A la transformée ainsi obtenue, appliquons la transformation relative aux valeurs b des paramètres; nous aurons d'une manière analogue

$$e''_k = \sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(b) e'_h.$$

Puisque le produit de ces deux transformations donne une transformation du même groupe relative aux valeurs c des paramètres, définies par $c_i = \varphi(a, b)$, nous aurons :

$$e''_k = \sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(c) e_h.$$

Ainsi

$$\sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(c).e_h = \sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(b).e'_h = \sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(b) \sum_{i=1}^{i=r} \rho_{hi}(a) e_i$$

ou

$$\sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(c).e_h = \sum_{i,h} \rho_{hi}(a) \rho_{kh}(b) e_i;$$

on en déduit

$$\rho_{ki}(c) = \rho_{ki}[\varphi(a, b)] = \sum_{h=1}^{h=r} \rho_{kh}(b)\rho_{hi}(a).$$

On voit donc qu'à toute transformation du groupe correspond une transformation linéaire des e, et que, de plus, ces transformations linéaires forment un groupe. A côté de notre groupe à r paramètres, nous avons donc cet autre groupe à r paramètres, qui est dit *groupe adjoint* du premier. Mais les r paramètres du groupe adjoint sont-ils aussi tous essentiels ? C'est ce que nous allons maintenant examiner.

Tout d'abord, observons que le *groupe adjoint contient la transformation identique*.

En effet, puisque la transformation 1 existe dans le premier groupe, il doit y avoir un système de valeurs a des paramètres tels que $e'_k = e_k$, comme on voulait l'établir.

Comme le système considéré est invariant par rapport à tous ses éléments, on a, quels que soient les λ,

$$\left(\sum_s \lambda_s X_s, X_t\right) f = \sum_h g_{th} X_h f,$$

ou

$$\sum_s \lambda_t (X_s, X_t) f = \sum_h g_{th} X_h f.$$

D'autre part, il résulte de (1) que

$$\sum_s \lambda_s (X_s, X_t) f = \sum_{s,h} \lambda_s c_{sth} X_h f;$$

d'où, par comparaison

$$g_{th} = \sum_s \lambda_s c_{sth} = -\sum_s \lambda_s c_{tsh}.$$

Cela étant, les équations (5) du n° XIV donnent

$$(2) \qquad \frac{de'_k}{dt} = \sum_{is} \lambda_s c_{isk} e'_i.$$

Soient alors $E_1 f, \ldots, E_r f$ les transformations infinitésimales du groupe adjoint : écrivons

$$\mathrm{E}_s f = \sum_{k=1}^{k=r} \eta_{sk}(e) \frac{\partial f}{\partial e_k}.$$

Considérons le groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale

$$\sum_s \lambda_s \mathrm{E}_s f = \sum_{s,k} \lambda_s \eta_{sk}(e) \frac{\partial f}{\partial e_k},$$

transformation que nous indiquerons, pour abréger, par le symbole

$$\mathrm{G}f = \sum_k \zeta_k(\lambda, e) \frac{\partial f}{\partial e_k}.$$

Nous savons que (n° V)

$$\frac{de'_k}{dt} = \mathrm{G}e'_k = \zeta_k(\lambda, e') = \sum_s \lambda_s \eta_{sk}(e').$$

Par comparaison avec (2), on obtient

$$\eta_{sk}(e') = \sum_i c_{isk} e'_i,$$

et, en écrivant e' à la place de e :

$$\eta_{sk}(e) = \sum_i c_{isk} e_i;$$

donc

$$\mathrm{E}_s f = \sum_k \frac{\partial f}{\partial e_k} \sum_i c_{isk} e_i.$$

Mais nous savons que ces transformations infinitésimales engendrent un groupe ; calculons donc les parenthèses

$$(\mathrm{E}_k, \mathrm{E}_l) f = \sum_{s=1}^{s=r} (\mathrm{E}_k \eta_{ls} - \mathrm{E}_l \eta_{ks}) \frac{\partial f}{\partial e_s}.$$

On a

$$\mathrm{E}_k \eta_{ls} = \mathrm{E}_k \sum_i c_{ils} e_i = \sum_h \eta_{kh} \frac{\partial}{\partial e_k} \sum_i c_{ils} e_i = \sum_h \eta_{kh} c_{hls} = \sum_{i,h} c_{ikh} c_{hls} e_i.$$

De même

$$E_l \eta_{ks} = \sum_{i,h} c_{ilh} c_{hks} e_i.$$

Par suite

$$(E_k, E_l)f = \sum_s \frac{\partial f}{\partial e_s} \sum_{i,h} e_i (c_{ikh} c_{hls} - c_{ilh} c_{hks}).$$

Rappelons-nous maintenant que les nombres c sont liés par deux systèmes de relations, dont le second est

$$\sum_h (c_{\alpha\beta h} c_{h\gamma\delta} + c_{\beta\gamma h} c_{h\alpha\delta} + c_{\gamma\alpha h} c_{h\beta\delta}) = 0.$$

Dans le cas présent, remplaçons α, β, γ, δ respectivement par i, k, l, s :

$$\sum_h (c_{ikh} c_{hls} + c_{klh} c_{his} + c_{lih} c_{hks}) = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte du premier système de relations entre les c,

$$\sum_h (c_{ikh} c_{hls} - c_{klh} c_{ihs} - c_{ilh} c_{hks}) = 0;$$

d'où

$$\sum_h (c_{ikh} c_{hls} - c_{ilh} c_{hks}) = \sum_h c_{klh} c_{ihs}.$$

Ainsi

$$(E_k, E_l)f = \sum_s \frac{\partial f}{\partial e_s} \sum_{ih} e_i c_{klh} c_{ihs} = \sum_h c_{klh} \sum_{is} e_i c_{ihs} \frac{\partial f}{\partial e_s} = \sum_h c_{klh} E_h f,$$

et cette relation montre que *les nombres c sont les mêmes pour le groupe donné et pour son adjoint.*

Cela posé, revenons à notre question :

Dans quel cas les r paramètres du groupe adjoint sont-ils tous essentiels?

Préalablement, donnons une définition : une transformation infinitésimale d'un groupe est dite *singulière* (en allemand *ausgezeichnete,* distinguée) quand elle est permutable à toutes les transformations infinitésimales du groupe.

Supposons alors que, dans le groupe que nous considérons, il existe une transformation singulière

$$\sum_k p_k X_k f. \tag{3}$$

On devra avoir

$$\left(\sum_k p_k X_k,\ X_h\right) f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Mais on a

$$\left(\sum_k p_k X_k,\ X_h\right) f = \sum_k p_k (X_k,\ X_h) f = \sum_k p_k \sum_s c_{khs} X_s f;$$

donc

$$\sum_{k,s} p_k c_{khs} X_s f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r). \tag{4}$$

Telle est la condition nécessaire pour que la transformation (3) soit singulière, et, comme nous avons supposé les Xf indépendants, il s'ensuit que l'existence des relations (4) entraîne

$$\sum_k p_k c_{khs} = 0 \qquad (h, s = 1, 2, \ldots, r)$$

et aussi

$$\sum_k p_k c_{hks} = 0 \qquad (h, s = 1, 2, \ldots, r).$$

Multiplions ces relations par $e_h \frac{\partial f}{\partial e_s}$ et sommons par rapport à h et à s; il vient

$$\sum_k p_k \sum_{h,s} c_{hks} e_h \frac{\partial f}{\partial e_s} = 0$$

ou bien

$$\sum_k p_k E_k f = 0. \tag{5}$$

Donc à toute transformation singulière du premier groupe correspond une relation linéaire entre les E. Par suite, plus il y a de transformations singulières dans le groupe, moins il y a de paramètres essentiels dans le groupe adjoint. Si, par exemple, les transformations singulières sont supposées en nombre m, le groupe adjoint contiendra au plus $(r - m)$ paramètres essentiels $(m < r)$. Nous allons démontrer que le nombre de ces paramètres est précisément $(r - m)$. Il suffira pour cela d'établir que, réciproquement, à toute relation linéaire entre les E correspond une transformation singulière du premier groupe. En effet, si la relation (5) est identiquement vérifiée, on aura

$$\sum_k p_k \sum_{h,s} \frac{\partial f}{\partial e_s} c_{hks} e_h = 0,$$

d'où

$$\sum_{k,h} p_k c_{hks} e_h = 0,$$

quel que soit e_h; par suite

$$\sum_k p_k c_{hks} = 0,$$

ce qui établit notre assertion. Nous pouvons donc conclure :

Si le groupe donné contient m transformations singulières indépendantes, le nombre des paramètres essentiels du groupe adjoint est $(r - m)$.

Au sujet des transformations singulières, on peut démontrer que :

Si les deux transformations $Y_1 f$, $Y_2 f$ sont singulières, la transformation $(Y_1, Y_2) f$ est aussi singulière.

En effet, on a, en désignant par Xf une transformation infinitésimale quelconque du groupe,

$$\Big((Y_1 Y_2), X\Big) f + \Big((Y_2 X), Y_1\Big) f + \Big((X Y_1), Y_2\Big) f = 0.$$

Or

$$(Y_2, X) f = 0, \qquad (X, Y_1) f = 0.$$

Donc

$$\Big((Y_1 Y_2), X\Big) f = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Soient alors $Y_1 f$, $Y_2 f$, ..., $Y_m f$ les m transformations singulières indépendantes que contient le groupe considéré; toute parenthèse $(Y_h, Y_k)f$, étant encore une transformation singulière, sera une combinaison linéaire de $Y_1 f, \ldots, Y_m f$, et le système des équations différentielles

$$Y_1 f = 0, \qquad Y_2 f = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_m f = 0$$

sera complet. Mais ce système admet (n° X) toutes les transformations infinitésimales du groupe, puisque $(Y_h, X)f = 0$; donc (n° XII) le groupe est imprimitif. Ainsi :

Un groupe primitif ne contient pas de transformation singulière, et son groupe adjoint contient r paramètres essentiels.

La réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie.

XVI. — Structure des groupes de transformations. Isomorphisme.

On appelle *structure* (en allemand *zusammensetzung*) d'un groupe de transformations l'ensemble des propriétés dues au nombre des paramètres essentiels et aux valeurs des constantes de structure c. C'est ainsi que deux groupes ayant ces constantes en commun et ayant le même nombre de paramètres sont dits d'*égale structure*.

Observons qu'un même groupe a une infinité de structures différentes. Le choix des transformations infinitésimales indépendantes qui doivent engendrer le groupe peut se faire d'une infinité de manières différentes. Soient $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$ les transformations correspondant à un certain choix; $Z_1 f, Z_2 f, \ldots, Z_r f$ celles correspondant à un autre choix; on a

$$Z_i f = \sum_{k=1}^{k=r} \lambda_{ik} X_k f$$

et le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{r1} & \ldots & \lambda_{rr} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul. Par suite

$$(Z_i, Z_h)f = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{hl}(X_k, X_l)f = \sum_{k,l,s} \lambda_{ik}\lambda_{hl}c_{kls}X_s f.$$

Mais on a

$$(Z_i, Z_h)f = \sum_t c'_{iht}Z_t f;$$

par suite

$$(1) \qquad \sum_t c'_{iht}Z_t f = \sum_{k,l,s} \lambda_{ik}\lambda_{hl}c_{kls}X_s f.$$

Comme nous voulons déterminer les c', exprimons les Xf au moyen des Zf; nous avons

$$X_k f = \frac{1}{D}\sum_t \frac{\partial D}{\partial \lambda_{tk}} Z_t f,$$

et conséquemment

$$\sum_t c'_{iht}Z_t f = \frac{1}{D}\sum_{k,l,s,t} \lambda_{ik}\lambda_{hl}c_{kls}\frac{\partial D}{\partial \lambda_{ts}} Z_t f.$$

Puisque les Zf sont, par hypothèse, indépendants, il s'ensuit que

$$(2) \qquad c'_{iht} = \frac{1}{D}\sum_{k,l,s} \lambda_{ik}\lambda_{hl}\frac{\partial D}{\partial \lambda_{ts}} c_{kls},$$

en sorte que les c' sont des fonctions linéaires des c.

On peut parvenir à ce résultat en suivant une autre voie. Si, dans (1), nous substituons aux Zf leurs expressions au moyen des Xf, et si nous égalons les coefficients des termes semblables en $X_s f$, nous avons successivement

$$\sum_{t,s} c'_{iht}\lambda_{ts}X_s f = \sum_{k,l,s} \lambda_{ik}\lambda_{hl}c_{kls}X_s f,$$

$$\sum_t \lambda_{ts}c'_{iht} = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{hl}c_{kls},$$

et ce ne sont là que les relations précédentes écrites sous une forme différente.

Il peut arriver que les c soient les mêmes pour des groupes n'ayant pas le même nombre de paramètres essentiels. Ainsi nous avons vu qu'un groupe à r paramètres et son groupe adjoint ont les mêmes c, tandis que le dernier n'a pas toujours r paramètres essentiels.

Soit, en général, un groupe à r paramètres et un autre à $(r-q)$ paramètres, ces paramètres étant essentiels. Supposons choisies r transformations infinitésimales du second groupe, telles qu'on ait, en les désignant par Yf,

$$(Y_h, Y_k)f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} Y_s f,$$

les c étant les constantes de structure du premier groupe dont nous désignons, comme d'ordinaire, par Xf les transformations infinitésimales. Quand la chose est possible, les deux groupes sont dits *isomorphes*.

A toute transformation infinitésimale Xf du premier groupe en correspond une Yf du second, et, en général, à la transformation $e_1 X_1 f + \ldots + e_r X_r f$ du premier groupe, correspond la transformation $e_1 Y_1 f + \ldots + e_r Y_r f$ du second. En outre, si l'on prend deux transformations $X_1 f$, $X_2 f$ du premier groupe et les transformations correspondantes $Y_1 f$, $Y_2 f$ du second, à la transformation $(X_1, X_2)f$ correspond la transformation $(Y_1, Y_2)f$.

Réciproquement, à toute transformation du second groupe n'en correspond-il qu'une seule du premier groupe? La réponse est affirmative si $q = 0$, c'est-à-dire si le nombre des paramètres essentiels du second groupe est r; elle est négative dans les autres cas. Ainsi, si les paramètres essentiels du second groupe sont au nombre de $(r-q)$, il existe entre les r transformations Yf les q relations

$$P_1 f \equiv \sum_{i=1}^{i=r} h_{1i} Y_i f = 0; \qquad \ldots, \qquad P_q f \equiv \sum_{i=1}^{i=r} h_{qi} Y_i f = 0,$$

de sorte qu'une transformation du second groupe ne s'écrit pas d'une seule manière $\sum_{i=1}^{i=r} e_i Y_i f$, mais de ∞^q manières

$$e_1 Y_1 f + \ldots + e_r Y_r f + \lambda_1 P_1 f + \ldots + \lambda_q P_q f,$$

les λ étant quelconques. A toute manière d'écrire ces transformations du second groupe, ou à tout système de valeurs des λ correspond une transformation différente du premier groupe.

Le premier isomorphisme, c'est-à-dire celui pour lequel à chaque transformation du second groupe n'en correspond qu'une bien déterminée du premier groupe, est dit *isomorphisme holoédrique*. Le second isomorphisme est dit *mériédrique*.

Un groupe de transformations et son adjoint sont *holoédriquement isomorphes* si tous deux ont r paramètres essentiels (ainsi qu'il arrive en particulier quand le premier groupe est primitif); ils sont au contraire *mériédriquement isomorphes* si l'adjoint n'a que $(r - q)$ paramètres essentiels ($q > 0$).

Rappelons que nous avons trouvé pour le groupe adjoint les relations

$$E_k f = \sum_{h,s} c_{hks} e_h \frac{\partial f}{\partial e_s}; \qquad (E_h E_k) f = \sum_s c_{hks} E_s f.$$

Pour établir ces relations, nous ne nous sommes servi que des propriétés des c. Ce groupe adjoint est donc adjoint à tous les groupes isomorphes au premier.

C'est aussi des c que dépend le fait que l'isomorphisme est holoédrique ou mériédrique. En effet, si le premier groupe contient une transformation singulière, on a corrélativement un certain nombre de relations $\sum_k e_k c_{hks} = 0$; dans ce cas le groupe adjoint contient moins de r paramètres essentiels, et l'isomorphisme est mériédrique.

On voit que des c doit dépendre le nombre des paramètres essentiels du groupe adjoint.

Pour que ce nombre soit égal à r, c'est-à-dire pour que l'isomorphisme soit holoédrique, il faut qu'il n'existe entre les c aucune relation de l'espèce de celles écrites en dernier lieu, et que les déterminants de la matrice formée avec r^2 lignes quelconques telles que

$$c_{h1s}, \quad c_{h2s}, \quad \ldots, \quad c_{hrs}$$

soient différents de zéro.

Nous avons vu qu'un même groupe peut être engendré par une infinité de systèmes différents de transformations infinitésimales.

Partons d'abord des transformations Xf, passons aux transformations Zf et désignons par c, c' les constantes de structure respectives, par λ les coefficients relatifs au passage. Supposons maintenant qu'on passe d'une manière analogue des transformations Zf aux transformations Tf, et désignons par c'' les nouvelles constantes de structure, par λ' les coefficients relatifs à ce second passage. Nous avons

$$\sum_t \lambda'_{ts} c''_{iht} = \sum_{k,l} \lambda'_{ik} \lambda'_{hl} c'_{kls}.$$

Multiplions par λ_{su} et sommons par rapport à s

$$\sum_{t,s} \lambda'_{ts} \lambda_{su} c''_{iht} = \sum_{k,l,s} \lambda'_{ik} \lambda'_{hl} \lambda_{su} c'_{kls}.$$

D'une manière analogue nous avons

$$\sum_s \lambda_{su} c'_{kls} = \sum_{p,q} \lambda_{kp} \lambda_{lq} c_{pqu},$$

et, par suite,

$$\sum_{t,s} \lambda'_{ts} \lambda_{su} c''_{iht} = \sum_{k,l,p,q} \lambda'_{ik} \lambda'_{hl} \lambda_{kp} \lambda_{lq} c_{pqu}.$$

Posons

$$\sum_s \lambda'_{ts} \lambda_{su} = \lambda''_{tu};$$

nous avons

$$\sum_t \lambda''_{tu} c''_{iht} = \sum_{p,q} \lambda''_{ip} \lambda''_{hq} c_{pqu},$$

relation qui coïncide avec la première où les λ seraient remplacés par les λ''. Elle exprime qu'en composant deux passages (celui des Xf aux Zf et celui des Zf aux Tf) on obtient un autre passage analogue (celui des Xf aux Tf). Les transformations qui s'opèrent ainsi entre les constantes c constituent donc un groupe linéaire.

En se basant sur la seconde partie du troisième théorème fondamental, il est aisé de démontrer que si les c satisfont aux deux systèmes connus de relations (A), (B) du n° XI (p. 67), les c' satisfont aussi à ces systèmes.

En effet, les c satisfaisant à ces systèmes, il existe un groupe dont les c sont les constantes de structure; mais alors les c' constituent un autre système de constantes relatives au même groupe, et par suite les c' satisfont aux mêmes relations.

On peut aussi donner de ce fait une démonstration directe.

D'après (2), on a

$$c'_{hit} = \frac{1}{D}\sum_{k,l,s}\lambda_{hk}\lambda_{il}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{ts}}c_{kls} = \frac{1}{D}\sum_{k,l,s}\lambda_{hl}\lambda_{ik}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{ts}}c_{lks};$$

par comparaison avec (2), on en déduit, en vertu de (A),

$$c'_{iht} + c'_{hit} = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (A) relative aux c'.

De (2) il résulte encore que

$$c'_{\alpha\beta s}c'_{s\gamma\delta} = \frac{1}{D^2}\sum_{k,l,m,n,p,q}\lambda_{\alpha k}\lambda_{\beta l}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{sm}}c_{klm}\lambda_{sn}\lambda_{\gamma p}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{\delta q}}c_{npq};$$

de même

$$c'_{\beta\gamma s}c'_{s\alpha\delta} = \frac{1}{D^2}\sum_{k,l,m,n,p,q}\lambda_{\beta k}\lambda_{\gamma l}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{sm}}c_{klm}\lambda_{sn}\lambda_{\alpha p}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{\delta q}}c_{npq},$$

que nous pouvons écrire en mettant l, p, k au lieu de k, l, p,

$$c'_{\beta\gamma s}c'_{s\alpha\delta} = \frac{1}{D^2}\sum_{k,l,m,n,p,q}\lambda_{\beta l}\lambda_{\gamma p}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{sm}}c_{lpm}\lambda_{sn}\lambda_{\alpha k}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{\delta q}}c_{nkq};$$

finalement

$$c'_{\gamma\alpha s}c'_{s\beta\delta} = \frac{1}{D^2}\sum_{k,l,m,n,p,q}\lambda_{\gamma k}\lambda_{\alpha l}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{sm}}c_{klm}\lambda_{sn}\lambda_{\beta p}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{\delta q}}c_{npq},$$

que nous pouvons écrire en mettant p, k, l au lieu de k, l, p,

$$c'_{\gamma\alpha s}c'_{s\beta\delta} = \frac{1}{D^2}\sum_{k,l,m,n,p,q}\lambda_{\gamma p}\lambda_{\alpha k}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{sm}}c_{pkm}\lambda_{sn}\lambda_{\beta l}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{\delta q}}c_{nlq}.$$

Ajoutons membre à membre et sommons par rapport à s :

$$\sum_{s}(c'_{\alpha\beta s}c'_{s\gamma\delta} + c'_{\beta\gamma s}c'_{s\alpha\delta} + c'_{\gamma\alpha s}c'_{s\beta\delta})$$
$$= \frac{1}{D^2}\sum_{k,l,m,n,p,q,s}\lambda_{\alpha k}\lambda_{\beta l}\lambda_{\gamma p}\lambda_{sn}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{sm}}\frac{\partial D}{\partial\lambda_{\delta q}}(c_{klm}c_{npq} + c_{lpm}c_{nkq} + c_{pkm}c_{nlq}).$$

Or $\sum_s \frac{\partial D}{\partial \lambda_{sm}} \lambda_{sn}$ est égale à zéro si $m \neq n$, et égale à D si $n = m$; le second membre devient donc

$$\frac{1}{D} \sum_{k,l,p,q} \lambda_{\alpha k} \lambda_{\beta l} \lambda_{\gamma p} \frac{\partial D}{\partial \lambda_{sq}} \sum_m (c_{klm} c_{mpq} + c_{lpm} c_{mkq} + c_{pkm} c_{mlq});$$

mais, par hypothèse, la dernière somme $\sum_m (\ldots)$ est nulle. Il vient donc

$$\sum_s (c'_{\alpha\beta s} c'_{s\gamma\delta} + c'_{\beta\gamma s} c'_{s\alpha\delta} + c'_{\gamma\alpha s} c'_{s\beta\delta}) = 0,$$

et cette relation est l'équation (B) relative aux c'.

XVII. — Retour aux variétés invariantes.

Revenons à notre langage géométrique habituel et considérons les r^3 constantes c_{iks} comme les coordonnées d'un point dans un espace à r^3 dimensions. Les points de la variété M dont les équations sont les relations connues (A), (B) entre les c donnent exclusivement tous les systèmes de valeurs a auxquels correspondent des groupes à r paramètres entre les x. Deux points de M représentent deux structures différentes d'un même groupe toutes les fois (et alors seulement) qu'il existe une transformation du groupe des c permettant de passer de l'un à l'autre de ces points.

En appliquant à un point toutes les transformations du groupe des c, on obtient un ensemble d'autres points qui forment une *variété invariante* par rapport à ce groupe. Un tel ensemble est en outre une variété invariante minima ou irréductible, aucune de ses parties n'étant invariante par rapport à toutes les transformations du groupe. Ses points représentent tous les systèmes de valeurs c qui correspondent à un même groupe entre les x; et, en prenant un point de chaque variété invariante, on aura un ensemble de points qui représentent toutes les structures possibles des groupes à r paramètres essentiels, sans que deux points représentent des structures appartenant à un même groupe.

Comme on l'a vu au n° XIII, les variétés invariantes s'obtiennent rien que par des éliminations, quand on donne, comme dans le cas actuel, les équations finies du groupe; il est donc possible de trouver algébriquement toutes les structures possibles des groupes à un nombre donné de paramètres essentiels.

Nous avons vu que, si deux groupes sont mériédriquement isomorphes, tandis qu'à toute transformation infinitésimale du premier n'en correspond qu'une du second, à une transformation du second correspondent ∞^q transformations du premier. Nous voulons démontrer que :

Les ∞^q transformations du premier groupe correspondant à la transformation identique du second forment un groupe.

En effet, en multipliant entre elles deux des ∞^q transformations susdites, on doit obtenir une transformation à laquelle correspond dans le second groupe le produit de l'unité par elle-même, c'est-à-dire qu'on doit obtenir une des ∞^q transformations susdites, comme il fallait l'établir.

Un groupe contenu dans un autre est dit *sous-groupe* de celui-ci.

Étant donnés un groupe G *et un de ses sous-groupes* H, *les transformées des éléments de* H *par une même transformation quelconque de* G *forment un sous-groupe,* qui est dit *transformé de* H.

Soient, en effet, T et T′ deux transformations de H, et S une transformation de G; les deux transformées seront $S^{-1}TS$ et $S^{-1}T'S$; nous aurons pour leur produit $S^{-1}TT'S$, qui est à son tour la transformée par S d'une transformation TT′ de H, ce qui démontre notre assertion.

Si un sous-groupe possède cette propriété que, en le transformant par une transformation quelconque du groupe, on obtienne toujours le même sous-groupe, ce sous-groupe est dit *singulier*.

Le sous-groupe, constitué par toutes les transformations d'un groupe qui, dans le cas de l'isomorphisme mériédrique, correspondent à l'identité de l'autre groupe, est singulier.

Soient G, G′ les groupes, K le sous-groupe considéré du premier groupe. Soit S une transformation de K et U une transformation quelconque de G; à U correspondra dans G′ une transformation V. En transformant S par U, nous avons la transformation $U^{-1}SU$, à laquelle correspond dans G′ la transformation $V^{-1}\,1\,V$, c'est-à-dire l'unité, ce qui revient à dire que la transformation $U^{-1}SU$ appartient, comme S, à K, comme il fallait l'établir.

Le même résultat peut s'obtenir analytiquement de la manière suivante. Puisqu'il s'agit de groupes mériédriquement isomorphes, entre les transformations Yf du second groupe existent q relations linéaires à coefficients constants, relations qui peuvent être résolues par rapport à q de ces Yf, de manière à avoir

$$Y_{r-q+t}f = \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} Y_i f \qquad (t = 1, 2, \ldots, q).$$

Les transformations infinitésimales du sous-groupe K sont

$$\left(X_{r-q+t} - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} X_i\right) f \qquad (t = 1, 2, \ldots, q).$$

Leurs transformées par une transformation infinitésimale quelconque $X_l f$ du groupe sont

$$\begin{aligned}\left(X_l, X_{r-q+t} - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} X_i\right) f &= (X_l, X_{r-q+t}) f - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} (X_l X_i) f \\ &= \sum_{s=1}^{s=r} c_{l,r-q+t,s} X_s f - \sum_{i=1}^{i=r-q} \sum_{s=1}^{s=r} e_{ti} c_{lis} X_s f \\ &= \sum_{s=1}^{s=r} \left(c_{l,r-q+t,s} - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} c_{lis}\right) X_s f \\ &= \sum_{s=1}^{s=r} \theta_{lts} X_s f,\end{aligned}$$

en posant

$$\theta_{lts} = c_{l,r-q+t,s} - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} c_{lis}.$$

Nous pouvons encore écrire

$$\left(X_l, X_{r-q+t} - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} X_i\right) f = \sum_{s=1}^{s=r-q} \theta_{lts} X_s f + \sum_{s=r-q+1}^{s=r} \theta_{lts} X_s f$$
$$= \sum_{s=1}^{s=r-q} \theta_{lts} X_s f + \sum_{s=1}^{s=q} \theta_{l,t,r-q+s} X_{r-q+s} f.$$

Ajoutons et retranchons au second membre le terme

$$\sum_{s=1}^{s=q} \theta_{l,t,r-q+s} \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{si} X_i f;$$

nous aurons un ensemble de quatre termes dont nous réunirons, d'une part, le premier et le troisième

$$\sum_{s=1}^{s=r-q} X_s f \left(\theta_{lts} + \sum_{i=1}^{i=q} \theta_{l,t,r-q+i} e_{is}\right),$$

et, d'autre part, le second et le quatrième

$$\sum_{s=1}^{s=q} \theta_{l,t,r-q+s} \left(X_{r-q+s} f - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{si} X_i f\right).$$

D'une manière analogue, en partant de

$$\left(Y_l, Y_{r-q+t} - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} Y_i\right) f,$$

et en posant

$$\sigma_{lts} = \theta_{lts} + \sum_{i=1}^{i=q} \theta_{l,t,r-q+i} e_{is},$$

on trouve que cette expression est égale à

$$\sum_{s=1}^{s=r-q} \sigma_{lts} Y_s f + \sum_{s=1}^{s=q} \theta_{l,t,r-q+s} \left(Y_{r-q+s} f - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{si} Y_i f\right);$$

le second terme est nul, en sorte qu'il reste

$$\sum_{s=1}^{s=r-q} \sigma_{lts} Y_s f,$$

expression qui doit être égale à zéro, puisque

$$Y_{r-q+t}f - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} Y_i f = 0.$$

Comme cette expression est linéaire homogène en $Y_1 f$, $Y_2 f$, ..., $Y_{r-q} f$, qui sont supposées indépendants, il s'ensuit que tous les σ doivent être nuls. Nous avons alors

$$\left(X_l, X_{r-q+t} - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{ti} X_i\right) f = \sum_{s=1}^{s=q} \theta_{l,t,r-q+s} \left(X_{r-q+s} f - \sum_{i=1}^{i=r-q} e_{si} X_i f\right),$$

ce qui justifie notre assertion.

Supposons, en particulier, que le groupe défini par $X_1 f$, ..., $X_r f$ soit *imprimitif*. Il donne lieu à une division de l'espace à n dimensions en ∞^{n-q} variétés à q dimensions représentées par les équations

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad u_{n-q} = \text{const.},$$

les u formant un système d'intégrales indépendantes d'un certain système complet qui admet les transformations infinitésimales $X_h f$. Il s'ensuit (n° X) que les $X_k u_i$ doivent être intégrales du système; donc

$$X_k u_i = \omega_{ki}(u).$$

Introduisons un système de transformations infinitésimales entre les u, défini par

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{i=n-q} \omega_{ki} \frac{\partial f}{\partial u_i};$$

on a

$$Z_k u_i = \omega_{ki} = X_k u_i,$$

$$Z_k \omega_{hi}(u) = \sum_{s=1}^{s=n-q} \frac{\partial \omega_{hi}}{\partial u_s} Z_k u_s = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial \omega_{hi}}{\partial u_s} X_k u_s.$$

Nous avons ensuite

$$X_k \omega_{hi} = \sum_{s=1}^{s=n-q} \frac{\partial \omega_{hi}}{\partial u_s} X_k u_s;$$

d'où

$$X_k \omega_{hi} = Z_k \omega_{hi}.$$

Formons les combinaisons habituelles par parenthèses

$$(Z_h, Z_k)f = \sum_{i=1}^{i=n-q} (Z_h \omega_{ki} - Z_k \omega_{hi}) \frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{i=n-q} (X_h \omega_{ki} - X_k \omega_{hi}) \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Or nous savons que

$$(X_h, X_k) u_i = X_h X_k u_i - X_k X_h u_i = X_h \omega_{ki} - X_k \omega_{hi}.$$

En outre

$$(X_h, X_k) f = \sum_s c_{hks} X_s f;$$

par suite

$$(X_h, X_k) u_i = \sum_s c_{hks} X_s u_i = \sum_s c_{hks} Z_s u_i.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}(Z_h, Z_k) f &= \sum_{i=1}^{i=n-q} \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} Z_s u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n-q} \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} \omega_{si} \frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} \sum_{i=1}^{i=n-q} \omega_{si} \frac{\partial f}{\partial u_i},\end{aligned}$$

ou

$$(Z_h, Z_k) f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} Z_s f;$$

ceci montre que les constantes c sont, pour le nouveau groupe, les mêmes que pour le premier, et prouve, par suite, que les deux groupes sont isomorphes. Ce nouveau groupe, engendré par les Zf, est celui des permutations entre les précédentes variétés à q dimensions, correspondant aux transformations du groupe donné.

XVIII. — Similitude des groupes de transformations.

Deux groupes, ayant le même nombre n de variables et le même nombre r de paramètres, définis par les équations finies

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= f_i(x, a) \\ y'_i &= \varphi_i(y, b) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sont dits *semblables*, quand un changement des variables et des paramètres permet de passer du premier groupe au second groupe.

Supposons semblables les deux groupes donnés; soient

$$(1)\qquad y_i = \psi_i(x), \qquad b_k = \beta_k(a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r)$$

les relations par lesquelles on passe de l'un à l'autre. Soient

$$X_k f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

r transformations infinitésimales du premier groupe; ses transformations finies pourront être mises sous la *forme canonique*

$$x'_i = x_i + \frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{k=r} \tau_k X_k x_i + \ldots,$$

les τ étant liés aux a par des relations déterminées : $a_k = \theta_k(\tau)$.

Il en résulte en général

$$\psi_j(x') = \psi_j(x) + \frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{k=r} \tau_k X_k \psi_j(x) + \ldots$$

ou

$$y'_i = y_j + \frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{k=r} \tau_k X_k y_j + \ldots.$$

Or, si, en vertu des premières équations (1), on a

$$F(x) \equiv G(y),$$

il s'ensuit que

$$X_k F = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial G}{\partial y_j} X_k y_j = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial G}{\partial y_j} \eta_{kj}(y) = Y_k G,$$

η_{kj} étant la fonction des y qui s'obtient en introduisant dans $X_k \psi_j(x)$ les y au lieu des x. On a donc

$$(2)\qquad y'_j = y_j + \frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{k=r} \tau_k Y_k y_i + \ldots.$$

Si dans ces relations nous substituons les b aux τ au moyen des relations

$$b_k = \beta_k[\theta(\tau)],$$

nous devons trouver les équations du second groupe. Mais ceci revient à dire que les équations (2) sont les équations canoniques du second groupe; et il en résulte que les $Y_k f$ sont r transformations infinitésimales indépendantes de ce second groupe.

Réciproquement, si r transformations infinitésimales indépendantes d'un groupe peuvent, moyennant un changement convenable de variables, se changer en autant de transformations d'un autre groupe à un même nombre de paramètres, les deux groupes sont semblables, parce que leurs équations canoniques se changent les unes dans les autres; et les transformations correspondantes des deux groupes sont celles pour lesquelles les paramètres ont les mêmes valeurs. Donc :

Deux groupes à un même nombre n de variables et r de paramètres sont semblables lorsqu'on peut transformer, par l'introduction de nouvelles variables, r transformations infinitésimales indépendantes de l'un des groupes en autant de telles transformations de l'autre groupe, et alors seulement.

Observons encore que (comme il est facile de le reconnaître), si $X_h f$, $X_k f$ se changent en $Y_h f$, $Y_k f$, $(X_k, X_h)f$ se change en $(Y_h, Y_k)f$; si donc, on a

$$(X_h, X_k)f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} X_s f,$$

il s'ensuit que

$$(Y_h, Y_k)f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{hks} Y_s f.$$

Donc : *Si deux groupes à un même nombre de paramètres et de variables sont semblables, ils sont d'égale structure.*

Supposons maintenant les groupes définis par deux systèmes de transformations infinitésimales indépendantes $X_k f$, $Z_k f$. Admettons que les deux groupes soient d'égale structure, ce qui est une condition nécessaire pour la similitude, et demandons-nous quelles autres conditions doivent être vérifiées pour que les deux groupes soient semblables.

Soit $Y_k f$ la transformation du second groupe en laquelle se change $X_k f$ par le changement de variables qui fait passer de l'un à l'autre groupe; les $Y_k f$ doivent être des fonctions linéaires des $Z_k f$:

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{j=r} g_{kj} Z_j f.$$

En outre, si q des Xf sont liés aux autres par des relations linéaires (à coefficients variables)

$$X_{r-q+k} f = \sum_{s=1}^{s=r-q} \varphi_{ks}(x) X_s f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

il doit en être de même pour les Yf :

$$Y_{r-q+k} f = \sum_{s=1}^{s=r-q} \psi_{ks}(y) Y_s f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

avec les relations

$$\varphi_{ks}(x) = \psi_{ks}(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q;\ s = 1, 2, \ldots, r-q).$$

Toutes ces conditions, qui se sont trouvées nécessaires pour que les groupes considérés soient semblables, sont aussi suffisantes.

Cette seconde partie se démontre en construisant effectivement la transformation qui permet de passer du premier groupe (celui des Xf) au second (celui des Yf) quand on suppose satisfaites les conditions énoncées. A cet effet, il y a lieu de distinguer deux cas : celui dans lequel il n'existe entre les Xf aucune relation linéaire à coefficients variables (dépendant des x), et celui dans lequel il existe de telles relations. Nous nous limiterons, pour abréger, à considérer le premier cas, renvoyant pour le second à l'Ouvrage de Lie.

Soient encore

$$(3) \qquad y_i = \Phi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations qui définissent la transformation que nous voulons construire; elles doivent être résolubles par rapport aux x. Nous avons déjà trouvé

$$Y_k y_i = X_k \Phi_i.$$

Posons alors, d'une manière générale,

$$X_k f + Y_k f = \Omega_k f;$$

la transformation Ωf sera une transformation à $2n$ variables, et l'on aura

$$\Omega_k y_i = \mathrm{Y}_k y_i; \qquad \Omega_k \Phi_i = \mathrm{X}_k \Phi_i;$$

par suite

$$\Omega_k(y_i - \Phi_i) = 0,$$

ce qui exprime que le système d'équations cherché (3) doit admettre les transformations $\Omega_k f$.

Il est clair que, réciproquement, un système d'équations satisfaisant à cette condition (et résoluble par rapport aux deux systèmes de variables) permet le passage de l'un à l'autre groupe. Formons les combinaisons ordinaires

$$(\Omega_h, \Omega_k)f = (\mathrm{X}_h, \mathrm{X}_k)f + (\mathrm{X}_h, \mathrm{Y}_k)f + (\mathrm{Y}_h, \mathrm{X}_k)f + (\mathrm{Y}_h, \mathrm{Y}_k)f;$$

or

$$(\mathrm{X}_h, \mathrm{Y}_k)f = 0, \qquad (\mathrm{Y}_h, \mathrm{X}_k)f = 0,$$

puisque les $\mathrm{X}f$, $\mathrm{Y}f$ portent sur des variables différentes; donc

$$\begin{aligned}(\Omega_h, \Omega_k)f &= (\mathrm{X}_h, \mathrm{X}_k)f + (\mathrm{Y}_h, \mathrm{Y}_k)f \\ &= \sum_s c_{hks}\mathrm{X}_s f + \sum_s c_{hks}\mathrm{Y}_s f = \sum_s c_{hks}\Omega_s f.\end{aligned}$$

En outre, les Ωf sont indépendantes, parce que, si elles ne l'étaient pas, les $\mathrm{X}f$ et les $\mathrm{Y}f$ ne le seraient pas davantage; elles donnent donc naissance à un groupe à r paramètres, holoédriquement isomorphe au groupe des $\mathrm{X}f$ et à celui des $\mathrm{Y}f$. Les équations $\Omega_1 f = 0, \ldots, \Omega_r f = 0$ forment un système complet à r éléments et à $2n$ variables; ce système a $(2n - r)$ intégrales indépendantes. Si nous considérons alors le système complet $\mathrm{X}_1 f = 0$, $\mathrm{X}_2 f = 0, \ldots, \mathrm{X}_r f = 0$, il admet $(n - r)$ intégrales indépendantes que nous désignerons par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$, et qui sont aussi intégrales du système complet précédent. Par conséquent $(n - r)$ des $(2n - r)$ intégrales peuvent être prises comme autant de fonctions des seuls x. Semblablement, $(n - r)$ autres intégrales peuvent être prises comme autant de fonctions des seuls y. Il ne manque que r autres intégrales qui seront fonctions des x et des y et que nous appellerons $w_1, w_2, \ldots, w_r$.

Or nous savons (n° IX) que les systèmes d'équations qui admettent un certain système de r transformations infinitésimales peuvent se diviser en deux classes, suivant que les équations n'entraînent pas ou entraînent la nullité de tous les mineurs d'ordre r de la matrice formée avec les coefficients des transformations. Dans notre cas, cette matrice est

$$\left\|\begin{matrix} \xi_{11}(x) & \dots & \xi_{1n}(x) & \eta_{11}(y) & \dots & \eta_{1n}(y) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \xi_{r1}(x) & \dots & \xi_{rn}(x) & \eta_{r1}(y) & \dots & \eta_{rn}(y) \end{matrix}\right\|;$$

en outre, comme nous avons supposé qu'il n'existe aucune relation linéaire entre les $X_k f$, on a nécessairement $r \leqq n$; donc la matrice contient des mineurs d'ordre r dépendant seulement des x. Si donc ces mineurs devaient s'annuler en vertu du système cherché, ce système ne devrait contenir que des relations entre les x. En d'autres termes, un système comme celui que nous cherchons, ne pouvant contenir que des relations entre les x, est nécessairement de la première classe. On l'obtient donc, sous sa forme générale, en égalant à zéro n intégrales du système complet $\Omega_k f = 0$. On pourra l'écrire, par exemple, avec la seule condition que les $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-r}$ soient indépendants

$$\begin{aligned} v_1 &= \theta_1(u_1, \dots, u_{n-r}), & \dots, \quad & v_{n-r} = \theta_{n-r}(u_1, \dots, u_{n-r}), \\ w_1 &= \omega_1(u_1, \dots, u_{n-r}), & \dots, \quad & w_r = \omega_r(u_1, \dots, u_{n-r}). \end{aligned}$$

Dès lors, notre assertion se trouve justifiée, pour le cas considéré.

XIX. — Groupe paramétrique.

Étant données trois transformations S, T, U définies respectivement par

$$x'_i = f_i(x), \qquad x''_i = g_i(x'), \qquad x'''_i = h_i(x''),$$

pour former ST nous devrons éliminer les x' entre les deux premiers systèmes, et pour avoir ST.U nous devrons éliminer les x'' entre le résultat obtenu et le troisième système; d'une manière analogue, pour former TU, nous devons éliminer les x'' entre les deux derniers systèmes et pour avoir ensuite S.TU nous devons éliminer les x' entre le résultat obtenu et le premier système. Le résultat final sera le même dans les deux cas, parce que ce sera celui qu'on obtiendrait en éliminant les x', x'' entre toutes les équations données. Donc

$$ST.U = S.TU,$$

c'est-à-dire que : *le produit de plusieurs transformations jouit de la propriété associative.*

Soient en particulier S, T, U trois transformations du même groupe défini par $x'_i = f_i(x, a)$;

$$(S)\, x'_i = f_i(x, a); \qquad (T)\, x''_i = f_i(x', b); \qquad (U)\, x'''_i = f_i(x'', c).$$

Puisqu'elles appartiennent à un groupe, nous aurons, en faisant le produit ST,

$$x''_i = f_i[x, \varphi(a, b)];$$

et par suite le produit ST.U sera défini par

$$x'''_i = f_i\{x, \varphi[\varphi(a, b), c]\}.$$

De même, le produit S.TU sera donné par

$$x'''_i = f_i\{x, \varphi[a, \varphi(b, c)]\}.$$

Puisque ST.U = S.TU, il résulte de là que

$$(1) \qquad \varphi_k[\varphi(a, b), c] = \varphi_k[a, \varphi(b, c)].$$

Posons alors $\varphi(a, b) = a'$, en sorte que la transformation ST soit donnée par $x''_i = f_i(x, a')$, et considérons les r équations

$$a'_k = \varphi_k(a, b) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

comme représentant un ensemble de transformations dans lesquelles les a soient les variables et les b les paramètres. Cet ensemble contient, comme on voit, r paramètres essentiels, et il est facile de prouver qu'il constitue un groupe. En effet, en multipliant entre elles deux transformations de l'ensemble, $a'_k = \varphi_k(a, b)$ et $a''_k = \varphi_k(a', c)$, on obtient

$$a''_k = \varphi_k[\varphi(a, b), c],$$

ou, en tenant compte de (1)

$$(2) \qquad a''_k = \varphi_k[a, \varphi(b, c)],$$

et cette transformation appartient au même ensemble. (C. Q. F. D.)

De plus, ce groupe est *simplement transitif,* parce que (n° XII) le nombre des paramètres est égal à celui des variables, et le système des équations qui définissent le groupe est résoluble par rapport aux paramètres (n° II). Ce groupe est appelé *groupe paramétrique* du groupe donné. Il est en outre son propre groupe paramétrique, puisque les φ sont les mêmes pour lui et pour le groupe donné, comme on le voit d'après (2).

Cherchons maintenant les r transformations infinitésimales indépendantes de ce groupe. Rappelons que (n° IV)

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_\rho \xi_{\rho h}(x')\,\psi_{\rho k}(a); \qquad \xi_{\rho h}(x') = \sum_k \alpha_{\rho k}(a)\,\frac{\partial x'_h}{\partial a_k};$$

$$\psi_{\rho k}(a) = \left(\frac{\partial b_\rho}{\partial a_k}\right)_{b=\beta}; \qquad \alpha_{\rho k}(a) = \left(\frac{\partial a_k}{\partial b_\rho}\right)_{b=\beta}; \qquad \xi_{\rho h}(x') = \left(\frac{\partial x'_h}{\partial b_\rho}\right)_{b=\beta}.$$

Pour le groupe paramétrique, on a des relations analogues, dans lesquelles nous désignerons par $\bar{\alpha}(a)$ les fonctions qui remplacent les $\xi(x)$, les ψ étant les mêmes que dans le premier système, puisque les φ ont, pour le nouveau groupe, la même forme que pour le groupe primitif :

$$\frac{\partial a'_h}{\partial b_k} = \sum_\rho \overline{\alpha_{\rho h}}(a')\,\psi_{\rho k}(b); \qquad \overline{\alpha_{\rho h}}(a') = \sum_k \alpha_{\rho k}(b)\,\frac{\partial a'_h}{\partial b_k};$$

$$\overline{\alpha_{\rho k}}(a') = \left(\frac{\partial a'_h}{d b_\rho}\right)_{b=\beta}.$$

Par comparaison, on voit que $\bar{\alpha} = \alpha$, de sorte que nous pouvons supprimer dans les formules précédentes la barre mise au-dessus des α. De plus, de même qu'on a formé précédemment les

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

de même, dans le cas actuel, pouvons-nous former d'une manière analogue les transformations infinitésimales du groupe paramétrique

$$A_k f = \sum_i \alpha_{ki}(a)\,\frac{\partial f}{\partial a_i},$$

transformations qui sont au nombre de r. Nous pouvons aussi vérifier que ces transformations sont indépendantes, puisque, entre les ξ (nº IV) et, par suite, entre les α, il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants. Nous avons déjà rencontré ces transformations infinitésimales au nº XI, et nous avons trouvé

$$(A_h, A_k)f = \sum_s c_{hks} A_s f;$$

si donc nous tenons compte de ce que le groupe paramétrique est à r paramètres essentiels, nous pouvons conclure de là que le groupe paramétrique est holoédriquement isomorphe au groupe donné.

Étant donné un groupe, pour trouver les équations finies de son groupe paramétrique, on procède ainsi : on écrit le système complet des équations différentielles de l'intégration duquel résultent les équations finies du groupe, c'est-à-dire le système

$$X'_k f + A_k f = 0,$$

qui, dans notre cas, est

$$A'_k f + A_k f = 0,$$

ou

$$\sum_i \alpha_{ki}(a') \frac{\partial f}{\partial a'_i} + \sum_i \alpha_{ki}(b) \frac{\partial f}{\partial b_i} = 0.$$

Nous avons là un système de r équations à $2r$ variables, qui admettra par suite r intégrales indépendantes, $a_h = V_h(a', b)$, et dont nous tirerons les a' en fonction des a et des b.

Recherchons dans quels cas il peut arriver que deux groupes de transformations aient le même groupe paramétrique.

Observons d'abord que le groupe paramétrique n'est pas parfaitement déterminé, parce que nous pouvons introduire à la place des a des paramètres g liés aux premiers par les relations $g_i = \lambda_i(a)$, et obtenir ainsi un autre groupe paramétrique.

Ces groupes sont semblables entre eux.

Deux groupes ayant le même groupe paramétrique sont holoédriquement isomorphes, puisque chacun d'eux est holoédriquement isomorphe au groupe paramétrique commun.

Réciproquement, supposons holoédriquement isomorphes deux groupes engendrés respectivement par les transformations infinitésimales $X_k f$, $Y_k f$. Prenons un groupe $A_k f$ à r variables a_i, holoédriquement isomorphe au groupe des $X_k f$ (nous avons vu au nº XI comment un tel groupe peut être construit). Cherchons n intégrales indépendantes $F_i(x', a)$ du système complet

$$X'_k f + A_k f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

et n intégrales indépendantes $G_i(y', a)$ du système complet

$$Y'_k f + A_k f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

[$X'_k f$, $Y'_k f$ désignant respectivement $X_k f$, $Y_k f$ où les variables sont accentuées]. Résolvons les systèmes d'équations

$$x_i = F_i(x', a), \qquad y_i = G_i(y', a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous obtiendrons les équations

$$x'_i = f_i(x_i, a), \qquad y'_i = g_i(y_i, a),$$

qui représentent les deux groupes considérés, tandis que les $A_k f$ seront les transformations infinitésimales génératrices du groupe paramétrique de l'un comme de l'autre groupe. Donc :

Deux groupes ont le même groupe paramétrique lorsqu'ils sont holoédriquement isomorphes et alors seulement.

XX. — Systèmes invariants de variétés.

Un système de ∞^m variétés à n variables et à q dimensions est représenté par $(n - q)$ équations contenant m paramètres

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 \ (x_1, x_2, \ldots, x_n, l_1, l_2, \ldots, l_m) = 0, \\
&\Omega_2 \ (x_1, x_2, \ldots, x_n, l_1, l_2, \ldots, l_m) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\Omega_{n-q}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l_1, l_2, \ldots, l_m) = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons besoin de reconnaître sous quelles conditions un tel système d'équations représente effectivement ∞^m variétés, c'est-à-dire sous quelles conditions les m paramètres sont essentiels.

Une première condition est qu'on ne puisse éliminer les variables x entre les équations, parce qu'autrement il existerait des relations entre les paramètres, et ceux-ci pourraient être réduits à un nombre moindre. Il faut donc qu'on puisse écrire

$$\begin{aligned} x_{q+1} &= \psi_{q+1}(x_1, x_2, \ldots, x_q, l_1, l_2, \ldots, l_m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \psi_n\ (x_1, x_2, \ldots, x_q, l_1, l_2, \ldots, l_m). \end{aligned}$$

On sait (n° I) que, quand on a moins de m fonctions de m variables, on peut trouver une équation aux dérivées partielles, linéaire homogène, dont ces fonctions soient des intégrales. Si donc on peut grouper les l en fonctions $\varphi_1(l), \ldots, \varphi_{m'}(l)$, avec $m' < m$, c'est-à-dire si les équations données peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} V_1\ &(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1(l), \ldots, \varphi_{m'}(l)) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{n-q}&(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1(l), \ldots, \varphi_{m'}(l)) = 0, \end{aligned}$$

les $\varphi(l)$ seront intégrales d'une certaine équation

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} L_i(l)\frac{\partial f}{\partial l_i} = 0.$$

Alors les V seront aussi intégrales de cette équation, et, puisque les Ω sont exprimables en fonction des V, il s'ensuit que les Ω sont à leur tour intégrales de (1). Ainsi, si les m paramètres ne sont pas tous essentiels, les Ω satisfont à l'équation (1) dont les coefficients sont indépendants des x.

Réciproquement, supposons que les Ω satisfassent à (1); puisque cette équation (1) a $(m-1)$ intégrales indépendantes que nous pouvons désigner par $\varphi_1(l), \ldots, \varphi_{m-1}(l)$, toutes ses autres intégrales, et en particulier les Ω, sont fonctions des φ :

$$\Omega_h(x_1, \ldots, x_n, l_1, \ldots, l_n) = V_h[x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(l), \ldots, \varphi_{m-1}(l)];$$

les Ω se changent donc en fonctions contenant moins de m paramètres, et par suite les m paramètres l ne sont pas tous essentiels.

Ainsi se trouve établi le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les m paramètres l ne soient pas tous essentiels, est que les Ω regardés *comme fonctions des l satisfassent à une équation linéaire homogène aux dérivées partielles, à coefficients dépendant des l seulement.*

Ceci posé, admettons que les m paramètres soient tous essentiels. Considérons la transformation

$$x'_i = f_i(x), \tag{2}$$

que nous supposons laisser invariant le système de nos équations. Introduisons alors, au lieu des x, les x', et résolvons le système par rapport à $(n-q)$ des x'; nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} x'_{q+1} = \omega_{q+1}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_q, l_1, l_2, \ldots, l_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n \ \ = \omega_n \ \ (x'_1, x'_2, \ldots, x'_q, l_1, l_2, \ldots, l_m). \end{array}\right. \tag{3}$$

Si nous imposons à notre système de rester invariant par rapport à la transformation (2), les équations (3) doivent être de la forme suivante

$$\begin{array}{l} x'_{q+1} = \psi_{q+1}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_q, l'_1, l'_2, \ldots, l'_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n \ \ = \psi_n \ \ (x'_1, x'_2, \ldots, x'_q, l'_1, l'_2, \ldots, l'_m), \end{array}$$

où les l' sont des fonctions convenables des l; les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_{q+1}(x'_1, \ldots, x'_q, l'_1, \ldots, l'_m) = \omega_{q+1}(x'_1, \ldots, x'_q, l_1, \ldots, l_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_n \ \ (x'_1, \ldots, x'_q, l'_1, \ldots, l'_m) = \omega_n \ \ (x'_1, \ldots, x'_q, l_1, \ldots, l_m) \end{array}\right. \tag{4}$$

doivent donc être vérifiées quels que soient les x'.

De ce système doivent par suite résulter m relations entre les l et les l', relations résolubles aussi bien par rapport aux l' que par rapport aux l. Si nous les mettons sous la forme

$$l'_1 = \lambda_1(l), \qquad \ldots, \qquad l'_m = \lambda_m(l),$$

elles représentent une transformation portant sur les variables l. Nous avons donc cette conclusion :

Un système de ∞^m variétés

$$\Omega_i(x_1, \ldots, x_n; \ l_1, \ldots, l_m) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-q) \tag{5}$$

admet la transformation

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

toutes les fois (*et alors seulement*) *que l'on peut associer à cette transformation entre les x une transformation entre les l*

$$l'_j = \lambda_j(l_1, \ldots, l_m) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

telle que le système des équations (5) *à $n+m$ variables x, l, admette la transformation* (6), (7).

Géométriquement, si les l sont regardés comme les coordonnées de chacune des variétés, les équations (7) représentent les permutations qui se produisent entre les variétés du système (5) par l'effet de la transformation (6).

Il est évident que *toutes les transformations qui laissent invariant un système de variétés constituent un groupe.*

Soit alors un système de variétés invariant par rapport à un groupe à un seul paramètre, défini, par exemple, par

$$Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et dont la transformation finie générale soit

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a).$$

A une transformation $x'_i = f_i(x, a)$ du groupe correspond, comme on l'a vu, une transformation des l que nous pouvons désigner par

$$l'_j = \lambda_j(l_1, l_2, \ldots, l_m, a) = \lambda_j(l, a).$$

Appliquons une autre transformation du groupe consécutivement à la première

$$x''_i = f_i(x', b) = f_i[f(x, a), b];$$

corrélativement nous aurons

$$l''_j = \lambda_j(l', b) = \lambda_j[\lambda(l, a), b].$$

Puisque le produit des deux transformations est à son tour une transformation du groupe, nous avons

$$x''_i = f_i(x, c),$$

où $c = \varphi(a, b)$; par suite, corrélativement,

$$l''_j = \lambda_j(l, c) = \lambda_j[\lambda(l, a), b].$$

De là nous déduisons que les transformations $l'_j = \lambda_j(l, a)$ constituent aussi un groupe à un paramètre (qui peut, dans des cas particuliers, se réduire à la seule transformation identique, à savoir quand chacune des variétés du système est invariante par rapport au groupe considéré).

Le système des équations

$$(8) \quad x'_i = f_i(x, a), \qquad l'_j = \lambda_j(l, a) \qquad (i = 1, 2, \ldots n; j = 1, 2, \ldots m)$$

représente un groupe à $(n+m)$ variables et à un paramètre (le paramètre a), et le système donné d'équations entre les $(m+n)$ variables x et l est invariant par rapport à ce groupe.

Nous pouvons donner une autre forme à ce que nous venons de dire.

Le groupe à un paramètre (8) contient une transformation infinitésimale qui sera

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=m} \omega_i(l)\frac{\partial f}{\partial l_i} = \mathrm{X}f + \mathrm{L}f.$$

Au lieu de dire que le système d'équations (5) admet le groupe (8), on peut dire (n° IX) qu'il admet la transformation infinitésimale (9). Posons alors la définition suivante : on dit qu'un système de ∞^m variétés (5) *admet* une transformation infinitésimale $\mathrm{X}f$, s'il existe une transformation infinitésimale $\mathrm{L}f$ entre les l telle que le système d'équations (5) entre les variables x, l admette la transformation infinitésimale $\mathrm{X}f + \mathrm{L}f$. Nous pourrons dire que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de variétés admette les transformations d'un groupe à un paramètre, est que ce système admette la transformation infinitésimale du groupe.

Demandons-nous maintenant si, étant donnée la transformation Xf, la transformation Lf est parfaitement déterminée. Si, par exemple, à la même Xf correspondaient deux Lf, soit L_1f et L_2f, on aurait

$$(Xf+L_1f)-(Xf+L_2f)=L_1f-L_2f,$$

qui serait une transformation infinitésimale indépendante des x; les Ω seraient alors intégrales de l'équation $L_1f-L_2f=0$, ce qui est impossible, les paramètres l étant essentiels. Par suite à la transformation Xf correspond une seule transformation Lf.

De plus, si le système considéré admet les deux transformations infinitésimales X_1f, X_2f, auxquelles correspondent respectivement les transformations L_1f et L_2f, nous aurons

$$(X_1f+L_1f)+(X_2f+L_2f)=(X_1f+X_2f)+(L_1f+L_2f);$$

c'est-à-dire que le système de variétés admet la transformation X_1f+X_2f à laquelle correspond la transformation L_1f+L_2f. En généralisant, on obtient ce résultat :

Si le système de variétés admet les transformations infinitésimales X_1f, X_2f, *auxquelles correspondent les transformations* L_1f, L_2f, *ordinairement le système admettra aussi la transformation infinitésimale* $c_1X_1f+c_2X_2f$ *à laquelle correspondra la transformation* $c_1L_1f+c_2L_2f$.

Ce théorème peut s'étendre au cas de plus de deux transformations Xf. En outre, si notre système admet les transformations X_1f, X_2f, en construisant la combinaison habituelle par parenthèses, nous avons

$$(X_1+L_1,\ X_2+L_2)f=(X_1,\ X_2)f+(L_1,\ L_2)f,$$

d'où l'on conclut que :

Si le système admet les transformations X_1f, X_2f, *il admettra aussi la transformation* $(X_1,\ X_2)f$, *à laquelle correspondra la transformation* $(L_1,\ L_2)f$.

Considérons maintenant le cas où un système de variétés admet un groupe à plusieurs paramètres essentiels défini par les équations $x'_i=f_i(x,\ a_1,\ a_2\ \ldots,\ a_r)$. A ces équations correspondront les nouvelles équations $l'_i=\lambda_i(l,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r)$, qui à leur tour représenteront un groupe à r paramètres, essentiels ou non. Nous pouvons encore prendre ensemble les équations

$$x'_i = f_i(x, a), \qquad l'_i = \lambda_i(x, a),$$

qui représentent un groupe à r paramètres essentiels, et en conclure ce résultat :

Si un système de variétés admet le groupe défini par les équations $x'_i = f_i(x, a_1, \ldots, a_r)$, on peut trouver un système d'équations $l_i = \lambda_i(l, a_1, \ldots, a_r)$ tel que l'ensemble de ces équations et des précédentes constitue un groupe qui laisse invariant le système d'équations représentant les variétés.

Soient $X_1 f, \ldots, X_r f$ les transformations infinitésimales du groupe donné, et soit

$$(10) \qquad (X_h, X_k)f = \sum_s c_{hks} X_s f.$$

Ce groupe contient tous les groupes à un paramètre définis par les transformations infinitésimales séparées $X_i f$, en sorte que notre système de variétés doit admettre toutes ces transformations infinitésimales séparées, corrélativement auxquelles nous aurons les transformations $L_i f$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) telles que le système des équations admette la transformation

$$(11) \qquad X_1 f + L_1 f, \quad \ldots, \quad X_r f + L_r f.$$

A la transformation $(X_h, X_k)f$ correspond, comme on vient de le démontrer, la transformation $(L_h, L_k)f$, et à la transformation $\sum_s c_{hks} X_s f$ correspond la transformation $\sum_s c_{hks} L_s f$; en tenant compte de (10) et en se rappelant qu'à toute transformation entre les x correspond une transformation unique entre les l, on a donc

$$(L_h, L_k)f = \sum_s c_{hks} L_s f.$$

Donc, le groupe entre les l est isomorphe (holoédriquement ou non) au groupe entre les x.

Les transformations (11) engendrent un groupe à r paramètres essentiels. On a de plus :

$$(X_h + L_h, X_k + L_k)f = (X_h, X_k)f + (L_h, L_k)f$$
$$= \sum_s c_{hks} X_s f + \sum_s c_{hks} L_s f,$$

$$(X_h + L_h, X_k + L_k)f = \sum_s c_{hks}(X_s f + L_s f).$$

Par conséquent, le nouveau groupe est isomorphe (holoédriquement) au groupe donné.

Comment reconnaître si un système donné de variétés admet une transformation infinitésimale donnée?

Soient (5) les équations du système donné de variétés et Xf la transformation infinitésimale. Nous pouvons mettre les équations (5) sous la forme

$$(12) \qquad x_{q+1} - \psi_{q+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n - \psi_n = 0.$$

Puisque le système donné de variétés admet la transformation Xf, on peut trouver une transformation Lf telle que le système des équations (12) admette la transformation $Xf + Lf$. Si nous posons

$$Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad Lf = \sum_{j=1}^{j=m} \theta_j(l) \frac{\partial f}{\partial l_j},$$

les relations

$$X(x_{q+k} - \psi_{q+k}) + L(x_{q+k} - \psi_{q+k}) = 0$$

ou

$$\xi_{q+k} - \sum_{i=1}^{i=q} \xi_i(x) \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{j=m} \theta_j(l) \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial l_j} = 0$$

devront donc être des conséquences du système. En désignant généralement par $[\varphi]$ une fonction φ dans laquelle on a substitué les ψ_{q+k} aux x_{q+k}, on devra avoir identiquement

$$[\xi_{q+k}] - \sum_{i=1}^{i=n} [\xi_i] \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{j=m} \theta_j(l) \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial l_j} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-q).$$

Si de ces équations nous pouvons tirer les $\theta_j(l)$ comme fonctions des l seulement, nous en conclurons que le système donné de variétés admet la transformation infinitésimale Xf, et en même temps les coefficients de la transformation infinitésimale correspondante Lf se trouvent déterminés.

Nous allons faire une application de ce qui vient d'être dit au cas d'un groupe linéaire homogène. Soit le groupe défini par les équations

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=n} g_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Rappelons-nous que pour le groupe défini par $x'_i = f_i(x, a)$ on a

$$X_h f = \sum_k \xi_{hk}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

puis

$$\xi_{hk}(x') = \sum_\rho \alpha_{k\rho}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_\rho}.$$

Dans le cas actuel

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_\rho} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial g_{hk}}{\partial a_\rho} x_k;$$

si nous introduisons les x' au lieu des x, $\xi_{hk}(x')$ deviendra une fonction linéaire homogène des x', soit

$$\xi_{hk}(x') = \sum_i \eta_{hki} x'_i,$$

de sorte que nous pouvons écrire ainsi la transformation infinitésimale

$$X_h f = \sum_k \xi_{hk}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_i \eta_{hki} x_i.$$

Considérons l'ensemble des espaces linéaires à $(n-1)$ dimensions; il reste invariant par toute transformation linéaire. Proposons-nous de trouver le groupe des permutations de ces espaces. Désignons par u les paramètres de la variété (paramètres qui sont en même nombre que les variables); l'équation de la variété sera

$$(13) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n + 1 = 0.$$

Résolvons l'équation (13) par rapport à x_n :

$$x_n = \psi_n = -\frac{1}{u_n}(u_1 x_1 + \ldots + u_{n-1}x_{n-1} + 1).$$

Dans ce cas, $q = n - 1$, et l'on a, pour toutes les valeurs de h :

$$(14) \qquad [\xi_{hn}] - \sum_{i=1}^{i=n-1} [\xi_{hi}] \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{j=n} \theta_{hj} \frac{\partial \psi_n}{\partial u_j} = 0.$$

Or

$$\xi_{hi} = \sum_{s=1}^{s=n} \eta_{his} x_s;$$

d'où

$$[\xi_{hi}] = \sum_{s=1}^{s=n-1} \eta_{his} x_s - \frac{1}{u_n} \eta_{hin} [u_1 x_1 + \ldots + u_{n-1} x_{n-1} + 1].$$

En outre

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial u_j} = -\frac{x_j}{u_n} \qquad (j = 1, \ldots, n-1),$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial u_n} = \frac{u_1 x_1 + \ldots + u_{n-1} x_{n-1} + 1}{u_n^2},$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} = -\frac{u_i}{u_n} \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

En substituant dans (14), on obtient identiquement

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \eta_{hni} x_i - \frac{1}{u_n} \eta_{hnn} (u_1 x_1 + \ldots + u_{n-1} x_{n-1} + 1)$$
$$- \sum_{s=1}^{s=n-1} \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \eta_{hsi} x_i - \frac{1}{u_n} \eta_{hsn} (u_1 x_1 + \ldots + u_{n-1} x_{n-1} + 1) \left(-\frac{u_s}{u_n} \right) \right]$$
$$- \sum_{s=1}^{s=n-1} \theta_{hs} \left(-\frac{x_s}{u_n} \right) - \theta_{hn} \frac{u_1 x_1 + \ldots + u_{n-1} x_{n-1} + 1}{u_n^2} = 0.$$

Cette relation a la forme

$$\beta_{h1} x_1 + \beta_{h2} x_2 + \ldots + \beta_{h,n-1} x_{n-1} + \gamma_h = 0;$$

ses coefficients doivent être nuls séparément. En égalant γ_h à zéro, il vient

$$-\frac{1}{u_n} \eta_{hnn} - \frac{1}{u_n^2} \sum_{s=1}^{s=n-1} u_s \eta_{hsn} - \frac{\theta_{hn}}{u_n^2} = 0,$$

d'où

$$\theta_{hn} = -\gamma_{hnn} u_n - \sum_{s=1}^{s=n-1} \gamma_{hsn} u_s = -\sum_{s=1}^{s=n} \gamma_{hsn} u_s.$$

Le même calcul relatif à β_{hk} donne

$$\theta_{hk} = -\sum_{s=1}^{s=n} \gamma_{hsk} u_s;$$

c'est-à-dire que les θ sont des fonctions linéaires homogènes des u. Par comparaison avec

$$\gamma_{hk} = \sum_{s=1}^{s=n} \gamma_{hks} x_s,$$

on reconnaît que les coefficients qui figurent dans les deux formules sont les mêmes, au signe et à la disposition des indices près.

Ce groupe est dit *groupe dualistique* du groupe donné.

Exemple. — Le groupe adjoint d'un groupe donné est défini par

$$E_h f = \sum_{k,s} c_{khs} e_k \frac{\partial f}{\partial e_s}.$$

Il n'y a qu'à poser

$$\gamma_{hki} = c_{ihk} = -c_{hik},$$

et le groupe dualistique du groupe adjoint sera défini par

$$\theta_{hk} = \sum_{s=1}^{s=n} c_{hks} u_s.$$

XXI. — Groupes prolongés. Équations pfaffiennes.

Commençons par considérer une seule transformation

$$x'_i = f_i(x),$$

et un système de q équations à n variables

(1) $$\Omega_k(x) = 0,$$

qui, par cette même transformation, se change en un autre système

$$(2) \qquad \Omega'_k(x') = 0.$$

Le système (1) définit q des variables x comme fonctions des $(n-q)$ autres. De même, le système (2) définit q des x' au moyen des $(n-q)$ autres. Dérivons ceux des x et des x' qui sont considérés comme dépendants par rapport à ceux qui restent, et posons

$$\frac{\partial x'_h}{\partial x'_k} = p'_{hk}, \qquad \frac{\partial x_h}{\partial x_k} = p_{hk}.$$

Les p' dépendent, comme on le verra mieux tout à l'heure, des x et des p :

$$p'_{hk} = \varphi_{hk}(x, p).$$

Ce système d'équations, considéré en même temps que celui des équations $x'_i = f_i(x)$, représente une transformation des x, p en les x', p' : cette transformation est dite *transformation prolongée* (en allemand : *erweiterte Transformation*).

De même, en considérant les dérivées secondes des x, nous aurons un nouveau prolongement.

Pareillement, si nous avons un groupe de transformations, nous pouvons par prolongement en déduire un ensemble de transformations des x, p (en considérant par exemple les seules dérivées premières). Cet ensemble est un groupe, comme nous le verrons, et ce groupe est à son tour appelé *groupe prolongé* du groupe donné.

Considérons d'abord un mode de prolongement assez simple. Supposons que les x puissent être regardés comme fonctions d'une variable t, variable laissée invariante par la transformation considérée. Les x' seront aussi des fonctions de t. En posant $\frac{dx'_i}{dt} = p'_i$, $\frac{dx_i}{dt} = p_i$, nous aurons

$$p'_i = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} p_h.$$

Si les f contiennent r paramètres essentiels, nous obtenons ainsi le système des transformations à r paramètres essentiels défini par

$$x'_i = f_i(x, a), \qquad p'_i = \varphi_i(x, p, a).$$

Nous allons démontrer que ce système forme un groupe.

En effet, appliquons d'abord une transformation de paramètres a, puis ensuite une transformation de paramètres b [cette transformation s'écrivant $x''_i = f_i(x', b)$], et posons $\frac{dx''_i}{dt} = p''_i$. Nous avons

$$p''_i = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial x'_h} p'_h = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial x'_h} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f_h(x, a)}{\partial x_k} p_k$$

ou

$$p''_i = \sum_{k=1}^{k=n} p_k \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial x'_h} \frac{\partial f_h(x, a)}{\partial x_k};$$

mais, puisque $f_i(x', b) = f_i(x, c)$, les c étant des fonctions des a et b, il vient, en dérivant par rapport à un des x,

$$\sum_h \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial x'_h} \frac{\partial f_h(x, a)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i(x, c)}{\partial x_k},$$

et par suite

$$p''_i = \sum_k \frac{\partial f_i(x, c)}{\partial x_k} p_k.$$

Cela revient à dire que les p'' se déduisent directement des p, les c étant les valeurs des paramètres de la transformation correspondante. Le système constitue donc un groupe.

Cherchons maintenant les transformations infinitésimales de ce groupe.

Désignons par $\overline{\mathrm{X}}f$ une des transformations infinitésimales du groupe prolongé, transformation qui aura la forme

$$\overline{\mathrm{X}_h}f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{hi}(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_{hi}(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

les ξ, Π étant donnés par les formules

$$\xi_{hk}(x', p') = \sum_\rho \alpha_{h\rho}(a) \frac{\partial x'_k}{\partial a_\rho},$$

$$\Pi_{hk}(x', p') = \sum_\rho \alpha_{h\rho}(a) \frac{\partial p'_k}{\partial a_\rho}.$$

D'après la première de ces formules, on voit que les $\xi(x', p')$ ne dépendent pas des p'; les $\xi(x, p)$ ne dépendent donc pas des p. Nous écrirons $\xi(x)$ au lieu de $\xi(x, p)$; d'où

$$\overline{X_h}f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{hi}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_{hi}(x, p)\frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Remarquons qu'on a, en dérivant les ξ_{hk} par rapport à t,

$$\frac{d\xi_{hk}(x')}{dt} = \sum_\rho \alpha_{h\rho}(a)\frac{d}{dt}\frac{\partial x'_h}{\partial a_\rho} = \sum_\rho \alpha_{h\rho}(a)\frac{\partial}{\partial a_\rho}\frac{dx'_h}{dt} = \sum_\rho \alpha_{h\rho}(a)\frac{\partial p'_k}{\partial a_\rho}.$$

Par comparaison avec l'expression précédente des Π, il vient

$$\Pi_{hk}(x', p') = \frac{d}{dt}\xi_{hk}(x');$$

d'où

$$\Pi_{hk}(x, p) = \frac{d}{dt}\xi_{hk}(x) = \sum_i \frac{\partial \xi_{hk}}{\partial x_i}p_i.$$

On voit donc que les Π sont des fonctions linéaires homogènes des p, et que

$$(3) \qquad \frac{\partial \Pi_{hk}(x, p)}{\partial p_i} = \frac{\partial \xi_{hk}(x)}{\partial x_i}.$$

Une fois trouvées les $\overline{X}f$, proposons-nous de déterminer les constantes de structure du groupe défini par ces transformations.

Écrivons

$$(\overline{X_h}, \overline{X_k})f = \sum_s \overline{c_{hks}}\,\overline{X_s}f.$$

Il est aisé de montrer que $\bar{c} = c$. En effet, nous avons

$$(\overline{X_h}, \overline{X_k})f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X_h}\xi_{ki} - \overline{X_k}\xi_{hi}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(\overline{X_h}\Pi_{ki} - \overline{X_k}\Pi_{hi}).$$

Or

$$\overline{X_h}\xi_{ki} = X_h\xi_{ki} = \sum_s \xi_{hs}\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_s}.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
(\overline{X_h}, \overline{X_k})f = & \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_s \left(\xi_{hs} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_s} - \xi_{ks} \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_s} \right) \\
& + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \left[\sum_s \left(\xi_{hs} \frac{\partial \Pi_{ki}}{\partial x_s} + \Pi_{hs} \frac{\partial \Pi_{ki}}{\partial p_s} - \xi_{ks} \frac{\partial \Pi_{hi}}{\partial x_s} - \Pi_{ks} \frac{\partial \Pi_{hi}}{\partial p_s} \right) \right].
\end{aligned}
$$

Le dernier terme peut s'écrire, en vertu de (3),

$$
\sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \sum_s \left(\xi_{hs} \frac{\partial \Pi_{ki}}{\partial x_s} - \xi_{ks} \frac{\partial \Pi_{hi}}{\partial x_s} + \Pi_{hs} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_s} - \Pi_{ks} \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_s} \right).
$$

Si l'on observe que

$$
\frac{\partial \Pi_{ki}}{\partial x_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_s}, \qquad \frac{\partial \Pi_{hi}}{\partial x_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_s},
$$

on reconnaît dans l'expression entre parenthèses la dérivée de

$$
\left(\xi_{hs} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_s} - \xi_{ks} \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_s} \right),
$$

et, en posant

$$
\mu_{hki} = \sum_s \left(\xi_{hs} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_s} - \xi_{ks} \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_s} \right),
$$

on obtient

$$
(4) \qquad (\overline{X_h}, \overline{X_k})f = \sum_i \mu_{hki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{d\mu_{hki}}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i}.
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
\sum_s \overline{c_{hks}} \overline{X_s} f &= \sum_s \overline{c_{hks}} \left(\sum_i \xi_{si} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \Pi_{si} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \\
&= \sum_i \mu_{hki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{d\mu_{hki}}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i},
\end{aligned}
$$

d'où, nécessairement,

$$
(5) \qquad \sum_s \overline{c_{hks}} \xi_{si} = \mu_{hki}, \qquad \sum_s \overline{c_{hks}} \Pi_{si} = \frac{d\mu_{hki}}{dt}.
$$

D'autre part

$$
(6) \qquad (X_h, X_k)f = \sum_i \mu_{khi} \frac{\partial f}{\partial x_i};
$$

donc

$$\sum_s c_{hks} \sum_i \xi_{si} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_s \mu_{hki} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et enfin

$$\sum_s c_{hks} \xi_{si} = \mu_{hki}.$$

Comparons ces relations avec les relations (5), tenons compte de ce que les $X_s f$ sont indépendants, et nous aurons

$$\overline{c_{hks}} = c_{hks}. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Le groupe donné et son groupe prolongé sont par suite holoédriquement isomorphes.

Si nous posons $(X_h X_k)f = Tf$, et si nous désignons par $\overline{T}f$ la transformation obtenue en prolongeant la transformation Tf, il résulte de la comparaison des équations (4) et (6) que

$$\overline{T}f = (\overline{X_h}\,\overline{X_k})f,$$

et qu'on peut donc écrire

$$(\overline{X_h X_k})f = (\overline{X_h}\,\overline{X_k})f.$$

Soit alors l'équation

$$(7) \qquad \sum u_i p_i = 0,$$

où les p_i ne sont autres que les $\frac{dx_i}{dt}$ et où les u sont des fonctions des seuls x, et soit le groupe à un paramètre $x'_i = f_i(x)$ engendré par la transformation infinitésimale Xf. Demandons-nous sous quelles conditions l'équation sera invariante par rapport au groupe prolongé correspondant

$$x'_i = f_i(x), \qquad p'_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} p_k.$$

Il faut pour cela (n° IX) que l'équation

$$(8) \qquad \overline{X} \sum u_i p_i = 0$$

soit une conséquence de l'équation proposée. Or nous avons

$$\overline{X}\sum(u_i p_i) = \sum \overline{X}(u_i p_i),$$

$$\overline{X}(u_i p_i) = u_i \overline{X} p_i + p_i \overline{X} u_i;$$

$$\overline{X} u_i = X u_i;$$

$$\overline{X} p_i = \Pi_i = \sum_s \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} p_s;$$

d'où

$$\overline{X}(u_i p_i) = u_i \sum_s \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} p_s + p_i X u_i.$$

Le premier membre de (8) est donc une fonction linéaire homogène des p, en sorte que, si cette équation (8) doit être conséquence de (7), son premier membre devra être le produit du premier membre de (7) par une fonction des x. Ainsi la condition pour que l'équation considérée soit invariante par rapport au groupe prolongé est que l'on ait

$$\overline{X}\left(\sum u_i p_i\right) = \rho \sum u_i p_i,$$

ρ étant une fonction des x. Égalons donc les coefficients de chacun des p_i dans les deux membres :

$$\sum_s u_s \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} + X u_i = \rho u_i.$$

Supposons maintenant qu'on ait un système d'équations

$$\sum_i u_{ki} p_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

En cherchant les conditions pour que ce système d'équations reste invariant, on trouve comme précédemment

$$\overline{X}\left(\sum_i u_{ki} p_i\right) = \sum_{l=1}^{l=m} \rho_l \sum u_{li} p_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Si le groupe considéré était à plusieurs paramètres, ces conditions devraient être vérifiées par toutes les transformations infinitésimales Xf de ce groupe.

Une équation de la forme

$$\sum_i u_i\,dx_i = 0,$$

où les u sont des fonctions des x, est dite *équation pfaffienne* (du nom du mathématicien Pfaff). Elle ne diffère de l'équation considérée plus haut que par le facteur dt, puisque $dx_i = p_i\,dt$; par suite, la condition d'invariance de cette équation par rapport à notre groupe prolongé est encore celle écrite plus haut. Au lieu de $\overline{X}\sum u_i p_i$, mettons simplement $X\sum u_i\,dx_i$, ou posons, par définition,

$$\begin{aligned} X\sum u_i\,dx_i &= \sum_i\left(\sum_s u_s\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i} + X u_i\right)dx_i \\ &= \sum_i X u_i\,dx_i + \sum_i u_i \sum_s \frac{\partial\xi_i}{\partial x_s}\,dx_s = \sum X u_i\,dx_i + \sum u_i\,d\xi_i, \end{aligned}$$

ou

$$X\sum u_i\,dx_i = \sum_i X u_i\,dx_i + \sum_i u_i\,d(X x_i). \tag{9}$$

La condition d'invariance sera

$$X\sum_i u_i\,dx_i = \rho\sum_i u_i\,dx_i, \tag{10}$$

et l'on dit alors que l'équation pfaffienne *admet* la transformation infinitésimale Xf.

On sait (n^o IX) que, si l'équation (7) est invariante par rapport aux groupes à un paramètre engendrés par les deux transformations infinitésimales $\overline{X_1}f$, $\overline{X_2}f$, elle l'est aussi par rapport au groupe engendré par la transformation $(\overline{X_1}, \overline{X_2})f$. D'où il suit que, si une équation pfaffienne admet les deux transformations infinitésimales $X_h f$, $X_k f$, elle admet aussi la transformation $(X_h, X_k)f$.

Ce que nous venons de dire s'étend immédiatement aux systèmes d'équations pfaffiennes.

Arrivons-en maintenant à présenter le prolongement sous sa forme la plus générale.

Nous emploierons les notations suivantes : nous appellerons x les variables que nous considérons comme indépendantes, supposées au nombre de n; z les variables regardées comme dépendantes, supposées au nombre de m. Les équations d'une transformation pourront s'écrire

$$x'_i = f_i(x, z), \qquad z'_i = F_i(x, z).$$

Les $\frac{\partial z'}{\partial x'}$ sont fonctions des x, z et des $\frac{\partial z}{\partial x}$. Plus généralement, en posant

$$\frac{\partial^p z_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = z_{k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = p),$$

$$\frac{\partial^p z'_k}{\partial x'^{\alpha_1}_1 \partial x'^{\alpha_2}_2 \ldots \partial x'^{\alpha_n}_n} = z'_{k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = p),$$

les $z'_{k\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ où $\sum \alpha = \mathrm{N}$, sont fonctions des x, des z et des $z_{k\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$ où $\sum \beta \leqq \mathrm{N}$.

Ceci est vrai d'abord pour l'ordre de dérivation $\mathrm{N} = 0$. Nous démontrerons, par induction, que ce résultat est vrai pour une valeur quelconque de l'entier N, c'est-à-dire que nous prouverons que, s'il est vrai pour une valeur N, il l'est encore pour la valeur $\mathrm{N} + 1$. Soit en effet

$$z'_{k\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = F_{k\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x, z, z_{h\,\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \alpha_i = \mathrm{N}, \\ \sum_i \beta_i \leqq \mathrm{N}. \end{array} \right.$$

Par dérivation, nous avons

$$\frac{\partial z'_{k\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_l} = G_{k\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x, z, z_{h\,\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}),$$

où $\sum \beta_i \leqq \mathrm{N} + 1$. Cette dérivée peut être obtenue d'une autre manière :

$$\frac{\partial z'_{k\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_l} = \sum_i \frac{\partial z'_{k\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n}}{\partial x'_i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_s \frac{\partial f_i}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x_l} \right),$$

en sorte que

$$G_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \sum_i \frac{\partial z'_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{\partial x'_i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_s \frac{\partial f_i}{\partial z_s}\frac{\partial z_s}{\partial x_l}\right)$$

$$= \sum_i z'_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_l+1,\ldots,\alpha_n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_s \frac{\partial f_i}{\partial z_s}\frac{\partial z_s}{\partial x_l}\right).$$

En faisant varier l de 1 à n, on obtient un système d'équations linéaires en $z'_{k\alpha_1+1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, $z'_{k\alpha_1,\alpha_2+1,\ldots,\alpha_n}$, $\ldots$, $z'_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n+1}$. Nous pouvons établir que ce système d'équations est résoluble, c'est-à-dire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_s \dfrac{\partial f_1}{\partial z_s}\dfrac{\partial z_s}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \sum_s \dfrac{\partial f_n}{\partial z_s}\dfrac{\partial z_s}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \sum_s \dfrac{\partial f_1}{\partial z_s}\dfrac{\partial z_s}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} + \sum_s \dfrac{\partial f_n}{\partial z_s}\dfrac{\partial z_s}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul. En effet, s'il était nul pour des valeurs quelconques des x, des z et des dérivées des z, on aurait, en commençant par supposer nulles toutes ces dérivées,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous pouvons ensuite supposer nulles toutes les dérivées, sauf celles à indice 1, et nous aurons

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0;$$

en vertu de l'équation précédente, le déterminant du second terme doit être nul. En continuant ainsi, on arriverait à établir la nullité de tous les déterminants d'ordre n de la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_m} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_m} \end{array} \right\|,$$

en sorte que les f ne seraient pas indépendants, contrairement à l'hypothèse.

Le système linéaire trouvé est donc résoluble. En le résolvant, nous trouvons les $z'_{k\gamma_1,\ldots,\gamma_n}$ où $\sum\gamma = \mathrm{N}+1$, exprimés au moyen des x, des z et des $z_{k\delta_1,\ldots,\delta_n}$ où $\sum\delta \leqq \mathrm{N}+1$, comme on voulait en démontrer la possibilité.

On voit par là qu'on peut prolonger une transformation quelconque, et conséquemment un groupe.

Étant donnée une transformation par les équations

$$x'_i = f_i(x, z), \qquad z'_i = \mathrm{F}_i(x, z),$$

nous en déduisons les expressions

$$z'_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \mathrm{F}_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x, z, z_{h\beta_1,\ldots,\beta_n}) \qquad \sum\beta \leqq \mathrm{N} = \sum\alpha;$$

et d'une transformation faite sur les x, z, nous déduisons une transformation portant sur les x, z, $z_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$; c'est cette dernière transformation qui est dite *la transformation prolongée*.

Observons qu'on peut aisément construire un système d'équations pfaffiennes invariant par rapport à la transformation prolongée. La première des équations est

$$dz_k = \frac{\partial z_k}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial z_k}{\partial x_n}dx_n,$$

qui peut s'écrire ainsi :

$$dz_k - z_{k10\ldots00}\, dx_1 - \ldots - z_{k00\ldots01}\, dx_n = 0\,;$$

elle est identiquement invariante, puisqu'elle se change en une autre de même forme :

$$dz'_k = \frac{\partial z'_k}{\partial x'_1} dx'_1 + \ldots + \frac{\partial z'_k}{\partial x'_n} dx'_n.$$

Conjointement à cette équation, nous pouvons écrire un nombre quelconque d'équations de la forme

$$dz_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n} - \sum z_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_n}\, dx_i = 0,$$

équations qui sont aussi évidemment invariantes.

Considérons alors un groupe de transformations à un nombre quelconque de paramètres a. Le système des transformations prolongées formera à son tour un groupe. En effet, considérons, outre la transformation

$$x'_i = f_i(x, z, a), \qquad z'_i = F_i(x, z, a),$$

la seconde transformation

$$x''_i = f_i(x', z', b), \qquad z''_i = F_i(x', z', b),$$

de laquelle nous déduirons

$$z''_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = F_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x', z', z'_{h\beta_1,\ldots,\beta_n}, b).$$

Puisque nous avons

$$x''_i = f_i(x, z, c), \qquad z''_i = F_i(x, z, c),$$

les c étant des fonctions des a et des b, nous en tirons

$$z''_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = F_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x, z, z_{h\beta_1,\ldots,\beta_n}, c),$$

ce qui justifie notre assertion, car cela prouve qu'en appliquant successivement aux x, z, $z_{k\beta_1,\ldots,\beta_n}$ deux transformations prolongées correspondant aux valeurs a et b des paramètres, on obtient le même résultat que si l'on avait appliqué une seule transformation prolongée correspondant aux valeurs c des paramètres, avec

$$c_i = \varphi_i(a, b).$$

On voit, de plus, que les transformations entre les paramètres sont les mêmes pour le groupe primitif et pour le groupe prolongé.

Étant données les transformations infinitésimales

$$X_s f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=m} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \qquad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

génératrices d'un groupe à r paramètres, on demande de calculer les transformations infinitésimales génératrices du groupe prolongé correspondant d'ordre donné.

Si N est l'ordre maximum de dérivation, les transformations infinitésimales cherchées auront la forme

$$X^{(N)} f = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=m} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum \zeta_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\partial f}{\partial z_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n}} \qquad \left(\sum \alpha \leqq N\right),$$

car on démontre, comme dans le cas des groupes à un seul paramètre, que les ξ, ζ sont encore ceux du groupe primitif. Il s'agit de calculer $\zeta_{k\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$. Pour cela, il suffira de montrer comment, connaissant les $X^{(1)}f$, $X^{(2)}f$, ..., $X^{(N)}f$, on peut calculer $X^{(N+1)}f$.

Partons de cette remarque que le groupe prolongé laisse invariant le système d'équations pfaffiennes signalé tout à l'heure. Ces équations pfaffiennes admettront les transformations infinitésimales du groupe, c'est-à-dire qu'on devra avoir, d'après (9) et (10),

$$\begin{aligned}
&-\sum_i X^{(N)} z_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_n} dx_i + d(X^{(N)} z_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}) \\
&-\sum_i z_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_n} d(X^{(N)} x_i) \\
&= \sum_h \rho_{h,\beta_1,\ldots,\beta_n}\left(dz_{h,\beta_1,\ldots,\beta_n} - \sum_i z_{h,\beta_1,\ldots,\beta_i+1,\ldots,\beta_n} dx_i\right) \\
&\qquad\qquad \begin{pmatrix} \sum \alpha = N \\ \sum \beta \leqq N \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En développant le premier membre, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\sum_i \zeta_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_n}\,dx_i + d\zeta_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\\
&-\sum_i z_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_n}\,d\xi_i\\
&=\sum_h \rho_{h,\beta_1,\ldots,\beta_n}\Big(dz_{h,\beta_1,\ldots,\beta_n}-\sum_i z_{h,\beta_1,\ldots,\beta_i+1,\ldots,\beta_n}\,dx_i\Big).
\end{aligned}$$

Si l'on remplace les z et les z à indices par leurs expressions en fonction des x, le second membre devient nul, et, par suite aussi, le premier membre s'annule; nous avons

$$\begin{aligned}
&-\sum_i \zeta_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_n}\,dx_i\\
&+\sum_i \frac{d\zeta_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{dx_i}\,dx_i-\sum_s z_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_s+1,\ldots,\alpha_n}\sum_i \frac{d\xi_s}{dx_i}\,dx_i=0,
\end{aligned}$$

où le symbole $\frac{d}{dx_i}$ désigne la *dérivation totale* par rapport à x_i, c'est-à-dire la dérivation effectuée en tenant compte de ce que les z, etc. sont fonctions des x. Mais, comme les dx_i sont indépendants entre eux, cette relation entraîne

$$\zeta_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_n}=\frac{d\zeta_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{dx_i}-\sum_s z_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_s+1,\ldots,\alpha_n}\frac{d\xi_s}{dx_i}.$$

Nous obtenons ainsi une suite d'équations qui donnent tous les ζ cherchés au moyen de ceux de moindres indices.

Soient $X_s f$, $X_t f$ deux transformations infinitésimales quelconques du groupe primitif; nous allons démontrer qu'on a

$$(X_s^{(N)}, X_t^{(N)})f=(X_s, X_t)^{(N)}f.$$

En effet, la transformation $(X_s, X_t)f$ est une somme de transformations infinitésimales Xf; les premiers termes de $X_s^{(N)}f$, $X_t^{(N)}f$ sont respectivement les termes de $X_s f$, $X_t f$, et, par suite, la transformation $(X_s^{(N)}, X_t^{(N)})f$ devra être le prolongement de la transformation $(X_s, X_t)f$, puisqu'elle a les mêmes premiers termes. (C. Q. F. D.)

On déduit aisément de là que *le groupe prolongé est holoédriquement isomorphe au groupe primitif.*

Considérons un groupe prolongé; les fonctions invariantes par rapport à ce groupe sont fonctions de toutes les variables (les x, les z et les dérivées des z jusqu'à un certain ordre); ces fonctions sont dites INVARIANTS DIFFÉRENTIELS *du groupe primitif.*

Un groupe quelconque admet une infinité d'invariants différentiels, dont l'ordre peut croître indéfiniment.

Des résultats obtenus aux n^{os} IX et XIII, il ressort que :

La détermination des invariants différentiels d'un groupe n'exige que des opérations algébriques si l'on donne les équations finies du groupe; elle exige au contraire l'intégration de systèmes complets si l'on connaît seulement les transformations infinitésimales génératrices du groupe.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Généralités.

Si nous voulions suivre l'œuvre fondamentale de Lie, nous devrions, après avoir présenté la théorie générale, étudier les *transformations* dites *de contact*. Nous préférons remettre ce sujet à plus tard pour montrer de suite l'utilité et l'importance de la théorie exposée en l'appliquant à l'étude des équations différentielles.

Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, un résultat considérable de cette théorie a été de montrer que les équations différentielles intégrables par les procédés connus de l'Analyse, sont celles qui admettent des transformations infinitésimales connues.

C'est cette question que nous allons maintenant développer. Nous nous limiterons à la considération des équations différentielles du premier ordre

$$f(x, y, y') = 0,$$

supposées résolubles par rapport à y', en sorte qu'on puisse leur donner la forme

$$Y\,dx - X\,dy = 0,$$

X, Y étant des fonctions de x et y. L'intégration d'une telle équation équivaut à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

l'intégrale aura la forme $\omega(x, y) = \text{const.}$, et représentera par suite une famille de courbes du plan (x, y), courbes qui, en général, ne se rencontreront pas.

Soit un groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale Vf; imaginons que l'équation intégrale admette ce groupe, ou que les transformations du groupe changent en elle-même la famille des courbes intégrales; cette famille sera une variété invariante du groupe. On doit à Lie d'avoir établi ce résultat :

La connaissance d'un groupe par rapport auquel la famille des courbes intégrales est invariante suffit pour qu'on puisse intégrer l'équation, c'est-à-dire pour qu'on puisse trouver un facteur intégrant et réduire par suite le problème aux quadratures.

II. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de courbes reste invariante par rapport à un groupe.

Soit $\omega(x, y) = \text{const.}$ l'équation de la famille, et soit la transformation

$$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y).$$

Pour que la transformation laisse invariante la famille de courbes, il faut que la transformée de l'équation de la famille se présente sous la forme $\omega(x', y') = \text{const.}$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\omega[\varphi(x, y), \psi(x, y)] = b$$

toutes les fois que $\omega(x, y) = a$; on déduit de là que $b = f(a)$, et que par suite

$$(1) \qquad \omega[\varphi(x, y), \psi(x, y)] \equiv f[\omega(x, y)]$$

identiquement.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, il est évident que la famille de courbes est invariante.

Pour un groupe de transformations à un paramètre défini par Vf, les équations finies peuvent être mises sous la forme

$$x' = x + \frac{t}{1!} Vx + \ldots, \qquad y' = y + \frac{t}{1!} Vy + \ldots,$$

et nous aurons, par suite,

$$(2) \qquad \omega(x', y') = \omega(x, y) + \frac{t}{1!} V\omega + \frac{t^2}{2!} V^2\omega + \ldots.$$

Si $\omega(x', y')$ est une fonction de $\omega(x, y)$ seul pour une valeur quelconque de t, il s'ensuit que

$$\frac{\omega(x', y') - \omega(x, y)}{t} = V\omega + \ldots$$

dépend aussi de ω seul quel que soit t; en faisant $t = 0$, on voit qu'on devra avoir

$$V\omega = \chi(\omega).$$

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, si on la suppose vérifiée, on en déduit

$$V^2\omega = V\chi(\omega) = \chi'(\omega) V\omega = \chi'(\omega)\chi(\omega),$$

ce qui est une fonction de ω; ceci s'étend à $V^3\omega$, etc., en sorte que tout le second membre de (2) est une fonction de ω, conformément à notre assertion. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de courbes $\omega(x, y) = a$ se transforme en elle-même par toutes les transformations d'un groupe donné à un paramètre Vf, est que l'on ait

$$V\omega = \chi(\omega).$$

Exemple. — Considérons la famille des cercles concentriques

$$x^2 + y^2 = a.$$

Elle est laissée invariante par le groupe des *transformations homothétiques par rapport au centre,* dont les équations finies sont

$$x' = (t + 1)x, \qquad y' = (t + 1)y,$$

et dont la transformation infinitésimale est $\Big($en se rappelant (n° V, 1re Partie) que, pour un groupe à un paramètre, on a $\xi_i(x') = \dfrac{dx'_i}{dt}$ et $\xi_i(x) = [\xi_i(x')]_{t=0}\Big)$

$$Vf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dans ce cas, on obtient

$$V\omega = V(x^2+y^2) = x.2x + y.2y = 2\omega,$$

et la condition susdite se trouve bien vérifiée.

Examinons maintenant le cas spécial où la fonction $\chi(\omega)$ est nulle, c'est-à-dire où $V\omega = 0$. Rappelons que

$$x' = x + t\xi + \ldots, \qquad y' = y + t\eta + \ldots.$$

A la valeur $t = 0$ correspond la transformation unité; à la valeur δt de t correspondra la transformation infinitésimale

$$x' = x + \xi\,\delta t, \qquad y' = y + \eta\,\delta t,$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur. Il en résulte que

$$\omega(x', y') = \omega(x + \xi\,\delta t, y + \eta\,\delta t) = \omega(x, y) + \delta t\, V\omega(x, y).$$

Si la famille de courbes est invariante par rapport à Vf, en posant $V\omega = \chi(\omega)$, on a

$$\omega(x + \xi\,\delta t, y + \eta\,\delta t) = \omega(x, y) + \delta t\,\chi[\omega(x, y)];$$

dès lors la courbe particulière $\omega(x, y) = c$ se change en la courbe $\omega(x', y') = c + \delta t\,\chi(c) = c'$. Par suite :

Pour qu'en particulier toute courbe du système se transforme en elle-même, il faut et il suffit qu'on ait $V\omega = 0$.

En effet, si toute courbe se change en elle-même, on a $c' = c$, donc $V\omega(x, y) = 0$; et réciproquement, si $V\omega(x, y) = 0$, on aura $c = c'$. (C. Q. F. D.)

Dans ce cas, comme on a

$$X\frac{\partial\omega}{\partial x} + Y\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \qquad \xi\frac{\partial\omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\frac{X}{Y} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Conséquemment les transformations infinitésimales (et par suite les groupes) qui laissent invariante chacune des courbes de la famille sont de la forme $Vf = \rho\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$; elles se déterminent immédiatement, mais elles ne sont d'aucun secours pour résoudre le problème de l'intégration.

On peut arriver au même résultat géométriquement. Le coefficient angulaire de la tangente à une des courbes est donné par

$$-\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial x}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}} = \frac{Y}{X}.$$

Si l'on applique à un point de la courbe toutes les transformations du groupe que nous considérons, ce point décrit une courbe dont l'élément a pour coefficient angulaire $\frac{\eta}{\xi}$. Comme nous voulons que le groupe soit de ceux qui transforment toute courbe en elle-même, la direction de l'élément considéré devra coïncider avec la tangente susdite; donc $\frac{Y}{X} = \frac{\eta}{\xi}$, comme nous l'avions déjà trouvé.

III. — Facteur intégrant. Équations différentielles qui admettent des transformations infinitésimales données.

Laissons à part le cas où $V\omega = 0$, dans lequel on peut obtenir immédiatement le groupe, mais sans pouvoir en tirer aucun avantage pour l'intégration de l'équation différentielle proposée. Pour tous les autres cas, dans lesquels on a

$$V\omega = \chi(\omega),$$

χ n'étant pas identiquement nulle, la connaissance d'un groupe conduit à la détermination d'un facteur intégrant.

Soit $\Phi(\omega)$ une intégrale quelconque, on a

$$V\,\Phi(\omega) = \Phi'(\omega)\,V\omega = \Phi'(\omega)\,\chi(\omega).$$

Déterminons $\Phi(\omega)$ de manière que $\Phi'(\omega)\,\chi(\omega) = 1$, d'où

$$\Phi(\omega) = \int \frac{d\omega}{\chi(\omega)}.$$

En écrivant alors ω au lieu de $\Phi(\omega)$, nous pouvons poser $V\omega = 1$, et nous avons

$$X\frac{\partial\omega}{\partial x}+Y\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,\qquad \xi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}=1;$$

nous tirons de là

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{Y}{X\eta-Y\xi},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{X}{X\eta-Y\xi};$$

par suite un facteur intégrant est

$$M=\frac{1}{X\eta-Y\xi}.$$

Réciproquement, si nous connaissons un facteur intégrant M, en l'égalant à $\frac{1}{X\eta-Y\xi}$, nous pouvons trouver d'une infinité de manières les ξ, η, et, corrélativement à chacune de ces manières, nous obtenons toujours une transformation infinitésimale et, par suite, un groupe. En effet, M étant un facteur intégrant, nous avons

$$-MY=\frac{\partial\omega}{\partial x},\qquad MX=\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

d'où l'on conclut

$$V\omega=-\xi MY+\eta MX=M(X\eta-Y\xi)=1. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Par cela même se trouve établi le résultat énoncé au n° I, concernant la relation qui existe entre la connaissance de certains groupes et la possibilité d'intégrer l'équation.

Reprenons l'équation

$$(1)\qquad X\,dy-Y\,dx=0,$$

dont l'intégrale générale soit

$$(2)\qquad \omega(x,y)=\text{const.},$$

et considérons la transformation finie

$$x'=f(x,y),\qquad y'=\varphi(x,y).$$

Par cette transformation, l'équation (1) se change en une autre

$$(3)\qquad X'(x',y')\,dy'-Y'(x',y')\,dy'=0,$$

et l'intégrale (2) en

$$(4) \qquad \omega'(x', y') = \text{const.}$$

Nous allons démontrer que :

L'intégrale de l'équation transformée est la transformée de l'intégrale de l'équation primitive,

c'est-à-dire que (4) est l'intégrale générale de (3). En effet, soit M un facteur intégrant de (1); on aura

$$d\omega = M(X\,dy - Y\,dx);$$

en appliquant la transformation et en désignant par M′ la transformée de la fonction M, on aura

$$d\omega' = M'(X'\,dy' - Y'\,dx');$$

or ceci exprime que M′ est un facteur intégrant de (3) et que ω' est une intégrale de cette même équation (3). (C. Q. F. D.)

Il résulte de là que, si une transformation change en elle-même l'intégrale générale d'une équation différentielle, elle doit changer en elle-même l'équation différentielle, et réciproquement. Quand il en est ainsi, on dit que l'équation différentielle *admet* cette transformation; avec cette terminologie, une équation différentielle admet toutes les transformations admises par son intégrale et n'en admet par d'autres.

Nous allons maintenant transformer la condition $V\omega = \chi(\omega)$ en une autre qui soit vérifiable directement sur l'équation différentielle.

Posons

$$Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y};$$

nous aurons

$$A\omega = 0,$$

et, par suite,

$$VA\omega = 0;$$

en outre

$$AV\omega = A\chi(\omega) = \chi'(\omega)A\omega = 0;$$

donc

$$(VA)\omega = 0.$$

Par conséquent, toute intégrale de $Af = 0$ est aussi intégrale de $(VA)f = 0$, donc

$$(VA)f = \lambda(x, y)\,Af.$$

Cette condition est aussi suffisante. En effet, si on la suppose satisfaite, on a

$$(VA)\omega = 0,$$

c'est-à-dire

$$VA\omega - AV\omega = 0;$$

mais $VA\omega = 0$ (puisque $A\omega = 0$); donc $AV\omega = 0$, et $V\omega$ est intégrale de l'équation donnée; par conséquent $V\omega = \chi(\omega)$.

(C. Q. F. D.)

De là cette conclusion :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation admette le groupe engendré par la transformation infinitésimale Vf, *est, en posant*

$$Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y},$$

que l'on ait

$$(VA)f = \lambda(x, y)\,Af.$$

Nous convenons de dire dans ce cas que l'équation donnée *admet* la transformation infinitésimale Vf.

Observation. — Les nouvelles définitions que nous venons de donner ne sont nullement en désaccord avec celles données dans la première Partie de ces Leçons.

Rappelons-nous, en effet, qu'ayant l'équation $\sum_i u_i\,dx_i = 0$, nous avons posé par définition

$$X\sum_i u_i\,dx_i = \sum X u_i\,dx_i + \sum u_i\,d\xi_i,$$

et nous avons dit que l'équation *admet* la transformation infinitésimale Xf quand

$$X\sum_i u_i\,dx_i = \rho\sum_i u_i\,dx_i.$$

Dans le cas actuel, nous avons

$$V(X\,dy - Y\,dx) = VX\,dy - VY\,dx + X\,d\eta - Y\,d\xi.$$

Il faudra donc que

$$VX\,dy - VY\,dx + X\,d\eta - Y\,d\xi = \rho(X\,dy - Y\,dx),$$

d'où

$$-VY + X\frac{\partial\eta}{\partial x} - Y\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\rho Y,$$

$$VX + X\frac{\partial\eta}{\partial y} - Y\frac{\partial\xi}{\partial y} = \quad \rho X,$$

ou encore, en posant

$$\rho = \lambda + \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$-VY + X\frac{\partial\eta}{\partial x} + Y\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\lambda Y,$$

$$VX - X\frac{\partial\xi}{\partial x} - Y\frac{\partial\xi}{\partial y} = \quad \lambda X,$$

ou, enfin,

$$VY - A\eta = \lambda Y, \qquad VX - A\xi = \lambda X.$$

Dès lors

$$(VA)f = (VX - A\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + (VY - A\eta)\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda\,Af,$$

et cette relation montre que les deux définitions coïncident.

Supposons encore qu'en appliquant à l'équation

$$X\,dy - Y\,dx = 0$$

la transformation

$$x' = x + \xi\,\delta t, \qquad y' = y + \eta\,\delta t,$$

cette équation conserve la même forme, c'est-à-dire qu'elle devienne

$$X(x', y')\,dy' - Y(x', y')\,dx' = 0.$$

On a

$$X(x', y') = X(x, y) + \delta t\,VX, \qquad Y(x', y') = Y(x, y) + \delta t\,VY;$$

par substitution, on obtient

$$(X + \delta t\,VX)(dy + \delta t\,d\eta) - (Y + \delta t\,VY)(dx + \delta t\,d\xi) = 0,$$

ou

$$(5)\qquad X\,dy - Y\,dx + \delta t[VX\,dy + X\,d\eta - VY\,dx - Y\,d\xi] = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} VX\,dy + X\,d\eta - VY\,dx - Y\,d\xi = {} & VX\,dy + X\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy\right) \\ & - VY\,dx - Y\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy\right) \\ = {} & \left[VX - A\xi + X\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right]dy \\ & - \left[VY - A\eta - Y\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right]dx. \end{aligned}$$

L'équation (5) devient donc

$$\begin{aligned} &\left\{\left[1 + \delta t\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right]X + (VX - A\xi)\,\delta t\right\}dy \\ -&\left\{\left[1 + \delta t\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right]Y + (VY - A\eta)\,\delta t\right\}dx = 0. \end{aligned}$$

Cette équation devant coïncider avec l'équation donnée, les expressions $(VX - A\xi)$, $(VY - A\eta)$ sont proportionnelles à X, Y, d'où il résulte aussitôt que

$$(VA)f = \lambda\,Af.$$

Ce résultat montre qu'une équation, qui reste invariante quand on lui applique une transformation infinitésimale considérée comme une véritable transformation, *admet* cette transformation. au sens que nous avons attribué à cette expression.

Nous allons indiquer quelques exemples simples dans lesquels nous vérifierons que les relations

$$V\omega = \chi(\omega), \qquad (VA)f = \lambda\,Af$$

sont satisfaites en même temps.

Premier exemple. — Considérons la famille des droites parallèles

$$y - mx = \text{const.}$$

et un groupe (à un paramètre) de translations défini par

$$x' = x + at, \qquad y' = y + bt.$$

On a

$$\xi = a, \qquad \eta = b, \qquad Vf = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Il s'ensuit que

$$V\omega = -am + b = \text{const.},$$

et cette relation exprime que la famille de lignes admet le groupe considéré.

L'équation différentielle de cette famille de droites est

$$dy - m\,dx = 0,$$

en sorte que

$$X = 1, \qquad Y = m, \qquad Af = \frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(VA)f = (VX - A\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + (VY - A\eta)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et cette relation exprime que l'équation différentielle admet la transformation infinitésimale Vf.

Deuxième exemple. — Considérons la famille des droites parallèles à une bissectrice des axes de coordonnées

$$y - x = \text{const.}$$

et le groupe des transformations par similitude

$$x' = x + tx, \qquad y' = y + ty.$$

L'équation différentielle de ces lignes est

$$dy - dx = 0.$$

Nous avons donc

$$Vf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$V\omega = -x + y = \omega, \qquad (VA)f = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -Af.$$

Les conditions voulues sont vérifiées.

Troisième exemple. — Soit la famille des courbes à tangentes égales (tractrices) et le groupe des translations parallèles à l'axe des x

$$x' = x + at, \qquad y' = y.$$

Nous avons

$$\xi = a, \qquad \eta = 0, \qquad Vf = a\frac{\partial f}{\partial x}.$$

L'équation différentielle est

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = c,$$

ou encore

$$\sqrt{c^2-y^2}\,dy - y\,dx = 0.$$

On a donc

$$Af = \sqrt{c^2-y^2}\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (VA)f = 0.$$

On peut calculer un facteur intégrant

$$M = \frac{1}{X\eta - Y\xi} = \frac{1}{ay},$$

ou plus simplement

$$M = \frac{1}{y}.$$

En divisant en effet l'équation par y, les variables se séparent, et, en intégrant, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{c^2-y^2}}{y}dy - x = \text{const.};$$

on a ensuite

$$V\omega = a\frac{\partial\omega}{\partial x} = -a.$$

Quatrième exemple. — Considérons l'infinité des cercles tangents aux axes de coordonnées et leurs trajectoires orthogonales. Les transformations homothétiques ayant l'origine pour pôle transforment en lui-même le système de ces trajectoires. On a

$$Vf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

L'équation des cercles considérés est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

ou

$$a = x + y \pm \sqrt{2xy}.$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \pm \sqrt{2xy}}{x \pm \sqrt{2xy}},$$

et par suite les trajectoires orthogonales ont pour équation

$$(y \pm \sqrt{2xy})\,dy - (x \pm \sqrt{2xy})\,dx = 0.$$

On a donc

$$\mathrm{A}f = (y \pm \sqrt{2xy})\frac{\partial f}{\partial x} + (x \pm \sqrt{2xy})\frac{\partial f}{\partial y},$$

et il est aisé de vérifier que

$$(\mathrm{VA})f = 0.$$

La connaissance du facteur intégrant

$$\mathrm{M} = \frac{1}{y(y \pm \sqrt{2xy}) - x(x \pm \sqrt{2xy})} = \frac{1}{(y-x)(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2}$$

permet de ramener l'intégration aux quadratures, mais nous ne développerons pas le calcul.

IV. — Forme canonique des groupes et des transformations infinitésimales.

Nous allons mettre les groupes sous une forme spéciale, dite *forme canonique*. A cet effet, imaginons d'introduire, dans une transformation infinitésimale, de nouvelles variables $\bar{x}$, $\bar{y}$, liées aux premières x, y, par les relations

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \qquad y = \psi(\bar{x}, \bar{y}),$$

desquelles nous tirons

$$\bar{x} = \mu(x, y), \qquad \bar{y} = \nu(x, y).$$

Nous obtenons

$$\overline{\mathrm{V}}f = \xi\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) + \eta\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right)$$

ou

$$\overline{\mathrm{V}}f = \mathrm{V}\bar{x}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \mathrm{V}\bar{y}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}.$$

Nous voulons faire prendre à cette relation la forme $\overline{\mathrm{V}}f = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{y}}$. Il faut et il suffit qu'on s'arrange de manière à avoir $\mathrm{V}\bar{x} = 0$, $\mathrm{V}\bar{y} = 1$, c'est-à-dire

$$\xi\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = 0, \qquad \xi\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = 1. \tag{1}$$

Il suffit d'intégrer la première de ces deux équations pour qu'ensuite l'intégration de la seconde se réduise aux quadratures. L'intégrale générale de la première de ces équations,

$$\bar{x}(x, y) = c,$$

définit une famille de courbes laissée invariante par la transformation infinitésimale $\mathrm{V}f$ (2e Partie, n° II); ces courbes sont celles décrites par chacun des points du plan quand ils sont soumis aux transformations du groupe considéré (à un paramètre); aussi les appelle-t-on les *trajectoires du groupe*.

Le système simultané équivalent à la seconde équation, d'après la règle de Lagrange, est

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{d\bar{y}}{1}; \tag{2}$$

une des deux équations qui le composent est

$$\eta\, dx - \xi\, dy = 0;$$

elle admet l'intégrale

$$\bar{x}(x, y) = c;$$

on déduit de là

$$y = \lambda(x, c),$$

et alors l'équation $\dfrac{dx}{\xi[x, \lambda(x, c)]} = d\bar{y}$ s'intègre par une quadrature.

Ainsi :

La réduction d'une transformation infinitésimale donnée à *la forme canonique se fait à l'aide de la détermination des trajectoires du groupe engendré par cette transformation, suivie d'une quadrature.*

Cela posé, soit un groupe mis sous sa forme canonique $Vf = \frac{\partial f}{\partial y}$, et une équation différentielle que nous écrirons

$$dy - \varphi(x, y)\,dx = 0.$$

On aura

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Pour que l'équation admette la transformation infinitésimale Vf, il faudra qu'on ait

$$(VA)f = \lambda(x, y)\,Af.$$

Or

$$(VA)f = (VX - A\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + (VY - A\eta)\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On devra donc avoir identiquement

$$\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x, y)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

d'où

$$\lambda = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0;$$

c'est-à-dire que la fonction φ ne saurait dépendre de y. Dans ces conditions, l'équation se réduit à la forme

$$dy - \varphi(x)\,dx = 0.$$

Application. — Considérons l'équation homogène du type

$$dy - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0.$$

Nous voulons vérifier si elle admet le groupe des transformations par similitude

$$Vf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les trajectoires de ce groupe sont les droites passant par l'origine

$$\frac{y}{x} = \text{const.}:$$

donc l'intégrale de la première des équations (1) est

$$\bar{x} = \frac{y}{x} = \text{const.}$$

Le système (2) devient

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = d\bar{y};$$

on en tire

$$\bar{y} = \log x + \text{const.}$$

Avec les nouvelles variables, on a

$$x = e^{\bar{y}}, \qquad y = \bar{x} e^{\bar{y}},$$

en sorte que l'équation devient

$$e^{\bar{y}}\, d\bar{x} + e^{\bar{y}} \bar{x}\, d\bar{y} - e^{\bar{y}} \varphi(\bar{x})\, d\bar{y} = 0$$

ou

$$d\bar{y} - \frac{1}{\varphi(\bar{x}) - \bar{x}}\, d\bar{x} = 0;$$

elle a précisément la forme trouvée tout à l'heure.

La réduction aux quadratures ainsi obtenue est en somme la même que celle à laquelle conduit la méthode classique.

V. — Forme générale des transformations infinitésimales admises par une équation différentielle donnée.

Observons avant tout qu'entre trois transformations infinitésimales à deux variables [comme, plus généralement, entre $(n+1)$ transformations infinitésimales à n variables] il existe toujours une relation linéaire homogène. En effet, si l'on pose

$$V_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad V_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad V_3 f = \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial y},$$

l'élimination de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$ donne

$$\begin{vmatrix} V_1 f & \xi_1 & \eta_1 \\ V_2 f & \xi_2 & \eta_2 \\ V_3 f & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Par suite, les cas à considérer à l'égard d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre se réduisent à trois, suivant que l'on connaît zéro, une ou deux transformations infinitésimales admises par cette équation.

Supposons connues deux transformations infinitésimales différentes ou à trajectoires distinctes :

$$V_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad V_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

avec $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \not\equiv 0$. Dans ce cas, l'équation différentielle s'intègre sans aucune quadrature. En effet, nous connaissons les deux facteurs intégrants

$$M_1 = \frac{1}{X\eta_1 - Y\xi_1}, \qquad M_2 = \frac{1}{X\eta_2 - Y\xi_2}.$$

Or nous savons que le rapport de deux facteurs intégrants est une intégrale. Nous avons donc l'intégrale

$$\frac{X\eta_2 - Y\xi_2}{X\eta_1 - Y\xi_1} = \text{const.}$$

Nous allons déduire de là la forme générale des transformations infinitésimales qui laissent invariante l'équation donnée. En désignant par ω une intégrale quelconque et par $\Psi(\omega)$ l'expression $\frac{X\eta_2 - Y\xi_2}{X\eta_1 - Y\xi_1}$, on a

$$X[\eta_2 - \eta_1 \Psi(\omega)] = Y[\xi_2 - \xi_1 \Psi(\omega)]$$

ou

$$\frac{\xi_2 - \xi_1 \Psi(\omega)}{X} = \frac{\eta_2 - \eta_1 \Psi(\omega)}{Y} = \rho(x, y).$$

Ainsi

$$\xi_2 = \xi_1 \Psi(\omega) + X\rho(x, y), \qquad \eta_2 = \eta_1 \Psi(\omega) + Y\rho(x, y).$$

Par suite

$$(1) \qquad V_2 f = \Psi(\omega)\, V_1 f + \rho(x, y)\, A f.$$

Donc dès qu'on connaît une transformation infinitésimale admise par l'équation ainsi que l'intégrale de cette équation, toute transformation infinitésimale laissant invariante l'équation donnée peut recevoir la forme (1).

Ce résultat peut être obtenu d'une manière différente. La transformation $V_1 f$ change la courbe $\omega = c$ en la courbe $\omega = c + V_1 \omega\, \delta t$. Posons alors $Uf = \frac{V_1 \omega}{V_2 \omega} V_2 f$. La transformation Uf changera la courbe $\omega = c$ en la courbe $\omega = c + U\omega\, \delta t$, c'est-à-dire, puisque $U\omega = \frac{V_1 \omega}{V_2 \omega} V_2 \omega = V_1 \omega$, en la courbe $\omega = c + V_1 \omega\, \delta t$. Les transformations $V_1 f$ et Uf changent donc une même courbe du système en une même courbe (mais non pas, en général, un même point en un même point). Il en résulte que la transformation $V_1 f - Uf$ laisse invariantes toutes les courbes du système (mais non pas tous les points de ces courbes). On a donc

$$V_1 f - Uf = \theta\, Af,$$

et l'on tire de là

$$V_2 f = \frac{V_2 \omega}{V_1 \omega} V_1 f - \theta \frac{V_2 \omega}{V_1 \omega} Af.$$

Mais $V_1 \omega$ et $V_2 \omega$ étant des intégrales, $\frac{V_2 \omega}{V_1 \omega}$ est aussi une intégrale que nous désignerons par $\Psi(\omega)$, en sorte que l'on a

$$V_2 f = \Psi(\omega) V_1 f + \rho(x, y) Af,$$

résultat déjà obtenu plus haut.

Exemple. — Soit l'équation homogène

$$x^2\, dy - 2y^2\, dx = 0,$$

qui, comme telle, admet la transformation

$$V_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Vérifions si elle admet aussi la transformation

$$V_2 f = y^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nous avons

$$Af = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2y^2\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (V_2 A)f = (y^2 4y - 2y^2 2y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Formons une intégrale :

$$\frac{X\eta_2 - Y\xi_2}{X\eta_1 - Y\xi_1} = \frac{x^2y^2}{x^2y - 2y^2x} = \frac{xy}{x-2y} = \omega;$$

il est aisé de vérifier que cette expression est bien une intégrale.

D'après cela, nous pouvons poser

$$V_2 f = \alpha V_1 f + \beta A f$$

ou

$$y^2\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \beta\left(x^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2y^2\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

l'identification donne

$$0 = \alpha x + \beta x^2, \qquad y^2 = \alpha y + 2\beta y^2,$$

d'où

$$\alpha = \frac{xy}{x-2y} = \omega, \qquad \beta = -\frac{y}{x-2y},$$

et par suite

$$V_2 f = \omega V_1 f + \frac{y}{2y-x} A f.$$

VI. — Détermination des équations différentielles qui admettent un groupe donné à un paramètre.

Nous pouvons supposer le groupe donné soit par sa transformation infinitésimale

$$Vf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

soit par ses équations finies

$$x' = \varphi(x, y, t), \qquad y' = \psi(x, y, t).$$

Commençons par le supposer donné par ses équations finies.

Si, à une courbe du plan, nous appliquons toutes les transformations du groupe donné, nous obtenons une famille de courbes qui est invariante par rapport aux transformations du groupe. En effet, si, en appliquant séparément à la courbe α les transformations S et T du groupe, on trouve les courbes β et γ, la courbe γ sera la transformée de β par la transformation de $S^{-1}T$ qui appartient au groupe; et réciproquement, on voit que toute courbe γ, qui est la transformée de β au moyen d'une transformation du groupe, appartient à la famille considérée.

Nous allons exprimer ceci analytiquement. Soit $\theta(x,y)=0$ l'équation d'une courbe du plan. L'équation de la famille de ses transformées sera

$$\theta[\varphi(x',y',-t),\ \psi(x',y',-t)]=0,$$

en sorte que la forme générale de la famille invariante est

$$\theta[\varphi(x,y,t),\ \psi(x,y,t)]=0,$$

θ désignant une fonction quelconque. Le problème se trouve donc résolu dans ce cas sans aucune intégration.

Supposons au contraire qu'on donne la transformation infinitésimale du groupe. Nous savons que la famille $\omega=$ const. des courbes invariantes par rapport au groupe doit satisfaire à la relation $V\omega=\chi(\omega)$. On peut alors réduire cette relation à la forme $V\omega=1$ (exception faite pour le cas où $V\omega=0$). Il s'agit donc d'intégrer cette équation, ou de réduire le groupe à la forme canonique. Observons que pour le groupe réduit les trajectoires sont les droites parallèles à l'axe des x.

Donnons quelques exemples :

Premier exemple. — Considérons le groupe des *translations* parallèles à l'axe des x

$$x'=x+t,\qquad y'=y.$$

L'équation de la famille des transformées de la courbe $\theta(x,y)=0$ est

$$\theta(x+t,y)=0.$$

Il peut arriver que θ ou bien ne renferme pas x, ou bien le renferme. Dans le premier cas, l'équation $\theta=0$ équivaut à $y=$ const.; elle représente des droites dont chacune est invariante par rapport au groupe. Dans le second cas, l'équation peut s'écrire

$$x + t = \lambda(y);$$

l'équation différentielle correspondante est

$$dx = \lambda'(y)\,dy;$$

x n'y figure pas explicitement. Réciproquement, si nous avons l'équation

$$dx = \varphi(y)\,dy,$$

il vient

$$Af = \varphi(y)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}; \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad (VA)f = 0.$$

De là cette conclusion :

Les équations différentielles qui admettent le groupe considéré sont exclusivement toutes celles dans lesquelles x ne figure pas explicitement.

Deuxième exemple. — Soit le groupe des *affinités*

$$x' = ax, \qquad y' = y.$$

Si $\Omega(x, y) = 0$ est une courbe quelconque, $\Omega(ax, y) = 0$ sera la famille invariante de courbes engendrée par cette courbe-là. Il peut arriver que Ω ait la forme $\Omega(y)$; alors on n'a pas une famille de courbes, mais une courbe seulement. Pour qu'on ait une famille invariante de courbes, on doit supposer que, dans Ω, entre le premier argument x; alors l'équation $\Omega(x, y) = 0$ peut s'écrire

$$x = \lambda(y),$$

et l'équation de la famille de courbes devient

$$ax = \lambda(y).$$

L'équation différentielle correspondante est

$$\frac{\lambda(y)}{x}\,dx = \lambda'(y)\,dy.$$

Pour calculer un facteur intégrant, commençons par trouver la transformation infinitésimale du groupe; en posant $a = 1 + t$, il vient

$$x' = x + tx, \qquad y' = y;$$

d'où

$$\xi = x, \qquad \eta = 0,$$

en sorte que

$$Vf = x\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Il en résulte que $M = \dfrac{1}{-x\dfrac{\lambda(y)}{x}} = -\dfrac{1}{\lambda(y)}$, et l'intégration est immédiatement réduite aux quadratures. Comme on a

$$Af = \lambda'(y)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\lambda(y)}{x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

on trouve de suite

$$(VA)f = -\lambda'(y)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\lambda(y)}{x}\frac{\partial f}{\partial y} = -Af.$$

Troisième exemple. — Pour le groupe des tranformations par similitude, on trouve

$$Vf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si $\Omega(x, y) = 0$ est une courbe quelconque, la famille invariante correspondante sera

$$\Omega(ax, ay) = 0.$$

Il peut arriver que cette équation soit indépendante de a, si Ω est homogène en x, y, et de degré zéro. Alors $\Omega(x, y) \equiv \theta\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Les trajectoires ont alors pour équation $\dfrac{x}{y} = \text{const.}$; elles sont formées par l'ensemble des droites issues de l'origine. Ce cas spécial laissé de côté, de l'équation $\Omega(a\bar{x}, ay) = 0$ on tire

$$ay = \mu(ax) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = \mu'(ax).$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$ax = \nu\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

L'élimination de a donne

$$\frac{y}{x} = \frac{\mu\left[\nu\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]}{\nu\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \rho\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

en sorte que l'équation différentielle de la famille prend la forme

$$dy - \sigma\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0;$$

c'est donc une équation *homogène*. D'ailleurs, on a déjà vu (2ᵉ Partie, n° IV) que toute équation de cette forme admet le groupe considéré. De là cette conclusion :

Les équations différentielles qui admettent le groupe des transformations par similitude sont exclusivement toutes les équations homogènes.

Quatrième exemple. — Soient les transformations définies par

$$x' = x, \qquad y' = y + a\varphi(x).$$

Elles forment un groupe, car, si l'on pose : $x'' = x', y'' = y' + b\varphi(x')$, il en résulte que

$$x'' = x, \qquad y'' = y + (a + b)\varphi(x).$$

La transformation infinitésimale du groupe est donnée par

$$\xi = 0, \qquad \eta = \varphi(x); \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{V}f = \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

D'après cela, si $\Omega(x, y) = 0$ est la courbe habituelle,

$$\Omega[x, y + a\varphi(x)] = 0$$

représentera la famille de courbes invariante correspondante. Deux cas sont à distinguer selon que Ω ne contient pas ou contient le second argument. Dans le premier cas, les trajectoires sont $x = \text{const.}$; elles comprennent toutes les droites parallèles à l'axe des y. Dans le second cas, nous pouvons donner à l'équation la forme

$$y + a\varphi(x) = \mu(x);$$

d'où, par dérivation,

$$\frac{dy}{dx} + a\varphi'(x) = \mu'(x).$$

L'élimination de a donne l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y + \left[\frac{\mu(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mu'(x)\right] = 0,$$

qui est une équation *linéaire*.

Nous allons montrer que, réciproquement, à une équation différentielle linéaire quelconque on peut associer un groupe de la forme susdite, laissant invariante l'équation donnée. Soit en effet l'équation linéaire quelconque

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y - Q(x) = 0.$$

Il suffit de poser

$$P(x) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \qquad Q(x) = \mu'(x) - \mu(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)};$$

d'où l'on déduit

$$\varphi(x) = e^{-\int P(x)\,dx},$$
$$\int \frac{Q}{\varphi}\,dx = \frac{\mu}{\varphi},$$

ou

$$\mu = e^{-\int P\,dx} \int Q e^{-\int P\,dx}\,dx.$$

On est conduit au facteur intégrant $M = \frac{1}{\varphi(x)} = e^{\int P\,dx}$. Ainsi retrouve-t-on la méthode d'intégration donnée pour ces équations différentielles par l'Analyse ordinaire.

On peut encore vérifier que $(VA)f \equiv 0$, ce qui confirme le fait que l'équation admet le groupe considéré.

VII. — Interprétation géométrique du facteur intégrant.

Soit l'équation

$$X\,dy - Y\,dx = 0$$

et le groupe

$$Vf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

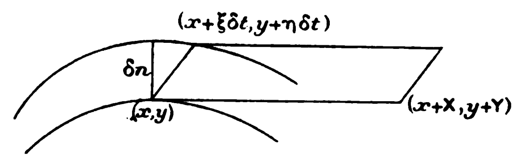
qui la laisse invariante, ou qui laisse invariante la famille de ses courbes intégrales.

Le coefficient angulaire de la tangente à une courbe en un de ses points est $\frac{Y}{X}$. Ce point, par l'effet de la transformation Vf, se transforme en un point d'une courbe infiniment voisine de la famille. Si (x, y) sont les coordonnées du point, $(x+\xi\,\delta t, y+\eta\,\delta t)$ seront celles du point transformé. $\frac{\eta}{\xi}$ est le coefficient angulaire de la direction suivant laquelle a lieu le passage de l'un des points à l'autre. Formons le parallélogramme ayant trois sommets aux points (x, y), $(x+\xi\,\delta t, y+\eta\,\delta t)$, $(x+Y, y+Y)$; son aire sera donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x+\xi\,\delta t & y+\eta\,\delta t & 1 \\ x+X & y+Y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi\,\delta t & \eta\,\delta t & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = (Y\xi - X\eta)\,\delta t = -\frac{1}{M}\,\delta t.$$

Si l'on tient compte de ce qu'un facteur intégrant peut toujours être multiplié par une constante quelconque, on peut dire que le

Fig. 1.



facteur intégrant M est l'inverse de l'aire du parallélogramme susdit (*fig.* 1).

Soit δn la portion de normale comprise entre les deux courbes considérées de la famille; l'aire de notre parallélogramme sera aussi donnée par le produit $\delta n \sqrt{X^2+Y^2}$; on aura donc

$$\delta n \sqrt{X^2+Y^2} = \frac{1}{M}\delta t, \qquad \text{d'où} \qquad M = \frac{\delta t}{\delta n \sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Dès lors, si nous savons calculer δn en fonction de (x, y), nous pouvons en déduire immédiatement le facteur intégrant M. C'est ce qui arrive précisément dans certains cas dont nous donnerons quelques exemples.

Premier exemple. — Soit une équation différentielle représentant la famille des développantes d'une courbe donnée. Dans ce cas, δn est constante, et par suite on a

$$M = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Ceci est applicable plus généralement à une famille quelconque de courbes parallèles.

Deuxième exemple. — Considérons la famille simplement infinie de droites $y = px + q$, où $p = f(a)$, $q = g(a)$ sont des fonctions d'un certain paramètre a. Cherchons la famille des courbes qui coupent ces droites sous un angle donné α.

Soit $\varphi(x, y, k) = 0$ l'équation de cette famille; on a

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{dy}{dx} - p}{1 + p\dfrac{dy}{dx}},$$

ou

$$(1) \qquad (1 - p\tan\alpha)\,dy - (p + \tan\alpha)\,dx = 0.$$

De l'équation $y = f(a)x + g(a)$, on tire

$$a = \lambda(x, y),$$

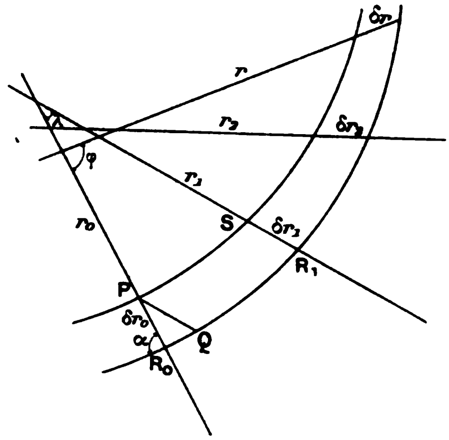
en sorte qu'on peut écrire

$$(2) \qquad p = f(a) = f[\lambda(x, y)].$$

L'équation (1), dans laquelle on remplace p par son expression (2), est l'équation différentielle de la famille cherchée de courbes.

Dans ce cas, nous pouvons calculer la quantité δn. A cet effet,

Fig. 2.



considérons (*fig.* 2) deux droites r_0, r de la famille donnée, formant entre elles un angle φ, et désignons par δr_0, δr les segments interceptés sur ces droites entre deux trajectoires consécutives. Posons $\lambda = \frac{\varphi}{N}$ (N étant très grand), et après avoir mené par le point P (*voir* la figure) la droite PQ parallèle à la droite r_1 de la famille qui fait l'angle λ avec la droite r_0, considérons le triangle PQR_0 dans lequel l'angle en R_0 est égal à α. Il donne (puisque, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, $PQ = SR_1 = \delta r_1$)

$$\frac{\delta r_1}{\delta r_0} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \lambda)} = \frac{1}{\cos\lambda - \cot\alpha \sin\lambda},$$

ou, en développant suivant les puissances entières et positives de λ et en négligeant les puissances supérieures de λ :

$$\frac{\delta r_1}{\delta r_0} = 1 + \lambda \cot\alpha.$$

On trouverait de même

$$\frac{\delta r_2}{\delta r_1} = 1 + \lambda \cot\alpha,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et par suite

$$\frac{\delta r}{\delta r_0} = (1 + \lambda \cot \alpha)^N = (1 + \lambda \cot \alpha)^{\frac{\varphi}{\lambda}}.$$

Ceci peut s'écrire

$$\frac{\delta r}{\delta r_0} = \left[(1 + \lambda \cot \alpha)^{\frac{1}{\lambda \cot \alpha}}\right]^{\varphi \cot \alpha}.$$

Comme λ tend vers zéro quand N croît indéfiniment, il vient

$$\frac{\delta r}{\delta r_0} = e^{\varphi \cot \alpha}.$$

De δr, on déduit δn :

$$\delta n = \delta r \sin \alpha = \delta r_0 \sin \alpha \, e^{\varphi \cot \alpha}.$$

Si nous prenons comme droite initiale la parallèle à l'axe des x, nous avons

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} p,$$

en sorte que

$$\delta n = \delta r_0 \sin \alpha \, e^{\operatorname{arc\,tang} p \cot \alpha}.$$

Dès lors, en tenant compte de ce que $X = 1 - p \tan\!g\, \alpha$, $Y = p + \tan\!g\, \alpha$, et en supposant que $\delta r_0 = \delta t$, on trouve

$$M = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}\, e^{\operatorname{arc\,tang} p \cot \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + p^2}\, e^{\operatorname{arc\,tang} p \cot \alpha}},$$

p étant donné par (2).

Comme cas particulier du problème considéré, supposons que les droites de la famille donnée passent par un même point. Dans ce cas, $p = \frac{y}{x}$, et, si l'on pose $\tan\!g\, \alpha = c$, l'équation différentielle

$$(x - cy)\, dy - (y + cx)\, dx = 0$$

doit admettre le facteur intégrant

$$M = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}\, e^{\frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}}.$$

En effet, on peut l'écrire, après multiplication par M,

$$e^{-\frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}} \left(\frac{x\, dy - y\, dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} - c \frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0,$$

ou encore, en introduisant les coordonnées polaires (ρ, ω),

$$e^{-\frac{\omega}{c}}(\rho\, d\omega - c\, d\rho) = 0,$$

ou enfin

$$-c\, d\left(\rho e^{-\frac{\omega}{c}}\right) = 0.$$

Son intégrale est

$$\rho e^{-\frac{\omega}{c}} = \text{const.};$$

elle représente une famille de spirales logarithmiques.

VIII. — Équations différentielles à trois variables.

Jusqu'à présent, nous nous sommes occupé des équations différentielles de la forme $Y\,dx - X\,dy = 0$, ou, ce qui revient au même, des équations aux dérivées partielles du type

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Nous nous proposons maintenant de considérer des équations du même type, mais à plus de deux variables, soit

$$(1) \qquad X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$x_1, \ldots, x_n$ étant n variables dont $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions.

On sait que l'intégration d'une équation de cette forme se ramène à l'intégration du système d'équations

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

et réciproquement, on sait aussi que, si l'on a $(n-1)$ intégrales indépendantes de ce système,

$$u_1(x) = \text{const.}, \qquad u_2(x) = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_{n-1}(x) = \text{const}$$

l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\Omega(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}),$$

Ω étant une fonction arbitraire.

Au lieu de raisonner sur les équations du type général (1), nous nous limiterons au cas où il n'y a que trois variables. Il nous sera alors facile d'interpréter géométriquement (dans l'espace ordinaire à trois dimensions) les résultats que nous aurons à exposer.

Soit donc l'équation à trois variables

$$(3) \qquad \mathrm{A}f \equiv \mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{Z}\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

son intégration, comme on vient de le dire, équivaut à celle du système

$$(4) \qquad \frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}} = \frac{dz}{\mathrm{Z}}.$$

Les équations (4) admettent deux intégrales indépendantes, de la forme

$$(5) \qquad u(x, y, z) = a, \qquad v(x, y, z) = b.$$

Si l'on donne à a et à b deux valeurs fixes, on a une courbe de l'espace euclidien; de ces courbes, il en existe ∞^2; elles sont dites *courbes intégrales* du système (4), ou encore *caractéristiques* de l'équation (3). Les quantités X, Y, Z sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente à une de ces courbes, en orte qu'elles donnent en un point la direction de la courbe.

Cela posé, écrire $\Omega(u, v) = 0$ revient à écrire $\Omega(a, b) = 0$; cela équivaut à choisir parmi les ∞^2 courbes intégrales une simple infinité de ces courbes. Supposons, par exemple, que les deux équations (5) représentent deux familles de sphères concentriques, à centres distincts; nous pouvons établir entre ces sphères une correspondance associant les sphères de même rayon; alors les intersections des surfaces correspondantes seront ∞^1 cercles situés dans un plan et l'équation de ce plan serait précisément $\Omega(u, v) = 0$. En général, l'équation $\Omega(u, v) = 0$ représente la surface lieu des ∞^1 courbes intégrales associées de la sorte; cette surface est dite une *surface intégrale* de l'équation (3). Ainsi une surface intégrale contient ∞^1 caractéristiques.

Supposons maintenant que, réciproquement, on donne un système d'équations de la forme (5); cherchons à construire une équation de la forme (3) ayant u et v pour intégrales. On devra avoir

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}+Z\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

$$X\frac{\partial v}{\partial x}+Y\frac{\partial v}{\partial y}+Z\frac{\partial v}{\partial z}=0;$$

en sorte que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

sera l'équation cherchée. Donc un système de ∞^2 courbes définit une équation, dont ces courbes sont les caractéristiques. En d'autres termes, deux équations de la forme (3) sont distinctes toutes les fois que leurs caractéristiques sont différentes, et alors seulement.

Soient alors trois équations

$$A_i f \equiv X_i\frac{\partial f}{\partial x}+Y_i\frac{\partial f}{\partial y}+Z_i\frac{\partial f}{\partial z}=0 \qquad (i=1,2,3),$$

et supposons qu'elles ne soient pas indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe une relation identique

$$\lambda_1 A_1 f+\lambda_2 A_2 f+\lambda_3 A_3 f=0.$$

On devra avoir

$$\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2+\lambda_3 X_3=0,$$
$$\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2+\lambda_3 Y_3=0,$$
$$\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2+\lambda_3 Z_3=0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Comme X, Y, Z sont proportionnels aux cosinus directeurs des tangentes aux caractéristiques, on voit que :

Si trois équations ne sont pas indépendantes, les tangentes aux trois caractéristiques passant par un point quelconque sont dans un même plan, et réciproquement.

linéaire d'une surface intégrale, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0;$$

cette équation, jointe aux deux équations $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$, donne

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

équation aux différentielles totales, vérifiée par les intégrales des deux équations données.

Soit un groupe à trois variables et à un seul paramètre

$$Vf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Nous le dirons réduit à la *forme canonique* si, par l'introduction convenable de nouvelles variables $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, la transformation Vf prend la forme

$$\bar{V}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{V}f = {} & \xi\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right) \\ & + \eta\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right) + \zeta\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

ou

$$\bar{V}f = V\bar{x}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + V\bar{y}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + V\bar{z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Supposons $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ choisis de manière qu'on ait

$$V\bar{x} = 0, \qquad V\bar{y} = 0, \qquad V\bar{z} = 1,$$

ou

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & \xi\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} = 0, \\ & \xi\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \bar{y}}{\partial z} = 0, \\ & \xi\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 1; \end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que, *si trois équations ont une intégrale commune, elles ne sont pas indépendantes.* Car, si ω est cette intégrale commune, nous avons

$$X_i \frac{\partial \omega}{\partial x} + Y_i \frac{\partial \omega}{\partial y} + Z_i \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

le déterminant des coefficients est donc nul, et cela fournit précisément la relation qui exprime que les équations en question ne sont pas indépendantes.

Observons encore que *quatre équations à trois variables ne peuvent être indépendantes.* En effet, soient les équations $A_i f = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; nous avons

$$\begin{vmatrix} A_1 f & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ A_2 f & X_2 & Y_2 & Z_2 \\ A_3 f & X_3 & Y_3 & Z_3 \\ A_4 f & X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui est une relation linéaire entre les $A_i f$.

Considérons deux équations $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$, ayant une intégrale commune $f = \omega(x, y, z)$. Cette intégrale satisfera aussi (n° VIII, Ire Partie) à l'équation $(A_1, A_2) f = 0$, et par suite on devra avoir, d'après ce qu'on a vu antérieurement,

$$(6) \qquad (A_1, A_2) f = \rho_1 A_1 f + \rho_2 A_2 f.$$

Nous pouvons arriver à ce résultat d'une autre manière. Nous savons, en effet, que m équations à $(m + n)$ variables n'admettent que n intégrales indépendantes, si elles constituent un système complet. Dans le cas présent, nous avons deux équations à trois variables; donc il n'existe qu'une seule intégrale si le système est complet, c'est-à-dire si la relation (6) est satisfaite. La réciproque est aussi vraie, car, si la relation (6) est satisfaite, le système est complet. Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ *aient une intégrale commune est que*

$$(A_1, A_2) f \equiv \rho_1 A_1 f + \rho_2 A_2 f.$$

Désignons alors par dx, dy, dz les composantes d'un élément linéaire d'une surface intégrale, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0;$$

cette équation, jointe aux deux équations $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$, donne

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

équation aux différentielles totales, vérifiée par les intégrales des deux équations données.

Soit un groupe à trois variables et à un seul paramètre

$$Vf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Nous le dirons réduit à la *forme canonique* si, par l'introduction convenable de nouvelles variables $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, la transformation Vf prend la forme

$$\bar{V}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\bar{V}f = \;& \xi\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right) \\ & + \eta\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right) + \zeta\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

ou

$$\bar{V}f = V\bar{x}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + V\bar{y}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + V\bar{z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Supposons $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ choisis de manière qu'on ait

$$V\bar{x} = 0, \qquad V\bar{y} = 0, \qquad V\bar{z} = 1,$$

ou

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \zeta\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial z} = 0, \\ \xi\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \zeta\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial z} = 0, \\ \xi\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \zeta\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 1; \end{cases}$$

on obtient alors, comme on le désirait,

$$\overline{\mathrm{V}}f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}.$$

D'après (7), on voit que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont deux intégrales de l'équation $\mathrm{V}f = 0$, c'est-à-dire du système

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}, \tag{8}$$

et que $\overline{z}$ est une intégrale de l'équation $\mathrm{V}f = 1$, c'est-à-dire du système

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{d\overline{z}}{1}. \tag{9}$$

Quand on a intégré l'équation $\mathrm{V}f = 0$, la recherche de l'autre intégrale se réduit aux quadratures.

En effet, imaginons qu'on ait trouvé les deux intégrales indépendantes de $\mathrm{V}f = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \overline{x} = \text{const.}, \qquad \psi(x, y, z) = \overline{y} = \text{const.};$$

les deux équations, puisqu'elles sont indépendantes, sont certainement résolubles par rapport à deux des variables x, y, z; supposons qu'elles le soient par rapport à x, y; on en déduit

$$x = \mu(\overline{x}, \overline{y}, z), \qquad y = \nu(\overline{x}, \overline{y}, z),$$

et par suite

$$\zeta(x, y, z) = \zeta[\mu(\overline{x}, \overline{y}, z), \nu(\overline{x}, \overline{y}, z), z] = \theta(\overline{x}, \overline{y}, z).$$

Il ne reste plus qu'à intégrer l'équation

$$\frac{dz}{\theta(\overline{x}, \overline{y}, z)} = \frac{d\overline{z}}{1},$$

où $\overline{x}$, $\overline{y}$ doivent être considérés comme constants; l'intégrale, comme on voit, s'obtient par une quadrature. Donc :

La réduction d'une transformation infinitésimale $\mathrm{V}f$ *à la* *forme canonique exige l'intégration complète de l'équation* $Vf = 0$ *et une quadrature.*

Si nous posons

$$\bar{V}f = \bar{\xi}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \bar{\eta}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \bar{\zeta}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

nous avons

$$\bar{\xi} = 0, \qquad \bar{\eta} = 0, \qquad \bar{\zeta} = 1;$$

donc les équations finies du groupe sous la forme canonique sont

$$\bar{x}' = \bar{x}, \qquad \bar{y}' = \bar{y}, \qquad \bar{z}' = \bar{z} + t;$$

elles représentent, dans le nouvel espace $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, le groupe des translations parallèles à l'axe des $\bar{z}$.

Voyons quelle est la signification géométrique de cette réduction. La transformation Vf a pour effet de transformer le point (x, y, z) en un point infiniment voisin $(x + \xi\delta t, y + \eta\delta t, z + \zeta\delta t)$, en sorte que la direction suivant laquelle s'effectue cette transformation a ses cosinus directeurs proportionnels à ξ, η, ζ. En répétant indéfiniment cette transformation on obtient la trajectoire décrite par le point (x, y, z). Ces trajectoires forment une double infinité, et, par chaque point de l'espace ordinaire à trois dimensions, il en passe une; sur toute trajectoire il y a ∞^1 points du même espace. Les équations différentielles de ces trajectoires sont

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta},$$

c'est-à-dire que les trajectoires sont les courbes intégrales de ce système d'équations et ont pour équations finies : $\bar{x} = \text{const.}$, $\bar{y} = \text{const.}$ Donc la réduction à la forme canonique se traduit géométriquement par la détermination des trajectoires, ou encore, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, par la transformation de l'espace en un autre espace tel que les trajectoires se transforment en droites parallèles à l'axe des $\bar{z}$.

Exemple. — Considérons le groupe des mouvements hélicoïdaux ayant le même axe et le même pas. Prenons cet axe pour axe des z, et servons-nous, de préférence aux coordonnées cartésiennes, du système des coordonnées cylindriques, chaque point étant défini par son z et par les coordonnées polaires (ρ, φ) de sa projection sur le plan des (x, y). Soient (ρ, φ, z) les coordonnées initiales du point que la transformation change en le point (ρ', φ', z'). Les équations finies du groupe sont alors

$$\rho' = \rho, \qquad \varphi' = \varphi + t, \qquad z' = z + mt.$$

Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$(10) \qquad x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2, \qquad \text{arc tang}\frac{y'}{x'} = \text{arc tang}\frac{y}{x} + t.$$

De la seconde de ces équations il résulte que

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\frac{y}{x} + \text{tang}\, t}{1 - \text{tang}\, t \frac{y}{x}} = \frac{x \sin t + y \cos t}{x \cos t - y \sin t},$$

ou

$$x' = \lambda(x \cos t - y \sin t), \qquad y' = \lambda(x \sin t + y \cos t).$$

Par suite $x'^2 + y'^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$ et, en tenant compte de la première équation (10), $\lambda = \pm 1$. Comme le choix du signe est indifférent, nous pouvons prendre $\lambda = 1$, et les équations finies du groupe écrites en coordonnées cartésiennes deviennent

$$(11) \quad x' = x \cos t - y \sin t, \qquad y' = x \sin t + y \cos t, \qquad z' = z + mt.$$

Alors

$$\xi = \left(\frac{dx'}{dt}\right)_{t=0} = -y, \qquad \eta = \left(\frac{dy'}{dt}\right)_{t=0} = x, \qquad \zeta = \left(\frac{dz'}{dt}\right)_{t=0} = m,$$

et par conséquent

$$\mathrm{V}f = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + m\frac{\partial f}{dz}.$$

Une fois établie l'expression de $\mathrm{V}f$, effectuons la réduction à la forme canonique ou la détermination des trajectoires.

Les trajectoires peuvent s'obtenir en partant des équations finies du groupe. Soit $(x_0 y_0 z_0)$ un point de l'espace; les équations paramétriques de la trajectoire qui passe par ce point sont

$$x' = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \qquad y' = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \qquad z' = z_0 + mt.$$

Posons $x_0 = \rho_0 \cos\varphi_0$, $y_0 = \rho_0 \sin\varphi_0$; nous aurons

$$x' = \rho_0 \cos(t + \varphi_0), \qquad y' = \rho_0 \sin(t + \varphi_0), \qquad z' = z_0 + mt,$$

et ces équations expriment que la courbe est une hélice de rayon ρ_0 et de pas $2\pi m$.

Voyons maintenant à obtenir les trajectoires en intégrant le système (8) qui, dans notre cas, deviennent

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{m}.$$

Nous avons aussitôt

$$x\,dx + y\,dy = 0, \qquad \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{m};$$

d'où

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \qquad \frac{z}{m} - \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \text{const.},$$

et ces deux équations représentent évidemment la même courbe que nous avons trouvée tout à l'heure.

Réduisons le groupe à la forme canonique. Nous avons immédiatement

$$\bar{x} = x^2 + y^2, \qquad \bar{y} = \frac{z}{m} - \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

Pour avoir $\bar{z}$, la dernière équation différentielle du système (9) que nous avons à considérer, c'est-à-dire $\dfrac{dz}{m} = \dfrac{d\bar{z}}{1}$, donne

$$\bar{z} = \frac{z}{m}.$$

En introduisant les nouvelles variables, on trouve que les équations (11) du groupe se réduisent à la forme :

$$\overline{x'} = \bar{x}, \qquad \overline{y'} = \bar{y}, \qquad \overline{z'} = \bar{z} + t.$$

IX. — Équations différentielles à un nombre quelconque de variables.

Soit l'équation

$$(1) \qquad Af \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

On sait qu'une telle équation admet $(n-1)$ intégrales indépendantes; si on les désigne par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, une autre intégrale quelconque de l'équation a la forme

$$F(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}).$$

Réciproquement, étant données $(n-1)$ fonctions indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, il existe (à un facteur près) une et une seule équation de la forme (1), dont ces fonctions soient intégrales; cette équation est

$$\frac{D(f, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)} = 0.$$

Si l'on applique aux variables une transformation

$$x'_1 = f_1(x), \qquad x'_2 = f_2(x), \qquad \ldots, \qquad x'_n = f_n(x),$$

notre équation différentielle (1) se transforme en une autre dont les intégrales sont les transformées des intégrales susdites. D'après cela, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation admette une transformation est que toute intégrale de cette équation se change par la transformation en une intégrale de la même équation.

Si, au lieu d'une seule transformation, on a un groupe à un paramètre Vf, on démontre, comme on l'a fait pour les équations à deux variables, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe laisse l'équation invariante sont

$$V\omega_i = \varphi_i(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}).$$

Mais ces conditions ne peuvent guère servir, parce qu'elles exigent la connaissance des intégrales; il est donc besoin de trouver un autre critère basé seulement sur l'examen de l'équation différentielle.

Si ω_i est une intégrale, on a

$$A\omega_i = 0,$$

et par suite

$$(VA)\omega_i = VA\omega_i - AV\omega_i = -AV\omega_i.$$

Supposons que l'équation admette le groupe Vf; $V\omega_i$ est une intégrale, donc $AV\omega_i = 0$, et nous avons

$$(VA)\omega_i = 0.$$

Cette relation exprime que l'équation $(VA)f = 0$ admet les intégrales ω_i. Il en résulte que l'équation $(VA)f = 0$ ne peut différer de $Af = 0$ que par un facteur fini. Par suite, nous avons comme condition nécessaire

$$(VA)f = \rho Af.$$

Réciproquement, si, dans cette relation supposée satisfaite, nous remplaçons f par ω_i, nous avons

$$(VA)\omega_i = 0,$$

et par suite

$$AV\omega_i = 0;$$

ceci exprime que $V\omega_i$ est une intégrale de $Af = 0$, en sorte que l'équation admet le groupe Vf. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $Af = 0$ *admette le groupe* Vf *est que l'on ait*

$$(VA)f = \rho Af.$$

On démontre encore immédiatement que :

Si une équation différentielle admet les deux groupes engendrés par les transformations infinitésimales $V_1 f$, $V_2 f$, *elle admet aussi le groupe engendré par la transformation* $(V_1, V_2)f$.

Rappelons-nous (n° V, 2e Partie) qu'entre $(n+1)$ transformations infinitésimales $V_1 f, V_2 f, \ldots, V_{n+1} f$ à n variables, il existe toujours une relation linéaire. Supposons alors qu'une équation différentielle (1) admette r transformations infinitésimales $V_1 f$, $V_2 f, \ldots, V_r f$; il pourra exister, entre les transformations Vf et la transformation Af, des relations linéaires (à coefficients constants ou variables). Imaginons qu'on choisisse parmi les Vf les transformations $V_1 f, V_2 f, \ldots, V_\rho f$ telles qu'entre Af et elles il n'existe pas de relations linéaires, et que les Vf restants $V_{\rho+1} f, V_{\rho+2} f, \ldots, V_r f$ puissent s'exprimer linéairement à l'aide des Vf choisis et de Af. Il faudra nécessairement qu'on ait $\rho < n$. Écrivons les relations qui lient les seconds Vf aux premiers

$$(2)\quad \begin{cases} V_{\rho+1}f = \mu_{\rho+1,1}V_1 f + \mu_{\rho+1,2}V_2 f + \ldots + \mu_{\rho+1,\rho}V_\rho f + \nu_{\rho+1}Af, \\ V_{\rho+2}f = \mu_{\rho+2,1}V_1 f + \mu_{\rho+2,2}V_2 f + \ldots + \mu_{\rho+2,\rho}V_\rho f + \nu_{\rho+2}Af, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_r f \;= \mu_{r,1}\;\; V_1 f + \mu_{r,2}\;\; V_2 f + \ldots + \mu_{r,\rho}\;\; V_\rho f + \nu_r\;\; Af, \end{cases}$$

les μ, ν étant des fonctions des x.

Nous voulons démontrer que les μ sont des intégrales de l'équation donnée. En effet, si l'on remplace dans la première des équations (2) f par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, en se rappelant que

$$A\omega_1 = A\omega_2 = \ldots = A\omega_{n-1} = 0,$$

il vient

$$(3)\quad \begin{cases} V_{\rho+1}\omega_1 \;\;\; = \mu_{\rho+1,1}V_1\omega_1 \;\; + \mu_{\rho+1,2}V_2\omega_1 \;\; + \ldots + \mu_{\rho+1,\rho}V_\rho\omega_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_{\rho+1}\omega_{n-1} = \mu_{\rho+1,1}V_1\omega_{n-1} + \mu_{\rho+1,2}V_2\omega_{n-1} + \ldots + \mu_{\rho+1,\rho}V_\rho\omega_{n-1}. \end{cases}$$

Or, d'après l'hypothèse faite relativement à $V_1 f$, $V_2 f$, $\ldots$, $V_\rho f$, la matrice

$$\begin{Vmatrix} V_1\omega_1 & \ldots & V_\rho\omega_1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ V_1\omega_{n-1} & \ldots & V_\rho\omega_{n-1} \end{Vmatrix}$$

a certainement pour caractéristique ρ (avec $\rho \leqq n-1$). En effet, s'il n'en était pas ainsi, entre les éléments des diverses lignes de la matrice il devrait exister une même relation linéaire

$$\alpha_1 V_1\omega_i + \alpha_2 V_2\omega_i + \ldots + \alpha_\rho V_\rho\omega_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1);$$

c'est-à-dire que les ω_i seraient intégrales de l'équation

$$\alpha_1 V_1 f + \alpha_2 V_2 f + \ldots + \alpha_\rho V_\rho f = 0;$$

le premier membre de cette équation ne pourrait différer de Af que par un facteur :

$$\alpha_1 V_1 f + \alpha_2 V_2 f + \ldots + \alpha_\rho V_\rho f = \beta Af,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Il résulte de là que, parmi les équations (3), nous pourrons en choisir ρ qui soient résolubles par rapport aux μ. Leur résolution donne les μ comme fonctions des $V\omega$, qui sont d'ailleurs des intégrales de notre équation; les μ sont donc aussi des intégrales de l'équation (1). (C. Q. F. D.)

Dans le cas où $n = 3$, nous pouvons donner de ce fait une démonstration différente. Alors, ρ peut être égal à 2 ou à 1. Supposons d'abord $\rho = 2$. Les trajectoires de Af sont des lignes de l'espace à trois dimensions. Soient

$$\varphi(x, y, z) = a, \qquad \psi(x, y, z) = b \tag{4}$$

les équations des trajectoires, ou des *caractéristiques* de l'équation $Af = 0$, et désignons par δ_0, δ_1, δ_2 les variations dues respectivement aux transformations Af, $V_1 f$, $V_2 f$. Nous savons que la transformation Af fait simplement mouvoir un point quelconque sur celle des caractéristiques qui passe par ce point : les constantes a et b des équations (4) ne varient donc pas par l'effet de Af, et l'on a : $\delta_0\varphi = 0$, $\delta_0\psi = 0$. $V_1 f$ au contraire laisse l'équation (1) invariante et transforme la caractéristique $\varphi = a$, $\psi = b$ en la caractéristique $\varphi = a + \delta_1 a$, $\psi = b + \delta_1 b$. De même $V_2 f$ change $\varphi = a$, $\psi = b$ en $\varphi = a + \delta_2 a$, $\psi = b + \delta_2 b$. On a donc : $\delta_1\varphi = \delta_1 a$, $\delta_1\psi = \delta_1 b$; $\delta_2\varphi = \delta_2 a$, $\delta_2\psi = \delta_2 b$, ou en développant

$$\tag{5} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta_0 x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta_0 y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta_0 z = 0, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta_1 z = \delta_1 a, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta_2 z = \delta_2 a, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta_0 x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta_0 y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta_0 z = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta_1 z = \delta_1 b, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta_2 z = \delta_2 b. \end{aligned} \right.$$

Af, $V_1 f$, $V_2 f$ ne sont liés par aucune relation linéaire; cela veut dire que les trois tangentes aux trajectoires passant par un même point ne sont pas dans un même plan, ou encore que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \delta_0 x & \delta_0 y & \delta_0 z \\ \delta_1 x & \delta_1 y & \delta_1 z \\ \delta_2 x & \delta_2 y & \delta_2 z \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Chacun des deux précédents systèmes est donc résoluble; en désignant par ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2 certaines fonctions des δx, δy, δz, on obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \xi_1\,\delta_1 a + \xi_2\,\delta_2 a, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \xi_1\,\delta_1 b + \xi_2\,\delta_2 b,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \eta_1\,\delta_1 a + \eta_2\,\delta_2 a, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \eta_1\,\delta_1 b + \eta_2\,\delta_2 b,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \zeta_1\,\delta_1 a + \zeta_2\,\delta_2 a\,; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \zeta_1\,\delta_1 b + \zeta_2\,\delta_2 b.$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} \delta_1 a & \delta_2 a \\ \delta_1 b & \delta_2 b \end{vmatrix}$ est différent de zéro, car, s'il était nul, les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ seraient proportionnelles à $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, et par suite les deux équations $\varphi = a$, $\psi = b$ représenteraient une même surface, ou deux surfaces sans points communs, ce qui est impossible, leur ensemble définissant une ligne.

Supposons alors qu'on ait une autre transformation Vf. Puisque, entre quatre expressions de la forme Vf, à trois variables, il y a toujours une relation linéaire, on aura

$$Vf = \mu_1 V_1 f + \mu_2 V_2 f + \nu A f.$$

Si donc nous désignons par δ les variations dues à Vf, il vient

$$\begin{aligned} \delta x &= \mu_1\,\delta_1 x + \mu_1\,\delta_2 x + \nu\,\delta_0 x, \\ \delta y &= \mu_1\,\delta_1 y + \mu_1\,\delta_2 y + \nu\,\delta_0 y, \\ \delta z &= \mu_1\,\delta_1 z + \mu_2\,\delta_2 z + \nu\,\delta_0 z. \end{aligned}$$

Multiplions ces relations respectivement par $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ et ajoutons-les, en tenant compte de (5) ; on obtient

$$\delta\varphi = \mu_1\,\delta_1 a + \mu_2\,\delta_2 a.$$

De même

$$\delta\psi = \mu_1\,\delta_1 b + \mu_2\,\delta_2 b.$$

Pour que l'équation donnée admette la transformation Vf, les $\delta\varphi$, $\delta\psi$ doivent être deux constantes δa, δb, et l'on a

$$\delta a = \mu_1\,\delta_1 a + \mu_2\,\delta_2 a, \qquad \delta b = \mu_1\,\delta_1 b + \mu_2\,\delta_2 b.$$

Puisque le déterminant $\begin{vmatrix} \delta_1 a & \delta_2 a \\ \delta_1 b & \delta_2 b \end{vmatrix}$ est différent de zéro, nous pouvons résoudre ces équations par rapport à μ_1 et μ_2 qui seront des fonctions de $\delta_1 a$, $\delta_1 b$, $\delta_2 a$, $\delta_2 b$, ou seront des quantités constantes le long d'une trajectoire, ou enfin seront des intégrales de l'équation (1). (C. Q. F. D.)

Supposons maintenant $\rho = 1$. Nous avons alors une seule transformation infinitésimale indépendante de Af. Si Vf en est une autre, soit $Vf = \mu V_1 f + \nu A f$, on aura

$$V\omega = \mu V_1 \omega,$$

et, par suite, tout comme dans le cas précédent,

$$\delta a = \mu \delta_1 a, \qquad \delta b = \mu \delta_1 b \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{\delta a}{\delta_1 a} = \frac{\delta b}{\delta_1 b},$$

en sorte que μ est constant le long de toute trajectoire.

Revenons au cas général. Nous voulons démontrer que toute transformation Vf ayant la forme

$$(7) \qquad Vf = \mu_1 V_1 f + \ldots + \mu_\rho V_\rho f + \nu A f,$$

où les μ sont des intégrales de $Af = 0$, laisse invariante l'équation $Af = 0$.

Remplaçons en effet dans (7) f par ω_i; comme on a

$$A\omega_i = 0,$$

il vient

$$V\omega_i = \mu_1 V_1 \omega_i + \ldots + \mu_\rho V_\rho \omega_i;$$

ainsi $V\omega_i$ est une fonction d'intégrales de $Af = 0$; elle est par suite une intégrale de cette équation, et celle-ci admet la transformation Vf.

Voyons les avantages qu'on peut tirer des résultats établis. Supposons qu'on connaisse un certain nombre de transformations infinitésimales qui laissent l'équation invariante, et un certain nombre d'intégrales indépendantes ω_1, ω_2, ... de cette équation. Nous pouvons alors former de nouvelles transformations qui laissent l'équation invariante, et trouver de nouvelles intégrales. Pour avoir de nouvelles transformations, on fera usage des parenthèses, et pour avoir de nouvelles intégrales, on observera que $V_1 \omega_i$, $V_2 \omega_i$, ... sont des intégrales dont certaines pourront être indépendantes de celles déjà connues. Avec les transformations et les intégrales que nous connaissons, nous formerons, à l'aide de la formule (7), de nouvelles expressions Vf, et ainsi de suite. Cela ne veut pas dire que nous arriverons à la complète intégration de l'équation. Toutefois nous arriverons à trouver certains Vf et certains ω tels que toutes les parenthèses $(V_i V_k)f$ soient exprimables linéairement à l'aide des Vf, et que les $V_i \omega_k$ soient exprimables à l'aide des ω, les Vf et Af étant indépendants.

X. — Multiplicateur de Jacobi.

Par *multiplicateur de Jacobi* de l'équation $Af = 0$, on entend une fonction M des variables x telle que M Af soit le déterminant fonctionnel de f et de $(n-1)$ intégrales indépendantes, c'est-à-dire tel que

$$\text{(1)} \qquad \text{M}\,\text{A}f = \frac{\text{D}[f, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}]}{\text{D}[x_1, x_2, \ldots, x_n]}.$$

Ce multiplicateur est une généralisation du facteur intégrant d'Euler. En effet, si M est un multiplicateur de l'équation

$$\text{(2)} \qquad \text{X}\frac{\partial f}{\partial x} + \text{Y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

on devra avoir par définition

$$\text{M}\left(\text{X}\frac{\partial f}{\partial x} + \text{Y}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x};$$

d'où

$$\text{MX} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \qquad \text{MY} = -\frac{\partial \omega}{\partial x},$$

en sorte que M est un facteur intégrant de l'équation

$$\text{Y}\,dx - \text{X}\,dy = 0,$$

équivalente à (2).

De la relation (1) on déduit

$$\text{(3)} \quad \text{MX}_1 = \frac{\text{D}[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}{\text{D}[x_2, \ldots, x_n]}, \quad \ldots, \quad \text{MX}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\text{D}[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}{\text{D}[x_1, \ldots, x_{n-1}]}.$$

Le multiplicateur M a des propriétés importantes.

D'abord, il n'est pas unique, car il y a une infinité de systèmes d'intégrales indépendantes.

Soit $\overline{M}$ un multiplicateur distinct de M; on aura

$$\overline{M}\,Af = \frac{D[f, \overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n-1}]}{D[x_1, x_2, \ldots, x_n]},$$

$\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n-1}$ étant un autre système d'intégrales indépendantes. Or les $\overline{\omega}$ sont des fonctions des ω. Donc:

$$\overline{M}\,Af = \frac{D[f, \overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n-1}]}{D[f, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}\,\frac{D[f, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}{D[x_1, x_2, \ldots, x_n]}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\overline{M}}{M} = \frac{D[\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n-1}]}{D[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}.$$

Ce déterminant fonctionnel est une fonction des ω, et est par suite une intégrale. Donc :

Le rapport de deux multiplicateurs est une intégrale de l'équation.

Réciproquement *le produit d'un multiplicateur par une intégrale est encore un multiplicateur.*

En effet, si M est un multiplicateur et λ une intégrale, observons que λ est une fonction des ω et écrivons

$$\overline{\omega}_1 = \int \lambda\, d\omega_1 \ (^1), \qquad \overline{\omega}_2 = \omega_2, \qquad \ldots, \qquad \overline{\omega}_{n-1} = \omega_{n-1};$$

il en résultera

$$\frac{D[\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n-1}]}{D[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]} = \frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \omega_1} = \lambda.$$

Par suite

$$\frac{D[f, \overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n-1}]}{D[x_1, x_2, \ldots, x_n]} = \frac{D[f, \overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n-1}]}{D[f, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}\,\frac{D[f, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}{D[x_1, x_2, \ldots, x_n]} = \lambda M\,Af,$$

ce qui prouve que λM est un multiplicateur.

Si, à l'équation considérée, nous appliquons une transformation $x'_i = f_i(x)$, la connaissance d'un multiplicateur de l'équation

(1) Il est entendu que l'intégration est faite en considérant ω_1 comme seule variable.

entraîne la connaissance d'un multiplicateur de l'équation transformée. En effet, si nous connaissons $(n-1)$ intégrales de l'équation donnée, en leur appliquant la transformation, nous obtiendrons autant d'intégrales de l'équation transformée. Ayant donc posé

$$\mathrm{M}\,\mathrm{A}f = \frac{\mathrm{D}[f, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}{\mathrm{D}[x_1, x_2, \ldots, x_n]} = \frac{\mathrm{D}[f, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}{\mathrm{D}[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]} \frac{\mathrm{D}[x'_1, \ldots, x'_n]}{\mathrm{D}[x_1, \ldots, x_n]},$$

on aura

$$\mathrm{M}'\,\mathrm{A}'f = \frac{\mathrm{D}[f, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]}{\mathrm{D}[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]};$$

par suite, comme $\mathrm{A}'f \equiv \mathrm{A}f$,

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'} = \frac{\mathrm{D}(x')}{\mathrm{D}(x)} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{M}' = \frac{\mathrm{M}}{\dfrac{\mathrm{D}(x')}{\mathrm{D}(x)}}.$$

Donc, si l'on connaît M, on en déduit immédiatement M′, comme nous l'avions dit.

Les multiplicateurs de Jacobi satisfont à l'équation

$$\frac{\partial(\mathrm{MX}_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial(\mathrm{MX}_n)}{\partial x_n} = 0,$$

et réciproquement toute intégrale de cette équation est un multiplicateur.

Nous omettrons, pour abréger, la démonstration de cette propriété.

Voyons maintenant comment la théorie du multiplicateur se relie à celle des transformations infinitésimales. En généralisant un théorème déjà connu (n° III, 2e Partie), nous pouvons démontrer que : *si nous connaissons $(n-1)$ transformations infinitésimales*

$$\mathrm{V}_i f = \xi_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

qui laissent invariante une équation

$$\mathrm{A}f = \mathrm{X}_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

un multiplicateur de cette équation est donné par l'inverse du *déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-1,1} & \xi_{n-1,2} & \dots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

En effet, multiplions Δ par le déterminant fonctionnel

$$\frac{D[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}]}{D[x_1, \dots, x_{n-1}]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega_1}{\partial x_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial\omega_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cette multiplication exécutée par lignes donne, en tenant compte de ce que les ω sont des intégrales de l'équation donnée et en se rappelant que les $V_i\omega_k$ sont des intégrales de cette équation,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & X_n \\ V_1\omega_1 & V_1\omega_2 & \dots & V_1\omega_{n-1} & \xi_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ V_{n-1}\omega_1 & V_{n-1}\omega_2 & \dots & V_{n-1}\omega_{n-1} & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

ou encore $X_n\Omega$, Ω étant une fonction d'intégrales, et par suite une intégrale. On a donc

$$\frac{D[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}]}{D[x_1, \dots, x_{n-1}]} = X_n \frac{1}{\Delta} \Omega,$$

et, par comparaison avec la dernière des relations (3), on reconnaît que $\frac{1}{\Delta}\Omega$ est un multiplicateur. Comme Ω est une intégrale, $\frac{1}{\Delta}$ sera aussi un multiplicateur. (C. Q. F. D.)

XI. — Interprétation géométrique du multiplicateur.

Limitons-nous au cas d'une équation à trois variables

$$\mathrm{A}f \equiv \mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{Z}\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

admettant les transformations infinitésimales

$$\mathrm{V}_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\mathrm{V}_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Nous aurons (n° X)

$$\frac{1}{\mathrm{M}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par δt une quantité infiniment petite, des éléments linéaires des trajectoires correspondant à $\mathrm{A}f$, $\mathrm{V}_1 f$, $\mathrm{V}_2 f$ issues d'un point, auront pour projections, suivant les axes, respectivement

$$\begin{array}{lll} \mathrm{X}\,\delta t, & \mathrm{Y}\,\delta t, & \mathrm{Z}\,\delta t, \\ \xi_1\,\delta t, & \eta_1\,\delta t, & \zeta_1\,\delta t, \\ \xi_2\,\delta t, & \eta_2\,\delta t, & \zeta_2\,\delta t; \end{array}$$

par suite le volume du parallélépipède, dont les trois arêtes concourantes sont les trois éléments considérés, sera $\frac{\delta t^3}{\mathrm{M}}$. Comme δt^3 est un facteur constant, on peut donc dire que le multiplicateur M exprime l'inverse du volume du susdit parallélépipède.

Si σ est l'aire de la section normale à l'arête de longueur $\delta t\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}$, on a encore

$$\sigma\,\delta t\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2} = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

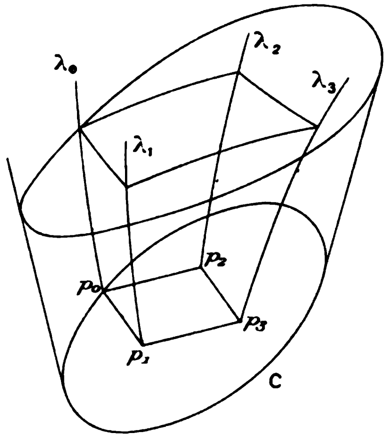
Soient p_0, p_1, p_2 les points (x, y, z), $(x + \xi_1\,\delta t, \ldots)$, $(x + \xi_2\,\delta t, \ldots)$. p_3 le quatrième sommet du parallélogramme construit sur $p_0 p_1$ et $p_0 p_2$ comme côtés. Menons par p_0 dans le plan du parallélogramme une courbe fermée quelconque C. Nous pouvons démontrer que le rapport de l'aire du parallélogramme à l'aire comprise à l'intérieur de la courbe C est constant quand le point p_0 décrit la trajectoire λ_0.

En effet, si $p(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ est un point quelconque du plan considéré, on a

$$\delta x = \mu_1 \delta_1 x + \mu_2 \delta_2 x, \qquad \delta y = \mu_1 \delta_1 y + \mu_2 \delta_2 y, \qquad \delta z = \mu_1 \delta_1 z + \mu_2 \delta_2 z.$$

Si l'on déplace p_0 le long de λ_0 (*fig.* 3), p_1, p_2 décriront deux tra-

Fig. 3.



jectoires λ_1, λ_2; si μ_1 et μ_2 sont constants le long de λ_0, ou sont des intégrales de l'équation, p se déplacera le long d'une trajectoire λ.

Alors, des équations écrites, on déduit aisément que si $\bar{p}$ est un autre point qui se déplace le long d'une trajectoire $\bar{\lambda}$, le triangle $p_0 p \bar{p}$ se conserve semblable à lui-même, et de là résulte immédiatement le résultat voulu.

D'après cela, au lieu du parallélépipède, nous pouvons considérer une sorte de *tube* ayant pour directrice une courbe fermée quelconque C passant par p_0 et située dans le plan $p_0 p_1 p_2 p_3$, et ayant pour génératrices les trajectoires passant par les points de C. Il résulte de ce que nous avons dit que le rapport du volume du parallélépipède à celui de la partie du tube comprise entre deux sections consécutives est constant, et par suite représente une intégrale. Conséquemment aussi, l'inverse du volume de cette partie du tube est un multiplicateur. Or, ce volume est le produit de la section normale du tube par $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,\delta t$. Donc : l'inverse du produit de la section droite d'un tube infinitésimal formé par des trajectoires par $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ est un multiplicateur de Jacobi.

Exemple. — Considérons ce que, en Hydrodynamique, on appelle le *mouvement stationnaire d'un fluide incompressible* (mouvement dans lequel les vitesses sont indépendantes du temps). Nous avons

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

X, Y, Z étant des fonctions de x, y, z. Les trajectoires sont les lignes décrites par les particules du fluide. La quantité de liquide qui passe à travers une section dans un temps donné est constante. Si τ est l'aire d'une section, la vitesse du liquide étant $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, on a

$$\tau\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \text{const.}$$

Par suite le multiplicateur M est aussi constant.

On réussit donc par ce moyen à trouver un multiplicateur de l'équation

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

La relation connue

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = 0$$

devient alors

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation d'incompressibilité de l'Hydrodynamique.

XII. — Avantages qu'on tire, pour l'intégration d'une équation différentielle, de la connaissance des transformations infinitésimales qui laissent l'équation invariante.

Si nous nous limitons au cas de trois variables, nous pouvons supposer qu'on connaisse une seule transformation infinitésimale, ou qu'on en connaisse deux.

Supposons d'abord qu'on connaisse la seule transformation Vf laissant invariante l'équation $Af = 0$. On a

$$(V.A)f = \lambda\, Af,$$

relation qui exprime que les équations $Af = 0$, $Vf = 0$ forment un système complet. Ce système admet une intégrale $\varphi(x, y, z)$, en sorte que l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz = 0 \tag{1}$$

doit avoir lieu en même temps que $A\varphi = 0$, $V\varphi = 0$. Donc

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

L'intégrale de cette équation aux différentielles totales est intégrale du système complet; le problème de l'intégration se réduit donc à l'intégration de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Mais cette intégration peut encore être simplifiée, c'est-à-dire qu'elle peut être réduite, à des quadratures près, à l'intégration d'une seule équation différentielle du premier ordre à deux variables.

Les éléments linéaires de la surface

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

satisfont à l'équation (2). Coupons cette surface par un plan

$$z = x + ay, \tag{3}$$

où a est une constante. Nous obtenons une famille de lignes planes dont l'équation différentielle s'obtiendra en éliminant z et dz entre l'équation (2) et les équations

$$z = x + ay, \qquad dz = dx + ady.$$

Soit

$$\psi(x, y, a) = \text{const.}$$

l'intégrale de cette équation différentielle. Nous aurons alors

$$\varphi(x, y, z) \equiv \psi\left(x, y, \frac{z - x}{y}\right).$$

Ainsi, par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, nous avons obtenu l'intégrale du système complet $Af = 0$, $Vf = 0$, ou une intégrale de l'équation proposée $Af = 0$. Il reste à trouver une autre intégrale de cette équation.

A cet effet, introduisons φ comme nouvelle variable à la place de z, et marquons l'effet produit par cette substitution, en surlignant les symboles où elle est effectuée. Nous aurons, comme on sait,

$$\overline{A}f = \overline{X}\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{Y}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \overline{V}f = \overline{\xi}\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{\eta}\frac{\partial f}{\partial y};$$

comme $\overline{A}f = 0$ admet la transformation infinitésimale $\overline{V}f$, $\frac{1}{\overline{X}\overline{\eta} - \overline{Y}\overline{\xi}}$ sera un facteur intégrant de l'équation $\overline{X}dy - \overline{Y}dx = 0$, en sorte que cette dernière équation s'intègre par quadratures. En introduisant dans l'intégrale obtenue, à la place de φ, son expression en x, y, z, on obtiendra la seconde intégrale cherchée.

Au lieu du plan (3) on en peut prendre d'autres, par exemple $y = x + a$, réduisant ainsi l'équation (2) à une équation entre x et z.

Exemple. — L'équation

$$Af \equiv (x^2 + y^2 + yz)\frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 + y^2 - xz)\frac{\partial f}{\partial y} + (xz + yz)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

admet la transformation infinitésimale

$$Vf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \text{ (1)}.$$

L'équation (2), dans ce cas, devient

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x^2+y^2+yz & x^2+y^2-xz & xz+yz \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant et simplifiant,

$$xz\,dx + yz\,dy - (x^2+y^2)\,dz = 0.$$

Posons

$$y = x + a, \qquad dy = dx;$$

nous obtenons

$$(2x+a)z\,dx - (2x^2+2ax+a^2)\,dz = 0;$$

les variables se séparent immédiatement, et l'intégrale de cette équation est

$$\frac{\sqrt{2x^2+2ax+a^2}}{z} = \text{const.}$$

---

(1) En général, toute équation

$$Af \equiv X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

dans laquelle $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions homogènes du même degré, admet la transformation par similitude

$$Vf = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

En effet, on a

$$(VA)f = \sum_{i=1}^{i=n}(VX_i - Ax_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial X_i}{\partial x_h}x_h - X_i\right)\frac{\partial f}{\partial x_i};$$

or, en désignant par m le degré commun des X_i, on a, d'après le théorème d'Euler,

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial X_i}{\partial x_h}x_h = mX_i;$$

donc

$$(V.A)f = (m-1)Af.$$

Remplaçons a par $y - x$, et nous aurons l'intégrale du système $Af = 0$, $Vf = 0$:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Posons $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \varphi$, et éliminons z. Nous obtenons

$$\overline{A}f \equiv \left(x^2+y^2+\frac{y}{\varphi}\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(x^2+y^2-\frac{x}{\varphi}\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\overline{V}f \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},$$

en sorte que l'équation

$$\left(x^2+y^2+\frac{y}{\varphi}\sqrt{x^2+y^2}\right)dy - \left(x^2+y^2-\frac{x}{\varphi}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx = 0$$

admet le facteur intégrant

$$M = \frac{1}{\left(x^2+y^2+\frac{y}{\varphi}\sqrt{x^2+y^2}\right)y - \left(x^2+y^2-\frac{x}{\varphi}\sqrt{x^2+y^2}\right)x}.$$

En la multipliant par M, on l'écrit

$$\frac{\left(\varphi+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy - \left(\varphi-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx}{(y-x)\varphi+\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= d\log\left[(y-x)\varphi+\sqrt{x^2+y^2}\right] = 0.$$

L'intégration est immédiate ; elle donne

$$\sqrt{x^2+y^2}+(y-x)\varphi = \text{const}.$$

En remplaçant φ par son expression, on a la seconde intégrale de l'équation proposée

$$\sqrt{x^2+y^2}\left[1+\frac{y-x}{z}\right], \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}[y+z-x].$$

Supposons maintenant que l'on connaisse deux transformations infinitésimales $V_1 f$, $V_2 f$ admises par l'équation donnée. Il y a lieu de distinguer deux cas, selon qu'entre Af, $V_1 f$, $V_2 f$ il n'existe aucune relation linéaire, ou qu'il existe une telle relation.

Considérons le premier cas. Comme entre quatre transformations infinitésimales, il y a certainement une relation linéaire, on aura

$$(4)\qquad (V_1, V_2)f = \mu_1 V_1 f + \mu_2 V_2 f + \nu A f.$$

La transformation $(V_1, V_2)f$ laisse invariante l'équation; donc μ_1 et μ_2 sont des intégrales, et $V_1\mu_1$, $V_1\mu_2$, $V_2\mu_1$, $V_2\mu_2$ sont aussi des intégrales; nous sommes, par suite, à même, sans aucune intégration, d'obtenir ces intégrales. Mais nous savons qu'il ne peut y avoir que deux intégrales indépendantes. Si donc, parmi ces intégrales, il y en a deux indépendantes, le problème de l'intégration est résolu.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Si μ_1, μ_2 ne sont pas des constantes, nous connaissons sans intégration une intégrale, soit φ; les autres intégrales susdites seront des fonctions de φ, et nous pouvons poser $V_1\varphi = \Omega_1(\varphi)$, $V_2\varphi = \Omega_2(\varphi)$. Écrivons alors

$$Wf = \Omega_2(\varphi)\, V_1 f - \Omega_1(\varphi)\, V_2 f.$$

L'équation admettra la transformation Wf. En effet, on a

$$(W, A)f = \Big(\Omega_2(\varphi)V_1, A\Big)f - \Big(\Omega_1(\varphi)V_2, A\Big)f.$$

Comme nous savons qu'en général

$$(\varphi X, Y)f = \varphi(X, Y)f - Xf\, Y\varphi,$$

nous aurons actuellement

$$(W, A)f = \Omega_2(\varphi)(V_1, A)f - V_1 f\, A\Omega_2(\varphi) - \Omega_1(\varphi)(V_2 A)f + V_2 f\, A\Omega_1(\varphi).$$

Or

$$A\varphi = 0,\quad A\Omega_1(\varphi) = 0\quad A\Omega_2(\varphi) = 0,\quad (V_1 A)f = \lambda_1 Af,\quad (V_2 A)f = \lambda_2 Af.$$

Donc

$$(W, A)f = k\, Af,$$

ce qui justifie notre affirmation.

En outre, $W\varphi = 0$, en sorte que φ est une intégrale commune à $Af = 0$ et à $Wf = 0$; en introduisant φ comme nouvelle variable indépendante, ces deux équations se réduisent à $\overline{A}f = 0$, $\overline{W}f = 0$ et ne portent plus que sur deux variables, x et y. Nous avons donc à intégrer l'équation $\overline{A}f = 0$, qui admet la transformation infinitésimale $\overline{W}f$, puisque $(\overline{W}, \overline{A})f = \overline{k}\,\overline{A}f$. On voit donc, d'après tout cela, que le problème se réduit à des quadratures.

Supposons que μ_1 et μ_2 soient des constantes et soit d'abord

$$\mu_1 = \mu_2 = 0.$$

D'après (4), on a

$$(V_1, V_2)f = \nu\, Af. \tag{5}$$

Comme

$$(V_1, A)f = \lambda_1 Af, \qquad (V_2, A)f = \lambda_2 Af, \tag{6}$$

il s'ensuit que $Af = 0$, $V_1 f = 0$ forment un système complet et, par suite, admettent une intégrale commune, soit φ; en sorte que $A\varphi = 0$, $V_1\varphi = 0$. En outre, d'après (4) et (5),

$$\begin{aligned} 0 &= (V_1, V_2)\varphi = V_1 V_2 \varphi - V_2 V_1 \varphi = V_1 V_2 \varphi, \\ 0 &= (V_2, A)\varphi = V_2 A\varphi - AV_2\varphi = -AV_2\varphi, \end{aligned}$$

et il résulte de là que $V_2\varphi$ est intégrale du système complet considéré. Donc

$$V_2\varphi = \Omega(\varphi),$$

et nous pouvons, comme on l'a observé en une autre occasion, faire figurer, au lieu de φ, une autre intégrale telle que $V_2\varphi = 1$. D'après cela, pour trouver φ, on a à intégrer le système

$$A\varphi = 0, \qquad V_1\varphi = 0, \qquad V_2\varphi = 1.$$

Eu égard à l'identité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi,$$

nous aurons

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz & d\varphi \\ X & Y & Z & 0 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\varphi \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\varphi = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}}.$$

Nous avons donc l'intégrale φ par deux quadratures. En permutant ensuite $V_1 f$ et $V_2 f$, nous obtenons une autre intégrale ψ, en sorte qu'à l'aide de quatre quadratures nous formons les deux intégrales indépendantes cherchées.

Supposons que les constantes μ_1 et μ_2 ne soient pas nulles toutes deux; posons $\mu_1 = c_1$, $\mu_2 = c_2$, et soit $c_1 \neq 0$. Faisons

$$\mathfrak{V}_1 f = c_1 V_1 f + c_2 V_2 f, \qquad \mathfrak{V}_2 f = \frac{1}{c_1} V_2 f;$$

d'où

$$(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2) f = (V_1, V_2) f = c_1 V_1 f + c_2 V_2 f + \nu A f = \mathfrak{V}_1 f + \nu A f.$$

Il est donc loisible de supposer $c_1 = 1$, $c_2 = 0$; d'où

$$(V_1, V_2) f = V_1 f + \nu A f.$$

Alors encore $Af = 0$, $V_1 f = 0$ forment un système complet, et l'on peut procéder comme précédemment. Soit φ l'intégrale du système complet; on a

$$(V_1, V_2)\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad V_1 V_2 \varphi = 0,$$

de manière que $V_2\varphi$ est intégrale de $V_1 f = 0$. Puis on trouve, comme plus haut, $AV_2\varphi = 0$, c'est-à-dire que $V_2\varphi$ est intégrale de $Af = 0$. On a donc

$$V_2\varphi = \Omega(\varphi),$$

et l'on peut faire en sorte que $V_2\varphi = 1$; on achève la détermination de φ comme dans le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Dans ce cas toutefois, nous ne pouvons pas permuter $V_1 f$ et $V_2 f$, mais on arrive à réduire le système à avoir une variable de moins en introduisant φ comme nouvelle variable. On voit donc que le problème se résout encore par de simples quadratures.

Il reste à examiner le cas où il existe une relation linéaire entre $V_1 f$, $V_2 f$, Af. Si cette relation est

$$V_2 f = \mu_1 V_1 f + \nu A f,$$

la fonction μ_1 est, comme nous le savons, une intégrale de l'équation $Af = 0$, en sorte que $A\mu_1 = 0$; elle ne peut d'ailleurs se réduire à une constante, car, sinon, $V_1 f$ et $V_2 f$ pourraient être regardés comme une même transformation. Posons $\mu_1 = \varphi$; on a

$$A\varphi = 0;$$

en outre $V_1\varphi$ est encore une intégrale de l'équation $Af = 0$. Si cette intégrale ne se réduit pas à une constante et si elle est indépendante de φ, nous avons obtenu les deux intégrales cherchées. Si au contraire $V_1\varphi$ est constante ou fonction de φ, on introduira φ comme nouvelle variable au lieu de z; on aura

$$\overline{A} f = Ax\frac{\partial f}{\partial x} + Ay\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \overline{V}_1 f = V_1 x\frac{\partial f}{\partial x} + V_1 y\frac{\partial f}{\partial y} + V_1\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Si $V_1\varphi \equiv 0$, la transformation $\overline{V}_1 f$ se réduit à une transformation portant sur x et y et laissant invariante l'équation $\overline{A} f = 0$; par suite cette équation s'intègre par quadratures.

Au contraire, si $V_1\varphi \not\equiv 0$, nous devons procéder à l'intégration de l'équation à deux variables $\overline{A} f = 0$; c'est le seule cas du problème que nous considérons pour lequel l'intégration ne se ramène pas aux quadratures.

En résumé, on voit que, si l'on connaît deux transformations infinitésimales qui laissent invariante une équation à trois variables, le problème de l'intégration de cette équation se ramène à de simples quadratures, sauf dans un cas où il est en outre nécessaire d'intégrer une équation différentielle du premier ordre à deux variables.

Premier exemple. — L'équation

$$A_1 f \equiv (x - y - z + 2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2(y - x + z)\frac{\partial f}{\partial y} + (x - y - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

admet les deux transformations

$$V_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad V_2 f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)(y + 2z + 1),$$

puisque $(V_1, A)f \equiv (V_2, A)f \equiv 0$. Les trois expressions linéaires Af, $V_1 f$, $V_2 f$ sont indépendantes, car le déterminant de leurs coefficients n'est pas identiquement nul. On trouve ensuite

$$(V_1, V_2)f \equiv \frac{2}{y+2z+1} V_2 f;$$

donc $\frac{2}{y+2z+1}$ est une intégrale, et il en est de même de l'expression plus simple

$$\varphi = y + 2z.$$

Il vient de suite : $V_1 \varphi \equiv 2$, $V_2 \varphi \equiv 0$, en sorte que nous n'avons qu'une seule intégrale.

Formons alors

$$Wf \equiv V_2\varphi\, V_1 f - V_1\varphi\, V_2 f \equiv -2V_2 f;$$

et posons plus simplement

$$Wf \equiv V_2 f.$$

En introduisant dans Af et $V_2 f$ la variable φ au lieu de z, nous aurons

$$\overline{A}f \equiv \left(x - \frac{y}{2} - \frac{\varphi}{2} + 2\right)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - 2x + \varphi)\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\overline{V}_2 f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\varphi + 1).$$

On obtient, pour l'équation différentielle

$$\left(x - \frac{y}{2} - \frac{\varphi}{2} + 2\right) dy - (y - 2x + \varphi)\, dx = 0,$$

le facteur intégrant

$$M = \frac{1}{2x - y - \varphi + 2}$$

$\left[\text{en laissant de côté, pour simplifier, le facteur constant } \frac{1}{2(\varphi+1)}\right]$.

Après multiplication par M, l'équation s'écrit :

$$\frac{x - \frac{y}{2} - \frac{\varphi}{2}}{x - \frac{y}{2} - \frac{\varphi}{2} + 1}\left(dx - \frac{1}{2}dy\right) + dy = 0.$$

Posons $x - \frac{y}{2} - \frac{\varphi}{2} = t$; nous aurons, en intégrant,

$$\int \frac{t\,dt}{t+1} + y = \text{const.},$$

ou

$$t + y - \log(t+1) = \text{const.}$$

Revenons aux variables primitives; $t = x - \frac{y}{2} - \frac{\varphi}{2} = x - y - z$: nous aurons

$$x - z - \log(x - y - z + 1) = \text{const.}$$

La seconde intégrale cherchée est donc

$$\psi = x - z - \log(x - y - z + 1).$$

Deuxième exemple. — L'équation

$$Af \equiv (xz - y)\frac{\partial f}{\partial x} + (yz - x)\frac{\partial f}{\partial y} + (1 - z^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

admet les deux transformations

$$V_1 f \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad V_2 f \equiv (x^2 + y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} - y(1 - z^2)\frac{\partial f}{\partial z},$$

parce que

$$(V_1, A)f \equiv 0, \qquad (V_2, A)f \equiv (yz - x)Af.$$

En calculant le déterminant des coefficients de ces trois expressions, on trouve qu'il est identiquement nul; il existe donc entre elles une relation linéaire, dont les coefficients sont proportionnels aux mineurs complémentaires des éléments d'une ligne quelconque de ce déterminant. On trouve ainsi

$$V_2 f = (x + yz)V_1 f - y\,Af.$$

On peut dire immédiatement que $\varphi = x + yz$ est une intégrale de l'équation proposée.

Il vient ensuite $V_1\varphi = \varphi$, en sorte que nous nous trouvons dans le cas où il est nécessaire d'intégrer une équation différentielle. Cette équation est

$$\overline{A}f \equiv \left(x\frac{\varphi - x}{y} - y\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(y\frac{\varphi - x}{y} - x\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ou encore, sous forme d'équation différentielle ordinaire,

$$(x\varphi - x^2 - y^2)\,dy - y(\varphi - 2x)\,dx = 0.$$

Cette équation s'intègre par un artifice très simple; en posant $x\varphi - x^2 = t$, elle se transforme en

$$(t - y^2)\,dy - y\,dt = 0,$$

équation linéaire si l'on regarde y comme la variable indépendante; elle peut du reste s'écrire

$$\frac{y\,dt - t\,dy}{y^2} + dy = 0,$$

d'où l'on tire aussitôt l'intégrale

$$\frac{t}{y} + y = \text{const.}$$

D'ailleurs $t = x\varphi - x^2 = x(x + yz) - x^2 = xyz$, en sorte que nous avons les deux intégrales indépendantes de l'équation proposée

$$\varphi = x + yz, \qquad \psi = y + xz.$$

TROISIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

I. — Transformations de contact du plan.

Considérons la transformation à deux variables

$$(1)\qquad x_1 = \mathrm{X}(x, y), \qquad y_1 = \mathrm{Y}(x, y),$$

où X, Y sont deux fonctions indépendantes. Géométriquement, cette transformation représente une correspondance biunivoque entre les points de deux plans, le plan x, y et le plan x_1, y_1, correspondance dans laquelle à un point correspond un point, et à une ligne correspond une ligne. Voyons comment on doit procéder, quand on connaît la tangente à une ligne, pour déterminer la tangente à la ligne correspondante. Soit $y = f(x)$ l'équation d'une ligne du premier plan; à cette ligne correspondra, dans le second plan, la ligne d'équation $y_1 = f_1(x_1)$. Le problème revient à calculer $y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$ quand on connaît $y' = \frac{dy}{dx}$. A cet effet, nous écrirons

$$y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \frac{\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\,dy}{\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\,dy} = \frac{\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\,y'}{\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\,y'}.$$

L'ensemble des trois équations

$$(2)\qquad x_1 = \mathrm{X}(x, y), \qquad y_1 = \mathrm{Y}(x, y), \qquad y'_1 = \frac{\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\,y'}{\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\,y'}$$

définit une transformation à trois variables x, y, y', qui n'est autre que la *transformation* (1) *prolongée* (1re Partie, n° **21**).

Nous pouvons vérifier directement la propriété que possède cette transformation de laisser invariante l'équation pfaffienne $dy - y' dx = 0$. Il suffit d'écrire

$$dy_1 - y'_1 dx_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy - \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial y} y'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy \right)$$
$$= \frac{\dfrac{D(X, Y)}{D(x, y)}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial y} y'} (dy - y' dx);$$

comme le premier facteur n'est pas identiquement nul, on peut écrire

$$dy_1 - y'_1 dx_1 = \rho (dy - y' dx),$$

avec $\rho \not\equiv 0$, et notre assertion se trouve justifiée.

Notre transformation (2) change un point quelconque en un point; on peut donc dire qu'elle est *ponctuelle;* elle change un élément linéaire quelconque issu d'un point en un élément linéaire issu du point correspondant. Elle laisse en outre invariante la susdite équation pfaffienne.

Réciproquement, toute transformation possédant ces deux propriétés a la forme (2). En effet, si une transformation change les éléments linéaires issus d'un même point en éléments linéaires issus d'un même point, les coordonnées x_1, y_1 du point transformé doivent dépendre seulement de x, y, et non de y', en sorte que la transformation devra avoir la forme

$$(3) \qquad x_1 = X(x, y), \qquad y_1 = Y(x, y), \qquad y'_1 = P(x, y, y').$$

Pour qu'ensuite cette transformation change en elle-même l'équation pfaffienne connue, on doit avoir

$$dy_1 - y'_1 dx_1 = \rho (dy - y' dx)$$

ou

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) - P \left[\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy \right] = \rho (dy - y' dx);$$

d'où

$$-y' = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x} - P\dfrac{\partial X}{\partial x}}{\dfrac{\partial Y}{\partial y} - P\dfrac{\partial X}{\partial y}},$$

et par suite

$$P = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial y}y'};$$

la transformation (3) coïncide donc avec une transformation (2).

Demandons-nous alors s'il existe d'autres transformations à deux variables possédant la seconde des propriétés énoncées, et non pas la première.

Soit la transformation

$$(4) \qquad x_1 = X(x,y,y'), \qquad y_1 = Y(x,y,y'), \qquad y'_1 = P(x,y,y').$$

Si, entre ces trois équations, nous éliminons y' et y'_1, nous pouvons, suivant le cas, obtenir deux équations ou une seule. Supposons d'abord qu'on en obtienne deux; en les résolvant par rapport à x_1, y_1, on leur donne la forme $x_1 = \xi(x,y)$, $y_1 = \eta(x,y)$, et l'on voit qu'à un point (x,y) correspond un point (x_1, y_1) : la transformation est du genre de celles qu'on a définies plus haut, c'est-à-dire qu'elle est *ponctuelle*.

Considérons maintenant le cas plus général dans lequel l'élimination de y' et y'_1 conduit à une seule équation

$$\Omega(x,y,x_1,y_1) = 0.$$

Nous en déduisons

$$(5) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 = 0.$$

Or, entre les différentielles dx, dy, dx_1, dy_1, il ne peut exister qu'une seule relation, les variables elles-mêmes n'étant liées que par une relation; si donc nous voulons que la transformation satisfasse à la condition

$$dy_1 - y'_1 dx_1 - \rho(dy - y'dx) = 0,$$

cette relation doit se réduire à l'équation (5), quand on y a remplacé y' et y'_1 par leurs valeurs résultant de l'élimination susdite. Nous devons donc avoir

$$\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}}{\rho y'} = \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}}{-\rho} = \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1}}{-y'_1} = \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}}{1},$$

et, en éliminant ρ,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + y'_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = 0.$$

Les variables y', y'_1 devront satisfaire à ces équations, en sorte que les trois équations

$$(6) \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + y'_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = 0$$

représentent, sous forme implicite, la transformation cherchée. Les conditions à vérifier sont que la première et la seconde équation soient résolubles par rapport à x_1, y_1 et pareillement que la première et la troisième soient résolubles par rapport à x, y.

Nous allons démontrer que, réciproquement, les transformations de la forme (6) laissent invariante l'équation pfaffienne. Différentions la première des équations (6); il vient

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 = 0,$$

ou, en tenant compte des deux équations (6)

$$-y'\frac{\partial\Omega}{\partial y}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy - y'_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y}(dy - y'dx) + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}(dy_1 - y'_1 dx_1) = 0,$$

ou enfin

$$dy_1 - y'_1 dx_1 = -\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}}(dy - y'dx).$$

Notre assertion est ainsi justifiée.

Nous voyons donc que, en dehors des transformations ponctuelles prolongées, il existe une infinité d'autres transformations qui laissent invariante l'équation pfaffienne considérée. Ces transformations sont dites *transformations de contact;* elles comprennent comme cas particulier les transformations ponctuelles prolongées.

Exprimons analytiquement les conditions de résolubilité énoncées plus haut. La première condition équivaut à ce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial x_1}+y'\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y_1}+y'\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial y_1} \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul. Si l'on substitue à y' la valeur $-\dfrac{\frac{\partial\Omega}{\partial x}}{\frac{\partial\Omega}{\partial y}}$, ce déterminant s'écrit

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial x_1}-\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial x_1} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y_1}-\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial y_1} \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1} & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y_1} & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial y_1} \end{vmatrix}.$$

Comme ce déterminant ne change pas quand on permute x et x_1, y et y_1, il faut et il suffit qu'il ne soit pas identiquement nul pour que les deux conditions de résolubilité soient satisfaites, et pour que l'équation $\Omega = 0$ donne naissance à une transformation de contact.

Remarquons après cela qu'on a les deux théorèmes suivants faciles à démontrer :

1° *Le produit de deux transformations de contact est à son tour une transformation de contact;*

2° *L'inverse d'une transformation de contact est encore une transformation de contact.*

Voyons quelle est la signification géométrique des transformations de contact.

On dit que le système des équations

$$\Phi(x, y, y') = 0, \qquad \Psi(x, y, y') = 0 \tag{7}$$

satisfait à l'équation pfaffienne

$$A\,dx + B\,dy + C\,dy' = 0 \tag{8}$$

quand cette équation (8) est conséquence des équations (7) et des équations

$$d\Phi = 0, \qquad d\Psi = 0. \tag{9}$$

Par exemple, un système qui satisfait manifestement à l'équation pfaffienne

$$dy - y'\,dx = 0 \tag{10}$$

est celui-ci :

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}; \tag{11}$$

un autre est le suivant, où $f(x)$ est une fonction quelconque dérivable :

$$y - f(x) = 0, \qquad y' - f'(x) = 0. \tag{12}$$

Réciproquement il n'existe que ces deux seuls types vérifiant l'équation (10). Supposons qu'un système (7) satisfasse à cette équation. Si Φ, Ψ ne contiennent pas y', le système rentre dans le type (11). Si, au contraire, ils contiennent y', l'élimination de y' donne une équation $\omega(x, y) = 0$. Si celle-ci ne contient pas y, elle a la forme $x = \text{const.}$, et, d'après (10), $y = \text{const.}$; on retombe encore sur le type (11). Si l'équation $\omega(x, y) = 0$ contient y, nous pouvons la mettre sous la forme

$$y - f(x) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad dy - f'(x)\,dx = 0,$$

qui, d'après (10), donne

$$y' - f'(x) = 0,$$

en sorte que le système est du type (12).

Géométriquement, le système (11) représente un point, ou, pour mieux dire, l'ensemble des ∞^1 éléments linéaires issus d'un point; le système (12) représente l'ensemble des ∞^1 éléments linéaires dont se compose la courbe $y = f(x)$.

L'un et l'autre systèmes représentent ce qu'on appelle une *variété simplement infinie d'éléments linéaires*, variété que nous désignerons par M_1. Nous pouvons ainsi définir une M_1 comme un ensemble simplement infini d'éléments linéaires satisfaisant à l'équation (10). Toutes les lignes du plan sont des M_1, excepté les droites parallèles à l'axe des y, lesquelles échappent à la définition des variétés d'éléments linéaires; mais nous verrons que cette exception est seulement apparente, car elle disparaît par l'introduction du système des cordonnées homogènes.

Montrons qu'il n'existe pas d'équation pfaffienne (en dehors de celle qui a été considérée), satisfaite par tous les éléments linéaires du plan. Soit en effet l'équation (8), dans laquelle A, B, C sont des fonctions de x, y, y', supposée vérifiée par tous les éléments d'une ligne quelconque du plan. Si $y = f(x)$ est l'équation de la ligne, l'ensemble de ses éléments sera représenté par les équations (12), et l'équation (8) devra être conséquence des équations (12) et de

$$dy - f'(x)dx = 0, \qquad dy' - f''(x)dx = 0.$$

Nous devrons donc avoir

$$A + Bf'(x) + Cf''(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad A + By' + Cf''(x) = 0,$$

quel que soit f. D'où

$$C = 0, \qquad A + By' = 0.$$

L'équation (8) devient alors $B(dy - y'dx) = 0$, qui coïncide avec (10). (C. Q. F. D.)

Une transformation de contact change toute M_1 *en une* M_1. En effet, puisque toute transformation de contact, par définition, laisse invariante l'équation (10), elle doit transformer toute M_1 en un ensemble de ∞^1 éléments satisfaisant à l'équation (10), c'est-à-dire en une M_1.

Réciproquement, si une transformation change toute M_1 en une M_1, puisque l'unique équation à laquelle satisfont les M_1 est l'équation (10), la transformation doit changer l'équation (10) en elle-même, c'est-à-dire qu'elle doit être une transformation de contact. Donc :

Les transformations de contact sont exclusivement toutes les transformations qui changent les variétés M_1 *d'un plan en variétés* M_1 *de l'autre plan.*

Exemples. — Comme exemple des transformations que nous avons appelées *ponctuelles,* nous citerons la *transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Étant donné un point fixe O du plan, pour avoir le transformé d'un point donné P de coordonnées (x, y), on mène $\overline{OP}$ et sur cette direction on prend le point P′ de coordonnées (x_1, y_1) de telle sorte qu'on ait

$$\overline{OP'} = \frac{1}{\overline{OP}}.$$

On a donc

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}.$$

On tire de là

$$x_1 = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y_1 = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Calculons y'_1. Il vient de suite

$$y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2xy - (x^2-y^2)y'}{(x^2-y^2)+2xyy'}.$$

Donnons maintenant quelques exemple de transformations de contact qui ne soient pas ponctuelles.

Considérons d'abord la transformation dite *par dilatation,* qui transforme toute courbe en une courbe parallèle. Soit u la distance (constante) d'un point à son transformé ; nous avons

$$(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 = u^2,$$

en sorte que les équations (5) deviennent

$$(x_1-x) + y'(y_1-y) = 0, \qquad (x_1-x) + y'_1(y_1-y) = 0.$$

Ces équations expriment que la dilatation a lieu suivant la normale aux courbes.

Soit (x_0, y_0) un point quelconque; puisque nous avons

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=u^2,$$

nous voyons que la variété des éléments issus de ce point se change en la variété constituée par les ∞^1 éléments linéaires d'un cercle ayant son centre en ce même point.

Considérons encore la *transformation par polaires réciproques,* et, pour prendre un cas simple, supposons que la courbe fondamentale soit le cercle $x^2+y^2=1$. L'équation de la polaire d'un point (x, y) est

$$xx_1+yy_1-1=0;$$

nous en déduisons, en dérivant successivement par rapport à x et à x_1,

$$x_1+y'y_1=0, \qquad x+y'_1y=0.$$

Nous avons en outre

$$x_1\,dx+y_1\,dy+x\,dx_1+y\,dy_1=0,$$

qui, eu égard aux précédentes équations, devient

$$y(dy_1-y'_1\,dx_1)+y_1(dy-y'\,dx)=0;$$

si donc $dy-y'\,dx=0$, il s'ensuit que $dy_1-y'_1\,dx_1=0$, c'est-à-dire que la transformation change l'équation pfaffienne en elle-même.

En général, les transformations de contact qui ne sont pas du premier type changent les points en lignes, mais la réciproque n'est pas vraie, comme on le vérifie aisément.

Rappelons qu'une transformation de contact qui n'est pas déduite d'une transformation ponctuelle par prolongement peut se mettre sous la forme

$$\Omega(x, y, x_1, y_1)=0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x}+y'\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}+y'_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}=0;$$

examinons la signification géométrique de la condition de résolubilité par rapport à x_1, y_1. Si nous considérons le point (x_1, y_1) du second plan, sa transformée dans le premier plan sera la courbe $\Omega(x, y, x_1, y_1)=0$. A l'ensemble des ∞^2 points du second plan correspondra dans le premier la famille doublement infinie des courbes $\Omega = 0$, où x_1, y_1 sont regardés comme paramètres. Or. ceci ne peut advenir quand les deux premières équations ne sont pas résolubles par rapport à x_1, y_1. En effet, dans ce cas, il résulte de ces deux équations une relation de la forme $H(x, y, y') = 0$, relation qui est une équation différentielle du premier ordre, y étant fonction de x : l'équation $\Omega = 0$ est l'intégrale de cette équation pour un système quelconque de valeurs de x_1, y_1. Mais l'intégrale générale d'une telle équation est constituée par une famille ∞^1 de courbes; donc, si le système n'est pas résoluble, aux points du second plan correspondent dans le premier ∞^1 courbes, en sorte qu'il n'existe pas une correspondance biunivoque entre les M_1 des deux plans. La résolubilité est donc une condition nécessaire.

Réciproquement, si nous avons dans le premier plan une famille ∞^2 de courbes qui correspondent biunivoquement aux ∞^2 points du second plan, il existe certainement une transformation de contact par laquelle les points de ce plan se changent en courbes du premier. En effet, soit la famille de courbes $F(x, y, a, b) = 0$, où a et b sont des paramètres; elle correspond à l'ensemble des points du second plan, en sorte que a et b se présentent sous la forme $a = \varphi(x_1, y_1)$, $b = \psi(x_1, y_1)$, et ces relations sont résolubles par rapport à x_1, y_1. Pour avoir la transformation de contact, il suffit de former l'équation

$$F[x, y, \varphi(x_1, y_1), \psi(x_1, y_1)] = 0$$

ou

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

et notre assertion se trouve vérifiée.

Il convient de considérer les transformations de contact d'un autre point de vue.

Supposons qu'on ait

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad y' = p(t);$$

en faisant varier t d'une manière continue, nous avons ∞^1 éléments; sous quelles conditions l'ensemble de ces éléments sera-t-il une *variété d'éléments* dans le sens que nous avons donné à ce terme?

Considérons les éléments correspondant aux valeurs t et $t + \Delta t$

du paramètre, et calculons la distance du point $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ à la droite qui contient le premier de ces éléments. L'équation de cette droite étant

$$Y - y = y'(X - x),$$

la distance cherchée est

$$\delta = \frac{y'\Delta x - \Delta y}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

mais ici

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}dt + \alpha = dx + \alpha, \qquad \Delta y = \frac{dy}{dt}dt + \beta = dy + \beta,$$

α et β étant des infiniment petits d'ordre supérieur; on a donc

$$\delta = \frac{y'dx - dy + y'\alpha - \beta}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

et cette distance est en général infiniment petite du premier ordre. Mais si $y'dx - dy = 0$, cette distance est au contraire un infiniment petit d'ordre supérieur. Donc les *variétés* ∞^1 *d'éléments* se distinguent des autres ensembles ∞^1 d'éléments en ce que la distance d'un élément au point de départ de l'élément infiniment voisin est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Nous dirons que deux éléments sont *unis* lorsqu'il existe entre eux une telle relation. Dès lors, *dans une* M_1 *les éléments infiniment voisins sont unis,* et nous pouvons donner cette définition :

Les transformations de contact sont les transformations qui changent les éléments unis en éléments unis.

Supposons maintenant qu'on ait dans le plan deux courbes tangentes entre elles et appliquons-leur une transformation de contact; elles se changeront en deux courbes ou en une courbe et un point. Comme deux courbes tangentes entre elles ont un élément commun, leurs transformées devront avoir un élément commun, et devront donc être tangentes entre elles (de là le nom de *transformation de contact*). Si une des courbes se transforme en un point, ce point devra se trouver sur la transformée de l'autre courbe.

Examinons comment s'effectue la transformation d'une courbe en une courbe. Nous allons voir que *la transformée d'une courbe est l'enveloppe des transformées de ses points.*

Il suffirait, pour l'établir, de considérations synthétiques très simples; mais nous préférons procéder analytiquement. Soit dans le premier plan la courbe $\varphi(x, y) = 0$. Sa transformée dans le second plan se trouve en éliminant x, y, y' entre les équations

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

D'autre part, $\Omega = 0$ étant la courbe du second plan correspondant au point (x, y) du premier plan, pour trouver l'enveloppe des courbes correspondant aux points de la ligne $\varphi(x, y) = 0$, nous devrons éliminer x, y entre les équations

$$\Omega = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Dès lors, les deux problèmes sont identiques.

Entre les fonctions avec lesquelles se forme une transformation de contact, il existe des relations remarquables.

Soit une transformation de contact

$$(13) \qquad x_1 = X(x, y, y'), \qquad y_1 = Y(x, y, y'), \qquad y'_1 = P(x, y, y').$$

Faisons voir qu'il existe une relation nécessaire et suffisante pour que les équations (13) représentent une transformation de contact.

A cet effet, il convient d'introduire un nouveau symbole. Soit z une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; désignons par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les dérivées partielles de z par rapport aux x. Nous poserons, par définition :

$$(14) \qquad [F, \Phi] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right].$$

Ces expressions sont dites *parenthèses de Jacobi*. Il est évident que, si $F = \Phi$, la parenthèse est nulle, et que, si l'on permute F et Φ, la parenthèse change de signe. Les parenthèses de Jacobi sont une généralisation des *parenthèses de Poisson* dont on se rappelle la définition

$$(F, \Phi) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right),$$

et dans lesquelles les F, Φ sont supposés fonctions des seuls x.

Si les F et Φ sont des fonctions de x, y, y', la relation (14) donne

$$[F, \Phi] = \frac{\partial F}{\partial y'} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} \right).$$

D'autre part, la condition pour que les équations (13) représentent une transformation de contact est

$$dY - P\, dX = \rho (dy - y'\, dx)$$

ou

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \frac{\partial Y}{\partial y'} dy' \\ &\quad - P \left(\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial y'} dy' \right) = \rho (dy - y'\, dx). \end{aligned}$$

On en déduit

$$(15) \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - P \frac{\partial X}{\partial x} = -\rho y', \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} - P \frac{\partial X}{\partial y} = \rho, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y'} - P \frac{\partial X}{\partial y'} = 0$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial x} & -y' \\ \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial y} & 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial y'} & \frac{\partial X}{\partial y'} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial Y}{\partial y'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + y' \frac{\partial X}{\partial y} \right) - \frac{\partial X}{\partial y'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + y' \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0,$$

ou enfin

$$(16) \qquad [X, Y] = 0.$$

Réciproquement, si la relation (16) a lieu entre deux fonctions X, Y, on peut trouver une fonction P qui, jointe à X, Y, définit une transformation de contact.

En effet, la relation (16) est la condition pour que les équations (15) soient compatibles ou pour qu'il existe des fonctions P et ρ qui y satisfassent. Nous déduisons de ces équations

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+y'\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-P\left(\frac{\partial X}{\partial x}+y'\frac{\partial X}{\partial y}\right)=0,$$

avec

$$\frac{\partial Y}{\partial y'}-P\frac{\partial X}{\partial y'}=0.$$

Il n'y a qu'un cas où ces équations ne déterminent pas P, c'est celui où

$$\frac{\partial X}{\partial x}+y'\frac{\partial X}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial X}{\partial y'}=0.$$

Mais, de la seconde de ces relations, il résulterait que X ne contiendrait pas y', et que par suite la première relation exigerait

$$\frac{\partial X}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial X}{\partial y}=0;$$

X se réduirait donc à une constante, ce qui ne peut être. Ainsi, P se trouve déterminé d'une manière unique.

La fonction ρ est aussi déterminée et n'est pas identiquement nulle. En effet, si elle était nulle, on aurait simultanément

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-P\frac{\partial X}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y}-P\frac{\partial X}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y'}-P\frac{\partial X}{\partial y'}=0,$$

et les trois déterminants de la matrice

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial y'} & \frac{\partial X}{\partial y'} \end{matrix} \right\Vert$$

seraient nuls; alors X, Y ne seraient pas indépendants, et ce cas a été exclu.

Nous avons ainsi démontré notre théorème.

Cherchons maintenant une autre relation entre les fonctions X, Y, P. A cet effet, écrivons notre équation habituelle comme il suit:

$$d[Y-PX]+X\,dP=\rho(dy-y'\,dx);$$

de là résulte immédiatement l'existence d'une autre transformation de contact

$$x_2 = -P, \qquad y_2 = Y - PX, \qquad y'_2 = X;$$

pour cette transformation, la relation analogue à la relation (16) sera

$$[-P, Y - PX] = 0$$

ou

$$-[P, Y] + [P, PX] = 0$$

ou enfin

(17) $$[P, Y] = P[P, X].$$

Arrivons enfin au lien qui unit la théorie des transformations de contact à celle des équations différentielles. Soit l'équation différentielle

(18) $$F(x, y, y') = 0;$$

supposons qu'on sache trouver deux fonctions X, Y de x, y, y', liées par la relation

$$[X, Y] = 0,$$

et telles qu'on puisse mettre l'équation (18) sous la forme

$$Y - \varphi(X) = 0.$$

Puisque

$$[X, Y - \varphi(X)] = [X, Y] - [X, \varphi(X)] = [X, Y] - \varphi'(X)[X, X] = 0,$$

les équations

$$x_1 = X, \qquad y_1 = Y - \varphi(X)$$

définissent une transformation de contact. Aux points de l'axe des x_1 du plan (x_1, y_1), c'est-à-dire aux points $x_1 = c$, $y_1 = 0$, correspond dans le plan (x, y) la variété M_1 définie par

(19) $$X = c, \qquad Y - \varphi(X) = 0.$$

En éliminant y' entre les équations (19), on obtient l'équation d'une famille simplement infinie de courbes; comme les éléments de toutes ces courbes satisfont à la seconde des équations (19), laquelle n'est autre que l'équation (18), la famille de courbes trouvée forme l'ensemble des courbes intégrales de l'équation proposée.

D'après cela, si l'on sait trouver X, Y, pour intégrer l'équation (18), il suffira d'écrire les équations (19) et d'éliminer y' entre elles. Donc :

L'intégration d'une équation $F(x, y, y') = 0$ *équivaut à la recherche d'une transformation de contact* $x_1 = X$, $y_1 = Y$, *permettant de mettre l'équation sous la forme* $y_1 - \varphi(x_1) = 0$.

II. — Transformations de contact de l'espace à trois dimensions.

Soit la transformation

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y, z), \qquad y_1 = Y(x, y, z), \qquad z_1 = Z(x, y, z).$$

Désignons par p et q les dérivées partielles de z (considéré comme fonction de x, y) par rapport à x, y; par p_1 et q_1 celles de z_1 par rapport à x_1, y_1. En supposant que x, y, z soient les coordonnées d'un point d'une surface $z = f(x, y)$, les dérivées p, q déterminent le plan tangent en ce point; on peut donc dire que les quantités x, y, z, p, q définissent un *élément superficiel* dans l'espace S des points (x, y, z); cet élément passe par le point (x, y, z) et est situé dans le plan mené par ce point perpendiculairement à la droite de cosinus directeurs $\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

Nous avons

$$(2) \qquad \begin{gathered} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0 \quad \text{ou} \quad dZ - p_1\,dX - q_1\,dY = 0. \end{gathered}$$

Comme x et y sont indépendants, il ne peut exister entre dx, dy, dz qu'une seule relation; on doit donc avoir

$$dZ - p_1\,dX - q_1\,dY \equiv \rho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

ou, en développant les différentielles

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial z} - p_1 \frac{\partial X}{\partial z} - q_1 \frac{\partial Y}{\partial z} = \rho; \\ &\frac{\partial Z}{\partial x} - p_1 \frac{\partial X}{\partial x} - q_1 \frac{\partial Y}{\partial x} = -\rho p; \\ &\frac{\partial Z}{\partial y} - p_1 \frac{\partial X}{\partial y} - q_1 \frac{\partial Y}{\partial y} = -\rho q. \end{aligned} \right.$$

En éliminant ρ, on obtient

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + p\,\frac{\partial Z}{\partial z} = p_1\left(\frac{\partial X}{\partial x} + p\,\frac{\partial X}{\partial z}\right) + q_1\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p\,\frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} + q\,\frac{\partial Z}{\partial z} = p_1\left(\frac{\partial X}{\partial y} + q\,\frac{\partial X}{\partial z}\right) + q_1\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + q\,\frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Ces équations sont résolubles par rapport à p_1 et q_1. En effet, si l'on avait

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} + p\,\frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial x} + p\,\frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial y} + q\,\frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial y} + q\,\frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{D[X, Y]}{D[x, y]} + p\,\frac{D[X, Y]}{D[z, y]} + q\,\frac{D[X, Y]}{D[x, z]} = 0,$$

comme X, Y ne contiennent pas p, q, il en résulterait que

$$\frac{D[X, Y]}{D[x, y]} = 0, \qquad \frac{D[X, Y]}{D[z, y]} = 0, \qquad \frac{D[X, Y]}{D[x, z]} = 0,$$

et X, Y ne seraient pas indépendants, contrairement à l'hypothèse.

Les équations (3) déterminent donc complètement p_1, q_1 en fonction de x, y, z, p, q :

$$(4) \qquad p_1 = P(x, y, z, p, q), \qquad q_1 = Q(x, y, z, p, q);$$

ρ s'en déduit aussi, bien déterminé et différent de zéro, car, dans le cas contraire, X, Y, Z ne seraient pas indépendants, et les équations (1) ne représenteraient pas une transformation.

Les équations (1) et (4) réunies définissent une *transformation ponctuelle prolongée*, qui laisse invariante l'équation pfaffienne (2), et qui transforme les éléments superficiels passant par un point de l'espace, en éléments superficiels passant par un point d'un autre espace.

En dehors des transformations ponctuelles prolongées, il existe d'autres transformations qui changent les éléments de surface en éléments de surface (mais non pas toujours les éléments appartenant à un point en éléments appartenant à un point), et qui laissent invariante l'équation pfaffienne (2). On les nomme *transformations de contact*.

Soit une transformation portant sur x, y, z, p, q, c'est-à-dire une transformation d'éléments superficiels

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = X(x,y,z,p,q), \quad y_1 = Y(x,y,z,p,q), \quad z_1 = Z(x,y,z,p,q), \\ p_1 = P(x,y,z,p,q), \quad q_1 = Q(x,y,z,p,q); \end{cases}$$

supposons qu'elle laisse invariante l'équation (2).

En éliminant p et q entre les équations (5), nous pouvons obtenir une, deux ou trois équations; c'est-à-dire qu'entre les x, y, z et les x_1, y_1, z_1, il peut exister une, deux ou trois relations.

S'il en existe trois, on a une transformation de la forme (1), (4), soit une transformation ponctuelle prolongée.

S'il existe une seule relation

$$(6)\qquad \Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

il ne devra aussi exister qu'une relation entre les différentielles des variables. L'équation

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 - \rho(dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$

devra donc coïncider avec l'équation

$$(7)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial z_1}dz_1 = 0,$$

et l'on aura

$$\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial x}}{\rho p} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial y}}{\rho q} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial z}}{-\rho} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}}{-p_1} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}}{-q_1} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}}{1}.$$

L'élimination de ρ donne les quatre équations

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + p\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + q\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0, \qquad \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0. \end{cases}$$

Ces équations, jointes à (6), donnent, dans le cas considéré, les cinq équations qui définissent la *transformation de contact*. Elles présentent sur les équations (5) certains avantages : elles représentent seulement des transformations de contact, et non des transformations quelconques, et en outre elles sont symétriques par rapport à x, y, z et x_1, y_1, z_1.

Réciproquement, quelle que soit l'équation $\Omega = 0$, pourvu que l'ensemble de cette équation et des deux premières équations (8) soit résoluble par rapport à x, y, z, et que l'ensemble de cette équation et des deux dernières équations (8) le soit par rapport à x_1, y_1, z_1, les cinq équations (6) et (8) représentent une transformation de contact. En effet, de l'équation (7), on déduit, en tenant compte de (8),

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}(-p\,dx - q\,dy + dz) + \frac{\partial\Omega}{\partial z_1}(-p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 + dz_1) = 0;$$

cette relation montre que la transformation laisse invariante l'équation pfaffienne (2); ρ a pour valeur $-\dfrac{\frac{\partial\Omega}{\partial z}}{\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}}$.

Il nous reste à considérer le cas dans lequel l'élimination de p et q entre les équations (5) conduit à deux équations

$$(9) \qquad \Omega'(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega''(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

On déduit alors de ces équations

$$d\Omega' = 0, \qquad d\Omega'' = 0.$$

Comme la relation

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 - \rho(dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$

doit être conséquence des équations (9), son premier membre sera une fonction linéaire de $d\Omega'$ et de $d\Omega''$, c'est-à-dire qu'il aura la forme

$$\lambda'\,d\Omega' + \lambda''\,d\Omega''.$$

Par suite

$$\frac{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial x} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial x}}{\rho p} = \frac{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial y} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial y}}{\rho q} = \frac{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial z} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial z}}{-1} = \ldots;$$

d'où, en éliminant ρ,

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial x} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial x}}{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial z} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial z}}, & q &= -\frac{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial y} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial y}}{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial z} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial z}}, \\ p_1 &= -\frac{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial x_1} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial x_1}}{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial z_1} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial z_1}}, & q_1 &= -\frac{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial y_1} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial y_1}}{\lambda'\frac{\partial\Omega'}{\partial z_1} + \lambda''\frac{\partial\Omega''}{\partial z_1}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ entre les équations (10), on obtient trois équations qui, jointes aux équations (9), définissent la *transformation de contact* du type considéré.

Réciproquement, étant données deux équations (9) quelconques, si l'on suppose seulement que ces équations, jointes à celles qui s'en déduisent par le système correspondant (10) d'où l'on a éliminé $\frac{\lambda'}{\lambda''}$, soient résolubles tant par rapport à x, y, z que par rapport à x_1, y_1, z_1, on déduit de ces équations une transformation de contact.

Introduisons maintenant la notion de *variété d'éléments*. Trois équations entre x, y, z, p, q

$$(11) \qquad L(x, y, z, p, q) = 0, \quad M(x, y, z, p, q) = 0, \quad N(x, y, z, p, q) = 0$$

représentent une double infinité d'éléments plans de l'espace. Nous dirons que le système (11) *satisfait* à l'équation pfaffienne (2) quand cette équation est une conséquence des équations (11) et des équations

$$(12) \qquad dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0.$$

Une double infinité d'éléments satisfaisant à l'équation (2) est appelée une *variété d'éléments* et se désigne par M_2.

En éliminant p, q entre les équations (11), nous pouvons obtenir une, deux ou trois équations.

Si nous n'obtenons qu'une équation $\Phi(x, y, z) = 0$, le système (11) prend la forme

$$(13) \qquad \Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Theta = 0,$$

Ψ et Θ étant des fonctions de x, y, z, p, q, et le système (12) devient

$$d\Phi = 0, \quad d\Psi = 0, \quad d\Theta = 0.$$

Or, $d\Psi$ et $d\Theta$ contiennent dp et dq, tandis que ces différentielles ne figurent pas dans (2). Donc, si le système (13) satisfait à (2), cette dernière équation doit être simplement une conséquence des équations (13) et de l'équation $d\Phi = 0$, c'est-à-dire qu'elle doit coïncider avec cette dernière en vertu des équations (13). Ainsi

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{-p} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{-q} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{1};$$

d'où

$$p = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}.$$

Mais ces formules sont celles qui déterminent la disposition du plan tangent à la surface $\Phi = 0$. On voit donc que, dans le cas considéré, les ∞^2 éléments ne sont autres que les points de la surface $\Phi = 0$ avec les plans tangents correspondants. En d'autres termes, la *variété* est constituée actuellement par les ∞^2 éléments plans d'une surface.

Supposons maintenant qu'en éliminant p et q entre les équations (11), on obtienne deux équations

$$(14) \qquad \Phi = 0, \qquad \Psi = 0;$$

le système (11) prendra la forme

$$\Phi = 0, \qquad \Psi = 0, \qquad \Theta = 0,$$

Θ étant fonction de x, y, z, p, q. En raisonnant comme tout à l'heure, on reconnaît que le premier membre de l'équation (2) doit être une combinaison linéaire de $d\Phi$, $d\Psi$, en sorte qu'on aura

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} & \frac{\partial\Psi}{\partial y} & \frac{\partial\Psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux équations $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ représentent deux surfaces, et les dérivées partielles de Φ et Ψ sont proportionnelles aux cosinus directeurs des normales à ces surfaces au point (x, y, z), tandis que $p, q, -1$ sont proportionnels aux cosinus directeurs de la perpendiculaire à l'élément superficiel (x, y, z, p, q). L'équation (15) exprime que ces trois droites sont dans un même plan, ce qui revient à dire que l'élément considéré passe par la tangente à la ligne (14). Donc, dans le cas actuel, la M_2 est constituée par tous les éléments plans passant par les tangentes à une courbe; on a ∞^1 tangentes par chacune desquelles passent ∞^1 éléments plans.

Considérons enfin le troisième cas, dans lequel L, M, N ne contiennent pas p et q. Les équations (11) représentent alors, si elles sont résolubles par rapport à x, y, z, un point, et par suite la double infinité des éléments appartenant à ce point. La variété est donc une *étoile de plans* considérés comme éléments superficiels du centre de l'étoile.

En résumé, nous avons trois types de variétés M_2 d'éléments : les ∞^2 éléments plans d'une surface; les ∞^2 éléments plans contenant les tangentes à une ligne de l'espace; les ∞^2 éléments plans appartenant à un point.

En général, une transformation de contact change une variété d'un type en une variété d'un autre type.

Il convient de signaler les exceptions suivantes : l'ensemble des plans tangents à une surface cylindrique ayant ses génératrices parallèles à l'axe des z, et l'ensemble des plans contenant une droite parallèle à l'axe des z. Ces ensembles, nous ne pouvons pour le moment les considérer comme des M_2, parce que une au moins des coordonnées de leurs éléments est infinie. Nous verrons plus loin comment, par l'emploi des coordonnées homogènes, on fait disparaître ces exceptions, dues à ce que nous traitons les trois coordonnées cartésiennes d'une manière dissymétrique, en considérant l'une d'elles, z, comme fonction des deux autres x, y.

Démontrons maintenant que :

La seule équation pfaffienne satisfaite par toutes les M_2 *est l'équation* (2).

En effet, considérons en particulier la variété M_2 fournie par tous les plans tangents à une surface quelconque d'équation $\Phi(x, y, z) = 0$. Cette équation peut s'écrire $z - \varphi(x, y) = 0$, car, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, z y entre nécessairement; il s'ensuit que $p - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, $q - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$. Soit alors l'équation pfaffienne

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dp + E\,dq = 0.$$

Nous devrions avoir

$$\begin{aligned} A\,dx + B\,dy + C(p\,dx + q\,dy) + D\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}dy\right] \\ + E\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dy\right] \equiv 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} A + Cp + D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + E\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} &= 0, \\ B + Cq + D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + E\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned}$$

quel que soit φ. Il en résulterait

$$A + Cp = 0, \qquad B + Cq = 0, \qquad D = 0, \qquad E = 0,$$

en sorte que notre équation pfaffienne serait

$$C(dz - p\,dx - q\,dy) = 0,$$

et coïnciderait avec (2).

D'après cela, il est aisé de démontrer, tout comme on l'a fait pour les transformations dans le plan, que :

Les transformations de contact sont exclusivement toutes les transformations qui changent une M_2 *quelconque en une* M_2.

Si l'on a ∞^1 éléments plans dépendant d'un paramètre t

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad p = p(t), \qquad q = q(t),$$

la distance du point de paramètre $t + \Delta t$ à l'élément de paramètre t est en général infiniment petite du premier ordre par rapport à Δt; elle n'est d'ordre supérieur que si

$$(16) \qquad \frac{dz}{dt} - p\,\frac{dx}{dt} - q\,\frac{dy}{dt} = 0,$$

et, dans ce cas, on dit que les éléments t et $t + \Delta t$ sont *unis*.

Alors, si parmi les ∞^2 éléments d'une M_2 nous en choisissons une simple infinité, en considérant les x, y, z, p, q comme fonctions d'un paramètre t, nous aurons pour les éléments de cette simple infinité

$$(17) \qquad dx = \frac{dx}{dt}\,dt, \qquad \ldots;$$

et, puisque pour tous les éléments de la M_2 l'équation (2) est satisfaite, en vertu des relations (17), l'équation (16) sera aussi satisfaite. Donc: *Les éléments contigus d'une* M_2 *sont unis*. Par suite aussi :

Une transformation de contact est une transformation qui change les éléments unis en éléments unis.

Voyons maintenant comment se transforment les entités géométriques par une transformation de contact.

Considérons d'abord les transformations ponctuelles prolongées. Elles transforment un point en un point, par suite une étoile de plans en une étoile de plans, une ligne en une ligne, une surface en une surface; plus brièvement, elles transforment une M_2 en une M_2 de même espèce.

En second lieu, considérons les transformations du deuxième type, c'est-à-dire engendrées par une seule relation

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

En appliquant à un point $x = a$, $y = b$, $z = c$ une telle transformation, on obtient manifestement une surface

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie : une surface ne se trouve pas toujours transformée en un point. Pour le mieux voir, supposons qu'on ait la surface $\varphi(x, y, z) = 0$. Les équations de la M_2 formée par ses plans tangents seront

$$(18) \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

En éliminant x, y, z, p, q entre ces équations et les cinq équations (6), (8) qui définissent la transformation, nous obtenons trois équations entre x_1, y_1, z_1, p_1, q_1. L'élimination de p_1 et q_1 conduit ensuite à l'équation ou aux équations de l'entité transformée. On peut aussi éliminer d'abord p, q, p_1, q_1, ce qui donne les équations

$$\Omega = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Si, entre elles, nous éliminons maintenant x, y, z, nous obtiendrons, en général, une seule équation en x_1, y_1, z_1, représentant la surface transformée. Ainsi, en général, une surface se change en une surface. Cette dernière surface aura en commun avec chacune des ∞^2 surfaces transformées des points de $\varphi = 0$, au moins un élément commun, c'est-à-dire qu'elle sera l'enveloppe de cette famille ∞^2 de surfaces. D'ailleurs, il est aisé de voir que la méthode classique pour la recherche des enveloppes conduit précisément aux équations mêmes que nous avons obtenues.

Cherchons la transformée d'une ligne

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0.$$

A cet effet nous devrons éliminer x, y, z, p, q entre les équations de la ligne et les quatre équations suivantes:

$$\Omega = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} + p\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y} + q\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \text{ [1]},$$

ou x, y, z entre les quatre équations,

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \Omega = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0;$$

on obtient donc en général une surface.

Il nous reste à examiner le troisième type des transformations de contact, c'est-à-dire le type des transformations engendrées par deux équations (9). On voit de suite qu'un point se trans-

---

[1] Comme nous l'avons déjà vu, cette dernière équation exprime que les éléments de la M_2 sont les plans passant par les tangentes à la courbe.

forme en une ligne. Voyons ensuite en quoi se transforme une surface $\varphi(x, y, z) = 0$. Des équations (10) il résulte que

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \dfrac{\partial \Omega'}{\partial x} & \dfrac{\partial \Omega'}{\partial y} & \dfrac{\partial \Omega'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Omega''}{\partial x} & \dfrac{\partial \Omega''}{\partial y} & \dfrac{\partial \Omega''}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

et par suite, eu égard aux équations (18), que

$$\frac{D[\varphi, \Omega', \Omega'']}{D[x, y, z]} = 0.$$

En éliminant x, y, z entre cette équation et les trois équations $\Omega' = 0$, $\Omega'' = 0$, $\varphi = 0$, nous obtiendrons généralement une surface. Donc, en général, une surface se transforme en une surface.

D'une manière analogue, on reconnaît que la transformée d'une ligne $\varphi = 0$, $\psi = 0$ est encore, en général, une surface; il suffit d'éliminer x, y, z entre les quatre équations $\Omega' = 0$, $\Omega'' = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Terminons encore par quelques aperçus sur les équations différentielles.

Le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(19) \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0$$

consiste dans la recherche de tous les systèmes d'équations de la forme

$$(20) \qquad z - F(x, y) = 0, \qquad p - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad q - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

qui ont pour conséquence cette équation (19). Si l'on observe que tout système (20) satisfait à l'équation pfaffienne habituelle, on peut considérer ce problème comme un cas particulier du suivant:

Rechercher tous les systèmes d'équations

$$\varphi_1(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \varphi_3(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui satisfont à l'équation (2) *et dont l'équation* (19) *soit conséquence.*

Géométriquement, le problème peut être énoncé ainsi :

Rechercher toutes les M_2 *dont les éléments appartiennent à l'ensemble* ∞^4 *des éléments définis par l'équation* (19).

Le problème étant posé sous cette forme plus générale, non seulement nous comprenons, parmi les solutions, des M_2 qui ne sont pas des surfaces, mais encore nous englobons le cas dans lequel l'équation (19) ne contient ni p ni q, c'est-à-dire se réduit à une équation entre x, y, z : dans ce cas, l'unique solution du problème est la surface représentée par l'équation (19) elle-même.

III. — Transformations de contact à un nombre quelconque de variables.

Considérons l'équation pfaffienne

$$(1) \qquad dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i = 0,$$

et soit $W_1(z, x, p) = 0$, $W_2(z, x, p) = 0$, ..., un système d'équations qui y satisfasse. De ce système on devra déduire au moins une relation entre les x et z, car, dans le cas contraire, l'équation (1) ne saurait subsister. Supposons que ce système donne lieu à $(q+1)$ relations entre les x et z :

$$(2) \qquad \Omega_1(z, x) = 0, \qquad \Omega_2(z, x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{q+1}(z, x) = 0;$$

alors l'équation (1) devra coïncider avec l'équation

$$\sum_{h=1}^{h=q+1} \lambda_h d\Omega_h = 0,$$

pour des valeurs convenables des λ; le système comprendra donc, outre les équations $\Omega_h = 0$, les équations qui s'obtiennent en éliminant les λ entre les équations

$$(3) \qquad \sum_{h=1}^{h=q+1} \lambda_h \frac{\partial \Omega_h}{\partial z} = 1, \qquad \sum_{h=1}^{h=q+1} \lambda_h \frac{\partial \Omega_h}{\partial x_i} = -p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Réciproquement, un système quelconque de cette forme, pourvu que les équations (2) soit résolubles par rapport à z, x_1, ..., x_q, satisfait à l'équation (1); car nous pourrons résoudre $(q+1)$ des relations (3) par rapport à λ_1, λ_2, ..., λ_{q+1} et introduire les expressions trouvées dans les relations non utilisées. Nous désignerons par

$$(4) \qquad V_1(z, x, p) = 0, \qquad \ldots, \qquad V_{n-q}(z, x, p) = 0$$

les équations obtenues par l'élimination des λ. Nous pouvons conclure de là ce premier résultat :

Les équations (2) *et* (4), *auxquelles nous pouvons adjoindre des relations arbitraires entre les* z, x, p (*pourvu qu'elles soient compatibles entre elles et avec les équations précédentes, et pourvu qu'elles ne conduisent à aucune nouvelle relation entre les* x *et* z *seulement*), *donnent la forme générale des systèmes qui satisfont à l'équation* (1).

L'élimination se fait immédiatement si les équations (2) sont résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}, z$, c'est-à-dire ont la forme

$$x_1 - f_1(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad x_q - f_q(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0,$$
$$z - f(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0.$$

Alors les équations (4) deviennent

$$p_h - \frac{\partial f}{\partial x_h} + p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_h} + \ldots + p_q \frac{\partial f_q}{\partial x_h} = 0 \qquad (h = q+1, \ldots, n).$$

Posons

$$\begin{aligned} z - x_1 p_1 - \ldots - x_q p_q &= f - p_1 f_1 - p_2 f_2 - \ldots - p_q f_q \\ &= W(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q); \end{aligned}$$

les équations précédentes pourront s'écrire

$$(5) \quad \begin{cases} x_i = -\dfrac{\partial W}{\partial p_i}, \qquad p_h = \dfrac{\partial W}{\partial x_h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q;\ h = q+1, \ldots, n), \\ z = W + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=q} p_k x_k. \end{cases}$$

Ici W est une fonction linéaire des p_1, ..., p_q; mais on peut démontrer que le système (5) satisfait à l'équation pfaffienne (1) quelle que soit la fonction W de $x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q$. En effet, la dernière des équations (5) donne

$$dz = \sum_{k=1}^{k=q} p_k dx_k + \sum_{k=1}^{k=q} x_k dp_k + \sum_{k=q+1}^{k=n} \frac{\partial W}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^{k=q} \frac{\partial W}{\partial p_k} dp_k,$$

ou, en tenant compte des autres équations (5),

$$dz = \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k,$$

et l'on reconnaît l'équation (1).

Si le système considéré comprend l'équation $z = 0$, l'ensemble des autres équations, desquelles naturellement on peut faire disparaître z, satisfait à l'équation pfaffienne

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i = 0.$$

Revenons au cas général, et supposons maintenant, dans (5), que $q = 0$; les équations (5) se réduisent à la forme

$$(6) \qquad z - F(x) = 0, \qquad p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si un système de la forme (6) comprend une équation

$$(7) \qquad V(z, x, p) = 0,$$

on devra avoir

$$V\left(F, x, \frac{\partial F}{\partial x}\right) \equiv 0,$$

et, par suite, en dérivant par rapport à un quelconque des x,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial V}{\partial p_h}\frac{\partial^2 F}{\partial x_h \partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui peut s'écrire, comme on le vérifie facilement,

$$\left[p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}, V\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En outre, des équations (6), il résulte immédiatement que

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial V}{\partial p_h}\left(p_h - \frac{\partial F}{\partial x_h}\right) = 0$$

ou

$$[z - F, V] = 0.$$

Donc :

Si le système (6) *comprend l'équation* (7), *il comprend aussi les équations*

$$[z - F, V] = 0, \qquad \left[p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}, V\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le symbole $[V, f]$ peut être regardé comme représentant une transformation infinitésimale

$$[V, f] \equiv Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

où

$$\xi_i = \frac{\partial V}{\partial p_i}, \qquad \zeta = \sum_{h=1}^{h=n} p_h \frac{\partial V}{\partial p_h}, \qquad \Pi_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations précédentes peuvent alors s'écrire

$$X(z - F) = 0, \qquad X\left(p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et l'on peut dire (*voir* première Partie, n° IX) que

Si le système (6) *comprend l'équation* (7), *il admet la transformation infinitésimale* $[V, f]$.

Soit maintenant un système : $V_1 = 0, \ldots, V_{n+1} = 0$, équivalent au système (6), et soit $V = 0$ une conséquence de ce système. Comme deux systèmes équivalents admettent les mêmes transformations infinitésimales, on aura

$$[V, V_h] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n+1).$$

En particulier, on aura

$$[V_h, V_k] = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Supposons inversement qu'un système quelconque d'équations

$$\Phi_1(z, x, p) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_m(z, x, p) = 0$$

admette la propriété que les équations

$$[\Phi_h, \Phi_k] = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

soient conséquences du système lui-même. Si

$$\Psi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

est un système équivalent, il admettra les mêmes transformations infinitésimales que le système donné, c'est-à-dire que l'on aura

$$[\Phi_h, \Psi_k] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [\Psi_k, \Phi_h] = 0:$$

donc le système donné, et par suite tout autre système équivalent, admettra les transformations infinitésimales $[\Psi_k, f]$. Partant, on aura

$$[\Psi_k, \Psi_h] = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Donc

Si un système $\Phi_i = 0$ est tel que les relations $[\Phi_h, \Phi_k] = 0$ soient conséquences de ce système, et si $\Psi_i = 0$ est un système équivalent au premier, les relations $[\Psi_h, \Psi_k] = 0$ sont aussi des conséquences du système.

En particulier, si un système $\Phi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ est tel que les parenthèses $[\Phi_h, \Phi_k]$ $(h, k = 1, 2, \ldots, n)$ s'annulent *identiquement,* on dit que ce système est *en involution*. On peut conclure que :

Tout système équivalent à un système en involution est aussi en involution.

Nous avons vu que tous les systèmes de $(n + 1)$ équations qui satisfont à l'équation (1) peuvent être mis sous la forme (5), et que, réciproquement, tout système de cette forme satisfait à l'équation (1). Or, il est aisé de vérifier que toutes les parenthèses formées avec les équations du système (5) s'annulent en vertu du système lui-même. On a en effet

$$\left[x_i + \frac{\partial W}{\partial p_i}, x_j + \frac{\partial W}{\partial p_j}\right] \equiv 0;$$

$$\left[x_i + \frac{\partial W}{\partial p_i}, p_h - \frac{\partial W}{\partial x_h}\right] \equiv 0;$$

$$\left[p_h - \frac{\partial W}{\partial x_h}, p_k - \frac{\partial W}{\partial x_k}\right] \equiv 0;$$

$$\left[x_i + \frac{\partial W}{\partial p_i}, z - \sum_{k=1}^{k=q} p_k x_k - W\right] = x_i + \frac{\partial W}{\partial p_i} = 0;$$

$$\left[p_h - \frac{\partial W}{\partial x_h}, z - \sum_{k=1}^{k=q} p_k x_k - W\right] = p_h - \frac{\partial W}{\partial x_h} = 0$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, q; \qquad h, k = q+1, \ldots, n).$$

Nous pouvons donc dire que :

Pour tout système satisfaisant à l'équation pfaffienne (1), *les parenthèses formées avec les premiers membres des équations du système s'annulent en vertu du système même.*

Il résulte de là que :

Si un système $\Phi_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, *où les* a_i *sont des constantes, satisfait à l'équation* (1) *pour toutes les valeurs possibles des* a, *ce système est en involution.*

Car les parenthèses doivent s'annuler en vertu du système, et comme elles ne dépendent pas des a, elles doivent s'annuler identiquement.

Réciproquement, si un système est tel que les parenthèses formées avec les premiers membres de ses équations soient nulles en vertu du système lui-même, ce système satisfait à l'équation pfaffienne (1).

Soit le système

(8) $$\Phi_i(z, x, p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1);$$

les relations

$$[\Phi_h, \Phi_k] = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

sont des conséquences de ce système.

A supposer que le système ne contienne pas la variable z, en éliminant les p, nous pourrons en déduire un certain nombre de relations indépendantes entre les x, relations qu'il nous est loisible d'imaginer résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_l$:

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{l+1}, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_{l+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_l = \varphi_l(x_{l+1}, \ldots, x_n): \end{cases}$$

en même temps, ce procédé d'élimination fournira $(n - l + 1)$ des p exprimés au moyen des p restant et des x; et, puisque les indices des p vont de 1 à n, un au moins des indices de ces $(n - l + 1)$ quantités p devra coïncider avec un des nombres $1, \ldots, l$; désignons donc ces p par $p_l, p_{l+1}, \ldots, p_n$, en sorte qu'on aura

$$(10)\qquad \begin{cases} p_l = \psi_l(p_1, \ldots p_{l-1}, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n = \psi_n(p_1, \ldots, p_{l-1}, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Comme le système (9), (10) est équivalent au système (8), les parenthèses du nouveau système devront être nulles en vertu du système lui-même, et l'on devra avoir en particulier

$$[p_l - \psi_l, x_l - \varphi_l] = 0.$$

Mais, en calculant directement cette parenthèse, on trouve que sa valeur est 1. Nous pouvons donc conclure qu'*il est impossible que le système* (8) *ne contienne pas* z.

Dès lors, éliminons z entre les équations (8); nous obtiendrons

$$(11)\qquad \Psi_i(x, p) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

et nous aurons comme conséquence du système (11)

$$[\Psi_h, \Psi_k] = 0 \qquad (h, k = 1, \ldots, n).$$

Il peut résulter des équations (11) un certain nombre de relations entre les x seuls; appelons q ce nombre qui peut être ou n'être pas nul, et représentons ces relations par

$$(12)\qquad \Omega_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_q(x) = 0;$$

notre procédé habituel d'élimination donnera alors $(n - q)$ des p

sous la forme

$$(13)\quad \begin{cases} p_{q+1} = \psi_{q+1}(p_1, \ldots, p_q, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n \quad = \psi_n \quad (p_1, \ldots, p_q, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

On peut remarquer immédiatement que les équations (12) ne peuvent entraîner aucune relation entre les $x_{q+1}, \ldots, x_n$ seuls; en effet, s'il existait une telle relation $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0$, comme on a

$$[p_h - \psi_h, \varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \qquad (h = q+1, \ldots, n),$$

on devrait avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} = 0 \qquad (h = q+1, \ldots, n),$$

et l'équation $\varphi = 0$ se réduirait à une identité.

Les équations (12) peuvent donc être résolues par rapport à $x_1, \ldots, x_q$:

$$(14)\quad x_1 = \varphi_1(x_{q+1}, \ldots, x_n) \qquad \ldots, \qquad x_q = \varphi_q(x_{q+1}, \ldots, x_n).$$

Soit

$$z = \eta(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$$

l'expression trouvée de z; posons

$$z - \sum_{\nu=1}^{\nu=q} x_\nu p_\nu = \eta(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) - \sum_{\nu=1}^{\nu=q} x_\nu p_\nu = \zeta(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n);$$

au moyen des équations (13), (14), nous pouvons faire disparaître de ζ les variables $x_1, \ldots, x_q, p_{q+1}, \ldots, p_n$, et nous aurons

$$(15)\qquad z - \sum_{\nu=1}^{\nu=q} x_\nu p_\nu = \mathrm{W}(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n).$$

En outre, en vertu des équations (14), les équations (13) peuvent s'écrire

$$(16)\quad \begin{cases} p_{q+1} = \theta_{q+1}(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n \quad = \theta_n \quad (p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Les équations (14), (15), (16) sont équivalentes au système (8).

On trouve alors

$$[x_h - \varphi_h, x_k - \varphi_k] \equiv 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$[x_h - \varphi_h, p_k - \theta_k] = \frac{\partial \theta_k}{\partial p_h} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} \qquad (h = 1, \ldots, q;\ k = q+1, \ldots, n),$$

$$[p_h - \theta_h, p_k - \theta_k] = \frac{\partial \theta_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \theta_k}{\partial x_h} \qquad (h, k = q+1, \ldots, n),$$

$$\left[z - \sum_{\nu=1}^{\nu=q} x_\nu p_\nu - W, x_h - \varphi_h\right] = -\left(x_h + \frac{\partial W}{\partial p_h}\right) \qquad (h = 1, \ldots, q),$$

$$\left[z - \sum_{\nu=1}^{\nu=q} x_\nu p_\nu - W, p_k - \theta_k\right] = -\left(p_k - \frac{\partial W}{\partial x_k}\right) \qquad (k = q+1, \ldots, n).$$

Comme les parenthèses doivent être toutes nulles en vertu du système, il résulte des deux dernières expressions que

$$\varphi_h = -\frac{\partial W}{\partial p_h}, \qquad \theta_k = \frac{\partial W}{\partial x_k} \qquad (h = 1, \ldots, q;\ k = q+1, \ldots, n),$$

et alors les parenthèses qui restent sont aussi nulles. Le système se trouve donc mis sous la forme (5), et par suite il satisfait à l'équation (1).

Nous pouvons conclure :

Un système $\Phi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ *satisfait à l'équation* (1) *toutes les fois exclusivement que les parenthèses* $[\Phi_h, \Phi_k]$ *sont toutes nulles, en vertu du système même* (ou aussi, en particulier, identiquement).

En particulier :

Un système $\Phi_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, *où les* a_i *sont des constantes, satisfait à l'équation* (1) *pour des valeurs quelconques des* a_i *lorsqu'il est en involution, et alors seulement.*

Si, m étant un nombre quelconque, un système

$$\Phi_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

satisfait à l'équation (1) pour des valeurs quelconques des a_i, le premier membre de (1) doit être une combinaison linéaire des expressions $d\Phi_i$. Réciproquement, si m fonctions Φ_i satisfont identiquement à une relation de la forme

$$dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i = \sum_{h=1}^{h=m} \lambda_h \, d\Phi_h,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ étant des fonctions convenablement choisies, on voit tout d'abord que, parmi les Φ, il y en aura au moins $(n+1)$ indépendants, puisque la forme générale trouvée ci-dessus, des systèmes de $(n+1)$ équations satisfaisant à (1), montre que ces équations sont toujours indépendantes; en second lieu, le système $\Phi_i = a_i$ satisfera à (1) pour des valeurs quelconques des a_i; et par suite, s'il contient précisément $(n+1)$ équations indépendantes, il sera en involution.

Ainsi :

Pour qu'on ait l'identité

$$dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i = \sum_{h=1}^{h=n+1} \lambda_h \, d\Phi_h,$$

il faut et il suffit que les $(n+1)$ *fonctions* Φ_h *soient indépendantes et en involution.*

Les λ_h sont déterminés d'une manière unique par les équations

$$\sum_{h=1}^{h=n+1} \lambda_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial z} = 1, \quad \sum_{h=1}^{h=n+1} \lambda_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_i} = -p_i, \quad \sum_{h=1}^{h=n+1} \lambda_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le problème de l'intégration d'une équation $\Phi(z, x, p) = 0$ est compris dans le problème plus général suivant :

Trouver tous les systèmes de $(n+1)$ *équations* $\Phi_h(z, x, p) = 0$ $(h = 1, \ldots, n+1)$ *qui satisfont à l'équation pfaffienne* (1) *et qui comprennent l'équation* $\Phi = 0$.

Les intégrales ordinaires sont fournies par ceux de ces systèmes qui donnent une seule relation entre z et les x. Si le système de $(n+1)$ équations contient n constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et si l'élimination de ces constantes conduit à la seule équation $\Phi = 0$, la solution est dite *complète*.

Introduisons maintenant les concepts géométriques habituels.

Nous appellerons *variété d'éléments* M_l de l'espace à $(n+1)$ dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ tout ensemble de ∞^l éléments tels que le système de $(n+1-l)$ équations qui le représente satisfasse à l'équation (1).

Si l'on a ∞^1 éléments

$$z = \gamma(t), \qquad x_i = \alpha_i(t), \qquad p_i = \beta_i(t) \qquad [i = 1, 2, \ldots, n],$$

on dit que l'élément t et l'élément contigu $t + \Delta t$ sont *unis* quand la relation

$$\frac{dz}{dt} - p_1 \frac{dx_1}{dt} - \ldots - p_n \frac{dx_n}{dt} = 0$$

est vérifiée.

Une variété d'éléments est un ensemble d'éléments tels que chacun est uni à tout élément qui en est infiniment voisin.

Par suite :

Chercher une solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre équivaut à répartir les ∞^{2n} éléments qui y satisfont en ∞^n variétés M_n.

Une transformation

$$z' = Z(z, x, p), \qquad x'_i = X_i(z, x, p), \qquad p'_i = P_i(z, x, p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui laisse invariante l'équation (1) est dite une *transformation de contact*.

Pour que la transformation n'altère pas l'équation (1), on doit avoir

$$(17) \qquad dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \, dX_i = \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i \, dx_i\right),$$

avec $\rho \not\equiv 0$. Car, si l'on avait $\rho \equiv 0$, il en résulterait

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum P_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_h} - \sum P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_h} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial p_h} - \sum P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_h} = 0;$$

les déterminants de la matrice $\frac{D[Z, X]}{D[z, x, p]}$ seraient tous nuls, et les Z, X ne seraient pas indépendants.

L'inverse de toute transformation de contact est une transformation de contact.

Le produit de deux transformations de contact est une transformation de contact.

On peut démontrer que, *en dehors de l'équation* (1), *il n'existe aucune équation pfaffienne satisfaite par tous les systèmes de la forme* (5). Il nous suffira de considérer ceux de ces systèmes pour lesquels $q = 0$, c'est-à-dire qui ont la forme

$$z = W(x_1, \ldots, x_n), \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Soit alors

$$A\,dz + \sum_{i=1}^{i=n} B_i\,dx_i + \sum_{h=1}^{h=n} C_h\,dp_h = 0$$

une équation satisfaite par de tels systèmes; on devra avoir, en vertu du système,

$$A \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{i=n} B_i\,dx_i + \sum_{h=1}^{h=n} C_h \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 W}{\partial x_h\,\partial x_i} dx_i = 0,$$

et par suite

$$A \frac{\partial W}{\partial x_i} + B_i + \sum_{h=1}^{h=n} C_h \frac{\partial^2 W}{\partial x_h\,\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou encore

$$A p_i + B_i + \sum_{h=1}^{h=n} C_h \frac{\partial^2 W}{\partial x_h\,\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Puisque ces relations doivent subsister quelle que soit la fonction W, il faut que l'on ait

$$A p_i + B_i = 0, \qquad C_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en sorte que l'équation proposée se réduit à l'équation (1).

Il est clair, d'après la définition même des transformations de contact, que toute transformation de contact change une M_l en une M_l. Réciproquement, une transformation qui change toute M_l en une M_l est une transformation de contact. Soit $z' = Z$, $x'_i = X_i$, $p'_i = P_i$ une telle transformation; elle change par hypothèse la M_n représentée par les équations $z = W$, $p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}$ en une autre M_n relative aux nouvelles variables; cette seconde M_n doit satisfaire à la transformée de l'équation (1); mais, puisqu'il n'existe, à part (1), aucune équation pfaffienne satisfaite par toutes les M_n de la forme considérée, la transformée de l'équation (1) devra simplement être l'équation (1) relative aux nouvelles variables, et la transformation sera une transformation de contact. Donc :

Il n'y a que les transformations de contact qui changent un système quelconque satisfaisant à l'équation (1) *en un système de même nature.*

Entre les $(2n+1)$ fonctions Z, X, P, qui satisfont à l'équation (17), il existe certaines relations différentielles caractéristiques.

Tout d'abord, d'après ce qui a été dit plus haut, le système des fonctions Z, X doit être en involution, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$[Z, X_i] \equiv 0, \qquad [X_i, X_k] \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

En outre, on peut écrire

$$dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i\, dX_i = d\left(Z - \sum_{i=1}^{i=q} P_i X_i\right) - \sum_{i=q+1}^{i=n} P_i\, dX_i + \sum_{i=1}^{i=q} X_i\, dP_i;$$

en introduisant cette expression dans l'équation (17), on reconnaît que le système des fonctions $Z - \sum_{i=1}^{i=q} P_i X_i$, P_{q+1}, ..., P_n, X_1, ..., X_q doit être en involution. Si l'on tient compte de ce qu'au lieu des indices 1, 2, ..., q, on peut prendre q indices quelconques, on obtient

$$[P_i, P_k] \equiv 0, \qquad [P_i, X_k] \equiv 0 \qquad (i \neq k), \qquad [P_i, Z] = P_i[P_i, X_i]$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les parenthèses $[P_i, X_i]$ ont toutes une même valeur, qui est précisément ρ. En effet, posons

$$S = 1 + \sum_{h=1}^{h=n} P_h^2,$$

d'où

$$dS = 2 \sum_{h=1}^{h=n} P_h \, dP_h.$$

Nous aurons

$$d\frac{P_i}{\sqrt{S}} = P_i \, d\frac{1}{\sqrt{S}} + \frac{1}{\sqrt{S}} dP_i,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \, d\frac{P_i}{\sqrt{S}} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i^2 \, d\frac{1}{\sqrt{S}} + \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{i=1}^{i=n} P_i \, dP_i$$

$$= (S - 1)\, d\frac{1}{\sqrt{S}} + \frac{1}{2}\frac{dS}{\sqrt{S}} = -\, d\frac{1}{\sqrt{S}},$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \, d\frac{P_i}{\sqrt{S}} + d\frac{1}{\sqrt{S}} = 0.$$

Nous pourrons dès lors écrire

$$d\left[Z + \frac{1}{\sqrt{S}}\right] - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \, d\left(X_i - \frac{P_i}{\sqrt{S}}\right) = dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \, dX_i$$

$$= \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i \, dx_i\right);$$

et l'on déduit de là que le système des fonctions $Z + \frac{1}{\sqrt{S}}$, $X_i - \frac{P_i}{\sqrt{S}}$ est en involution. Par conséquent

$$0 \equiv \left[X_i - \frac{P_i}{\sqrt{S}}, X_h - \frac{P_h}{\sqrt{S}}\right] = [X_i, X_h] - \left[X_i, \frac{P_h}{\sqrt{S}}\right]$$

$$- \left[\frac{P_i}{\sqrt{S}}, X_h\right] + \left[\frac{P_i}{\sqrt{S}}, \frac{P_h}{\sqrt{S}}\right]$$

$$(i \neq h).$$

Or

$$\left[X_i, \frac{P_h}{\sqrt{S}}\right] = P_h\left[X_i, \frac{1}{\sqrt{S}}\right] + \frac{1}{\sqrt{S}}[X_i, P_h] = -\frac{P_h}{2S\sqrt{S}}[X_i, S],$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{P_i}{\sqrt{S}}, \frac{P_h}{\sqrt{S}}\right] = {} & P_i P_h\left[\frac{1}{\sqrt{S}}, \frac{1}{\sqrt{S}}\right] + \frac{P_i}{\sqrt{S}}\left[\frac{1}{\sqrt{S}}, P_h\right] \\ & + \frac{P_h}{\sqrt{S}}\left[P_i, \frac{1}{\sqrt{S}}\right] + \frac{1}{S}[P_i, P_h],\end{aligned}$$

$$\left[\frac{P_i}{\sqrt{S}}, \frac{P_h}{\sqrt{S}}\right] = -\frac{P_i}{2S^2}[S, P_h] - \frac{P_h}{2S^2}[P_i, S],$$

$$[X_i, S] = 2\sum_{r=1}^{r=n} P_r[X_i, P_r] = -2P_i[P_i, X_i],$$

$$[S, P_h] = 2\sum_{r=1}^{r=n} P_r[P_r, P_h] = 0.$$

Réunissons tous ces résultats et nous obtiendrons

$$0 = -\frac{P_h}{2S\sqrt{S}} 2P_i[P_i, X_i] + \frac{P_i 2P_h}{2S\sqrt{S}}[P_h, X_h],$$

ou encore

$$[P_i, X_i] = [P_h, X_h].$$

Donc, quel que soit i, la parenthèse $[P_i, X_i]$ a toujours la même valeur.

Pour trouver cette valeur, introduisons deux nouvelles variables x_{n+1}, p_{n+1}, et posons $X_{n+1} = x_{n+1}$, $P_{n+1} = \rho p_{n+1}$, en sorte que

$$dZ - \sum_{i=1}^{i=n+1} P_i\, dX_i = \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n+1} p_i\, dx_i\right);$$

nous devrons avoir

$$[P_i, X_i] = [P_{n+1}, X_{n+1}];$$

mais $[P_{n+1}, X_{n+1}] = \rho$, donc

$$[P_i, X_i] = \rho. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

En résumé, les *relations fondamentales* cherchées sont

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} & [Z, X_i] = [X_i, X_h] = [P_i, P_h] = 0, \\ & [P_i, X_h] = 0 \qquad (i \neq h), \\ & [P_i, X_i] = \rho, \qquad [P_i, Z] = P_i\rho. \end{aligned}\right.$$

On emploie quelquefois la notation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dx_h};$$

les parenthèses de Jacobi prennent alors une expression plus simple :

$$[F, \Phi] = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} \right).$$

De l'équation (17), il résulte que l'on a

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = \rho, \tag{19}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_h} - \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_h} = -\rho p_h, \tag{20}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_h} - \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_h} = 0. \tag{21}$$

Dérivons l'équation (19) successivement par rapport à z, x_h, p_h, il vient

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \sum_i P_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial z^2} - \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z}, \\ &\frac{\partial^2 Z}{\partial z\, \partial x_h} - \sum_i P_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial z\, \partial x_h} - \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_h} \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial x_h}, \\ &\frac{\partial^2 Z}{\partial z\, \partial p_h} - \sum_i P_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial z\, \partial p_h} - \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial p_h} \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial p_h}. \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Des équations (19), (20), on tire ensuite

$$\frac{\partial Z}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_i P_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial X_i}{\partial z} \right) = 0,$$

et, en dérivant par rapport à z,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_h\, \partial z} + p_h \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \sum_i P_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_h\, \partial z} - \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \\ - p_h \sum_i P_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial z^2} - p_h \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{\partial X_i}{\partial z} = 0; \end{aligned}$$

dès lors, si l'on tient compte des deux premières équations (22), il vient

$$\frac{d\rho}{dx_h} = \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} - \frac{\partial P_i}{\partial x_h} \frac{\partial X_i}{\partial z} \right),$$

ou encore, en ajoutant et retranchant $p_h \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z} \frac{\partial X_i}{\partial z}$, au second membre

$$\frac{d\rho}{dx_h} = \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{dX_i}{dx_h} - \frac{\partial X_i}{\partial z} \frac{dP_i}{dx_h} \right).$$

De même, si l'on dérive l'équation (21) par rapport à z et si l'on combine l'équation obtenue avec la dernière des équations (22), on trouve

$$\frac{\partial \rho}{\partial p_h} = \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{\partial X_i}{\partial p_h} - \frac{\partial P_i}{\partial p_h} \frac{\partial X_i}{\partial z} \right).$$

Il résulte de là que, si V est une fonction quelconque, on a

$$\begin{aligned} [\rho, V] = & \sum_h \frac{dV}{dx_h} \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{\partial X_i}{\partial p_h} - \frac{\partial X_i}{\partial z} \frac{\partial P_i}{\partial p_h} \right) \\ & - \sum_h \frac{\partial V}{\partial p_h} \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \frac{dX_i}{dx_h} - \frac{\partial X_i}{\partial z} \frac{dP_i}{dx_h} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$[\rho, V] = \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} [X_i, V] - \frac{\partial X_i}{\partial z} [P_i, V] \right).$$

En particulier, eu égard aux équations (18), on obtient

$$(23) \qquad \begin{gathered} [\rho, X_s] = -\rho \frac{\partial X_s}{\partial z}, \qquad [\rho, P_s] = -\rho \frac{\partial P_s}{\partial z}, \\ [\rho, Z] = -\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial z} [P_i, Z] = -\rho \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial z}, \end{gathered}$$

et, en vertu de (19),

$$(24) \qquad [\rho, Z] = \rho^2 - \rho \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Nous devons maintenant démontrer que, si $2n+1$ fonctions Z, X_i, P_i satisfont aux relations

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} [Z, X_i] = [X_i, X_h] = [P_i, X_h] = 0 \quad (i \neq h) \\ \quad [P_i, X_i] \neq 0, \qquad [P_i, Z] = P_i [P_i, X_i] \end{array} \right. \quad (i, h = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations

$$z' = \mathrm{Z}, \qquad x'_i = \mathrm{X}_i, \qquad p'_i = \mathrm{P}_i$$

représentent une transformation de contact.

Avant tout, faisons voir que les fonctions sont indépendantes. Si l'on avait

$$\mathrm{P}_h = f[\mathrm{Z}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{h-1}, \mathrm{P}_{h+1}, \ldots, \mathrm{P}_n],$$

il s'ensuivrait que

$$\begin{aligned}[\mathrm{P}_h, \mathrm{X}_h] = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Z}}[\mathrm{Z}, \mathrm{X}_h] &+ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_i}[\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_h] \\ &+ \sum_{i=1}^{i=h-1} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{P}_i}[\mathrm{P}_i, \mathrm{X}_h] + \sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{P}_i}[\mathrm{P}_i, \mathrm{X}_h] = 0,\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Si l'on avait

$$\mathrm{Z} = f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n),$$

il en résulterait que

$$[\mathrm{P}_h, \mathrm{Z}] = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_i}[\mathrm{P}_h, \mathrm{X}_i] = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_h}[\mathrm{P}_h, \mathrm{X}_h],$$

ou que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_h} = \mathrm{P}_h,$$

et P_h serait fonction des X, ce que nous avons vu être impossible. Enfin, si l'on avait

$$\mathrm{X}_h = f[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{h-1}, \mathrm{X}_{h+1}, \ldots, \mathrm{X}_n],$$

on aurait

$$[\mathrm{P}_h, \mathrm{X}_h] = \sum_{i=1}^{i=h-1} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_i}[\mathrm{P}_h, \mathrm{X}_i] + \sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_i}[\mathrm{P}_h, \mathrm{X}_i] = 0,$$

ce qui est encore impossible.

Comme, d'après les hypothèses faites, les fonctions $\mathrm{Z}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont en involution, il existe certaines fonctions $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ telles que l'on ait

$$d\mathrm{Z} - \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i\, d\mathrm{X}_i = \sigma\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i\right).$$

Nous allons montrer que les Π coïncident avec les P. En effet, d'après les théorèmes précédents, on a

$$[\Pi_n, Z] = \Pi_n[\Pi_n, X_n] = \Pi_n \sigma,$$
$$[X_1, \Pi_n] = 0, \qquad [X_2, \Pi_n] = 0, \qquad \ldots, \qquad [X_{n-1}, \Pi_n] = 0;$$

dès lors, Π_n satisfait aux équations

$$[X_1, f] = 0, \qquad [X_2, f] = 0, \qquad \ldots, \qquad [X_{n-1}, f] = 0.$$

Ces équations sont indépendantes, car on peut assigner une fonction vérifiant toutes ces équations moins une, quelle que soit l'équation exclue; ainsi P_{n-1} vérifie toutes les équations, sauf la dernière. Comme elles contiennent $(2n+1)$ variables, elles admettent au plus $(2n+1)-(n-1) = n+2$ intégrales indépendantes. Or, nous connaissons précisément $(n+2)$ intégrales indépendantes du système, à savoir Z, X_1, X_2, ..., X_n, P_n. Par conséquent, toute autre intégrale sera fonction de celles-là, et l'on aura

$$\Pi_n = \varphi(Z, X_1, \ldots, X_n, P_n).$$

P_n doit entrer nécessairement dans cette fonction, car, s'il n'y entrait pas, on aurait

$$[\Pi_n, X_n] = 0,$$

ce qui n'est pas. Il en résulte que

$$[\Pi_n, Z] = \frac{\partial\varphi}{\partial P_n}[P_n, Z], \qquad [\Pi_n, X_n] = \frac{\partial\varphi}{\partial P_n}[P_n, X_n],$$

et, par suite, que

$$[P_n, Z] = \Pi_n[P_n, X_n].$$

Mais on a

$$[P_n, Z] = P_n[P_n, X_n].$$

Donc $\Pi_n = P_n$. On démontrerait également que $\Pi_h = P_h$ pour toute valeur de l'indice h.

Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $(2n+1)$ *fonctions* Z, X, P *définissent une transformation de contact sont exprimées par les relations* (25).

Si ces conditions sont satisfaites, on a, en outre,

$$[P_i, P_h] = 0;$$

le facteur ρ est déterminé par $[P_i, X_i] = \rho$, et il vérifie les équations (23), (24).

Des relations trouvées, on déduit une importante propriété des parenthèses de Jacobi. Supposons qu'on ait deux fonctions φ, ψ des variables z, x, p; introduisons dans $[\varphi, \psi]$ de nouvelles variables z', x', p' définies par la transformation de contact

$$z' = Z, \qquad x'_i = X_i, \qquad p'_i = P_i;$$

nous avons la relation

$$\begin{aligned}
[\varphi, \psi]_{zxp} = & \sum_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z} \frac{\partial\psi}{\partial X_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial X_i} \frac{\partial\psi}{\partial Z} \right) [Z, X_i] \\
& + \sum_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z} \frac{\partial\psi}{\partial P_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial P_i} \frac{\partial\psi}{\partial Z} \right) [Z, P_i] \\
& + \sum_{i,k} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_i} \frac{\partial\psi}{\partial X_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial X_k} \frac{\partial\psi}{\partial X_i} \right) [X_i, X_k] \\
& + \sum_{i,k} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_i} \frac{\partial\psi}{\partial P_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial P_k} \frac{\partial\psi}{\partial X_i} \right) [X_i, P_k] \\
& + \sum_{i,k} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial P_i} \frac{\partial\psi}{\partial P_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial P_k} \frac{\partial\psi}{\partial P_i} \right) [P_i, P_k],
\end{aligned}$$

$$[\varphi, \psi]_{zxp} = -\rho \left[\sum_i P_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z} \frac{\partial\psi}{\partial P_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial P_i} \frac{\partial\psi}{\partial Z} \right) + \sum_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_i} \frac{\partial\psi}{\partial P_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial P_i} \frac{\partial\psi}{\partial X_i} \right) \right],$$

$$[\varphi, \psi]_{zxp} = \rho \sum_i \left[\frac{\partial\varphi}{\partial P_i} \left(\frac{\partial\psi}{\partial X_i} + P_i \frac{\partial\psi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial\psi}{\partial P_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_i} + P_i \frac{\partial\varphi}{\partial Z} \right) \right].$$

Par conséquent

$$[\varphi, \psi]_{z,x,p} = \rho [\varphi, \psi]_{z',x',p'}.$$

Nous allons maintenant étudier un cas particulier important, celui dans lequel les fonctions X_i, P_i ne contiennent pas la variable z. Les transformations de contact de cette espèce s'appellent d'ordinaire, pour abréger, *transformations de contact en x, p.*

Dans cette hypothèse, les équations (23) entraînent

$$[\rho, X_s] = 0, \qquad [\rho, P_s] = 0.$$

Or les $2n$ équations

$$[X_s, f] = 0, \qquad [P_s, f] = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

n'ont pas d'intégrales communes, car les seules intégrales indépendantes communes aux n premières sont $Z, X_1, \ldots, X_n$, et aucune d'entre elles ne satisfait aux autres équations. Donc ρ ne peut être qu'une constante, $\rho = A$. On a ensuite, d'après l'équation (24),

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = A,$$

et, par conséquent,

$$Z = Az + \Omega(x, p).$$

Les équations (18) deviennent alors

$$(26) \quad \begin{cases} [Az + \Omega, X_i] = 0, \qquad [P_i, Az + \Omega] = AP_i, \\ [X_i, X_k] = [P_i, P_k] = [P_i, X_k] = 0 \qquad (i \neq k), \qquad [P_i, X_i] = A. \end{cases}$$

Tout d'abord, si les relations de la seconde ligne sont satisfaites, les X, P sont indépendants, comme on le démontre de la manière déjà indiquée. Puisque les $X_1, \ldots, X_n$ sont donc indépendants et en involution, on peut, ainsi qu'on l'a vu, résoudre les équations $X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n$, par exemple par rapport à $x_1, \ldots, x_q, p_{q+1}, \ldots, p_n$, c'est-à-dire qu'on peut mettre ce système d'équations sous la forme

$$(27) \quad \begin{cases} x_i - W_i(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q), \\ p_h - W_h(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (h = q+1, \ldots, n); \end{cases}$$

le nouveau système sera aussi en involution et l'on aura

$$(x_i - W_i, x_h - W_h) = 0,$$
$$(x_i - W_i, p_h - W_h) = 0,$$
$$(p_h - W_h, p_k - W_k) = 0,$$

en employant les parenthèses de Poisson au lieu de celles de Jacobi, parce que z ne figure pas explicitement dans le système. En développant les parenthèses, ces relations s'écrivent

$$-\frac{\partial W_i}{\partial p_h}+\frac{\partial W_h}{\partial p_i}=0,\qquad \frac{\partial W_h}{\partial p_i}+\frac{\partial W_i}{\partial x_h}=0,\qquad -\frac{\partial W_k}{\partial x_h}+\frac{\partial W_h}{\partial x_k}=0.$$

Sous cette forme, on reconnaît qu'elles expriment que les fonctions $-W_1, -W_2, \ldots, -W_q, +W_{q+1}, \ldots, +W_n$ sont les dérivées partielles par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n$ d'une même fonction que nous désignerons par

$$W(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, a_1, \ldots, a_n);$$

les équations (27) pourront alors s'écrire

$$x_i=-\frac{\partial W}{\partial p_i},\qquad p_h=\frac{\partial W}{\partial x_h}.$$

Supposons qu'on introduise dans W les X au lieu des a; soit

$$W(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, X_1, \ldots, X_n)=V(x, p),$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} dV &= \sum_{k=q+1}^{k=q}\frac{\partial W}{\partial x_k}dx_k+\sum_{i=1}^{i=q}\frac{\partial W}{\partial p_i}dp_i+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\partial W}{\partial X_r}dX_r\\ &= \sum_{k=q+1}^{k=n}p_k\,dx_k-\sum_{i=1}^{i=q}x_i\,dp_i+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\partial W}{\partial X_r}dX_r, \end{aligned}$$

et, en écrivant,

$$\sum_{r=1}^{r=n}p_r\,dx_r=\sum_{i=1}^{i=q}p_i\,dx_i+\sum_{k=q+1}^{k=n}p_k\,dx_k,$$

nous en déduisons

$$\sum_{r=1}^{r=n}p_r\,dx_r=dV+\sum_{i=1}^{i=q}p_i\,dx_i+\sum_{i=1}^{i=q}x_i\,dp_i-\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\partial W}{\partial X_r}dX_r$$

ou

$$\sum_{r=1}^{r=n}p_r\,dx_r=d\left[V+\sum_{i=1}^{i=q}p_i x_i\right]-\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\partial W}{\partial X_r}dX_r.$$

Posons

$$-\frac{\partial W}{\partial X_r} = \Pi_r, \qquad V + \sum_{i=1}^{i=q} p_i x_i = -\Phi,$$

nous aurons

$$\sum_{r=1}^{r=n} p_r\, dx_r = -d\Phi + \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r\, dX_r,$$

ou enfin, en retranchant dz des deux membres

$$(28) \qquad dz - \sum_{r=1}^{r=n} p_r\, dx_r = d(z+\Phi) - \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r\, dX_r.$$

Cette relation montre que les fonctions $z+\Phi$, X_1, X_2, ..., X_n, Π_1, ..., Π_n représentent une transformation de contact pour laquelle $\rho = 1$. Les formules générales donneront alors

$$(\Pi_i, X_k) = 0 \quad (i \neq k), \qquad (\Pi_i, X_i) = 1,$$

d'où, eu égard à (26),

$$(P_i - A\Pi_i, X_k) = 0.$$

Ceci exprime que la différence $P_i - A\Pi_i$ est intégrale du système d'équations

$$(X_1, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (X_n, f) = 0.$$

Or on sait que des intégrales indépendantes de ce système sont Z, X_1, ..., X_n. Donc, si l'on tient compte de ce que les P, Π ne contiennent pas z, on aura

$$P_i - A\Pi_i = U_i(X).$$

Écrivons d'après cela que $(P_i, P_k) = 0$, en observant que $(U_i, U_k) \equiv 0$,

$$(A\Pi_i + U_i, A\Pi_h + U_h) = A(\Pi_i, U_h) + A(U_i, \Pi_h) = 0.$$

Or

$$(\Pi_i, U_h) = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial U_h}{\partial X_r}(\Pi_i, X_r) = \frac{\partial U_h}{\partial X_i}.$$

Donc

$$\frac{\partial U_h}{\partial X_i} - \frac{\partial U_i}{\partial X_h} = 0.$$

Ainsi, les U_i sont les dérivées partielles d'une même fonction des X; nous écrirons

$$U_i = \frac{\partial U(X)}{\partial X_i}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{r=1}^{r=n} P_r\, dX_r - A \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r\, dX_r = dU,$$

ou encore, par combinaison avec (29), que

$$A\left(dz - \sum_{r=1}^{r=n} p_r\, dx_r\right) = A\, dz + A\, d\Phi + dU - \sum_{r=1}^{r=n} P_r\, dX_r.$$

Posons

$$A\Phi + U = \Omega, \qquad Z = Az + \Omega;$$

nous aurons

$$A\left(dz - \sum_{r=1}^{r=n} p_r\, dx_r\right) = dZ - \sum_{r=1}^{r=n} P_r\, dX_r,$$

et l'on voit qu'on a pu déterminer Z de manière à compléter la transformation.

Réciproquement, supposons qu'on sache qu'une transformation de contact multiplie simplement par une constante A, l'expression pfaffienne $dz - \sum_i p_i\, dx_i$. Les équations (23), (24) donneront

$$\frac{\partial X_s}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial P_s}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = A,$$

en sorte que la transformation aura nécessairement la forme

$$z' = Az + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p).$$

Examinons maintenant le cas encore plus particulier dans lequel Ω est une constante B, en sorte qu'on a

$$Z = Az + B.$$

Les relations $[Z, X_i] = 0$, $[P_i, Z] = AP_i$ deviennent, en développant

$$A\sum_{r=1}^{r=n} p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r} = 0, \qquad A\sum_{r=1}^{r=n} p_r \frac{\partial P_i}{\partial p_r} = A\,P_i,$$

c'est-à-dire

$$\sum_r p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r} = 0, \qquad \sum_r p_r \frac{\partial P_i}{\partial p_r} = P_i. \tag{29}$$

Ces équations expriment que les X sont des fonctions homogènes des p, de degré zéro, et que les P sont des fonctions homogènes des p, de degré un. Pour cette raison, les *transformations de contact* que nous étudions sont dites *homogènes* (¹). Dorénavant, quand nous parlerons d'homogénéité, nous entendrons toujours qu'il s'agit d'homogénéité par rapport aux p.

On peut voir que :

Si $\varphi(x, p)$ est une fonction homogène, une transformation de contact homogène change cette fonction en une fonction homogène du même degré.

En effet, en désignant par h le degré d'homogénéité de $\varphi(x, p)$, on a

$$\sum_r p_r \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} = h\,\varphi.$$

Soit Φ la transformée de φ; l'identité

$$\varphi(x, p) \equiv \Phi(X, P)$$

donne par dérivation

$$\sum_r p_r \sum_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_s}\frac{\partial X_s}{\partial p_r} + \frac{\partial \Phi}{\partial P_s}\frac{\partial P_s}{\partial p_r} \right) = h\,\Phi,$$

(¹) Plus particulièrement, Lie appelle *homogènes* les transformations de contact pour lesquelles on a, outre les conditions précédentes,

$$(P_i, X_i) = 1.$$

Il est évident que, pour satisfaire à cette condition, il suffit de diviser tous les P_i par une même constante A.

c'est-à-dire

$$\sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial X_s} \sum_r p_r \frac{\partial X_s}{\partial p_r} + \sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial P_s} \sum_r p_r \frac{\partial P_s}{\partial p_r} = h\Phi;$$

si l'on tient compte des relations (29), il vient

$$\sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial P_s} P_s = h\Phi. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Réciproquement, si une transformation de contact en x, p change une fonction homogène quelconque φ en une autre fonction homogène Φ, cette transformation est homogène, et les degrés d'homogénéité de φ et de Φ sont égaux.

En effet, soit

$$\sum_r p_r \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} = h\varphi,$$

$$\sum_s P_s \frac{\partial \Phi}{\partial P_s} = H\Phi,$$

Φ étant la transformée de φ et H le degré d'homogénéité de Φ. On aura

$$\sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial X_s} \sum_r p_r \frac{\partial X_s}{\partial p_r} + \sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial P_s} \sum_r p_r \frac{\partial P_s}{\partial p_r} = h\Phi = \frac{h}{H} \sum_s P_s \frac{\partial \Phi}{\partial P_s}.$$

Cette relation devant subsister quel que soit φ, et par suite quel que soit Φ, les coefficients des mêmes dérivées sont égaux dans les deux membres. Donc

$$\sum_r p_r \frac{\partial X_s}{\partial p_r} = 0, \qquad \sum_r p_r \frac{\partial P_s}{\partial p_r} = \frac{h}{H} P_s.$$

On voit ainsi que les X_s sont homogènes, de degré zéro, et que les P_s sont homogènes, de degré $\frac{h}{H}$. Considérons alors la relation $[P_i, X_i] = A$; dans le premier membre, nous avons une fonction homogène, de degré $\frac{h}{H} - 1$, tandis que le second membre est une constante; donc

$$\frac{h}{H} - 1 = 0,$$

et par suite

$$h = \mathrm{H}. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Il suit de là que :

Une transformation homogène peut être regardée comme une transformation portant sur z, x_1, x_2, ..., x_n, $\frac{p_1}{p_n}$, $\frac{p_2}{p_n}$, ..., $\frac{p_{n-1}}{p_n}$.

Ecrivons en effet

$$z' = \mathrm{A}z + \mathrm{B}, \qquad x'_r = \mathrm{X}_r(x, p), \qquad p'_r = \mathrm{P}_r(x, p).$$

Les X_r sont des fonctions des rapports des p à l'un d'entre eux; en outre, nous pouvons poser

$$\frac{p'_r}{p'_n} = \frac{\mathrm{P}_r(x, p)}{\mathrm{P}_n(x, p)} = \mathrm{K}_r\left(x, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right).$$

Nous trouverons incidemment, un peu plus loin, qu'une transformation de contact homogène change l'expression $\sum_r p_r \frac{\partial\varphi}{\partial p_r}$ en $\sum_r \mathrm{P}_r \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{P}_r}$, Φ étant la transformée de φ. Il en résulte immédiatement que :

L'inverse d'une transformation homogène est une transformation homogène; le produit de deux transformations homogènes est une transformation homogène.

Voyons maintenant comment on peut passer d'une transformation de contact homogène à une transformation générale, et réciproquement d'une transformation générale à une transformation homogène.

Soit la transformation homogène à $(2n+2)$ variables y, q :

$$y'_r = \mathrm{Y}_r(y, q), \qquad q'_r = \mathrm{Q}_r(y, q).$$

On aura

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \mathrm{Q}_i\, d\mathrm{Y}_i = \sum_{i=1}^{i=n+1} q_i\, dy_i.$$

En outre, les Y_i et les $\dfrac{Q_k}{Q_{n+1}}$ dépendront des

$$y_i, \quad \frac{q_k}{q_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons

$$y_1 = x_1, \quad \ldots, \quad y_n = x_n, \quad y_{n+1} = z, \quad \frac{q_1}{q_{n+1}} = -p_1, \quad \ldots, \quad \frac{q_n}{q_{n+1}} = -p_n,$$
$$y'_1 = x'_1, \quad \ldots, \quad y'_n = x'_n, \quad y'_{n+1} = z', \quad \frac{q'_1}{q'_{n+1}} = -p'_1, \quad \ldots, \quad \frac{q'_n}{q'_{n+1}} = -p'_n,$$
$$Y_i\ (y, q) = \quad X_i(z, x, p) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$Y_{n+1}(y, q) = \quad Z(z, x, p),$$
$$\frac{Q_k(y, q)}{Q_{n+1}(y, q)} = -P_k(z, x, p) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous aurons

$$z' = Z(z, x, p), \quad x'_i = X_i(z, x, p), \quad p'_i = P_i(z, x, p),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

puis

$$dz' - \sum_{i=1}^{i=n} p'_i\, dx'_i = \frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}}\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i\right).$$

Or $\dfrac{q_{n+1}}{Q_{n+1}}$ dépend seulement des y et des rapports des q, c'est-à-dire des z, x, p; en désignant son expression par $\rho(z, x, p)$, nous aurons

$$dz' - \sum_{i=1}^{i=n} p'_i\, dx'_i = \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i\right).$$

Donc les équations $z' = Z$, $x'_i = X_i$, $p'_i = P_i$ représentent une transformation de contact générale.

La possibilité de ce passage est importante, car elle montre que les transformations de contact homogènes ne sont qu'en apparence des transformations de contact spéciales.

Réciproquement, soit une transformation de contact générale

$$z' = Z(z, x, p), \quad x'_i = X_i(z, x, p), \quad p'_i = P_i(z, x, p),$$

et soit

$$dz' - \sum_{i=1}^{i=n} p'_i\, dx'_i = \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i\right).$$

Posons

$$z = y_{n+1}, \qquad x_i = y_i, \qquad p_i = -\frac{q_i}{q_{n+1}},$$
$$z' = y'_{n+1}, \qquad x'_i = y'_i, \qquad p'_i = -\frac{q'_i}{q'_{n+1}}, \qquad \rho = \frac{q_{n+1}}{q'_{n+1}}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

nous aurons

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} q'_i\, dy'_i = \sum_{i=1}^{i=n+1} q_i\, dy_i;$$

en outre

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= \mathrm{X}_i\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) \\ q'_i &= \frac{q_{n+1}}{\rho}\mathrm{P}_i(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$y'_{n+1} = \mathrm{Z}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$q'_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{\rho},$$

et ces relations définissent une transformation homogène.

Comme nous l'avons vu, les (z, x, p) représentent un *élément plan* dans l'espace à $(n+1)$ dimensions, exception faite des éléments plans parallèles à l'axe des z, et cela par un défaut intrinsèque du système des coordonnées cartésiennes que nous avons déjà signalé. Cette apparente exception disparaît par l'emploi du système des coordonnées homogènes.

En effet, les $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ liés aux z, $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ par les relations

$$z = y_{n+1}, \quad x_1 = y_1, \quad \ldots, \quad x_n = y_n, \quad p_1 = -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \quad \ldots, \quad p_n = -\frac{q_n}{q_{n+1}},$$

peuvent être considérés comme les *coordonnées homogènes* d'un élément plan de l'espace à $(n+1)$ dimensions; et, à un élément plan quelconque de l'espace, sans aucune exception, correspondent, pour les coordonnées homogènes, des valeurs finies. Les coordonnées homogènes d'un élément plan sont liées par la relation $\sum_{i=1}^{i=n+1} q_i\, dx_i = 0$.

Un autre avantage présenté par les transformations homogènes est que tout théorème concernant ces transformations peut se traduire en un théorème concernant les transformations générales.

IV. — Construction des transformations de contact.

Nous avons trouvé un système d'équations différentielles caractérisant les transformations de contact. Donc, pour déterminer toutes les transformations de contact, il faudra intégrer ces équations. Mais on peut résoudre le problème sans aucune intégration.

Nous procéderons ainsi : nous construirons toutes les transformations de contact homogènes possibles et nous en déduirons toutes les autres.

Nous avons vu qu'une transformation de contact homogène satisfait à la condition

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} q'_i\, dy'_i - \sum_{i=1}^{i=n+1} q_i\, dy_i = 0.$$

Nous avons déjà résolu (n° III, au début) le problème de trouver tous les systèmes possibles qui satisfont à l'équation

$$dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i = 0;$$

nous avons reconnu qu'ils s'obtiennent en écrivant les équations

$$\Omega_1(z, x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_q(z, x) = 0,$$

$$p_r = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_r}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial z}},$$

et en éliminant les λ. Si le système comprend l'équation $z = 0$, dans les $(q-1)$ autres équations, on pourra supprimer z. Soient alors

$$\Phi_1(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_{q-1}(x) = 0$$

ces équations; on a, dans ce cas,

$$p_r = -\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_r}.$$

Actuellement, au lieu de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, nous devons considérer $y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, q_1, \ldots, q_n, -q'_1, \ldots, -q'_n$. Nous avons, par suite,

$$\Phi_1(y, y') = 0, \quad \ldots. \quad \Phi_s(y, y') = 0,$$

$$q_r = -\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_r}, \quad q'_r = \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y'_r}.$$

En éliminant les λ entre ces équations, nous obtiendrons le système le plus général d'équations satisfaisant à l'équation pfaffienne considérée et, par suite, les transformations de contact homogènes les plus générales.

Pour passer alors des transformations homogènes aux transformations non homogènes, on pose

$$y_1 = x_1, \quad \ldots, \quad y_n = x_n, \quad y_{n+1} = z,$$

$$\frac{q_1}{q_{n+1}} = -p_1, \quad \ldots, \quad \frac{q_n}{q_{n+1}} = -p_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par substitution dans les équations précédentes, on obtient

$$\varphi_1(z, x, z', x') = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_s(z, x, z', x') = 0,$$

$$p_r = -\frac{\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}}{\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}}, \quad p'_r = -\frac{\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_r}}{\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z'}}.$$

Les équations $\varphi = 0$ devront être résolubles par rapport à s des premières variables et par rapport à s des secondes variables.

V. — Digression sur la théorie des équations aux dérivées partielles.

Soient u, v, w trois fonctions des x et des p. Il nous suffit de considérer ce cas, car, comme nous le savons, on y peut ramener celui où l'on a des fonctions de z et des x, p.

Nous voulons démontrer l'identité suivante, dite *identité de Jacobi :*

$$\Big(u, (v, w)\Big) + \Big(v, (w, u)\Big) + \Big(w, (u, v)\Big) = 0.$$

Nous avons

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial p_i} = \left(u, \frac{\partial v}{\partial p_i}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial p_i}, v\right) = \left(u, \frac{\partial v}{\partial p_i}\right) - \left(v, \frac{\partial u}{\partial p_i}\right),$$
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial x_i} = \left(u, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \left(v, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Observons que (u, f), (v, f) sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées partielles de f, et écrivons

$$(u, f) = \mathrm{A}f, \qquad (v, f) = \mathrm{B}f.$$

Alors

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial p_i} = \mathrm{A}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \mathrm{B}\frac{\partial u}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial x_i} = \mathrm{A}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{B}\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Par suite

$$\Big((u, v), w\Big) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial p_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial(u, v)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial p_i}\right).$$
$$\Big((u, v), w\Big) = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\mathrm{A}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \mathrm{B}\frac{\partial u}{\partial p_i}\right)\frac{\partial w}{\partial x_i} - \left(\mathrm{A}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{B}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w}{\partial p_i}\right].$$

D'autre part, en désignant pour un moment par $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ les variables x, p, et en posant

$$\mathrm{A}f = \sum_{i=1}^{i=2n}\alpha_i\frac{\partial f}{\partial t_i}, \qquad \mathrm{B}f = \sum_{i=1}^{i=2n}\beta_i\frac{\partial f}{\partial t_i},$$

on obtient

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B})f = \sum_{i=1}^{i=2n} (\mathrm{A}\beta_i - \mathrm{B}\alpha_i)\frac{\partial f}{\partial t_i}.$$

Par suite, dans le cas actuel, nous aurons

$$\big((u, v), w\big) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})w = \mathrm{AB}w - \mathrm{BA}w.$$

De même

$$\big(u, (v, w)\big) = \mathrm{AB}w,$$

$$\big(v, (w, u)\big) = -\big(v, (u, w)\big) = -\mathrm{BA}w,$$

et de là résulte immédiatement l'identité écrite.

Une application de cette identité est la démonstration du

Théorème de Poisson. — *Si φ et ψ sont deux intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles $(u, f) = 0$, (φ, ψ) est encore une intégrale de cette équation.*

Nous avons, en effet,

$$(u, \varphi) = 0, \qquad (u, \psi) = 0;$$

par suite,

$$\big(\varphi, (\psi, u)\big) = 0, \qquad \big(\psi, (u, \varphi)\big) = 0,$$

et de l'identité qu'on vient d'établir il résulte que

$$\big(u, (\varphi, \psi)\big) = 0;$$

donc (φ, ψ) est intégrale de l'équation considérée. (C. Q. F. D.)

Donnons maintenant un aperçu de la méthode de Jacobi pour intégrer d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles.

Soit un système de r équations aux dérivées partielles ne contenant pas la fonction z explicitement

$$u_1 = 0, \quad \ldots, \quad u_r = 0;$$

les u sont des fonctions des x, p, indépendantes et en involution.

Les équations

$$(1) \qquad A_1 f \equiv (u_1, f) = 0, \quad \ldots, \quad A_r f \equiv (u_r, f) = 0$$

sont indépendantes, car, à cause de l'indépendance des u, les déterminants de la matrice $\frac{D[u]}{D[x, p]}$ ne sont pas tous nuls. En outre, d'après l'identité de Jacobi, on aura

$$(A_i, A_h)f = \big(u_i, (u_h, f)\big) - \big(u_h, (u_i, f)\big) = \big((u_i, u_h), f\big);$$

mais, par hypothèse,

$$(u_i, u_h) \equiv 0;$$

donc

$$(A_i, A_h)f = 0,$$

et les équations (1) constituent un système complet. Parmi les $(2n - r)$ intégrales indépendantes de ce système se trouvent u_1, u_2, $\ldots$, u_r, puisque chacune de ces fonctions, substituée à f dans les équations (1), les transforme en identités. On cherche une autre intégrale u_{r+1} du système (1), indépendante des précédentes; on aura

$$(u_i, u_{r+1}) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

et les équations

$$(u_1, f) = 0, \quad \ldots, \quad (u_{r+1}, f) = 0$$

formeront un nouveau système complet. Nous procéderons encore de la même manière, et ainsi de suite. Nous arriverons enfin à un système complet de n équations

$$(u_1, f) = 0, \quad \ldots, \quad (u_n, f) = 0$$

admettant les n intégrales indépendantes u_1, $\ldots$, u_n. Résolvons les équations

$$u_1 = 0, \quad \ldots, \quad u_r = 0, \quad u_{r+1} = a_1, \quad \ldots, \quad u_n = a_{n-r}$$

(les a désignant des constantes arbitraires), par rapport à p_1, ..., p_n; les expressions des p ainsi obtenues rendront $\sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i$ différentielle exacte. Posons

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i = -\, d\Omega(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-r}),$$

et nous aurons (par la seule intégration d'une différentielle totale exacte):

$$z + \Omega(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-r}) = a_{n-r+1},$$

a_{n-r+1} étant une nouvelle constante arbitraire.

VI. — Groupes de fonctions en général.

Soient s fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_s$ des $2n$ variables x, p; nous les supposons indépendantes. Formons les parenthèses (F_i, F_k), et, celles d'entre elles qui ne sont pas exprimables au moyen des F précédents, adjoignons-les au système. Comme il ne peut y avoir plus de $2n$ fonctions des x, p, indépendantes entre elles, nous arriverons, par la répétition de cette opération, à un système de fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_r$, $(r \leqq 2n)$, tel que toutes les parenthèses (F_i, F_k) soient fonctions de $F_1, \ldots, F_r$. Si U, V sont deux fonctions des F, on aura

$$(U, V) = \sum_{h,k} \frac{\partial U}{\partial F_h} \frac{\partial V}{\partial F_k} (F_h, F_k),$$

c'est-à-dire que (U, V) sera une fonction de $F_1, \ldots, F_r$.

Étant données r fonctions $F_1, \ldots, F_r$ des x, p, indépendantes et telles que toutes les (F_i, F_k) soient fonctions des F, on appelle *groupe r^{uple} de fonctions* l'ensemble de toutes les fonctions des F.

Les parenthèses formées avec deux fonctions du groupe sont des fonctions du groupe.

Tout système de r fonctions indépendantes appartenant au groupe est appelé une *forme* du groupe.

Les fonctions communes à deux groupes forment un groupe.

Comme les parenthèses de Poisson sont (3e partie, n° III) invariantes par rapport à toute transformation de contact de la forme

$$(1) \qquad z' = z + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p),$$

on peut énoncer ce résultat :

Toute transformation de contact de la forme (1) *change un groupe r^{uple} de fonctions en un groupe de même espèce, et toute forme du premier groupe est une forme du second. Soient* F_s, Φ_s, *deux formes correspondantes;* (Φ_i, Φ_k) *s'exprime au moyen des* Φ_s *de la même manière que* (F_s, F_k) *au moyen des* F_s.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_r$ r fonctions indépendantes aptes à déterminer un groupe, c'est-à-dire telles que les déterminants de la matrice $\dfrac{D[u]}{D[x, p]}$ ne soient pas tous nuls et qu'en outre, on ait

$$(u_i, u_h) = \varphi_{ih}(u).$$

Les équations

$$(u_k, f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

seront indépendantes; en outre, si l'on pose $(u_k, f) = A_k f$, on aura (3^e Partie, n° IV)

$$(A_i, A_k)f = \Big(u_i, (u_k, f)\Big) - \Big(u_k, (u_i, f)\Big) = \Big((u_i, u_k) f\Big) = \sum_{s=1}^{s=r} \frac{\partial \varphi_{ik}(u)}{\partial u_s} A_s f.$$

La réciproque se démontre aisément. Donc :

Si $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *est une forme d'un groupe r^{uple}, les équations* $(u_k, f) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ *forment un système complet, et réciproquement.*

Étant données r fonctions $u_1, \ldots, u_r$ aptes à déterminer un groupe r^{uple}, le système complet $(u_k, f) = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$, admet $(2n - r)$ intégrales indépendantes $v_1, \ldots, v_{2n-r}$. Les (v_i, v_k) sont aussi (n° IV) des intégrales du système et sont par suite des fonctions des v, en sorte que les v déterminent un groupe $(2n - r)^{uple}$. En partant du groupe des v et en procédant d'une manière analogue, on retrouve le groupe des u. Donc :

A tout groupe r^{uple} u correspond un groupe $(2n - r)^{uple}$ v

formé par toutes les fonctions qui sont en involution avec tous les u.

La relation entre les u et les v est réciproque, et les groupes u, v sont dits polaires *ou* réciproques l'un de l'autre.

De là résulte un théorème qu'on peut en quelque sorte regarder comme la *réciproque du théorème de Poisson,* à savoir :

Un système complet de r équations linéaires ayant la propriété que, si φ, ψ sont deux intégrales quelconques du système, (φ, ψ) en est aussi une intégrale, peut toujours être mis sous la forme

$$(u_k, f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les u_k étant aptes à définir un groupe r^{uple}.

Soit $A_k f = 0$ $(k = 1, \ldots, r)$ le système complet, et soient $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ ses $(2n - r)$ intégrales indépendantes. Par hypothèse, (v_i, v_h), quels que soient i et h, est encore une intégrale du système; on a donc

$$(v_i, v_h) = \varphi_{ih}(v_1, \ldots, v_{2n-r}),$$

c'est-à-dire que $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ définissent un groupe $(2n - r)^{uple}$.

Soit alors $u_1, \ldots, u_r$ une forme du groupe r^{uple} polaire du précédent; les v constituent un système d'intégrales indépendantes du système complet $(u_k, f) = 0$ $(k = 1, \ldots, r)$, et par suite ce système ne saurait différer du système donné.

Il est évident, d'après la propriété d'invariance des parenthèses de Poisson, que *toute transformation de contact en x, p change deux groupes réciproques en deux groupes réciproques.*

Si les fonctions u sont indépendantes et en involution, le groupe réciproque contient toutes les fonctions u, et par suite $2n - r \geqq r$, ou $r \leqq n$. Ainsi :

Un système en involution à 2 n variables ne peut contenir plus de n fonctions indépendantes.

Deux groupes réciproques peuvent avoir des fonctions communes. On qualifie de *singulières* ou *distinguées* (en allemand *ausgezeichneten*) les fonctions d'un groupe qui appartiennent aussi au groupe réciproque, c'est-à-dire les fonctions d'un groupe qui sont en involution avec toutes les fonctions du groupe lui-même.

Il est clair que les fonctions singulières d'un groupe sont aussi fonctions singulières du groupe réciproque.

Les fonctions singulières d'un groupe sont en involution entre elles, et par suite constituent un *sous-groupe* qui est commun au groupe donné et à son réciproque.

Si l'on applique à un groupe une transformation de contact quelconque en x, p, par suite de l'invariance du symbole (φ, ψ), toute fonction singulière se change en une fonction singulière. Donc le nombre des fonctions singulières indépendantes est invariant vis-à-vis de toute transformation de contact en x, p.

Toute fonction singulière donne lieu à une relation entre les fonctions du groupe et celles de son réciproque, puisqu'elle peut s'exprimer aussi bien au moyen des unes que des autres. Supposons, réciproquement, qu'entre les fonctions du groupe u et celles de son réciproque v il existe m relations indépendantes

$$(2) \qquad \varphi_i(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{2n-r}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Les $2n$ fonctions u, v, dont $(2n - m)$ seulement sont indépendantes, déterminent un groupe $(2n - m)^{\text{uple}}$G; car les (u, v) sont nulles, et les (u, u), (v, v) s'expriment respectivement à l'aide des u et des v. Si $w_1, \ldots, w_m$ est une forme du groupe réciproque de G, on aura

$$(u_s, w_h) = 0, \quad (v_t, w_h) = 0 \quad (s = 1, \ldots, r;\ t = 1, \ldots, 2n - r;\ h = 1, 2, \ldots, m).$$

Les premières de ces équations expriment que les w appartiennent au groupe des v, les secondes qu'ils appartiennent au groupe des u. Les w, appartenant au groupe des u et à son réciproque, sont des fonctions singulières des deux groupes. Si l'on pose

$$w_h = \eta_h(u) = \theta_h(v),$$

le système des équations $\eta_h(u) = \theta_h(v)$ doit être équivalent au système (2). D'où cette conclusion :

Le nombre des fonctions singulières indépendantes d'un groupe est égal au nombre des relations indépendantes entre les fonctions du groupe et celles de son réciproque, et ces rela-

tions peuvent toujours être mises sous la forme

$$\eta(u_1, \ldots, u_r) = \theta(v_1, \ldots, v_{2n-r}).$$

Voyons alors comment, étant donné un groupe, on détermine le nombre de ses fonctions singulières.

Soit $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ une fonction singulière du groupe des u; on devra avoir

$$(u_i, \varphi) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Or

$$(u_i, \varphi) = \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial \varphi}{\partial u_h}(u_i, u_h);$$

on peut donc dire que φ doit être une intégrale du système d'équations linéaires aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \mathrm{A}_i f \equiv \sum_{h=1}^{h=r} (u_i, u_h) \frac{\partial f}{\partial u_h} = 0.$$

Remarquons que ce système est un système complet; en effet

$$(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_k) f = \Big(u_i, (u_k, f)\Big) - \Big(u_k, (u_i, f)\Big) = \Big((u_i, u_k), f\Big),$$

et, comme

$$(u_i, u_k) = \psi_{ik}(u),$$

il s'ensuit que

$$(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_k) f = \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial \psi_{ik}(u)}{\partial u_h}(u_h, f) = \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial \psi_{ik}(u)}{\partial u_h} \mathrm{A}_h f.$$

Le nombre des équations indépendantes du système (3) est égal à la caractéristique du déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & \ldots & (u_1, u_r) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (u_r, u_1) & \ldots & (u_r, u_r) \end{vmatrix}.$$

Soit donc $(r - m)$ cette caractéristique, avec $m \geqq 0$; le système (3) admet m intégrales indépendantes. Par conséquent:

Si $(r - m)$ est la caractéristique du déterminant (4), le groupe contient m fonctions singulières indépendantes.

En particulier, *la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe engendré par les u ne contienne pas de fonctions singulières est que le déterminant* (4) *ne soit pas identiquement nul.*

On voit encore que la détermination des fonctions singulières exige l'intégration d'un système complet.

Remarquons que le déterminant (4) est un déterminant gauche; pour r impair, il sera identiquement nul; on peut donc dire que:

Si r est impair, le groupe contient au moins une fonction singulière.

Si un groupe r^{uple} contient $(r-1)$ fonctions singulières indépendantes, ce groupe est en involution, et toutes ses fonctions sont singulières.

En effet, si $v_1, \ldots, v_{r-1}$ sont $(r-1)$ fonctions singulières, et si v est une fonction indépendante des précédentes, les fonctions $v_1, \ldots, v_{r-1}, v$ constituent une forme du groupe; d'ailleurs $(v_i, v_k) = 0$, $(v_i, v) = 0$; donc le groupe est en involution.

Parmi l'infinité des formes d'un groupe, il en est une qui est dite *forme canonique*.

Soit le groupe non en involution : $u_1, \ldots, u_r$; les u_i ne seront pas toutes singulières; supposons par exemple que u_1 ne soit pas singulière. Puisque, en désignant généralement par $\varphi(u)$ une fonction des u, nous avons

$$(u_1, \varphi) = \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial \varphi}{\partial u_h}(u_1, u_h),$$

cette expression n'est pas identiquement nulle, et nous pouvons trouver une fonction φ telle que cette expression soit égale à l'unité. Posons $u_2 = \varphi$, et nous aurons alors

$$(u_1, u_2) = 1.$$

Cherchons maintenant la fonction $f(u)$ du groupe pour laquelle

$$(5) \qquad (u_1, f) \equiv A_1 f = 0, \qquad (u_2, f) \equiv A_2 f = 0.$$

Comme $(u_1, u_2) \not\equiv 0$, le déterminant $\begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) \end{vmatrix}$ n'est pas nul, et les équations (5) sont indépendantes. En outre

$$A_1A_2f - A_2A_1f = \Big(u_1, (u_2, f)\Big) - \Big(u_2, (u_1, f)\Big) = \Big((u_1, u_2), f\Big) = (1, f) = 0;$$

les équations (5) forment donc un système complet, et elles admettent $(r-2)$ solutions indépendantes $u'_1, u'_2, \ldots, u'_{r-2}$. Les (u'_i, u'_k), d'après le théorème de Poisson, satisfont aux équations (5), et sont par suite des fonctions de $u'_1, \ldots, u'_{r-2}$. Il en résulte que ces u' déterminent un sous-groupe du groupe considéré.

En outre, les $u_1, u_2, u'_1, u'_2, \ldots, u'_{r-2}$ sont indépendants. En effet, comme les u' sont indépendants, s'il existait une relation, elle devrait contenir au moins l'un des u_1, u_2, et se ramener à l'une des deux formes

$$u_1 - \Phi(u_2, u'_1, u'_2, \ldots, u'_{r-2}) = 0, \qquad u_2 - \Psi(u_1, u'_1, u'_2, \ldots, u'_{r-2}) = 0;$$

or, dans le premier cas, on aurait la relation absurde

$$0 = (u_1 - \Phi, u_2) = (u_1, u_2) - \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}(u_2, u_2) - \sum_{i=1}^{i=r-2} \frac{\partial\Phi}{\partial u'_i}(u'_i, u_2) = 1,$$

et de même dans le second cas.

On peut donc trouver une forme $u_1, u_2, u'_1, u'_2, \ldots, u'_{r-2}$ telle qu'on ait

$$(u_1, u_2) = 1, \qquad (u_1, u'_i) = 0, \qquad (u_2, u'_i) = 0,$$

les u'_i constituant une forme d'un sous-groupe du groupe donné.

Imaginons qu'on répète la même suite d'opérations sur les fonctions $u'_1, u'_2, \ldots, u'_{r-2}$, supposées non en involution, et qu'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à un ensemble résiduel de fonctions toutes en involution.

Écrivons P_1, X_1 au lieu de u_1, u_2; P_2, X_2 au lieu des deux fonctions analogues du groupe u', etc.; enfin $X_{m+1}, \ldots, X_{m+q}$ au lieu des dernières fonctions en involution. Nous pouvons énoncer ce théorème :

Un groupe r^{uple} peut toujours être mis sous la forme

$$P_1, \quad \ldots, \quad P_m, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_m, \quad X_{m+1}, \quad \ldots, \quad X_{m+q} \qquad (q = r - 2m),$$

ces fonctions satisfaisant aux relations

$$(6)\qquad (P_i, X_i) = 1, \qquad (P_i, P_k) = (X_i, X_k) = (P_i, X_k) = 0 \qquad (i \neq k).$$

Cette forme est dite *forme canonique*.

Si $f(P_1, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_{m+q})$ est une fonction du groupe, on a

$$(P_i, f) = \frac{\partial f}{\partial X_i}, \qquad (X_i, f) = -\frac{\partial f}{\partial P_i} \qquad (i = 1, \ldots, m);$$
$$(X_k, f) = 0 \qquad (k = m+1, \ldots, m+q).$$

Pour que f soit une fonction singulière, il faut donc qu'elle ne contienne ni les $X_i\,(i = 1, \ldots, m)$ ni les $P_i\,(i = 1, \ldots, m)$, et réciproquement. C'est-à-dire que :

Les fonctions singulières du groupe sont exclusivement toutes les fonctions des $X_{m+1}, \ldots, X_{m+q}$.

Par conséquent :

Les nombres m et q sont les mêmes pour toutes les formes canoniques d'un groupe; q est le nombre des fonctions singulières indépendantes; la différence entre q et l'ordre du groupe est un nombre pair.

En outre :

Si, entre $2m + q$ *fonctions* $P_1, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_{m+q}$, *on a les relations* (6), *ces fonctions sont indépendantes quand les* $X_{m+1}, \ldots, X_{m+q}$ *le sont.*

En effet, s'il existait une relation $P_1 = \varphi(P_2, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_{m+q})$, on aurait

$$(P_1, X_1) = (\varphi, X_1) = 0,$$

tandis que $(P_1, X_1) = 1$; on démontre de même l'impossibilité d'une relation $X_1 = \varphi(P_1, \ldots, P_m, X_2, \ldots, X_{m+q})$.

Soit un groupe G de forme canonique $P_1, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_{m+q}$ $(q > 0)$. Désignons par Γ le sous-groupe $P_1, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_m, X_{m+2}, \ldots, X_{m+q}$. Puisque X_{m+1} n'appartient pas à Γ et est en involution avec toutes les fonctions de Γ, elle appartient au groupe Γ' polaire de Γ, sans être une de ses fonctions singulières. On pourra donc trouver une fonction P_{m+1} du groupe Γ' telle que $(P_{m+1}, X_{m+1}) = 1$. Les $P_1, \ldots, P_{m+1}, X_1, \ldots, X_{m+q}$ satisfont aux relations canoniques et sont indépendants (les $X_{m+2}, \ldots, X_{m+q}$ étant indépendants). En continuant ainsi, on voit qu'on peut toujours arriver à un groupe canonique sans fonctions singulières, $P_1, \ldots, P_{m+q}, X_1, \ldots, X_{m+q}$, et contenant le groupe donné comme sous-groupe. Ayant obtenu ce groupe, adjoignons-lui une fonction X_{m+q+1} de son groupe polaire, puis cherchons la fonction correspondante P_{m+q+1}, et ainsi de suite. Nous arriverons à cette conclusion :

Étant donné un groupe au moyen de la forme canonique $P_1, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_{m+q}$, *on peut trouver certaines fonctions* $P_{m+1}, \ldots, P_n, X_{m+q+1}, \ldots, X_n$ *telles que* $P_1, \ldots, P_n, X_1, \ldots, X_n$ *soit une forme canonique d'un groupe* $2\,n^{\text{uple}}$.

Ces fonctions, d'après un théorème établi, donnent naissance à une transformation de contact en x, p :

$$z' = z + \Omega, \qquad x'_i = X_i, \qquad p'_i = P_i,$$

Ω étant déterminé par quadratures.

Ceci posé, nous nous proposons d'examiner, étant donnés deux groupes pour lesquels les nombres r, q sont les mêmes, s'il existe une transformation de contact en x, p qui change l'un des groupes en l'autre ([1]).

Les groupes étant mis sous la forme canonique

$$P_1, \ \ldots, \ P_m, \ X_1, \ \ldots, \ X_{m+q}; \qquad Q_1, \ \ldots, \ Q_m, \ Y_1, \ \ldots, \ Y_{m+q},$$

on peut trouver deux groupes

$$P_1, \ \ldots, \ P_n, \ X_1, \ \ldots, \ X_n; \qquad Q_1, \ \ldots, \ Q_n, \ Y_1, \ \ldots, \ Y_n,$$

qui les contiennent, et par suite deux fonctions $\Omega(x, p)$, $\overline{\Omega}(y, q)$ tels que les équations

$$z' = z + \Omega, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i \qquad \text{et} \qquad z' = z + \overline{\Omega}, \quad x'_i = Y_i, \quad p'_i = Q_i$$

représentent deux transformations de contact. Mais on aura encore

---

([1]) L'égalité des nombres r, q est une condition nécessaire du passage, à cause de l'invariance des parenthèses de Poisson vis-à-vis des transformations de contact en x, p.

une transformation de contact en faisant le produit d'une de ces deux transformations par l'inverse de l'autre, et ce produit change l'un des deux groupes donnés en l'autre. Donc

La condition nécessaire et suffisante pour que deux groupes r^{uples} puissent être transformés l'un dans l'autre au moyen d'une transformation de contact en x, p, est que les nombres des fonctions singulières des deux groupes soient égaux.

Nous dirons que tous les groupes transformables l'un en l'autre au moyen d'une transformation de contact en x, p appartiennent au même *type*.

VII. — Groupes homogènes.

Un groupe est dit *homogène* s'il admet une forme composée uniquement de *fonctions homogènes par rapport aux p*.

Une transformation de contact homogène change un groupe homogène en un groupe homogène. En effet, elle change toute fonction homogène par rapport aux p en une fonction homogène.

Soient H_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) r fonctions homogènes par rapport aux p, de degré s_i, définissant un groupe homogène. Si F est une fonction quelconque du groupe, on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{k=r} \left(\frac{\partial F}{\partial H_k} \sum_i p_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i} \right) = \sum_k s_k H_k \frac{\partial F}{\partial H_k},$$

en sorte que $\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$ est une fonction du groupe.

Réciproquement, soit un groupe H_i; supposons que, F étant une fonction quelconque du groupe, $\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$ fasse aussi partie du groupe; nous aurons

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \Omega_k(H).$$

Si les Ω sont tous nuls, les H sont homogènes et de degré zéro;

dans le cas contraire, l'équation linéaire

$$\sum_i p_i \frac{\partial N(H)}{\partial p_i} = \sum_k \Omega_k(H) \frac{\partial N(H)}{\partial H_k} = 0$$

admettra $(r-1)$ intégrales indépendantes $N_1, \ldots, N_{r-1}$ qui seront des fonctions homogènes de degré zéro du groupe. En adjoignant aux N une intégrale F de l'équation

$$\sum_i p_i \frac{\partial F(H)}{\partial p_i} = \sum_k \Omega_k(H) \frac{\partial F}{\partial H_k} = F,$$

on aura une forme $N_1, \ldots, N_{r-1}$, F du groupe considéré, F étant homogène de degré un. Puisque les r fonctions écrites sont homogènes, le groupe aussi sera homogène. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit homogène est que, F *étant une fonction quelconque du groupe,* $\sum_i p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$ *appartienne aussi au groupe.*

Évidemment, on peut encore dire :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe r^{uple} soit homogène est qu'il contienne r fonctions indépendantes $F_1, \ldots, F_r$ *telles que les fonctions* $\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial F_h}{\partial p_i}$ $(h = 1, \ldots, r)$ *appartiennent aussi au groupe.*

De ce qu'on vient de dire il résulte que :

On peut toujours trouver pour un groupe r^{uple} homogène une forme composée, ou de $(r-1)$ fonctions de degré zéro et d'une fonction de degré un, ou de r fonctions de degré zéro ; dans ce dernier cas, le groupe est en involution.

En effet, si les N_i $(i = 1, \ldots, r)$ sont de degré zéro, (N_i, N_k) est de degré -1 ; mais, comme d'autre part (N_i, N_k) doit être de degré zéro pour être une fonction du groupe, elle doit être identiquement nulle.

Dans le premier cas, on peut aussi trouver une forme composée uniquement de fonctions homogènes de degré un, à savoir $N_1 F$, $N_2 F$, ..., $N_{r-1} F$, F.

Soient deux groupes homogènes H_i, K_i, et soit L_s le sous-groupe qui leur est commun. Si f est une fonction quelconque de L_s, $\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$ appartient à H_i et à K_i, et par suite à L_s qui est donc homogène. Donc :

Le sous-groupe commun à deux groupes homogènes est homogène.

Démontrons maintenant un lemme :

Si H *est une fonction homogène, et si f est une intégrale de l'équation linéaire* $(H, f) = 0$, $\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$ *est aussi une intégrale de cette équation.*

Soit m le degré d'homogénéité de H; posons

$$(H, f) = Af, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = Bf;$$

on a

$$(B, A)f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} B \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} B \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} A p_i.$$

Or

$$B \frac{\partial H}{\partial p_i} = (m-1) \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad B \frac{\partial H}{\partial x_i} = m \frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad A p_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Donc

$$(B, A)f = (m-1) Af.$$

Mais, f étant une solution de $(H, f) = 0$, on a

$$Af = 0, \qquad BAf = 0,$$

et, par suite de la relation précédente,

$$ABf = 0,$$

ce qui prouve que Bf ou $\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$ est aussi une solution de l'équation donnée.

Soit alors $H_1, \ldots, H_r$ un groupe homogène; si $K_1, K_2, \ldots, K_{2n-r}$ est le groupe polaire, les K seront solutions du système $(H_1, f) = 0, \ldots, (H_r, f) = 0$. Or, à supposer qu'on ait choisi les H homogènes, les fonctions $\sum_i p_i \frac{\partial K}{\partial p_i}$ seront aussi, d'après le lemme précédent, des intégrales de ce système, et par suite appartiennent au groupe polaire, qui sera donc homogène. Ainsi :

Le groupe polaire d'un groupe homogène est homogène.

Par conséquent

Les fonctions singulières d'un groupe homogène définissent un groupe homogène.

Cherchons *la forme canonique des groupes homogènes.*

Soit $u_1, \ldots, u_r$ une forme d'un groupe homogène, et supposons tout d'abord les u en involution. Si les u sont tous de degré zéro, en posant $u_i = X_i$, $X_1, \ldots, X_r$ sera la forme canonique cherchée. Si les u ne sont pas tous de degré zéro, nous pourrons, comme on l'a vu, trouver r fonctions $H_1, \ldots, H_r$ homogènes de degré un, et en posant $H_i = P_i$, $P_1, \ldots, P_r$ sera la forme canonique. Les deux formes trouvées sont canoniques, puisque l'on a dans le premier cas $(X_i, X_k) = 0$, et dans le second $(P_i, P_k) = 0$.

Supposons maintenant que le groupe ne soit pas en involution. On pourra trouver une forme $N_1, \ldots, N_{r-1}, H$, où les N sont homogènes de degré zéro et H homogène de degré un. Comme le groupe n'est pas en involution, les N_k ne peuvent être toutes singulières. Supposons que N_1 ne le soit pas; alors on pourra trouver une fonction homogène du premier degré de la forme

$$F = H\,\Omega(N_1, \ldots, N_{r-1})$$

telle qu'on ait $(F, N_1) = 1$. Il suffira que la fonction Ω satisfasse à l'équation

$$H \sum_{i=1}^{i=r-1} \frac{\partial \Omega}{\partial N_i}(N_i, N_1) + (H, N_1)\Omega = 1.$$

Or (N_i, N_k) est une fonction homogène de degré -1, en sorte que $(N_i, N_k)H$ est de degré zéro, ou est fonction des N :

$$(N_i, N_k)H = \varphi_{ik}(N_1, \ldots, N_{r-1});$$

(H, N_k) est aussi de degré zéro, en sorte que

$$(H, N_k) = \psi_k(N_1, \ldots, N_{r-1}).$$

L'équation précédente devient donc

$$\sum_{i=1}^{i=r-1} \varphi_{i1}(N)\frac{\partial\Omega}{\partial N_i} + \psi_1(N)\Omega = 1;$$

elle admet des intégrales, parce que les φ, ψ ne sont pas tous nuls.

D'autre part, il est encore loisible de supposer que H ne soit pas singulière (si elle l'était, il suffirait, au lieu de H, de prendre HN_1, qui est homogène du premier degré et n'est pas singulière); on peut alors trouver une fonction Φ de degré zéro

$$\Phi = \Theta(N_1, \ldots, N_{r-1})$$

telle qu'on ait $(H, \Phi) = 1$. Il suffit pour cela que Θ satisfasse à l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=r-1} \psi_i(N)\frac{\partial\Theta}{\partial N_i} = 1.$$

Ainsi *on peut toujours trouver dans le groupe deux fonctions homogènes* P_1, X_1, *de degré* 1 *et* 0, *telles que* $(P_1, X_1) = 1$; *l'une des deux fonctions peut être prise arbitrairement, pourvu qu'elle ne soit pas singulière.*

Une fois trouvés P_1 et X_1, on peut, d'après un théorème précédent, déterminer une forme P_1, X_1, N'_1, ..., N'_{r-2} du groupe telle que les N soient en involution avec P_1, X_1 et déterminent un groupe $(r-2)^{\text{uple}}$. Ce groupe est homogène; en effet, si $v_i(i = 1, 2, \ldots, 2n-r)$ est le groupe polaire du groupe donné, v_1, ..., v_{2n-r}, P_1, X_1 sera le groupe polaire du sous-groupe $(r-2)^{\text{uple}}$; mais les v_i peuvent être pris homogènes, P_1, X_1 le sont aussi; par suite, le groupe polaire du sous-groupe est homogène, et il en est de même du sous-groupe lui-même.

Partant, on peut répéter sur le sous-groupe ce qu'on a fait sur le groupe donné, et ainsi de suite. A la fin il restera un sous-groupe en involution qui se réduira à la forme canonique d'une des deux manières indiquées ci-dessus. Donc :

Tout groupe homogène r^{uple} peut être mis sous l'une ou l'autre des deux formes canoniques

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1, \quad \ldots, \quad P_m, \qquad X_1, \quad \ldots, \quad X_{m+q}, \\ P_1, \quad \ldots, \quad P_{m+q}, \qquad X_1, \quad \ldots, \quad X_m, \end{cases}$$

les P *et les* X *étant de degrés respectifs* 1 *et* 0, *et les fonctions d'indice supérieur à m constituant le sous-groupe des fonctions singulières.*

D'après cela, il est aisé d'établir que : *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse passer d'un groupe homogène à un autre par une transformation de contact homogène sont que ces deux groupes aient les mêmes valeurs m, q et qu'ils admettent des réductions canoniques appartenant toutes deux à l'un ou l'autre des deux types* (1).

VIII. — Structure des groupes de fonctions.

Étant donné un groupe $u_1, \ldots, u_r$, on a, comme on sait

$$(1)\qquad (u_i, u_k) = \Omega_{ik}(u).$$

L'ensemble des propriétés du groupe qui dépendent uniquement du nombre r et des fonctions Ω_{ik} est appelé la *structure* du groupe.

Entre les r^2 fonctions Ω_{ik}, il existe certaines relations que nous allons établir.

Reprenons les relations connues

$$(u_i, u_k) + (u_k, u_i) = 0,$$
$$\Big((u_i, u_h), u_k\Big) + \Big((u_h, u_k), u_i\Big) + \Big((u_k, u_i), u_h\Big) = 0$$
$$(i, h, k = 1, \ldots, r).$$

La première de ces relations donne

$$(2)\qquad \Omega_{ik}(u) + \Omega_{ki}(u) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, r).$$

De la seconde, en observant que

$$\Big((u_i, u_h), u_k\Big) = \Big(\Omega_{ih}(u), u_k\Big) = \sum_{s=1}^{s=r} \frac{\partial \Omega_{ih}(u)}{\partial u_s}(u_s, u_k)$$
$$= \sum_{s=1}^{s=r} \frac{\partial \Omega_{ih}(u)}{\partial u_s} \Omega_{sk}(u),$$

on déduit

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=r} \left[\frac{\partial \Omega_{ih}(u)}{\partial u_s}\Omega_{sk}(u) + \frac{\partial \Omega_{hk}(u)}{\partial u_s}\Omega_{si}(u) + \frac{\partial \Omega_{ki}(u)}{\partial u_s}\Omega_{sh}(u)\right] = 0 \\ \qquad (i, h, k = 1, \ldots, r). \end{array} \right.$$

Nous démontrerons que réciproquement, *étant données r^2 fonctions de r arguments $\Omega_{ik}(u_1, \ldots, u_r)$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ satisfaisant aux relations* (2), (3), *on peut déterminer un nombre n et un système de r fonctions indépendantes $u_1, \ldots, u_r$ des $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ vérifiant les relations* (1).

Soient $F(u)$, $\Phi(u)$ deux fonctions des r arguments $u_1, \ldots, u_r$; écrivons

$$\sum_{i,k} \Omega_{ik}(u) \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = |F, \Phi|.$$

En particulier

$$\Omega_{ik}(u) = |u_i, u_k|.$$

Ce symbole est une généralisation de la parenthèse de Poisson et s'y réduit quand on fait

$$r = 2n, \qquad u_i = p_i, \qquad u_{n+i} = x_i, \qquad \Omega_{i,n+i}(u) = -\Omega_{n+i,i}(u) = 1$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

tous les autres Ω étant égaux à zéro. On a, comme pour le symbole de Poisson,

$$(4) \qquad |F, \Phi| + |\Phi, F| = 0.$$

En outre, on peut démontrer que

$$(5) \qquad \Big|F, |\Phi, \Psi|\Big| + \Big|\Phi, |\Psi, F|\Big| + \Big|\Psi, |F, \Phi|\Big| = 0.$$

On a

$$\Big|F, |\Phi, \Psi|\Big| = \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial |\Phi, \Psi|}{\partial u_\beta},$$

$$\frac{\partial |\Phi, \Psi|}{\partial u_\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \left\{ \Omega_{\gamma\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_\beta \partial u_\delta} + \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\delta} + \frac{\partial \Omega_{\gamma\delta}}{\partial u_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\delta} \right\},$$

d'où

$$\Big|F, |\Phi, \Psi|\Big| = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \left\{ \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_\beta \partial u_\delta} + \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\delta} + \frac{\partial \Omega_{\gamma\delta}}{\partial u_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\delta} \right\}.$$

Par sommation avec les expressions analogues, il vient

$$\begin{aligned}
&\Big|F, |\Phi, \Psi|\Big| + \Big|\Phi, |\Psi, F|\Big| + \Big|\Psi, |F, \Phi|\Big| \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \Bigg\{ \Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta} \Bigg[\frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_\beta \partial u_\delta} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial^2 F}{\partial u_\beta \partial u_\delta} \\
&\qquad + \frac{\partial \Psi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial F}{\partial u_\gamma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\beta \partial u_\delta} + \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \\
&\qquad + \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial F}{\partial u_\delta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \frac{\partial \Psi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\delta} \frac{\partial^2 F}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \Bigg] \\
&\qquad + \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial \Omega_{\gamma\delta}}{\partial u_\beta} \Bigg[\frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\delta} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial F}{\partial u_\delta} + \frac{\partial \Psi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial F}{\partial u_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\delta} \Bigg] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Le premier et le cinquième termes réunis peuvent s'écrire, en mettant dans le second d'entre eux γ, δ, β, α à la place de α, β, γ, δ,

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_\beta \partial u_\delta} + \Omega_{\gamma\delta}\Omega_{\beta\alpha} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_\delta \partial u_\beta};$$

leur somme est nulle d'après la relation (2). Il en est de même de la somme du second et du sixième termes, et de celle du troisième et du quatrième termes.

Les trois derniers termes peuvent s'écrire, en changeant α, β, γ, δ en γ, β, δ, α dans le second et en δ, β, α, γ dans le troisième :

$$\frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\delta} \left[\Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial \Omega_{\gamma\delta}}{\partial u_\beta} + \Omega_{\gamma\beta} \frac{\partial \Omega_{\delta\alpha}}{\partial u_\beta} + \Omega_{\delta\beta} \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} \right];$$

en sommant par rapport à l'indice β, on obtient zéro, d'après la relation (3).

Par conséquent, la relation (5) est vérifiée.

Ceci posé, commençons par montrer qu'on peut choisir deux nombres m, q liés à r par la relation $r = 2m + q$, et r fonctions $P_1, \ldots, P_{m+q}, X_1, \ldots, X_m$ de $u_1, \ldots, u_r$ de manière à satisfaire aux relations

$$(6) \quad |P_i, X_i| = 1, \qquad |P_i, P_k| = |P_i, X_k| = |X_i, X_k| = 0 \qquad (i \neq k).$$

Si les $\Omega_{ik}(u)$ sont toutes identiquement nulles, il suffit de prendre $m = 0$, $q = r$, et

$$P_1 = u_1, \qquad P_2 = u_2, \qquad \ldots, \qquad P_r = u_r;$$

alors on a, d'après (1),

$$|P_i, P_k| = 0.$$

Supposons maintenant que les $\Omega_{ik}(u)$ ne soient pas toutes nulles, et en particulier que les $\Omega_{1k}(u)$ ne soient pas toutes nulles. Posons $P_1 = u_1$, et prenons pour X_1 une intégrale de l'équation

$$|P_1, f| = \sum_{k=1}^{k=r} \Omega_{1k}(u) \frac{\partial f}{\partial u_k} = 1;$$

X_1 est indépendante de P_1, parce que, autrement, on aurait

$$|P_1, X_1| = 0,$$

tandis que $|P_1, X_1| = 1$. Les deux équations différentielles

$$|P_1, f| = 0, \qquad |X_1, f| = 0$$

sont indépendantes, parce que X_1 par exemple est intégrale de la seconde et non de la première; elles forment un système complet, parce que

$$\Big|P_1, |X_1, f|\Big| - \Big|X_1, |P_1, f|\Big| = \Big||P_1, X_1|, f\Big| = |1, f| = 0;$$

donc il existe $(r-2)$ fonctions $u'_1, \ldots, u'_{r-2}$, indépendantes entre elles, qui satisfont à ces équations. De plus, ces fonctions sont indépendantes de P_1, X_1, car si l'on avait par exemple

$$P_1 = \theta(X_1, u'_1, \ldots, u'_{r-2}),$$

il en résulterait que

$$1 = |P_1, X_1| = \frac{\partial\theta}{\partial X_1}|X_1, X_1| + \frac{\partial\theta}{\partial u'_1}|u'_1, X_1| + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial u'_{r-2}}|u'_{r-2}, X_1| = 0.$$

Si toutes les $|u'_i, u'_k|$ sont nulles, posons $P_2 = u'_1, \ldots, P_{r-1} = u'_{r-2}$, nous aurons

$$m = 1, \qquad q = r - 2,$$

et le système cherché sera

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{r-1}, \quad X_1.$$

Si les $|u'_i, u'_k|$ ne sont pas toutes nulles, supposons en particulier que les $|u'_1, u'_k|$ ne soient pas toutes nulles. Nous poserons alors $P_2 = u'_1$, et nous prendrons pour X_2 une solution commune des équations

$$(7) \qquad |P_1, f| = 0, \qquad |X_1, f| = 0, \qquad |P_2, f| = 1.$$

A ce système, il est loisible de substituer, d'après le théorème de Jacobi, un système de trois équations linéaires *homogènes,* avec une variable, f, en plus :

$$(8) \qquad |P_1, W| = 0, \qquad |X_1, W| = 0, \qquad |P_2, W| + \frac{\partial W}{\partial f} = 0.$$

De ces équations, les deux premières, comme on l'on déjà montré, sont indépendantes, et la troisième est évidemment indépendante de celles-là. En outre, leur ensemble forme un système complet. En désignant, pour abréger, les premiers membres par AW, BW, CW, on a déjà trouvé

$$(A, B)W = 0,$$

de plus

$$\begin{aligned}(A, C)W = &\Big|P_1, |P_2, W|\Big| + \Big|P_1, \frac{\partial W}{\partial f}\Big| \\ &- \Big|P_2, |P_1, W|\Big| - \frac{\partial |P_1, W|}{\partial f} = \Big||P_1, P_2|, W\Big| = 0,\\ (B, C)W = &\Big|X_1, |P_2, W|\Big| + \Big|X_1, \frac{\partial W}{\partial f}\Big| \\ &- \Big|P_2, |X_1, W|\Big| - \frac{\partial |X_1, W|}{\partial f} = \Big||X_1, P_2|, W\Big| = 0.\end{aligned}$$

Alors, si toutes les intégrales du système étaient indépendantes de f, l'équation $\frac{\partial W}{\partial f} = 0$ serait une conséquence du système (8), et l'équation $|P_2, W| = 0$ serait aussi une conséquence de ce système. Donc, comme tous les u'_i satisfont à $|P_1, W| = 0$, $|X_1, W| = 0$, ils satisferaient aussi à $|P_2, W| = 0$, ou à $|u'_1, W| = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il existe donc au moins une solution dépendant de f, $W(u_1, \ldots, u_r, f)$, et la fonction f des u définie par la relation $W = 0$ sera une intégrale du système (7).

Nous poserons $X_2 = f$; la fonction X_2 est indépendante de P_1, X_1, P_2, car sinon, si par exemple on avait

$$X_2 = \varphi(P_1, X_1, P_2),$$

il en résulterait

$$1 = |P_2, X_2| = \frac{\partial \varphi}{\partial P_1}|P_2, P_1| + \frac{\partial \varphi}{\partial X_1}|P_2, X_1| = 0.$$

En outre, entre les quatre fonctions P_1, X_1, P_2, X_2 existent les relations

$$|P_1, X_1| = |P_2, X_2| = 1, \qquad |P_1, P_2| = |P_1, X_2| = |X_1, X_2| = 0.$$

En continuant de la même manière, on voit qu'on arrivera finalement à un système de fonctions liées par les relations (6).

Une fois trouvées les $2m + q = r$ fonctions indépendantes $P_1, \ldots, P_{m+q}, X_1, \ldots, X_m$ de $u_1, \ldots, u_r$, nous pouvons considérer les $u_1, \ldots, u_r$ à leur tour comme fonctions des P, X. Prenons un nombre n quelconque non inférieur toutefois à $m + q$, et désignons par $P_{m+q+1}, \ldots, P_n, X_{m+1}, \ldots, X_n$ $(2n - 2m - q)$ variables indépendantes (dont les u ne dépendent pas); nous aurons, en général,

$$\begin{aligned}|F, \Phi| = & \sum_{i,k} |P_i, P_k| \frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial \Phi}{\partial P_k} \\ & + \sum_{i,k} |X_i, X_k| \frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{\partial \Phi}{\partial X_k} + \sum_{i,k} |P_i, P_k| \left(\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial \Phi}{\partial X_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}\frac{\partial F}{\partial X_k}\right),\end{aligned}$$

ou, eu égard à (6),

$$|F, \Phi| = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}\frac{\partial F}{\partial X_i}\right) = (F, \Phi)_{P,X}.$$

En particulier, nous aurons

$$\Omega_{ik}(u) = |u_i, u_k| = (u_i, u_k)_{P,X}.$$

Donc les $u_1, \ldots, u_r$, considérés comme fonctions des P, X, satisfont aux équations (1). Notre assertion est dès lors justifiée.

Si les $\Omega_{ik}(u)$, tout en satisfaisant aux relations (2), (3), *sont des fonctions homogènes et du premier degré, nous pouvons déterminer les $u_1, \ldots, u_r$ de manière que le groupe engendré par les u soit homogène.*

Nous supposerons qu'on ait déjà trouvé les fonctions $u_1, \ldots, u_r$ des p, x satisfaisant à (1), et nous chercherons à déterminer une forme canonique P, X du groupe défini par les u, telle que les P soient homogènes de degré 1, et les X homogènes de degré 0, par rapport aux u.

Si les $\Omega_{ik}(u)$ sont tous nuls, nous prendrons $P_1 = u_1, \ldots, P_r = u_r$.

Si les Ω_{ik} ne sont pas tous nuls, et si, en particulier, les Ω_{1k} ne sont pas tous nuls, prenons $P_1 = u_1$. En désignant par f une fonction de $v_1 = \frac{u_2}{u_1}$, $v_2 = \frac{u_3}{u_1}$, $\ldots$, $v_{r-1} = \frac{u_r}{u_1}$, on pourra déterminer cette fonction de manière que

$$(u_1, f)_{x,p} = \sum_{i=1}^{i=r-1} (u_1, v_i)\frac{\partial f}{\partial v_i} = 1;$$

en effet,

$$(u_1, v_i) = \frac{1}{u_1}(u_1, u_{i+1}) = \frac{1}{u_1}\Omega_{1,i+1}(u),$$

et, comme par hypothèse les Ω sont homogènes de degré 1, (u_1, v_i) sera homogène de degré zéro, et sera donc une fonction des v. Nous prendrons comme fonction X_1 une intégrale de l'équation considérée. Nous aurons de la sorte

$$(P_1, X_1) = 1,$$

P_1 étant homogène de degré 1 et X_1 homogène de degré zéro.

Formons alors les équations

$$(9) \quad (P_1, f) = \sum_{i=1}^{i=r}(P_1, u_i)\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0, \qquad (X_1, f) = \sum_{i=1}^{i=r}(X_1, u_i)\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

qui, ainsi qu'on le démontre facilement, sont indépendantes et forment un système complet. Si les $(r-2)$ solutions indépendantes de ce système sont homogènes de degré zéro en u, par un raisonnement déjà fait on en déduit qu'elles doivent être en involution; nous prendrons alors ces solutions comme fonctions X_2, $X_3, \ldots, X_{r-1}$, et nous aurons la forme canonique $P_1, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$. Si les solutions du système (9) ne sont pas toutes homogènes de degré zéro, on remarquera que les équations (9) jointes à l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=r} u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$$

forment un système complet. En effet, indiquons les trois équations respectivement par

$$Af = 0, \qquad Bf = 0, \qquad Cf = 0;$$

nous avons, en tenant compte de ce que (P_1, u_i) est homogène de degré 1 et que (X_1, u_i) est homogène de degré zéro,

$$(A, B)f = \Big(P_1, (X_1, f)\Big) - \Big(X_1, (P_1, f)\Big) = \Big((P_1, X_1), f\Big) = (1, f) = 0,$$

$$\begin{aligned}(A, C)f &= \sum_i [A u_i - C(P_1, u_i)] \frac{\partial f}{\partial u_i} \\ &= \sum_i \left[(P_1, u_i) - \sum_h u_h \frac{\partial (P_1, u_i)}{\partial u_h}\right] \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B, C)f &= \sum_i [B u_i - C(X_1, u_i)] \frac{\partial f}{\partial u_i} \\ &= \sum_i \left[(X_1, u_i) - \sum_h u_h \frac{\partial (X_1, u_i)}{\partial u_h}\right] \frac{\partial f}{\partial u_i} = Bf.\end{aligned}$$

Soient $w_2, \ldots, w_{r-2}$ $(r-3)$ solutions indépendantes du système considéré, et soit t une solution commune aux équations (9) et à l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=r} u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 1;$$

les fonctions $t, w_2 t, \ldots, w_{r-2} t$ définissent un groupe r^{uple} homogène, pour lequel les parenthèses de deux quelconques des fonctions constituant la forme, sont des fonctions homogènes de degré 1 de ces mêmes fonctions. En effet, ces parenthèses sont des fonctions homogènes du premier degré des u, et les fonctions constituant la forme du groupe sont aussi de ce degré.

Traitons le nouveau groupe comme nous avons traité le groupe r^{uple}, et ainsi de suite. Nous finirons par obtenir pour le groupe r^{uple} une forme $P_1, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_q$ $(m+q=r)$, les P, X étant des fonctions homogènes des $u_1, \ldots, u_r$, de degrés respectivement égaux à 1 et à 0.

D'après cela, les $u_1, \ldots, u_r$ peuvent être considérés à leur tour comme des fonctions des P, X, et l'on obtient même des fonctions homogènes des P, de degré 1. En effet, si l'on multiplie les équations

$$\sum_i u_i \frac{\partial P_h}{\partial u_i} = P_h, \qquad \sum_i u_i \frac{\partial X_k}{\partial u_i} = 0 \qquad (h=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, r)$$

respectivement par $\frac{\partial u_s}{\partial P_h}$ et par $\frac{\partial u_s}{\partial X_k}$, et si l'on somme par rapport à h et k, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_i u_i \bigg[& \frac{\partial u_s}{\partial P_1}\frac{\partial P_1}{\partial u_i} + \ldots + \frac{\partial u_s}{\partial P_m}\frac{\partial P_m}{\partial u_i} \\ & + \frac{\partial u_s}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial u_i} + \ldots + \frac{\partial u_s}{\partial X_q}\frac{\partial X_q}{\partial u_i}\bigg] = \sum_h \frac{\partial u_s}{\partial P_h} P_h;\end{aligned}$$

or, la quantité entre crochets est égale à 0 ou à 1 selon que $i \neq s$ ou que $i = s$; donc

$$\sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial u_s}{\partial P_h} P_h = u_s.$$

Si enfin aux P, X nous adjoignons d'autres variables quelconques $P_{m+1}, \ldots, P_n, X_{q+1}, \ldots, X_n$, n étant un nombre quelconque, mais non inférieur à m ni à q, les $u_1, \ldots, u_r$ définiront un groupe homogène à $2n$ variables $P_1, \ldots, P_n, X_1, \ldots, X_n$.

IX. — Transformations de contact infinitésimales.

Une transformation infinitésimale en z, x, p,

$$(1) \qquad Xf = \zeta(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

est appelée une *transformation de contact* si elle est admise par l'équation

$$(2)\qquad dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i = 0.$$

Rappelons qu'on dit (1^{re} Partie, n° XXI) qu'une équation pfaffienne $\sum_i u_i\, dx_i = 0$ admet une transformation infinitésimale

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

quand on a, σ étant une certaine fonction des variables,

$$\sum_i X u_i\, dx_i + \sum_i u_i\, d\xi_i = \sigma \sum_i u_i\, dx_i,$$

ou

$$X u_i + \sum_h u_h \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} = \sigma u_i.$$

Pour la transformation (1) et l'équation (2), on a donc

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \sum_h p_h \frac{\partial \xi_h}{\partial z} = \sigma,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \sum_h p_h \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} - \Pi_i = -\sigma p_i,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \sum_h p_h \frac{\partial \xi_h}{\partial p_i} = 0,$$

et, si l'on pose

$$(3)\qquad \zeta - \sum_i p_i \xi_i = -W,$$

ces équations peuvent s'écrire

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi_i = \dfrac{\partial W}{\partial p_i}, & \Pi_i = -\dfrac{\partial W}{\partial x_i} - p_i \dfrac{\partial W}{\partial z} = -\dfrac{dW}{dx_i}, \\ \zeta = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W, & \sigma = -\dfrac{\partial W}{\partial z}. \end{cases}$$

On dit que W est la *fonction caractéristique* de la transformation de contact.

Étant donnée une transformation de contact infinitésimale Xf, l'équation (3) détermine immédiatement la fonction W correspondante. Réciproquement, étant donnée la fonction W, la transformation de contact est déterminée par les équations (4), c'est-à-dire que l'on a

$$Xf = \left(\sum_i p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_i \frac{\partial W}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_i \frac{dW}{dx_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = [W, f] - W\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Nous appellerons pour abréger *transformation* W la transformation de contact infinitésimale ayant pour fonction caractéristique W.

Les transformations d'un groupe à un paramètre engendré par une transformation de contact infinitésimale sont des transformations de contact; en effet, elles laissent invariante l'équation (2). Réciproquement, si un groupe est formé de transformations de contact, c'est-à-dire s'il laisse invariante l'équation (2), la même chose aura lieu pour sa transformation infinitésimale. Ainsi :

Un groupe à un paramètre est un groupe de transformations de contact quand sa transformation infinitésimale est une transformation de contact, et alors seulement.

En outre :

Une transformation de contact infinitésimale se réduit à la transformation identique lorsque $W \equiv 0$, *et alors seulement.*

En effet, si elle se réduit à la transformation identique, on aura

$$\zeta = \xi_i = \pi_i = 0$$

et, d'après (3),

$$W \equiv 0.$$

Réciproquement, si $W \equiv 0$, la transformation de contact considérée se réduit, d'après (4), à la transformation identique.

Soient $A_1 f$, $A_2 f$ deux transformations de contact infinitésimales, de fonctions caractéristiques W_1, W_2; soient c_1, c_2 deux constantes quelconques; il est aisé de démontrer que $c_1 A_1 f + c_2 A_2 f$ est une transformation de contact infinitésimale de fonction caractéristique $c_1 W_1 + c_2 W_2$. Si l'on se rappelle que r transformations infinitésimales $A_i f$ sont indépendantes, par définition, quand on ne peut trouver r constantes c_i telles que $\sum_{i=1}^{i=r} c_i A_i f = 0$, on aura cet énoncé :

Les r transformations de contact infinitésimales de fonctions caractéristiques $W_1, \ldots, W_r$ sont indépendantes lorsqu'il n'existe pas de constantes c_i, en nombre r, telles que $\sum_{i=1}^{i=n} c_i W_i \equiv 0$, et alors seulement.

En nous souvenant des définitions données au n° IX de la première Partie, nous pouvons dire qu'une fonction Φ admet une transformation de contact infinitésimale W lorsque $[W, \Phi] - W\frac{\partial \Phi}{\partial z} \equiv 0$, et alors seulement; qu'une équation $F = 0$ admet cette transformation quand $[W, F] - W\frac{\partial F}{\partial z}$ s'annule par suite de $F = 0$, et alors seulement.

En particulier, l'équation $W = 0$ admet la transformation de contact W, car $[W, W] - W\frac{\partial W}{\partial z} = -W\frac{\partial W}{\partial z}$ s'annule si $W = 0$.

Les formules (4) nous ont donné, pour la transformation W,

$$\sigma = -\frac{\partial W}{\partial z};$$

or, pour que la transformation laisse invariante l'expression pfaffienne $dz - \sum_i p_i dx_i$, on doit avoir $\sigma = 0$. Donc :

Une transformation de contact infinitésimale W laisse invariante l'expression pfaffienne $dz - \sum_i p_i dx_i$, quand $W = v(x, p)$, et alors seulement; dans ce cas, on a

$$X f = (v, f) + \left(\sum_i p_i \frac{\partial v}{\partial p_i} - v\right)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{5}$$

Si une transformation de contact infinitésimale possède cette propriété, le groupe qu'elle engendre la possède aussi, car (nº III, 3ᵉ Partie) il a la forme

$$(6) \qquad z' = z + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p).$$

Réciproquement, si un groupe a la forme (6), la transformation de contact infinitésimale génératrice de ce groupe a la forme (5).

Plus généralement, si notre pfaffien doit se reproduire multiplié simplement par une constante, σ devra être constant, et l'on aura

$$W = cz + v(x, p),$$

en sorte que les transformations finies du groupe auront, comme on sait, la forme

$$z' = Az + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p),$$

avec $A = 1 - c$.

De ce qu'on vient de dire il résulte qu'une fonction $\psi(x, p)$ admet une transformation de contact infinitésimale $v(x, p)$ si $(\psi, v) \equiv 0$, et alors seulement. Donc :

Étant donné un groupe r^{uple} $u_1(x, p), \ldots, u_r(x, p)$, le groupe polaire est l'ensemble des fonctions des x, p, qui sont invariantes par rapport à toutes les transformations de contact infinitésimales dont les fonctions caractéristiques appartiennent au groupe.

Pareillement :

Les fonctions singulières sont les fonctions d'un groupe qui sont invariantes par rapport à toutes les transformations de contact infinitésimales dont les fonctions caractéristiques appartiennent au groupe.

Pour cette raison, les fonctions singulières sont encore dites les *fonctions invariantes* du groupe.

Déterminons maintenant la forme des transformations de contact infinitésimales Xf en x, p qui laissent invariant le pfaffien

$\sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i$. On aura

$$W = v(x, p),$$

$$Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

et les relations (4), (5) donneront

$$(7) \qquad \xi_i = \frac{\partial v}{\partial p_i}, \qquad \Pi_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad v = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial v}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \xi_i;$$

ainsi

$$Xf = (v, f),$$

et la fonction v sera homogène du premier degré par rapport aux p. Nous qualifierons d'*homogène* une transformation de contact infinitésimale (v, f) en x, p pour laquelle la fonction caractéristique v est homogène du premier degré par rapport aux p. Le groupe engendré par la transformation infinitésimale Xf laissera invariante l'expression $\sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i$, et sera donc un groupe de transformations de contact homogène (n° III, 3e Partie). Réciproquement, si un groupe est homogène dans le sens de Lie (c'est-à-dire si $A = 1$), la transformation infinitésimale qui l'engendre devra laisser invariant notre pfaffien. Donc:

La forme générale des transformations de contact homogènes infinitésimales est (v, f), la fonction caractéristique v étant homogène du premier degré par rapport aux p. Les groupes homogènes sont engendrés par toutes ces transformations de contact exclusivement.

Une transformation de contact homogène se réduit à la transformation identique quand $v \equiv 0$, et alors seulement, ainsi qu'on le voit par les équations (7).

Si l'on considère que $c_1(v_1, f) + c_2(v_2, f) = (c_1 v_1 + c_2 v_2, f)$, on peut conclure que :

Les transformations de contact infinitésimales (v_i, f) sont indépendantes lorsque les v_i sont linéairement indépendantes, et alors seulement.

Si $(v_1, f) = A_1 f$, , $(v_2, f) = A_2 f$ sont deux transformations de contact infinitésimales homogènes, on a, d'après l'identité de Jacobi,

$$(A_1, A_2) f = \big((v_1, v_2), f\big).$$

Mais (v_1, v_2) est une fonction homogène du premier degré. Donc :

En combinant au moyen des parenthèses deux transformations de contact infinitésimales homogènes, on obtient une transformation de contact de même nature ; et si v_1, v_2 sont les fonctions caractéristiques des premières transformations, (v_1, v_2) est celle de la dernière transformation.

Deux transformations de contact infinitésimales homogènes, de fonctions caractéristiques v_1, v_2 sont permutables (1re Partie, n° XIV) si $(v_1, v_2) = 0$. Cela résulte immédiatement de la formule précédente

$$(A_1, A_2) f = \big((v_1, v_2), f\big).$$

Si

$$x' = X(x, p), \qquad p' = P(x, p) \tag{8}$$

est une transformation homogène, et si (v, f) est une transformation de contact infinitésimale homogène, la fonction v se change évidemment par la transformation (8) en une fonction homogène du premier degré des p', et l'on a en outre, comme on l'a trouvé autrefois,

$$(v, f)_{x', p'} = (v, f)_{x, p}.$$

Ainsi :

Si à une transformation de contact infinitésimale homogène on applique une transformation de contact homogène, la transformation de contact infinitésimale transformée est encore homogène, et sa fonction caractéristique s'obtient en introduisant dans celle de la transformation donnée les nouvelles variables.

Soient maintenant deux transformations de contact infinitésimales de la forme spéciale

$$(9)\qquad \begin{cases} A_1 f = (v_1, f) + \left(\sum_i p_i \dfrac{\partial v_1}{\partial p_i} - v_1\right)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ A_2 f = (v_2, f) + \left(\sum_i p_i \dfrac{\partial v_2}{\partial p_i} - v_2\right)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

v_1, v_2 étant des fonctions des x, p. Comme elles laissent invariant le pfaffien $dz - \sum_i p_i dx_i$, on peut en dire autant de $(A_1, A_2)f$; c'est-à-dire qu'il devra exister une fonction W telle que

$$(A_1, A_2)f = (W, f) + \left(\sum_i p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W\right)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Il s'agit de trouver la fonction W. On a

$$(A_1, A_2)f = \big(v_1, (v_2, f)\big) - \big(v_2, (v_1, f)\big) + \left[\left(v_1, \sum_i p_i \frac{\partial v_2}{\partial p_i} - v_2\right) - \left(v_2, \sum_i p_i \frac{\partial v_1}{\partial p_i} - v_1\right)\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Or

$$\left(v_1, \sum_i p_i \frac{\partial v_2}{\partial p_i} - v_2\right) = \sum_h \left[\frac{\partial v_1}{\partial p_h}\left(\sum_i p_i \frac{\partial^2 v_2}{\partial p_i \partial x_h} - \frac{\partial v_2}{\partial x_h}\right) - \frac{\partial v_1}{\partial x_h}\sum_i p_i \frac{\partial^2 v_2}{\partial p_i \partial p_h}\right].$$

D'où, après quelques réductions,

$$(A_1, A_2)f = \big((v_1, v_2), f\big) + \left(\sum_i p_i \frac{\partial (v_1, v_2)}{\partial p_i} - (v_1, v_2)\right)\frac{\partial f}{\partial z},$$

en sorte que $W = (v_1, v_2)$. Donc :

Si l'on a les deux transformations de contact infinitésimales (9), *de fonctions caractéristiques* v_1, v_2, *la transformation* $(A_1, A_2)f$ *est une transformation de contact infinitésimale de même nature, sa fonction caractéristique étant* (v_1, v_2).

Si à la transformation Af on applique une transformation de contact de la forme (8), en observant qu'on peut écrire

$$Af=[v,f]-v\frac{\partial f}{\partial z},$$

et que l'on a

$$[v,f]_{z,x,p}=[v,f]_{z',x',p'}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z'},$$

on reconnaît que Af se change en une transformation de même forme, dont la fonction caractéristique s'obtient en introduisant dans v les nouvelles variables.

Pour étudier les transformations infinitésimales de contact les plus générales, nous partirons de celles qui sont homogènes.

Soit H une fonction de $y_1, \ldots, y_{n+1}, q_1, \ldots, q_{n+1}$, homogène du premier degré par rapport aux q, en sorte que (H, f) est une transformation de contact infinitésimale homogène. Soit F une fonction quelconque homogène de degré zéro par rapport aux q. Nous pouvons poser

$$H=-q_{n+1}W\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right).$$

$$F= \qquad F\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right).$$

Il s'ensuit que

$$(H, F)_{y,q}=-q_{n+1}(W, F)_{y,q}-W(q_{n+1}, F)_{y,q}.$$

Mais, si nous faisons

$$z=y_{n+1}, \qquad x_i=y_i, \qquad p_i=-\frac{q_i}{q_{n+1}} \qquad (i=1,\ldots,n),$$

F sera fonction des z, x, p; il en sera de même de W, et nous aurons

$$(q_{n+1}, F)=\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad -q_{n+1}(W, F)_{yq}=[W, F]_{z,x,p}$$

et enfin

$$(H, F)_{yq}=[W, F]_{z,x,p}-W\frac{\partial F}{\partial z};$$

c'est là le type le plus général des transformations de contact infinitésimales.

Soient maintenant les deux transformations

$$B_1 F = [W_1, F] - W_1 \frac{\partial F}{\partial z},$$
$$B_2 F = [W_2, F] - W_2 \frac{\partial F}{\partial z}.$$

La transformation $(B_1, B_2)F$ laissera invariante l'équation (2), en sorte qu'elle sera une transformation de contact infinitésimale; cela revient à dire qu'on aura

$$(B_1, B_2)F = [V, F] - V \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Il reste à calculer V. Posons

$$A_k F = (H_k, F)_{yq} = [W_k, F]_{z, p, q} - W_k \frac{\partial F}{\partial z} = B_k F \qquad (k = 1, 2).$$

Nous aurons

$$(A_1, A_2)F = (B_1, B_2)F$$

ou

$$(B_1, B_2)F = \Big((H_1, H_2), F\Big)_{y, q}.$$

Comme $(H_1, H_2)_{y,q}$ est homogène du premier degré par rapport aux q, on a

$$\frac{(H_1, H_2)_{y,q}}{q_{n+1}} = - U(z, x, p);$$

d'où, d'après ce qu'on a trouvé tantôt,

$$\Big((H_1, H_2), F\Big)_{y, q} = [U, F]_{z, x, p} - U \frac{\partial F}{\partial z}.$$

On tire de là $U = V$. Pour trouver l'expression de V, observons que

$$(H_1, H_2)_{y, q} = (H_1, -q_{n+1} W_2) = - q_{n+1}(H_1, W_2)_{yq} + \frac{\partial H_1}{\partial y_{n+1}} W_2;$$
$$(H_1, W_2)_{yq} = [W_1, W_2]_{z, x, p} - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z};$$

par suite

$$\frac{(H_1, H_2)_{y,q}}{q_{n+1}} = -[W_1, W_2]_{z, p, q} + W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z},$$

ou

$$V = [W_1, W_2]_{z,x,p} - \left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}\right). \tag{10}$$

Ainsi :

Si l'on a deux transformations de contact infinitésimales B_1F, B_2F, *aux fonctions caractéristiques* W_1, W_2, *la transformation* $(B_1, B_2)F$ *est une transformation de contact infinitésimale dont la fonction caractéristique* V *est donnée par la formule* (10).

Appliquons à une transformation de contact infinitésimale

$$BF = [W, F]_{z,x,p} - W \frac{\partial F}{\partial z},$$

une transformation de contact quelconque

$$z' = Z(z, x, p), \qquad x' = X(z, x, p), \qquad p' = P(z, x, p).$$

Nous aurons

$$[W, F]_{z,x,p} = \rho [W, F]_{z',x',p'},$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{\partial Z}{\partial z} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial X_i}{\partial z} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p'_i} \frac{\partial P_i}{\partial z}.$$

Or (3^e Partie, n° III)

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \rho - \frac{1}{\rho}[\rho, Z]_{z,x,p} = \rho - [\rho, z']_{z',x',p'},$$
$$\frac{\partial X_i}{\partial z} = - \frac{1}{\rho}[\rho, X_i]_{z,x,p} = - [\rho, x'_i]_{z',x',y'},$$
$$\frac{\partial P_i}{\partial z} = - [\rho, p'_i]_{z',x',p'}.$$

On trouve donc

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \rho \frac{\partial F}{\partial z'} - [\rho, F]_{z',x',p'},$$

et enfin

$$BF = \rho [W, F]_{z',x',p'} + W[\rho, F]_{z',x',p'} - \rho W \frac{\partial F}{\partial z'},$$

ou

$$BF = [\rho W, F]_{z', x', p'} - \rho W \frac{\partial F}{\partial z'}.$$

Donc :

Si l'on applique à une transformation de contact infinitésimale de fonction caractéristique W *une transformation de contact quelconque, on obtient une autre transformation de contact infinitésimale dont la fonction caractéristique est* ρW, ρ *étant la fonction connue qui figure dans l'identité*

$$dZ - \sum_i P_i dX_i = \rho\left(dz - \sum_i p_i dx_i\right).$$

On dit qu'un groupe de fonctions $u_1(x, p), \ldots, u_r(x, p)$ est *invariant* par rapport à une transformation de contact en x, p

$$(11) \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ou qu'il *admet* cette transformation, quand les

$$u_h\Big(X(x, p),\ P(x, p)\Big)$$

sont encore des fonctions du groupe, c'est-à-dire quand, en vertu des équations (11), on a

$$u_h(x', p') = F_h\Big(u_1(x, p), \ldots, u_r(x, p)\Big) \qquad (h = 1, \ldots, r).$$

Comme (3e Partie, n° VI) toute transformation de contact change deux groupes réciproques en groupes réciproques, on voit que :

Si un groupe de fonctions est invariant par rapport à une transformation de contact, il en est de même de son groupe réciproque.

Puisque (1re Partie, n° X) un système d'équations différentielles admet, par définition, une transformation quand celle-ci change ses intégrales en intégrales, nous pouvons dire que :

Un groupe de fonctions $u_1, \ldots, u_r$ *admet une transformation* (11) *quand cette transformation est admise par le système* *complet* $(v_h, f) = 0$ $(h = 1, \ldots, 2n - r)$, $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ *représentant le groupe polaire.*

Or, un système admet toutes les transformations d'un groupe à un paramètre quand il admet (dans le sens qui a été indiqué à l'endroit voulu) la transformation infinitésimale génératrice du groupe. Nous dirons de même qu'un groupe de fonctions u_i *admet* une transformation infinitésimale quand cette transformation est admise par le système complet correspondant $(v_h, f) = 0$, et nous pourrons conclure que :

Un groupe de fonctions admet le groupe de transformations de contact engendré par la transformation infinitésimale de caractéristique $W = cz + v(x, p)$, *lorsqu'il admet cette transformation infinitésimale, et alors seulement.*

Rappelons-nous ensuite qu'un système complet admet un groupe de transformations à un paramètre Xf, ou, ce qui revient au même, une transformation infinitésimale Xf, quand, u étant une quelconque de ses intégrales, il en est de même de Xu. Nous aurons comme conditions pour que le groupe u admette la transformation Xf :

$$Xu_h = \varphi_h(u_1, \ldots, u_r) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous avons trouvé

$$Xf = [W, f] - W\frac{\partial f}{\partial z};$$

donc, comme les u ne contiennent pas z,

$$Xu_h = [W, u_h] = c[z, u_h] + [v, u_h] = -c\sum_i p_i \frac{\partial u_h}{\partial p_i} + (v, u_h).$$

Si en particulier $v = 0$, $c = 1$, on a

$$Xu_h = -\sum_i p_i \frac{\partial u_h}{\partial p_i},$$

en sorte que les conditions pour que le groupe considéré admette la transformation de contact infinitésimale de caractéristique $W = z$ sont

$$\sum_i p_i \frac{\partial u_h}{\partial p_i} = -\varphi_h(u_1, \ldots, u_r) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Mais ce sont là les conditions pour qu'un groupe de fonctions soit dit *homogène* (3ᵉ Partie, nº VII). Nous pouvons donc conclure que :

Un groupe de fonctions des x, p est homogène quand il admet la transformation de contact infinitésimale de caractéristique $W = z$, *et alors seulement.*

Nous avons démontré (3ᵉ Partie, nº VIII) que, étant données r^2 fonctions de r arguments $\Omega_{ik}(u_1, \ldots, u_r)$, satisfaisant à certaines conditions [numéro cité, équations (2), (3)], on peut trouver, pour n suffisamment grand, un système de r fonctions indépendantes $u_1, \ldots, u_r$ de $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ pour lesquelles on ait les relations

$$(u_i, u_k) = \Omega_{ik}(u) \qquad (i, k = 1, \ldots, r).$$

Soit, en particulier,

$$\Omega_{ik}(u) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} u_s \qquad (i, k = 1, \ldots, r);$$

des équations (2), (3) du numéro VIII rappelé, il résulte que

$$\sum_{s=1}^{s=r} (c_{iks} + c_{kis}) u_s = 0,$$

$$\sum_{s,t} (c_{ihs} c_{skt} + c_{hks} c_{sit} + c_{kis} c_{sht}) u_s = 0;$$

d'où, pour que ces relations soient indépendantes des u,

$$\left.\begin{array}{r} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{s=r} (c_{ihs} c_{skt} + c_{hks} c_{sit} + c_{kis} c_{sht}) = 0 \end{array}\right\} \qquad (i, h, k, t = 1, \ldots, r);$$

ce sont les équations (A) et (B) du *troisième théorème fondamental de Lie* (1ʳᵉ Partie, nº XI, p. 67).

Considérons les transformations infinitésimales en x, p

$$A_i f = (u_i, f) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Elles sont indépendantes ; en effet, pour qu'elles ne le fussent pas, il faudrait qu'on eût, en désignant par $c_1, \ldots, c_r$ r constantes,

$$\sum_{i=1}^{i=r} c_i \frac{\partial u_i}{\partial p_h} = \sum_{i=1}^{i=r} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x_h} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, r);$$

en sorte que $\sum_{i=1}^{i=r} c_i u_i$ serait une constante, et les u_i ne seraient pas indépendants. On a ensuite

$$(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_k)f = \Big((u_i, u_k), f\Big) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks}(u_s, f) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} \mathrm{A}_s f.$$

Donc, d'après le second théorème fondamental, les $\mathrm{A}_i f$ sont aptes à engendrer un groupe à r paramètres, et les constantes de structure de ce groupe sont précisément les c_{iks}.

Nous nous trouvons dès lors avoir démontré la *seconde partie* du **Troisième théorème fondamental** de Lie. ∎

X. — Groupes de transformations de contact.

Nous pouvons nous borner à considérer les transformations de contact homogènes, puisque celles-ci, comme nous le savons, ne sont pas moins générales que les autres.

Un groupe à r paramètres de transformations de contact homogènes contient r transformations de contact infinitésimales homogènes (u_i, f) indépendantes entre elles; les fonctions u_i sont homogènes par rapport aux p et linéairement indépendantes. La fonction caractéristique de la transformation de contact infinitésimale la plus générale $\sum_i e_i(u_i, f)$ du groupe est $\sum_i e_i u_i$.

Si l'on pose

$$\mathrm{A}_i f = (u_i, f),$$

on a

$$(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_k)f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} \mathrm{A}_s f,$$

ou

$$\Big((u_i, u_k), f\Big) = \sum_s c_{iks}(u_s, f),$$

ou encore

$$\left((u_i, u_k) - \sum_s c_{iks} u_s, f\right) = 0.$$

Or, on a vu (n° IX, 3° Partie) qu'une transformation homogène se réduit à la transformation identique lorsque sa fonction caractéristique est identiquement nulle, et alors seulement; donc on doit avoir

$$(1) \qquad (u_i, u_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} u_s \qquad (i, k = 1, \ldots, r).$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, on a

$$(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_k)f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} \mathrm{A}_s f.$$

Donc

Pour que les transformations (u_i, f) soient aptes à engendrer un groupe à r paramètres, il faut et il suffit que les u_i ne satisfassent à aucune relation linéaire à coefficients constants et qu'elles vérifient les relations (1).

Il peut arriver que les $u_1, \ldots, u_r$, tout en étant linéairement indépendantes, ne soient cependant pas indépendantes. Supposons par exemple que $u_1, \ldots, u_m$ soient indépendantes, et que les autres u soient fonctions de celles-ci :

$$u_{m+h} = \omega_h(u_1, \ldots, u_m) \qquad (h = 1, \ldots, r - m).$$

On aura alors

$$(u_i, u_k) = \sum_{s=1}^{s=m} c_{iks} u_s + \sum_{s=1}^{s=r-m} c_{ik, m+s} \omega_s(u);$$

en sorte que $u_1, \ldots, u_m$ définiront un groupe m^{uple} homogène de fonctions.

Les invariants du groupe de transformations (u_i, f) sont, par définition (1re Partie, n° IX), les fonctions f telles que, X étant une transformation infinitésimale du groupe, on ait

$$\mathrm{X}f = 0;$$

c'est-à-dire que ce sont les intégrales du système $(u_i, f) = 0$, ou enfin *les fonctions du groupe polaire du groupe de fonctions défini par les* u_i.

Il est évident qu'une transformation de contact homogène change un groupe homogène, à r paramètres, de transformations de contact en un groupe de même nature.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

34133 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

33130 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.