De … nschaften
in unser … nnt wird,
nicht zu … breitung
der Un … Labora-
torien … handenen
Einricht … ltes der
Wissens … n hoch-
stehend … Mangel
hinweis … aftlichen
Ausbild … ies das
Fehler … gel an
Kennt … en das
Gebäu …

Di … assiker
der ex … ndlicher
Form u … handlun-
gen der … Lehren-
den un … dadurch
ein *Unterrichtsmittel* beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein *Forschungsmittel* von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

*Die Klassiker der exakten Wissenschaften* sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der *Mathematik*, *Astronomie*, *Physik*, *Chemie* (einschliesslich *Krystallkunde*) und *Physiologie* enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. *Arthur von Oettingen* (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. *Bruns* (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. *Wangerin* (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. *Groth* (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. *Pfeffer* (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. *Ostwald* (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

## Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss,** Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.



» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{(m \cdot m - 1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

Nr. 78. **J. C. G. Jacobi**, Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.



» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

Alexander Ziwet

# WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG



## (Ars conjectandi)

von

~~JAKOB~~ BERNOULLI, Jacques.

(1713.)

**Dritter und vierter Theil**

mit dem Anhange:

**Brief an einen Freund über das Ballspiel**

(*Jeu de Paume*).

---

Uebersetzt und herausgegeben

von

**R. Haussner.**

Mit 3 Figuren.

(Fig. 1 im Text, Fig. 2 und 3 in den Anmerkungen.)

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1899.

[138]

# Wahrscheinlichkeitsrechnung

(Ars conjectandi)

von

**Jakob Bernoulli.**

Basel 1713.

---

## Dritter Theil.

## Anwendungen der Combinationslehre auf verschiedene Glücks- und Würfelspiele.

---

[139]

### I.

**Aufgabe.** Jemand setzt, nachdem er zwei Steine, einen schwarzen und einen weissen, in eine Urne gelegt hat, für drei Spieler $A$, $B$, $C$ einen Preis aus unter der Bedingung, dass ihn derjenige erhalten soll, welcher zuerst den weissen Stein zieht; wenn aber keiner der drei Spieler den weissen Stein zieht, so erhält auch keiner den Preis. Zuerst zieht $A$ und legt den gezogenen Stein wieder in die Urne, dann thut $B$ als Zweiter das Gleiche, und schliesslich folgt $C$ als Dritter. Welche Hoffnungen haben die drei Spieler?

Lösung. Offenbar ist diese Aufgabe nur ein besonderer Fall des bei Gelegenheit der verallgemeinerten Aufgabe XI in dem ersten Theile gelösten Problems, dessen Lösung auf Seite 37 gegeben worden ist. Es wurden dort die Hoffnungen mehrerer Spieler bestimmt, welche mit gleicher oder ungleicher Anzahl der von den einzelnen hintereinander zu thuenden Würfe ein Vorhaben zu erreichen suchen, und es wurde für die Hoffnung irgend eines Spielers die allgemeine Formel



$$\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$$

gefunden. In dem vorliegenden Falle hat nun der Buchstabe $a$ (die Anzahl aller Fälle) den Werth 2 wegen der zwei Steine, $c$ (die Anzahl der ungünstigen Fälle) den Werth 1 wegen des einen schwarzen Steines, $n$ (die Anzahl der jedem Einzelnen zustehenden Spiele) den Werth 1 für alle drei Spieler und $s$ (die Anzahl aller schon erledigten Spiele) für $A$ den Werth 0, für $B$ den Werth 1 und für $C$ den Werth 2. Die Formel liefert dann für die Hoffnungen von $A$, $B$, $C$ bez. die Werthe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Folglich bleibt für den Veranstalter des Spieles die Hoffnung $\frac{1}{8}$ übrig, dass er seinen ausgesetzten Preis zurückerhält.

[140] II.

**Aufgabe.** Die Spielbedingungen bleiben dieselben wie bei der vorigen Aufgabe; nur verzichtet der Veranstalter des Spieles von vorn herein auf seine Gewinnaussicht zu Gunsten der drei Spieler, welche den Preis unter sich theilen sollen, wenn keiner von ihnen den weissen Stein zieht. Welche Hoffnungen haben jetzt die Spieler?

Lösung. Da jetzt der ganze Anspruch auf den Preis den drei Spielern zusteht, so wird offenbar die Hoffnung jedes Spielers um $\frac{1}{24}$ besser, d. h. um den dritten Theil der Hoffnung, welche in der vorigen Aufgabe dem Veranstalter des Spieles zukam. Addirt man also $\frac{1}{24}$ zu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, so erhält man für die jetzigen Hoffnungen von $A$, $B$, $C$ die Werthe $\frac{13}{24}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{4}{24}$.

III.

**Aufgabe.** Sechs Personen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, betheiligen sich an einem Glücksspiele, dessen Veranstalter den letzten Theilnehmern wohlwollender gesinnt ist, als den ersten: Zuerst sollen $A$ und $B$ allein mit einander spielen; derjenige von ihnen, welcher gewinnt, soll dann mit $C$ spielen. Wer von diesen beiden Spielern gewinnt, soll mit $D$ spielen, und so fort bis zum letzten Spieler $F$. Der Gewinner des letzten Spieles erhält den ausgesetzten Preis. Vorausgesetzt wird dabei, dass in jedem einzelnen Spiele die beiden Theilnehmer gleiche Aussicht auf Gewinn haben. Wie gross sind die Hoffnungen der sechs Spieler?



[141] Lösung. Der erste Spieler $A$ kann den Preis nur dann bekommen, wenn er über die andern fünf Spieler siegt, d. h. wenn er fünfmal hintereinander gewinnt; dasselbe gilt für $B$. Der dritte Spieler $C$ kann nur dann den Preis bekommen, wenn er einen seiner Vorgänger $A$ und $B$ und die drei letzten Spieler besiegt, d. h. wenn er viermal hintereinander gewinnt; $D$ muss, um den Preis zu erhalten, einen seiner drei Vorgänger und seine beiden Nachfolger besiegen, d. h. dreimal hintereinander gewinnen, und ähnlich für die übrigen Spieler. Die Aufgabe ist also ein besonderer Fall der allgemeineren, welche nach den Hoffnungen der Spieler fragte, wenn sie in einer bestimmten Anzahl von einzelnen Spielen irgend etwas bestimmt oft erreichen wollen. Die Lösung dieser allgemeineren Aufgabe habe ich bei der Aufgabe XII im ersten Theile (S. 47) gegeben; nach dieser sind die Hoffnungen von $A$ und $B$ gleich $\frac{b^5}{a^5}$ und die Hoffnungen von $C$, $D$, $E$, $F$ bez. gleich $\frac{b^4}{a^4}$, $\frac{b^3}{c^3}$, $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b}{a}$ sind, wo $a$ die Anzahl aller Fälle und $b$ die Anzahl aller günstigen Fälle in jedem Spiele sind. Da nun ebensoviele Fälle für Gewinn wie für Verlust in jedem Spiele vorhanden sein sollen, so ist $a = 2b$, und folglich haben die sechs Spieler $A$ bis $F$ der Reihe nach die Hoffnungen $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$. Mit Ausnahme der beiden ersten Spieler, welche gleiche Hoffnungen haben, besitzt jeder folgende Spieler eine doppelt so grosse Hoffnung als der ihm vorangehende. Die Summe aller Hoffnungen aber ist, wie es sein muss, gleich 1, dem ausgesetzten Preise.

## IV.

**Aufgabe.** Die sechs Personen spielen in der gleichen Weise, wie bei der vorigen Aufgabe, mit einander; in jedem einzelnen Spiele, mit Ausnahme des ersten, aber haben die beiden Theilnehmer nicht gleiche Gewinnaussichten, sondern jeder Spieler hat, wenn er gegen seinen zweiten Gegner spielt, zweimal, wenn er gegen seinen dritten, bez. vierten Gegner spielt, viermal, bez. achtmal soviele Fälle für Gewinn als für Verlust. Nur $A$ und $B$ spielen also anfangs mit gleichen Gewinnaussichten gegen einander. Erhalten auf diese Weise alle sechs Spieler gleiche Hoffnungen?



[**142**] Lösung. Wegen der verschiedenen Gewinnaussichten bei den einzelnen Spielen gestaltet sich hier die Berechnung etwas verwickelter. Man benutzt am besten die am Schlusse der Aufgabe XII im ersten Theile (S. 47) gegebene Regel und die dort abgeleitete Formel $\frac{beh\cdots}{adg\cdots}$, wo die Buchstaben $b, e, h, \ldots$ die Zahlen der günstigen Fälle und $a, d, g, \ldots$ die aller möglichen Fälle bezeichnen; diese Formel giebt die Hoffnung eines Spielers, welcher eine bestimmte Anzahl aufeinanderfolgender Spiele gewinnen muss, wenn bei jedem Spiele die Zahl der ihm günstigen Fälle nicht die gleiche ist. Die schliessliche Hoffnung $\frac{b}{a}\cdot\frac{e}{d}\cdot\frac{h}{g}\cdots$ entsteht aber offenbar durch Multiplication der einzelnen Hoffnungen, welche der Spieler für das Gewinnen der einzelnen Spiele hat (vergl. Satz III, Zusatz 1 des ersten Theiles).

Um also eine methodische Lösung der vorliegenden Aufgabe zu erhalten, muss man allmählich die Hoffnungen des ersten Spielers $A$ bestimmen, wenn er erst $B$ allein, dann $B$ und $C$, dann drei, vier und schliesslich alle fünf Gegner besiegen will; alle diese Hoffnungen müssen bekannt sein, um die Hoffnungen der anderen Spieler berechnen zu können. Die Hoffnung des $A$, über $B$ zu siegen, ist gleich $\frac{1}{2}$; will $A$ über $B$ und $C$ siegen, so ist seine Hoffnung gleich $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$; will er über $B$, $C$ und $D$ siegen, so ist seine Hoffnung gleich $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$, und wenn er über $B$, $C$, $D$, $E$ siegen will, so hat er die Hoffnung $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}=\frac{32}{135}$. Schliesslich findet man, dass die Hoffnung des $A$, über alle seine Mitspieler zu siegen und also den Preis zu erhalten, gleich ist:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{16}{17}=\frac{512}{2295}.$$

Dieselben Zahlen geben die Hoffnungen, welche $B$ hat, um über $A$, über $A$ und $C$, u. s. w. zu siegen.

$C$ muss mit einem seiner Vorgänger, $A$ oder $B$ spielen — welcher kurzweg mit $P$ bezeichnet werde — und hat die

Hoffnung $\frac{1}{3}$, ihn zu besiegen. Will $C$ auch noch $D$, bez. $D$ und $E$ besiegen, so hat er die Hoffnungen $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, bez. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$. Und schliesslich, um $P$, $D$, $E$, $F$ zu besiegen und den Preis zu gewinnen, hat $C$ die Hoffnung:



$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9} = \frac{64}{405}.$$

[**143**] Muss $D$ mit $C$ spielen, so hat er die Hoffnung $\frac{1}{3}$, über ihn zu siegen; muss er aber mit $A$ oder $B$ spielen, so hat er nur die Gewinnhoffnung $\frac{1}{5}$. Nun hat aber von $A$, $B$ und $C$ jeder dieselbe Hoffnung, nämlich $\frac{1}{3}$, dass an ihn die Reihe kommt, mit $D$ spielen zu müssen; daher kann $D$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden der drei Spieler zum Gegner haben, und folglich ist (nach Satz III des ersten Theiles) seine Hoffnung, diesen vom Zufall ihm gegebenen Gegner zu besiegen, gleich $\dfrac{1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5}}{3} = \frac{11}{45}$. Will $D$ ausserdem noch seinen Nachfolger $E$ besiegen, so hat er die Hoffnung $\frac{11}{45} \cdot \frac{2}{3} = \frac{22}{135}$, und wenn er auch noch $F$ besiegen und den Preis gewinnen will, so hat er die Hoffnung

$$\frac{11}{45} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{88}{675}.$$

In gleicher Weise kann man die Hoffnungen von $E$ und $F$ berechnen; nur ist dabei zu beachten, dass sie beide nicht gleich leicht einen jeden ihrer Vorgänger zum Gegner erhalten können. Denn nach dem Vorhergehenden hat $A$ die Hoffnung $\frac{4}{15} = \frac{12}{45}$, $B$ ebenfalls $\frac{4}{15} = \frac{12}{45}$, $C$ $\frac{2}{9} = \frac{10}{45}$ und $D$ $\frac{11}{45}$, um hintereinander zu gewinnen, bis die Reihe des Spielens an $E$ kommt. Es sind also je 12 Fälle vorhanden, in welchen $E$ mit $A$ oder $B$ spielen muss, 10 Fälle, in welchen er $C$ zum Gegner hat, und 11 Fälle, in welchen ihm $D$ gegenübersteht. [**144**] Folglich ist (nach Satz III des ersten Theiles) die Hoffnung des $E$, den seiner Vorgänger, welchen ihm der Zufall entgegengestellt hat, zu besiegen, gleich $\dfrac{24 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{5} + 11 \cdot \frac{1}{3}}{45} = \frac{5}{27}$. Will $E$ auch noch den letzten Spieler besiegen und den Preis gewinnen, so hat er die Hoffnung

$$\frac{5}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{81}.$$

Um fortgesetzt zu gewinnen, bis die Reihe des Spielens an $F$ kommt, haben die Spieler $A$ bis $E$ die Hoffnungen

$\frac{32}{135}$, $\frac{32}{135}$, $\frac{8}{45} = \frac{24}{135}$, $\frac{22}{135}$, $\frac{25}{135}$; folglich hat $F$ dafür, dass er gegen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ zu spielen hat, bez. 32, 32, 24, 22, 25 Fälle. Daher ist seine Hoffnung, den Preis zu erhalten, gleich



$$\frac{64 \cdot \frac{1}{17} + 24 \cdot \frac{1}{9} + 22 \cdot \frac{1}{5} + 25 \cdot \frac{1}{3}}{135} = \frac{181}{1275}.$$

Bringt[1]) man nun die für die sechs Spieler gefundenen Hoffnungen auf den gemeinsamen Nenner 34425, so ergiebt sich, dass sie sich verhalten wie 7680 : 7680 : 5440 : 4488 : 4250 : 4887. Addirt man die sechs Hoffnungen zu einander, so erhält man 1, was die Richtigkeit der Methode und der Rechnung bestätigt. Die Gewinnhoffnungen für die sechs Spieler sind also nicht gleich.

## V.

**Aufgabe.** $A$ wettet gegen $B$, dass er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von gleicher Farbe sind, vier verschiedenfarbige Karten ziehen wird. Wie verhalten sich die Hoffnungen Beider zu einander?

Lösung. Die Lösung dieser Aufgabe haben wir schon in dem Anhange zu dem ersten Theile (Aufgabe III, S. 70) gegeben. Hier wollen wir zeigen, wie dieselbe mit Hülfe der Combinationslehre gelöst werden kann.

Zu diesem Zwecke untersucht man, wie oft aus 40 Spielkarten je vier gezogen werden können, d. h. wieviele Quaternionen sich aus 40 Dingen bilden lassen. Diese Zahl ist (nach Kap. IV des zweiten Theiles) [**145**] gleich $\binom{40}{4} = 91390$, und ebensoviele gleich mögliche Fälle des Spieles sind vorhanden. Unter diesen befinden sich aber 10000 Fälle, welche die Spielbedingung erfüllen und aus jeder Farbe eine und nur eine Karte liefern, was sich folgendermaassen zeigen lässt.

Statt der vier Sorten von Kartenblättern nehme ich vier Würfel an, deren jeder 10 Flächen, entsprechend den 10 Karten jeder Farbe, besitzt. Dann sind mit diesen Würfeln ebensoviele verschiedene Würfe möglich, als es Quaternionen von den 40 Karten giebt, welche die gestellte Bedingung erfüllen; denn ebenso, wie von jeder Farbe nur eine Karte gezogen sein soll, zeigt bei jedem Wurfe jeder einzelne Würfel eine und nur eine Fläche oben. Aus der von *Huygens* der Aufgabe X des ersten Theiles vorangeschickten Untersuchung lässt sich entnehmen, dass mit den vier gleichen Würfeln $10^4 = 10000$ Würfe möglich sind.



Da nun ebensoviele Fälle für $A$ günstig sind, während die übrigen 81390 Fälle für $B$ günstig sind, so verhält sich die Hoffnung des $A$ zu der des $B$ wie 10000 zu 81390 oder wie 1000 zu 8139.

## VI.

**Aufgabe.** In einer Urne befinden sich 12 Steine. 4 weisse und 8 schwarze. $A$ wettet gegen $B$, dass er blindlings 7 Steine, von welchen 3 weisse sein sollen, herausziehen wird. Wie verhalten sich die Hoffnungen Beider zu einander?

Lösung. Diese Aufgabe ist die vierte der von *Huygens* im Anhange zum ersten Theile (S. 71) gestellten Aufgaben; wir hatten ihre Lösung auf diesen Theil verschieben müssen, weil sich dieselbe ohne Hülfe der Combinationslehre nur schwer hätte geben lassen.

Die Anzahl der hier möglichen Fälle ist offenbar gleich der Anzahl aller Combinationen von 12 Dingen zu der $7^{\text{ten}}$ Classe, [**146**] d. i. gleich $\binom{12}{7} = \binom{12}{5} = 792$. Fragt man nun weiter, wieviele dieser Fälle für $A$ günstig und wieviele ungünstig sind, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn man fragt, in wievielen dieser Combinationen zu der $7^{\text{ten}}$ Classe sich von 4 bezeichneten Dingen 3 beliebige, aber ohne das vierte finden lassen; die Lösung dieser Frage ist in Kap. IV des zweiten Theiles (S. 105) durch die allgemeine Formel:

$$\binom{m}{b}\binom{n-m}{c-b}$$

gegeben, wo $n$ die Anzahl der zu combinirenden Dinge, $m$ die Zahl der bezeichneten Dinge und $b$ die Anzahl der letzteren, welche in den Combinationen zu der $c^{\text{ten}}$ Classe zusammen vorkommen sollen, bezeichnet. Setzt man also $n = 12$, $c = 7$, $m = 4$, $b = 3$, so erhält man $\binom{4}{3}\binom{8}{4} = 4 \cdot 70 = 280$ Fälle, in welchen $A$ drei und nur drei weisse Steine zieht und mithin gewinnt. Die übrigen 512 Fälle sind für $B$ günstig, und folglich verhält sich die Hoffnung des $A$ zu der des $B$ wie 280 zu 512 oder wie 35 : 64.



Hierbei ist zu beachten, dass $A$ nur 3 weisse Steine — nicht mehr und nicht weniger — herausziehen soll. Wäre der Sinn der Aufgabe, dass $A$ mindestens 3 weisse Steine herausnehmen soll, aber auch noch gewinnen würde, wenn er alle vier weissen Steine zieht, so ist die Anzahl der für $A$ günstigen Fälle um die Zahl der Combinationen zu der 7ten Classe grösser, in welchen alle vier weissen Steine vorkommen. Setzt man in der obigen Formel $m = b = 4$, so findet man diese Zahl gleich $\binom{8}{3} = 56$, und addirt man diese Zahl zu 280, so hat man jetzt 336 für $A$ günstige und 456 für $B$ günstige Fälle. Folglich verhält sich bei dieser Annahme die Hoffnung des $A$ zu der des $B$ wie 336 zu 456 oder wie 14 : 19.

## VII.

**Aufgabe.** Beliebig viele Spieler $A$, $B$, $C$, ... heben von einem Haufen Spielkarten, von welchen eine durch ein Bild ausgezeichnet ist, [147] während die anderen ohne Bilder (cartes blanches) sind, die Blätter der Reihe nach ab; derjenige Spieler hat gewonnen, welcher die ausgezeichnete Karte abhebt. $A$ beginnt, dann folgt $B$, auf diesen $C$ und so fort bis zum letzten Spieler; nach diesem kommt die Reihe zu ziehen wieder an $A$ und so fort bis zur Beendigung des Spieles. Wie verhalten sich die Hoffnungen der Spieltheilnehmer?

Lösung. Offenbar sind ebenso viele Fälle überhaupt möglich, als Kartenblätter vorhanden sind, da die ausgezeichnete Karte sowohl an erster, als an zweiter, als an dritter, ... Stelle liegen kann. Jeder Spieler hat daher ebenso viele günstige Fälle, als er Blätter aufheben kann.

Wenn die Zahl der Karten ohne Rest durch die Zahl der Spieler getheilt werden kann, so erhalten alle Spieler die gleiche Anzahl Karten, und folglich sind die Hoffnungen aller gleich. Ist also $a$ die Anzahl der Spieler und $ma$ die der Karten, so erhält jeder Spieler $m$ Karten, welche ihm die Hoffnung $\frac{m}{ma} = \frac{1}{a}$ geben; die Reihenfolge des Aufhebens bringt in diesem Falle keinem Spieler einen Vortheil.

Wenn aber die Zahl der Karten nicht ohne Rest durch die Zahl der Spieler getheilt werden kann, so erhalten nicht alle Spieler dieselbe Anzahl Karten, und folglich sind auch ihre Hoffnungen nicht sämmtlich einander gleich. Ist jetzt die Anzahl der Karten gleich $ma + b$, wo $b < a$ ist, so entfallen auf jeden der ersten $b$ Spieler $m + 1$ Karten und auf jeden der übrigen nur $m$ Karten; es verhält sich also die Hoffnung eines der ersteren Spieler zu der Hoffnung eines der letzteren wie $m + 1$ zu $m$. Z. B.: Für $a = 10$, $ma + b = 64 = 6\ (10 + 4)$ verhält sich die Hoffnung eines der ersten vier Spieler zu der Hoffnung eines der letzten sechs wie 7 zu 6.



[148]

## VIII.

**Aufgabe.** Das Spiel geht in der gleichen Weise, wie bei der vorigen Aufgabe, vor sich. In dem Haufen Spielkarten befinden sich aber mehrere mit Bildern bezeichnete Blätter, und derjenige Spieler hat gewonnen, welcher die erste mit einem Bilde bezeichnete Karte zieht. Wie verhalten sich die Hoffnungen der Spieler zu einander?

Lösung. Hier sind die Hoffnungen der Spieler nicht einander gleich, sondern jeder vorhergehende Spieler hat bessere Gewinnaussicht als irgend einer seiner Nachfolger — gleichgültig ob die Zahl der Karten ohne Rest durch die Anzahl der Spieler getheilt werden kann oder nicht — und zwar aus dem Grunde, weil die erste bezeichnete Karte, welche allein den Sieg verleiht, leichter an erster als an zweiter Stelle und wieder leichter an zweiter als an dritter Stelle u. s. w. liegen kann. Denn je weiter vorn diese erste Karte liegt, um so mehr Plätze sind für die andern bezeichneten Karten hinter ihr übrig. Da das Verfahren immer das gleiche bleibt, so wollen wir annehmen, dass unter 12 Karten sich 4 mit Bildern versehene befinden.

Liegt die erste Bildkarte an erster Stelle, so bleiben für die drei andern Bildkarten 11 Plätze, da nun diese drei Karten an beliebigen drei von diesen elf Plätzen liegen können, so entstehen ebensoviele Fälle als es Ternionen von 11 Dingen giebt, also $\binom{11}{3} = 165$. Wenn die erste Bildkarte an zweiter Stelle liegt, so nehmen die drei andern drei beliebige von den 10 übrigen Plätzen ein; hieraus ergeben sich ebensoviele Fälle, als es Ternionen von 10 Dingen giebt, also $\binom{10}{3} = 120$. Nimmt die erste Bildkarte die dritte Stelle ein, so bleiben für die übrigen noch 9 Plätze übrig, woraus sich $\binom{9}{3} = 84$ Fälle ergeben. So fährt man fort und erhält die Zahlen der folgenden Tafel, deren erste Zeile die Reihenfolge angiebt, in welcher drei Spieler $A$, $B$, $C$ abwechselnd ziehen, deren zweite Zeile den Platz der ersten ausgezeichneten Karte und deren dritte Zeile die Zahl der Fälle angiebt, welche dem darüberstehenden Platze dieser ersten Karte entsprechen. [**149**] Diese Fälle sind durch die Ternionen von 11, 10, 9 ... Dingen bestimmt; sie würden durch die Binionen, bez. Unionen dieser Dinge bestimmt sein, wenn nur 3, bez. 2 Bildkarten vorhanden wären.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reihenfolge der Spieler: | *A.* | *B.* | *C.* | *A.* | *B.* | *C.* | *A.* | *B.* | *C.* | *A.* | *B.* | *C.* |
| Platz der ersten Bildkarte: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Anzahl der Fälle: | 165 | 120 | 84 | 56 | 35 | 20 | 10 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Alle diese Fälle aber können gleich leicht eintreten, und ihre Summe ist gleich der Anzahl der Quaternionen von 12 Dingen: $\binom{12}{4} = 495$. Jeder dieser Fälle schliesst eine sehr grosse Anzahl von anderen, secundären Fällen in sich, welche durch Umstellung der vier bezeichneten Blätter und der acht nicht bezeichneten unter sich entstehen. Jeder dieser secundären Fälle kann ebenso leicht wie der primäre Fall eintreten, und zu jedem der letzteren Fälle gehören gleich viele secundäre, nämlich (nach Kapitel I des zweiten Theiles) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 24 \cdot 40320 = 967680$ Fälle. Die Zahlen der dritten Zeile der obigen Tafel würden daher mit dieser Zahl zu multipliciren sein, um alle Fälle zu erhalten; bei der Bestimmung der Hoffnungen von $A$, $B$, $C$ aber können Zähler und Nenner durch diese Zahl gekürzt werden, und folglich können (nach Satz III, Zusatz 2 des ersten Theiles) die obigen Zahlen der Fälle ohne weiteres benutzt werden.

Um nun die Hoffnungen der drei Spieler zu finden, hat man zunächst die jedem Spieler zugeordneten Zahlen der Fälle zu addiren, um die ihm günstigen Fälle zu finden; es sind also günstig für $A$: $165 + 56 + 10 = 231$ Fälle, für $B$: $120 + 35 + 4 = 159$ Fälle und für $C$: $84 + 20 + 1 = 105$ Fälle. Daher verhalten sich die Hoffnungen der drei Spieler zu einander wie $231 : 159 : 105 = 77 : 53 : 35$.

Wie noch bemerkt sein mag, ist diese Aufgabe identisch mit der zweiten *Huygens*'schen Aufgabe im Anhange zum ersten Theile (S. 63); statt der Steine sind hier nur Spielkarten genommen. Auf welche Weise die Lösung jener Aufgabe, anders als früher, mit Hülfe der Combinationslehre gefunden werden kann, haben wir soeben gezeigt. Verwickelter als diese ist die folgende Aufgabe.

[150] **IX.**

**Aufgabe.** Die Anordnung des Spieles bleibt die gleiche wie bei der vorigen Aufgabe. Die Spieler sind aber dahin übereingekommen, dass derjenige gewinnt, welcher die meisten Bildkarten zieht. Wenn zwei oder mehr Spieler die gleiche Anzahl Bildkarten ziehen, so sollen sie den Einsatz gleichmässig unter sich theilen, während alle übrigen Spieler, welche eine kleinere Anzahl Bildkarten ziehen, nichts erhalten. Wie verhalten sich die Hoffnungen der einzelnen Spieler zu einander?

Lösung. Wenn die Anzahl der Karten ein genaues Vielfache der Anzahl der Spieler ist, so bedarf es keiner besonderen Bestimmung der verschiedenen Fälle; ohne jede Rechnung vielmehr ist klar, dass — wie gross auch jede von beiden Zahlen und die Zahl der Bildkarten sein mag — die Hoffnungen der einzelnen Spieler gleich sein müssen. Da nämlich jedem derselben die gleiche Anzahl Karten zufällt, und da jede Bildkarte an einer beliebigen Stelle liegen kann, so ist kein Grund vorhanden, warum ein Spieler mehr oder weniger Bildkarten als ein anderer von vornherein erwarten sollte.

Wenn aber die Anzahl der Karten kein genaues Vielfache der Anzahl der Spieler ist, oder auch wenn nicht allen Spielern die gleiche Anzahl Karten zu ziehen gestattet ist (wobei die Karten entweder abwechselnd von den einzelnen Spielern oder in der jedem Spieler zugestandenen Anzahl auf einmal von diesem gezogen werden können, da die Reihenfolge hier nicht von

Einfluss ist), so sind ihre Hoffnungen sicher einander nicht gleich und um so schwieriger zu ermitteln, je grösser die Zahl sowohl der Spieler als auch der Bildkarten ist.



Sind nur zwei Bildkarten vorhanden, so verhalten sich für beliebig viele Spieltheilnehmer ihre Hoffnungen wie die Zahlen der Karten, welche jeder einzelne ziehen darf (also genau wie in der Aufgabe VII, wo nur eine bezeichnete Karte vorhanden war). Es mag $a$ die Anzahl aller Karten bezeichnen, von welchen der erste Spieler $b$, der zweite $c$, der dritte $d$ Karten ziehen darf. Dann ist zu bedenken, dass unter den $b$ Karten des ersten Spielers [151] sich keine, eine oder beide Bildkarten befinden können. Ist nur eine Bildkarte darunter, so kann sie den ersten oder zweiten oder dritten . . . Platz unter diesen $b$ Karten einnehmen, während die andere Bildkarte an jeder beliebigen der übrigen $a - b$ Stellen liegen kann; dies giebt also $b(a - b)$ Fälle. Kommen beide Bildkarten unter den Karten des ersten Spielers vor, so nehmen diese entweder den 1. und 2. oder den 1. und 3. oder den 2. und 3. . . . Platz ein; daraus ergeben sich so viele verschiedene Fälle, als es Binionen von $b$ Dingen giebt, nämlich $\binom{b}{2} = \frac{b^2 - b}{2}$. Aus dem gleichen Grunde ist die Anzahl aller möglichen Fälle gleich der Anzahl der Binionen aus allen $a$ Karten, d. i. gleich $\binom{a}{2} = \frac{a^2 - a}{2}$, wohlverstanden mit Vernachlässigung der secundären Fälle, welche sich durch blosse Vertauschung der beiden Bildkarten unter sich und der nicht bezeichneten unter sich ergeben, da zu allen primären Fällen die gleiche Anzahl secundärer Fälle gehören. Dies ist auch weiter unten, bei der folgenden Aufgabe und ähnlichen anderen Beispielen immer zu beachten, wenn es auch nicht ausdrücklich hervorgehoben wird. Nun erhält der erste Spieler laut der getroffenen Uebereinkunft den halben Spieleinsatz, wenn er eine Bildkarte gezogen hat, und den ganzen Einsatz, wenn ihm beide Bildkarten zugefallen sind. Er hat mithin $ab - b^2$ Fälle für $\frac{1}{2}$, $\frac{b^2 - b}{2}$ Fälle für 1 und die übrigen Fälle, welche die Summe der beiden vorhergehenden Arten von Fällen zu $\frac{a^2 - a}{2}$ ergänzen, für nichts. Daher ist seine Hoffnung gleich $\frac{\frac{1}{2}(ab - b^2) + \frac{1}{2}(b^2 - b)}{\frac{1}{2}(a^2 - a)} = \frac{b}{a}$. Auf gleiche Weise findet man für die Hoffnungen der beiden andern Spieler, welchen $c$ und $d$ Karten zu ziehen gestattet sind, die Werthe $\frac{c}{a}$ und $\frac{d}{a}$. Die Hoffnungen der drei Spieler verhalten sich also wie $b : c : d$, d. h. wie die Zahlen der Karten, welche ihnen zu ziehen gestattet sind.

Von diesem Falle abgesehen, wird die Rechnung ermüdender und langweiliger, besonders bei einer grösseren Anzahl von Bildkarten und von Spielern, wo die vielfache Mannigfaltigkeit von Combinationen nur schwer unter eine allgemeine Regel gebracht werden kann. Das Verfahren ist indessen immer dasselbe und besteht darin, dass man zunächst erforscht, in wie verschiedenartiger Weise die Bildkarten unter die Spieler vertheilt sein können, d. h. auf wieviele möglichen Arten die Zahl der Bildkarten in soviele Summanden, als es Spieler sind, **[152]** zerlegt werden kann, wobei kein Summand grösser sein darf, als die dem betreffenden Spieler zustehende Zahl von Karten. (Dies lässt sich etwa in der Weise bewirken, welche wir früher [erster Theil, S. 21]) benutzt haben, um zu bestimmen, mit wievielen Würfen eine bestimmte Anzahl Augen mit einer gegebenen Zahl von Würfeln geworfen werden kann; nur muss hier auch die Null als Summand zugelassen werden, da es stets möglich ist, dass der eine oder der andere Spieler keine der Bildkarten erhält.) Darauf hat man die Anzahl der Fälle zu bestimmen, welche jeder einzelnen Zerlegung entsprechen; diese Zahl ist gleich dem Producte der Combinationszahlen von so vielen Dingen, als jeder Spieler Karten hat, zu der Classe, welche mit der Zahl der darunter enthaltenen Bildkarten übereinstimmt. Wenn z. B. von 40 Karten, unter denen 10 mit Bildern versehene sind, einer der Spieler 16, ein zweiter 10, ein dritter 8 und der vierte 6 Karten gezogen hat, und man fragt, in wievielen Fällen der erste 4, der zweite und dritte je 3, der vierte Spieler 0 Bildkarten unter den seinigen haben kann, so hat man das Product der Anzahl der Quaternionen von 16 Dingen, der Ternionen von 10, bez. 8 Dingen und der Nullion von 6 Dingen zu bilden, was $\binom{16}{4}\binom{10}{3}\binom{8}{3}\binom{6}{0}$ $= 1820 \cdot 120 \cdot 56 \cdot 1 = 12\,230\,400$ Fälle ergiebt.

Da aber bei der Lösung einer bestimmten Aufgabe sich zuweilen die Rechnung bedeutend abkürzen lässt, so ist es am zweckmässigsten, das ganze Verfahren an einem speciellen Beispiele zu erläutern. Es sollen 20 Karten, von denen 10 mit Bildern versehen sind, abwechselnd unter drei Spieler $A$, $B$, $C$ vertheilt werden, sodass also der erste und zweite Spieler je 7, der dritte aber nur 6 Kartenblätter erhält; welche Gewinnhoffnungen haben die drei Spieler? — Unter den 7 Karten des $A$ können sich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 Bildkarten befinden; $A$ muss unbedingt verlieren, wenn er nur 0, 1, 2 oder 3 Bildkarten unter den seinigen hat, da dann einer der beiden andern Spieler mehr als 3 Bildkarten haben und mithin nach der getroffenen Uebereinkunft gewinnen muss. Deshalb kann man sich ersparen, auf die Zahl dieser Fälle näher einzugehen, und sofort annehmen, dass $A$ vier Bildkarten zieht; dann können einem der beiden andern Spieler 6, 5 oder weniger mit Bildern bezeichnete Karten zufallen. Da aber $A$ verliert, sobald einem seiner Mitspieler 6 oder 5 Bildkarten zufallen, so kann man auch diese beiden Fälle übergehen und sogleich die Fälle erledigen, dass $B$ 4 und $C$ 2 oder $B$ 2 und $C$ 4 oder schliesslich $B$ 3 und $C$ 3 Bildkarten erhält. Die beiden ersteren Fälle lassen $A$ den halben Einsatz gewinnen, [**153**] während der letzte Fall ihm den ganzen Einsatz einbringt[2]). Nach der im vorigen Abschnitte gegebenen Regel giebt es 18375, 11025 und 24500 Fälle, welche den drei Spielern $A$, $B$, $C$ bez. 4, 4, 2; 4, 2, 4 und 4, 3, 3 Bildkarten zufallen lassen. Ferner muss man annehmen, dass dem Spieler $A$ 5 und entweder $B$ allein 5, $C$ 0 oder $B$ 0, $C$ 5 Bildkarten zufallen; diese Möglichkeiten können in 441, bez. 126 Fällen eintreten und in allen diesen 567 Fällen erhält $A$ nur den halben Einsatz. Ebenso könnte man auch die Anzahl der Fälle berechnen, in welchen $A$ 5 Bildkarten erhält, während dem einen seiner Mitspieler 4 und dem andern 1 oder dem einen 3 und dem andern 2 derartige Karten zukommen; man kann aber schneller zum Ziele gelangen, ohne so weit in das Einzelne gehen zu müssen. Man kann nämlich an Stelle von $B$ und $C$ einen Spieler annehmen, welcher 13 Karten — soviel als $B$ und $C$ zusammen — ziehen darf und 5 mit Bildern bezeichnete darunter erhält; es ergeben sich dann $\binom{7}{5}\binom{13}{5} = 27027$ Fälle, in welchen $A$ 5 und $B$ und $C$ zusammen 5 Bildkarten erhalten. Von diesen sind aber die 567 Fälle zu subtrahiren, in welchen $B$ allein oder $C$ allein die 5 übrigen Bildkarten erhält; es bleiben also 26460 Fälle, in welchen $A$ mehr Bildkarten hat als einer seiner Mitspieler und folglich den ganzen Einsatz gewinnt. Wenn $A$ schliesslich 6 oder 7 Bildkarten erhält, so gewinnt er unbedingt, da er dann schon mehr als die Hälfte der mit Bildern bezeichneten Karten hat. Deshalb kann man wieder die specielle Vertheilung der übrigen 4 oder 3 Bildkarten unter $B$ und $C$ vernachlässigen und annehmen, dass einem Spieler, welcher 13 Karten ziehen darf, 4, bez. 3 mit Bildern bezeichnete zufallen; daraus ergeben sich 5005, bez. 286 Fälle, in welchen $A$ den vollen Einsatz gewinnt. In der folgenden Tafel sind die Gewinnaussichten des $A$ zusammengestellt.

[154]

| | $A$ | $B$ | $C$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl aller Karten: | 7 | 7 | 6 | Fälle | für |
| Anzahl der Bildkarten: | 4 | 4 | 2 | 18375 | $\frac{1}{2}$ |
| | 4 | 2 | 4 | 11025 | $\frac{1}{2}$ |
| | 4 | 3 | 3 | 24500 | 1 |
| | 5 | 5 | 0 | 441 | $\frac{1}{2}$ |
| | 5 | 0 | 5 | 126 | $\frac{1}{2}$ |
| | 5 | 5 | | 26460 | 1 |
| | 6 | 4 | | 5005 | 1 |
| | 7 | 3 | | 286 | 1 |

Addirt man hierauf die Zahlen aller Fälle, welche den Spieler $A$ den ganzen Einsatz gewinnen lassen, und dann die Zahlen aller Fälle, welche ihm den halben Einsatz gewähren, so erhält man 56251 Fälle für 1 und 29967 Fälle für $\frac{1}{2}$. Die Anzahl aller Fälle, welche für die 10 bezeichneten Karten unter allen 20 Karten möglich sind, ist gleich $\binom{20}{10} = 184756$. Folglich ergiebt sich für $A$ die Gewinnhoffnung $\frac{142469}{369512}$; $B$ hat dieselbe Gewinnhoffnung, da ihm ebenfalls 7 von allen 20 Karten zukommen. Für $C$ bleibt mithin die Gewinnhoffnung $\frac{84574}{369512}$ übrig, welche auch direct, auf gleiche Weise hätte ausgerechnet werden können. Die Hoffnungen der beiden ersten Spieler verhalten sich daher zu der des letzten wie

142469 zu 84574; dieses Verhältniss ist viel grösser als 7 zu 6, d. i. als das Verhältniss der den Spielern zufallenden Karten.



## X.

**Aufgabe.** Vier Spieler *A*, *B*, *C*, *D* spielen unter denselben Bedingungen, wie in der vorigen Aufgabe, indem sie abwechselnd aus einem Haufen von 36 Karten, unter denen 16 mit Bildern bezeichnete sind, je eine Karte ziehen. Nachdem 23 Karten gezogen sind, hat *A* vier, *B* drei, *C* zwei Bildkarten und *D* nur eine Bildkarte erhalten, sodass also noch 13 Karten, worunter 6 mit Bildern bezeichnete, vorhanden sind. Der vierte Spieler *D*, welcher die nächste Karte zu ziehen hat, [**155**] sieht, dass für ihn fast jede Aussicht auf Gewinn dahin ist, und will sein Anrecht irgend einem Andern verkaufen. Welcher Preis ist angemessen und welche Hoffnungen haben in diesem Augenblicke die einzelnen Spieler?

Lösung. Die Aufgabe unterscheidet sich von der vorhergehenden nur dadurch, dass die Spieler bereits eine Zeit lang das Spiel betrieben haben. Da nach der Annahme noch 13 Karten übrig sind und *D* am Zuge ist, so fallen auf *D* noch 4, auf jeden der drei andern Spieler noch 3 Karten; es kann also *D* höchstens noch 4 und jeder der andern Spieler höchstens noch 3 Bildkarten erhalten. Dies ist im Auge zu behalten, wenn man alle möglichen Arten, wie die noch übrigen 6 Bildkarten unter die vier Spieler vertheilt sein können, ermitteln und die zugehörige Anzahl der Fälle bestimmen will, was genau so wie bei der vorigen Aufgabe geschieht. Die Zahlen, welche die Vertheilung der noch übrigen 6 Bildkarten unter die vier Spieler *D*, *A*, *B*, *C* angeben, hat man noch bez. um die Zahlen 1, 4, 3, 2 (d. h. um die Zahl der Bildkarten, welche jeder der Spieler besitzt, ehe *D* sein Anrecht verkauft) zu vergrössern, um die Vertheilungsarten aller 16 Bildkarten, von welchen die Grösse des den einzelnen Spielern zufallenden Gewinnantheiles abhängt, zu erhalten.

Addirt man hierauf alle Fälle, welche einem der Spieler den vollen Einsatz bringen, dann die Fälle, welche ihn den halben, den dritten und den vierten Theil des Einsatzes gewinnen lassen, so erhält man für die vier Spieler die folgenden Zahlen[3]):



| | Anzahl der Fälle, welche | | | |
|---|---|---|---|---|
| den Spielern | *A* | *B* | *C* | *D* |
| von dem Einsatze zukommen lassen: | | | | |
| 1 | 1035 | 188 | 22 | 12 |
| $\frac{1}{2}$ | 399 | 342 | 66 | 21 |
| $\frac{1}{3}$ | 9 | 9 | 9 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 36 | 36 | 36 | 36 |
| 0 | 237 | 1141 | 1583 | 1647 |
| Summe aller Fälle: | 1716 | 1716 | 1716 | 1716 |

[**156**] Die Anzahl aller möglichen Fälle ist $\binom{13}{6} = 1716$. Folglich erhält man (nach Satz III nebst Zusätzen des ersten Theiles) für die gesuchten Gewinnhoffnungen der vier Spieler $A$, $B$, $C$, $D$ in dem Augenblicke, ehe $D$ sein Anrecht verkauft, die Werthe

$$\frac{2493}{3432},\ \frac{742}{3432},\ \frac{134}{3432},\ \frac{63}{3432},$$

sodass sich die Hoffnungen zu einander verhalten wie

$$2493 : 742 : 134 : 63.$$

Der von $D$ für sein Anrecht zu fordernde Preis ist daher $\frac{63}{3432}$ des ganzen Spieleinsatzes.

Anmerkung. Wäre die Anzahl der noch übrigen Karten nicht so gering und also die Zahl der Fälle nicht so leicht aufzufinden gewesen, so hätte man mit Vortheil das bei der vorigen Aufgabe benutzte abkürzende Verfahren anwenden können; besonders empfiehlt sich dies, wenn nur die Hoffnung des $D$ zu bestimmen gewesen wäre. Dann hätte man nämlich alle Vertheilungsarten der noch übrigen 6 bezeichneten Karten, bei welchen $D$ nicht mehr als 2, also im ganzen (mit Einschluss der einen Bildkarte, welche er schon hat) nicht mehr als 3 Bildkarten erhält, übergehen können und von den übrigen nur die zu betrachten brauchen, welche keinem der andern Spieler mehr Karten als $D$ zukommen lassen; denn in allen diesen Fällen geht $D$ des ganzen Einsatzes verlustig. Es ergeben sich somit die folgenden Fälle:

[157]



| Vertheilung der 6 Bildkarten unter | | | | Anzahl der Fälle | Vertheilung aller 16 Bildkarten unter | | | | *D* zufallender Gewinnantheil |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *D* | *A* | *B* | *C* | | *D* | *A* | *B* | *C* | |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 36 | 4 | 4 | 4 | 4 | $\frac{1}{4}$ |
| 4 | 0 | 2 | 0 | 3 | 5 | 4 | 5 | 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 4 | 0 | 0 | 2 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 9 | 5 | 5 | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 9 | 5 | 5 | 3 | 3 | $\frac{1}{2}$ |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 9 | 5 | 4 | 4 | 3 | 1 |

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Aufgabe ganz dieselbe ist, wenn man statt der Spielkarten Steine, Papierstreifen oder ähnliche Dinge, von denen einige bezeichnet sind und die übrigen nicht, in einem Kästchen oder in einer Urne verbirgt und von beliebig vielen Spielern daraus jeden eine bestimmte Anzahl, entweder auf einmal oder abwechselnd mit den anderen Spielern, ziehen lässt; wer am meisten bezeichnete Dinge gezogen hat, soll Sieger sein und den vollen Einsatz erhalten. Die Art der Berechnung ist immer dieselbe, und es thut auch nichts zur Sache, ob die Dinge abwechselnd von den einzelnen Spielern genommen werden oder nicht.

[158]

## XI.

**Aufgabe.** Jemand will mit einem gewöhnlichen Würfel auf 6 Würfe erreichen, dass alle sechs Würfelflächen nach oben zu liegen kommen; es soll also jede Augenzahl einmal und keine zweimal erscheinen. Wie gross ist seine Hoffnung?

Lösung. Für jeden Wurf sind entsprechend den 6 Flächen des Würfels 6 Fälle möglich. Keiner dieser Fälle ist für den Spieler bei dem ersten Wurfe ungünstig. Bei dem zweiten Wurfe darf die mit dem ersten Wurfe erreichte Augenzahl nicht wiederkehren; es sind also dem Spieler noch 5 Fälle günstig. Bei dem dritten Wurfe schaden ihm die Augenzahlen der beiden vorigen Würfe, und es sind nur die übrigen vier noch günstig. Ebenso findet man, dass der Spieler beim vierten, fünften, sechsten Wurfe bez. noch 3, 2, 1 günstige Fälle hat. Die Aufgabe kommt also darauf hinaus, die Hoffnung eines Spielers zu bestimmen, welcher sechsmal hintereinander etwas erreichen will, wenn bei jedem einzelnen Male 6 Fälle überhaupt vorhanden sind, von denen ihm beim ersten Male 6, beim zweiten Male 5, u. s. w. günstig sind. Dafür ist (am Schlusse der Aufgabe XII des ersten Theiles, Seite 47) allgemein der Ausdruck $\frac{beh\ldots}{adg\ldots}$ gefunden worden; hier haben $b$, $e$, $h$, ... bez. die Werthe 6, 5, 4, ..., und $a$, $d$, $g$, ... sämmtlich den Werth 6. Daraus folgt für die gesuchte Hoffnung: $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^6}=\frac{5}{324}$.

## XII.

**Aufgabe.** Jemand will mit 6 Würfen die 6 Flächen eines Würfels der Reihe nach werfen, sodass er mit dem ersten Wurfe ein Auge, mit dem zweiten zwei Augen, u. s. w. erzielt. Wie gross ist seine Hoffnung?

Lösung. Da die sechs Flächen der Reihe nach obenauf zu liegen kommen sollen, so hat der Spieler bei jedem einzelnen Wurf nur einen ihm günstigen Fall. Hier haben also die Buchstaben $b$, $e$, $h$, ... sämmtlich den Werth 1, und die gesuchte Hoffnung ist gleich $\frac{1}{6^6}=\frac{1}{46656}$.

[159]

## XIII.

**Aufgabe.** Drei Spieler $A$, $B$, $C$, von welchen jeder die Zahlen 1 bis 6 vor sich hingeschrieben hat, spielen abwechselnd mit einem Würfel unter der Bedingung, dass jeder die von ihm geworfene Augenzahl aus seinen hingeschriebenen Zahlen streicht; ist die geworfene Zahl aber schon gestrichen, so setzt der nächstfolgende das Spiel fort, bis einer der Spieler zuerst alle sechs Zahlen gestrichen hat. Nachdem das Spiel eine Zeit lang betrieben ist, hat $A$ noch 2, $B$ noch 4 und $C$ noch 3 Zahlen nicht gestrichen; an $A$ ist die Reihe zu würfeln. Wie gross sind die Hoffnungen der drei Spieler?

Lösung. Diese Aufgabe fordert zu ihrer Lösung mehr Mühe und Geduld, als Scharfsinn; denn wegen der grossen Mannigfaltigkeit der Fälle wachsen die Zahlen in das Ungeheuerliche. Ich weiss keinen besseren Ausweg, das Verfahren abzukürzen, als von den sich bei jedem Wurfe ändernden Hoffnungen der Spieler nur die zu bestimmen, welche $A$, $B$ und $C$ nach je 3 Würfen haben, wenn die Reihe zu spielen wieder an $A$ ist. Zu dem Zwecke ist zu bedenken, dass, wenn jeder der Spieler einen Wurf thut, entweder kein oder ein oder zwei oder alle drei Spieler eine ihrer noch nicht gestrichenen Zahlen werfen. In wievielen Fällen aber jede dieser Möglichkeiten eintreten kann, lässt sich mit Hülfe der am Schlusse von der Aufgabe XII des ersten Theiles gegebenen Regel ermitteln, in welcher an Stelle von $b$, $e$, $h$ die Anzahl der von den Spielern $A$, $B$, $C$ noch nicht gestrichenen Zahlen, an Stelle von $c$, $f$, $i$ die Anzahl der bereits ausgestrichenen und $b + c = e + f = h + i = a = 6$ zu setzen ist. Nach dieser Regel ist die Anzahl aller Fälle, in welchen keiner der Spieler eine Zahl streichen kann, gleich $cfi$, und die Anzahl aller Fälle, in welchen $A$ allein eine Zahl streichen kann, gleich $bfi$, und so fort, wie in der folgenden Tafel angegeben ist.

[160] Die Anzahl der Fälle, in welchen eine Zahl gestrichen werden kann von

| | Keinem. | $A$. | $B$. | $C$. | $A.\&B.$ | $A.\&C.$ | $B.\&C.$ | $A.,B.\&C.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ist gleich: | $cfi$ | $bfi$ | $cei$ | $cfh$ | $bei$ | $bfh$ | $ceh$ | $beh$. |

Die Zahl aller Fälle aber ist $a^3 = 6^3 = 216$, und da die Fälle, in welchen die Hoffnungen der Spieler unverändert bleiben (nach Satz III, Zusatz 4 im ersten Theile), nicht berücksichtigt zu werden brauchen, so ist die Zahl aller andern Fälle gleich $a^3 - cfi$.

Nun berechnet man die Hoffnungen der Spieler für alle Fälle, welche eintreten könnten, wenn das Spiel bis zum Ende fortgesetzt würde. Hierbei muss man mit dem einfachsten Falle beginnen und zu allen folgenden in der unten angegebenen Ordnung fortschreiten, bis man schliesslich zu dem in der Aufgabe angenommenen Falle kommt. Die Hoffnungen für irgend einen Fall lassen sich nur finden, wenn die Hoffnungen für alle vorhergehenden Fälle bereits gefunden sind. Die Reihenfolge der Fälle ist (die drei Zahlen jeder Columne gehören zusammen):

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1, 1, 1 | 1, 1, 1 | 1, 1, 1 | 1, 1, 1 | 2, 2, 2 | 2, 2, 2 | 2, 2, 2 | 2, 2, 2, |
| $B$ | 1, 1, 1 | 2, 2, 2 | 3, 3, 3 | 4, 4, 4 | 1, 1, 1 | 2, 2, 2 | 3, 3, 3 | 4, 4, 4, |
| $C$ | 1, 2, 3 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3. |

Im ersten Falle, in welchem jeder der Spieler noch eine Zahl nicht gestrichen hat, haben die Zahlen $b$, $e$, $h$ den Werth 1 und $c$, $f$, $i$ den Werth 5. Nun gewinnt $A$, wenn er allein oder mit einem der andern oder mit den beiden andern Spielern bei den nächsten drei Würfen die letzte Zahl streichen kann; $B$ aber kann nur gewinnen, wenn er allein oder mit $C$ dies thun kann, und $C$ kann nur gewinnen, wenn er allein seine Zahl streichen kann. Daraus ergeben sich die Hoffnungen:

$$\frac{bfi + bei + bfh + beh}{a^3 - cfi} = \frac{a^2 b}{a^3 - cfi} = \frac{36}{91} \text{ für } A,$$

$$\frac{cei + ceh}{a^3 - cfi} = \frac{ace}{a^3 - cfi} = \frac{30}{91} \text{ für } B,$$

$$\frac{cfh}{a^3 - cfi} = \frac{25}{91} \text{ für } C.$$

Dann nimmt man an, dass sowohl $A$, als $B$ noch eine Zahl, $C$ aber zwei Zahlen nicht gestrichen hat; hier ist $h = 2$, $i = 4$ zu setzen. Bei den nächsten drei Würfen können nun dieselben Möglichkeiten eintreten, wie bei der vorigen Annahme; der einzige Unterschied liegt darin, dass, wenn $C$ allein eine Zahl streichen kann, alle drei Spieler die eben berechneten Hoffnungen erlangen. Folglich ergeben sich jetzt die Hoffnungen: [161]

$$\frac{a^2 b \cdot 1 + cfh \cdot \frac{36}{91}}{a^3 - cfi} = \frac{36 \cdot 1 + 50 \cdot \frac{36}{91}}{116} = \frac{2538}{5278} \text{ für } A,$$

$$\frac{ace \cdot 1 + cfh \cdot \frac{30}{91}}{a^3 - cfi} = \frac{30 \cdot 1 + 50 \cdot \frac{30}{91}}{116} = \frac{2115}{5278} \text{ für } B,$$

$$\frac{cfh \cdot \frac{25}{91}}{a^3 - cfi} = \frac{50 \cdot \frac{25}{91}}{116} = \frac{625}{5278} \text{ für } C.$$

In gleicher Weise kann man fortfahren und für die übrigen oben angegebenen Fälle die Hoffnungen berechnen, bis man schliesslich zu dem in der Aufgabe angenommenen Falle kommt. Die vollständige Ausrechnung überlassen wir aber Leuten, welche Zeit reichlich übrig haben; wir, bei denen das Gegentheil der Fall ist, eilen zu Anderem zu kommen.

## XIV.

**Aufgabe.** Zwei Spieler $A$ und $B$ kommen mit einander überein, dass jeder soviele Würfe thun soll, als ein auf das Würfelbrett geworfener Würfel Augen zeigt, und dass derjenige gewinnen soll, welcher insgesammt die meisten Augen geworfen hat; wenn sie aber dieselbe Zahl von Augen werfen, so soll der Einsatz gleichmässig unter sie getheilt werden. Sofort nach getroffenem Uebereinkommen wird aber $B$ des Spieles überdrüssig und will statt des ungewissen Ergebnisses lieber eine bestimmte Anzahl von Augen annehmen. $A$ ist einverstanden, wenn $B$ sich mit 12 Augen begnügen will. Es wird gefragt, welcher von beiden Spielern mehr Hoffnung auf Gewinn hat und wieviel?

Lösung. Vor allem ist festzusetzen, ob der erste Wurf (welcher die den Spielern zustehende Anzahl von Würfen bestimmt) zu den Würfen des $A$ hinzugezählt werden soll oder nicht.

[**162**] 1. Dieser Wurf soll nicht mitgezählt werden. Hat dieser Wurf ein Auge gezeigt, so hat $A$ nur einen Wurf noch zu thun, welcher ihm höchstens 6 Augen einbringen kann. Da dem $B$ aber 12 Augen zugestanden sind, so verliert $A$ unter allen Umständen und erhält nichts vom Einsatze.

Fallen bei dem ersten Wurfe zwei Augen, so kann $A$ zwei Würfe mit einem Würfel oder auch (was nach der Anmerkung zu der Aufgabe XII des ersten Theiles auf dasselbe hinauskommt) mit zwei Würfeln einen Wurf thun. Bei zwei Würfeln sind 36 Fälle möglich, von welchen nur ein einziger zwölf Augen aufweist und $A$ den halben Einsatz gewinnen lässt; alle übrigen Fälle geben weniger Augen und lassen $A$ nichts gewinnen. Daher hat $A$ die Hoffnung: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 35 \cdot 0}{36} = \frac{1}{72}$.

Wenn beim ersten Wurf drei Augen fallen, so kann $A$, statt drei Würfe mit einem Würfel, einen Wurf mit drei Würfeln thun. Bei drei Würfeln sind 216 Fälle möglich, von welchen 25 Fälle 12 Augen, 135 Fälle weniger als 12 Augen und die übrigen 56 Fälle mehr als 12 Augen ergeben; $A$ hat also 25 Fälle für $\frac{1}{2}$, 135 Fälle für 0 und 56 Fälle für 1. Folglich ist seine Hoffnung gleich $\frac{25 \cdot \frac{1}{2} + 56 \cdot 1}{216} = \frac{137}{432}$.

In der gleichen Weise findet man die Hoffnungen des Spielers $A$, wenn ihm der erste Wurf vier, fünf oder sechs Würfe zuertheilt, und zwar hat er

bei vier Würfen die Hoffnung: $\dfrac{125 \cdot \frac{1}{2} + 861 \cdot 1}{1296} = \dfrac{1847}{2592}$,

bei fünf Würfen die Hoffnung: $\dfrac{305 \cdot \frac{1}{2} + 7014 \cdot 1}{7776} = \dfrac{14\,333}{15\,552}$,

bei sechs Würfen die Hoffnung: $\dfrac{456 \cdot \frac{1}{2} + 45\,738 \cdot 1}{46\,656} = \dfrac{45\,966}{46\,656} = \dfrac{7661}{7776}$.

Nun können aber bei dem ersten Wurfe gleich leicht 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen fallen, also ist die Hoffnung, welche $A$ bei Beginn des Spieles hat, gleich dem sechsten Theile der Summe aller ebenberechneten Theilhoffnungen:

$$\frac{1}{6}\left(0 + \frac{1}{72} + \frac{137}{432} + \frac{1847}{2592} + \frac{14\,333}{15\,552} + \frac{7661}{7776}\right) = \frac{15\,295}{31\,104},$$

und folglich bleibt für $B$ die Hoffnung $\frac{15809}{31104}$ übrig.

2. Der erste Wurf, welcher die Zahl der Würfe bestimmt, wird den Würfen des $A$ zugezählt. $A$ verliert dann unbedingt, wenn ihm der erste Wurf ein Auge oder zwei Augen bringt; [**163**] denn der im letzteren Falle ihm zustehende zweite Wurf kann ihm höchstens 6 Augen bringen, sodass er im ganzen höchstens 8 Augen erhalten würde, während dem $B$ 12 Augen zugestanden sind.

Fallen beim ersten Wurfe drei Augen, so hat $A$ noch zwei Würfe zu thun, welchen 36 Fälle entsprechen. Unter diesen sind 4 Fälle, welche ihm 9 Augen (also mit den 3 Augen des ersten Wurfes 12 Augen) bringen, 26 Fälle mit weniger und 6 Fälle mit mehr als 9 Augen. Da $A$ mithin 4 Fälle für $\frac{1}{2}$, 26 Fälle für 0 und 6 Fälle für 1 hat, so ist seine Hoffnung gleich $\dfrac{4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 1}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Wirft $A$ beim ersten Wurfe vier Augen, so hat er noch 3 Würfe, welche 216 Fälle darbieten. Von diesen bringen ihm 21 Fälle 8 Augen (also mit den 4 Augen des ersten Wurfes 12 Augen), 35 Fälle weniger und 160 Fälle mehr als 8 Augen. Daraus folgt für $A$ die Hoffnung:

$$\frac{21 \cdot \frac{1}{2} + 160 \cdot 1}{216} = \frac{341}{432}.$$

In der gleichen Weise findet man für die Hoffnung, welche $A$ hat, wenn er beim ersten Wurfe fünf Augen wirft, $\frac{20 \cdot \frac{1}{2} + 1261 \cdot 1}{1296} = \frac{1271}{1296}$, und für seine Hoffnung, wenn er beim ersten Wurf sechs Augen wirft, $\frac{5 \cdot \frac{1}{2} + 7770 \cdot 1}{7776} = \frac{15545}{15552}$.



Da nun beim ersten Wurfe jede der Augenzahlen von 1 bis 6 gleich leicht fallen kann, so ist die Hoffnung des $A$ bei Beginn des Spieles gleich dem arithmetischen Mittel aus den sechs Theilhoffnungen, d. i. gleich

$$\frac{1}{6}\left(0 + 0 + \frac{2}{9} + \frac{341}{432} + \frac{1271}{1296} + \frac{15545}{15552}\right) = \frac{46529}{93312};$$

für $B$ bleibt mithin die Hoffnung $\frac{46783}{93312}$ übrig. $B$ hat also in beiden Fällen etwas günstigere Gewinnaussichten als $A$.

Damit aber die Leser sehen, wie vorsichtig man bei derartigen Berechnungen verfahren muss, um nicht den Schleier statt der Juno zu fassen, so halte ich es nicht für überflüssig, hier eine Probe einer falschen und trügerischen Lösung dieser Aufgabe mitzutheilen; man würde auf die Richtigkeit dieser Lösung leicht einen Eid schwören, wenn man nicht die wirklich richtige Lösung schon gefunden hätte. Hat $A$ (bei der ersten Annahme) einen Wurf zu thun, so kann er durch denselben 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen bekommen, von denen jede Zahl ihm mit gleicher Leichtigkeit zufallen kann; folglich ist (nach Satz II des ersten Theiles) seine Erwartung gleich $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3\frac{1}{2}$ Augen, also gleich dem arithmetischen Mittel [164] zwischen 1 und 6. Wenn $A$ zwei Würfe zu thun hat, so erzielt $A$ durch dieselben 2, 3, 4, ..., 11 oder 12 Augen. Nun giebt es je einen Fall für 2 und 12 Augen, je 2 Fälle für 3 und 11 Augen, je 3 Fälle für 4 und 10 Augen, u. s. w.; folglich hat $A$ (nach Satz III des ersten Theiles) die Hoffnung:

$$\frac{1(2+12)+2(3+11)+3(4+10)+4(5+9)+5(6+8)+6 \cdot 7}{36}$$
$$= \frac{18 \cdot 14}{36} = 7 \text{ Augen}$$

zu erhalten, welche Zahl wiederum das arithmetische Mittel zwischen den Grenzzahlen 2 und 12 ist. Hat $A$ aber 3 Würfe zu thun, so kann er mit diesen 3 bis 18 Augen erzielen, von denen je zwei, von den Grenzen 3 und 18 gleich weit entfernte Zahlen dieselbe Anzahl Fälle darbieten. Daraus folgt auf gleiche Weise, dass $A$ auf $10\frac{1}{2}$ Augen hoffen darf, welche Zahl wiederum das arithmetische Mittel zwischen 3 und 18 ist. Ebenso ergiebt sich, dass $A$ auf 14, $17\frac{1}{2}$ und 21 Augen hoffen darf, wenn er 4, 5 und 6 Würfe zu thun hat; denn die hierbei sich ergebende Anzahl von Augen muss bez. zwischen 4 und 24, 5 und 30, 6 und 36 liegen, und die Hoffnungen sind die arithmetischen Mittel aus diesen Grenzzahlen. Da nun alle sechs Fälle gleich leicht eintreten können, so hat $A$ die gleiche Hoffnung, $3\frac{1}{2}$, 7, $10\frac{1}{2}$, 14, $17\frac{1}{2}$ und 21 Augen. Diese Zahlen bilden eine arithmetische Progression, und der Mittelwerth zwischen den beiden äussersten Zahlen giebt die Hoffnung des $A$, welcher also $12\frac{1}{4}$ Augen zu werfen hoffen darf.

Auf ganz ähnliche Weise könnte man bei der zweiten Annahme vorgehen wollen. Denn wenn der Spieler $A$ mit dem ersten Wurfe ein Auge wirft, so hat er ein Auge. Wirft er 2 Augen, so hat er 2 Augen und ausserdem noch einen Wurf, welcher ihm, wie oben angegeben, $3\frac{1}{2}$ Augen werth ist; $A$ kann also auf $5\frac{1}{2}$ Augen hoffen. Wenn $A$ drei Augen wirft, so hat er 3 Augen und noch 2 Würfe, welche ihm nach dem Obigen 7 Augen werth sind; seine Hoffnung ist also, 10 Augen zu werfen. In gleicher Weise findet man, dass $A$ hoffen darf, $14\frac{1}{2}$, 19, $23\frac{1}{2}$ Augen zu werfen, wenn ihm der erste Wurf 4, 5, 6 Augen bringt. [**165**] Da wieder alle sechs Fälle gleich leicht eintreten können, so ist seine Hoffnung auf $\frac{1}{6}(1 + 3\frac{1}{2} + 10 + 14\frac{1}{2} + 19 + 23\frac{1}{2}) = 12\frac{1}{4}$ Augen gerichtet.

Da also bei beiden Annahmen sich ergeben hat, dass $A$ auf $12\frac{1}{4}$ Augen hoffen darf, während dem $B$ nur 12 Augen zugestanden sind, so würde daraus folgen, dass die Hoffnung des $A$ besser ist als die des $B$. Aus der ersten Lösung, deren Richtigkeit ganz völlig evident ist, folgt aber das Gegentheil. Es ist schwierig zu sagen, warum $A$ auf mehr Augen als $B$, aber nur auf einen kleineren Theil des Einsatzes hoffen darf, während doch die Erlangung des Gewinnes von der grösseren Anzahl Augen abhängt[4]).

## XV.

**Aufgabe.** Das Spiel ist dasselbe wie bei der vorigen Aufgabe. $B$ verlangt aber, dass ihm das Quadrat der Augenzahl des ersten Wurfes zugestanden wird. Wie verhalten sich jetzt die Hoffnungen beider Spieler zu einander?

Lösung. Es mögen auch hier die beiden Annahmen der vorigen Aufgabe gemacht werden.

1. Der erste Wurf wird nicht zu den Würfen des $A$ hinzugezählt. Zeigt dieser Wurf ein Auge, so erhält $B$ nur ein Auge, während $A$ mit seinem Wurfe einmal ein Auge und fünfmal mehr als ein Auge werfen kann. $A$ hat also einen Fall für $\frac{1}{2}$ und 5 Fälle für 1; folglich hat er die Hoffnung: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1}{6} = \frac{11}{12}$.

Fallen beim ersten Wurfe 2 Augen, so werden dem $B$ nach der Uebereinkunft $2^2 = 4$ Augen angerechnet, während dem $A$ zwei Würfe zustehen. Diese liefern 36 mögliche Fälle, von welchen 3 Fälle ebenfalls 4 Augen, 3 andere Fälle weniger als 4 Augen und die übrigen 30 Fälle mehr als 4 Augen ergeben. Folglich resultirt für $A$ die Hoffnung:

$$\frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 30 \cdot 1}{36} = \frac{63}{72} = \frac{7}{8}.$$

Wenn beim ersten Wurfe 3 Augen fallen, so werden dem $B$ jetzt $3^2 = 9$ Augen angerechnet, und dem $A$ stehen 3 Würfe zu, welche 216 Fälle darbieten. [**166**] Unter diesen sind 25 Fälle mit 9 Augen (d. h. mit ebensovielen Augen, als $B$ hat), 56 Fälle mit weniger und 135 Fälle mit mehr als 9 Augen. Folglich hat $A$ die Hoffnung:

$$\frac{25 \cdot \frac{1}{2} + 135 \cdot 1}{216} = \frac{295}{432}.$$

In der gleichen Weise findet man die Hoffnungen des $A$, wenn ihm der erste Wurf vier, fünf oder sechs Würfe zuertheilt, und zwar hat er

bei vier Würfen die Hoffnung: $\frac{125 \cdot \frac{1}{2} + 310 \cdot 1}{1296} = \frac{745}{2592}$,

bei fünf Würfen die Hoffnung: $\frac{126 \cdot \frac{1}{2} + 126 \cdot 1}{7776} = \frac{7}{288}$,

bei sechs Würfen die Hoffnung: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{46656} = \frac{1}{93312}$.

Da aber alle sechs Fälle gleich möglich sind, so ist die Hoffnung des $A$ gleich dem sechsten Theile der Summe aller dieser einzelnen Hoffnungen, d. i. gleich $\frac{259993}{559872}$, und folglich die Hoffnung des $B$ gleich $\frac{299879}{559872}$.

2. Der erste Wurf wird den Würfen des $A$ zugezählt. Fällt beim ersten Wurfe ein Auge, so haben beide Spieler ein Auge und theilen sich in den Einsatz.

Wenn zwei Augen fallen, so erhält $B$ vier Augen angerechnet. $A$ hat noch einen Wurf zu thun, welcher ihm 6 Fälle darbietet. Einer dieser Fälle giebt ihm 2 Augen (also mit den 2 Augen des ersten Wurfes 4 Augen) und folglich den halben Einsatz; ferner sind vier Fälle für mehr und ein Fall für weniger als 2 Augen vorhanden. Seine Hoffnung ist daher gleich $\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1}{6} = \frac{3}{4}$.

Fallen 3 Augen, so erhält $B$ 9 Augen angerechnet; $A$ aber hat noch zwei Würfe zu thun, welche ihm 36 Fälle darbieten. Von diesen liefern ihm 5 Fälle 6 Augen (also mit den 3 Augen des ersten Wurfes 9 Augen), 10 Fälle weniger und 21 Fälle mehr als 6 Augen; daraus folgt, dass er die Hoffnung $\frac{5 \cdot \frac{1}{2} + 21 \cdot 1}{36} = \frac{47}{72}$ hat.

Für die drei letzten Fälle findet man ebenso, dass $A$

bei vier Würfen die Hoffnung: $\frac{35 \cdot \frac{1}{2} + 56 \cdot 1}{216} = \frac{137}{432}$,

bei fünf Würfen die Hoffnung: $\frac{35 \cdot \frac{1}{2} + 35 \cdot 1}{1296} = \frac{35}{864}$,

bei sechs Würfen die Hoffnung: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{7776} = \frac{1}{15552}$

hat.

Hieraus folgt schliesslich für $A$ die Hoffnung $\frac{35155}{93312}$ und für $B$ die Hoffnung $\frac{58157}{93312}$.

[167] **XVI.**

**Aufgabe.** Es sind die Gewinnhoffnungen der Spieler in dem **Cinq et neuf** genannten Glücksspiele zu berechnen.

In Frankreich, Dänemark, Schweden, Belgien, Niederdeutschland und den angrenzenden Gebieten ist ein Glücksspiel, welches *Cinq et neuf* genannt wird, sehr üblich. Dasselbe wird von zwei Spielern $A$ und $B$ mit zwei Würfeln gespielt, wobei der eine von ihnen, $A$ fortwährend wirft. Die Spielgesetze sind folgende: Wirft $A$ mit dem ersten Wurfe 3 oder 11 Augen oder einen beliebigen Pasch (un doublet, z. B. zwei Einsen, zwei Zweien, u. s. w.) so gewinnt er; wirft er aber 5 oder 9 Augen, so gewinnt $B$. Wirft $A$ irgend eine andere Anahl, also 4, 6, 7, 8 oder 10 Augen, ohne dass der Wurf zugleich ein Pasch ist, so gewinnt keiner von beiden Spielern; das Spiel muss vielmehr fortgesetzt werden, bis entweder wieder 5 oder 9 Augen von $A$ geworfen werden, in welchem Falle $B$ gewinnt, oder die Anzahl Augen, welche beim ersten Wurfe gefallen war, wiederkehrt und dadurch dann $A$ gewinnt. Nur beim ersten Wurfe zählen 3 oder 11 Augen oder ein Pasch zu Gunsten des $A$. Es sind die Gewinnhoffnungen zu bestimmen, welche die Spieler unter diesen Bedingungen haben.

Lösung. Da $A$, wenn er mit dem ersten Wurfe 4, 6, 7, 8 oder 10 Augen wirft, zu Hoffnungen kommt, welche ebenfalls noch unbekannt sind, so sind diese vor allen Dingen zu bestimmen.

Es werde daher angenommen, dass $A$ mit dem ersten Wurfe 4 Augen geworfen habe und im Begriffe sei, den zweiten Wurf zu thun. Nun giebt es aber bei zwei Würfeln 3 Fälle, welche wieder 4 Augen bringen und also $A$ gewinnen lassen, und 8 Fälle, welche 5 oder 9 Augen ergeben und $A$ verlieren lassen; alle anderen Fälle dagegen verpflichten $A$, von neuem zu werfen, und können daher (nach Satz III, Zusatz 4 im ersten Theile) als nicht vorhanden angesehen werden. Folglich hat $A$ die Hoffnung $\frac{3 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{11} = \frac{3}{11}$. Ebenso gross ist seine Hoffnung, wenn er beim ersten Wurfe 10 Augen wirft, da bei zwei Würfeln 4 und 10 Augen gleichviele Fälle entsprechen.

[168] Zweitens werde angenommen, dass $A$ mit dem ersten Wurfe 6 Augen geworfen habe. Es giebt dann 5 Fälle, welche ihm beim zweiten Wurfe wiederumn 6 Augen liefern, und 8 Fälle, welche 5 oder 9 Augen ergeben. Daher hat $A$ die Hoffnung $\frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{13} = \frac{5}{13}$. Da zu 8 Augen die gleiche Anzahl Fälle gehören, so hat $A$ ebenfalls die Hoffnung $\frac{5}{13}$, wenn er mit dem ersten Wurfe 8 Augen geworfen hat.

Schliesslich werde angenommen, dass $A$ mit dem ersten Wurfe 7 Augen erhalten habe. Der nächste Wurf kann ihm in 6 Fällen wiederum 7 Augen bringen und in 8 Fällen 5 oder 9 Augen. Folglich ergiebt sich für $A$ die Hoffnung $\frac{6 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{14} = \frac{3}{7}$.

Nachdem man diese Hoffnungen berechnet hat, ist zu erwägen, in wievielen Fällen $A$ durch den ersten Wurf zu diesen Hoffnungen kommen kann. Nun giebt es bei zwei Würfeln 6 Fälle dafür, dass $A$ einen Pasch wirft, und 4 Fälle dafür, dass er 3 oder 11 Augen wirft, das heisst zusammen 10 Fälle, welche $A$ sofort mit dem ersten Wurfe gewinnen lassen. Ferner giebt es, wie schon erwähnt, 8 Fälle für 5 oder 9 Augen, in welchen Fällen $A$ das Spiel verliert. Berücksichtigt man, dass von den 6 Fällen für 4 und 10 Augen die beiden Fälle des Zweier- und Fünferpasches auszuschliessen sind, so bleiben 4 Fälle, welche dem $A$ die Hoffnung $\frac{3}{11}$ bringen. Ebenso sind von den 5 Fällen für 6 und 8 Augen die beiden Fälle des Dreier- und Viererpasches auszusondern, und folglich bleiben 3 Fälle, welche dem $A$ die Hoffnung $\frac{5}{13}$ geben. Schliesslich sind 6 Fälle für 7 Augen übrig, welche $A$ die Hoffnung $\frac{3}{7}$ einbringen. Folglich hat $A$ bei Beginn des Spieles die Hoffnung

$$\frac{10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{3}{11} + 8 \cdot \frac{5}{13} + 6 \cdot \frac{3}{7}}{36} = \frac{4189}{9009} \text{ und } B \text{ die Hoffnung } \frac{4820}{9009}.$$

[169] $B$ hat also günstigere Gewinnaussichten als $A$, wie hieraus klar hervorgeht, wenn es auch Leute geben mag, welche der entgegengesetzten Ansicht sind und lieber die Rolle des $A$ übernehmen.

## XVII.

**Aufgabe.** Es sind die Gewinnhoffnungen der Spieler in einem andern Glücksspiele zu berechnen.

Ich erinnere mich, dass ich in früherer Zeit auf einem Jahrmarkte einen Gaukler gesehen habe, welcher das folgende Glücksspiel aufgestellt hatte, um die Vorübergehenden anzulocken. Eine kreisrunde, nach der Mitte etwas ansteigende Scheibe war mit Hülfe der Wasserwaage genau horizontal aufgestellt. An ihrem Rande trug sie 32 Vertiefungen, welche in vier Gruppen getheilt und mit den Nummern I bis VIII der

Reihe nach in jeder Gruppe bezeichnet waren. In dem Mittelpunkte der Scheibe befand sich ein kleiner Becher. Wer nun sein Glück versuchen wollte, warf vier kleine Kugeln in den Becher, welche durch denselben auf die Scheibe hinabrollten und von ebensovielen Vertiefungen derselben aufgenommen wurden, und erhielt dann den Gewinn ausgezahlt, welcher für die Summe der diese Vertiefungen bezeichnenden Zahlen auf dem unten folgenden Spielplane angesetzt war. Jeder einzelne Wurf mit den vier Kugeln musste mit vier Pfennigen bezahlt werden. Es wird nach der Hoffnung des Spielers gefragt.

Lösung. Zunächst ist klar, dass der Spieler bei jedem Einwurfe der vier Kugeln mindestens 4 und höchstens 32 Punkte erzielen kann, welche Grenzzahlen nur in je einem Falle sich ergeben, nämlich 4, wenn die vier Kugeln in die ersten Vertiefungen jeder Gruppe fallen, und 32, wenn sie in die letzten Vertiefungen jeder Gruppe fallen. Dann ist zu beachten, dass es umsomehr Fälle für die zwischen 4 und 32 liegenden Zahlen von Punkten giebt, je weiter diese von jenen Grenzen entfernt sind, und dass es für die Zahl 18 am meisten Fälle giebt. Zu je zwei Zahlen, welche von 18 gleichweit nach beiden Seiten entfernt sind, gehören gleichviele Fälle. Schliesslich muss man bedenken, dass von den Vertiefungen, welche bei jedem Wurfe die vier kleinen Kugeln aufnehmen, alle vier mit derselben Zahl, oder 3 mit derselben [170] und die vierte mit einer andern Zahl, oder 2 mit derselben und 2 mit der gleichen andern Zahl, oder 2 mit derselben und die übrigen mit zwei verschiedenen Zahlen, oder endlich alle vier mit verschiedenen Zahlen bezeichnet sein können. So ist nur ein Fall möglich, dass z. B. die Kugeln in die vier mit I bezeichneten Vertiefungen fallen. Ferner sind offenbar $\binom{4}{3} = 4$ Fälle möglich, in welchen drei von den Kugeln in Vertiefungen mit der Nummer I zu liegen kommen, und $\binom{4}{1} = 4$ Fälle, in welchen die vierte Kugel in eine Vertiefung mit der Nummer II fällt; d. h. es giebt $4 \cdot 4 = 16$ Fälle, dass die vier Kugeln in drei Vertiefungen I und eine Vertiefung II rollen. Es giebt $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36$ Fälle, in welchen zwei Kugeln in Vertiefungen I und die beiden andern in Vertiefungen II zu liegen kommen; dagegen giebt es $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ Fälle, in welchen zwei Kugeln  in Vertiefungen I, die dritte in eine Vertiefung II und die vierte in eine Vertiefung III rollen, und $\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 4^4 = 256$ Fälle, in welchen je eine Kugel in eine Vertiefung I, II, III und IV rollen. Es ist noch zu bemerken, dass die 24 Fälle, welche aus jedem Falle durch wechselseitige Vertauschung der vier Kugeln sich ergeben, ausser Betracht gelassen werden, da diese als ebensoviele secundäre Fälle, aus welchen ein jeder primäre Fall zusammengesetzt ist, angesehen werden können.

[**171**] Nun muss man die Zahl der Fälle bestimmen, welche jeder möglichen Anzahl von Punkten entspricht, was etwa in derselben Weise geschehen kann, wie oben (nach der Aufgabe IX des ersten Theiles, S. 27) die Anzahl der Würfe mit verschiedenen Würfeln ermittelt wurde. Wenn man hier die gegebene Zahl von Punkten auf alle möglichen Arten in 4 Theile wegen der 4 Kugeln zerlegt, deren keiner grösser als 8 sein darf (weil die Nummern der Vertiefungen nicht höher gehen), und dann den einzelnen Arten die im vorigen Abschnitte ermittelte Anzahl der Fälle zuertheilt, so giebt die Summe dieser letzteren die gesuchte Zahl. Da aber auf diese Weise die Zahl der Fälle nur für eine gegebene Punktzahl gefunden wird, uns aber die Zahlen der Fälle für alle Punkte nöthig sind, so schlagen wir den folgenden kürzeren Weg ein, um alle Zahlen auf einmal zu bekommen.

Wir bilden uns eine Tafel mit 15 Columnen, welche wir mit den Zahlen 4 bis 18 überschreiben. Es genügt für diese Zahlen die Fälle zu bestimmen, da jede Zahl über 18 mit einer unter 18 die gleiche Anzahl Fälle darbietet, wie oben angegeben ist.

Nehmen wir nun an, dass alle vier Kugeln in Vertiefungen mit der gleichen Nummer rollen, so haben diese entweder sämmtlich die Nummer I oder II oder . . ., und die Summen dieser Nummern sind daher 4, 8, 12, 16, . . . . Deshalb schreiben wir in die erste Zeile an den linken Rand der Tafel I, I, I, I (wozu man sich im Geiste II, II, II, II; . . . hinzudenkt) und in die mit 4, 8, 12, 16 bezeichneten Columnen je eine 1.

Ferner nehmen wir an, dass drei Kugeln von gleichbezeichneten Vertiefungen und die vierte von einer Vertiefung mit anderer Nummer aufgenommen werden. Die Nummern der ersteren Vertiefungen sind entweder drei I, oder drei II, oder . . . Sind es drei I, so ist die vierte Nummer eine der Zahlen II bis VIII, welche in Verbindung mit den drei I die Summen 5, 6, 7, . . ., 11 geben; wir schreiben in der zweiten Zeile an den linken Rand der Tafel I, I, I, II (wozu man sich die übrigen Verbindungen I, I, I, III; . . ., I, I, I, VIII im Geiste ergänzt) und in die mit 5, 6, 7, . . ., 11 bezeichneten Columnen je eine 16. Sind die Zahlen der gleichbezeichneten Vertiefungen drei II, so ist die vierte Nummer I, III, IV, . . ., VIII, und folglich die Summen aller vier Zahlen 7, 9, 10, ..., 14; wir schreiben dann in die dritte Zeile der Tafel an den linken Rand II, II, II, I (wozu die übrigen Verbindungen hinzuzudenken sind) und in die Columnen 7, 9, 10, . . ., 14 je eine 16. In ähnlicher Weise bilden wir uns noch 3 Zeilen [**172**] mit den nun leicht verständlichen Bezeichnungen III, III, III, I; IV, IV, IV, I; V, V, V, I am linken Rande der Tafel und der Zahl 16 in den betreffenden Columnen.

Weiter nehmen wir an, dass je zwei Vertiefungen dieselbe Nummer tragen. Die Nummern sind entweder zwei I mit zwei II, III, . . ., VIII, welche die Summen 6, 8, 10, . . ., 18 liefern, oder zwei II mit zwei III, IV, . . ., VII, welche die Summen 10, 12, 14, 16, 18 liefern, oder zwei III mit zwei IV, V, VI oder zwei IV mit zwei V, welche bez. die Summen 14, 16, 18 und 18 liefern. Wir bezeichnen deshalb die folgenden vier Zeilen der Tafel am linken Rande mit I, I, II, II; II, II, III, III; III, III, IV, IV; IV, IV, V, V und schreiben in die betreffenden Columnen dieser Zeilen die Zahl 36.

Wir nehmen nun wieder zwei Vertiefungen mit gleicher Nummer, die beiden übrigen aber mit von dieser und von einander verschiedenen Nummern. Dann können wir zunächst zwei I und eine II verbinden mit III, IV, . . . VIII, wodurch wir die Summen 7, 8, . . ., 12 erhalten, ferner zwei I und eine III mit IV, V, . . ., VIII, wodurch wir die Summen 9, 10, . . ., 13 erhalten, und so fort bis zur Verbindung I, I, VII, VIII mit der Summe 17. Nehmen wir dann zwei II, so kann entweder eine I mit einer III, IV, . . . VIII, oder eine III mit einer IV, V, . . ., VIII, oder eine IV mit einer V, VI, . . ., VIII, oder . . . hinzutreten. In gleicher Weise fahren wir fort und bilden uns 24 weitere Zeilen in der Tafel, welche wir am linken Rande mit I, I, II, III; I, I, III, IV; . . .; I, I, VII, VIII; II, II, I, III; . . .; II, II, VI, VII; III, III,

I, II; . . .; III, III, V, VI; IV, IV, I, II; . . .; IV, IV, III, V; V, V, I, II; . . .; V, V, III, IV; VI, VI, I, II; VI, VI, II, III; VII, VII, I, II analog der früheren Bezeichnungsweise kennzeichnen; in jede dieser Zeilen wird in die durch die bezüglichen Summen angegebenen Columnen die Zahl 96 eingetragen.

Schliesslich nehmen wir an, dass alle vier Vertiefungen mit verschiedenen Zahlen bezeichnet sind; dann können wir I, II, III mit IV, V, . . ., VIII oder I, III, IV mit V, VI, . . ., VIII, oder . . . combiniren. [**173**] Wir bezeichnen dann die letzten 15 Zeilen der Tafel am linken Rande mit I, II, III, IV; . . .; I, II, VII, VIII; I, III, IV, V; . . .; I, III, VI, VII; I, IV, V, VI; I, IV, VI, VII; II, III, IV, V; . . .; II, III, VI, VII; II, IV, V, VI; III, IV, V, VI und tragen in jede Zeile unter die betreffende Summe die Zahl 256 ein[5]).

Nachdem wir uns auf diese Weise die Tafel angefertigt haben, brauchen wir nur noch die Zahlen jeder Columne zu addiren, um alle Fälle zu erhalten, welche die am Kopfe der Columne stehende Anzahl von Punkten ergeben. Diese Zahlen finden sich in der mittleren Columne des hier folgenden Spielplanes, dessen äusserste Columnen die Anzahl Pfennige angiebt, welche der Spieler bei der Erreichung der nebenstehenden Anzahl Punkte erhält.

| Pfennige | Punkte | Anzahl der Fälle | Punkte | Pfennige |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 4 | 1 | 32 | 180 |
| 100 | 5 | 16 | 31 | 32 |
| 30 | 6 | 52 | 30 | 25 |
| 24 | 7 | 128 | 29 | 24 |
| 18 | 8 | 245 | 28 | 16 |
| 10 | 9 | 416 | 27 | 12 |
| 6 | 10 | 664 | 26 | 8 |
| 6 | 11 | 976 | 25 | 6 |
| 6 | 12 | 1369 | 24 | 4 |
| 5 | 13 | 1776 | 23 | 4 |
| 3 | 14 | 2204 | 22 | 3 |
| 3 | 15 | 2560 | 21 | 3 |
| 3 | 16 | 2893 | 20 | 3 |
| 2 | 17 | 3088 | 19 | 3 |
| 2 | 18 | 3184 | | |

Summe aller Fälle: $35960 = \binom{32}{4}$.

Nachdem die Zahlen aller Fälle bestimmt sind, ist die gesuchte Gewinnhoffnung leicht (nach Satz III des ersten Theiles) zu finden, indem man die einzelnen Zahlen der Fälle mit den zugehörigen Geldprämien multiplicirt und durch die Anzahl aller Fälle dividirt. Da zu 4 und 32 Punkten, zu 5 und 31 Punkten dieselbe Anzahl Fälle gehört, so lässt sich die Rechnung vereinfachen, indem man die zwei zugehörigen Geldprämien addirt und in die einfache Anzahl Fälle multiplicirt, also $(180 + 120) \cdot 1 = 300 \cdot 1$, $(100 + 32) \cdot 16 = 132 \cdot 16$, u. s. w. Man findet auf diese Weise, dass ein Spieler [**174**] eine Gewinnhoffnung von $4\frac{349}{3596}$ Pfennigen hat. Wenn er also nach der Annahme seinen Wurf mit 4 Pfennigen erkauft, so hat er offenbar günstigere Aussichten auf Gewinn als der Jahrmarktsgaukler, welcher das Spiel veranstaltet, und der letztere kann mit diesem Glücksspiele nichts gewinnen, wenn er die Geldprämien nicht herabsetzt.



## XVIII.

**Aufgabe.** Es sind die Hoffnungen der Spieler in dem gewöhnlich **Treschak** genannten Kartenspiele zu berechnen.

In Deutschland ist ein Kartenspiel sehr gebräuchlich, welches gewöhnlich Treschak[6]) genannt wird und eine gewisse Aehnlichkeit mit dem französischen Spiele Brelan hat. Aus einem Spiele Karten werden 24 Blätter, von jeder Farbe 6 genommen (und die übrigen fort gelegt) und zwar die Neuner, Zehner, Buben, Damen, Könige und Asse, welche wir künftig durch ihre Anfangsbuchstaben $N$, $Z$, $B$, $D$, $K$ und $A$ bezeichnen wollen. Die Karten sollen nach ihrem Werthe in der absteigenden Reihenfolge aufeinanderfolgen: Ass, König, Dame, Bube, Zehner; alle aber werden an Bedeutung durch die Neuner und den Treffbuben (welchen wir deshalb den Neunern zuzählen, sodass wir 5 Neuner und drei Buben haben) übertroffen. Und zwar besteht die hervorragende Wichtigkeit der Neuner, welche sehr derjenigen der Matadore genannten Karten im spanischen L'hombre-Spiele ähnlich ist, darin, dass sie zu den Karten beliebigen Werthes und beliebiger Farbe hinzugezählt werden dürfen. So geben zwei Neuner mit einem Ass oder ein Neuner mit zwei Assen zusammen drei Asse oder eine Triga (Dreigespann, un tricon) von Assen; ein, zwei oder drei Neuner geben mit drei, zwei oder einem König zusammen eine Quadriga (Viergespann) von Königen; ein oder zwei Neuner zusammen mit drei oder zwei Blättern gleicher Farbe werden als vier Blätter dieser Farbe gezählt, z. B. als vier Herzkarten, 4 Treffkarten, u. s. w. Jede derartige Combination von Karten nennt man gewöhnlich einen Fluvius (einen Fluss), welcher ausserdem durch eine Anzahl Punkte bewerthet wird, und zwar für ein Ass 11 Punkte, für jede andere Karte 10 Punkte. Die Spielregeln sind die folgenden:

Jedem Mitspieler werden der Reihe nach zwei Blätter zugetheilt. Dem ersten Spieler steht es frei, eine beliebige Geldsumme einzusetzen, nachdem er seine zwei Karten verstohlen betrachtet hat. Will ein zweiter Spieler mit ihm spielen, so setzt er ebensoviel oder, wenn es ihm gutdünkt, auch mehr ein; im letzteren Fall muss der erste Spieler [**175**] noch den Differenzbetrag seinerseits hinzufügen, wenn er nicht ohne weiteres seinen Einsatz verlieren will. Hierauf erhalten die Spieler, welche das Spiel begonnen haben, wiederum je zwei Karten, welche aber vor Aller Augen offen auf den Tisch gelegt werden, sodass jetzt die vier Karten jedes Spielers zur Hälfte allen Mitspielern bekannt und zur Hälfte unbekannt sind. Dann setzen die Spieler von neuem Geldsummen in der vorigen Weise ein, wobei es einem andern Spieler immer frei steht, mehr als der erste einzusetzen und der letztere in diesem Falle seinen Einsatz wieder auf den gleichen Betrag erhöhen muss. Darauf legen schliesslich sämmtliche Mitspieler ihre vier Karten offen auf den Tisch, und es erhält derjenige von ihnen den ganzen Einsatz, dessen Karten den höheren Werth haben. Hierbei wird eine Quadriga höher als ein Fluvius und dieser höher als eine Triga bewerthet, den höchsten Werth hat eine Neunerquadriga. Ueber den Werth der übrigen Quadrigen und Trigen entscheidet die Werthfolge der sie bildenden Karten, bei den Fluvien die Anzahl der Punkte; so ist eine Quadriga, bez. Triga von Assen mehr werth als eine solche von Königen und ein Fluvius von 43 Punkten mehr werth als ein solcher von 42 Punkten. Hat kein Mitspieler eine Quadriga, eine Triga oder einen Fluvius, so erhält derjenige den Einsatz, welcher die meisten Punkte einer Farbe zählt. In dem Falle aber, dass zwei Spieler völlig gleiche Karten haben, z. B. wenn sie Quadrigen oder Trigen von gleichem Werthe oder Fluvien mit gleichvielen Punkten haben, gewinnt gegebenen Falles derjenige von ihnen, welcher der Reihe nach der erstere ist, d. h. welchem früher als dem andern seine Karten gegeben sind.

Jeder der Spieler kann nun, wenn er seine ersten zwei Karten erhalten hat, seine Gewinnhoffnung berechnen und nach dieser dann sein Verhalten einrichten. Denn wenn er auch seinen Einsatz nicht immer im Verhältnisse des Werthes seiner Karten erhöhen darf, um den Mitspielern diesen nicht zu verrathen — denn die Seele dieses Spieles ist die Heuchelei und es gilt oft gute Miene zum bösen Spiele zu machen, damit die Andern, welche vielleicht bessere Karten erhalten haben, durch seine erheuchelte Zuversicht getäuscht, davon abgeschreckt werden, ihn zu überbieten —, so kann man doch nicht leugnen, dass die vorausgehende Kenntniss der Gewinnhoffnung ein nicht unwesentliches Hülfsmittel ist, um den Grad dieser Verstellung zu bemessen.



Lösung. Ich will die Art der Berechnung nur an einem Beispiele zeigen, und zwar, da ich mich erinnere, oft die Wahrnehmung gemacht zu haben, dass derjenige, welcher im Anfange zwei Neuner erhielt, doch noch verlor, will ich bestimmen, um wieviel mehr ein solcher Spieler Hoffnung hat zu gewinnen, als zu verlieren. [176] Um aber die Frage ganz bestimmt zu stellen, nehme ich an, dass ich als der erste von zwei Spielern zwei Neuner und der andere (was ich irgendwie erfahren habe) einen erhalten hat; ich wünsche die Gewinnhoffnungen von uns Beiden kennen zu lernen.

Zunächst betrachte ich alle möglichen Fälle, in welche ich während des Spieles kommen kann. Es kann der Fall eintreten, dass die übrigen beiden Karten, welche ich erhalte (wie aus der ersten Columne der unten folgenden Tafel ersichtlich ist), entweder noch zwei Neuner sind, oder ein Neuner mit einer andern Karte, oder zwei andere Karten gleichen Werthes oder zwei andere Karten verschiedenen Werthes, welche derselben oder verschiedenen Farben angehören; in dem letzteren Falle ist noch zu unterscheiden, ob eine der beiden Karten eine Treffkarte ist oder nicht, da wegen des zu den Neunern gezählten Treffbuben dieser Unterschied die Gewinnhoffnungen beeinflusst.

Zweitens untersuche ich, wie oft jeder dieser Fälle eintreten kann, indem ich bedenke, dass, ausser meinen beiden Neunern und dem Neuner meines Gegners, noch 21 Blätter vorhanden sind, unter welchen noch zwei Neuner, vier Asse, Könige, Damen, Zehner und drei Buben sind. Da mein Gegner ebenfalls zwei Karten erhalten hat, so sind eigentlich nur noch 20 Karten übrig; da aber seine zweite Karte mir unbekannt ist, so kommt es in Rücksicht auf meine Unkenntniss auf dasselbe hinaus, als wenn er diese Karte nicht genommen hätte und ich auf zwei beliebige der übrigen 21 Kartenblätter gleiche Hoffnung haben würde. Es lassen sich nun leicht die einzelnen Fälle aufzählen; es sind deren insgesammt nämlich ebensoviele als sich Binionen aus den übrigen Kartenblättern bilden lassen, d. h. $\binom{21}{2} = 210$ Fälle. Zwei Neuner können zusammen nur einmal vorkommen; ein Neuner mit einem Ass kann $2 \cdot 4 = 8$ mal combinirt werden, ebenso oft ein Neuner mit einem König, einer Dame oder einem Zehner; ein Neuner mit einem Buben kann dagegen nur $2 \cdot 3 = 6$ mal combinirt werden. [**177**] In gleicher Weise lassen sich die Zahlen der Fälle für eine der übrigen Zusammenstellungen zweier Karten berechnen; diese Zahlen finden sich in der zweiten Columne der untenstehenden Tafel.

Drittens berechne ich die Hoffnungen, welche ich und mein Gegner in den einzelnen angegebenen Fällen haben. Habe ich meine weiteren zwei Karten erhalten, so sind noch 19 Karten übrig, von welchen mein Gegner drei erhält; daher ist sein Spiel ebensovielen Möglichkeiten unterworfen, als es Ternionen von 19 Dingen giebt, nämlich $\binom{19}{3} = 969$, und ich muss für jede mögliche Zusammenstellung meiner vier Karten untersuchen, wieviele dieser 969 möglichen Fälle für meinen Gegner günstig und wieviele für ihn ungünstig sind. Erhalte ich zu meinen zwei Neunern noch zwei weitere Neuner oder einen Neuner und ein Ass, so muss mein Gegner unbedingt verlieren, da ich eine Quadriga von Neunern oder Assen habe und mein Gegner höchstens eine solche von Assen besitzen kann; nach den Spielbedingungen gewinne ich aber in beiden Fällen. Kommt zu meinen Neunern ein Neuner und ein König hinzu, so habe ich eine Quadriga von Königen und kann von meinem Gegner nur besiegt werden, wenn er eine Quadriga von Assen erhält. Nun sind unter den 19 Kartenblättern 5, nämlich ein Neuner und vier Asse, von denen irgend drei mit dem Neuner, welchen mein Gegner schon besitzt, eine Quadriga von Assen bilden; von 5 Dingen lassen sich aber $\binom{5}{3} = 10$ Ternionen bilden, und folglich sind meinem Gegner 10 von den sämmtlichen 969 Fällen günstig, weshalb er die Hoffnung $\frac{10}{969}$ hat. [**178**] Erhalte ich noch einen Neuner und eine Dame, so habe ich eine Quadriga von vier Damen, und mein Gegner gewinnt, wenn er eine Quadriga von Assen oder Königen erhält, wofür ihm 20 Fälle günstig sind; seine Hoffnung ist also gleich $\frac{20}{969}$.

[179] Die Hoffnungen meines Gegners kann ich für alle möglichen Combinationen der mir noch zufallenden zwei Karten in gleicher Weise bestimmen; es erfordert ihre Berechnung aber um so mehr Mühe, je grösser die Hoffnung meines Gegners auf Gewinn ist. Da es viel zu weitschweifig werden würde, wenn ich sämmtliche Berechnungen hier bis in alle Einzelheiten mittheilen wollte, so bestimme ich die Gewinnhoffnung meines Gegners nur für den Fall, dass ich einen Buben und einen Zehner von zwei verschiedenen Farben, aber nicht Treff, z. B. den Herzbuben und die Piquezehn erhalten habe, also nur eine Triga von Buben besitze. Mein Gegner gewinnt dann mit jeder Quadriga und jedem Fluvius, ebenso mit einer Triga von Assen, Königen oder Damen. Um die Anzahl der Quadrigen zu bestimmen, erwäge ich, dass die übrigen 19 Karten aus 2 Neunern, 4 Assen, 4 Königen, 4 Damen, 2 Buben und 3 Zehnern bestehen oder dass aus ihnen (wenn ich die beiden Neuner den andern Karten jedes Mal zuzähle) 6 Asse, 6 Könige, 6 Damen, 4 Buben und 5 Zehner genommen werden können. Ich erhalte nun alle Quadrigen von Assen, indem ich je 3 Asse mit dem einen Neuner meines Gegners verbinde, was ich $\binom{6}{3} = 20$ mal thun kann. Ebensoviele Quadrigen von Königen und Damen giebt es. Die Anzahl der Quadrigen von Buben ist $\binom{4}{3} = 4$ und der Quadrigen von Zehnern $\binom{5}{3} = 10$; es giebt also insgesammt 74 Quadrigen. — Die Anzahl der Fluvien ermittele ich folgendermaassen. [180] Unter den übrigen 19 Karten befinden sich ausser den beiden Neunern 4 Pique-, 5 Carreau-, 4 Herz- und 4 Treff-Karten. Zur Bildung eines Fluvius muss mein Gegner zu seinem einen Neuner entweder drei Kartenblätter derselben Farbe oder wenigstens zwei von derselben Farbe und einen der beiden übrigen Neuner erhalten; folglich ist die Anzahl der Fluvien gleich der Anzahl aller Ternionen vermehrt um die doppelte Anzahl aller Binionen von 4, 5, 4, 4 Dingen, d. i. gleich $3\binom{4}{3} + \binom{5}{3} + 2\left[3\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\right]$ $= 22 + 2 \cdot 28 = 78$. — Um schliesslich die Anzahl der Trigen zu bestimmen, muss ich bedenken, dass zur Bildung einer Triga von Assen (Königen oder Damen) mit dem einen Neuner, welchen mein Gegner schon hat, entweder zwei Asse (Könige oder Damen) oder einer der beiden übrigen Neuner mit einem Asse (Könige oder Dame) verbunden werden müssen.

Treten zwei gleiche Karten hinzu, so kann das vierte Blatt ein beliebiges aus den übrigen 13 Karten sein; da aber 4 Asse (Könige oder Damen) 6 mal zu je zweien genommen werden können, so entstehen dadurch jedesmal 78 Fälle. Wird mit einem der übrigen Neuner ein Ass (König oder Dame) verbunden, so kann das vierte Blatt ein beliebiges einer anderen Farbe und geringeren Werthes sein. Es können also verbunden werden mit dem Carreau-Ass 9 Blätter und mit jedem andern Asse 10 Blätter, was 39 Fälle giebt; mit dem Carreau-König 6 und mit jedem andern Könige 7 Blätter, was 27 Fälle giebt; mit der Carreau-Dame 3 und mit jeder andern 4 Blätter, was 15 Fälle giebt. Diese letzteren Zahlen sind wegen der beiden noch übrigen Neuner doppelt zu nehmen und zu ihnen einzeln noch die 78 oben gefundenen Fälle zu addiren; man erhält dann 156 Trigen mit Assen, 132 Trigen mit Königen und 108 Trigen mit Damen, also insgesammt 396 Trigen, welche meinen Gegner gewinnen lassen. Addire ich nun die Anzahl der Quadrigen, Fluvien und Trigen zu einander, so erhalte ich $74 + 78 + 396 = 548$ Fälle, welche für meinen Gegner günstig sind, und daher ist hier seine Hoffnung gleich $\frac{548}{969}$. In der dritten Columne der auf der folgenden Seite stehenden Tafel finden sich die Hoffnungen meines Gegners, welche allen Möglichkeiten betreffs der mir noch zufallenden zwei Karten entsprechen, in der Weise angegeben, dass dort die Anzahl der meinem Mitspieler günstigen Fälle angegeben sind; diese sind zugleich die Zähler seiner Hoffnungen, deren gemeinsamer Nenner 969 ist.

[**181**] Die Gewinnhoffnungen von uns Beiden, bevor ich meine letzten zwei Karten erhalte — und nach diesen war gerade gefragt — lassen sich nun leicht berechnen. Zunächst finde ich mit Hülfe der Zahlen der zweiten und dritten Columne (nach Satz III des ersten Theiles, wobei zur Vereinfachung der Rechnung alle Zahlen der dritten Columne, zu welchen in der zweiten Columne die gleiche Zahl von Fällen gehört, vorher addirt worden sind) für die Hoffnung meines Gegners

$$\frac{3 \cdot 1902 + 4 \cdot 498 + 6 \cdot 4614 + 8 \cdot 64}{210 \cdot 969} = \frac{35894}{203490} = \frac{17947}{101745},$$

und mithin für meine eigene Hoffnung $\frac{83798}{101745}$, welche also nahezu fünfmal so gross ist als die Hoffnung meines Gegners.

[Die Tafel steht im Original auf S. **178**].



| | I. | II. | III. |
|---|---|---|---|
| | 2*N* | 1 | 0 |
| | *N* & *A* | 8 | 0 |
| | *N* & *K* | 8 | 10 |
| | *N* & *D* | 8 | 20 |
| | *N* & *B* | 6 | 30 |
| | *N* & *Z* | 8 | 34 |
| | 2*A* | 6 | 0 |
| | 2*K* | 6 | 20 |
| | 2*D* | 6 | 40 |
| | 2*B* | 3 | 60 |
| | 2*Z* | 6 | 70 |
| Derselben Farbe | *A* & *K* | 4 | 70 |
| | *A* & *D* | 4 | 70 |
| | *A* & *B* | 3 | 74 |
| | *A* & *Z* | 4 | 70 |
| | *K* & *D* | 4 | 96 |
| | *K* & *B* | 3 | 100 |
| | *K* & *Z* | 4 | 96 |
| | *D* & *B* | 3 | 100 |
| | *D* & *Z* | 4 | 96 |
| | *B* & *Z* | 3 | 100 |

| | I. | II. | III. |
|---|---|---|---|
| Beide Karten sind von verschiedener Farbe; eine derselben ist eine Treffkarte | *A* & *K* | 6 | 153 |
| | *A* & *D* | 6 | 153 |
| | *A* & *B* | 3 | 157 |
| | *A* & *Z* | 6 | 153 |
| | *K* & *D* | 6 | 309 |
| | *K* & *B* | 3 | 313 |
| | *K* & *Z* | 6 | 309 |
| | *D* & *B* | 3 | 445 |
| | *D* & *Z* | 6 | 441 |
| | *B* & *Z* | 3 | 553 |
| Beide Karten sind von verschiedener Farbe; keine derselben ist eine Treffkarte | *A* & *K* | 6 | 148 |
| | *A* & *D* | 6 | 148 |
| | *A* & *B* | 6 | 152 |
| | *A* & *Z* | 6 | 148 |
| | *K* & *D* | 6 | 304 |
| | *K* & *B* | 6 | 308 |
| | *K* & *Z* | 6 | 304 |
| | *D* & *B* | 6 | 440 |
| | *D* & *Z* | 6 | 436 |
| | *B* & *Z* | 6 | 548 |
| | Summe: | 210 | |

Uebrigens bieten sich für denjenigen, welcher die Tafel prüft, auf den ersten Anblick noch viele andere Sätze dar, wie z. B. die folgenden. Ich komme durch einen Neuner und eine Dame zu der gleichen Hoffnung wie durch zwei Könige, durch zwei Zehner zu der gleichen Hoffnung wie durch ein Ass und einen König, eine Dame oder den Zehner gleicher Farbe. Ein Neuner mit einem Buben oder Zehner ist mir mehr werth als zwei Damen. Zwei Blätter von verschiedenem Werthe und verschiedener Farbe sind immer dann ein wenig besser, wenn keine Karte davon eine Treffkarte ist, als wenn dies der Fall ist. Eine Dame und ein Zehner anderer Farbe sind mir vortheilhafter als ein Bube und ein Zehner, welche für meinen Gegner mehr werth sind; u. s. w.

Alles Bisherige gilt nur für die Annahme, dass ich bei Beginn des Spieles zwei und mein Mitspieler einen Neuner hat. Ist mir aber kein Blatt meines Mitspielers bekannt, so komme ich zu ganz anderen Hoffnungen und zu einer ganz anderen Tafel, welche der fleissige Leser nach dem gleichen Verfahren, nur mutatis mutandis aufstellen mag. Wenn er die Rechnung richtig durchführt, so findet er, dass sich in diesem Falle meine Hoffnung zu der meines Gegners wie 346988 zu 26077 verhält, dass sie also mehr als 13mal grösser ist als diese.

Es war ursprünglich meine Absicht gewesen, hier noch einige andere Fragen, welche häufig unter den Mitspielern discutirt werden, zu beantworten; z. B.: Ist es bei Beginn des Spieles vortheilhafter, [**182**] einen Neuner und einen Buben oder Zehner zu haben, als zwei Asse? Welcher von zwei Spielern, von denen der eine zwei Asse, der andere einen Neuner und einen Buben oder Zehner erhalten hat, besitzt die grössere Gewinnhoffnung? und ähnliche Fragen. Da es aber schon den Anschein haben kann, als hätte ich auf Nichtigkeiten zu viel Zeit verwendet, so will ich diese und andere diesbezügliche Fragen dem wissbegierigen Leser zu lösen und zu berechnen überlassen.

## XIX.

**Aufgabe.** Bei irgend einem Glücksspiele ist der Bankhalter (le banquier du jeu) dadurch im Vortheil, dass die Zahl der Fälle, in welchen er gewinnt, ein wenig grösser ist, als die Zahl der Fälle, in welchen er verliert, und dass zugleich die Zahl der Fälle, in welchen er auch bei dem folgenden Spiele Bankhalter bleibt, grösser ist als die Zahl der Fälle, in welchen sein Amt an einen Mitspieler übergeht. Wieviel sind diese Vorrechte des Bankhalters werth?

Lösung. Die Anzahl der Fälle, in welchen der Bankhalter gewinnt, möge sich zu der Anzahl der Fälle, in welchen er verliert, verhalten wie $p$ zu $q$, wo also $p > q$ ist, und die Anzahl der Fälle, in welchen er sein Amt behält, zu der Anzahl der Fälle, in welchen er es verliert, wie $m$ zu $n$, wo $m > n$ ist. Würde man nun auf das gerade im Gange befindliche Spiel nur und nicht zugleich auf das nächstfolgende Spiel Rücksicht nehmen, so erhielte man für die Hoffnung des Bankhalters $\frac{p}{p+q}$ (wegen der $p$ Fälle für den Einsatz 1 und der $q$ Fälle für 0) und für die des Mitspielers $\frac{q}{p+q}$; beide würden sich also wie $p$ zu $q$ verhalten. Berücksichtigt man aber auch die ferneren Spiele, so gestalten sich die Verhältnisse verwickelter, und es ist nicht sofort in die Augen springend, wie die Prärogative im gegenwärtigen Spiele und die Hoffnung auf die Prärogative [183] im folgenden Spiele zusammen zu schätzen sind; man kommt sehr leicht zu trügerischen Schlussfolgerungen, wenn man nicht genau Acht giebt.



Ich hatte früher die Aufgabe folgendermaassen angefasst. Bliebe der Bankhalter immer in seinem Amte, so hätte er die Hoffnung $\frac{p}{q}$; wenn aber Gefahr für ihn vorhanden ist, sein Amt zu verlieren, so muss seine Hoffnung geringer sein. Bezeichne ich die Hoffnung des Bankhalters mit $x$ und die seines Mitspielers mit $y$, so würde ich finden (wegen der $p$ Fälle für 1, der $q$ Fälle für 0, der $m$ Fälle Bankhalter zu bleiben und der $n$ Fälle die Stelle des Mitspielers zu erhalten): $x = \frac{p + mx + ny}{p + q + m + n}$ und ebenso $y = \frac{q + my + nx}{p + q + m + n}$, oder $x : y = p + n : q + n$, also kleiner als $p : q$. Oder: da dem Bankhalter $\frac{p}{p+q}$ und seinem Mitspieler $\frac{q}{p+q}$ des Einsatzes gebührt, und da der Bankhalter in $m$ Fällen sein Amt behält und in $n$ Fällen es verliert, so würde sich für ihn die Hoffnung ergeben: $\frac{m\frac{p}{p+q} + n\frac{q}{p+q}}{m+n} = \frac{mp + nq}{(m+n)(p+q)}$, und für seinen Mitspieler $\frac{mq + np}{(m+n)(p+q)}$ übrig bleiben; es würde also das Verhältniss $(mp + nq) : (mq + np)$ resultiren, welches zwar kleiner als $p : q$, aber von dem zuerst gefundenen Verhältnisse verschieden ist. In der That verwarf ich auch bald beide Lösungen als unrichtig, da es völlig widersinnig erscheint, dass die grössere Wahrscheinlichkeit, welche der Bankhalter hat, sein Amt zu behalten, den mit diesem Amte verbundenen Vortheil verringert statt vergrössert. Ich neigte dann längere Zeit der Ansicht zu, dass die Hoffnungen aus den beiden Brüchen $\frac{p}{q}$ und $\frac{m}{n}$ zusammengesetzt seien und sich verhalten wie $pm : qn$, welches Verhältniss grösser als $p : q$ oder $m : n$ ist. Aber auch diese Lösung ist unrichtig. Ich will aber nicht zeigen, worin der Fehler bei diesen Berechnungen liegt, sondern unverzüglich die richtige Lösung ableiten, welche jene durch ihre augenscheinliche Wahrheit sofort in den Schatten stellt.

Wer die richtige Lösung finden will, muss zwei Dinge beachten. Nämlich erstens muss er bestimmen, wieviel dem Bankhalter nicht von dem ganzen Einsatze, [184] sondern nur von dem Einsatze seines Mitspielers gebührt (was nach Satz III, Zusatz 5 im ersten Theile zu bestimmen ist); zweitens muss er diesen dem Bankhalter gebührenden Antheil für die einzelnen aufeinander folgenden Spiele berechnen, aus deren Summirung sich dann die Gesammthoffnung ergiebt.

Es mögen die beiden Spieler unter sich festgesetzt haben, dass nach jedem Spiele der Sieger von dem Unterlegenen die Summe $a$ erhält. Mithin ist der dem Bankhalter gebührende Antheil von der Summe $a$ seines Mitspielers bei dem *ersten* Spiele (wegen der $p$ Fälle, $a$ zu gewinnen, und der $q$ Fälle, $a$ zu verlieren), gleich

$$\frac{pa + q(-a)}{p+q} = \frac{p-q}{p+q}\, a = \frac{r}{s}\, a,$$

wobei $p - q = r$, $p + q = s$ gesetzt ist; folglich gebührt dem Mitspieler $-\frac{r}{s}a$. Da nun der Bankhalter zugleich $m$ Fälle hat, in welchen er auch beim nächsten Spiele sein Amt behält, d. h. zu der Hoffnung $\frac{r}{s}a$ kommt, und $n$ Fälle, in welchen er sein Amt verliert und also die Hoffnung $-\frac{r}{s}a$ erhält, so hat der Bankhalter, beim *zweiten* Spiele die Summe $a$ zu erhalten, die Hoffnung:

$$\frac{m\frac{ra}{s} + n\frac{-ra}{s}}{m+n} = \frac{r}{s}\,\frac{m-n}{m+n}\, a = \frac{rt}{sv}\, a,$$

wobei $m - n = t$, $m + n = v$ gesetzt ist; folglich gebührt dem andern Spieler $-\frac{rt}{sv}a$. In gleicher Weise findet man, dass der Bankhalter, um beim *dritten* Spiele die Summe $a$ zu erhalten, die Hoffnung hat:

$$\frac{m\frac{rt}{sv}a + n\frac{-rt}{sv}a}{m+n} = \frac{rt^2}{sv^2}\, a,$$

und der andere Spieler $-\frac{rt^2}{sv^2}a$. Ebenso ergeben sich für den Bankhalter beim vierten, fünften, ... Spiele die Hoffnungen $\frac{rt^3}{sv^3}a$, $\frac{rt^4}{sv^4}a$, ... und für seinen Mitspieler dieselben Werthe mit negativen Zeichen. **[185]** Die Summe aller dieser Hoffnungen giebt nun die Gesammthoffnung des Bankhalters, bez. seines Mitspielers. Haben Beide $z$ einzelne Spiele verabredet oder so viele thatsächlich gemacht, wenn sie zu spielen aufhören, so ist die Hoffnung des Bankhalters gleich

$$\frac{r}{s}a + \frac{t}{v}\frac{r}{s}a + \frac{t^2}{v^2}\frac{r}{s}a + \cdots + \frac{t^{z-1}}{v^{z-1}}\frac{r}{s}a = \frac{ra}{s}\frac{1-\frac{t^z}{v^z}}{1-\frac{t}{v}}$$

$$= \frac{ra}{s}\left[\frac{m+n}{2n} - \frac{t^z}{2nv^{z-1}}\right].$$

Folgerung 1. Ist die Differenz zwischen $m$ und $n$ im Verhältniss zu ihren Werthen und also auch $\frac{t}{v}$ sehr klein oder wenigstens die Anzahl $z$ der einzelnen Spiele sehr gross, so kann man ohne merklichen Fehler das zweite Glied in der vorstehenden Formel vernachlässigen und die Hoffnung des Bankhalters gleich $\frac{ar}{s}\frac{m+n}{2n}$ setzen.

Folgerung 2. Wenn in kurzer Zeit eine grosse Anzahl von Spielen gemacht werden kann, der Bankhalter aber nicht mehr am Spiele theilnehmen und sein Vorrecht einem andern Spieler verkaufen will, so muss ihm dieser die Summe $\frac{ar}{s}\frac{m+n}{2n}$ geben. Will der Bankhalter aber zwar noch am Spiele theilnehmen, jedoch sein Amt einem andern Mitspieler überlassen, so muss dieser ihm die doppelte Summe, also $\frac{ar}{s}\frac{m+n}{n}$ geben; denn die Hälfte dieser Summe gebührt dem Bankhalter, wenn das Spiel ganz aufgegeben wird, und die andere Hälfte, wenn er dann mit seinem Gegner das Spiel wieder aufnimmt und diesem zugleich das Amt des Bankhalters überlässt.

Folgerung 3. Für $m = p$ und $n = q$ reducirt sich der Werth $\frac{ar}{s}\,\frac{m+n}{2n}$ auf $\frac{a(p-q)}{2q}$.



[186] **XX.**

**Aufgabe.** Es sind die Gewinnaussichten in dem gewöhnlich **Bockspiel** genannten Kartenspiele zu bestimmen.

Dieses Spiel ist in unserem Lande sehr üblich. Es wird mit Spielkarten von zwei oder mehr Theilnehmern gespielt. Einer von ihnen, welcher das Amt des Bankhalters versieht (welcher den Bock hat), mischt die Karten und vertheilt sie dann in so viele Häufchen, als — ihn selbst mitgezählt — Personen am Spiele theilnehmen. Darauf kauft jeder Mitspieler sich ein Häufchen um einen beliebigen Preis, während das übrig bleibende Häufchen der Bankhalter erhält. Dann kehrt der Bankhalter sämmtliche Häufchen um, wodurch die unterste Karte jedes Häufchens (und sonst keine) sichtbar wird. Der Bankhalter hat nun allen Mitspielern, deren Karten höheren Werth haben als die seinige, so viel auszuzahlen, als jeder von ihnen eingesetzt hatte; die übrigen Spieltheilnehmer aber, welche Karten von niedrigerem oder gleichem Werthe als der Bankhalter haben, verlieren ihren Einsatz an diesen. In seinem Amte verbleibt der Bankhalter so lange, als er auch nur einen der Mitspieler besiegt, und er verliert es nur, wenn er von allen zugleich besiegt wird.

Lösung. Um die Gewinnhoffnung des Bankhalters zu bestimmen, braucht man nur zu ermitteln, welche Werthe die Verhältnisse $\frac{p}{q}$ und $\frac{m}{n}$ der vorigen Aufgabe hier haben, und diese Werthe dann in die dort gefundene Formel einzusetzen. Die Anzahl der Farben des Kartenspiels sei gleich $f$ und die der Blätter in jeder Farbe gleich $g$, sodass das Kartenspiel insgesammt $fg$ Blätter enthält.

1. Wenn nun zwei Häufchen gebildet werden, so können ihre beiden untersten Blätter so oft verschiedene sein, als sich von den sämmtlichen $fg$ Karten Binionen bilden lassen, deren Anzahl gleich $\frac{fg(fg-1)}{2}$ ist. Von diesen Binionen bestehen einige aus Karten gleichen Werthes, andere aus Karten verschiedenen Werthes. Da je $f$ Blätter von

gleichem Werthe, welche $\frac{f(f-1)}{2}$ Binionen liefern, und $g$ verschiedene Werthe vorhanden sind, so ist die Anzahl aller Binionen, [**187**] welche zwei Blätter gleichen Werthes enthalten, gleich $\frac{gf(f-1)}{2}$; subtrahirt man diese Zahl von der Anzahl aller Binionen der $fg$ Karten, so bleiben $\frac{f^2 g(g-1)}{2}$ Binionen übrig, in welchen die beiden Karten von verschiedenem Werthe sind. Sind die beiden untersten Karten gleich, so gewinnt der Bankhalter nach der Spielordnung, was für ihn den Werth 1 hat; haben sie aber verschiedenen Werth, so hat jeder der beiden Spieler die gleiche Hoffnung auf Gewinn wie auf Verlust, da jeder gleich leicht eine minderwerthige oder eine mehrwerthige Karte als der andere ziehen kann; dies ergiebt für jeden den Werth $\frac{1}{2}$. Der Bankhalter hat also $\frac{fg(f-1)}{2}$ Fälle für 1 und $\frac{f^2 g(g-1)}{2}$ Fälle für $\frac{1}{2}$; folglich ist seine Hoffnung gleich $\frac{fg+f-2}{2(fg-1)}$ und die seines Mitspielers gleich $\frac{fg-f}{2(fg-1)}$. Die gleiche Hoffnung würde der Bankhalter (nach der Anmerkung[J] zu der Aufgabe XI im ersten Theile, S. 31) haben, wenn er $fg+f-2$ Fälle für Gewinn und $fg-f$ Fälle für Verlust hätte; folglich ist

$$p : q = (fg+f-2) : (fg-f).$$

Da er nun sein Amt auch in dem nächsten Spiele behält, wenn er gewinnt, und es verliert, wenn er besiegt wird, so ist hier auch $m = p$ und $n = q$.

Bemerkung. Für $f = 4$ wird $p : q = 2g+1 : 2g-2$; nimmt man noch $g = 9$ an, so erhält man $p : q = 19 : 16$. Setzt der Mitspieler die Summe $a$ für jedes Spiel ein, so hat (nach der vor. Aufgabe und der Folgerung (3)) der Bankhalter für das erste Spiel die Hoffnung $\frac{3}{35}a$ und für alle Spiele die Hoffnung $\frac{3}{32}a$, wobei, wenn nur 7 Spiele im Ganzen gemacht werden, der letztere Werth nur um $\frac{1}{1000000000}a$ vom wahren Werthe[7]) abweicht. Wenn also der Bankhalter das Spiel aufgeben will, so kann er seine Stelle um $\frac{3}{32}a$ an einen Dritten verkaufen; will er aber das Spiel fortsetzen und nur seinem

Mitspieler das Amt des Bankhalters überlassen, so muss er $\frac{3}{16}a$ von jenem erhalten.

2. *Wenn drei Häufchen gebildet werden* und drei Spieler, einschliesslich des Bankhalters, sich an dem Spiele betheiligen, so sind die untersten Blätter irgend zweier der drei Häufchen so vielen Möglichkeiten unterworfen, als Binionen aus sämmtlichen Karten gebildet werden können; denn man kann das dritte Häufchen als gar nicht vorhanden **[188]** und seine Karten unter die übrigen vertheilt annehmen. Daraus folgt, dass der Bankhalter soviele Fälle hat, in welchen er jeden einzelnen seiner Mitspieler oder dieser ihn besiegt, als sich bei der Annahme von nur zwei Häufchen ergeben hatten, d. h. es verhält sich auch hier $p:q=(fg+f-2):(fg-f)$. Für $f=4$, auf welchen Fall ich mich, der kürzeren Rechnung wegen und weil nur Kartenspiele mit 4 Farben in Gebrauch sind, beschränke, verhält sich also

$$p:q=(2g+1):(2g-2).$$

Das Verhältniss $m:n$ dagegen ändert seinen Werth mit der Anzahl der Spieler und der Häufchen; je mehr es deren sind, um so schwerer nur kann der Bankhalter sein Amt einbüssen. Bei drei Häufchen können die drei untersten Blätter so oft verschieden sein, als es von $4g$ Dingen Ternionen giebt, deren Anzahl gleich $\binom{4g}{3}=\frac{32g^3-24g^2+4g}{3}$ ist. Einige von diesen Ternionen enthalten drei Blätter gleichen Werthes, andere nur zwei Blätter gleichen Werthes und ein drittes Blatt von anderem Werth, noch andere drei Blätter, deren Werthe sämmtlich von einander verschieden sind. Die vier Blätter jedes Werthes lassen 4 Ternionen und 6 Binionen zu; da es nun $g$ Werthe giebt, so ist die Anzahl aller Ternionen gleichen Werthes gleich $4g$ und die aller Binionen gleich $6g$. Zu jeder Binion kann man ein beliebiges von den $4g-4$ Blättern der übrigen $g-1$ Werthe hinzunehmen; dies giebt $24g^2-24g$ Ternionen, welche zwei gleichwerthige Karten enthalten und bei deren einer Hälfte, $12g^2-12g$, die dritte Karte eine mehrwerthige, bei deren anderer Hälfte diese eine minderwerthige Karte ist. Subtrahirt man nun $4g$ und $24g^2-24g$ von der Anzahl aller Ternionen, so bleiben $\frac{32g^3-96g^2+64g}{3}$ Ternionen übrig, bei welchen keine zwei Karten gleichen Werth haben.

Nach der Spielordnung kann der Bankhalter sein Amt nicht verlieren, wenn die drei untersten Kartenblätter gleichwerthig sind oder wenn zwei gleichwerthig sind und das dritte höheren Werth hat. Ist das dritte Blatt aber minderwerthig oder haben alle drei Blätter verschiedenen Werth, so kann er sein Amt nur verlieren, wenn ihm die Karte mit dem geringsten Werthe zufällt, was in einem Falle geschehen kann, während zwei Fälle für das Gegentheil vorhanden sind; dies giebt ihm jedes Mal die Hoffnung $\frac{2}{3}$. Der Bankhalter hat daher $4g$ Fälle für 1, $12g^2 - 12g$ weitere Fälle für 1, $12g^2 - 12g$ Fälle für $\frac{2}{3}$ und [189] nochmals $\frac{32g^3 - 96g^2 + 64g}{3}$ Fälle für $\frac{2}{3}$; daraus folgt für seine Hoffnung, das Amt des Bankhalters zu behalten, der Werth $\frac{16g^2 - 3g - 4}{24g^2 - 18g + 3}$ und für das Gegentheil $\frac{8g^2 - 15g + 7}{24g^2 - 18g + 3}$. Die gleichen Hoffnungen würde der Bankhalter haben, wenn er $16g^2 - 3g - 4$ Fälle für Beibehaltung und $8g^2 - 15g + 7$ Fälle für Verlust seines Amtes hätte. Folglich verhält sich

$$m : n = (16g^2 - 3g - 4) : (8g^2 - 15g + 7).$$

Bemerkung. Für $g = 9$ verhält sich $p : q = 19 : 16$ und $m : n = 253 : 104$. Setzt nun der erste Mitspieler die Summe $a$, der zweite $b$ ein, so hat der Bankhalter (nach der vorigen Aufgabe und Zusatz 1) in Bezug auf den ersten Mitspieler die Hoffnung $\frac{a(p-q)(m+n)}{(p+q) \cdot 2n} = \frac{153}{1040} a$ und in Bezug auf den zweiten Mitspieler $\frac{b(p-q)(m+n)}{(p+q) \cdot 2n} = \frac{153}{1040} b$, also in Bezug auf Beide $\frac{153}{1040}(a+b)$; hierbei ist die Abweichung vom wahren Werthe bei 11 Spielen kleiner als $\frac{a+b}{100000}$. Deshalb wird der Bankhalter seine Stelle irgend einem Vierten um den Preis von $\frac{153}{1040}(a+b)$ verkaufen; will er aber nur mit einem der Mitspieler, z. B. mit demjenigen, welcher $a$ eingesetzt hat, seinen Platz tauschen, so muss er von jenem $\frac{153}{1040}(2a+b)$ erhalten, da nach dem eben Gesagten ihm $\frac{153}{1040}(a+b)$ gebühren, wenn er das Spiel abbrechen würde, und noch $\frac{153}{1040} a$ dafür, dass er das Amt des

Bankhalters an seinen Mitspieler abtritt und sich so zu dessen Schuldner für diese Summe macht.

3. Wenn vier Häufchen gebildet werden und einschliesslich des Bankhalters ebensoviele Spieler sich betheiligen, so giebt es wieder ebensoviele Fälle, in welchen der Bankhalter jeden einzelnen seiner Mitspieler besiegt oder von ihm besiegt wird, wie bei den vorigen zwei Annahmen. Dies gilt auch für jede beliebige Anzahl von Häufchen, da man immer je zwei so ansehen kann, als ob sie allein vorhanden wären. Daher behält das Verhältniss $p : q$ immer seinen Werth:



$$p : q = (2g + 1) : (2g - 2).$$

Das Verhältniss $m : n$, welches mit der Anzahl der Häufchen wächst, ermittele ich folgendermaassen. In Bezug auf die untersten Blätter der vier Häufchen sind die Fälle möglich: I. Alle vier Karten haben denselben Werth; II. drei Karten haben gleichen Werth und die vierte höheren; III. drei Karten haben gleichen Werth und die vierte geringeren; IV zwei Karten haben gleichen Werth und die beiden übrigen gleichen, aber von dem ersteren verschiedenen Werth; V. zwei Karten haben gleichen Werth und die beiden andern unter sich [**190**] und von dem ersten verschiedene Werthe, welche beide höher sind als der erstere, oder VI. welche beide niedriger sind, oder VII. von denen der eine höher, der andere niedriger ist; VIII. alle vier Blätter haben von einander verschiedene Werthe.

Tritt von diesen Fällen I, II, IV oder V ein, so kann der Bankhalter sein Amt nicht verlieren. In den Fällen III, VI, VII und VIII kann er es nur verlieren, wenn er die minderwerthigste Karte erhält, also in einem Falle, während er in drei Fällen sein Amt innebehält; dies giebt ihm jedesmal die Hoffnung $\frac{3}{4}$. Nun kann die Möglichkeit I in $g$ Fällen eintreten, II in $8g^2 - 8g$ Fällen, III in ebensovielen Fällen, IV in $18g^2 - 18g$ Fällen, V in $16g^3 - 48g^2 + 32g$ Fällen, VI und VII in ebensovielen Fällen und VIII in $\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}g^2 - 64g$ Fällen; die Anzahl aller Fälle ist gleich der Anzahl der Quaternionen von $4g$ Blättern, also gleich $\binom{4g}{4} = \frac{32}{3}g^4 - 16g^3 + \frac{22}{3}g^2 - g$. Die nähere Begründung dieser Zahlen überlasse ich, um Worte zu sparen, dem Leser. Der Bankhalter hat mithin $[g + (8g^2 - 8g) + (18g^2 - 18g) + (16g^3 - 48g^2 + 32g)] = 16g^3 - 22g^2 + 7g$ Fälle für 1 und $[(8g^2 - 8g) + 2(16g^3 - 48g^2 + 32g) + (\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}g^2 - 64g)] = \frac{32}{3}g^4 - 32g^3 + \frac{88}{3}g^2 - 8g$ Fälle für $\frac{3}{4}$; folglich hat seine Hoffnung, das Amt zu behalten, den Werth $\frac{24g^3 - 24g^2 + 3}{32g^3 - 48g^2 + 22g - 3}$, und die, es zu verlieren, den Werth $\frac{8g^3 - 24g^2 + 22g - 6}{32g^3 - 48g^2 + 22g - 3}$. Hieraus findet man

$$m : n = (24g^3 - 24g^2 + 3) : (8g^3 - 24g^2 + 22g - 6).$$

Bemerkung. Für $g = 9$ verhält sich $p : q = 19 : 16$ und $m : n = 15555 : 4080 = 61 : 16$. Hat nun der erste Mitspieler $a$, der zweite $b$ und der dritte $c$ eingesetzt, so ist die Hoffnung des Bankhalters gleich $\frac{(p - q)(m + n)}{(p + q) \cdot 2n}(a + b + c) = \frac{33}{160}(a + b + c)$, wobei der Fehler kleiner als $\frac{a + b + c}{10000}$ bei 15 Spielen ist. Will der Bankhalter das Spiel aufgeben und seinen Platz an irgend einen Fünften verkaufen, so kann er den Preis $\frac{33}{160}(a + b + c)$ beanspruchen; will er aber nur mit einem seiner Mitspieler **[191]** seinen Platz vertauschen, so muss er von demselben $\frac{33}{160}(2a + b + c)$, $\frac{33}{160}(a + 2b + c)$ oder $\frac{33}{160}(a + b + 2c)$ erhalten, je nachdem derselbe $a$, $b$ oder $c$ eingesetzt hat.

Ganz ähnlich lässt sich der Werth des dem Bankhalter eingeräumten Vorrechtes berechnen, wenn noch mehr Spieler theilnehmen und die ihnen entsprechende Anzahl Häufchen gebildet wird[8]).

## XXI.

### Aufgabe. Das Bassette-Spiel.

Dieses Spiel ist sehr berüchtigt in Folge der zahllosen Streitigkeiten und tragischen Ausgänge, zu welchen es, von hier ausgehend, hauptsächlich in Italien und Frankreich, Veranlassung gegeben hat; deshalb wurde das Spiel in jenen Ländern auch bald verpönt und unter Androhung schwerer Strafe verboten. In der Zeit, in welcher die Ausübung des Spieles besonders am französischen Königshofe blühte, unterwarf der französische Mathematiker und Hofmeister des damaligen Dauphin, Joseph Sauveur[9]), die Gewinnhoffnungen der Spieler seiner Berechnung; die berechneten Gewinnhoffnungen veröffentlichte er dann, in Tafeln kurz zusammengestellt, in dem Pariser »Journal des Sçavans« im Februar 1679.

Aus dieser Zeitschrift geben wir dasjenige über die Natur dieses Spieles und seine Gesetze wieder, was zur Prüfung der Tafeln und zur Auffindung des von dem Verfasser nicht mitgetheilten Rechnungsverfahrens zu wissen nöthig ist.


Nachdem der Spieler, welcher das Amt des Bankhalters versieht, ein vollständiges Kartenspiel genommen und gemischt hat, legen die übrigen Spieler vor sich auf den Tisch je ein Kartenblatt von beliebigem Werthe, welches jeder aus irgend welchem anderen Kartenspiele genommen hat, und belegen dasselbe mit einer Geldsumme von willkürlicher Höhe. Darauf dreht der Bankhalter sein ganzes Kartenspiel um, sodass die unterste Karte offen obenauf zu liegen kommt. Mit diesem Kartenblatte beginnend, hebt er der Reihe nach jedesmal zwei Blätter ab und setzt dies so lange fort, als Karten noch vorhanden sind; dabei wird von jedem Paare die obere Karte zu Gunsten des Bankhalters und die untere Karte zu Gunsten der Spieltheilnehmer gezählt. Ist z. B. die obere Karte ein König, so streicht der Bankhalter alle Einsätze ein, welche auf Könige gemacht sind; ist dagegen die untere Karte ein König, so muss der Bankhalter so viel an die betreffenden Mitspieler auszahlen, als von ihnen auf Könige gesetzt worden war. [**192**] Bis hierher hat noch Keiner vor irgend einem Andern einen Vortheil voraus. Es gelten aber ausserdem noch die folgenden Spielregeln.

1. Haben die beiden Blätter eines Paares den gleichen Werth — welche man dann *doublets* nennt und welche wir ein *Zwillingspaar* (*gemella*) nennen wollen —, so soll, statt dass sich Gewinn und Verlust aufheben, wie es nach den obigen Regeln der Fall sein würde, der Bankhalter allein gewinnen und also die Einsätze, welche auf Kartenblätter desselben Werthes gemacht waren, einstreichen dürfen.

2. Jeder Spieler darf auch mitten im Spiele sich um einen beliebigen Preis irgend eine Karte neu kaufen. Dann können unter den übrigen Karten des Bankhalters noch 1, 2, 3 oder alle 4 Karten sein, welche denselben Werth haben wie die neu hinzugekaufte Karte des Mitspielers: jedem dieser Fälle entspricht aber eine andere Gewinnhoffnung. Das Kartenpaar, dessen obere Karte für alle Mitspieler offen liegt, kommt in Bezug auf die in diesem Augenblicke neuerworbene Karte eines Mitspielers nicht in Betracht; und zwar erwirbt diese Karte, wenn sie mit der unteren Karte des Paares gleichen Werth hat, ihrem Besitzer als *verfrüht* (*praecox*,

trop jeune) nicht nur nichts, sondern sie zwingt ihn, sich eine neue Karte auszuwählen. Hat aber die obere Karte des nächsten Paares gleichen Werth mit der neuerworbenen Karte eines Mitspielers, so hat sie für den Bankhalter verminderten Werth (c'est une face) und erwirbt ihm nur $\frac{2}{3}$ vom Einsatze des betreffenden Spielers.

3. Auch das obere Blatt des ersten Paares hat verminderten Werth, da der Verdacht bestehen kann, dass es vom Bankhalter vorher gesehen worden ist, und lässt ihn ebenfalls nur $\frac{2}{3}$ von den betreffenden Einsätzen gewinnen.

4. Ist, wenn sich der Mitspieler seine Karte kauft, nur noch eine Karte desselben Werthes vorhanden, so kann kein Zwillingspaar, in welchem gerade der Vortheil des Bankhalters liegt, vorkommen. Deshalb ist zu seinen Gunsten festgesetzt, dass in diesem Falle die letzte von allen seinen Karten, welche sonst dem Mitspieler Nutzen bringen könnte, nichts gilt.

Lösung. Nunmehr gehe ich dazu über, die Gewinnhoffnungen des Bankhalters genau zu berechnen. Bezeichnet man die Anzahl der noch übrigen Kartenpaare mit $n$, also die Anzahl der Kartenblätter mit $2n$, und setzt man den Einsatz irgend eines Mitspielers gleich 1, so muss man zunächst beachten, dass von jedem einzelnen Paare entweder kein Blatt oder ein Blatt oder beide Blätter den gleichen Werth haben können, welchen die Karte dieses Mitspielers besitzt. Wenn keine Karte des Paares diesen Werth hat, so kann der Bankhalter durch dasselbe nichts gewinnen und nichts verlieren. Hat nur eine Karte diesen Werth, so kann sie ebenso leicht an erster wie an zweiter Stelle liegen, **[193]** und es giebt daher ebensoviele Fälle, in welchen der Bankhalter gewinnt und den Einsatz 1 des Mitspielers erhält, als Fälle, in welchen er verliert und daher (— 1) erhält. Da sich somit diese Fälle gegenseitig aufheben, so vereinfacht sich die Rechnung sehr erheblich, und es bleiben nur die Fälle zu betrachten übrig, in welchen das Kartenpaar ein Zwillingspaar ist, beide Blätter also den betreffenden Werth haben.

I. Hat der Bankhalter unter seinen $2n$ Karten nur noch eine Karte des streitigen Werthes, so kann von demselben kein Zwillingspaar vorkommen. Er hat also in Bezug auf jedes folgende Paar, dessen obere Karte nicht verminderten Werth hat, die Gewinnhoffnung 0 (siehe Taf. 5); ausgenommen davon ist das letzte Paar, in welchem hier gerade sein ihm eingeräumter Vortheil liegt. Denn die untere Karte des letzten

Paares, welche den Mitspieler gewinnen lassen könnte, zählt für ihn nach der vierten Spielregel nicht mit. In Bezug auf alle Paare hat daher der Bankhalter einen Fall mehr für Gewinn als für Verlust, und da im Ganzen $2n$ Fälle für die mögliche Lage der streitigen Karte vorhanden sind, so ist seine Gewinnhoffnung in Bezug auf alle Paare, wenn sie unverminderten Werth haben, gleich $\frac{1}{2n}$ (s. Taf. 1). Wenn aber das nächstfolgende Paar für den Bankhalter verminderten Werth hat, so giebt es unter allen $2n$ Fällen einen, durch welchen er $\frac{1}{3}$ von dem Einsatze seines Mitspielers auf Grund der dritten Spielregel verliert, was eine Verminderung seiner Gewinnhoffnung um $\frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2n} = \frac{1}{6n}$ (s. Taf. 2) bedeutet. Subtrahirt man diesen Werth von $\frac{1}{2n}$ und von 0, so erhält man $\frac{1}{3n}$ und $-\frac{1}{6n}$, welche Werthe die Gewinnhoffnungen des Bankhalters in Bezug auf das ganze Spiel und in Bezug auf das erste Paar angeben (s. Taf. 3 und 6).

II. Wenn der Bankhalter noch zwei Karten des streitigen Werthes hat, so sind für ihre Lage so viele Möglichkeiten vorhanden, als es Binionen von $2n$ Blättern giebt, nämlich $\frac{2n(2n-1)}{2}$. Unter diesen Fällen befindet sich ein einziger, in welchem die beiden Karten des streitigen Werthes mit einander combinirt sind. Es giebt also in Bezug auf jedes vollwerthige Kartenpaar, welches der Bankhalter noch hat, einen Fall und in Bezug auf alle $n$ Paare, wenn sie vollwerthig sind, $n$ Fälle, in welchen der Bankhalter durch das Zwillingspaar gewinnt. In Bezug auf das erste Paar, wenn es vollen Werth hat, ist mithin die Gewinnhoffnung des Bankhalters gleich $\frac{1}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n^2 - n}$ und in Bezug auf $n$ vollwerthige Paare gleich $\frac{n}{2n^2 - n} = \frac{1}{2n-1}$ (s. Taf. 5 und 1). Ist die eine Karte des streitigen Werthes die obere Karte des ersten Paares und deshalb also nach der dritten Spielregel von geringerem Werthe, so erhält man, da die zweite Karte [104] an jeder der $2n - 1$ übrigen Stellen — gleichgültig an welcher Stelle — liegen kann, ebensoviele Fälle, in welchen der Bankhalter den dritten Theil des Einsatzes seines Mitspielers einbüsst, und folglich vermindert sich seine Gewinnhoffnung um $\frac{(2n-1)\frac{1}{3}}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{1}{3n}$ (s. Taf. 2). Subtrahirt man diesen Werth von $\frac{1}{2n-1}$ und von $\frac{1}{2n^2-n}$, so bleibt für seine Gewinnhoffnung in dem ganzen Spiele $\frac{n+1}{6n^2-3n}$ übrig und für seine Hoffnung mit dem ersten Paare zu gewinnen $\frac{-2n+4}{6n^2-3n}$ (s. Taf. 3 u. 6).

III. Sind noch **drei** Karten des streitigen Werthes vorhanden, so giebt es für ihre Lage ebensoviele Fälle, als es Ternionen von $2n$ Blättern giebt, also $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}$. Aus diesen Fällen suche ich diejenigen heraus, in welchen der Bankhalter durch ein Zwillingspaar gewinnt. Haben die beiden Blätter des ersten von $m$ noch übrigen Paaren den streitigen Werth, so kann das gleichwerthige dritte Blatt an jedem der übrigen $2m-2$ Plätze liegen, und es giebt mithin ebensoviele zugehörige Fälle; setzt man nun für $m$ nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, . . ., $n$, so erhält man 0, 2, 4, . . ., $2n-2$ zugehörige Fälle. Folglich giebt es in Bezug auf alle $n$ Paare $0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$ Fälle, in welchen der Bankhalter durch ein Zwillingspaar gewinnt und das Spiel beendigt. Daher ist seine Gewinnhoffnung in Bezug auf das erste Paar, wenn es vollwerthig ist, gleich $\frac{2n-2}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}} = \frac{3}{2n^2-n}$ und in Bezug auf $n$ vollwerthige Paare gleich $\frac{n(n-1)}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}} = \frac{3}{4n-2}$ (s. Taf. 5 u. 1). Wenn aber eine der drei Karten die obere Karte des ersten Paares ist und deshalb nach der dritten Spielregel verminderten Werth hat, so können die beiden andern Blätter soviele verschiedene Lagen einnehmen, als die übrigen $2n-1$ Blätter Binionen zulassen, nämlich

$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$; in ebensovielen Fällen erniedrigt sich der Gewinn des Bankhalters um den dritten Theil, und folglich vermindert sich seine Gewinnhoffnung um $\frac{\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}}$ $= \frac{1}{2n}$ (s. Taf. 2). Subtrahirt man diesen Werth von $\frac{3}{4n-2}$ und $\frac{3}{2n^2-n}$, so bleibt für seine Gewinnhoffnungen in Bezug auf das ganze Spiel und in Bezug auf das erste Paar allein $\frac{n+1}{4n^2-2n}$ und $\frac{-2n+7}{4n^2-2n}$ übrig (s. Taf. 3 u. 6).



[**195**] IV. Wenn sich noch alle vier Karten des streitigen Werthes unter den Karten des Bankhalters befinden, so giebt es für ihre Lage ebensoviele Möglichkeiten, als Quaternionen aus allen $2n$ Karten sich bilden lassen, also $\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}$. Kommen nun zwei dieser Blätter in demselben Paare vor, welches das erste von $m$ noch übrigen sein mag, so können die übrigen beiden gleichwerthigen Blätter so oft ihre Plätze unter den übrigen $2m-2$ Karten wechseln, als diese Binionen zulassen; [**196**] es ergeben sich also für das betrachtete Zwillingspaar $\frac{(2m-2)(2m-3)}{2}$ zugehörige Fälle. Setzt man nun für $m$ nacheinander die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, so erhält man $0, 1, 6, 15, 28, \ldots \frac{(2n-2)(2n-3)}{2}$ Fälle, und es giebt daher im Ganzen $0+1+6+15+28+\cdots + \frac{(2n-2)(2n-3)}{2}$ Fälle, in welchen der Bankhalter durch ein Zwillingspaar gewinnt. Die Summe der vorstehenden Reihe, welche jetzt zu bilden ist, kann auf verschiedene Weisen gefunden werden.

a) Die zweiten Differenzen der Glieder der Reihe sind einander gleich, und folglich ist sie eine den figurirten Zahlenreihen ähnlich gebaute Reihe. Wie derartige Reihen aber zu summiren sind, habe ich am Ende des Capitels III im zweiten Theile (Seite 100) gezeigt.

b) Da die Zahlen der obigen Reihe offenbar mit der Reihe der Dreieckszahlen übereinstimmen, nachdem man in der letzteren eine um die andere Zahl gestrichen hat, so zerlegt man diese Reihe $A$, welche mit zwei Nullen beginnt, in zwei andere Reihen $B$ und $C$, von denen die erstere alle an ungerader Stelle stehenden Dreieckszahlen enthält und mit der obigen Reihe übereinstimmt, während die letztere Reihe alle an gerader Stelle stehenden Dreieckszahlen umfasst. Die Reihe $C$ wird dann nochmals in zwei Reihen zerlegt, nämlich in eine Reihe $B$ und in die Reihe $D$. Nimmt man nun aus den Reihen $B$, $C$, $D$ die ersten $n$ Glieder und aus der Reihe $A$ die ersten $2n$ Glieder und bezeichnet man deren Summen mit den betreffenden Buchstaben, so folgt $A = B + C = 2B + D$; also ist $B = \frac{1}{2}(A - D)$. Nun ist (nach Kap. III des zweiten Theiles) $A = \binom{2n}{3}$ und $D = n(n-1)$, folglich ist



| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 6 | 10 | 4 |
| 3 | 15 | 21 | 6 |
| 6 | 28 | 36 | 8 |
| 10 | : | : | : |
| 15 | | | |
| 21 | | | |
| 28 | | | |
| 36 | | | |
| : | | | |

$$B = \frac{4n^3 - 9n^2 + 5n}{6}.$$

c) Das allgemeine Glied der Reihe $B$ ist gleich

$$\frac{(2m-2)(2m-3)}{2} = \frac{4m(m-1)}{2} - 3(m-1) = 4\binom{m}{2} - 3\binom{m}{1}.$$

Die Summe der ersten $n$ Glieder ist also gleich der vierfachen Summe aller Zahlen $\frac{m(m-1)}{2}$ vermindert um die dreifache Summe aller Zahlen $(m-1)$, wobei für $m$ nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, ... $n$ zu setzen sind. Nach Kap. III des zweiten Theiles ist [197] die erste Summe gleich $\binom{n+1}{3}$ und die zweite Summe gleich $\binom{n}{2}$. Folglich ist $B$ gleich $4\binom{n+1}{3} - 3\binom{n}{2}$

$$= \frac{4n^3 - 9n^2 + 5n}{6}, \text{ wie vorher.}$$

Es giebt also in Bezug auf das erste Paar $\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}$ Fälle und in Bezug auf alle $n$ Paare, wenn sie vollwerthig sind, $\frac{4n^3 - 9n^2 + 5n}{6}$ Fälle, in welchen der Bankhalter



durch ein Zwillingspaar gewinnt; diesen beiden Fällen entsprechend haben seine Gewinnhoffnungen die Werthe:

$$\frac{\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}} = \frac{6}{2n^2 - n}$$

und

$$\frac{\frac{4n^3 - 9n^2 + 5n}{6}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}} = \frac{4n-5}{(2n-1)(2n-3)}$$

$$= \frac{4n-5}{4n^2 - 8n + 3}$$

(s. Taf. 5 u. 1). Wenn aber eine Karte des streitigen Werthes die obere Karte des ersten Paares ist und dadurch für den Bankhalter nach der dritten Spielregel verminderten Werth hat, so können die übrigen drei Blätter so oft verschiedene Plätze einnehmen, als sich Ternionen aus $2n - 1$ Blättern bilden lassen. Folglich giebt es $\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6}$ Fälle, in welchen der Bankhalter nur $\frac{2}{3}$ vom Einsatze seines Mitspielers erhält, und folglich erfährt seine Gewinnhoffnung eine Verminderung

um $\frac{\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}} = \frac{2}{3n}$ (s. Tafel. 2).

Subtrahirt man diesen Werth von den beiden vorher gefundenen Hoffnungen, so erhält man für die Gewinnhoffnungen des Bankhalters in Bezug auf das ganze Spiel und in Bezug auf das erste Paar die Werthe:

$$\frac{4n^2 + n - 6}{12n^3 - 24n^2 + 9n} \quad \text{und} \quad \frac{-4n + 20}{6n^2 - 3n}$$

(s. Taf. 3 und 6).

*Tafeln für den Bankhalter.* [Auf S. [**195**] des Originals.]



Die Anzahl der Blätter des streitigen Werthes unter den noch übrigen $2n$ Karten ist

I. II. III. IV.

1. Gewinnhoffnung in Bezug auf alle Paare, wenn diese als vollwerthig gezählt werden:

$$\frac{1}{2n}, \quad \frac{1}{2n-1}, \quad \frac{3}{4n-2}, \quad \frac{4n-5}{4n^2-8n+3};$$

2. Kann das erste Paar verminderten Werth haben, so erniedrigt sich die Gewinnhoffnung um:

$$\frac{1}{6n}, \quad \frac{1}{3n}, \quad \frac{1}{2n}, \quad \frac{2}{3n};$$

3. Gewinnhoffnung im ganzen Spiele, wenn das erste Paar minderwerthig sein kann:

$$\frac{1}{3n}, \quad \frac{n+1}{6n^2-3n}, \quad \frac{n+1}{4n^2-2n}, \quad \frac{4n^2+n-6}{12n^3-24n^2+9n};$$

4. Gewinnhoffnung im ganzen Spiele, wenn das erste Paar nicht berücksichtigt wird:*)

$$\frac{2}{6n-3}, \quad \frac{n}{6n^2-9n+3}, \quad \frac{n^2-2n}{4n^3-12n^2+11n-3}, \quad \frac{4n^2-7n-3}{12n^3-36n^2+33n-9};$$

5. Gewinnhoffnung in Bezug auf das erste Paar, wenn es als vollwerthig gezählt wird, ohne Rücksicht auf die folgenden Paare:

$$0, \quad \frac{1}{2n^2-n}, \quad \frac{3}{2n^2-n}, \quad \frac{6}{2n^2-n};$$

6. Gewinnhoffnung in Bezug auf das erste Paar, wenn es minderwerthig sein kann, ohne Rücksicht auf die folgenden Paare:

$$-\frac{1}{6n}, \quad \frac{-2n+4}{6n^2-3n}, \quad \frac{-2n+7}{4n^2-2n}, \quad \frac{-4n+20}{6n^2-3n}.$$

---

*) Dies ist der Fall, wenn ein Mitspieler während des Spieles ein Blatt neu kauft (2te Spielregel). *H.*

So haben wir von den sechs Tafeln, welche der französische Verfasser gegeben hat, bereits fünf aufgestellt, und es bleibt nur noch die vierte Tafel zu begründen, welche den Vortheil des Bankhalters für den Fall angiebt, dass sein erstes Kartenpaar, da er dessen oberes Blatt schon gesehen hat*), nicht berücksichtigt wird. Diese vierte Tafel lässt sich aber mit Hülfe dessen, was in den vorhergehenden vier Abschnitten gezeigt worden ist, leicht aufstellen, nur muss man dabei die folgenden zwei Punkte beachten:

1) Das untere Blatt des ersten Paares hat entweder den streitigen Werth oder nicht. Im ersteren Falle kann der Bankhalter weder Vortheil noch Schaden haben, da nach der zweiten Spielregel dieses Blatt als verfrühtes das Spiel beendet. [**198**] Im letzteren Falle dagegen bleibt für den Bankhalter die Zahl von Fällen, den Einsatz ganz oder zu $\frac{2}{3}$ zu erhalten, übrig, welche er gehabt hätte, wenn das erste Paar überhaupt nicht vorhanden gewesen wäre und er statt $n$ nur $n-1$ Paare gehabt hätte.

2. Nachdem das obere Blatt des ersten Paares gesehen worden ist, bleiben nur noch $2n-1$ Karten übrig, sodass die Anzahl aller Fälle mit der Anzahl der Combinationen von $2n-1$ Dingen, nicht von $2n$ Dingen übereinstimmt.

Beachtet man diese beiden Punkte, so erkennt man leicht die Berechtigung des folgenden Verfahrens. Man schreibt aus den vorhergehenden Abschnitten I bis IV die Brüche der ersten und zweiten Tafel heraus, wie sie vor ihrer Reduction lauteten:

$$1.\quad \frac{1}{2n},\quad \frac{n}{\binom{2n}{2}},\quad \frac{n(n-1)}{\binom{2n}{3}},\quad \frac{\frac{1}{6}n(n-1)(4n-5)}{\binom{2n}{4}};$$

$$2.\quad \frac{\frac{1}{3}}{2n},\quad \frac{\frac{1}{3}(2n-1)}{\binom{2n}{2}},\quad \frac{\frac{1}{3}\binom{2n-1}{2}}{\binom{2n}{3}},\quad \frac{\frac{1}{3}\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n}{4}}.$$

---

*) Dies ist der Fall, wenn ein Mitspieler während des Spieles ein Blatt neu kauft ($2^{\text{te}}$ Spielregel). *H.*

Dann ersetzt man in allen Zählern $n$ durch $n-1$ und in allen Nennern $2n$ durch $2n-1$ und erhält:



1. $$\frac{1}{2n-1},\quad \frac{n-1}{\binom{2n-1}{2}},\quad \frac{(n-1)(n-2)}{\binom{2n-1}{3}},\quad \frac{\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-9)}{\binom{2n-1}{4}};$$

2. $$\frac{\frac{1}{3}}{2n-1},\quad \frac{\frac{1}{3}(2n-3)}{\binom{2n-1}{2}},\quad \frac{\frac{1}{3}\binom{2n-3}{2}}{\binom{2n-1}{3}},\quad \frac{\frac{1}{3}\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{4}}.$$

Subtrahirt man nun die Werthe unter (2) von denen unter (1), so erhält man, nachdem man noch die nöthigen Reductionen ausgeführt hat, die Werthe der obigen Tafel (4).

[**199**] Vergleicht man nun die Tafeln des Herrn *Sauveur* mit den unserigen, so wird man finden, dass jene an nicht wenigen Stellen der Verbesserung bedürfen. Was dort aber über das Verhältniss gesagt wird, in welchem der Vortheil des Bankhalters mit der zu- oder abnehmenden Kartenzahl zu- oder abnimmt, ist auf den ersten Blick aus den vorstehenden Tafeln zu ersehen, und deshalb braucht darüber kein Wort verloren zu werden.

## XXII.

**Aufgabe.** In irgend einem Glücks- oder Würfelspiele sei die Anzahl aller Fälle $a$, die Anzahl gewisser Fälle unter ihnen $b$ und die Anzahl aller übrigen Fälle $a-b=c$. Titius kauft sich von Cajus jedes einzelne Spiel oder jeden einzelnen Wurf um einen Pfennig. Tritt einer der $b$ Fälle ein, so erhält er seinerseits von Cajus $m$ Pfennige; er erhält dagegen nichts, wenn sich einer der $c$ Fälle ereignet. Wenn aber $n$-mal hintereinander einer der $c$ Fälle eintritt, so erhält Titius von Cajus seine $n$ Pfennige zurück. Welche Gewinnhoffnungen haben Titius und Cajus?

Lösung. Diese anscheinend ziemlich verwickelte Aufgabe bietet keine besondere Schwierigkeiten dar, wenn sie richtig angegriffen wird[10]). Ich fange von rückwärts an, indem ich annehme, dass Titius bereits $n-1$ Pfennige verbraucht, d. h. schon $(n-1)$-mal einen der $c$ Fälle erlangt hat und jetzt im Begriffe ist, den $n^{\text{ten}}$ Wurf zu thun. Dann kann entweder einer der $b$ Fälle oder nochmals einer der $c$ Fälle eintreten. Titius kann also entweder von Cajus $m$ Münzen erhalten, von welchen er $n$ an ihn bezahlt hatte, [200] sodass er $m-n$ Pfennige gewinnt, oder seine $n$ Pfennige zurück erhalten, sodass er weder Gewinn noch Verlust hat. Folglich hat Titius die Gewinnhoffnung $h_{n-1} = \frac{b(m-n)+c\cdot 0}{a} = (m-n)\frac{b}{a}$.

Nun nehme ich an, dass Titius $(n-2)$-mal einen der $c$ Fälle erlangt hat und im Begriffe ist, den $(n-1)^{\text{ten}}$ Wurf zu thun. Erhält er (wenn er einen der $b$ Fälle wirft) von Cajus $m$ Pfennige, so beträgt sein Gewinn $m-n+1$ Pfennige, da er $n-1$ Pfennige an Cajus gezahlt hatte. Wirft Titius aber wieder einen der $c$ Fälle, so kommt er zu der eben berechneten Gewinnhoffnung der vorigen Annahme. Daher ist jetzt seine Gewinnhoffnung

$$h_{n-2} = \frac{b(m-n+1)+ch_{n-1}}{a} = \frac{(m-n+1)ab+(m-n)cb}{a^2}.$$

Ferner nehme ich an, dass Titius $(n-3)$-mal einen der $c$ Fälle erreicht hat und jetzt den $(n-2)^{\text{ten}}$ Wurf thun will. Dann hat er $b$ Fälle, $m$ Pfennige zu erhalten, also $m-n+2$ Pfennige zu gewinnen, und $c$ Fälle, die vorige Gewinnhoffnung zu bekommen. Folglich ist seine Gewinnhoffnung

$$h_{n-3} = \frac{b(m-n+2)+ch_{n-2}}{a}$$
$$= \frac{(m-n+2)a^2b+(m-n+1)acb+(m-n)c^2b}{a^3}.$$

Ist $(n-4)$-mal einer der $c$ Fälle eingetreten, so ergiebt sich die Gewinnhoffnung $h_{n-4}$, welche Titius für den nächsten Wurf hat, in gleicher Weise:

$$h_{n-4} = \frac{b(m-n+3)+ch_{n-4}}{a}$$
$$= \frac{(m-n+3)a^3b+(m-n+2)a^2cb+(m-n+1)ac^2b+(m-n)c^3b}{a^4}.$$

So könnte ich fortfahren, die Gewinnhoffnungen des Titius zu berechnen, wenn $(n-5)$-, $(n-6)$-, .... mal einer der

$c$ Fälle von ihm erlangt ist. Dies ist aber nicht nöthig, da aus den vorstehenden Werthen das Bildungsgesetz der Gewinnhoffnungen leicht zu erkennen ist. [**201**] Es ergiebt sich für die Gewinnhoffnung des Titius bei Beginn des Spieles der Werth:



$$\frac{(m-1)\,a^{n-1}b+(m-2)\,a^{n-2}cb+(m-3)\,a^{n-3}c^2b+\cdots+(m-n)c^{n-1}b}{a^n}$$

$$=\frac{mb}{a}\left[1+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}+\cdots+\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}\right]$$

$$-\frac{b}{a}\left[1+2\,\frac{c}{a}+3\,\frac{c^2}{a^2}+\cdots+n\,\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}\right]$$

$$=\frac{m\,(a^n-c^n)}{a^n}-\left[\frac{a^n-c^n}{a^{n-1}\,b}-\frac{n\,c^n}{a^n}\right].$$

Dieser Ausdruck giebt die Gewinnhoffnung des Titius und die Verlustbefürchtung des Cajus an, wenn der zweite Theil kleiner als der erste ist, und umgekehrt die Verlustbefürchtung des Titius und Gewinnhoffnung des Cajus, wenn der zweite Theil grösser als der erste ist. Sollen Titius und Cajus nun gleiche Hoffnungen haben, so müssen $m$ und $n$ so bestimmt werden, dass beide Theile einander gleich werden; es muss also sein:

$$m\,\frac{a^n-c^n}{a^n}=\frac{a^n-c^n}{a^{n-1}\,b}-\frac{n\,c^n}{a^n},$$

woraus, wenn $n$ gegeben ist, folgt:

$$m=\frac{a}{b}-\frac{n\,c^n}{a^n-c^n}.$$

Ist aber $m$ gegeben, so folgert man aus der letzten Gleichung:

[**202**] $$(a^n-c^n):c^n=bn:(a-bm)$$

oder $$a^n:c^n=(a-bm+bn):(a-bm).$$

Folglich ist:

$$n=\frac{\log(a-bm+bn)-\log(a-bm)}{\log a-\log c},$$

und speciell für $b=1$:

$$n=\frac{\log(a-m+n)-\log(a-m)}{\log a-\log c}.$$

Man kann den Werth von $n$ mit Hülfe der logarithmischen Linie auf folgende Weise leicht graphisch bestimmen. In einem willkürlich gewählten Punkte $A$ irgend einer logarithmischen Curve $FADE$ zieht man die Ordinate $AC$ und theilt sie in einem Punkte $B$ so, dass sich $AB : BC = b : c$ verhält. Ferner bestimmt man den Punkt $M$ auf $AC$ so, dass sich $AM : AB = mb : b$ verhält, und wählt dann $AB$ als

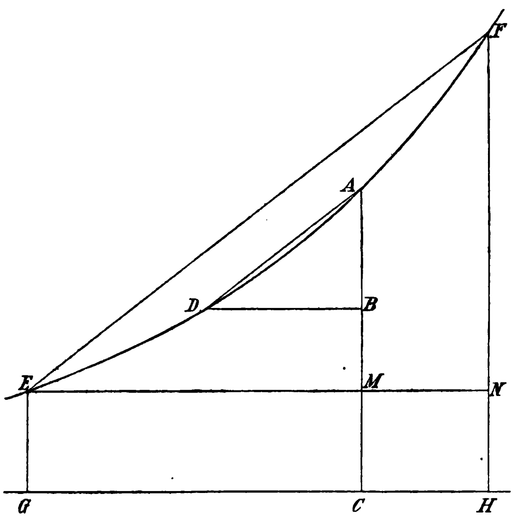


Fig. 1.

Längeneinheit. Durch die Punkte $B$ und $M$ zieht man darauf Parallelen zur Axe $GCH$, welche die Curve in den Punkten $D$ und $E$ schneiden. Zu der Verbindungsgeraden $AD$ zieht man eine Parallele durch den Punkt $E$, welche die Curve in dem Punkte $F$ schneidet. Die Ordinate $FH$ wird dann von der Linie $EM$ in dem Punkte $N$ so geschnitten, dass $FN$ gleich $n$ Längeneinheiten ist.

Zahlenbeispiel. Titius will mit 2 Würfeln den Sechserpasch werfen. Es ist also $a = 36$, $b = 1$, $c = 35$. Für $m$ und $n$ sind die Zahlen [**203**] $m = 6$, $n = 20$ gegeben. Es ergiebt sich mit Hülfe der obigen Formel, dass Titius die Gewinnhoffnung $2{,}5842 - 4{,}1192 = -1{,}5350$ hat; er kann also nur mit der Befürchtung zu verlieren das Spiel beginnen und thut besser, sich gleich vor Beginn desselben mit $1\frac{1}{2}$ Pfennig von seiner Spielverpflichtung loszukaufen. Soll die Hoffnung beider Spieler annähernd gleich sein, so findet man, wenn man den Werth $n = 20$ beibehält, für $m$ den Werth $9\frac{2429}{4307}$, und, wenn man den Werth $m = 6$ beibehält, für $n$ einen zwischen 11 und 12 gelegenen Werth.



Ich bemerke im Allgemeinen zu einem derartigen Glücksspiele noch Folgendes:

1. Wenn bei fest gegebenen Werthen von $a$, $b$, $c$, $m$ dem Buchstaben $n$ nacheinander die Werthe 1, 2, 3, 4, ... beigelegt werden, so wächst die Gewinnhoffnung des Titius zuerst fortwährend (schon für $n = 1$ ist sie grösser als die Hoffnung des Cajus).

2. Titius hat die günstigsten Annahmen für $n = m - 1$ und $n = m$, welche beide denselben Werth für seine Gewinnhoffnung ergeben.

3. Wächst $n$ noch weiter, über $m$ hinaus, so nimmt der Werth der Gewinnhoffnung des Titius fortwährend ab, bis sie schliesslich in Verlustbefürchtung übergeht, während die Hoffnung des Cajus zunimmt.

4. Die Gewinnhoffnung oder Verlustbefürchtung, welche Titius hat, wenn $n$ ausserordentlich gross wird, verhält sich zu derjenigen, welche er bei einem einzigen Wurfe hat (bei welchem auf die Bedingung, dass Titius seine $n$ Münzen zurückerhält, wenn er in $n$ aufeinander folgenden Würfen keinen der $b$ Fälle erzielt, keine Rücksicht genommen wird), wie $a : b$. Denn die letztere Hoffnung ist (nach Satz III, Zusatz 6 im ersten Theile) gleich $\frac{b(m-1) + c(-1)}{a} = \frac{bm - a}{a}$; [204] die erstere Gewinnhoffnung ist nach der obigen Formel aber gleich $\frac{bm - a}{b}$. Beide Werthe stellen dem Titius Gewinn oder Verlust, dem Cajus also umgekehrt Verlust oder Gewinn in Aussicht, je nachdem $bm$ grösser oder kleiner als $a$ ist.

## XXIII.

**Aufgabe.** Das Spiel mit blinden Würfeln.

Blinde Würfel nennt man die sechs, bei unseren Jahrmarktsgauklern häufig zu findenden Würfel, welche zwar die Gestalt gewöhnlicher Würfel, aber auf fünf Seitenflächen keine Augen haben. Auf der sechsten Seitenfläche trägt der erste Würfel ein Auge, der zweite zwei Augen, ..., der sechste sechs Augen, sodass die Summe aller Augen auf den sechs Würfeln gleich 21 ist. Solche Würfel legen jene Schwindler, welche die Jahrmarktsbesucher prellen wollen, zusammen mit einer Liste auf, in welcher die für alle Augenzahlen von 1 bis 21 zu gewinnenden Geldpreise verzeichnet sind, wie dies z. B. auch die weiter unten folgende Tafel zeigt. Wer nun sein Glück versuchen will, zahlt dem Gaukler einen Pfennig und wirft dann jene sechs Würfel auf das Spielbrett; wirft er eine bestimmte Anzahl Augen, so erhält er den ausgesetzten Preis, wirft er aber kein Auge, so ist sein Einsatz verloren.

Lösung. Will man die Hoffnungen der Spieler berechnen, so hat man Folgendes zu beachten.

1. Die Zahl aller Fälle bei sechs derartigen Würfeln ist genau so gross wie bei gewöhnlichen Würfeln, also gleich (erster Theil, S. 21) $6^6 = 46656$.

2. Die Anzahl aller Fälle, in welchen kein Auge fällt, ist gleich $5^6 = 15625$; denn da auf jedem Würfel fünf blinde Seitenflächen sind, so kann jede dieser fünf Flächen des ersten Würfels mit jeder der fünf blinden Flächen des zweiten Würfels combinirt werden und jede dieser Combinationen wiederum mit jeder der fünf blinden Flächen des dritten Würfels, und so fort, [**205**] sodass die Zahl der vorhergehenden Fälle durch den Hinzutritt eines neuen Würfels verfünffacht wird.

3. Jede mögliche Augenzahl wird entweder von einem oder von zwei oder von noch mehr Würfeln erzeugt. Wenn ein Würfel die Zahl liefert, so zeigen die andern fünf Würfel blinde Seitenflächen, und folglich sind hier $5^5 = 3125$ Fälle möglich. Wird die Augenzahl von 2, 3, 4, 5, 6 Würfeln erzeugt, so ergeben sich in gleicher Weise für die Anzahl, in welchen dies geschieht, bez. die Zahlen $5^4 = 625$, $5^3 = 125$, $5^2 = 25$, $5^1 = 5$, $5^0 = 1$.

4. Dieselbe Augenzahl kann im Allgemeinen nicht nur von mehr oder weniger Würfeln, sondern bisweilen auch von derselben Anzahl Würfel auf mehrfache Weise hervorgebracht werden. So können 12 Augen auf drei Arten von drei Würfeln ($1+5+6$, $2+4+6$, $3+4+5$) und auf zwei Arten von vier Würfeln ($1+2+3+6$, $1+2+4+5$) erzeugt werden.

Damit nun keine der Arten, auf welche eine der Zahlen 0 bis 21 erzeugt werden kann, übersehen wird, bedient man sich annähernd des gleichen Verfahrens, welches oben bei Aufgabe XVII angegeben worden ist. Man schreibt der Reihe nach die Zahlen 0 bis 21 an den linken Rand ebensovieler Zeilen, bildet dann die Combinationen ohne Wiederholung der sechs Zahlen 1 bis 6 zu allen Exponenten 1 bis 6 und verbindet in jeder dieser Combinationen die einzelnen Zahlen durch Pluszeichen. Schliesslich ordnet man diese Combinationen in die 22 Zeilen so, dass ihre Summen mit der Zahl der Zeile am linken Rande übereinstimmen. Darauf kann man leicht die Anzahl der Fälle, welche jeder Anzahl Augen entspricht, bestimmen, indem man die den einzelnen zugehörigen Erzeugungsarten entsprechenden Zahlen von Fällen summirt. So z. B. erhält man für die Zahl 12 im Ganzen 425 Fälle; denn da sie auf drei Arten von 3 Würfeln erzeugt werden kann und jeder Art 125 Fälle entsprechen, so erhält man zunächst $3 \cdot 125 = 375$ Fälle, und da sie auf zwei Arten von 4 Würfeln gebildet werden kann und jeder Art 25 Fälle entsprechen, so kommen noch $2 \cdot 25 = 50$ Fälle hinzu, was insgesammt 425 Fälle ergiebt. Verfährt man nun für alle Zahlen von 0 bis 21 in gleicher Weise und addirt man dann alle so erhaltenen Fälle, so muss, wenn keine Art übersehen und richtig verfahren ist, ihre Summe gleich 46656 sein. [206]

| Anzahl der Augen | Zugehörige Würfelcombinationen | Anzahl der Fälle | Geldpreise in Pfennigen |
|---|---|---|---|
| 0 | . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 15625 | 0 |
| 1 | 1 . . . . . . . . . . . . . . | 3125 | 1 |
| 2 | 2 . . . . . . . . . . . . . . | 3125 | 1 |
| 3 | 3, 12 . . . . . . . . . . | 3750 | 1 |
| 4 | 4, 13 . . . . . . . . . . | 3750 | 1 |
| 5 | 5, 14, 23 . . . . . . | 4375 | 1 |
| 6 | 6, 15, 24, 123 . . . | 4500 | 1 |
| 7 | 16, 25, 34, 124 . . . | 2000 | 1 |
| 8 | 26, 35, 125, 134 . . . | 1500 | 1 |
| 9 | 36, 45, 126, 135, 234 | 1625 | 2 |
| 10 | 46, 136, 145, 235, 1234 | 1025 | 2 |
| 11 | 56, 146, 236, 245, 1235 | 1025 | 2 |
| 12 | 156, 246, 345, 1236, 1245 | 425 | 2 |
| 13 | 256, 346, 1246, 1345 . . . | 300 | 2 |
| 14 | 356, 1256, 1346, 2345 . . . | 200 | 3 |
| 15 | 456, 1356, 2346, 12345 . . . | 180 | 3 |
| 16 | 1456, 2356, 12346 . . . . . . | 55 | 3 |
| 17 | 2456, 12356 . . . . . . . . . . | 30 | 4 |
| 18 | 3456, 12456 . . . . . . . . . . | 30 | 5 |
| 19 | 13456 . . . . . . . . . . . . . . | 5 | 12 |
| 20 | 23456 . . . . . . . . . . . . . . | 5 | 45 |
| 21 | 123456 . . . . . . . . . . . . . . | 1 | 90 |

Summe: 46 656

[**207**] Nachdem man diese Tafel aufgestellt hat, bleibt nichts weiter zu thun übrig, als die Zahlen der Fälle in den zugehörigen Geldpreis zu multipliciren und die Summe der Producte durch 46656 zu dividiren, um die Hoffnung des Spielers zu berechnen, für welche man so den Werth $\frac{36875}{46656}$ erhält. Der Spieler hätte also nur den $\frac{36875}{46656}$ten Theil eines Pfennigs einzusetzen, wenn er dieselben Gewinnaussichten wie der Unternehmer haben sollte; da er aber einen ganzen Pfennig eingesetzt hat, so bemisst die Differenz nämlich $\frac{9781}{46656}$ seine Verlustbefürchtung und die Gewinnhoffnung des Unternehmers.

[**208**] **XXIV.**

**Aufgabe.** Bei dem gleichen Spiele, wie in der vorigen Aufgabe, einigt sich der Unternehmer mit dem Spieler dahin, dass dieser seine eingesetzten Pfennige zurückerhält, wenn er fünfmal hinter einander kein Auge wirft. Welche Hoffnungen haben jetzt Beide?

Lösung. Ich sah einst auf einem Jahrmarkte einen Gaukler, welcher den Umstehenden, um sie anzulocken, noch die genannte Vergünstigung anbot und mich dadurch veranlasste, über die oben behandelte Aufgabe XXII nachzudenken. Da deren Lösung ganz allgemein gegeben worden ist, so bleibt mir hier nur noch übrig, in derselben an Stelle der Buchstaben die betreffenden Zahlen zu setzen. Wie aus der vorigen Aufgabe klar ist, haben hier die Buchstaben $a$, $b$, $c$ und $n$ der Aufgabe XXII die Werthe:

$$a = 46656, \quad b = 31031, \quad c = 15625, \quad n = 5.$$

Da die Anzahl der Münzen, welche der Spieler in den einzelnen Fällen gewinnt, verschieden ist, so muss man für $m$ seinen zu erwartenden Gewinn setzen, welcher gleich den arithmetischen Mitteln aus sämmtlichen einzelnen Gewinnen ist, also

$$m = \frac{36875}{31031}.$$

In der That geben 31031 Fälle für $\frac{36875}{31031}$ und 15625 Fälle für 0 dem Spieler die gleiche Hoffnung $\frac{36875}{46656}$, welche bei der vorigen Aufgabe sich für ihn ergeben hatte.

[**209**] Setzt man diese Zahlenwerthe in die erste Formel auf Seite 64 ein, so findet man*) für die Gewinnhoffnung des Spielers: $-0{,}31520 + 0{,}02239 = -0{,}29281$.



Da nun die Verlustbefürchtung des Spielers in der vorigen Aufgabe gleich $\frac{9781}{46656} = 0{,}20964$ gefunden wurde, also fast nur zwei Drittel der jetzt gefundenen 0,29281 beträgt, so ist klar ersichtlich, dass die Bedingung der Zurückgabe des Einsatzes an den Spieler, welche der alte geriebene Gauner scheinbar zu dessen Gunsten hinzugefügt hat, nur zu dessen grösserem Nachtheile ist. Ich bemerke noch, dass der Gaukler, selbst wenn er schon nach zwei erfolglosen Würfen den ganzen Einsatz zurückzugeben sich verpflichtete, noch grössere Gewinnhoffnung haben würde, als wenn er diese Bedingung gar nicht hinzugefügt hätte.

*) Die von *Bernoulli* ausführlich mitgetheilte Rechnung ist wegen des zu geringen Interesses, welches sie darbietet, unterdrückt.
*H.*

[210]

# Wahrscheinlichkeitsrechnung

(Ars conjectandi)

von

**Jakob Bernoulli.**

Basel 1713.

---

## Vierter Theil.

## Anwendung der vorhergehenden Lehre auf bürgerliche, sittliche und wirthschaftliche Verhältnisse.

---

### Kapitel I.

### Einleitende Bemerkungen über Gewissheit, Wahrscheinlichkeit, Nothwendigkeit und Zufälligkeit der Dinge.

Die Gewissheit irgend eines Dinges lässt sich entweder objectiv, d. h. an sich betrachten und bezeichnet in diesem Falle nichts anderes als das wirkliche gegenwärtige oder zukünftige Vorhandensein jenes Dinges, oder subjectiv, d. h. in Bezug auf uns und besteht dann in dem Maasse unserer Erkenntniss hinsichtlich dieser Wirklichkeit.

Alles, was unter der Sonne existirt oder entsteht, das Vergangene, das Gegenwärtige und das Zukünftige hat an sich die höchste Gewissheit. Hinsichtlich der gegenwärtigen und vergangenen Dinge ist diese Behauptung von selbst einleuchtend, da eben jene Dinge dadurch, dass sie vorhanden sind oder gewesen sind, die Möglichkeit, dass sie nicht existiren oder existirt haben, ausschliessen. Auch hinsichtlich der zukünftigen Dinge ist nicht daran zu zweifeln, [**211**] dass sie vorhanden sein werden, wenn auch nicht mit der unabwendbaren Nothwendigkeit irgend eines Verhängnisses, so doch auf Grund göttlicher Voraussicht und Vorherbestimmung. Denn wenn das, was zukünftig ist, nicht sicher sich ereignet, so ist nicht einzusehen, warum dem höchsten Schöpfer der uneingeschränkte Ruhm der Allwissenheit und Allmacht zukommen sollte. Darüber aber, wie sich diese Gewissheit des zukünftigen Seins mit der Zufälligkeit und der Unabhängigkeit der wirkenden Ursachen verträgt, mögen andere streiten; wir wollen hierauf, da dies unserem Ziele fern liegt, nicht eingehen.

Die in Bezug auf uns betrachtete Gewissheit der Dinge ist nicht bei allen die gleiche, sondern variirt vielfach nach oben und unten. Jene Dinge, von welchen es uns durch Offenbarung, Ueberlegung, sinnliche Wahrnehmung, Erfahrung, Autopsie oder irgendwie anders gewiss ist, dass wir an ihrer gegenwärtigen 'oder zukünftigen Existenz nicht Zweifel haben dürfen, besitzen für uns die höchste und absolute Gewissheit. Alle übrigen Dinge erhalten ein, gemäss unserer Erkenntniss unvollkommneres Maass der Gewissheit, welches grösser oder kleiner ist, je nachdem mehr oder weniger Wahrscheinlichkeiten dafür vorhanden sind, dass irgend ein Ding ist, sein wird oder gewesen ist.

Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Theil vom Ganzen. Wenn z. B. die volle und absolute Gewissheit, welche wir mit $a$ oder 1 bezeichnen, aus fünf Wahrscheinlichkeiten oder Theilen bestehend angenommen wird, von denen drei für das gegenwärtige oder zukünftige Eintreten irgend eines Ereignisses und die übrigen beiden dagegen sprechen, so soll das Ereigniss $\frac{3}{5}a$ oder $\frac{3}{5}$ der Gewissheit besitzen.

Es wird also von zwei Dingen dasjenige wahrscheinlicher sein, welches den grösseren Theil der Gewissheit besitzt, wenn auch im gewöhnlichen Sprachgebrauche nur das wirklich wahrscheinlich genannt wird, dessen Wahrscheinlichkeit merklich grösser als die Hälfte der Gewissheit ist. Ich sage: merklich; denn das Ding, dessen Wahrscheinlichkeit annähernd nur der Hälfte der Gewissheit gleich ist, wird zweifelhaft oder schwankend genannt. Es ist also das, was $\frac{1}{5}$ der Gewissheit besitzt, wahrscheinlicher als etwas, was $\frac{1}{10}$ der Gewissheit für sich hat; keines von beiden ist aber thatsächlich wahrscheinlich.

*Möglich* ist das, was einen, wenn auch sehr kleinen Theil der Gewissheit für sich hat; unmöglich ist dagegen das, was keinen oder einen unendlich kleinen Theil der Gewissheit besitzt. Möglich ist also z. B. das, was $\frac{1}{20}$ oder $\frac{1}{30}$ der Gewissheit für sich hat.

*Moralisch gewiss* ist etwas, dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt, sodass ein Unterschied nicht wahrgenommen werden kann. *Moralisch unmöglich* dagegen ist das, was nur so viel Wahrscheinlichkeit besitzt, als dem moralisch Gewissen an der vollen Gewissheit mangelt. [212] Wenn man also das, was $\frac{999}{1000}$ der Gewissheit für sich hat, als moralisch gewiss betrachtet, so ist das, was nur $\frac{1}{1000}$ der Gewissheit für sich hat, moralisch unmöglich.

*Nothwendig* ist das, was sein, werden oder gewesen sein muss, und zwar ist die *Nothwendigkeit* entweder eine *physische* — wie es z. B. nothwendig ist, dass das Feuer brennt; dass das Dreieck drei Winkel besitzt, deren Summe gleich zwei Rechten ist; dass eine Mondfinsterniss eintreten muss, wenn sich der Mond zur Zeit des Vollmondes in einem Knotenpunkte befindet —, oder eine *hypothetische*, in Folge deren jedes Ding, so lange es ist oder gewesen ist oder als seiend oder gewesen seiend angenommen wird, existiren oder existirt haben muss — in diesem Sinne ist es nothwendig, dass Peter, von welchem ich weiss und annehme, dass er schreiben wird, auch wirklich schreibt —, oder schliesslich eine durch Uebereinkommen *vereinbarte* — z. B. muss ein Würfelspieler, welcher mit einem Würfel sechs Augen geworfen hat, nothwendiger Weise gewonnen haben, wenn unter den Spieltheilnehmern vorher vereinbart worden war, dass der Sieg an einen Wurf von sechs Augen geknüpft sein soll.

*Zufällig* (sowohl insofern es von der Willkür eines mit Vernunft begabten Wesens, als auch insofern es von einem zufälligen Ereignisse oder vom Schicksal abhängt) ist das, was nicht sein, werden oder gewesen sein könnte, wohlverstanden in Folge einer entfernten, nicht der nächsten Möglichkeit; denn nicht immer schliesst die Zufälligkeit die Nothwendigkeit bis zu Ursachen von untergeordneter Bedeutung ganz aus, wie ich an Beispielen erläutern will. Ganz gewiss ist es, dass ein Würfel bei gegebener Lage, Geschwindigkeit und Entfernung vom Würfelbrette von dem Augenblicke an, in welchem er die Hand verlässt, nicht anders fallen kann, als er thatsächlich auch fällt. Ebenso kann das Wetter bei einer bestimmten gegenwärtigen Beschaffenheit der Atmosphäre, bei bestimmter Menge, Lagerung, Bewegung, Richtung, Geschwindigkeit der Winde, Dünste und Wolken und bestimmten mechanischen Gesetzen, nach welchen sich diese sämmtlich untereinander bewegen, morgen nicht anders sein, als es wirklich sein wird. Diese Wirkungen folgen aus ihren nächsten Ursachen nicht weniger nothwendig, als die Erscheinungen der Finsternisse aus der Bewegung der Gestirne. Und dennoch hält man an der Gewohnheit fest, nur die Finsternisse zu den nothwendigen Ereignissen, die Fälle des Würfels und die zukünftige Gestaltung des Wetters aber zu den zufälligen Ereignissen zu rechnen. Der Grund hiervon liegt ausschliesslich darin, dass das, was zur Bestimmung späterer Geschehnisse als gegeben angenommen wird und in Wirklichkeit auch gegeben ist, uns noch nicht hinreichend bekannt ist; wäre es uns aber hinreichend bekannt, so ist das Studium der Mathematik und Physik genügend weit ausgebildet, damit wir aus gegebenen Ursachen die späteren Wirkungen ebenso berechnen könnten, wie wir z. B. aus den bekannten astronomischen Gesetzen die Finsternisse berechnen und voraussagen können. Bevor aber die Astronomie zu solcher Vollkommenheit gelangt war, musste man die Finsternisse deshalb genau so wie die beiden andern oben angeführten Ereignisse zu den künftig zufällig eintretenden zählen. Daraus folgt, dass einem Menschen und zu einer bestimmten Zeit etwas als zufällig erscheinen kann, was einem andern Menschen [**213**] (ja sogar auch demselben) zu einer andern Zeit, nachdem die Ursachen davon erkannt sind, als nothwendig erscheint. Daher hängt die Zufälligkeit vornehmlich auch von unserer Erkenntniss ab, insofern als wir keinen Grund wahrnehmen können, welcher dagegen spricht, dass etwas nicht ist oder nicht sein wird, trotzdem es auf Grund der nächsten, uns aber noch unbekannten Ursache nothwendig ist oder sein wird.

Ein *Glück* oder ein *Unglück* nennt man das Gute oder Schlimme, was uns widerfährt, aber nicht jedes beliebige Gute oder Schlimme, sondern nur das, was wahrscheinlicher oder mindestens gleich wahrscheinlich uns nicht hätte zustossen können; das Glück oder Unglück ist daher um so grösser, je weniger wahrscheinlich es war, dass das Gute oder Schlimme sich ereignen würde. So ist derjenige besonders vom Glück begünstigt, welcher beim Graben in der Erde einen

Schatz findet, da dies in tausend Fällen nicht einmal eintritt. Wenn von zwanzig Fahnenflüchtigen einer, welcher zum abschreckenden Beispiele für Alle gehängt werden soll, ausgeloost wird, so können die neunzehn übrigen, welchen das Schicksal hold gesinnt war, nicht eigentlich glücklich genannt werden, sondern nur jener zwanzigste, welchen das verhängnissvolle Loos getroffen hat, ist der unglücklichste. Kehrt dein Freund aus einer Schlacht, in welcher nur ein kleiner Theil der Kämpfer fiel, unverletzt zurück, so kannst du ihn nicht glücklich nennen, wenn du ihn nicht vielleicht deswegen so nennen willst, weil er durch das Glück, welches in der Erhaltung des Lebens liegt, ausgezeichnet ist.

## Kapitel II.

### Wissen und Vermuthen. Vermuthungskunst. Beweisgründe für Vermuthungen. Einige allgemeine hierhergehörige Grundsätze.

Wir sagen von dem, was gewiss und unzweifelhaft ist, dass wir es *wissen* oder *kennen*, von allem andern aber, dass wir es nur *vermuthen* oder *annehmen*.

Irgend ein Ding *vermuthen* heisst soviel als seine Wahrscheinlichkeit messen. Deshalb bezeichnen wir als *Vermuthungs-* oder *Muthmaassungskunst* (*ars conjectandi sive stochastice*) die Kunst, so genau als möglich die Wahrscheinlichkeiten der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urtheilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder rathsamer erscheint. Darin allein beruht die ganze Weisheit des Philosophen und die ganze Klugheit des Staatsmannes.

[**214**] Die Wahrscheinlichkeiten werden sowohl nach der *Anzahl* als auch nach dem *Gewichte der Beweisgründe* geschätzt, welche auf irgend eine Weise darthun oder anzeigen, dass ein Ding ist, sein wird oder gewesen ist. Unter dem *Gewichte* aber verstehen wir die Beweiskraft.

Die *Beweisgründe* sind entweder *innere*, schlechthin künstliche, genommen aus den beweisenden Punkten der Ursache, der Wirkung, des Subjectes, der Verbindung, des Anzeichens oder eines beliebigen anderen Umstandes, welcher irgend einen Zusammenhang mit der zu beweisenden Sache zu haben scheint, oder äussere und nicht künstliche, hergenommen aus der Autorität und den Zeugnissen der Menschen. Z. B. Titius wird unterwegs ermordet aufgefunden, Maevius wird des vollbrachten Mordes beschuldigt; die Beweisgründe der Anklage sind: 1. Maevius hatte bekanntermaassen einen Hass auf Titius geworfen (ein Beweisgrund hergenommen von der möglichen Ursache, denn dieser Hass konnte Maevius zu dem Morde veranlasst haben); 2. Maevius erbleichte beim Verhöre und antwortete ängstlich (ein Beweisgrund hergenommen von der Wirkung, da das Erbleichen und die Angst durch das Bewusstsein des verübten Mordes hervorgerufen sein können); 3. im Hause des Maevius wurde ein blutiger Dolch gefunden (hier liegt ein Anzeichen vor); 4. an demselben Tage, an welchem Titius getödtet wurde, war auch Maevius den gleichen Weg gegangen (hier liegt ein Umstand des Ortes und der Zeit vor); 5. Cajus sagt aus, dass am Tage vor dem Morde zwischen Titius und Maevius ein Streit stattgefunden hat (dies ist ein Zeugniss).

Bevor wir aber zu unserer eigentlichen Aufgabe, zu zeigen, wie man diese Beweisgründe für Vermuthungen zur Messung der Wahrscheinlichkeiten verwenden muss, übergehen, sei es uns gestattet, einige allgemeine Regeln oder Axiome hier vorauszuschicken, welche die blosse Vernunft jedem Menschen mit gesundem Verstande diktirt und welche auch im gewöhnlichen Leben von den einsichtsvolleren Menschen immer beobachtet werden.

1. *Bei Dingen, über welche man volle Gewissheit erlangen kann, sind Vermuthungen unzulässig.* Es wäre also widersinnig, wenn ein Astronom, welcher weiss, dass jährlich zwei oder drei Mondfinsternisse eintreten, von irgend einem Vollmonde vermuthen wollte, ob er verfinstert sein werde oder nicht, da er ja die Wahrheit durch sichere Berechnung ermitteln kann. Ebenso würde der Richter, welcher auf seine Frage nach dem Verbleibe des gestohlenen Gutes von dem Diebe die Antwort erhält, dass er dasselbe an Sempronius verkauft habe, thöricht handeln, aus der Geberde oder aus dem Tone des Diebes oder aus der Beschaffenheit des gestohlenen Gutes oder aus anderen Umständen bei dem Diebstahle Vermuthungen über die Wahrscheinlichkeit dieser Antwort zu folgern, wenn Sempronius zugegen ist und er von ihm alles gewiss und leicht erfahren kann.

2. Es genügt nicht nur den einen oder den anderen Beweisgrund zu erwägen, sondern man muss alle Beweisgründe untersuchen, welche zu unserer Kenntniss kommen können [215] und in irgend welcher Beziehung dem Beweise der Sache dienlich zu sein scheinen. Z. B. Es fahren drei Schiffe aus dem Hafen fort; nach einiger Zeit wird gemeldet, dass eines von ihnen durch Schiffbruch zu Grunde gegangen ist, und wir stellen nun Vermuthungen an, welches von den dreien es sei. Würden wir nun allein die Anzahl der Schiffe in Betracht ziehen, so müssten wir schliessen, dass das Unglück jedem von ihnen gleich leicht zugestossen sein könnte; da wir uns aber erinnern, dass eines der drei Schiffe morsch und alt und schlecht mit Segeln und Raaen ausgerüstet war, auch einen jungen, unerfahrenen Steuermann hatte, so ist es uns wahrscheinlicher, dass dieses Schiff zu Grunde gegangen ist, als eines der beiden anderen.

3. Man muss nicht nur alle Gründe beachten, welche für eine Sache sprechen, sondern auch alle, welche gegen dieselbe angeführt werden können, damit nach genauer Abwägung beider klar ersichtlich ist, welche überwiegen. Hinsichtlich eines sehr lange schon von der Heimath abwesenden Freundes wird gefragt, ob man ihn für todt erklären könne. Für die Bejahung der Frage sprechen folgende Gründe: Trotz aller aufgewendeten Mühe hat man innerhalb voller zwanzig Jahre keine Nachricht über ihn erhalten können. Reisende sind sehr vielen Lebensgefahren ausgesetzt, vor denen die zu Hause Bleibenden bewahrt sind; vielleicht ist er also in den Wellen umgekommen, vielleicht ist er unterwegs ermordet worden, vielleicht ist er im Kampfe oder durch eine Krankheit oder durch irgend einen Unglücksfall und an einem Orte, an welchem ihn niemand kannte, um das Leben gekommen. Wäre er noch am Leben, so müsste er schon ein Alter erreicht haben, welches sogar zu Hause nur wenigen Menschen zu erreichen vergönnt ist. Er würde geschrieben haben, wenn er auch an den entlegensten Küsten Indiens wäre, da er wusste, dass ihm zu Hause eine Erbschaft in Aussicht stand; und sonstige Gründe. Mit diesen Beweisgründen darf man sich aber nicht begnügen, sondern man muss diesen die folgenden, welche für die Verneinung der aufgeworfenen Frage sprechen, entgegenstellen: Es ist bekannt, dass er ein leichtsinniger, nachlässiger Mensch war, dass er ungern zur Feder griff, dass er auf

Freunde nichts hielt. Vielleicht ist er von Wilden gefangen fortgeführt worden, sodass er nicht schreiben konnte; vielleicht hat er auch aus Indien einigemal geschrieben und sind die Briefe entweder durch Nachlässigkeit der Boten oder durch Schiffbruch verloren gegangen. Schliesslich sind Viele noch länger ausgeblieben und doch endlich unversehrt noch in die Heimath zurückgekehrt.

4. *Zur Beurtheilung allgemeiner Dinge genügen allgemeine und generelle Beweisgründe; um aber Vermuthungen über individuelle Dinge sich zu bilden, muss man auch besondere und individuelle Gründe, wenn man sie irgendwie nur haben kann, heranziehen.* Handelt es sich ganz allgemein nur darum, anzugeben, um wieviel wahrscheinlicher es ist, dass ein junger Mann von zwanzig Jahren einen sechzigjährigen Greis überlebt, als dieser jenen, so giebt es ausser dem Unterschiede des Alters und der Jahre nichts, was man in Betracht ziehen kann. Wenn aber von zwei bestimmten Personen, dem jungen Peter und dem alten Paul die Rede ist, so muss man auch noch den Gesundheitszustand beider und die Sorgfalt, [216] welche jeder auf seine Gesundheit verwendet, berücksichtigen; denn wenn Peter krank ist, wenn er seinen Leidenschaften die Zügel schiessen lässt und unmässig lebt, so kann Paul, trotzdem er weit älter ist, dennoch mit vollstem Rechte hoffen, Peter überleben zu können.

5. *Bei ungewissen und zweifelhaften Dingen muss man sein Handeln hinausschieben, bis mehr Licht geworden ist. Wenn aber die zum Handeln günstige Gelegenheit keinen Aufschub duldet, so muss man von zwei Dingen immer das auswählen, welches passender, sicherer, vortheilhafter und wahrscheinlicher als das andere erscheint, wenn auch keines von beiden thatsächlich diese Eigenschaften hat.* So ist es bei einer ausgebrochenen Feuersbrunst, aus welcher du nicht anders entrinnen kannst, als dass du entweder hoch oben vom Dache oder aus irgend einem unteren Stockwerke herabspringst, für dich besser, das Letztere zu wählen, weil es grössere Sicherheit bietet, wenn auch keines von Beiden völlig sicher ist und ohne Gefahr, sich zu verletzen, ausgeführt werden kann.

6. *Was in irgend einem Falle nützen und in keinem Falle schaden kann, ist dem vorzuziehen, was in*

keinem Falle nützt oder schadet. Hierher gehört das, von welchem unser Sprüchwort gilt:



»Hilft es nicht, so schadet es nicht!«

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen; denn das, was nützen kann, ist unter sonst gleichen Umständen besser, sicherer und wünschenswerther als das, was nicht nützen kann.

7. Den Werth menschlicher Thaten darf man nicht nach ihrem Erfolge schätzen. Denn die thörichtsten Handlungen haben zuweilen den besten Erfolg, während die klügsten dagegen den schlechtesten haben. Daher sagt der Dichter:

> Careat successibus, opto, quisquis ab eventu
> facta notanda putat*).

Wenn es z. B. ein Spieler unternimmt, mit drei Würfeln auf einen Wurf dreimal sechs Augen zu werfen, so wird man von ihm, selbst wenn er zufällig gewinnen sollte, sicherlich sagen, dass er thöricht gehandelt habe. Verkehrt sind die Urtheile des Volkes, welchem ein Mensch um so hervorragender erscheint, je mehr er vom Glücke begünstigt ist, von welchem sogar ein günstiges Verbrechen oft noch als gute That angesehen wird; hierüber sagt wieder Owen[11]) treffend:

Epigr. lib. sing., Num. 216.

> Quod male consultum cecidit feliciter, Ancus
> Arguitur sapiens, qui modo stultus erat;
> Quod prudenter erat provisum, si male vortat,
> Ipse Cato populo judice stultus erit**).

8. Wir müssen uns bei unseren Urtheilen hüten, Dingen mehr Gewicht beizulegen, als ihnen zukommt, und etwas, was wahrscheinlicher ist, als etwas Anderes für ganz sicher zu halten oder Anderen als solches aufzudrängen. Wir müssen nämlich unser Vertrauen, welches wir in Dinge setzen, [217] dem Grade ihrer

---

*) Mag Jeder des Erfolges entbehren, welcher meint nach ihrem Erfolge die That schätzen zu müssen. *H.*

**) Etwas, das schlecht überlegt war, glückte dem Ancus, d'rum wird er
Plötzlich ein Weiser genannt, eben noch galt er für dumm;
Ist aber etwas klug überlegt, doch übel der Ausgang,
Hält das thörichte Volk selbst einen Cato für dumm.
*H.*

Gewissheit proportional und um ebensoviel kleiner nehmen, als die Wahrscheinlichkeit des Dinges selbst kleiner als seine Gewissheit ist, was wir durch das Sprüchwort auszudrücken pflegen:



»Man muss ein jedes in seinem Werth und
Unwerth beruhen lassen.«

9. Weil aber doch nur selten volle Gewissheit erlangt werden kann, so wollen es die Nothwendigkeit und das Herkommen, dass das, was nur moralisch gewiss ist, für unbedingt gewiss gehalten wird. Es würde also nützlich sein, wenn auf Veranlassung der Obrigkeit bestimmte Grenzen für die moralische Gewissheit festgesetzt würden, wenn z. B. entschieden würde, ob zur Erzielung dieser $\frac{99}{100}$ oder $\frac{999}{1000}$ der Gewissheit verlangt werden müssen, damit ein Richter nicht parteiisch sein kann, sondern einen festen Gesichtspunkt hat, welchen er beim Fällen des Urtheiles beständig im Auge behält.

Noch mehr derartige Axiome kann jeder, welcher im gewöhnlichen Leben bewandert ist, auf eigene Faust aufstellen; wir können nicht alle, zumal uns die passende Gelegenheit für ihre Anwendung mangelt, im Gedächtnisse haben.

## Kapitel III.

### Verschiedene Arten von Beweisgründen; Schätzung ihres Gewichtes für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von Dingen.

Derjenige, welcher die Beweisgründe eines Urtheils oder einer Vermuthung prüft, wird drei verschiedene Arten unterscheiden: einige Beweisgründe sind nothwendig vorhanden und zeigen die Sache zufällig an, andere sind zufällig vorhanden und zeigen die Sache nothwendig an, und endlich noch andere sind zufällig vorhanden und zeigen die Sache auch zufällig an. Ich erläutere den Unterschied an Beispielen: Mein Bruder hat mir schon lange Zeit keinen Brief geschickt; ich bin nun im Zweifel, ob seine Trägheit oder Geschäfte daran schuld sind, befürchte aber auch, dass er vielleicht gar gestorben ist. Hier sind also drei Gründe für das Ausbleiben von Briefen: Trägheit, Tod und Geschäfte. Der erste dieser Gründe ist nothwendig vorhanden (in Folge hypothetischer Nothwendigkeit, weil ich von meinem Bruder weiss und annehme, dass er träge ist), aber er zeigt das Ausbleiben der Briefe nur zufällig an, da diese Trägheit meinen Bruder nicht hätte am Schreiben zu hindern brauchen. Der zweite Grund ist zufällig vorhanden (denn es kann mein Bruder noch am Leben sein), aber er zeigt das Ausbleiben der Briefe nothwendig an, da ein Todter nicht schreiben kann. [218] Der dritte Grund ist zufällig vorhanden und zeigt auch das Ausbleiben der Briefe zufällig an, da mein Bruder Geschäfte haben oder auch nicht haben kann, und da sie im ersteren Falle nicht so umfangreich zu sein brauchen, dass sie ihn vom Schreiben abhalten. — Ein weiteres Beispiel ist das folgende: Ein Spieler soll nach den getroffenen Vereinbarungen gewinnen, wenn er mit zwei Würfeln sieben Augen wirft, und ich will vermuthen, ob er Hoffnung auf Gewinn hat. Hier ist der Beweisgrund für den Sieg der Wurf von sieben Augen, welcher den Sieg mit Nothwendigkeit anzeigt (nämlich kraft der von den Spieltheilnehmern getroffenen Vereinbarung), aber dieser Grund ist nur zufällig vorhanden, da ja ausser den sieben Augen auch eine andere Anzahl von Augen fallen kann.

Ausser dieser Verschiedenartigkeit der Beweisgründe mag man noch einen weiteren Unterschied zwischen ihnen beachten, insofern als einige derselben reine, andere gemischte sind. Reine Beweisgründe nenne ich solche, welche in einigen Fällen eine Sache so beweisen, dass sie in anderen Fällen nichts positiv beweisen; gemischte Beweisgründe aber nenne ich solche, welche in einigen Fällen eine Sache so beweisen, dass sie in anderen Fällen das Gegentheil derselben beweisen. Z. B. In einem Haufen von sich Streitenden wird einer derselben mit einem Schwerte erstochen und durch das Zeugniss vertrauenswürdiger Menschen wird festgestellt, dass der Thäter einen schwarzen Mantel getragen hat. Wenn nun von den Streitenden Gracchus und drei Andere mit schwarzen Mänteln bekleidet waren, so wird dieses Kleidungsstück einen Beweisgrund dafür abgeben, dass der Mord von Gracchus verübt wurde, aber nur einen gemischten; denn in einem Falle beweist der Mantel seine Schuld, in drei Fällen aber seine Unschuld, je nachdem der Mord von ihm selbst oder von einem der drei Andern verübt worden ist, und er kann nicht von diesem Letzteren ausgeführt sein, ohne dass Gracchus unschuldig ist. Ist aber in dem angestellten Verhöre Gracchus erbleicht, so liefert dieses Erbleichen einen reinen Beweisgrund; denn es beweist die Schuld des Gracchus, wenn es von dem bösen Gewissen herkommt, es bezeugt aber nicht seine Unschuld, wenn es durch irgend eine andere Ursache veranlasst ist, da Gracchus sehr leicht aus einer solchen erbleicht und dabei doch der Mörder sein kann.



Aus dem bisher Gesagten ist klar ersichtlich, dass die Beweiskraft, welche irgend ein Beweisgrund hat, von der Menge der Fälle abhängt, in welchen dieser vorhanden oder nicht vorhanden sein kann, eine Sache anzeigen oder nicht anzeigen oder auch ihr Gegentheil anzeigen kann. Daher kann der Grad der Gewissheit oder die Wahrscheinlichkeit, welche dieser Beweisgrund liefert, aus jenen Fällen mit Hülfe der Lehren des ersten Theiles genau so berechnet werden, als wie die Hoffnungen der Theilnehmer an einem Glücksspiele gefunden zu werden pflegen. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dass die Anzahl der Fälle, in welchen ein Beweisgrund zufällig vorhanden sein kann, [219] gleich $b$, die der Fälle, in welchen ein Beweisgrund nicht vorhanden sein kann, gleich $c$, und die Anzahl beider Fälle $b + c = a$ ist. Ferner sei die Anzahl der Fälle, in welchen der Beweisgrund eine Sache zufällig anzeigt, gleich $\beta$, in welchen er sie nicht oder ihr Gegentheil anzeigt, gleich $\gamma$ und die Anzahl beider Fälle $\beta + \gamma = \alpha$. Wir nehmen noch an, dass alle Fälle gleich möglich sind, d. h. dass jeder Fall mit derselben Leichtigkeit wie jeder andere eintreten kann. Im andern Falle nehmen wir eine Abänderung vor, indem wir an Stelle eines jeden leichter eintretenden Falles soviele Fälle zählen, als dieser Fall leichter als die übrigen eintritt; so z. B. zählen wir statt eines dreifach leichteren Falles drei Fälle, welche mit der gleichen Leichtigkeit wie die übrigen eintreten können.

1. Wenn nun ein Beweisgrund zufällig vorhanden sein kann und nothwendig eine Sache anzeigt, so giebt es nach den eben getroffenen Festsetzungen $b$ Fälle, in welchen er vorhanden sein und also auch die Sache (oder 1) anzeigen kann, und $c$ Fälle, in welchen er nicht vorhanden sein und also auch nichts anzeigen kann. Dies giebt (nach Satz II, Zusatz, im ersten Theile, S. 7) das Gewicht $\frac{b \cdot 1 + c \cdot 0}{a} = \frac{b}{a}$, sodass ein solcher Beweisgrund $\frac{b}{a}$ der Sache oder der Gewissheit der Sache beweist.

2. Ist der Beweisgrund nothwendig vorhanden und kann er zufällig eine Sache anzeigen, so sind nach den obigen Annahmen $\beta$ Fälle vorhanden, in denen er die Sache anzeigen kann, und $\gamma$ Fälle, in welchen er diese nicht oder sogar ihr Gegentheil anzeigt. Daraus folgt für diesen Beweisgrund die Beweiskraft $\frac{\beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$, und es beweist daher ein solcher $\frac{\beta}{\alpha}$ der Gewissheit der Sache; ist der Beweisgrund ein gemischter, so folgt (was auf dieselbe Weise sich ergiebt) für die Gewissheit ihres Gegentheiles $\frac{\gamma \cdot 1 + \beta \cdot 0}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

3. Wenn ein Beweisgrund zufällig vorhanden sein und zufällig eine Sache anzeigen kann, so nehmen wir zunächst an, dass er vorhanden ist, in welchem Falle er, wie eben gezeigt ist, $\frac{\beta}{\alpha}$ der Sache, und wenn der Beweisgrund ein gemischter ist, $\frac{\gamma}{\alpha}$ ihres Gegentheiles beweist. Da es nun $b$ Fälle giebt, in denen der Beweisgrund vorhanden sein kann, und $c$ Fälle, in denen er nicht vorhanden sein, also auch nichts beweisen kann, so hat dieser Beweisgrund für den Beweis der Sache das Gewicht $\frac{b \cdot \frac{\beta}{\alpha} + c \cdot 0}{a} = \frac{b\beta}{a\alpha}$, und, wenn er ein gemischter ist, den Werth $\frac{b \cdot \frac{\gamma}{\alpha} + c \cdot 0}{a} = \frac{b\gamma}{a\alpha}$ für den Beweis ihres Gegentheiles.

[**220**] 4. Wenn ferner mehrere Beweisgründe für den Beweis ein und derselben Sache vorhanden sind, und wenn wir für den

| | 1., | 2., | 3., | 4., | 5., | … Beweisgrund |
|---|---|---|---|---|---|---|
| die Anzahl aller Fälle mit | $a$, | $d$, | $g$, | $p$, | $s$, | … |
| die Anzahl aller beweisenden Fälle mit | $b$, | $e$, | $h$, | $q$, | $t$, | … |
| die Anzahl aller nicht beweisenden oder das Gegentheil beweisenden Fälle mit | $c$, | $f$, | $i$, | $r$, | $u$, | … |

bezeichnen, so wird die aus dem Zusammenwirken aller Beweisgründe resultirende Beweiskraft folgendermaassen geschätzt. Alle Beweisgründe seien erstens reine. Dann ist das Gewicht des ersten Beweisgrundes für sich allein gleich $\frac{b}{a}$ $= \frac{a-c}{a}$ (statt $\frac{b}{a}$ müssen wir $\frac{\beta}{\alpha}$ schreiben, wenn der Beweisgrund zufällig die Sache anzeigt, und $\frac{b\beta}{a\alpha}$, wenn er zugleich noch zufällig vorhanden ist), wie wir gezeigt haben. Nun tritt ein zweiter Beweisgrund hinzu, welcher in $e = d - f$ Fällen die Sache oder 1 beweist und in $f$ Fällen sie nicht beweist; in diesen letzten $f$ Fällen bleibt daher nur das eben gefundene Gewicht $\frac{a-c}{a}$ des ersten Beweisgrundes als wirksam übrig. Beide Beweisgründe zusammen haben mithin das Gewicht:



$$\frac{(d-f)\cdot 1 + f\,\frac{a-c}{a}}{d} = \frac{ad - cf}{ad} = 1 - \frac{cf}{ad}.$$

Nehmen wir jetzt noch den dritten Beweisgrund hinzu, so sind $h = g - i$ Fälle vorhanden, in welchen er die Sache beweist, und $i$ Fälle, in welchen er sie nicht beweist und nur die beiden ersten Beweisgründe mit ihrem Gewichte $\frac{ad - cf}{ad}$ wirksam bleiben. Folglich haben alle drei Beweisgründe zusammen das Gewicht:

$$\frac{(g-i)\cdot 1 + i\,\frac{ad-cf}{ad}}{g} = \frac{adg - cfi}{adg} = 1 - \frac{cfi}{adg}.$$

Und in der gleichen Weise müssen wir weiter vorgehen, wenn noch mehr Beweisgründe vorhanden sind. Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit, welche alle Beweisgründe zusammen liefern, von der völligen Gewissheit oder der Einheit nur um den Bruchtheil der Einheit entfernt, welcher gleich dem Producte aller nicht beweisenden Fälle dividirt durch das Product aller Fälle von allen Beweisgründen ist.

5. Zweitens seien alle Beweisgründe gemischte. Da nun die Anzahl aller beweisenden Fälle des ersten Beweisgrundes

gleich $b$, des zweiten gleich $e$, des dritten gleich $h$, ... und der das Gegentheil beweisenden Fälle bez. gleich $c$, $f$, $i$, ... ist, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit der zu beweisenden Sache zu der ihres Gegentheiles kraft des ersten Beweisgrundes allein wie $b : c$, kraft des zweiten allein wie $e : f$, kraft des dritten allein wie $h : i$. Nun ist es aber augenscheinlich genug, dass sich die gesammte Beweiskraft, welche aus dem Zusammenwirken aller Beweisgründe resultirt, zusammensetzt aus den Beweiskräften aller einzelnen Gründe, [**221**] d. h. dass die Wahrscheinlichkeit der Sache zu der Wahrscheinlichkeit ihres Gegentheiles sich verhält wie $beh \ldots : cfi \ldots$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit der Sache gleich $\frac{beh\ldots}{beh\cdots + cfi\ldots}$ und die ihres Gegentheiles gleich $\frac{cfi\ldots}{beh\cdots + cfi\ldots}$.

6. Es seien drittens einige Beweisgründe **reine** (z. B. die drei ersten von fünfen) und einige **gemischte** (z. B. die beiden übrigen). Ich betrachte zunächst die reinen allein, welche (nach Nummer 4) $\frac{adg - cfi}{adg}$ der Gewissheit der Sache beweisen, sodass also noch $\frac{cfi}{adg}$ an der Einheit fehlt. Wir haben also gleichsam $adg - cfi$ Fälle, in welchen die drei reinen Beweisgründe zusammen die Sache oder 1 beweisen, und $cfi$ Fälle, in welchen sie nichts beweisen und nur den gemischten Beweisgründen ihren Platz einräumen. Diese letzteren beiden aber haben (nach Nummer 5) für die Sache das Gewicht $\frac{qt}{qt + ru}$ und für ihr Gegentheil $\frac{ru}{qt + ru}$. Folglich ergiebt sich aus allen Beweisgründen für die Sache die Wahrscheinlichkeit[12]):

$$\frac{(adg - cfi)\cdot 1 + cfi\dfrac{qt}{qt + ru}}{adg} = \frac{adg(qt + ru) - cfiru}{adg(qt + ru)}$$
$$= 1 - \frac{cfiru}{adg(qt + ru)}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um $\frac{cfi}{adg}\cdot\frac{ru}{qt + ru}$ kleiner als die Gewissheit oder Einheit; der erste Bruch dieses Productes ist aber genau der Bruchtheil, um welchen die aus allen reinen Beweisgründen (nach Nr. 4) resultirende Wahrscheinlichkeit der Sache kleiner als die Gewissheit ist, während der zweite Bruch gleich der ganzen Wahrscheinlichkeit des Gegentheils ist, welche sich (nach Nr. 5) aus den gemischten Beweisgründen ergiebt.

7. Wenn ausser den Beweisgründen, welche der zu beweisenden Sache förderlich sind, sich noch andere reine Beweisgründe darbieten, durch welche ihr Gegentheil bezeugt wird, so müssen die Beweisgründe beider Arten nach den vorstehenden Regeln einzeln abgewogen werden, damit das Verhältniss ermittelt werden kann, welches zwischen der Wahrscheinlichkeit der Sache und der Wahrscheinlichkeit ihres Gegentheiles besteht. Hierzu ist noch zu bemerken, dass, wenn die beiderseitigen Beweisgründe genügend stark sind, beide Wahrscheinlichkeiten die Hälfte der Gewissheit merklich übertreffen können, d. h. also dass jede der einander entgegengesetzten Möglichkeiten wahrscheinlich ist, wenn auch die eine relativ weniger wahrscheinlich ist als die andere. So ist es möglich, dass eine Sache $\frac{2}{3}$ der Gewissheit und ihr Gegentheil $\frac{3}{4}$ der Gewissheit hat; dann ist jede der beiden sich gegenüberstehenden Möglichkeiten wahrscheinlich, dennoch ist die erstere Möglichkeit weniger wahrscheinlich als die letztere und zwar im Verhältniss $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 8 : 9$.

Ich sehe voraus — wie ich nicht in Abrede stellen kann —, dass sich bei der speciellen Anwendung dieser Regeln [**222**] viele Umstände darbieten werden, welche schuld daran sein können, dass sich Jemand oft schmählich irrt, wenn er bei der Unterscheidung der Beweisgründe nicht vorsichtig zu Werke geht. Denn zuweilen können Beweisgründe verschiedene zu sein scheinen, während sie thatsächlich nur einen und denselben Beweisgrund vorstellen, oder umgekehrt können thatsächlich verschiedene Beweisgründe nur einen zu bilden scheinen; bisweilen werden auch solche Beweisgründe verwendet, welche den Beweis des Gegentheils völlig unmöglich machen; und so fort. Zur Erläuterung dieser Verhältnisse füge ich noch einige Beispiele an. Ich nehme in dem oben angegebenen Beispiele des Gracchus an, dass die glaubwürdigen Leute, welche die Streitenden beobachtet haben, bei dem Mörder noch rothe Kopfhaare wahrgenommen und dass Gracchus und zwei Andere rothe Haare haben, dass aber keiner der beiden Anderen einen schwarzen Mantel trug. Wenn nun hier Jemand aus den Indicien, dass ausser Gracchus noch drei Andere schwarze Mäntel trugen und zwei Andere ebenfalls rothes Haar haben, schliessen wollte, dass die Wahrscheinlichkeit von Gracchus' Schuld zu der Wahrscheinlichkeit seiner Unschuld sich (nach Nr. 5) wie $1 : 2 \cdot 3 = 1 : 6$ verhalte und dass Gracchus also viel wahrscheinlicher unschuldig als schuldig ist, so würde er einen sehr falschen Schluss ziehen. Denn hier sind eigentlich nicht zwei Beweisgründe vorhanden, sondern nur ein einziger, welcher aber von zwei Umständen zugleich, der Mantelfarbe und der Haarfarbe gestützt wird. Da diese beiden Umstände allein bei Gracchus zusammentreffen, so bezeugen sie, dass kein Anderer als er der Mörder sein kann.

Hinsichtlich eines schriftlichen Vertrages erheben sich Zweifel, ob das der Urkunde beigefügte Datum in betrügerischer Absicht vorweggenommen sei. Ein Beweisgrund, dass dies nicht der Fall ist, kann der sein, dass die Urkunde von einem Notare, d. i. einer öffentlichen und vereidigten Person, eigenhändig unterzeichnet ist, von welchem es unwahrscheinlich ist, dass er einen Betrug verübt hat, da er dies nicht ohne die grösste Gefahr für seine Ehre und seine Stellung hätte thun können, und dass ferner unter fünfzig Notaren kaum einer sich findet, welcher so weit die Schlechtigkeit zu treiben wagen würde. Dafür können die Beweisgründe sprechen, dass der Ruf dieses Notars ein sehr schlechter ist, dass er aus dem Betruge für sich einen sehr grossen Gewinn erwarten konnte, und zumal dass er etwas bezeugt hat, was keine Wahrscheinlichkeit besitzt (z. B. wenn er bezeugt hätte, dass Jemand einem Andern 10000 Goldstücke geliehen hätte zu einer Zeit, wo er nach allgemeiner Schätzung kaum 100 Goldstücke in seinem ganzen Vermögen gehabt haben konnte). Betrachten wir hier den Beweisgrund allein, welcher aus dem Amte und der Stellung des Unterzeichners folgt, [**223**] so können wir die Wahrscheinlichkeit der Echtheit des Datums auf $\frac{49}{50}$ der Gewissheit schätzen. Wenn wir aber die Beweisgründe für das Gegentheil erwägen, so werden wir zugestehen müssen, dass die Urkunde kaum ungefälscht sein kann, und dass also ein in ihr begangener Betrug fast moralische Gewissheit, d. h. gleichsam $\frac{999}{1000}$ Gewissheit hat. Daraus aber dürfen wir nicht folgern, dass die Wahrscheinlichkeit der Echtheit der Urkunde sich zur Wahrscheinlichkeit der Fälschung (nach Nr. 7) verhält wie $\frac{49}{50} : \frac{999}{1000}$, d. h. dass beide fast gleich sind. Wenn wir nämlich annehmen, dass der Notar übel beleumundet ist, so nehmen wir damit zugleich an, dass er nicht zu den 49 rechtschaffenen Notaren, welche Betrügereien verabscheuen, gehört, sondern dass er jener fünfzigste ist, welcher sich kein Gewissen daraus macht, in seinem Amte treulos zu sein; damit aber verliert jener Beweisgrund, welcher sonst für die Echtheit der Urkunde hätte zeugen können, seine ganze Beweiskraft und wird völlig nichtssagend.

## Kapitel IV.

### Ueber die zwei Arten, die Anzahl der Fälle zu ermitteln. Was von der Art, sie durch Beobachtung zu ermitteln, zu halten ist. Hauptproblem hierbei, und anderes.

In dem vorigen Kapitel wurde gezeigt, auf welche Weise aus den Zahlen der Fälle, in welchen Beweisgründe für eine beliebige Sache vorhanden oder nicht vorhanden sein können, sie anzeigen oder nicht anzeigen oder auch ihr Gegentheil anzeigen können, ihre Beweiskräfte und die diesen proportionalen Wahrscheinlichkeiten sich bestimmen und schätzen lassen. Wir sind also dahin gelangt, dass zur richtigen Bildung von Vermuthungen über irgend eine Sache nichts anderes zu thun erforderlich ist, als dass wir zuerst die Zahl dieser Fälle genau ermitteln und dann bestimmen, um wieviel die einen Fälle leichter als die anderen eintreten können. Und hier scheint uns gerade die Schwierigkeit zu liegen, da nur für die wenigsten Erscheinungen und fast nirgends anders als in Glücksspielen dies möglich ist; die Glücksspiele wurden aber von den ursprünglichen Erfindern, damit die Spieltheilnehmer gleiche Gewinnaussichten haben sollten, so eingerichtet, dass die Zahlen der Fälle, in welchen sich Gewinn oder Verlust ergeben muss, im voraus bestimmt und bekannt sind, und dass alle Fälle mit gleicher Leichtigkeit eintreten können. Bei den weitaus meisten andern Erscheinungen aber, welche von dem Walten der Natur oder von der Willkür der Menschen abhängen, ist dies keineswegs der Fall. [**224**] So sind z. B. bei Würfeln die Zahlen der Fälle bekannt, denn es giebt für jeden einzelnen Würfel ebensoviele Fälle als er Flächen hat; alle diese Fälle sind auch gleich leicht möglich, da wegen der gleichen Gestalt aller Flächen und wegen des gleichmässig vertheilten Gewichtes des Würfels kein Grund dafür vorhanden ist, dass eine Würfelfläche leichter als eine andere fallen sollte, was der Fall sein würde, wenn die Würfelflächen verschiedene Gestalt besässen und ein Theil des Würfels aus schwererem Materiale angefertigt wäre als der andere Theil. So sind auch die Zahlen der Fälle für das Ziehen eines weissen oder eines schwarzen Steinchens aus einer Urne bekannt und können alle Steinchen auch gleich leicht gezogen werden, weil bekannt ist, wieviele Steinchen von jeder Art in der Urne vorhanden sind, und weil sich kein Grund angeben lässt, warum dieses oder jenes Steinchen leichter als irgend ein anderes gezogen werden sollte. Welcher Sterbliche könnte aber je die Anzahl der Krankheiten (d. i. ebensovieler Fälle), welche den menschlichen Körper an allen seinen Theilen und in jedem Alter befallen und den Tod herbeiführen können, ermitteln und angeben, um wieviel leichter diese als jene Krankheit, die Pest als die Wassersucht, die Wassersucht als Fieber den Menschen zu Grunde richtet, um daraus eine Vermuthung über das Verhältniss von Leben und Sterben künftiger Geschlechter abzuleiten? Oder wer könnte die unzähligen Fälle von Veränderungen aufzählen, welchen die Luft täglich unterworfen ist, um daraus schon heute vermuthen zu wollen, welche Beschaffenheit sie nach einem Monate oder gar nach einem Jahre hat? Oder ferner, wer dürfte die Natur des menschlichen Geistes oder den bewunderungswürdigen Bau unseres Körpers so weit erforscht haben, um bei Spielen, welche ganz oder theilweise von der Verstandesschärfe oder von der körperlichen Gewandtheit der Spieler abhängen, die Fälle bestimmen zu wollen, in welchen dieser oder jener Spieler gewinnen oder verlieren kann? Da diese und ähnliche Dinge von ganz verborgenen Ursachen abhängen, welche überdies noch durch die unendliche Mannigfaltigkeit ihres Zusammenwirkens unsere Erkenntniss beständig täuschen, so würde es völlig sinnlos sein, auf diese Weise etwas erforschen zu wollen.

Aber ein anderer Weg steht uns hier offen, um das Gesuchte zu finden und das, was wir *a priori* nicht bestimmen können, wenigstens *a posteriori*, d. h. aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln. Dabei muss angenommen werden, dass jedes einzelne Ereigniss in ebenso vielen Fällen eintreten oder nicht eintreten kann, als vorher bei einem gleichen Stande der Dinge beobachtet wurde, dass es eingetreten oder nicht eingetreten ist. Denn z. B. wenn man beobachtet hat, dass von 300 Menschen von dem Alter und der Constitution des Titius 200 vor Ablauf von 10 Jahren gestorben sind, **[225]** die übrigen aber länger gelebt haben, so kann man mit hinreichender Sicherheit folgern, dass es doppelt so viele Fälle giebt, in welchen auch Titius innerhalb des nächsten Decenniums der Natur den schuldigen Tribut leisten muss, als Fälle, in welchen er diesen Zeitpunkt überleben kann. Ebenso wenn Jemand schon seit langen Jahren das Wetter beobachtet und sich angemerkt hat, wie oft es heiter oder regnerisch war, oder wenn Jemand zwei Spielern sehr oft zugeschaut und gesehen hat, wie oft dieser oder jener gewinnt, so kann er gerade dadurch das Verhältniss bestimmen, welches die Zahlen der Fälle, in denen dieselben Ereignisse unter den vorangegangenen gleichen Umständen auch nachher eintreten oder nicht eintreten können, wahrscheinlicher Weise zu einander haben.



Diese empirische Art, die Zahl der Fälle durch Beobachtungen zu bestimmen, ist weder neu noch ungewöhnlich; denn schon der berühmte Verfasser des Werkes »L'art de penser«[13]), ein scharfsinniger und talentvoller Mann, hat in Kapitel 12 und folg. des letzten Theiles seines Werkes ein ganz ähnliches Verfahren beschrieben, und alle Menschen beobachten im täglichen Leben dasselbe Verfahren. Auch leuchtet jedem Menschen ein, dass es nicht genügt, nur eine oder die andere Beobachtung anzustellen, um auf diese Weise über irgend ein Ereigniss zu urtheilen, sondern dass eine grosse Anzahl von Beobachtungen erforderlich sind. Zuweilen hat auch schon ein recht einfältiger Mensch in Folge irgend eines natürlichen Instinktes von sich aus und ohne jede vorangegangene Unterweisung die Erfahrung gemacht (was wirklich wunderbar ist), dass man, je mehr diesbezügliche Beobachtungen vorliegen, um so weniger Gefahr läuft, von der Wahrheit abzuirren. Obgleich nun dies aus der Natur der Sache heraus von Jedem eingesehen wird, so liegt doch der auf wissenschaftliche Prinzipien gegründete Beweis durchaus nicht auf der Hand, und es liegt mir daher ob, ihn an dieser Stelle zu erbringen. Ich würde aber glauben zu wenig zu leisten, wenn ich bei dem Beweise dieses einen Punktes, welchen Jeder kennt, stehen bleiben wollte. **Man muss vielmehr noch Weiteres in Betracht ziehen, woran vielleicht Niemand bisher auch nur gedacht hat. Es**

**bleibt nämlich noch zu untersuchen, ob durch Vermehrung der Beobachtungen beständig auch die Wahrscheinlichkeit dafür wächst, dass die Zahl der günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das wahre Verhältniss erreicht, und zwar in dem Maasse, dass diese Wahrscheinlichkeit schliesslich jeden beliebigen Grad der Gewissheit übertrifft, oder ob das Problem vielmehr, so zu sagen, seine Asymptote hat, d. h. ob ein bestimmter Grad der Gewissheit, das wahre Verhältniss der Fälle gefunden zu haben, vorhanden ist, welcher auch bei beliebiger Vermehrung der Beobachtungen niemals überschritten werden kann**, z. B. dass wir niemals über $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ der Gewissheit hinaus Sicherheit erlangen können, das wahre Verhältniss der Fälle ermittelt zu haben. Damit noch durch ein Beispiel deutlich werde, [**226**] was ich meine, nehme ich an, es seien in einer Urne ohne dein Vorwissen 3000 weisse und 2000 schwarze Steinchen und du wollest durch Versuche das Verhältniss derselben bestimmen, indem du ein Steinchen nach dem andern herausnimmst (jedoch so, dass du jedes gezogene Steinchen wieder zurücklegst, ehe du ein neues herausnimmst, damit die Zahl der Steinchen in der Urne nicht kleiner wird) und beobachtest, wie oft ein weisses, wie oft ein schwarzes Steinchen herauskommt. Es fragt sich nun, ob du dies so oft würdest thun können, damit es zehn-, hundert-, tausendmal u. s. w. wahrscheinlicher (d. h. schliesslich moralisch gewiss) wird, dass die Zahl der Züge, mit welchen du ein weisses Steinchen ziehst, zu der Zahl derer, mit welchen du ein schwarzes ziehst, dasselbe Verhältniss $1\frac{1}{2}$, welches die Zahlen der Steinchen (oder der Fälle) selbst zueinander haben, annimmt, als dass diese Zahlen irgend ein anderes, davon verschiedenes Verhältniss bilden. Ist dies nicht der Fall, so gestehe ich, dass es um unsern Versuch, die Zahl der Fälle durch Beobachtungen zu ermitteln, schlecht bestellt ist. Wenn es aber der Fall ist und man schliesslich auf diese Weise moralische Gewissheit erhält (dass dies wirklich so ist, werde ich in dem folgenden Kapitel zeigen), so können wir die Zahlen der Fälle *a posteriori* fast ebenso genau finden, als wenn sie uns *a priori* bekannt wären. Und dies ist für das bürgerliche Leben, wo das moralisch Gewisse als absolut gewiss angesehen wird, nach Axiom 9 des Kapitels II hinreichend, um unsere Vermuthung in jedem beliebigen Zufallsgebiete nicht weniger wissenschaftlich zu leiten als bei den Glücksspielen. Denn wenn wir an Stelle der Urne z. B. die Luft oder den menschlichen Körper uns gesetzt denken, welche eine Unmenge der verschiedenartigsten Veränderungen und Krankheit gerade so in sich bergen, wie die Urne die Steinchen, so werden wir auch in gleicher Weise durch Beobachtungen bestimmen können, um wieviel leichter auf diesen Gebieten dieses als jenes Ereigniss eintritt.

Damit aber dies nicht unrichtig verstanden werde, ist noch zu bemerken, **dass wir das Verhältniss zwischen den Zahlen der Fälle, welches wir durch Beobachtungen zu bestimmen unternehmen, nicht absolut genau (denn so würde ganz das Gegentheil herauskommen und desto unwahrscheinlicher werden, dass das richtige Verhältniss gefunden sei, je mehr Beobachtungen gemacht wären), sondern nur mit einer bestimmten Annäherung erhalten, d. h. zwischen zwei Grenzen einschliessen wollen, welche aber beliebig nahe bei einander angenommen werden können.** Wenn wir in dem oben angeführten Beispiele der Urne mit den Steinchen zwei Verhältnisse, z. B. $\frac{301}{200}$ und $\frac{299}{200}$, oder $\frac{3001}{2000}$ und $\frac{2999}{2000}$, oder u. s. w., annehmen, von denen das eine wenig kleiner, das andere wenig grösser als $1\frac{1}{2}$ ist, so zeigt es sich, dass es mit jeder beliebigen Wahrscheinlichkeit wahrscheinlicher wird, [227] dass das durch häufig wiederholte Beobachtungen gefundene Verhältniss innerhalb dieser Grenzen des Verhältnisses $1\frac{1}{2}$ liegt, als ausserhalb derselben.

Dieses ist das Problem, welches ich an dieser Stelle zu veröffentlichen mir vorgenommen habe, nachdem ich schon seit 20 Jahren dasselbe mit mir herumgetragen habe; seine Neuheit sowohl als auch sein ausserordentlich grosser Nutzen in Verbindung mit seiner ebenso grossen Schwierigkeit lässt alle übrigen Kapitel dieser Lehre an Wichtigkeit und Bedeutung gewinnen. Bevor ich aber auf seine Lösung eingehe, will ich kurz die Einwände widerlegen, welche einige Gelehrte[14]) dagegen erhoben haben.

1. Zuerst machen sie den Einwurf, dass das Verhältniss zwischen den Steinchen von anderer Beschaffenheit sei als dasjenige zwischen den Krankheiten und den Luftveränderungen; die Zahl jener sei bestimmt, die Zahl dieser aber unbestimmt und unsicher.

Darauf antworte ich: Beide sind hinsichtlich unserer Erkenntniss gleich ungewiss und unbestimmt. Dass aber irgend ein Ding an sich und seiner Natur nach ungewiss und unbestimmt beschaffen sei, kann von uns ebenso wenig verstanden werden, als wir verstehen können, dass Gott etwas zugleich erschaffen und nicht erschaffen hat; denn alles was Gott geschaffen hat, hat er gerade dadurch, dass er es geschaffen hat, auch bestimmt.

2. Zweitens werfen sie ein, die Zahl der Steinchen sei endlich, die der Krankheiten aber unendlich.

Ich erwidere hierauf: Die letztere Zahl ist eher erstaunlich gross als unendlich; aber zugegeben, dass sie unendlich gross sei, so ist bekannt, dass auch zwischen zwei unendlich grossen Zahlen ein bestimmtes Verhältniss bestehen kann, welches sich durch endliche Zahlen entweder genau oder wenigstens so genau, als nur irgend wünschenswerth ist, ausdrücken lässt. So hat immer die Peripherie eines Kreises ein bestimmtes Verhältniss zu seinem Durchmesser, welches zwar nur durch unendlich viele Decimalstellen der *Ludolph*'schen Zahl genau angegeben wird, aber doch von *Archimedes*, *Metius* und *Ludolph* selbst in Grenzen eingeschlossen ist, welche für den Gebrauch völlig ausreichen. Daher hindert nichts daran, das Verhältniss zwischen zwei unendlich grossen Zahlen, welche durch endliche Zahlen sehr annähernd genau dargestellt werden können, durch eine endliche Anzahl von Beobachtungen zu bestimmen.

3. Drittens machen sie den Einwand, dass die Zahl der Krankheiten nicht beständig dieselbe sei, sondern dass täglich neue entstehen.

Darauf entgegne ich: Dass sich im Laufe der Zeiten die Krankheiten vermehren können, leugne ich nicht, und sicherlich würde derjenige, welcher aus heutigen Beobachtungen auf antediluvianische Zeiten zurückschliessen wollte, gewaltig von der Wahrheit abirren. Daraus folgt aber nichts weiter als dass bisweilen neue Beobachtungen angestellt werden müssen; [228] auch bei den Steinchen würden neue Beobachtungen nothwendig werden, wenn man annehmen müsste, dass ihre Anzahl in der Urne sich geändert hätte.

## Kapitel V.



### Lösung des vorigen Problems.

Um den weitläufigen Beweis mit möglichster Kürze und Klarheit zu führen, versuche ich alles rein mathematisch zu formuliren und schicke zu dem Zwecke die folgenden Hülfssätze voraus; sind diese bewiesen, so besteht alles Uebrige in ihrer blossen Anwendung.

Hülfssatz 1. Es sei die Reihe der natürlichen Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1,\ r,\ r+1,\ \ldots,\ r+s$$

gegeben, wo $r$ irgend eine mittlere Zahl und $r-1$ und $r+1$ die dieser links und rechts benachbarten Zahlen bezeichnen. Diese Reihe werde fortgesetzt, bis ihr letztes Glied ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von $r+s$, z. B. $nr+ns$ ist, wodurch die neue Reihe entsteht:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ nr-n,\ \ldots,\ nr,\ \ldots,\ nr+n,\ \ldots,\ nr+ns.$$

Mit wachsendem $n$ steigt auf diese Weise sowohl die Anzahl der zwischen $nr$ und $nr+n$, bez. $nr-n$ gelegenen Glieder, als auch die Anzahl der Glieder, welche sich von den Grenzgliedern $nr+n$, bez. $nr-n$ bis zu den äussersten Gliedern $nr+ns$ und 0 erstrecken. Niemals aber, wie gross auch die Zahl $n$ gewählt werden mag, übertrifft die Anzahl der Glieder, welche grösser als $nr+n$ sind, mehr als $(s-1)$-mal die Anzahl der zwischen $nr$ und $nr+n$ gelegenen Glieder und die Anzahl der Glieder, welche kleiner als $nr-n$ sind, mehr als $(r-1)$-mal die Anzahl der zwischen $nr-n$ und $nr$ gelegenen Glieder.

Beweis. Die Anzahl der Glieder, welche grösser als $nr+n$ sind, ist gleich $n(s-1)$ und der Glieder, welche kleiner als $nr-n$ sind, ist gleich $n(r-1)$. Die Anzahl der zwischen $nr$ (ausschliesslich) und einer der beiden Grenzen (einschliesslich) gelegenen Zahlen ist gleich $n$. Es verhält sich aber stets

$$n(s-1) : n = s-1 : 1$$

und

$$n(r-1) : n = r-1 : 1.$$

Daraus folgt, u. s. w.

[**229**] Hülfssatz 2. Wenn das Binom $r + s$ in irgend eine ganzzahlige Potenz erhoben wird, so hat die Entwickelung immer ein Glied mehr als der Potenzexponent Einheiten.



Denn es besteht die Entwickelung eines Quadrates aus drei, eines Cubus aus vier, eines Biquadrates aus fünf Gliedern, und so fort.

Hülfssatz 3. In der Entwickelung einer Potenz des Binoms $r + s$, deren Exponent irgend ein ganzzahliges Vielfaches von $r + s = t$, z. B. $n(r + s) = nt$ ist, hat erstens ein Glied $M$ dann den grössten Werth von allen Gliedern, wenn die Anzahl aller ihm vorangehenden zu der aller ihm folgenden Glieder sich wie $s$ zu $r$ verhält, oder — was auf dasselbe hinauskommt — wenn in ihm die Exponenten von $r$ und $s$ sich wie $r$ zu $s$ verhalten und jedes dem Gliede $M$ auf der rechten oder linken Seite näherstehende Glied einen grösseren Werth als ein entfernteres Glied auf der gleichen Seite. Zweitens hat das Glied $M$ zu einem näheren Gliede ein kleineres Verhältniss, als — bei gleichem Abstande der Glieder — dieses letztere zu dem entfernteren[15]).

Beweis. 1. Den Mathematikern ist wohlbekannt, dass die $(nt)^{\text{te}}$ Potenz des Binoms $r + s$ sich durch die folgende Reihe darstellen lässt:

$$(r+s)^{nt} = r^{nt} + \binom{nt}{1} r^{nt-1}\, s + \binom{nt}{2} r^{nt-2}\, s^2 + \cdots$$
$$+ \binom{nt}{2} r^2\, s^{nt-2} + \binom{nt}{1} r\, s^{nt-1} + s^{nt},$$

in welcher die Exponenten von $r$ fortwährend abnehmen, während die von $s$ wachsen, und die Coefficienten des ersten und letzten, zweiten und vorletzten Gliedes, u. s. w. mit einander übereinstimmen. Da nun die Anzahl aller Glieder ausser $M$ (nach Hülfssatz 2) gleich $nt = nr + ns$ ist und nach der Voraussetzung sich die Anzahl der $M$ vorangehenden Glieder zu der ihm nachfolgenden wie $s$ zu $r$ verhält, so muss die Anzahl der vorangehenden Glieder gleich $ns$ und der nachfolgenden gleich $nr$ sein. Mithin ist nach dem Bildungsgesetze der Reihe:

$$M = \binom{nt}{ns} r^{nr} s^{ns} = \binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns}.$$

Bezeichet man mit $L_1$, $L_2$, $L_3$, ... der Reihe nach die links von $M$ stehenden Glieder und mit $R_1$, $R_2$, $R_3$, ... die entsprechenden Glieder rechts, so folgt weiter: [230]



$$L_1 = \binom{nt}{ns-1} r^{nr+1} s^{ns-1}, \quad R_1 = \binom{nt}{nr-1} r^{nr-1} s^{ns+1};$$

$$L_2 = \binom{nt}{ns-2} r^{nr+2} s^{ns-2}, \quad R_2 = \binom{nt}{nr-2} r^{nr-2} s^{ns+2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus ergiebt sich durch Division:

$$\frac{M}{L_1} = \frac{(nr+1)s}{nsr}, \quad \frac{M}{R_1} = \frac{(ns+1)r}{nrs};$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{(nr+2)s}{(ns-1)r}, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{(ns+2)r}{(nr-1)s};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nun ist aber

$$(nr+1)s > nsr, \quad (ns+1)r > nrs,$$

$$(nr+2)s > (ns-1)r, \quad (ns+2)r > (nr-1)s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

folglich ist

$$M > L_1, \quad M > R_1;$$

$$L_1 > L_2, \quad R_1 > R_2;$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

W. z. b. w.

2. Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass

$$\frac{nr+1}{ns} < \frac{nr+2}{ns-1}, \quad \frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$$

ist, folglich ist auch

$$\frac{(nr+1)s}{nsr} < \frac{(nr+2)s}{(ns-1)r}, \quad \frac{(ns+1)r}{nrs} < \frac{(ns+2)r}{(nr-1)s}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_1}{L_2}, \quad \frac{M}{R_1} < \frac{R_1}{R_2}.$$

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass



$$\frac{L_1}{L_2} < \frac{L_2}{L_3} < \cdots, \quad \frac{R_1}{R_2} < \frac{R_2}{R_3} < \cdots$$

ist. Folglich hat das grösste Glied $M$ zu einem näherstehenden Gliede ein kleineres Verhältniss als dieses zu einem entfernteren auf der gleichen Seite, wenn die beiden Intervalle gleich sind. W. z. b. w.

[**231**] Hülfssatz 4. In der Potenz eines Binoms mit dem Exponenten $nt$ kann die Zahl $n$ so gross genommen werden, dass die Verhältnisse des grössten Gliedes $M$ zu zwei anderen Gliedern $L_n$ und $R_n$, welche die $n^{\text{ten}}$ links und rechts von $M$ stehenden Glieder der Potenzentwickelung sind, grössere Werthe haben, als irgend ein gegebenes Verhältniss.

Beweis. Da nach dem vorhergehenden Satze $M$ den Werth hat:

$$M = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\cdots(nr+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots ns} r^{nr} s^{ns}$$
$$= \frac{nt(nt-1)(nt-2)\cdots(ns+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots nr} r^{nr} s^{ns},$$

so haben nach dem Bildungsgesetze der Reihe die Glieder $L_n$ und $R_n$ die Werthe:

$$L_n = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\cdots(nr+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(ns-n)} r^{nr+n} s^{ns-n},$$
$$R_n = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\cdots(ns+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(nr-n)} r^{nr-n} s^{ns+n}.$$

Hieraus folgt, nachdem die gemeinsamen Factoren durch Division entfernt sind:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nr+n)(nr+n-1)(nr+n-2)\cdots nr}{(ns-n+1)(ns-n+2)(ns-n+3)\cdots ns} \frac{s^n}{r^n},$$
$$\frac{M}{R_n} = \frac{(ns+n)(ns+n-1)(ns+n-2)\cdots ns}{(nr-n+1)(nr-n+2)(nr-n+3)\cdots nr} \frac{r^n}{s^n}$$

oder, nachdem $r^n$ und $s^n$ auf die einzelnen Factoren der Coefficienten gleichmässig vertheilt sind, was möglich ist, da die Zähler und Nenner der Coefficienten gerade je $n$ Factoren besitzen:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nrs+ns)\;(nrs+ns-s)\;(nrs+ns-2s)\ldots(nrs+s)}{(nrs-nr+r)(nrs-nr+2r)(nrs-nr+3r)\ldots nrs},$$


$$\frac{M}{R_n} = \frac{(nrs+nr)\;(nrs+nr-r)\;(nrs+nr-2r)\ldots(nrs+r)}{(nrs-ns+s)(nrs-ns+2s)(nrs-ns+3s)\ldots nrs}.$$

Die Verhältnisse erhalten aber einen unendlich grossen Werth, wenn $n$ unendlich gross wird; denn es verschwinden dann die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ gegen $n$, und die Factoren $nr \pm n \mp 1, 2, 3, \ldots$ haben denselben Werth wie $nr \pm n$ und $ns \mp n \pm 1, 2, 3, \ldots$ wie $ns \mp n$, sodass man, wenn man noch Zähler und Nenner durch $n$ dividirt, erhält[16]):

[232]
$$\frac{M}{L_n} = \frac{(rs+s)(rs+s)(rs+s)\ldots rs}{(rs-r)(rs-r)(rs-r)\ldots rs},$$
$$\frac{M}{R_n} = \frac{(rs+r)(rs+r)(rs+r)\ldots rs}{(rs-s)(rs-s)(rs-s)\ldots rs}.$$

Die beiden Grössen sind offenbar aus ebensovielen Brüchen $\frac{rs+s}{rs-r}$, bez. $\frac{rs+r}{rs-s}$ zusammengesetzt, als Factoren im Zähler (oder Nenner) vorhanden sind, deren Anzahl gleich $n$, d. h. unendlich gross ist. Daher sind jene beiden Verhältnisse die unendlich hohen Potenzen der Brüche $\frac{rs+s}{rs-r}$ und $\frac{rs+r}{rs-s}$ und folglich selbst unendlich gross. Wer diesen Schluss bezweifeln sollte, nehme zwei unendliche fallende geometrische Reihen mit den Quotienten $\frac{rs-r}{rs+s}$ und $\frac{rs-s}{rs+r}$; in diesen ist das Verhältniss des ersten zum dritten, vierten, fünften, ..., letzten Gliede gleich dem zwei-, drei-, vier-, ..., unendlich oftmal in sich selbst multiplicirten Bruche $\frac{rs+s}{rs-r}$, bez. $\frac{rs+r}{rs-s}$. Offenbar aber ist das Verhältniss des ersten zum letzten Gliede, welches in einer unendlich fallenden Reihe gleich Null sein muss, unendlich gross. Daher folgt, dass auch die unendlich hohen Potenzen von $\frac{rs+s}{rs-r}$ und $\frac{rs+r}{rs-s}$ einen unendlich grossen Werth haben. Mithin ist nachgewiesen, dass in der Entwickelung der unendlich hohen Potenz eines Binoms das grösste Giied $M$ zu zwei Gliedern $L_n$ und $R_n$ Verhältnisse hat, welche grösser sind als jedes angebbare Verhältniss. W. z. b. w.



Hülfssatz 5. In der Potenz eines Binoms mit dem Exponenten $nt$ kann die Zahl $n$ so gross gewählt werden, dass die Summe aller Glieder von dem grössten $M$ an nach beiden Seiten bis zu den Gliedern $L_n$ und $R_n$ (einschliesslich) zur Summe aller übrigen Glieder, welche nach beiden Seiten ausserhalb dieser Grenzen $L_n$ und $R_n$ liegen, ein Verhältniss von grösserem Werthe als irgend ein gegebenes bildet.

Beweis. Da nach der zweiten Behauptung des Hülfssatzes 3

$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_n}{L_{n+1}}, \ \frac{L_1}{L_2} < \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}, \ \frac{L_2}{L_3} < \frac{L_{n+2}}{L_{n+3}}, \ \ldots$$

ist, so ist auch

$$\frac{M}{L_n} < \frac{L_1}{L_{n+1}} < \frac{L_2}{L_{n+2}} < \frac{L_3}{L_{n+3}} < \cdots \ .$$

Nach Hülfssatz 4 wird aber für einen unendlich grossen Werth von $n$ der Werth von $\frac{M}{L_n}$ unendlich gross [233] und folglich haben umsomehr die Verhältnisse $\frac{L_1}{L_{n+1}}, \frac{L_2}{L_{n+2}}, \frac{L_3}{L_{n+3}}, \ldots$ unendlich grosse Werthe. Daraus folgt aber weiter:

$$\frac{L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n}{L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \cdots + L_{2n}} = \infty,$$

d. h. die Summe aller Glieder zwischen dem grössten Gliede $M$ und dem Gliede $L_n$ (einschliesslich) ist unendlich oft grösser als die Summe ebensovieler Glieder, welche nach links auf $L_n$ folgen. Da aber nach Hülfssatz 1 die Anzahl aller Glieder links von $L_n$ die Anzahl der zwischen $L_n$ und $M$ gelegenen Glieder nur $(s - 1)$-mal (d. h. eine endliche Anzahl mal) übertrifft, und da nach Hülfssatz 3 die Glieder um so kleiner werden, je weiter sie von $L_n$ nach links abstehen, so übertreffen alle Glieder innerhalb $L_n$ (einschliesslich) und $M$ (auch wenn dieses nicht mitgerechnet wird) zusammen doch noch unendlich oftmal alle links von $L_n$ stehenden Glieder.

Auf gleiche Weise wird auch gezeigt, dass alle zwischen $R_n$ (einschliesslich) und $M$ (auch wenn dieses nicht mitgerechnet wird) gelegenen Glieder zusammen unendlich oftmal alle Glieder übertreffen, welche rechts von $R_n$ stehen und deren Anzahl die der ersteren nur $(r - 1)$-mal (nach Hülfssatz 1) übertrifft. Daher übertrifft schliesslich die Summe aller zwischen den Grenzgliedern $L_n$ und $R_n$ gelegenen Glieder, wobei die Grenzglieder mitgerechnet werden, das grösste Glied $M$ aber weggelassen ist, unendlich oftmal die Summe aller ausserhalb dieser Grenzen stehenden Glieder; und um so mehr gilt dieser Satz, wenn zu der ersten Summe das Glied $M$ noch hinzugenommen wird. W. z. b. w.

Anmerkung. Gegen den vierten und fünften Hülfssatz könnte von denen, welche sich nicht mit Unendlichkeitsbetrachtungen befreundet haben, der folgende Einwurf gemacht werden: Wenn auch in dem Falle eines unendlich grossen Werthes der Zahl $n$ die Factoren der Ausdrücke, welche die Verhältnisse $\frac{M}{L_n}$ und $\frac{M}{R_n}$ darstellen, nämlich $nr \pm n \mp 1, 2, 3, \ldots$ und $ns \mp n \pm 1, 2, 3, \ldots$ den gleichen Werth wie $nr \pm n$ und $ns \mp n$ haben, da die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ in den einzelnen Factoren gegenüber dem übrigen Theile verschwinden, so liefern doch alle diese Zahlen in einander multiplicirt (wegen der unendlich vielen Factoren) auch eine unendlich grosse Zahl und also wird von den unendlich hohen Potenzen der Brüche $\frac{rs+s}{rs-r}$ und $\frac{rs+r}{rs-s}$ unendlich viel subtrahirt, wodurch sich endliche Zahlen ergeben können. Diesen Bedenken kann ich nicht besser entgegentreten, als dass ich jetzt die Berechnung für einen endlichen Werth von $n$ wirklich durchführe; ich werde zeigen, dass auch in einer endlich hohen Potenz des Binoms die Summe der innerhalb der Grenzglieder $L_n$ und $R_n$ (einschliesslich) stehenden Glieder zur Summe aller übrigen Glieder ein Verhältniss hat, welches jedes beliebig gross gegebene Verhältniss $c$ an Werth übertrifft. Ist dies aber gezeigt, so muss der Einwand nothwendiger Weise in sich zusammenfallen.

[234] Zu dem Zwecke nehme ich (für die links von $M$ stehenden Glieder) irgend ein beliebiges Verhältniss, welches kleiner als $\frac{rs+s}{rs-r}$ ist, also z. B. $\frac{rs+s}{rs} = \frac{r+1}{r}$ und multiplicire dieses so oft ($m$-mal) in sich, dass das Product gleich oder grösser als $c(s-1)$ ist, also

$$\frac{(r+1)^m}{r^m} \geqq c(s-1).$$

Um $m$ zu bestimmen, hat man: 

$$m \log(r+1) - m \log r \geqq \log[c(s-1)],$$

also ist

$$m \geqq \frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1) - \log r}$$

zu wählen. Nun wurde in dem vierten Hülfssatze das Verhältniss $\frac{M}{L_n}$ aus dem Producte der Brüche:

$$\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}, \quad \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}, \quad \frac{nrs-ns+2s}{nrs-nr+3r}, \ldots, \quad \frac{nrs+s}{nrs}$$

bestimmt; jeder einzelne dieser Factoren ist aber kleiner als $\frac{rs+s}{rs-r}$ und kommt diesem Bruche um so näher, je grösser $n$ genommen wird. Folglich muss einmal, wenn $n$ nur passend gewählt wird, einer dieser Brüche gleich $\frac{r+1}{r}$ werden. Bezeichnet man den Platz dieses Bruches in der Reihe der Factoren mit $m$, so ist:

$$\frac{r+1}{r} = \frac{nrs+ns-(m-1)s}{nrs-nr+ms},$$

folglich:

$$n = m + \frac{ms-s}{r+1},$$

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1}.$$

Ich behaupte nun, dass dieser für $nt$ gefundene Werth den Exponenten der Potenz angiebt, auf welche man das Binom $(r+s)$ erheben muss, wenn das grösste Glied $M$ in der Entwickelung das Grenzglied $L_n$ mehr $c(s-1)$-mal übertreffen soll. Durch diese Annahme wird nämlich der $m^{\text{te}}$ Bruch in dem obigen Producte gleich $\frac{r+1}{r}$ und nach Voraussetzung ist $\frac{(r+1)^m}{r^m} \geqq c(s-1)$; [**235**] alle Brüche aber, welche dem

$m^{\text{ten}}$ in dem Producte vorausgehen, sind grösser als $\frac{r+1}{r}$ und alle ihm nachfolgenden sind mindestens grösser als 1. Folglich übertrifft das Product aller Glieder sicher $\frac{(r+1)^m}{r^m}$ und umsomehr $c(s-1)$, und da dieses Product gleich $\frac{M}{L_n}$ ist, so folgt:



$$M > c\,(s-1)\,L_n.$$

Ferner ist, wie oben gezeigt war:

$$\frac{M}{L_n} < \frac{L_1}{L_{n+1}} < \frac{L_2}{L_{n+2}} < \frac{L_3}{L_{n+3}} < \cdots < \frac{L_n}{L_{2n}},$$

folglich ist auch:

$$\begin{aligned} L_1 &> c\,(s-1)\,L_{n+1}, \\ L_2 &> c\,(s-1)\,L_{n+2}, \\ L_3 &> c\,(s-1)\,L_{n+3}, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ L_n &> c\,(s-1)\,L_{2n}, \end{aligned}$$

und summirt:

$$L_1+L_2+L_3+\cdots+L_n > c(s-1)[L_{n+1}+L_{n+2}+L_{n+3}+\cdots+L_{2n}].$$

Da aber die Glieder von $M$ an fortwährend abnehmen und da die Anzahl der links von $L_n$ stehenden Glieder nicht mehr als $(s-1)$-mal die Anzahl der Glieder $L_1$, $L_2$, ..., $L_n$ übertrifft, so folgt weiter, dass

$$L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n > c\,[L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \cdots]$$

ist, wo jetzt in der Klammer der rechten Seite alle links von $L_n$ stehenden Glieder vorkommen.

In gleicher Weise verfahre ich in Bezug auf die rechts von $M$ stehenden Glieder. Ich nehme jetzt das Verhältniss:

$$\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$$

und finde, indem ich $m$ so bestimme, dass

$$\frac{(s+1)^m}{s^m} \geqq c\,(r-1)$$

ist:

$$m \geqq \frac{\log [c(r-1)]}{\log (s+1) - \log s}.$$



Darauf setze ich in der Reihe der Brüche:

$$\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s}, \frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s}, \frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s}, \ldots, \frac{nrs+r}{nrs},$$

welche das Verhältniss $\frac{M}{R_n}$ bestimmen, den $m^{\text{ten}}$ Bruch, also

$$\frac{nrs+nr-(m-1)r}{nrs-ns+ms} = \frac{s+1}{s},$$

woraus sich ergiebt:

$$n = m + \frac{mr-r}{s+1}$$

und

$$nt = mt + \frac{mrt-rt}{s+1}.$$

Hierauf wird genau auf dieselbe Art wie vorher gezeigt, dass in dem zu dieser Potenz $nt$ erhobenen Binome $r+s$ das grösste Glied $M$ das rechte Grenzglied $R_n$ mehr als $c(r-1)$-mal übertrifft, und weiter dass die Summe aller zwischen $M$ (ausschliesslich) und $R_n$ (einschliesslich) befindlichen Glieder die Summe aller übrigen Glieder, deren Anzahl nur gleich $(r-1)$-mal der Anzahl der ersteren Glieder ist, mehr als $c$-mal übertrifft.

Daher folgere ich schliesslich, dass die Summe aller Glieder zwischen $L_n$ und $R_n$ (einschliesslich) um mehr als $c$-mal grösser ist als die Anzahl aller übrigen Glieder, wenn das Binom $r+s$ zu der Potenz erhoben wird, deren Exponent gleich der grösseren der beiden Zahlen [236]

$$mt + \frac{mst-st}{r+1} \text{ und } mt + \frac{mrt-rt}{s+1}$$

ist. Es ist also eine endlich hohe Potenz gefunden, welche die gewünschte Eigenschaft besitzt. W. z. b. w.

Nun folgt endlich der Satz, wegen dessen alle bisherigen Betrachtungen angestellt worden sind und dessen Beweis nur die Anwendung der aufgestellten Hülfssätze erfordert. Um aber lästige Umschreibungen zu vermeiden, nenne ich die Fälle, in welchen irgend ein Ereigniss eintreten kann, fruchtbare oder günstige und die Fälle, in welchen dasselbe Ereigniss nicht eintreten kann, unfruchtbare oder ungünstige. Ebenso nenne ich die Versuche und Beobachtungen fruchtbare oder günstige, in welchen einer der günstigen Fälle eintritt, und unfruchtbare oder ungünstige jene, in welchen der Eintritt eines der ungünstigen Fälle beobachtet wird.



B's theorem

*Satz.* **Es möge sich die Zahl der günstigen Fälle zu der Zahl der ungünstigen Fälle genau oder näherungsweise wie $\frac{r}{s}$, also zu der Zahl aller Fälle wie $\frac{r}{r+s} = \frac{r}{t}$ — wenn $r + s = t$ gesetzt wird — verhalten, welches letztere Verhältniss zwischen den Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ enthalten ist. Nun können, wie zu beweisen ist, soviele Beobachtungen gemacht werden, dass es beliebig oft (z. B. $c$-mal) wahrscheinlicher wird, dass das Verhältniss der günstigen zu allen angestellten Beobachtungen innerhalb dieser Grenzen liegt als ausserhalb derselben, also weder grösser als $\frac{r+1}{t}$, noch kleiner als $\frac{r-1}{t}$ ist.**

Beweis. Man setze die Anzahl aller anzustellenden Beobachtungen gleich $nt$ und frage, wie gross die Hoffnung dafür ist, dass alle Beobachtungen, dann alle Beobachtungen bis auf eine, bis auf zwei, drei, vier, ... günstige sind. Da aber nach der Voraussetzung bei jeder Beobachtung $t$ Fälle möglich sind, von welchen $r$ günstige und $s$ ungünstige sind, und da jeder Fall einer Beobachtung mit jedem Falle einer zweiten Beobachtung combinirt werden kann, die combinirten Fälle aber wieder mit jedem Falle einer dritten, vierten, ... Beobachtung verbunden werden können, so ist klar ersichtlich, dass hier die Regel, welche auf die Anmerkung [**237**] zu der Aufgabe XII des ersten Theiles (S. 47, 48) folgt, und deren zweiter Zusatz zur Anwendung kommen müssen. Darnach findet man, dass die Hoffnung auf keine ungünstige Beobachtung gleich $\frac{r^{nt}}{t^{nt}}$, auf eine ungünstige Beobachtung gleich $\binom{nt}{1}\frac{r^{nt-1}s}{t^{nt}}$, auf zwei, drei, ... ungünstige Beobachtungen bez. gleich $\binom{nt}{2}\frac{r^{nt-2}s^2}{t^{nt}}$, $\binom{nt}{3}\frac{r^{nt-3}s^3}{t^{nt}}$, ... ist. Es werden also (indem man den gemeinsamen Nenner $t^{nt}$ fortlässt) die Wahrscheinlichkeitsgrade [17]) oder die Zahlen der Fälle, in welchen es sich ereignen kann, dass alle Beobachtungen günstige, dass alle bis auf eine, zwei, drei ... ungünstige Beobachtungen günstige sind, gleich

$$r^{nt},\ \binom{nt}{1}r^{nt-1}s,\ \binom{nt}{2}r^{nt-2}s^2,\ \binom{nt}{3}r^{nt-3}s^3,\ \ldots .$$

Diese Ausdrücke sind aber gerade die Glieder der $nt^{\text{ten}}$ Potenz des Binoms $r+s$, welche in unseren Hülfssätzen betrachtet worden ist, und deshalb liegt alles Weitere klar zu Tage. Aus der Beschaffenheit dieser Reihenentwickelung ist sofort ersichtlich, dass die Zahl der Fälle, in welchen $nr$ Beobachtungen günstige und die übrigen $ns$ Beobachtungen ungünstige sind, nach Hülfssatz 3 genau gleich dem grössten Gliede $M$ ist, da ihm $ns$ Glieder vorangehen und $nr$ Glieder folgen. Ebenso ist klar, dass die Anzahl der Fälle, in welchen von allen $nt$ Beobachtungen $nr+n$, bez. $nr-n$ günstige und die übrigen ungünstige sind, durch die Glieder $L_n$ und $R_n$ gegeben werden, da diese ja um $n$ Glieder von dem grössten Gliede $M$ nach beiden Seiten hin abstehen. Folglich ist die Anzahl aller Fälle, in denen nicht mehr als $nr+n$ und nicht weniger als $nr-n$ günstige unter allen $nt$ Beobachtungen sind, gleich der Summe aller Glieder der Entwickelung von $(r+s)^{nt}$, welche zwischen $L_n$ und $R_n$ (einschliesslich der Grenzen) liegen. Die Anzahl aller übrigen Fälle, in welchen mehr als $nr+n$ oder weniger als $nr-n$ Beobachtungen günstige sind, ist gleich der Summe aller übrigen Glieder der Potenzentwickelung, welche ausserhalb des Intervalles $L_n$ bis $R_n$ stehen. Da nun der Potenzexponent des Binoms so gross genommen werden kann, dass die Summe der Glieder, welche von den beiden Grenzen $L_n$ und $R_n$ (diese mitgerechnet) eingeschlossen sind, mehr als $c$-mal grösser ist als die Summe aller übrigen Glieder ausserhalb dieser Grenzen (nach Hülfssatz 4 und 5), so folgt: Es können so viele Beobachtungen angestellt werden, dass die Anzahl der Fälle, in welchen das Verhältniss der günstigen zu allen überhaupt angestellten

Beobachtungen [238] die Grenzwerthe $\frac{nr+n}{nt}$ und $\frac{nr-n}{nt}$ oder $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ nicht überschreitet, mehr als $c$-mal grösser ist als die Summe der übrigen Fälle, d. h. dass es mehr als $c$-mal wahrscheinlicher wird, dass das Verhältniss der Anzahl der günstigen zu der Anzahl aller Beobachtungen die Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ nicht überschreitet, als dass es sie überschreitet. W. z. b. w.



Bei der speciellen Anwendung dieses Satzes auf Zahlen erkennt man leicht, dass, je grössere Zahlen für $r$, $s$ und $t$ genommen werden (wobei jedoch $\frac{r}{s}$ denselben Werth behalten muss), um so enger die Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ des Verhältnisses $\frac{r}{t}$ aneinanderrücken. Wenn also das Verhältniss $\frac{r}{s}$ z. B. gleich $\frac{3}{2}$ ist, so setze ich nicht $r=3$ und $s=2$, sondern $r=30$ und $s=20$, also $t=r+s=50$ oder $r=300$ und $s=200$, also $t=500$. Im ersteren Falle sind die Grenzen

$$\frac{r+1}{t}=\frac{31}{50} \text{ und } \frac{r-1}{t}=\frac{29}{50}.$$

Nehme ich noch $c=1000$, so bestimmen sich $m$ und $nt$ nach der Anmerkung (Seite 101) für die Glieder auf der linken Seite von $M$:

$$m \geqq \frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1)-\log r}=\frac{4{,}2787536}{0{,}0142405}<301,$$

$$nt=mt+\frac{mst-st}{r+1}<24728$$

und für die Glieder auf der rechten Seite von $M$:

$$m \geqq \frac{\log[c(r-1)]}{\log(s+1)-\log s}=\frac{4{,}4623980}{0{,}0211893}<211,$$

$$nt=mt+\frac{mrt-rt}{s+1}=25550.$$

Daher ist es, nach dem oben bewiesenen Satze, mehr als 1000-mal wahrscheinlicher, dass bei 25550 angestellten Beobachtungen das Verhältniss der günstigen zu allen Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\frac{31}{50}$ und $\frac{29}{50}$ (diese einschliesslich) liegt als ausserhalb derselben. Setzt man $c = 10000$ oder $c = 100000$, so findet man auf gleiche Weise, dass 31258 Beobachtungon nothwendig sind, damit es 10000-mal wahrscheinlicher ist, dass das angegebene Verhältniss innerhalb der genannten Grenzen liegt als ausserhalb derselben, [**239**] und dass, damit es 100000-mal wahrscheinlicher wird, 36966 Beobachtungen nöthig sind, und so fort in das Unendliche, indem man immer ein Vielfaches von 5708 Beobachtungen zu 25550 hinzuaddirt.

Wenn also alle Ereignisse durch alle Ewigkeit hindurch fortgesetzt beobachtet würden (wodurch schliesslich die Wahrscheinlichkeit in volle Gewissheit übergehen müsste), so würde man finden, dass Alles in der Welt aus bestimmten Gründen und in bestimmter Gesetzmässigkeit eintritt, dass wir also gezwungen werden, auch bei noch so zufällig erscheinenden Dingen eine gewisse Nothwendigkeit, und sozusagen ein Fatum anzunehmen. Ich weiss nicht, ob hierauf schon *Plato* in seiner Lehre vom allgemeinen Kreislaufe der Dinge [18]) hinzielen wollte, in welcher er behauptet, dass Alles nach Verlauf von unzähligen Jahrhunderten in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt.

[1]

# Brief an einen Freund
über
# das Ballspiel
(Jeu de Paume)
von
## Jakob Bernoulli.

Sie theilen mir mit, mein Herr, dass Sie eine meiner Schriften, in welcher ich neue Sätze über das Ballspiel aufgestellt habe, zu Gesicht bekamen, und Sie fragen mich, ob diese Sätze sich wirklich streng beweisen lassen, oder ob sie sich nur auf unbewiesene Vermuthungen, welche keinen festen Untergrund haben, stützen; Sie begreifen — nach Ihren eigenen Worten — nicht, dass man die Kräfte der Spieler durch Zahlen messen, und noch weniger, dass man dann alle von mir gezogenen Schlussfolgerungen daraus ableiten kann. Ich werde dadurch veranlasst, Ihnen alle Betrachtungen mitzutheilen, welche ich über diesen Gegenstand angestellt habe und welche nun den Inhalt dieses Briefes bilden sollen; ich schreibe Ihnen den Brief in französischer Sprache, damit Sie in seiner Lectüre nicht durch die Uebersetzungen der unter den Spielern üblichen Kunstausdrücke gestört werden, welche in eine andere Sprache übersetzt weniger verständlich sind. Auch halte ich mich nicht damit auf, Ihnen die Spielregeln auseinanderzusetzen, ebensowenig wie den Grundsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welcher meiner Untersuchung zu Grunde liegt, da ich weiss, dass Beides Ihnen wohlbekannt ist[19]). [2] Im Uebrigen aber werde ich auf alle Einzelheiten meines Gegenstandes ausführlich eingehen, ohne von Ihnen den Vor-wurf zu befürchten, Sie zu lange von einer Lappalie unterhalten zu haben; denn Sie wissen, dass dieses edle Spiel stets zur Belustigung von vornehmen Leuten gedient hat, und Sie werden bald erkennen, dass es, wenn schon zur Leibesübung nützlich, ganz hervorragend fähig und auch würdig ist, den Geist zu fesseln und das Nachdenken anzuregen.



Dass man in den Glücksspielen genau die Gewinnhoffnungen und Schadenbefürchtungen der Spieler berechnen kann, ist, wie ich vor allen Dingen bemerke, darin begründet, dass man meistens genau die Anzahl der Fälle, welche den Spielern günstig oder ungünstig sind, kennt. Dies ist aber nicht der Fall bei den Spielen, welche ganz oder doch theilweise von der Klugheit, dem Eifer oder der Geschicklichkeit der Spieler abhängen, wie es bei dem Ballspiele, dem Schachspiele und den meisten Kartenspielen der Fall ist. Man kann bei diesen, ohne vollkommene Kenntnis von dem Wesen des Geistes und der Beschaffenheit der Organe des menschlichen Körpers zu haben, nicht die Ursachen oder — wie man sich ausdrückt — nicht *a priori* bestimmen, um wieviel klüger, eifriger und gewandter ein Spieler als ein anderer ist; diese Kenntniss zu erlangen aber ist in Folge der tausend verborgenen Ursachen, welche hier zusammenwirken, völlig unmöglich. Diese Unvollkommenheit unserer Erkenntniss hindert aber nicht, dass man die Zahlen der Fälle fast ebenso genau *a posteriori* ermitteln kann, nämlich durch die Beobachtung des oftmals wiederholten Ereignisses; dasselbe Verfahren kann man auch bei den blossen Glücksspielen anwenden, wenn man die Anzahl der Fälle, welche eintreten können, nicht kennt. Z. B. in einem Säckchen sind eine Menge weisser und schwarzer Zettel enthalten, und es ist mir unbekannt, wieviele von jeder Art es sind; was werde ich thun, um das Verhältniss dieser Zahlen zu ermitteln? Ich werde einen Zettel nach dem andern ziehen in der Weise, dass ich den gezogenen Zettel stets in das Säckchen zurücklege, ehe ich den folgenden ziehe, damit die Gesammtzahl der Zettel im Säckchen nicht kleiner wird. Wenn ich dann hundertmal beobachte, dass ich einen schwarzen Zettel, und zweihundertmal, dass ich einen weissen Zettel ergriffen habe, so werde ich kein Bedenken tragen, hieraus zu schliessen, dass die Anzahl der weissen Zettel annähernd doppelt so gross ist als diejenige der schwarzen. Denn es ist ganz sicher, dass, je mehr ich in dieser Art Beobachtungen anstelle, ich um so mehr hoffen darf, dem wahren Verhältnisse, welches zwischen den Zahlen [3] der weissen und schwarzen Zettel besteht, nahe zu kommen. Man kann nämlich, wie sich sogar völlig streng beweisen lässt, stets soviele Beobachtungen anstellen, dass es schliesslich mit jeder beliebig gegebenen Wahrscheinlichkeit wahrscheinlich und mithin schliesslich moralisch gewiss wird, dass der durch Beobachtungen gefundene Werth des genannten Verhältnisses von dem wahren Werthe nur beliebig wenig abweicht. Auf diese Weise kann man auch bei Spielen, welche von dem Verstande und der Gewandtheit der Spieler abhängen, bestimmen, um wieviel ein Spieler geschickter als ein anderer ist. Ich sehe z. B. zwei Personen Ball spielen und beobachte sie lange Zeit; dabei nehme ich wahr, dass der eine der beiden Spieler 200 oder 300 Schläge gewinnt, während der andere nur 100 gewinnt, und urtheile infolgedessen mit genügender Sicherheit, dass der erstere doppelt oder dreifach so gut als der andere spielt, da er, so zu sagen, zwei oder drei Theile der Geschicklichkeit, als ebensoviele Fälle oder Ursachen, welche ihn den Ball gewinnen lassen, und der letztere nur einen solchen Theil besitzt.

I. Nachdem wir dies vorausgeschickt haben und nun an den eigentlichen Gegenstand herantreten, nehmen wir an, dass zwei gleich gewandte Spieler $A$ und $B$ (d. h. zwei Spieler, welche wir dieselbe Anzahl von Gängen haben gewinnen und verlieren sehen) *Einstand* oder Beide 30 oder 15 oder noch nichts haben; offenbar hat in diesen Fällen jeder der beiden Spieler die gleiche Hoffnung, die ihm noch fehlenden Gänge und damit das Spiel zu gewinnen, und folglich hat jeder von ihnen die Hoffnung auf die Hälfte des Spieles oder $\frac{1}{2}$ $S$.

Dann nehmen wir an, dass $A$ 30 und $B$ 45 hat oder — was auf dasselbe hinauskommt — dass $B$ *im Vortheil* ist. Sie erkennen, dass $A$ gleich wahrscheinlich den nächsten Gang gewinnen oder verlieren kann; gewinnt ihn $A$, so zählen beide Spieler Einstand, und jeder von ihnen hat nach dem eben Gesagten die Hoffnung $\frac{1}{2}$ $S$, verliert er ihn aber, so verliert er zugleich auch das ganze Spiel. Folglich hat $A$ nach der Ihnen bekannten Regel die Hoffnung $\dfrac{1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0}{2} S = \frac{1}{4} S$.

Nehmen wir weiter an, dass $A$ 15 zu 45 hat, so kann er gleich leicht 30 zu 45 und damit die vorher gefundene

Hoffnung $\frac{1}{4}$ *S* erreichen oder das Spiel verlieren (je nachdem er den nächsten Gang gewinnt oder verliert). Folglich hat *A*

die Hoffnung $\frac{1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0}{2} S = \frac{1}{8} S$.

Wenn *A* 15 zu 30 hat, so kann er entweder ebenfalls 30 oder 15 zu 45 erhalten; im ersteren Falle kommt er zu der Hoffnung $\frac{1}{2} S$, im letzteren zu der Hoffnung $\frac{1}{8} S$. Folglich ist seine Hoffnung gleich $\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{8}}{2} S = \frac{5}{16} S$.

[4] In gleicher Weise findet man für die anderen möglichen Annahmen die Hoffnungen des *A*, wie sie in der folgenden Tafel sich verzeichnet finden; aus ihnen kann man leicht die Hoffnungen des *B* finden, da sie jene zu 1 ergänzen müssen.

*Tafel I.*

| Punkte des *A* | Punkte des *B* | Hoffnung des *A* |
|---|---|---|
| 45 | 45 | $\frac{1}{2} S$ |
| 30 | 45 | $\frac{1}{4} S$ |
| 15 | 45 | $\frac{1}{8} S$ |
| 0 | 45 | $\frac{1}{16} S$ |
| 30 | 30 | $\frac{1}{2} S$ |
| 15 | 30 | $\frac{5}{16} S$ |
| 0 | 30 | $\frac{3}{16} S$ |
| 15 | 15 | $\frac{1}{2} S$ |
| 0 | 15 | $\frac{11}{32} S$ |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2} S$ |

II. Ebenso ist klar, dass, wenn man Spieleinstand zählt, jeder der beiden Spieler in gleichem Grade hoffen kann, die ganze Partie zu gewinnen, indem er zwei Spiele hintereinander gewinnt. Folglich hat jeder Spieler die Hoffnung auf eine halbe Partie oder $\frac{1}{2} P$.

Wenn aber — es mag die Partie auf vier von einem Spieler gewonnene Spiele gehen — *A* 2 und *B* 3 Spiele gewonnen und letzterer mithin den Vortheil für sich oder Spielvor hat, so ist es gleich wahrscheinlich, dass das nächste Spiel beiden Spielern wieder Spieleinstand verschafft oder dass es $A$ die Partie verlieren lässt, je nachdem er dieses Spiel gewinnt oder verliert. Folglich hat $A$ die Hoffnung $\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0}{2} P = \frac{1}{4} P.$



Ebenso findet man, dass $A$ die Hoffnung $\frac{1}{8} P$ hat, wenn ihm noch 3 Spiele, um die Partie zu gewinnen, fehlen, während $B$ nur noch ein Spiel zu gewinnen braucht; u. s. w. Die nachfolgende Tafel II giebt die Hoffnungen des $A$ in Bezug auf die ganze Partie für alle möglichen Annahmen an, und Sie sehen aus derselben, dass die hier für die Hoffnungen des $A$ gefundenen Zahlen mit denen der ersten Tafel übereinstimmen, wie es auch der Fall sein muss, da die vier Gänge eines Spieles für dasselbe ebensoviel bedeuten, als die vier Spiele für die ganze Partie.

*Tafel II.*

| Spiele des | | Hoffnung des |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $A$ |
| 3 | 3 | $\frac{1}{2} P$ |
| 2 | 3 | $\frac{1}{4} P$ |
| 1 | 3 | $\frac{1}{8} P$ |
| 0 | 3 | $\frac{1}{16} P$ |
| 2 | 2 | $\frac{1}{2} P$ |
| 1 | 2 | $\frac{5}{16} P$ |
| 0 | 2 | $\frac{3}{16} P$ |
| 1 | 1 | $\frac{1}{2} P$ |
| 0 | 1 | $\frac{11}{32} P$ |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2} P$ |

III. Ferner betrachten wir die beiden Spieler, wenn sie Spieleinstand zählen und ausserdem $A$ 30 und $B$ 45 hat. Wenn $A$ den nächsten Gang gewinnt, so haben beide Spieler wieder Einstand und also auch [6] gleiche Hoffnung; verliert $A$ aber diesen Ball, so erhält $B$ Spiel-vor, in welchem Falle $A$ die Hoffnung $\frac{1}{4} P$ hatte. Es hat also $A$ jetzt im Ganzen die Hoffnung: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}}{2} P = \frac{3}{8} P$, die Partie zu gewinnen.

Nehmen wir weiter an, dass $A$ zwei Spiele (oder ein Spiel), $B$ drei Spiele gewonnen hat und beide entweder Einstand oder 30 oder 15 zählen, so ist klar, dass jeder gleich leicht das nächste Spiel gewinnen kann. Die Hoffnungen beider Spieler sind also dieselben, als wenn sie nur ihre vollen Spiele und noch keine Punkte darüber hinaus gewonnen hätten. Daher hat $A$ die im vorigen Paragraphen gefundene Hoffnung, nämlich $\frac{1}{4} P$ (oder $\frac{1}{8} P$).



Wenn $A$ 2 gegen 3 Spiele und 30 gegen 45 gewonnen hat, so kann er gleich leicht 45 erlangen oder das Spiel und mit ihm die ganze Partie verlieren, je nachdem er den nächsten Gang gewinnt oder verliert. Folglich ist der Werth seiner Hoffnung gleich $\frac{1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0}{2} P = \frac{1}{8} P$.

Wenn $A$ 2 gegen 3 Spiele gewonnen hat und das neue Spiel 15 zu 45 steht, so kann ihm der nächste Gang entweder 30 zu 45 bringen oder ihn das Spiel und zugleich die Partie verlieren lassen. Seine Hoffnung hat also den Werth $\frac{1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 0}{2} P = \frac{1}{16} P$.

Auf diese Weise fortfahrend habe ich die folgende Tafel III berechnet, welche die Hoffnungen des $A$ für alle bei zwei Spielern möglichen Fälle enthält, wenn jeder von beiden ausser seinen vollen Spielen noch eine gewisse Anzahl Punkte gewonnen hat. In der letzten Zeile umfasst diese umstehende Tafel die ganze Tafel II.

Wenn Sie sich die Mühe nehmen, diese Tafel genauer zu betrachten, so können Sie mehrere bemerkenswerthe Beobachtungen machen. Sie sehen z. B., dass 15 zu 30, wenn die Spieler Spieleinstand zählen, ebensoviel werth ist als 30 zu 0 bei 2 zu 3 Spielen oder 45 zu 30 bei 1 zu 2 Spielen oder schliesslich 30 zu 45 bei einem zu einem Spiele; dass 1 zu 2 Spielen mit 45 zu 15 für $A$ ein wenig günstiger ist als wenn jeder der beiden Spieler noch kein volles Spiel und $A$ 0 und $B$ 15 hätte, da zwischen den Hoffnungen, welche diesen beiden Annahmen entsprechen, die Differenz $\frac{1}{512}$ besteht; u. s. w.

[5]

## Tafel III.

| Spiele des *A* / Spiele des *B* | | 3 / 3 oder 2 / 2 | 2 / 3 | 1 / 3 | 0 / 3 | 1 / 2 | 0 / 2 | 1 / 1 | 0 / 1 | 0 / 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte des *A* | Punkte des *B* | | | | | | | | | |
| 45 | 45 | 1 : 2 | 1 : 4 | 1 : 8 | 1 16 | 5 : 16 | 3 : 16 | 1 : 2 | 11 : 32 | 1 : 2 |
| 30 | 45 | 3 : 8 | 1 : 8 | 1 : 16 | 1 : 32 | 7 : 32 | 1 : 8 | 13 : 32 | 17 : 64 | 27 : 64 |
| 15 | 45 | 5 : 16 | 1 : 16 | 1 : 32 | 1 : 64 | 11 : 64 | 3 : 32 | 23 : 64 | 29 : 128 | 49 : 128 |
| 0 | 45 | 9 : 32 | 1 : 32 | 1 : 64 | 1 : 128 | 19 : 128 | 5 : 64 | 43 : 128 | 53 : 256 | 93 : 256 |
| 45 | 30 | 5 : 8 | 3 : 8 | 3 : 16 | 3 : 32 | 13 : 32 | 1 : 4 | 19 : 32 | 27 : 64 | 37 : 64 |
| 30 | 30 | 1 : 2 | 1 : 4 | 1 : 8 | 1 : 16 | 5 : 16 | 3 : 16 | 1 : 2 | 11 : 32 | 1 : 2 |
| 15 | 30 | 13 : 32 | 5 : 32 | 5 : 64 | 5 : 128 | 31 : 128 | 9 : 64 | 55 : 128 | 73 : 256 | 113 : 256 |
| 0 | 30 | 11 : 32 | 3 : 32 | 3 : 64 | 3 : 128 | 25 : 128 | 7 : 64 | 49 : 128 | 63 : 256 | 103 : 256 |
| 45 | 15 | 11 : 16 | 7 : 16 | 7 : 32 | 7 : 64 | 29 : 64 | 9 : 32 | 41 : 64 | 59 : 128 | 79 : 128 |
| 30 | 15 | 19 : 32 | 11 : 32 | 11 : 64 | 11 : 128 | 49 : 128 | 15 : 64 | 73 : 128 | 103 : 256 | 143 : 256 |
| 15 | 15 | 1 : 2 | 1 : 4 | 1 : 8 | 1 : 16 | 5 : 16 | 3 : 16 | 1 : 2 | 11 : 32 | 1 : 2 |
| 0 | 15 | 27 : 64 | 11 : 64 | 11 : 128 | 11 : 256 | 65 : 256 | 19 : 128 | 113 : 256 | 151 : 512 | 231 : 512 |
| 45 | 0 | 23 : 32 | 15 : 32 | 15 : 64 | 15 : 128 | 61 : 128 | 19 : 64 | 85 : 128 | 123 : 256 | 163 : 256 |
| 30 | 0 | 21 : 32 | 13 : 32 | 13 : 64 | 13 : 128 | 55 : 128 | 17 : 64 | 79 : 128 | 113 : 256 | 153 : 256 |
| 15 | 0 | 37 : 64 | 21 : 64 | 21 : 128 | 21 : 256 | 95 : 256 | 29 : 128 | 143 : 256 | 201 : 512 | 281 : 512 |
| 0 | 0 | 1 : 2 | 1 : 4 | 1 : 8 | 1 : 16 | 5 : 16 | 3 : 16 | 1 : 2 | 11 : 32 | 1 : 2 |

IV. Jetzt sollen die Hoffnungen der Spieler für den Fall gefunden werden, dass beide nicht die gleiche Kunstfertigkeit besitzen. Um die Rechnung abzukürzen, nehmen wir sofort allgemein an, dass man den gewandteren Spieler $A$ habe $n$ Gänge gewinnen sehen, während $B$ in dieser Zeit nur einen einzigen gewann; [7] dann bezeichnet also $\frac{n}{1}$ das Verhältniss, welches zwischen den Kunstfertigkeiten der beiden Spieler besteht.

Wir nehmen zunächst an, dass die Spieler Einstand zählen und wir ihre Hoffnungen finden wollen. Würde ein Gang ausreichen, um einen von beiden das Spiel gewinnen zu lassen, so wären ihre Hoffnungen schon gefunden, da sie sich ebenso zu einander verhalten würden, wie ihre Fertigkeiten, also wie $n$ zu 1. Weil aber die Spielregeln verlangen, dass ein Spieler zwei Gänge hintereinander gewinnen muss, um das Spiel zu gewinnen, so ist das gesuchte Verhältniss der Hoffnungen von $\frac{n}{1}$ verschieden und muss mit Hülfe der Analysis berechnet werden. Wir bezeichnen die gesuchte Hoffnung des $A$ mit $x$ und beachten, dass der erste Gang einen von beiden Spielern in den Vortheil bringen muss, während der zweite Gang beiden wieder Einstand geben und somit dem $A$ seine ursprüngliche Hoffnung $x$ zurückgeben kann. Was tritt nun ein, wenn einer von beiden Spielern den Vortheil für sich erhält? Ist $A$, welcher der $n$-mal geschicktere der beiden Spieler ist, in den Vortheil gekommen, so hat er $n$ Wahrscheinlichkeiten für sich, das Spiel zu gewinnen, und eine Wahrscheinlichkeit, wieder die Hoffnung $x$ zu bekommen, je nachdem er den zweiten Gang gewinnt oder verliert. Folglich ist seine Hoffnung in diesem Falle gleich $\frac{n \cdot 1 + 1 \cdot x}{n+1} = \frac{n+x}{n+1}$. Wenn aber $B$ durch den ersten Gang in den Vortheil gekommen ist, so sind $n$ Wahrscheinlichkeiten für $A$ vorhanden, durch den nächsten Gang wieder Einstand und also $x$ zu erhalten, und eine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu verlieren; daher ist in diesem Falle die Hoffnung des $A$ gleich $\frac{n \cdot x + 1 \cdot 0}{n+1} = \frac{nx}{n+1}$. Ursprünglich nun, wo beide Spieler gleich stehen, hat $A$, welcher $n$-mal mehr Wahrscheinlichkeit hat, den Vortheil zu erhalten, als ihn nicht zu bekommen, die Hoffnung:

$$\frac{n\cdot\frac{n+x}{n+1}+1\cdot\frac{nx}{n+1}}{n+1}=\frac{n^2+2nx}{n^2+2n+1},$$

und da seine ursprüngliche Hoffnung gleich $x$ gesetzt wurde, so ist

$$x=\frac{n^2+2nx}{n^2+2n+1},$$

woraus folgt:

$$x=\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Für $B$ bleibt also die Hoffnung $\frac{1}{n^2+1}$ übrig, sodass sich die Hoffnungen beider Spieler wie $n^2$ zu 1 verhalten, d. h. das Verhältniss ihrer Hoffnungen gleich dem Quadrate des Verhältnisses ihrer Kunstfertigkeiten ist.

Nachdem man diese Hoffnungen berechnet hat, kann man nacheinander für alle Annahmen, welche in den vorhergehenden Paragraphen gemacht worden sind, die Untersuchung durchführen, wobei man nur stets zu beachten hat, dass $A$ jeden Gang $n$-mal wahrscheinlicher gewinnt als verliert. [8] Es habe z. B. $A$ 30 und $B$ 45: Dann giebt es $n$ Fälle, welche das Spiel wieder auf Einstand bringen, und einen Fall, welcher $A$ verlieren lässt; folglich hat $A$ die Hoffnung

$$\frac{n\cdot\frac{n^2}{n^2+1}+1\cdot 0}{n+1}=\frac{n^3}{(n^2+1)(n+1)}.$$

Steht für $A$ das Spiel 15 zu 45, so hat er $n$ Fälle, welche ihm 30 zu 45 ergeben, und einen Fall, welcher ihn das Spiel verlieren lässt; folglich ist seine Hoffnung gleich

$$\frac{n\cdot\frac{n^3}{(n^2+1)(n+1)}+1\cdot 0}{n+1}=\frac{n^4}{(n^2+1)(n+1)^2}.$$

Auf gleiche Weise findet man den Werth von $A$'s Hoffnung, wenn er 0 und $B$ 45 hat. Haben beide Spieler 30, so haben sie dieselben Hoffnungen, als wenn sie Einstand erreicht haben, da jeder von ihnen, um das Spiel zu gewinnen, zwei Gänge hintereinander gewinnen muss. Dann bestimmt man ferner die Hoffnungen, wenn $A$ 15 oder 0 und $B$ 30, $A$ 45 und $B$ 30, 15 oder 0, $A$ 30 und $B$ 15 oder 0, $A$ 15 und $B$ 15, $A$ 0 und $B$ 15, $A$ 15 und $B$ 0 und schliesslich beide 0 haben. Die folgende Tafel IV enthält für alle diese Annahmen $A$'s Hoffnungen in Bezug auf jedes einzelne Spiel für ein beliebiges Verhältniss $n$ zwischen den Kunstfertigkeiten der Spieler[20]).



*Tafel IV.*

| Punkte des $A$ | Punkte des $B$ | Hoffnungen des $A$ |
|---|---|---|
| 45 | 45 | $\frac{n^2}{n^2+1}$ |
| 30 | 45 | $\frac{n^3}{(n+1)(n^2+1)}$ |
| 15 | 45 | $\frac{n^4}{(n+1)^2(n^2+1)}$ |
| 0 | 45 | $\frac{n^5}{(n+1)^3(n^2+1)}$ |
| 45 | 30 | $\frac{n(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2+1)}$ |
| 30 | 30 | $\frac{n^2(n^2+2n+1)}{(n+1)^2(n^2+1)} = \frac{n^2}{n^2+1}$ |
| 15 | 30 | $\frac{n^3(n^2+3n+1)}{(n+1)^3(n^2+1)}$ |
| 0 | 30 | $\frac{n^4(n^2+4n+1)}{(n+1)^4(n^2+1)}$ |
| 45 | 15 | $\frac{n(n^3+2n^2+2n+2)}{(n+1)^2(n^2+1)}$ |
| 30 | 15 | $\frac{n^2(n^3+3n^2+4n+3)}{(n+1)^3(n^2+1)}$ |
| 15 | 15 | $\frac{n^3(n^3+4n^2+7n+4)}{(n+1)^4(n^2+1)} = \frac{n^3(n^2+3n+4)}{(n+1)^3(n^2+1)}$ |
| 0 | 15 | $\frac{n^4(n^3+5n^2+11n+5)}{(n+1)^5(n^2+1)}$ |
| 45 | 0 | $\frac{n(n^4+3n^3+4n^2+4n+3)}{(n+1)^3(n^2+1)}$ |
| 30 | 0 | $\frac{n^2(n^4+4n^3+7n^2+8n+6)}{(n+1)^4(n^2+1)}$ |
| 15 | 0 | $\frac{n^3(n^4+5n^3+11n^2+15n+10)}{(n+1)^5(n^2+1)}$ |
| 0 | 0 | $\frac{n^4(n^4+6n^3+16n^2+26n+15)}{(n+1)^6(n^2+1)} = \frac{n^4(n^3+5n^2+11n+15)}{(n+1)^6(n^2+1)}$ |

[9] V. Wie Sie richtig erkennen, muss aus der vorstehenden Tafel die Tafel I für zwei Spieler von gleicher Kunstfertigkeit wieder entstehen, wenn man $n = 1$ setzt. Für $n = 2, 3, 4, \ldots$ liefert die Tafel IV die Hoffnungen zweier Spieler, von welchen der eine zwei-, drei-, viermal ... geschickter ist als der andere. Ist $A$ z. B. zweimal geschickter als $B$, so finden Sie für seine Hoffnungen die Werthe: $\frac{4}{5}S$, wenn Beide Einstand zählen, und $\frac{8}{15}S$, wenn $A$ 30 und $B$ 45 hat; in diesen beiden Fällen bleiben mithin für $B$ die Hoffnungen $\frac{1}{5}S$ und $\frac{7}{15}S$ übrig, sodass sich die Hoffnungen der beiden Spieler verhalten wie 4 zu 1, bez. wie 8 zu 7. Die Tafel V giebt die Verhältnisse der Hoffnungen beider Spieler für jeden Stand eines Spieles und für $n = 2, 3, 4$.



[10] *Tafel V.*

| Punkte des $A$ | Punkte des $B$ | Verhältniss ihrer Hoffnungen, wenn $A$ kunstfertiger ist als $B$ und zwar: zweimal | dreimal | viermal |
|---|---|---|---|---|
| 45 | 45 | 4 : 1 | 9 : 1 | 16 : 1 |
| 30 | 45 | 8 : 7 | 27 : 13 | 64 : 21 |
| 15 | 45 | 16 : 29 | 81 : 79 | 256 : 169 |
| 0 | 45 | 32 : 103 | 243 : 397 | 1024 : 1101 |
| 45 | 30 | 14 : 1 | 39 : 1 | 84 : 1 |
| 30 | 30 | 4 : 1 | 9 : 1 | 16 : 1 |
| 15 | 30 | 88 : 47 | 513 : 127 | 1856 : 269 |
| 0 | 30 | 208 : 197 | 891 : 389 | 8448 : 2177 |
| 45 | 15 | 44 : 1 | 159 : 1 | 424 : 1 |
| 30 | 15 | 124 : 11 | 621 : 19 | 2096 : 29 |
| 15 | 15 | 112 : 23 | 297 : 23 | 2048 : 77 |
| 0 | 15 | 176 : 67 | 891 : 133 | 49408 : 3717 |
| 45 | 0 | 134 : 1 | 639 : 1 | 2124 : 1 |
| 30 | 0 | 392 : 13 | 1269 : 11 | 10592 : 33 |
| 15 | 0 | 224 : 19 | 999 : 25 | 52608 : 517 |
| 0 | 0 | 208 : 35 | 243 : 13 | 51968 : 1157 |

Sie beachten jedoch, dass die beiden letzten Tafeln nur die Hoffnungen in Bezug auf jedes einzelne Spiel angeben. Es würde nun noch eine Tafel aufzustellen sein, welche die Hoffnungen der Spieler in Bezug auf die ganze Partie enthält, wenn $A$

und $B$ auf mehrere Spiele spielen, von welchen sie einige und ausserdem noch eine bestimmte Anzahl Punkte bereits gewonnen haben; diese Tafel würde der Tafel III entsprechen, welche die Hoffnungen zweier gleich tüchtigen Spieler angiebt. Weil aber die Fortführung der Untersuchung in Buchstaben äusserst mühsam werden und eine gewaltige Rechnung erfordern würde, so begnüge ich mich an einem speciellen Beispiele zu zeigen, wie man verfahren muss, um auf abgekürztem Wege die gesuchten Hoffnungen zu finden.



Angenommen, die Partie gehe auf 4 Spiele, $A$ habe ein Spiel und noch 15, $B$ aber zwei Spiele und 45 gewonnen und $A$ habe die doppelte Spielfertigkeit wie $B$; welche Hoffnungen, die Partie zu gewinnen, haben die beiden Spieler? Zunächst bemerke ich, dass die Hoffnungen, welche die beiden Spieler bei Beginn eines Spieles haben, dasselbe zu gewinnen, sich verhalten (nach Tafel V) wie $208 : 35 = \frac{208}{35} : 1$; es kann also der Spieler, welcher zweimal geschickter als der andere ist, $\frac{208}{35}$- (d. i. fast 6-)mal leichter dieses Spiel gewinnen als der andere. Ferner beachte ich, dass nach Beendigung des gerade im Gange befindlichen Spieles [**11**] entweder $A$ 2 und $B$ 2 oder $A$ 1 und $B$ 3 Spiele zählt (je nachdem $A$ oder $B$ es gewonnen hat), und also entweder beiden Spielern noch je 2 Spiele oder $A$ 3 Spiele und $B$ ein Spiel fehlen. Nun ist aber klar, dass die Hoffnungen der Spieler, die noch fehlenden Spiele und damit die Partie zu gewinnen, dieselben sind, welche sie haben, ein einzelnes Spiel zu gewinnen, wenn ihnen noch ebensoviele Gänge fehlen, (d. h. wenn sie entweder 30 zu 30 oder 15 zu 45 Punkte haben), wobei allerdings angenommen ist, dass der geschicktere Spieler $A$ ebensovielmals leichter als $B$ ein ganzes Spiel gewinnen könne, als er einen einzelnen Gang gegen $B$ gewinnen kann, welches Verhältniss mit $n$ bezeichnet worden war. In Wirklichkeit kann $A$ aber, wie ich angegeben habe, $\frac{208}{35}$-mal leichter als $B$ ein ganzes Spiel gewinnen, und folglich ist dieser Werth an Stelle von $n$ in die Ausdrücke:

$$\frac{n^2}{n^2+1} \text{ und } \frac{n^4}{(n+1)^2(n^2+1)},$$

welche (nach Tafel IV) $A$'s Hoffnungen angeben, wenn er 30 zu 30, bez. 15 zu 45 hat, einzusetzen, um seine Hoffnungen zu erhalten, wenn $A$ gegen $B$ 2 gegen 2 oder 1 gegen

3 Spiele gewonnen hat; man erhält so die Hoffnungen: $\frac{43264}{44489}P$ und $\frac{1871773696}{2627030961}P$. Es war aber angenommen, dass $A$ gegen $B$ in dem gerade im Gange befindlichen Spiele 15 gegen 45 zählt; bei diesem Stande des Spiels aber hat $A$ (nach Tafel V) 16 Fälle, in welchen er das Spiel gewinnt, und 29 Fälle, in welchen er es verliert. Folglich hat $A$ 16 Fälle, um 2 gegen 2 Spiele, und 29 Fälle, um 1 Spiel gegen 3 Spiele zu erlangen, und hieraus ergiebt sich für seine Hoffnung der Werth:

$$\frac{16\cdot\frac{43264}{44489}+29\cdot\frac{1871773696}{2627030961}}{45}P=\frac{19031314432}{23643278649}P.$$

Für $B$'s Hoffnung bleibt mithin der Werth: $\frac{4611964217}{23643278649}P$. Es verhalten sich also die Hoffnungen beider Spieler zu einander wie 19031314432 zu 4611964217, welches Verhältniss ein wenig grösser als 4 : 1 ist. Aber ich will weiter gehen.

VI. Ist das Verhältniss der Spielfertigkeiten der beiden Spieler bekannt, so kann man berechnen, wieviel der eine Spieler dem andern vorgeben muss, damit beide gleiche Gewinnhoffnungen in jedem einzelnen Spiele haben.

Man braucht nur einen Blick auf die Tafel V zu thun und nachzusehen, an welchen Stellen das Verhältniss der Hoffnungen von $A$ und $B$ den der Einheit am nächsten kommenden Werth hat. Ist z. B. $A$ zweimal geschickter als $B$, so sind die Hoffnungen beider Spieler am wenigsten von einander verschieden, wenn $A$ 0 und $B$ 30 hat, sodass also $A$ dem $B$ 30 vorgeben kann und dabei noch ein wenig im Vortheil bleibt, da seine Hoffnung, das Spiel zu gewinnen, ein wenig grösser als die des $B$ ist. Wenn aber $A$ ein dreimal geschickterer Spieler als $B$ ist und ihm 45 vorgiebt, so hat $B$ offenbar einen merklichen Vortheil voraus; giebt $A$ dem $B$ aber nur 30 vor, so behält er für sich einen weit grösseren Vortheil voraus; [12] wenn aber für Beide das Spiel möglichst gerecht sein soll, so muss $A$ dem $B$ 45 vorgeben und für sich 15 zählen. Ist aber $A$ viermal geschickter im Ballspielen als $B$, so kann er $B$ 45 vorgeben, wobei $B$ ein klein wenig im Vortheile ist. Wenn $A$ endlich fünfmal dem $B$ überlegen ist, so kann er ihm 45 vorgeben und behält für sich noch einen beträchtlichen Vortheil voraus, da sich seine Hoffnung zu der des *B* wie 3125 zu 2491 verhält; und so fort.



VII. Es fragt sich nun umgekehrt, um wieviel *A* dem *B* an Spielfertigkeit überlegen sein muss, um ihm 45, 30 oder 15 vorgeben zu können.

Um diese Frage zu beantworten, muss man beachten, dass *A* dem *B*, um das Spiel gerecht werden zu lassen, soviel vorgeben muss, als nöthig ist, jedem von Beiden die Hoffnung $\frac{1}{2}$ zu geben. Man wird also aus der Tafel IV die Werthe entnehmen, welche *A*'s Hoffnungen angeben, wenn er 0 und *B* 45, 30 oder 15 hat, und diese gleich $\frac{1}{2}$ setzen, was die drei Gleichungen liefert:

$$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4n^2+3n+1}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7n^2+4n+1}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11n^2+5n+1}=\frac{1}{2},$$

oder

$$n^5-3n^4-4n^3-4n^2-3n-1=0,$$

$$n^6+4n^5-5n^4-8n^3-7n^2-4n-1=0,$$

$$n^7+5n^6+11n^5-5n^4-15n^3-11n^2-5n-1=0.$$

Weil die Wurzeln dieser drei Gleichungen, welche den Werth von $n$ bestimmen, irrationale Zahlen sind, so folgt, dass die Fertigkeiten der Spieler, von denen der eine dem andern eine gewisse Anzahl Punkte vorausgiebt, unter sich incommensurabel sind. Die Wurzel der ersten Gleichung ist 4,216 (oder ungefähr $4\frac{1}{5}$), der zweiten Gleichung 1,946 (oder ungefähr $1\frac{9}{10}$) und der dritten Gleichung 1,313 (oder ungefähr $1\frac{3}{10}$); es muss also derjenige Spieler, welcher seinem Gegner 45 vorgeben kann, $4\frac{1}{5}$-mal geschickter als dieser sein; will er ihm aber 30 oder 15 vorgeben, so muss er $1\frac{9}{10}$ bez. $1\frac{3}{10}$-mal geschickter als dieser sein, [**13**] d. h. er muss im ersten Falle 42, im zweiten 19 und im dritten 13 Gänge gewinnen, während sein Gegner 10 Gänge gewinnt.

Wenn $A$ dem $B$ aber soviel bei jedem Spiele vorgiebt, als nöthig ist, um das Spiel für Beide gleich zu machen, so ist es gleichgültig, ob sie auf ein Spiel, auf zwei, drei oder beliebig viele Spiele spielen. Denn es ist dann ebenso wahrscheinlich, dass $A$ ein Spiel gewinnt, als dass er es verliert; dass er zwei Spiele hintereinander gewinnt, als dass er sie verliert, wenn die Partie auf zwei Spiele gespielt wird; dass er drei Spiele gewinnt, als dass er sie verliert, wenn die Partie auf drei Spiele gespielt wird; und so fort.



VIII. Wieviel mehr Spielfertigkeit als $B$ muss $A$ besitzen, wenn er ihm ein halb funfzehn oder ein halb dreissig oder ein halb fünfundvierzig vorgeben will[21]).

Angenommen, $A$ gebe dem $B$ ein halb fünfundvierzig vor, die Partie werde auf zwei Spiele gespielt und $B$ nehme im ersten Spiele 30, im zweiten 45 voraus; falls die Partie wieder auf gleiches Spiel kommt, so nehme $B$ von neuem zuerst 30 und dann 45 voraus und in dieser Weise abwechselnd fort. Ferner verhalte sich $B$'s Hoffnung, das Spiel zu gewinnen, zu der des $A$ wie $b$ zu $a$, wenn $B$ 30, und wie $d$ zu $c$, wenn $B$ 45 vorausgenommen hat. Die Gewinnhoffnung des $A$ bei Beginn der Partie sei gleich $z$. Was tritt ein, wenn $B$ das erste Spiel gewonnen hat? Dann nimmt $B$ 45 voraus, und es hätte $A$ nach der Voraussetzung $c$ Wahrscheinlichkeiten, das zweite Spiel zu gewinnen, gegenüber $d$ Wahrscheinlichkeiten, es zu verlieren. Gewinnt es $A$, so sind die Hoffnungen beider Spieler wieder dieselben, wie bei Beginn der Partie; verliert es $A$ aber, so verliert er zugleich die ganze Partie. Folglich hat in diesem Falle $A$ die Hoffnung $\frac{c \cdot z + d \cdot 0}{c + d} = \frac{cz}{c + d}$.

Hat aber $A$ das erste Spiel gewonnen, so nimmt $B$ dann 45 voraus und $A$ hat $c$ Wahrscheinlichkeiten, das Spiel und mit ihm die Partie zu gewinnen, und $d$ Wahrscheinlichkeiten, es zu verlieren und seine ursprüngliche Hoffnung $z$ zurückzuerhalten. Mithin hat dann seine Hoffnung den Werth $\frac{c \cdot P + d \cdot z}{c + d}$.

Bei Beginn der Partie, wo $B$ zunächst 30 vorausnimmt, hat $A$ für sich $a$ Wahrscheinlichkeiten, in den Vortheil zu kommen und damit die zuletzt berechnete Hoffnung $\frac{cP + dz}{c + d}$

zu erlangen, und $b$ Wahrscheinlichkeiten, $B$ in den Vortheil kommen zu sehen und selbst die Hoffnung $\frac{cz}{c+d}$ zu bekommen.

Folglich ist seine Hoffnung $z$ bei Beginn der Partie:

[14]
$$z = \frac{a\frac{cP+dz}{c+d} + b\frac{cz}{c+d}}{a+b}$$

$$= \frac{acP + (ad+bc)z}{(a+b)(c+d)},$$

woraus

$$z = \frac{ac}{ac+bd} P$$

folgt. Da nun vorausgesetzt war, dass die Partie mit 0 zu $\frac{1}{2}$45 für beide Spieler gleiche Gewinnaussichten darbietet, also jeder von ihnen im Anfange die Hoffnung $\frac{1}{2} P$ hat, so muss

$$\tfrac{1}{2} P = \frac{ac}{ac+bd} P$$

sein, woraus folgt:

$$ac = bd \text{ oder } a : b = d : c.$$

Es ergiebt sich also, dass die Partie gerecht ist, wenn die vier Grössen $a$, $b$, $d$, $c$ zu einander in Proportion stehen, d. h. die Hoffnung des geschickteren Spielers, das Spiel zu gewinnen, wenn sein Gegner 30 voraus hat, zu seiner Hoffnung in diesem Spiele sich verhält, wie des Gegners Hoffnung, wenn er 45 voraus hat, zu seiner eignen in dem zweiten Spiele, oder auch wenn es zwei-, drei-, viermal, . . . wahrscheinlicher ist, dass der schwächere Spieler das Spiel verliert, wenn er nur 30 voraus hat, und wenn es im Gegentheil ebensovielmal wahrscheinlicher ist, dass er das Spiel gewinnt, wenn er 45 voraus hat.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass es ganz gleichgültig ist, ob $B$ beim ersten Spiele 30 und beim zweiten 45 oder ob er umgekehrt beim ersten Spiele 45 und beim zweiten 30 vorausnimmt. Denn mit Hülfe einer der obigen ganz ähnlichen Rechnung finde ich:

$$z = \frac{c\,\dfrac{aP+bz}{a+b} + d\,\dfrac{az}{a+b}}{a+b}$$



$$= \frac{acP + (bc+ad)z}{(a+b)(c+d)},$$

also schliesslich wiederum:

$$z = \frac{ac}{ac+bd}\,P,$$

wie vorher. Folglich sind diejenigen im Irrthum, welche sich einbilden, dass es vortheilhaft ist, beim ersten Spiele die geringere und erst beim zweiten die grössere Anzahl der vorgegebenen Punkte zu nehmen.

Weil dieselbe Rechnung stets gültig bleibt, welche Werthe auch die Verhältnisse $a:b$ und $c:d$ haben mögen, so folgt daraus, dass dieselbe Beziehung

$$a : b = d : c$$

auch bestehen muss, wenn bei einer Partie ein halb dreissig oder ein halb fünfzehn vorgegeben wird. Die Partie ist immer gerecht, wenn abwechselnd die Hoffnung des $A$ in Bezug auf ein Spiel die des $B$ übertrifft und im folgenden Spiele von ihr in demselben Maasse übertroffen wird.

Um von dem eben gefundenen Resultate eine Anwendung zu machen, [15] wollen wir für jede mögliche Annahme die Werthe der Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$ bestimmen, was sich mühelos ausführen lässt. Man hat nur der Tafel IV die Gewinnhoffnungen des $A$, wenn er 0 und $B$ 45, 30, 15 oder 0 hat, zu entnehmen und durch Subtraction dieser Werthe von 1 die entsprechenden Gewinnhoffnungen des $B$ zu bilden, um schliesslich durch Division für die Verhältnisse der Gewinnhoffnungen beider Spieler die Werthe zu finden:

$$\begin{array}{llc}
A & B & \\
0 & 45: & \dfrac{n^5}{3n^4+4n^3+4n^2+3n+1}, \\[2ex]
0 & 30: & \dfrac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7n^2+4n+1}, \\[2ex]
0 & 15: & \dfrac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11n^2+5n+1}, \\[2ex]
0 & 0: & \dfrac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11n^2+5n+1}.
\end{array}$$

Hieraus aber ergiebt sich unmittelbar: Soll die Partie mit einer Vorgabe von $\frac{1}{2}45$ gespielt werden, so muss



$$\frac{a}{b} = \frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 4n + 1},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{n^5}{3n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 3n + 1}$$

sein; wird $\frac{1}{2}30$ vorgegeben, so muss

[16]
$$\frac{a}{b} = \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11n^2 + 5n + 1},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 4n + 1}$$

sein; und wird schliesslich $\frac{1}{2}15$ vorgegeben, so muss

$$\frac{a}{b} = \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11n^2 + 5n + 1},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11n^2 + 5n + 1}$$

sein.

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichung

$$ac = bd$$

ein und multiplicirt dann die Producte aus, so erhält man nach gehöriger Reduction die drei Gleichungen:

$$n^{11} + 4n^{10} + n^9 - 18n^8 - 48n^7 - 77n^6 - 90n^5 - 77n^4 - 49n^3 - 23n^2 - 7n - 1 = 0,$$

$$n^{13} + 9n^{12} + 32n^{11} + 54n^{10} + 31n^9 - 55n^8 - 170n^7 - 256n^6 - 263n^5 - 193n^4 - 102n^3 - 38n^2 - 9n - 1 = 0,$$

$$n^{14} + 10n^{13} + 47n^{12} + 130n^{11} + 221n^{10} + 220n^9 + 75n^8 - 150n^7 - 335n^6 - 380n^5 - 281n^4 - 140n^3 - 47n^2 - 10n - 1 = 0,$$

worin die Unbekannte $n$ das Verhältniss zwischen den Fertigkeiten der beiden Spieler angiebt. [17] Wer Musse genug dazu hat, mag die Wurzeln dieser Gleichungen genau ermitteln; ich vermuthe, dass sie ungefähr die Werthe $2\frac{7}{10}$, $1\frac{6}{10}$ und $1\frac{1}{10}$ haben. Es muss also derjenige Spieler, welcher dem andern

$\frac{1}{2}45$ vorgiebt, 27 Gänge, derjenige, welcher $\frac{1}{2}30$ vorgiebt, 16 Gänge und derjenige, welcher $\frac{1}{2}15$ vorgiebt, 11 Gänge gegen 10 Gänge seines Gegners gewinnen.



Bevor ich diesen Paragraphen schliesse, bemerke ich noch Folgendes: Wenn der dem Spieler $B$ abwechselnd eingeräumte Vortheil so, wie eben angegeben, beschaffen ist, d. h. wenn die beiden Spieler durch denselben in jedem Spiele einen beständigen Austausch ihrer Hoffnungen erleben, so ist die Partie immer gerecht, nicht nur wenn man sie auf ein oder mehrere Paare von Spielen spielt, wie man denken könnte, sondern auch wenn man sie auf eine ganz beliebige Anzahl von Spielen spielt. Dies scheint aus der folgenden Tafel VI hervorzugehen, welche die Hoffnungen des Spielers $A$ in jedem Falle und die bei ihrer Berechnung innezuhaltende Reihenfolge angiebt, wenn die Partie auf 3, 4 oder 5 Spiele gespielt wird und $A$ dem $B$ abwechselnd einen kleineren und einen grösseren Vortheil einräumt, nämlich den kleineren, wenn die Anzahl der von beiden Spielern noch zu gewinnenden Spiele eine gerade Zahl ist, und den grösseren, wenn diese Anzahl eine ungerade Zahl ist; im ersteren Falle soll es doppelt so wahrscheinlich sein, dass $A$ das Spiel gewinnt, als dass er es verliert, und im letzteren Falle umgekehrt doppelt so wahrscheinlich, dass A das Spiel verliert, als dass er es gewinnt.

[**18** und **19**] *Tafel VI.*

| Spiele, welche noch fehlen: $A$ | $B$ | Die Summe dieser Zahlen ist | Hoffnung des $A$ | Spiele, welche noch fehlen: $A$ | $B$ | Die Summe dieser Zahlen ist | Hoffnung des $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | Gerade | $\frac{1}{2}$ | 2 | 3 | U. | $\frac{17}{27}$ |
| 2 | 1 | Ungerade | $\frac{1}{6}$ | 2 | 4 | G. | $\frac{67}{81}$ |
| 3 | 1 | G. | $\frac{1}{9}$ | 2 | 5 | U. | $\frac{71}{81}$ |
| 4 | 1 | U. | $\frac{1}{27}$ | 3 | 3 | G. | $\frac{1}{2}$ |
| 5 | 1 | G. | $\frac{2}{81}$ | 4 | 3 | U. | $\frac{137}{486}$ |
| 1 | 2 | U. | $\frac{2}{3}$ | 5 | 3 | G. | $\frac{155}{729}$ |
| 1 | 3 | G. | $\frac{8}{9}$ | 3 | 4 | U. | $\frac{148}{243}$ |
| 1 | 4 | U. | $\frac{25}{27}$ | 3 | 5 | G. | $\frac{574}{729}$ |
| 1 | 5 | G. | $\frac{79}{81}$ | 4 | 4 | G. | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | 2 | U. | $\frac{13}{54}$ | 5 | 4 | U. | $\frac{1349}{4374}$ |
| 4 | 2 | G. | $\frac{14}{81}$ | 4 | 5 | U. | $\frac{1303}{2187}$ |
| 5 | 2 | U. | $\frac{2}{27}$ | 5 | 5 | G. | $\frac{1}{2}$ |

Die Hoffnung jedes der beiden Spieler scheint also immer gleich $\frac{1}{2}$ $P$ zu sein, wenn ihnen noch gleichviele Spiele fehlen, um die Partie zu gewinnen [22].



IX. $A$ giebt $\frac{1}{2}$30 dem $B$ und 45 dem $C$ vor; wieviel kann $B$ dem $C$ vorgeben?

Da nach dem vorigen Paragraphen die Spielfertigkeit des $B$ sich zu der des $A$ wie 10 zu 16 und die Fertigkeit des $A$ zu der des $C$ wie 42 zu 10 (nach § VII) verhält, so muss man folgern, dass die Fertigkeit des $B$ zu der des $C$ sich wie 42 zu 16 oder annähernd wie 26 zu 10 verhält; folglich kann nach dem vorigen Paragraphen $B$ dem $C$ $\frac{1}{2}$45 vorgeben.

X. $A$ giebt $\frac{1}{2}$30 dem $B$ und $\frac{1}{2}$45 dem $C$ vor; wieviel Punkte kann $A$ dem $C$ vorgeben?

Da sich die Spielfertigkeit von $A$ zu der von $B$ wie 16 zu 10 und die von $B$ zu der von $C$ wie 27 zu 10 (nach § VIII) verhält, so folgt durch Multiplication dieser Verhältnisse, dass sich die Spielfertigkeit von $A$ zu der von C wie 432 zu 100 verhält, d. h. dass $A$ (nach § VII) dem $C$ 45 vorgeben kann.

XI. $A$ ist zweimal gewandter als $B$ und fünfmal gewandter als $C$. Folglich ist $B$ $\frac{5}{2}$mal gewandter als $C$ und kann ihm (nach § VIII) fast $\frac{1}{2}$45 vorgeben.

**[20]** XII. $A$ ist $\frac{3}{2}$mal geschickter als $B$ und $B$ $\frac{5}{2}$mal geschickter als $C$. Folglich ist $A$ $\frac{15}{4}$mal geschickter als $C$ und kann ihm mithin mehr als $\frac{1}{2}$45 und weniger als 45 voll vorgeben.

XIII. Kennt man die Verhältnisse zwischen den Spielfertigkeiten dreier Spieler $A$, $B$, $C$, wenn jeder von ihnen gegen jeden andern spielt, so kennt man auch das Verhältniss ihrer Fertigkeiten, wenn zwei dieser Spieler gemeinschaftlich gegen den dritten spielen. Wir nehmen an, dass die Fertigkeiten der drei Spieler durch die Buchstaben $l$, $m$, $n$ bezeichnet werden, und dass $A$ gegen die beiden andern und zwar nach Belieben bald gegen $B$, bald gegen $C$ spielt. Wenn er gegen $B$ spielt, so hat er $l$ Wahrscheinlichkeitsgrade, den Gang zu gewinnen, und $m$, ihn zu verlieren, mithin die Hoffnung $\frac{l}{l+m}$; wenn er gegen $C$ spielt, so hat er wiederum $l$ Wahrscheinlichkeitsgrade, den Gang zu gewinnen, aber $n$, ihn zu verlieren, und mithin die Hoffnung $\frac{l}{l+n}$. Da es nun nach der Annahme gleich möglich ist, dass $A$ den Ball dem $B$ oder dem $C$ zuschlägt, so hat er einen Fall für $\frac{l}{l+m}$ und einen für $\frac{l}{l+n}$; folglich hat $A$ in Bezug auf diesen Gang die Hoffnung:



$$\frac{1\cdot\frac{l}{l+m}+1\cdot\frac{l}{l+n}}{2}=\frac{2\,l^2+l\,(m+n)}{2\,(l+m)\,(l+n)},$$

und mithin bleibt für die Hoffnung der beiden andern Spieler $B$ und $C$ übrig:

$$\frac{2mn+l\,(m+n)}{2\,(l+m)\,(l+n)}.$$

Verhalten sich also z. B. die Hoffnungen der drei Spieler zu einander wie 3 zu 2 zu 1, so hat $A$ die Hoffnung $\frac{27}{40}$ und haben $B$ und $C$ zusammen die Hoffnung $\frac{13}{40}$; es kann $A$ also 27 Bälle gewinnen, während die beiden andern zusammen nur 13 Bälle gewinnen können, und folglich kann ihnen $A$ noch mit einem kleinen Vortheile für sich 30 Punkte vorausgeben, wie aus Tafel V ersichtlich ist. Wenn man

$$\frac{2\,l^2+l\,(m+n)}{2\,(l+m)\,(l+n)}=\frac{2\,mn+l\,(m+n)}{2\,(l+m)\,(l+n)}$$

setzt, so folgt

$$l^2=mn.$$

Es bietet also die Partie ohne jede Vorgabe völlig gleiche Gewinnhoffnungen, wenn die Fertigkeit des Spielers, welcher gegen zwei andere spielt, die mittlere Proportionale aus deren Spielfertigkeiten ist.

Dass aber $A$ dem $B$ oder $C$ gleich wahrscheinlich den Ball zuspielt, ist nur eine willkürliche Annahme; in Wirklichkeit wird $A$, je geschickter er ist, um so öfter dem schwächeren seiner Gegner den Ball zusenden. [21] Um dies zu berücksichtigen, nehmen wir an, dass, so oft $A$ dem gewandteren Spieler $B$ $p$ Bälle zuschlägt, er dem schwächeren $C$ eine grössere Anzahl, $q$ Bälle zuspielt; er hat also dann $p$ Fälle, die Hoffnung

$\frac{l}{l+m}$, und $q$ Fälle, die Hoffnung $\frac{l}{l+n}$ zu erlangen, woraus sich für ihn die Hoffnung ergiebt:

$$\frac{p \cdot \frac{l}{l+m} + q \cdot \frac{l}{l+n}}{p+q} = \frac{(p+q)\, l^2 + l\,(pn+qm)}{(p+q)\,(l+m)\,(l+n)}\,.$$

Setzt man wieder, wie oben, für $l$, $m$, $n$ die Zahlen 3, 2, 1 und ausserdem $p = 1$, $q = 3$, so ist die Hoffnung des $A$ in Bezug auf jeden Ball gleich $\frac{57}{80}$, also grösser als $\frac{27}{40}$, welche Hoffnung er hat, wenn er den Ball ganz willkürlich dem einen oder dem andern seiner Gegner zusendet; $A$ kann seinem Gegner jetzt annähernd $\frac{1}{2}45$ vorgeben. Wenn man $A$'s Hoffnung gleich $\frac{1}{2}$ setzt, also

$$\frac{pl^2 + ql^2 + qlm + pln}{pl^2 + ql^2 + plm + qlm + pln + qln + pmn + qmn} = \frac{1}{2}\,,$$

oder

$$plm - pln + pmn - pl^2 = qlm - qln - qmn + ql^2,$$

so folgt, dass beide Parteien gleiche Gewinnhoffnungen haben, wenn die Proportion besteht:

$$p : q = (lm - ln - mn + l^2) : (lm - ln + mn - l^2),$$

aus welcher man ersieht, dass zu dem Zwecke stets

$$mn > l^2$$

sein muss.

Aber noch ein Umstand ist zu beachten, welcher einigermaassen den Vortheil des Spielers $A$, dass er den Ball öfter dem schwächeren Spieler zuschlagen kann, aufwiegt. Da er nämlich allein gegen zwei Gegner spielt, so ermüdet er auch mehr als jeder von ihnen, und diese Ermüdung wird seine Spielfertigkeit und seine Hoffnung beträchtlich verringern. Wenn von drei gleich tüchtigen Spielern einer gegen zwei spielt, so bietet nach der obigen Rechnung die Partie ihm dieselbe Gewinnaussicht, wie seinen Gegnern; es ist aber wahrscheinlicher, dass diese gegen ihn die Partie gewinnen, wenn man berücksichtigt, dass sie nicht so sehr ermüden und jeder nur die halbe Partie vertheidigt. Um nun diesen Umstand zu berücksichtigen, muss man die Fertigkeiten der Spieler

$B$ und $C$ nach der Zahl der Schläge beurtheilen, welche sie gewinnen oder verlieren, wenn sie vereint gegen $A$ spielen, nicht wenn jeder für sich gegen $A$ spielt. Beobachtet man, wenn $B$ und $C$ vereint gegen $A$ spielen, dass von den zwischen $A$ und $B$ gespielten Bällen die Anzahl der von $A$ zu der von $B$ gewonnenen Bälle wie $l$ zu $r$ und [**22**] von den zwischen $A$ und $C$ gespielten Bällen die Anzahl der von $A$ zu der von $C$ gewonnenen Bälle wie $l$ zu $s$ sich verhält, so verhalten sich die thatsächlichen Fertigkeiten der drei Spieler in diesem Sinne zu einander, wie $l$ zu $r$ zu $s$. Die Hoffnungen der drei Spieler ergeben sich dann genau wie oben, sodass man nur $r$ und $s$ an Stelle von $m$ und $n$ in die obigen Formeln einzuführen braucht.

XIV. Kennt man die Verhältnisse zwischen den Fertigkeiten von vier Spielern $A$, $B$, $C$, $D$, wenn jeder von ihnen gegen jeden anderen spielt, so kennt man auch das Verhältniss ihrer Fertigkeiten, wenn zwei gegen zwei, z. B. $A$ und $B$ gegen $C$ und $D$ spielen. Wir nehmen an, dass ihre Spielfertigkeiten durch die Zahlen $k$, $l$, $m$, $n$ gemessen werden, und dass $A$ (ebenso wie $B$) gegen $C$ oder $D$ spielen kann. Wenn $A$ gegen $C$ spielt, so hat er $\frac{k}{k+m}$, wenn er gegen $D$ spielt, $\frac{k}{k+n}$ Wahrscheinlichkeiten, den Gang zu gewinnen; deshalb hat er die Hoffnung

$$\frac{1 \cdot \frac{k}{k+m} + 1 \cdot \frac{k}{k+n}}{2} = \frac{2k^2 + k(m+n)}{2(k+m)(k+n)}.$$

Auf dieselbe Weise findet man für die Hoffnung des $B$:

$$\frac{1 \cdot \frac{l}{l+m} + 1 \cdot \frac{l}{l+n}}{2} = \frac{2l^2 + l(m+n)}{2(l+m)(l+n)}.$$

Nun ist es aber gleich möglich, dass $A$ oder $B$ spielt, und folglich giebt es einen Fall, welcher ihnen die erstere Hoffnung, und einen, welcher ihnen die letztere Hoffnung bringt; daher haben Beide in Bezug auf einen Gang die Hoffnung:

$$\frac{2k^2 + k(m+n)}{4(k+m)(k+n)} + \frac{2l^2 + l(m+n)}{4(l+m)(l+n)}.$$

Verhalten sich z. B. die Fertigkeiten der vier Spieler zu einander wie die Zahlen 1, 5, 2, 3, so ist die Hoffnung von $A$ und $B$ in Bezug auf jeden Gang gleich $\frac{323}{672}$ und die von $C$ und $D$ gleich $\frac{349}{672}$; es können also $C$ und $D$ den beiden Spielern $A$ und $B$ fast $\frac{1}{2}$15 vorgeben.

Multiplicirt man die Nenner der vorstehenden Brüche aus und ersetzt dann $4mn$ durch $4kl$, so erhält man

$$\frac{2k^2+k(m+n)}{4k^2+4km+4kn+4kl}+\frac{2l^2+l(m+n)}{4l^2+4lm+4ln+4kl}$$
$$=\frac{2k+m+n}{4(k+m+n+l)}+\frac{2l+m+n}{4(k+m+n+l)}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

Daraus folgt, dass die Gewinnhoffnungen der beiden Parteien einander gleich sind, wenn die Producte aus den Spielfertigkeiten der beiden Spieler jeder Partei einander gleich sind. Auch hier muss man die im vorigen Paragraphen gemachte Bemerkung berücksichtigen, [**23**] dass nämlich die geschickteren Spieler immer bemüht sein werden, die Bälle dem schwächeren ihrer Gegner zuzuschlagen, wenn man wünscht, dass die Gewinnaussichten ganz gerecht auf beide Parteien vertheilt sind.

XV. Von zwei Spielern $A$ und $B$ kann der eine dem anderen eine gewisse Anzahl Punkte vorgeben, er will ihm aber diesen Vortheil lieber in ganzen Spielen als in Punkten geben; man will wissen, wieviele Spiele kann er ihm geben? Z. B. $A$ kann $B$ 45 vorgeben, will aber lieber mit ihm jedes Spiel von 0 an spielen und ihm dafür eine gewisse Anzahl voller Spiele vorgeben; auf wieviele Spiele kann er ihm alle Spiele bis auf eines vorgeben?

Um diese Frage zu beantworten, muss man Folgendes beachten:

1) Das mit $n$ bezeichnete Verhältniss der Spielfertigkeiten beider Spieler (nach § VII) ist gleich $\frac{4216}{1000}$, da $A$ dem $B$ 45 vorgeben kann;

2) Bei Beginn eines Spieles, wo also jeder von beiden Spielern 0 hat, ist das Verhältniss ihrer Gewinnhoffnungen bezüglich dieses Spieles (vgl. S. 124) gleich

$$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11n^2+5n+1}.$$

3) Um den Zahlenwerth dieses Verhältnisses zu bestimmen, wenn man darin $n = \frac{4216}{1000}$ setzt, kann man sich der Logarithmen bedienen und findet dann leicht den Werth $\frac{7114529}{134167}$ für dasselbe, welchen wir mit $m$ bezeichnen wollen.

Nun bestimmen wir der Reihe nach die Hoffnungen, welche $A$ in Bezug auf die ganze Partie hat, wenn ihm, um zu gewinnen, noch 1, 2, 3, 4, ... Spiele fehlen, während dem $B$ stets nur ein Spiel noch fehlt; aus dem leicht erkennbaren Gesetze, nach denen die Werthe dieser Hoffnungen fortschreiten, ergiebt sich der Werth von $A$'s Hoffnung, wenn ihm noch $x$ Spiele fehlen. Wenn dem $A$, ebenso wie dem $B$ nur ein Spiel fehlt, Beide also Spieleinstand zählen, so ist nach dem im § IV Gesagten leicht zu schliessen, dass $A$'s Hoffnung gleich

$$\frac{m^2}{m^2+1}$$

ist. Fehlen $A$ noch zwei Spiele, so hat er offenbar $m$ Fälle, durch welche er wieder Spieleinstand, ebenso wie $B$ zählt, indem er das nächste Spiel gewinnt, und einen Fall, welcher ihn dieses Spiel und zugleich die Partie verlieren lässt; folglich hat seine Hoffnung den Werth:

$$\frac{m \cdot \frac{m^2}{m^2+1} + 1 \cdot 0}{m+1} = \frac{m^3}{(m^2+1)(m+1)}.$$

Wenn $A$ noch drei Spiele fehlen, so ist ebenso klar, dass $m$ Fälle vorhanden sind, welche ihn das nächste Spiel gewinnen lassen, sodass ihm also nur noch zwei Spiele fehlen, und dass es einen Fall giebt, welcher ihn das nächste Spiel und mit ihm die Partie verlieren lässt; [**24**] folglich ist seine Hoffnung gleich

$$\frac{m \cdot \frac{m^3}{(m^2+1)(m+1)} + 1 \cdot 0}{m+1} = \frac{m^4}{(m^2+1)(m+1)^2}.$$

Bei vier noch fehlenden Spielen hat $A$ wiederum $m$ Fälle, welche ihm die eben berechnete Hoffnung geben, und einen

Fall, welcher ihn die Partie verlieren lässt; folglich ist seine Hoffnung:



$$\frac{m \cdot \frac{m^4}{(m^2+1)(m+1)^2} + 1 \cdot 0}{m+1} = \frac{m^5}{(m^2+1)(m+1)^3}.$$

Mit einem Worte: Wieviele Spiele auch $A$ noch fehlen mögen, seine Hoffnung ist immer gleich einem ähnlich gebauten Bruche, in welchem der Exponent von $m$ um eine Einheit grösser und der Exponent von $(m+1)$ um eine Einheit kleiner als die Anzahl dieser Spiele ist. Folglich ist, wenn $A$ noch $x$ Spiele und $B$ noch 1 Spiel fehlen, d. h. $A$ seinem Gegner $B$ $(x-1)$ Spiele vorgiebt, seine Hoffnung gleich

$$\frac{m^{x+1}}{(m^2+1)(m+1)^{x-1}}.$$

Da bei diesem Stande die Partie für beide Spieler nach unserer Annahme die gleichen Gewinnaussichten bieten soll, so muss

$$\frac{m^{x+1}}{(m^2+1)(m+1)^{x-1}} = \frac{1}{2}$$

sein, woraus, indem man beiderseits die Logarithmen nimmt, für $x$ der Werth folgt:

$$x = \frac{\log(m+1) + \log m + \log 2 - \log(m^2+1)}{\log(m+1) - \log m}.$$

Um nun die Frage vollständig zu beantworten, braucht man nur noch in dieser Formel $m = \frac{7\,114\,529}{134\,167}$ zu setzen; man findet, dass $x$ ein wenig grösser als 38 ist*). [25] Es kann also derjenige, welcher dem Andern 45 in jedem Spiele vorgeben kann, ihm bis zu 37 ganzen Spielen auf 38 Spiele vorgeben, wenn Beide jedes Spiel von 0 an spielen wollen.

Hieraus ist ersichtlich, dass es einen wesentlichen Unterschied ausmacht, ob Jemand einem Andern auf vier Gänge

---

*) *Bernoulli* giebt die ausführliche Berechnung von $x$, welche aus Raumersparniss hier unterdrückt ist; aus derselben folgt $x = \frac{3\,089\,892}{81\,137} = 38\frac{6\,686}{81\,137}$. *H.*

drei Gänge oder auf vier Spiele drei Spiele vorgiebt; denn wie wir eben gesehen haben, kann derjenige, welcher seinem Gegner 45, d. h. drei Gänge von vieren vorgeben kann, ihm weit mehr als drei Spiele von vieren vorgeben.



XVI. Wenn der Spieler $A$ seinem Gegner 45 vorgeben kann, so lässt sich auch die Frage aufwerfen, auf wieviele Spiele er ihm alle Spiele bis auf ein einziges und ausserdem noch in jedem einzelnen Spiele 15 oder 30 vorgeben kann?

Um diese Frage zu beantworten, brauchen Sie nur an Stelle von

$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11n^2 + 5n + 1}$$

(dem Verhältnisse der Hoffnungen beider Spieler, wenn beide mit 0 Punkten beginnen) zu setzen:

$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11n^2 + 5n + 1}$$

oder

$$\frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 4n + 1}$$

(die Verhältnisse der Hoffnungen beider Spieler, wenn $B$ 15 oder 30 und $A$ 0 hat, wie man aus der Tafel IV findet). In diesen Ausdrücken setzen Sie wieder $n = \frac{4216}{1000}$ und finden dann für das mit $m$ bezeichnete Verhältniss:

$$m = \frac{6\,798\,590}{450\,105} \quad \text{oder} \quad m = \frac{1\,125\,963}{263\,741}.$$

Hieraus berechnen sich, ganz wie oben, die Werthe von $x$, welche angenähert sind:

$$x = 12 \quad \text{oder} \quad x = 4,$$

sodass $A$ seinem Gegner $B$ elf von zwölf Spielen und noch 15 in jedem Spiele oder drei von vier Spielen und noch 30 in jedem Spiele vorgeben kann.

XVII. Wenn $A$ dem $B$ 30 vorgeben kann und man wissen will, wieviele ganze Spiele er ihm vorgeben kann, so muss man nur den Werth von $n$ in $\frac{1946}{1000}$ (nach § VII) umändern und dann wie oben verfahren, um den entsprechenden Werth von $x$ zu finden. Man findet, dass er ihm ungefähr vier von fünf Spielen vorgeben kann, wenn Beide jedes Spiel von 0 an spielen, oder dass er zwei von drei Spielen und noch 15 in jedem Spiele vorgeben kann. Wenn $A$ dem $B$ nur 15 vorgeben kann, so hat $n$ (nach § VII) ungefähr den Werth $\frac{1313}{1000}$, und [26] man findet, dass er ihm nur ein Spiel von zweien vorgeben kann, wenn er mit $B$ jedes Spiel von 0 an spielen will.



XVIII. Man kann verschiedene Fragen über die Bisques[23]) aufwerfen, welche von der einen Partei der anderen vorgegeben sind und von dieser, wann es ihr gutdünkt, benutzt werden. Z. B. kann man fragen: Ist es in einem bestimmten Falle vortheilhafter, seine Bisque zu nehmen oder sie nicht zu nehmen? Sind zwei Bisques auf vier Spiele vortheilhafter als $\frac{1}{2}15$? Oder sind 15 und zwei Bisques mehr werth als $\frac{1}{2}30$? und ähnliche Fragen. Da uns diese Fragen aber zu weit führen würden, so will ich sie nicht alle aufnehmen und mich begnügen, nur ein wenig bei der ersten zu verweilen.

Wir nehmen an, dass die beiden Spieler nur auf ein Spiel spielen, dass die Geschicklichkeit von $A$ zu der von $B$ sich verhalte wie $n$ zu 1, wo $n$ gleich 1 oder von 1 verschieden sein kann, und dass $B$ dem $A$ eine Bisque vorgiebt (denn obschon dies nicht üblich ist, wenn man weiss, dass die Spieler gleichwerthig sind, so kann es oft geschehen, dass $B$ die Spielfertigkeit des $A$ nicht kennt, weil dieser vorher sein Spiel verstellt hatte, oder dass $A$ sie unbedingt zu erhalten verlangt, oder dass $A$ sie erhält, weil er das vorhergehende Spiel, welches ohne jede Vorgabe gespielt wurde, verloren hat, obgleich beide Spieler, wie man weiss, sonst einander gleich sind); weiter nehmen wir an, dass $A$ und $B$ Einstand haben, und dass $A$ seine Bisque noch nicht genommen hat. Wir fragen dann nach seiner Gewinnhoffnung und ob er besser thut, seine Bisque zu nehmen oder sie längere Zeit aufzuheben.

Zu dem Zwecke stellen wir die folgende Ueberlegung an. Nimmt $A$ seine Bisque, so ist er im Vortheile, hat aber dann keine Bisque mehr; folglich ist seine Hoffnung (nach Tafel IV) gleich

$$\frac{n^3 + n^2 + n}{n^3 + n^2 + n + 1} = \frac{n^3 + n^2 + n}{(n^2 + 1)(n + 1)}.$$

Nimmt er seine Bisque nicht, so kann er den nächsten Gang gewinnen oder verlieren. Wenn er ihn gewinnt, so hat er auch das Spiel gewonnen, denn da er dann im Vortheile ist, so wird er nicht säumen, seine Bisque noch hinzuzunehmen; verliert er den nächsten Gang, so hat er zwar noch seine Bisque, aber $B$ ist im Vortheile, und da uns bei dieser Lage der Dinge $A$'s Hoffnung wegen der Bisque noch unbekannt ist, so nennen wir dieselbe $y$. Da nun $A$ nach der Voraussetzung $n$ Fälle hat, welche ihn den Gang gewinnen lassen, und einen Fall, welcher ihn desselben verlustig gehen lässt, so ist seine Hoffnung, wenn er seine Bisque nicht nimmt, gleich



$$\frac{n \cdot 1 + 1 \cdot y}{n + 1} = \frac{n + y}{n + 1}.$$

Wegen des Vorrechtes, welches die Bisques besitzen, kann aber $A$ nach Willkür seine Bisque nehmen oder nicht nehmen, [27] d. h. er kann gleich leicht $\frac{n^3 + n^2 + n}{n^3 + n^2 + n + 1}$ oder $\frac{n + y}{n + 1}$ erwerben. Deshalb hat, ehe er sich entschieden hat, seine Hoffnung, welche wir $x$ nennen, den Werth:

$$x = \frac{n^3 + n^2 + n}{2n^3 + 2n^2 + 2n + 2} + \frac{n + y}{2n + 2}.$$

Um die Hoffnung $y$ zu finden, muss man eine ähnliche Ueberlegung anwenden. Wenn $A$ seine Bisque nimmt, so haben beide Spieler Einstand, und $A$ hat keine Bisque mehr; folglich hat er (nach Tafel IV) die Hoffnung:

$$\frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Nimmt $A$ seine Bisque nicht und gewinnt er den nächsten Gang, so gewinnt er die Hoffnung $x$, weil das Spiel auf Einstand steht und er noch seine Bisque hat; verliert aber $A$ diesen Gang, so verliert er auch zugleich das Spiel. Folglich ist seine Hoffnung in diesem Falle gleich

$$\frac{n \cdot x + 1 \cdot 0}{n + 1} = \frac{nx}{n + 1}.$$

Da nun $A$ seine Bisque nach seinem Belieben nehmen oder nicht nehmen, d. h. $\frac{n^2}{n^2 + 1}$ oder $\frac{nx}{n + 1}$ erlangen kann, so ist vor dieser Entscheidung seine Hoffnung, welche wir mit $y$ bezeichnet hatten, gleich



$$y = \frac{n^2}{2n^2+2} + \frac{nx}{2n+2}.$$

Setzt man diesen Werth von $y$ in die oben für $x$ gefundene Gleichung ein, so ergiebt sich schliesslich:

$$x = \frac{(n+1)(4n^3+3n^2+4n)}{(n^2+1)(4n^2+7n+4)},$$

und folglich aus der letzten Gleichung:

$$y = \frac{n^2(4n^2+5n+4)}{(n^2+1)(4n^2+7n+4)}.$$

Wenn also das Spiel auf Einstand steht, so bieten sich die drei Grössen dar:

$$\frac{n^3+n^2+n}{(n^2+1)(n+1)}, \quad \frac{n+y}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{(n+1)\,(4n^3+3n^2+4n)}{(n^2+1)\,(4n^2+7n+4)},$$

welche die Hoffnung des $A$ für die drei Annahmen bezeichnen, dass er seine Bisque nimmt, dass er sie nicht nimmt, und dass er noch unentschieden ist, ob er sie nimmt oder nicht nimmt (der Werth dieser letzteren Hoffnung liegt in der Mitte zwischen den Werthen der beiden anderen). Da nun, nachdem man die drei Grössen auf den gemeinsamen Nenner gebracht hat, sich zeigt, dass die erste derselben grösser als die dritte ist, so folgt, [28] dass sie um so mehr grösser als die zweite ist, und dass mithin $A$ besser thut, seine Bisque zu nehmen, als sie für eine spätere Gelegenheit aufzuheben.

Untersucht man die drei folgenden Grössen

$$\frac{n^2}{n^2+1}, \quad \frac{nx}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{n^2(4n^2+5n+4)}{(n^2+1)\,(4n^2+7n+4)},$$

welche bei dem obigen Verfahren gefunden wurden und die Hoffnungen des $A$ für die drei genannten Annahmen darstellen, wenn $B$ im Vortheile ist oder (was dasselbe ist) 45 gegen 30 hat, so bemerkt man, dass der erste Werth ebenfalls grösser als die beiden andern ist; auch bei diesem Stande des Spieles thut also $A$ noch besser, seine Bisque zu nehmen.

Sie können endlich durch dieselben Ueberlegungen die Hoffnungen des Spielers $A$ für jeden anderen Stand des Spieles finden, also wenn $B$ 45 gegen 15, oder 45 gegen 0, oder 30 gegen 15 hat; die Mühe ist sogar geringer als vorher, wenn Sie der Reihe nach diese Berechnungen ausführen, da Sie bei dem Verfahren dann nur auf schon berechnete und daher bekannte Hoffnungen zurückkommen. Ich begnüge mich damit, Ihnen in den drei, mit I, II, III überschriebenen Columnen der folgenden Tafel VII die Hoffnungen für zwei gleich geschickte Spieler anzugeben, und zwar in der ersten Columne für den Fall, dass $A$ seine Bisque nimmt, in der dritten, dass er sie nicht nimmt, und in der mittleren, dass er noch unentschieden ist, ob er sie nimmt oder nicht. Man bemerkt, dass die Brüche der ersten Columne durchweg ein wenig grösser als die der beiden andern sind; daraus lässt sich schliessen, dass es für $A$ stets vortheilhafter ist, seine Bisque zu nehmen, als sie längere Zeit aufzuheben.



[29] *Tafel VII.*

$A$ und $B$ sind zwei gleich geschickte Spieler, und $A$ hat eine Bisque zu nehmen.

| Punkte des | | Hoffnungen des $A$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | I. | II. | III. | |
| 45 | 45 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{11}{15}$ | $\frac{43}{60}$ | $\frac{19}{15}$ |
| 30 | 45 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{13}{30}$ | $\frac{11}{30}$ | $\frac{15}{7}$ |
| 15 | 45 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{13}{60}$ | $\frac{15}{11}$ |
| 0 | 45 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{29}{240}$ | $\frac{7}{60}$ | $\frac{15}{13}$ |
| 30 | 30 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{11}{15}$ | $\frac{43}{60}$ | $\frac{19}{15}$ |
| 15 | 30 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{59}{120}$ | $\frac{29}{60}$ | $\frac{8}{7}$ |
| 0 | 30 | $\frac{5}{16}$ | $\frac{99}{320}$ | $\frac{49}{160}$ | $\frac{46}{43}$ |
| 30 | 15 | $\frac{7}{8}$ | $\frac{209}{240}$ | $\frac{13}{15}$ | $\frac{17}{15}$ |
| 15 | 15 | $\frac{11}{16}$ | $\frac{219}{320}$ | $\frac{109}{160}$ | $\frac{47}{44}$ |
| 0 | 15 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{319}{640}$ | $\frac{159}{320}$ | $\frac{61}{59}$ |
| 30 | 0 | $\frac{15}{16}$ | $\frac{899}{960}$ | $\frac{449}{480}$ | $\frac{16}{15}$ |
| 15 | 0 | $\frac{13}{16}$ | $\frac{779}{960}$ | $\frac{389}{480}$ | $\frac{123}{119}$ |
| 0 | 0 | $\frac{21}{32}$ | $\frac{1007}{1536}$ | $\frac{503}{768}$ | $\frac{303}{298}$ |

XIX. Die Berechnung des vorigen Paragraphen setzt voraus, dass der Spieler $A$ seiner Bisque völlig indifferent gegenübersteht und also immer ebenso geneigt ist, sie zu nehmen, wie sie nicht zu nehmen. Obgleich es nun völlig in $A$'s Belieben steht, bei welchem Gange er seine Bisque nehmen will, so ist es, wie hervorgehoben werden muss, nicht immer gleich wahrscheinlich, dass er sie nimmt, da es Gelegenheiten giebt, bei denen er sie besser als bei anderen verwerthen kann. Dies ist vielleicht nicht der Fall, wenn man spielt, ohne Schassen zu machen, wo ich keinen Grund entdecken kann, welcher ihn veranlassen sollte, die Bisque nur um einen Gang aufzuschieben. Wenn aber Schassen gemacht werden, so giebt es Gelegenheiten, bei welchen man die Bisque so nützlich verwerthen kann, dass sie fast die Stelle von 30 vertritt. Denn wenn $A$ eine schwierige Schass zu gewinnen hat, so ist sie so gut wie verloren für ihn; indem er also seine Bisque nimmt, hindert er nicht nur seinen Gegner, 15 zu gewinnen, sondern er gewinnt selbst 15, was ihm mithin 30 werth ist. Da also die Bestimmung der Hoffnungen der Spieler, welche die Betrachtung der Bisques erfordert, von der besonderen Beschaffenheit des Spieles, von der Mannigfaltigkeit der Schassen und selbst von der Laune der Spieler, welche Regeln nicht beachten, abhängt, so ist es schwierig, sich zuverlässige Werthe für diese Hoffnungen zu verschaffen. Hier lasse ich das Verfahren folgen, dessen ich mich bedienen würde, wenn auf Schassen Rücksicht zu nehmen ist.

Wir nehmen an, dass die Spieler entweder beide 30 oder Einstand zählen und dass es eine für den einen Spieler schwieriger als für den andern zu gewinnende Schass giebt (die Anzahl der Male, welche man $A$ eine Schass hat gewinnen sehen, soll sich zu der Anzahl der Male, welche man $B$ eine solche hat gewinnen sehen, verhalten wie $m$ zu 1, wo $m$ von 1 verschieden ist), obschon sonst beide Spieler gleich geschickt sind. Es ist zu beachten, dass $A$, wenn er ohne seine Bisque zu nehmen, die Schass gewinnt, auch das Spiel gewinnt, da er nicht versäumen wird, nach gewonnener Schass seine Bisque zur Geltung zu bringen; wenn $A$ die Schass verliert, so zählt $B$ vor für sich, aber $A$ hat noch seine Bisque zurückbehalten, welche ihm (nach der Columne II der Tafel VII) die Hoffnung $\frac{13}{30}$ giebt. Da nun der Spieler $A$ nach der Annahme $m$ Wahrscheinlichkeitsgrade hat, die Schass zu gewinnen, gegen einen, sie zu verlieren, **[30]** so ist die Hoffnung, welche er besitzt, wenn er seine Bisque nicht nimmt, gleich

$$\frac{m \cdot 1 + 1 \cdot \frac{13}{30}}{m + 1} = \frac{30\,m + 13}{30\,m + 30}.$$

Nimmt er aber seine Bisque, so ist keine Schass mehr vorhanden und seine Hoffnung findet sich (in der Columne I der Tafel VII) gleich $\frac{3}{4}$. Ich habe also nur zu ermitteln, welcher von den beiden Brüchen,



$$\frac{30\,m+13}{30\,m+30} \text{ oder } \frac{3}{4}$$

grösser als der andere ist. Setzt man beide Brüche einander gleich, so ergiebt sich für $m$ der Werth $\frac{19}{15}$. Für $A$ ist es also günstiger, seine Bisque noch aufzuheben, wenn $m > \frac{19}{15}$ ist, und sie zu benutzen, wenn $m < \frac{19}{15}$ ist; ist aber $m = \frac{19}{15}$, so ist es für $A$ gleichgültig, ob er sie nimmt oder nicht.

Nehmen wir dann an, dass $A$ 30 zu 45 zählt, d. h. also $B$ im Vortheil ist, und dass dieselbe Schass zu gewinnen ist, so zählt $A$ offenbar Einstand, wenn er sie gewinnt, ohne seine Bisque zu verwerthen; folglich hat er (nach Columne II der Tafel VII) die Hoffnung $\frac{11}{15}$. Verliert $A$ aber die Schass, so verliert er auch das Spiel. Da er nun $m$ Fälle hat, sie zu gewinnen, und einen, sie zu verlieren, so hat er, wenn er die Bisque nicht benutzt, die Hoffnung:

$$\frac{m \cdot \frac{11}{15} + 1 \cdot 0}{m+1} = \frac{11\,m}{15\,m+15}.$$

Nimmt andernfalls $A$ seine Bisque, so zählen beide Spieler Einstand, und da keine Schass mehr da ist, so hat jeder von ihnen die Hoffnung $\frac{1}{2}$. Aus

$$\frac{11\,m}{15\,m+15} = \frac{1}{2}$$

ergiebt sich $m = \frac{15}{7}$. Für $A$ ist es mithin vortheilhafter, seine Bisque aufzuheben oder sie zu verwerthen, je nachdem $m$ grösser oder kleiner als $\frac{15}{7}$ ist; für $m = \frac{15}{7}$ ist es gleichgültig, was er thut. Wird die Wahrscheinlichkeit, welche der Spieler $A$ für das Gewinnen einer Schass hat, durch eine zwischen $\frac{19}{15}$ und $\frac{15}{7}$ gelegene Zahl dargestellt, so ist es für ihn günstiger — wie man aus dem Obigen noch weiter folgern kann —, seine Bisque noch aufzuheben, wenn Spieleinstand gezählt wird, und sie zu nehmen, wenn $B$ im Vortheil ist. Auf diese Art habe ich alle andern Zahlen der letzten Columne der Tafel VII bestimmt, mit Hülfe deren sich also entscheiden lässt, wann der Spieler $A$ seine Bisque verwerthen oder noch aufheben muss. Ist $A$'s Wahrscheinlichkeit, eine Schass zu gewinnen, grösser als diese Zahl, so thut er besser, seine Bisque aufzuheben; ist sie dagegen kleiner, so ist es für ihn vortheilhafter, seine Bisque zu benutzen; ist seine Wahrscheinlichkeit gleich dieser Zahl, so kann er ohne Schaden thun, was er Lust hat.

[**31**] XX. Es erübrigt mir noch, von den Services zu sprechen und von dem Vortheile, welchen man davon hat, sie zu geben. Sie wissen, dass der erste Schlag bei jedem Balle, welchen man auf das Dach spielt, Service (Aufschlag) heisst. Der Spieler, welcher ihn thut, scheint einen Vortheil gegenüber dem, welcher ihn empfängt, zu haben und zwar aus zwei Gründen: erstens weil der Service-Schlag, bei welchem man den Ball aus der Hand giebt, ein sicherer Schlag ist, während die weiteren Schläge, bei welchen der Ball dann in der Luft getroffen werden muss, leicht missglücken können; zweitens weil derjenige, welcher den Ball aufschlägt, seinen Gegner eine Schass machen lässt, wenn er ihn bei den ferneren Schlägen fehlt, während der Rückschläger, wenn er ihn fehlt, 15 verliert (wenigstens, wenn der Ball in das Spiel eintritt, denn ich will aus Furcht, zu weitschweifig zu werden, nicht über die Schassen de vers le jeu[24]) sprechen; es genügt mir, Ihnen im Grossen und Ganzen den bei dieser Untersuchung einzuhaltenden Weg zu zeigen).

Wir nehmen an, dass zwei Spieler $A$ und $B$ vorhanden sind, dass $A$ aufschlägt, und dass man $A$ einen Fehlschlag auf $p$ gelungene Schläge und $B$ einen Fehlschlag auf $q$ gelungene Schläge hat thun sehen, ferner bezeichnen wir mit $y$ die Hoffnung, welche $A$ hat, den Ball zu gewinnen, wenn die Reihe zu spielen an ihn kommt, und mit $z$ die Hoffnung, welche er hat, wenn $B$ spielen muss. Zunächst sehen wir zu, was aus diesen Hoffnungen wird, wenn ohne Schassen zu machen gespielt wird, d. h. wenn der Gang unbedingt für denjenigen, welcher den Ball spielen sollte, ihn aber gefehlt hat, verloren ist. Nach den soeben getroffenen Festsetzungen erkennt man leicht, dass $A$, wenn er spielen muss, einen Fall hat, welcher ihn den Gang verlieren lässt, und $p$ Fälle, welche, da sie ihm seinen Schlag gelingen lassen, $B$ in die Nothwendigkeit zu spielen versetzen und folglich $A$'s Hoffnung $y$ in die Hoffnung $z$ verwandeln. Wenn dagegen die Reihe zu spielen an $B$ kommt, so giebt es einen Fall, welcher $A$ den

Gang gewinnen lässt (dadurch dass $B$ ihn verliert), und $q$ Fälle, welche wieder $A$ zu spielen nöthigen und ihm die Hoffnung $y$ zurückgeben. Ich habe mithin einerseits



$$y = \frac{1 \cdot 0 + p \cdot z}{1 + p} = \frac{pz}{1 + p}$$

und andrerseits

$$z = \frac{1 \cdot 1 + q \cdot y}{1 + q} = \frac{1 + qy}{1 + q},$$

woraus folgt:

$$z = \frac{1 + p}{1 + p + q}.$$

Da nun aber [**32**] dem Spieler $A$ sein Service-Schlag nicht missglücken kann, so folgt, dass man diesen Schlag nicht mitzählen darf und bei der Berechnung seiner Hoffnung, bevor er ihn thut, denken muss, $B$ sei an der Reihe zu spielen. Folglich ist $A$'s anfängliche Hoffnung, den Ball zu gewinnen, gleich $\frac{1 + p}{1 + p + q}$ und daher $B$'s Hoffnung gleich $\frac{q}{1 + p + q}$, sodass sich die Hoffnungen Beider zu einander verhalten wie $1 + p$ zu $q$.

Wenn z. B. bei zwei gleich geschickten Spielern auf 10 gelungene Schläge ein Fehlschlag zu treffen pflegt, so ist $p = q = 10$, und folglich ist der Aufschläger dem Rückschläger gegenüber im Verhältniss 11 zu 10 im Vortheil. Dieser Vortheil ist um so grösser, je weniger geschickt die Spieler sind, und um so kleiner — ja er kann sogar völlig verschwinden — je geschickter die Spieler sind.

XXI. Nun verbinden wir hiermit noch die Betrachtung der Schassen, aber ohne uns um ihre Verschiedenheit zu kümmern, indem wir annehmen, dass alle Schassen unten im Ballhause gemacht werden und dass alle Bälle, welche über das Netz weggehen, sie gewinnen können. Sie wissen, dass die Spieler, wenn es Schass giebt, ihre Plätze vertauschen, und dass derjenige, welcher die Bälle aufgeschlagen hat, verpflichtet ist, sie nachher zurückzuschlagen, nachdem jeder auf die andere Seite des Spielhauses gegangen ist. Es sollen nun die vier Buchstaben $v$, $x$, $y$, $z$ die Hoffnungen des $A$ in den vier verschiedenen Momenten bezeichnen: nämlich die beiden ersten Buchstaben $v$ und $x$, bevor die Schass gemacht wird, die andern

$y$ und $z$ nach der Schass, wenn die Spieler ihre Plätze gewechselt haben; der erste Buchstabe $v$ und der dritte $y$, wenn $A$ zu spielen hat, und der zweite $x$ und der vierte $z$, wenn $B$ spielen muss. Wenn Sie die Schlussfolgerung des vorigen Paragraphen verstanden haben, so werden Sie ohne Mühe die Richtigkeit der folgenden vier Gleichungen einsehen, auch ohne dass sie hier näher begründet werden:



$$v = \frac{1 \cdot y + p \cdot x}{1 + p} = \frac{y + px}{1 + p},$$

$$x = \frac{1 \cdot 1 + q \cdot v}{1 + q} = \frac{1 + qv}{1 + q},$$

$$y = \frac{1 \cdot 0 + pz}{1 + p} = \frac{pz}{1 + p},$$

$$z = \frac{1 \cdot 1 + q \cdot y}{1 + q} = \frac{1 + qy}{1 + q}.$$

Hieraus finden Sie

[33]

$$y = \frac{p}{1 + p + q},$$

$$x = \frac{1 + 2p + q + p^2 + 2pq}{(1 + p + q)^2},$$

also

$$1 - x = \frac{q + q^2}{(1 + p + q)^2}.$$

Mithin muss man schliessen, dass $A$'s Hoffnung zu der Zeit, in welcher $B$ von ihm den Service-Schlag erhalten muss, sich zu der von $B$ verhält wie $1 + 2p + q + p^2 + 2pq$ zu $q + q^2$. Wenn $p = q$ ist, so bemerken Sie, dass dieses Verhältniss sich umsomehr dem Werthe 3 annähert, je grösser der Werth von $p = q$ ist; von zwei Spielern, welche gleich und vollkommen gut spielen, hat also der Aufschläger ungefähr dreimal mehr Hoffnung, den Gang zu gewinnen, als der Rückschläger. Dies gilt aber nur, wie Sie wohl beachten müssen, unter der Annahme, dass kein Unterschied zwischen den Schassen gemacht wird und dass solche, welche man *de vers le jeu* nennt, nicht zugelassen werden; lässt man diese beiden

Annahmen fallen, so wird $A$'s Vortheil beträchtlich vermindert.



XXII. Ich darf diesen Brief nicht schliessen, mein Herr, ohne gewissen falschen Schlussfolgerungen, auf welche man bei diesem Gegenstande verfallen kann, vorgebeugt zu haben in der Befürchtung, dass sie durch ihren trügerischen Glanz blenden und an der Zuverlässigkeit der oben aufgestellten Principien Zweifel entstehen lassen könnten.

In dem Paragraphen VII wurde gefragt, wieviele Male $A$ geschickter als $B$ sein muss, um ihm 45 vorgeben zu können. Es könnte nun Jemand folgendermaassen schliessen wollen: Wenn $B$ gegen einen dritten Spieler $C$, welcher dieselbe Spielfertigkeit wie er selbst besitzt, spielen und 45 zu 0 zählen würde, so verhielten sich die Hoffnungen beider Spieler $B$ und $C$ nach Tafel I wie 15 zu 1, d. h. $B$ würde 15 mal das Spiel gewinnen können, während $C$ es nur einmal könnte. Wenn $A$ dem $B$ eine Vorgabe von 45 giebt, so ist aber die Partie gerecht, d. h. wenn $B$ 15 mal das Spiel gewinnt, so kann auch $A$ es 15 mal gewinnen. Würden nun $A$ und $C$ von 0 an spielen, so könnte $A$ 15 mal das Spiel gewinnen, während es $C$ nur einmal kann; folglich müsste $A$ 15 mal geschickter im Spielen sein als $C$ oder (was auf dasselbe hinausläuft) als $B$, während durch das obige Verfahren gezeigt wurde, dass $A$ nur $4\frac{1}{5}$ mal geschickter als $B$ sein muss. — Hierauf antworte ich, dass diese Ueberlegung, wenn sie ebenso einleuchtend wäre, [34] als sie es nicht ist, die falsche Folgerung zieht: »folglich müsste $A$ 15 mal tüchtiger im Spielen sein ...«. $A$, welcher $B$ 45 Punkte vorzugeben im Stande ist, kann, wie ich zugebe, 15 Spiele gegen ein Spiel seines Gegners gewinnen, wenn Beide von 0 Punkten an spielen, denn $A$ kann sogar (nach § XV) $\frac{7114529}{134167}$, d. h. mehr als 50 Spiele gewinnen. Aber es folgt daraus nicht, dass er 15 mal spielgewandter als $B$ ist, da es sehr wohl sich ereignen kann, dass er 15 oder sogar, wenn Sie wollen, 50 Spiele gegen eines gewinnt, ohne dass er mehr als 4 oder 5 mal mehr Gänge gewonnen hat; dies hat darin seinen Grund, dass alle Gänge, welche $B$ während eines für ihn ungünstig ausgehenden Spieles gewinnt, nicht gezählt worden sind, während sie gleichwohl zusammen den vierten Theil der von $A$ gewonnenen

Gänge ausmachen können. Beachten Sie daher, dass die Fertigkeiten der Spieler besser durch die Anzahl der Gänge, welche jeder gewinnt, gemessen werden als durch die Anzahl der von jedem gewonnenen Spiele oder Partien, wenn jedes Spiel von 0 Punkten an gespielt wird.

In dem Paragraphen XIII wurde untersucht, um wieviel spielgewandter $A$ geschätzt werden muss, wenn er gegen zwei andere Spieler $B$ und $C$ spielt und ihre Fertigkeiten sich verhalten wie die Zahlen 3, 2, 1. Es dürfte sehr wohl Leute geben, welche sich hier eines aus der Mischungsrechnung hergenommenen Analogieschlusses bedienen würden. Wenn man z. B. drei Sorten Wein hat, deren Preise sich wie die Zahlen 3, 2, 1 zu einander verhalten, so ist sicher, dass der Preis einer aus gleichen Theilen der beiden billigeren Sorten hergestellten Mischung gleich $1\frac{1}{2}$ ist, und dass folglich der Preis der besten Sorte zu dem dieser Mischung sich verhält wie 3 zu $1\frac{1}{2}$ oder wie 2 zu 1. Ebenso, sage ich, würden jene Leute denken, dass die zwei Spieler $B$ und $C$, welche gemeinschaftlich gegen den dritten Spieler $A$ spielen (indem sich ihr Spiel gleichsam mischt), für einen Spieler angesehen werden könnten, und dass folglich die Spielfertigkeit von $A$ auch das doppelte von derjenigen der beiden andern Spieler zusammen sein müsste. Noch Andere würden vielleicht so schliessen: Da nach der Annahme $A$ drei Gänge gewinnt, wo $B$ nur zwei gewinnt, und nochmals drei da gewinnt, wo $C$ nur ein Spiel gewinnt, so folgt, dass er sechs Spiele gewinnen muss, wenn die beiden andern zusammen $2 + 1 = 3$ Spiele gewinnen. Folglich muss auch seine Spielfertigkeit doppelt so gross sein als die der beiden andern Spieler zusammen, wie soeben schon durch die andere Schlussfolgerung gefunden wurde. Dem aber steht die Berechnung des Paragraphen XIII entgegen, welche ergab, dass $A$'s Hoffnung mehr als doppelt so gross wie die seiner beiden Gegner ist. — [**35**] Auf die beiden obigen Ueberlegungen kann ich mit wenigen Worten antworten: Erstens beweisen Analogien nichts, wie Sie wissen. Zweitens widersprechen diese Ueberlegungen der Annahme, welche man vernünftigerweise machen muss, dass $A$ ebenso viele Male oder öfter gegen $C$ als gegen $B$ spielt; bei diesen obigen Ueberlegungen ist aber ganz das Gegentheil der Fall, weil dort $A$ in fünf Gängen, von denen er drei gewinnt, gegen $B$ und nur in vier, von denen er ebenfalls drei gewinnt, gegen $C$ spielt. Unsere Rechnung dagegen berücksichtigt vollständig die erwähnte Annahme. Denn wenn *A* 20 Gänge gegen *B* spielt, so gewinnt er davon 12, und wenn er noch 20 Gänge gegen *C* spielt, so gewinnt er davon 15, d. h. er gewinnt im Ganzen 27, während seine Gegner 13 gewinnen. Wenn *A* aber dreimal soviele Gänge gegen *C* als gegen *B* spielt, also 60, so gewinnt er von diesen 45, welche mit den 12 Gängen, welche er gegen *B* gewinnt, 57 Gänge ergeben; für *B* und *C* bleiben mithin 23 Gänge übrig. Diese Resultate sind aber sämmtlich in völliger Uebereinstimmung mit denen, welche in dem Paragraphen XIII gefunden worden sind.

Ich schliesse, mein Herr, mit der folgenden Bemerkung: Es ist ausserordentlich leicht, sich in seinem ganzen Forschen und Erkennen sehr zu irren, wenn man nicht stets die strengste Aufmerksamkeit ausübt. Denn die Schlussfolgerungen, welche man gewöhnlich im Leben anstellt, sind nicht besser als jene, welche ich soeben angeführt habe, oft aber viel schlechter. Man sieht jeden Tag, dass die gelehrtesten Leute auf Grund von blossen Analogien Schlüsse ziehen; da wo sie sich einbilden, in die Dinge klare Einsicht zu haben, betrachten sie das als höchst evident, was es gar nicht ist. Und daher kommt es, dass nur diejenigen, deren Verstand durch mathematische Studien geschärft ist, fähig sind, den Irrthum zu entdecken.

Ich bin u. s. w.

# Anmerkungen.

(Mit 2 Abbildungen.)

1) *Zu S. 8.* In der Originalausgabe sind die Werthe aller Hoffnungen, deren Berechnung zur Lösung dieser Aufgabe nöthig war, nochmals in einer Tafel zusammengestellt, welche hier ihres geringen Nutzens wegen fortgelassen ist. Infolgedessen waren im Texte unbedeutende Aenderungen nöthig.

2) *Zu S. 16.* Auch hier sind, um die Weitschweifigkeit des Textes im Originale etwas abzuschwächen, unbedeutende Aenderungen und Umstellungen einiger Sätze vorgenommen worden.

3) *Zu den S. 19 und 20.* *Bernoulli* giebt in dem Originale eine ausführliche Tafel für die Berechnung der Anzahl der Fälle, welche jedem der Spieler den Einsatz ganz oder theilweise oder auch nichts von demselben gewinnen lassen. Mir schien es völlig ausreichend, von dieser Tafel nur eine Probe mitzutheilen, welche sich auf Seite 20 oben befindet und zugleich dem in der Anmerkung verfolgten Zwecke dient. In *Bernoulli*'s grosser Tafel sind diese Fälle durch ein danebenstehendes $N$ ausgezeichnet.

4) *Zu S. 27.* Nach diesen Schlussworten muss man wohl annehmen, dass *Bernoulli* sich selbst über den Grund, warum die zweiten Lösungen falsch sind, nicht klar gewesen ist; nur weil die Richtigkeit der zuerst gegebenen Lösungen evident ist, müssen sie falsch sein: »Man würde auf die Richtigkeit dieser Lösungen leicht einen Eid schwören, wenn man nicht die wirklich richtige Lösung schon gefunden hätte.«

Der Grund, warum die zweiten Lösungen ein anderes Resultat als die ersten liefern, liegt aber einfach darin, dass sie nicht die Lösungen der in XIV gestellten, sondern der folgenden Aufgabe sind:

$A$ thut mit einem Würfel so viele Würfe, als der auf das Spielbrett geworfene Würfel Augen zeigt; wieviele Augen darf

*A* insgesammt zu erhalten hoffen? Während also bei der Aufgabe XIV es sich darum handelt zu ermitteln, wieviele Würfe zwölf oder mehr und wieviele Würfe weniger als zwölf Augen liefern, so fragt die so eben formulirte Aufgabe nach der mittleren Anzahl von Augen, welche *A* zu erreichen hoffen darf. Dass bei der Aufgabe XIV der Spieler *A* eine etwas kleinere Hoffnung als *B* hat, während er bei der letzteren Aufgabe auf mehr als zwölf Augen hoffen darf, also eine etwas grössere Hoffnung als *B*, welchem nur zwölf Augen zugestanden sind, hat, erklärt sich dadurch, dass für die Berechnung der mittleren Augenzahl auch die Fälle, welche bei der Aufgabe XIV *A* nichts oder nur den halben Einsatz gewinnen lassen, ebenso schwer in das Gewicht fallen, als die Fälle, welche ihm den ganzen Einsatz einbringen.



5) *Zu S. 35.* In dem Originale findet man zwischen den Seiten 172 und 173 eine Tafel eingeheftet, welche die Berechnung der Anzahl aller verschiedenen Fälle in extenso enthält. Da aber die Aufstellung dieser Tafel auf den Seiten 33—35 ausführlich geschildert ist, sodass sie sich leicht reproduciren lässt, sie sonst aber kein besonderes Interesse darbietet, so habe ich den Abdruck derselben für überflüssig gehalten und deshalb unterlassen, zumal die Anzahl der Fälle selbst in der Tafel auf S. 35 zu finden ist.

6) *Zu S. 36. Bernoulli* bezeichnet das Spiel mit dem französischen Namen Trijaques; ich habe den in Deutschland üblich gewesenen Namen Treschak gewählt. Das Spiel ist wohl auch unter den Namen Bretling oder Krimpelspiel bekannt gewesen.

In der Lösung dieser Aufgabe sind unwesentliche Kürzungen vorgenommen.

7) *Zu den Bemerkungen auf den S. 48, 50, 52.* In der Bemerkung auf S. 48 ist die Abweichung des Werthes $\frac{3}{32}a$ vom wahren Werthe etwas grösser als *Bernoulli* angiebt, nämlich gleich 0.000 000 032 $a$; in der Bemerkung auf S. 50 ist für die Abweichung vom wahren Werthe der richtige Werth 0.00 001 $(a+b)$ angegeben. Die Abweichung des Werthes $\frac{33}{160}(a+b+c)$ vom wahren Werthe ist in der Bemerkung auf S. 52 mit 0.0001 $(a+b+c)$ etwas zu gross angegeben, da sie nur gleich 0.000 065 ist.

8) *Zu S. 52.* Bringt man die für $m$ bei zwei, drei und vier Häufchen gefundenen Werthe nicht auf ihre einfachsten

Formen, sondern schreibt man dieselben so hin, wie sie entstehen, so erkennt man leicht das Gesetz, nach welchem diese Werthe gebildet sind, und kann dann den Werth von $m$ für eine beliebige Anzahl $h$ von Häufchen hinschreiben. Für zwei, drei und vier Häufchen hat $m$ bez. die Werthe:

$$m = \left\{\binom{4}{2}\binom{g}{1} + \frac{1}{2}\binom{4}{1}^2\binom{g}{2}\right\} : \binom{4g}{2},$$

$$m = \left\{\left[\binom{4}{3}\binom{g}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{g}{2}\right] + \frac{2}{3}\left[\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{g}{2} + \binom{4}{1}^3\binom{g}{3}\right]\right\} : \binom{4g}{3},$$

$$m = \left\{\begin{array}{l}\left[\binom{4}{4}\binom{g}{1} + \binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{g}{2} + \binom{4}{2}^2\binom{g}{2} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}^2\binom{g}{3}\right] \\ \quad + \frac{3}{4}\left[\binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{g}{2} + 2\binom{4}{1}^2\binom{4}{2}\binom{g}{3} + \binom{4}{1}^4\binom{g}{4}\right]\end{array}\right\} : \binom{4g}{4}.$$

Hierbei giebt in den Binomialcoefficienten $\binom{g}{\tau}$ die untere Zahl $\tau$ stets an, wieviele verschiedene Werthe die untersten Blätter der $h$ Häufchen ($h = 2, 3, 4$) zeigen. Die Anzahl der vor $\binom{g}{\tau}$ stehenden Binomialcoefficienten $\binom{4}{h_\varrho}$ ist stets gleich $\tau$, die Summe der unteren Zahlen $h_\varrho$ in denselben ist gleich $h$ und die Zahlen $h_\varrho$ geben an, dass die unteren Karten von $h_\varrho$ Häufchen gleichen Werth haben. Ferner sind diese Binomialcoefficienten in den obigen Ausdrücken so geordnet, dass, wenn $\varrho > \sigma$ ist, der voranstehende Binomialcoefficient $\binom{4}{h_\varrho}$ von den $h_\varrho$ Häufchen herrührt, deren unterste Karten niedrigeren Werth haben als die untersten Karten der $h_\sigma$ Häufchen, welche dem nachfolgenden Binomialcoefficienten $\binom{4}{h_\sigma}$ entsprechen. Der Bankhalter kann nun sein Amt überhaupt nur verlieren, wenn $h_1 = 1$ ist, und zwar kann ihm diese Karte des niedrigsten Werthes nur in einem Falle und seinen Gegnern in $h - 1$ Fällen zufallen.

Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich ohne weiteres die folgende Regel, um den Werth von $m$ für eine beliebige Anzahl $h$ ($h = 2, 3, \ldots, 4g$) von Häufchen zu finden:

Man zerlege $h$ auf alle möglichen Arten so in positive Summanden:



$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_\tau,$$

dass keiner derselben grösser als 4 ist, und kein vorangehender Summand grösser als ein folgender ist; $\tau$ ist für die einzelnen Zerlegungen verschieden und $\leqq g$. Dann bestimme man die Anzahl $p_\tau$ aller Permutationen der Elemente $h_1, h_2, \ldots, h_\tau$. Kommt unter diesen Elementen die 1 vor, so ermittele man noch die Zahl $\pi_\tau$ der Permutationen, deren erstes Element 1 ist; $\pi_\tau$ ist gleich 0 zu setzen, wenn kein Element den Werth 1 hat. Dann ist die Hoffnung des Bankhalters, sein Amt zu behalten:

$$m = \left\{ \begin{array}{l} \sum (p_\tau - \pi_\tau) \binom{4}{h_1}\binom{4}{h_2}\cdots\binom{4}{h_\tau}\binom{g}{\tau} \\ \qquad + \frac{h-1}{h} \sum \pi_\tau \binom{4}{h_1}\binom{4}{h_2}\cdots\binom{4}{h_\tau}\binom{g}{\tau} \end{array} \right\} : \binom{4g}{h},$$

$$= \left\{ \sum \left(p_\tau - \frac{1}{h}\pi_\tau\right) \binom{4}{h_1}\binom{4}{h_2}\cdots\binom{4}{h_\tau}\binom{g}{\tau} \right\} : \binom{4g}{h},$$

wo die Summe über alle Zerlegungen von $h$ zu erstrecken ist. Da $n = 1 - m$ ist, so ist damit auch das Verhältniss $m : n$ bestimmt. Ist $h = 4g - 2$, $4g - 1$ oder $4g$, so kann der Bankhalter sein Amt nie verlieren.

Die Formel lässt sich sofort noch verallgemeinern auf Kartenspiele, welche nicht aus vier, sondern aus $f$ verschiedenen Farben bestehen. Man hat in der obigen Formel dann 4 nur durch $f$ zu ersetzen und die Zahl $h$ auf alle Arten so in Summanden zu zerlegen, dass keiner derselben grösser als $f$ ist. Beachtenswerth ist die unmittelbar sich ergebende Beziehung:

$$\sum p_\tau \binom{f}{h_1}\binom{f}{h_2}\cdots\binom{f}{h_\tau}\binom{g}{\tau} = \binom{fg}{h}.$$

9) *Zu S. 52. Joseph Sauveur* (1653—1716) hatte im Journal des Sçavans von 1679 die Resultate seiner Untersuchungen über die damals gebräuchlichsten Glücksspiele veröffentlicht und dadurch die Aufmerksamkeit des königlichen Hofes auf sich gelenkt, sodass er seine Ergebnisse Ludwig XIV. vortragen musste und dann Hofmeister des Dauphin wurde.

*Bernoulli* übertreibt offenbar ein wenig, wenn er behauptet, dass die Tafeln von *Sauveur* an nicht wenigen Stellen der Verbesserung bedürfen. *Todhunter* hat nämlich *Bernoulli's* Tafel mit der von *Sauveur* in der Amsterdamer Ausgabe des Journal des Sçavans verglichen und giebt an, dass die ersten fünf Reihen, welche gerade die wesentlichen sind, in beiden Tafeln völlig mit einander übereinstimmen und nur die sechste Reihe, welche einfach durch Subtraction der zweiten von der fünften Reihe entstanden ist, bei *Sauveur* Irrthümer aufweist.



10) *Zu S. 62 und den folgenden.* Die Bezeichnung der einzelnen Gewinnhoffnungen mit $h_{n-1}$, $h_{n-2}$, ... findet sich in dem Originale nicht, empfahl sich aber hier, um eine prägnantere Darstellung der Lösung zu erreichen. —

Wählt man in der Figur auf S. 65 die Linie $GH$ als $x$-Axe und $GF$ als $y$-Axe, so ist die Gleichung der Curve:

$$y = (a - mb)\left(\frac{a}{c}\right)^x.$$

Nach Construction verhält sich aber

$$DB : BA = EN : NF,$$

woraus, wenn man für $DB$ und $EN$ mit Hülfe der Gleichung der Curve die Werthe berechnet und $BA = b$ setzt, folgt:

$$1 : b = \frac{\log(a - mb + NF) - \log(a - mb)}{\log a - \log c} : NF,$$

$$\frac{NF}{b} = \frac{\log(a - mb + NF) - \log(a - mb)}{\log a - \log c}.$$

Durch Vergleich mit der Formel für $n$ erhält man also

$$NF = nb = n,$$

d. h. $NF$ ist gleich $n$, wenn $AB$ als Längeneinheit benutzt wird. —

Die Bemerkungen auf S. 66 lassen sich folgendermaassen beweisen. Bezeichnet man die Gewinnhoffnung des Titius bei fest gegebenen Werthen $a$, $b$, $c$, $m$ und veränderlichem Werthe $n$ mit $H(n)$, so ist, wie aus der Formel aus S. 64 sofort folgt:

$$H(m-1) = H(m) = m - \frac{a}{b} + \frac{c^m}{a^{m-1}b}.$$

Setzt man in $H(n)$ nun $n = m + \varepsilon$, wo $\varepsilon$ alle positiven ganzen Zahlen und die negativen Zahlen $-2$, $-3$, ...., $-m+1$ durchläuft, so folgt:



$$H(n) = H(m+\varepsilon) = H(m) - \left(\frac{c}{a}\right)^m \left\{\frac{a}{b}\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^\varepsilon\right] - \varepsilon\left(\frac{c}{a}\right)^\varepsilon\right\}.$$

Es ist nun nachzuweisen, dass für alle in Betracht kommenden Werthe von $\varepsilon$ der Klammerausdruck, welcher mit $K$ bezeichnet werde, positiv ist. Für positive Werthe von $\varepsilon$ ist

$$\begin{aligned} K &= \frac{a}{b}\left[\left(\frac{b+c}{a}\right)^\varepsilon - \left(\frac{c}{a}\right)^\varepsilon\right] - \varepsilon\left(\frac{c}{a}\right)^\varepsilon \\ &= \frac{a}{b}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\varepsilon-2}\binom{\varepsilon}{\varrho}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon-\varrho}\left(\frac{c}{a}\right)^\varrho + \varepsilon\left(\frac{c}{a}\right)^{\varepsilon-1} - \varepsilon\left(\frac{c}{a}\right)^\varepsilon \\ &= \frac{a}{b}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\varepsilon-2}\binom{\varepsilon}{\varrho}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon-\varrho}\left(\frac{c}{a}\right)^\varrho + \varepsilon\frac{b}{a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\varepsilon-1}, \end{aligned}$$

also stets positiv. Durchläuft $\varepsilon$ die negativen Werthe, so setzt man $\varepsilon = -\eta$, wo $\eta = 2, 3, \ldots, m-1$ zu setzen ist, und erhält

$$\begin{aligned} K &= \frac{a}{b}\left[1 - \left(\frac{a}{c}\right)^\eta\right] + \eta\left(\frac{a}{c}\right)^\eta \\ &= \frac{a}{b}\left[1 - \left(1 + \frac{b}{c}\right)^\eta\right] + \eta\frac{a}{c}\left(1 + \frac{b}{c}\right)^{\eta-1} \\ &= -\frac{a}{c}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\eta}\binom{\eta}{\varrho}\left(\frac{b}{c}\right)^{\varrho-1} + \eta\frac{a}{c}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\eta}\binom{\eta-1}{\varrho-1}\left(\frac{b}{c}\right)^{\varrho-1} \\ &= \frac{a}{c}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\eta}\binom{\eta}{\varrho}(\varrho-1)\left(\frac{b}{c}\right)^{\varrho-1}, \end{aligned}$$

also für alle in Betracht kommenden Werthe von $\eta$ ebenfalls positiv. Folglich hat $H(n)$ seine grössten Werthe für $n = m - 1$ und $n = m$, und je grösser $\varepsilon$, bez. $\eta$ ist, um so grösser ist $K$. Damit sind die drei ersten Bemerkungen bewiesen. Die Richtigkeit der vierten Bemerkung ist aber ohne weiteres klar.

---

11) *Zu S. 79. John Owen* wurde 1563 in Caernarranshire geboren, studirte die Rechte in Oxford, wurde 1594 Leiter

der Schulen in Warwick und starb 1622 in London. Bekannt geworden ist er durch seine Epigramme, welche er in glücklicher Weise *Martial* nachahmte. Diese Epigrammsammlung scheint sich — nach der grossen Zahl von Auflagen, welche sie erlebt hat — grosser Beliebtheit erfreut zu haben; mir lagen nicht weniger als fünf Auflagen aus den Jahren 1617, 1620, 1628, 1647 und 1679 vor. Die Sammlung besteht aus drei Büchern, aus einem einzelnen Buche, in welchem das von *Bernoulli* citirte Epigramm mit der Ueberschrift: »Sapientia duce, comite Fortuna. In Ancum« zu finden ist, und aus nochmals zweimal drei Büchern Epigrammen. Da ein Epigramm eine Spitze gegen Rom enthielt, so wurde die Sammlung von der römischen Kirche auf den Index gesetzt.

12) *Zu S. 85.* *Lambert* erhebt in den Mémoires de l'Acad. de Berlin von 1797 folgenden Einwand gegen die Richtigkeit der Formel. Ist $q = 0$, so beweist der eine Beweisgrund streng das Gegentheil der Sache, da die Anzahl $p$ aller Fälle dann übereinstimmt mit der Anzahl $r$ aller das Gegentheil beweisenden Fälle. Mithin muss die Wahrscheinlichkeit der Sache gleich Null sein, da ihr Gegentheil absolut sicher ist; die Formel liefert aber nicht diesen Werth, sondern lässt noch die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{cfi}{adg}$$

übrig. Der Einwand scheint mir jedoch nicht zulässig zu sein. Ist $q = 0$ oder $t = 0$, d. h. ist das Gegentheil der Sache absolut sicher, so können die reinen Beweisgründe daran nichts ändern, sondern werden durch den betreffenden gemischten Beweisgrund völlig entkräftet und müssen daher unberücksichtigt bleiben. Folglich ist nicht die Formel unter (6), sondern die unter (4) anzuwenden, welche den richtigen Werth 0 für die Wahrscheinlichkeit der Sache ergiebt. Folglich sind die Werthe $q = 0$ oder $t = 0$ unter (6) auszuschliessen. Dagegen sind die Werthe $r = 0$ und $n = 0$ zulässig, da dann die reinen Beweisgründe die gemischten noch unterstützen, und in der That liefert die Formel unter (6) für $r = 0$ oder $n = 0$ den richtigen Werth 1.

13) *Zu den S. 90 und 91.* Dieses Werk, dessen vollständiger Titel lautet: »La logique ou l'art de penser, contenant outre les règles communes plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement«,

erschien anonym im Jahre 1664 in Paris; lateinische Uebersetzungen erschienen 1666 in Utrecht, 1704 und 1708 in Halle. Eine neue französische Ausgabe mit Anmerkungen und Zusätzen gab Alfred Fouillée (Paris 1879) heraus. Wie man heute weiss, ist dieses Werk, welches gewöhnlich als »La logique de *Port Royal*« bezeichnet wird, von *Antoine Arnauld*, *Peter Nicole* und vielleicht unter Mithülfe noch anderer Jansenisten vom Kloster Port Royal, mit Benutzung einer Abhandlung von *Pascal* verfasst. Sie vereinigt die Aristotelischen Lehren mit Principien von *Descartes*, und es beginnt mit ihr eine zweite Epoche in der Geschichte der Logik, welche bis zu ihrem Erscheinen trotz zahlreicher Bearbeitungen keinen wesentlichen Fortschritt seit *Aristoteles* aufzuweisen hatte. Noch heute ist das Werk nicht antiquirt. Vgl. *F. Ueberweg*, Grundriss der Geschichte der Philosophie der Neuzeit, 1. Band (8. Auflage von *M. Heinze*, Berlin 1896) und *E. Reinhold*, Geschichte der Philosophie nach den Hauptmomenten ihrer Entwickelung. 1. Band (5. Auflage. Jena 1859). In dem letzteren Werke findet sich eine ausführlichere Inhaltsangabe auf den Seiten 125 und 126. —

Hier sind noch zwei zu *Bernoulli*'s Lebzeiten erschienene Abhandlungen zu nennen, in welchen eine empirische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten versucht worden war. Beide Arbeiten enthalten Anläufe zur Aufstellung von Sterblichkeitstafeln. *Bernoulli* hat beide Arbeiten nicht kennen gelernt; das Erscheinen der zuerst zu nennenden Arbeit hatte er zwar erfahren, konnte aber dieselbe nicht erhalten, wie aus seinem Briefwechsel mit *Leibniz* hervorgeht; von der anderen Arbeit hat er aber wahrscheinlich gar nichts gehört. Die beiden Abhandlungen sind »Waerdye van lyfrenten nar proportie van losrenten« von dem berühmten Grosspensionär *Johann de Witt* (ermordet 1672 bei einem Aufstande), welche 1671 im Haag erschienen und 1879 nach dem sehr selten gewordenen Originale neugedruckt ist, und »An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives« von dem bekannten englischen Astronom *Edmund Halley* (1656—1742), welche 1693 in den Philosophical Transactions erschienen ist.

*Johann de Witt* nimmt an, dass ein Mensch, welcher zwischen 4 und 54 Jahren alt ist, die gleiche Wahrscheinlichkeit habe, in dem nächstfolgenden Jahre leben zu bleiben oder zu sterben, dass aber das Verhältniss zwischen den Wahrscheinlichkeiten für Sterben und Leben in dem nächsten Jahre für die Lebensalter von 54—64, 64—74 und 74—81 Jahren bez. gleich $\frac{3}{2}$, 2, 3 sei und dass im Durchschnitt niemand das 81 Jahr überschreite. Eine Rechtfertigung dieser Annahmen giebt *de Witt* nicht.

*Edmund Halley* legt seiner Abhandlung, von welcher *Cantor* (a. a. O., Bd. 3, S. 46) sagt, dass sie »auf verhältnissmässig kleinem Raume eine grosse Menge der fruchtbarsten Gedanken mehr angedeutet als entwickelt« enthält, die Annahme zu Grunde, dass die Bevölkerungsziffer stationär sei, d. h. jährlich ebenso viele Geburten als Todesfälle vorkommen, und dass jedes Jahr gleichviele Todesfälle in einem bestimmten Alter eintreten. *Halley* war auf Grund von Geburts- und Todeslisten der Stadt Breslau, welche für die 5 Jahre 1687—1691 veröffentlicht worden waren, zu seinen Annahmen geführt worden. 6193 Geburten standen 5869 Todesfällen gegenüber; der jährliche Ueberschuss der Geburten beträgt also ungefähr 64, konnte aber schwerlich eine Zunahme der Bevölkerungsziffer hervorbringen, da ungefähr ebenso viele Erwachsene jährlich zum Kriegsdienste ausgehoben wurden. Nach *Halley*'s Annahmen stellt also die Todesliste eines Jahres zugleich eine Sterblichkeitstafel dar. Seine so erhaltene Sterblichkeitstafel benutzt er dann zur Beantwortung verschiedener Fragen über Lebenswahrscheinlichkeiten, welche er in die Wissenschaft eingeführt hat und welche Wahrscheinlichkeiten a posteriori sind. Die Annahme einer stationären Bevölkerungsziffer ist aber durch die Volkszählungen als falsch nachgewiesen worden. [Vgl. *Cantor*, a. a. O., Bd. 3, S. 45—49 und die »Politische Arithmetik« desselben Verfassers (Leipzig, 1898), in welcher sich auf S. 87 u. folg. eine kurze Uebersicht der Weiterentwickelung dieser Fragen findet.]

14) *Zu S. 92.* Dass gegen *Bernoulli*'s gewaltige Ideen Einwände erhoben wurden, kann nicht Wunder nehmen, eher freilich, dass sie von *Leibniz* herrührten, und ihn wird *Bernoulli* hauptsächlich im Auge gehabt haben, wenn er an dieser Stelle die Einwände anführt und sie widerlegt. Denn alle diese Einwände hatte *Leibniz* brieflich erhoben, nachdem ihm *Bernoulli* seine Ideen mitgetheilt hatte. Das Beispiel der *Ludolph*'schen Zahl lässt *Leibniz* nicht gelten, da bei dieser Zahl jede neue Decimalstelle eine grössere

Annäherung bringe, während man aber von jeder neuen Erfahrung nicht wisse, ob sie die frühere Annahme um so richtiger erscheinen lasse. Im letzten Briefe geht *Bernoulli* auf eine weitere Vertheidigung seiner Wahrscheinlichkeit a posteriori gar nicht ein, sondern bittet nur um Zusendung der Abhandlung von *de Witt.* —

*Archimedes* (ca. 287—212 v. Chr.) schloss $\pi$ zwischen die Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ ein, *Adriaen Anthonisz* mit dem Beinamen *Metius* (1527—1607) gab die Grenzwerthe $3\frac{15}{106}$ und $3\frac{17}{120}$, aus denen er durch Addition der Zähler und der Nenner den auf 6 Decimalstellen genauen Werth von $\pi$ erhielt:

$$\pi = 3\,\frac{15 + 17}{106 + 120} = 3\tfrac{16}{113} = 3{,}141\,592\ldots$$

*Ludolph van Ceulen* (1540—1610) berechnete $\pi$ auf 35 Decimalstellen genau. *Bernoulli* hätte hier noch verschiedene andere Autoren mit dem gleichen Rechte wie *Metius* anführen können. (Vgl. *Cantor* a. a. O., Bd. 2, S. 549 u. folg.)

15) *Zu S. 95.* Die sämmtlichen Kapitel dieses vierten Abschnittes sind wortgetreu wiedergegeben, um *Bernoulli*'s Gedanken auch nicht im geringsten zu verändern. Nur in formaler Beziehung habe ich in den Beweisen der Hülfssätze (3), (4) und (5) kleine Aenderungen vorgenommen, welche die Uebersichtlichkeit derselben wesentlich erleichtern dürften, und welche vornehmlich in der Ersetzung von $L$ und $\varLambda$ (ohne Index) durch die mit Indices versehenen Buchstaben $L_n$ und $R_n$ und der Ersetzung von Worten durch Formeln bestehen. *Bernoulli* ist, da ihm eine geeignete Bezeichnung mangelt, oft gezwungen, weitläufig und schwer verständlich mit Worten Schlüsse beschreiben zu müssen, welche sich durch Formeln knapp und übersichtlich darstellen lassen.

16) *Zu S. 98.* *Bernoulli* verwendet statt $\pm$ und $\mp$ die Zeichen ꝸ und ♉, welche sich in dieser Bedeutung sonst bei keinem Mathematiker zu finden scheinen. *Leibniz* hat zwar das letztere Zeichen in seiner Characteristica geometrica von 1679 benutzt; dort bedeutet es aber congruent.

Dass $\dfrac{M}{L_n}$ und $\dfrac{M}{R_n}$ für $n = \infty$ unendlich grosse Werthe haben, lässt sich mit Hülfe der Ungleichungen (auf S. 96): $(nr + 1)\,s > nsr, \ldots, (ns + 1)\,r > nrs, \ldots$ leicht und streng zeigen; *Bernoulli*'s hierfür (auf S. 98) gegebener

Beweis ist mindestens in formaler Beziehung unbefriedigend. Der in der Anmerkung (S. 100 u. folg.) gegebene Beweis der Hülfssätze (4) und (5) ist dagegen völlig streng.

17) *Zu S. 105.* Unter Wahrscheinlichkeitsgrad eines Ereignisses versteht also *Bernoulli* die Zahl der demselben günstigen Fälle. Dagegen gebraucht er nirgends für den Quotienten aus der Anzahl der günstigen Fälle dividirt durch die Anzahl aller möglichen Fälle den jetzt allgemein üblichen Ausdruck Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses, sondern stets Hoffnung, indem er das zu erwartende Ereigniss gleich 1 setzt. Hoffnung hat also bei *Bernoulli* ganz die jetzige Bedeutung.

*Bernoulli*'s Beweis seines Satzes ist vollkommen streng und hat vor allen später gegebenen kürzeren Beweisen, welche die *Stirling*'sche Formel: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ ($n$ eine sehr grosse Zahl) benutzen, den Vorzug, dass in ihm nur elementare Hülfsmittel und Betrachtungen verwendet werden.

In den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist als *Bernoulli*'sches Theorem gewöhnlich nicht das ursprüngliche Theorem, wie es sich auf S. 104 findet, angeführt, sondern das folgende, welches eine Umkehrung des ursprünglichen vorstellt:

»Sind $p$ und $q$ die einfachen und constanten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse $A$ und $B$ (also $p + q = 1$ und also $p = \frac{r}{t}$, $q = \frac{s}{t}$ in der *Bernoulli*'schen Bezeichnung), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereigniss $A$ in einer sehr grossen Anzahl $\mu$ von Versuchen in einer zwischen $\mu p + \lambda$ und $\mu p - \lambda$ liegenden unbekannten Anzahl $m$ von Malen eintrifft, gleich

$$W = \sum_{\varrho=\mu p-\lambda}^{\varrho=\mu p+} \frac{\mu!}{\varrho!\,(\mu-\varrho)!}\, p^{\varrho} q^{\mu-\varrho},$$

oder es ist $W$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung $\frac{m}{\mu} - p$ zwischen $-\frac{\lambda}{\mu}$ und $+\frac{\lambda}{\mu}$ enthalten ist.«

Wenn sich diese Umkehrung des *Bernoulli*'schen Theorems auch nicht im Originale der Ars conjectandi in dieser Formulirung findet, so ist der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $W$ in *Bernoulli*'s Beweise seines Satzes (S. 105) implicite enthalten, wenn auch nicht als Formel geschrieben. Aus dem Kapitel IV geht aber deutlich hervor, dass *Bernoulli* gerade die Bedeutung dieser Umkehrung voll erkannt hat, welche erst die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf alle verschiedenen Gebiete des täglichen Lebens ermöglicht hat und es rechtfertigt, wenn man sich durch zahlreich wiederholte Beobachtungen Klarheit über ein Ereigniss und die es bestimmenden Ursachen verschaffen will. Die ganze Statistik hat erst durch dieses Gesetz ihre wissenschaftliche Grundlage erhalten. Sicher hatte *Bernoulli* diese weiteren Untersuchungen in den fehlenden Kapiteln des IV. Theiles durchzuführen beabsichtigt.

An diesen Summenausdruck knüpft die analytische Weiterentwickelung des *Bernoulli*'schen Theorems an, um welche sich *de Moivre* und *Laplace* die hervorragendsten Verdienste erworben haben. Letzterem verdankt der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $W$ seine heutige Integralform:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\xi^2}\, d\xi + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}},$$

wo

$$\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{2\mu p q}}$$

ist. Wie *Eggenberger* neuerdings in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1893, S. 110—181 (Beiträge zur Darstellung des *Bernoulli*'schen Theorems, der Gammafunction und des *Laplace*'schen Integrals) gezeigt hat, lässt sich die Restfunction noch mit dem Integrale vereinigen in der Form:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\delta e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

wo jetzt aber

$$\delta = (\lambda + \tfrac{1}{2}) \sqrt{\frac{1}{2\mu p q}}$$

ist. Dort findet sich auch eine historische Untersuchung über die analytische Entwickelung des *Bernoulli*'schen Theorems, in welcher vor allem die Verdienste von *de Moivre* und die indirecte Mitwirkung von *Stirling* gewürdigt werden. Leider ist die Darstellung nicht klar und übersichtlich.

Während also die obige Umkehrung des *Bernoulli*'schen Theorems in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewöhnlich als *Bernoulli*'sches Theorem selbst bezeichnet wird, findet man als Umkehrung desselben ein anderes Theorem, den Satz von *Bayes* bezeichnet: »Bezeichnen $x$ und $1 - x$ die unbekannten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse $A$ und $B$, und ist in einer sehr grossen Anzahl $\mu = a + b$ von Versuchen das Ereigniss $A$ $a$-mal, das Ereigniss $B$ $b$-mal eingetroffen, so liegt der Werth von $x$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\xi^2} \, d\xi$$

zwischen den Grenzen

$$\frac{a}{\mu} \pm c \sqrt{\frac{2ab}{\mu^3}} \text{.«}$$

Für das Integral $W$ sind Tafeln berechnet, aus denen man den Werth von $W$ für jeden Werth von $c$ entnehmen kann, und welche in jedes grössere Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgenommen sind. —

Das *Bernoulli*'sche Theorem wird häufig auch als das Gesetz der grossen Zahlen bezeichnet, welcher Name von *Poisson* (Recherches sur la probabilité, Paris 1837) herrührt.

In historischer Beziehung sei noch eine Aeusserung *Cardano*'s angeführt, welche an das *Bernoulli*'sche Theorem denken lässt. *Cardano* in seinem Buche De ludo aleae sagt, dass man im Verhältnisse $1 : (2^n - 1)$ darauf wetten könne, $n$-mal nach einander gerade Zahlen zu werfen, und dass bei unendlicher Anzahl der Würfe das Ergebniss mit der Erfahrung übereinstimmen werde, denn die Länge der Zeit sei es, welche alle Möglichkeiten zeigt (Vgl. die citirte Aeusserung und eine zweite ähnlichen Sinnes bei *Cantor*, a. a. O., Bd. 2, S. 495).

18) *Zu S. 107.* Wahrscheinlich hat *Bernoulli* das sogenannte grosse Weltjahr im Auge, nach dessen Ablauf alle Dinge wiederkehren sollen. Das von ihm gebrauchte Wort apocatastasis scheint sich bei *Plato* nicht zu finden, sondern nur in der pseudoplatonischen Schrift Axiochos vorzukommen.

Die Lehre von dem Kreislaufe aller Dinge war im Alterthume sehr verbreitet und findet sich schon bei *Herakleitos* von Ephesus und *Empedokles*; besonders entwickelt wurde sie von den Stoikern, wofür sich zahlreiche Belege bei *Zeller*, Philosophie der Griechen (Bd. 3, Theil 1, S. 141) finden.

---

19) *Zu S. 108.* Der Brief über das Ballspiel bietet, abgesehen von seiner mathematischen Bedeutung, insofern noch besonderes Interesse dar, als die in ihm entwickelten Methoden und Resultate fast ohne weiteres auf das jetzt sehr beliebte Lawn-Tennis übertragen werden können; man hat nur die einzige Modification einzuführen, dass bei diesem jede Partie aus 6 Spielen besteht. Zum Theil können die Untersuchungen principielle Fragen des Lawn-Tennis entscheiden, weshalb die Resultate jeden Lawn-Tennis-Spieler interessiren müssen, selbst wenn er nicht im Stande ist, die mathematischen Entwickelungen zu verstehen. Die Paragraphen XVIII und XXI sind dabei auszuschalten, da die Bisques und die Schassen beim Lawn-Tennis abgeschafft sind.

Der deutschen Wiedergabe dieses Briefes stellten sich nicht unbedeutende Schwierigkeiten entgegen, welche einerseits bereitet wurden von den französischen Spielausdrücken, um derenwillen nur *Bernoulli* den Brief in französischer Sprache geschrieben hatte, und andrerseits von der Unkenntniss der Spielregeln, welche *Bernoulli* zu seiner Zeit als wohlbekannt voraussetzen durfte, während es heute viel Mühe verursacht, sie überhaupt kennen zu lernen.

In ersterer Hinsicht habe ich mir dadurch geholfen, dass ich die von *R. v. Fichard* in seinem »Handbuche des Lawn-Tennis-Spieles« (Baden-Baden, 1895) für dieses Spiel eingeführten deutschen Spielausdrücke benutzte, was schon deshalb gerechtfertigt war, weil das moderne Lawn-Tennis von dem viel complicirteren und schwierigeren jeu de Paume abstammt. Für die Spielregeln und alles, was sonst mit dem jeu de Paume zusammenhängt, fand ich ausser dem eben genannten Buche als Quellen: »Le jeu de Paume, son histoire et sa description«, herausgegeben von *Édouard Fournier* (Paris 1862) und »die Kunst der Ball- und Raquettenmacher und vom Ballspiele« (Uebersetzung einer von *Garsault* herrührenden Abhandlung) in dem Werke Schauplatz der Künste und Fertigkeiten, übersetzt und herausgegeben von *D. G. Schreber*, 7. Band, S. 225—276 (Leipzig u. Königsberg 1768). Auch das *Fournier*'sche Buch enthält als wesentlichen Theil die Abhandlung l'art du paumier-Raquetier et de la Paume von *Garsault* aus dem Jahre 1767, welche jetzt sehr selten geworden ist. Die Darstellung in den beiden letztgenannten Büchern ist leider ziemlich unklar und schwer verständlich.

Das Paume genannte Ballspiel ist seit dem 13. Jahrhundert bekannt und erfreute sich in den folgenden Jahrhunderten bis zur französischen Revolution grosser Beliebtheit, hauptsächlich in den vornehmen Kreisen. Das Spielen war nicht nur sehr theuer, da um hohe Summen gespielt wurde und die Miethe für das Ballhaus eine hohe war, sondern erforderte viele Uebung und also sehr viel Zeit. Darin aber liegt der Grund, dass unser Jahrhundert keinen günstigen Boden für das Spiel darbot und dasselbe jetzt nur ganz selten noch gepflegt wird. Der Name des Spieles rührt davon her, dass der Ball ursprünglich mit der flachen Hand (palma) geschlagen wurde; erst vom 15. Jahrhundert an bediente man sich dazu des Schlägers (racket, raquette).

Ursprünglich wurde das Spiel im Freien oder in unbedeckten Räumen gespielt; vom 14. Jahrhundert an baute man Ballspielhäuser oder Ballhäuser (tripots, später jeux genannt), welche in grosser Zahl (1657 zählte man in Paris 114) entstanden und von denen das in Versailles durch die Sitzung der Nationalversammlung vom 20. Juni 1789 zu historischer Berühmtheit gelangte. Durch diese Ballhäuser wurde das Spiel von der Witterung unabhängig und erlangte, vornehmlich durch Mitbenutzung der Wände bis zu einer bestimmten Höhe, ausserordentliche Mannigfaltigkeit und Abwechslung. Man unterschied die Ballhäuser in jeux carrés und in jeux du dedans oder du tambour. Die auf S. 162 stehende Figur giebt den Grundriss eines jeu du dedans. Die Umfassungsmauern, welche mindestens 7 Meter Höhe bis zum Dache hatten, umschlossen ein Rechteck von ca. 30 Meter Länge und 10 Meter Breite. In dieses waren an drei Seiten Wandelgänge von ca. $1^1/_2$ Meter Breite eingebaut, deren vordere Wände etwas über 2 Meter Höhe hatten und welche von unter 45° nach dem Innern abfallenden Dächern bedeckt waren. Diese Wandelgänge hiessen Gallerien (kleine, grosse Gallerie und Gallerie du dedans) und umschlossen das eigentliche Spielfeld *FGMK*, welches durch das in ca. 1 Meter Höhe gespannte (Seil oder) Netz *AA'* in

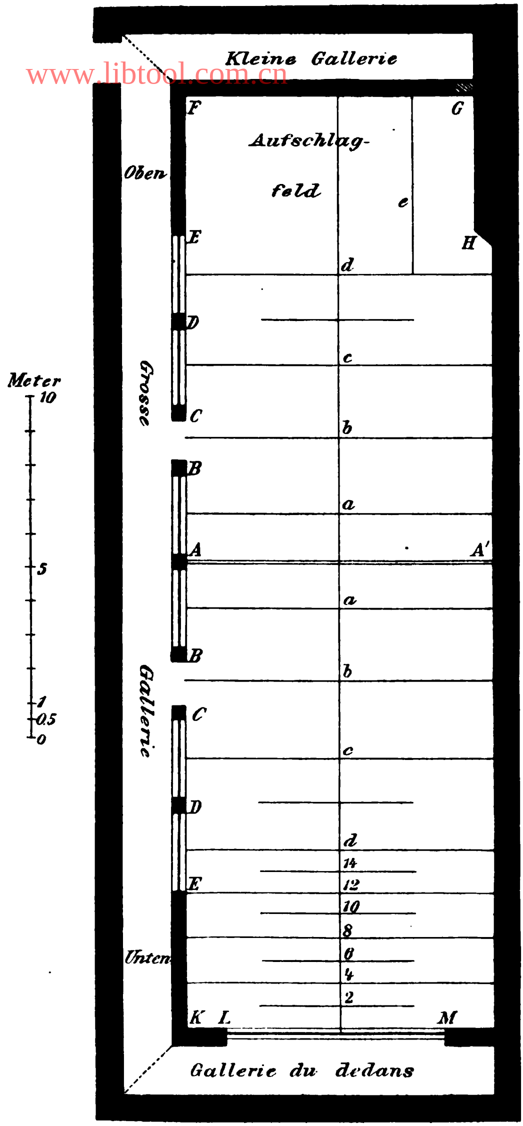
Kleine Gallerie
F
G
Aufschlag-
feld
Oben
e
E
H
d
D
c
C
b
Grosse
Meter
10
5
1
0.5
0
B
a
A
A'
a
B
b
Gallerie
C
c
D
d
14
12
E
10
8
Unten
6
4
2
K
L
M
Gallerie du dedans

Fig. 2.

zwei gleiche Hälften getheilt wurde. Das Dach der grossen Gallerie wurde auf der Strecke *EE* von den Säulen *A*, *B*, *C*, *D* getragen, zwischen welchen sich die beiden Thüröffnungen *BC* und die mit niedrigen Brüstungen versehenen fensterartigen Oeffnungen *AB*, *CD*, *DE* (1., 2., 3. Oeffnungen genannt) befanden. Auch die Gallerie du dedans gestattete durch eine solche fensterartige Oeffnung *LM* Einblick in das Ballhaus, während die kleine Gallerie keine derartige Oeffnung besass. In ihrer Vorderwand befand sich nur dicht unter dem Dache die kleinere rechteckige Oeffnung *G*, la grille genannt, von ca. $^3/_4$ Meter im Geviert. Solche kleinere Oeffnungen fanden sich oft noch mehrere vor und hiessen zusammen hasards. Hinter den grossen Oeffnungen der beiden andern Gallerien hielten sich die Zuschauer auf, welche durch Abschliessen von Wetten auf die Spieler eifrigst am Spiele theilnahmen. Die vorspringende Mauer *GH* hiess le tambour und diente zur Erschwerung des Spieles. Das folgende Bild, welches eine Verkleinerung eines Kupferstiches aus dem »Schauplatze der Künste und Fertigkeiten« ist, gewährt einen Einblick in das Innere eines Ballhauses von der Gallerie du dedans aus, auf deren Brüstung der Korb mit den Spielbällen zu sehen ist, und dürfte die vorstehenden Angaben wesentlich illustriren.



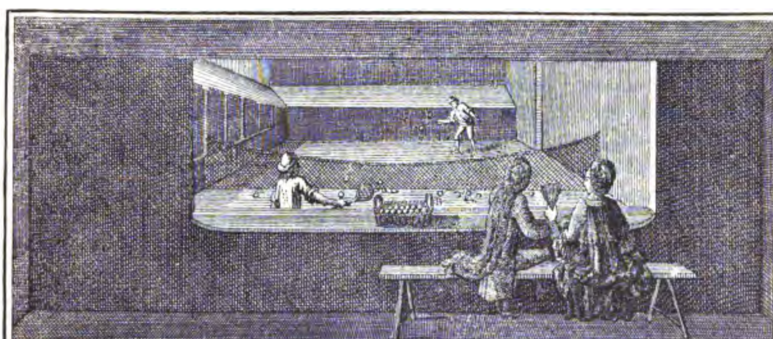

Fig. 3.

Die geschilderte Einrichtung eines Ballhauses unterlag bei den einzelnen Spielhäusern mannigfachen kleinen Abänderungen. Das jeu carré unterscheidet sich von dem jeu du dedans dadurch, dass die Gallerie du dedans und die Mauer

*GH* (le tambour) fehlen, dafür aber mehrere derartige Oeffnungen wie die *Grille* vorhanden sind.

Auf dem Fussboden, welcher mit 90 Reihen quadratischer Steinplatten ausgelegt war, befanden sich eine Anzahl von schwarzen Linien. Eine der Längsseite parallele Linie halbirte das Spielfeld, ihr parallel war noch die Linie *e*, welche mit der Linie *d* (dem Passestriche) im oberen Theile des Ballhauses das Aufschlagfeld abgrenzt. Sowohl in dem oberen Theile *AFGA'*, als auch in dem unteren Theile *AKMA'* waren eine Anzahl von der Breitseite parallelen Linien *a*, *b*, *c*, *d*, 1, 2, . . ., 14 gezogen, welche zum Markiren der Schassen, von denen weiter unten die Rede sein wird, dienten; solche Linien gab es im unteren Theile des Ballhauses mehr als im oberen (in dem Grundrisse sind nicht alle gezeichnet). — Nahmen an dem Spiele 2 oder 4 Personen Theil, so vertheilten sie sich gleichmässig auf beide Seiten des Spielhauses; waren nur 3 Theilnehmer vorhanden, so spielten zwei oben und der dritte unten. Derjenige Spieler, welcher das Spiel zu beginnen und den Ball *aufzuschlagen* (den *Service* zu geben) hatte, stand unten im Ballhause. Sollte sein Aufschlageball gültig sein, so musste er über das Netz fliegen, auf das Dach der grossen Gallerie und nur auf dieses auftreffen und von diesem in das Aufschlagfeld *EFed* hineinspringen; jeder andere Ball war ungültig. War dem Aufschläger der erste Ball missglückt, so durfte er noch einen Ball aufschlagen; erst wenn ihm auch dieser misslang, hatte er einen Gang verloren. Der Gegner hatte jeden gültigen Ball entweder im Fluge oder nach seinem ersten Aufsprunge zurückzuschlagen, worauf ihn der Aufschläger in gleicher Weise zurückspielen musste. Da hierbei der Ball auf die Gallerien, Dächer und Wände (bis zu einer bestimmten Höhe) aufprallen durfte, so boten sich die mannigfaltigsten Abwechslungen dar. Fehlte einer der Spieler den Ball, so wurde dadurch der Gang beendigt.

Die Anzahl der Spiele, aus denen eine Partie sich zusammensetzte, wechselte in den einzelnen Ländern im Laufe der Zeiten; gewöhnlich waren es 4, 6 oder 8 Spiele. Jedes Spiel wurde auf 60 Punkte gespielt, welche zu je 15 zusammengezählt wurden. Warum man gerade 15 zählte, ist schwer zu sagen; jedenfalls hing diese Zahl mit der Zahl der Felder zusammen, in welche Fussboden und Wände getheilt waren und deren man 15 auf jeder Seite des Netzes zählte.

Diese Zahlen waren bald einfach zu Namen geworden und man liess dann das Wort »Punkt« fort. Man zählte »15 zu 15« oder kurzweg »15 zu«, wenn jede Partei 15 Punkte, »30 zu 15«, wenn die eine Partei 30, die andere 15 Punkte gewonnen hatte, u. s. w. Wenn eine Partei vier Gänge gewonnen hatte, so war das Spiel von ihr gewonnen, ausser in dem Falle, dass die andere Partei 45 Punkte für sich zählte. Stand jedoch das Spiel auf »45 zu«, so musste eine Partei noch zwei Gänge hintereinander gewinnen, um das Spiel gewonnen zu haben. Statt »45 zu« zählte man »à deux« (englisch deuce), was ich durch das beim Lawn-Tennis übliche deutsche Wort »*Einstand*« wiedergegeben habe. Diejenige Partei, welche dann den nächsten Gang gewann, zählte »*vor*« für sich oder war »*im Vortheil*« (franz. avantage, engl. advantage). Gewann dieselbe Partei noch den nächsten Gang, so hatte sie, wie schon erwähnt, das Spiel gewonnen; verlor sie diesen aber, so zählten beide Parteien wieder Einstand.

Ging die Partie auf $m$ Spiele, so hatte die Partei gewonnen, welche zuerst $m$ gewonnene Spiele für sich zählte. Hatten aber beide Parteien je $m - 1$ Spiele gewonnen, so zählte man »*Spieleinstand*« (à deux de jeu). Diejenige Partei, welche das nächste Spiel gewann, zählte dann »*Spielvor*«; gewann sie auch das folgende Spiel, so war damit die Partie zu ihren Gunsten entschieden, andernfalls aber zählten beide Parteien wieder Spieleinstand.

Die in der unteren Hälfte des Ballhauses spielende Partei I, welche also den Aufschlag zu geben hatte, gewann 15 für sich, 1) wenn die Gegenpartei II den Ball in das Netz $AA'$, an die Decke oder in die Lichtöffnungen schlug, 2) wenn sie selbst eine Schass zog oder die Gegenpartei II sie nicht zog, 3) wenn es ihr gelang, den Ball in die letzte Oeffnung $DE$ auf der oberen Seite des Ballhauses oder in die Grille zu spielen, 4) wenn die Gegenpartei II den Ball nicht im Fluge oder nach dem ersten Aufsprunge und den Serviceball nicht nach dem ersten Aufsprunge zurückschlug; die oben spielende Partei II dagegen gewann 15 in den gleichen Fällen 1) und 2) wie vorher, 3) wenn es ihr gelang, den Ball in die Oeffnung du dedans $LM$ zu spielen, sie machte aber 4) nur eine Schass, wenn ihre Gegenpartei I den Ball nicht im Fluge oder nach dem ersten Aufsprunge zurückschlug. Von diesen Regeln fanden oft in dem oder jenem Punkte Abweichungen statt, welche hier aber kein Interesse darbieten.

Die oben spielende Partei II machte eine Schass (ital. caccia, franz. chasse), wie erwähnt, wenn die Gegenpartei I den Ball zweimal aufspringen oder sie den Ball in die letzte Oeffnung $DE$ der unteren Seite fliegen liess. Die Schass wurde ursprünglich da markirt, wo der Ball nach seinem zweiten Aufsprunge zu rollen aufhörte oder erjagt (cacciata, daher der Name) wurde; bald aber war es Regel geworden, sie an der Stelle des zweiten Aufsprunges zu markiren. Galten die vorstehenden Regeln, so fanden die Schassen nur unten im Ballhause statt und, um sie zu markiren, dienten die dem Netze parallelen Linien $a$, $b$, $c$, $d$, 1, 2, ..., 14 (man bezeichnete sie darnach als Schass der ersten, zweiten, Thür- und letzten Oeffnung und als Schass $\frac{1}{2}$, 1, 2, ..., 14). Mit der Schass hatte aber die Partei II, welche sie gemacht hatte, noch nicht 15 gewonnen, sondern sie musste nun die Schass vertheidigen, und die Gegenpartei I hatte die Schass zu ziehen. Der letzteren Partei gelang dies, wenn sie eine bessere Schass machte, indem sie ihren Schlag so einrichtete, dass der zweite Aufsprung des Balles jenseits des Ortes lag, an welchen die von der Partei II gemachte Schass markirt war. Die Partei II suchte ihrerseits das Ziehen der Schass dadurch zu verhindern, dass sie den Ball vor seinem zweiten Aufsprunge auffing oder wegschlug. Eine Schass war um so schwieriger zu gewinnen, je näher an der Gallerie du dedans sie gemacht war. Bevor die Schass gezogen wurde, wechselten beide Parteien ihre Plätze. Man liess aber die Partei II erst zwei Schassen machen, ehe die Plätze gewechselt und die Schassen von der Partei I zu ziehen versucht wurden; nur wenn die eine Partei 45 oder vor für sich zählte, wechselte man bereits nach einer gemachten Schass die Plätze. Hatte die Partei I die Schass richtig gezogen, so gewann sie 15; sie verlor aber 15, wenn die Partei II das Ziehen der Schass verhindert hatte. Hatte z. B. die Partei II zwei Schassen, die eine auf der Linie $d$, die andere auf der Linie 10 gemacht, so konnte die Partei I nur dann zweimal 15 gewinnen, wenn sie zwei bessere Schassen machte, z. B. in Bezug auf die erste Schass auf der Linie 14 oder zwischen 14 und $d$ und in Bezug auf die zweite auf der Linie 9 oder zwischen 9 und 10.

20) *Zu S. 117.* Die Tafel IV findet sich in dem Originale in etwas anderer Form, indem dort sämmtliche Zähler und Nenner ausgerechnet sind; weil dadurch die Tafel aber sehr

unübersichtlich ist, so habe ich die hier gegebene Form bevorzugt.

21) *Zu S. 122.* Wenn $A$ dem $B$ ein halb fünfundvierzig vorgiebt, so bedeutet dies, dass er dem $B$ entweder in den ungeradzahligen Spielen 45 und in den geradzahligen 30 vorgiebt oder umgekehrt; von beiden Arten kann sich $B$ die ihm passende nach Belieben auswählen. Ein halb dreissig bedeutet die Vorgabe von 30 in jedem zweiten Spiele und 15 in den dazwischen liegenden Spielen und ein halb funfzehn die Vorgabe von 15 in jedem zweiten Spiele und 0 in den anderen Spielen.

Bei Lawn-Tennis ist noch ein ganz ähnliches Vorgabesystem in Gebrauch.

22) *Zu S. 127.* Die von *Bernoulli* hier ausgesprochene Vermuthung ist in der That völlig zutreffend und zwar nicht nur in dem Falle, für welchen die Tafel VI berechnet ist, dass $A$ in einem Spiele doppelt soviel Wahrscheinlichkeit hat, es zu gewinnen, als es zu verlieren, und in dem nächsten Spiele umgekehrt doppelt soviel Wahrscheinlichkeit hat, es zu verlieren als es zu gewinnen, sondern ganz allgemein für jedes Verhältniss. Ein Beweis hierfür existirt aber meines Wissens bis jetzt nicht, weshalb ich den folgenden hier mittheile.

Es werde angenommen, dass $A$ dem $B$ abwechselnd einen kleinen oder einen grösseren Vortheil einräumt, je nachdem die Anzahl der von beiden Spielern noch zu gewinnenden Spiele eine gerade oder ungerade Zahl ist; im ersteren Falle soll es $n$-mal ($n$ eine positive Zahl) wahrscheinlicher sein, dass $A$ das Spiel gewinnt, als dass er es verliert, und im letzteren Falle soll es umgekehrt $n$-mal wahrscheinlicher sein, dass $A$ das Spiel verliert, als dass er es gewinnt. Bezeichnet man nun die Hoffnung des $A$, die Partie zu gewinnen, wenn er noch $g$ und sein Gegner $B$ noch $h$ Spiele zu gewinnen hat, mit $A_{g,h}$, so ist, wenn $g+h$ eine gerade Zahl ist, immer

$$A_{g,h} + A_{h,g} = 1. \tag{I}$$

Dies lässt sich folgendermaassen leicht zeigen.

Aus den Voraussetzungen ergeben sich die folgenden Recursionsformeln:

$$A_{g,h} = \frac{n}{n+1} A_{g-1,h} + \frac{1}{n+1} A_{g,h-1},$$

wenn $g + h$ eine gerade Zahl ist, und



$$A_{g,h} = \frac{1}{n+1} A_{g-1,h} + \frac{n}{n+1} A_{g,h-1},$$

wenn $g + h$ eine ungerade Zahl ist. Wendet man auf $A_{g-1,h}$ und $A_{g,h-1}$ in der ersten Formel die zweite und auf dieselben Grössen in der zweiten Formel die erste an, so erhält man die für gerade und ungerade Werthe von $g + h$ gültige Formel:

$$A_{g,h} = \frac{1}{(n+1)^2}\left\{n A_{g-2,h} + (n^2+1) A_{g-1,h-1} + n A_{g,h-2}\right\}. \quad \text{(II)}$$

Beachtet man nun, dass auf Grund der Definition von $A_{\varrho,\sigma}$ und der Spielbedingungen die Gleichungen bestehen:

$$A_{\varrho,\sigma} = 0, \quad \text{für} \quad \varrho > 0, \quad \sigma \gtreqless 0,$$
$$A_{\varrho,\sigma} = 1, \quad \text{für} \quad \varrho \gtreqless 0, \quad \sigma > 0,$$
$$A_{2,2} = A_{1,1},$$

da ein Spieler zwei Spiele hintereinander gewinnen muss, um die Partie zu gewinnen, wenn jedem der Spieler nur noch 2 Spiele fehlen, so findet man aus der Recursionsformel zunächst:

$$A_{1,1} = \frac{1}{2};$$
$$A_{2,1} = \frac{1}{2(n+1)},$$
$$A_{1,2} = \frac{n+2}{2(n+1)};$$
$$A_{2,2} = \frac{1}{2},$$
$$A_{3,1} = \frac{n}{2(n+1)^2},$$
$$A_{1,3} = \frac{2n^2+3n+2}{2(n+1)^2}.$$

Auf der rechten Seite der Formel (II) stehen nun lauter Hoffnungen $A_{\varrho,\sigma}$, deren Indicessumme $\varrho + \sigma$ um zwei Einheiten kleiner ist als die Indicessumme der auf der linken