

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ

www.libtool.com.cn

ВОСЕМЬ КНИГЪ,

А ИМЕННО:

Первыя шесть, одиннадцатая и двѣ-
надцатая,

Содержація въ себѣ

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ.

Переводъ съ Греческаго

О. ПЕТРУШЕВСКАГО,

съ прибавленіями и примѣчаніями.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ДЕПАРТАМЕНТА НАРОДНАГО
ПРОСВѢЩЕНІЯ.

1819.

Jamais livre de science n'a eu un succès comparable à celui des Elémens d'Euclide. Ils ont été enseignés exclusivement pendant plusieurs siècles dans toutes les écoles de mathématiques, traduits et commentés dans toutes les langues ; preuve certaine de leur excellence.

BOSSUT.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ , чтобы по напечатаніи , до выпуска изъ типографіи , представлены были : одинъ экземпляръ сей книги для Цензурнаго Комитета , другой для Департамента Народнаго Просвѣщенія ; два экземпляра для Императорской Публичной Библіотеки , и одинъ для Императорской Академіи Наукъ. Санктпетербургъ , Декабря 13 дня 1818 года.

Цензоръ Ст. Сов. и Кав. Г. Яценковъ.

ВСЕПРЕСВѢТЛѢЙШЕМУ

ДЕРЖАВНѢЙШЕМУ

www.libtool.com.cn

ВЕЛИКОМУ ГОСУДАРЮ

ИМПЕРАТОРУ

АЛЕКСАНДРУ ПАВЛОВИЧУ,

САМОДЕРЖЦУ ВСЕРОССИЙСКОМУ,

ГОСУДАРЮ ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕМУ

Всеподданнѣйшее приношеніе.

www.libtool.com.cn

ПРЕДИСЛОВІЕ.

www.libtool.com.cn

Эвклидъ жилъ въ Александріи, почти за 270 лѣтъ до Рождества Христова, куда онъ переселился изъ Греціи по приглашенію царствовавшего тогда въ Египтѣ Птоломея Лага, и былъ ему совѣтникомъ и со-спрудникомъ въ заведеніи славной Александрійской Школы. По описанію Паппа Эвклидъ, сколь великъ умомъ, стольже оплеченъ былъ и качествами сердца. Онъ, подобно великому Невтону, съ тихостію нравовъ соединялъ смиренное чувство собственнаго достоинства, былъ совершенно чуждъ гордости и предубѣжденія къ своимъ познаніямъ, съ неприпворною топовностію опдавалъ справедливостъ достоинствамъ другихъ, и всегда оказывалъ особенное вниманіе и даже пособіе всѣмъ шѣмъ, кои какимъ либо образомъ спосѣщеспвовали къ распро-спраненію Маѣматическихъ наукъ

Изъ всѣхъ швореній Эвклида дошедшихъ до насъ славнѣйшее есть, шакъ называемыя Начала (*Στοιχεῖα*). Оно названо просто,

Началами, попому что содержишь въ себѣ основанія, какъ Геометріи, такъ и Ариоменики, а именно изъ принадлежащи главъ или книгъ, на кои онѣ раздѣляются, восемь (издаваемая пеперь) содержатъ основанія Геометріи, а остальные, частію Ариоменику, частію приложеніе оной къ Геометріи. Ни одна изъ классическихъ книгъ, не была столь уважаема просвѣщенными мужами, какъ Начала, или по крайней мѣрѣ восемь оныхъ книгъ. Онѣ были около девятнадцати вѣковъ почти единственнѣйшимъ руководствомъ къ изученію Геометріи, и переведены не только на всѣ Европейскіе языки, но и на многіе Азіатскіе, какъ то: на Еврейской, Арабской, Китайской и проч. Но и ни одна можетъ быть книга не поперѣбла столько, какъ Начала отъ издательей и переводчиковъ, которые по видимому спарались непрерывъ одинъ передъ другимъ опуступать отъ подлинника, перемѣнять самыя лучшія мѣста, которые не могутъ быть иначе помѣщены и выражены, дополнять оныя предмѣтами ни мало не относящимися къ Началамъ, и находить ошибки, дѣйствительно существующія только въ собственныхъ ихъ понятіяхъ. Дабы въ семъ увѣришься, довольно будетъ разсмотрѣть при

перевода, кои мы уже имѣемъ. (*) Каждый изъ нихъ, а особливо послѣдній, можетъ назваться хорошою Геометрическою книгою; но ~~ни одинъ не можно~~ называть Эвклидовыми Началами; ибо въ нихъ сдѣлано столько перемѣнъ, прибавленій, и проч., что едва оставлена тѣнь подлинника.

Настоящее изданіе есть переводъ съ подлинника напечатаннаго въ Оксфордѣ (**), кромѣ весьма не многихъ прибавленій и поправокъ очевидныхъ онаго погрѣшностей. Все прочее оставлено неприкосновеннымъ, чтобы любителямъ Магематическихъ наукъ доставить удовольствіе имѣть Эвклида въ собственной такъ сказать одеждѣ, особливо же потому, что Начала сїи и донынѣ превосходятъ все, что въ семь родѣ ни писано было, какъ по краткости, ясности и точности, такъ по содержанію предмѣтовъ и удивительному порядку. » Тщетно спарались,

(*) 1. Сашарова, съ Латинскаго, 1739.

2. Курганова, съ Французскаго, 1769.

3. Суворова и Никипина, съ Греческаго, 1784.

(**) Euclidis, quæ supersunt omnia, Oxoniæ, 1703.

говоришь Монтукла, разные Геометры, коимъ не нравилось Эвклидово расположение, перемѣнили оное, не ослабивъ силы доказательства. Безсильныя ихъ покушенія доказали, сколь трудно замѣнить порядокъ симъ древнимъ Геометромъ изображенный другимъ порядкомъ сколько же точнымъ. Таково было мнѣнiе славнаго Лейбница, коего знаменитость въ семъ дѣлѣ должна имѣть полный вѣсъ; и Г. Вольфъ, объявляющій намъ сiе, признается, что онъ напрасно усиливался привести Геометрическiя истинны въ совершеннѣйшiй порядокъ, и что сего сдѣлать не возможно не предполагая того что не было еще доказано, или не ослабивъ твердости доказательства. Англiйскiе Геометры, которыя кажутся болѣе другихъ соблюли вкусъ къ Геометрической точности, были всегда такого мнѣнiя, и Эвклидъ имѣетъ между ими ревностныхъ защитниковъ въ разныхъ искусныхъ Геометрахъ. Въ Англiи менѣе расшодилось сего рода сочиненiй, которыя облегчаютъ путь къ сей наукѣ помямо ослабляя оную. Тамъ руководствуясь почти однимъ Эвклидомъ; и однакожь тамъ всегда довольно Геометровъ.

« Упрекъ дѣлаемый Эвклиду въ несоблюденіи порядка заставляющъ меня войти въ нѣкоторыя разсужденія о томъ порядкѣ, къ коему новыя Авторы Геометріи спользуются приспирасны, и о неудобствахъ отъ него произходящихъ. Можно ли назвать истиннымъ порядкомъ тотъ, который заставляетъ нарушать существеннѣйшую принадлежность Геометріи, я разумѣю сію строгость доказательства, которая одна токмо можетъ заставитьъ разумъ убѣдиться отвлеченными истиннами. Между тѣмъ нѣтъ ничего обыкновеннѣе у помануемыхъ Авторовъ, какъ нарушеніе Геометрической точности. Имъ непремѣнно нужно было опуститъ до того, чтобы не начинать о какомъ либо родѣ пропязенностей, пока не изложено будетъ о другомъ прослѣдующемъ, и они любили лучше доказать въ половину, то есть вовсе не доказать, нежели нарушитъ мнимый порядокъ, коимъ они ослѣплены. Мы же кажемся нѣкоторымъ родомъ ребячества на привычку, чтобы не говорить, на примѣръ, прежде о треугольникахъ, пока не будетъ все сказано о линіяхъ и объ углахъ..... Я даже не боюсь сказать еще, что сей любимый

порядокъ стѣняется разумъ, и приучаетъ къ ходу прошивному тому, чрезъ который открывающіяся истинны » (*).

Сіе мнѣніе знаменитаго Историка можетъ служить опроверженіемъ на всѣ возраженія противъ порядка Эвклидомъ наблюдаемаго, и доказательствомъ, что предметъ Геометріи не требуетъ столько по видимому естественнаго раздѣленія на Геометрію линий, Геометрію поверхностей и Геометрію тѣлъ, ибо раздѣленіе сіе несовмѣстно съ Геометрическимъ порядкомъ, коего сущность состоитъ въ томъ, чтобы предлагаемое ученіе выводило изъ несомнительныхъ основаній и посредствомъ умозаключеній убѣждающихъ разумъ.

Сверхъ возраженій противъ порядка Началь вообще, есть еще нѣкоторыя противъ особенныхъ частей оныхъ. Важнѣйшія изъ нихъ суть слѣдующія :

Первое. Одиннадцатая аксіома, говорятъ, не есть аксіома, а теорема, и слѣдовательно должна быть помѣщена между предложеніями, и доказана. Нельзя не согласиться, что аксіома сія тамъ, гдѣ она

(*) Histoire des Mathématiques, par J. F. Montucla, an VII, tom. I, pag. 205.

помѣщена, не столь ясна, или лучше сказать не столь убѣдительно, какъ прочія аксіомы. Но если замѣнимъ, что она въ первый разъ употреблена Эвклидомъ въ доказательствѣ предложенія 29, и что она послѣ 28 дѣлается почти очевидно: то сіе возраженіе перестаетъ быть важнымъ; нѣтъ паче, что сей теоремы еще никто не доказалъ совершенно удовлетворительно.

Второе. Эвклидъ, говоря, нѣкопорымъ предложеніямъ положилъ доказательства не на всѣ случаи, каковы Кн. I, предл. 7, 24, 25, и другія. Болѣе нежели вѣроятно, что Эвклидъ зналъ всѣ случаи, но помѣстилъ оныхъ не хотѣлъ. Ибо для чего бы, на примѣръ, ему помѣщать вторую часть предложенія 5, гдѣ сказано: » а по продолженіи равныхъ прямыхъ и углы подъ основаніемъ взаимно равны, » если бы онъ не зналъ, что безъ того не можно доказать вѣдимаго случая предложенія 7? Разсматривая съ нѣкопорымъ вниманіемъ всѣ таковыя предложенія, легко видѣть, что Эвклидъ излагалъ и доказывалъ только общіе случаи, и что прочіе могутъ быть доказаны, или на основаніи оныхъ, или посредствомъ предъидущихъ предложеній; и слѣдовательно Эвклидъ

думалъ, что въ Началахъ, доказавъ общіе случаи, нѣтъ нужды доказывать частные. Впрочемъ, что бы сдѣлать въ семъ отношеніи наспоящее изданіе полнымъ, мы помѣстили сіи случаи въ прибавленіяхъ, оставляя на волю каждаго счищать оныя или нужными или токмо полезными.

Третье. Теорію величинъ пропорціональныхъ Эвклидомъ предлагаемую находятъ слишкомъ отвлеченною и трудною; и въ семъ заключается одна изъ важнѣйшихъ причинъ, почему Начала не имѣютъ столь обширнаго употребленія, какъ по изящности оныхъ ожидать бы должно. Изъ примѣчаній на главныя опредѣленія сей теоріи (*) легко видѣть, что въ ней нѣтъ ничего слишкомъ отвлеченнаго, кромѣ, можетъ быть, опредѣленія 3, которое впрочемъ, какъ самые строгіе крипики признаются, никакого вліянія не имѣетъ на самую теорію, ибо оное (опредѣленіе) даже вовсе оставить можно. Что касается до трудности, то она не раздѣльна съ самымъ предметомъ: припомъ же сія трудность не такъ велика, чтобы начинающимъ преодо-

(*) Смол. стран. 433 — 438.

лѣтъ оную было невозможно. Какъ бы то ни было, но новѣйшіе сочинители Геометрическихъ книгъ почти всѣ оставили Эвклидову теорію, и замѣнили оную Арифметическою, нѣкоторые частною, то есть однихъ токмо цѣлыхъ чиселъ, а нѣкоторые немногіе общею, въ коей подразумѣваются дроби и такъ называемыя несоизмѣримыя числа. Они принимаютъ, что поелику протяженности въ общихъ правилахъ сей теоріи имѣютъ съ числами одинакія свойства, (что однакожь извѣстно изъ Эвклидовой же теоріи); и поелику оныя можно изобразить или предположить изображенными въ числахъ; то и поступаютъ съ ними какъ съ настоящими числами, то есть умножаютъ, дѣлятъ, возвышаютъ, и проч. Безъ сомнѣнія протяженности и числа какъ величины вообще необходимо имѣютъ одинакія свойства; но поелику Арифметическая теорія пропорцій изслѣдуетъ свойства чиселъ, какъ чиселъ токмо, а не какъ величинъ, то заключають онь чиселъ ко всѣмъ вообще величинамъ не значить ли заключають онь частнаго къ общему, и слѣдовательно поступаютъ противно здравой логикѣ? припомъ можно ли поступать съ протяженностями какъ съ числами, не

показавъ, какъ ихъ изображать числами? наконецъ, кпо доказавъ, что всякая пропорциональность непременно изобразится какимъ либо числомъ? Изъ сего явствуетъ, что обыкновенная то есть Арифметическая теорія пропорцій совершенно недоспащна, ибо она нарушаетъ главнѣйшее и необходимое качество Магематики, точность. Сему возраженію не подлежитъ теорія Гурьева; но и она уступаетъ Евклидовой нѣмъ, что въ сей послѣдней нѣтъ раздѣленія величинъ на соизмѣримыя и несоизмѣримыя, которое влечетъ за собою длинноты и трудноты. Не говоря уже о томъ, что сіе раздѣленіе собственно принадлежитъ къ Арифметикѣ, въ коей Геометрія, какъ говоритъ и самъ Гурьевъ, не имѣетъ никакой нужды (*).

Четвертое. Упрекаютъ также Евклида въ томъ, что доказательство его на нѣкоторыя предложенія Кн. XI и XII трудны. Правда, что оныя не такъ удобны, какъ на примѣръ, продолженія Кн. I; но сія трудность, какъ и въ теоріи пропорцій, зависитъ отъ сущности предмѣта, а не отъ порядка или вида доказательства. Въ семъ

(*) Опытъ о усовершенствованіи Елементовъ Геометріи, стр. 175.

легко увѣриться, сравнивъ Эвклидовы доказательства съ обыкновенными. Первые ясны, почны и вообще не подлежатъ никакому возраженію; напротивъ того послѣднія утверждаются на основаніяхъ, или темныхъ или вовсе несправедливыхъ. Ибо нельзя не назвать таковыми тѣ, въ коихъ допускается: что линіи состоятъ изъ точекъ, поверхностей изъ линій, а тѣла изъ поверхностей; что около круга описанный многоугольникъ, имѣющій бесконечно многія и бесконечно малыя стороны, равенъ кругу; что паралельныя линіи въ бесконечномъ разстояніи встрѣчаются, и проч. И еслии справедливо утверждаютъ Даламбертъ и Гурьевъ, что чѣмъ выводъ спроче, тѣмъ онъ къ уразумѣнію удобнѣе; то должно также согласиться и въ томъ, что не Эвклидовы доказательства пруднѣе обыкновенныхъ, но обыкновенныя Эвклидовыхъ.

Прочія возраженія, имѣющія какое либо основаніе, разсмотрѣны въ Прибавленіяхъ; и потому на семь оспанавливаясь болѣе не будемъ.

О примѣчаніяхъ и прибавленіяхъ замѣтивъ должно, что часть оныхъ помѣщена для пополненія и поясненія Началь, часть для соображенія нѣкопыхъ мнѣній извѣстныхъ Геометровъ и полковашелей.

Эвклида, а часть для удобнѣйшаго уразумѣ-
 нія прочихъ древнихъ Геометровъ, а особливо
 Архимеда и Аполлонія; и вообще большая
 оныхъ часть помѣщена какъ полезныя, а
 не какъ нужныя. Въ числѣ ихъ не находящися
 нѣкоторые предложенія относящіяся къ
 кругу, цилиндру, конусу и шару, попому
 что предполагается издашь въ слѣдъ за
 симъ три книги Архимеда, а именно:
 двѣ о Шарѣ и Цилиндрѣ (*περὶ Σφαιρῶν
 καὶ Κυλίνδρων*) и одну о Измѣреніи круга
 (*Κύκλου Μέτρησις*).

Наконецъ въ разсужденіи самаго перевода
 издатель считаетъ за нужное предваришь
 читателей — Геометровъ, что онъ спарал-
 ся столько приближась къ подлиннику,
 сколько свойство Россійскаго языка позво-
 ляло, и что по сему точность выраженія и
 порядокъ мыслей предпочитаемы были
 красотѣ и плавности слога.

ЭВКЛИДОВЫХЪ

www.libtool.com.cn

НАЧАЛЪ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Точка есть то, что не имѣетъ никакой части.

2. Линія есть длина безъ ширины.

3. Концы же линіи суть точки. (1).

4. Прямая линія есть та, копорая ле-
житъ равно своими точками. (*Εὐθεία γραμ-
μή ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις
κείται.*) (2).

5. Поверхность есть то, что только
длину и ширину имѣетъ.

6. Концы же или края поверхности суть
линіи. (1).

7. Плоская поверхность или плоскость есть та, которая лежитъ равно своими прямыми линіями. (3)

8. Плоскій уголъ есть взаимное наклоненіе двухъ линій, на плоскости встрѣчающихся и не впрямъ лежащихъ.

9. Когда же линіи, содержащія уголъ суть прямыя, то уголъ называется прямолинейнымъ.

10. Когда прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные: то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ; а поставленная прямая называется перпендикулярною или отвѣсною къ той, на которую поставлена.

11. Тупой уголъ есть тотъ, который больше прямого.

12. А острый, который меньше прямого.

13. Предѣлъ есть край или конецъ чего ни есть.

14. Фигура есть то, что содержится въ какомъ или въ которыхъ предѣлахъ.

15. Кругъ есть плоская фигура, содержащая одною линіею называемой окружностію, къ которой всѣ прямыя исходящія отъ одной изъ точекъ, внутрь сей фигуры лежащихъ, взаимно равны.

16. И сѣя точка называется ценпромъ или средоточіемъ круга. (4).

17. Поперечникъ же круга есть всякая прямая чрезъ ценпръ проведенная, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностію круга; и таковая прямая дѣлитъ кругъ пополамъ. (5).

18. Полукружіе есть плоская фигура, содержащая поперечникомъ и частію окружности, опнимаемой симъ поперечникомъ.

19. Опрѣзокъ круга есть плоская фигура, содержащая прямою линією и частію окружности.

20. Прямолинейныя фигуры суть тѣ, кои содержатся прямыми линіями.

21. Изъ нихъ, треугольники суть тѣ, кои содержатся тремя.

22. Четыреугольники же, кои четырьмя.

23. А многоугольники, кои содержатся больше нежели четырьмя прямыми линіями.

24. Изъ треугольниковъ, равноспоронный есть тотъ, который имѣетъ всѣ три спороны равныя.

25. А равнобедренный, который имѣетъ двѣ только спороны равныя.

26. Разноспоронный же, который имѣетъ всѣ три спороны неравныя.

27. Сверхъ того изъ преугольниковъ же, прямоугольный естъ шопъ, копорый имѣеть прямой уголъ.

28. А тупоугольный, копорый имѣеть тупой уголъ.

29. Остроугольный же, копорый имѣеть всѣ при угла острые.

30. Изъ чепыреугольниковъ, квадратъ естъ шопъ, копорый и равноспоронный и прямоугольный.

31. Продолговатый же прямоугольникъ или проспо прямоугольникъ, шопъ, копорый естъ прямоугольный, но не равноспоронный.

32. А ромбъ, копорый естъ равноспоронный, но не прямоугольный.

33. И ромбоидъ, копорый, имѣя взаимно равными прошивулежащія и спороны и углы, не естъ ни равноспоронный, ни прямоугольный.

34. Прочія же чепыреспоронныя фигуры назовемъ трапеціями.

35. Параллельныя прямая суть тѣ, кои будучи на тойже плоскости, и продолженныя на обѣ спороны безпредѣльно, нигдѣ взаимно не вепрѣчаются.

« 36. Параллелограммъ естъ чепыреуголь-

никъ, коего пропигулежащія спороны взаимно параллельны. » (6)

www.libtool.com.cn

ТРЕБОВАНІЯ.

1. Требуеѣся чѣобы можно, отъ всякой точки до всякой другой проводить прямую линію.

2. Опреѣленную прямую продолжатъ впрямъ непрерывно.

3. Изъ всякаго центра, всякимъ разстояніемъ, писать кругъ. (7)

АКСІОМЫ ИЛИ ОБЩІЯ ПОНЯТІЯ.

1. Равныя тому же, суть и взаимно равны.

2. Если къ равнымъ приложены равныя, то и цѣлыя равны.

3. Если отъ равныхъ отняты равныя, то и остатѣки равны.

4. Если къ неравнымъ приложены равныя, то и цѣлыя неравны.

5. Если отъ неравныхъ отняты равныя, то и остатѣки неравны.

6. Двукрапныя того же, суть взаимно равны.

7. Половины того же, суть взаимно равны.

8. Совмѣщающіяся взаимно, суть взаимно равны.

9. Цѣлое больше своей части.

10. Всѣ прямые углы взаимно равны. (8)

11. Если на двѣ прямыхъ падаеиъ прѣпья прямая, и дѣлаеиъ углы внутрѣнные и по ту же сторону меньше двухъ прямыхъ; то онѣя двѣ прямая линіи, продолженныя безпредѣльно, взаимно встрѣтятся по ту сторону, по которую углы меньше двухъ прямыхъ.

12. Двѣ прямая не заключающъ пространства.

↓ ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

На данной опредѣленной прямой, составиъ равноспоронный треугольникъ.

Пусть будеиъ АВ данная опредѣленная прямая. Надлежиъ на опредѣленной прямой АВ составиъ равноспоронный треугольникъ.

Изъ центра А, разстоянїемъ АВ, напиши *пр.3. кругъ ВСD*; и еще изъ центра В, разстоянїемъ ВА, напиши кругъ АСЕ; и отъ точки С, въ которой круги взаимно пересекаются, къ точкамъ А, В протяни прямая СА, СВ*.

Поелику точка А есть центръ круга *опр.18. ВСD, то АС равна АВ*; еще же, поелику

точка В есть центръ круга АСЕ, то ВС равна ВА. А доказано, что и СА равна АВ, посему каждая изъ прямыхъ СА, СВ равна АВ. Но равныя помуже, суть и взаимно равны*; по сему и СА равна СВ. Чего ради *акс.1. при СА, АВ, ВС взаимно равны.

Итакъ преугольникъ АВС есть равно-
 споронный*, и соспавленъ на данной опре- *опр.24.
 дѣленной прямой АВ. Что и сдѣлать над-
 лежало.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Приданной точкѣ положишь прямую равную данной прямой.

Пусть будетъ А данная точка, и ВС данная прямая. Надлежитъ при точкѣ А положить прямую равную прямой ВС.

Протяни отъ точки А до точки В прямую АВ*, и соспавь на ней равноспоронный *пр.1. преугольникъ DAB*; и впрямь съ DA, DB *пр.1. продолжи прямые AE, BF*; изъ центра В, *пр.2. разстояніемъ ВС, напиши кругъ CGH*; и *пр.3. еще изъ центра D, разстояніемъ DG, напиши кругъ GKL.

Поелику точка В есть центръ круга CGH, то ВС равна BG*. Еще же, поелику точка *опр.15.

Если центръ круга GKL , то DL равна DG : но въ нихъ DA равна DB ; посему
 *акс.3. осталая AL равна остальной BG *. А до-
 казано, что и BC равна BG ; посему каждая
 изъ прямыхъ AL , BC равна BG . Но равныя
 акс.1. пому же, сущь и взаимно равны; посему
 AL равна BC .

Итакъ при данной точкѣ A положена
 прямая AL равная данной прямой BC .
 ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Изъ двухъ данныхъ прямыхъ неравныхъ,
 оиъ большей опианть прямую равную
 меньшей.

Пусть будутъ AB , C двѣ данныя прямыя
 неравныя, изъ коихъ AB пусть будетъ боль-
 шая. Надлежитъ оиъ большой AB опианть
 прямую равную меньшей C .

При точкѣ A положи прямую AD равную
 *пр.2. C *; и изъ центра A , распоянѣмъ AD , на-
 *пр.3. пиши кругъ DEF *.

Поелику почка A естъ центръ круга
 *опр.15. DEF , то AE равна AD *; но и C равна AD :
 чего ради каждая изъ прямыхъ AE , C равна
 AD ; слѣдственно и AE равна C .

Ипакъ, изъ двухъ данныхъ прямыхъ неравныхъ АВ, С, опъ большей АВ опнипа прямая АЕ равная меньшей С. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ІV.

Ежели два преутольника имѣють двѣ спороны равныя двумъ споронамъ, каждую каждой; и одинъ уголь равный одному углу, а именно, кои содержащяся сими равными прямыми; то и основаніе будущъ имѣть равное основанію; и преутольникъ будеть равенъ преутольнику; и прочіе углы будущъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивулежащъ равнымъ споронамъ.

Пусть будущъ АВС, DEF два преутольника, имѣющіе двѣ спороны АВ, АС равныя двумъ споронамъ DE, DF, каждую каждой, а именно, АВ равную DE, а АС равную DF; и уголь ВАС равный углу EDF. Говорю, что и основаніе ВС равно основанію EF; и преутольникъ АВС будеть равенъ преутольнику DEF; и прочіе углы будущъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивулежащъ равнымъ споронамъ, а именно, уголь АВС углу DEF, а уголь АСВ углу DFE.

Ибо, естли помѣспитъ преутольникъ

ABC на треугольник DEF; и полжипъ точку A на точку D, а прямую AB на прямую DE: то и точка B совмѣстится съ точкою E, поелику AB равна DE. Когда же AB совмѣстилась съ DE, то и прямая AC совмѣстится съ прямою DF, поелику уголъ BAC равенъ углу EDF: слѣдственно и точка C совмѣстится съ точкою F, поелику еще AC равна DF. Но и B совмѣстилась съ E; слѣдственно основаніе BC совмѣстится съ основаніемъ EF. А буде, по совмѣщеніи B съ E а C съ F, основаніе BC не совмѣстится съ основаніемъ EF: то двѣ прямыя за-
 акс. 12. ключапъ проспиранспво, что не возможно.

Чего ради основаніе BC совмѣстится съ
 акс. 8. основаніемъ EF, и будетъ равно ему; слѣдственно и цѣлый треугольникъ ABC совмѣстится съ цѣлымъ треугольникомъ DEF и будетъ ему равенъ; и прочіе углы совмѣстятся съ прочими углами и будутъ равны имъ, а именно, уголъ ABC углу DEF, и уголъ ACB углу DFE.

Итакъ, ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; и одинъ уголъ равный одному углу, а именно, кои содержатся сими равными прямыми: то и основаніе будетъ имѣть

равное основанію; и шреугольникъ будетъ равенъ шреугольнику; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждыи каждому, кои прошивулежащъ равнымъ споронамъ. Что и доказать надлежало.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Равнобедренныхъ шреугольниковъ углы при основаніи взаимно равны; и есѣли продолжитъ равныя прямыя, то и углы подъ основаніемъ взаимно равны.

Пусть будетъ ABC равнобедренный шреугольникъ, имѣющій спорону AB равную споронѣ AC; и пусть впрямъ съ AB, AC будутъ продолжены прямыя BD, CE*. Говорю, *пр.2. что уголъ ABC равенъ углу ACB, а уголъ CBD углу BCE.

Возьми на BD какую ниесѣ точку F; и отъ большей AE опиши прямую AG равную меньшей AF*; и пропни прямыя FC, GB. *3.

Поселику AF равна AG, а AC равна AB; то двѣ прямыя FA, AC равны двумъ прямымъ GA, AB, каждая каждой, и содержащъ онѣ уголъ FAG общій: посему* основаніе FC *4. равно основанію GB; и шреугольникъ AFC будетъ равенъ шреугольнику AGB; и прочіе

углы будущъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивиулежащъ равнымъ споронамъ, а именно, уголь ACF углу ABG , а уголь AFC углу AGE . И поелику цѣлая AF равна цѣлой AG ; и въ нихъ AB равна AC : посему оспальная BF равна оспальной

*акс.3. CG . А доказано, что и FC равна GB ; посему двѣ прямыя BF , FC равны двумъ прямымъ CG , GB , каждая каждой; и уголь BFC равенъ углу CGB ; а основаніе ихъ общее BC : чего ради и треугольникъ BFC будещъ равенъ треугольнику CGB ; и прочіе углы будущъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивиулежащъ равнымъ споронамъ; посему уголь FBC равенъ углу GCB , а уголь BCF углу CBG . Поелику же цѣлый уголь ACF , по доказанному равенъ углу ABG ; и въ нихъ уголь BCF равенъ углу CBG : посему оспальной

*акс.3. уголь ACB равенъ оспальному ABC ; и они при основаніи треугольника ABC . А доказано, что и уголь FBC равенъ углу GCB ; и они суть подъ основаніемъ:

Итакъ равнобедренныхъ треугольниковъ, и проч. ч. и д. н. (9).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели треугольника два угла взаимно равны; то и равнымъ угламъ пропивиу-

лежащія спороны будупъ взаимно равны.

Пусть будетъ ABC треугольникъ, имѣющій уголъ BCA равный углу CBA . Говорю, что и спорона AC равна споронѣ AB .

Ибо, буде AB не равна AC ; то одна изъ нихъ большая. Пусть будетъ AB большая. Отъ большей AB отними BD равную меньшей AC ; и пропни DC . *3.

Поелику DB равна AC , а BC общая; то двѣ прямыя DB , BC равны двумъ прямымъ AC , CB , каждая каждой; и уголъ DBC равенъ углу ACB : посему* основаніе DC равно основанію AB ; и треугольникъ ABC будетъ равенъ треугольнику DCB , меньшему большій, что нелѣпо. Чего ради AB не будетъ неравна AC ; слѣдственно равна. *4.

Итакъ, ежели треугольника, и проч. ч. и д. н. (10).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

На поуже прямой, отъ двухъ различныхъ по ту же спорону лежащихъ точекъ, не могутъ быть составлены двумъ прямымъ другія двѣ прямыя равныя, каждая каждой, и окончивающіяся вмѣстѣ съ первыми прямыми.

Ибо, буде возможно, пусть на тойже прямой АВ, опъ двухъ различныхъ по ту же спорону лежащихъ точекъ С и D, будущъ соснавлены двумъ прямымъ АС, СВ другія двѣ прямыя АД, DB равныя, каждая каждой, и оканчивающіяся въ А, В вмѣстѣ съ первыми прямыми: такъ что СА будетъ равна DA, оканчиваясь вмѣстѣ съ нею въ точкѣ А, а СВ равна DB оканчиваясь вмѣстѣ съ нею въ точкѣ В; и пропяти CD.

Поелику АС равна АД; то уголъ АСD *5. равенъ углу ADC*: поему уголъ ADC больше *акс.3. угла DCB*; а поему уголъ CDB гораздо больше угла DCB. Еще же, поелику СВ равна DB; то уголъ CDB равенъ углу DCB: а по доказанному гораздо больше; что невозможно. (11)

Ипакъ на тойже прямой, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой, и основаніе равное основанію: то и уголъ будущъ имѣть равный углу, а именно, кои содержатся пѣми равными прямыми.

Пусть будущъ ABC, DEF два треугольника, имѣющіе двѣ спороны АВ, АС равныя

двумъ споронамъ DE , DF , каждую каждой, а именно, AB равную DE , а AC равную DF ; и основаніе BC равное основанію EF . Говорю, что и уголъ BAC равенъ углу EDF .

Ибо, еспли помѣстимъ преугольникъ ABC на преугольникъ DEF ; и положимъ точку B на точку E , а прямую BC на прямую EF : то точка C совмѣстится съ точкою F , поелику BC равна EF . Когда же BC совмѣстилась съ EF ; то и прямая BA , AC совмѣстятся съ прямыми ED , DF . А буде, по совмѣщеніи основанія BC съ основаніемъ EF , спороны BA , AC не совмѣстятся съ споронами ED , DF , но примутъ другое положеніе, какъ EG , GF : то будутъ соспавлены на тойже прямой, отъ двухъ различныхъ по ту же сторону лежащихъ точекъ, двумъ прямымъ другія двѣ прямая равныя, каждая каждой, и оканчивающіяся вмѣстѣ съ первыми прямыми. Но онѣ не могутъ быть соспавлены*: посему, когда *7. основаніе BC совмѣстилось съ основаніемъ EF , не могутъ не совмѣститься спороны BA , AC съ споронами ED , DF : слѣдственно совмѣстятся. Чего ради и уголъ BAC совмѣстится съ угломъ EDF и будетъ равенъ ему*.

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н.

www.libtool.com.cn

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Данный прямолинейный уголъ раздѣлить по поламъ.

Пусть будетъ ВАС данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ сей уголъ раздѣлить по поламъ.

Возьми на АВ какую ниесъ точку D; и *3. отъ АС опиши прямую АЕ равную AD*; и пропни DE; и составь на DE равноспоронный *1. треугольникъ DEF*; и пропни АF. Говорю, что уголъ ВАС раздѣленъ по поламъ прямою АF.

Послику AD равна АЕ, а АF общая; то двѣ прямыя DA, АF равны двумъ прямымъ EA, АF, каждая каждой; и основаніе DF равно основанію EF: посему уголъ DAF равенъ углу EAF*.

Итакъ данный прямолинейный уголъ ВАС раздѣленъ по поламъ прямою АF. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Данную опредѣленную прямую раздѣлить по поламъ.

Пусть будетъ АВ данная опредѣленная прямая. Надлежитъ прямую АВ раздѣлить по поламъ.

www.libtool.com.cn

Составь на ней равноспоронный преутольникъ АВС*; и раздѣли уголь АСВ по *1. поламъ прямою СD*. Говорю, что прямая *9. АВ раздѣлена по поламъ въ точкѣ D.

Поселику АС равна СВ, а СD общая; то двѣ прямыя АС, СD равны двумъ прямымъ ВС, СD, каждая каждой; и уголь АСD равенъ углу ВСD: посему основаніе AD равно основанію BD*.

*4.

Итакъ данная опредѣленная прямая АВ раздѣлена по поламъ въ точкѣ D. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Къ данной прямой, опъ данной на ней точки, провести подъ прямыми углами прямую линію.

Пусть, будетъ АВ данная прямая, а С данная на ней точка. Надлежитъ опъ точки С прямой АВ, провести подъ прямыми къ ней углами, прямую линію.

Возьми на АС какую ниестъ точку D; и положи прямую СЕ равную СD*; и соспавь *3. на DE равноспоронный преутольникъ FDE*; *1. и прокляни ЕС. Говорю, что къ данной

прямой АВ, опъ данной на ней точки С, проведена подъ прямыми углами прямая линія СF.

Поелику CD равна CE, а CF общая; по двѣ прямыя DC, CF равны двумъ прямымъ ЕС, CF, каждая каждой; и основаніе DF равно основанію EF: по сему уголъ DCF равенъ *8. углу ECF*; и они супъ смѣжные. Когда же прямая, поспавленная на другую прямую, дѣлаесть смѣжные углы взаимно равные; по каждый изъ равныхъ угловъ называется *опр. 10. прямымъ*: по сему каждый изъ угловъ DCF, ECF есть прямой.

Итакъ, къ данной прямой АВ, опъ данной на ней точки С, проведена подъ прямыми углами прямая линія FC. ч. и с. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XII.

Къ данной неопредѣленной прямой, опъ данной въѣ ея точки, проведши перпендикулярную прямую линію.

Пусть будетъ АВ данная неопредѣленная прямая, а С данная въѣ ея точка. Надлежишь къ данной неопредѣленной прямой АВ, опъ данной въѣ ея точки С, проведши перпендикулярную прямую линію.

Возьми, по другую сторону прямой АВ, какую ниешь точку D; и изъ центра С, разстояніемъ CD, напиши кругъ EFC*; и *пр.3. раздѣли прямую EG по поламъ въ точкѣ Н*; и пропни CG, CH, CE. Говорю, что *10. къ данной неопредѣленной прямой АВ, отъ данной въѣ ея точки С, проведена перпендикулярная СН.

Поелику GH равна HE, а HC общая; то двѣ прѣмыя GH, HC равны двумъ прѣмымъ HE, HC, каждая каждой; и основаніе CG равно основанію CE: посему уголъ CHG равенъ углу EHC*; и они суть смѣжные: *8. Когда же прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные; то каждый изъ равныхъ угловъ называется прѣмымъ, а поставленная прямая называется перпендикулярною къ той на которую поставлена*:

*опр.10.

Итакъ на данную неопредѣленную прямую АВ, отъ данной въѣ ея точки С, проведена перпендикулярная СН. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Какъ бы прямая, на прямую поставленная, углы ни дѣлала; она сдѣлаетъ или два прѣмые, или равные двумъ прѣмымъ.

* *

Пусть прямая АВ, на прямую CD поставленная, дѣлаесть углы CBA, ABD. Говорю, что углы CBA, ABD или суть два прямые, или равны двумъ прямымъ.

Ибо, еслили уголъ CBA равенъ углу *опр. 10. ABD; то они суть прямые*. Еслили же нѣтъ; то проведи отъ точки В, подъ

11. прямыми углами къ CD, прямую BE. Посему углы CBE, EBD суть два прямые. И поелику уголъ CBE равенъ двумъ угламъ CBA, ABE; придай обще уголъ EBD: посему углы CBE,

акс. 2. EBD равны премоу CBA, ABE, EBD. Еще же, поелику уголъ ABD равенъ двумъ угламъ ABE, EBD; придай обще уголъ ABC: посему углы CBA, ABD равны премоу CBA, ABE, EBD. А доказано, что и углы CBE, EBD равны пѣмъ же премоу угламъ; а равныя поумже

акс. 1. суть и взаимно равны: посему углы CBA, ABD равны угламъ CBE, EBD. Но углы CBE, EBD суть два прямые: чего ради углы CBA, ABD равны двумъ прямымъ.

Ипакъ, какъ бы прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Ежели при какой ниесетъ прямой, и при точкѣ на ней, двѣ прямыя, не лежащія по

пуже спорону, дѣлають смѣжные углы равные двумъ прямымъ; то сѣи двѣ прямыя будутъ взаимно впрямъ.

Пусть при какой ниесѣ прямой АВ, и при почкѣ на ней В, двѣ прямыя ВС, ВD, не лежащія по пуже спорону, дѣлають смѣжные углы АВС, АВD равные двумъ прямымъ. Говорю, что ВD впрямъ съ СВ.

Ибо, буде ВD не впрямъ съ ВС; то пусть ВЕ будетъ впрямъ съ ВС.

Поелику прямая АВ поспавлена на прямую СВЕ; то углы СВА, АВЕ равны двумъ прямымъ*. Но и углы СВА, АВD равны *13. двумъ прямымъ; посему углы СВА, АВЕ равны угламъ СВА, АВD. Опними обще уголь СВА; посему оспальной уголь АВЕ равенъ оспальному АВD, меньшій большему; что невозможно. Чего ради ВЕ не впрямъ съ ВС. Подобно докажемъ, что ни другая какая ниесѣ прямая, кромѣ ВD: посему ВD есѣ впрямъ съ ВС.

Ипакъ, ежели при какой ниесѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV,

Ежели двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то сдѣлають прошивуположные углы взаимно равные.

Пусть двѣ прямыя АВ, СD взаимно пресѣкутся въ точкѣ Е. Говорю, что уголь АЕС равенъ углу DEB, а уголь СЕВ углу АЕD.

Поелику прямая АЕ, послѣвленная на прямую СD, дѣлаеть углы СЕА, АЕD; то
 13. углы СЕА, АЕD равны двумъ прямымъ,
 Еще же, поелику прямая DE, послѣвленная на прямую АВ, дѣлаеть углы АЕD, DEB; то углы АЕD, DEB равны двумъ прямымъ. А доказано, что и углы СЕА, АЕD равны двумъ прямымъ; посему углы СЕА, АЕD
 акс. 1. равны угламъ АЕD, DEB. Опними обще
 и 10. уголь АЕD; посему оспальной уголь СЕА
 акс. 2. равенъ оспальному DEB. Подобно докажется, что и уголь АЕD равенъ углу СЕВ.

Ипакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Откуда явствуетъ, что естли сколько ниесеть прямыхъ взаимно пресѣкутся; то сдѣлають около сѣченія углы равные чепыремъ прямымъ. (12).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Всякаго преутольника, ежели одна изъ сторонъ продолжена, внѣшній уголъ больше каждаго изъ внутреннихъ проптивулежащихъ угловъ.

Пусть будетъ ABC преутольникъ; и пусть будетъ продолжена одна его спорона BC къ D . Говорю, что внѣшній уголъ ACD больше каждаго изъ внутреннихъ проптивулежащихъ угловъ BAC , CBA .

Раздѣли AC по поламъ въ E *; и про-^{*10}птянувъ BE продолжи оную къ F ; и положи прямую EF равную BE *; и пропхни FC ; и^{*3} продолжи AC къ G .

Поелику AE равна EC , а BE равна EF ; по двѣ прямая AE , EB равны двумъ прямымъ CE , EF , каждая каждой; и уголъ BEA равенъ углу CEF , ибо сущъ проптивуположные*.^{*15} посему* основаніе AB равно основанію FC ; и^{*4} преутольникъ ABE равенъ преутольнику FEC ; и прочіе углы равны прочимъ угламъ каждый каждому, кои проптивулежатъ равнымъ споронамъ; посему уголъ BAE равенъ углу ECF . Но уголъ ECD больше угла ECF ; посему уголъ ACD больше угла BAE . Подобно же, раздѣливъ BC по поламъ, докажется, что

и уголъ BCG , по есть ACD больше и угла CBA .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Всякаго преугольника два угла, всячески перебранные, меньше двухъ прямыхъ.

Пусть будетъ ABC преугольникъ. Говорю, что преугольника ABC , два угла всячески перебранные, меньше двухъ прямыхъ.

Продолжи BC къ D .

Поелику преугольника ABC уголъ ACD есть внѣшній; по онъ больше внутрен-

*16. наго проптивулежащаго угла ABC *. Придай обще уголъ ACB ; посему углы ACD , ACB

*акс. 4. больше угловъ ABC , BCA *. Но углы ACD ,

13. ACB равны двумъ прямымъ; посему углы ABC , BCA меньше двухъ прямыхъ. Подобно докажемъ, что и углы BAC , ACB меньше двухъ прямыхъ; и также углы CAB , ABC .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Всякаго преугольника большая сторона проптивулежитъ большему углу.

Пусть будетъ ABC преугольникъ, имѣющій сторону AC больше стороны AB .

Говорю, что и угол ABC больше угла BCA .

Поскольку AC больше AB ; то положи AD равную AB^* ; и соедини BD . *3.

И поскольку треугольника BDC угол ADB есть внешний; то он больше внутреннего противолежащего угла DCB^* . А угол *16. ADB равен углу ABD^* , ибо сторона AB^* 5. равна стороне AD ; посему и угол ABD больше угла ACB : чего ради угол ABC гораздо больше угла ACB .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Всякаго треугольника большему углу противополжитъ большая сторона.

Пусть будетъ ABC треугольникъ, имѣющій уголъ ABC больше угла BCA . Говорю, что и сторона AC больше стороны AB .

Ибо, буде не такъ; то AC или равна AB , или меньше ея. Но AC не равна AB ; ибо уголъ ABC былъ бы равенъ углу BCA^* : а *5. онъ не равенъ; посему AC не равна AB . И AC не меньше AB ; ибо уголъ ABC былъ бы меньше угла BCA^* : а онъ не меньше; посему *18. AC не меньше AB . А доказано, что и ни равна: чего ради AC больше AB .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XX.

Всякаго треугольника двѣ стороны, всячески перебранныя, больше остальной.

Пусть будетъ ABC треугольникъ. Говорю, что треугольника ABC двѣ стороны, всячески перебранныя, больше остальной; а именно, BA, AC больше BC ; а AB, BC больше AC ; и BC, CA больше AB .

Продолжи BA къ точкѣ D ; и положи AD равную AC ; и соедини DC .

Поелику DA равна AC ; то уголъ ADC *5. равенъ углу ACD *: но уголъ BCD больше *акс.9. угла ACD *; посему уголъ BCD больше и угла ADC . И поелику BDC есть треугольникъ, имѣющій уголъ BCD большій угла CDB ; а большему углу прѣвивулежитъ *19. большая сторона*: посему DB больше BC . Но DB равна AB, AC : чего ради BA, AC больше BC . Подобно докажемъ, что и AB, BC больше CA ; а BC, CA больше AB .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXI.

Ежели на одной изъ сторонъ треугольника, опъ концовъ ея, будутъ составде-

ны внутри его двѣ прямыя: по соспавленныя прямыя будутъ меньше прочихъ двухъ споронъ ~~треугольника, но~~ ~~большій~~ ~~уголъ~~ ~~содержать~~ ~~будутъ~~.

Треугольника ABC на одной изъ споронъ BC, пусть отъ концовъ ея B, C, будутъ соспавлены внутри его двѣ прямыя BD, DC. Говорю, что BD, DC сунъ меньше прочихъ ~~треугольника~~ двухъ споронъ BA, AC; но содержащъ уголъ BDC большій угла BAC.

Продолжи BD къ E.

Поедику всякаго ~~треугольника~~ двѣ спороны больше оспальной*; по ~~треугольника~~ ^{*20,} ABE двѣ спороны AB, AE больше BE. Придай обще EC; посему BA, AC больше BE, EC*. ^{*акс. 4,} Ещеже, поелику ~~треугольника~~ CED двѣ спороны CE, ED больше CD; придай обще DB: посему CE, EB больше CD, DB. А доказано, что BA, AC больше самихъ BE, EC; чего ради BA AC гораздо больше BD, DC.

Ещеже, поелику всякаго ~~треугольника~~ виѣшній уголъ больше ~~внутри~~ ~~пропаву~~ ~~лежащаго~~*; по ~~треугольника~~ CDE виѣшній ^{*16,} уголъ BDC больше угла CED. Пошому же и ~~треугольника~~ ABE виѣшній уголъ CEB больше угла BAC. А доказано, что уголъ

$\angle BDC$ больше угла $\angle CEB$: чего ради угол $\angle BDC$ гораздо больше угла $\angle BAC$.

Итакъ, ежели на одной, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Изъ трехъ прямыхъ, равныхъ тремъ даннымъ прямымъ, составишь преутольникъ. Но надлежитъ двумъ изъ тѣхъ прямыхъ, всячески перебранныхъ, быть больше остальной.

Пусть будутъ A, B, C данныя три прямая, изъ коихъ двѣ, всячески перебранныя, пусть будутъ больше остальной: а именно, A, B больше C ; а A, C больше B ; и еще B, C больше A . Надлежитъ изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ A, B, C , составишь преутольникъ.

Изложи какую ниесъ прямую DE , опредѣленную при D , но неопредѣленную при E ; положи прямую DF равную A , прямую FG равную B , и прямую GH равную C ; изъ центра F , разстояніемъ FD , напishi кругъ DKL ; и еще изъ центра G , разстояніемъ GH , напishi кругъ KLH ; и пропхни KF, KG . Говорю, что изъ трехъ прямыхъ, равныхъ прямымъ A, B, C , составленъ преутольникъ KFG .

Поелику почка F есть центръ круга DKL ; то FK равна FD^* ; но и A равна FD ; посему *опр.15. FK равна A . Ещеже, поелику почка G есть центръ круга LKH ; то GK равна GH : но и C равна GH ; посему GK равна C . А FG равна B : чего ради три прямая KF , FG , GK равны тремъ A , B , C .

Итакъ, изъ трехъ прямыхъ KF , FG , GK , равныхъ даннымъ прямымъ A , B , C , составленъ треугольникъ KFG . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

При данной прямой, и при данной на ней точкѣ, составишь прямолинейный уголъ, равный данному прямолинейному углу.

Пусть будуще AB данная прямая, и A данная на ней почка; и DCE данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ при прямой AB , и при точкѣ на ней A , составишь прямолинейный уголъ, равный данному прямолинейному углу DCE .

Возьми на каждой изъ прямыхъ CD , CE какія ниестъ почки D , E ; и пропни DE ; и изъ трехъ прямыхъ, равныхъ тремъ прямымъ CD , DE , CE , составь треугольникъ AFG^* , *22. такъ чпобъ CD была равна AF , а CE равна AG , и DE равна FG .

Послику двѣ прямыя DC , CE равны двумъ
 прямымъ FA , AG , каждая каждой; и основа-
 ніе DE равно основанію FG : по. уголъ DCE
 8. равенъ углу FAG .

Ипакъ, при данной прямой AB , и при
 данной на ней точкѣ A , соспавленъ прямо-
 линейный уголъ FAG , равный данному пря-
 молинейному углу DCE . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Ежели два преугольника имѣютъ двѣ
 спороны равныя двумъ споронамъ, каждую
 каждой; а уголъ одного больше угла другого,
 а именно, кои содержащяся сими равными
 прямыми: по и основаніе одного будетъ
 больше основанія другаго.

Пусть будутъ ABC , DEF два преуголь-
 ника, имѣющіе двѣ спороны AB , AC равныя
 двумъ споронамъ DE , DF , каждую каждой;
 а именно, AB равную DE , а AC равную DF ;
 а уголъ BAC больше угла EDF . Говорю,
 что и основаніе BC больше основанія EF .

Поелику уголъ BAC больше угла EDF : по
 соспавь при прямой DE , и при точкѣ на
 *23. ней D , уголъ EDG равный углу BAC *; и по-
 ложи равную которой ни естъ изъ прямыхъ
 *3. AC , DF прямую DG *; и просяви GE , FG .

Поелику AB равна DE , и AC равна DG ; по двѣ прямая BA , AC равны двумъ прямымъ ED , DG , каждая каждой; и уголь BAC равенъ углу EDG : посему основаніе BC равно основанію EG *. Еще же, поелику DF равна *4. DG ; по уголь DFG равенъ углу DGF *: по *5. сему уголь DFG больше угла EGF ; а уголь EFG и гораздо больше угла EGF . И поелику треугольника EFG уголь EFG больше угла EGF ; а большаго углу прошивулежишь большая спора: посему спора EG больше *19. споры EF . Но EG равна BC ; чего ради и BC больше EF .

Итакъ, ежели двѣ споры, и проч. ч. и д. н. (15).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели два треугольника имѣютъ двѣ споры равныя двумъ спорамъ, каждую каждой; а основаніе одного больше основанія другаго: по и уголь одного будетъ больше угла другаго, а именно, кои содержащя пѣми равными прямыми.

Пусть будутъ ABC , DEF два треугольника, имѣющіе двѣ споры AB , AC равныя двумъ спорамъ DE , DF , каждую каждой; а именно, AB равную DE , а AC равную

DF; а основаніе BC пусть будетъ больше основанія EF. Говорю, что и уголь BAC больше угла EDF.

Ибо, буде не такъ; то онъ или равенъ ему, или меньше. Но уголь BAC не равенъ углу EDF; ибо основаніе BC было бы равно *4. основанію EF*: а оно не равно; посему уголь BAC не равенъ углу EDF. И не меньше его; ибо основаніе BC было бы меньше основанія *24. EF*: а оно не меньше; посему уголь BAC ни меньше угла EDF. Доказано же, что и ни равенъ: чего ради уголь BAC больше угла EDF.

Итакъ, ежели двѣ спороны, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Ежели два преугольника имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну спорону равную одной споронѣ, а именно, кои прилежащъ равнымъ угламъ, или коимъ прошивулежащъ равные углы: то и прочія спороны будутъ имѣть равныя прочимъ споронамъ, каждую каждой; и оспальной уголь равный оспальному углу.

Пусть будутъ ABC, DEF два преугольника, имѣющіе два угла ABC, BCA равные двумъ угламъ DEF, EFD, каждый каждому;

а именно, уголь ABC равный углу DEF , а уголь BCA углу EFD ; и одну сторону пускай имѣютъ равную одной споронѣ: и во первыхъ, кои прилежають равнымъ угламъ, то есть, спорону BC равную EF . Говорю, что и прочія спороны, будучь имѣють равныя прочимъ споронамъ, каждую каждой, а именно, AB равную DE , а AC равную DF ; и оспальной уголь BAC равный оспальному углу EDF .

Ибо, буде AB не равна DE ; то одна изъ нихъ большая. Пускай будетъ AB большая. Положи прямую BG равную DE ; и пропни-^{*3.} ни GC .

Поелику BG равна DE , а BC равна EF ; то двѣ прямыя BG , BC равны двумъ прямымъ DE , EF ; каждая каждой; и уголь GBC равенъ углу DEF : посему* основаніе GC равно основанію DF ; и треугольникъ GBC равенъ треугольнику DEF ; и прочіе углы будучь равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивулежають равнымъ споронамъ, а посему уголь BCG равенъ углу DFE . Но, по положенію, уголь DFE равенъ углу BCA : посему и уголь BCG равенъ углу BCA , меньшій большему; что невозможно. Чего ради AB не неравна DE ; слѣдственно равна:

Но и BC равна EF ; посему двѣ прямыя AB , BC равны двумъ прямымъ DE , EF , каждая каждой; и уголь ABC равенъ углу DEF : а
 4. посему основаніе AC равно основанію DF ; и
 оспальной уголь BAC равенъ оспальному EDF .

Но еще пусть будутъ спороны, пропивулежащія равнымъ угламъ, равныя; а именно, пусть будетъ AB равна DE . Говорю еще, что и прочія спороны будутъ равны прочимъ споронамъ, каждая каждой, а именно, AC равна DF , а BC равна EF ; и оспальной уголь BAC будетъ равенъ оспальному углу EDF .

Ибо, буде BC не равна EF ; то одна изъ нихъ большая. Пусть, буде возможно, BC будетъ большая. Положи прямую BH равную EF *; и протяни $АН$.

Поселику BH равна EF , а AB равна DE ; то двѣ прямыя AB , BH равны двумъ прямымъ DE , EF , каждая каждой; и содержатъ равные
 4. углы: посему основаніе $АН$ равно основанію DF ; и треугольникъ ABH равенъ треугольнику DEF ; и прочіе углы равны будутъ прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивулежатъ равнымъ споронамъ; а посему уголь BHA равенъ углу EFD . Но уголь EFD

равенъ углу $\angle BSA$: посему и уголъ $\angle BNA$ равенъ углу $\angle BSA$; по естѣ, ~~преугольника~~ $\triangle ABC$ уголъ вѣншнй $\angle BNA$ равенъ внутреннему прошивулежащему $\angle BSA$; что невозможно*. Чего ради *16. BC не неравна EF ; слѣдственно равна : Но и AB равна DE ; посему двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ DE, EF , каждая каждой ; и содержатъ равные углы : а посему* *4. основаніе AC равно основанію DF ; и ~~преугольни~~ $\triangle ABC$ равенъ ~~преугольнику~~ $\triangle DEF$; и остальной уголъ $\angle BAS$ равенъ остальному $\angle EDF$.

Итакъ , ежели два угла , и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Ежели на двѣ прямыя падаетъ прѣмъя прямая и дѣлаетъ накосъ лежащіе углы взаимно равные ; то онныя прямыя будутъ параллельны.

Пусть на двѣ прямыя AB, CD падаетъ прѣмъя прямая EF , и дѣлаетъ накосъ лежащіе углы $\angle AEF, EFD$ взаимно равные . Говорю , что прямая AB параллельна къ CD .

Ибо , буде не такъ ; то AB, CD продолженныя встрѣятся , или по ту сторону гдѣ BD , или по ту сторону гдѣ AC . Продолжи онныя , и пусть встрѣятся по ту сторону гдѣ BD , въ точкѣ G .

Треугольника GEF ви́шнй уголь AEF
 *16. больше ~~внутреннаго пропивиулежащаго~~ EFG *:
 но и равенъ ему; что невозможно. Посему
 AB , CD , продолженные, не встрѣятся по
 ту сторону, гдѣ BD . Подобно докажется,
 что и ни по ту сторону, гдѣ AC . А ни по
 копорую сторону не встрѣчающіяся прямая
 опр.35. суть параллельны: чего ради AB параллель-
 на къ CD .

Итакъ, ежели на двѣ прямая, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXVIII.

Ежели на двѣ прямая падаетъ третья пря-
 мая и дѣлаетъ ви́шнй уголь равный внут-
 реннему пропивиулежащему и по ту же спо-
 рону; или дѣлаетъ внутренние углы и по ту
 же сторону, равные двумъ прямымъ: то
 оня прямая будутъ взаимно параллельны.

Пусть на двѣ прямая AB , CD падаетъ
 третья прямая EF , и дѣлаетъ ви́шнй
 уголь EGB равный внутреннему пропивиуле-
 жащему и по ту же сторону углу GHD ; или
 пусть дѣлаетъ внутренние, и по ту же спо-
 рону, углы BGN , GHD равные двумъ прямымъ.
 Говорю, что AB параллельна къ CD .

Поелику уголь EGB равенъ углу GHD ; но
 *15. уголь BGE равенъ и углу AGN *: по сему уголь

AGH равенъ углу GHD; и они суть накосъ лежащiе: чего ради прямая АВ параллельна къ CD*. *27.

Еще же, поелику углы BGN, GHD равны двумъ прямымъ; а и углы AGH, BGN равны двумъ прямымъ*: по сему углы AGH, BGN *13. равны угламъ BGN, GHD. Опними обще уголь BGN; по сему оспальной уголь AGH равенъ оспальному GHD; и они суть накосъ лежащiе. Чего ради прямая АВ параллельна къ CD*. *27.

Ипакъ, ежели на двѣ прямая, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Ежели на параллельныя прямая падаетъ прямая: то она дѣлаетъ накосъ лежащiе углы взаимно равныя; и виѣшный уголь равный внутреннему пропивулежащему и по ту же сторону; и внутренние углы и по ту же сторону равны двумъ прямымъ.

Пусть на параллельныя прямая АВ, CD падаетъ прямая EF. Говорю, что она дѣлаетъ накосъ лежащiе углы AGH, GHD взаимно равныя; и виѣшный уголь BGE равный внутреннему пропивулежащему, и по ту же сторону, углу GHD; и внутренние и по ту же сторону, углы BGN, GHD равны двумъ прямымъ.

Ибо, буде уголъ AGH не равенъ углу GHD ; то одинъ изъ нихъ большій. Пусть будетъ AGH большій.

И поелику уголъ AGH больше угла GHD ; придай обще уголъ BGH : посему углы AGH , BGH больше угловъ BGH , GHD . Но углы

13. AGH , BGH равны двумъ прямымъ; посему углы BGH , GHD меньше двухъ прямыхъ. А прямая, неопредѣленно продолженная со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ,

акс. 11. вспрѣчаются; посему прямая AB , CD , неопредѣленно продолженная вспрѣнутся. Но онѣ не вспрѣчаются; ибо предполагаются параллельными: чего ради уголъ AGH не равенъ углу GHD ; слѣдственно равенъ.

*15. Но уголъ AGH равенъ углу EGB *; чего ради уголъ EGB равенъ углу GHD .

Придай обще уголъ BGH ; по сему углы EGB , BGH равны угламъ BGH , GHD . Но

13. углы EGB , BGH равны двумъ прямымъ; чего ради и углы BGH , GHD равны двумъ прямымъ.

Итакъ, ежели на параллельныя, и проч. ч. и д. н. (16).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Прямая, параллельная къ тойже прямой, сущъ и взаимно параллельны.

Пусть будетъ каждая изъ прямыхъ АВ, СD параллельна къ прямой ЕF. Говорю, что и АВ параллельна къ СD.

Ибо, пусть на оныя прямыя, падаетъ прямая GK.

Поелику на параллельныя прямыя АВ, ЕF падаетъ прямая GK; то уголъ AGH равенъ углу GHF*. Еще же, поелику на параллельныя прямыя ЕF, СD падаетъ прямая GK; то уголъ GHF равенъ углу GKD*. А доказано, что уголъ AGK равенъ углу GHF: посему уголъ AGK равенъ углу GKD; и они суть на-
 кось лежащіе. Чего ради прямая АВ параллельна къ СD*.

*27.

Ипакъ прямыя параллельныя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Черезъ данную точку проведи прямую, параллельную къ данной прямой.

Пусть будетъ А данная точка, а ВС данная прямая. Надлежитъ черезъ точку А провести прямую, параллельную къ прямой ВС.

Возьми на ВС какую ниестъ точку D, и пропни AD; и при прямой AD, и при точкѣ на ней А, составь уголъ DAE равный углу ADC*; и продолжи впрямъ съ ЕА прямую AF.

*23.

Поскольку на двѣ прямыя BC , EF , падаетъ перпендикулярная прямая AD , и дѣлаетъ на нѣмъ лежащіе углы EAD , ADC взаимно равные; по EF
 27. параллельна къ BC .

Итакъ чрезъ данную точку A проведена прямая EAF , параллельная къ данной прямой BC . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Всякаго треугольника, ежели одна изъ сторонъ продолжена, внѣшній уголъ равенъ двумъ внутреннимъ противоположащимъ. И при углахъ треугольника внутренние равны двумъ прямымъ.

Пусть будетъ треугольникъ ABC ; и одна его сторона BC пусть будетъ продолжена къ D . Говорю, что внѣшній уголъ ACD равенъ двумъ внутреннимъ противоположащимъ угламъ CAB , ABC ; и треугольника внутренние при углахъ ABC , BCA , CAB равны двумъ прямымъ.

Чрезъ точку C проводи, параллельную къ
 31. AB , прямую CE .

Поскольку AB параллельна къ CE , и на нихъ падаетъ прямая AC ; по на нѣмъ лежащіе углы
 29. BAC , ACE взаимно равны. Еще же, поскольку AB параллельна къ CE , и на нихъ падаетъ прямая BD ; по внѣшній уголъ ECD равенъ

внутреннему противоположному углу ABC^* . *29.
 А доказано, что и угол ACE равен углу BAC ; чего ради целый внешний угол ACD равен двум внутренним противоположным углам BAC , ABC .

Придай обще угол ACB ; посему углы ACD , ACB равны трем углам ABC , BCA , CAB . Но углы ACD , ACB равны двум прямым*; чего ради и углы ACB , CBA , CAB равны двум прямым. *13.

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н. (17).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Прямая, соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ прямыхъ съ тойже стороны, суть и сами равны и параллельны.

Пусть будутъ AB , CD равныя и параллельныя прямая; и пусть соединяютъ концы ихъ съ тойже стороны прямая AC , BD . Говорю, что и прямая AC , BD суть равны и параллельны.

Протяни BC .

Поелику AB параллельна къ CD , и на нихъ падаетъ BC ; то накомъ лежащіе углы ABC , BCD взаимно равны*. И поелику AB равна *29. CD , а BC общая; то двѣ прямая AB , BC равны двумъ прямымъ CD , BC ; и уголъ ABC равенъ углу BCD : посему* основаніе AC *4.

равно основанію BD ; и преутольникъ ABC равенъ преутольнику BCD ; и прочіе углы будуще равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивиулежащъ равнымъ споронамъ; посему уголъ ACB равенъ углу CBD . И поелику на двѣ прямыя AC , BD , падаетъ прешья прямая BC , и дѣлаетъ накосъ лежащіе углы ACB , CBD взаимно равные; по AC параллельна къ BD *. А доказано что и ей равна: Ипакъ, прямыя соединяющія, и пр. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXXIV.

Параллелограммовъ какъ пропивиулежащія спороны, такъ и пропивиулежащіе углы, суть взаимно равны; и поперечникъ (*διάμετρος*) дѣлитъ сїи фигуры по поламъ.

Пусть будетъ $ACDB$ параллелограммъ, а BC его поперечникъ. Говорю, что параллелограмма $ACDB$, какъ пропивиулежащія спороны, такъ и пропивиулежащіе углы, суть взаимно равны; и поперечникъ BC дѣлитъ оный по поламъ.

- *опр. 36. Поелику AB параллельна къ CD *, и на нихъ падаетъ прямая BC ; по накосъ лежащіе углы ABC , BCD суть взаимно равны*. Еще же, поелику AC параллельна къ BD , и на нихъ падаетъ BC ; по накосъ лежащіе углы ACB ,

СВД суть взаимно равны. Ипакъ два преутольника ABC, BCD имѣютъ два угла ABC, BCA равные двумъ угламъ BCD, CBD, каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежають равнымъ угламъ, то есть, общую имъ сторону BC: посему*²⁶. и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой; и остальной уголъ равный остальному углу; посему сторона AB равна CD, а AC равна BD, и уголъ BAC равенъ углу BDC. И поелику уголъ ABC равенъ углу BCD, а уголъ CBD углу ACB; посему и цѣлый уголъ ABD равенъ цѣлому углу ACD. А доказано, что уголъ BAC равенъ углу BDC:

Ипакъ параллелограммовъ какъ пропивилежащія стороны, такъ и пропивилежащіе углы, суть взаимно равны.

Говорю же, что поперечникъ дѣлитъ сіи фигуры по поламъ. Поелику AB равна CD, а BC общая; то двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ DC, CB, каждая каждой; и уголъ ABC равенъ углу BCD: посему* и⁴ основаніе AC равно основанію BD; и преутольникъ ABC равенъ преутольнику BCD.

Ипакъ поперечникъ BC дѣлитъ параллелограммъ ACDB по поламъ. ч. и д. н. (18).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Параллелограммы, стоящіе на помѣже основаніи и между пѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ параллелограммы $ABCD$, $EBCF$, стоящіе на помѣже основаніи BC , и между пѣмиже параллельными AF , BC . Говорю, что параллелограммъ $ABCD$ равенъ параллелограмму $EBCF$.

Поелику $ABCD$ есть параллелограммъ, то
 *34. AD равна BC *; попому же и EF равна BC : слѣдовательно AD равна EF . И DE имъ есть общая: чего ради и цѣлая AE равна цѣлой DF . А поелику и AB равна DC ; по двѣ прямыя EA , AB равны двумъ прямымъ FD , DC , каждая каждой; и уголъ FDC равенъ углу
 29. EAB , внѣшній внутреннему: посему основаніе EB равно основанію FC ; и преутольникъ EAB равенъ преутольнику FDC . Опни- ми обще преутольникъ DGE ; посему оспальная трапеція $ABGD$ равна оспальной трапеціи $EGCF$. Придай обще преутольникъ GBC ; посему цѣлой параллелограммъ $ABCD$ равенъ цѣлому параллелограмму $EBCF$.

Итакъ параллелограммы, стоящіе, и проч. ч. и д. н. (19).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Параллелограммы, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и между тѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ параллелограммы $ABCD$, $EFGH$, стоящіе на равныхъ основаніяхъ BC , FG , и между тѣмиже параллельными $АН$, $ВГ$. Говорю, что параллелограммъ $ABCD$ равенъ параллелограмму $EFGH$.

Протяни BE , CH .

Поелику BC равна FG^* , а и $ЕН$ равна FG ; *34. посему и BC равна $ЕН$. Онѣ же и параллельны; и соединяющъ концы ихъ прямая BE , CH . Но прямая, соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ прямыхъ съ тойже стороны, суть и сами равны и параллельны*; по- *33. сему EB , CH суть равны и параллельны. А посему $BCHE$ есть параллелограммъ*: и онъ равенъ *опр.36. параллелограмму $ABCD^*$; ибо стоиптъ *35. на томъже съ нимъ основаніи BC , и между тѣмиже параллельными BC , $АН$. Поэтому же и параллелограммъ $EFGH$ равенъ оному же параллелограмму $EBCH$. Чего ради параллелограммъ $ABCD$ равенъ параллелограмму $EFGH$.

Итакъ параллелограммы, стоящіе и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Треугольники, стоящіе на томъ же основаніи и между шѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ треугольники ABC , DBC , стоящіе на томъ же основаніи BC , и между шѣмиже параллельными AD , BC . Говорю, что треугольникъ ABC равенъ треугольнику DBC .

Продолжи AD на обѣ стороны къ точкамъ E , F ; и чрезъ B проводи, параллельную къ CA , прямую BE *; а чрезъ C проводи, параллельную къ BD , прямую CF .

Итакъ каждый изъ чепыреугольниковъ *опр. 36. $EBCA$, $DBC F$ есть параллелограммъ*: и параллелограммъ $EBCA$ равенъ параллело-

*35. рамму $DBC F$ *; ибо стоящъ на томъ же основаніи BC , и между шѣмиже параллельными BC , EF . При томъ треугольникъ ABC есть

*34. половина параллелограмма $EBCA$ *, ибо поперечникъ AB дѣлитъ оный по поламъ; а треугольникъ DBC есть половина параллелограмма $DBC F$, ибо поперечникъ DC дѣлитъ оный по поламъ. Но половины равныхъ суть взаимно равны: чего ради треугольникъ ABC равенъ треугольнику DBC .

Итакъ треугольники, стоящіе, и проч.
Ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Треугольники, споящіе на равныхъ основаніяхъ и между шѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ преугольники ABC , DEF , споящіе на равныхъ основаніяхъ BC , EF , и между шѣмиже параллельными BF , AD . Говорю, что преугольникъ ABC равенъ преугольнику DEF .

Продолжи AB на обѣ стороны къ точкамъ G , H ; и чрезъ B проводи, параллельную къ CA , прямую BG^* ; а чрезъ F проводи, параллельную къ DE , прямую FH . *31.

Итакъ каждый изъ чепыреугольниковъ $GBCA$, $DEFH$ есть параллелограммъ*: и параллелограммъ $GBCA$ равенъ параллелограмму $DEFH^*$; ибо споятъ на равныхъ основаніяхъ BC , EF , и между шѣмиже параллельными BF , GH . Припомъ преугольникъ ABC есть половина параллелограмма $GBCA^*$, ибо поперечникъ BA дѣлитъ оный по поламъ; а преугольникъ DEF есть половина параллелограмма $DEFH$, ибо поперечникъ DF дѣлитъ оный по поламъ. Но половины равныхъ суть взаимно равны: чего ради преугольникъ ABC равенъ преугольнику DEF . *36. *34.

Итакъ преугольники, споящіе, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIX.

Равные преугольники, споящіе на помъже основаніи и по шуже спорону, сущь между шѣмиже параллельными.

Пусть будутъ равные преугольники ABC , DVC , споящіе на помъже основаніи BC , и по шуже спорону. Говорю, что они сущь между шѣмиже параллельными.

Ибо пропяти AD . Говорю, что AD параллельна къ BC .

31. Буде же не шакъ; то чрезъ точку A проведи, параллельную къ BC , прямую AE^ ; и пропяти EC .

37. Ишакъ преугольникъ ABC равенъ преугольнику EVC^ ; ибо спояшъ на помъже основаніи BC , и между шѣмиже параллельными BC , AE . Но преугольникъ ABC равенъ преугольнику DVC : посему и преугольникъ DVC равенъ преугольнику EVC , большій меньшему; что невозможно. Посему AE не параллельна къ BC . То же докажемъ и о всякой другой, кромѣ AD : чего ради AD параллельна къ BC .

Ишакъ равные преугольники, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Равные преугольники, споящіе на равныхъ основаніяхъ и по ту же сторону, суть между пѣмиже параллельными.

Пусть будутъ равные преугольники ABC , DCE , споящіе на равныхъ основаніяхъ BC , CE , и по ту же сторону. Говорю; что они суть между пѣмиже параллельными. Ибо пропяти AD . Говорю; что AD параллельна къ BE .

Буде же не такъ; то чрезъ A проводи, параллельную къ BE , прямую AF^* ; и пропяти EF .

Итакъ преугольникъ ABC равенъ преугольнику FCE^* ; ибо споящій на равныхъ ^{*38.} основаніяхъ BC , CE , и между пѣмиже параллельными BE , AF . Но преугольникъ ABC равенъ преугольнику DCE : посему и преугольникъ DCE равенъ преугольнику FCE ; большій меньшему; что невозможно. Посему AF не параллельна къ BE . То же докажемъ и о всякой другой; кромѣ AD : чего ради AD параллельна къ BE .

Итакъ равные преугольники, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XII.

Ежели параллелограммъ и преутольникъ спояпъ на помъже основанїи и между пѣмиже параллельными; то параллелограммъ будетъ двукрапный преутольника.

Пусть будущъ параллелограммъ $ABCD$ и преутольникъ EBC спояпъ на помъже основанїи BC , и между пѣмиже параллельными BC , AE . Говорю что параллелограммъ $ABCD$ есть двукрапный преутольника EBC .

Протяни AC .

Итакъ преутольникъ ABC равенъ пре-
 *37. утолику EBC *; ибо спояпъ на помъже основанїи BC , и между пѣмиже параллельными BC , AE . Но параллелограммъ $ABCD$ есть
 *34. двукрапный преутольника ABC *; ибо поперечникъ AC дѣлитъ оный по поламъ. Чего ради параллелограммъ $ABCD$ есть двукрапный и преутольника EBC .

Итакъ, ежели параллелограммъ, и проч. ч. и д. н. (20).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XIII.

Составить равный данному преутолику параллелограммъ, въ углѣ равномъ данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ ABC данный треугольникъ ,
и D данный прямолинейный уголъ. Надле-
житъ составить равный треугольнику ABC
паралелограммъ , въ углѣ равномъ прямоли-
нейному углу D .

Раздѣли BC по поламъ въ E^* ; и просяни AE ; *10.
и при прямой EC , и при точкѣ на ней E , со-
ставь уголъ CEF равный углу D ; и чрезъ A про-
веди , параллельную къ EC , прямую AG ; а чрезъ
 C проводи , параллельную къ EF , прямую CG .

Итакъ $FECG$ есть паралелограммъ*. *опр.36.
И поелику BE равна EC : то треугольникъ
 ABE равенъ треугольнику AEC^* , ибо спо- *38.
яшъ на равныхъ основаніяхъ BE , EC , и
между тѣмиже параллельными BC , AG . По-
сему треугольникъ ABC есть двукратный
треугольника AEC . Но и паралелограммъ
 $FECG$ есть двукратный треугольника AEC^* ; *41.
ибо спояшъ на томъже основаніи EC , и
между тѣмиже параллельными BC , AG : а
посему паралелограммъ $FECG$ равенъ тре-
угольнику ABC ; припомъ имѣеть уголъ CEF
равный данному углу D .

Итакъ составленъ равный данному тре-
угольнику ABC паралелограммъ $FECG$, въ
углѣ CEF равномъ углу D . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIII.

Во всякомъ параллелограммѣ дополненія параллелограммовъ, кои около поперечника, суть взаимно равны.

Пусть будетъ $ABCD$ параллелограммъ, и AC его поперечникъ; и около поперечника AC параллелограммы EH , FG ; а такъ называемыя ихъ дополненія BK , KD . Говорю, что дополненіе BK равно дополненію KD .

Поелику $ABCD$ есть параллелограммъ, и AC его поперечникъ; то треугольникъ ABC равенъ треугольнику ADC *. Еще же, поелику $AЕКН$ есть параллелограммъ, и AK его поперечникъ; то треугольникъ $АЕК$ равенъ треугольнику $АНК$. Поэтому же и треугольникъ KFC равенъ треугольнику KGS . И поелику треугольникъ $АЕК$ равенъ треугольнику $АНК$, а треугольникъ KFC треугольнику KGS : то треугольникъ $АЕК$ вмѣстѣ съ треугольникомъ KGS равенъ треугольнику $АНК$ вмѣстѣ съ треугольникомъ KFC . Но и цѣлый треугольникъ ABC равенъ цѣлому треугольнику ADC : чего ради и остальное дополненіе BK равно остальному дополненію KD .

Итакъ во всякомъ параллелограммѣ, и пр.
ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XLIV.

На данной прямой поставивъ равный данному треугольнику параллелограммъ, въ углѣ равномъ данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ АВ данная прямая, С а данный треугольникъ, и D данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ на данной прямой АВ поставивъ равный данному треугольнику С параллелограммъ, въ углѣ равномъ углу D.

Составъ равный треугольнику С параллелограммъ BEFG, въ углѣ EBG равномъ углу D*; и положи BE впрямъ съ ВА; и про- *42. долги FG къ H; и чрезъ А проведи, параллельную къ которой на естъ изъ прямыхъ BG, EF, прямую AH*; и пропями НВ. И пое- *31. лику на параллельныя АН, EF падаетъ прямая HF; по углы АНF, НFE равны двумъ прямым*. Посему углы BHG, GFE меньше *29. двухъ прямыхъ. А прямая неопредѣленно продолженная со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ, встрѣчатся*; посему *акс. 11. НВ, FE продолженные встрѣчатся. Пролжи оныя, и пусть встрѣчатся въ К; и чрезъ К проведи, параллельную къ которой ниестъ изъ прямыхъ EA, FH, прямую KL;

- и продолжи прямая HA , GB къ почкамъ L , M .
 опр. 36. Ипакъ $HLKF$ есть параллелограммъ, и
 NK его поперечникъ; и около поперечника
 NK параллелограммы AG , ME , а шакъ назы-
 ваемыя ихъ дополненія LB , BF . Посему LB
 *43. равно BF *. Но BF равно преугольнику C ;
 посему и LB равно преугольнику C . И пое-
 *15. лику уголь GBE равенъ углу ABM *; но уголь
 GBE равенъ и углу D : посему и уголь ABM
 равенъ углу D .

Ипакъ на данной прямой AB поставленъ
 равный данному преугольнику C параллело-
 граммъ BL , въ углѣ ABM равномъ данному уг-
 лу D . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLV.

Соспавить равный данной прямолинейной
 фигурѣ параллелограммъ, въ данномъ прямо-
 линейномъ углѣ.

Пусть будетъ $ABCD$ данная прямолиней-
 ная фигура, а E данный прямолинейный
 уголь. Надлежитъ соспавить равный прямо-
 линейной фигурѣ $ABCD$ параллелограммъ, въ
 углѣ равномъ углу E .

Протяни DB ; и соспавь равный пре-
 угольнику ABD параллелограммъ FN , въ углѣ
 *42. NKF равномъ углу E *; и на прямой GN поставь

равный треугольнику DBC параллелограммъ GM , въ уголъ GHM равному углу E^* . *44.

Поскольку уголъ E равенъ каждому изъ угловъ NKF , GHM ; то уголъ NKF равенъ углу GHM . Придай обще уголъ KHG ; посему углы FKH , KHG равны угламъ KHG , GHM . Но углы FKH , KHG равны двумъ прямымъ; *29.

посему и углы KHG , GHM равны двумъ прямымъ. А посему при прямой NG и при точкѣ на ней N , двѣ прямыя KN , NM , не лежащія по ту же сторону, дѣлають смѣжные углы равные двумъ прямымъ: чего ради KN есть впрямъ съ NM . И поскольку на параллельныя прямыя KM , FG падаетъ прямая NG ; то наклонъ лежащіе углы MNG , HGF взаимно равны*. Придай обще уголъ HGL ; посему *29.

углы MNG , HGL равны угламъ HGF , HGL . Но углы MNG , HGL равны двумъ прямымъ; *29. посему и углы HGF , HGL равны двумъ прямымъ: чего ради FG есть впрямъ съ GL^* . *14.

И поскольку KF равна NG и параллельна къ ней; но и ML равна NG и параллельна къ ней; посему KF равна ML и параллельна къ ней*; и соединяющъ концы ихъ прямыя KM , *30. FL ; посему и прямыя KM , FL суть равны и параллельны*: чего ради $KFLM$ есть параллелограммъ. И поскольку треугольникъ ABD

равенъ параллелограмму FH ; а треугольникъ DVC параллелограмму GM : посему цѣлая прямолинейная фигура $ABCD$ равна цѣлому параллелограмму $KFLM$.

Итакъ составленъ равный данной прямолинейной фигурѣ $ABCD$ параллелограммъ $KFLM$, въ углѣ FKM равномъ данному углу E . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVI.

Изъ данной прямой написать квадрашъ.

Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ изъ прямой AB написать квадрашъ.

Къ прямой AB , опъ точки на ней A , про-

11. веи подъ прямыми углами прямую AC^ ; и

3. положи AD равную AB^ ; и чрезъ точку D про-

31. веи, параллельную къ AB , прямую DE^ ; а чрезъ точку B проведи, параллельную къ AD , прямую BE .

опр.36. Итакъ $ADEB$ есть параллелограммъ; а

34. посему AB равна DE , а AD равна BE^ . Но AD равна AB ; посему четыре прямая BA, AD, DE, EB взаимно равны: чего ради параллелограммъ $ADEB$ есть равносторонный. Говорю еще, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ на параллельныя AB, DE падаетъ прямая AD ;

29. то углы BAD, ADE равны двумъ прямым. Но

уголь BAD прямой; посему и уголь ADE есть прямой. А параллелограммовъ какъ пропивиулежащія спороны, такъ и пропивиулежащіе углы взаимно равны*; посему и каждый изъ пропивиулежащихъ угловъ ABE , BED есть прямой. Чего ради чепыреугольникъ $ADEB$ есть прямоутольный; а доказано, что и равноспоронный: итакъ онъ есть квадрапъ*, и напи- *опр.30.
санъ изъ прямой AB . ч. и с. н. (21).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVII.

Въ прямоутольныхъ треутольникахъ, квадрапъ изъ спороны, пропивиулежащей прямому углу, равенъ квадрапамъ изъ споронъ, содержащихъ прямой уголь.

Пусть будетъ ABC прямоутольный треутольникъ, имѣющій уголь BAC прямой. Говорю, что квадрапъ изъ BC равенъ двумъ квадрапамъ изъ BA , AC .

Напиши изъ BC квадрапъ $BDEC$ *; а изъ *46.
 BA , AC квадрапы GB , HC ; и чрезъ A проведи, параллельную къ копорой ни есть изъ прямыхъ BD , CE , прямую AL *; и пропни *31.
 AD , FC .

Поелику каждый изъ угловъ BAC , BAG прямой; то при прямой BA , и при почкѣ на ней A , двѣ прямыя AC , AG , не лежащія по ту же спорону, дѣлающъ смѣжные углы

равные двумъ прямымъ: посему AC есть
впрямъ съ AG . Потому же и AB есть впрямъ
съ $АН$. И поселику уголъ DBC равенъ углу
*акс. 10. EBA , ибо каждый есть прямой; придай об-
ще уголъ ABC : посему цѣлой уголъ DBA ра-
венъ цѣлому углу FBC . И поселику двѣ пря-
мыя DB , BA равны двумъ прямымъ CB , BF ,
каждая каждой; и уголъ DBA равенъ углу
4. FBC : по основаніе AD равно основанію FC ;
и треугольникъ ABD равенъ треугольнику
 FBC . Припомъ параллелограммъ BL есть
*41. двукрапный треугольника ABD *; ибо стоящъ
на томъже основаніи BD , и между пѣбмиже
параллельными BD , AL : а квадрапъ BG есть
двукрапный треугольника FBC ; ибо такъ же
стоящъ на томъже основаніи FB , и между
пѣбмиже параллельными FB , GC . А двукрап-
ные равныхъ, взаимно равны; посему парал-
лелограммъ BL равенъ квадрату GB . Подобно
протянувъ AE , BK , докажется, что парал-
лелограммъ CL равенъ квадрату HC . Посему
цѣлой квадрапъ $BDEC$ равенъ квадрапамъ
 GB , HC . Квадрапъ же $BDEC$ написанъ изъ
 BC ; а квадрапы GB , HC изъ BA , AC : чего
ради квадрапъ изъ спороны BC равенъ квад-
рапамъ изъ споронъ BA , AC .

Итакъ въ прямоугольныхъ треугольни-
кахъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVIII.

Ежели треугольника квадрапъ изъ одной стороны равенъ квадрапамъ изъ двухъ прочихъ споронъ; то уголь содержимый двумя прочими сторонами треугольника естъ прямой.

Пусть будеть треугольника ABC квадрапъ изъ одной стороны BC равенъ квадрапамъ изъ споронъ BA, AC. Говорю, чпо уголь BAC естъ прямой.

Проведи отъ почки A, къ прямой AC подъ прямыми углами, прямую AD*; и положи AD ^{*11.} равную BA; и просяни DC.

Поелику DA равна AB; то и квадрапъ изъ DA равенъ квадрапу изъ AB. Придай обще квадрапъ изъ AC; посему квадрапы изъ DA, AC равны квадрапамъ изъ BA, AC. Но квадрапамъ изъ DA, AC равенъ квадрапъ изъ DC*, ибо уголь DAC прямой; а квадра- ^{*47.} тамъ изъ BA, AC равенъ крадрапъ изъ BC, по положенію: посему квадрапъ изъ DC равенъ квадрапу изъ BC; а посему и спорона DC равна споронѣ BC. И поелику AD равна AB, а AC общая; то двѣ прямыя DA, AC равны двумъ прямымъ BA, AC; и основаніе DC равно основанію BC: посему уголь DAC равенъ углу BAC*. Но уголь DAC прямой; по- ^{*8.} сему и уголь BAC естъ прямой.

Итакъ, ежели треугольника и пр. ч. и д. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ

www.libtool.com.cn

НАЧАЛЪ.

КНИГА II.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. **О** всякомъ прямоугольномъ параллелограммѣ говорится, что онъ содержитъ въ двухъ прямыхъ, содержащихъ прямой уголъ.

2. Во всякомъ параллелограммѣ, одинъ которъ неспѣ изъ параллелограммовъ около поперечника его, вмѣстѣ съ двумя дополненіями, назовемъ наугольникомъ (*γνώμων*).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели будутъ двѣ прямыя, и одна изъ нихъ разсѣчена на сколько неспѣ опрѣзковъ; то прямоугольникъ содержаемый въ

сихъ двухъ прямыхъ, равенъ всѣмъ прямоугольникамъ содержимымъ въ неразсѣченной и въ каждомъ изъ опрѣзковъ рассѣченной.

Пусть будутъ A, BC двѣ прямыя; и пусть BC рассѣчена будетъ какъ ни есть въ почкахъ D, E . Говорю, что прямоугольникъ содержимый въ A, BC равенъ прямоугольнику содержимому въ A, BD , и прямоугольнику въ A, DE , и еще прямоугольнику въ A, EC .

Проведи опъ B , подъ прямыми углами къ BC прямую BF^* ; и положи прямую BG равную A^* ; и чрезъ G проводи, параллельную къ BC , прямую GH^* ; а чрезъ D, E, C проводи, параллельныя къ BG , прямыя DK, EL, CH .

Итакъ прямоугольникъ BH равенъ всѣмъ прямоугольникамъ BK, DL, EH . Но прямоугольникъ BH содержи́ся въ A, BC ; ибо содержи́ся въ GB, BC^* , а BG равна A : прямоугольникъ же BK содержи́ся въ A, BD ; ибо содержи́ся въ BG, BD , а BG равна A : а прямоугольникъ DL содержи́ся въ A, DE , ибо DK , то есть BG , равна A : подобно же и прямоугольникъ EH содержи́ся въ A, EC . Чего ради прямоугольникъ въ A, BC равенъ всѣмъ прямоугольникамъ: въ A, BD , и въ A, DE , и еще въ A, EC .

Ипакъ, ежели будушь двѣ прямая, и проч.
ч. и д. н.

www.libtool.com.cn

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е П.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ни-
есъ; по прямоугольники содержимые въ цѣ-
лой и въ каждомъ изъ ея отпрѣзковъ, равны
квадрату изъ цѣлой прямой.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ
ниесъ въ точкѣ С. Говорю, что прямо-
угольникъ въ АВ, ВС, вмѣстѣ съ прямоуголь-
никомъ въ ВА, АС, равенъ квадрату изъ АВ.

46.1. Изъ АВ напизи квадратъ АДЕВ; и чрезъ
С проведи, параллельную къ которой ни есъ
31.1. изъ прямыхъ АД, ВЕ, прямую СF.

Ипакъ прямоугольникъ АЕ равенъ прямо-
угольникамъ АF, СЕ. Но АЕ есъ квадратъ
изъ АВ: а АF есъ прямоугольникъ въ ВА,
опр.1. АС, ибо содержится въ DA, АС, а DA равна
АВ; и СЕ есъ прямоугольникъ въ АВ, ВС,
ибо ВЕ равна АВ. Чего ради прямоугольникъ
въ ВА, АС, вмѣстѣ съ прямоугольникомъ въ
АВ, ВС, равенъ квадрату изъ АВ.

Ипакъ, ежели прямая линія, и проч.
ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ни-
 есть; то прямоугольникъ содержимый въ
 цѣлой и въ одномъ изъ ея опрѣзковъ, равенъ
 прямоугольнику содержимому въ обоихъ оп-
 рѣзкахъ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ опрѣз-
 ка прежде взятаго.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ
 ниесѣ въ точкѣ С. Говорю, что прямо-
 угольникъ въ АВ, ВС равенъ прямоугольнику
 въ АС, СВ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ ВС.

Изъ СВ напиши квадратъ СДЕВ*; и про- *46, I.
 должи ЕД къ F; и чрезъ точку А проводи,
 параллельную къ копрой ниесѣ изъ пря-
 мыхъ CD, BE, прямую AF*. *31, I.

Итакъ прямоугольникъ АЕ равенъ прямо-
 угольникамъ AD, СЕ. Но АЕ есѣ прямо-
 угольникъ въ АВ, ВС*, ибо содержиѣся въ *опр. I.
 АВ, ВЕ, а ВЕ равна ВС; AD же есѣ прямо-
 угольникъ въ АС, СВ, ибо DC равна СВ; а
 DE есѣ квадратъ изъ СВ. Чего ради прямо-
 угольникъ въ АВ, ВС равенъ прямоугольнику
 въ АС, СВ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ СВ.

Итакъ, ежели прямая линія, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

Ежели прямая линия разсѣчена какъ ни-
 еспѣ, то квадрапѣ изъ цѣлой равенъ квад-
 рапамъ изъ опрѣзковъ, и вмѣстѣ дважды
 взятому прямоугольнику въ сихъ опрѣзкахъ
 содержимому.

Пусть будетъ прямая линия АВ разсѣчена
 какъ ниеспѣ въ С. Говорю, что квадрапѣ изъ
 АВ равенъ квадрапамъ изъ АС, СВ, и вмѣстѣ
 дважды взятому прямоугольнику въ АС, СВ.

46, I. Изъ АВ, напиши квадрапѣ АДЕВ; и про-
 пями ВD; и чрезъ С проводи, параллельную
 къ копорой ни еспѣ изъ прямыхъ АD, ЕВ,
 прямую СGF; а чрезъ G проводи, парал-
 лельную къ копорой ниеспѣ изъ прямыхъ
 АВ, DE, прямую НК.

Поелику CF параллельна къ AD, и на нихъ
 падаетъ BD; то внѣшний уголъ CGВ равенъ
 29, I. внутреннему пропивулежащему углу ADB.

5, I. Но уголъ ADB равенъ углу ABD, ибо ВА равна
 AD; посему и уголъ CGВ равенъ углу GBC;
 слѣдственно и спорона ВС равна споронѣ

34, I. CG. Но СВ равна GK, а CG равна BK; посему
 и GK равна KB. Чего ради чепыреугольникъ
 CGKB еспѣ равноспоронный. Говорю еще,
 что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ CG па-
 раллельна къ BK, и на нихъ падаетъ CB; то

углы KBC , BCG равны двумъ прямымъ*. Но ^{*29,1.} уголъ KBC прямой; посему и уголъ BCG есть прямой. Следовательно и прилежащiе имъ углы CGK , GKB суть прямые*; чего ради ^{*34,1.} четырехугольникъ $CGKB$ есть прямоугольный. А доказано, что онъ и равносѣпоропный; посему онъ есть квадрапъ*, и написанъ ^{*оп.30,1.} изъ CB . Поэтому же и HF есть квадрапъ, и написанъ изъ HG , то есть изъ AC . Посему HF , $СК$ суть квадрапы изъ AC , CB . И поелику прямоугольникъ AG равенъ GE *; ^{*43,1.} и AG содержица въ AC , CB ; ибо GC равна CB : посему и GE равенъ прямоугольнику въ AC , CB . Чего ради прямоугольники AG , GE равны дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . Но HF , $СК$ суть квадрапы изъ AC , CB ; посему четыре HF , $СК$, AG , GE равны квадрапамъ изъ AC , CB , и дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . А четыре HF , $СК$, AG , GE дѣлають цѣлое $ADEB$, которое есть квадрапъ изъ AB ; чего ради квадрапъ изъ AB равенъ квадрапамъ изъ AC , CB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB .

Ипакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. и.

ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Говорю, что квадрапъ изъ AB равенъ квадрапамъ изъ AC ,

СВ, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ АС, СВ.

- Поелику, въ той же фигурѣ, АВ равна АД,
 5,1. то уголъ ABD равенъ углу ADB. И поелику
 всякаго треугольника, всѣ при угла равны
 32,1. двумъ прямымъ; посему треугольника ABD
 при угла ABD, ADB, BAD равны двумъ прямымъ. Но уголъ BAD есть прямой; посему
 остальные углы ABD, ADB равны одному прямому: они же и взаимно равны; посему каждый
 изъ угловъ ABD, ADB есть половина прямого. Но уголъ BCG есть прямой, ибо равенъ внутреннему
 противоположному, что при А; посему остальной уголъ CGB есть половина
 прямого; а посему уголъ CGB равенъ углу CBG; слѣдственно и сторона ВС равна стороне
 34,1. СГ. Но СВ равна СК, а СГ равна ВК; посему четырехугольникъ СК есть равносторонный. Онъ же имѣетъ и прямой уголъ
 СВК; посему СК есть квадрапъ, и написанъ изъ СВ. Потому же и HF есть квадрапъ, и равенъ
 квадрапу изъ АС; а посему СК, HF суть квадрапы, и равны квадрапамъ изъ АС, СВ. И поелику
 43,1. прямоугольникъ AG равенъ GE, и AG содержится въ АС, СВ; ибо СГ равна СВ; посему и EG равенъ
 прямоугольнику въ АС, СВ: чего ради AG, GE равны

дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . Но $СК$, $НГ$ равны квадрапамъ изъ AC , CB ; поему $СК$, $НГ$, AG , GE равны квадрапамъ изъ AC , CB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . Но $СК$, $НГ$ и AG , GE дѣлають цѣлое AE , которое естъ квадрапъ изъ AB ; итакъ квадрапъ изъ AB равенъ квадрапамъ изъ AC , CB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB .
Ч. и д. н.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуетъ, что въ квадрапахъ параллелограммы около поперечника суть также квадрапы. (22):

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели прямая линія разсѣчена на равныя и неравныя; то прямоугольникъ въ неравныя опрѣзкахъ содержимый, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ прямой, которая между сѣченіями, равенъ квадрапу изъ половины цѣлой прямой.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена на равныя въ C , и на неравныя въ D . Говорю, что прямоугольникъ въ AD , DB , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ CD , равенъ квадрапу изъ CB .

Изъ CB напиши квадрапъ $CEFB$ *; и про- *46, г.
тяни BE ; и чрезъ D проводи, параллельную

* *

къ копорой ни естъ изъ прямыхъ CE , BF , прямую DG ; и чрезъ G проводи, параллельную къ копорой ни естъ изъ прямыхъ AB , EF , прямую KLM ; и еще чрезъ A проводи, параллельную къ копорой ни естъ изъ прямыхъ CL , BM , прямую AK .

- Поелику дополненіе CH равно дополненію *43,1. HF *; придай обще DM : посему цѣлой прямоугольникъ CM равенъ цѣлому DF . Но CM *36,1. равенъ AL *, ибо AC равна CB ; посему и AL равенъ DF . Придай обще CH ; посему цѣлой прямоугольникъ AH равенъ двумъ DF и DL . Но AH содержишя въ AD , DB , ибо DH равна DB ; а два FD , DL дѣлають наугольникъ *оп.2. NOR *: посему наугольникъ NOR равенъ прямоугольнику въ AD , DB . Придай обще LG , *сл.4. копорый равенъ квадрату* изъ CD ; посему наугольникъ NOR и LG равны прямоугольнику въ AD , DB и квадрату изъ CD . Но наугольникъ NOR вмѣстѣ съ LG дѣлають цѣлое $CEFB$, копорое естъ квадратъ изъ CB ; чего ради прямоугольникъ въ AD , DB , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ CD , равенъ квадрату изъ CB .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели прямая линія разсѣчена по поламъ, и приложена къ ней впрямъ другая какая ниспъ прямая; то прямоугольникъ содержи-
 мый въ цѣлой съ приложенною и въ прило-
 женной, вмѣститъ съ квадрапомъ изъ поло-
 вины цѣлой, равенъ квадрату написанному
 изъ прямой, сложенной изъ оной половины
 и приложенной, какъ изъ одной.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена по по-
 ламъ въ точкѣ С; и пусть приложена бу-
 детъ къ ней впрямъ другая какая ниспъ пря-
 мая ВD. Говорю, что прямоугольникъ въ АD,
 ВD, вмѣститъ съ квадрапомъ изъ СВ, равенъ
 квадрату изъ CD.

Изъ CD напиши квадратъ CEFD; и про-
 тяни DE; и чрезъ точку В проводи, парал-
 лельную къ которой ниспъ изъ прямыхъ
 CE, DF, прямую BG; а чрезъ точку D про-
 води, параллельную къ которой ниспъ изъ
 прямыхъ AD, EF, прямую KM; и еще чрезъ
 А проводи, параллельную къ которой ниспъ
 изъ прямыхъ CL, DM, прямую АК.

Поелику АС равна СВ; то и прямоуголь-
 никъ AL равенъ прямоугольнику СН*. Но СН *36,1.
 равенъ HF*; посему и LA равенъ HF. При- *43,1.
 дай обще CM; посему цѣлой прямоугольникъ

АМ равенъ наугольнику NOP. Но АМ содержи-
 сл.4. жися въ AD, DB, ибо DM равна DB; по-
 сему и наугольнику NOP равенъ прямоуголь-
 нику въ AD, DB. Придай обще LG, который
 равенъ квадрапу изъ CB; посему прямоуголь-
 никъ въ AD, DB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ
 CB, равенъ наугольнику NOP, вмѣстѣ съ
 LG. Но наугольникъ NOP вмѣстѣ съ LG дѣ-
 лаюшъ цѣлое CEFD, которое есть квад-
 рапъ изъ CD; чего ради прямоугольникъ въ
 AD, DB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ CB, ра-
 венъ квадрапу изъ CD.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ниестъ;
 то квадраты изъ цѣлой и одного изъ ея
 опрѣзковъ, оба вмѣстѣ, равны дважды взя-
 тому прямоугольнику содержимому въ цѣ-
 лой и въ сказанномъ опрѣзкѣ, вмѣстѣ съ
 квадратомъ изъ остальнаго опрѣзка.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ
 ниестъ въ точкѣ С. Говорю, что квадраты
 изъ АВ, ВС равны дважды взятому прямо-
 угольнику въ АВ, ВС, вмѣстѣ съ квадра-
 томъ изъ АС.

Изъ АВ напиши квадратъ ADEB, и допи-
 ши фигуру.

Поелику прямоугольник AG равен GE^* ; *43,1. придай обще CF ; посему и цѣлый AF равен цѣлому CE . А посему AF, CE суть двукрапные прямоугольника AF . Но AF, CE дѣлають наугольникъ KLM и квадрапъ CF ; посему наугольникъ KLM и квадрапъ CF суть двукрапные прямоугольника AF . Но прямоугольника AF двукрапный также есть и дважды взяпый прямоугольникъ въ AB, BC , ибо BF равна BC^* ; посему наугольникъ KLM , вмѣспѣ съ квадрапомъ CF , равны дважды взяпому прямоугольнику въ AB, BC . Придай обще HN , который есть квадрапъ изъ AC ; посему наугольникъ KLM , вмѣспѣ съ квадрапами CF, HN , равны дважды взяпому прямоугольнику въ AB, BC , вмѣспѣ съ квадрапомъ изъ AC . Но наугольникъ KLM вмѣспѣ съ квадрапами CF, HN , дѣлають цѣлое $ADEB$ и CF , кои суть квадрапы изъ AB, BC ; чего ради квадрапы изъ AB, BC равны дважды взяпому прямоугольнику въ AB, BC , вмѣспѣ съ квадрапомъ изъ AC .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ нѣсть; то чепырежды взяпый прямоуголь-

никъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ
ея опрѣзковъ, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ
остальнаго опрѣзка, равенъ квадрату напи-
санному изъ цѣлой и прежде сказаннаго оп-
рѣзка, какъ изъ одной прямой.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ
ниесъ въ точкѣ С. Говорю, что чепыреж-
ды взятый прямоугольникъ въ АВ, ВС, вмѣ-
стѣ съ квадрапомъ изъ АС, равенъ квадра-
ту написанному изъ АВ, ВС, какъ изъ одной
прямой.

Продолжи впрямъ съ АВ прямую ВD; и по-
3,1. ложи прямую ВD равную СВ; и изъ АD напи-
ши квадрапъ АЕFD; и дополни двойную фи-
гуру.

34,1. Поелику ВС равна ВD; и СВ равна GK,
а ВD равна KN: посему и GK равна KN. По-
тому же и QR равна RP. И поелику СВ равна
ВD, а GK равна KN; посему прямоугольникъ

36,1. СК равенъ BN, а GR равенъ КР. Но СК ра-

43,1. венъ RN; ибо суть дополненія въ параллело-
граммѣ СР: посему BN равенъ GR. Чего
ради чепыре СК, KD, GR, RN взаимно рав-
ны, и суть чепырекрапны прямоугольника
СК. Еще же, поелику СВ равна ВD; и ВD

34,1. равна ВК, то есть CG, а СВ равна GK,
то есть GQ: посему и CG равна GQ. И

поелику CG равна GQ , а QR равна RP ; по-
 сему прямоугольник AG равен MQ , а QL
 равен RF *. Но MQ равен QL ; ибо супъ до- *36,1.
 полненія въ параллелограммѣ ML : посему и
 AG равен RF . Чего ради чепыре AG , MQ ,
 QL , RF взаимно равны, и супъ чепыре-
 крапны прямоугольника AG . А доказано, что
 и чепыре CK , KD , GR , RN чепырекрап-
 ны прямоугольника CK ; посему восемь, кои
 содержишь наугольникъ STV , супъ чепыре-
 крапны прямоугольника AK . И поелику AK
 содержишя въ AB , BD , ибо KB равна BD *; *с.4.
 то чепырежды взяпый прямоугольникъ въ
 AB , BD естъ чепырекрапный прямоуголь-
 ника AK . А доказано, что прямоугольника
 AK естъ чепырекрапный и наугольникъ STV ;
 посему чепырежды взяпый прямоугольникъ
 въ AB , BD равен наугольнику STV . Придай
 обще $ОН$, копорый равен квадрату изъ
 $АС$ *; посему чепырежды взяпый прямоуголь- *с.4.
 никъ въ AB , BD , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ
 $АС$, равен наугольнику STV вмѣстѣ съ $ОН$.
 Но наугольникъ STV и $ОН$ дѣлають цѣлой
 квадратъ $AEFD$, копорый естъ изъ AD ; чего
 ради чепырежды взяпый прямоугольникъ въ
 AB , BD , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ $АС$, ра-
 венъ квадрату изъ AD , то естъ, квадрату

написанному изъ АВ и ВС, какъ изъ одной прямой.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е IX.

Ежели прямая линія разсѣчена на равныя и неравныя; то квадрапы изъ неравныхъ опрѣзковъ прямой суть двукрапные квадрапа изъ половины и квадрапа изъ прямой между сѣченіями.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена на равныя въ С, и на неравныя въ D. Говорю, что квадрапы изъ AD, DV суть двукрапные квадраповъ изъ AC, CD.

Проведи опъ С, подъ прямыми углами къ АВ, прямую СЕ; и положи ее равную копюрой ниесть изъ прямыхъ АС, СВ; и пропями АЕ, ЕВ; и чрезъ D проводи, параллельную къ ЕС, прямую DF; а чрезъ F проводи, параллельную къ АВ, прямую FG; и пропями АF.

Поелику АС равна СЕ; то уголь ЕАС равенъ углу АЕС*. И поелику уголь при С прямой, то остальные ЕАС, АЕС равны одному прямому*; они же и равные: посему каждый изъ угловъ СЕА, САЕ есть половина прямого. Потому же и каждый изъ угловъ СЕВ, ЕВС есть половина прямого; слѣдственно цѣлой

*5, I.

*32, I.

уголъ AEB есть прямой. И поелику уголъ GEF половина прямого; и уголъ EGF прямой, ибо онъ равенъ ~~внутреннему~~ ~~противулежа-~~ ~~щему~~ ECB^* : то и оспальной EFG есть по-^{*29, I.} половина прямого; посему уголъ GEF равенъ углу EFG ; слѣдственно и сторона EG равна сторонамъ GF^* . Еще же, поелику уголъ pi и B ^{*6, I.} половина прямого; и уголъ FDB прямой, ибо также и онъ равенъ внутреннему противулежащему ECB : то и оспальной DFB есть половина прямого; посему уголъ при B равенъ углу DFB ; слѣдственно и сторона FD равна сторонамъ DB .

И поелику AC равна CE : то квадрапъ изъ AC равенъ квадрапу изъ CE ; посему квадрапы изъ AC , CE суть двукрапные квадрапа изъ AC . Но квадрапамъ изъ AC , CE равенъ квадрапъ изъ AE^* , ибо уголъ ACE есть пря-^{*47, I.} мой; посему квадрапъ изъ AE есть двукрапный квадрапа изъ AC . Еще же, поелику EG равна GF : то квадрапъ изъ EG равенъ квадрапу изъ GF ; посему квадрапы изъ EG , GF суть двукрапные квадрапа изъ GF . Но квадрапамъ изъ EG , GF равенъ квадрапъ изъ EF^* ; ^{*47, I.} посему квадрапъ изъ EF есть двукрапный квадрапа изъ GF . И какъ GF равна CD ; посему квадрапъ изъ EF есть двукрапный квадрапа изъ CD . Но и квадрапъ изъ AE есть

двукратный квадрапъ изъ AC ; посему квадрапъ изъ AE ; EF сущъ двукратные квадрапъ изъ AC , CD . Квадрапамъ же изъ AE , EF равенъ квадрапъ изъ AF , ибо уголь AEF есть прямой; посему квадрапъ изъ AF есть двукратный квадрапъ изъ AC , CD . А квадрапу изъ AF равны квадрапы изъ AD , DF , ибо уголь при D есть прямой; посему квадрапы изъ AD , DF сущъ двукратные квадрапъ изъ AC , CD . Но DF равна DB ; чего ради и квадрапы изъ AD , DB сущъ двукратные квадрапъ изъ AC , CD .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Ежели прямая линія разсѣчена по поламъ, и приложена къ ней впрямъ другая какая ниесть прямая; то квадрапы изъ цѣлой съ приложенною, и изъ приложенной, оба вмѣстѣ, сущъ двукратные квадрапъ изъ половины, и еще квадрапъ написаннаго изъ прямой, сложенной изъ оной половины и приложенной, какъ изъ одной.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена по поламъ въ C ; и пусть приложена будетъ къ ней впрямъ какая ниесть прямая BD . Говорю, что квадрапы изъ AD , DB сущъ двукратные квадрапъ изъ AC , CD .

Проведи оупъ С, подъ прямыми углами къ АВ, прямую СЕ*; и положи ее равную копо- *11, I.
рой ниеспъ изъ прямыхъ АС, СВ; и пропя-
ни ЕА, ЕВ; и чрезъ Е проведи, параллельную
къ АД, прямую ЕF*, а чрезъ D еще проведи, *31, I.
параллельную къ СЕ, прямую FD. И поелику
на параллельныя прямыя ЕС, FD падаетъ
прямая EF: то углы CEF, EFD равны двумъ
прямымъ*; посему углы FEB, EFD меньше *29, I.
двухъ прямыхъ. Но прямыя, продолженныя со
сторонъ угловъ, кои меньше двухъ пря-
мыхъ, встрѣяются; посему прямыя ЕВ, FD,
продолженныя встрѣяются со стороны BD.
Продолжи оныя, и пусть встрѣяются въ G;
и пропяни AG.

Поелику АС равна СЕ; то уголь АЕС ра-
вень углу ЕАС*. Но уголь при С прямой; по- *5, I.
сему каждый изъ угловъ ЕАС, АЕС есть по-
ловина прямого*. Поэтому же и каждый изъ *32, I.
угловъ СЕВ, ЕВС есть половина прямого;
слѣдственно цѣлой уголь АЕВ есть прямой.
И поелику уголь ЕВС половина прямого; то
и уголь DBG, есть половина прямого*. А и *15, I.
уголь BDG прямой, ибо онъ равенъ наось
лежащему DCE*: посему оспальной уголь *29, I.
DGB есть половина прямого; а посему уголь
DGB равенъ углу DBG; слѣдственно и спо-
рона BD равна сторонѣ DG*. Еще же, послѣ- *6, I.

- ку уголь EGF половина прямого ; и уголь при F прямой, ибо онъ равенъ пропивилежащему
- *29, I. чпо при C^* : посему осипальной уголь FEG еспъ
половина прямого ; а посему уголь EGF равенъ
углу FEG ; слѣдспвенно и спорона GF равна
- *6, I. споронѣ FE^* . И поелику EC равна CA : по и
квадрапъ изъ EC равенъ квадрапу изъ CA ;
посему квадрапы изъ EC , CA супъ двукрап-
ные квадрапа изъ CA . Квадрапамъ же изъ
- *47, I. EC , CA равенъ квадрапъ изъ AE^* ; посему
квадрапъ изъ EA еспъ двукрапный квадрапа
изъ AC . Еще же, поелику FG равна FE : по
квадрапъ изъ FG равенъ квадрапу изъ FE ;
посему квадрапы изъ GF , FE супъ двукрап-
ные квадрапа изъ EF . Квадрапамъ же изъ
- *47, I. GF , FE равенъ квадрапъ изъ EG^* ; посему
квадрапъ изъ EG еспъ двукрапный квадра-
па изъ EF . И EF равна CD ; посему квадрапъ
изъ EG еспъ двукрапный квадрапа изъ
 CD . А доказано, чпо и квадрапъ изъ EA
еспъ двукрапный квадрапа изъ AC ; посему
квадрапы изъ AE , EG супъ двукрапные квад-
раповъ изъ AC , CD . Квадрапамъ же изъ AE ;
- *47, I. EG равенъ квадрапъ изъ AG^* ; посему квад-
рапъ изъ AG еспъ двукрапный квадраповъ
изъ AC , CD . А квадрапу изъ AG равны квад-
рапы изъ AD , DG^* ; посему квадрапы изъ
 AD , DG супъ двукрапные крадраповъ изъ

АС, CD. Но DG равна DB; чего ради и квадраты изъ AD, DB суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Данную прямую разсѣчь такъ, чпобы прямоугольникъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея опрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ оспальнойго опрѣзка.

Пусть будетъ АВ данная прямая. Надлежитъ АВ разсѣчь такъ, чпобы прямоугольникъ въ цѣлой и въ одномъ изъ ея опрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ оспальнойго опрѣзка.

Изъ АВ напиши квадратъ ABDC*; и раздѣли AC по поламъ въ точкѣ E*; и пропни BE; и продолжи СА къ F; и положи прямую EF равную BE; и изъ AF напиши квадратъ FH; и продолжи GH къ K. Говорю, чпо АВ разсѣчена въ H такъ, чпо прямоугольникъ въ АВ, BH равенъ квадрату изъ AH.

Поелику прямая AC разсѣчена по поламъ въ E, и приложена къ ней впрямъ AF; по прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣститъ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EF. *6. Но EF равна EB; поему прямоугольникъ въ

CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EB. А квадрату изъ *47, I. EB равны квадраты изъ BA, AE*, ибо уголъ при A есть прямой; посему прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадратамъ изъ BA, AE. Опними общае квадратъ изъ AE; посему остальной прямоугольникъ въ CF, FA равенъ квадрату изъ AB. Но прямоугольникъ въ CF, FA есть FK, ибо AF равна FG; а квадратъ изъ AB есть AD: почему FK равенъ AD. Опними общае AK; посему остальной FH равенъ остальному HD. И поелику HD есть прямоугольникъ въ AB, BH, ибо AB равна BD; а FH есть квадратъ изъ AH: чего ради прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA.

Итакъ данная прямая AB разсѣчена въ H такъ, что прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Въ тупоугольныхъ треугольникахъ, квадратъ изъ стороны, противоположащей тупому углу, больше квадратовъ изъ сторонъ, содержащихъ тупой уголъ, дважды взятымъ

прямоугольникомъ, содержимымъ въ одной изъ споронъ около шунаго угла, на которую продолженную падаетъ перпендикуляръ, и въ прямой при шупомъ углѣ перпендикуляромъ въ опнимаемой.

Пусть будетъ ABC шуугольный шуугольникъ, имѣющій уголъ BAC шупой; и опъ почки B пусть будетъ проведена, перпендикулярная къ продолженной CA , прямая BD . Говорю, что квадрапъ изъ BC больше квадраповъ изъ BA , AC , дважды взятымъ шуугольникомъ въ CA , AD .

Поелику прямая CD разсѣчена какъ ниесъ въ почки A ; по квадрапъ изъ CD равенъ квадрапамъ изъ CA , AD , и вмѣстѣ дважды взятому шуугольнику въ CA , AD *. Придай *4. обще квадрапъ изъ DB ; посему квадрапы изъ CD , DB равны квадрапамъ изъ CA , AD , DB , и вмѣстѣ дважды взятому шуугольнику въ CA , AD . Но квадрапамъ изъ CD , DB равенъ квадрапъ изъ CB *, ибо уголъ при D *47.1. есѣ прямой; а квадрапамъ изъ AD , DB равенъ квадрапъ изъ AB : посему квадрапъ изъ CB равенъ квадрапамъ изъ CA , AB , и вмѣстѣ дважды взятому шуугольнику въ CA , AD . Чего ради квадрапъ изъ CB больше квадраповъ изъ CA , AB , дважды взятымъ шуугольникомъ въ CA , AD .

Ипакъ въ шуугольныхъ, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Въ остроугольныхъ треугольникахъ, квадраты изъ стороны, противулежащей острому углу, меньше квадратовъ изъ сторонъ, содержащихъ острый уголъ, дважды взятымъ прямоугольникомъ, содержимымъ въ одной изъ сторонъ около острого угла, на которую падаетъ перпендикуляръ, и въ прямой при остромъ углу перпендикуляромъ внутрь опнимаемой.

Пусть будетъ ABC остроугольный треугольникъ, имѣющій уголъ при B острой; и опъ точки A пусть будетъ проведена, перпендикулярная къ BC , прямая AD . Говорю, что квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ CB , BA , дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CB , BD .

Поелику прямая CB разсѣчена какъ ниспъ въ D ; то квадраты изъ CB , BD равны дважды взятому прямоугольнику въ CB , BD ,
 *7. вмѣстѣ съ квадратомъ изъ DC *. Придай общо квадратъ изъ DA ; посему квадраты изъ CB , BD , DA равны дважды взятому прямоугольнику въ CB , BD , и вмѣстѣ квадратамъ изъ AD , DC . Но квадратамъ изъ BD , DA равенъ

*47.1. квадратъ изъ AB *, ибо уголъ при D есть прямой; а квадратамъ изъ AD , DC равенъ

квадратъ изъ AC : посему квадраты изъ CB , BA равны квадрату изъ AC и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CB , BD . Чего ради одинъ квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ CB , BA , дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CB , BD .

Итакъ въ остроугольныхъ, и проч. ч. и д. н. (23).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Составить квадратъ равный данной прямолинейной фигурѣ.

Пусть будетъ A данная прямолинейная фигура. Надлежитъ составить квадратъ равный прямолинейной фигурѣ A .

Составь прямоугольный параллелограммъ BD , равный прямолинейной фигурѣ A^* : *45, г. И если BE равна ED : то требуемое сдѣлано; ибо составленъ квадратъ BD равный прямолинейной фигурѣ A . Если же нѣтъ, то одна изъ прямыхъ BE , ED есть большая. Пусть будетъ BE большая: продолжи оную къ F ; и положи прямую EF равную ED ; и раздѣли BF пополамъ въ G^* ; и *10, г. изъ центра G , разстояніемъ одной изъ прямыхъ GB , GF , напизи полукружіе BHF ; и продолжи DE къ H ; и пропями GH .

Поелику прямая BF раздѣлена на равныя

* *

въ G , и на неравныя въ E ; по прямоугольнику въ BE , EF , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ GE ,
 *5. равенъ квадрапу изъ GF *. Но GF равна GH ; посему прямоугольникъ въ BE , EF , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ GE , равенъ квадрапу изъ GH . Квадрапу же изъ GH равны квадраты
 *47, I. изъ HE , EG *; посему прямоугольникъ въ BE , EF , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ GE , равенъ квадрапамъ изъ HE , EG . Опними обще квадрапъ изъ GE , посему остальной прямоугольникъ въ BE , EF равенъ квадрапу изъ EH . Но прямоугольникъ въ BE , EF есть BD , ибо EF равна ED ; посему параллелограммъ BD равенъ квадрапу изъ EH . А BD равенъ прямолинейной фигурѣ A ; чего ради прямолинейная фигура A равна квадрапу изъ EH .
 Ипакъ, составленъ равный данной прямолинейной фигурѣ A квадрапъ, по есть, написанный изъ EH . ч. и с. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ

www.libtool.com.cn

НАЧАЛЪ.

КНИГА III.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Равные круги суть тѣ, коихъ поперечники равны; или въ коихъ прямая изъ центровъ равна. (24).

2. Прямая называется касательною къ кругу, когда прикасается къ кругу, и будучи продолжена не пресѣкаетъ его.

3. Круги называются взаимно касательными, кои взаимно прикасаются, не пресѣкаясь одинъ другаго.

4. Въ кругѣ прямая называется равноотстоящими отъ центра, когда отъ центра проведенныя перпендикулярныя къ ней суть равны.

5. Больше же описующею называется та, на которую большая перпендикулярная падаетъ. www.libtool.com.cn

«5а. Дуга круга есть часть его окружности.»

6. Опрѣзокъ круга есть фигура, содержащая прямою и дугою круга.

7. Уголь опрѣзка есть тотъ, который содержится прямою и окружностью круга.

8. Когда на дугѣ опрѣзка возмется какая нисетъ точка, и опъ оной къ концамъ прямой, которая есть основаніе опрѣзка, пропнаныя прямая; то содержаемый пропнаными прямыми уголь, называется угломъ въ опрѣзкѣ.

9. Когда прямая, содержащая уголь, описываютъ какую нисетъ дугу; то говорится, что уголь опишетъ на ней.

10. Когда при центрѣ круга опишетъ уголь; то фигура содержащая прямыми содержащими сей уголь, и дугою, которую прямая описываютъ, называется вырѣзкомъ круга.

11. Подобные опрѣзки круга суть тѣ, кои вмѣщаютъ равные углы; или въ коихъ углы взаимно равны. (25).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ ПЕРВОЕ.

Даннаго круга найди центръ.

Пусть будетъ ABC данный кругъ. Надлежитъ круга ABC найди центръ.

Проведи въ немъ какую ниесъ прямую AB; и раздѣли оную по поламъ въ точкѣ D*; и опъ D проводи, подъ прямыми углами *10, I. къ AB, прямую CD*; и продолжи оную до *11, I. E; и раздѣли CE по поламъ въ F. Говорю, что F естъ центръ круга ABC.

Ибо, естли нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ G. Пропяни GA, GD, GB.

Поелику AD равна DB, а DG общая; то двѣ прямыя AD, DG равны двумъ прямымъ BD, DG, каждая каждой; и основаніе GA равно основанію GB, ибо сушь изъ центра G: посему уголь ADG равенъ углу GDB*. Когда *8, I. же прямая, спавленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные; то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ: посему уголь GDB естъ прямой. Но и уголь FDB прямой: посему уголь FDB равенъ углу GDB, большій меньшему; что невозможно. А посему точка G не естъ центръ круга ABC. Подобно же докажемъ, что и ни другая какая ниесъ, кромѣ F. Ипакъ точка F естъ центръ круга ABC.

Ч. и С. Н.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуетъ, что если-ли въ кругѣ какая нисеть прямая другую прямую разсѣкаетъ по поламъ и подъ прямыми углами; то на сѣкущей есть центръ круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели на окружности круга взяты какія нисеть двѣ точки; то прямая пропаянущая чрезъ сѣи точки, упадетъ внутри круга.

Пусть будетъ ABC кругъ; и на окружности его пусть будутъ взяты какія нисеть двѣ точки A, B . Говорю, что прямая отъ A къ B пропаянущая, упадетъ внутри круга.

Ибо, еслии нѣтъ; то пусть, буде возможно, падаетъ внѣ, какъ AEB . Возьми *1. центръ круга ABC *, и пусть будетъ оный D ; и пропаяи DA, DB ; и проводи DE до E .

Поелику DA равна DB ; то уголъ DAE *5,1. равенъ углу DBE *. И поелику треугольника DAE одна сторона AEB продолжена; то *16,1. уголъ DEB больше угла DAE *. Но уголъ DAE равенъ углу DBE , посему уголъ DEB больше угла DBE . А большому углу противуполо- *19,1. жить большая сторона*; посему DB больше DE . Но DB равна DE ; посему DE больше DE , меньшая большей; что невозможно. А

посему прямая, пропаянушая отъ А къ В, не упадесть въѢ круга. Подобно же докажемъ, что и ни на окружности; чего ради упадесть внипри круга.

Ишакъ, ежели на окружности, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Ежели въ кругѣ прямая какая ниесъ, проходящая чрезъ центръ, прямую какую ниесъ, не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами; и ежели разсѣкаетъ подъ прямыми углами; то разсѣчетъ оную и по поламъ.

Пусть будетъ АВС кругъ; и въ немъ пусть прямая какая ниесъ CD, проходящая чрезъ центръ, прямую какую ниесъ АВ, не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ въ точкѣ F. Говорю, что разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами.

Возьми центръ круга АВС*, и пусть *1. будетъ оный E; и пропаяни EA, EB.

Поелику AF равна FB, а FE общая; то двѣ прямыя равны двумъ прямымъ; и основаніе EA равно основанію EB: посему уголь AFE равенъ углу EFB*. Когдаже прямая, *8.1. пославленная на другую прямую, дѣлаетъ

смѣжные углы взаимно равные; по каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ: посему каждый изъ угловъ $\angle AFE$, $\angle BFE$ есть прямой. Чего ради прямая CD проходящая чрезъ центръ, и разсѣкающая по поламъ прямую AB , непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ оную и подъ прямыми углами.

Но пусть же прямая CD прямую AB разсѣкаетъ подъ прямыми углами. Говорю, что разсѣчетъ оную и по поламъ, то есть, что AF равна FB .

Ибо сдѣлавъ поже спроеіе, поелику EA *5.1. равна EB ; по уголъ $\angle EAF$ равенъ углу $\angle EBF$ *. Но и прямой уголъ $\angle AFE$ равенъ прямому $\angle BFE$; посему два треугольника EAF , EBF имѣють два угла равные двумъ угламъ, и одну сторону равную одной сторонѣ, то есть, имѣ общую EF , противуположающую одному изъ равныхъ угловъ: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ *26.1. сторонамъ *. Чего ради AF равна FB .

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя взаимно пресѣкаются, и не проходящъ обѣ чрезъ центръ; по обѣ не пресѣкуются взаимно по поламъ.

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ; и пусть въ немъ двѣ прямыя AC , BD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E , и не проходящѣ обѣ чрезъ центръ. Говорю, что обѣ не пресѣкутся взаимно по поламъ.

Ибо, буде возможно, пусть обѣ пресѣкутся по поламъ, такъ что AE равна EC , и BE равна ED . Возьми центръ круга $ABCD^*$, и пусть будетъ оный F ; и про-^{*1.} шани FE .

Поелику прямая FE , проходящая чрезъ центръ, прямую AC , непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами^{*2.}: по-^{*3.} сему уголъ FEA есть прямой. Еще же, поелику прямая FE , «проходящая чрезъ центръ», прямую BD , не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами: по сему уголъ FEB есть прямой. А доказано, что и уголъ FEA прямой: по сему уголъ FEA равенъ углу FEB , меньшій большему; что невозможно. Чего ради AC , BD не пресѣкаются взаимно по поламъ.

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели два круга взаимно пресѣкающіяся; то ихъ центръ не будетъ попоئےже.

Пусть два круга ABC, CDG взаимно пресѣкутся въ точкахъ B, C. Говорю, что ихъ центръ не попоئےже.

Ибо, буде возможно, пусть будетъ оный E: пропями EC; и проведи какъ ниесъ прямую EFG.

Поелику точка E есть центръ круга ABC; то EC равна EF. Еще же, поелику точка E есть центръ круга CDG; то CE равна EG. А доказано, что EC равна и EF: посему FE равна EG, меньшая большей; что невозможно. Чего ради точка E не есть центръ круговъ ABC, CDG.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели два круга взаимно касаются внутри; то ихъ центръ не будетъ попоئےже.

Пусть два круга ABC, CDE взаимно касаются въ точкѣ C. Говорю, что ихъ центръ не попоئےже.

Ибо, буде возможно, пусть будетъ оный F: пропями FC; и проведи какъ ниесъ прямую FEB.

Поелику точка F есть центръ круга ABC ; то FC равна BF . Еще же, поелику точка F есть центръ круга CDE ; то FC равна FE . А доказано, что FC равна и FB : посему FE равна FB , меньшая большей; что невозможно. Чего ради точка F не есть центръ круговъ ABC , CDE .

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели на поперечникѣ круга взята будетъ какая ниспъ точка, копорая не есть центръ его, и опъ сей точки упадутъ въ кругѣ какія ниспъ прямая: то наибольшая будетъ та, на коей центръ, а наименьшая оспальная; изъ другихъ же, ближайшая къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше дальнейшей; и шокмо двѣ равныя прямая опъ тойже точки могутъ упасть въ кругѣ, по обѣимъ сторонамъ наименьшей.

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ, и AD поперечникъ его; и на AD пусть будетъ взята какая ниспъ точка F , копорая не есть центръ круга; центръ же круга пусть будетъ E ; и опъ F пусть упадутъ въ кругѣ $ABCD$ какія ниспъ прямая FB , FC , FG . Говорю, что наибольшая есть FA , а най-

меньшая FD ; изъ другихъ же FB больше FC , а FC больше FG .

Пропяни BE , CE , GE .

Поелику всякаго преутольника двѣ споро-
 20, I. ны больше оспальной, то EB , EF больше BF . Но AE равна BE ; посему BE , EF равна AF : а посему AF больше BF . Еще же, поелику BE равна CE , а FE общая; то двѣ прямыя BE , EF равны двумъ прямымъ CE , EF ; но уголь BEF больше угла CEF : чего
 *24, I. ради основаніе BF больше основанія CF *. По тому же и CF больше GF .

*20, I. Еще же, поелику GF , FE больше EG *, а EG равна ED ; посему GF , FE больше ED . Опними обще EF ; посему оспальная GF больше оспальной FD . Ипакъ наибольшая есть FA , а наименьшая FD ; и FB больше FC , а FC больше FG .

Говорю пакожъ, что опъ точки F покло двѣ равныя прямыя могутъ упаспъ въ кругѣ $ABCD$, по обѣимъ споронамъ наименьшей FD . При прямой EF , и при почкѣ на ней
 *23, I. E , соспавъ уголь FEN равный углу GEF *; и пропяни FN . Поелику GE равна EN , а EF общая; то двѣ прямыя GE , EF равны двумъ прямымъ NE , EF ; и уголь GEF равенъ углу NEF : посему основаніе FG равно основа-
 *4, I. нію FN *.

Говорю еще, что прямой FG другая равная прямая не можетъ упасть въ кругъ опъ точки F . Ибо, ~~буде невозможно~~, пусть падаетъ таковая FK . Поелику же FK равна FG , а и FN равна FG ; посему и FK равна FN , ближайшая къ проходящей чрезъ центръ равна дальнѣйшей; что невозможно.

Или и такъ. Пропяни EK . Поелику GE равна EK , а EF общая, и основаніе FG равно основанію FK ; то уголь GEF равенъ углу KEF *. Но уголь GEF равенъ углу FEN ; по- *8,1. сему и уголь FEN равенъ углу KEF , меньшій большему; что невозможно. А посему опъ точки F не можетъ падать въ кругъ другая прямая равная GF , слѣдственно можетъ только одна.

Итакъ, ежели на поперечникѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели въ круга взята будетъ какая ниспъ точка, и опъ сей точки проведены будутъ къ кругу прямая, одна изъ нихъ чрезъ центръ, а прочія какъ ниспъ: то изъ прямыхъ падающихъ на вогнутую окружность, наибольшая есть проходящая чрезъ центръ; изъ другихъ же ближайшая къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше

дальнѣйшей: А изъ прямыхъ падающихъ на выпуклую окружность, наименьшая есть та, которая между точкою и поперечникомъ; изъ другихъ же ближайшая къ наименьшей, всегда меньше дальнѣйшей: и токмо двѣ равныя падаютъ опъ почки къ кругу, по обѣимъ сторонамъ наименьшей.

Пусть будетъ ABC кругъ; и въ ABC пусть будетъ взята какая ниспъ почка D ; и опъ оной пусть будутъ проведены какія ниспъ прямыя DA, DE, DF, DC , и изъ нихъ прямая DA чрезъ центръ. Говорю, что изъ сихъ прямыхъ, падающихъ на вогнутую окружность $AEEFC$, наибольшая есть DA , проходящая чрезъ центръ; ближайшая же къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше дальнѣйшей, то есть, DE больше DF , а DF больше DC : а изъ сихъ прямыхъ, падающихъ на выпуклую окружность $HLKG$, наименьшая есть DG , которая между точкою D и поперечникомъ AG ; ближайшая же къ наименьшей DG , всегда меньше дальнѣйшей, то есть, DK меньше DL , а DL меньше DH .

*I. Возьми центръ круга ABC *, и пусть будетъ оный M ; и пропши ME, MF, MC, MK, ML, MN .

Поелику AM равна EM , придай обще MD ; посему AD равна EM, MD . Но EM, MD

больше ED ; чего ради и AD больше ED . Еще же, поелику EM равна FM , а MD общая; по EM , MD равны FM , MD ; а угол EMD больше угла FMD : посему основание ED больше основания FD *. Подобно докажемъ, что и FD больше CD . Ипакъ наибольшая есть DA , а DE больше DF , и DF больше DC .

И поелику MK , KD больше MD , и MG равна MK ; по и оспальная KD больше оспальной GD ; а посему и DG меньше DK : слѣдственно она есть наименьшая. Поелику же преутольника MLD , на одной изъ сторонъ его MD , составлены внутри двѣ прямыя MK , KD ; по MK , KD меньше ML , LD *; а MK равна ML , посему оспальная DK меньше оспальной DL . Подобно докажемъ, что и DL меньше DH . Ипакъ наименьшая, есть DG , а DK меньше DL , и DL меньше DH .

Говорю такожь, что опъ почки D двѣ поком равныя прямыя могутъ унасть къ кругу, по обѣимъ сторонамъ наименьшей DG . При прямой MD , и при почкѣ на ней M , составъ уголъ DMB равный углу KMD *; и прѣпiani DMB . Поелику MK равна MB , а MD общая; по двѣ прямыя KM , MD равны двумъ прямымъ BM , MD , каждая каждой; и уголъ KMD равенъ

углу BMD : посему основаніе DK равно основанію DB .

Говорю еще, что прямой DK равная другая прямая не можеть упасть къ кругу опъ почки D . Ибо, буде возможно, пусть упадешь, и пусть будетъ таковая DN . Поелику же DK равна DN , а DK равна и DB ; посему и DB равна DN , ближайшая къ наименьшей DG равна дальнѣйшей; что, по доказанному, невозможно.

Или иначе. Пропяни MN . Поелику KM равна MN , а MD общая, и основаніе DK равно основанію DN ; посему уголь KMD равенъ углу NMD . Но уголь KMD равенъ углу BMD ; посему и уголь BMD равенъ углу NMD , меньшій большему; что невозможно. А посему опъ почки D , не больше какъ токмо двѣ равныя прямыя могуць упасть къ кругу ABC , по обѣимъ споронамъ наименьшей DG .

Ипакъ, ежели внѣ круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели внутри круга взята будетъ какая нисепъ почка; и опъ сей почки въ кругѣ упадутъ больше нежели двѣ равныя прямыя: то взятая почка есть центръ круга.

Пусть будетъ ABC кругъ, и внутри его

почка D; и пусть опъ D въ кругѣ ABC упадутъ больше нежели двѣ равныя прямыя, какъ DA, DB, DC. Говорю, что почка D есть центръ круга ABC.

Протяни AB, BC; и раздѣли оныя по поламъ въ почкахъ E, F*; и протянувъ ED, *_{10, 1.} FD, продолжи оныя къ почкамъ K, G, L, H.

Поелику AE равна EB, а ED общая; то двѣ прямыя AE, ED равны двумъ прямымъ BE, ED; и основаніе DA равно основанію DB: посему уголъ AED равенъ углу BED. Чего ради каждый изъ угловъ AED, BED есть прямой; посему прямая HK разсѣкающая прямую AB по поламъ, разсѣкаетъ ее и подъ прямыми углами. Но еслили въ кругѣ какая нисетъ прямая другую прямую разсѣкаетъ по поламъ и подъ прямыми углами; то на сѣкущей есть центръ круга*: посему на *_{сд: 1.} GK есть центръ круга ABC. Потому же и на HL есть центръ круга ABC. Прямые же GK, HL никакой другой общей точки не имѣютъ, кромѣ почки D; чего ради почка D есть центръ круга ABC.

Итакъ, ежели внутри круга, и проч. ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Внутри круга ABC пусть будетъ взята какая нисетъ почка D; и пусть опъ D, въ кругѣ ABC упадутъ больше нежели

двѣ равныя прямыя, какъ DA, DB, DC . Говорю, что взятая точка D есть центръ круга ABC .

Ибо, еслии нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ E ; и протянувъ DE , продолжи оную къ точкамъ F, G : поему FG есть поперечникъ круга ABC . Поелику круга ABC на поперечникѣ FG взята нѣкая точка D , которая не есть центръ круга; то наибольшая будетъ DG , а DC больше DB , и *7. DB больше DA *: но и равна ей, что невозможно; чего ради E не есть центръ круга ABC . Подобно докажемъ, что и ни другая какая ниестъ, кромѣ D . Ипакъ точка D есть центръ круга ABC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Кругъ не пресѣкаетъ другаго круга въ точкахъ больше двухъ.

Ибо, буде возможно, пусть кругъ ABC пресѣкаетъ другой кругъ DEF , въ точкахъ больше двухъ, какъ B, G, F, H . Протянувъ BH, BG , раздѣли оныя по поламъ въ точкахъ *10, I. K, L *; и опъ K, L , проведя подъ прямыми *11, I. углами къ BH, BG , прямыя KC, LM *, продолжи оныя къ точкамъ A, E .

Поелику въ кругѣ ABC нѣкая прямая AC

другую прямую ВН разсѣкаетъ по поламъ, и подѣ прямыми углами; то на АС есть центръ круга АВС*. Еще же, поелику въ *сл. 1. томъ же кругѣ АВС, иѣкая прямая NO другую прямую ВG разсѣкаетъ по поламъ, и подѣ прямыми углами; то на NO есть центръ круга АВС. А доказано, что и на АС; прямая же АС, NO ни въ какой точкѣ взаимно не встрѣчаются, кромѣ Р: посему точка Р есть центръ круга АВС. Подобно докажемъ, что и круга DEF есть центръ Р. Чего ради двухъ круговъ АВС, DEF, взаимно пресѣкающихся, будетъ центръ томъ же Р; что невозможно*. *5.

Итакъ кругъ не пресѣкаетъ, и пр. ч. и д. н.

иначе. Пусть опять кругъ АВС пресѣкаетъ другой кругъ DEF, въ точкахъ больше двухъ, какъ В, G, F. Возьми круга АВС центръ К; и пропями KB, KG, KF.

Поелику внутри круга DEF взята точка К, и опъ К въ кругѣ DEF падающъ больше нежели двѣ равныя прямая, какъ KB, KF, KG; то точка К есть центръ круга DEF*. Но и *9. круга АВС есть центръ К: чего ради двухъ круговъ, взаимно пресѣкающихся, будетъ центръ томъ же К; что невозможно*. *5.

Итакъ кругъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Ежели два круга взаимно касаются внутри; и взяты будущь ихъ центры: то прямая пропаянушая чрезъ ихъ центры, будучи продолжена, упадетъ на прикосновеніе круговъ.

Пусть два круга ABC, ADE взаимно касаются внутри, въ точкѣ А; и пусть взяты будущь, круга ABC центръ F, а круга ADE центръ G. Говорю, что прямая пропаянушая отъ G къ F, будучи продолжена, упадетъ въ точку А.

Ибо, естли нѣтъ; то пусть, буде возможно, упадетъ какъ FGH. Пропаяни AF, AG.

20, I. Поелику AG, GF больше FA, то есть FH; отними обще FG: посему остаточная AG больше остаточной GH. Но AG равна DG: посему и GD больше GH; меньшая большей; что невозможно. А посему прямая пропаянушая отъ F къ G, не упадетъ въ прикосновенія А: слѣдственно упадетъ на оное.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

иначе. Но еще пусть упадетъ какъ GFC: продолжи впрямь съ GFC прямую къ точкѣ H; и пропаяни AG, AF.

Поелику AG , GF больше AF , а FA равна FC , то есть FN ; опними обще FG : посему оспальная AG больше оспальной GN , то есть GD больше GN , меньшая большей; что невозможно. Подобно докажемъ, что сие нѣпо, естли центръ круга большаго будеть внѣ круга меньшаго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Ежели два круга взаимно касаются внѣ; то прямая пропаянуная чрезъ ихъ центры, пройдетъ чрезъ прикосновеніе.

Пусть два круга ABC , ADE взаимно касаются внѣ, въ почкѣ A ; и пусть будеть круга ABC центръ F , а круга ADE центръ G . Говорю, что прямая пропаянуная опъ F къ G , пройдетъ чрезъ прикосновеніе A .

Ибо, естли нѣтъ; то пусть, буде возможно, пройдетъ какъ $FCDG$. Пропаяни FA , AG .

Поелику точка F есть центръ круга ABC ; то FA равна FC . Еще же, поелику точка G есть центръ круга ADE ; то AG равна GD . А доказано, что FA равна FC ; посему FA , AG равны FC , DG : а посему цѣлая FG больше FA , AG : но и меньше ея*; *20, I.

что невозможно. А посему прямая протянутая отъ F къ G , не пройдетъ не чрезъ прикоснове-
нiе A : слѣдственно пройдетъ чрезъ оное.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Кругъ не касается къ другому кругу въ точкахъ больше одной, хотя каснется внутри, хотя внѣ его.

Ибо, буде возможно, пусть кругъ $ABDC$ каснется къ другому кругу $EBFD$, во-первыхъ внутри, въ точкахъ больше одной, какъ B , D .

Возьми круга $ABDC$ центръ G , а круга $EBFD$ центръ H .

Итакъ прямая, протянутая отъ G къ H , упадетъ въ точки B , D . Пусть упадетъ какъ $BGHD$. И поелику точка G есть центръ круга $ABDC$, то BG равна GD : посему BG больше HD ; а посему BH гораздо больше HD . Еще же, поелику точка H есть центръ круга $EBFD$; то BH равна HD . А доказано, что она гораздо больше; что невозможно. Чего ради кругъ не касается къ другому кругу, внутри его, въ точкахъ больше одной.

Говорю еще, что и не касается внѣ. Ибо буде возможно, пусть кругъ ACK каснется къ

другому кругу $ABCD$ внѣ, въ точкахъ больше одной, какъ A, C . Пропяни AC .

Поелику на окружностяхъ обоихъ круговъ $ABDC, AСК$, взяты нѣкія двѣ точки A, C ; то прямая пропянутая чрезъ сіи точки, упадесть внутри каждаго*. Но она падаесть*₂. внутри круга $ABDC$, а внѣ круга $АСК$ *; что*_{опр.3}. нелѣпо. Чего ради кругъ не касается къ другому кругу внѣ его, въ точкахъ больше одной. А доказано, что и ни внутри:

Итакъ кругъ не касается, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Въ кругѣ равныя прямая равно отстоятъ отъ центра: и копорыя прямая равно отстоятъ отъ центра, суть взаимно равны.

Пусть будетъ $ABDC$ кругъ, и пусть будутъ въ немъ равныя прямая AB, CD . Говорю, что онѣ равно отстоятъ отъ центра.

Возьми центръ круга $ABDC$ *, и пусть*₁. будетъ оный E ; и отъ E проводи перпендикулярныя къ AB, CD , прямая EF, EG *; и*_{12,1}. пропяни AE, CE .

Поелику прямая EF , проходящая чрезъ центръ, прямую AB , непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаесть подъ прямыми углами; то разсѣчетъ оную и по поламъ*: *₃.

посему AF равна BF ; а посему AB есть двукратная прямой AF . Потому же и CD есть двукратная прямой CG . Ипакъ AB равна CD : посему и AF равна CG . И поелику AE равна EC ; то квадрапъ изъ AE равенъ квадрапу изъ EC . Но квадрапу изъ AE

47, I. равны квадрапы изъ AF , FE^ , ибо уголъ при F есть прямой; квадрапу же изъ EC равны квадрапы изъ EG , GC , ибо уголъ при G есть прямой: посему квадрапы изъ AF , FE равны квадрапамъ изъ CG , GE . Но въ нихъ квадрапъ изъ AF равенъ квадрапу изъ CG , ибо AF равна CG : посему оспальн-ной квадрапъ изъ FE равенъ оспальному изъ EG ; а посему FE равна EG . Въ кругѣ же прямыя называющіяся равно оспстоящими оспъ центра; когда оспъ центра проведенныя

опр. 4. перпендикулярныя къ нимъ равны: чего ради AB , CD равно оспстоятъ оспъ центра.

Но пусть прямыя AB , CD равно оспстоятъ оспъ центра, то есть, пусть будетъ EF равна EG . Говорю, что и AB равна CD .

Сдѣлавъ то же спроеіе, подобно докажемъ, что AB есть двукратная прямой AF , а CD двукратная прямой CG . И поелику AE равна CE ; то квадрапъ изъ AE равенъ квадрапу изъ CE . Но квадрапу изъ AE равны квадрапы изъ EF , FA ; квадрапу же изъ CE равны

квадраты изъ EG , GC : посему квадраты изъ EF , FA равны квадратамъ изъ EG , GC . Но въ нихъ квадратъ изъ EF равенъ квадрату изъ EG , ибо EF равна EG : посему оспальной квадратъ изъ AF равенъ оспальному изъ CG ; а посему AF равна CG . Но прямой AF двукратная естъ AB , а прямой CG двукратная CD ; чего ради AB равна CD .

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Въ кругѣ наибольшая прямая естъ поперечникъ; изъ другихъ же, ближайшая къ центру всегда больше дальнѣйшей.

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ; и пусть будетъ поперечникъ его AD , а центръ E ; ближайшая же къ центру пусть будетъ BC , а дальнѣйшая FG . Говорю, что наибольшая естъ AD , а BC больше FG .

Отъ центра E проводи, перпендикулярныя къ BC , FG , прямая EH , EK^* . Поелику ближайшая къ центру естъ BC , а дальнѣйшая FG ; по EK больше EH^* . Положи прямую EL *опр. 5. равную EH ; и чрезъ L проводя подъ прямыми углами къ EK , прямую LM , продолжи оную къ N ; и протяни EM , EN , EF , EG .

Поелику EH равна EL ; по и BC равна MN^* . Еще же, поелику AE равна EM , и ED *14.

равна EN ; то AD равна ME , EN . Но ME , EN больше MN ; посему и AD больше MN . А MN равна BC ; посему AD больше и BC . И поелику двѣ прямыя ME , EN равны двумъ прямымъ FE , EG ; а уголь MEN больше угла FEG :
 24,1. посему основаніе MN больше основанія FG .
 Но MN , по доказанному, равна BC , посему и BC больше FG . Чего ради, наибольшая естъ поперечникъ AD , а BC больше FG .

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Прямая, проведенная отъ конца поперечника круга подъ прямыми къ оному углами, падаетъ внѣ круга: Въ пространствѣ же между прямою и окружностію не можетъ упасть другая прямая: И уголь полукружія естъ больше всякаго прямолинейнаго оспраго угла; а оспальной меньше.

Пусть будетъ ABC кругъ около центра D и поперечника AB . Говорю, что прямая, проведенная отъ A подъ прямыми углами къ AB , падаетъ внѣ круга.

Ибо, естли нѣтъ; то пусть, буде возможно, упадетъ внутри, какъ AC ; и пропяти DC .

Поелику DA равна DC ; то угол DAC равенъ углу ACD^* . Но угол DAC прямой; по-^{*5.} сему и угол ACD есть прямой: а посему $www.libtool.com.cn$ ACD , два угла DAC , ACD равны двумъ прямымъ; что невозможно*. Посему ^{*17, I.} прямая, проведенная опъ точки A подъ прямыми углами къ BA , не падаеть внури круга. Подобно докажемъ, что ни на окружнсть; слѣдственно падаеть внѣ круга, какъ AE .

Говорю еще, что въ проспранствѣ между прямою AE и окружнстію CNA не можетъ упастъ другая прямая.

Ибо, буде возможно, пусть упадетъ, какъ FA . Опъ точки D проводи, перпендикулярную къ FA , прямую DG .

Поелику уголъ AGD прямой, а уголъ DAG меньше прямого; то AD больше DG^* . Но AD ^{*19, I.} равна DN : посему DN больше DG , меньшая большей; что невозможно. Ипакъ въ проспранствѣ между прямою и окружнстію не можетъ упастъ другая прямая.

Говорю такожь, что уголъ полукружія, содержимый прямою BA и окружнстію CNA , есть больше всякаго прямолинейнаго остраго угла; а остальной, содержимый окружнстію CNA и прямою AE , меньше всякаго прямолинейнаго остраго угла.

Ибо, буде есть какой либо прямолинейной

уголъ, который больше содержамаго прямою ВА и окружностію СНА, а меньше содержамаго окружностію СНА и прямою АЕ; то въ проспранствѣ между окружностію СНА и прямою АЕ упадесть прямая, которая сдѣлаесть уголъ содержимый прямыми, больше угла содержамаго прямою ВА и окружностію СНА, а меньше содержамаго окружностію СНА и прямою АЕ. Но таковая не можесть упасъ; слѣдственно не можесть быть таковой оспрой уголъ содержимый прямыми который больше угла содержамаго прямою ВА и окружностію СНА, ни таковой, который меньше содержамаго окружностію СНА и прямою АЕ. Что и доказанъ надлежало.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что прямая проведенная отъ конца поперечника круга, подъ прямыми къ оному углами, касается къ кругу; и что прямая касается къ кругу только въ одной точкѣ. Ибо прямая встрѣчающая оный въ двухъ, упадесть, по доказанному*, внутри его. (26).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Отъ данной точки провести прямую линію, касающуюся къ данному кругу.

Пусть будетъ А данная точка, а BCD

данный кругъ. Надлежитъ опъ почки А провести прямую линію, касательную къ кругу BCD. www.libtool.com.cn

Возьми круга центръ E^* ; и просяни AE ; и $*1$. изъ центра E , разстояніемъ EA напиши кругъ AFG ; и опъ D проводи, подъ прямыми углами къ EA , прямую DF ; и просяни EF , AB . Говорю, что опъ почки A проведена, касательная къ кругу BCD, прямая AB .

Поселику E есть центръ круговъ BCD, AFG : то EA равна EF и ED равна EB . Ипакъ двѣ прямыя AE , EB равны двумъ прямымъ FE , ED ; и содержащъ уголь общій при E : посему* основаніе DF равно основанію $*4,1$. AB ; и треугольникъ EDF равенъ треугольнику EBA ; и прочіе углы прочимъ угламъ, посему уголь EDF равенъ углу EBA . Но уголь EDF прямой; посему и уголь EBA есть прямой: но EB есть прямая опъ центра; прямая же, проведенная опъ конца поперечника круга, подъ прямыми къ оному углами, касается къ кругу*: чего ради прямая AB есть касательная къ кругу. *сл. 16.

Ипакъ опъ данной почки A проведена, касательная къ данному кругу BCD, прямая линія AB . ч. и с. н. (27).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели прямая касается къ кругу; и отъ центра къ прикосновенію пропянута будетъ прямая: то пропяннутая прямая будетъ перпендикулярна къ касательной.

Пусть касается къ кругу ABC прямая DE въ точкѣ C ; и пусть будетъ взятъ круга ABC центръ F ; и отъ F къ C пусть будетъ пропянута прямая FC . Говорю что FC перпендикулярна къ DE .

Ибо, буде нѣтъ; то отъ F проводи, перпендикулярную къ DE , прямую FG .

Поелику уголъ FGC прямой; то уголъ FCG *17, I. есть острый*: а большому углу противу- *19, I. лежитъ большая сторона*; посему FC больше FG . Но FC равна FB : посему и FB больше FG , меньшая большей; что невозможно. А посему FG не перпендикулярна къ DE . Подобно докажемъ, что и ни другая какая нисеть, кромѣ FC ; чего ради FC перпендикулярна къ DE .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели прямая касается къ кругу; и отъ прикосновенія проведена будетъ прямая, подъ прямыми углами къ касательной: то на проведенной прямой будетъ центръ круга.

Пусть касается къ кругу ABC прямая DE въ точкѣ C ; и пусть будетъ отъ C проведена, подъ прямыми углами къ DE , прямая CA . Говорю, что на AC есть центръ круга.

Ибо, еслили нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ оный F . Пропяни CF .

Поелику прямая DE касается къ кругу ABC , и отъ центра къ прикосновенію пропянута прямая FC ; то FC перпендикулярна къ DE : *18. посему уголъ FCE есть прямой. А и уголъ ACE прямой: посему уголъ FCE равенъ углу ACE , меньшій большему; что невозможно. Чего ради F не есть центръ круга ABC . Подобно докажемъ, что и ни другая какая либо точка, развѣ копорая на AC .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н. (28).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Въ кругѣ, уголъ при центрѣ есть двукратный угла при окружности, когда они шу же дугу имѣютъ основаніемъ.

Пусть будетъ ABC кругъ; и при центрѣ его пусть будетъ уголъ BEC , а при окружности уголъ BAC ; кои пусть имѣютъ шу же дугу BC основаніемъ. Говорю, что уголъ BEC есть двукратный угла BAC .

Пропянувъ AE , продолжи оную къ F .

Поелику EA равна EB ; то уголь EAB равенъ углу EBA : посему углы EAB , EBA сущь двукрапны угла EAB . Но уголь BEF *32,1. равенъ угламъ EAB , EBA *; посему и уголь BEF естъ двукрапный угла EAB . Поипому же и уголь FEC естъ двукрапный угла EAC . Чего ради цѣлой уголь BEC естъ двукрапный цѣлаго угла BAC .

Наклони уголь BAC , и пусть будетъ другой уголь BDC . Протянувъ DE , продолжи оную къ G : то подобно же докажемъ, что уголь GEC естъ двукрапный угла GDC . Но въ нихъ уголь GEB естъ двукрапный угла GDB ; чего ради оспальной уголь BEC естъ двукрапный оспального BDC .

Ипакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н И Е XXI.

Въ кругѣ, въ шомъ же отрѣзкѣ углы взаимно равны.

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ; и въ его отрѣзкѣ $BAED$ пусть будутъ углы BAD , BED . Говорю, что углы BAD , BED взаимно равны.

1. Возьми круга $ABCD$ центръ, и пусть будетъ оный F ; и протяни BF , FD .

Поелику уголь BFD естъ при центрѣ, а уголь BAD при окружности, и имѣющъ шу

же дугу BCD основаніемъ; то уголь BFD естъ двукрапный угла BAD^* . Потому же ^{*20.} уголь BFD естъ двукрапный и угла BED . Чего ради уголь BAD равенъ углу BED .

Ипакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Въ кругахъ, чепыреугольниковъ пропнвулежащіе углы равны двумъ прямымъ.

Пуспь будепъ $ABCD$ кругъ; и въ немъ пуспь будепъ чепыреугольникъ $ABCD$. Говорю, чпо его пропнвулежащіе углы равны двумъ прямымъ.

Пропяни AC , BD .

Поселику всякаго преугольника при угла равны двумъ прямымъ^{*}; то преугольни- ^{*32, i.} ка ABC при угла CAB , ABC , BCA равны двумъ прямымъ. Но углу BAC равенъ уголь CDB^* , ибо они въ помъже опрѣзкѣ $BADC$; ^{*21.} а углу ADB , равенъ уголь ACB , ибо они въ помъже опрѣзкѣ $ADCB$: посему цѣлой уголь ADC равенъ угламъ BAC , ACB . Придай обще уголь ABC ; посему углы ABC , BAC , ACB равны угламъ ABC , ADC . Но углы ABC , BAC , ACB равны двумъ прямымъ; чѣго ради и углы ABC , ADC равны двумъ прямымъ. Подобно докажемъ, чпо и углы BAD , DCB равны двумъ прямымъ.

Ипакъ въ кругахъ, и проч. ч. и д. н. (29):

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

На тойже прямой и по ту же ея сторону, не могутъ быти соспавлены два опрѣзка круговъ подобные и неравные.

Ибо, буде возможно, пусть на той же прямой AB и по ту же ея сторону, будутъ соспавлены два опрѣзка круговъ подобные и неравные ACB , ADB .

Проведи ACD ; и пропяти CB , DB .

Поелику опрѣзокъ ACB подобенъ опрѣзку ADB ; подобные же опрѣзки круговъ суть *опр. II. шѢ, кои вмѣщаютъ равные углы*: то уголъ ACB равенъ углу ADB , внѣшний внутрен-
16, I. нему; что невозможно.

Итакъ на тойже прямой, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

На равныхъ прямыхъ, подобные опрѣзки круговъ взаимно равны.

Пусть будутъ на равныхъ прямыхъ AB , CD подобные круговъ опрѣзки AEB , CFD . Говорю, что опрѣзокъ AEB равенъ опрѣзку CFD .

Ибо, еслии помѣстимъ опрѣзокъ AEB на опрѣзокъ CFD , и положимъ почку A на почку C , а прямую AB на прямую CD : то почка B совмѣстится съ почкою D , поели-

ку АВ равна CD. Когда же АВ совмѣстилась съ CD, то и опрѣзокъ АЕВ совмѣстится съ опрѣзкомъ CFD. Ибо, если бы по совмѣщеніи прямой АВ съ прямою CD, опрѣзокъ АЕВ не совмѣстился съ опрѣзкомъ CFD: то пусть перемѣнитъ положеніе, какъ CHGD. Но кругъ не пресѣкаетъ другого круга въ точкахъ больше двухъ*; а *10. кругъ CHGD пресѣчетъ кругъ CFD больше нежели въ двухъ точкахъ, въ С, G, D: что невозможно. Посему, когда прямая АВ совмѣстилась съ прямою CD, не можетъ несовмѣститься опрѣзокъ АЕВ съ опрѣзкомъ CFD; слѣдственно совмѣстится, и будетъ равенъ ему.

Итакъ на равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Дописать кругъ, коего опрѣзокъ данъ.

Пусть будетъ ABC данный опрѣзокъ круга. Надлежитъ дописать кругъ, коего ABC есть опрѣзокъ.

Раздѣли AC пополамъ въ D*; и опъ точки *10. D проводи, подъ прямыми углами къ AC, прямую DV*; и прорѣзни АВ. Итакъ уголъ *11. ABD или больше угла BAD, или равенъ ему, или меньше его.

Пусть будетъ, во первыхъ, больше. При прямой BA , и при точкѣ на ней A , составь *23, I. уголъ BAE равный углу ABD^* ; и продолжи DB къ E ; и пропни EC . Поелику же уголъ ABE равенъ углу BAE ; то и прямая BE *6, I. равна прямой EA^* . И поелику AD равна DC , а DE общая; то двѣ прямыя AD , DE равны двумъ прямымъ CD , DE , каждая каждой; и уголъ ADE равенъ углу CDE , ибо каждый изъ нихъ прямой: посему основаніе AE равно основанію CE . Но AE , по доказанному, равна EB ; посему и BE равна CE ; слѣдственно при AE , EB , EC взаимно равны; а посему кругъ, изъ центра E и разстояніемъ которой ниспъ изъ прямыхъ AE , EB , EC написанный, пройдетъ чрезъ прочія точки*; и такъ кругъ, коего опрѣзокъ данъ, будетъ дописанъ. Припомъ явно, что опрѣзокъ ABC будетъ меньше полукружія; поелику центръ E падаетъ внѣ опрѣзка.

Подобно, естли уголъ ABD равенъ углу BAD , то сдѣлана прямая AD , равная каждой изъ прямыхъ BD , DC : посему при DA , DB , DC будутъ взаимно равны, и D будетъ центръ дополненаго круга; припомъ же ABC будетъ полукружіе.

Естли же уголъ ABD меньше угла BAD ; и естли при прямой BA , и при точкѣ на

ней A , сослავимъ уголъ равный углу ABD : то центръ упадеши вънутри ошрѣзка ABC , на прямой DB ; и припомъ ошрѣзокъ ABC будешъ больше [полукружїа](http://polukruzhia.com.cn).

Итакъ дописанъ кругъ, коего ошрѣзокъ данъ. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Въ равныхъ кругахъ, равные углы споятъ на равныхъ дугахъ, хопя будутъ споятъ при центрахъ, хопя при окружностяхъ.

Пусть будутъ ABC , DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ при центрахъ равные углы BGC , EHF , а при окружностяхъ углы BAC , EDF . Говорю, что дуга BKC равна дугѣ ELF .

Пропіяни BC , EF .

Поелику круги ABC , DEF равны, то и прямая изъ центровъ ихъ равны*; и такъ *опр. I. двѣ прямая BG , GC равны двумъ прямымъ EH , HF ; и уголъ при G равенъ углу при H : посему основаніе BC равно основанію EF . И поелику уголъ при A равенъ углу при D ; то ошрѣзокъ BAC подобенъ ошрѣзку EDF *, и *опр. II. сунъ на равныхъ прямыхъ BC , EF . На равныхъ же прямыхъ, подобные ошрѣзки круговъ, взаимно равны*; посему ошрѣзокъ *24.

ВАС равенъ описку EDF. А и цѣлый кругъ ABC равенъ цѣлому кругу DEF; посему оспальной описку ВКС равенъ оспальной описку ELF: чего ради дуга ВКС равна дугѣ ELF.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Въ равныхъ кругахъ, на равныхъ дугахъ стоящіе углы взаимно равны, хотя будущъ стоятъ при центрахъ, хотя при окружностяхъ.

Пусть въ равныхъ кругахъ ABC, DEF, и на равныхъ дугахъ BC, EF, будущъ стоятъ при центрахъ G, H, углы BGC, EHF, а при окружностяхъ углы BAC, EDF. Говорю, что уголь BGC равенъ углу EHF; а уголь BAC углу EDF.

Ибо, еспли уголь BGC равенъ углу EHF; *20. то явно, что и уголь BAC равенъ углу EDF*.

Еспли же нѣтъ; то одинъ изъ нихъ большій: пусть будетъ уголь BGC большій. При прямой BG, и при точкѣ на ней G, составъ уголь BGC равный углу EHF. И поелику равные углы стоятъ на равныхъ дугахъ, когда они при центрахъ; *26. то дуга BK равна дугѣ EF. Но EF равна

BC: посему и BK равна BC, меньшая большей; что невозможно. А посему угол BGC не неравенъ углу ENF: слѣдственно равенъ. Но угла BGC есть половина угла при A, а угла ENF есть половина угла при D; чего ради и угол при A равенъ углу при D.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н. (3о).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Въ равныхъ кругахъ, равныя прямая опнимаютъ равныя дуги, большую дугу равную большей, а меньшую меньшей.

Пусть будутъ ABC, DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ AB, DE равныя прямая, кои опнимаютъ дуги ACB, DFE большія, а AGB, DNE меньшія. Говорю, что большая дуга ACB равна большей дугѣ DFE, а меньшая дуга AGB равна меньшей DNE.

Возьми круговъ центры K, L*; и пропями *1. AK, KB, DL, LE.

Поелику круги равны, то и прямая изъ центровъ ихъ равны. Итакъ двѣ прямая AK, KB равны двумъ прямымъ DL, LE; и основаніе AB равно основанію DE: посему уголъ АКВ равенъ углу DLE. Равные же углы стоятъ на равныхъ дугахъ, когда

26. они при центрахъ; посему дуга AGB равна дугѣ DHE . А и цѣлый кругъ ABC равенъ цѣлому кругу DEF : чего ради и оспальная дуга ACB равна оспальной дугѣ DFE .

Итакъ въ равныхъ , и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Въ равныхъ кругахъ , равныя дуги стягиваются равными прямыми.

Пусть будутъ ABC , DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ взяты равныя дуги BGC , EHF , и пропаяны прямая BC , EF . Говорю, что прямая BC равна прямой EF .

1. Возьми круговъ центры, и пусть будутъ оныя K , L ; и пропаяни BK , KC , EL , LF .

Поелику дуга BGC равна дугѣ EHF ; то и *27. уголъ BKC равенъ углу ELF *. И поелику круги ABC , DEF равны ; то и прямая изъ центровъ ихъ равны. Итакъ двѣ прямая BK , KC равны двумъ прямымъ EL , LF , и содержатъ равныя углы; посему основаніе BC равно основанію EF .

Итакъ въ равныхъ , и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Данную дугу раздѣлишь по поламъ.

Пусть будетъ ADB данная дуга. Надлежитъ дугу ADB раздѣлишь по поламъ.

Пропяни АВ; и раздѣли оную по поламъ въ С*; и опъ почки С проводи, подъ пря- *10, I. мыми углами къ АВ, прямую СВ*; и про- *11, I. пяни АД, ДВ.

Поелику АС равна СВ, а CD общая; по двѣ прямая АС, CD равны двумъ прямымъ ВС, CD; и уголь АCD равенъ углу BCD, ибо каждый изъ нихъ прямой: посему основаніе АД равно основанію ДВ. Равныя же прямая опнимаютъ равныя дуги, большую дугу равную большей, а меньшую меньшей*; и каждая изъ *28. дугъ АД, ДВ есть меньше полукружія: чего ради дуга АД равна дугѣ ДВ.

Итакъ данная дуга раздѣлена по поламъ. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Въ кругѣ, уголь въ полукружіи есть прямой, въ опрѣзкѣ же большемъ полукружія уголь меньше прямого; а въ опрѣзкѣ меньшемъ уголь больше прямого. И еще, уголь большаго опрѣзка есть больше прямого; а уголь меньшаго опрѣзка меньше прямого.

Пусть будетъ ABCD кругъ; и пусть будетъ ВС его поперечникъ, а Е центръ; и пропяни ВА, АС, АД, ДС. Говорю, что въ

полукружїи ВАС уголъ ВАС есть прямой ; въ опрѣзкѣ же АВС большемъ полукружїи уголъ АВС меньше прямого ; а въ опрѣзкѣ ADC меньшемъ полукружїи уголъ ADC больше прямого.

Пропяни АЕ ; и продолжи ВА къ Г.

Поелику ВЕ равна ЕА ; то уголъ АВЕ равенъ углу ВАЕ. Еще же , поелику СЕ равна ЕА ; то уголъ АСЕ равенъ углу САЕ. Посему цѣлый уголъ ВАС равенъ двумъ угламъ АВС, АСВ. Но и уголъ ГАС, какъ внѣшній преутольника АВС, равенъ двумъ *32, I. угламъ АВС, АСВ* ; посему уголъ ВАС равенъ углу ГАС ; а посему каждый изъ нихъ есть прямой. Чего ради въ полукружїи ВАС уголъ ВАС есть прямой.

И поелику преутольника АВС два угла АВС, *17, I. ВАС меньше двухъ прямыхъ* ; и уголъ ВАС есть прямой : то уголъ АВС меньше прямого ; и онъ въ опрѣзкѣ АВС большемъ полукружїи.

И поелику АВCD есть чепыреутольникъ къ кругѣ ; а въ кругахъ, чепыреутольниковъ *22. пропивулежащіе углы равны двумъ прямымъ* : посему углы АВС, ADC равны двумъ прямымъ. Но уголъ АВС меньше прямого : чего ради осальной уголъ ADC есть больше прямого ; и онъ въ опрѣзкѣ ADC меньшемъ полукружїи.

Говорю еще, что уголъ большого опрѣзка, содержимый дугою ABC и прямою AC , есть больше прямого; а уголъ меньшаго опрѣзка, содержимый дугою ADC и прямою AC , есть меньше прямого. Сіе очевидно: Ибо, какъ уголъ содержимый прямыми BA , AC есть прямой; то содержимый дугою ABC и прямою AC есть больше прямого. Еще же, поелику уголъ содержимый прямыми AC , AF есть прямой; то содержимый прямою CA и дугою ACD меньше прямого.

Ипакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

Иначе. Доказывается, что уголъ BAC прямой. Поелику уголъ AEC есть двукратный угла BAE , ибо равенъ двумъ внутреннимъ прошивулежащимъ; а и уголъ AEB есть двукратный угла EAC : посему углы AEB , AEC суть двукратные угла BAC . Но углы AEB , AEC равны двумъ прямымъ*; чего *13,1. ради уголъ BAC есть прямой. ч. и д. н.

Слѣдствие. Опсуда явствуетъ, что если ли въ преугольникѣ одинъ уголъ равенъ двумъ прочимъ; то оный уголъ будетъ прямой, ибо и его смѣжный равенъ тѣмъ же угламъ. А когда смѣжные углы равны, то они суть прямые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXXII.

Ежели прямая касается къ кругу, и опъ прикосновенія проведена будетъ въ кругѣ какая ниспъ прямая сѣкущая сей кругъ: то углы, копорые она дѣлаетъ при касательной, будутъ равны угламъ въ накосълежащихъ опрѣзкахъ круга.

Пусть къ кругу ABCD касается прямая EF въ почкѣ В; и опъ почки В пусть проведена будетъ въ кругѣ ABCD прямая BD, сѣкущая оный. Говорю, что углы, копорые BD дѣлаетъ съ касательною EF, равны угламъ въ накосълежащихъ опрѣзкахъ круга, то еспъ, что уголь FBD равенъ углу въ опрѣзкѣ BAD составленному, а уголь DBE равенъ углу въ опрѣзкѣ DCB.

Проведи опъ В, подъ прямыми углами къ EF, прямую ВА; и возьми на дугѣ BD какую ниспъ почку С; и пропями AD, DC, СВ.

Поелику къ кругу ABCD касается прямая EF въ почкѣ В, и опъ прикосновенія В проведена, подъ прямыми углами къ касательной, прямая ВА: то на ВА еспъ центръ *19. круга ABCD*; почему ВА еспъ поперечникъ круга ABCD. Слѣдственно уголь ADB, въ *31. полукружьи составленный, еспъ прямой*; посему остальные углы BAD, ABD «пре-

угольника ABD » равны одному прямому. И угол ABF прямой же; посему угол ABF равен углам BAD , ABD . Опними обще угол ABD ; посему оспальной угол DBF равен углу BAD въ накосълежащемъ опрѣзкѣ круга. И поелику $ABCD$ есть чепыреугольникъ въ кругѣ; по пропивиулежащѣе его углы равны двумъ прямымъ*. А и углы DBF , *22. DCE равны двумъ прямымъ; посему углы DBF , DCE равны угламъ BAD , BCD . Но въ нихъ угол BAD равенъ, по доказанному, углу DBF ; чего ради оспальной угол DCE равенъ углу DCB въ накосълежащемъ опрѣзкѣ DCB круга.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

На данной прямой написать опрѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ AB данная прямая, а C данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ на данной прямой AB написать опрѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный углу C . Уголъ же C есть или оспрой, или прямой, или тупой.

Пусть будетъ, вопервыхъ, оспрой, какъ въ первой фигурѣ. При прямой AB , и при

- *23, I. по точкѣ А, составь уголъ $\angle BAD$ равный углу $\angle C$:
 посему и уголъ $\angle BAD$ есть острый. Проведи
 отъ точки А, подъ прямыми углами къ AD ,
 *11, I. прямую AE ; и раздѣли AB по поламъ въ
 F ; и проводи отъ точки F , подъ прямыми
 углами къ AB , прямую FG ; и пропни GB .
 Поелику AF равна FB , а FG общая; по
 двѣ прямыя AF , FG равны двумъ прямымъ
 FB , FG ; и уголъ $\angle AFG$ равенъ углу $\angle BFG$: по-
 сему основаніе AG равно основанію GB . Слѣд-
 ственно кругъ, изъ центра G и разстояніемъ
 GA написанный, пройдетъ и чрезъ B . Напиши
 сей кругъ; и пусть онъ будетъ ABE ; и
 пропни BE . Поелику отъ конца A по-
 перечника AE проведена, подъ прямыми угла-
 ми къ AE , прямая AD ; по AD касательна къ
 16. кругу. И поелику къ кругу ABE касается пря-
 мая AD ; и отъ прикосновенія A проведена въ
 кругъ ABE прямая AB : по уголъ $\angle DAB$ равенъ уг-
 лу $\angle AEB$, въ наосълежащемъ опрѣзкѣ круга*.
 Но уголъ $\angle DAB$ равенъ углу $\angle C$; посему и уголъ $\angle C$
 равенъ углу $\angle AEB$. И такъ на данной прямой AB
 написанъ опрѣзокъ круга ABE , вмѣщающій
 уголъ $\angle AEB$ равный данному углу $\angle C$.
 Но пусть будетъ уголъ $\angle C$ прямой; и
 пусть надлежитъ еще на AB написать оп-
 рѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный
 прямому $\angle C$. Составь еще уголъ $\angle BAD$ равный

прямому углу C , какъ значится на второй фигурѣ; и раздѣли AB по поламъ въ F ; и изъ центра F , разстоянiемъ копирой ниспѣ изъ прямыхъ FA , FB , напизи кругъ AEB . Ипакъ прямая AD касательна къ кругу AEB^* , по причинѣ, что уголъ $\angle BAD$ при A естъ прямой: и уголъ $\angle BAD$ равенъ углу въ опрѣзкѣ AEB ; поелику и сей уголъ естъ прямой*, ибо находится въ полукружii. Но уголъ $\angle BAD$ равенъ углу C ; посему и уголъ въ опрѣзкѣ AEB равенъ углу C . Ипакъ на AB еще написанъ опрѣзокъ круга AEB , вмѣщающій уголъ равный углу C .

Но еще пусть будетъ уголъ C тупой. Соспавъ при прямой AB и при почкѣ A , сему углу равный, уголъ $\angle BAD$, какъ значится на претпѣй фигурѣ; и проводи, подъ прямыми углами къ AD , прямую AE ; и раздѣли опять AB по поламъ въ F ; и проводи, подъ прямыми углами къ AB , прямую FG ; и пропязи GB . Поелику опять AF равна FB , а FG общая; по двѣ прямыя AF , FG равны двумъ прямымъ BF , FG ; и уголъ $\angle AFG$ равенъ углу $\angle BFG$: посему основанiе AG равно основанiю BG . Слѣдственно кругъ, изъ центра G и разстоянiемъ GA написанный, пройдетъ и чрезъ B . Пусть проходитъ какъ AEB . Поелику же къ поперечнику AE , отъ конца его, проведена

подъ прямыми углами, прямая AD ; то AD
 *16. касательна къ кругу AEB *: и опъ прикоснове-
 нія, что въ A , проведена прямая AB ; посему
 уголъ BAD равенъ углу составленному въ на-
 *32. косълежащемъ круга опрѣзкѣ $АНВ$ *. Но уголъ
 BAD равенъ углу C ; посему и уголъ въ
 опрѣзкѣ $АНВ$ равенъ углу C .

Итакъ на данной прямой AB написанъ
 опрѣзокъ круга $АНВ$, вмѣщающій уголъ
 равный углу C . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Опъ даннаго круга опишеть опрѣзокъ,
 вмѣщающій уголъ равный данному прямо-
 линейному углу.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а D
 данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ
 опъ круга ABC опишеть опрѣзокъ, вмѣща-
 ющій уголъ равный углу D .

Проведи къ кругу ABC касательную EF
 *17. въ точкѣ B *; и составь при прямой EF , и
 при данной на ней точкѣ B , уголъ FBC рав-
 ный углу D .

Поелику къ кругу ABC касается прямая
 EF , и опъ прикосновенія B проведена прямая
 BC ; то уголъ FBC равенъ углу составлен-
 32. ному въ BAC , въ накосълежащемъ опрѣзкѣ.

Но уголъ FBC равенъ углу D ; посему и уголъ въ опрѣзкѣ BAC равенъ углу D .

Итакъ опъ даннаго круга ABC опныя опрѣзокъ BAC , вмѣщающій уголъ равный данному прямолинейному углу D , ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то прямоугольникъ содержимый въ опрѣзкахъ одной равенъ прямоугольнику содержимому въ опрѣзкахъ другой.

Пусть въ кругѣ $ABCD$, двѣ прямыя AC , BD , взаимно пресѣкутся въ точкѣ E . Говорю, что прямоугольникъ въ AE , EC равенъ прямоугольнику въ DE , EB .

Ежели прямыя AC , BD проходятъ чрезъ центръ, такъ что E будетъ центръ круга $ABCD$; то явно, что по равенству прямыхъ AE , EC , DE , EB , и прямоугольникъ въ AE , EC равенъ прямоугольнику въ DE , EB .

Но пусть прямыя AC , DB не проходятъ чрезъ центръ. Возьми центръ круга $ABCD$ *, и *1. пусть будетъ оный F ; и опъ F проводи, перпендикулярныя къ AC , DB , прямыя FG , FH ; и пропни FB , FC , FE .

Поелику прямая FG , проходящая чрезъ центръ, прямую AC , непроходящую чрезъ

центрѣ, разсѣкаетъ подѣ прямыми углами;

3. по разсѣченію оную и по поламъ: посему AG равна GC . И поселику прямая AC разсѣчена на равныя въ G , и на неравныя въ E ; по прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣстѣ съ квадратомъ

*5, II. изъ GE , равенъ квадрату изъ GC *. Придай обще квадратъ изъ GF ; посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣстѣ съ квадратами изъ FG , GE , равенъ квадратамъ изъ CG , GF . Но квадратамъ изъ EG , GF равенъ квадратъ

*47, I. изъ FE *; квадратамъ же изъ CG , GF равенъ квадратъ изъ FG : посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE , равенъ квадрату изъ FC . Но FC равна FB ; посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EF , равенъ квадрату изъ FB . Потому же и прямоугольникъ въ DE , EB , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE , равенъ квадрату изъ FB . А доказано, что и прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE , равенъ квадрату изъ FB : посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE , равенъ прямоугольнику въ DE , EB , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE . Отними обще квадратъ изъ FE ; посему оспальной прямоугольникъ въ AE , EC равенъ прямоугольнику въ DE , EB .

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Ежели виѣ круга взята будетъ какая ничесъ почка; и опѣ нея на кругъ упадутъ двѣ прямая, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему касаеися: то прямоугольникъ, содержимый въ цѣлой и въ прямой, которая виѣ круга между почкою и выпуклою окружностію, равенъ квадрату изъ касаельной.

Виѣ круга ABC пусть будетъ взята какая ничесъ почка D ; и опѣ D на кругъ ABC пусть упадутъ двѣ прямая DSA , DB ; и пусть прямая DSA пресѣкаетъ кругъ ABC , а DB къ нему касаеися. Говорю, что прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрату изъ DB . Прямая DSA или проходитъ черезъ центръ, или нѣтъ.

Пусть, во первыхъ, проходитъ черезъ центръ, и пусть будетъ F центръ круга ABC ; и протяни FB . Ипакъ уголъ FBD есть прямой*. И поелику прямая AC разсѣчена по *18. поламъ въ F , и приложена къ ней прямая CD ; то прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FC , равенъ квадрату изъ FD *. Но FC равна FB ; посему *6, II. прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FB , равенъ квадрату изъ FD .

Квадратъ же изъ FD равенъ квадратамъ
 *47. I. изъ FB , BD *; ибо уголъ FBD есть прямой:
 посему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣ-
 стѣ съ квадратомъ изъ FB , равенъ квадратамъ
 изъ FB , BD . Опними обще квадратъ изъ
 FB ; чего ради остальной прямоугольникъ
 въ AD , DC равенъ квадрату изъ касатель-
 ной DB .

Но пусть прямая DSA и не проходитъ
 чрезъ центръ круга ABC . Возьми его центръ
 *1. E *; и опъ E проводи, перпендикулярную къ
 AC , прямую EF ; и пропни EB , EC , ED .
 Ипакъ уголъ EFD есть прямой. И поели-
 ку прямая EF , проходящая чрезъ центръ,
 прямую AC , непроходящую чрезъ центръ,
 разсѣкаетъ подъ прямыми углами; по раз-
 3. сѣчетъ оную и по поламъ: посему AF
 равна FC . И поелику прямая AC разсѣчена
 по поламъ въ F ; и приложена къ ней пря-
 мая CD : по прямоугольникъ въ AD , DC ,
 вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FC , равенъ ква-
 *6. II. драпу изъ FD *. Придай обще квадратъ изъ
 FE ; посему прямоугольникъ въ AD , DC ,
 вмѣстѣ съ квадратами изъ CF , FE , ра-
 венъ квадратамъ изъ DF , FE . Но квадра-
 тами изъ DF , FE равенъ квадратъ изъ DE ,
 ибо уголъ EFD есть прямой; а квадратамъ
 изъ CF , FE равенъ квадратъ изъ CE : по-

сему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ EC , равенъ квадрапу изъ ED . Но EC равна EB ; посему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ EB , равенъ квадрапу изъ ED . Квадрапу же изъ ED равны квадраты изъ EB , BD , ибо уголъ EBD есть прямой; посему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ EB , равенъ квадрапамъ изъ EB , BD . Опними обще квадраты изъ EB ; чего ради остальной прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрапу изъ DB .

Итакъ, ежели вѣ круга, и пр. ч. и д. н. (31).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Ежели вѣ круга взята будетъ какая нисѣ почка; и опъ нее на кругъ упадутъ двѣ прямыя, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему падаетъ; и будетъ прямоугольникъ въ цѣлой сѣкущей и въ прямой, копорая вѣ круга между почкою и выпуклою окружностію, равенъ квадрапу изъ падающей: то падающая будетъ касаться къ кругу.

Вѣ круга ABC пусть будетъ взята какая нисѣ почка D ; и опъ D на кругъ ABC пусть упадутъ двѣ прямыя DSA , DB ;

и пусть прямая $ДСА$ пресѣкаетъ кругъ, а DB къ нему падаетъ; и пусть прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрату изъ DB . Говорю, что DB касается къ кругу ABC .

17. Проведи къ кругу ABC касательную DE^ ;

1. и возьми круга ABC^ ; центръ F и пропяти FE , FB , FD .

18. Ипакъ уголъ FED есть прямой. И поелику DE касается къ кругу ABC , и $ДСА$ пресѣкаетъ оный; то прямоугольникъ въ

36. AD , DC равенъ квадрату изъ DE^ . Предполагается же, что прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрату изъ DB ; посему квадратъ изъ DE равенъ квадрату изъ DB ; а посему DE равна DB : А и FE равна FB ; ипакъ двѣ прямыя DE , EF равны двумъ прямымъ DB , BF ; и основаніе FD имъ общее: посему уголъ DEF равенъ углу DBF . Но уголъ DEF прямой; посему и уголъ DBF есть прямой. Прямая же BF , продолженная есть перпендикуляръ; а прямая, проведенная опъ конца перпендикула, подъ прямыми къ нему углами, касается къ кругу*; посему DB касается къ кругу ABC . Подобно же докажемъ, естли центръ будетъ и на AC .

Ипакъ, ежели въѣ круга, и проч. ч. и д. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГА IV.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Прямолинейная фигура называется вписанною въ другой прямолинейной фигурѣ, когда каждый изъ угловъ вписываемой фигуры прикасается къ каждой сторонѣ той, въ которой вписывается.

2. Подобно, фигура называется описанною около другой фигуры, когда каждая сторона описываемой фигуры прикасается къ каждому углу той, около которой описывается.

3. Прямолинейная фигура называется вписанною въ кругъ, когда каждый уголъ вписываемой фигуры прикасается къ окружности круга.

4. А прямолинейная фигура называется описанною около круга, когда каждая сторона описываемой фигуры касается къ окружности круга.

5. Подобно, кругъ въ прямолинейной фигурѣ называется вписаннымъ, когда окружность круга касается къ каждой сторонѣ фигуры, въ которой вписывается.

6. Кругъ же называется описаннымъ около прямолинейной фигуры, когда окружность круга прикасается къ каждому углу фигуры, около которой описывается.

7. Прямая называется помещенною въ кругѣ, когда концы ея суть на окружности круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Въ данномъ кругѣ помѣстить прямую равную данной прямой, которая не больше поперечника онаго круга.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а D данная прямая, которая не больше поперечника онаго круга. Надлежитъ въ кругѣ ABC помѣстить прямую равную прямой D .

1. III. Круга ABC проведи поперечникъ BC^ . И ежели BC равна D ; то предложенное сдѣ-

опр. 7. лано, ибо въ кругѣ ABC помѣщена прямая

BC равная D. Если же BC больше D: то положи прямую CE равную D*; и изъ центра *3, I. C, разстояніемъ CE, напishi кругъ AEF; и пропями SA.

Поелику точка C есть центръ круга AEF, то SA равна CE. Но D равна CE; чего ради D равна и SA.

Ипакъ въ данномъ кругѣ ABC помѣщена прямая SA равная данной прямой D, копорая не больше поперечника онаго круга. Ч. и С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Въ данномъ кругѣ вписать преугольникъ равноугольный данному преугольнику.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а DEF данный преугольникъ. Надлежитъ въ кругѣ ABC вписать преугольникъ равноугольный преугольнику DEF.

Проведи прямую GH, касательную къ кругу ABC въ точкѣ A*; и составь при *17, III. прямой AH, и при точкѣ на ней A, уголь HAC равный углу DEF*; и еще при прямой *23, I. GA, и при точкѣ на ней A, уголь GAB равный углу FDE; и пропями BC.

Поелику прямая GA касается къ кругу ABC; и опъ прикосновенія проведена въ кругѣ прямая AC: то уголь GAC равенъ углу въ

накослежащемъ опрѣзкѣ круга, то есть углу

32, III. ABC^ . Но уголъ GAC , равенъ и углу DEF ; посему и уголъ ABC равенъ углу DEF . Поэтому же и уголъ ACB равенъ углу FDE : слѣдственно и оспальной уголъ BAC равенъ оспальному

32, I. EFD^ . Чего ради преугольникъ ABC есть равноугольный преугольнику DEF , и впи-

опр. 3. санъ въ кругѣ ABC^ .

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ преугольникъ равноугольный данному преугольнику $Ч. и С. Н.$

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Около даннаго круга описать преугольникъ равноугольный данному преугольнику.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а DEF данный преугольникъ. Надлежитъ около круга ABC описать преугольникъ равноугольный преугольнику DEF .

Продолжи EF на обѣ стороны къ точкамъ G , H ; возьми круга ABC центръ K^* ;

и проводи какъ ниесъ прямую KB ; при прямой KB , и при точкѣ на ней K , составь

23, I. уголъ BKA равный углу DEG^ , а уголъ BKC равный углу DFH ; и чрезъ точки A , B , C проводи, касательныя къ кругу ABC , пря-

17, III. мыя LAM , MBN , NCL^ .

Поелику къ кругу ABC касающіяся прямыя LM , MN , NL въ точкахъ A , B , C ; и опъ центра K къ точкамъ A , B , C пропаяну-
пы прямыя KA , KB , KC : то углы при
точкахъ A , B , C суть прямые*. И по- *18, III.
елику чепыреугольника $AMBK$ всѣ чепыре
угла равны чепыремъ прямымъ*, ибо $AMBK$ *32, I.
можетъ раздѣлиться на два преугольника;
и углы MAK , KBM суть прямые: посему
оспальные углы AKB , AMB равны двумъ
прямымъ. A и углы DEG , DEF равны двумъ
прямымъ*; посему углы AKB , AMB равны *13, I.
угламъ DEG , DEF . Но въ нихъ уголь AKB
равенъ углу DEG ; посему оспальной AMB
равенъ оспальному DEF . Подобно же дока-
жется, что и уголь LMN равенъ углу DFE ;
посему и оспальной уголь MLN равенъ
оспальному EDF . Слѣдспвенно преуголь-
никъ LMN еспъ равноугольный преугольни-
ку DEF , и описанъ около круга ABC *. *опр. 4.

Итакъ около даннаго круга описанъ пре-
угольникъ равноугольный данному преуголь-
нику. Ч. и. с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Въ данномъ преугольникѣ вписать кругъ.
Пусъ будешъ ABC данный преугольникъ.
Надлежитъ въ преугольникѣ ABC вписать
кругъ.

Раздѣли углы ABC , ACB по поламъ пря-
 9, I. мыми BD , CD^ , кои и встрѣяшся пусть
 въ точкѣ D ; и проводи отъ D , перпендику-
 12, I. лярныя къ AB , BC , CA , прямыя DE , DF , DG^ .

Поелику уголъ ABD равенъ углу CBD ,
 ибо уголъ ABC раздѣленъ по поламъ; также
 и прямой уголъ BED равенъ прямому BFD ;
 по два треугольника EBD , FBD имѣютъ
 два угла равные двумъ угламъ, и одну спо-
 рону равную одной споронѣ, кои прошиву-
 лежащъ равнымъ угламъ, по есѣ, общую
 имъ спорону BD : посему и прочія споро-
 ны будутъ имѣть равныя прочимъ споро-
 26, I. намъ; а посему DE равна DF . Потому же
 и DG равна DF : « чего ради при прямыя DE ,
 DF , DG сущь взаимно равны ». И потому
 кругъ, изъ центра D и разстоянїемъ одной
 изъ прямыхъ DE , DF , DG написанный, прой-
 дешь и чрезъ прочія точки; и будетъ ка-
 саться къ прямымъ AB , BC , CA , ибо углы
 при точкахъ E , F , G сущь прямые. А бу-
 де бы пресѣкала оныя, то прямая, прове-
 денная отъ конца поперечника подъ прямы-
 ми къ нему углами, упала бы въ кругъ, что,
 16, III. по доказанному, нелѣпо. А посему и кругъ,
 изъ центра D и разстоянїемъ одной изъ
 прямыхъ DE , DF , DG написанный, не пре-
 сѣчетъ прямыхъ AB , BC , CA ; слѣдствен-

но къ нимъ каснешся, и будетъ кругъ вписанный въ треугольникъ ABC^* . « Впиши *опр.5. онный, какъ EFG . »

Ипакъ въ данномъ треугольникъ ABC вписанъ кругъ EFG . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Около даннаго треугольника описать кругъ.

Пусть будетъ ABC данный треугольникъ. Надлежитъ около даннаго треугольника ABC описать кругъ.

Раздѣли прямая AB , AC по поламъ въ точкахъ D , E^* ; и отъ почекъ D , E про- *10, I. веде, подъ прямыми углами къ AB , AC , прямая DF , EF^* . Онѣ воспрѣпятся или *11, I. внутрь треугольника ABC , или на прямой BC , или внѣ BC .

Пусть, вопервыхъ, воспрѣпятся внутри треугольника въ F . Проіяни FB , FC , FA . Поелику AD равна BD , а DF есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами; посему основаніе AF равно основанію FB^* . Подобно *4, I. докажемъ, что и CF равна AF ; слѣдственно и FB равна FC : чего ради три прямая FA , FB , FC суть взаимно равны. И поному кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ прямыхъ FA , FB , FC написанный, прои-

десть и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ
 опр.6. описанный около преугольника ABC. Опи-
 ши оный, какъ ABC.

Но пусть DF, EF встрѣяются и на пря-
 мой BC въ F, какъ значится на второй фи-
 гурѣ. Протяни AF: То подобно же докажемъ,
 что точка F есть центръ круга описанна-
 го около преугольника ABC.

Но пусть DF, EF встрѣяются и въ пре-
 угольника ABC опять въ F, какъ значится
 на третьей фигурѣ. Протяни AF, BF, CF.
 Поскольку опять AD равна DB, а DF есть
 общая, и подъ прямыми къ нимъ углами;
 посему и основаніе AF равно основанію FB.
 Подобно докажемъ, что и FC равна FA:
 слѣдственно и FB равна FC. И потому опять
 кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной
 изъ прямыхъ FA, FB, FC написанный, прой-
 детъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ
 опр.6. описанный около преугольника ABC. Напи-
 ши оный, какъ ABC.

Итакъ около данного преугольника опи-
 санъ кругъ. Ч. и С. Н.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуетъ, что ко-
 гда центръ круга падаетъ внутри преуголь-
 ника, то уголъ BAC будетъ въ опрѣзкѣ
 большемъ полукружія, а потому меньше пря-

маго*; когда же на BC , то будетъ въ полу- *31, III.
 кружїи, и пошому прямой*; а когда центръ *31, III.
 упадетъ внѣ прямой BC , то уголъ BAC
 будетъ въ опрѣзкѣ меньшемъ полукружїи,
 и пошому больше прямого*. Слѣдовательно *31, III.
 и обратно, когда данный уголъ меньше пря-
 маго, то прямая DF , EF воспрѣмются вну-
 три треугольника; когда же прямой, то
 на BC ; а когда больше прямого, то внѣ BC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Въ данномъ кругѣ вписать квадратъ.

Пусть будетъ $ABCD$ данный кругъ. Над-
 лежитъ въ кругѣ $ABCD$ вписать квадратъ.

Проведи въ кругѣ $ABCD$ два поперечника
 AC , BD , подъ прямыми углами одинъ къ
 другому; и просяни AB , BC , CD , DA .

Поелику BE равна ED , ибо E есть центръ,
 а EA есть общая, и подъ прямыми къ нимъ
 углами; посему основаніе AB равно осно-
 ванію AD . Пошому же и каждая изъ прямыхъ
 BC , CD равна каждой изъ прямыхъ BA , AD :
 чего ради четырехугольникъ $ABCD$ есть равно-
 споронный. Говорю же, что онъ и прямо-
 угольный. Ибо, какъ прямая BD есть попе-
 речникъ круга $ABCD$; то BAD есть по-
 лукружіе; посему уголъ BAD прямой*. По- *31, III.

тому же и каждый изъ угловъ ABC, BCD, CDA естъ прямой: чего ради чепыреугольникъ $ABCD$ естъ равноугольный. А доказано, что онъ и равносторонный; слѣдственно онъ оп. 30, I. естъ квадрапъ*: И вписанъ въ данномъ *опр. 3. кругѣ $ABCD$.*

Ипакъ въ данномъ кругѣ $ABCD$ вписанъ квадрапъ $ABCD$. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Около даннаго круга описать квадрапъ.

Пусть будетъ $ABCD$ данный кругъ. Надлежитъ около круга $ABCD$ описать квадрапъ.

Проведи въ кругѣ $ABCD$ два поперечника AC, BD , подъ прямыми углами одинъ къ другому; и чрезъ шочки A, B, C, D проводи касательныя къ кругу $ABCD$ прямыя FG, GH, HK, KF .

Поелику FG касается къ кругу $ABCD$, и отъ центра E къ прикосновенію A пропшну- *18, III. та прямая EA ; то углы при A сунъ прямые*.

Пошому же и углы при шочкахъ B, C, D сунъ прямые. И поелику уголь AEB естъ прямой, и уголь EBG прямой же; посему GH парал-

*28, I. лельна къ AC *. Пошому же и AC параллельна къ FK ; слѣдственно и GH параллельна къ

*30, I. FK *. Подобно докажемъ, что и каждая изъ

прямыхъ GF, НК параллельна къ BED. Ипакъ GK, GC, AK, FB, BK супъ параллелограммы; посему GF равна НК*, а GH *34, I. равна FK. И поелику AC равна BD; и AC равна каждой изъ прямыхъ GH, FK, а BD каждой изъ прямыхъ GF, НК: посему каждая изъ прямыхъ GH, FK равна каждой изъ прямыхъ GF, НК. Чего ради чепыреугольникъ FGNK есть равноспоронный. Говорю же, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ GBEA есть параллелограммъ; и уголь AEB прямой: по и уголь AGB есть прямой*. Подобно докажемъ, *34 I. что и углы при H, K, F супъ прямые: чего ради чепыреугольникъ FGNK есть прямоугольный. А доказано, что онъ и равноспоронный; слѣдственно онъ есть квадрапъ: И описанъ около круга ABCD*.

*опр. 4.

Ипакъ около даннаго круга описанъ квадрапъ. ч. и с. н. (32).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Въ данномъ квадрапѣ вписатьъ кругъ.

Пусть будетъ ABCD данный квадрапъ. Надлежитъ въ квадрапѣ ABCD вписатьъ кругъ.

Раздѣли каждую изъ прямыхъ AB, AD по поламъ въ почкахъ F, E; и чрезъ E проведи, параллельную къ которой ниестъ изъ прямыхъ AB, CD, прямую EH*; а чрезъ F *31, I.

* *

проведи, параллельную къ которой ииесъ
изъ прямыхъ AD , BC , прямую FK . Ипакъ
каждый изъ чепыреугольниковъ AK , KB ,
 $АН$, HD , AG , GC , BG , GD естъ паралле-
лограмъ; и пропивиулежащія ихъ спороны

34.1. сущъ равны. И поелику AD равна AB ; и
 AE естъ половина AD , а AF половина AB :
посему и AE равна AF ; слѣдственнo и про-
пивиулежащія имъ спороны равны, а посему
и FG равна GE . Подобно докажемъ, что
и каждая изъ прямыхъ GH , GK равна каждой
изъ прямыхъ FG , GE : чего ради чепыре
прямыя GE , GF , GH , GK взаимно равны.
И пошому кругъ, изъ центра G и разстоя-
нiемъ одной изъ прямыхъ GE , GF , GH , GK
написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точ-
ки; и будетъ касаться къ прямымъ AB , BC ,
 CD , DA , ибо углы при E , F , H , K сущъ
прямые. А буде бы кругъ пресѣкалъ прямыя
 AB , BC , CD , DA ; то прямая, проведенная
отъ конца поперечника подъ прямыми къ
нему углами, упала бы въ кругъ, что, по до-
казанному, нелѣпо*. А посему и кругъ, изъ
центра G и разстоянiемъ одной изъ прямыхъ
 GE , GF , GH , GK написанный, не пресѣ-
четъ прямыхъ AB , BC , CD , DA : слѣд-
ственнo къ нимъ каснется, и будетъ кругъ

*опр.5. вписанный въ квадратъ $ABCD$ *. « Внѣш-
ный, какъ $EFHK$. »

Итакъ въ данномъ квадрапѣ вписанъ кругъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Около даннаго квадрата описатьъ кругъ.

Пусть будетъ ABCD данный квадратъ. Надлежитъ около квадрата ABCD описатьъ кругъ.

Пропяни AC, BD, кои пресѣкутся пусть въ E.

Поелику DA равна AB, а AC общая; то двѣ прямыя DA, AC равны двумъ прямымъ BA, AC; и основаніе DC равно основанію BC: посему уголъ DAC равенъ углу BAC*; а по- *8.г. сему уголъ DAB раздѣленъ по поламъ прямою AC. Подобно докажемъ, что и каждый изъ угловъ ABC, BCD, CDA раздѣленъ по поламъ одною изъ прямыхъ AC, DB. И поелику уголъ DAB равенъ углу ABC; и уголъ EAB есть половина угла DAB, а уголъ EBA есть половина угла ABC: посему уголъ EAB равенъ углу EBA; слѣдственно и сторона EA равна сторонѣ EB*. Подобно докажемъ, *6.г. что и каждая изъ прямыхъ EA, EB равна каждой изъ прямыхъ EC, ED: чего ради чепыре прямыя EA, EB, EC, ED суть взаимно равны. И попому кругъ, изъ центра E и разсѣянїемъ одной изъ прямыхъ EA, EB,

ЕС, ED написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ описанный *опр. 6. около квадрата ABCD*. Опиши оный, какъ ABCD.

Ипакъ около даннаго квадрата описатьъ кругъ. ч. и с. н. (33).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Х.

Составить равнобедренный треугольникъ, имѣющій каждый изъ угловъ при основаніи двукратный остального.

Изложи какую нибудь прямую АВ; и разбѣжи ее въ точкѣ С, такъ чтобы прямоугольникъ въ АВ, ВС былъ равенъ квадрату *11. II. изъ СА*; и изъ центра А, разстояніемъ АВ, напизи кругъ BDE; и въ кругѣ BDE *1. помѣсти прямую BD равную прямой АС*, которая не больше поперечника круга BDE; и пропязи AD, CD; и около треугольника *3. ACD опиши кругъ ACD*.

Поселику прямоугольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрату изъ АС, а АС равна BD; посему прямоугольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрату изъ BD. Ипакъ поселику въ круга ACD взята точка В; и опъ В на кругъ ACD падають двѣ прямыя ВА, ВD, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему падаетъ; и пря-

моугольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрату изъ BD: по BD касается къ кругу ACD*. И поелику *37, III. BD касается, и опъ прикосновенія D проведена прямая DC; посему уголъ BDC равенъ углу въ накосълежащемъ опрѣзкѣ круга, по еспъ углу DAC*. Поелику же уголъ BDC равенъ *32, III. углу DAC; придай обще уголъ CDA: посему цѣлый уголъ BDA равенъ двумъ угламъ CDA, DAC. Но угламъ CDA, DAC равенъ виѣшній уголъ BCD*; посему уголъ BDA равенъ и углу *32, I. BCD. Уголъ же BDA равенъ углу CBD*, ибо *5, I. спорона DA равна споронѣ АВ; слѣдственно и уголъ DBA равенъ углу BCD. Ипакъ при угла BDA, DBA, BCD супъ взаимно равны. И поелику уголъ DBC равенъ углу BCD; по и спорона BD равна споронѣ DC*. Но BD, *6, I. по положенію, равна CA; посему и AC равна CD, слѣдственно и уголъ CDA равенъ углу DAC: а посему углы CDA, DAC супъ двукратны угла DAC. Угламъ же CDA, DAC равенъ уголъ BCD, посему и уголъ BCD еспъ двукратный угла DAC. Уголъ же BCD равенъ каждому изъ угловъ BDA, DBA; чего ради и каждый изъ угловъ BDA, DBA еспъ двукратный угла BAD.

Ипакъ соспавленъ равнобедренный треугольникъ ADB, имѣющій каждый изъ угловъ при основаніи DB двукратный остальнаго.
ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XI.

Въ данномъ кругѣ вписать равноспоро-
ный и равноугольный пятиугольникъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ данный кругъ. Над-
лежитъ въ кругѣ $ABCDE$ вписать равно-
споронный и равноугольный пятиугольникъ.

Изложи равнобедренный треугольникъ
 FGH , имѣющій каждый изъ угловъ G, H
*10. двукратный угла F *; и впиши въ кругъ
 $ABCDE$ треугольникъ ACD равноугольный
*2. треугольнику FGH *, такъ чтобы уголъ CAD
былъ равенъ углу F , а каждый изъ угловъ
 ACD, CDA былъ равенъ каждому изъ угловъ
 G, H : посему каждый изъ угловъ ACD, CDA
тъ двукратный угла CAD . Раздѣли каждый
изъ угловъ ACD, CDA по поламъ прямыми
*9, I. CE, DB *; и просяни AB, BC, DE, EA .

Поселику каждый изъ угловъ ACD, CDA
есть двукратный угла CAD ; и раздѣлены
они по поламъ прямыми CE, DB : то пять
угловъ DAC, ACE, ECD, CDB, BDA взаи-
мно равны. Равные же углы споятъ на ра-
26, III. вныхъ дугахъ; посему пять дугъ $AB, BC,$
 CD, DE, EA взаимно равны. А равныя ду-
29, III. ги спягиваются равными прямыми; посе-
му пять прямыхъ AB, BC, CD, DE, EA взаи-
мно равны. Чего ради пятиугольникъ $ABCDE$

есть равноспоронный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга AB равна DE ; придай обще дугу BCD : посему цѣлая дуга $ABCD$ равна цѣлой дугѣ $EDCB$. На дугѣ же $ABCD$ стоить уголъ AED , а на дугѣ $EDCB$ уголъ BAE ; посему уголъ BAE равенъ углу AED *. Поэтому же и каждый изъ угловъ ABC , BCD , CDE равенъ каждому изъ угловъ BAE , AED : чего ради пятиугольникъ $ABCDE$ есть равноугольный. А доказано, что онъ и равноспоронный:

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ равноспоронный и равноугольный пятиугольникъ.
Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Около данного круга описать равноспоронный и равноугольный пятиугольникъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ данный кругъ. Надлежитъ около круга $ABCDE$ описать равноспоронный и равноугольный пятиугольникъ.

Возьми точки A, B, C, D, E , при которыхъ суть углы вписаннаго пятиугольника*: итакъ дуги AB, BC, CD, DE, EA *^{11.} взаимно равны*; и чрезъ A, B, C, D, E *^{28, III.} проведи касательныя къ кругу прямыя GH, HK, KL, LM, MG ; и возьми круга $ABCDE$ центръ F ; и просяни FB, FK, FC, FL, FD .

Поелику прямая KL касается къ кругу $ABCDE$ въ C , и опть центра F къ прикосновенію C прозянуна прямая FC ; по FC
 *18, III. перпендикулярна къ KL *; посему каждый изъ угловъ при C естъ прямой. Потому же и углы при почкахъ B , D сущь прямые. И поелику уголь FCK прямой; по квадратъ изъ FK равенъ квадратамъ изъ FC ,
 *47, I. $СК$ *. Потому же и квадратамъ изъ FB , BK равенъ квадратъ изъ FK : слѣдствен-
 но квадратамъ изъ FC , $СК$ равны квадраты изъ FB , BK . Но въ нихъ квадратъ изъ FC равенъ квадрату изъ FB ; посему и остальной квадратъ изъ $СК$ равенъ остальному изъ BK ; а посему $С$ равна BK . Поелику же FB равна FC , а FK общая; по двѣ прямыя BF , FK равны двумъ прямымъ CF , FK ; и основаніе BK равно основанію $СК$; посему уголь BFK равенъ углу KFC , а уголь
 *8, I. BKF равенъ углу FKC *; а посему уголь BFC естъ двукратный угла KFC , а уголь $BКС$ угла FKC . Потому же и уголь CFD естъ двукратный угла CFL , а уголь CLD двукратный угла CLF . И поелику дуга BC равна дугѣ CD ; по уголь BFC равенъ углу
 *27, III. CFD *. Но уголь BFC естъ двукратный угла KFC , а уголь DFC двукратный угла LFC ; посему и уголь KFC равенъ углу LFC .

А и уголъ FCK равенъ углу FCL ; ипакъ два
преугольника FKC , FLC , имѣющъ два угла
равные двумъ угламъ, каждый каждому, и
одну сторону равную одной сторонѣ, по
есть, общую имъ сторону FC : посему и
прочія стороны будутъ имѣть равныя
прочимъ сторонамъ, и оспальной уголъ
равный оспальному углу ; а посему пря-
мая KC равна CL, и уголъ FKC равенъ
углу FLC*. Поелику же KC равна CL; по *26, I.
KL есть двукрапная прямой KC. Такъ
же докажется, что и НК есть двукрапная
BK. И какъ по доказанному, BK равна KC;
и LD есть двукрапная KC, а НК двукрап-
ная BK ; посему и НК равна KL. Подобно
докажется, что и каждая изъ прямыхъ HG,
GM, ML равна каждой изъ прямыхъ НК, KL :
чего ради пятиугольникъ GHNLM есть равно-
сторонный. Говорю же, что онъ и равно-
угольный. Ибо, какъ уголъ FKC равенъ углу
FLC ; по доказанному же угла FKC есть
двукрапный уголъ HKL, а угла FLC дву-
крапный уголъ KLM : посему уголъ HKL
равенъ углу KLM. Подобно докажется, что
и каждый изъ угловъ KNG, HGM, GML ра-
венъ каждому изъ угловъ HKL, KLM : чего
ради пять угловъ GHN, HKL, KLM, LMG,
MGN взаимно равны. Ипакъ пятиугольникъ

GNKLM есть равноугольный. А доказано, что онъ и равноспоронный : И описанъ около круга ABCDE. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XIII.

Въ даномъ равноспоронномъ и равноугольномъ пятиугольникѣ вписать кругъ.

Пусть будетъ ABCDE данный равноспоронный и равноугольный пятиугольникъ. Надлежитъ въ пятиугольникѣ ABCDE вписать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD, CDE по поламъ прямыми CF, DF; и опъ точки F, въ коей встрѣятся взаимно прямыя CF, DF, протяни прямыя FB, FA, FE. Поелику BC равна CD, а CF общая; то двѣ прямыя BC, CF равны двумъ прямымъ DC, CF; и уголъ BCF равенъ углу DCF: посему основаніе BF равно основанію DF; и треутольникъ BFC равенъ треутольнику DFC; и прочіе углы равны прочимъ угламъ, кои проотивулежатъ равнымъ сторонамъ: а посему уголъ CBF равенъ углу CDF. И поелику уголъ CDE есть двукратный угла CDF; уголъ же CDE равенъ углу ABC, и уголъ CDF углу CBF; посему и уголъ CBA есть двукратный угла CBF. Ипакъ уголъ

ABF равенъ углу FBC; посему уголъ ABC раздѣленъ по поламъ прямою BF. Подобно докажется, что и каждый изъ угловъ BAE, AED раздѣленъ по поламъ прямыми FA, FE. Опять точки F проводи, перпендикулярныя къ AB, BC, CD, DE, EA, прямыя FG, FH, FK, FL, FM. Поелику уголъ HCF равенъ углу KCF, и прямой уголъ FHC равенъ прямому FKC; то два треугольника FHC, FKC имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной сторонѣ, то есть, общую имъ сторону FC, противоположащую одному изъ равныхъ угловъ: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ; а посему перпендикулярная FH равна перпендикулярной FK. Подобно докажется, что и каждая изъ прямыхъ FL, FM, FG равна каждой изъ прямыхъ FH, FK: чего ради пять прямыхъ FG, FH, FK, FL, FM взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ прямыхъ FG, FH, FK, FL, FM написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки; и будетъ касаться къ прямымъ AB, BC, CD, DE, EA, ибо углы при точкахъ G, H, K, L, M суть прямые. А буде бы не касался, но пресѣкалъ оныя; то вышло бы, что прямая, проведенная отъ конца попереч-

ника подъ прямыми къ нему углами, упала въ
 16, III. кругъ, что, по доказанному уже, не ѿбо. А посе-
 му и кругъ, изъ центра F и разстояніемъ од-
 ной изъ прямыхъ FG, FH, FK, FL, FM написан-
 ный, не пресѣчетъ прямыхъ $AB, BC, CD, DE,$
 EA ; слѣдственно къ нимъ касается. Напиши
 онъ, какъ $GHNLM$.

Итакъ въ данномъ равносѣоронномъ
 и равноугольномъ пѣпиугольникѣ вписанъ
 кругъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Около даннаго равносѣороннаго и равно-
 угольнаго пѣпиугольника описать кругъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ данный равносѣо-
 ронный и равноугольный пѣпиугольникъ.
 Надлежитъ около пѣпиугольника $ABCDE$
 описать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD, CDE
 по поламъ прямыми CF, FD ; и отъ точки
 F , въ косой вспрѣпяшся сѣи прямая, къ поч-
 камъ B, A, E протяни прямая FB, FA, FE .
 Подобно прежнему докажется, что каждый
 изъ угловъ CBA, BAE, AED раздѣленъ по
 поламъ прямыми FB, AF, EF . И поелику
 уголь BCD равенъ углу CDE ; и угла BCD
 половина естъ уголь FCD , а угла CDE по-

ловина уголь CDF ; посему и уголь FCD равенъ углу FDC ; слѣдственно и спорона FC равна споронѣ FD . Подобно докажемъ, *6, I. что и каждая изъ прямыхъ FB , FA , FE равна каждой изъ прямыхъ FC , FD : чего ради пять прямыхъ FA , FB , FC , FD , FE взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ прямыхъ FA , FB , FC , FD , FE написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки, и будетъ описанный около равноспороннаго и равноугольнаго пятиугольника $ABCDE$. Опиши сей кругъ, и пусть будетъ онъ $ABCDE$.

Итакъ около даннаго равноспороннаго и равноугольнаго пятиугольника описанъ кругъ.
Ч. и С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Въ данномъ кругѣ вписать равноспоронный и равноугольный шестигульникъ.

Пусть будетъ $ABCDEF$ данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ $ABCDEF$ вписать равноспоронный и равноугольный шестигульникъ.

Круга $ABCDEF$ проводи поперечникъ AD ; и возьми сего круга центръ G ; и изъ центра D разстояніемъ, DG напиши кругъ

EGCH ; и пропянутыя EG , CG продолжи къ почкамъ В, F ; и пропyani AB , BC , CD , DE , EF , FA . Говорю , что шестигуольникъ ABCDEF естъ равноспоронный и равноугольный.

Поелику почка G естъ центръ круга ABCDEF ; то GE равна GD . Еще же , поелику почка D естъ центръ круга EGCH ; то DE равна DG . Но GE , по доказанному , равна GD ; посему GE равна и ED : ипакъ преугольникъ EGD естъ равноспоронный ; а посему при его угла EGD , GDE , DEG взаимно равны , ибо равнобедренныхъ преугольниковъ углы при основаніи взаим-

5, I. но равны. Поелику же преугольника всѣ

32, I. при угла равны двумъ прямымъ : посему уголь EGD естъ прешья часъ двухъ прямыхъ . Подобно докажешся , что и уголь DGC естъ прешья часъ двухъ прямыхъ . И поелику прямая CG на прямую EB поставленная дѣлаешъ смѣжные углы EGC ,

13, I. CGB равные двумъ прямымъ ; то и оспальной CGB естъ прешья часъ двухъ прямыхъ . Ипакъ при угла EGD , DGC , CGB взаимно равны ; но углы BGA , AGF , FGE , какъ пропвиуположные , равны угламъ EGD ,

15, I. DGC , CGB ; посему шестъ угловъ EGD , DGC , CGB , BGA , AGF , FGE взаимно ра-

вны. Равные же углы споятъ на равныхъ дугахъ*; посему шесть дугъ АВ, ВС, CD, DE, EF, FA взаимно равны. А равны дуги спягиваются равными прямыми*; посему шесть прямыхъ взаимно равны. Чего ради шестигуольникъ ABCDEF есть равноспоронный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга FA равна дугѣ ED; придай обще дугу ABCD: посему и цѣлая дуга FABCD равна цѣлой дугѣ EDCBA. На дугѣ же FABCD споятъ уголь FED, а на дугѣ EDCBA споятъ уголь AFE; посему уголь AFE равенъ углу FED*. Подобно до- *27, III. кажется, что и прочіе углы шестигуольника ABCDEF, одинъ по одному, равны каждому изъ угловъ AFE, FED: чего ради шестигуольникъ ABCDEF есть равноугольный. А доказано, что онъ и равноспоронный: И вписанъ въ кругъ ABCDEF.

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ равноспоронный и равноугольный шестигуольникъ. Ч. и с. н.

Слѣдствие. Отсюда явствуется, что радиуса шестигуольника равна прямой изъ центра круга.

И еслили чрезъ точки А, В, С, D, Е, F проведемъ касательныя къ кругу; то

опишется около круга равноспоронный и равноугольный шеспиугольникъ, въ силу того, что сказано о пиапиугольникѣ. Такъ же сходно съ тѣмъ, что сказано о пиапиугольникѣ, въ данномъ шеспиугольникѣ впишемъ кругъ, и опишемъ около него. (34).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Въ данномъ кругѣ вписать равноспоронный и равноугольный пиапиапиугольникъ.

Пусть будетъ ABCD данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ ABCD вписать равноспоронный и равноугольный пиапиапиугольникъ.

Напиши въ кругѣ ABCD равноспороннаго преугольника въ немъ вписаннаго спорону AC, и равноспороннаго пиапиугольника спорону AB. Поелику окружность ABCD должна быть раздѣлена на пиапиапиа равныхъ частей; по дуга ABC, какъ третья часть окружности, будетъ содержать въ себѣ оныхъ пиа, а дуга AB, какъ пиапиа часть, будетъ содержать три: поему осталая дуга BC будетъ содержать двѣ. Раздѣли BC по поламъ въ E*; поему каждая изъ дугъ BE, EC будетъ пиапиапиа часть окружности круга ABCD. Ипакъ, естли пропиа-

*30, III.

нужь прямыя BE , EC , помѣспимъ въ кругѣ $ABCD$, одну за другою, равныя имъ прямыя; то и получится вписанный въ кругѣ $ABCD$ равноспоронный и равноугольный пѣнадцатиугольникъ $Ч.$ и $С. Н.$

Сходно же съ тѣмъ, что сказано о пѣпиугольникѣ, естли чрезъ точки дѣленія круга проведемъ касательныя къ нему; то опишется около круга равноспоронный и равноугольный пѣнадцатиугольникъ. И еще сходно съ тѣмъ, что сказано о пѣпиугольникѣ, въ данномъ пѣнадцатиугольникѣ впишемъ кругъ, и опишемъ около него. (35).

ЭВКЛИДОВЫХЪ

www.libtool.com.cn

НАЧАЛЪ.

КНИГА V.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. МЕНЬШАЯ величина называется часпною (*μέρος*) большей величины, когда меньшая измѣряетъ большую. (36).

2. Большая же называется крапною (*πολλάσιον*) меньшей, когда большая измѣряетъ меньшую. (37).

3. Опношеніе естъ взаимная нѣкая зависимость двухъ однородныхъ величинъ по ихъ количеству. (*Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πληρότητα πρὸς ἀλλήλα ποιά σχέσις*). (38).

4. Величины называются имѣющими опношеніе одна къ другой, кои будучи взяты крапно, могутъ быть больше одна другой. (39).

5. Величины, говорима, суть въ помѣже отношеніи, первая ко второй и прешья къ четвертой; когда равнокрапныя первой величины и прешьей, и равнокрапныя второй величины и четвертой, взятыя по какому либо крапсвованію, суть шаковы, что попеременно каждая каждой, или купно равны, или купно больше, или купно меньше. (40).

6. Величины имѣющія тоже отношеніе назовемъ пропорціональными.

7. Когда же изъ равнокрапныхъ, крапная первой больше крапныя второй, но крапная прешьей не больше крапныя четвертой; тогда говорится, что первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели прешья къ четвертой. (41).

8. Пропорція есть подобіе или тожество отношеній. (*Αναλογία δὲ ἐστὶν ἡ τῶν ὁμοιότης, а подругимъ: ταυτότης*). (42).

9. Пропорція соспоитъ, по меньшей мѣрѣ, изъ трехъ членовъ. (43).

10. Когда три величины пропорціональны; то говорится, что первая къ прешьей имѣетъ удвоенное отношеніе первая ко второй.

11. Когда четыре величины пропорціональны (44); то говорится, что первая къ четвертой имѣетъ утроенное отношеніе

первая ко второй: и такъ далѣе, пока пропорція продолжится. (45).

12. ~~Сходственными~~ величинами называющіяся предъидущія съ предъидущими, а послѣдующія съ послѣдующими. (46).

13. Премѣненіе отношеній (*Εναλλάξ λόγος*) есть взятіе предъидущей къ предъидущей, и послѣдующей къ послѣдующей.

14. Преложеніе отношенія (*Ανάπαλιν λόγος*) есть взятіе послѣдующей какъ предъидущей, къ предъидущей какъ послѣдующей.

15. Совокупленіе отношенія (*Σύνθεσις λόγου*) есть взятіе предъидущей съ послѣдующею, какъ одной, къ сей послѣдующей.

16. Отдѣленіе отношенія (*Διάφρασις λόγου*) есть взятіе избытка предъидущей предъ послѣдующею, къ сей послѣдующей.

17. Обращеніе отношенія (*Αναστροφὴ λόγου*) есть взятіе предъидущей, къ избытку предъидущей предъ послѣдующею.

18. Равномѣстіе отношеній (*Διῶσου λόγος*) или равенство ихъ есть то, когда изъ имѣющихся многихъ величинъ и другихъ имъ равно многихъ и находящихся по парно въ томъ же отношеніи, будетъ какъ изъ первыхъ величинъ первая къ послѣдней, такъ изъ вторыхъ величинъ первая къ послѣдней.

Или иначе: Когда взяты будущъ крайнія, а среднія оставлены. (47).

19. Спронная (*Τεταρμένη*) пропорція или прямая есть та, когда «изъ имѣющихся таковыхъ же величинъ» будетъ какъ «изъ первыхъ величинъ» предъидущая къ послѣдующей, такъ «изъ вторыхъ величинъ» предъидущая къ послѣдующей; и какъ «изъ первыхъ величинъ» послѣдующая къ другой нѣкоей, такъ «изъ вторыхъ величинъ» послѣдующая къ другой нѣкоей. (48).

20. Неспронная же (*Τεταραμένη*) пропорція или обратная есть та, когда изъ имѣющихся трехъ величинъ и другихъ имъ равномногихъ, будетъ какъ изъ первыхъ величинъ предъидущая къ послѣдующей, такъ изъ вторыхъ величинъ предъидущая къ послѣдующей; и какъ изъ первыхъ величинъ послѣдующая къ другой нѣкоей, такъ другая нѣкая къ послѣдующей вторыхъ величинъ. (49).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели будетъ сколько нисетъ величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнокрапны, каждая каждой; то сколько одна изъ величинъ есть крапная одной, столько и всѣ будущъ крапны всѣхъ.

Пусть будетъ сколько нисестъ величинъ АВ, CD, кои другихъ равномногихъ величинъ Е, F равнократны, каждая каждой. Говорю, что сколько кратная естъ АВ величины Е, столько кратныя будутъ и АВ, CD величинъ Е, F.

Поелику равнократныя суть, АВ величинъ Е, и CD величинъ F; то сколько величинъ въ АВ равныхъ Е, столько же величинъ и въ CD равныхъ F. Раздѣли АВ на величины равныя Е, то естъ, на AG, GB; а CD на величины равныя F, то естъ, на CH, HD. Ипакъ величины CH, HD суть равномногія величинамъ AG, GB. И поелику AG равна Е, а CH равна F; то и AG, CH равны Е, F. Такожь, поелику GB равна Е, а HD равна F; то и GB, HD равны Е, F. Посему сколько величинъ въ АВ равныхъ Е, столько же величинъ и въ АВ, CD равныхъ Е, F: чего ради сколько кратная естъ АВ величины Е, столько кратныя будутъ и АВ, CD величинъ Е, F.

Ипакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели первая величина вѣторой, и третья четвертой равнократны; и также пятая

второй, и шестая четвертой равнократны: то и совокупленно, первая съ пятою второй, и прешья съ шестою четвертой, будутъ равнократныя.

Пусть первая величина АВ второй С, и прешья DE четвертой F, будутъ равнократныя; и также, пусть пятая BG второй С, и шестая EH четвертой F, будутъ равнократныя. Говорю, что и совокупленно, первая съ пятою то есть AG, второй С, и прешья съ шестою, то есть DH, четвертой F, будутъ равнократныя.

Поелику равнократныя суть, АВ величины С, и DE величины F; то сколько величинъ въ АВ равныхъ С, столько же величинъ и въ DE равныхъ F. Потому же сколько величинъ въ BG равныхъ С, столько же величинъ и въ EH равныхъ F. Чего ради сколько величинъ въ цѣлой AG равныхъ С, столько же величинъ и въ цѣлой DH равныхъ F. Ипакъ сколько кратная есть AG величины С, столько кратная будетъ и DH величины F: чего ради и совокупленно, первая съ пятою то есть AG, второй С, и прешья съ шестою то есть DH, четвертой F, будутъ равнократныя.

Ипакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (50).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Ежели первая величина второй, и третья четвертой равнократны; и взяты будутъ первой и третьей равнократныя: то равномѣстно, сѣи взятыя кратныя будутъ равнократныя каждая каждой, одна второй, а другая четвертой.

Пусть первая величина A второй B , и третья C четвертой D , будутъ равнократныя; и пусть будутъ взяты первой A и третьей C равнократныя EF , GH . Говорю, что EF , величины B , и GH величины D суть равнократныя.

Поелику равнократныя суть, EF величины A , и GH величины C ; то сколько величинъ въ EF равныхъ A , столько же величинъ и въ GH равныхъ C . Раздѣли EF на величины равныя A , то есть, на EK , KF ; а GH на величины равныя C , то есть, на GL , LN . Итакъ величины EK , KF суть равномногія величинамъ GL , LN . И поелику равнократныя суть, A величины B , и C величины D ; и EK равна A , а GL равна C : посему равнократныя суть, EK величины B , и GL величины D . Поэтому же равнократны, KF величины B , и LN величины D . Поелику же первая величина EK

второй В, и претъя GL четвертой D, равнократны; и также пятая KF второй В, и шестая LH четвертой D, равнократны: посему и совокупленно, первая съ пятою, то есть EF, второй В, и претъя съ шестюю, то есть GH, четвертой D суть равнократны*.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели первая величина ко второй имѣеть тоже отношеніе, что и претъя къ четвертой; то и равнократныя первой величины и претъей, къ равнократнымъ второй величины и четвертой, по какому нисеть кратствованію, будутъ имѣть тоже отношеніе, взятыя попеременно.

Пусть первая величина А ко второй В имѣеть тоже отношеніе, что и претъя С къ четвертой D; и пусть будутъ взяты величинъ А, С равнократныя Е, F, а величинъ В, D другія какія нисеть равнократныя G, H. Говорю, что какъ Е къ G, такъ F къ H.

Возьми величинъ Е, F равнократныя K, L; а величинъ G, H другія какія нисеть равнократныя M, N.

Поелику равнокрапныя сущь, Е величинъ А, и F величинъ С; и взяпы величинъ Е, F ~~равнокрапныя~~ К, L: посему равнокрапныя сущь, К величинъ А, и L величинъ С*. Потому же равнокрапны сущь, М величинъ В, и N величинъ D. И поелику какъ А къ В, такъ С къ D; и взяпы величинъ А, С равнокрапныя К, L, а величинъ В, D другія какія ниесуть равнокрапныя М, N: посему есцьли К больше М, то и L больше N; и есцьли равна, то равна; и есцьли меньше, то меньше*. Но К, L сущь величинъ Е, F равнокрапныя, а М, N сущь величинъ G, H другія какія ниесуть равнокрапныя: чего ради какъ Е къ ^{*опр.5.} G, такъ F къ H*.

Инакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (51).

Слѣдствие. Поелику доказано, что есцьли К больше М, то и L больше N; и есцьли равна, то равна; и есцьли меньше, то меньше: почему явно, что и обратно, есцьли М больше К, то и N больше L; и есцьли равна, то равна; и есцьли меньше, то меньше: а посему будеть, и какъ ^{*опр.5.} G къ Е, такъ H къ F*. Отсюда явствуеть, что есцьли чепыре величины пропорціо-
опр.14. нальны; то и преложеніемъ будущь пропорціональны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели цѣлая величина цѣлой, и опнятая отъ оной, опнятой отъ другой суть равнокрапныя; то и оспальная оспальной, и цѣлая цѣлой будутъ равнокрапныя.

Пусть^a цѣлая величина АВ цѣлой CD, и опнятая АЕ опнятой CF, будутъ равнокрапныя. Говорю, что и оспальная EB оспальной FD, и цѣлая АВ цѣлой CD будутъ равнокрапныя.

Сколько крапная есть АЕ величины CF, пусть будетъ столько крапна и EB величины CG.

Поелику равнокрапныя суть, АЕ величины CF, и EB величины GC; то равнокрапны суть, АЕ величины CF, и АВ величины GF*. А по положенію, равнокрапны, *1. АЕ величины CF, и АВ величины CD: ипакъ АВ есть равнокрапная каждой изъ величинъ GF, CD; а посему GF равна CD. Опними обще CF; посему оспальная GC равна оспальной DF. И поелику равнокрапныя суть, АЕ величины CF, и EB величины GC; а GC равна DF: то равнокрапны суть АЕ величины CF, и EB величины FD. А по положенію, равнокрапны АЕ величины CF, и АВ величины CD; посему равнокрапны суть

ЕВ величины FD, и АВ величины CD. Чего ради и оспальная ЕВ оспальной FD есть столько кратная, какъ и цѣлая АВ цѣлой CD.

Ипакъ, ежели цѣлая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели двѣ величины равнократны двухъ величинъ; и опияшья нѣкія будутъ равнократны ихъ самыхъ: то оспальныя будутъ или равны имъ же, или равнократны ихъ.

Пусть двѣ величины АВ, CD будутъ двухъ величинъ Е, F равнократныя; и пусть опияшья AG, CH будутъ тѣхъ же Е, F равнократныя. Говорю, что оспальныя GB, HD или равны величинамъ Е, F, или равнократны ихъ.

Вопервыхъ, пусть будетъ GB равна Е. Говорю, что и HD равна F. Положи величину СК, равную F.

Поелику равнократныя суть, AG величины Е, и CH величины F; и GB равна Е, а KC равна F; посему равнократныя *2. суть, АВ величины Е, и КН величины F*. А по положенію, равнократны, АВ величины Е, и CD величины F; посему равнократны суть, КН величины F, и CD величины F. И поелику каждая изъ величинъ

КН, CD есть величины F равнократна; то КН равна CD. Опними обще СН; посему оспальная КС равна оспальной HD. Но КС равна F; посему и HD равна F. Слѣдовательно естли GB равна E, то HD равна будещъ F.

Подобно докажемъ, что естли величина GB величины E будещъ кратная; то сполько кратная будещъ и величина HD величины F.

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н. (52).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Равныя величины къ той же имѣють тоже отношеніе: И таже величина къ равнымъ « имѣеть тоже отношеніе. »

Пустъ будущъ А, В равныя величины; а С другая нѣкая величина. Говорю, что каждая изъ величинъ А, В къ С имѣеть тоже отношеніе; и С къ каждой изъ величинъ А, В « имѣеть тоже отношеніе. »

Возьми величинъ А, В равнократныя D, E; а величины С другую какую, ииесеть кратную F.

Поелику равнократныя суть, D величины А, и E величины В; и А равна В: посему и D равна E. Но F есть величины С другая

какая и естъ крапная: посему естъли D больше F , то и E больше F ; и естъли равна, то равна; и естъли меньше, то меньше. Но D, E сущь величинъ A, B равнокрапныя; а F естъ величины C другая какая и естъ крапная: чего ради какъ A къ C , такъ B къ C .*

*опр. 5.

Говорю шакожъ, что и C къ каждой изъ величинъ A, B имѣеть поже опношеніе.

Ибо, сдѣлавъ поже спроеніе, подобно докажемъ, что D равна E . Но F естъ другая иѣкая величина: посему естъли F больше D , то F больше и E : и естъли равна, то равна, и естъли меньше, то меньше. И F естъ величины C крапная; а D, E сущь величинъ A, B другія какія и естъ равнокрапныя: чего ради какъ C къ A , такъ

опр. 5. C къ B .

Итакъ равныя, и проч. ч. и д. н. (53).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Изъ неравныхъ величинъ большая къ той же имѣеть большее опношеніе, нежели меньшая: И шаже величина къ меньшей имѣеть большее опношеніе, нежели къ большей.

Пусть будутъ AB, C неравныя величины, и пусть AB будетъ большая; а D

другая какая нисестъ величина. Говорю, что АВ къ D имѣетъ большее отноше-
нiе нежели С къ D; и D къ С имѣетъ
большее отношенiе, нежели къ АВ.

Поелику АВ больше С; то положи ВЕ
равную величинѣ С: ипакъ меньшая изъ
величинъ АЕ, ЕВ взятая крапно, будетъ
наконецъ больше D*. Впервыхъ, пусть *опр. 4.
будетъ АЕ меньше величины ЕВ. Бери
крапно величину АЕ, пока получится ве-
личина больше D, и пусть будетъ FG тако-
вая крапная, большая величины D; и сколь-
ко крапная естъ FG величины АЕ, пусть
будетъ столько крапная и GH вели-
чины ЕВ, а К величины С; и возьми
величины D двукрапную величину L, пре-
крапную M, и такъ далѣе всегда одною
больше, пока взятая крапная величины D
будетъ первая, большая величины К. Возь-
ми таковую крапную; и пусть будетъ
N чепырекрапная величины D, первая боль-
шая величины К.

И поелику, изъ крапныхъ величины D, вели-
чина N естъ первая, копорой К меньше; то К
не меньше величины M. Поелику же равнокрап-
ный сусть, FG величины АЕ, и GH величины
ЕВ; то равнокрапны сусть, FG величины АЕ,
и FH величины АВ*. Но FG величины АЕ, и К *г.

величины C , суть равнократны; посему равнократны и $ГН$ величины $АВ$, и $К$ величины C : а посему $ГН$, $К$ суть величинъ $АВ$, C равнократныя. Еще же, поелику равнократныя суть, $ГН$ величины $ЕВ$, и $К$ величины C ; и $ЕВ$ равна C : посему и $К$ равна $ГН$. Но $К$ и не меньше $М$; посему и $ГН$ не меньше $М$: а FG больше D ; посему цѣлая $ГН$ больше обѣихъ вмѣстѣ D , $М$. Но обѣ вмѣстѣ D , $М$ равны величинѣ N ; посему $ГН$ больше N . « Инакъ, поелику $ГН$ больше N , » а $К$ не больше N ; и $ГН$, $К$ суть величинъ $АВ$, C равнократныя; а N есть величины D другая какая нисеть кратная: по $АВ$ къ D имѣеть

опр.7. большее отношеніе, нежели C къ D .

Говорю же, что и D къ C имѣеть большее отношеніе, нежели D къ $АВ$.

Ибо, сдѣлавъ тоже спроеніе, подобно докажемъ, что N больше $К$, а не больше $ГН$. И N есть величины D кратная; а $ГН$, $К$ суть величинъ $АВ$, C другія какія нисеть равнократныя: чего ради D къ C имѣеть

опр.7. большее отношеніе, нежели D къ $АВ$.

Но пусть $АЕ$ будетъ больше $ЕВ$: инакъ меньшая величина $ЕВ$ взятая кратно, будетъ

опр.4. наконецъ больше D . Возьми таковую, и пусть будетъ $ГН$, кратная величины $ЕВ$, большая величины D ; и сколько кратная

есть GH величины EB , пусть будетъ столь-
ко крапная и FG величины AE , а K вели-
чины C . Подобно же докажемъ, что GH , K суть
величинъ AB , C равнократныя. И такъ же
возьми величины D крапную N , первую
большую величины FG . Слѣдственно еще
будетъ FG не меньше M , а GH больше D :
посему цѣлая GH больше величинъ D , M , по-
есть величины N ; а K не больше N , поелику
даже и FG , большая величины GH , по есть
величины K , есть не больше N . Слѣдующее
за симъ докажется подобно предъидущему.

Итакъ изъ неравныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Величины къ тойже величинѣ имѣющія
тоже отношеніе, взаимно равны: И къ
которымъ таже величина имѣетъ тоже
отношеніе, и тѣ взаимно равны.

Пусть имѣетъ каждая изъ величинъ A , B
къ величинѣ C тоже отношеніе. Говорю, что
 A равна B .

Буде же нѣтъ; по каждая изъ величинъ
 A , B къ C не имѣла бы тоже отношеніе*: по *8.
каждая имѣетъ; посему A равна B .

Пусть имѣетъ еще C къ каждой изъ
величинъ A , B тоже отношеніе. Говорю,
что A равна B .

Буде же нѣтъ; то С къ каждой изъ величинъ А, В не имѣла бы поже отношеніе*: но она имѣеть; посему А равна В.

Итакъ величины, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Х.

Изъ величинъ къ поуже величинѣ имѣющихъ отношеніе, копорая имѣеть большее отношеніе, та есть большая: И къ копорой величинѣ таже имѣеть большее отношеніе, та есть меньшая.

Пусть имѣеть А къ С большее отношеніе, нежели В къ С. Говорю, что А больше В.

Буде же нѣтъ; то А или равна величинѣ В, или меньше ея. Но А не равна В; ибо каждая изъ величинъ А, В къ С имѣла бы поже отношеніе*: но каждая не имѣеть; посему А не равна В. И А не меньше В; ибо А къ С имѣла бы меньшее
8. отношеніе, нежели В къ С: но она не имѣеть; посему А не меньше В. А доказано, что и ни равна: слѣдственно А больше В.

Пусть имѣеть еще С къ В большее отношеніе, нежели С къ А. Говорю, что В меньше А.

Буде же нѣтъ; то или равна, или больше. Но В не равна А; ибо С къ каждой

изъ величинъ А, В имѣла бы тоже отноше-
 ніе*: но она не имѣетъ; посему А не *7.
 равна В. И В не больше А; ибо С къ В
 имѣла бы меньшее отношеніе, нежели къ
 А*: но она не имѣетъ; посему В не больше *8.
 А. А доказано, что и ни равна: слѣдственно
 В меньше А.

Итакъ изъ величинъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Отношенія, кои суть тѣже съ тѣмъже
 отношеніемъ, суть и взаимно тѣже.

Пусть будутъ, какъ А къ В, такъ С къ
 D; и какъ С къ D такъ, Е къ F. Говорю, что
 какъ А къ В, такъ Е къ F.

Возьми величинъ А, С, Е равнократныя
 G, H, K; а величинъ В, D, F другія какія ни
 есть равнократныя L, M, N.

Поелику какъ А къ В, такъ С къ D; и
 взявъ величинъ А, С равнократныя G, H, а
 величинъ В, D другія какія ни есть равно-
 кратныя L, M: посему если G больше L, то
 и H больше M; и если равна, то рав-
 на; и если меньше, то меньше*. Еще же, *опр. 5.
 поелику какъ С къ D, такъ Е къ F; и взявъ
 величинъ С, Е равнократныя H, K, а величинъ
 D, F другія какія ни есть равнократныя M, N:

поэтому если H больше M , то и K больше N ; и если H равна, то равна; и если H меньше, то меньше*. Но если H больше M , то и G больше L ; и если H равна, то равна; и если H меньше, то меньше: следовательно, и если G больше L , то и K больше N ; и если H равна, то равна; и если H меньше, то меньше. И G, K величин A, E суть равнокрапныя; а L, N суть величин B, F другія какія ниесуть равно-
 *опр. 5. крапныя: чего ради какъ A къ B , такъ E къ F .
 Ипакъ опиошенія, и проч. ч. и д. н. (54).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Ежели будетъ сколько ниесуть величинъ пропорціональных; то какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ.

Пусть будетъ сколько ниесуть величинъ пропорціональных A, B, C, D, E, F , то есть, какъ A къ B , такъ C къ D , и такъ E къ F . Говорю, что какъ A къ B такъ A, C, E къ B, D, F .

Возьми величинъ A, C, E равнокрапныя G, H, K ; а величинъ B, D, F другія какія ниесуть равнокрапныя L, M, N .

Послику какъ А къ В, такъ С къ D, и такъ Е къ F; и взяты величины А, С, Е равнокрапныя G, H, K, а величины В, D, F другія какія ниесуть равнокрапныя L, M, N: посему, есѣли G больше L, то и H больше M, и K больше N; и есѣли равна, то равна; и есѣли меньше, то меньше*. *опр. 3. Слѣдственно есѣли G больше L, то и G, H, K больше L, M, N; и есѣли равна, то равны; и есѣли меньше, то меньше. И G величины А, а G, H, K величины А, С, Е суть равнокрапныя; ибо, ежели будетъ сколько ниесуть величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнокрапны, каждая каждой, то сколько одна изъ величинъ есѣтъ крапная одной, сполько и всѣ будущъ крапны всѣхъ*. Пошому же L величины В, и L, M, N*1. величины В, D, F суть равнокрапныя. Чего ради какъ А къ В, такъ А, С, Е къ В, D, F.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели первая величина ко впорой имѣеть поже опношеніе, что и шрепя къ чет-
вертой; шрепя же къ четвертой имѣеть
большее опношеніе, нежели пятая къ шестой

то и первая ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Пусть первая величина A ко второй B имѣетъ тоже отношеніе, что и третья C къ четвертой D ; и пусть третья C къ четвертой D имѣетъ большее отношеніе, нежели пятая E къ шестой F . Говорю, что и первая A ко второй B будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая E къ шестой F .

Поелику C къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F : то суть нѣкія величинъ C , E равнокрапныя, и величинъ D , F другія какія нисетъ равнокрапныя; такія, что крапная величины C больше крапныя величины D , а крапная величины D не больше крапныя величины F . Возьми таковыя, и пусть будутъ величинъ C , E равнокрапныя G , H , а величинъ D , F другія какія нисетъ равнокрапныя K , L ; такъ что G больше K , а H не больше L : и сколько крапная естъ G величины C , пусть будетъ столько крапная и M величины A ; а сколько крапная K величины D , пусть будетъ столько крапная и N величины B .

И поелику какъ A къ B , такъ C къ D ; и взявъ величинъ A , C равнокрапныя M ,

Г, а величинъ В, Д другія какія ииесѣтъ
равнокрапныя ~~Н, К: посему есѣли~~ М больше
Н, то и Г больше К; и есѣли равна, то
равна; и есѣли меньше, то меньше*. Но *опр.5.
Г больше К, посему и М больше Н. А
Н не больше Л; и М, Н сунѣ величинъ
А, Е равнокрапныя, а Н, Л сунѣ вели-
чинъ В, Г другія какія ииесѣтъ равнокрап-
ныя: чего ради А къ В имѣетъ большее
опношеніе, нежели Е къ Г*. *опр.7.

Ипакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (55).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ
поже опношеніе, что и претѣя къ четвер-
той, и первая больше претѣей, то и вторая
будетъ больше четвертой; и ежели равна,
то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть первая величина А ко второй В
имѣетъ поже опношеніе, что и претѣя
С къ четвертой D; и пусть А будетъ
больше С. Говорю, что и В больше D.

Поелику А больше С, и В есѣтъ другая
какая ииесѣтъ величина; то А къ В имѣетъ
большее опношеніе, нежели С къ В*. Но *8.
какъ А къ В, такъ С къ D; посему и С
къ D имѣетъ большее опношеніе, нежели

13. С къ В. Акъ которой величинѣ таже имѣеть

10. большее отношеніе, та есть меньшая; по-
му D меньше В; слѣдственно В больше D.

Подобно докажемъ, что если А равна С, то будетъ и В равна D: и если А меньше С, то будетъ и В меньше D.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Числныя величины къ своимъ равнократнымъ имѣютъ таже отношеніе, взятыя по-
переменно.

Пусть будутъ равнократныя, АВ вели-
чины С, DE величины F. Говорю, что
какъ С къ F, такъ АВ къ DE.

Поелику равнократныя суть, АВ вели-
чины С, и DE величины F; то сколько вели-
чинъ въ АВ равныхъ С, столько же вели-
чинъ и въ DE равныхъ F. Раздѣли АВ на
величины равныя С, какъ то на AG, GH,
HB; а DE на величины равныя F, какъ то
на DK, KL, LE. Итакъ величины AG,
GH, HB суть равномногія величинамъ DK,
KL, LE. И поелику AG, GH, HB взаимно
равны; и DK, KL, LE взаимно равны же: то
какъ AG къ DK, такъ GH къ KL, и такъ
7. HB къ LE. Того ради какъ одна предъ-

идущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ
предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*; и по-^{*12.}
тому какъ AG къ DK , такъ AB къ DE . Но
 AG равна C , а DK равна F : чего ради какъ
 C къ F , такъ AB къ DE .^{*11.}

Итакъ частныя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели четыре величины пропорціональны; то и премѣненіемъ будутъ пропорціональныя.

Пусть будутъ четыре величины A , B , C , D пропорціональныя, то есць, какъ A ,
къ B , такъ C къ D . Говорю, что онѣ и
премѣненіемъ будутъ пропорціональныя, то
есць*, какъ A къ C , такъ B къ D .^{*опр.13.}

Возьми величинъ A , B равнокрапныя E , F ;
а величинъ C , D другія какія ниесць ра-
внокрапныя G , H .

Поелику равнокрапныя сущь, E величи-
ны A , и F величины B : а частныя вели-
чины къ своимъ равнокрапнымъ имѣютъ по-
же отношеніе, взятыя попеременно*: посему^{*15.}
какъ A къ B , такъ E къ F . Но какъ A къ B ,
такъ C къ D ; посему и какъ C къ D ,
такъ E къ F *. Еще же, поелику G , H вели-^{*11.}
чинъ C , D равнокрапны; то какъ C къ

D, такъ G къ H. Но какъ C къ D, такъ E
 къ F; посему и какъ E къ F, такъ G къ
 11. H. А есѣли чепыре величины пропорціо-
 14. нальны; и первая больше шрепшей, то и
 вторая будетъ больше чепвертой; и есѣли
 равна, то равна; и есѣли меньше, то
 меньше*. Посему, есѣли E больше G, то
 и F больше H; и есѣли равна, то равна; и
 есѣли меньше, то меньше. И E, F суть
 величинъ A, B равнокрапныя; а G, H суть
 величинъ C, D другія какія нисеть равно-
 крапныя: чего ради какъ A къ C, такъ
 опр.5. B къ D.

Итакъ, ежели чепыре; и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели совокупленныя величины пропорціональны; то и оидѣленныя будутъ пропорціональны.

Пусть совокупленныя величины AB, BE,
 опр.15. CD, DF будутъ пропорціональны, то есѣ,
 какъ AB къ BE, такъ CD къ DF. Говорю, что
 онѣ и оидѣленныя будутъ пропорціональ-
 опр.16. ны, то есѣ, какъ AE къ EB, такъ CF
 къ FD.

Возьми величинъ AE, EB, CF, FD равно-
 крапныя GH, HK, LM, MN; а величинъ EB, FD
 другія какія нисеть равнокрапныя KP, NQ.

Поелику равнокрапныя супъ, GH величины AE , и NK величины EB ; по равнокрапны, GH величины AE , и GK величины AB^* . Но ^{*1.}
 GH величины AE , и LM величины CF равно-
 крапны; посему равнокрапныя супъ, GK
 величины AB , и LM величины CF . Еще же,
 поелику равнокрапныя супъ, LM величины
 CF , и MN величины FD ; по равнокрапныя
 супъ, LM величины CF , и LN величины CD .
 Но уже LM величины CF , и GK величины AB
 равнокрапны; посему равнокрапныя супъ,
 GK величины AB , и LN величины CD ; а по-
 сему GK , LN величинъ AB , CD супъ равно-
 крапныя. Еще же, поелику равнокрапныя
 супъ, NK величины EB , и MN величины FD ; а
 также KP величины EB , и NQ величины FD
 равнокрапныя же: посему и совокупленно, HP
 величины EB , и MQ величины FD супъ равно-
 крапныя*. И поелику какъ AB къ BE , такъ ^{*2.}
 CD къ DF ; и взяты величинъ AB , CD равно-
 крапныя GK , LN ; а величинъ EB , FD другія
 какія ни естъ равнокрапныя HP , MQ : посему
 естъли GK больше HQ , то и LN больше
 MQ ; и естъли равна, то равна; и естъли
 меньше, то меньше*. Пусть будетъ GK ^{*опр. 5.}
 больше HP ; посему, по опиятіи общей NK , и
 GH больше KP . Но естъли GK больше HP , то
 и LN будетъ больше MQ : посему LN естъ

опр.5. больше MQ^ ; а, по ошнннпнн общей MN , и LM больше NQ . Ипакъ еспъли GH больше KP , то LM больше NQ . Подобно докажемъ, что и еспъли GH равна KP , то будетъ и LM равна NQ ; и еспъли меньше, то меньше. И GH , LM суть величинъ AE , CF равнокрапныя; а KP , NQ суть величинъ EB , FD другія какія инеспъ равнокрапныя:

опр.5. чего ради какъ AE къ EB , такъ CF къ FD^ .

Ипакъ, ежели величины, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XVIII.

Ежели величины опдѣленныя пропорціональны; то и совокупленныя будутъ пропорціональны.

Пусть опдѣленныя величины AE , EB , CF , FD будутъ пропорціональны, то

опр.16. еспъ, какъ AE къ EB , такъ CF къ FD . Говорю, что онѣ и совокупленныя будутъ

опр.15. пропорціональны, то еспъ, какъ AB къ BE , такъ CD къ FD .

Ибо, еспъли не будетъ какъ AB къ BE , такъ CD къ FD ; то будетъ какъ AB къ BE , такъ CD къ нѣкоей величинѣ, или меньшей нежели DF , или большей.

Вопервыхъ, пусть будетъ къ меньшей DG . Поелику какъ AB къ BE , такъ CD къ

DG , то есть, совокупленные величины пропорциональны; следовательно и отдѣленные будутъ пропорциональны*: посему*¹⁷. какъ AE къ EB , такъ CG къ GD . А по положенію, какъ AE къ EB , такъ CF къ FD ; посему и какъ CG къ GD , такъ CF къ FD *.¹¹. Но первая CG больше прешней CF ; посему и вторая GD больше четвертой FD *.¹⁴. Она же и меньше: что невозможно; посему не будетъ какъ AB къ BE , такъ CD къ величинѣ меньшей нежели FD . Подобно докажемъ, что и ни къ большей: следовательно къ ней самой.

Итакъ, ежели величины, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели будетъ, какъ цѣлая величина къ цѣлой, такъ опнятая къ опнятой; то и оспальная будетъ къ оспальной, какъ цѣлая къ цѣлой.

Пусть будетъ какъ цѣлая величина AB къ цѣлой CD , такъ опнятая AE къ опнятой CF . Говорю, что и оспальная EB будетъ къ оспальной FD , какъ цѣлая AB къ цѣлой CD .

Поелику какъ AB къ CD , такъ AE къ CF ; то премѣненіемъ, какъ BA къ AE такъ

- *16. DC къ CF*. И поелпку совокупленныя величины пропорціональны, то и отдѣленныя будущъ пропорціональны*; поему какъ BE къ EA, такъ DF къ FC; и применіемъ, какъ BE къ DF, такъ EA къ FC*. Но какъ AE къ CF такъ, по положенію, цѣлая AB къ цѣлой CD: чего ради и осталная EB будетъ къ остальной DF, какъ цѣлая AB къ цѣлой CD*.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

- [СЛѢДСТВІЕ. И поелику доказано, что какъ AB къ CD, такъ EB къ FD; и применіемъ*, какъ AB къ BE, такъ CD къ DF: поему совокупленныя величины пропорціональны. А доказано, что какъ AB къ AE такъ CD къ CF, что и есть обращеніе. Отсюда явствуетъ, что еслии совокупленныя величины пропорціональны то онѣ и обращеніемъ будутъ пропорціональны. ч. и д. н.] (56).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномогя, взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи; и ежели, равновѣстно, первая больше третьей, то и четвертая

будеть больше шестой; и ежели равна, то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ А, В, С три величины, и D; Е, F другія имъ равномногія; взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи; то есть: какъ А къ В, такъ D къ Е; и какъ В къ С, такъ Е къ F: и пусть, равнобѣсно, будетъ А больше С. Говорю, что и D будетъ больше F: И еслили равна, то равна; еслили меньше, то меньше.

Поелику А больше С, а В есть другая иная величина; большая же величина къ тойже имѣетъ большее отношеніе, нежели меньшая*: посему А къ В имѣетъ *8. большее отношеніе, нежели С къ В. Но какъ А къ В, такъ D къ Е; а какъ С къ В, предложено (57); такъ F къ Е: посему и D къ Е имѣетъ большее отношеніе, нежели F къ Е*. А изъ величинъ къ тойже величинѣ *11 и 13. имѣющихъ отношеніе, коіюрая имѣетъ большее отношеніе, та есть большая*; по- *10. сему D больше F. Подобно докажемъ, что и еслили А равна С, то и D будетъ равна F; и еслили меньше, то меньше.

Итакъ; ежели будутъ, и проч. ч: и д. н:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи, пропорція же ихъ будетъ обратная; и ежели, равнобъспно, первая больше прешней; то и четвертая будетъ больше шестой; и ежели равна; то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ А, В, С три величины, и D, E, F другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи, пропорція же ихъ пусть будетъ обратная; то есть: какъ А къ В, такъ Е къ F; и какъ В къ С, такъ D къ E: и пусть, равнобъспно, будетъ А больше С. Говорю, что и D будетъ больше F: И еслили равна, то равна; и еслили меньше, то меньше.

Поелику А больше С, а В есть другая нѣкая величина; то А къ В имѣетъ большее отношеніе, нежели С къ В*. Но какъ А къ В, такъ Е къ F; и какъ С къ В, предложеномъ (57), такъ E къ D: по сему и E къ F имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ D*. А къ которой величинѣ даже имѣетъ большее отношеніе, та есть меньшая*; по сему F меньше D; слѣдственно D больше F. Подобно докажемъ, что и еслили А равна

С, то и D будетъ равна F; и естли меньше, то меньше.

Итакъ, ежели будутъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели будетъ сколько нисетъ величинъ, и другихъ имъ равномогихъ, взятыхъ по двѣ въ помъже опношеніи; то и равнобѣсно будутъ въ помъже опношеній.

Пусть будетъ сколько нисетъ величинъ A, B, C, и другихъ имъ равномогихъ D, E, F, взятыхъ по двѣ въ помъже опношеніи, то естъ: какъ A къ B, такъ D къ E; и какъ B къ C, такъ E къ F. Говорю, что и равнобѣсно будутъ въ помъже опношеніи, то естъ*: какъ A къ C, такъ D къ F. *опр. 18.

Возьми величинъ A, D равнокрапныя G, H; а величинъ B, E другія какія нисетъ равнокрапныя K, L; и еще величинъ C, F другія какія нисетъ равнокрапныя M, N:

Поелику какъ A къ B, такъ D къ E; и взяты величинъ A, D равнокрапныя G, H; а величинъ B, E другія какія нисетъ равнокрапныя K, L: то какъ G къ K, такъ H къ L*. Потому же и какъ K къ M, такъ L *4. къ N. И поелику сущь три величины G, K, M, и другія имъ равномогнія H, L, N взятыя

по двѣ и въ томъ же отношеніи: посему
 равномѣстно, еслии G больше M , то и
 H больше N ; и еслии равна, то равна; и
 20. еслии меньше, то меньше. Но G, H суть
 величинъ A, D равнократныя; а M, N ве-
 личинъ C, F другія какія ниесуть равнократ-
 *опр. 5. ныя: чего ради какъ A къ C , такъ D къ F .
 Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Ежели будутъ три величины, и другія
 имъ равномнотія, взятыя по двѣ въ томъ-
 же отношеніи, пропорція же ихъ будетъ
 обратная; то и равномѣстно будутъ въ
 томъ же отношеніи.

Пусть будутъ A, B, C три величины,
 и D, E, F другія имъ равномнотія, взятыя
 по двѣ въ томъ же отношеніи, пропорція
 же ихъ пусть будетъ обратная; то
 опр. 20. естъ: какъ A къ B , такъ E къ F ; и какъ
 B къ C , такъ D къ E . Говорю, что какъ
 A къ C , такъ D къ F .

Возьми величинъ A, B, D равнократныя
 G, H, K ; а величинъ C, E, F другія ка-
 кія ниесуть равнократныя L, M, N .

Поелику равнократныя суть G, H ве-
 личинъ A, B ; частныя же величины къ сво-

имъ равнокрапнымъ имѣють поже отноше-
 ніе*: посему какъ А къ В, такъ G къ Н. *15.
 Поэтому же и какъ Е къ F, такъ М къ N.
 Но какъ А къ В, такъ Е къ F; посему и
 какъ G къ Н, такъ М къ N*. И поелику какъ *11.
 В къ С, такъ D къ Е; и взяты величинъ
 В, D равнокрапныя Н, К; а величинъ С,
 Е другія какія нисеть равнокрапныя L,
 М: посему какъ Н къ L, такъ К къ М. *4.
 А доказано, что и какъ G къ Н, такъ М
 къ N: Итакъ суть при величины G, Н, L,
 и другія имъ равномогя К, М, N, взятыя
 по двѣ въ томъже отношеніи, пропорція
 же ихъ обратная: посему равномѣрно,
 есѣли G больше L, то и К больше N;
 и есѣли равна, то равна; и есѣли мень-
 ше, то меньше*. Но G, К равнокрапны *21.
 величинъ А, D; а L, N величинъ С, F:
 чего ради какъ А къ С, такъ D къ F*. *опр.5.
 Итакъ, ежели будуще, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXIV.

Ежели первая величина ко второй имѣеть
 поже отношеніе, что и претѣя къ че-
 твертой; и также пятая ко второй имѣеть
 поже отношеніе, что и шестая къ че-
 твертой: то и совокупленно, первая съ пя-

пою ко второй будуще имѣть тоже отноше-
 ние, что и третья съ шестою къ че-
 твертой.

Пусть первая величина АВ ко второй С
 имѣть тоже отноше-
 ние, что и третья
 DE къ четвертой F; и также пусть пя-
 тая BG ко второй С имѣть тоже отноше-
 ние, что и шестая EH къ четвертой F.
 Говорю, что и совокупленно, первая съ пя-
 тою, то есть AG, ко второй С будетъ
 имѣть тоже отноше-
 ние, что и третья
 съ шестою, то есть DH, къ четвертой F.

Поелику какъ BG къ С, такъ EH къ F;
 то предложено, какъ С къ BG, такъ F
 слѣд. 4. къ EH. И поелику какъ АВ къ С, такъ DE
 къ F; и какъ С къ BG, такъ F къ EH:
 то равнобѣстно, какъ АВ къ BG, такъ DE
 22. къ EH. А поелику отдѣльныя величины
 пропорціональны, то и совокупленныя бу-
 18. дущъ пропорціональны; посему какъ AG
 къ BG, такъ DH къ HE. Но и какъ BG къ
 С, такъ EH къ F: чего ради равнобѣстно,
 22. какъ AG къ С, такъ DH къ F.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели чепыре величины пропорціональны,
то наибольшая съ наименьшею сушь боль-
ш^е двухъ прочихъ.

Пусть будутъ чепыре величины АВ, СD,
Е, F пропорціональныя, то естъ, какъ АВ
къ СD такъ Е къ F; и пусть будетъ наибольшая изъ нихъ АВ, а наименьшая F. Говорю, что
АВ, F сушь больше величинъ СD, Е.

Положи АG равную Е, а СН равную F.

Поелику какъ АВ къ СD, такъ Е къ F;
и Е равна АG, а F равна СН: то какъ
АВ къ СD, такъ АG къ СН. И поелику
какъ цѣлая АВ къ цѣлой СD, такъ опия-
тая АG къ опиятой СН; то и оспаль-
ная GB будетъ къ оспальной HD, какъ
цѣлая АВ къ цѣлой CD*. Но АВ больше CD; *19.
посему и GB больше HD. И поелику АG
равна Е, а СН равна F; то АG, F ра-
вны СН, Е. А поелику, еспубли къ нера-
внымъ приложены равныя, то и цѣлыя не-
равны: посему еспубли, изъ неравныхъ ве-
личинъ GB, HD изъ коихъ GB большая,
къ GB приложимъ АG, F, а къ HD при-
ложимъ СН, Е; то будутъ АВ, F боль-
ше величинъ СD, Е.

Итакъ, ежели чепыре, и пр. ч. и д. н. (58).

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГА VI.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. **Подобныя** прямолинейныя фигуры суть тѣ, которыя и всѣ углы имѣютъ равныя, одинъ по одному, и около равныхъ угловъ стороны пропорціональныя. (59).

2. **Обратныя** же фигуры суть, когда въ каждой фигурѣ находящіяся предъидущіе и послѣдующіе члены отношеній. (60).

3. **Прямая линія** называется разсѣченною въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, когда какъ цѣлая прямая къ большому опрѣзку, такъ больший къ меньшему.

4. Высота всякой фигуры есть прямая проведенная отъ вершины перпендикулярно къ основанію. (61)

5. Отношеніе называется сложнымъ изъ отношеній, когда количества сихъ отношеній въ нихъ кратиспвованныя дѣлають нѣкое количество. (*Λόγος ἐκ λόγων συ-
κείμεναι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πη-
λότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι,
ποιῶσι τινάς*). (62).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Треугольники и параллелограммы, имѣющіе пуже высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пусть будутъ ABC, ACD преугольники, а ЕС, CF параллелограммы, имѣющіе пуже высоту, перпендикулярную прямую отъ А къ BD проведенную*. Говорю, что какъ *опр. 4. основаніе ВС къ основанію CD, такъ преугольникъ ABC къ преугольнику ACD, и такъ параллелограммъ ЕС къ параллелограмму CF.

Продолжи BD на обѣ стороны къ почкамъ Н, L; и положи сколько ниесъ прямыхъ BG, GH равныхъ основанію ВС, и сколько ниесъ прямыхъ DK, KL равныхъ основанію CD; и пропями AG, AH, AK, AL.

Поелику CB , BG , GH взаимно равны, то
 и треугольники $АНГ$, $АGB$, $АВС$ взаимно
 *38, I. равны: и по сему сколько крапное естъ осно-
 ваніе HC основанія BC , столько крапный
 естъ и треугольникъ $АНС$ треугольника
 $АВС$. Попомуже, сколько крапное естъ
 основаніе CL основанія CD , столько крап-
 ный естъ и треугольникъ $АЛС$ треуголь-
 ника ACD . И есѣли основаніе HC равно
 основанію CL , то и треугольникъ $АНС$
 *38, I. равенъ треугольнику $АЛС$ *; и есѣли осно-
 ваніе HC больше основанія CL , то и пре-
 угольникъ $АНС$ больше треугольника $АЛС$; и
 есѣли меньше, то меньше. И такъ изъ имѣю-
 щихся чепырехъ величинъ, то естъ, двухъ
 основаній BC , CD , и двухъ треугольниковъ
 $АВС$, ACD , взяпы основанія BC и пре-
 угольника $АВС$ равнокрапныя, основаніе HC
 и треугольникъ $АНС$; а основанія CD и
 треугольника ACD другія какія ни естъ
 равнокрапныя, основаніе CL и треуголь-
 никъ $АЛС$: и доказано, что есѣли осно-
 ваніе HC больше основанія CL , то и пре-
 угольникъ $АНС$ больше треугольника $АЛС$; и
 есѣли равно, то равенъ; и есѣли меньше,
 то меньше: а по сему какъ основаніе BC къ
 основанію CD , такъ треугольникъ $АВС$ къ
 *оп. 5, I. треугольнику ACD *.

И поелику треугольника ABC двукратный есть параллелограммъ EC *, и треугольника ACD двукратный есть параллелограммъ FC ; а частныя величины къ своимъ равнокрпнымъ имѣютъ поже отношеніе*: поему *15, V. какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD , такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC . Поелику же доказано, что какъ основаніе BC къ основанію CD , такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD ; и что какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD , такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC : поему и какъ основаніе BC къ основанію CD , такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC . *11, V.

Итакъ треугольники, и пр. ч. и д. н. (63).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели къ одной изъ сторонъ треугольника проведемъ какая нисетъ параллельная прямая; то она разсѣчетъ прочія стороны треугольника пропорціонально: и ежели стороны треугольника разсѣчены пропорціонально; то прямая пропннуная чрезъ сѣченія будетъ параллельна къ оспальной сторонѣ треугольника.

Треугольника ABC къ одной изъ сторонъ

BC пусть проведена будетъ параллельная DE. Говорю, что какъ BD къ DA, такъ CE къ EA.

Протяни BE, CD.

Итакъ преутольникъ BDE равенъ преутольнику CDE*; ибо стоятъ на томъ же основаніи DE, и между тѣми же параллельными DE, BC: И ADE есть другой нѣкій преутольникъ; а равныя величины къ

7.V. той же имѣютъ тоже отношеніе: посему какъ преутольникъ BDE къ преутольнику ADE, такъ преутольникъ CDE къ преутольнику ADE. Но какъ преутольникъ BDE къ преутольнику ADE, такъ BD къ DA; ибо имѣютъ ту же высоту, перпендикулярную прямую отъ E къ AB проведенную, и по-

1. тому взаимно суть какъ ихъ основанія.

Поэтому же какъ преутольникъ CDE къ преутольнику ADE, такъ CE къ EA: чего ради

11.V. и какъ BD къ DA, такъ CE къ EA.

Но преутольника же ABC пусть споронны AB, AC будутъ разбѣжены пропорціонально въ почкахъ D, E, то есть, какъ BD къ DA, такъ CE къ EA; и пусть будетъ протянута DE. Говорю, что DE параллельна къ BC.

Ибо, сдѣлавъ тоже спроеніе, прелику какъ BD къ DA, такъ CE къ EA: но какъ

BD къ DA, такъ треугольникъ BDE къ
 треугольнику ADE*; а какъ CE къ EA, такъ*1.
 треугольникъ CDE къ треугольнику ADE :
 посему какъ треугольникъ BDE къ тре-
 угольнику ADE, такъ и треугольникъ CDE
 къ треугольнику ADE*. Ипакъ каждый изъ*11, V.
 треугольниковъ BDE, CDE къ треугольни-
 ку ADE имѣеть поже отношеніе : посему
 треугольникъ BDE равенъ треугольнику
 CDE*: И споянъ они на томъже основаніи*9, V.
 DE; а равные треугольники, споянне на
 томъже основаніи, суть между сѣбѣ на-
 параллельными*: чего ради DE параллельна*39, I.
 къ BC.

Ипакъ, ежели къ одной, и прочъ ч. и д. н:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Ежели треугольника уголь раздѣлился
 по поламъ, и прямая разсѣкающая уголь
 разсѣчепъ и основаніе; то основанія оп-
 рѣзки будутъ имѣть поже отношеніе; что
 прочія спороны треугольника: И ежели ос-
 нованія опрѣзки имѣютъ поже отношеніе,
 что прочія спороны треугольника; то
 прямая отъ вершины къ сѣченію пропаяну-
 тая; раздѣлитъ уголь треугольника по
 поламъ.

Пусть будетъ ABC треугольникъ; и пусть уголъ BAC раздѣлится по поламъ прямою AD . Говорю, что какъ BD къ DC , такъ BA къ AC .

Черезъ C проводи, параллельную къ DA ,
 *31, I. прямую CE *; и пусть продолженная BA въспрѣшится съ нею въ E .

Поелику на параллельныя прямыя AD , EC падаетъ прямая AC ; то уголъ ACE равенъ
 *29, I. углу CAD *. Но уголъ CAD равенъ, по положенію, углу BAD ; посему и уголъ BAD равенъ углу ACE . Еще же; поелику на параллельныя прямыя AD , EC падаетъ прямая BAE ; то вѣншнй уголъ BAD равенъ внутреннему AEC . А доказано; что и уголъ ACE равенъ углу BAD ; посему уголъ ACE равенъ и углу AEC ; слѣдственно и сторона AE
 *6, I. равна сторонѣ AC *. И поелику къ EC ; одной изъ сторонъ треугольника BCE ; проведенная параллельная AD ; то какъ BD къ DC ,
 *2. такъ BA къ AE *. Но AE равна AC ; посему
 *7, V. какъ BD къ DC , такъ BA къ AC *.

Но пусть будетъ какъ BD къ DC , такъ BA къ AC ; и пусть будетъ пропаянута AD : Говорю; что уголъ BAC раздѣленъ по поламъ прямою AD .

Ибо, сдѣлавъ поже строеніе, поелику какъ BD къ DC , такъ BA къ AC : но какъ

BD къ DC, такъ и BA къ AE*; ибо къ EC, *2. одной изъ споронъ преугольника BCE, проведена параллельная AD: посему какъ BA къ AC, такъ BA къ AE*. Ипакъ AC равна *11, V. AE; слѣдственно и уголь AEC равенъ углу *9, V. ACE*. Но уголь AEC равенъ внѣшнему *5, I. BAD*; а уголь ACE равенъ наосълежащему *19, I. CAD: посему уголь BAD равенъ углу CAD. Чего ради уголь BAC раздѣленъ по поламъ прямою AD.

Ипакъ, ежели преугольника, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Равноугольныхъ преугольниковъ спороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны: и равнымъ угламъ прошивулежащъ сходственныя спороны.

Пусть budouтъ ABC, DCE равноугольные преугольники, имѣющіе уголь ABC равный углу DCE, а уголь ACB углу DEC, и еще уголь BAC углу CDE. Говорю, что преугольниковъ ABC, DCE спороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны; и равнымъ угламъ прошивулежащъ сходственныя спороны.

Положи BC впрямъ съ CE. И поелику углы ABC, ACB меньше двухъ прямыхъ*; а *17, I.

уголъ ACB равенъ углу DEC : то и углы ABC , DEC меньше двухъ прямыхъ; посему
 акс. I. прямыя BA , ED продолженные встрѣятся.
 Продолжи оныя, и пущь встрѣяшся
 въ F :

Поелику уголъ DCE равенъ углу ABC ; то
 *28, I. BF параллельна къ CD *. Еще же, поелику
 уголъ ACB равенъ углу DEC ; то AC парал-
 лельна къ FE . Ишакъ $FACD$ есть паралле-
 лограммъ; и потому FA равна DC ; а AC
 *34, I. равна FD *. И поелику къ FE , одной изъ
 сторонъ треугольника FBE , проведена па-
 раллельная AC ; то какъ BA къ AF , такъ
 *2. BC къ CE *. Но AF равна CD : посему какъ
 *7, V. BA къ CD , такъ BC къ CE *; и прѣмѣне-
 *16, V. нїемъ; какъ AB къ BC , такъ DC къ CE *. Еще
 же, поелику CD параллельна къ BF ; то
 какъ BC къ CE , такъ FD къ DE . Но FD
 равна AC : посему какъ BC къ CE , такъ AC
 къ ED ; и прѣмѣненїемъ, какъ BC къ CA ,
 такъ CE къ ED . Поелику же доказано; что
 какъ AB къ BC , такъ DC къ CE ; а какъ
 BC къ CA , такъ CE къ ED : чего ради равно-
 *22, V. мѣспно; какъ BA къ AC , такъ CD къ DE *.

Ишакъ равноугольныхъ, и проч. ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели два треугольника имѣютъ стороны пропорціональныя : то они будутъ равноугольные ; и будутъ имѣть равные углы тѣ , коимъ противулежатъ сходственные стороны.

Пусть будутъ ABC , DEF два треугольника , имѣющіе стороны пропорціональныя , а именно : какъ AB къ BC , такъ DE къ EF ; и какъ BC къ CA , такъ EF къ FD ; и еще , какъ BA къ AC , такъ ED къ DF . Говорю , что треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF ; и что они будутъ имѣть равные углы тѣ ; коимъ противулежатъ сходственные стороны , то есть : уголъ ABC углу DEF , а уголъ BCA углу EFD ; и еще , уголъ BAC углу EDF .

При прямой EF ; и при точкахъ на ней E , F , составь уголъ FEG равный углу ABC * , *23,1. а уголъ EFG равный углу BCA : посему остальной уголъ BAC равенъ остальному EGF * .

*32,1.

Итакъ треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику GEF . Посему треугольниковъ ABC , EGF стороны , кои около равныхъ угловъ , суть пропорціональны ; и равнымъ угламъ противулежатъ сход-

- *4. сплвенныя спороны* : а, посему какъ АВ къ ВС, такъ GE къ EF. Но какъ АВ къ ВС, такъ, по положенію, DE къ EF; посему и *11, V. какъ DE къ EF, такъ GE къ EF*. И такъ каждая изъ прямыхъ DE, GE къ EF имѣетъ
- *9, V. поже отношеніе; посему DE равна GE*. Пошому же и DF равна GF. И поелику DE равна EG, а EF общая; по двѣ прямыя DE, EF равны двумъ прямымъ GE, EF; и основаніе FD равно основанію FG :
- *8, I. посему уголъ DEF равенъ углу GEF*: И треугольникъ DEF равенъ треугольнику GEF; и прочіе углы равны прочимъ угламъ,
- *4, I. кои прошивулежащъ равнымъ споронамъ*: посему уголъ DFE равенъ углу GFE; и уголъ EDF равенъ углу EGF. И поелику уголъ FED равенъ углу FEG; а уголъ GEF равенъ углу ABC: по уголъ ABC равенъ углу DEF. Пошому же и уголъ ACB равенъ углу DFE; и еще, уголъ при А равенъ углу при D. Чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF.
- И такъ, ежели два треугольника, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели два треугольника имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, и около ра-

вныхъ угловъ стороны пропорціональныя :
по преутольники будутъ равноугольныя ;
и будутъ имѣть равные углы иѢ, коимъ
проотивулежають сходственныя стороны.

Пусть будутъ ABC ; DEF два преутоль-
ника , имѣющіе одинъ уголъ BAC равный
одному углу EDF ; и около равныхъ угловъ
стороны пропорціональныя , а именно : какъ
 BA къ AC , такъ ED къ DF . Говорю ; что
преутольникъ ABC есть равноугольный пре-
утольнику DEF ; и будетъ уголъ ABC равенъ
углу DEF ; а уголъ ACB равенъ углу DFE :

При прямой DF , и при почкахъ на ней
 D , F ; составъ уголъ FDG равный которому
ниесъ изъ угловъ BAC , EDF , а уголъ DFG
равный углу ACB : посему остальной уголъ
при B равенъ остальному углу при G *. *32,1.

Итакъ преутольникъ ABC есть равно-
угольный преутольнику DGF : посему какъ
 BA къ AC , такъ GD къ DF *. А по положе- *4.
нію ; какъ BA къ AC , такъ ED къ DF : посему
какъ ED къ DF , такъ и GD къ DF *. Чего *11,1.
ради ED равна DG * ; а DF общая : итакъ *9,1.
двѣ прямыя ED , DF равны двумъ прямымъ
 GD , DF ; и уголъ EDF равенъ углу GDF : по-
сему основаніе EF равно основанію FG ; и
преутольникъ DEF равенъ преутольнику
 DGF ; и прочіе углы равны будутъ прочимъ

угламъ, каждый каждому, кои противуле-
 4. I. жающъ равнымъ сторонамъ: посему уголъ
 DFG равенъ углу DFE ; и уголъ при G равенъ
 углу при E . Но уголъ DFG равенъ углу ACB ;
 посему и уголъ ACB равенъ углу DFE . А по
 положенію, и уголъ BAC равенъ углу EDF ;
 посему и оспальной уголъ при B равенъ
 оспальному углу при E . Чего ради пре-
 угольникъ ABC естъ равноугольный пре-
 угольнику DEF .

Ипакъ, ежели два преугольника, и проч.
 ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели два преугольника имѣющъ одинъ
 уголъ равный одному углу, и около другихъ
 угловъ стороны пропорціональныя; и ежели
 изъ оспальныхъ угловъ каждый меньше, или
 не меньше прямого: то преугольники будутъ
 равноугольные; и будутъ имѣть равные
 углы шб, около коихъ стороны про-
 порціональны.

Пусть будутъ два преугольника ABC ,
 DEF , имѣющіе одинъ уголъ равный одному
 углу, а именно, уголъ BAC углу EDF ; и
 около другихъ угловъ ABC , DEF стороны
 пропорціональныя, а именно: какъ AB къ

BC, такъ DE къ EF; и пущь изъ остальныхъ угловъ, то есть, кой при C, F, будетъ каждый, вопервыхъ, меньше прямого. Говорю, что преугольникъ ABC есть равноугольный преугольнику DEF; и будетъ уголъ ABC равенъ углу DEF, и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F.

Ибо, буде уголъ ABC не равенъ углу DEF; то одинъ изъ нихъ большій. Пущь будетъ уголъ ABC большій. При прямой AB, и при точкѣ на ней B, сославъ уголъ ABG равный углу DEF.

Поелику уголъ A равенъ углу D, а уголъ ABG равенъ углу DEF; то и остальной уголъ AGB равенъ остальному углу DFE. Ипакъ преугольникъ ABG есть равноугольный преугольнику DEF; посему какъ AB къ BG, такъ DE къ EF.* Но какъ DE къ EF, *4. такъ, по положенію, AB къ BC; посему и какъ AB къ BC, такъ AB къ BG*. Ипакъ AB *11, V. къ каждой изъ прямыхъ BC, BG имбеть поже опношеніе; посему BC равна BG*; *9, V. слѣдспвенно и уголъ BGC равенъ углу BCG*. *5, I. А по положенію, уголъ при C меньше прямого; посему и уголъ BGC меньше прямого; слѣдспвенно смѣжный ему уголъ AGB есть больше прямого*. Доказано же, что *13, I. онъ равенъ углу при F; посему и уголъ при F

есть больше прямого. А по положенію онъ меньше прямого: что неможно; посему уголъ ABC не равенъ углу DEF ; следовательно равенъ. Но уголъ при A равенъ углу при D ; посему и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F : чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF .

Но пусть еще будетъ каждый изъ угловъ, кои при C , F , не меньше прямого. Говорю еще, что и тогда треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF .

Ибо, сдѣлавъ поже спроеіе, подобно докажемъ, что BC равна BG ; следовательно и уголъ при C равенъ углу BGC . Но уголъ при C не меньше прямого; посему не меньше прямого и уголъ BGC : Итакъ треугольника BGC два угла суть не меньше двухъ прямыхъ, что невозможно^{*}; посему опять не будетъ уголъ ABC равенъ углу DEF ; следовательно равенъ. Но и уголъ при A равенъ углу при D ; посему и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F : чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF .

Итакъ, ежели два треугольника, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ УШ.

Ежели въ прямоугольномъ треугольникѣ отъ прямого угла къ основанію проведена перпендикулярная; то треугольники, кои при перпендикулярной, подобны сущь и цѣлому треугольнику и взаимно.

Пусть будетъ ABC прямоугольный треугольникъ, имѣющій уголъ BAC прямой; и пусть отъ A проведена будетъ къ BC перпендикулярная AD . Говорю, что каждый изъ треугольниковъ ABD , ADC подобенъ цѣлому треугольнику ABC , и также подобны сущь взаимно.

Поелику уголъ BAC равенъ углу ADB , ибо каждый изъ нихъ прямой; и общій двумъ треугольникамъ ABC и ABD есть уголъ при B ; посему оснальной уголъ ACB равенъ оснальному BAD : чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику ABD . Посему какъ BC , проптивулежащая прямому углу треугольника ABC , къ BA , проптивулежащей прямому углу треугольника ABD ; такъ та же AB , проптивулежащая углу при C треугольника ABC , къ BD , проптивулежащей углу, коему равенъ уголъ при C , то есть углу BAD треугольника ABD ; и такъ же AC къ AD , проптивулежащей углу

4. при В, общему обоимъ треугольникамъ.

Итакъ треугольникъ ABC и равноугольный **есть** ~~треугольнику~~ ABD, и около равныхъ угловъ имѣешь стороны пропорциональныя; слѣдственно треугольникъ ABC

опр. 1. подобенъ ~~треугольнику~~ ABD. Подобно докажемъ, что и треугольникъ ADC подобенъ треугольнику ABC. Чего ради каждый изъ треугольниковъ ABD, ADC подобенъ цѣлому треугольнику ABC.

Говорю еще, что треугольники ABD, ADC подобны и взаимно.

Поелику прямой уголъ BDA равенъ прямому углу ADC; а и уголъ BAD равенъ углу при С, по доказанному: посему оснальной уголъ при В равенъ оснальному DAC: чего ради треугольникъ ABD есть равноугольный треугольнику ADC. Посему какъ BD, сторона треугольника ABD, проптивулежащая углу BAD, къ DA, сторонѣ треугольника ADC, проптивулежащей углу при С равному BAD; такъ та же AD, сторона треугольника ABD, проптивулежащая углу при В, къ DC, сторонѣ треугольника ADC, проптивулежащей углу DAC равному углу при В; и такъ же BA, проптивулежащая прямому углу ADB, къ AC, проптивулежащей прямому углу ADC. Чего ради треугольникъ

ABD подобенъ преугольнику ADC.

Итакъ, ежели въ прямоугольномъ, и проч., ч. и д. н.

www.libtool.com.cn

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что если въ прямоугольномъ преугольникѣ отъ прямого угла къ основанію проведена будетъ перпендикулярная: то проведенная есть средняя пропорціональная опрѣзкамъ основанія; и также сторона при которомъ нанесъ опрѣзкъ, есть средняя пропорціональная основанію и одному опрѣзку.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Отъ данной прямой отнять назначенную часть.

Пусть будетъ АВ данная прямая. Надлежитъ отъ прямой АВ отнять назначенную часть.

Пусть назначена будетъ третья. Проведи отъ А прямую АС, содержащую какой нанесъ уголъ съ прямою АВ; и возьми на АС какую нанесъ точку D; и положи прямыя DE, ЕС равныя прямой AD*; и пропни ВС; и чрезъ D проведи, параллельную къ ВС, прямую DF*.

*31, I.

Поселику къ ВС, одной изъ сторонъ тре-

угольника ABC , проведена параллельная FD :
 *2. по какъ CD къ DA , такъ BF къ FA *. Но
 CD есть двукратная прямой DA ; посему
 и BF двукратная прямой FA . Чего ради
 BA есть прекратная прямой AF .

Итакъ опъ данной прямой AB опята
 назначенная прешья часть, прямая AF .
 ч. и с. н. (64).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Данную неразсѣченную прямую разсѣчь по-
 добно данной разсѣченной прямой.

Пусть будетъ AB данная неразсѣченная
 прямая, а AC разсѣченная. Надлежитъ не-
 разсѣченную AB разсѣчь подобно разсѣчен-
 ной AC .

Пусть разсѣчена будетъ AC въ точкахъ
 D, E . Положи прямая AB, AC , такъ чтобы
 онѣ содержали какой нисеть уголъ; и про-
 пияни CB ; и чрезъ D, E проведи, парал-
 лельныя къ BC , прямая DF, EG ; и чрезъ D
 же проведи, параллельную къ AB , прямую DNK .

Итакъ каждый изъ чепыреугольниковъ
 FN, NV есть параллелограммъ; посему DN
 *34.1. равна FG , а NK равна GB *. И поелику къ KC ,
 одной изъ сторопъ треуольника DKC ,
 проведена параллельная NE ; по какъ CE къ

ED, такъ КН къ HD*. Но КН равна BG, а *2.
 HD равна GF; посему какъ CE къ ED, такъ
 BG къ GF*. Еще же, поелику къ EG, одной *7 и 11, V,
 изъ сторонъ треугольника AGE, проведена
 параллельная FD; то какъ ED къ DA, такъ
 GF къ FA. А доказано, что какъ CE къ ED,
 такъ BG къ GF: чего ради, какъ CE къ
 ED, такъ BG къ GF; и какъ ED къ DA,
 такъ GF къ FA.

Итакъ данная неразсѣченная прямая АВ
 расѣчена подобно данной расѣченной пря-
 мой АС. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Двумъ даннымъ прямымъ найпи третью
 пропорціональную.

Пусть budouтъ АВ, АС двѣ данныя пря-
 мыя; и пусть положены budouтъ такъ,
 чтобы содержали какой нисетъ уголъ. На-
 длежитъ найпи прямымъ АВ, АС третью
 пропорціональную.

Продолжи АВ, АС къ почкамъ D, E; и
 положи прямую BD равную АС; и пропхни
 ВС; и чрезъ D проведи къ ней параллель-
 ную DE.

Поелику къ DE, одной изъ сторонъ тре-
 угольника ADE, проведена параллельная ВС;

2. по какъ АВ къ ВD, такъ АС къ СЕ. Но ВD равна АС : чего ради какъ АВ къ АС, такъ и СЕ къ АВ. И такъ АС къ СЕ*.

Итакъ двумъ даннымъ прямымъ АВ, АС найдена претвѣя пропорціональная СЕ. Ч. и С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Тремъ даннымъ прямымъ найди четвертую пропорціональную.

Пусть будутъ А, В, С три данныя прямыя. Надлежитъ найти прямымъ А, В, С четвертую пропорціональную.

Проведи двѣ прямыя DE, DF содержащія какой нибудь уголъ EDF; и положи прямую DG равную А, и прямую GE равную В, и еще прямую DH равную С; и продолживъ GH, проводи чрезъ Е къ ней параллельную EF.

Поелику къ EF, одной изъ сторонъ треугольника DEF, проведена параллельная GH; *2. по какъ DG къ GE, такъ DH къ HF*. Но DG равна А, а GE равна В, и DH равна С: чего ради какъ А къ В, такъ С къ HF.

Итакъ тремъ даннымъ прямымъ А, В, С найдена четвертая пропорціональная HF. Ч. и С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Двумъ даннымъ прямымъ найши среднюю пропорціональную.

Пусть будутъ АВ, ВС двѣ данныя прямыя. Надлежитъ найши прямымъ АВ, ВС среднюю пропорціональную.

Положи ихъ впрямъ; и напиши на АС полукружіе АСD; и проводи опъ точки В, подъ прямыми углами къ АС, прямую ВD; и пропни АD, DC.

Поелику уголь АСD есть въ полукружіи, то онъ прямой*. И поелику въ прямоугольномъ ^{*31, III.} треутольникѣ АСD, опъ прямого угла къ основанію проведена перпендикулярная ВD; то ВD есть средняя пропорціональная основанія опрѣзкамъ АВ, ВС*.

*слѣд: 8.

Итакъ двумъ даннымъ прямымъ АВ, ВС найдена средняя пропорціональная ВD. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Равныхъ параллелограммовъ и имѣющихъ одинъ уголь равный одному углу, спороны, кой около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональны: И которыхъ параллелограммовъ, имѣющихъ одинъ уголь равный

одному углу; стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, тѣ суть равныя. www.libtool.com.cn

Пусть будутъ АВ, ВС равныя параллелограммы; имѣющіе углы при В равныя. Положи впрямъ DB, BE; посему и FB, BG *14.1. будутъ впрямъ*. Говорю, что параллелограммовъ АВ, ВС стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя, то есть, что какъ DB къ BE, такъ GB къ BF.

Дополни параллелограммъ FE.

Послику параллелограммъ АВ равенъ параллелограмму ВС; а FE есть другой нѣкій параллелограммъ: то какъ АВ къ FE, такъ *7.5. ВС къ FE*. Но какъ АВ къ FE, такъ DB къ *1. BE*; а какъ ВС къ FE, такъ GB къ BF*: посему какъ DB къ BE, такъ GB къ BF. Чего ради параллелограммовъ АВ, ВС стороны, кой около равныхъ угловъ; обратно суть пропорціональныя:

Но пусть будутъ стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональныя, то есть, пусть будетъ какъ DB къ BE, такъ GB къ BF. Говорю, что параллелограммъ АВ равенъ параллелограмму ВС:

Послику какъ DB къ BE, такъ GB къ BF; но какъ DB къ BE, такъ параллелограммъ АВ къ параллелограмму FE*; а какъ

GB къ BF, такъ параллелограммъ BC къ параллелограмму FE: посему какъ AB къ FE, такъ BC къ FE*. Чего ради параллелограммъ *11, v. AB равенъ параллелограмму BC*. *9, v.

Итакъ равныхъ параллелограммовъ, и пр. ч. и д. н. (65).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Равныхъ преугольниковъ и имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональны: И коихъ преугольниковъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, шѣ суть равные.

Пусть будутъ ABC, ADE равные преугольники, имѣющіе одинъ уголъ равный одному углу, а именно, уголъ BAC углу DAE. Говорю, что преугольниковъ ABC, ADE стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональны, то есть, что какъ CA къ AD, такъ EA къ AB.

Положи впрямъ CA съ AD, посему будетъ впрямъ и EA съ AB*; и пропяти BD. *14, 1.

Поелику преугольникъ ABC равенъ преугольнику ADE; а ABD есть другой нѣкій преугольникъ: то какъ преугольникъ CAB

- къ треугольнику BAD , такъ треугольникъ
 7, V. ADE къ треугольнику BAD^ . Но какъ пре-
 утoльннкъ CAB къ треугольнику BAD , такъ
 1. CA къ AD^ ; а какъ треугольникъ EAD къ
 треугольнику BAD , такъ EA къ AB : посему
 11, V. какъ CA къ AD , такъ EA къ AB^ . Чего ради
 треугольниковъ ABC , ADE спороны; кои
 около равныхъ угловъ, брапно сущь про-
 порціональныя.

Но пусть будутъ треугольниковъ ABC ,
 ADE спороны брапно пропорціональныя,
 то естъ, какъ CA къ AD , такъ EA къ AB .
 Говорю, что треугольникъ ABC равенъ
 треугольнику ADE .

- Ибо, пропаянувъ ояяпъ BD , поелику какъ
 CA къ AD , такъ EA къ AB ; но какъ CA къ
 AD , такъ треугольникъ ABC къ треуголь-
 1. ннку BAD^ ; а какъ EA къ AB , такъ пре-
 утoльннкъ EAD къ треугольнику BAD : по-
 сему какъ треугольникъ ABC къ треуголь-
 ннку BAD , такъ треугольникъ EAD къ пре-
 11, V. утoльннку BAD^ . Ипакъ каждый изъ пре-
 утoльннкoвъ ABC , ADE къ треугольнику BAD
 имѣетъ тоже отношеніе: чего ради пре-
 9, V. утoльннкъ ABC равенъ треугольнику EAD^ .

Ипакъ равныхъ треугольниковъ, и проч.
 Ч. и д. н. (66).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели четыре прямая пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ среднихъ: И ежели прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ среднихъ; то сѣ четыре прямая будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ четыре прямая AB , CD , E , F пропорціональныя; то есть, какъ AB къ CD , такъ E къ F . Говорю; что прямоугольникъ содержимый въ AB , F равенъ прямоугольнику содержимому въ CD , E .

Проведи отъ точекъ A , C , подъ прямыми углами къ AB , CD , прямая AG , CH ; и положи прямую AG равную F , а прямую CH равную E ; и дополни параллелограммы BG , DH .

Поелику какъ AB къ CD , такъ E къ F ; но E равна CH , а F равна AG : то какъ AB къ CD , такъ CH къ AG *; посему параллелограммовъ BG , DH стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя. А коихъ равнотельныхъ параллелограммовъ стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, тѣ суть равны*; посему параллелограммъ BG равенъ параллелограмму DH . Но BG есть прямоуголь-

никъ въ AB , F , ибо AG равна F ; а DH есть прямоугольникъ въ CD , E , ибо CH равна E : чего ради прямоугольникъ содержаемый въ AB , F равенъ прямоугольнику содержаемому въ CD , E .

Но пустьъ прямоугольникъ содержаемый въ AB , F будетъ равенъ прямоугольнику содержаемому въ CD , E . Говорю, что сии четыре прямая будутъ пропорціональныя; а именно, какъ AB къ CD , такъ E къ F .

Ибо, сдѣлавъ поже спроеіе, поелику прямоугольникъ въ AB , F равенъ прямоугольнику въ CD , E : но прямоугольникъ въ AB , F есть BG , ибо AG равна F ; а прямоугольникъ въ CD , E есть DH , ибо CH равна E : посему прямоугольникъ BG равенъ прямоугольнику DH . Они же и равноугольные: A равныхъ и равноугольныхъ параллелограммовъ стороны около равныхъ угловъ суть обратно пропорціональ-

14. ныя: посему какъ AB къ CD , такъ CH къ AG .

Но CH равна E , а AG равна F : чего ради *и 11, V. какъ AB къ CD , такъ E къ F .*

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (67).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели при прямая пропорціональны; то прямоугольникъ содержаемый въ крайнихъ

равенъ квадрату изъ средней: И ежели прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ квадрату изъ средней; то сѣи три прямыя будутъ пропорціональны:

Пусть будутъ три прямыя А, В, С пропорціональныя, то есть, какъ А къ В, такъ В къ С. Говорю, что прямоугольникъ содержимый въ А, С равенъ квадрату изъ В.

Положи прямую D равную В.

Поелику какъ А къ В, такъ В къ С; но В равна D: то какъ А къ В, такъ D къ С*. А ^{7 III, V.} есѣли чѣтыре прямыя пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ средних*: посему прямоугольникъ въ А, С равенъ ^{*16.} прямоугольнику въ В, D. Но прямоугольникъ въ В, D равенъ квадрату изъ В, ибо В равна D: чего ради прямоугольникъ содержимый въ А, С равенъ квадрату изъ В.

Но пусть прямоугольникъ въ А, С будетъ равенъ квадрату изъ В. Говорю; что какъ А къ В, такъ В къ С.

Ибо, сдѣлавъ тоже спроснѣ; поелику прямоугольникъ въ А, С равенъ квадрату изъ В; но квадратъ изъ В равенъ прямоугольнику въ В, D, ибо В равна D: посему прямоугольникъ въ А, С равенъ прямоугольнику въ В, D. А есѣли прямоугольникъ въ крайнихъ

равенъ прямоугольнику въ среднихъ; по сѣи чепыре прямыя пропорціональны*: посему какъ A къ B , такъ D къ C . Но B равна D : чего ради какъ A къ B , такъ B къ C . Ишакъ, ежели при прямыя, и пр. ч. и д. н. (68).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Изъ данной прямой написатъ прямолинейную фигуру подобную данной прямолинейной фигурѣ и подобно положенную.

Пусть будетъ AB данная прямая, а CE данная прямолинейная фигура. Надлежитъ изъ прямой AB написатъ прямолинейную фигуру подобную прямолинейной фигурѣ CE и подобно положенную.

Пропяни DF ; и составъ при прямой AB и при точкахъ на ней A, B , уголь GAB равный углу C , а уголь ABG равный углу CDF : посему остальной уголь CFD равенъ остальному AGB . Ишакъ треугольникъ FCD есть

*32, I. равноугольный треугольнику GAB *; а посему какъ FD къ GB , такъ FC къ GA , и такъ

*4. CD къ AB *. Еще же, составъ при прямой BG и при точкахъ на ней B, G , уголь BGN равный углу DFE , а уголь GBN равный углу FDE : посему остальной уголь при E равенъ остальному углу при H . Ишакъ треуголь-

никъ FDE есть равноугольный преу-
 голънику GBH; а посему какъ DF къ GB,
 такъ FE къ GH, и такъ ED къ HB. А
 доказано, что какъ FD къ GB, такъ и FC
 къ GA, и такъ CD къ AB; посему и какъ FC
 къ AG, такъ и CD къ AB, и такъ FE къ GH,
 и еще, такъ ED къ HB*. И поелику уголъ *II, V.
 CFD равенъ углу AGB, и уголъ DFE углу BGN;
 посему цѣлый уголъ CFE равенъ цѣлому углу
 AGH. Поэтому же и уголъ CDE равенъ углу
 ABH. И еще уголъ при С равенъ углу при А,
 а уголъ при Е углу при Н: посему фигура
 АН равноугольна фигурѣ СЕ, и стороны ихъ,
 кои около равныхъ угловъ, суть пропорці-
 ональныя; чего ради фигура АН подобна
 фигурѣ СЕ*.

*опр. I.

Итакъ, изъ данной прямой АВ написана
 прямолинейная фигура АН подобная данной
 прямолинейной фигурѣ СЕ и подобно поло-
 женная. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Подобные преугольники взаимно суть въ
 удвоенномъ отношеніи сходственныхъ сто-
 ронъ.

Пусть будутъ преугольники ABC, DEF
 подобные, имѣющіе уголъ при В равный

углу при Е; и АВ къ ВС какъ ДЕ къ ЕФ, такъ что сторона ВС есть сходственная съ ЕФ. Говорю, что треугольникъ АВС къ треугольнику DEF имѣетъ удвоенное отношеніе стороны ВС къ сторонѣ ЕФ.

Возьми прямымъ ВС, ЕФ третью пропорціональную ВG, такъ чтобы было, какъ
11. ВС къ ЕФ, такъ ЕФ къ ВG; и прояди GA.

Поелику какъ АВ къ ВС, такъ ДЕ къ ЕФ; то премѣненіемъ, какъ АВ къ ДЕ, такъ
16, V. ВС къ ЕФ. Но какъ ВС къ ЕФ, такъ ЕФ къ ВG; посему и какъ АВ къ ДЕ, такъ ЕФ къ

11, V. ВG; а посему треугольниковъ АВG, DEF стороны около равныхъ угловъ суть обратно пропорціональны. А которыхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны около равныхъ угловъ обрат-

15. но пропорціональны, тѣ суть равны; посему треугольникъ АВG равенъ треугольнику DEF. И поелику какъ ВС къ ЕФ, такъ ЕФ къ ВG; а еслии при прямыя пропорціональны, то говорится, что первая къ третьей имѣетъ удвоенное отношеніе первая ко

оп. 10, V. второй: посему ВС къ ВG имѣетъ удвоенное отношеніе прямыя ВС къ ЕФ. А какъ ВС къ ВG, такъ треугольникъ АВС къ пре-

1. угольнику АВG; посему и треугольникъ АВС къ треугольнику АВG имѣетъ удвоенное

отношеніе прямая BC къ EF . Но треугольникъ ABC равенъ треугольнику DEF : чего ради и треугольникъ ABC къ треугольнику DEF имѣетъ удвоенное отношеніе прямая BC къ EF *.

*7.v.

Итакъ, подобные, и проч. ч. и д. н.

СЛѢДСТВІЕ. Откуда явствуетъ, что если при прямой пропорціональны; то какъ первая къ третьей, такъ треугольникъ изъ первой къ треугольнику подобному и подобно написанному изъ второй: поелику доказано, что какъ CB къ BG , такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ABG , то есть къ треугольнику DEF .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Подобные многоугольники раздѣлять можно на подобные треугольники, равно-многіе, и сходственные съ цѣлыми многоугольниками; И многоугольникъ къ многоугольнику имѣетъ удвоенное отношеніе сходственныхъ стороны къ сходственной сторонѣ.

Пусть будутъ многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$ подобные; и пусть будетъ сторона AB сходственная съ FG . Говорю, что многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$ раздѣлять

можно на подобные преугольники, равно-
многіе, и сходственные съ цѣлыми много-
угольниками; ~~он. что мн~~ многоугольникъ $ABCDE$
къ многоугольнику $FGHKL$ имѣеть удвоен-
ное отношеніе прямыя AB къ FG .

Протяни BE , EC , GL , LH .

Поелику многоугольникъ $ABCDE$ подобенъ
многоугольнику $FGHKL$: то уголъ BAE
равенъ углу GFL ; и какъ BA къ AE , такъ
*опр. 1. FG къ FL *. И такъ, поелику два преугольника
 ABE , FGL имѣютъ одинъ уголъ равный
одному углу, и стороны около равныхъ
угловъ пропорціональныя: то преугольникъ
*6. ABE есть равноугольный преугольнику FGL *,
4. слѣдственно и подобенъ ему; посему уголъ
 ABE равенъ углу FGL . Но и цѣлый уголъ ABC
равенъ цѣлому FGH , по подобію многоуголь-
никовъ; посему остальной уголъ EBC ра-
венъ остальному LGH . И поелику, по по-
добію преугольниковъ ABE , FGL , какъ EB
къ BA , такъ LG къ GF ; а по подобію мно-
гоугольниковъ, какъ AB къ BC , такъ FG
къ GH : то равномерно, какъ EB къ BC ,
*22, V. такъ LG къ GH *; то есть, около равныхъ
угловъ EBC , LGH стороны пропорціональны;
посему преугольникъ EBC есть равноуголь-
*6. ный преугольнику LGH *, слѣдственно и по-
4. добенъ ему. Потому же и преугольникъ ECD

подобень преугольнику LHK . И такъ подобные многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$ раздѣлены на подобные преугольники равномногіе.

Говорю же, что сїи преугольники сходственны съ цѣлыми многоугольниками, по есть пропорціональны имъ; и что предъидущіе суть ABE , EBC , ECD , а послѣдующіе ихъ FGL , LGH , LHK ; и что многоугольникъ $ABCDE$ къ многоугольнику $FGHKL$ имѣетъ удвоенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть AB къ FG .

Просяни AC , FN .

Поелику, по подобію многоугольниковъ, и уголь ABC равенъ углу FGH , и какъ AB къ BC такъ FG къ GH : то преугольникъ ABC есть равноугольный преугольнику FGH *; по-^{*6.} сему уголь BAC равенъ углу GFH , а уголь BCA углу GHF . И поелику уголь BAM равенъ углу GFN ; доказано же, что и уголь ABM равенъ углу FGN : по сему и остальной уголь AMB равенъ остальному FNG *; и по сему пре-^{*32,1.} угольникъ ABM есть равноугольный преугольнику FGN . Подобно докажемъ, что и преугольникъ BMC есть равноугольный преугольнику GNH . Чего ради, какъ AM къ MB , такъ FN къ NG ; и какъ BM къ MC ,

- *4. такъ GN къ NH *: слѣдственно, и равно-
 *22, V. мѣсно, какъ AM къ MC , такъ FN къ NH *.
 Но какъ AM къ MC , такъ преугольникъ ABM
 къ преугольнику MBC , и такъ преугольникъ
 AME къ преугольнику EMC , ибо они суть
 взаимно какъ основанія; и какъ одинъ предъ-
 идущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ
 12, V. предъидущіе ко всѣмъ послѣдующимъ: по-
 сему какъ преугольникъ AMB къ преуголь-
 нику BMC , такъ преугольникъ ABE къ
 преугольнику CBE . Но какъ преугольникъ
 AMB къ преугольнику BMC , такъ AM къ
 MC ; посему и какъ AM къ MC , такъ пре-
 *11, V. угольникъ ABE къ преугольнику EBC *. По-
 тому же и какъ FN къ NH , такъ преуголь-
 никъ FGL къ преугольнику GLH . Поелику же
 какъ AM къ MC , такъ FN къ NH : посему и
 какъ преугольникъ ABE къ преугольнику BEC ,
 такъ преугольникъ FGL къ преугольнику
 *11, V. GNL *; и премѣненіемъ, какъ преугольникъ
 ABE къ преугольнику FGL , такъ преуголь-
 *16, V. никъ BEC къ преугольнику GLH *. Подобно
 докажемъ, прозянувъ BD , GK , что какъ пре-
 угольникъ BEC къ преугольнику GLH , такъ
 преугольникъ ECD къ преугольнику LHK .
 И поелику какъ преугольникъ ABE къ пре-
 угольнику FGL , такъ EBC къ LGH , и еще
 такъ ECD къ LHK : то и какъ одинъ предъ-

пдущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ
 предъидущіе ко всѣмъ послѣдующимъ*; посе- *12, V.
 му какъ треугольникъ ABE къ треугольнику
 FGL, такъ многоугольникъ ABCDE къ много-
 угольнику FGHL. Но треугольникъ ABE къ
 треугольнику FGL имѣетъ удвоенное оп-
 ношеніе сходственной споронъ AB къ сход-
 ственной споронѣ FG; ибо подобные тре-
 угольники суть въ удвоенномъ отношеніи
 сходственныхъ споронъ*: чего ради и много- *19.
 угольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHL
 имѣетъ удвоенное отношеніе сходственной
 споронъ AB къ сходственной споронѣ FG.

Итакъ, подобные, и проч. ч. и д. н.

СЛѢДСТВІЕ I. Такимъ же образомъ до-
 кажемся и о подобныхъ чепыреугольникахъ,
 что они суть въ удвоенномъ отношеніи
 сходственныхъ споронъ. Доказано же сіе
 и о треугольникахъ: слѣдственно вообще
 подобныя прямолинейныя фигуры суть вза-
 имно въ удвоенномъ отношеніи сходст-
 венныхъ споронъ.

СЛѢДСТВІЕ II. Ежели прямымъ AB, FG
 возьмемъ прешью пропорціональную O; по
 AB къ O имѣетъ удвоенное отношеніе пря-
 мыя AB къ FG*. А и многоугольникъ къ много- *оп. 10, V.
 угольнику и чепыреугольникъ къ чепыре-

угольнику имѣеть удвоенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть AB къ FG ; доказано же *19. сіе и о преугольникахъ*: слѣдственно и вообще явствуетъ, что еслии три прямая пропорціональны; то будетъ какъ первая къ второй, такъ прямолинейная фигура изъ первой къ прямолинейной фигурѣ подобной и подобно написанной изъ второй. (69).

ИНАЧЕ. Мы докажемъ иначе и короче, что преугольники суть сходственные.

Изложи еще многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$; и пропяти BE , EC , GL , LH . Говорю, что какъ преугольникъ ABE къ преугольнику FGL , такъ EBC къ LGH , и такъ CDE къ NKL .

Поелику преугольникъ ABE подобенъ преугольнику FGL ; то преугольникъ ABE къ преугольнику FGL имѣеть удвоенное отношеніе прямая BE къ GL *. Поэтому же и преугольникъ EBC къ преугольнику LGH имѣеть удвоенное отношеніе прямая BE къ GL : чего ради какъ преугольникъ ABE къ преугольнику FGL , такъ EBC къ LGH . Еще же, поелику преугольникъ EBC подобенъ преугольнику LGH ; то преугольникъ EBC къ преугольнику LGH имѣеть

удвоенное отношеніе прямых CE къ HL .
 Потому же и треугольникъ ECD къ тре-
 угольнику LHK имѣеть удвоенное от-
 ношеніе прямых CE къ HL : чего ради какъ
 треугольникъ EBC къ треугольнику LGH ,
 такъ ECD къ LHK *. А доказано, что какъ II, V .
 EBC къ LGH , такъ и ABE къ FGL ; слѣд-
 ственно какъ ABE къ FGL , такъ BEC къ
 GLH , и такъ ECD къ LHK . И потому
 какъ одинъ предъидущій къ одному послѣ-
 дующему, такъ всѣ предъидущіе ко всѣмъ
 послѣдующимъ, и прочее какъ въ первомъ
 показано. Ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Прямолинейныя фигуры, подобныя тойже
 прямолинейной фигурѣ, суть и взаимно
 подобны.

Пусть будетъ каждая изъ прямолинейныхъ
 фигуръ A , B подобна фигурѣ C . Говорю,
 что и A подобна B .

Поелику фигура A подобна фигурѣ C :
 то онѣ равноугольны; и стороны ихъ, кои
 около равныхъ угловъ, суть пропорціо-
 нальны*. Еще же, поелику фигура B подобна C
 фигурѣ C : то онѣ равноугольны; и сторо-
 ны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть

- *опр. 1. пропорціональныя*: Посему каждая изъ фигуръ А, В фигуръ С равноугольна; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны: и слѣдственно фигура А равноугольна фигуръ В; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ,
- *11. у. суть пропорціональны*: Ипакъ фигура А подобна фигуръ В: ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели чепыре прямыя суть пропорціональны; то и прямолинейныя фигуры подобныя и подобно изъ нихъ написанныя; будутъ пропорціональны: И ежели прямолинейныя фигуры подобныя и подобно изъ чепырехъ прямыхъ написанныя суть пропорціональны; то и самыя прямыя будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ чепыре прямыя АВ, СD; ЕF, GН пропорціональны, то есть, какъ АВ къ СD, такъ ЕF къ GН; и пусть будутъ написаны изъ прямыхъ АВ, СD подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры КАВ, LCD; а изъ прямыхъ ЕF, GН подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры MF, NH. Говорю, что

какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ NH .

Возьми прямымъ AB , CD претью пропорциональную O^* ; а прямымъ EF , GH претью $*11$. пропорциональную P . Поелику какъ AB къ CD , такъ EF къ GH ; а какъ CD къ O , такъ GH къ P : то равномѣрно, какъ AB къ O , такъ EF къ P^* . Но какъ AB къ O , $*22, V$. такъ фигура KAB къ фигурѣ LCD^* ; а какъ $*с. 2, 26$ EF къ P , такъ фигура MF къ фигурѣ NH : чего ради какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ NH^* . $*11, V$.

Но пусть будетъ какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ NH . Говорю, что какъ AB къ CD , такъ EF къ GH .

Сдѣлай какъ AB къ CD , такъ EF къ QR^* ; $*12$. и напиши изъ QR прямолинейную фигуру SR^* , подобную каждой изъ фигуръ MF , $NH^*: 8$. и подобно положенную.

Поелику какъ AB къ CD , такъ EF къ QR ; и написаны изъ прямыхъ AB , CD подобныя и подобно положенныя фигуры KAB , LCD ; а изъ прямыхъ EF , QR подобныя и подобно положенныя фигуры MF , SR : то какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ SR . А по положенію, какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура

MF къ фигурѢ NH; посему фигура MF къ каждой изъ фигуръ NH, SR имѣетъ поже
 *11, V. отношеніе; то посему фигура NH равна фи-
 9, V. гурѢ SR. Но она ей подобна и подобно по-
 лемма. ложенная; посему GH равна QR. И поели-
 ку какъ AB къ CD, такъ EF къ QR; а
 QR равна GH: посему какъ AB къ CD, такъ
 7, III, V. EF къ GH.

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (70).

ЛЕММА. А что, ежели прямолинейныя фигуры равны и подобны, то сходственные ихъ стороны взаимно равны; мы сіе такъ докажемъ:

Пусть будутъ фигуры NH, SR равныя и подобныя; и пусть будутъ какъ HG къ GN; такъ RQ къ QS. Говорю, что RQ равна HG.

Буде же онѢ неравны; то одна изъ нихъ больше. Пусть будетъ RQ больше GN. Поелику какъ RQ къ QS, такъ HG къ GN; то и премѣненіемъ, какъ RQ къ HG, такъ
 16, V. QS къ GN. Но QR больше HG; посему и QS больше GN; слѣдственно RS больше HN. Но и равна ей: что невозможно. Чего ради QR не неравна GN; слѣдственно равна ей: ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXIII.

Равноугольные параллелограммы взаимно имбюють отношеніе сложенное изъ отношеній споронъ, « кои около равныхъ угловъ ».

Пусть будутъ AC , CF , равноугольные параллелограммы, имбющіе уголъ BCD равный углу ECG . Говорю, что параллелограммъ AC къ параллелограмму CF имбеть отношеніе сложенное изъ « отношеній » споронъ, кои около равныхъ угловъ; то есть, изъ отношенія какое имбеть BC къ CG , и отношенія какое имбеть DC къ CE .

Положи впрямъ BC съ CG , то будетъ впрямъ и DC съ CE *; и дополни параллелограммъ DG ; и изложи какую внесишь прямую K ; и сдѣлай какъ BC къ CG , такъ K къ L *, а какъ DC къ CE , такъ L къ M *. *12.

Итакъ отношенія K къ L , и L къ M суть ипѣже съ отношеніями споронъ, BC къ CG , и DC къ CE . Но отношеніе K къ M сложенно изъ отношенія K къ L , и изъ отношенія L къ M ; слѣдственно и K къ M имбеть отношеніе сложенное изъ « отношеній » споронъ*. И поелику какъ BC къ CG , такъ *опр. 5. параллелограммъ AC къ параллелограмму CF *; *1. но какъ BC къ CG , такъ K къ L : то и какъ K къ L , такъ параллелограммъ AC къ

- *11.V. параллелограмму CH^* . Еще же, поелику какъ DC къ CE , такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF ; но какъ DC къ CE , такъ L къ M : то и какъ L къ M , такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF . И такъ, поелику доказано, что какъ K къ L , такъ параллелограммъ AC къ параллелограмму CH ; и что какъ L къ M , такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF : то равномѣрно, какъ K къ M , такъ параллелограммъ AC къ параллелограмму CF : по равномѣрно, какъ K къ M , такъ параллелограммъ AC къ параллелограмму CF имѣеть отношеніе сложное изъ «отношеній» споронъ: чего ради и параллелограммъ AC къ параллелограмму CF имѣеть отношеніе сложное изъ «отношеній» споронъ.

И такъ равноугольные, и проч. ч. и д. н. (71):

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV:

Во всякомъ параллелограммѣ, параллелограммы, кои около поперечника, подобны сушь и цѣлому и взаимно.

Пусть будетъ $ABCD$ параллелограммъ, и AC его поперечникъ; и пусть около поперечника AC будутъ параллелограммы EG , NK . Говорю, что каждый изъ параллелограммовъ EG , NK подобенъ цѣлому $ABCD$, и также подобны сушь взаимно.

Поелику къ BC , одной изъ споронъ преу-
 угольника ABC , проведена параллельная EF ;
 иго какъ BE къ EA , такъ CF къ FA *. Еще *2.
 же, поелику къ CD , одной изъ споронъ
 преугольника ACD , проведена параллельная
 FG ; то какъ CF къ FA , такъ DG къ GA . Но
 какъ CF къ FA , такъ, по доказанному, и
 BE къ EA ; посему какъ BE къ EA , такъ
 DG къ GA *; а посему совокупленіемъ, какъ *11, V.
 BA къ AE такъ DA къ AG *; а премѣненіемъ, *18, V.
 какъ BA къ AD , такъ EA къ AG *: И такъ *16, V.
 параллелограммовъ $ABCD$, EG спороны, кои
 около общаго угла BAD , суть пропорціональ-
 ны. И поелику GF параллельна къ DC ; то
 уголь AGF равенъ углу ADC , а уголь GFA углу
 DCA *; и общій двумъ преугольникамъ ADC , *29, I.
 AGF есть уголь DAC : посему преуголь-
 никъ ADC есть равноугольный преугольнику
 AGF . Поэтому же и преугольникъ ACB есть
 равноугольный преугольнику AFE : Чего ради
 и цѣлый параллелограммъ $ABCD$ есть равно-
 угольный параллелограмму EG ; и будетъ*: *4.
 какъ AD къ DC , такъ AG къ GF ; и какъ
 DC къ CA такъ GF къ FA ; и какъ AC къ
 CB , такъ AF къ FE ; и еще, какъ CB къ
 BA , такъ FE къ EA . И поелику доказано,
 что какъ DC къ CA , такъ GF къ FA ; и
 какъ AC къ CB , такъ AF къ FE : то равно-

22, V. мѣстно, какъ DC къ BC , такъ GF къ FE .

Итакъ параллелограммовъ $ABCD$, EG стороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональныя: И потому параллелограммъ

*опр. 1. $ABCD$ подобенъ параллелограмму EG *. Потому же параллелограммъ $ABCD$ подобенъ и параллелограмму HK . А посему каждый изъ параллелограммовъ EG , HK подобенъ параллелограмму $ABCD$. Но прямолинейныя фигуры, подобныя тойже прямолинейной фи-

21. гурѣ, суть и взаимно подобны: чего ради и параллелограммъ EG подобенъ параллелограмму HK .

Итакъ во всякомъ, и проч. ч. и д. н. (72).

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXV.

Соспавишь прямолинейную фигуру, одной данной прямолинейной фигурѣ подобную, и другой данной равную.

Пусть будутъ даны прямолинейныя фигуры: одна, ABC , коей пребудетъ соспавишь подобную, а другая, D , коей равную. Надлежитъ соспавишь фигуру, одной ABC подобную, и другой D равную.

Поставь по прямой BC равный треугольнику ABC параллелограммъ BE *; а по прямой CE равный фигурѣ D параллелограммъ CM ,

въ углѣ FCE равномъ углу CBL*: посему *44и45, I
 ВС естъ впрямъ съ CF, а LE съ EM*. Возьми *29и14, I,
 прямымъ ВС, CF, среднюю пропорціональ-
 ную GN*; и напиши изъ GN фигуру KGN *13.
 подобную фигурѣ ABC и подобно по-
 ложенную*, *18.

Поелику какъ ВС къ GN, такъ GN къ
 CF; а еспѣли при прямыя пропорціональны,
 то какъ первая къ третей, такъ прямо-
 линейная фигура изъ первой къ подобной и
 подобно написанной прямолинейной фигурѣ
 изъ второй*: посему какъ ВС къ CF, такъ *сл. 2, 20.
 треугольникъ ABC къ треугольнику KGN.
 Но какъ ВС къ CF, такъ и параллелограммъ
 BE къ параллелограмму EF*; посему какъ *1.
 треугольникъ ABC къ треугольнику KGN,
 такъ параллелограммъ BE къ параллелограм-
 му EF*; а посему премѣненіемъ, какъ пре- *11, V.
 угольникъ ABC къ параллелограмму BE, такъ
 треугольникъ KGN къ параллелограмму EF*. *16, V.
 Но треугольникъ ABC равенъ параллело-
 грамму BE; посему и треугольникъ KGN
 равенъ параллелограмму EF. А параллело-
 граммъ EF равенъ фигурѣ D; посему и
 треугольникъ KGN равенъ фигурѣ D. Онъ
 же и подобенъ треугольнику ABC.

Итакъ составлена прямолинейная фигура
 KGN, одной данной прямолинейной фигурѣ

ABC подобная, а другой данной D равная.
ч. и д. н.

www.libtool.com.cn

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXVI.

Ежели опъ параллелограмма опнимешся параллелограммъ, подобный цѣлому и подобно положенный, имѣющій общій съ нимъ уголъ; то онъ будетъ около тогоже поперечника чпо и цѣлый.

Пусть опъ параллелограмма ABCD опнятъ будетъ параллелограммъ AEFG, подобный параллелограмму ABCD и подобно положенный, имѣющій общій съ нимъ уголъ DAB. Говорю, чпо ABCD есть около тогоже поперечника чпо и AEFG.

Ибо, еспли нѣтъ, то пусть, буде возможно, ихъ поперечникъ будетъ АНС; и проводи чрезъ Н, параллельную къ которой ниестъ изъ прямыхъ AD, BC, прямую НК.

Поелику параллелограммы ABCD, KG суть около тогоже поперечника; то параллело-

24. грамъ ABCD подобенъ параллелограмму KG;

опр. 1. посему какъ DA къ AB, такъ GA къ АК.

А по подобію параллелограммовъ ABCD, EG, какъ DA къ AB, такъ и GA къ AE; посе-

11, V. му и какъ GA къ АК, такъ GA къ AE.

Ипакъ GA къ каждой изъ прямыхъ АК, AE

имѣеть поже отношеніе; и потому АЕ равна АК*, меньшая большей, что невозможно. *9, V.
 А посему параллелограммы ABCD, EG не будутъ не около тогоже поперечника: слѣдственно параллелограммъ ABCD есть около тогоже поперечника что и параллелограммъ AEFG.

Итакъ, ежели опъ параллелограмма, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Изъ всѣхъ поспавляемыхъ по тойже прямой параллелограммовъ, коихъ недоспашки суть параллелограммы подобныя написанному изъ половины сей прямой и подобно положенныя, параллелограммъ поспавленный по половинѣ, подобный своему недоспашку, есть наибольшій.

Пусть будетъ АВ прямая, и пусть она раздѣлена будетъ по поламъ въ С; и пусть по АВ поспавленъ будетъ параллелограммъ AD, коего называемый недоспашкомъ есть параллелограммъ CE подобный и одобоно положенный написанному изъ половины прямой АВ, то есть изъ СВ. Говорю, что изъ всѣхъ поспавляемыхъ по АВ параллелограммовъ, коихъ недоспашки

суть параллелограммы подобные параллелограмму CE и подобно написанные, наибольший есть AD . Ибо поставь по прямой AB параллелограммъ AF , коего недостапокъ есть параллелограммъ $КН$ подобный параллелограмму CE и подобно положенный: по говорю, что AD больше AF .

Поелику параллелограммъ CE подобенъ параллелограмму $КН$: то они суть около *26. тогоже поперечника*. Проведи ихъ поперечникъ DB ; и допиши фигуру.

Поелику параллелограммъ CF равенъ параллелограмму FE *, придай обще $КН$; посему и цѣлый параллелограммъ $СН$ равенъ цѣлому KE . Но $СН$ равенъ CG *, ибо AC равна CB ; посему и GC равенъ EK . Придай обще CF ; посему цѣлый параллелограммъ AF равенъ наугольнику LMN ; и слѣдственно *36.1. параллелограммъ CE , то есть AD *, больше параллелограмма AF .

Пусть еще будетъ AB раздѣлена по поламъ въ C ; и поставленъ по ней параллелограммъ AL , коего недостапокъ есть CM . Поставь еще по AB параллелограммъ AE , коего недостапокъ есть параллелограммъ DF подобный и подобно положенный параллелограмму CM написанному изъ половины прямой AB . Говорю, что поставленный

по половинѣ прямой АВ параллелограммъ AL больше параллелограмма АЕ.

Поелику параллелограммъ DF подобенъ параллелограмму CM: то они супъ около поперечника*. Пустъ будетъ ихъ по- *26. перечникъ ЕВ; и допиши фигуру.

Поелику параллелограммъ LF равенъ параллелограмму LH*, ибо FG равна GH; то *36,г. LF больше KE. Но LF равенъ DL*; посему *43,г. и DL больше EK. Придай обще KD: чего ради и цѣлый параллелограммъ AL больше цѣлаго АЕ.

Итакъ изъ всѣхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

По данной прямой поставитъ равный данной прямолинейной фигурѣ параллелограммъ, имѣющій недоспашокъ подобный данному параллелограмму. Но данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ поставить параллелограммъ, должна быть не больше параллелограмма поставленнаго по половинѣ той прямой, когда будутъ недоспашки подобные, какъ поставленнаго по половинѣ, такъ и того, коему долженъ быть подобенъ недоспашокъ.

Пустъ будетъ АВ данная прямая; и С

данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ по АВ поставитъ параллелограммъ, не большая поставленнаго по половинѣ оной, когда ихъ недоспапки подобны; а D параллелограммъ, коему долженъ быть подобенъ недоспапокъ. Надлежитъ по данной прямой АВ поставитъ равный данной прямолинейной фигурѣ С параллелограммъ, имѣющій недоспапокъ подобный параллелограмму D.

- Раздѣли АВ по поламъ въ точкѣ Е; и изъ ЕВ напши параллелограммъ EВFG подобный *18. параллелограмму D и подобно положенный*; и дополни параллелограммъ AG. Ипакъ параллелограммъ AG или равенъ фигурѣ С, или больше оной, по ограниченію. Еслии AG равенъ С, то требуемое сдѣлано; ибо по данной прямой АВ поставленъ равный данной прямолинейной фигурѣ С параллелограммъ AG, имѣющій недоспапокъ EF подобный параллелограмму D. Еслии же итъ, то НЕ больше С. Но НЕ равенъ *36,1. GB*; посему и GB больше С. Ипакъ составь параллелограммъ KLMN равный избытку параллелограмма GB предъ фигурою С, а параллелограмму D подобный и подобно *25. положенный*. Но D подобенъ GB; посему *21. и KM подобенъ GB*. Пусть будетъ сторона

KL сходственна съ GE, а LM съ GF. И поелику параллелограммъ GB равенъ C, KM; то GB больше KM; а посему и сторона GE больше стороны LK, и GF больше LM*. Положи прямую GO равную KL, *20. и прямую GP равную LM; и дополни параллелограммъ OGPQ. Чего ради параллелограммъ GQ равенъ и подобенъ параллелограмму KM*. Но KM подобенъ GB; посему и GQ *24. подобенъ GB*; а посему GQ и GB суть *21. около того же поперечника*. Пусть будетъ *26. ихъ поперечникъ GQV; и допиши фигуру.

Поелику параллелограммъ BG равенъ C, KM; и въ нихъ GQ равенъ KM: то оспальной наугольникъ VXY равенъ оспальной фигурѣ C. И поелику PR равенъ OS*, придай *43, I. обще QV; посему и цѣлый PV равенъ цѣлому OV. Но OV равенъ TE*, ибо и сторона AE *36, I. равна споронѣ EB; посему и TE равенъ PV. Придай обще OS; посему цѣлый параллелограммъ TS равенъ цѣлому наугольнику VXY. Но наугольникъ VXY равенъ, по доказанному, фигурѣ C: чего ради и параллелограммъ AQ равенъ фигурѣ C.

Ипакъ по данной прямой AB поставленъ равный данной прямолинейной фигурѣ C параллелограммъ ST, имѣющій недостапокъ QV подобный параллелограмму D, ибо QV подобенъ GQ. ч. и с. н. (73).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

По данной прямой поставить равный данной прямолинейной фигурѣ параллелограммъ, имѣющій избытокъ подобный данному параллелограмму.

Пусть будетъ АВ данная прямая, и С данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ по АВ поставить параллелограммъ; а D параллелограммъ, коему долженъ быть подобенъ избытокъ. Надлежитъ по прямой АВ поставить равный прямолинейной фигурѣ С параллелограммъ, имѣющій избытокъ подобный параллелограмму D.

Раздѣли АВ по поламъ въ Е; и изъ ЕВ напиши параллелограммъ ВF подобный *18. параллелограмму D и подобно положенный*; и составь параллелограммъ GH равный обѣимъ фигурамъ ВF, С, а параллелограмму D *25. подобный и подобно положенный*. Посему и *21. GH подобенъ EL*. Пусть будетъ споруна КН сходственна съ FL, а KG съ FE. И поелику параллелограммъ GH больше FB; то и споруна КН больше спороны FL, и KG больше FE. Продолжи FL, FE; и пусть будетъ FLM равная КН, а FEN равная KG; и дополни параллелограммъ MN. Чего ради параллелограммъ MN равенъ и подобенъ парал-

лелограмму GH^* . Но GH подобенъ EL ; по-^{*24.}
 сему и MN подобенъ EL^* ; а посему EL и ^{*21.}
 MN суть около того же поперечника*. Про-^{*26.}
 ведемъ ихъ поперечникъ FO ; и допиши фигуру.

И поелику параллелограммъ GH равенъ
 EL , C ; но GH равенъ MN : посему и MN
 равенъ EL , C . Опними обще EL ; посему
 оспальной наугольникъ XVZ равенъ фигу-
 рѣ C . И поелику AE равна EB ; то и парал-
 лелограммъ AN равенъ параллелограмму NB^* , ^{*36,1.}
 то есть параллелограмму LP^* . Придай ^{*43,1.}
 обще EO ; посему цѣлый параллелограммъ
 AO равенъ наугольнику XVZ . Но науголь-
 никъ XVZ равенъ фигурѣ C : чего ради и
 параллелограммъ AO равенъ фигурѣ C .

Ипакъ по данной прямой AB поставленъ
 равный данной прямолинейной фигурѣ C
 параллелограммъ AO , имѣющій избытокъ
 QR подобный параллелограмму D , ибо EL
 подобенъ QR . ч. и с. н. (74).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Данную опредѣленную прямую разсѣчь въ
 крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Пусть будетъ AB данная опредѣленная
 прямая. Надлежитъ прямую AB разсѣчь въ
 крайнемъ и среднемъ отношеніи.

46,1. Напиши изъ АВ квадрапъ ВС; и поспавъ по АС равный квадрапу ВС параллелограммъ *29. CD; имѣющій избытокъ АД подобный ВС*.

Поелику ВС естъ квадрапъ; по и АД естъ квадрапъ. И поелику квадрапъ ВС равенъ параллелограмму CD; опними общій СЕ: посему остальной ВF равенъ остальному АД. Сїи же параллелограммы и равноугольны; посему и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціо-

14. нальны: чего ради какъ FE къ ED, такъ

34,1. AE къ EB. Но FE равна AC, по естъ АВ; а ED равна AE: посему какъ ВА къ AE, такъ AE къ EB. Но АВ больше AE; посему и AE

14.V. больше EB.

Итакъ прямая АВ разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ точкѣ Е; и больше *опр.3. шій ея опрѣзокъ естъ AE*: ч. и с. н.

Иначе. Пусть будетъ АВ данная прямая. Надлежитъ прямую АВ разсѣчь въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Разсѣки АВ въ С, такъ чпобы прямоугольникъ въ АВ, ВС былъ равенъ квадрапу

11,II. изъ AC.

Поелику прямоугольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрапу изъ СА: по какъ АВ къ AC, такъ

17. AC къ СВ. Итакъ прямая АВ разсѣчена

въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ поч-
кѣ С. ч. и с. н. (75).

www.libtool.com.cn

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ, фигура изъ спороны, проптивулежащей прямо-
му углу; равна фигурамъ подобнымъ и по-
добно написаннымъ изъ споронъ, содержа-
щихъ прямой уголъ.

Пусть будетъ ABC прямоугольный тре-
угольникъ, имѣющій уголъ BAC прямой.
Говорю, что фигура изъ BC равна фигу-
рамъ подобнымъ и подобно написаннымъ
изъ BA , AC .

Проведи перпендикулярную AD .

Поелику въ прямоугольномъ треугольникѣ
 ABC , отъ прямого угла при A къ основанію
 BC проведена перпендикулярная AD : то при
перпендикулярной треугольничи ABD , ADC
подобны суть и цѣлому ABC и взаимно*. И *8.

поелику треугольникъ ABC подобенъ тре-
угольнику ABD : то какъ CB къ BA , такъ
 AB къ BD . Но еслили три прямыя пропор-
ціональны; то какъ первая къ третьей
такъ фигура изъ первой къ фигурѣ подоб-
ной и подобно написанной изъ второй*: по- *сл. 2, 20
сему какъ CB къ BD ; такъ фигура изъ CB

къ фигурѢ подобной и подобно написанной изъ ВА. Потому же ; какъ ВС къ CD, такъ фигура изъ ВС къ фигурѢ изъ СА: слѣдственно, и какъ ВС къ BD, DC, такъ фигура изъ ВС къ фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ ВА ; AC*. Но прямая ВС равна прямымъ BD, DC; чего ради и фигура изъ ВС равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ ВА; AC:

Итакъ въ прямоугольныхъ; и пр. ч. и д. н.

Иначе. Поелику подобныя фигуры суть въ удвоенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*: то фигура изъ ВС къ фигурѢ изъ ВА имѣетъ удвоенное отношеніе прямая СВ къ ВА. А и квадрапъ изъ ВС къ квадрапу изъ ВА имѣетъ удвоенное отношеніе прямая СВ къ ВА*; поему какъ фигура изъ СВ къ фигурѢ изъ ВА, такъ квадрапъ изъ СВ къ квадрапу изъ ВА*. Потому же ; какъ фигура изъ ВС къ фигурѢ изъ СА, такъ квадрапъ изъ ВС къ квадрапу изъ СА: слѣдственно и какъ фигура изъ ВС къ фигурамъ изъ ВА, AC, такъ квадрапъ изъ ВС къ квадрапамъ изъ ВА, AC*. Но квадрапъ изъ ВС равенъ квадрапамъ изъ ВА; AC*: чего ради и фигура изъ ВС равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ ВА, AC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

www.libtool.com.cn

Ежели два преугольника, имѣющіе двѣ спороны пропорціональныя двумъ споронамъ, будутъ приспавлены взаимно на одномъ углѣ такъ, чѣтобъ сходственныя ихъ спороны были параллельны; то остальныя спороны сихъ преугольниковъ будутъ впрямъ.

Пусть будутъ два преугольника ABC , DCE , имѣющіе двѣ спороны BA , AC пропорціональныя двумъ споронамъ CD , DE , то есть, какъ AB къ AC такъ DC къ DE , и спорону AB параллельную къ DC , а AC параллельную къ DE . Говорю, что BC есть впрямъ съ CE .

Поелику AB параллельна къ DC , и на нихъ падаетъ прямая AC ; то накосълежащіе углы BAC , ACD взаимно равны*. Потому же *29, I. и уголъ CDE равенъ углу ACD : слѣдственно и уголъ BAC равенъ углу CDE . И поелику два преугольника ABC , DCE имѣютъ одинъ уголъ при A равный одному углу при D , и спороны около равныхъ угловъ пропорціональныя, то есть, какъ BA къ AC , такъ CD къ DE : то преугольникъ ABC есть равноугольный преугольнику DCE *; посему уголъ *6, ABC равенъ углу DCE . А доказано, что и

уголъ ACD равенъ углу BAC : посему цѣлый
 уголъ ACE равенъ двумъ угламъ ABC , BAC .
 Придай обще уголъ ACB ; посему углы ACE ,
 ACB равны угламъ BAC , ABC , ACB . Но углы
 32, I. BAC , ABC , ACB равны двумъ прямымъ; по-
 сему и углы ACE , ACB равны двумъ пря-
 мымъ. Ипакъ при прямой AC , и при почкѣ
 на ней C , двѣ прямая BC , CE , нележащія
 по ту же сторону, дѣлають смѣжные углы
 ACE , ACB равные двумъ прямымъ: чего ради
 14, I. BC естъ впрямь съ CE .

Ипакъ, ежели два, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Въ равныхъ кругахъ, углы имѣють поже
 отношеніе что и дуги, на коихъ они спо-
 яны; при центрахъ ли они будутъ спояны;
 или при окружностяхъ: « Также и вырѣзки,
 кои при центрахъ составлены. »

Пусть будутъ ABC , DEF равные круги;
 и пусть при центрахъ ихъ G , H будутъ
 углы BGC , EHF , а при окружностяхъ углы
 BAC , EDF . Говорю, что какъ дуга BC къ
 дугѣ EF , такъ уголъ BGC къ углу EHF , и
 такъ уголъ BAC къ углу EDF ; « и также
 вырѣзокъ GBC къ вырѣзку HEF . »

Положи по порядку сколько ниесъ дугъ

СК, КL равныхъ дугъ ВС; и сколько ииесъ дугъ FM, MN равныхъ дугъ EF; и пропцани GK, GL, HM, HN.

Поелику дуги ВС, СК, КL взаимно равны; то и углы BGC, CGK, KGL сущь взаимно равны*. Посему сколько крапная есѣ дуга *27, III. BL дуги ВС, столько крапный есѣ и уголь BGL угла BGC. Помомуже, сколько крапная есѣ дуга EN дуги EF, столько крапный есѣ и уголь ENH угла ENF. И есѣли дуга BL равна дугѣ EN; то и уголь BGL равенъ углу ENH; и есѣли дуга BL больше дуги EN, то и уголь BGL больше угла ENH; и есѣли меньше, то меньше. Ипакъ изъ имѣющихся чепырехъ величинъ, то есѣ, двухъ дугъ ВС, EF; и двухъ угловъ BGC, ENF, взяпы дуги ВС и угла BGC равнокрапныя; дуга BL и уголь BGL; а дуги EF и угла ENF равнокрапныя; дуга EN и уголь ENH: и доказано, чпо есѣли дуга BL больше дуги EN, то и уголь BGL больше угла ENH; и есѣли равна, то равенъ; и есѣли меньше, то меньше: а посему какъ дуга ВС къ дугѣ EF, такъ уголь BGC къ углу ENF*. *оп 5, V.

Но какъ уголь BGC къ углу ENF; такъ и уголь BAC къ углу EDF*, ибо каждый *15, V. каждаго есѣ двукрапный*; посему какъ *20, III. дуга ВС къ дугѣ EF, такъ и уголь BGC

къ углу EHF , и такъ уголь BAC къ
 11, V. углу EDF .

Итакъ въ равныхъ кругахъ, углы имѣющіе
 такое отношеніе что и дуги, на коихъ они
 стоятъ; при центрахъ ли они будутъ
 стоятъ, или при окружностяхъ. Ч. и д. н.

«Говорю такожь, что какъ дуга BC къ
 дугѣ EF , такъ вырѣзокъ BGC къ вырѣзку
 HEF .

Пропяни BC , $СК$; и взявъ на дугахъ BC ,
 $СК$ точки O , P , пропяни $ВО$, $ОС$, $СР$, $РК$.

Послику двѣ прямыя BG , GC равны двумъ
 прямымъ CG , GK , и содержатъ равные

4, I. углы: по и основаніе BC равно основанію

$СК$; и треугольникъ BGC равенъ треуголь-
 нику GCK . И послику дуга BC равна дугѣ
 $СК$: то и осталая дуга цѣлаго круга ABC
 равна остальной дугѣ сего же круга; слѣд-

27, III. ственно и уголь $ВОС$ равенъ углу $СРК$.

чего ради и опрѣзокъ $ВОС$ подобенъ оп-

*опр. 11, III. рѣзку $СРК$: Они же суть и на равныхъ пря-
 мыхъ; а на равныхъ прямыхъ подобные

24, III. опрѣзки круговъ взаимно равны: посему

опрѣзокъ $ВОС$ равенъ опрѣзку $СРК$. Но и
 треугольникъ BGC равенъ треугольнику
 GCK : чего ради и цѣлой вырѣзокъ BGC
 равенъ цѣлому вырѣзку GCK . Потому же
 и вырѣзокъ GKL равенъ каждому изъ вы-

рѣзковъ GKC, GCB: чего ради при вырѣзка GBC, GCK, GKL взаимно равны. Потому же и вырѣзки HEF, HFM, HMN взаимно равны. Посему сколько кратная есть дуга BL дуги BC, столько кратный есть и вырѣзокъ GBL вырѣзка GBC. Потому же сколько кратная есть дуга EN дуги EF, столько кратный есть и вырѣзокъ HEN вырѣзка HEF. И если дуга BL равна дугѣ EN, то и вырѣзокъ GBL равенъ вырѣзку HEN; и если дуга BL больше дуги EN, то и вырѣзокъ GBL больше вырѣзка HEN; и если меньше, то меньше. Ипакъ изъ имѣющихся чепырехъ величинъ, то есть, двухъ дугъ BC, EF, и двухъ вырѣзковъ GBC, HEF, взяшы, дуги BC и вырѣзка GBC равнократныя, дуга BL и вырѣзокъ GBL; а дуги EF и вырѣзка HEF равнократныя, дуга EN и вырѣзокъ HEN: и доказано, что если дуга BL больше дуги EN, то и вырѣзокъ GBL больше вырѣзка HEN; и если равна, то равенъ; и если меньше, то меньше: чего ради какъ дуга BC къ дугѣ EF, такъ вырѣзокъ GBC къ вырѣзку HEF.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуетъ, что какъ вырѣзокъ къ вырѣзку, такъ и уголь къ углу.» (76).

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГИ X

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Изъ двухъ неравныхъ излагаемыхъ величинъ, ежели оиъ большей оиияпо будетъ больше половины, и оиъ оставшейся больше половины, и сіе всегда дѣлаемо будетъ; то останеся напоследокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше излагаемой меньшей величины.

Пусиъ будутъ АВ, С (таб. 13, ф. 1) двѣ неравныя величины, изъ коихъ АВ большая. Говорю, что еснли оиъ АВ оиияпо будетъ больше половины, и оиъ оставшейся больше половины, и сіе всегда дѣлаемо будетъ; то останеся напоследокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше величины С.

Ибо величина C будучи взята кратко, будетъ когда либо больше AB . Пустьъ будетъ взята, и пустьъ величины C будетъ кратная DE такая, которая больше AB . Раздѣли DE на величины равныя C , а именно, на DF, FG, GE : и опъ AB опиши больше половины, какъ BH ; и опъ оставшейся AH опиши больше половины, какъ HK ; и пустьъ сіе всегда дѣлаемо будетъ, пока раздѣленія въ AB будутъ равномногія раздѣленіямъ въ DE . Пустьъ раздѣленія AK, KH, HB будутъ равномногія раздѣленіямъ DF, FG, GE .

Поелику DE больше AB ; и опъ DE опиши EG меньше половины, а опъ AB опиши BH больше половины: по оспальной GD больше оспальной HA . И поелику GD больше HA ; и опъ GD опиши GF половина, а опъ HA опиши HK больше половины: по оспальной DF больше оспальной AK . Но DF равна C ; посему и C больше AK ; слѣдственно AK меньше C . Ипакъ опъ величины AB оспается величина AK , которая меньше излагаемой меньшей величины C . ч. и д. н.

Подобно сіе докажется, есѣли опишаемыя будутъ и половины.

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГА XI.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Тѣло есть то, что имѣетъ длину, ширину и вышину.

2. Предѣлы же тѣла суть поверхности.

3. Прямая линія называется перпендикулярною или прямою къ плоскости, когда она со всѣми прямыми линіями съ нею въспрѣчающимися, и лежащими на той плоскости, дѣлаетъ углы прямые.

4. Плоскость называется перпендикулярною или прямою къ плоскости, когда прямая линія, проводимая на одной изъ сихъ плоскостей, подъ прямыми углами ко взаимному оныхъ сѣченію, будетъ къ другой плоскости подъ прямыми углами.

5. Наклоненіе или уголъ наклоненія прямой линіи къ плоскости есть острый уголъ содержимый сею прямою и другою на той плоскости протянутаю , опъ сѣченія поставленной прямой и плоскости , до точки въ копорую падаеиъ перпендикулярная, опъ виѣшнаго конца поставленной же прямой къ плоскости проведенная. (77).

6. Наклоненіе или уголъ наклоненія двухъ плоскостей есть острый уголъ содержимый прямыми линіями, проводимыми въ каждой плоскости , подъ прямыми углами ко взаимному плоскостей сѣченію , опъ одной онаго точки. (78).

7. Плоскость къ плоскости называется подобно наклоненною , какъ другая къ другой, когда помянутые углы наклоненій ихъ взаимно равны. (79).

8. Параллельныя плоскости сунъ пѣ, кои нигдѣ взаимно не встрѣчаются.

9. Подобныя полныя фигуры сунъ пѣ, кои содержася равноногими подобными плоскостями. (80).

10. Равныя же и подобныя полныя фигуры сунъ пѣ, кои содержася равноногими плоскостями подобными и равными. (81).

11. Толстый уголъ есть взаимное наклоненіе, больше нежели двухъ линій, взаимно

встрѣчающихся, и ненаходящихся на той же поверхности. ИНАЧЕ. Толстый уголь есть плоскость, который содержится больше нежели двумя плоскими углами, кои не лежатъ на той же плоскости, и соспавлены при одной точкѣ. (82).

12. Пирамида есть тѣло, содержимое плоскостями, на одной изъ коихъ и при одной « въ ней » точкѣ всѣ прочія составляются.

13. Призма есть тѣло, содержимое плоскостями, изъ коихъ противоположашія двѣ суть параллельны, равны и подобны, прочія же суть параллелограммы.

14. Шаръ есть тѣло, производимое чрезъ обращеніе полукружія на неподвижномъ его поперечникѣ, пока оное опять возставится на томъ, откуда началось его обращеніе. (83).

15. Ось же шара есть оная неподвижная прямая, на которой полукружіе обращается.

16. А центръ шара есть точка, что и полукружія.

17. Поперечникъ же шара есть всякая прямая чрезъ центръ проведенная, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ поверхностію шара.

18. Конусъ есть тѣло, производимое чрезъ обращеніе прямоугольнаго треугольника на неподвижной его сторонѣ, одной изъ тѣхъ, кои суть около прямого угла, пока оный

треугольникъ опять возставится тамъ , откуда началось его обращеніе. И еслили неподвижная прямая [равна](http://www.ravna1.budet.ru) будетъ остальной сторонѣ , которая при прямомъ углѣ обращается ; то конусъ будетъ прямоугольный : еслили же меньше , то тупоугольный : а еслили больше , то остроугольный.

19. Ось же конуса есть оная неподвижная прямая , на которой треугольникъ обращается.

20. А основаніе конуса есть кругъ , обращающающаяся прямою написанный.

20. Цилиндръ есть тѣло , производимое чрезъ обращеніе прямоугольнаго параллелограмма на неподвижной его сторонѣ , одной изъ тѣхъ , кои суть около прямого угла , пока оный параллелограммъ опять возставится тамъ , откуда началось его обращеніе.

22. Ось же цилиндра есть оная неподвижная прямая , на которой параллелограммъ обращается.

23. А основанія цилиндра суть круги , двумя пропитулежащими сторонами написанные.

24. Подобные конусы и цилиндры суть тѣ , коихъ и оси и поперечники основаній суть пропорціональны.

25. Кубъ есть тѣло, содержимое шесстью равными квадрапами.

26. Тетраедръ есть тѣло, содержимое четырьмя преутольниками равными и равносторонными.

27. Октаедръ есть тѣло, содержимое восьмью преутольниками равными и равноспоронными.

28. Додекаедръ есть тѣло, содержимое двѣнадцашью пѣшиутольниками равными, равноспоронными и равноутольными.

29. Икосаедръ есть тѣло, содержимое двадцашью преутольниками равными и равноспоронными.

« 30. Параллелепипедъ есть тѣло, содержимое шесстью плоскостями, изъ коихъ каждая двѣ пропивулежащія суть параллельны.

31. Надстоящими же называюся тѣ спороны его плоскостей, кои суть между основаніемъ и пропивулежащею плоскостію ». (84).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Прямой линіи одна часпъ не можетъ быть на подлежащей плоскости, а другая часпъ на другой плоскости.

Ибо, буде возможно, пусть прямой линіи ABC часть AB будетъ на подлежащей плоскости, а часть BC на другой плоскости.

Итакъ на подлежащей плоскости есть нѣкая прямая линія, лежащая впрямъ съ AB непрерывно. Пусть будетъ она BD . Чего ради двѣ прямыя ABC , ABD имѣютъ общій отрѣзокъ AB , что невозможно: ибо прямая съ прямою встрѣчается не больше какъ въ одной точкѣ; инако сѣи прямыя совмѣстились бы взаимно.

Итакъ прямой линіи, и пр. ч. и д. н. (85).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то онѣ супъ на одной плоскости. И всякій треугольникъ весь на одной плоскости.

Пусть двѣ прямыя AB , CD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E . Говорю, что AB , CD супъ на одной плоскости; и весь треугольникъ на одной плоскости.

Возьми на EC EB , какія ниесъ точки F , G ; и просяни CB , FG , и проводи FN , GK . Говорю вопервыхъ, что треугольникъ ECB весь на одной плоскости. Ибо еслили треугольника ECB часть FCH , или GBK есть на подлежащей плоскости, а оспальная

часть на другой; то будетъ одной изъ прямыхъ ЕС, ЕВ часть на подлежащей плоскости, а другая часть на другой плоскости: и еслили треугольника ЕСВ часть ЕСВГ будетъ на подлежащей плоскости, а остальная на другой; то будетъ и каждая изъ прямыхъ ЕС, ЕВ нѣкая часть на подлежащей плоскости; а остальная на другой плоскости: что нелѣпо; по доказанному

- *1. нами*: посему треугольникъ ЕСВ весь на одной плоскости. А на которой весь треугольникъ ЕСВ, на той и каждая изъ прямыхъ ЕС, ЕВ; на которой же каждая изъ ЕС, ЕВ; на той и АВ, CD*: Итакъ прямыя АВ, CD на одной сущъ плоскости; и весь треугольникъ на одной плоскости. Ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Ежели двѣ плоскости пресѣкаются; то взаимное оныхъ сѣченіе есть линія прямая.

Пусть двѣ плоскости АВ, ВС взаимно пресѣкаются; и пусть будетъ DV взаимное

- *оп. 6, I. оныхъ сѣченіе, которое есть линія*. Говорю; что линія DV есть прямая.

Ибо; буде нѣтъ; то пропяти отъ D до В на плоскости АВ прямую DEB; а на плоскости ВС прямую DFB.

Ипакъ двѣ прямыя линіи DEB, DFB имѣющъ пѣже концы, и потому заключающъ пространство; что неѣпо*. Посему*акс.12. линіи DEB, DFB не суть прямыя. Подобно докажемъ, что ни другая какая линія; изъ проводимыхъ отъ D къ B, есть прямая, кромѣ линіи DB; взаимнаго сѣченія плоскостей AB, BC.

Ипакъ, ежели двѣ плоскости, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели прямая къ двумъ прямымъ, пресѣкающимся взаимно, будетъ поспавлена подъ прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подъ прямыми углами и къ плоскости что на пѣхъ прямыхъ.

Пусть пресѣкутся взаимно двѣ прямыя AB, CD въ точкѣ E; и пусть при E будетъ поспавлена прямая EF подъ прямыми углами къ каждой изъ прямыхъ AB, CD. Говорю, что EF есть подъ прямыми углами и къ плоскости на AB, CD.

Возьми равныя прямыя AE, EB, CE, ED; и проводи чрезъ E какъ ни есть прямую GEN; и пропхни AD, CB; и отъ какой ни есть

почки F на прямой EF , проводи прямые FA, FG, FD, FC, FH, FB .

- Поскольку двѣ прямыя AE, ED равны двумъ прямымъ CE, EB , и содержащъ углы *15, I. равные*: то и основаніе AD равно основанію CB , и треугольникъ AED будетъ равенъ треугольнику CEB ; слѣдственно и уголъ DAE равенъ углу EBC . Поскольку же *15, I. и уголъ AEG равенъ углу BEH *, то два треугольника AGE, BEH , имѣющъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной сторонѣ, кои при равныхъ углахъ, а именно AE равную EB : посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ*; а посему GE равна EH , а AG равна BH . И поскольку AE равна EB , а FE есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами; то основаніе FA равно основанію *4, I. FB *. Поэтому же и FC равна FD . И поскольку AD равна CB , и FA равна FB ; то двѣ прямыя FA, AD , равны двумъ прямымъ FB, BC , каждая каждой; доказано же, что и основаніе FD равно основанію FC : *8, I. посему уголъ FAD равенъ углу FBC *. Еще же, поскольку доказано, что AG равна BH , а FA равна FB ; то двѣ прямыя FA, AG равны двумъ прямымъ FB, BH ;

доказано же, что и угол FAG равенъ углу FBN : посему основаніе FG равно основанію FN *. Еще же, поелику GE , по доказан- *4,1.
ному, равна EN , а EF общая; то двѣ прямыя GE , EF равны двумъ прямымъ NE , EF ; но и основаніе FG равно основанію FN : посему уголъ GEF равенъ углу NEF *; а *8,1.
посему каждый изъ угловъ GEF , NEF есть прямой*. Слѣдственно прямая FE есть подь *оп.10,1.
прямыми углами къ прямой GN ; какъ виесть чрезъ E проведенной. Подобно докажемъ, что FE подь прямыми углами и ко всякой прямой проведенной чрезъ E , и находящейся на подлежащей плоскости. Но прямая называется перпендикулярною къ плоскости, когда она со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на той плоскости, дѣлаетъ углы прямые*: чего ради прямая FE *опр.3.
есть перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Но подлежащая плоскость есть на AB , CD ; посему FE есть подь прямыми углами къ плоскости на AB , CD .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели прямая къ премъ прямымъ; взаимно встрѣчающимся въ одной почкѣ; бу-

дешъ поспавлена подь прямыми углами, при общемъ сѣченіи; то всѣ при оныя прямая будутъ на одной плоскости.

Пусть прямая АВ къ премоу прямымъ ВС, ВD, ВЕ, взаимно встрѣчающимся въ точкѣ В; будетъ поспавлена подь прямыми углами, при общемъ сѣченіи. Говорю; что всѣ при прямая ВС, ВD, ВЕ суть на одной плоскости.

Естьли же иѣсть, то пусть, буде возможно, будутъ прямая ВD, ВЕ на подлежащей плоскости, а ВС на другой; и чрезъ АВ, ВС проведи плоскость: то взаимное сѣченіе сей плоскости съ подлежащею будетъ

3. прямая линія. Пусть оная будетъ ВF.

Ипакъ при прямая АВ, ВС, ВF суть на одной плоскости, то естъ на плоскости прямыхъ АВ, ВС. И поелику АВ перпендикулярна къ каждой изъ прямыхъ ВD, ВЕ; то АВ естъ перпендикулярная и къ

4. плоскости прямыхъ ВD, ВЕ: Но плоскость прямыхъ ВD, ВЕ естъ подлежащая; посему АВ перпендикулярна къ подлежащей плоскости; слѣдственно АВ со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на

спр.3. сей плоскости, дѣлають углы прямые.

Встрѣчающа же съ нею прямая ВF, лежащая на плоскости прямыхъ ВD, ВЕ: посему уголь АВF

есть прямой. А по положенію, и уголь ABC прямой; посему уголь ABF равенъ углу ABC : *акс. 1. Они же и на одной плоскости: что невозможно*. Посему прямая BC не на другой *акс. 9. плоскости, на которой суть прямые BD , BE . Чего ради всѣ три прямые BC , BD , BE суть на одной плоскости.

Итакъ; ежели прямая; и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели двѣ прямые суть подѣ прямыми углами къ тойже плоскости; то онѣя прямые будутъ взаимно параллельныя.

Пусть двѣ прямые AB , CD будутъ подѣ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю что AB параллельна къ CD .

Пусть сѣи прямые вспрѣчаютъ подлежащую плоскость въ точкахъ B , D . Протяни BD ; и на той же подлежащей плоскости проведи, подѣ прямыми углами къ BD , прямую DE ; и положи AB , DE равныя; и протяни BE , AE , AD .

Поелику AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то она со всѣми прямыми линіями, съ нею вспрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Вспрѣчается же съ AB каждая изъ *опр.

прямыхъ BD , BE , лежащихъ на той плоскости: посему каждый изъ угловъ ABD , ABE есть прямой. Потому же и каждый изъ угловъ CDB , CDE есть прямой. И поелику AB равна DE , а BD общая; то двѣ прямыя AB , BD равны двумъ прямымъ ED , DB ; и содержащъ углы прямые: посему основаніе AD равно основанію BE *. И поелику AB равна DE , и AD равна BE ; то двѣ прямыя AB , BE равны двумъ прямымъ ED , DA , и основаніе AE имъ общее: посему уголъ ABE равенъ углу EDA *. Но уголъ ABE прямой; посему и уголъ EDA есть прямой, и ED перпендикулярна къ DA . Но она перпендикулярна и къ каждой изъ прямыхъ BD , DC : ипакъ ED къ тремъ прямымъ BD , DA , DC , при общемъ ихъ еѣченіи, поспавлена подъ прямыми углами; а посему всѣ при прямыхъ BD , DA , DC суть на одной плоскости*. Но на которой плоскости DB , DA , на той же есть и AB ; ибо всякій треугольникъ весь на одной плоскости*: посему AB , BD , DC суть на одной плоскости. И каждый изъ угловъ ABD , CDB есть прямой: чего ради AB , параллельна къ CD *.

Ипакъ, ежели двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели двѣ прямыя суть параллельныя; и на каждой изъ нихъ взяты какія нисеть точки; то прямая пропянушая чрезъ сіи точки будетъ на одной плоскости съ параллельными.

Пусть будутъ двѣ прямыя АВ, CD параллельныя; и пусть на каждой изъ нихъ взяты будутъ какія нисеть точекъ Е, F. Говорю, что прямая пропянушая чрезъ точки Е, F есть на одной плоскости съ параллельными.

Естьли же нѣтъ, то пусть, буде возможно, будетъ она внѣ плоскости ихъ, какъ EGF. Проведи чрезъ EGF плоскость; то взаимное сѣченіе сей плоскости съ плоскостію параллельныхъ будетъ прямая линія*. Пусть будетъ она EF: слѣдствен- *3.
но двѣ прямыя EGF, EF заключають пространство, что невозможно*. Посему прямая пропянушая чрезъ Е къ F не есть внѣ плоскости, а будетъ слѣдственно на одной плоскости съ параллельными АВ, CD. *акс. 12.

Итакъ, ежели двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н. (86).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели двѣ прямыя суть параллельныя; и одна изъ нихъ будетъ къ плоскости подѣ

прямыми углами: что и другая будетъ къ той же плоскости подъ прямыми углами.

Пусть будутъ двѣ прямыя AB , CD параллельныя; и пусть одна изъ нихъ, AB , будетъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю, что и другая CD къ той же плоскости будетъ подъ прямыми углами.

Пусть прямая AB , CD встрѣчаютъ подлежащую плоскость въ точкахъ B , D . Протяни BD : итакъ AB , CD , BD суть на одной *7. плоскости*. На подлежащей плоскости проведи прямую DE подъ прямыми углами къ BD ; и положи AB , DE равныя; и протяни BE , AE , AD .

Поелику AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то AB ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости, есть перпендикулярная*: поему каждый изъ угловъ ABD , ABE есть прямой. И поелику на параллельныя прямыя AB , CD падаетъ прямая BD ; то углы $\angle ABD$, $\angle CDB$ равны двумъ прямым*. Но уголъ $\angle ABD$ прямой; поему и уголъ $\angle CDB$ есть прямой, и CD перпендикулярна къ BD *. И поелику AB равна DE , а BD общая; то двѣ прямыя AB , BD равны двумъ прямымъ ED , DB ; и уголъ $\angle ABD$ равенъ углу

EDB, ибо каждый изъ нихъ прямой: посему
 основаніе AD равно основанію BE*. Еще же, *4, I.
 поелику AB равна DE, и BE равна AD; по
 двѣ прямыя AB, BE равны двумъ прямымъ
 ED, DA, каждая каждой; и основаніе AE имъ
 общее: посему уголъ ABE равенъ углу EDA*. 8, I.
 Но уголъ ABE прямой; посему и уголъ
 EDA есть прямой, и ED перпендикулярна
 къ AD*. Но она перпендикулярна и къ *оп. 10, I.
 DB: итакъ ED и къ плоскости на BD,
 DA есть перпендикулярная*: а посему ED со *4.
 всѣми прямыми линиями, съ нею встрѣчаю-
 щимися и лежащими на сей плоскости, дѣ-
 лаеишь углы прямые. На плоскости же пря-
 мыхъ BA, AD лежишь прямая DC; ибо пря-
 мыя AB, BD суть на плоскости прямыхъ
 BD, DA*, а DC есть на той же плоскости, что *2.
 и AB, BD*: посему ED есть подъ прямыми *7.
 углами къ DC; а посему и CD есть подъ пря-
 мыми углами къ DE. Но CD подъ прямыми
 углами и къ BD: итакъ CD къ двумъ
 прямымъ DE, DB пресѣкающимся, при взаим-
 номъ ихъ сѣченіи D, послана подъ пря-
 мыми углами; посему CD и къ плоскости на
 DE, DB есть подъ прямыми углами*. Но пло- *4.
 скость на DE, DB есть подлежащая: чего
 ради CD есть подъ прямыми углами къ
 подлежащей плоскости. Ч. и д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Прямыя, параллельныя къ тойже прямой, хопя и не всѣ на одной плоскости, суть и взаимно параллельныя.

Пусть будетъ каждая изъ прямыхъ АВ, CD параллельна къ прямой EF; и пусть АВ, CD не будутъ на одной плоскости съ EF. Говорю, что АВ параллельна къ CD.

Возьми на EF какую ниесъ точку G; и отъ сей точки проведи, на плоскости прямыхъ EF, АВ, подъ прямыми углами къ EF, прямую GH*; и еще на плоскости прямыхъ FE, CD, подъ прямыми углами къ EF, прямую GK.

Поелику EF къ каждой изъ прямыхъ GH, GK есть подъ прямыми углами; по EF и къ плоскости на GH, GK есть подъ прямыми углами*. Но EF параллельна къ АВ; посему и АВ къ плоскости на H, G, K, есть подъ прямыми углами*. Поному же и CD къ плоскости на H, G, K, есть подъ прямыми углами. Ипакъ каждая изъ прямыхъ АВ, CD къ плоскости на H, G, K, есть подъ прямыми углами. Но ежели двѣ прямыя будутъ къ тойже плоскости подъ прямыми углами; то оныя двѣ прямыя суть взаимно параллельныя*: чего ради АВ параллельна къ CD. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Ежели двѣ прямыя, взаимно вѣрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ, взаимно вѣрѣчающимся, но лежащимъ не на тойже плоскости: то сїи прямыя будутъ содержать углы равные.

Пусть двѣ прямыя АВ, ВС взаимно вѣрѣчающіяся, будутъ параллельны къ другимъ двумъ DE, EF взаимно вѣрѣчающимся, но лежащимъ не на тойже плоскости. Говорю, что уголъ ABC равенъ углу DEF.

Отними прямыя BA, BC, ED, EF взаимно равныя; и проведи AD, CF, BE, AC, DF.

Поскольку BA равна ED, и параллельна къ ней; то и AD равна BE, и параллельна къ ней*. Поэтому же и CF равна BE, и параллельна *38,1. къ ней. Ипакъ каждая изъ прямыхъ AD, CF равна BE, и параллельна къ ней; а прямыя параллельныя къ тойже прямой, суть и взаимно параллельныя*: посему прямыя AD, CF суть *9. параллельныя; ипакъ же равныя. Соединяющъ же концы ихъ прямыя AC, DF: посему и AC, DF суть равныя и параллельныя. Ипакъ, поскольку двѣ прямыя АВ, ВС равны двумъ прямымъ DE, EF; и основаніе AC равно основанію DF: посему уголъ ABC равенъ углу DEF*.

*8,1.

Ипакъ, ежели двѣ прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XI.

Къ ~~данной~~ ^{данной} подлежащей плоскости, отъ данной въ ѳ ея точки, провести перпендикулярную прямую линію.

Пусть будетъ А данная точка въ данной подлежащей плоскости. Надлежитъ отъ точки А провести перпендикулярную прямую линію къ сей плоскости.

Проведи на подлежащей плоскости какъ ни есть прямую ВС; и отъ А проведи, перпендикулярную къ ВС, прямую AD*.

Еслили прямая AD будетъ также перпендикулярна и къ подлежащей плоскости; то предложенное сдѣлано. Еслили же нѣтъ: то отъ точки D проведи на подлежащей плоскости, перпендикулярную къ ВС, прямую DE*^{11, I.}; и отъ А проведи, перпендикулярную къ DE, прямую AF*^{12, I.}; и чрезъ F проведи, параллельную къ ВС, прямую GH*^{31, I.}.

Посколику ВС къ каждой изъ прямыхъ DA, DE подъ прямыми углами; то ВС будетъ и къ плоскости на ED, DA подъ прямыми углами*. Она же и параллельна къ GH. Но ежели двѣ прямыя параллельны, и ежели одна изъ нихъ къ нѣкоей плоскости подъ прямыми углами; то и другая къ той же плоскости подъ прямыми углами*: посему

и GH къ плоскости на ED , DA естъ подь прямыми углами; и слѣдовательно ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости, GH естъ перпендикулярная*. Встрѣчается же съ GH *опр. 3. прямая AF лежащая на плоскости прямыхъ ED , DA : посему GH перпендикулярна къ FA ; слѣдственно и FA перпендикулярна къ GH . Но AF перпендикулярна къ DE , по спроенію; посему AF къ каждой изъ прямыхъ GH , DE перпендикулярна. Но ежели прямая къ двумъ прямымъ, пересекающимся взаимно, будетъ поставлена подь прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подь прямыми углами и къ плоскости что на нѣхъ прямыхъ*: посему *4. FA естъ подь прямыми углами къ плоскости на ED , GH . Но плоскость на ED , GH естъ подлежащая: чего ради AF къ подлежащей плоскости естъ подь прямыми углами.

Итакъ къ данной плоскости, отъ данной точки A внѣ ея, проведена перпендикулярная прямая линія AF . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Къ данной плоскости, отъ данной на ней точки, возставишь подь прямыми углами прямую линію.

Пусть будетъ дана подлежащая плоскость; и пусть будетъ A данная на ней точка. Надлежитъ отъ точки A возсپавитъ, подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости, прямую линію.

Отъ какой нисетъ точки B , взятой въ подлежащей плоскости, проводи перпендикулярную къ ней прямую BC^* ; и чрезъ точку A *31.1. проводи, параллельную къ BC , прямую AD^* .

Поелику двѣ прямыя AD , CB параллельны; и одна изъ нихъ, BC , естъ къ подлежащей плоскости подъ прямыми углами: то и другая AD къ сей же плоскости естъ подъ *8. прямыми углами*.

Итакъ, къ данной плоскости, отъ данной на ней точки, возспавлена подъ прямыми углами прямая линія. Ч. и С. Н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XIII.

Отъ тойже точки данной плоскости, не могутъ бытъ возспавлены, по ту же ея сторону, двѣ прямыя подъ прямыми къ ней углами.

Ибо, буде возможно, пусть отъ тойже точки A данной плоскости, будутъ возспавлены, по ту же ея сторону, двѣ прямыя AB , AC подъ прямыми къ ней углами.

Проведи чрезъ ВА, АС плоскость: по взаимное сѣченіе сей плоскости съ данною будетъ прямая линія*, проходящая чрезъ А. *3. Пусть она будетъ DAE.

Итакъ прямыя АВ, АС, DAE суть на одной плоскости. И поелику СА подъ прямыми углами къ данной плоскости; по она со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Встрѣчаеп- *опр.3. ся же съ ЕА прямая DAE, лежащая на данной плоскости: посему уголъ САЕ есть прямой. Потому же и уголъ ВАЕ есть прямой. Чего ради уголъ САЕ равенъ углу ВАЕ; и они суть на одной плоскости: что невозможно.

Итакъ опъ тойже, и проч. ч. и д. н. (87).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Плоскости, къ коимъ таже прямая есть перпендикулярная, суть взаимно параллельныя.

Пусть прямая АВ будетъ къ каждой изъ плоскостей CD, EF перпендикулярная. Говорю, что сіи плоскости суть взаимно параллельныя.

Ибо, еслии нѣтъ; то онѣ, будучи

продолжены взаимно встрѣяныя. Пусть встрѣяныя; то взаимное ихъ сѣченіе www.libtool.com.cn будетъ прямая линия. Пусть оная будетъ ГН. Возьми на ГН какую ниесить точку К; и протяни АК, ВК.

Посѣлику АВ перпендикулярна къ плоскости ЕФ; то и къ прямой ВК, лежащей на продолженіи плоскости ЕФ, есть АВ перпендикулярна*: посему уголъ АВК есть прямой. Поэтому же и уголъ ВАК есть прямой. Посему треугольника АВК два угла АВК, ВАК равны двумъ прямымъ; что невозможно*. Слѣдственно плоскости CD, ЕФ, будучи продолжены, не встрѣяныя: чего ради плоскости CD, ЕФ суть взаимно параллельны*.

Итакъ плоскости; къ коимъ, и проч. ч. и д. н:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Ежели двѣ прямыя, взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ прямымъ взаимно встрѣчающимся; и лежащимъ не на тойже плоскости; то и плоскости на оныхъ будутъ взаимно параллельны.

Пусть двѣ прямыя АВ, CD взаимно встрѣ-

чающіеся, будуще параллельны къ другимъ двумъ прямымъ DE , EF взаимно въспрѣчающимся, и лежащимъ не на той же плоскости. Говорю, что плоскости на AB , BC , и на DE , EF , будучи и продолжены не въспрѣчались взаимно.

Проведи опѣ точки B , къ плоскости прямыхъ DE , EF перпендикулярную, прямую BG^* , *11. которая пусть въспрѣчнется сѣю плоскость въ точкѣ G ; и проводи чрезъ G , параллельную къ ED прямую GH^* ; и параллель- *31,1. ную къ EF прямую GK .

Поселику BG перпендикулярна къ плоскости прямыхъ DE , EF ; то она со всѣми прямыми, съ нею въспрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Въспрѣчается же съ BG каждая изъ *опр. 3. прямыхъ GH , GK , кои лежатъ на плоскости прямыхъ DE , EF : посему каждый изъ угловъ BGH , BGK есть прямой. И поселику BA параллельна къ GH^* ; то углы GBA , BGH *9. равны двумъ прямым*. Но уголъ BGH прямой: посему и уголъ GBA прямой; и BG есть подѣ прямыми углами къ BA . Поэтому же BG подѣ прямыми углами и къ BC . Итакъ, поселику прямая BG къ двумъ прямымъ BA , BC , взаимно пресѣкающимся, поставлена подѣ прямыми углами; то BG *29,1.

будеть и къ плоскости прямыхъ BA, BC
 4. подъ прямыми углами. Потому же BG есть
 и къ плоскости прямыхъ GH, GK подъ
 прямыми углами. Но плоскость прямыхъ
 GH, GK есть та же, что и плоскость пря-
 мыхъ DE, EF : посему BG къ плоскости
 прямыхъ DE, EF есть подъ прямыми угла-
 ми. А доказано, что прямая GB есть подъ
 прямыми углами къ плоскости прямыхъ $AB,$
 BC ; еще же сѣя прямая къ плоскости пря-
 мыхъ DE, EF перпендикулярна: посему BG
 къ каждой изъ плоскостей, что на $AB,$
 BC , и на DE, EF , есть перпендикулярная.
 А плоскости, къ коимъ таже прямая есть
 *14. перпендикулярная, суть взаимно парал-
 лельны*: чего ради плоскость на AB, BC
 параллельна къ плоскости на DE, EF .

Итакъ, ежели двѣ, и пр. ч. и д. н. (88).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели двѣ параллельныя плоскости пере-
 сѣчены какою ниесъ плоскостію; то вза-
 имныя ихъ сѣченія суть параллельны.

Пусть двѣ параллельныя плоскости $AB,$
 CD будутъ пересѣчены какою ниесъ плос-
 костію $EFGH$: и пусть взаимныя ихъ сѣ-
 ченія будутъ EF, GH . Говорю, что EF
 параллельна къ GH .

Ибо, буде не такъ: то прямыя EF , GH продолженныя встрѣялися, или по ту сторону гдѣ F , H , или по ту сторону гдѣ E , G . Продолжи оныя, и пусть встрѣялися по ту сторону, во первыхъ, гдѣ F , H , въ точкѣ K .

Поелику прямая EFK есть на плоскости AB ; то всякая точка на прямой EFK есть на плоскости AB *: но одна изъ точекъ на прямой EFK есть K ; посему точка K есть на плоскости AB . Поному же точка K есть и на плоскости CD . Итакъ плоскости AB , CD , продолженныя взаимно встрѣялися. Но онѣ не встрѣчаются, ибо, по положенію, суть параллельныя: посему и прямыя EF , GH продолженныя не встрѣялися по ту сторону гдѣ F , H . Подобно докажемъ, что прямыя EF , GH не встрѣялися ни по ту сторону гдѣ E , G . А ни по копорую сторону не встрѣчающіяся прямыя суть параллельныя*: *оп. 35, 1. чего ради EF , параллельна къ GH .

Итакъ, ежели двѣ параллельныя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели двѣ прямыя пересѣчены будутъ параллельными плоскостями; то онѣ разсѣкутся въ томъ же отношеніи.

Пусть двѣ прямыя AB , CD будутъ пересѣчены параллельными плоскостіями GH , KL , MN въ точкахъ A , E , B , C , F , D . Говорю, что какъ AE къ EB , такъ CF къ FD .

Пропяни AC , BD , AD ; и пусть AD встрѣтится съ плоскостію KL въ точкѣ O ; и пропяни EO , OF .

Поелику двѣ параллельныя плоскости KL , MN пересѣчены плоскостію $EBDO$; то взаимныя ихъ сѣченія EO , BD суть параллельныя*¹⁶. Такъ же, поелику двѣ параллельныя плоскости GH , KL пересѣчены плоскостію $AOFC$; то взаимныя ихъ сѣченія AC , OF суть параллельныя. Ипакъ, поелику къ BA , одной изъ сторонъ треугольника ABD , проведена параллельная EO ; то какъ AE къ EB , такъ AO къ OD *^{2,VI}. Еще же, поелику къ AC , одной изъ сторонъ треугольника ADC , проведена параллельная OF ; то какъ AO къ OD , такъ CF къ FD . А доказано, что какъ AO къ OD , такъ AE къ EB : чего ради какъ AE къ EB , такъ CF къ FD *^{11,V}.

Ипакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н. (89).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели прямая будетъ подѣлена прямыми углами къ какой нисетъ плоскости; то всякія

плоскости, проходящія чрезъ сію прямую, будутъ къ той же плоскости подъ прямыми углами. www.libtool.com.cn

Пусть прямая АВ будетъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю, что всякія плоскости, проходящія чрезъ АВ, суть къ той же подлежащей плоскости подъ прямыми углами.

Пусть чрезъ АВ пройдесть плоскость DE; и пусть будетъ CE взаимное сѣченіе плоскости DE съ подлежащею. На прямой CE возьми какую нисешь точку F; и опъ точки F проведи на плоскости DE, подъ прямыми углами къ CE, прямую FG*. *11, I.

Поселику АВ перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то АВ ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости, есть перпендикулярна*: слѣд- *опр. 3. ственно АВ перпендикулярна къ прямой CE; а посему уголъ ABF есть прямой*. Но *оп. 10, I. и уголъ GFB прямой же; посему АВ параллельна къ FG*. Но АВ перпендикулярна *28, I. къ подлежащей плоскости; посему и FG перпендикулярна къ сей плоскости*. Но плос- *8. кость называется перпендикулярною къ плоскости, когда прямая линія, проводимая на одной изъ сихъ плоскостей, подъ прямыми углами ко взаимному оныхъ сѣченію, суть

къ другой плоскости подъ прямыми углами*опр.4. ми*; доказано же, что прямая FG проведенная на плоскости DE , подъ прямыми углами къ CE , взаимному сѣченію плоскостей, есть подъ прямыми углами и къ подлежащей плоскости: слѣдственно плоскость DE есть перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Подобно докажемся, что всякія плоскости, проходящія чрезъ прямую AB , перпендикулярны къ подлежащей плоскости.

Ипакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели двѣ плоскости, взаимно пресѣкающіяся, перпендикулярны къ какой ни есть плоскости; то и взаимное оныхъ сѣченіе будетъ къ той же плоскости перпендикулярное.

Пусть двѣ плоскости AB , BC , взаимно пресѣкающіяся, будутъ перпендикулярны къ подлежащей плоскости; и пусть взаимное оныхъ сѣченіе будетъ прямая BD . Говорю, что BD есть перпендикулярная къ той же плоскости.

Буде же нѣтъ: то отъ точки D проведи на плоскости AB , подъ прямыми углами къ AD , прямую DE *; и отъ точки же

Д проводи на плоскости ВС, подъ прямыми углами къ CD, прямую DE.

Поселику плоскость АВ перпендикулярна къ подлежащей плоскости; и прямая DE проведена на плоскости АВ, подъ прямыми углами къ АД, взаимному сѣченію сихъ плоскостей: то DE естъ перпендикулярная къ подлежащей плоскости*. Подобно докажемъ, *опр. 4. что и DF естъ перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Иптакъ опъ ипойже точки D подлежащей плоскости, воспавлены, по ту же ея сторону, двѣ прямая подъ прямыми къ ней углами; что невозможно*. Посему опъ *13. точки D не могутъ быть воспавлены, подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости, иныя прямая, кромѣ прямой DV, взаимнаго сѣченія плоскостей АВ, ВС.

Иптакъ, ежели двѣ плоскости, и проч. ч. и д. н. (90).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели толстый уголъ будетъ содѣржимъ премо плоскими углами; то два изъ сихъ плоскихъ угловъ, всячески перебранные, сунъ больше остальнаго.

Пусть толстый уголъ при А будетъ содѣржимъ премо плоскими углами ВАС, САД,

DAВ. Говорю, что изъ угловъ ВАС, САД, DAB, два, всячески перебранные, суть больше оспальнаго.

Ибо, есѣли углы ВАС, САД, DAB всѣ взаимно равны; то явно, что два изъ сихъ угловъ, всячески перебранные, больше оспальнаго. Есѣли же нѣтъ, то пусть уголъ ВАС будетъ большій. При прямой АВ, и при точкѣ на ней А, составь на плоскости ВАС уголъ ВАЕ равный углу DAB; и положи АД, АЕ равныя; и проведи чрезъ Е прямую ВЕС пересѣкающую прямыя АВ, АС въ точкахъ В, С; и пропни DB, DC.

Поелику DA равна АЕ, и АВ общая; то двѣ прямыя DA, АВ равны двумъ прямымъ АЕ, АВ; и уголъ DAB равенъ углу ВАЕ:

4,1. посему основаніе DB равно основанію BE.

И поелику двѣ прямыя DB, DC больше *20,1. прямой BC*; а DB равна BE: то оспальная DC больше оспальной ЕС. Ипакъ, поелику DA равна АЕ, а АС общая; основаніе же DC больше основанія ЕС: то уголъ DAC *25,1. больше угла ЕАС*. Но уголъ DAB равенъ углу ВАЕ, по спроеію: чего ради углы DAB, DAC больше угла ВАС. Взявъ другіе какѣ ниесѣ два угла, подобно докажемъ, что они больше оспальнаго.

Ипакъ, ежели толстый уголъ, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXI.

Плоскіе углы, www.soderzhanie.ru всякій толстый уголъ, суть меньше чепырехъ угловъ прямыхъ.

Пусть толстый уголъ при А будетъ со-
держимъ плоскими углами BAC, CAD, DAB .
Говорю, что углы BAC, CAD, DAB суть
меньше чепырехъ прямыхъ.

На каждой изъ прямыхъ AB, AC, AD возъ-
ми какія ниесъ почки B, C, D ; и про-
пхни BC, CD, DB .

Преликъ толстый уголъ при В со-
держимъ тремя плоскими углами CBA, ABD, CBD ;
по всякіе два изъ нихъ больше оспальнаго*: *20.
посему углы CBA, ABD больше угла CBD .
Пошому же и углы BCA, ACD больше
угла BCD ; и углы CDA, ADB больше угла
 CDB . Слѣдственнo шесть угловъ $CBA, ABD,$
 BCA, ACD, CDA, ADB суть больше трехъ
угловъ CBD, BCD, CDB . Но при угла $CBD,$
 BCD, CDB равны двумъ прямымъ*; носему *32, г.
шесть угловъ $CBA, ABD, BCA, ACD, CDA,$
 ADB больше двухъ прямыхъ. И поелику
каждаго изъ треугольниковъ ABC, ACD, ADB
при угла равны двумъ прямымъ; по трехъ
сихъ треугольниковъ девять угловъ $CBA,$
 $ACB, BAC, ACD, DAC, CDA, ADB, DBA, BAD$

равны шести прямымъ. Но въ нихъ шесть угловъ ABC , BCA , ACD , CDA , ADB , DBA больше ~~двухъ~~ ^{двухъ} ~~прямыхъ~~ ^{прямыхъ} ~~сп~~ чего ради оспальные три угла BAC , CAD , DAB , содержащiе полный уголъ, суть меньше чепырехъ прямыхъ.

Итакъ, плоскiе углы, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XXII.

Ежели будутъ три плоскiе угла, изъ коихъ два, всячески перебранные, больше оспального; содержащiе же ихъ будутъ прямая всѣ взаимно равныя: то изъ прямыхъ, сопрягающихъ въ нихъ равныя прямая, возможно будетъ соспавить преугольникъ.

Пусть будутъ три плоскiе угла ABC , DEF , GHK , изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше оспального; а именно, углы ABC , DEF больше угла GHK , углы же DEF , GHK больше угла ABC , и еще, углы GHK , ABC больше угла DEF ; и пусть прямая AB , BC , DE , EF , GH , NK будутъ всѣ взаимно равныя; и пусть продолжены будутъ AC , DF , GK . Говорю, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC , DF , GK , возможно соспавить преугольникъ; — то есть, что изъ прямыхъ AC , DF , GK , всякiя двѣ суть больше оспальной.

Если углы ABC , DEF , GHC взаимно равны: то, поелику и AC , DF , GK будутъ взаимно равны, явно, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC , DF , GK , возможно составить треугольникъ. Если же неравны: то при прямой HC , и при точкѣ на ней H , составъ уголъ KHL равный углу ABC *; и положи HL равную копшой неспъ изъ прямыхъ AB , BC , DE , EF , GH , HC ; и пропни KL , GL .

Поелику двѣ прямыя AB , BC равны двумъ прямымъ KH , HL ; и уголъ при B равенъ углу KHL : посему основаніе AC равно основанію KL *. И поелику углы ABC , GHC больше угла DEF ; а уголъ ABC равенъ углу KHL : посему и уголъ GHL больше угла DEF . Итакъ, поелику двѣ прямыя GH , HL равны двумъ прямымъ DE , EF ; но уголъ GHL больше угла при E : посему и основаніе GL больше основанія DF *. Но GK , KL больше GL ; посему GK , KL и гораздо больше DF . А KL равна AC ; посему AC , GK больше остальной DF . Подобно докажемъ, что и AC , DF больше GK ; и еще DF , GK больше AC . Итакъ возможно изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC , DF , GK , составить треугольникъ*.

Иначе. Пусть будутъ даны три плоскіе

угла ABC , DEF , GHK , изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше оспальной; и пусть содержащъ ихъ равныя прямая AB , BC , DE , EF , GH , HK ; и пусть продолженныя будутъ AC , DF , GK . Говорю, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC , DF , GK , возможно составить треугольникъ; то есть, что двѣ изъ сихъ прямыхъ, всячески перебранныя, суть больше оспальной.

Еслили углы при точкахъ B , E , H суть взаимно равные: то и прямая AC , DF , GK *4,1. будутъ взаимно равны*; и двѣ изъ нихъ будутъ больше оспальной. Еслили же иѣтъ, то пусть углы при точкахъ B , E , H будутъ неравны, и пусть уголъ при B будетъ больше каждаго изъ угловъ E , H : посему прямая AC будетъ больше каждой изъ прямыхъ DF , GK *; и явно, что AC съ каждою изъ прямыхъ DF , GK больше оспальной. Говорю также, что и DF , GK больше AC . При прямой AB , и при точкѣ на ней B , сославъ уголъ ABL равный углу GHK ; и положи BL равную которой ниесъ изъ прямыхъ AB , BC , DE , EF , GH , HK ; и продолжи AL , LC .

Послику двѣ прямая AB , BL равны двумъ прямымъ GH , HK , каждая каждой; и содержащъ углы равные: то основаніе AL

равно основанію GK^* . И поелику углы при E, H больше угла ABC ; а уголъ GNK равенъ углу ABF : посему и оспальной уголъ при E больше угла LBC . Ипакъ, поелику двѣ прямыя LB, BC равны двумъ прямымъ DE, EF , каждая каждой; но уголъ DEF больше угла LBC : посему и основаніе DF больше основанія LC^* . *24, I. Доказано же, что GK равна AL ; посему DF, GK супъ больше AL, LC . Но AL, LC больше AC^* : посему DF, GK и *20, I. гораздо больше AC . Чего ради двѣ изъ прямыхъ AC, DF, GK , всячески перебранныя, супъ больше оспальной. Ипакъ изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK , возможно соспавить преугольникъ*. ч. и д. н. *22, I.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Изъ трехъ плоскихъ угловъ соспавить толстый уголъ. Но надлежитъ двумъ изъ сихъ данныхъ трехъ угловъ, всячески перебраннымъ, быть больше оспального; и всѣмъ тремъ быть меньше чепырехъ угловъ прямыхъ.

Пусть будутъ при данные плоскіе углы ABC, DEF, GNK ; изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше оспаль-

наго; и пусть всѣ прибудущъ меньше четырехъ прямыхъ. Надлежитъ изъ угловъ, равныхъ угламъ ABC , DEF , GHC , составить толстый уголъ.

Опиши равныя прямая AB , BC , DE , EF , GH , HK ; и просяни AC , DF , GK . Почему изъ прямыхъ равныхъ прямыхъ AC , DF , GK

22. возможно составить треугольникъ. Со-

22, I. сипавъ треугольникъ LMN *, такъ чтобы была LM равная AC , а MN равная DF , и LN равная GK ; и около треугольника

*5, IV. LMN опиши кругъ LMN *: и возьми онаго

1, III. центръ, который будетъ или внутри треугольника LMN , или на его сторонѣ, или внѣ онаго.

Пусть будетъ во первыхъ внутри, и пусть будетъ оный въ O : просяни LO , MO , NO . Говорю, что AB больше LO . Ибо, буде нѣтъ; то AB или равна LO , или меньше ея. Пусть будетъ, во первыхъ, равна. Поскольку AB равна LO , а и AB равна BC ; то LO равна BC : но LO равна и OM : итакъ двѣ прямая AB , BC равны двумъ прямымъ LO , OM , каждая каждой; и основаніе AC равно, по положенію, основанію

*8, I. LM : посему уголъ ABC равенъ углу LOM *.

Потому же уголъ DEF равенъ углу MON , и уголъ GHC углу NOL . Чего ради при угла ABC , DEF , GHC равны тремъ угламъ

$\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$. Но при угла $\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$ равны чепыремъ прямымъ: посему и при угла $\angle ABC$, $\angle DEF$, $\angle GHI$ равны чепыремъ прямымъ; они же по положенію, и меньше чепырехъ прямыхъ: что небыло. Следовательно AB не равна LO . Говорю еще, что AB и не меньше LO . Ибо, буде возможно, пусть будетъ меньше; и положи OP равную AB , и OQ равную BC ; и пропяти PQ . Поелику AB равна BC , то и OP равна OQ ; посему и остальная LP равна остальной QM : а посему LM параллельна къ PQ *; и преугольникъ *2. VI. LMO есть равноугольный преугольнику PQO . Чего ради какъ OL къ LM , такъ OP къ PQ *; *4. VI. и прѣмѣненіемъ, какъ LO къ OP , такъ LM къ PQ *. Но LO больше OP ; посему LM *16. V. больше PQ : а LM равна AC , по строенію; посему и AC больше PQ . Ипакъ, поелику двѣ прямыя AB , BC равны двумъ прямымъ PO , OQ ; но основаніе AC больше основанія PQ : то и уголъ $\angle ABC$ больше угла $\angle POQ$ *. *25. I. Подобно докажемъ, что уголъ $\angle DEF$ больше угла $\angle MON$, и уголъ $\angle GHI$ больше угла $\angle NOL$. Чего ради при угла $\angle ABC$, $\angle DEF$, $\angle GHI$ суть больше трехъ угловъ $\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$. Но углы $\angle ABC$, $\angle DEF$, $\angle GHI$, по положенію, меньше чепырехъ прямыхъ; посему углы $\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$ и тораздо меньше

четырёхъ прямыхъ ; они же равны четы-
ремъ прямымъ : что нелѣпо. Слѣдственно
АВ не меньше LO. А доказано, что и ни
равна ей : итакъ АВ больше LO.

Отъ точки О возставь , подѣ прямыми

12. углами къ плоскости круга LMN, прямую OR.

Пусть будетъ избытокъ квадрата изъ АВ
предъ квадратомъ изъ LO равенъ квадрату

лемма. изъ OR; и пропни RL, RM, RN. Поелику
прямая OR перпендикулярна къ плоскости
круга LMN; то RO перпендикулярна и къ

спр.3. каждой изъ прямыхъ LO, MO, NO. И по-
елику LO равна OM, а OR есть общая , и
подѣ прямыми къ нимъ углами : то осно-

4,1. ваніе RL равно основанію RM. Потому же
и RN равна каждой изъ прямыхъ RL, RM.

Итакъ три прямая RL, RM, RN суть
взаимно равны. И поелику квадратъ изъ
OR равенъ, по положенію , избытку квадра-
та изъ АВ предъ квадратомъ изъ LO; то
квадратъ изъ АВ равенъ квадратамъ изъ LO,
OR. Квадратамъ же изъ LO, OR равенъ и

47,1. квадратъ изъ LR, ибо уголъ LOR есть
прямой : посему квадратъ изъ АВ равенъ
квадрату изъ RL; слѣдственно АВ равна RL.
Но прямой АВ равна каждая изъ прямыхъ BC,
DE, EF, GH, HK; а прямой RL равна каж-
дая изъ прямыхъ RM, RN: посему каждая

изъ прямыхъ АВ, ВС, DE, EF, GH, НК равна каждой изъ прямыхъ RL, RM, RN. А послѣку двѣ прямыя LR, RM равны двумъ прямымъ АВ, ВС; и основаніе LM равно, по положенію, основанію АС: посему уголъ LRM равенъ углу ABC*. Потому же, уголъ MRN равенъ углу DEF, а уголъ LRN углу GHK. Ипакъ изъ трехъ плоскихъ угловъ LRM, MRN, LRN, равныхъ тремъ даннымъ угламъ ABC, DEF, GHK, составленъ уголъ шолспый при R, содержаемый углами LRM, MRN, LRN.

Но пусть центръ круга будетъ на одной изъ сторонъ треугольника, а именно, на MN, и пусть будетъ оный въ О: пропями OL. Говорю еще, что АВ больше LO. Ибо, буде нѣтъ; то АВ или равна LO, или меньше ея. Пусть будетъ, во первыхъ, равна. Посему двѣ прямыя АВ, ВС, то есть DE, EF равны двумъ прямымъ МО, OL, то есть прямой MN. Но MN равна, по положенію, DF: посему DE, EF равны DF; что невозможно*: слѣдственно АВ не равна LO. По-
добно докажемъ, что и не меньше ея; ибо выйдетъ еще большая нелѣпость: ипакъ АВ больше LO. Если же еще восплавимъ, подъ прямыми углами къ плоскости круга, прямую RO равную прямой, коея

квадратъ равенъ избытку квадрата изъ АВ
 лемма. предъ квадратомъ изъ LO: по задача
 будетъ рѣшена.

Пусть центръ круга будетъ еще въ
 треугольниѣ LMN, и пусть будетъ оный
 въ O: пропяти LO, MO, NO. Говорю еще,
 что АВ больше LO. Ибо, буде нѣтъ; то
 или равна, или меньше. Пусть будетъ,
 во первыхъ, равна: Ипакъ двѣ прямыя АВ, ВС
 равны двумъ прямымъ МО, ОL, каждая каж-
 дой; и основаніе АС равно основанію ML:
 8,1. посему уголъ ABC равенъ углу MOL. Попо-
 му же уголъ GHK равенъ углу LON. Чего
 ради цѣлый уголъ MON равенъ двумъ угламъ
 ABC, GHK. Но углы ABC, GHK больше угла
 DEF посему и уголъ MON больше угла DEF.
 И поелику двѣ прямыя DE, EF равны двумъ
 прямымъ МО, ON, и основаніе DF равно
 основанію MN: то уголъ MON равенъ углу
 DEF; доказано же, что онъ больше; что
 нелѣпо: Чего ради АВ не равна LO: по-
 слѣже мы докажемъ, что и не меньше: слѣд-
 ственно больше. Еслили возставимъ оныя,
 подъ прямыми углами къ плоскости круга,
 прямую OR; и еслили возьмемъ сію прямую
 равную прямой, коея квадратъ равенъ из-
 бытку квадрата изъ АВ предъ квадратомъ
 лемма. изъ LO: по задача будетъ рѣшена.

Теперь говорю, что АВ не меньше LO. Ибо, буде возможно, пусть будетъ меньше: положи прямую ОР равную АВ, и прямую ОQ равную ВС; и пропни РQ. Поелику АВ равна ВС, то ОР равна ОQ; посему и оспальная РL равна оспальной QM: а посему LM параллельна къ QR*; и преуголь- *2,VI. никъ LMO есть равноугольный преугольнику QOR. Чего ради какъ OL къ LM, такъ ОР къ RQ*; и премѣненіемъ, какъ LO къ *4,VI. ОР, такъ LM къ RQ*. Но LO больше ОР, по- *16,VI. сему LM больше RQ: а LM равна АС; посему и АС больше RQ. И поелику двѣ прямыя АВ, ВС равны двумъ прямымъ РО, ОQ, каждая каждой; по основаніе АС больше основанія RQ: то и уголь ABC больше угла ROQ*. *25,I. Еслили опнимемъ прямую OV равную каждой изъ прямыхъ ОР, ОQ; и пропнемъ RV: то подобно докажемъ, что уголь GHK больше угла POV.

При прямой LO, и при точкѣ на ней О, сославъ уголь LOS равный углу ABC, а уголь LOT равный углу GHK; и положи каждую изъ прямыхъ OS, OT равную прямой РО; и пропни PS, PT, ST.

Поелику двѣ прямыя АВ, ВС равны двумъ прямымъ РО, OS; и уголь ABC равенъ углу POS: то основаніе АС, то есть прямая LM

равна основанію PS. Потому же и LN равна PT. И поелику двѣ прямыя ML, LN равны двумъ ~~прямымъ~~ SP, PT; а уголь MLN больше угла SPT: то и основаніе MN больше

24, I. основанія ST. Но MN равна DF; посему и DF больше ST. Ипакъ, поелику двѣ прямыя DE, EF равны двумъ прямымъ SO, OI; но основаніе DF больше основанія ST: то и

25, I. уголь DEF больше угла SOT. Уголь же SOT равенъ угламъ ABC, GHK; чего ради уголь DEF естъ больше угловъ ABC, GHK: онъ же и меньше; чпо невозможно.

ЛЕММА. Мы покажемъ, какъ составить квадрапъ изъ OR равный избытку квадрапа изъ АВ предъ квадрапомъ изъ LO.

Пусть будущъ изложены прямыя АВ, LO; и пусть АВ будетъ большая: напиши на ней полукружіе ABC; и помѣспи въ полукружіи ABC прямую AC равную LO; и пропхни ВС.

Поелику уголь ACB естъ въ полукружіи

31, III. ABC; то уголь ACB прямой. Посему квадрапъ изъ АВ равенъ квадрапамъ изъ AC,

47, I. CB: и потому квадрапъ изъ АВ больше квадрапа изъ AC квадрапомъ изъ СВ. Но AC равна LO; посему квадрапъ изъ АВ больше квадрапа изъ LO квадрапомъ изъ СВ. Ипакъ, еспли мы положимъ прямую OR равную BC: то квадрапъ

изъ АВ будетъ избытокъ квадрата изъ ОЛ предъ квадратомъ изъ ОР. Что мы и сдѣлаемъ хотѣли.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Ежели пѣло содержится параллельными плоскостями; то прошивулежащія онаго плоскости суть параллелограммы равные.

Пусть будетъ CDHG пѣло содержащее параллельными плоскостями АС, GF, АН, DF, BF, АЕ. Говорю, что прошивулежащія онаго плоскости суть параллелограммы равные.

Поелику двѣ параллельныя плоскости BG, SE пересѣчены плоскостію АС; то общія ихъ сѣченія суть параллельныя: посему АВ параллельна къ DC*. Еще же, по-^{*16.}

елику двѣ параллельныя плоскости BF, AE пересѣчены плоскостію АС; то общія ихъ сѣченія суть параллельныя; посему ВС параллельна къ AD. А доказано, что и АВ параллельна къ DC: чего ради плоскость АС есть параллелограмм*. Подобно дока-^{*оп. 36, I.}жемъ, что и каждая изъ плоскостей DF, FG, GB, BF, AE есть параллелограммъ.

Прошани АН, DF.

Поелику АВ параллельна къ DC, а ВН параллельна къ CF: то двѣ прямыя АВ, ВН,

взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ прямымъ DC , CF , взаимно встрѣчающимся и нележащимъ на тойже плоскости; посему сѣи прямая будущъ содер-

10. жать углы равные: а посему уголъ ABH равенъ углу DCF . И поелику двѣ прямая

*34.1. AB , BH равны двумъ прямымъ DC , CF *, и уголъ ABH равенъ углу DCF : то основаніе AH равно основанію DF ; и треугольникъ ABH равенъ треугольнику DCF . Но треугольника ABH естъ двукратный паралле-

*34.1. лограммъ BG *, а треугольника DCF двукратный параллелограммъ CE : посему параллелограммъ BG равенъ параллелограмму CE . Подобно докажемъ, что параллелограммъ AC равенъ параллелограмму GF , а параллелограммъ AE параллелограмму BF .

Итакъ, ежели шѣло содержишя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели параллелепипедъ пересѣченъ будетъ плоскостію параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: то оный разсѣчется на два шѣла, пераллелепипеды же, кои сущъ взаимно какъ основанія.

Пусть параллелепипедъ $ABCD$ будетъ

пересѣченъ плоскостію FG параллельною къ проптивулежащимъ плоскостямъ RA , DH . Говорю, что какъ ~~основаніе~~ $AEFV$ къ основанію $EHCF$, такъ $ABFU$ къ $ABFU$ $EGCD$. Продолжи AN на обѣ стороны; и положи сколько ниеспъ прямыхъ AK , KL равныхъ прямой AE ; положи также сколько ниеспъ прямыхъ NM , MN равныхъ прямой EN ; и дополни параллелограммы LP , KV , NH , MS , и параллелепипеды LQ , KR , DM , MT .

Поелику прямая LK , KA , AE взаимно равны; то равны и параллелограммы LP , KV , AF взаимно, и параллелограммы KO , KB , AG взаимно*: еще же и параллелограммы LY , KQ , *36, I, AK равны взаимно*, ибо сущъ проптивулежащіе. *24. Пошому же равны сущъ, и параллелограммы ES , NH , MS взаимно, и параллелограммы HG , HJ , JN взаимно, еще же и параллелограммы DH , MZ , NT взаимно. Ипакъ при плоскости котораго либо изъ $ABFU$ LQ , KR , AU равны премоу плоскостямъ другаго. Но у каждаго $ABFU$ оныя при плоскости равны прочимъ премоу проптивулежащимъ*: посему при $ABFU$ *24. LQ , KR , AU сущъ взаимно равны*. Пошому *опр. 10, же и при $ABFU$ ED , DM , MT взаимно равны. Ипакъ сколько крапное естъ основаніе LF основанія AF , сполько крапное естъ и $ABFU$ LU $ABFU$. Пошому же сколько крапное

есть основаніе NF основанія FH , сполько
 крапное еспѣ и пѣло NU пѣла HU . И еспѣ-
 ли основаніе LF равно основанію NF , то и
 пѣло LU равно пѣлу NU ; и еспѣли основа-
 ніе LF больше основанія NF , то и пѣло
 LU больше пѣла NU ; и еспѣли меньше, то
 меньше. Ипакъ изъ имѣющихся чепырехъ
 величинъ, то еспѣ, двухъ основаній AF , FH ,
 и двухъ пѣлъ AU , UH , взяпы основанія AF
 и пѣла AU равнокрапныя, основаніе LF
 и пѣло LU ; а основанія NF и пѣла HU
 равнокрапныя основаніе NF и пѣло NU : и
 доказано, что еспѣли основаніе LF больше
 основанія NF , то и пѣло LU больше пѣла
 NU ; и еспѣли равно, то равно; и еспѣли
 меньше, то меньше: слѣдспвенно какъ
 основаніе AF къ основанію FH , такъ пѣло
 *оп. 5, V. AU къ пѣлу UH *. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

При данной прямой, и при данной на ней
 почкѣ, составипъ полспый уголь, равный
 данному полспому углу.

Пуспъ бупепъ AB данная прямая, и A
 данная на ней почка: и уголь при D данный
 полспый уголь, содержимый плоскими угла-
 ми EDC , EDF , FDC . Надлежитъ при прямой

АВ, и при точкѣ на ней А, составить
полный уголъ, равный полному углу
при D.

www.libtool.com.cn

Возьми на DF какую нисеть точку F; и
проведи отъ F, перпендикулярную къ плос-
кости прямыхъ ED, DC, прямую FG*, и *11.
пусть она въспрѣшишь сѣю плоскость въ G;
и пропями DG; и при прямой АВ, и
при точкѣ на ней А, составь уголъ BAL
равный углу EDC, и уголъ BAK равный углу
EDG; и положи прямую АК равную DG; и
отъ точки К возставь, подъ прямыми углами
къ плоскости прямыхъ ВА, АL, прямую КН*; *12.
и положи КН равную GF; и пропями НА.
Говорю, что полный уголъ при А, содер-
жимый углами BAL, BAN, NAL, равенъ пол-
ному углу при D, содержимому углами
EDC, EDF, FDC.

Опними равныя прямыя АВ, DE; и пропями
НВ, КВ, FE, GE. Поелику FG перпенди-
кулярна къ подлежащей плоскости; то она
со всѣми прямыми, съ нею въспрѣчающимися
и на сей плоскости лежащими, дѣ-
лаетъ углы прямые*: посему каждый изъ *опр.3.
угловъ FGD, FGE есть прямой. Потому же
и каждый изъ угловъ НКА, НКВ есть пря-
мой. И поелику двѣ прямыя КА, АВ равны
двумъ прямымъ GD, DE, каждая каждой;

и содержатъ углы равные: по основаніе ВК
 4,1. равно основанію EG. Но и КН равна GF; и
 каждый изъ угловъ НКВ, FGE прямой: по-
 4,1. сему НВ равна FE. Еще же, поелику двѣ
 прямыя АК, КН равны двумъ прямымъ
 DG, GF, и содержатъ углы прямые: по
 основаніе АН равно основанію DF. Но и АВ
 равна DE: ипакъ двѣ прямыя НА, АВ равны
 двумъ прямымъ FD, DE; и основаніе НВ
 равно основанію FE: посему уголъ ВАН
 8,1. равенъ углу EDF. Потому же уголъ НАЛ
 равенъ углу FDC: ибо положивъ АЛ
 равную DC, и пропнянувъ KL, HL, GC, FC,
 поелику цѣлый уголъ BAL равенъ цѣлому
 EDC; и въ нихъ уголъ BAK равенъ углу
 EDG: то оспальной уголъ KAL будетъ
 равенъ оспальному GDC. Поелику же двѣ
 прямыя КА, АЛ равны двумъ прямымъ
 GD, DC, и содержатъ углы равные: по
 основаніе KL равно основанію GC. Но и КН
 равна GF: ипакъ двѣ прямыя LK, КН равны
 двумъ прямымъ CG, GF; и содержатъ углы
 прямые: посему основаніе HL равно основа-
 нію FC. Еще же, поелику двѣ прямыя
 НА, АЛ равны двумъ прямымъ FD, DC; и
 основаніе HL равно основанію FC: по
 уголъ НАЛ равенъ углу FDC. А и уголъ
 BAL равенъ углу EDC:

Итакъ при данной прямой, и при данной на ней точкѣ, соспавленъ полспый уголь, равный данному полспому углу. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Изъ данной прямой написаць параллелепипедъ, подобный данному параллелепипеду и подобно положенный.

Пусть будетъ АВ данная прямая, и DC данный параллелепипедъ. Надлежитъ изъ данной прямой АВ написаць параллелепипедъ, подобный данному параллелепипеду DC и подобно положенный.

При прямой АВ, и при точкѣ на ней А, соспавъ, равный полспому углу при С, полспый уголь*, содержимый плоскими углами ВАН, НАК, КАВ, такъ чпобы равенъ былъ уголь ВАН углу ЕСF, и уголь ВАК углу ЕСG, и еще уголь КАН углу GCF; сдѣлай какъ ЕС къ CG, такъ ВА къ АК*; и какъ *12, VI. GC къ CF, такъ КА къ АН: посему равномерно, какъ ЕС къ CF, такъ ВА къ АН*. *22, V. Дополни параллелограммъ ВН, и параллелепипедъ AL.

Поелику какъ ЕС къ CG, такъ ВА къ АК; и сїи пропорціональныя спороны суть около равныхъ угловъ ЕСG, ВАК: посему

параллелограммъ GE подобенъ параллелограмму KB. Потому же параллелограммъ KN подобенъ параллелограмму GF; и параллелограммъ FE параллелограмму HB. Ипакъ при параллелограмма параллелепипеда CD подобны премоу параллелограммамъ параллелепипеда AL. Но сїи три и равны премоу

24. прочимъ проотивулежащимъ, и подобны *оп. 1, VI. имъ*. Чего ради и цѣлый параллелепипедъ

опр. 9. CD подобенъ цѣлому параллелепипеду AL.

Ипакъ изъ данной прямой АВ написанъ параллелепипедъ AL, подобный данному параллелепипеду CD и подобно положенный. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Ежели параллелепипедъ пересѣченъ будетъ плоскостію чрезъ діагонали проотивулежащихъ его плоскостей: то оный разсѣченъ будетъ сею плоскостію по поламъ.

Пусть параллелепипедъ АВ будетъ пересѣченъ плоскостію CDEF чрезъ діагонали CF, DE двухъ проотивулежащихъ его плоскостей. Говорю, что параллелепипедъ АВ разсѣченъ плоскостію CDEF по поламъ.

Поелику треугольникъ CGF равенъ треугольнику CFB*, а треугольникъ ADE

треугольнику DEH ; поелику же и параллелограммъ CA равенъ параллелограмму BE^* , ибо *24. они суть проптивуположащія плоскости; по-тому же и параллелограммъ GE равенъ параллелограмму CH : по призма, содержащая двумя треугольниками CGF , ADE и тремя параллелограммами GE , AC , CE , равна приз-мѣ, содержащей двумя треугольниками CFB , DEH и тремя параллелограммами CH , BE , CE^* , ибо онѣ содержатся равномногими и *опр.го. равными плоскостями. Ипакъ цѣлый па-раллелепипедъ AB разсѣченъ плоскостію $CDEF$ по поламъ. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Параллелепипеды, имѣющіе поже основаніе и поже высоту, и коихъ надстоящія оканчиваются на цѣхъже прямыхъ, суть взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды CM , CN , имѣющіе поже основаніе AB , и поже высоту; и пусть надстоящія ихъ AG , AF , LM , LN , CD , CE , BH , BK будутъ на цѣхъже прямыхъ FN , DK . Говорю, что параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN .

Поелику каждая изъ фигуръ CH , CK есть параллелограммъ*: по каждая изъ прямыхъ *24.

34, I. DH , EK равна прямой CB^ ; посему и DH равна EK . Опними обще EH : посему оспальная DE равна оспальной HK ; слѣдственно и преутольникъ DEC равенъ преутолинику

8, I. NKB^ , и параллелограммъ DG параллело-

36, I. грамму HN^ . Попому же преутольникъ FAG равенъ преутолинику MLN . Еще же, параллелограммъ CF равенъ параллелограмму BM ; и параллелограммъ CG параллелограмму

24. BN^ : ибо супъ пропивулежащѣе. Ипакъ призма, содержащая двумя преутольниками AFG , CDE и према параллелограммами AD , DG , GC , равна призмѣ, содержащей двумя преутольниками MLN , NBK и према па-

пр. 10. раллелограммами BM , HN , NB^ . Придай къ каждой изъ сихъ призмъ тѣло, коего основаніе естъ параллелограммъ AB , а пропивулежащая плоскость $GENM$: посему цѣлый параллелепипедъ CM будетъ равенъ цѣлому параллелепипеду CN .

Ипакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Параллелепипеды, имѣющіе поже основаніе и ту же высоту, и коихъ надстоящія оканчиваются не на тѣхъ же прямыхъ, супъ взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды CM , CN , имѣющіе поже основаніе AB , и шже высоту; но пусть ~~надстоящія ихъ~~ AF , AG , LM , LN , CD , CE , BH , BK оканчиваются не на шѣхъже прямыхъ. Говорю, что параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN .

Продолжи NK , DH , и GE , FM , и пусть встрѣяшся онѣ въ шчкахъ P , R , Q , O ; и прошиани AO , LP , CQ , BR .

Итакъ параллелепипедъ CM , имѣющій основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ прошивулежащій параллелограмму $FDHM$, равенъ параллелепипеду CP , имѣющему основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ прошивулежащій параллелограмму $OQRP$ *; ибо они имѣють*²⁹ поже основаніе $ACBL$, и надстоящія ихъ AF , AO , LM , LP , CD , CQ , BH , BR оканчиваются на шѣхъже прямыхъ FP , DR . Но параллелепипедъ CP , имѣющій основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ прошивулежащій параллелограмму $OQRP$, равенъ параллелепипеду CN , имѣющему основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ прошивулежащій параллелограмму $GEKN$ *: ибо и они имѣють поже осно-²⁹ваніе $ACBL$, и надстоящія ихъ AG , AO , CE , CQ , LN , LP , BK , BR оканчиваются на шѣхъже прямыхъ GQ , NR . Чего ради параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN .

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Параллелепипеды, имѣющіе равныя основанія и ту же высоту, суть взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды AE , CF , имѣющіе равныя основанія AB , CD , и ту же высоту. Говорю, что параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF .

Пусть, во первыхъ, будутъ надѣстоящія HK , BE , AG , LM , PQ , DF , CO , RS подѣ прямыми углами къ основаніямъ AB , CD ; и пусть уголъ ALB будетъ не равенъ углу CRD .

Проведи въпрямъ съ CR прямую RT ; и при прямой RT , и при точкѣ на ней R , составь уголъ TRU равный углу ALB ; и положи прямую RT равную AL , и прямую RU равную LB ; и чрезъ точку U проводи параллельную къ RT прямую UX ; и дополни основаніе RX , и параллелепипедъ YU . Поелику двѣ прямыя TR , RU равны двумъ прямымъ AL , LB ; и содержатъ углы равные:

14, VI. по параллелограммъ RX равенъ и подобенъ* параллелограмму HL . Еще же, поелику RT равна AL , и RS равна LM ; и содержатъ углы прямые: по параллелограммъ RY равенъ и подобенъ параллелограмму AM .

Потому же и параллелограммъ LE равенъ и подобенъ параллелограмму SU. Ипакъ при параллелограмме параллелепипеда AE равны тремъ параллелограммамъ параллелепипеда YU, и подобны имъ. И поелику у каждого сѣи при равны прочимъ тремъ пропиви-лежащимъ* и подобны имъ: то и цѣлый па- *24.
раллелепипедъ AE равенъ цѣлому параллеле- *опр.10.
пипеду YU*. Продолжи прямая DR, XU, и пусть онѣ встрѣются въ Z; и чрезъ T прове-ди, параллельную къ DZ, прямую Tt; и продол-жи прямая Tt, и PD, и пусть онѣ встрѣяп-ся въ a; и дополни параллелепипеды ZY, RJ.

Ипакъ параллелепипедъ YZ, имѣющій основаніемъ параллелограммъ RY пропиви-лежащій параллелограмму Zp, равенъ парал-лелепипеду YU, имѣющему основаніемъ параллелограммъ RY пропиви-лежащій па-раллелограмму UV*; ибо они имѣютъ по- *29.
же основаніе RY, и ту же высоту, и надспоящія ихъ RZ, RU, Tt, TX, Ss, SN, Yp, YV оканчиваются на тѣхъ же прямыхъ ZX, sV. Но параллелепипедъ YU равенъ параллелепипеду AE: посему и па-раллелепипедъ YZ равенъ параллелепипеду AE. И поелику параллелограммъ RUXT ра-венъ параллелограмму ZT*, ибо они сплптъ *35,1.
на томъ же основаніи RT, и между пѣми же

параллельными RT, ZX ; а параллелограммъ $RUXT$ равенъ и параллелограмму CD , ибо равенъ AB ; посему параллелограммъ ZT равенъ параллелограмму CD . Но DT есть другой параллелограммъ: посему какъ основаніе CD къ основанію DT , такъ основаніе ZT къ основанію DT *. И поелику параллелепипедъ CJ пересѣченъ плоскостію RF параллельною къ противуположнымъ плоскостямъ; по какъ основаніе CD къ основанію DT , такъ пѣло CF къ пѣлу RJ *. Также, поелику параллелепипедъ ZJ пересѣченъ плоскостію RY параллельною къ противуположнымъ плоскостямъ; по какъ основаніе ZT къ основанію DT , такъ пѣло ZY къ пѣлу RJ . Но какъ основаніе CD къ основанію DT , такъ основаніе ZT къ основанію DT : посему какъ пѣло CF къ пѣлу RJ , такъ пѣло ZY къ пѣлу RJ *. И такъ каждое изъ пѣлъ CF, ZY къ пѣлу RJ имѣетъ то же отношеніе: посему пѣло CF равно пѣлу или параллелепипеду ZY *. А доказано, что параллелепипедъ ZY равенъ и параллелепипеду AE : слѣдственно параллелепипедъ AE равенъ пѣлу CF .

Но пусть надстоящія $AG, HK, BE, LM, CO, PQ, DF, RS$ не будутъ подъ прямыми углами къ основаніямъ AB, CD . Говорю еще;

что параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF .

Отъ точекъ K, E, G, M, Q, F, O, S проведи, перпендикулярныя къ подлежащей плоскости, прямыя $KN, ET, GU, MV, QX, FY, OZ, SJ^*$, и пусть онѣ вспрѣются съ плоскостію въ точкахъ N, T, U, V, X, Y, Z, J ; и пропѣни $NT, UV, NU, TV, XY, XZ, ZJ, YJ$.

Итакъ параллелепипедъ KV равенъ параллелепипеду QJ ; ибо они имѣютъ равныя основанія KM, QS , и ту же высоту; и надстоящія ихъ суть къ основаніямъ подъ прямыми углами. Но параллелепипедъ KV равенъ параллелепипеду AE , а QJ равенъ CF^* ; ибо они имѣютъ поже основаніе и ту же высоту, и надстоящія ихъ оканчивающіяся не на иѣхъже прямыхъ. Чего ради параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF .

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Параллелепипеды, имѣющіе ту же высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пусть будутъ AB, CD параллелепипеды, имѣющіе ту же высоту. Говорю, что параллелепипеды AB, CD суть взаимно какъ основанія; то есть, какъ основаніе AE

къ основанію CF , такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD .

По прямой FG поспавъ, равный параллелограмму AE , параллелограммъ FN^* ; и изъ основанія FN , а по высотѣ параллелепипеда CD , дополни параллелепипедъ GK .

Итакъ параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду GK^* ; ибо они имѣютъ равныя основанія AE , FN , и ту же высоту. И поелику параллелепипедъ GK пересѣченъ плоскостію DG параллельною къ противоположащимъ плоскостямъ: то какъ основаніе HF къ основанію CF^* , такъ шѣло HD къ шѣлу DC . Но основаніе FN равно основанію AE , а шѣло GK равно параллелепипеду AB : чего ради и какъ основаніе AE къ основанію CF , такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD^* .

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Подобные параллелепипеды взаимно суть въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ.

Пусть будутъ AB, CD подобные параллелепипеды, и пусть будутъ AE, CF сходственные ихъ стороны. Говорю, что параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣетъ

упроенное отношеніе прямыя AE къ CF .

Продолжи въпрямъ съ AE , GE , HE прямыя EK , EL , EM ; и положи прямую EK равную CF , и EL равную FN , и еще EM равную FR ; и дополни параллелограммъ KL , и параллелепипедъ KP .

Поелику двѣ прямыя KE , EL равны двумъ прямымъ CF , FN ; и уголъ KEL равенъ углу CFN ; ибо уголъ AEG равенъ углу CFN , по подобію параллелепипедовъ AB , CD : посему параллелограммъ KL равенъ и подобенъ параллелограмму CN . Поэтому же и параллелограммъ KM равенъ и подобенъ параллелограмму CR , и параллелограммъ EP параллелограмму DF . Ипакъ при параллелограммѣ параллелепипеда KP равны прѣмъ параллелограммѣ параллелепипеда CD и подобны имъ. Но у каждаго сїи при равны прочимъ прѣмъ противоположащимъ, и подобны имъ; посему цѣлый параллелепипедъ KP равенъ и подобенъ цѣлому параллелепипеду CD *. Дополни *опр. 10. параллелограммъ GK ; и изъ основаній GK , KL , а по высотѣ параллелепипеда AB , дополни параллелепипеды EO , LQ . Поелику, по подобію* параллелепипедовъ AB , CD , какъ AE *опр. 9. къ CF , ипакъ EG къ FN , и ипакъ EH къ FR *; *оп. I, VI. но FC равна EK , а FN равна EL , и еще FR равна EM : то будетъ какъ AE къ EK ,

- *₇ и II, V. такъ GE къ EL, и такъ HE къ EM*. Но какъ AE къ EK, такъ параллелограммъ AG къ параллелограмму GK*; и какъ GE къ EL, такъ параллелограммъ GK къ KL; и еще, какъ HE къ EM, такъ параллелограммъ QE къ KM: посему какъ параллелограммъ AG къ GK, такъ параллелограммъ GK къ KL, и
- *₁₁, V. такъ параллелограммъ QE къ KM*. Но какъ AG къ GK, такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду EO*; и какъ GK къ KL, такъ параллелепипедъ OE къ параллелепипеду QL; и еще, какъ QE къ KM, такъ параллелепипедъ QL къ параллелепипеду KR: посему какъ параллелепипедъ AB къ EO, такъ параллелепипедъ EO къ QL, и такъ параллелепипедъ QL къ KR. Но если бы величины непрерывно пропорціональны: то первая къ четвертой имѣеть упрощенное
- *оп. II, V. отношеніе первая ко второй*: посему параллелепипедъ AB къ KR имѣеть упрощенное отношеніе параллелепипеда AB къ EO. А какъ AB къ EO, такъ параллелограммъ AG къ GK, и такъ прямая AE къ EK: посему параллелепипедъ AB къ KR имѣеть упрощенное отношеніе прямая AE къ EK. Но параллелепипедъ KR равенъ параллелепипеду CD, и прямая EK прямой CF. Чего ради параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣеть

упроенное отношеніе сходственной споронъ АЕ къ сходственной споронѣ СЕ.

www.libtool.com.cn

СЛѢДСТВІЕ. Описюда явствуемъ, что есѣли чешыре прямыя пропорціональны (44); то какъ первая къ чешвертой, такъ параллелепипедъ изъ первой къ параллелепипеду подобному и подобно написанному изъ второй: ибо и первая къ чешвертой имѣетъ упроенное отношеніе первая ко второй*. *оп. II, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Равныхъ параллелепипедовъ основанія сущь обратню пропорціональны высотамъ: И которыхъ параллелепипедовъ основанія обратню пропорціональны высотамъ, тѣ сущь равные.

Пусть будутъ АВ, СD равные параллелепипеды. Говорю, что параллелепипедовъ АВ, СD основанія сущь обратню пропорціональны высотамъ, то есѣ, какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ высота параллелепипеда СD къ высотѣ параллелепипеда АВ.

Вопервыхъ, пусть надстоящія АG, EF, LB, НК, CM, NO, PD, QR будутъ подъ прямыми углами къ основаніямъ. Говорю, что

какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ CM къ AG .

Естьли основаніе EH равно основанію NQ , а и параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD ; то и высота CM равна высотѣ AG . Ибо когда основанія EH , NQ равны, а высоты AG , CM не были бы равны; то и параллелепипедъ AB , не былъ бы равенъ *31. параллелепипеду CD *. Но онъ равенъ, по положенію; посему и высота CM не неравна высотѣ AG , слѣдственно равна. Чего ради какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ CM къ AG : и потому явно, что параллелепипедовъ AB , CD основанія суть обратно пропорціональны высотамъ.

Но пусть основаніе EH не будетъ равно основанію NQ , и пусть EH будетъ большее. (Ф.2). И поелику параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD ; то высота CM больше высоты AG : буде же не такъ, то параллелепипеды *31. AB , CD опять не были бы равны*; а они равны суть, по положенію. И такъ положи ST равную AG ; и изъ основанія NQ , а по высотѣ ST , дополни параллелепипедъ VS . Поелику параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD , и CV есть другой нѣкій параллелепипедъ; а равныя величины къ шой- *7.V. же имѣютъ тоже отношеніе*: то какъ

параллелепипедъ АВ къ параллелепипеду СВ, такъ параллелепипедъ CD къ параллелепипеду СВ. Но какъ параллелепипедъ АВ къ параллелепипеду СВ, такъ основаніе ЕН къ основанію *32. NQ*, ибо параллелепипеды АВ, СВ суть равновысотны; а какъ параллелепипедъ CD къ параллелепипеду СВ, такъ основаніе MQ къ основанію QT*, и такъ МС къ СТ: посему и какъ *25. основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ МС къ СТ*. Но СТ равна АГ: посему какъ основаніе *11, V. ЕН къ основанію NQ, такъ МС къ АГ*. Чего *7 и 11, V. ради основанія параллелепипедовъ АВ, CD суть обратню пропорціональны высотамъ.

Еще же, пусть основанія параллелепипедовъ АВ, CD будутъ обратню пропорціональны высотамъ; то естъ, какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда АВ. Говорю, что параллелепипедъ АВ равенъ параллелепипеду CD.

Пусть еще надстоящія будутъ къ основаніямъ подъ прямыми углами.

Естли основаніе ЕН равно основанію NQ; то, поелику какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда АВ, и высота параллелепипеда CD равна будетъ высотѣ параллелепипеда АВ. Но параллелепипеды,

имѣющіе равныя основанія и шже высоту,

31. супъ взаимно равны: чего ради параллелепипедъ АВ равенъ параллелепипеду CD.

Но пусть основаніе ЕН не будетъ равно основанію NQ, и пусть ЕН будетъ большее: то и высота параллелепипеда CD будетъ больше высоты параллелепипеда АВ, то есть, CM будетъ больше AG. Опять положи СТ равную AG, и дополни также параллелепипедъ CV. И поелику какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ CM къ AG; но AG равна СТ: то какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ MC къ СТ. Но какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ па-

32. раллелепипедъ АВ къ параллелепипеду CV, ибо параллелепипеды АВ, CV супъ равно-

1, VI. MQ къ основанію QT, и такъ параллелепи-

32. педъ CD къ параллелепипеду CV: посему какъ параллелепипедъ АВ къ параллелепипеду CV, такъ параллелепипедъ CD къ параллелепипеду CV; а посему каждый изъ параллелепипедовъ АВ, CD къ параллелепипеду CV имѣетъ то же отношеніе. И такъ параллелепипедъ АВ равенъ параллелепипе-

9, V. ду CD. Что и доказать надлежало.

Но пусть надстоящія FE, BL, GA, KH, ON, DP, MC, RQ (ф. 3). не будутъ къ основаніямъ

параллеленипедовъ подъ прямыми углами. Опъ почекъ F, G, B, K, O, M, D, R проведи къ плоскостямъ оснований ЕН, NQ, перпендикулярныя прямыя, кои пущь въспрѣ-
пять сѣи плоскости въ почкахъ S, T, U, V, X, Y, a, Z; и дополни параллеленипеды FV, OZ. Говорю, что равныхъ параллеленипедовъ АВ, CD основания суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ высота параллеленипеда CD къ высотѣ параллеленипеда АВ.

Поелику параллеленипедъ АВ равенъ параллеленипеду CD: но параллеленипеду АВ равенъ параллеленипедъ ВТ*, ибо они *30. имѣють шже основаніе FK, и шже высоту, и надстоящія ихъ оканчиваются не на шѣхъ же прямыхъ; а параллеленипедъ CD равенъ параллеленипеду DY, ибо и они имѣють шже основаніе RO, и шже высоту, и надстоящія ихъ оканчиваются не на шѣхъ же прямыхъ: то и параллеленипедъ ВТ равенъ параллеленипеду DY. А равныхъ параллеленипедовъ, конхъ высоты суть подъ прямыми углами къ основаніямъ, основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: посему какъ основаніе FK къ основанію OR, такъ вы-

сома параллелепипеда DY къ высотѣ параллелепипеда BT . Но основаніе FK равно основанію EH , основаніе же OR основанію

*24. NQ : посему какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда DY къ высотѣ параллелепипеда BT *. Но высоты параллелепипедовъ DY , BT суть пѣже, что и параллелепипедовъ DC , BA : посему какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда DC къ высотѣ параллелепипеда AB . Чего ради основанія параллелепипедовъ AB , CD суть обратно пропорціональны высотамъ.

Пусть наконецъ основанія параллелепипедовъ AB , CD будутъ обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB . Говорю, что параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD .

Ибо, сдѣлавъ поже спроектіе, поелику какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB ; и основаніе EH равно основанію FK , основаніе же NQ основанію OR : то какъ основаніе FK къ основанію OR , такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB . Но высоты

параллелепипедовъ АВ, CD суть пѣже,
чпо и параллелепипедовъ ВТ, DY: посе-
му какъ основаніе FK къ основанію OR,
такъ высота параллелепипеда DY къ вы-
сотѣ параллелепипеда ВТ; а посему осно-
ванія параллелепипедовъ ВТ, DY суть об-
ратно пропорціональны высотамъ. А ко-
торыхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ вы-
соты подъ прямыми углами къ основаніямъ,
основанія обратно пропорціональны высо-
тамъ, пѣ суть взаимно равныя: посему
параллелепипедъ ВТ равенъ параллелепипе-
ду DY. Но параллелепипедъ ВТ равенъ па-
раллелепипеду АВ*, ибо они имѣютъ по- *30.
же основаніе FK, и ту же высоту, и над-
стоящія ихъ оканчиваются не на пѣхъ же
прямыхъ; а параллелепипедъ DY равенъ
параллелепипеду DC, ибо и они имѣютъ
поже основаніе OR, и ту же высоту, и
надстоящія ихъ оканчиваются не на пѣхъ-
же прямыхъ: итакъ параллелепипедъ АВ
равенъ параллелепипеду CD. ч. и д. н. (91).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Ежели будутъ два плоскіе угла равныя,
и отъ вершинъ ихъ возстаются въ вы-
соту прямая содержащія со сторонами ихъ,

углы равные, каждый каждому; и есѣли на сихъ прямыхъ взяты будутъ какія нисѣ почки, и отъ почекъ проведутся перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ данныхъ угловъ; и есѣли изъ почекъ, въ коихъ онѣ вспрѣшяпъ плоскости, пропѣянуты будутъ прямыя къ вершинамъ данныхъ угловъ: то углы, содержимые сими прямыми съ прямыми воссѣавленными отъ вершинъ угловъ въ высоту ихъ плоскостей, будутъ взаимно равные.

Пусть будутъ два плоскіе угла BAC, EDF равные; и пусть отъ вершинъ ихъ A, D будутъ воссѣавлены въ высоту прямыя AG, DM , содержащія со сторонами ихъ углы равные, каждый каждому, а именно, уголъ GAB равный углу MDE , а уголъ GAC углу MDF ; и пусть на прямыхъ AG, DM взяты будутъ какія нисѣ почки G, M , и отъ почекъ G, M проведутся перпендикулярныя къ плоскостямъ BAC, EDF прямыя GL, MN , кои пусть вспрѣшяпъ сїи плоскости въ L, N ; и пусть будутъ пропѣянуты прямыя LA, ND . Говорю, что уголъ GAL равенъ углу MDN .

Положи AN равную DM ; и чрезъ N проведи, параллельную къ GL , прямую NK . И поелику GL перпендикулярна къ плоскости

прямыхъ ВА, АС; то и НК перпендикулярна къ плоскости прямыхъ ВА, АС*. Опъ почекъ К, *8.
 Н проводи, перпендикулярныя къ прямымъ АВ, АС, DF, DE, прямыя KB, KC, NF, NE; и пропѣни НС, СВ, MF, FE. Поелику квадраты изъ НА равенъ квадратамъ изъ НК, КА*; квад- *47, I.
 рату же изъ КА равны квадраты изъ KC, СА: то квадраты изъ НА равенъ квадратамъ изъ НК, KC, СА. А квадратамъ изъ НК, KC равенъ квадратъ изъ НС: посему квадратъ изъ НА равенъ квадратамъ изъ НС, СА; а посему уголъ НСА есть прямой*. Поэтому *48, I.
 же и уголъ DFM прямой. Чего ради уголъ АСН равенъ углу DFM. Поелику же и уголъ НАС равенъ углу MDF; то два треугольника MDF, НАС имѣють два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежащъ равнымъ угламъ, а именно, сторону АН равную сторонѣ DM: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой; а посему АС равна DF*. Подобно докажемъ, что и АВ *26, I.
 равна DE. Пропѣни НВ, МЕ. И поелику квадратъ изъ АН равенъ квадратамъ изъ АК, КН; квадрату же изъ АК равны квадраты изъ АВ, ВК; то квадраты изъ АВ, ВК, КН равны квадрату изъ АН. Но квадратамъ

47, I. изъ ВК, КН равенъ квадрапъ изъ ВН; ибо уголъ НКВ прямой, попому что НК перпендикулярна къ подлежащей плоскости: посему квадрапъ изъ АН равенъ квадрапамъ изъ АВ, ВН; а посему уголъ АВН есть

48, I. прямой. Попому же и уголъ DEM прямой. Но уголъ ВАН равенъ, по положенію, углу EDM; и АН равна DM: посему и АВ равна DE. Ипакъ, поелику АС равна DF, и АВ равна DE; то двѣ прямыя СА, АВ равны двумъ прямымъ FD, DE; и уголъ САВ равенъ углу FDE: посему и основаніе ВС равно основанію EF, и преутольникъ равенъ преутольнику, и прочіе углы равны прочимъ

49, I. угламъ; а посему уголъ АСВ равенъ углу DFE. Но прямой уголъ АСК равенъ прямому же углу DFN; посему и оспальной уголъ ВСК равенъ оспальному EFN: Попому же и уголъ СВК равенъ углу FEN. Ипакъ два преутольника СВК, FEN имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежатъ равнымъ угламъ; а именно; сторону ВС равную сторонѣ EF: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя про-

26, I. чимъ сторонамъ; а посему СК равна FN. Но и АС равна DF: ипакъ двѣ прямыя АС, СК равны двумъ прямымъ DF, FN; и содержащъ

углы прямые: посему основаніе AK равно основанію DN . И поелику AN равна DM ; то квадрапъ изъ AN равенъ квадрапу изъ DM . Но квадрапу изъ AN равны квадрапы изъ AK , KN , ибо уголь AKN естъ прямой; а квадрапу изъ DM , равны квадрапы изъ DN , NM , ибо и уголь DNM естъ прямой: посему квадрапы изъ AK , KN равны квадрапамъ изъ DN , NM . Но квадрапъ изъ AK равенъ квадрапу изъ DN : посему и оспальной квадрапъ изъ KN равенъ оспальному изъ NM ; а посему и NK равна MN . Ипакъ, поелику двѣ прямыя NA , AK равны двумъ прямымъ MD , DN , каждая каждой; и, по доказанному, основаніе NK равно основанію NM ; то и уголь NAK равенъ углу MDN .

« Ипакъ, ежели будущъ, и проч. ч. и д. н. »

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуется, что естли будущъ два плоскіе угла равные; и отъ вершинъ ихъ воспаваянся въ высоту прямыя взаимно равныя; содержащія со споронами сихъ угловъ углы равные; каждый каждому: то прямыя, проводимыя отъ концовъ воспавленныхъ прямыхъ, перпендикулярно къ плоскостямъ первыхъ угловъ, сущь взаимно равныя.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Если три прямыя пропорціональны; то параллелепипедъ изъ всѣхъ прѣхъ равенъ равноспоронному параллелепипеду изъ средней, и равноугольному съ параллелепипедомъ преждесказаннымъ.

Пусть будутъ три прямыя А, В, С пропорціональныя; а именно, какъ А къ В, такъ В къ С. Говорю, что параллелепипедъ изъ всѣхъ прѣхъ А, В, С равенъ равноспоронному параллелепипеду изъ В, и равноугольному съ параллелепипедомъ преждесказаннымъ.

Изложи какой ниесть толстый уголъ при Е, содержимый прѣмя плоскими углами DEG, GEF, FED; и положи каждую изъ прямыхъ DE, GE, EF равную В; и дополни параллелепипедъ ЕК. И положи прямую LM равную А; и при прямой LM, и при точкѣ на ней L, составь, равный *26. толстому углу при Е; толстый уголъ*, содержимый плоскими углами NLO, OLM, MLN; и положи прямую LO равную В, и LN равную С.

Поелику какъ А къ В, такъ В къ С; но А равна LM, а В равна каждой изъ прямыхъ LO, EF, EG, ED, и С равна LN: то какъ *7 и II, V. LM къ EF, такъ DE къ LN*; посему

стороны около равныхъ угловъ MLN , DEF суть обратно пропорціональны: а посему параллелограммъ MLN равенъ параллелограмму DF *. И поелику два плоскіе прямолинейные *14, VI. угла DEF , NLM суть равные; и отъ вершинъ ихъ возспавлены въ высоту прямыя LO , EG взаимно равныя, и содержащія, со сторонами сихъ угловъ, углы равны, каждый каждому; по отъ точекъ G , O проведенныя перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ NLM ; DEF , взаимно равны*: слѣдственно *слѣд. 35. параллелепипеды LN , EK имѣющіе ту же высоту. Но параллелепипеды, имѣющіе равныя основанія и ту же высоту, суть взаимно равны*: посему параллелепипедъ NL равенъ *31. параллелепипеду EK . Но параллелепипедъ NL есть изъ A , B , C ; а параллелепипедъ EK есть изъ B : чего ради параллелепипедъ изъ A , B , C равенъ равноспоронному параллелепипеду изъ B , и равноугольному съ параллелепипедомъ прежде сказаннымъ.

Итакъ, ежели три прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Ежели четыре прямыя пропорціональны; то параллелепипеды изъ оныхъ, подобные и подобно написанные, будутъ пропорціо-

нальные: И ежели параллелепипеды, подобные и подобно изъ четырехъ прямыхъ написанные, пропорціональны; то и самыя прямая будутъ пропорціональныя.

Пусиь будутъ четыре прямая АВ, CD, EF, GH пропорціональныя; а именно, какъ АВ къ CD, такъ EF къ GH; и пусть будутъ написаны изъ прямыхъ АВ, CD, EF, GH подобные и подобно положенные параллелепипеды КА, LC, ME, NG. Говорю, что какъ КА къ LC, такъ ME къ NG.

Поелику параллелепипедъ КА подобенъ параллелепипеду LC: то параллелепипедъ КА къ LC имѣеть упроенное отношеніе
 33. прямая АВ къ CD. Потому же параллелепипедъ ME къ NG имѣеть упроенное отношеніе прямая EF къ GH. Но какъ АВ къ CD, такъ EF къ GH: чего ради какъ
 11, V. АК къ LC, такъ ME къ NG.

Но пусть будетъ какъ параллелепипедъ АК къ параллелепипеду LC, такъ параллелепипедъ ME къ параллелепипеду NG. Говорю, что какъ прямая АВ къ CD, такъ прямая EF къ GH.

Поелику параллелепипедъ КА къ LC имѣеть упроенное отношеніе прямая АВ къ CD; и параллелипедъ ME къ NG имѣеть упроенное же отношеніе прямая EF къ

GH; и поелику какъ KA къ LC, такъ ME къ NG: то какъ AB къ CD, такъ EF къ GH*. *т.г.

Итакъ, ежели чепыре, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Ежели плоскость къ плоскости перпендикулярна; и отъ какой ниесъ точки, взятой на одной изъ нихъ, проведена будетъ прямая перпендикулярная къ другой плоскости: то сія проведенная перпендикулярная упадетъ на общее плоскостей сѣченіе.

Пусть плоскость CD будетъ къ плоскости AB перпендикулярная; и общее ихъ сѣченіе пусть будетъ AD; и пусть на плоскости CD взята будетъ какая ниесъ точка E. Говорю, что отъ E проведенная прямая, перпендикулярная къ плоскости AB, упадетъ на прямую DA.

Ибо, естли не такъ; то пусть, буде возможно, она упадетъ въ AD, какъ EF, и пусть встрѣшитъ плоскость AB въ точкѣ F. Отъ F проведи на плоскости AB, перпендикулярную къ DA, прямую FG; то она будетъ перпендикулярна и къ плоскости CD*: и протяни EG.

*опр. 4.

Поелику FG перпендикулярна къ плоскости CD; встрѣчаетъ же она прямую EG,

которая на плоскости CD : то уголъ FGE
 опр.3. есть прямой. Но EF перпендикулярна къ
 плоскости AB : посему и уголъ EFG есть
 прямой. Ипакъ треугольника EFG два угла
 17,1. равны двумъ прямымъ; чпо нелѣпо: по-
 сему опъ точки E проведенная перпенди-
 кулярная прямая къ плоскости AB не па-
 даетъ внѣ прямой DA ; слѣдсвенно упадетъ
 на прямую DA .

Ипакъ, ежели плоскость, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIX.

Ежели параллелепипеда спороны двухъ
 какихъ ниспъ прошивулежащихъ плоско-
 стей будутъ разсѣчены по поламъ; и чрезъ
 сѣченія будутъ проведены плоскости: то
 общее сѣченіе сихъ плоскостей и попе-
 речникъ параллеленипеда пересѣкунся по
 поламъ.

Параллеленипеда AF пусть спороны двухъ
 прошивулежащихъ плоскостей CF , AN бу-
 дутъ разсѣчены по поламъ въ точкахъ
 K , L , M , N , O , Q , P , R ; и чрезъ сѣченія
 пусть будутъ проведены плоскости KN ,
 OR ; и пусть общее сѣченіе сихъ плос-
 костей будетъ VS ; а параллеленипеда
 поперечникъ пусть будетъ DG . Говорю,

что VS , DG взаимно пересѣкаются по по-
ламъ, то есть, что VT равна TS , а DT
равна TG . www.libtool.com.cn

Протяни DV , VE , BS , SG .

Поелику DO параллельна къ PE ; то на-
косълежащіе углы DOV , VPE взаимно равны*. *29, I.
И поелику DO равна PE , и OV равна VP ,
и содержащъ оиѣ углы равные: то осно-
ваніе DV равно основанію VE ; и треуголь-
никъ DOV равенъ треугольнику PVE ; и
прочіе углы равны прочимъ угламъ: посему
уголъ OVD равенъ углу PVE ; инакъ ли-
нія DVE естъ прямая*. Потому же и линія *13 и 14, I.
 BSG естъ прямая, и BS равна SG . И по-
елику CA равна DB , и параллельна къ ней*; *24.
а и CA равна EG , и параллельна къ ней:
то и DB равна EG *, и параллельна къ *акс. I.
ней*. Соединяющъ же концы ихъ прямыя *9.
 DE , GB ; посему и DE параллельна къ BG *. *33, I.
Взяны же на каждой изъ оныхъ точки D ,
 V , G , S ; и протянуты прямыя DG , VS :
посему DG , VS суть на одной плоскости*. *7.
Инакъ, поелику DE параллельна къ BG ; то
уголъ EDT равенъ углу BGT , ибо суть
накосълежащіе: но и уголъ DTV равенъ углу* *29, I.
 GTS *: Чего ради два треугольника DTV , GTS *15, I.
имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, и
одну сторону равную одной сторонѣ, кои

противулежащъ равнымъ угламъ, а именно, DV равную GS , ибо онѣ суть половины равныхъ DE , BG : посему и прочія стороны *26, I. будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ*: слѣдственно DT равна TG , и VT равна TS .

Итакъ, ежели параллелепипеда, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Ежели будутъ двѣ призмы равновысопныя; и основаніе одной параллелограммъ, а другой преугольникъ; и ежели параллелограммъ будетъ двукратный преугольника: то сїи призмы будутъ взаимно равныя.

Пусть будутъ $ABCDEF$, $GHKLMN$ призмы равновысопныя; и пусть основаніе одной будетъ параллелограммъ AF , а другой преугольникъ GHK ; и пусть будетъ параллелограммъ AF двукратный преугольника GHK . Говорю, что призма $ABCDEF$ равна призмѣ $GHKLMN$.

Дополни параллелепипеды AO , GP .

Поселику параллелограммъ AF есть двукратный преугольника GHK ; но и параллелограммъ HK есть двукратный преугольника GHK *; *34, I. то параллелограммъ AF равенъ параллелограмму HK . А параллелепипеды,

имѣющіе равныя основанія и пуже высоту,
суть взаимно равны*: посему параллелепи- *31.
педъ AO равенъ параллелепипеду GP . Но по-
ловина параллелепипеда AO , есть призма
 $ABCDEF$, а половина параллелепипеда GP
призма $GHKLMN$: чего ради и призма
 $ABCDEF$ равна призмѣ $GHKLMN$.

Итакъ, ежели будутъ двѣ, и пр. ч. и д. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА XII.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ ПЕРВОЕ.

ПОДОБНЫЕ многоугольники въ кругахъ, суть взаимно какъ квадраты изъ поперечниковъ.

Пусть будутъ $ABCDE$, $FGHKL$ круги; и въ нихъ подобные многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$; и пусть будутъ BM , GN поперечники круговъ. Говорю, что какъ квадратъ изъ BM къ квадрату изъ GN такъ многоугольникъ $ABCDE$ къ многоугольнику $FGHKL$.

Пропяни BE , AM , GL , FN .

Поелику многоугольникъ $ABCDE$ подобенъ *оп. VI. многоугольнику $FGHKL$: то* и уголъ BAE равенъ углу GFL ; и какъ BA къ AE , такъ GF къ FL : Чего ради два треугольника BAE , GFL имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, а именно, уголъ BAE углу GFL , и стороны около равныхъ угловъ пропорціо-

нальные; итакъ преутольникъ ABE есть
 равноутольный преутольнику FGL*; посему *6,VI.
 уголь AEB равенъ углу FLG. Но уголь AEB
 равенъ и углу AMB*, ибо сущъ на тойже *21,III,
 дугѣ; и такъ же уголь FLG равенъ углу
 FNG: посему и уголь AMB равенъ углу FNG.
 А и прямой уголь BAM* равенъ прямому *31,III.
 GFN; посему и оспальной уголь равенъ
 оспальному: итакъ преутольникъ ABM есть
 равноутольный преутольнику FGN: посему
 какъ BM къ GN, такъ BA къ GF*. Но квадрапъ *4,VI.
 изъ BM къ квадрапу изъ GN имѣеть
 удвоенное опношеніе прямыя BM къ GN*; а *20,VI.
 многоутольникъ ABCDE къ многоутольнику
 FGNKL имѣеть удвоенное опношеніе пря-
 мыя BA къ GF: чего ради какъ квадрапъ
 изъ BM къ квадрапу изъ GN* такъ многоу- *п,V.
 тольникъ ABCDE къ многоутольнику FGNKL.

Итакъ подобные, и проч. ч. и д. н. (92).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Круги сущъ взаимно, какъ квадрапы изъ
 поперечниковъ.

Пусть будутъ ABCD, EFGH круги; и
 BD, FH ихъ поперечники. Говорю, что какъ
 квадрапъ изъ BD къ квадрапу изъ FH, такъ
 кругъ ABCD къ кругу EFGH.

Ибо, естли не будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$; то будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому пространству, или меньшему круга $EFGH$, или большему. Пустъ, во первыхъ, будетъ къ меньшему, пространству S .

*6, IV. Въ кругѣ $EFGH$ впиши квадратъ $EFGH$: То сей вписанный квадратъ будетъ больше половины круга $EFGH$. Ибо естли чрезъ точки E, F, G, H проведемъ касательныя къ кругу; то опишемъ квадратъ, коего половина

*47, I, естъ квадратъ $EFGH$: но кругъ меньше и 31, III. квадрата описаннаго; посему вписанный квадратъ $EFGH$ больше половины круга $EFGH$.

30, III. Раздѣли дуги EF, FG, GH, HE по поламъ въ точкахъ K, L, M, N ; и пропни $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$: То каждый изъ преугольниковъ EKF, FLG, GMH, HNE естъ больше половины опрѣзка, въ коемъ онъ помѣщается. Ибо, естли чрезъ точки K, L, M, N проведемъ касательныя къ кругу, и на параллельныхъ къ нимъ прямыхъ EF, FG, GH, HE , дополнимъ параллелограммы; то каждый изъ преугольниковъ EKF, FLG, GMH, HNE будетъ половина параллелограмма, въ коемъ онъ помѣщается: но опрѣзокъ меньше параллелограмма, въ коемъ онъ

помѣщается; слѣдственно каждый изъ треугольниковъ EKF , FLG , GMH , HNE больше половины опрѣзка, въ коемъ онъ помѣщается. Если же и оставшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и пропягивать прямыя; и сіе всегда будемъ дѣлать; то останутся на послѣдокъ нѣкіе опрѣзки круга, кои будутъ меньше избытка круга $EFGH$ предъ пространствомъ S . Ибо доказано въ первой теоремѣ десятой книги, что изъ двухъ неравныхъ излагаемыхъ величинъ, если отъ большей отнято будетъ больше половины, и отъ оставшейся больше половины, и сіе всегда дѣлаемо будетъ: то останется на послѣдокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше излагаемой меньшей величины. Ипакъ пусть останутся; и пусть будутъ опрѣзки стоящія на прямыхъ EK , KF , FL , LG , GM , MH , HN , NE , тѣ самыя, кои суть меньше избытка круга $EFGH$ предъ пространствомъ S : посему остальной многоугольникъ $EKFLGMHN$ есть больше пространства S . Въ кругъ $ABCD$ впиши многоугольникъ $A O B P C Q D R$ подобный многоугольнику $EKFLGMHN$. Посему какъ квадраты изъ BD къ квадрату изъ FN , такъ и многоугольникъ $A O B P C Q D R$ къ многоугольнику $EKFLGMHN$.* Г.

- Но какъ квадрапъ изъ BD къ квадрату изъ FH , такъ кругъ $ABCD$ къ пространству S ; посему какъ кругъ $ABCD$ къ пространству S , такъ многоугольникъ $AOBPCQDR$ къ много-
- *11, V. угольнику $EKFLGMHN$ *; и премѣненіемъ, какъ кругъ $ABCD$ къ многоугольнику что въ немъ, такъ пространство S къ много-
- *16, V. угольнику $EKFLGMHN$ *. Но кругъ $ABCD$ больше многоугольника что въ немъ; посему и пространство S больше многоугольника $EKFLGMHN$: Оно же и меньше; что невозможно. Посему не будетъ какъ квадрапъ изъ BD къ квадрату изъ FH , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому пространству меньшему круга $EFGH$.

Подобно докажемъ, что не будетъ какъ квадрапъ изъ FH къ квадрату изъ BD , такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкому пространству меньшему круга $ABCD$.

Говорю же, что и не будетъ какъ квадрапъ изъ BD къ квадрату изъ FH , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому пространству большему круга $EFGH$. Ибо, еслили возможно, пусть будетъ къ большему пространству S . Посему премѣненіемъ, какъ квадрапъ изъ FH къ квадрату изъ BD , такъ пространство S къ кругу $ABCD$. Но какъ пространство S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкому пространству

меньшему круга $ABCD$ *: посему какъ квадрапъ *лемма. изъ FN къ квадрату изъ BD , такъ кругъ $EFGH$ къ пространству меньшему круга $ABCD$; что, по доказанному уже, невозможно: а посему не будетъ какъ квадрапъ изъ BD къ квадрату изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому пространству большому круга $EFGH$. А доказано, что и ни къ меньшему: чего ради какъ квадрапъ изъ BD къ квадрату изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$.

Итакъ круги суть, и проч. ч. и д. н.

ЛЕММА. Еслии пространство S больше круга $EFGH$: то говорю, что какъ пространство S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкому пространству меньшему круга $ABCD$.

Ибо пусть будетъ какъ пространство S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ пространству T . Говорю, что пространство T меньше круга $ABCD$. Поелику какъ пространство S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ пространству T ; то, премѣненіемъ, какъ пространство S къ кругу $EFGH$, такъ кругъ $ABCD$ къ пространству T *. *16, v. Но пространство S больше круга $EFGH$; посему и кругъ $ABCD$ больше пространства T .

Чего ради какъ пространство S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкому пространству ~~меньшему~~ круга $ABCD$. (93).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Всякую пирамиду, имѣющую преугольное основаніе, можно раздѣлять: на двѣ, преугольные же основанія имѣющія, пирамиды, кои суть взаимно равны и подобны; и еще подобны цѣлой; и на двѣ призмы равныя: и сѣи двѣ призмы суть больше половины цѣлой пирамиды.

Пусть будетъ пирамида, коея основаніе преугольникъ ABC , а вершина точка D . Говорю, что пирамиду $ABCD$ можно раздѣлить: на двѣ, имѣющія преугольные же основанія, пирамиды, кои суть взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой; и на двѣ призмы равныя: и что сѣи двѣ призмы суть больше половины цѣлой пирамиды. (94).

Раздѣли AB , BC , CA , AD , DB , DC по поламъ въ точкахъ E , F , G , H , K , L ; и пропяти EH , EG , GH , HK , KL , LH , EK , KF , FG .

Поелику AE равна EB , и AH равна HD :
 *2, VI. то EH параллельна къ DB *. Потому же и HK параллельна къ AB . Итакъ $HEBK$ есть

параллелограммъ : посему НК равна ЕВ*. *34.1.
 Но ЕВ равна ЕА: посему и ЕА равна НК.
 Поелику же и АН равна НД; по двѣ пря-
 мыя ЕА, АН равны двумъ прямымъ КН, НД,
 каждая каждой; и уголъ ЕАН равенъ углу
 КНД*: посему основаніе ЕН равно осно- *29.1.
 ванію КД: а посему и преутольникъ АЕН
 равенъ и подобенъ* преутольнику НКД. *6и4, VI.
 Потому же и преутольникъ АНГ равенъ и
 подобенъ преутольнику НЛД. И поелику
 двѣ прямыя ЕН, НГ, взаимно встрѣчаю-
 щіяся; параллельны къ двумъ прямымъ
 КД, ДЛ, взаимно встрѣчающимся; и ле-
 жащимъ не на тойже плоскости: по содер-
 жать онѣ углы равны*: посему уголъ ЕНГ *10, XI.
 равенъ углу КДЛ. Ипакъ, поелику двѣ пря-
 мыя ЕН, НГ равны двумъ прямымъ КД, ДЛ;
 каждая каждой; и уголъ ЕНГ равенъ углу КДЛ:
 по основаніе ЕГ равно основанію КЛ; посему
 и преутольникъ ЕНГ равенъ и подобенъ,
 преутольнику КДЛ. Потому же и пре-
 утольникъ АЕГ равенъ и подобенъ пре-
 утольнику НКЛ. Чего ради пирамида, коея
 основаніе преутольникъ АЕГ а вершина
 почка Н, равна и подобна пирамидѣ, коея
 основаніе преутольникъ НКЛ а вершина
 почка Д*. И поелику къ АВ, одной изъ *оп.ю, XI.
 сторонъ преутольника АDB, проведена

параллельная НК: то треугольникъ ADB
 29, I. есть равноугольный треугольнику DHK;
 4, VI. и стороны ихъ суть пропорціональныя:
 чего ради треугольникъ ADB подобенъ
 треугольнику DHK. Потому же треуголь-
 никъ DBC подобенъ треугольнику DKL;
 и треугольникъ ADC подобенъ треуголь-
 нику DLH. И поелику двѣ прямыя BA, AC,
 взаимно въспрѣчающіяся, параллельны къ
 двумъ прямымъ KH, HL, взаимно въспрѣчаю-
 щимся, и лежащимъ не на тойже плоско-
 10, XI. сти; то онѣ содержатъ углы равные: по-
 сему уголъ BAC равенъ углу KHL. Но какъ
 BA къ AC, такъ KH къ LH; поему тре-
 угольникъ ABC подобенъ треугольнику
 6, VI. HKL. Ипакъ пирамида, коея основаніе
 треугольникъ ABC а вершина точка D,
 подобна пирамидѣ, коея основаніе тре-
 угольникъ HKL а вершина точка D. До-
 казано же, что пирамида, коея осно-
 ваніе треугольникъ HKL а вершина точка
 D, подобна пирамидѣ, коея основаніе тре-
 угольникъ AEG а вершина точка H: посе-
 му и пирамида, коея основаніе треуголь-
 никъ ABC а вершина точка D, подобна
 пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ AEG
 а вершина точка H. Чего ради каждая изъ
 пирамидъ AEGH, HKLD подобна цѣлой

пирамидъ ABCD. И поелику BF равна FC, по параллелограммъ EBFG есть двукрапный преугольникъ GFC. Но если бы будущъ двъ призмы равновысопныя, изъ коихъ основаніе одной параллелограммъ; а другой преугольникъ; и ежели параллелограммъ есть двукрапный преугольникъ; то сїи призмы взаимно равны*: поему *40, XI. призма, содержащая двумя преугольниками BKF, ENG и тремя параллелограммами EBFG, EBKH, HKFG, равна призмѣ, содержащей двумя преугольниками GFC, HKL и тремя параллелограммами KFCL, LCGH, HKFG. Явствуетъ же, что каждая изъ сихъ призмъ: и та, коея основаніе параллелограммъ EBFG противоположащій прямой НК, и та, коея основаніе преугольникъ GFC противоположащій преугольнику KLN, есть больше каждой изъ пирамидъ, коихъ основанія суть преугольники AEG, HKL, а вершины точки Н, D. Ибо, ежели пропрянемъ прямы EF, EK; то призма, коея основаніе параллелограммъ EBFG противоположащій прямой НК, есть больше пирамиды, коея основаніе преугольникъ EBF а вершина точка К. Но пирамида, коея основаніе преугольникъ EBF а вершина точка К, равна пирамидѣ, коея основаніе преугольникъ AEG а вершина

оп. 10, XI. точка Н; ибо онѣ содержатся плоскостями равными и подобными: посему призма, коея ~~основаніе~~ ~~параллелограммъ~~ ~~ЕВFG~~ противопоставленной прямой НК, есть больше пирамиды, коея основаніе треугольникъ АЕГ а вершина точка Н. Но призма, коея основаніе параллелограммъ ЕВFG противопоставленной прямой НК, равна призмѣ, коея основаніе треугольникъ GFC противопоставленной треугольнику НКL; а пирамида, коея основаніе треугольникъ АЕГ а вершина точка Н, равна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ НКL а вершина точка D: посему двѣ сказанныя призмы супъ больше двухъ пирамидъ, коихъ основанія треугольники АЕГ, НКL, а вершины точки Н, D. Ипакъ цѣлая пирамида, коея основаніе треугольникъ ABC а вершина точка D, раздѣлена на двѣ пирамиды, кои взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой пирамидѣ, и на двѣ призмы равныя; и сѣи двѣ призмы супъ больше половины цѣлой пирамиды. ч. и д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели будутъ двѣ пирамиды, имѣющія ту же высоту и треугольныя основанія;

раздѣлена же будетъ каждая изъ нихъ на двѣ пирамиды равныя взаимно и подобныя цѣлой, и на двѣ призмы равныя; еспѣли же и изъ сихъ произшедшихъ пирамидъ каждая будетъ раздѣлена такимъ же образомъ; сіе же и всегда будетъ дѣлаемо: по будетъ какъ основаніе одной пирамиды къ основанію другой, такъ всѣ призмы въ одной пирамидѣ, ко всѣмъ призмамъ равномногимъ въ другой пирамидѣ.

Пусть будутъ двѣ пирамиды, имѣющія ту же высоту, и прѣугольныя основанія ABC , DEF , а вершины точки G , H ; и пусть каждая изъ нихъ будетъ раздѣлена на двѣ пирамиды взаимно равныя и подобныя цѣлой, и на двѣ равныя призмы*; и вообрази, *3. что каждая изъ сихъ произшедшихъ пирамидъ раздѣлена такимъ же образомъ; сіе же и всегда пусть будетъ дѣлаемо. Говорю, что какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ всѣ призмы въ пирамидѣ $ABCG$ ко всѣмъ призмамъ равномногимъ въ пирамидѣ $DEFH$.

Поелику BO равна OC , и AL равна LC , то AB параллельна къ OL *: посему прѣ- *2, VI. угольникъ ABC подобенъ прѣугольнику LOC *. *4, VI. Поэтому же и прѣугольникъ DEF подобенъ прѣугольнику RVF . И поелику прямая

ВС есть двукрапная прямой СО, и ЕF
 дукрапная прямой FV; по какъ ВС къ
 СО, такъ EF къ FV. Но изъ ВС, СО на-
 писаны подобныя и подобно положенныя
 прямолинейныя фигуры ABC, LOC; а изъ
 EF, FV подобныя и подобно положенныя
 прямолинейныя фигуры DEF, RFV: посему
 какъ треугольникъ ABC къ треугольнику
 LOC, такъ треугольникъ DEF къ пре-
 22, VI. угольнику RVF; и премѣненіемъ, какъ
 треугольникъ ABC къ треугольнику DEF,
 такъ треугольникъ LOC къ треугольнику
 16, V. RFV. Но какъ треугольникъ LOC къ пре-
 угольнику RFV, такъ призма, коея осно-
 ваніе треугольникъ LOC пропивулежащій
 треугольнику PMN, къ призмѣ, коея осно-
 ваніе треугольникъ RVF пропивулежащій
 лемма. треугольнику STU: посему и какъ пре-
 угольникъ ABC къ треугольнику DEF, такъ
 призма, коея основаніе треугольникъ LOC
 пропивулежащій треугольнику PMN, къ
 призмѣ, коея основаніе треугольникъ RVF
 11, V. пропивулежащій треугольнику STU. И по-
 елику двѣ призмы въ пирамидѣ ABCG суть
 взаимно равны; а и двѣ призмы въ пи-
 рамидѣ DEFH взаимно равны: по какъ
 призма, коея основаніе параллелограммъ
 KLOB пропивулежащій прямой MP, къ призмѣ

мѢ, коея основаніе треугольникъ LOC про-
птивулежащій треугольнику PMN, такъ
призма, коея основаніе параллелограммъ
EQRV проптивулежащій прямой SU, къ приз-
мѢ, коея основаніе треугольникъ RVF про-
птивулежащій треугольнику STU; и сово-
купленіемъ, какъ призмы KBOLMP, LOCMNP
къ призмѢ LOCMNP, такъ призмы QEVRSU,
RVFSTU къ призмѢ RVFSTU*; и премѣне- *18.v.
ніемъ, какъ призмы KBOLMP, LOCPMN
къ призмамъ QEVRSU, RVFSTU, такъ приз-
ма LOCMNP къ призмѢ RVFSTU*. Но до- *16.v.
казано, что какъ призма LOCMNP къ приз-
мѢ RVFSTU, такъ основаніе LOC къ осно-
ванію RVF, и такъ основаніе ABC къ осно-
ванію DEF: посему какъ основаніе ABC къ ос-
нованію DEF, такъ двѣ призмы въ пирамидѢ
ABCG къ двумъ призмамъ въ пирамидѢ DEFH.
Еслили каждую изъ произшедшихъ пирамидъ
PMNG, SUTH раздѣлимъ такимъ же образомъ:
то будемъ, какъ основаніе PMN къ основанію
SUT, такъ двѣ призмы въ пирамидѢ PMNG
къ двумъ призмамъ въ пирамидѢ SUTH. Но
какъ основаніе PMN къ основанію SUT,
такъ основаніе ABC къ основанію DEF:
посему какъ основаніе ABC къ основанію
DEF, такъ двѣ призмы въ пирамидѢ ABCG
къ двумъ призмамъ въ пирамидѢ DEFH,

и такъ двѣ призмы въ пирамидѣ $PMNG$ къ двумъ призмамъ въ пирамидѣ $SUTH$, и такъ всѣ чепыре ко всѣмъ чепыремъ. Сіе же докажется и о призмахъ, кои произойдутъ отъ раздѣленія пирамидъ $AKLP$, $DQRS$, и вообще о всѣхъ призмахъ равномногихъ.

ЛЕММА. Мы докажемъ слѣдующимъ образомъ, что какъ преугольникъ LOC къ преугольнику RVF , такъ призма, коея основаніе преугольникъ LOC проптивулежащій преугольнику PMN , къ призмѣ, коея основаніе преугольникъ RVF проптивулежащій преугольнику STU .

Вообрази, что въ тѣхъ же фигурахъ отъ точекъ G , H проведены перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ преугольниковъ ABC , DEF : то сіи прямыя будутъ равныя, ибо пирамиды предполагаются равновысопыми. Поелику же и прямая GC и перпендикулярная прямая отъ точки G проведенная, разсѣчены параллельными плоскостями ABC , PMN : то онѣ разсѣкаются пропорціонально*. Но прямая GC разсѣчена по поламъ въ N плоскостію PMN : посему и проведенная отъ точки G перпендикулярная прямая къ плоскости ABC , разсѣчена по поламъ плоскостію PMN . Потому же и

*17, XI.

проведенная отъ точки H перпендикулярная къ плоскости DEF , разсѣчена по поламъ плоскостію STU . Но проведенныя отъ G , H перпендикулярныя къ плоскостямъ ABC , DEF суть взаимно равны; посему и проведенныя отъ P перпендикуляры PMN , STU перпендикулярныя къ PMN , STU взаимно равны; а посему и призмы, имѣющія основаніями PMN , STU , RVF противуположающія PMN , STU , суть равновысотныя: слѣдственно параллелепипеды дописанные изъ сказанныхъ призмъ, будучи равновысотные, суть взаимно какъ основанія*; чего ради и половины *32, XI. суть какъ половины, то есть: основанія LOC , RVF суть взаимно какъ сказанныя призмы. Ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Пирамиды, имѣющія PMN основанія и шже высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пирамиды, коихъ основанія PMN , STU , а вершины точки G , H , пусть будутъ имѣть шже высоту. Говорю, что какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$.

Ибо, еспѣли не будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$; то будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCG$ къ нѣкому тѣлу, или меньшему пирамиды $DEFH$, или большему. Пусть, во первыхъ, будетъ къ меньшему, тѣлу X .

Раздѣли пирамиду $DEFH$ на двѣ пирамиды взаимно равныя и подобныя цѣлой, и на
 3. двѣ равныя призмы: то сїи двѣ призмы
 3. супъ больше половины цѣлой пирамиды.

И еще, пирамиды произшедшія опъ сего раздѣленія, раздѣли такимъ же образомъ; сїе же и всегда пусть будетъ дѣлаемо, пока опнимутся нѣкія пирамиды опъ пирамиды $DEFH$, кои будутъ меньше избытка пи-
 *1, X. рамиды $DEFH$ предъ тѣломъ X *. Пусть опнимутся; и пусть онѣ будутъ, на примѣръ, пирамиды $DQRS$, $STUH$: то оспальныя призмы въ пирамидѣ $DEFH$ супъ больше тѣла X . Раздѣли же и пирамиду $ABCG$ такимъ же образомъ, такъ чѣтобъ призмы въ оной были равномногія призмамъ въ пирамидѣ $DEFH$.

Посему какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ призмы въ пирамидѣ $ABCG$
 *4. къ призмамъ въ пирамидѣ $DEFH$ *. Но какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ,

по положенію, пирамида $ABCG$ къ тѣлу X :
 посему какъ пирамида $ABCG$ къ тѣлу X ,
 такъ призмы въ пирамидѣ $ABCG$ къ призмамъ
 въ пирамидѣ $DEFH$ *; и премѣненіемъ, какъ пи- *11, V.
 рамида $ABCG$ къ призмамъ, кои въ ней, такъ
 тѣло X къ призмамъ въ пирамидѣ $DEFH$ *. *16, V.
 Но пирамида $ABCG$ больше призмъ, кои въ
 ней; посему и тѣло X больше призмъ, кои
 въ пирамидѣ $DEFH$: Оно же и меньше; что
 невозможно. Чего ради не будетъ какъ осно-
 ваніе ABC къ основанію DEF , такъ пира-
 мида $ABCG$ къ нѣкому тѣлу меньшему
 пирамиды $DEFH$.

Подобно докажемъ, что не будетъ какъ
 основаніе DEF къ основанію ABC , такъ пира-
 мида $DEFH$ къ нѣкому тѣлу меньшему пи-
 рамиды $ABCG$.

Говорю же, что и не будетъ какъ основаніе
 ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCH$
 къ нѣкому тѣлу большему пирамиды $DEFH$.
 Ибо, еслии возможно, пусть будетъ къ
 большему, тѣлу X . Посему, преложеніемъ*, *оп. 14, V.
 какъ основаніе DEF къ основанію ABC , такъ
 тѣло X къ пирамидѣ $ABCG$. Но какъ тѣ-
 ло X къ пирамидѣ $ABCG$, такъ пирамида
 $DEFH$ къ нѣкому тѣлу меньшему пира-
 миды $ABCG$, по доказанному предъ симъ;
 посему какъ основаніе DEF къ основанію

ABC, такъ пирамида DEFH къ нѣкому шѣлу меньшему пирамиды ABCG; что, по доказанному, нелѣно: посему не будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ пирамида ABCG къ нѣкому шѣлу большему пирамиды DEFH. А доказано, что и ни къ меньшему: чего ради какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ пирамида ABCG къ пирамидѣ DEFH.

Итакъ пирамиды, имѣющія, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Пирамиды, имѣющія шже высоту и многоугольныя основанія, сущь взаимно какъ основанія.

Пирамиды, коихъ основанія многоугольники ABCDE, FGHLK, а вершины почки M, N, пусть будутъ имѣть шже высоту. Говорю, что какъ основаніе ABCDE къ основанію FGHLK, такъ пирамида ABCDEM къ пирамидѣ FGHLKN.

Раздѣли основаніе ABCDE на преугольники, ABC, ACD, ADE; и основаніе FGHLK на преугольники FGH, FHK, FKL; и вообрази на каждомъ изъ сихъ преугольниковъ пирамиды равновысотныя цѣлымъ пирамидамъ.

Поелику какъ преугольникъ ABC къ преугольнику ACD , такъ пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $ACDM$ *: то, совокупленіемъ, какъ *5. трапеція $ABCD$ къ преугольнику ACD , такъ пирамида $ABCDM$ къ пирамидѣ $ACDM$ *. Но *18, V. какъ преугольникъ ACD къ преугольнику ADE , такъ пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $ADEM$ *: посему, равнобѣсно, какъ основа- *5. ніе $ABCD$ къ основанію ADE , такъ пирамида $ABCDM$ къ пирамидѣ $ADEM$ *; а посему, сово- *22, V. купленіемъ, какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію ADE , такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $ADEM$. Поэтому же, какъ основаніе $FGHKL$ къ основанію FKL , такъ пирамида $FGHKLN$ къ пирамидѣ $FKLN$. И поелику двѣ пирамиды $ADEM$, $FKLN$ имѣють преугольные основанія и ту же высоту: то какъ основаніе ADE къ основанію FKL , такъ пирамида $ADEM$ къ пирамидѣ $FKLN$ *. Ипакъ, *5. поелику какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію ADE , такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $ADEM$; и какъ основаніе ADE къ основанію FKL , такъ пирамида $ADEM$ къ пирамидѣ $FKLN$: то, равнобѣсно, какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію FKL , такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $FKLN$ *. Но какъ основаніе FKL къ *22, V. основанію $FGHKL$, такъ пирамида $FKLN$ къ пирамидѣ $FGHKLN$: посему, равнобѣсно,

какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію $FGHKL$, такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $FGHKLN$.

Итакъ пирамиды, имѣющія, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Всякую призму, имѣющую преугодное основаніе, раздѣлять можно на три пирамиды равныя взаимно, имѣющія преугодныя основанія.

Пусть будетъ призма, коея основаніе преугодникъ ABC пропывулежащій преугоднику DEF . Говорю, что призму $ABCDEF$ раздѣлить можно на три пирамиды равныя взаимно, имѣющія преугодныя основанія.

Пропыни BD , EC , CD .

опр. 13, XI. Поелику $ABED$ есть параллелограммъ, а BD его поперечникъ; то преугодникъ

*34, I. ABD равенъ преугоднику EDB *: посему пирамида, коея основаніе преугодникъ ABD а вершина почка C , равна пирамидѣ, коея основаніе преугодникъ EDB и вершина

*5. почка C *. Но пирамида, коея основаніе преугодникъ EDB а вершина почка C , есть также что и пирамида, коея основаніе

*опр. 10, XI. преугодникъ EBC а вершина почка D *; ибо

онѣ содержатся пѣмѣже плоскостями : по-
сему и пирамида , коея основаніе преу-
гольникъ ABD а вершина почка C , равна пи-
рамидѣ , коея основаніе преугольникъ EBC
а вершина почка D . Еще же , поелику $FCBE$
есть параллелограммъ*, а CE его попере- *опр.13, XI.
чикъ ; по преугольникъ ECF равенъ пре-
угольнику CBE : посему пирамида , коея осно-
ваніе преугольникъ BEC а вершина почка
 D , равна пирамидѣ , коея основаніе преу-
гольникъ ECF и вершина почка D *. А до- *5.
казано , что пирамида , коея основаніе пре-
угольникъ BCE а вершина почка D , равна
пирамидѣ , коея основаніе преугольникъ ABD
а вершина почка C : посему и пирамида , коея
основаніе преугольникъ CEF а вершина
почка D , равна пирамидѣ , коея основаніе
преугольникъ ABD а вершина почка C .
Итакъ призма $ABCDEF$ раздѣлена на три
пирамиды равныя взаимно , имѣющія преу-
гольные основанія. И поелику пирамида , коея
основаніе преугольникъ ABD а вершина
почка C , есть также что и пирамида , коея
основаніе преугольникъ CAB а вершина поч-
ка D *, ибо онѣ содержатся пѣмѣже плос- *оп.10, XI.
костями ; пирамида же , коея основаніе пре-
угольникъ ABD а вершина почка C , есть,
по доказанному , прешья часть призмы ,

коя основаніе преугольникъ ABC пропивиулежащій преугольнику DEF : чего ради и пирамида, [коя] основаніе преугольникъ ABC а вершина почка D , естъ прешья часть призмы, имѣющей поже основаніе, то естъ преугольникъ ABC пропивиулежащій преугольнику DEF . ч. и д. н.

Слѣдствие. Отсюда явствуесть, что всякая пирамида естъ прешья часть призмы, имѣющей поже основаніе и одинакую высоту. Ибо, естли основаніе призмы будеть и другая какая либо прямолинейная фигура, то и пропивиулежащая основанію будеть ей *оп. 13, XI. равная и подобная*; и сію призму можно раздѣлить на призмы, имѣющія преугольныя основанія и пропивиулежащія преугольникамъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Подобныя пирамиды, имѣющія преугольныя основанія, суть взаимно въ унроенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ.

Пусть будутъ подобныя и подобно положенныя пирамиды, коихъ основанія суть преугольники ABC , DEF , а вершины почки G , H . Говорю, что пирамида $ABCG$ къ пи-

пирамидѢ $DEFH$ имѣеть упроенное отноше-
нїе прямая BC къ EF .

Дополни параллелепипеды $BGML$, $ЕНQR$.

Поелику пирамида $ABCG$ подобна пира-
мидѢ $DEFH$: по* уголь ABC равенъ углу *оп.9, XI.
 DEF , и уголь GBC углу HEF , а уголь ABG
углу DEH ; и какъ AB къ DE , такъ BC
къ EF , и такъ BG къ EH . Итакъ, по-
елику какъ AB къ DE , такъ BC къ EF , и
сїи пропорціональныя спороны сущь око-
ло равныхъ угловъ: по параллелограммъ
 BM подобенъ параллелограмму EQ . Потому
же параллелограммъ BN подобенъ параллело-
грамму ER , и параллелограммъ BK параллело-
грамму EO . Чего ради три параллело-
грамма BM , BK , BN подобны тремъ парал-
лелограммамъ EQ , EO , ER . Но три парал-
лелограмма MB , BK , BN равны* и подоб- *24, XI.
ны тремъ прочимъ пропивиулежащимъ; а и
три параллелограмма EQ , EO , ER равны и
подобны тремъ прочимъ пропивиулежащимъ:
итакъ параллелепипеды $BGML$, $ЕНQR$ со-
держатся плоскостями подобными и равно-
многими: а посему параллелепипедъ $BGML$
подобенъ параллелепипеду $ЕНQR$ *. Но по- *оп.9, XI.
добные параллелепипеды сущь взаимно въ
упроенномъ отношенїи сходспвенныхъ споро-
новъ*: посему параллелепипедъ $BGML$ къ па- *33, XI.

параллелепипеду $ЕНQR$ имѣеть упроенное отношеніе, сходственной стороны BC къ сходственной сторонѣ EF . Но какъ параллелепипедъ $BGML$ къ параллелепипеду $ЕНQR$; такъ пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$; ибо пирамида есть шестая часть параллелепипеда, пошому что призма, по есть половина параллелепипеда, есть прекрасная
 7. пирамиды: поему пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$ имѣеть упроенное отношеніе прямая BC къ EF . ч. и д. н.

СЛѢДСТВІЕ. Изъ сего явствуетъ, что подобныя пирамиды, имѣющія многоугольныя основанія; суть взаимно въ упроенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ. Ибо сїи пирамиды можно раздѣлить на пирамиды, имѣющія треугольныя основанія; пошому что основанія, кои суть
 оп. 13, XI. подобные многоугольники; можно раздѣлить на треугольники равномногіе, взаимно подобныя, и пропорціональныя сѣмъ
 20, VI. многоугольникамъ. Посему какъ одна изъ имѣющихъ треугольное основаніе пирамидъ, кои въ первой пирамидѣ, къ одной изъ имѣющихъ треугольное основаніе пирамидъ, кои во второй пирамидѣ, такъ все имѣющія треугольное основаніе пирамиды, кои въ

первой, ко всѣмъ имѣющимъ преугольное основаніе пирамидъ, кои во второй*, по *12, V. естъ, такъ первая изъ пирамидъ имѣющихъ многоугольное основаніе, ко второй изъ пирамидъ имѣющихъ многоугольное же основаніе. Но тѣ пирамиды, по естъ имѣющія преугольныя основанія, суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ: чего ради и сіи пирамиды, по естъ имѣющія многоугольныя основанія, суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*. (95). *11, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія преугольныя, основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И которыхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія преугольныя, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равныя.

Пусть будутъ равныя пирамиды, имѣющія преугольныя основанія ABC, DEF, а вершины почки G, H. Говорю, что пирамидъ ABGG, DEFH основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; по естъ, какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABGG.

Дополни параллелепипеды $BGML$, $ЕНQR$.

Поелику пирамида $ABCG$ равна пирамидѣ $DEFH$; а параллелепипедъ $BGML$ есть ше-

*28. шестикрапный пирамиды $ABCG$ *, и параллелепипедъ $ЕНQR$ шестикрапный же пирамиды $DEFH$: то параллелепипедъ $BGML$ равенъ параллелепипеду $ЕНQR$. А равныхъ параллелепипедовъ основанія суть обратно

34, XI. пропорціональны высотамъ: посему какъ основаніе BM къ основанію EQ , такъ высота параллелепипеда $ЕНQR$ къ высотѣ параллелепипеда $BGML$. Но какъ основаніе BM къ основанію EQ , такъ претугольникъ

*15, V. ABC къ претугольнику DEF *: посему какъ претугольникъ ABC къ претугольнику DEF , такъ высота параллелепипеда $ЕНQR$ къ

*11, V. высотѣ параллелепипеда $BGML$ *. Но высота параллелепипеда $ЕНQR$ есть таже что и пирамиды $DEFH$, а высота параллелепипеда $BGML$ таже что и пирамиды $ABCG$: посему какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ высота пирамиды $DEFH$ къ высотѣ пирамиды $ABCG$. И такъ пирамидъ $ABCG$, $DEFH$ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ.

Но пусть будутъ пирамидъ $ABCG$, $DEFH$ основанія обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABC

къ основанію DEF , такъ высота пирамиды $DEFH$ къ высотѣ пирамиды $ABCG$. Говорю, что пирамида $ABCG$ равна пирамидѣ $DEFH$.

Ибо, сдѣлавъ тоже спроеііе, поелику какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ высота пирамиды $DEFH$ къ высотѣ пирамиды $ABCG$; а какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ параллелограммъ BM къ параллелограмму EQ : по какъ параллелограммъ BM къ параллелограмму EQ , такъ высота пирамиды $DEFH$ къ высотѣ пирамиды $ABCG$. Но высота пирамиды $DEFH$ есть таже что и параллелепипеда $ENQR$, а высота пирамиды $ABCG$ таже что и параллелепипеда $BGML$: посему какъ основаніе BM къ основанію EQ , такъ высота параллелепипеда $ENQR$ къ высотѣ параллелепипеда $BGML$. А которыхъ параллелепипедовъ, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равны*: посему параллелепипедъ $BGML$ равенъ параллелепипеду $ENQR$. Но пирамида $ABCG$ есть шестая часть параллелепипеда $BGML$, а пирамида $DEFH$ шестая же часть параллелепипеда $ENQR$: чего ради пирамида $ABCG$ равна пирамидѣ $DEFH$.

Итакъ равныхъ, и проч. ч. и д. н. (96).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

www.libtool.com.cn

Всякій конусъ есть претѣя часть цилиндра, имѣющаго тоже основаніе и равную высоту.

Пусть имѣютъ конусъ и цилиндръ тоже основаніе, кругъ $ABCD$, и равную высоту. Говорю, что конусъ есть претѣя часть цилиндра; то есть, цилиндръ есть прекратный конуса.

Ибо, буде цилиндръ не есть прекратный конуса; то онъ будетъ, или больше или меньше нежели прекратный конуса. Пусть, во первыхъ, будетъ больше нежели прекратный.

*6, IV. Въ кругъ $ABCD$ впиши квадратъ $ABCD$: то квадратъ $ABCD$ больше половины круга $ABCD$. На квадратъ $ABCD$ воспавъ призму, равновысопную цилиндру: то сія призма будетъ больше половины цилиндра. Ибо, еслии около круга $ABCD$ опишемъ квадратъ; то квадратъ вписанный будетъ половина квадрата описаннаго: И еслии воспавимъ на нихъ призмы равновысопныя, то сѣя параллеленипеды; а параллеленипеды, имѣющіе ту же высоту, суть взаимно какъ

32, XI. основанія: посему призма, воспавленная на квадратъ $ABCD$, есть половина призмы,

возспавленной на квадрапѣ описанномъ около круга $ABCD$: Но цилиндръ естъ меньше призмы, возспавленной на квадрапѣ описанномъ около круга $ABCD$: слѣдственно призма, возспавленная на квадрапѣ $ABCD$ и равновысопная цилиндру, естъ больше половины цилиндра. Раздѣли дуги AB , BC , CD , DA по поламъ въ точкахъ E , F , G , H ; и протяни AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA : то каждый изъ преугольниковъ AEB , BFC , CGD , DHA больше половины отрѣзка круговаго, въ коемъ онъ помѣщенъ, какъ доказано выше*. На каждомъ изъ преугольниковъ ^{въ 2.} AEB , BFC , CGD , DHA возспавь призмы равновысопныя цилиндру: то каждая изъ сихъ призмъ больше половины объемлющаго оную отрѣзка цилиндра. Ибо, естли чрезъ почки E , F , G , H проведемъ параллельныя прямыя къ AB , BC , CD , DA , и на AB , BC , CD , DA дополнимъ параллелограммы, и на нихъ возспавимъ параллелепипеды равновысопные цилиндру, то призмы, кои на преугольникахъ AEB , BFC , CGD , DHA , будутъ половины каждого изъ сихъ параллелепипедовъ: Но отрѣзки цилиндра суть меньше сихъ же параллелепипедовъ: по сему призмы, кои на преугольникахъ AEB , BFC , CGD , DHA , суть больше половины

соотвѣствующихъ опрѣзковъ цилиндра. Если же и оставшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и пропягивать прямыя, и на произшедшихъ треугольникахъ возсавлять призмы равновысопныя цилиндру; и еслии еіе всегда будемъ дѣлать: то останутся наконецъ нѣкіе опрѣзки цилиндра, кои будутъ меньше избытка цилиндра предъ

1, X. прекраснымъ конусомъ. Пусть пакыые останутся: и пусть сїи опрѣзки цилиндра будутъ « на » $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA$. Посему оспальная призма, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а высота таже чпо и цилиндра, больше прекраснаго конуса. Но призма, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$, а высота таже чпо и цилиндра, есть прекрасная пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$

7. а вершина таже чпо и конуса; посему и пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а вершина та же чпо и конуса, больше конуса имбющаго основаніемъ кругъ $ABCD$: Она же и меньше, ибо конусомъ объемлется: что невозможно. Чего ради цилиндръ не больше нежели прекрасный конуса.

Говорю же, что и ни меньше нежели прекрасный. Ибо, еслии возможно, пусть

цилиндръ будетъ меньше нежели прекрап-
ный конуса: посему обратно конусъ есть
больше нежели претпѣя часпѣ цилиндра.

Въ кругѣ $ABCD$ впиши квадрапѣ $ABCD$:
по квадрапѣ $ABCD$ больше половины круга
 $ABCD$. На квадрапѣ $ABCD$ возспавѣ пирами-
ду, имбующую ту же вершину что и конусъ: по
сѣя пирамида будетъ больше половины конуса.
Ибо, по доказанному уже, еспѣли опишемъ око-
ло круга $ABCD$ квадрапѣ; по квадрапѣ $ABCD$
есть половина квадрапа описаннаго около се-
го круга. И еспѣли на сихъ квадрапахъ воз-
спавимъ параллелепипеды, то еспѣ призмы,
равновысопныя конусу; по возспавлен-
ная на квадрапѣ $ABCD$ будетъ половина
возспавленной на квадрапѣ описанномъ
около круга, ибо сѣи параллелепипеды супѣ
взаимно какъ основанїя: А и претпѣя ихъ ча-
спѣ супѣ взаимно какъ основанїя; чего
ради пирамида, коея основанїе квадрапѣ
 $ABCD$, есть половина пирамиды, возспав-
ленной на квадрапѣ описанномъ около круга:
Но пирамида, возспавленная на квадрапѣ
описанномъ около круга, больше конуса, ибо
оный объемлетъ; слѣдспвенно и пирамида,
коея основанїе квадрапѣ $ABCD$ а вершина
таже что и конуса, есть больше поло-
вины конуса. Раздѣли дуги AB , BC , CD , DA

по поламъ въ почкахъ E, F, G, H ; и пропями $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA$: по каждый изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DNA больше половины опрѣзка, въ коемъ помѣщается. Возставъ на каждомъ изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DNA пирамиды, имѣющія ту же вершину что и конусъ: по каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины опрѣзка конуса объемяющаго оную. Еслили же и оспавшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и протягивать прямыя, и на произшедшихъ треугольникахъ возставлять пирамиды, имѣющія ту же вершину что и конусъ; и еслили сіе всегда будемъ дѣлать: по останутся наконецъ нѣкіе опрѣзки конуса, кои будутъ меньше избытка

1, X. конуса предъ претѣю частію цилиндра.

Пусть таковыя останутся; и пусть сіи опрѣзки цилиндра будутъ пѣ, кои на опрѣзкахъ $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA$. Посему оспальная пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а вершина та же что и конуса, есть больше нежели претѣя часть цилиндра. Но пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а вершина та же что и конуса, есть претѣя часть призмы, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$, а вер-

7. шина та же что и цилиндра: посему призма,

коея основаніе многоугольникъ $AEBFSCGDH$ а высота также что и цилиндра, есть больше цилиндра, www.libtool.com.cn коего основаніе кругъ $ABCD$: Она же и меньше цилиндра, ибо цилиндромъ объемлется; что невозможно. Чего ради цилиндръ не меньше нежели прекрасный конуса. А доказано, что и ни больше нежели прекрасный: посему цилиндръ есть прекрасный конуса; и следовательно конусъ есть пренная часть цилиндра.

Итакъ всякій конусъ есть, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Конусы и цилиндры, имѣющіе ту же высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пусть конусы и цилиндры, коихъ основанія суть круги $ABCD$, $EFGH$, а оси KL , MN , и оснований поперечники AC , EG , имѣють ту же высоту. Говорю, что какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ конусу EN .

Ибо, еслили не такъ; то будетъ какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ нѣкому иѣлу, или меньшему конуса EN , или большему. Пусть будетъ, во первыхъ, къ меньшему, иѣлу O ; и пусть будетъ

избытокъ конуса EN предъ шѣломъ O равенъ шѣлу Y : посему конусъ EN равенъ шѣламъ O, Y .

- *6, IV. Въ кругѣ $EFGH$ впиши квадрапъ $EFGH$ *; по сей квадрапъ больше половины круга. На квадрапѣ $EFGH$ возспавай пирамиду равновысопную конусу: по сѣя пирамида больше половины конуса. Ибо, еспѣли опишемъ около круга $EFGH$ квадрапъ, и еспѣли на семъ квадрапѣ возспавимъ пирамиду пакожъ равновысопную конусу; по пирамида вписанная будешъ половина пирамиды описанной, ибо онѣ супъ взаимно какъ основанія*: Но конусъ меньше пирамиды описанной; посему пирамида, коея основаніе квадрапъ $EFGH$ а вершина таже чѣпо и конуса, еспѣ больше половины конуса. Раздѣли дуги EF, FG, GH, HE по поламъ въ почкахъ P, Q, R, S ; и пропяни $HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH$: по каждый изъ треугольниковъ HPE, EQF, FRG, GSH еспѣ больше половины опрѣзка, въ коемъ онъ помѣщается. Возспавай на каждомъ изъ треугольниковъ HPE, EQF, FRG, GSH пирамиды равновысопныя конусу: по каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины опрѣзка конуса объемлющаго оную. Еспѣли же и оставшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и пропя-

гивають прямыя, и на каждомъ изъ произшедшихъ треугольниковъ возставляють пирамиды равновысопныя конусу; и естли сѣе всегда будемъ дѣлать: по останутся наконецъ нѣкіе опрѣзки конуса, кои будутъ меньше шѣла Y^* . Пусть шакковыя оста- *I,X. нутся; и пусть сїи опрѣзки конуса будутъ шѣ, кои на опрѣзкахъ круга HP , PE , EQ , QF , FR , RG , GS , SH . Посему оспальная пирамида, коея основаніе многоугольникъ $HPEQFRGS$ а высота шаже чпо и конуса, есть больше шѣла O . Въ кругѣ $ABCD$ впиши многоугольникъ $DTAUBVCX$ подобный многоугольнику $HPEQFRGS$ и подобно положенный; и на многоугольникѣ $DTAUBVCX$ возставь пирамиду равновысопную конусу AL .

Поелику какъ квадрапъ изъ AC къ квадрапу изъ EG , шакъ многоугольникъ $DTAUBVCX$ къ многоугольнику $HPEQFRGS^*$; *10,VI. и какъ квадрапъ изъ AC къ квадрапу изъ и I,XII. EG , шакъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH^*$: по *2. какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, шакъ многоугольникъ $DTAUBVCX$ къ многоугольнику $HPEQFRGS^*$. Но какъ кругъ $ABCD$ къ *11,V. кругу $EFGH$, шакъ конусъ AL къ шѣлау O ; а какъ многоугольникъ $DTAUBVCX$ къ многоугольнику $HPEQFRGS$, шакъ пирамида,

коя основаніе многоугольникъ $\Delta T A U B V C X$ а вершина почка L , къ пирамидѣ, коя основаніе многоугольникъ $H P E Q F R G S$ а вершина почка N : посему какъ конусъ $A L$ къ шѣлу O , такъ пирамида, коя основаніе многоугольникъ $\Delta T A U B V C X$ а вершина почка L , къ пирамидѣ, коя основаніе многоугольникъ $H P E Q F R G S$ а вершина почка N : а посему премѣненіемъ, какъ конусъ $A L$ къ пирамидѣ чпо въ немъ, такъ шѣло O къ пирамидѣ чпо въ конусѣ $E N$. Но конусъ $A L$ больше пирамиды чпо въ немъ; посему шѣло O больше пирамиды чпо въ конусѣ $E N$: Оно же и меньше; чпо нелѣпо. Чего ради не будетъ какъ кругъ $A B C D$ къ кругу $E F G H$, такъ конусъ $A L$ къ нѣкому шѣлу меньшему конуса $E N$.

Подобно докажемъ, чпо ни какъ кругъ $E F G H$ къ кругу $A B C D$, такъ конусъ $E N$ къ нѣкому шѣлу меньшему конуса $A L$.

Говорю же, чпо и не будетъ какъ кругъ $A B C D$ къ кругу $E F G H$, такъ конусъ $A L$ къ нѣкому шѣлу большему конуса $E N$. Ибо, естли возможно, пусть будетъ къ большему, шѣлу O . Посему премѣненіемъ, какъ кругъ $E F G H$ къ кругу $A B C D$, такъ шѣло O къ конусу $A L$. Но какъ шѣло O къ конусу $A L$,

такъ конусъ EN къ нѣкому шѣлу меньшему конуса AL : посему какъ кругъ $EFGH$ къ кругу $ABCD$, такъ конусъ EN къ шѣлу меньшему конуса AL ; что, по доказанному уже, невозможно. Посему не будетъ какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ нѣкому шѣлу большому конуса EN . А доказано, что и ни къ меньшему: Чего ради какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ конусу EN .

Но какъ конусъ къ конусу, такъ цилиндръ къ цилиндру, ибо каждый каждого есть прекрасный*: посему круги $ABCD$, *10. $EFGH$ суть взаимно какъ цилиндры на нихъ равновысопные конусамъ.

Итакъ конусы и цилиндры, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Подобные конусы и цилиндры суть взаимно въ упроенномъ отношеніи поперечниковъ основаній.

Пусть будутъ подобные конусы и цилиндры, коихъ основанія круги $ABCD$, $EFGH$, поперечники же основаній BD , FN , а KL , MN оси конусовъ и цилиндровъ. Говорю, что конусъ, коего основаніе кругъ $ABCD$ а вер-

шина почка L , къ конусу, коего основаніе кругъ $EFGH$ а вершина почка N , имѣеть упроенное опношеніе прямая BD къ FN .

Ибо, буде не имѣеть конусъ $ABCDL$ къ конусу $EFGHN$ упроеннаго опношенія прямая BD къ FN : то будетъ имѣть упроенное ихъ опношеніе конусъ $ABCDL$ къ нѣкому шѣлу, или меньшему конуса $EFGHN$, или большему. Пустъ, во первыхъ, имѣеть къ меньшему, шѣлу O .

*6,iv. Въ кругѣ $EFGH$ впиши квадрапъ $EFGH$: то квадрапъ $EFGH$ больше половины круга $EFGH$. На квадрапѣ $EFGH$ воспавъ пирамиду, имѣющую пуже вершину что и конусъ: то сѣя пирамида будетъ больше половины конуса. Раздѣли дуги EF , FG , GH , HE по поламъ въ почкахъ P , Q , R , S ; и просяни EP , PF , FQ , QG , GR , RH , HS , SE : то каждый изъ преугольниковъ EPF , FQG , GRH , HSE будетъ больше половины каждаго изъ опрѣзковъ круга объемлющихъ оные. На каждомъ изъ преугольниковъ EPF , FQG , GRH , HSE воспавъ пирамиды, имѣющія пуже вершину что и конусъ: то каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины опрѣзка конуса объемлющаго оную. Еспыли же и оспавшійся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и прося-

тивавъ прямая, и на каждомъ изъ произшедшихъ преугольниковъ возспавлявъ пирамиды, имѣющія ту же вершину что и конусъ; и естли сіе всегда будемъ дѣлать: то оспанутся наконецъ нѣкіе опрѣзки конуса, кои меньше избытка конуса EFGHN предъ тѣломъ O*. Пустъ таковыя оспанутся; и пусть сіи опрѣзки конуса, будутъ тѣ, кои на опрѣзкахъ круга EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE. Чего ради оспавляная пирамида, коея основаніе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N, естъ больше тѣла O. Въ кругѣ ABCD впиши многоугольникъ ATBUCVDX подобный многоугольнику EPFQGRHS и подобно положенный; и на многоугольникѣ ATBUCVDX возспавь пирамиду, имѣющую ту же вершину что и конусъ. Пустъ будетъ LBT одинъ изъ преугольниковъ содержащихъ пирамиду, коея основаніе многоугольникъ ATBUCVDX а вершина точка L; и NPF одинъ изъ преугольниковъ содержащихъ пирамиду, коея основаніе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N: и пропхни KT, MP. Поелику конусъ ABCDL подобенъ конусу EFGHN: то какъ BD къ FH, такъ ось KL къ оси MN*. Но какъ BD къ FH, *опр. 24, xl. такъ BK къ FM: посему какъ BK къ FM,

*11, V. такъ KL къ MN *; и премѣненіемъ, какъ BK

*16, V. къ KL , такъ FM къ MN *. И поелику углы BKL , FMN взаимно равны, ибо сущь прямыя; и стороны около сихъ равныхъ угловъ сущь пропорціональныя: шо треуголь-

6, VI. никъ BKL подобенъ треугольнику FMN .

Еще же, поелику какъ BK къ KT , такъ FM къ MP ; и сии прямыя сущь около равныхъ угловъ BKT , FMP , ибо углы BKT , FMP сущь равночасныя чепырехъ прямыхъ угловъ, кои при центрахъ K , M : шо, по причинѣ, что стороны около равныхъ угловъ сущь пропорціональныя, треугольникъ BKT

*6, VI. подобенъ треугольнику FMP *. Еще же, поелику, по доказанному, какъ BK къ KL , такъ FM къ MN ; но BK равна KT , а FM равна

*7 III, V. PM : шо какъ KT къ KL , такъ PM къ MN .

И сии пропорціональныя стороны сущь около равныхъ угловъ TKL , PMN , ибо они прямые: итакъ треугольникъ LKT подобенъ треугольнику NMP . И поелику, по подобію треугольниковъ LKB , NMF , какъ LB къ BK , такъ NF къ FM ; а по подобію треугольниковъ BKT , FMP , какъ KB къ BT , такъ MF къ FP : шо равномѣрно, какъ LB къ BT , такъ

*22, V. NF къ FP *. Еще же, поелику, по подобію треугольниковъ LTK , NPM , какъ LT къ TK , такъ NP къ PM ; а по подобію треугольниковъ

КВТ, РМФ, какъ КТ къ ТВ, такъ МР къ РГ: по равнобѣсию, какъ ЛТ къ ТВ, такъ НР къ РГ. А доказано, что какъ ТВ къ ВЛ, такъ РГ къ ГН: посему равнобѣсию, какъ ТЛ къ ЛВ, такъ РН къ НГ. Чего ради стороны треугольниковъ ЛТВ, РПГ суть пропорціональны: а посему треугольники ЛТВ, РПГ суть равноугольны*, слѣдственно *5, VI. но и подобны. И такъ пирамида, коея основаніе треугольникъ ВКТ а вершина точка Л, подобна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ ГМР а вершина точка Н; ибо сѣи пирамиды содержащія равномногими подобными плоскостями. Но подобныя пирамиды, имѣющія треугольныя основанія, суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*: посему пирамида ВКТЛ къ *3. пирамидѣ ГМРН имѣетъ упрощенное отношеніе прямыхъ ВК къ ГМ. Если же точки А, Х, D, V, С, U соединимъ съ точкою К, а точка Е, S, Н, R, G, Q съ точкою М; и если на каждомъ изъ произшедшихъ треугольниковъ возставимъ пирамиды, имѣющія тѣже вершины съ конусами: то подобно докажемъ, что каждая изъ пирамидъ, «кои на многоугольникъ АТВСVDХ», къ каждой соотвѣтствующей ей пирамидѣ, «кои на многоугольникъ ЕРFGGRHS», имѣетъ

упроенное отношеніе сходственной споро-
ны BK къ сходственной FM , по есць, прямая
 BD къ FN . Но какъ одинъ предъидущій къ од-
ному послѣдующему, такъ всѣ предъидущіе

12, V. ко всѣмъ послѣдующимъ: посему какъ пи-
рамида $BKTL$ къ пирамидѣ $FMPN$, такъ
цѣлая пирамида, коея основаніе много-
угольникъ $ATBUCVDX$ а вершина почка L ,
къ цѣлой пирамидѣ, коея основаніе много-
угольникъ $EPFQGRHS$ а вершина почка N :
слѣдственно и пирамида, коея основаніе
многоугольникъ $ATBUCVDX$ а вершина поч-
ка L , къ пирамидѣ, коея основаніе много-
угольникъ $EPFQGRHS$ а вершина почка N ,
имѣетъ упроенное отношеніе прямая BD къ
*11, V. FN *. А по положенію, и конусъ, коего осно-
ваніе кругъ $ABCD$ а вершина почка L , къ
плѣлу O имѣетъ упроенное отношеніе пря-
мая BD къ FN : посему какъ конусъ, коего
основаніе кругъ $ABCD$ а вершина почка L , къ
плѣлу O , такъ пирамида, коея основаніе
многоугольникъ $ATBUCVDX$ а вершина поч-
ка L , къ пирамидѣ, коея основаніе много-
угольникъ $EPFQGRHS$ а вершина почка N :
а посему премѣненіемъ, какъ конусъ, коего
основаніе кругъ $ABCD$ а вершина почка L , къ
пирамидѣ чпо въ немъ, коея основаніе много-
угольникъ $ATBUCVDX$ а вершина почка L ,

такъ шѣло O къ пирамидѣ, коея основаніе многоугольникъ $EPFQGRHS$ а вершина почка N . Но сказанный конусъ больше пирамиды чпо въ немъ, ибо оную объемлеть: посему и шѣло O больше пирамиды, коея основаніе многоугольникъ $EPFQGRHS$ а вершина почка N : Оно же и меньше; чпо невозможно. Чего ради конусъ, коего основаніе кругъ $ABCD$ а вершина почка L , къ нѣкому шѣлу, меньшему конуса, коего основаніе кругъ $EFGH$ а вершина почка N , не имѣеть упроеннаго отношенія прямыя BD къ FN .

Подобно докажемъ, чпо и конусъ $EFGHN$ къ нѣкому шѣлу меньшему конуса $ABCDL$ не имѣеть упроеннаго отношенія прямыя FN къ BD .

Говорю же, чпо конусъ $ABCDL$ къ нѣкому шѣлу и большему конуса $EFGHN$ не имѣеть упроеннаго отношенія прямыя BD къ FN . Ибо, буде возможно, пусть имѣеть къ большему, шѣлу O . Ипакъ, предложѣемъ, шѣло O къ конусу $ABCDL$ имѣеть упроенное отношеніе прямыя FN къ BD . Но какъ шѣло O къ конусу $ABCDL$, такъ конусъ $EFGHN$ къ нѣкому шѣлу меньшему конуса $ABCDL$: *лем. 2. посему конусъ $EFGHN$ къ нѣкому шѣлу, меньшему конуса $ABCDL$, имѣеть упроен-

*11, V. ное отношеніе прямая FH къ BD *; чпо, по доказанному уже, невозможно. Посему конусъ $ABCDL$ къ иѣкому тѣлу, большому конуса $EFGHN$, не имѣетъ упроеннаго отношенія прямая BD къ FH . А доказано, чпо и ни къ меньшему: Чего ради конусъ $ABCDL$ къ самому конусу $EFGHN$ имѣетъ упроенное опношеніе прямая BD къ FH .

Но какъ конусъ къ конусу, такъ цилиндръ къ цилиндру*; ибо цилиндръ, имѣющій тоже основаніе съ конусомъ и высоту равную, есть прекраснѣйшій сего конуса, поелику, по доказанному, всякій конусъ есть претѣя часть цилиндра, имѣющаго тоже основаніе и равную высоту*: чего ради и цилиндръ къ цилиндру имѣетъ упроенное опношеніе прямая BD къ FH *.

Итакъ подобные конусы и цилиндры, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели цилиндръ пересѣченъ плоскостію параллельною къ прошивулежащимъ плоскостямъ: то изъ произшедшихъ цилиндровъ будетъ какъ одинъ къ другому, такъ ось перваго къ оси втораго.

Пусть цилиндръ AD будетъ пересѣченъ параллельною къ противоположащимъ плоскостямъ AB , CD плоскостію GH , встрѣчающею его ось EF въ точкѣ K . Говорю, что какъ цилиндръ BG къ цилиндру GD , такъ ось EK къ оси KF .

Продолжи ось EF на обѣ стороны къ точкамъ L , M ; и возьми сколько ни есть прямыхъ EN , NL равныхъ оси EK ; и сколько ни есть прямыхъ FO , OM равныхъ оси FK ; и чрезъ точки L , N , O , M проводи плоскости параллельныя къ плоскостямъ AB , CD ; и на плоскостяхъ проходящихъ чрезъ точки L , N , O , M и около центровъ L , N , O , M вообрази круги PQ , RS , TU , VX равные кругамъ AB , CD ; и еще вообрази цилиндры QR , RB , DT , TX .

Послику оси LN , NE , EK взаимно равны: то цилиндры QR , RB , BG суть взаимно какъ основанія*: но основанія ихъ равны; *и. посему и цилиндры QR , RB , BG взаимно равны. И такъ, послику оси LN , NE , EK взаимно равны; и цилиндры QR , RB , BG взаимно равны; и оси LN , NE , EK суть равномногія цилиндрамъ QR , RB , BG : то сколько кратная есть ось LK оси EK , столько кратный есть и цилиндръ QG цилиндра GB . Подобно докажемъ, что сколько кратная есть ось MK оси KF , столько

кратный есть и цилиндръ XG цилиндра GD . И еслили ось KL равна оси KM , то и цилиндръ QG равенъ цилиндру GX ; и еслили ось KL больше оси KM ; то и цилиндръ QG больше цилиндра GX ; и еслили меньше, то меньше. Ипакъ изъ имѣющихся четырехъ величинъ, то есть двухъ осей EK , KF и двухъ цилиндровъ BG , GD , взявшы оси EK и цилиндра BG равнократныя, ось KL и цилиндръ QG , а оси KF и цилиндра GD равнократныя, ось KM и цилиндръ GX : и доказано, что еслили ось KL больше оси KM , то и цилиндръ QG больше цилиндра GX ; и еслили равна, то равенъ; и еслили меньше, то меньше: чего ради какъ ось EK къ оси KF , такъ цилиндръ BG къ цилиндру GD *. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Конусы и цилиндры, имѣющіе равныя основанія, суть взаимно какъ высоты.

Пусть будутъ цилиндры EB , FD на равныхъ основаніяхъ AB , CD . Говорю, что какъ цилиндръ EB къ цилиндру FD , такъ ось GH къ оси KL .

Продолжи ось KL къ точкѣ N ; и положи прямую LN равную оси GH ; и около оси LN вообрази цилиндръ CM .

Поелику цилиндры $ЕВ$, $СМ$ имѣютъ ту же высоту; по они суть взаимно какъ основанія*: по основанія взаимно равны; посему *11. и цилиндры $ЕВ$, $СМ$ взаимно равны. И поелику цилиндръ FM пересѣченъ плоскостію CD , параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: по какъ цилиндръ $СМ$ къ цилиндру FD , такъ ось LN къ оси KL *. Но *13. цилиндръ $СМ$ равенъ цилиндру $ЕВ$, и ось LN равна оси GH : посему какъ цилиндръ $ЕВ$ къ цилиндру FD , такъ ось GH къ оси KL *. *7 и 11, V.

Но какъ цилиндръ $ЕВ$ къ цилиндру FD , такъ конусъ ABG къ конусу CDK *, ибо *15, V. цилиндры суть прекрасные конусовъ*: чего *10. ради какъ ось GH къ оси KL , такъ конусъ ABG къ конусу CDK , и такъ цилиндръ $ЕВ$ къ цилиндру FD *. ч. и д. н. *11, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Равныхъ конусовъ и цилиндровъ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И коихъ конусовъ и цилиндровъ, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные.

Пусть будутъ равные конусы и цилиндры, коихъ основанія суть круги $ABCD$, $EFGH$, а ихъ поперечники AC , EG ; и оси

KL, MN, кои суть и высоты конусовъ или цилиндровъ : и дополни цилиндры АО, ЕР. Говорю, что цилиндровъ АО, ЕР основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL.

Высота KL, или равна высотѣ MN, или нѣтъ. Пусть будетъ, во первыхъ, равна.

Поелику цилиндръ АО равенъ цилиндру ЕР; а конусы и цилиндры, имѣющіе ту же высоту, суть взаимно какъ основанія*: посему и основаніе ABCD равно основанію EFGH. Чего ради основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL.

Но пусть не будетъ высота KL равна высотѣ MN; и пусть MN будетъ большая.

Отъ высоты MN опними прямую QM равную KL; и чрезъ точку Q разсѣки цилиндръ ЕР плоскостію TVS параллельною къ противоположащимъ плоскостямъ круговъ EFGH, RP; и на основаніи EFGH а по высотѣ QM вообрази цилиндръ ES.

Поелику цилиндръ АО равенъ цилиндру ЕР, а ES есть другой нѣкій цилиндръ: то какъ цилиндръ АО къ цилиндру *7.v. ES, такъ цилиндръ ЕР къ цилиндру ES*.

Но какъ цилиндръ AO къ цилиндру ES , такъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$ *, ибо цилиндры AO , ES имѣютъ *11. ту же высоту; а какъ цилиндръ EP къ ES , такъ высота MN къ MQ *, ибо цилиндръ *13. EP пересѣченъ плоскостію TVS параллельною къ противоположащимъ плоскостямъ: посему какъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ высота MN къ высотѣ MQ *. Но *11, V. высота MQ равна высотѣ KL : посему какъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ высота MN къ высотѣ KL *. И такъ основанія *7 и II, V. цилиндровъ AO , EP суть обратно пропорціональны высотамъ.

Но пусть основанія цилиндровъ AO , EP будутъ обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ высота MN къ высотѣ KL . Говорю, что цилиндръ AO равенъ цилиндру EP .

Ибо, сдѣлавъ поже спроееніе, поелику такъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ высота MN къ высотѣ KL ; а высота KL равна высотѣ MQ : то какъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ высота MN къ высотѣ MQ *. Но какъ осно- *7 и II, V. ваніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ цилиндръ AO къ цилиндру ES *, ибо имѣютъ *11.

пуже высоту; а какъ высота MN къ высотѣ
 14. MQ , такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES^ :
 посему какъ цилиндръ AO къ цилиндру ES ,
 11. V . такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES^ : а посему
 9. $У$. цилиндръ AO равенъ цилиндру EP^ .

Подобно докажемъ сіе и о конусахъ. Ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Въ большемъ изъ двухъ круговъ, находящихся около тогоже центра, вписать многоугольникъ, имѣющій равныя стороны и въ чепномъ числѣ, не прикасающійся къ меньшему кругу.

Пусть будутъ данные два круга $ABCD$, $EFGH$ около тогоже центра K . Надлежитъ въ большемъ изъ нихъ, кругъ $ABCD$, вписать многоугольникъ, имѣющій равныя стороны и въ чепномъ числѣ, не прикасающійся къ меньшему кругу $EFGH$.

Черезъ центръ K проводи прямую BKD ; и опъ точки G проводи, подъ прямыми углами къ BD , прямую GA ; и продолжи оную до C : то
 16. III . AC будетъ касательная къ кругу $EFGH^$.
 Если полуокружность BAD раздѣлимъ по поламъ, и половину ея по поламъ; и естли сіе всегда будемъ дѣлать: то останется наконецъ нѣкая дуга, меньшая

дуги AD^* . Пусть иная останется; ^{*1, X.}
и пусть будетъ она LD . Опъ L проводи,
перпендикулярную къ BD , прямую LM ; и
продолжи оную до N ; и пропши LD , DN .

Ипакъ LD равна DN^* . И поелику LN па- ^{*29, III.}
раллельна къ AC ; и AC прикасается ток-
мо къ кругу $EFGH$: то LN не прикаснется
къ кругу $EFGH$; а шѣмъ паче прямая
 LD , DN не прикаснутся къ кругу $EFGH$.
Ипакъ, естли въ кругѣ $ABCD$ непрерыв-
но помѣсимъ прямая равная прямой LD :
то вписанъ будетъ многоугольникъ, имѣю-
щій равная стороны и въ чепномъ числѣ,
не прикасающійся къ меньшему кругу $EFGH$,
ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Въ большемъ изъ двухъ шаровъ, нахо-
дящихся около тогоже центра, вписать
многогранникъ, поверхностію своею не
прикасающійся къ меньшему шару.

Вообрази два шара около тогоже центра
 A . Надлежитъ въ большемъ шарѣ впи-
сать многогранникъ, поверхностію своею
не прикасающійся къ меньшему шару.

Пусть шары будутъ пересѣчены чрезъ
центръ какою нисетъ плоскостію: то

- сѣченія будутъ круги. Ибо шаръ произ-
 ходишь чрезъ обращеніе полукружія на
 оп. 14, X. неподвижномъ его поперечникѣ; слѣд-
 ственно при всякомъ положеніи сего полу-
 кружія, продолженная его плоскость на-
 сѣчетъ на поверхности шара кругъ.
 И явно, что сей кругъ будетъ наибольшій;
 ибо поперечникъ шара, который есть и
 поперечникъ полукружія, то есть круга,
 есть больше всѣхъ прямыхъ проводимыхъ
 15, III. въ кругѣ или въ шарѣ. Ипакъ пусть бу-
 дутъ BCDE кругъ большаго шара, а FGH
 кругъ меньшаго; и проводи круговъ сихъ
 поперечники BD, CE подъ прямыми уг-
 лами одинъ къ другому. И поелику суть
 два круга BCDE, FGH около тогоже центра:
 то въ большемъ изъ нихъ, BCDE, впиши
 многоугольникъ, имѣющій равныя стороны
 и въ четномъ числѣ, не прикасающійся
 16. сторонами къ меньшему кругу FGH; и
 пусть стороны сего многоугольника, кои
 въ четверти BE круга, будутъ BK, KL,
 LM, ME. Пропяни KA, и продолжи оную
 до N; отъ точки A возставь, подъ пря-
 мыми углами къ плоскости круга BCDE,
 12, XI. прямую AO, которая пусть встрѣнитъ
 поверхность шара въ точкѣ O. Чрезъ
 AO и каждую изъ прямыхъ BD, KN

проведи плоскости: по общія сѣченія сихъ плоскостей съ поверхностію шара будутъ, по доказанному уже, ~~два наибольшіе~~ круга. Пусть будутъ шаковые; полукружія же, кои на поперечникахъ BD , KN , пусть будутъ BOD , KON . И поелику OA перпендикулярна къ плоскости круга $BCDE$; по всѣ плоскости, проводимыя чрезъ OA , будутъ перпендикулярны къ плоскости круга $BCDE$ *: *18, XI. посему полукружія BOD , KON перпендикулярны къ плоскости круга $BCDE$. И поелику полукружія BED , BOD , KON равны; ибо суть на равныхъ поперечникахъ EC , BD , KN : то и четверти BE , BO , CO взаимно равны. Посему сколько сторонъ помянушаго мноугольника помѣщено въ четверти BE , столько же возможно помѣстити и въ каждой изъ четвертей BO , CO прямыхъ, равныхъ прямымъ BK , KL , LM ME : помѣсти шаковыя, и пусть оныя будутъ BP , PQ , QR , RO , KS , ST , TU , UO ; и просящи SP , TQ , UR . Отъ шочекъ P , S проведи перпендикулярныя прямыя къ плоскости круга $BCDE$ *; по онѣ упадутъ на BD , KN *11, XI. взаимныя сѣченія плоскостей*, ибо плоско- *38, XI. сти полукружій BOD , KON перпендикулярны къ плоскости круга $BCDE$. Пусть упадутъ оныя; и пусть еіи прямыя

будущъ PV , SX ; и пропѣяни VX . Поелику на равныхъ полуокружностяхъ BOD , KON взяты равныя дуги BP , KS , и проведены перпендикулярныя прямыя PV , SX : то PV равна SX , и BV равна KX . (97). Но цѣлая прямая BA равна цѣлой KA ; посему и оспальная VA равна оспальной XA : а посему какъ BV къ VA , такъ KX къ XA : чего ради XV параллельна къ KB . И поелику каждая изъ прямыхъ PV , SX перпендикулярна къ плоскости круга $BCDE$; то PV параллельна къ SX *: а доказано, что онѣ и равны; чего ради и прямыя VX , SP суть взаимно равны *33, I. и параллельны*. Ипакъ, поелику XV параллельна къ SP и къ KB , то и SP параллельна къ KB ; но сѣи прямыя соединены прямыми BP , KS : посему чепыреугольникъ $KBPS$ есть на одной плоскости; ибо ежели двѣ прямыя суть параллельныя, и на каждой изъ нихъ взяты какія нисуть точки, то прямая пропѣянушая чрезъ сѣи точки есть на одной плоскости съ параллельными *8, XI. ми*. Попому же и каждый изъ чепыреугольниковъ $SPQT$, $TQRU$ есть на одной плоскости. (98). А и треугольникъ URO есть на одной плоскости*. Посему, еспли вообразимъ прямыя опъ точекъ P , S , Q , T , R , U къ точкѣ A пропѣянушыя: то соспавленъ

будетъ между дугами BO , CO и ѣкій много-
гранникъ, состоящій изъ пирамидъ, коихъ
основанія суть четыреугольники $KBPS$,
 $SPQT$, $TQRU$ и преугольникъ URO , а общая
вершина почка A . Еслилижъ и на каждой
изъ сторонъ KL , LM , ME соспроимъ поже,
какъ и на KB ; и естли сѣ же соспроимъ
въ прочихъ прехъ чепвертіяхъ полушарія, и
еще въ оспальномъ полушаріи: то со-
спавленъ будетъ и ѣкій многогранникъ, впи-
санный въ большемъ шарѣ, состоящій
изъ пирамидъ, коихъ основанія суть ска-
занные четыреугольники и преугольникъ
 URO , и плоскости соопвѣстующія имъ
въ прочихъ частяхъ шара; а общая вер-
шина почка A .

Говорю еще, что помянутый многогран-
никъ поверхностію своею не прикасается
къ меньшему шару, на коемъ кругъ FGH .
Опъ почки A проведи, перпендикулярную
къ плоскости четыреугольника $KBPS$, пря-
мую AU^* , которая пусть встрѣшится сѣю ^{*п. XI.}
плоскостью въ почкѣ Y ; и просяни BY , YK .

Поелику AU перпендикулярна къ плоско-
сти $KBPS$; то AU перпендикулярна ко всѣмъ
прямымъ съ нею встрѣчающимся и лежа-
щимъ на сей плоскости*: посему AU пер- ^{оп. 3, XI.}
пендикулярна къ каждой изъ прямыхъ BY , YK .

Но поелику АВ равна АК; то квадрапъ изъ АВ равенъ квадрапу изъ АК. Но квадрапу изъ АВ равны квадрапы изъ АУ, УВ*,
 *47, I. www.libtost.com/en ибо уголъ при У естъ прямой; а квадрапу изъ АК равны квадрапы изъ АУ, УК: посему квадрапы изъ АУ, УВ равны квадрапамъ изъ АУ, УК. Опними обще квадрапъ изъ АУ; посему оспальной квадрапъ изъ ВУ равенъ оспальному изъ УК; а посему и ВУ равна УК. Подобно докажешся, что каждая изъ прямыхъ, пропянутыхъ опъ почки У до почекъ Р, S, равна каждой изъ прямыхъ ВУ, УК. Ипакъ кругъ, написанный изъ центра У разспоянїемъ которой ниесъ изъ прямыхъ УВ, УК, пройдепъ и чрезъ почки Р, S; и чепыреугольникъ KBPS будепъ въ кругѣ. И поелику KB больше XV, а XV равна SP; то KB больше и SP. Но KB равна каждой изъ прямыхъ KS, BP; посему и каждая изъ прямыхъ BP, KS больше SP. И поелику чепыреугольникъ KBPS вписанъ въ кругѣ, и прямыя KB, BP, KS равны, а прямая PS меньше, и ВУ естъ прямая опъ центра: то квадрапъ изъ KB естъ больше нежели двукрапный квадрапа изъ ВУ (99). Опъ почки К проведи, перпендикулярную къ BD, прямую KZ. Поелику BD меньше нежели двукрапная DZ; и какъ DB къ DZ, такъ прямоугольникъ

въ DB , BZ къ прямоугольнику въ DZ , ZB : *1, VI.
 по сему, если изъ BZ написать квадрапъ,
 и на ZD дополнишь параллелограммъ, то
 будетъ прямоугольникъ въ DB , BZ меньше
 двукрапнаго прямоугольника въ DZ , ZB .
 Пропяни еще KD : Ипакъ прямоугольникъ
 въ DB , BZ равенъ квадрапу изъ KB *; и прямо- *слѣ: 8, и
 угольникъ въ DZ , ZB равенъ квадрапу изъ KZ : 17, VI.
 по сему квадрапъ изъ KB меньше двукрапнаго
 квадрапа изъ KZ . Но квадрапъ изъ KB боль-
 ше двукрапнаго квадрапа изъ BY ; по сему
 и квадрапъ изъ KZ больше квадрапа изъ
 BY . И поелику BA равна KA ; то квадрапъ
 изъ BA равенъ квадрапу изъ KA . Но квадрапу
 изъ BA равны квадрапы изъ BY , YA ; а квад-
 рапу изъ KA равны квадрапы изъ KZ ,
 ZA : по сему квадрапы изъ BY , YA равны
 квадрапамъ изъ KZ , ZA : Но въ нихъ квад-
 рапъ изъ KZ больше квадрапа изъ BY ; по-
 сему оспальной квадрапъ изъ AZ меньше
 оспального изъ YA ; а по сему AY больше
 AZ : слѣдственно AY гораздо больше AG . Но
 AU есть перпендикулярная опъ центра
 къ одному изъ основаній многогранника
 проведенная, а AG прямая опъ центра мень-
 шаго шара до поверхности его: чего ради
 ипотъ многогранникъ не прикасается къ
 поверхности шара меньшаго.

ИНАЧЕ. Мы еще докажемъ иначе и короче, что AY больше AG .

Опъ точки G проводи, подъ прямыми углами къ AG , прямую GL ; и пропхни AL .

Естьли раздѣлимъ дугу EB по поламъ; и половину ея раздѣлимъ по поламъ; и естъли сѣе всегда будемъ дѣлать: то оспанется наконецъ нѣкая дуга, копорая будетъ меньше дуги круга $BCDE$, спя-
 *1, X. гиваемой прямою равною GL *. Пусть ша-
 ковая оспанется; и пусть она будетъ дуга KB : посему прямая KB будетъ меньше прямой GL . Но послѣку чепыреугольникъ $BKSP$ вписанъ въ кругъ, и прямая PB , BK , KS равны, а PS меньше: то уголъ BYK естъ тупой (100); посему прямая BK
 *19, I. больше BY *: Но GL больше BK ; а посему GL и гораздо больше BY ; слѣдспвенно и квадрапъ изъ GL больше квадрапа изъ BY . И послѣку AL равна AB ; то квадрапъ изъ AL равенъ квадрапу изъ AB . Но квадрапу изъ AL равны квадрапы изъ AG , GL ; а квадрапу изъ AB равны квадрапы изъ BY , YA : посему квадрапы изъ AG , GL равны квадрапамъ изъ BY , YA . Но квадрапъ изъ BY меньше квадрапа изъ GL ; чего ради квадрапъ

изъ УА больше квадрата изъ АС: а посему и прямая АУ больше прямой АС. (101).

Итакъ въ большемъ изъ двухъ шаровъ, около тогоже центра находящихся, вписанъ многогранникъ, поверхностию своею не прикасающийся къ меньшему шару.

Слѣдствие. Если вписанъ будетъ въ другомъ шарѣ многогранникъ, подобный вписанному въ шарѣ BCDE: то многогранникъ, вписанный въ шарѣ BCDE, къ многограннику, вписанному въ другомъ шарѣ, будетъ имѣть упрощенное отношеніе поперечника шара BCDE къ поперечнику другого шара. Ибо, раздѣливъ сѣи многогранники на равномногія и равнорасположенныя пирамиды, произойдутъ пирамиды подобныя. Но подобныя пирамиды суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*: посему пирамида, коея основа- *слѣд: 8.
ніе чепыреугольникъ KBPS а вершина точка А, къ соотвѣствующей пирамидѣ въ другомъ шарѣ имѣетъ упрощенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть, упрощенное отношеніе прямой линіи АВ отъ центра шара, что около точки А, къ прямой отъ центра другого шара. Подобно и каждая изъ

прочихъ пирамидъ, содержащихся въ шарѣ, коего центръ A , къ каждой изъ пирамидъ, имѣющаго вершину въ другомъ шарѣ, будетъ имѣть упрощенное отношеніе прямая AB къ прямой отъ центра другого шара. Но поелику какъ одинъ предъидущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ предъидущіе ко всѣмъ послѣдующимъ: посему цѣлый многогранникъ въ шарѣ, коего центръ A , къ цѣлому многограннику, что въ другомъ шарѣ, имѣетъ упрощенное отношеніе прямая AB къ прямой отъ центра другого шара, то есть упрощенное отношеніе поперечника BD къ поперечнику другого шара. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Шары суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи поперечниковъ.

Вообрази шары ABC , DEF , коихъ поперечники BC , EF . Говорю, что шаръ ABC къ шару DEF имѣетъ упрощенное отношеніе поперечника BC къ EF .

Ибо, буде шаръ ABC къ шару DEF не имѣетъ упрощеннаго отношенія BC къ EF ; то шаръ ABC къ нѣкому шару, или меньшему нежели DEF , или большему, будетъ

имѣть упроенное отношеніе BC къ EF .

Пусть, вопервыхъ, имѣть къ меньшему, шару GHK . www.libtool.com.cn

Вообрази, что шары DEF , GHK суть около тогоже центра; и въ большемъ шарѣ DEF впиши многогранникъ, своею поверхностію не прикасающійся къ меньшему шару GHK *; и впиши въ шарѣ ABC много- *17. гранникъ подобный многограннику, что въ шарѣ DEF .

Итакъ многогранникъ въ шарѣ ABC къ многограннику въ шарѣ DEF имѣть упроенное отношеніе поперечника BC къ EF *. Но и *слѣд: 17. шаръ ABC къ шару GHK имѣть упроенное отношеніе BC къ EF : посему какъ шаръ ABC къ шару GHK , такъ многогранникъ въ шарѣ ABC къ многограннику въ шарѣ DEF *; а посему, премѣненіемъ, какъ *11, V. шаръ ABC къ многограннику что въ немъ, такъ шаръ GHK къ многограннику въ шарѣ DEF . Но шаръ ABC больше многогранника что въ немъ: посему и шаръ GHK больше многогранника что въ шарѣ DEF ; онъ же и меньше многогранника, ибо онымъ объемлется: что невозможно. Чего ради шаръ ABC къ нѣкому шару меньшему, нежели DEF , не имѣть упроеннаго отношенія поперечника BC къ EF .

Подобно докажемъ, что и шаръ DEF къ нѣкому шару меньшему, нежели ABC, не имѣеть упрощеннаго отношенія поперечника EF къ BC.

Говорю же, что шаръ ABC и къ нѣкому шару большому, нежели DEF, не имѣеть упрощеннаго отношенія поперечника BC къ EF.

Ибо, буде возможно, пусть имѣеть къ большому, шару LMN. Посему, положеніемъ, шаръ LMN къ шару ABC имѣеть упрощенное отношеніе поперечника EF къ BC*. Но какъ шаръ LMN къ шару ABC, такъ шаръ DEF къ нѣкому шару меньшему нежели ABC, по доказанному уже, ибо шаръ LMN больше шара DEF: посему и шаръ DEF къ меньшему шару, нежели ABC, имѣеть упрощенное отношеніе поперечника EF къ BC*; что, по доказанному уже, невозможно. Посему шаръ ABC къ нѣкому шару большому, нежели DEF, не имѣеть упрощеннаго отношенія поперечника BC къ EF. А доказано, что и ни къ меньшему: Итакъ шаръ ABC имѣеть къ самому шару DEF упрощенное отношеніе поперечника BC къ EF. ч. и д. н. (102).

К О Н Е Ц Ъ

ВОСЬМИ КНИГАМЪ ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЬ.

www.libtool.com.cn

ПРИМѢЧАНІЯ
и
ПРИБАВЛЕНІЯ
къ ВОСЬМИ КНИГАМЪ
ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ,
содержащимъ въ себѣ
ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ.

www.libtool.com.cn

ПРИМѢЧАНІЯ И ПРИБАВЛЕНІЯ

КЪ КНИГѢ ПЕРВОЙ.

(1) Сіе опредѣленіе есть слѣдствіе предъидущаго.

(2) Прямую линію опредѣляютъ различными образами. Платонъ говоритъ : прямая линія есть та, которой края заслоняются посредствующими точками. Сіе опредѣленіе въ сущности не различается отъ Эвклидова. Архимедъ въ книгѣ de Sphaera et Cyliandro принимаетъ за начало, что прямая есть кратчайшая изъ линій тѣже концы имѣющихъ (*). Новые Геометры обыкновенно употребляютъ сіе начало какъ опредѣленіе. Но Даламбертъ противу оваго не безъ основанія возражаетъ : откуда извѣстно, что отъ одной точки до другой есть только одинъ путь кратчайшій ? Для чего не могли бы быть многіе, всѣ различные, всѣ равные и всѣ кратчайшіе ? (**). Въ слѣдствіе сего Гурьеъ опровергаетъ предъидущее опредѣленіе прямой линіи, а принимаетъ слѣдующее : Когда двѣ точки одной линіи лежатъ на двухъ точкахъ другой, дѣлаютъ, что и самыя

(*) Archimedis opera per J. Barrow. 1675. Сіе изданіе почитается лучшимъ.

(**) Mélanges de littérature, etc. T. V. pag. 205.

линіи лежатъ одна на другой ; по каждая изъ оныхъ называется прямою (*). Не входя въ разбирательство обоюдности сего опредѣленія, замѣтимъ только, что неправильно полагають , якобы таково было первоначально и Эвклидово опредѣленіе , но въ послѣдствіи худыми переписчиками и полковашелями перемѣнено. Ибо для чего бы Эвклиду въ предложеніи 4мъ книги I говорить : *А буде, по совѣстенію въ сѣ Е а с сѣ Г, основаніе ВС не совѣстится сѣ основаніемъ ЕГ.* Для чего бы также ему полагать 12ю аксіому ? и проч.

(3) Геронъ говоритъ : плоскость есть такая поверхность , что прямая лежащая на какихъ бы то ни было двухъ ея точкахъ , лежитъ и вся на ней. Сіе опредѣленіе принимается почти всѣми новыми Геометрами. Однакожъ нельзя не согласиться , что Эвклидово показываетъ гораздо ощутительнѣе нежели Героново , что плоская поверхность есть по между поверхностями , что прямая линия между линиями. Припомъ изъ Геронова опредѣленія непосредственно слѣдуетъ , или лучше сказать , въ немъ предполагается предложеніе 1е книги XI , которое при опредѣленіи Эвклидовомъ должно быть доказано , а сіе одно даетъ уже послѣднему преимущество. Ибо чѣмъ меньшими свойствами что нислѣ опредѣляется (изъ коихъ однакожъ могутъ выведены быть все прочія) , тѣмъ опредѣленіе лучше. Изъ сего видно , что Роберту Симсону не слѣдовало замѣнять Эвклидова опредѣленія Героновымъ , тѣмъ паче , что

(*) Опытъ о усовершенствованіи Еlemenтовъ Геометріи, стр. 205. Основанія Геометріи : изд. 1811 г. стр. 3.

онъ опредѣленіе прямой линіи оспасилъ безъ перемѣны (*).

www.libtool.com.cn

(4) Здѣсь можно прибавить: а оныя равныя прямыя радіусами или полупоперечниками именующіяся. Эвклидъ называетъ радіусъ прямою отъ центра.

(5) Последняя часть сего опредѣленія есть слѣдствіе изъ онаго, которое можно доказать такъ:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

Кругъ дѣлится поперечникомъ по поламъ.

Пусть будетъ кругъ ABCD (Фиг. 2.), а E центръ его, и АЕС поперечникъ. Говорю, что кругъ ABCD дѣлится поперечникомъ AC по поламъ.

Ибо, еслии помѣсимъ сего круга часть ADC, не перемѣняя AC, на часть ABC, то линія ADC совмѣстится съ линією ABC. Буде же не такъ; то она упадетъ или внутрь, или вѣ, или частью внутрь, а частью вѣ ABC. Пусть упадетъ вѣ, какъ AFC. Пропяни какъ и есть прямую EBF.

Послику AFC есть часть круга, то AE равна EF*, *о п. 15. ибо суть прямыя отъ центра. Потому же AE равна и EB. Итакъ каждая изъ прямыхъ FE, BE равна AE. А равныя пому же, суть и взаимно равны*; посему EF* акс. 1. равна EB, большая меньшей, что невозможно*. Чего* акс. 2. ради ADC не упадетъ вѣ ABC. Подобно докажемъ, что она не упадетъ и внутрь, и ни частью внутрь а частью вѣ: слѣдственно ADC совмѣстится съ ABC.

Итакъ кругъ дѣлится поперечникомъ по поламъ. ч. и д. н.

(*) Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, etc. a Roberto Simson. Glasguae. 1756.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Б.

Двѣ прямыя линіи не могутъ имѣть общей
частии. www.libtool.com.cn

Ибо, если возможно, пусть будутъ двѣ прямыя
AB, AC, (фиг. 3). имѣющія общую частію AD. Возьми
на ней какую нисешь точку A; и изъ центра C,
пр 3. разстояніемъ CA напизи кругъ AEBF, который
прямыя AB, AC пусть еще пересѣчутъ въ B, C.

опр 17. Поскольку ADB поперечникъ, то AEB есть полу-

опр 18. кружіе. Еще же, поскольку ADC поперечникъ, то

A и AEC есть полукружіе. Посему AEB равно AEC:
что нелѣпо.

Итакъ двѣ прямыя линіи, и проч. ч. и д. и.

(6) Все заключающееся между знаками «» при-
бавлено, частію для пополненія, а частію для
поясненія.

(7) Кеспиеръ объясняетъ предмѣтъ всѣхъ сихъ
требованій слѣдующимъ образомъ (*): «Точка есть
«предѣлъ линіи, а посему и безъ всякаго пропязде-
«нія; слѣдственно не имѣетъ она ни частіей, ни
«пропязденія, и множеству одна подлѣ другой
«положенныхъ точекъ не составляютъ линіи. Но
«поскольку линію вездѣ можно кончить по произ-
«волѣнію; то вездѣ въ цѣломъ ея пропязденіи можно
«имѣть точки. И какъ здѣсь дѣло идетъ о воз-
«можности; то все равно сказать, что линіи
«вездѣ можетъ имѣть точки, или что она вездѣ ихъ
«имѣетъ. Итакъ можно вездѣ на линіи принимать

(*) Начальныя основанія Математики А. Г. Кеспиера Ч. II,
стр. 3 и 4.

« почки. Но нѣтъ разности въ помѣ, вездѣ на
 « линіи принимаютъ почки, или представляя себѣ
 « одну только почку, которая мало по малу пере-
 « ходила въ разныя мѣста линіи, ибо одна почка
 « ни чѣмъ не разнствуетъ отъ другой почки. Чего
 « ради и говорятъ, что линія происходитъ отъ
 « движенія почки. Сіе не значитъ однакожь, будтобы
 « линія состояла изъ почекъ лежащихъ одна подлѣ
 « другой; ибо не можно представить себѣ движенія,
 « не полагая мѣста занимаемаго почкою шеперь, и
 « мѣста занимаемаго послѣ, въ нѣкоторомъ раз-
 « стояніи. Сіе разстояніе есть уже линія; и боль-
 « шая линія состоитъ изъ меньшихъ, а не изъ
 « почек ».

Что сказано о линіи въ отношеніи почки, то
 самое можно сказать о поверхности въ отноше-
 нии линіи.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(8) Всѣ прямые углы равны взаимно.

Пусть будутъ углы ABC , DEF (фиг. 3) прямые.
 Говорю, что уголъ ABC равенъ углу DEF .

Ибо, еслии углы ABC , DEF не равны; то одинъ
 изъ нихъ большій: пусть ABC будетъ большій.
 Помѣсти уголъ DEF на ABC , и положи почку
 E на B , и прямую ED на BA ; то, поелику уголъ
 ABC больше угла DEF , прямая EF упадетъ вну-
 три угла ABC . Пусть упадетъ, какъ EG ; посему
 уголъ ABG равенъ углу DEF . Продолжи впрямъ съ
 BC прямую BH^* , и впрямъ съ EG прямую BK^* . *пр.2.

Поелику уголъ ABG прямой, то онъ равенъ углу

спр.10. АВК. Потому же и уголъ АВС равенъ углу АВН. Но уголъ АВС, то есть АВН больше угла АВG; слѣдственно онъ больше и угла АВК, меньшій большаго; что небыло. Чего ради углы АВС, DEF не неравны; слѣдственно равны.

Итакъ всѣ прямые углы, и проч. ч. и д. н.

(9) Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что еслили треугольника всѣ три стороны взаимно равны; то и всѣ три угла взаимно равны.

(10) Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что еслили треугольника всѣ три угла взаимно равны; то и всѣ три стороны взаимно равны.

(11) Эвклидъ доказываетъ сіе предложеніе покомво въ томъ случаѣ, когда одна изъ точекъ, одна изъ коихъ проводятся прямые; будетъ внѣ угла составляемаго проведенными прямыми одна изъ другой точки. Еслили же будетъ внутри, то Клавій (*), Р. Симсонъ и другіе полководатели доказываютъ такъ:

Но пусть будетъ вершина одного, угла АDB, *спр.1. внутри другаго АСВ. Пропяни CD*; и продолжи *спр.2. АС, АД къ точкамъ Е, F*.

Поелику АС равна АД, и онѣ продолжены къ Е, F; *спр.5. то уголъ ECD равенъ углу FDC*; посему уголъ FDC больше угла BCD; а тѣмъ паче уголъ BDC больше угла DCB. Еще же, поелику СВ равна BD;

(*) Euclidis elementorum libri XV, auctore Cristophoro Clavio S.J. 1654.

по уголъ $СDV$ равенъ углу $ДСВ^*$; а по доказан-^{*5.}
ному гораздо больше: чпо невозможно.

Есѣли же почка D будетъ на BC ; то предло-
женіе само собою явствуетъ^{*1.} *акс.9.

Пейрардъ думаетъ (*), чпо вышепредложен-
наго случая нѣтъ нужды доказывать, пошому чпо
оный доказанъ самимъ Эвклидомъ въ пред: 21мъ. Но
сего принять нельзя: ибо 21е предложеніе чрезъ
посредство 11го и нѣкоторыхъ другихъ, само осно-
выается на 8мъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

(12) Есѣли при какой ниесѣ прямой и при почкѣ
на ней, двѣ прямыя, нележащія по ту же сторону,
дѣлають проптивуположныя углы взаимно равныя;
то сіи двѣ прямыя будутъ взаимно впрямъ.

Пусть при какой ниесѣ прямой AB (фиг. пр. 15),
и при почкѣ на ней E , двѣ прямыя EC , ED , не-
лежащія по ту же сторону, дѣлають проптиву-
положныя углы AEC , DEB взаимно равныя. Говорю,
чпо CE будетъ впрямъ съ ED .

Поелику прямая CE поставлена на прямую AEB ;
то углы AEC , CEB равны двумъ прямымъ*. Но ^{*13.}
уголъ AEC равенъ, по положенію, углу BED ; по-
сему и углы CEB , VED равны двумъ прямымъ: и
они суть смѣжныя. Но есѣли при какой ниесѣ
прямой и при почкѣ на ней, двѣ прямыя, не-
лежащія по ту же сторону, дѣлають смѣжныя

(*) Les Elémens de Géométrie d'Euclide, par F. Peyrard. 1804.
pag. 560, 561.

углы, равные двумъ прямымъ; по сіи двѣ прямыя
 14. суть взаимно впрямъ: посему CE есть впрямъ
 съ ED .

Итакъ, ежели при какой ни есть, и проч. ч. и д. н.

(13) Слѣдствие. Отсюда явствуешь, что, отъ
 точки взятой по копорую ни есть сторону прямой
 линіи, не можно провести болѣе одной къ ней
 перпендикулярной; ибо въ противномъ случаѣ былъ
 бы треугольника внѣшній уголъ равенъ внутрен-
 нему противоположащему; что невозможно.

(14) Слѣдствие. Отсюда явствуешь, что естьли
 треугольникъ имѣетъ одинъ уголъ прямой, или
 одинъ тупой; то прочіе суть острые.

(15) Здѣсь могутъ быть три случая: то есть,
 прямая EG или упадетъ надъ прямою EF , какъ у
 Эвклида, или по самой EF , или подъ оною. Чтобы
 всѣ случаи заключить въ одномъ, Р. Симсонъ
 прежде словъ: *Послику уголъ ABC и проч. по-*
мѣщается сіи: Изъ прямыхъ DE, DF пусть будетъ
 DE не больше прямой DF .

(16) По принятому порядку всѣми почти из-
 даателями Эвклида, здѣсь слѣдовало бы доказать
 12ю аксіому (допусшивъ, что она требуетъ до-
 казательства): но поелику все, что доселѣ ни
 предложено Геометрами о семъ предметѣ, есть
 болѣе или менѣе несовершенно, то здѣсь довольно
 будетъ сказать, что аксіома 12я еще не доказана.
 Впрочемъ, желающіе имѣть понятіе, сколько для сего
 сдѣлано усилій, и сколько оныя успѣшны были,
 могутъ читать о семъ: въ *Mémoires de l'Académie*

de Berlin, на 1788 и 1789 годы, также въ сочиненіяхъ Лежандра (*), Бертранда (**) и Гурьева. Доказательство Россійскаго Геометра есть лучшее.

www.libtool.com.cn

(17) Слѣдствіе. 1. Посему всѣ при угла всякаго треугольника равны всѣмъ премо угламъ другаго треугольника. Ишакъ, еслии два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго, или вмѣстѣ, или каждый каждому; то и оспальной равенъ оспальному.

Слѣдствіе 2. Равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ каждый изъ оспрыхъ угловъ есть половина премога.

Слѣдствіе 3. Равностороннихъ треугольниковъ каждый уголъ есть премо двухъ угловъ прямыхъ, или двѣ премо премога.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ. Е.

Прямой уголъ раздѣлишь на три равныя части.
Пусть будетъ прямой уголъ ABC (фиг. 6).
Надлежитъ уголъ ABC раздѣлишь на три равныя части.

Возьми на BC какую нисеть точку C; и на опредѣленной прямой BC соснавь равносторонный треугольникъ BDC*; и раздѣли уголъ DBC по поламъ *1. прямою BE*. Говорю, что прямыми BD; BE уголъ *10. прямой ABC раздѣленъ на три равныя части.

Поелику уголъ DBC есть двѣ премо премога*; *сл 3, (17).

(*) Elémens de Géométrie, avec des notes; par A. M. Legendre.
и еще: Nouvelle théorie des Parallèles, avec un Appendice.

(**) Nouveau développement de la partie élémentaire des Mathématiques, par Bertrand, T. II.

и уголъ DBC раздѣленъ по поламъ: по каждый изъ угловъ CBE, EBD есть претъ прямого, по есть угла ABC; следовательно и оспальной уголъ DBA есть претъ прямого.

Ипакъ прямой уголъ ABC раздѣленъ на при равныя угла прямыми BE, BD. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ F.

Всѣ углы внутри всякой прямолинейной фигуры, вмѣстѣ съ чепырьмя прямыми, равны сполько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько въ фигурѣ споронъ.

Пусть будеть ABCDE (фиг. 7) прямолинейная фигура. Говорю, что всѣ углы внутри фигуры ABCDE, вмѣстѣ съ чепырьмя прямыми, равны сполько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько въ ABCDE споронъ.

Внутри фигуры ABCDE возьми какую ниеспи шочку F; и пропаяни FA, FB, FC, FD, FE.

Ипакъ фигура ABCDE раздѣлена на сполько треугольниковъ, сколько въ ней споронъ. И поелику всякаго треугольника всѣ при угла равны двумъ *32, прямымъ*: по каждого изъ треугольниковъ ABF, FBC, CFD, DFE, EFA всѣ при угла равны двумъ прямымъ; а посему всѣ углы сихъ треугольниковъ равны сполько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько всѣхъ треугольниковъ. Треугольниковъ же сполько, сколько споронъ фигуры; посему всѣ углы сихъ треугольниковъ равны сполько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько споронъ въ фигурѣ ABCDE. Но сіи углы треугольниковъ равны угламъ внутри фигуры, вмѣстѣ съ углами около шочки F;

которая есть общая вершина сихъ треугольниковъ; углы же около почки F равны чепыремъ прямымъ*: *слѣд: 15. чего ради всѣ углы внутри фигуры $ABCDE$, вмѣстѣ съ чепырьмя прямыми, равны сколько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько сторонъ въ фигурѣ $ABCDE$. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ G.

(18) Всякій чепыреугольникъ, имѣющій пропивилежащія стороны взаимно равныя, есть параллелограммъ.

Пусть будетъ чепыреугольникъ AD (ф. пр. 33), имѣющій пропивилежащія стороны взаимно равныя, то есть AC равную DB , а AB равную DC . Говорю, что AD есть параллелограммъ, то есть, что AC параллельна къ DB , а AB параллельна къ DC .

Пропіяни BC .

Поелику AC равна DB , а BC общая, то двѣ прямыя AC , CB равны двумъ прямымъ DB , BC ; и основаніе AB равно основанію DC : посему уголъ ACB равенъ углу CBD *; они же суть и накосълежащіе: чего ради AC параллельна къ DB *. Подобно *27. докажемъ, что и AB параллельна къ CD . Слѣдственно $ABDC$ есть параллелограммъ*. *опр. 36

Итакъ всякій чепыреугольникъ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что квадраты, прямоугольники, ромбы и ромбоиды суть параллелограммы.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ H.

Всякій чепыреугольникъ, имѣющій пропивилежащіе углы взаимно равные, есть параллелограммъ.

Пусть будетъ четырехугольникъ $ABCD$ (ф. 8), имѣющій противоположащіе углы взаимно равные, то есть уголъ A равенъ углу C , а уголъ B углу D . Говорю, что четырехугольникъ $ABCD$ есть параллелограммъ, то есть, что AB параллельна къ DC , а AD параллельна къ BC .

Поскольку уголъ A равенъ углу C , а уголъ D равенъ углу B ; то два угла A, D , равны двумъ угламъ B, C . Но всѣ четыре угла A, D, B, C равны четырехъ угламъ прямымъ: посему два угла A, D равны двумъ угламъ прямымъ; слѣдственно AB *28 параллельна къ DC *. Подобно докажемъ, что и AD параллельна къ BC . Слѣдственно $ABCD$ есть *опр.36 параллелограммъ*.

Итакъ всякій четырехугольникъ, и проч. ч. и д. н.
Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что четырехугольникъ, имѣющій всѣ четыре угла прямые, есть параллелограммъ.

(19) Клавій, Р. Симсонъ и другіе прибавляютъ къ доказанному Евклидомъ случаю еще слѣдующіе два:

Пусть параллелограммовъ противоположація основанія стороны имѣютъ общую точку D , (ф. 9); то сходно съ первымъ случаемъ докажемъ, что треугольникъ ABD равенъ треугольнику DCE . Придай общаго треугольникъ DBC : посему параллелограммъ AC равенъ параллелограмму BE .

Пусть еще параллелограммовъ противоположація основанія стороны имѣютъ общую часть ED (ф. 10); то сходно съ первымъ же случаемъ докажемъ, что AD равна EF . Опниси общаго ED : посему оспальная AE равна оспальной DF ; и треугольникъ ABE *8. равенъ треугольнику DCF *. Придай общаго пра-

пецію BCDE; посему параллелограммъ AC равенъ параллелограмму BF.

(20) Слѣдствіе. Такъ же докажемся, что если параллелограммъ и треугольникъ стоятъ на равныхъ основаніяхъ и между ними параллельными; то параллелограммъ есть двукратный треугольника,

ПРЕДЛОЖЕНІЕ К.

(21) Изъ равныхъ прямыхъ квадраты суть равные: И равные квадраты суть изъ равныхъ прямыхъ.

Пусть будутъ равныя прямая AB, CD (ф. 11). Говорю, что квадраты изъ AB, CD суть равные.

Изъ AB, CD напизи квадраты AE, CG*; и про- *46. стiani FB, HD.

Поелику AB равна AF*, и CD равна CH*; но AB *опр.39. равна CD: посему и AF равна CH. Ипакъ, поелику двѣ прямая AB, AF равны двумъ прямымъ CD, CH; и уголъ A равенъ углу C*: посему и основаніе ра- *акс.10. вно основанію; и треугольникъ ABF равенъ треугольнику CDH*. Но треугольника ABF есть дву- *4. кратный квадратъ AE*, а треугольника CDH *34. двукратный квадратъ CG: посему квадратъ AE равенъ квадрату CG*. *акс.6.

Но пусть будетъ квадратъ AE, (ф. 12) то есть изъ прямой AB, равенъ квадрату AC, то есть изъ прямой AD. Говорю, что и AB равна AD.

Помѣсти квадраты AE и AC при углѣ A, такъ чтобы FA была впрямъ съ AD; то и AB будетъ впрямъ съ AG*. Пропизи поперечники FB, GD и *р. прямая FG, BD.

- Поелику квадрапъ AE равенъ квадрапу AD ; то и половина равна половинѣ, по естъ треугольникъ ABF треугольнику AGD . Придай обще треугольникъ BAD ; посему цѣлый треугольникъ FBD равенъ цѣлому треугольнику GBD : и они суть на помѣже основаніи DB . А равные треугольники, стоящіе на помѣже основаніи, суть между стѣмиже параллельными*; посему DB параллельна къ GF . Поелику же прямоугольный треугольникъ AFB естъ равнобедренный; по уголъ AFB естъ половина прямого*. Потому же и уголъ ADG естъ половина прямого. Чего ради уголъ DFB равенъ углу FDG ; они же суть и накосълежащіе: посему FB параллельна къ GD *. А доказано, что и GF параллельна къ DB ; посему чепыреугольникъ $FBDG$ естъ параллелограммъ*; а посему FB равна GD *. И поелику уголъ AFB равенъ углу ADG , по доказанному; и прямой уголъ FAB равенъ прямому DAG *; по треугольники FAB , AGD имѣють два угла равные двумъ угламъ; каждый каждому; они же имѣють и одну спорону равную одной споронѣ, кои прошивулежащъ равнымъ угламъ, по естъ FB равную GD : посему и прочія двѣ спороны равны прочимъ двумъ споронамъ, каждая каждая; а посему AB равна AD .

Итакъ изъ равныхъ прямыхъ, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГѢ ВТОРОЙ.

(22) Слѣдствие. Ошпуда же явспвуетъ, что естли прямая линія разсѣчена по поламъ; по квадрапъ изъ цѣлой равенъ чепырежды взятому квадрапу изъ половины.

(23) Сіе предложеніе есть одинъ случай слѣдующаго :

www.libtool.com.cn

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

Во всякомъ преугольникѣ квадрапъ изъ споронъ; пропівулежащей оспрому углу, меньше квадрапъ изъ прочихъ двухъ споронъ; содержащихъ оный оспрый уголъ, двукрапнымъ прямоугольникомъ; содержаемымъ въ одной изъ споронъ около оспраго угла, на которую; - продолженную буде нужно, падаеть проведенная опъ вершины пропівулежащаго угла перпендикулярная, и въ прямой при оспромъ углѣ; которую перпендикулярная опъ нимаеть:

Пусть будетъ ABC (ф. 13, 14 и 15) преугольникъ, имѣющій уголъ при В оспрый; и опъ почкъ А пусть будетъ проведена перпендикулярная къ ВС, продолженной буде нужно, прямая АД. Говорю, что квадрапъ изъ АС меньше квадрапъ изъ СВ, ВА двукрапнымъ прямоугольникомъ въ СВ, ВД).

Поелику при прямой ВС, на которую падаеть перпендикулярная, уголъ при В есть оспрый, то уголъ при С будетъ или оспрый, или тупой, или прямой.

Пусть будетъ уголъ при С оспрый (ф. 13). Поелику же и уголъ при В оспрый, то перпендикулярная опъ А къ ВС проведенная упадетъ внутри преугольника. Пусть она упадетъ какъ АД.

И поелику прямая ВС разсѣчена какъ нисеть въ почкъ D; то прямоугольникъ, *атакъ далье, какъ доказано у Эсклида.*

Но пусть будетъ уголъ при C тупой (ф. 14):
 поему перпендикулярная, опъ A къ BC проведенная,
 упадетъ внѣ угла ACB на продолженіе BC . Продолжи
 BC къ D , и пусть перпендикулярная упадетъ
 какъ AD .

И поелику прямая BD разсѣчена какъ ниесъ
 въ точкѣ C ; то квадраты изъ CB , BD равны
 двукратному прямоугольнику въ CB , BD вмѣстѣ
 *7. съ квадратомъ изъ DC *. Разсуждая попомъ какъ
 и въ первомъ случаѣ, докажемъ, что квадратъ
 изъ AC меньше квадратовъ изъ CB , BA двукрат-
 нымъ прямоугольникомъ въ CB , BD .

Пусть же уголъ при C будетъ прямой (ф. 15):
 поему перпендикулярная опъ A къ BC проведенная
 будетъ самая AC ; и прямая, копорую опнимаеъ
 перпендикулярная при остромъ углѣ, будетъ са-
 мая BC .

И поелику квадраты изъ AC , CB равны квадрату
 *47. I. изъ AB *, ибо уголъ при C прямой; придай обще
 квадратъ изъ BC : поему квадратъ изъ AC вмѣстѣ съ
 двукратнымъ квадратомъ изъ CB , равенъ квадратамъ
 изъ AB , BC . Ипакъ квадратъ изъ AC меньше квадра-
 товъ изъ AB , BC двукратнымъ изъ CB , то естъ
 двукратнымъ прямоугольникомъ въ CB , BD .

Ипакъ во всякомъ треугольникѣ, и проч ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

Ежели въ треугольникѣ квадратъ изъ одной
 стороны больше квадратовъ изъ прочихъ двухъ
 сторонъ; то уголъ содержимый сими сторонами
 будетъ тупой: А естъли меньше, то острый.

Пусть будетъ треугольникъ ABC (ф. 15), въ коемъ квадрапъ изъ AB пусть, во первыхъ, будетъ больше квадраповъ изъ AC , CB . Говорю, что уголъ ACB тупой.

Буде же не такъ; то уголъ ACB или прямой, или острый. Но уголъ ACB не будетъ прямой; ибо квадрапъ изъ AB былъ бы равенъ квадрапамъ изъ AC , CB : а онъ не равенъ; посему уголъ ACB *47.г. не прямой. И уголъ ACB не острый; ибо квадрапъ изъ AB былъ бы меньше квадраповъ изъ AC , CB : *А. а онъ не меньше; посему уголъ ACB не острый. А доказано, что и ни прямой: слѣдственно уголъ ACB есть тупой.

Но пусть квадрапъ изъ AB будетъ меньше квадраповъ изъ AC , CB ; то подобно докажемъ, что уголъ ACB не прямой, и ни тупой; слѣдственно острый.

Итакъ, ежели въ треугольникѣ, и проч. ч. и д. и.

КЪ КНИГѢ ТРЕТЬЕЙ.

(24) Опредѣленіе. А неравные круги суть пѣ, коихъ поперечники неравны.

Эвклидово опредѣленіе, равно и сіе легко доказать чрезъ наложеніе, какъ то всякому видѣти можно.

(25) Опредѣленіе. Подобныя дуги суть пѣ, на которыхъ стоящіе углы при центрахъ или при окружностяхъ взаимно равны.

(26) Слѣдствіе. Чрезъ точку, взяшую на окружности круга, можетъ проведена быти одна токъ касательная къ нему прямая.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

www.libtool.com.cn

(27) Отъ точки взятой внѣ круга могутъ проведены быть къ нему двѣ касательныя, одна по одну сторону поперечника проходящаго чрезъ оную точку, а другая по другую; и сіи двѣ касательныя прямая суть взаимно равны. Болѣе же двухъ касательныхъ отъ той же точки провести не можно.

Пусть будетъ взята точка А (ф. 16) внѣ круга ВСD. Говорю, что предлагаемое справедливо.

Отъ точки А проводи касательную АВ къ кругу ВСD, сдѣлавъ тоже строеніе, какъ въ предыдущемъ предложеніи; и продолжи еще FD къ H; и пропяти ЕKH, АК: то подобно докажемъ, что и АК есть касательная. И поелику квадраты изъ АВ, ВЕ равны

47. I. квадрату изъ АЕ, ибо уголъ АВЕ есть прямой; и квадрату изъ АЕ равны квадраты изъ АК, КЕ, по той же причинѣ: посему квадраты изъ АВ, ВЕ равны квадратамъ изъ АК, КЕ. Но квадратъ изъ FB равенъ ква-

K. I. драту изъ ЕК, ибо ЕВ равна FK; посему и остальной квадратъ изъ АВ равенъ остальному изъ АК;

K. I. слѣдственно и АВ равна АК.

Говорю еще, что отъ той же точки А болѣе двухъ касательныхъ къ кругу провести не можно.

Ибо пусть, буде возможно, проведена будетъ ипрямая АС; пропяти FC: посему уголъ ACE есть прямой. Но и уголъ АKE есть прямой: а посему уголъ

21. I. ACE равенъ углу АKE, что невозможно. Чего ради АС не есть касательная къ кругу. Тоже докажется и о всякой другой, кромѣ двухъ прямыхъ АВ, АК.

Итакъ отъ точки взятой, и проч. ч. и д. н.

(28) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что если прямая касается къ кругу, и проведена будетъ отъ центра круга перпендикулярная къ касательной; то сія перпендикулярная упадетъ на прикосновеніе.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

(29) Четыреугольника въ кругѣ ежели одна сторона продолжится, то внѣшній уголъ равенъ внутреннему противоположному.

Пусть будетъ кругъ $ABCD$ (ф. 17), и въ немъ четырехугольникъ $ABCD$; и пусть одна его сторона BC продолжена. будетъ къ E . Говорю, что внѣшній уголъ DCE равенъ внутреннему противоположному $DAВ$.

Поелику два угла DCE , DCB равны двумъ угламъ прямымъ*; а и два угла $DAВ$, DCB равны двумъ *13,1. прямымъ*: то два угла DCE , DCB равны двумъ *22. угламъ $DAВ$, DCB . Отними обще уголъ DCB : поему оспальной уголъ DCE равенъ оспальному $DAВ$.

Итакъ четырехугольника, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(30) Ежели чрезъ средину дуги круга, стягиваемой прямою, проведена будетъ касательная къ кругу; то она параллельна къ стягивающей прямой: И если проведена будетъ параллельная къ ней, то она касательна къ кругу.

Въ кругѣ ABC (ф. 18) пусть будетъ прямая BC , стягивающая дугу BAC ; и чрезъ средину A дуги

ВАС пусть проведена будетъ касательная къ кругу прямая DAE. Говорю, что DAE параллельна къ BC.

www.libtool.com.cn

Возьми круга ABC центръ F, и пропяти FGA;

18. то FGA перпендикулярна къ DE. И поелику дуга BA равна дугѣ AC, то и уголъ BFA равенъ углу

27. AFC. Ипакъ, поелику FB равна FC, а FG общая; то двѣ прямыя BF, FG равны двумъ прямымъ

4. CF, FG; и уголъ BFG равенъ углу CFG: посему

и основаніе равно основанію, и треугольникъ равенъ будетъ треугольнику, и прочіе углы равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропиву-

лежащъ равнымъ сторонамъ; а посему уголъ BGF равенъ углу CGF. Чего ради каждый изъ угловъ

опр. 10, I. при G есть прямой. Но и каждый изъ угловъ при A есть прямой: посему уголъ BGF равенъ углу

28, I. DAF: слѣдственно BC параллельна къ DE.

Но пусть будетъ DAE параллельна къ BC. Говорю, что DAE касательна къ кругу.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, такъ же докажемъ, что углы при G суть прямые. И, поелику DE параллельна къ BC, и на нихъ падаетъ AF; то внѣшній

уголъ BGF равенъ внутреннему пропивулежащему

29, I. DAF: но уголъ BGF прямой; посему и уголъ DAF прямой; а посему DA перпендикулярна къ FA; слѣ-

слѣд. 16. доващедно и касательна къ нему.

Ипакъ, ежели чрезъ средину, и проч. ч. и д. н.

(31) Слѣдствие. Еслили внѣ круга взята будетъ какая нисеть точка, и опъ нея на кругъ упадутъ сколько нисеть прямыхъ, пересѣкающихъ оный: то прямоугольникъ, содержимый въ одной цѣлой прямой и въ ея внѣшнемъ опрѣзкѣ, равенъ прямоугольнику,

содержимому въ другой цѣлой прямой и во вѣшнемъ ея отрѣзкѣ. Ибо, проведя еще, опъ той же самой почки прямую касательную, будетъ каждый изъ помянуемыхъ прямоугольниковъ равенъ квадрату изъ касательной.

КЪ КНИГѢ ЧЕТВЕРТОЙ.

(32) Слѣдствіе. Изъ сего явствуетъ, что спорона квадрата описаннаго около круга, равна поперечнику сего круга.

(33) Слѣдствіе. Еслии въ кругѣ вписанъ квадратъ, и около тогоже круга описанъ другой; то описанный есть половина вписаннаго.

(34) Слѣдствіе. Еслии пропаянушь прямая АЕ, ЕС, СА, то въ кругѣ будетъ вписанъ преугольникъ равноспоронный и равноугольный; какъ то всякому легко доказать можно.

(35) Опредѣленіе. Многоугольники правильными называются шѣ, кои суть равноспоронные и равноугольные.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А:

Еслии въ кругѣ вписанъ правильный многоугольникъ; то вписать въ томъ же другой правильный многоугольникъ, вдвое больше споронъ имѣющій.

Въ кругѣ ABCDE (ф. пред. 10, кн. XII) пустьъ будетъ вписанъ правильный многоугольникъ ABCD. Надлежитъ въ томъ же кругѣ ABCD вписать другой правильный многоугольникъ, вдвое больше споронъ имѣющій.

Дуги АВ, ВС, CD, DA, спягиваемыя спорами
 вписаннаго многоугольника, раздѣли по поламъ въ
 30, III. почкахъ Е, F, G, H, и пропаяни АЕ, ЕВ, ВF, FC,
 CG, GD, DH, HA. Говорю, что многоугольникъ
 АЕВFCGDH есть правильный.

Поелику дуга АЕ равна дугѣ ЕВ, то дуга АВ есть
 двукратная дуги АЕ. Подобно докажемъ, что и дуга
 AD есть двукратная дуги АН. Но дуга АВ равна
 28, III. дугѣ AD, ибо прямая АВ равна прямой AD; посему
 и дуга АЕ равна АН; а посему и прямая АЕ равна

29, III. прямой АН. Подобно докажемъ, что и каждая изъ
 прочихъ прямыхъ ЕВ, ВF, FC, CG, GD, DH равна
 прямой АЕ или АН. Чего ради многоугольникъ
 АЕВFCGDH есть равноспоронный. Говорю же, что
 онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга АН равна дугѣ
 ЕВ, придай обще дугу ВСН; посему дуга ВСА равна
 дугѣ ЕВН. Но на дугѣ ВСА споймъ уголъ АЕВ, а на
 дугѣ ЕВН уголъ НАЕ: посему уголъ НАЕ равенъ
 27, III. углу ВЕА. Подобно докажемъ, что и каждый изъ
 угловъ, кои при В, F, C, G, D, H, равенъ углу при
 А или Е. Чего ради многоугольникъ АЕВFCGDH есть
 равноспоронный. А доказано, что и равноуголь-
 ный; слѣдственно онъ правильный. Припомъ имѣеть
 число споронъ вдвое больше, нежели многоугольникъ
 ABCD. ч. и д. н.

Слѣдствие. Поелику въ кругѣ можно вписать пра-
 вильный чепыреугольникъ, то есть квадрапъ, такъ
 же паяпи, шести и паяпнадцати угольникъ, то
 можно вписать, начиная опъ чепыреугольника:
 восьми, шестпнадцати, паяпцати двухъ, и проч.
 угольникъ; начиная опъ паяпиугольника: десяти,
 двадцати, и проч. угольникъ; начиная опъ шестпи-

угольника : двѣнадцати, двадцати четырехъ , и проч.
 угольникъ; и наконецъ, начиная опъ пятнадцати-
 угольника : тридцати , и проч. угольникъ.

www.libtool.com.cn

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

Естьли въ кругѣ вписанъ правильный многоуголь-
 никъ ; то описать около сего круга другой,
 столько же сторонъ имѣющій , правильный много-
 угольникъ.

Въ кругѣ ABCDE (ф. пр. 12) пусть будетъ вписанъ
 правильный многоугольникъ; и пусть точки A, B, C, D, E
 будутъ вершины угловъ вписаннаго многоугольника:
 итакъ дуги AB, BC, CD, DE, EA взаимно равны*. *28, III.
 Чрезъ A, B, C, D, E проведи касательныя къ кру-
 гу прямыя GH, HK, KL, LM, MG; и возьми кру-
 га ABCDE центръ F; и просяни FB, FK, FC, FL,
 FD. Разсуждая попомъ, такъ какъ предложено о пяти-
 угольникѣ*, докажемъ , что многоугольникъ GHKLM *29, II.
 есть равноссторонный и равноугольный, то есть
 правильный ч. и с. н.

Слѣдствие. Опсюда явствуетъ , что упомянутые
 въ слѣдствіи предыдущаго предложенія многоуголь-
 ники можно описывать около круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

Въ данномъ правильномъ многоугольникѣ вписать
 кругъ.

Пусть будетъ ABCDE (ф. пр. 13) данный, правиль-
 ный многоугольникъ. Надлежитъ въ многоуголь-
 никъ ABCDE вписать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD , CDE по по-
^{*9, I.} ламъ прямыми CF , DF^* , кои пусть воспрѣянтся
 въ F ; и просяни FB , FA , FE ; и ось F проводи, пер-
 пендикулярныя къ AB , BC , CD , DE , EA , прямыя
^{*12, I} FG , FH , FK , FL , FM^* : то, рассуждая такъ какъ
^{*вз} ¹³ и при пятиугольникѣ*, докажемъ, что каждый
 изъ остальныхъ угловъ ABC , BAE , AED раздѣленъ
 по поламъ прямыми BF , FA , FE ; и что прямыя
 FG , FH , FK , FL , FM всѣ взаимно равны. И по-
 тому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной
 изъ тѣхъ прямыхъ написанный, будетъ касатель-
 ный ко всѣмъ сторонамъ многоугольника, и бу-
 детъ кругъ вписанный. Напиши оный, какъ $GHKLM$.
 Итакъ въ данномъ правильномъ многоугольникѣ впи-
 санъ кругъ. ч. и с. н.

Слѣдствіе. Описюда явствуетъ, что прямыя, про-
 водимыя ось центра круга въ правильномъ мно-
 гоугольникѣ вписаннаго, къ вершинамъ онаго, раздѣ-
 ляють углы его по поламъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

Около даннаго правильнаго многоугольника опи-
 сать кругъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ (фиг. пр. 14) данный
 правильный многоугольникъ. Надлежитъ около
 многоугольника $ABCDE$ описатьъ кругъ.

Раздѣли опять каждый изъ угловъ BCD , CDE по
 поламъ прямыми CF , DF , кои пусть воспрѣянтся
 въ F ; и просяни FB , FA , FE : то по причинѣ, что
 и каждый изъ остальныхъ угловъ CBA , BAE , AED
 раздѣленъ по поламъ прямыми FB , FA , FE , докажемъ

такъ же какъ и при пятиугольникѣ*, чпо прямыя *въ 14.
 FA, FB, FC, FD, FE всѣ взаимно равны. И попому
 кругъ, изъ центра F и разспояніемъ одной изъ
 сихъ прямыхъ написанный, пройдетъ чрезъ вершины
 всѣхъ угловъ многоугольника, и будетъ кругъ опи-
 санный. Напиши оный, какъ ABCDE.

Итакъ около даннаго правильнаго многоугольника
 описанъ кругъ. ч. и с. н.

Слѣдствіе. 1. Отсюда явствуетъ, чпо прямыя,
 проводимыя отъ центра круга описаннаго около
 правильнаго многоугольника, къ вершинамъ угловъ
 его, раздѣляютъ сіи углы по поламъ.

Слѣдствіе 2. И поелику сіе доказано и о кругѣ
 вписанномъ: то явно, чпо круговъ описаннаго около
 правильнаго многоугольника и вписаннаго въ немъ;
 центръ есть поспѣже.

КЪ КНИГѢ ПЯТОЙ.

(36) Когда говорися, чпо величина измѣряетъ
 другую или измѣряется другою; то всегда разумѣтъ
 должно, чпо измѣряетъ или измѣряется *безъ*
остатка.

(37) Определеніе. Когда двѣ большія величины
 равно измѣряются двумя меньшими, каждая каж-
 дою; то есть, одну большую одна меньшая из-
 мѣряетъ столько разъ; сколько другую большую
 другая меньшая: то большія называются равнокрап-
 ными меньшихъ, а меньшія равночаспными боль-
 шихъ. Тоже разумѣтся о шрехъ и болѣ вели-
 чинахъ, измѣряемыхъ равномногими меньшими.

(38) Подъ именемъ зависимости величинъ по ихъ количеству разумѣть, кажется, должно всякое ихъ сравненіе. Напримѣръ, когда изслѣдывается, чѣмъ или во сколько одна другой больше, или меньше; равна ли одна величина другой или неравна, и проч. Клавій, Валлисъ (*) и нѣкоторые другіе Геометры изъясняютъ опредѣленіе отношенія иначе.

(39) Опредѣленіе. Величины, имѣющія отношеніе, называются членами онаго; первая предъидущимъ, а вторая послѣдующимъ.

(40) Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D ; и пусть величинъ A, C будутъ *какія нѣсть* равнократныя E, F , и величинъ B, C *какія нѣсть* равнократныя G, H ; и пусть величины E, G, F, H будутъ таковы, что если E больше G , то и F больше H ; и если E равна G , то и F равна H ; и если E меньше G , то и F меньше H : или иначе: пусть будутъ два неопредѣленные цѣлыя числа m, n ; и пусть величины A, B, C, D будутъ таковы, что если mA (то есть m разъ взятая величина A) больше nB , то и mC больше nD ; и если mA равна nB , то и mC равна nD ; и если меньше, то меньше: въ такомъ случаѣ говорится, что отношеніе A къ B есть тоже съ отношеніемъ C къ D , или что какъ A къ B , такъ C къ D .

(41). Если изъ величинъ A, B, C, D , будетъ mA больше nB , а mC не больше nD : то

(*) J Wallis opera Mathematica. Vol. I; Cap: 25, 29 et 30, et Vol. II, Cap. 19.

говорится, что A къ B имѣеть большее отношеніе, нежели C къ D ; или C къ D имѣеть меньшее отношеніе, нежели A къ B . При чѣмъ замѣнимъ, что m , n могутъ быть любыми, то если опредѣленныя числа. На примѣръ, если $2A$ больше $3B$, а $2C$ не больше $3D$, то A къ B имѣеть большее отношеніе, нежели C къ D , хотя бы при другихъ кратчайшихъ соотношеніяхъ это и не было.

ОБЩЕЕ ПРИМѢЧАНІЕ КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЯМЪ

3, 4, 5, и 7.

Поскольку на сихъ опредѣленіяхъ основывается вся теорія величинъ пропорціональных, то нужно еще войти въ подробнѣйшее оныхъ объясненіе. Пусть будутъ двѣ однородныя величины A , B . Если сѣи величины равны; то онѣ всегда имѣютъ отношеніе; ибо одна изъ нихъ взятая кратно будетъ больше другой. Если же величины A , B не равны; то меньшая взятая кратно или сдѣлается когда либо большею большею, или нѣтъ. Если сдѣлается или; что все равно, если можетъ сдѣлаться; то величины A , B имѣютъ отношеніе: если же нѣтъ, то не имѣютъ. Слѣдственно уголъ, содержимый касательною къ кругу и окружностію его, къ прямолинейному углу не имѣеть отношенія. (Равнымъ образомъ точка къ линіи, линія къ поверхности; нуль къ нулю, нуль и конечная величина къ безконечной не имѣютъ отношенія). Напримѣръ того окружный уголъ (то есть, содержимый дугами равныхъ круговъ обращенными въ одну сторону) къ прямолинейному углу имѣеть отношеніе: ибо первой можетъ быть равенъ или прямому, или тупому;

или оспрому, какъ доказаль Прокль (*). Равнымъ образомъ поперечникъ круга къ его окружности, квадрапъ изъ поперечника къ кругу, имѣющъ отношеніе: ибо три поперечника меньше окружности, а чепыре больше оной, какъ доказаль Архимедъ; квадрапъ изъ полупоперечника меньше круга, а квадрапъ изъ поперечника больше круга, какъ по легко доказать изъ предлож. 6 и 7 кн. IV. Пусъ еще будущъ двѣ величины С, D, имѣющія взаимное отношеніе. Еспли сравнимъ отношеніе А къ В съ отношеніемъ С къ D: то оныя будущъ или пѣже, или нѣпѣ. Когда равнокрапныя, взяпны по опредѣленію 5му, имѣющъ свойство въ немъ изъясненное; то отношенія сущъ пѣже или равныя, а въ прошивномъ случаѣ сущъ неравныя.

Изъ сего слѣдуетъ, что еспли величины А, В, С, D предполагаются пропорціональными или доказываются таковыми: то ни въ какомъ случаѣ не

(*) И дѣйствительно, пусъ будетъ уголь ABC (ф. 19) прямой, и пусъ взяпны будущъ прямыя ВА, ВС равныя, и на нихъ написаны полукружія ADB, BEC, одно внѣ угла, а другое внутри онаго.

Поелику полукружіе ADB равно полукружію BEC, ибо АВ равна ВС; то и уголь DBA равенъ углу EBC. Придай обще смѣщенный уголь ABE; посему и цѣлый уголь DBE равенъ цѣлому ABC; то еспъ окружный уголь DBE равенъ прямому.

Но пусъ уголь ABC будетъ тупой. Сдѣлавъ такое же строеніе, подобно докажемъ, что уголь DBE равенъ тупому углу ABC.

Пусъ, наконецъ, уголь ABC будетъ острый. Сдѣлавъ такое строеніе, подобно же докажемъ, что уголь DBA равенъ углу EBC. Опниии обще уголь EBA; посему и оспальной уголь DBE равенъ оспальному ABC. ч. и д. и.

можетъ быть, когда изъ ихъ крапныхъ первая больше второй, чѣмбы прешья была не больше чепвершой; а когда равна, чѣмбы была не равна; а когда меньше, чѣмбы была не меньше; ибо сіе пропивно опредѣленію 5. Но есѣли А, В, С, D предполагаются или доказываются неимѣющими поже опношенія, то сіе уже означаетъ, чѣмбы сущъ нѣкія крапныя, кои имѣютъ свойство показанное въ опредѣленіи 7мъ; слѣдственно не можно будетъ ни сказаѣь, ни доказаѣь о величинахъ А, В, С, D, чѣмбы по взятіи ихъ равнокрапныхъ, по какоѣу нѣетъ крапсво-ванію, сіи крапныя *всегда* будутъ или купно въ избыпкѣ, или купно въ равенствѣ, или купно въ недоспапкѣ. Изъ сего явствуеѣь, чѣмбы величины удовлетворяющія опредѣленію 5му не могутъ уже удовлетворяѣь 7му, а удовлетворяющія 7му. не могутъ удовлетворяѣь 5му.

Сообразивъ все выше сказанное, нельзя кажеѣь не согласиѣься, чѣмбы напрасно говоряѣь, будѣо ученіе Эвклидово о пропорціяхъ принужденно и не прямо, и будѣо нѣѣь достпапчныхъ при-знаковъ, по коѣорымъ бы можно опличипъ ве-личины, имѣющія поже опношеніе, опъ величинъ, имѣющихъ большее или меньшее; то еѣь вели-чины опредѣленія 5го опъ величинъ опредѣленія 7го; будѣо Эвклидъ величины послѣдняго опъискиваетъ на удачу, и ироч.

(42) Изъ предъидущаго примѣчанія видно, чѣмбы слова: *тоже*, *большее* или *меньшее* (опношеніе), имѣютъ совѣьмъ различный смѣьь опъ того, въ коѣмъ онѣ приемлюѣься обыкновенно, ибо пупъ онѣ не болѣе значаѣь, какъ простое наименованіе

свойствъ , излагаемыхъ въ опредѣленіяхъ 5мъ и 7мъ. Слѣдственно подобіе или пожество отношеній, есть не что иное, какъ когда величины оныхъ имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи 5мъ. И поелику таковыя величины, по есть, имѣющія взаимно тоже отношеніе, называются для краткости пропорціональными, по для краткости же названо пожество отношеній пропорціею.

(43) Опредѣленіе а. Двѣ величины называются обратно пропорціональными другимъ двумъ величинамъ, когда одна изъ первыхъ къ одной изъ вторыхъ имѣетъ тоже отношеніе, что другая изъ вторыхъ къ другой изъ первыхъ.

Опредѣленіе б. Величины называются непрерывно пропорціональными, когда первая ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что вторая къ третьей, а вторая къ третьей тоже, что третья къ четвертой, и такъ далѣе.

Изъ опредѣленій 1ого и 11го явно, что отношеніе удвоенное, упроененное и проч. не означаетъ тоже, что двукратное, прекратное, и проч.

(44) Разумѣется : непрерывно.

(45) Опредѣленіе. Если будетъ одинъ рядъ величинъ, имѣющихъ взаимное отношеніе, а другой рядъ отношеній тѣхъ же съ отношеніями величинъ перваго ряда; по говорится, что первая величина къ послѣдней перваго ряда имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній втораго ряда.

На примѣръ : пусть будетъ рядъ величинъ А, В, С, D, и рядъ отношеній : М къ N ; Р къ Q ; R къ S ; и пусть будетъ отношеніе А къ В тоже съ отношеніемъ М къ N, и отношеніе В къ С тоже съ отношеніемъ Р

къ Q, и еще отношеніе С къ D тоже съ отношеніемъ R къ S; то говорится, что A къ D имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній M къ N; P къ Q, и R къ S. Эвклидъ сіе опредѣленіе выражаетъ иначе. (См. опр. 5, кни. VI).

(46) Называются такожь и сходственными членами.

(47) Пусть будутъ многія величины A, B, C, и имъ равномногія D, E, F, кои по двѣ въ каждомъ ряду суть въ помѣже отношеніи, то отношенія, A къ C, и D къ E называются равномѣстными; (48) пропорція же: какъ A къ B такъ D къ E, и какъ B къ C такъ E къ F, именуется порядочною.

(49) Но естли будутъ при величины A, B, C и другія равномногія D, E, F, имѣющія слѣдующія отношенія: какъ A къ B такъ E къ F; какъ B къ C такъ D къ E: то сія пропорція именуется обратною или смѣшенною.

По мнѣнію нѣкоторыхъ полководцевъ, послѣ опредѣленій можно еще помѣстивъ въ сей книгѣ слѣдующія аксіомы:

а. Какое отношеніе имѣетъ одна величина къ другой своего рода, такое отношеніе имѣетъ всякая данная величина къ нѣкоей величинѣ своего же рода. Иначе: ежели будутъ три величины, изъ коихъ двѣ первыя имѣютъ отношеніе; то всегда есть четвертая величина, къ коей третья имѣетъ тоже отношеніе, что и первая ко второй.

б. Равнокрапныя или равночасныя тогоже или равныхъ, суть и взаимно равны.

в. Равнокрапныя или равночасныя неравныхъ, суть и взаимно неравны.

(50) Слѣдствіе. Ежели первая величина второй, и претѣя четвертой будутъ равнокрапныя; пятая же будетъ равная второй, и шестая равная четвертой: то подобно докажется, что совокупленно, первая съ пятою второй, и претѣя съ шестою четвертой будутъ равнокрапныя. Сіе же докажется еще, ежели первая равна второй, а претѣя четвертой; пятая же второй и шестая четвертой равнокрапны,

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(51) Ежели первая величина ко второй имѣеть тоже отношеніе, что и претѣя къ четвертой: то и равнокрапныя первой и претѣей будутъ ко второй и четвертой имѣть тоже отношеніе: И такъ же величины первая и претѣя будутъ къ равнокрапнымъ второй и четвертой имѣть тоже отношеніе.

Пусть первая величина А (фиг. пр. 4) ко второй В имѣеть тоже отношеніе, что и претѣя С къ четвертой D; и пусть, во первыхъ, будутъ первой и претѣей А, С равнокрапныя Е, F. Говорю, что какъ Е къ В, такъ F къ D.

Возьми величинъ Е, F равнокрапныя К, L; а величинъ В, D равнокрапныя G, H. Здѣсь доказатьъ *пр. 4. можно какъ и въ предложеніи*, что К, L суть равнокрапныя величинъ А, С. И поелику какъ А къ В, такъ С къ D; и суть величинъ А, С равнокрапныя К, L, а величинъ В, D равнокрапныя G, H; посему естли К больше G, то и L больше H; и естли равна, то равна; и естли меньше, *опр. 5. то меньше*. И такъ, поелику величинъ Е, F равнокрапныя суть К, L, а величинъ В, D равно-

кратныя G, H ; и доказано, что естли K больше G , то и L больше H ; и естли равна, то равна; и естли меньше, то меньше: следовательно какъ E къ B , такъ F къ D .*
*опр.5.

Естли будуще величинъ второй и четвертой B, D равнократныя G, H , то подобно докажемъ, что какъ A къ G , такъ C къ H .

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

(52) Р. Симсонъ послѣ сего предложенія помѣщаетъ еще между прочимъ слѣдующія:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ такое отношеніе, что и третья къ четвертой; будетъ же первая больше второй: то и третья больше четвертой; а естли равна, то равна; и естли меньше, то меньше.

Пусть будетъ какъ A къ B , такъ C къ D . Говорю, что ежели A больше B , то и C больше D ; а естли равна, то равна; и естли меньше, то меньше.

Возьми величинъ A, B, C, D равнократныя E, F, G, H .

И впервыхъ пусть будетъ A больше B . Поелику A больше B , и величинъ A, B равнократныя суть E, F ; то и E больше F *. И поелику полагается, *акс.с. какъ A къ B , такъ C къ D ; и величинъ A, C равнократныя суть E, G , а величинъ C, D равнократныя суть F, H ; и доказано, что E больше F : посему и G больше H *. Но G, H *опр.5. суть величинъ C, D равнократныя: посему и C больше D *. Следовательно естли A больше B , *акс.с. то и C больше D . Подобно докажемъ, что естли A

равна В, то и С равна D; и естли меньше, то меньше.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

Ежели будутъ чепыре величины, изъ коихъ первая и шрешья равнокрапны, или равночасны, второй и чепвертой, каждая каждой; то какъ первая ко второй, такъ шрешья къ чепвертой.

Пусть будутъ чепыре величины А, В, С, D, (ф. 20) изъ коихъ первая А и шрешья С пусть, во первыхъ, будутъ равнокрапны второй В и чепвертой D, каждая каждой. Говорю, что какъ А къ В, такъ С къ D.

Величинъ А, С возьми равнокрапныя Е, F; а величинъ В, D равнокрапныя G, H. И пусть, во первыхъ, будетъ Е больше G.

Поелику первая величина А второй В и шрешья С чепвертой D суть равнокрапныя, и взяты первой величины и шрешей равнокрапныя же Е, F: посему *3. Е, F суть равнокрапныя величинъ В, D*. Но и G, H суть равнокрапныя величинъ В, D: Итакъ, ежели Е есть большая крапная величины В, нежели G пойже В; то и F есть большая крапная величины D, нежели H пойже D; а естли меньшая, то меньшая; ежели же равная, то равная. Но поелику Е, по положенію, больше G, то Е есть большая крапная величины В, нежели G пойже В; посему и F есть большая крапная величины D, *акс.с. нежели H пойже D; а посему F больше H*. Слѣдственно естли Е больше G, то и F больше H.

Подобно докажемъ: что есѣли E равна G , то и F равна H ; и есѣли меньше, то меньше. Ипакъ, поелику величинъ A, B, C равнокрапныя суть E, F , а величинъ B, D равнокрапныя G, H ; и доказано, что есѣли E больше G , то и F больше H ; и есѣли равна, то равна; и есѣли меньше, то меньше: слѣдственно какъ A къ B , такъ C къ D .*

*опр. 5.

Но пусть первая A и претья C будутъ равночастныя второй B и четвертой D , каждая каждой. Говорю, что какъ A къ B , такъ C къ D .

Поелику A, C суть равночастныя величинъ B, D ; то B, D суть величинъ A, C равнокрапныя; слѣдственно, по доказанному уже, будетъ, какъ B къ A , такъ D къ C ; и потому предложениемъ, какъ A къ B , такъ C къ D .*

*слѣд. 4.

Ипакъ, ежели будутъ чепыре, и проч. ч. и д. и,

Слѣдствие. Ежели изъ чепырехъ величинъ, первая равна второй, и претья равна четвертой; то такъ же докажется, какъ въ первомъ случаѣ предложенія, что какъ первая ко второй, такъ претья къ четвертой.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

Ежели изъ чепырехъ величинъ пропорціональныхъ, первая есѣ крапная, или частная, второй; то и претья будетъ равнокрапная, или равночастная, четвертой.

Пусть будутъ чепыре величины A, B, C, D (ф. 21) пропорціональныя, то есѣ, какъ A къ B , такъ C

къ D; и пусть, впервыхъ, будетъ A кратная величины B. Говорю, что и C есть равнократная величины D.

Возьми E равную A; и сколько кратна A, то есть E величины B, возьми столько кратную F величины D.

Поелику какъ A къ B, такъ C къ D; и величинъ B, D, второй и четвертой взяты равнократныя *A, E, F; то какъ A къ E, такъ C къ F*. Но A равна *B, E, посему и C равна F*. И поелику сколько E, то есть A есть кратная величины B, столько F есть кратная величины D; и F равна C: посему сколько A есть кратная величины B, столько и C есть кратная величины D.

Но пусть будетъ A частная величины B. Говорю, что и C есть равночастная величины D.

Поелику A есть частная величины B, то B есть кратная величины A. И поелику какъ A къ B, такъ C къ D; то предложениемъ, какъ B къ A, такъ D *свѣд: 4. къ C*. Но B есть кратная величины A; чего ради, по доказанному, и D есть равнократная величины C; а посему A, C суть равночастныя величинъ B, D.

Итакъ, ежели изъ четырехъ, и проч. ч. и д. н.

(53) Слѣдствіе. Подобно докажемъ, что равныя величины къ равнымъ имѣютъ тоже отношеніе, взятыя попеременно.

(54) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что еслии отношенія величинъ суть тѣже или пожественны съ какими нисеть тѣмиже отношеніями; то оныя суть тѣже и взаимно.

(55) Слѣдствіе. 1. Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претя къ четвертой, а претя къ четвертой имѣетъ тоже отношеніе, что пятая къ шестой; то подобно докажемъ, что первая ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Слѣдствіе. 2. Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претя къ четвертой, а претя къ четвертой большее, нежели пятая къ шестой; то первая ко второй и тѣмъ паче будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

(56) Слѣдствіе сіе весьма темно и, какъ кажется, неудовлетворительно доказано. Грегори оное доказываетъ такъ (*):

Ежели будетъ какъ AB къ BE , такъ CD къ DF ; то отдѣленіемъ, какъ AE къ BE , такъ CF къ DF *: *17. а предложіемъ, какъ BE къ AE , такъ DF къ CF *: *слѣд. 4. и совокупленіемъ, какъ AB къ AE , такъ CD къ CF , что и есть обращеніе отношеній пропорціи: какъ AB къ BE , такъ CD къ DF . Отсюда явствуетъ, и проч.

(57) То есть, сдѣлавъ предложеніе отношеній предположенной пропорціи: какъ B къ C , такъ E къ F .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Е.

(58) Отношенія сложенные изъ тѣхъже отношеній, суть взаимно тѣже.

Пусть будетъ какъ A къ B , такъ C къ D ; и какъ E къ F , такъ G къ H ; и еще какъ K къ L ,

(*) Euclidis quæ supersunt omnia. Oxoniæ. 1703.

такъ М къ N. Говорю, А. В. Е. F. K. L
 что отношеніе сложенное C. D. G. H. M. N
 изъ отношенія A къ B, O. P. Q. R.
 и отношенія E къ F, и S. T. V. X.
 еще отношенія K къ L, естъ тоже съ отношеніемъ
 сложеннымъ изъ отношенія C къ D, и отношенія
 G къ H, и еще отношенія M къ N.

Возьми какую ниесъ величину O: и пусть бу-
 акс.а. деть какъ A къ B, такъ O къ P; и какъ E къ F, такъ
 P къ Q; и еще какъ K къ L, такъ Q къ R. Возьми
 еще какую ниесъ величину S; и пусть будетъ какъ
 C къ D, такъ S къ T; и какъ G къ H, такъ T
 къ V; и еще какъ M къ N, такъ V къ X.

Поелику какъ A къ B, такъ C къ D: но какъ
 A къ B, такъ O къ P; а какъ C къ D, такъ S
 11. V. къ T: посему какъ O къ P, такъ S къ T. Попо-
 му же какъ P къ Q, такъ T къ V; и какъ Q къ R,
 такъ V къ X. Ипакъ чепыре сущъ величины O,
 P, Q, R, и другія имъ равномногія S, T, V, X,
 взяшыя по двѣ въ помѣже съ ними отношеніи:
 посему, равномѣспно, какъ O къ R, такъ S къ

22. V. X. Но отношеніе O къ R называется сложеннымъ
 (45). изъ отношеній A къ B, и E къ F, и K къ L;
 а отношеніе S къ X называется сложеннымъ изъ
 отношеній C къ D, и G къ H, и M къ N: чего
 ради отношеніе сложенное изъ отношеній A къ B,
 и E къ F, и K къ L естъ тоже съ отношеніемъ сло-
 женнымъ изъ отношеній C къ D, и G къ H, и M къ N.

Ипакъ отношенія сложенныя, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явспвуетъ, что отношенія
 удвоенныя пѣхъже отношеній, или упроеенныя,
 сущъ и взаимно пѣхъже.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ F.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой; по предложенію, вторая къ первой имѣетъ меньшее отношеніе, нежели четвертая къ претѣей: И ежели меньшее, то большее.

Пусть первая величина А (ф. 22) ко второй В имѣетъ большее отношеніе, нежели претѣя С къ четвертой D. Говорю, что предложенію, В къ А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели D къ С.

Вообрази величину E, которая къ В имѣетъ тоже отношеніе, что и С къ D*. *акс. 2.

Итакъ А къ В имѣетъ большее отношеніе*, нежели *13. Е къ В; посему А больше E*; а посему E меньше А. *10. Поелику же E меньше А, и В есть другая нѣкая величина; а таже величина къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели къ большей*: посему В *8. къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели В къ А. И поелику E къ В имѣетъ тоже отношеніе, что С къ D; по предложенію, В къ E имѣетъ тоже отношеніе, что и D къ C*. Доказано же, что *слѣд. 4. В къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели В къ А; то есть В къ А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели В къ E: чего ради В къ А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели и D къ C*. *13;

Подобно докажемъ, что если первая ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой: по предложенію, вторая къ первой имѣетъ большее отношеніе, нежели четвертая къ претѣей.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и. д. ъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ G.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претъя къ четвертой; то и претъненіемъ имѣеть большее.

Пусть А (ф. 22) къ В имѣеть большее отношеніе, нежели С къ D. Говорю, что и претъненіемъ; А къ С имѣеть большее отношеніе, нежели В къ D.

Вообрази величину Е, которая къ В имѣеть поже *акс.а. отношеніе, что и С къ D*.

Итакъ А къ В имѣеть большее отношеніе, нежели Е къ В*: и потому А больше Е. Поелику же А больше Е, а С есть другая нѣкая величина; то А

8. къ С имѣеть большее отношеніе, нежели Е къ С.

И поелику Е къ В имѣеть поже отношеніе, что и С къ D: то и претъненіемъ, Е къ С имѣеть поже *сдѣд.4. же отношеніе, что и В къ D*. Доказано же, что

А къ С имѣеть большее отношеніе, нежели Е къ С: чего ради А къ С имѣеть большее отношеніе;

13. нежели и В къ D.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ H.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претъя къ четвертой; то и совокупленно, первая со второю ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претъя съ четвертою къ четвертой.

Пусть АВ (ф. 23) къ ВС имѣеть большее отношеніе, нежели DE къ EF. Говорю, что и совокуплено, AC къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели DF къ EF.

Вообрази величину GB , которая къ BC имѣеть поже отношеніе, что и DE къ EF^* .

* акс. 2.

Итакъ AB къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели GB къ BC^* ; а посему AB больше GB . При- *13.

дай обще BC ; посему цѣлая AC больше цѣлой GC .

Но BC есть другая нѣкая величина: посему AC къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели GC къ BC^* . *8.

И поселику, по положенію, GB къ BC имѣеть поже отношеніе, что DE къ EF ; по, совокупленіемъ, GC къ BC имѣеть поже отношеніе, что и DF къ EF^* . *18.

Доказано же, что AC къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели GC къ BC : чего ради AC къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели и DF къ EF^* .

*13.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ К.

Ежели, первая величина со второю ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претъя съ четвертою къ четвертой; по и опредѣленно, первая ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претъя къ четвертой.

Пусть AC (фиг. 23) къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели DF къ EF . Говорю, что и опредѣленно, AB къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели DE къ EF .

Вообрази величину GC , которая къ BC имѣеть поже отношеніе, что и DF къ EF .

Итакъ AC къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели GC къ BC : посему AC больше GC^* . Опними обще *10. BC ; посему оспальная AB больше оспальной GB . Но BC есть другая нѣкая величина: посему AB къ BC имѣеть

- *8. большее отношеніе, нежели GB къ BC^* . И поелику, по положенію, GC къ BC имѣеть тоже отношеніе, что и DE къ EF ; по, опредѣленіемъ, GB къ BC имѣеть то же отношеніе, что и DE къ EF^* . Доказано же, что AB къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели GB къ BC : чего ради AB къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели и DE къ EF^* .
- Итакъ, ежели совокупленіемъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ L.

Ежели первая величина со второю ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претъя съ четвертою къ четвертой; то, обращеніемъ, первая со второю къ первой имѣеть меньшее отношеніе, нежели претъя съ четвертою къ претъей.

Пусть AB (фиг. 24) къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели DE къ EF . Говорю, что, обращеніемъ, AB къ AC имѣеть меньшее отношеніе, нежели DE къ DF .

Поелику AB къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели DE къ EF : то, опредѣленіемъ, AC къ CB имѣеть большее отношеніе, нежели DF къ FE^* . Посему предложеніемъ, BC къ CA имѣеть меньшее отношеніе.

Г. нежели EF къ FD^ : чего ради совокупленіемъ, AB къ AC имѣеть меньшее отношеніе, нежели DE къ DF^* .

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ M.

Ежели будеть сколько имѣеть величинъ, и другихъ имъ равномногихъ; взявъ по двѣ по порядку, въ

большемъ отношеніи: то и равномѣстно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будетъ сколько нисетъ величинъ A, B, C (ф. 25), и другихъ имъ равномногихъ D, E, F , взятыхъ по двѣ въ большемъ отношеніи; а именно, A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E , а B къ C большее нежели E къ F . Говорю, что и равномѣстно; A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ F .

Вообрази величину G , которая къ C имѣетъ тоже отношеніе, что E къ F . Ипакъ B къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели G къ C : посему ^{*13.} B больше G . И поелику B больше G , а A ^{*10.} есть другая нѣкая величина: то A къ B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели A къ G , то есть A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели A къ B . Полагается же, что A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E : чего ради тѣмъ паче A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E .

^{*с1 2,(55):}

Вообрази еще величину H , которая къ G имѣетъ тоже отношеніе, что и D къ E . Ипакъ A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ G ; посему A больше H . Но C есть другая нѣкая величина: посему A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ C . И поелику D къ E имѣетъ тоже отношеніе, что и H къ G , а E къ F тоже что G къ C : то равномѣстно, D къ F имѣетъ тоже отношеніе, что H къ C . Доказано же, что A ^{*22.} къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ C : чего ради A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели и D къ F .

^{*13.}

Ипакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Ежели A къ B имѣеть большее отношеніе, нежели D къ E ; и будетъ G меньше B : то доказано, что шѣмъ паче A къ G имѣеть большее отношеніе, нежели D къ E . Изъ сего явствуетъ: что изъ пяти величинъ, естли первая ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, и будетъ пятая меньше второй; то шѣмъ паче первая къ пятой имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ N.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взявшы по двѣ обратно, въ большемъ отношеніи: то и равномѣрно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будутъ три величины A, B, C (ф. 25), и другія равномногія имъ D, E, F , съ коими шѣ взявшы по двѣ обратно супъ въ большемъ отношеніи; а именно: A къ B имѣеть большее отношеніе, нежели E къ F , а B къ C большее нежели D къ E . Говорю, что и равномѣрно, A къ C имѣеть большее отношеніе, нежели D къ F .

Вообрази величину G , копорая къ C имѣеть по-
*акс.а. же отношеніе, что и D къ E *. Ипакъ B къ C

*13. имѣеть большее отношеніе, нежели G къ C *: по-

*10. сему B больше G *; а посему G меньше B . Но A естли другая нѣкая величина: посему A къ G имѣеть

*8. большее отношеніе, нежели A къ B *. Но A къ B имѣеть большее отношеніе, нежели E къ F : чего ради шѣмъ паче A къ G имѣеть большее отноше-

сл.2,(55). ніе, нежели E къ F .

Вообрази еще величину Н, копорая къ С имѣеть
поже опношеніе, что и Е къ Г. Ипакъ А къ Г
имѣеть большее опношеніе, нежели Н къ С*: по-^{*13.}
сему А больше Н*. Но С естъ другая нѣкая ве-^{*10.}
личина: посему А къ С имѣеть большее опноше-
ніе, нежели Н къ С*. Поелику же какъ Д къ Е,^{*8.}
такъ Г къ С; а какъ Е къ Г, такъ Н къ С: то
равномѣрно, какъ Д къ Г, такъ Н къ С*. Доказано^{*23.}
же, что А къ С имѣеть большее опношеніе, не-
жели Н къ С: чего ради А къ С имѣеть боль-
шее опношеніе, нежели и Д къ Г*.^{*13.}

Ипакъ, ежели будущъ при, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ О.

Ежели цѣлая величина къ цѣлой имѣеть большее
опношеніе, нежели опнятая опъ первой къ опня-
той опъ другой; то и оспальная къ оспальной
будетъ имѣть большее, нежели цѣлая къ цѣлой.

Пусть цѣлая АВ (ф. пр. 19) къ цѣлой СD имѣеть
большее опношеніе, нежели опнятая АЕ къ опня-
той СF. Говорю, что и оспальная ЕВ къ оспальной
FD будетъ имѣть большее опношеніе, нежели цѣлая
АВ къ цѣлой СD.

Поелику АВ къ СD имѣеть большее опношеніе,
нежели АЕ къ СF: то и премѣненіемъ, ВА къ АЕ
имѣеть большее опношеніе, нежели ДС къ СF*.^{*6.}
Но есѣли величины имѣють большее опношеніе,
то обращеніемъ будущъ имѣть меньшее*: посему АВ^{*14.}
къ ЕВ имѣеть меньшее опношеніе, нежели СD
къ FD; и премѣненіемъ, АВ къ СD имѣеть меньшее
опношеніе, нежели ЕВ къ FD; то естъ, оспальная

ЕВ къ остальной FD имѣеть большее отношеніе, нежели цѣлая АВ къ цѣлой CD.

Итакъ, ежели цѣлая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Р.

Ежели будутъ сколько нисеть величинъ, и другихъ имъ равномногихъ; и перваго ряда величины къ величинамъ втораго будутъ имѣть непрерывно большее отношеніе: то всѣ величины перваго ряда, ко всѣмъ величинамъ втораго ряда, будутъ имѣть меньшее отношеніе, нежели первая къ первой, а большее, нежели послѣдняя къ послѣдней: такожь большее, нежели всѣ перваго ряда кромѣ первой, ко всѣмъ втораго ряда кромѣ первой же.

Пусть будутъ величины А, В, С (ф. пр. 20), и другія имъ равномногія D, E, F; и пусть А къ D имѣеть большее отношеніе, нежели В къ E, а В къ E большее нежели С къ F. Говорю, во первыхъ, что всѣ А, В, С ко всѣмъ D, E, F имѣють большее отношеніе, нежели В, С къ E, F.

Поелику А къ D имѣеть большее отношеніе, нежели В къ E: то и премѣненіемъ, А къ В больше *G. шее, нежели D къ E*, и совокупленіемъ, А, В къ В *H. большее нежели D, E къ E*: и еще премѣненіемъ, А, В къ D, E большее нежели В къ E. Итакъ, поелику цѣлая А, В къ цѣлой D, E имѣеть большее отношеніе, нежели опняшая В къ опняшой E: то и остальная А къ остальной D имѣеть большее отношеніе, нежели цѣлая А, В къ цѣлой *O. D, E*. Подобно докажется, что В къ E имѣеть большее отношеніе, нежели В, С къ E, F. Но, по

положенію, A къ D имѣетъ большее отноше-
ніе, нежели B къ E : посему и шѣмъ паче
 A къ D имѣетъ большее отноше-
ніе, нежели B , C къ E , F^* : а посему прѣмѣненіемъ $A^*_{сл.2,(55)}$
къ B , C большее нежели D къ E , F ; и совокупле-
ніемъ A , B , C къ B , C большее нежели D , E , F
къ E , F : и еще прѣмѣненіемъ A , B , C къ D , E , F
большее нежели B , C къ E , F .

Говорю же, что A , B , C къ D , E , F имѣетъ
меньшее отношеііе, нежели A къ D .

Поелику, по доказанному, цѣлая A , B , C къ
цѣлой D , E , F имѣетъ большее отношеііе, нежели
опнятая B , C къ опнятой E , F : то и оспаль-
ная A къ оспальной D имѣетъ большее отношеііе,
нежели цѣлая A , B , C къ цѣлой D , E , F^* , то есть, * O .
 A , B , C къ D , E , F имѣетъ меньшее отношеііе,
нежели A къ D .

Говорю еще, что A , B , C къ D , E , F имѣетъ
большее отношеііе, нежели C къ F .

Поелику B къ E имѣетъ большее отношеііе,
нежели C къ F : то прѣмѣненіемъ, B къ C
имѣетъ большее, нежели E къ F ; и совокуп-
леніемъ B , C къ C большее, нежели E , F
къ F : и еще прѣмѣненіемъ, B , C къ E , F большее,
нежели C къ F . Но, по доказанному, A , B , C
къ D , E , F имѣетъ большее отношеііе, нежели B , C
къ E , F : чего ради шѣмъ паче A , B , C къ D , E , F
имѣетъ большее отношеііе, нежели C къ F .

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. к.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Q.

Опнѣшенія сложенныя изъ большихъ опнѣшеній,
суть больше сложенныхъ изъ меньшихъ.

Пусть имѣешь А къ В А: В. Е: F. K: L
большее опнѣшеніе, нежели С С: D. G: H. M: N
къ D, а Е къ F большее Q. P. Q. R.
нежели G къ H, и K къ L S. T. V. X.
большее нежели M къ N. Говорю, что оп-
нѣшеніе сложенное изъ опнѣшенія А къ В,
и опнѣшенія Е къ F, и еще опнѣшенія K къ L,
есть больше опнѣшенія сложеннаго изъ опнѣше-
нія С къ D, и опнѣшенія G къ H, и еще опнѣше-
нія M къ N.

Возьми какую нисеть величину O: и пусть бу-
акс.л. дешь какъ А къ В, такъ O къ P; и какъ Е къ
F, такъ P къ Q; и еще какъ K къ L, такъ Q
къ R. Возьми еще какую нисеть величину S:
акс.а. и пусть будешь какъ С къ D, такъ S къ T;
и какъ G къ H, такъ T къ V; и еще какъ M къ
N, такъ V къ X.

Поелику А къ В имѣетъ большее опнѣшеніе,
нежели С къ D; но какъ А къ В, такъ O къ P,
а какъ С къ D, такъ S къ T: посему O къ P
и изъ. имѣетъ большее опнѣшеніе, S къ T. Потому же и P
къ Q имѣетъ большее опнѣшеніе, нежели T къ V;
и Q къ R имѣетъ большее опнѣшеніе, нежели V
къ X. Ипакъ четыре суть величины O, P, Q, R,
и другія имъ равноугоія S, T, V, X, взятыя по
двѣ въ большемъ опнѣшеніи: посему и равноуспно
м. будущъ въ большемъ; а посему O къ R имѣетъ большее
опнѣшеніе, нежели S къ X. Но O къ R есть

въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній А къ В, и Е къ F, и К къ L*; а S къ X есть въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній С къ D, и G къ H, и M къ N: посему и отношеніе, сложенное изъ отношеній А къ В, и Е къ F, и К къ L, есть больше отношенія сложенного изъ отношеній С къ D, и G къ H, и M къ N.

Итакъ отношенія сложенныя, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отношенія удвоенныя, или упроенныя, большихъ, суть большія.

КЪ КНИГѢ ШЕСТОЙ.

(59) Подобныя прямолинейныя фигуры называются подобно положенными, или подобно написанными изъ тѣхъ ихъ сторонъ, кои суть сходственные.

(60) Или такъ: обратныя фигуры суть тѣ, кои имѣютъ стороны около своихъ угловъ обратно пропорціональныя.

(61) Или: высота треугольника есть прямая, опъ вершины перпендикулярно къ основанію проведенная.

(62) Сіе опредѣленіе изъясняютъ различнымъ образомъ. Здѣсь довольно замѣтитъ, что Эвклидъ и всѣ древніе Геометры употребляютъ оное въ такомъ смыслѣ какъ предложено выше*.

Къ Эвклидовымъ опредѣленіямъ можно еще присовокупить слѣдующія:

*(45).

а. Прямые линии подобно разсѣченныя суть тѣ, коихъ отрѣзки суть пропорціональныя.

б. Параллелограммъ, построенный на прямой линіи помѣщенный называется имѣющимъ недоспапокъ, когда не занимаетъ цѣлой линіи, а имѣющимъ избытокъ, когда занимаетъ прямую большую той, по которой помѣщается: и еслили на цѣлой дополнить параллелограммъ, то въ первомъ случаѣ прибавится параллелограммъ, называемый избытокъ, а во второмъ отнимется, называемый недоспапокъ.

(63) Слѣдствіе. Треугольники и параллелограммы равныхъ высотъ, суть взаимно какъ ихъ основанія.

(64) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, какъ данную прямую раздѣлять на сколько ниестъ равныхъ частей.

(65) Слѣдствіе. Равныхъ параллелограммовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ. И которыхъ параллелограммовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные.

(66) Тоже сказать можно и о треугольникахъ.

(67) Что сказано о прямоугольникахъ, можно сказать и о параллелограммахъ, имѣющихъ вмѣсто угловъ прямыхъ равные.

(68) И здѣсь вмѣсто прямоугольныхъ параллелограммовъ могутъ быть всякіе равноугольные.

(69) Новые Геометры вмѣсто удвоеннаго отношенія двухъ сходственныхъ сторонъ, подобныхъ фигуръ, употребляютъ отношеніе квадратовъ изъ оныхъ линій: но сіе употребленіе, какъ замѣчаютъ Гурьевъ, произошло болѣе отъ приложе-

нія Числительной науки къ Геометріи, нежели опъ сущности предмѣта; ибо квадраты сами суть подобныя ~~и находящіяся~~ ^{и находящіяся} какъ и прочія въ удвоенномъ отношеніи споронъ своихъ; и поному принаравливать квадраты къ другимъ фигурамъ спольже прилично, какъ и сіи другія фигуры къ квадратамъ.

(70) Предложеніе сіе имѣетъ свою силу, когда будетъ вмѣсто четырехъ при прямыа.

(71) Слѣдствіе. 1. Треугольники, въ коихъ одинъ уголъ равенъ одному углу, суть взаимно въ сложенномъ отношеніи изъ отношеній споронъ, кои около сихъ равныхъ угловъ.

Слѣдствіе 2. Треугольники и параллелограммы, имѣющіе по одному углу равному, суть взаимно какъ прямоугольники содержимые въ спорахъ, кои около равныхъ угловъ.

Слѣдствіе 3. Треугольники и параллелограммы суть взаимно въ отношеніи сложеніомъ, изъ отношенія основанія къ основанію и отношенія высоты къ высотѣ.

(72) Слѣдствіе. Отсюда явствуется, что параллелограммы, имѣющіе по одному углу равному и спороны около равныхъ угловъ пропорціональныя, суть подобны.

(73) Вмѣсто: Но данная прямолинейная фигура, коей... недостатокъ, можно сказать: но данная прямолинейная фигура не должна быть больше параллелограмма, поставленнаго по половинѣ той

прямой, и котораго недоспапокъ подобенъ тому же данному параллелограмму.

(74) Оба предыдущія предложенія, по есть 29е и 30е употребляющіяся весьма часно древними Геометрами.

(75) Слѣдствіе. Ежели къ прямой, которая разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, приложенъ будетъ впрямъ большій отрѣзокъ; то цѣлая прямая, въ точкѣ гдѣ приложенъ отрѣзокъ, будетъ опять разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Ибо пусть АВ (ф. 26) будетъ разсѣчена въ С въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ что АС будетъ большій отрѣзокъ; и пусть впрямъ съ АВ приложена будетъ ВD равная АС. И поелику какъ АВ къ АС, такъ АС къ СВ; по предложеніемъ, какъ АС къ АВ, такъ СВ къ АС; и совокупленіемъ, какъ АС съ АВ къ АВ такъ АС съ СВ къ АС; но АС равна ВD: посему какъ АВ съ ВD къ АВ такъ АС съ СВ къ ВD; то есть, какъ АД къ АВ, такъ АВ къ ВD.

(76) Часъ сего предложенія, заключенная въ знакахъ « », помѣщена извѣстнымъ древнимъ издапелемъ и полковапелемъ Эвклида Теономъ, коему Р. Симсонъ и другіе новые издапели обыкновенно приписываютъ погрѣшности (большею частію мнимыя), находямыя ими въ Началахъ.

Слѣдствіе. 1. Какъ уголъ при центрѣ круга есть къ чепыремъ угламъ прямымъ, такъ дуга, на коей онъ спойсь, къ окружности того круга.

Ибо, ежели провесъ въ кругѣ два поперечника, одинъ къ другому подъ прямыми углами, то сіи углы будутъ споясь на равныхъ дугахъ, кои суть

четверти окружности; посему какъ уголъ при центръ къ четыремъ прямымъ, такъ дуга, на коей онъ стоитъ, къ четверти окружности. Но какъ прямой уголъ къ четыремъ прямымъ, такъ четверть къ цѣлой окружности: чего ради равномѣстно, какъ уголъ при центръ, и проч.

Точно также докажется, что какъ вырѣзокъ къ четверти круга, такъ основаніе вырѣзка къ четверти окружности.

Слѣдствіе 2. Подобныя дуги круговъ суть взаимно какъ окружности.

Ибо каждая изъ нихъ есть къ своей окружности, какъ углы при центръ на нихъ стоящіе, кои взаимно равны, къ четыремъ угламъ прямымъ. Ипакъ, поелику послѣднія отношенія суть тѣже, то и отношенія подобныхъ дугъ къ своимъ окружностямъ суть тѣже. Слѣдственно подобныя дуги, и проч.

КЪ КНИГѢ ОДИННАДЦАТОЙ.

(77) Прямая же оная называется наклоняющеюся, или наклонною.

(78) Новые Геометры въ семъ опредѣленіи пропускаютъ слово: *острой*.

(79) Такъ же опредѣляются и подобныя наклоненія прямыхъ линій къ плоскостямъ.

Опредѣленіе. Прямая есть параллельная къ плоскости, когда, будучи неопредѣленно продолжена на обѣ стороны, нигдѣ съ плоскостію не встрѣчается.

(80) Сіе опредѣленіе объяснено въ слѣдующемъ примѣчаніи.

(81) Сіе опредѣленіе есть болѣе аксіома, или какъ многимъ полковашелямъ кажется, есть теорема, то есть предложеніе; которое должно быть доказано. Р. Симсонъ въ примѣчаніи своемъ на оное, говоритъ: « поелику смыслъ слова, равно, » извѣстенъ и установленъ прежде сего опредѣленія; то предложеніе, которое въ немъ заключается, есть теорема, коея справедливость или несправедливость должна быть доказана, а не принята; и потому Теонъ или иной какой издатель, обративъ теорему, которая должна быть доказана; въ сіе опредѣленіе, поступилъ неумножительно. Ибо, что фигуры подобны, доказательство сему должно быть выведено изъ опредѣленія подобнымъ фигурамъ; а что онѣ равны, то доказательство сему должно быть выведено изъ аксіомы: *совпадающія взаимно, суть и взаимно равны*; или изъ предложеній В или того же или 14го пятой книги. »

Р. Симсонъ потомъ утверждаетъ; что сіе опредѣленіе даже не можетъ быть и теоремою, ибо оно въ нѣкоторыхъ случаяхъ, говоритъ онъ, ложно; что и доказываетъ слѣдующимъ примѣромъ: Вообразимъ, что къ какому нибудь многограннику приспавлена пирамида, имѣющая основаніемъ плоскость многогранника; вообразимъ еще, что, вмѣсто того, чтобы приложить пирамиду; она будетъ оппозита, сдѣлавъ въ многогранникѣ вогнутость пирамидѣ равную: то получимъ два тѣла, коихъ плоскости равны, каждая каждой; но совѣтъ тѣмъ сіи два тѣла будутъ не равны. Основываясь на семъ Р. Симсонъ уничтожаетъ

вовсе опредѣленіе шѣламъ равнымъ, а опредѣленіе подобнымъ шѣламъ замѣняетъ другимъ.

Лежандръ, разбирая Эвклидовы ге и 10е опредѣленія и замѣчанія Р. Симсона, говоритъ: « фигуры, « коихъ равенство или подобіе доказываетъ Эвклидъ, « основываясь на 9мъ и 10мъ опредѣленіяхъ, суть « таковы, что углы ихъ полные содержимы не- « больше какъ тремя плоскостями: но если два « угла полные составлены изъ трехъ плоскихъ, « кои равны каждый каждому; то довольно ясно « доказано во многихъ мѣстахъ Эвклида, что сіи « углы равны. Съ другой стороны, если два « многогранника имѣютъ плоскости равныя или « подобныя, каждую каждой; то сходственные углы « полные будутъ составлены изъ равномногихъ « угловъ плоскихъ, кои равны каждый каждому. « Если же сходственные плоскости равны и сход- « ственные полные углы равны; то нѣтъ со- « мнѣнія, что шѣла равны, ибо оныя могутъ чрезъ « наложеніе совмѣститься, или по крайней мѣрѣ « будутъ взаимно симметричны (*). Изъ сего « явствуетъ, что опредѣленія ге и 10е справедливы « и могутъ быть допущены, по крайней мѣрѣ, когда « углы полные будутъ приграничные, копорый « случай одинъ токмо и встрѣчается у Эвклида. « Слѣдственно упрекъ въ неосновательности,

(*) О симметріи и неудобствахъ оной смот. въ Опытѣ о усов. Елем. Геом. Гурьева, стр. 82. Здѣсь нельзя не замѣтить, что симметрія предполагаетъ опредѣленіе 10е: слѣдственно Лежандръ, доказывая чрезъ симметрію предложенія изъ сего опредѣленія, непосредственно слѣдующія, доказываетъ *idem per idem*.

« дѣлаемый Евклиду или его полковащелямъ , пере-
 « спаеиъ бытъ важнымъ , и опноиися токмо къ
 « нѣкоторымъ ограниченіямъ или объясненіямъ , имъ
 « пропущеннымъ ». Послѣ сего Лежандръ , при
 изслѣдованіи случая , когда въ тѣлахъ полсные
 углы суиъ многогранные , привеиъ вышепомѣщенное
 нами возраженіе или примѣръ Р. Симсона о тѣлахъ
 съ приложенною и опианною пирамидами , говоритъ ,
 что « одно изъ сихъ тѣлъ имѣетъ входящій уголъ ;
 « а болѣе нежели вѣроятно , что Евклидъ дѣлаетъ
 « исключеніе тѣламъ неправильнымъ имѣющимъ
 « вогнуиоси или углы входящіе , и что онъ ограни-
 « чилъ себя многогранниками выпуклыми. По при-
 « няиіи же сего исключения , безъ котораго впро-
 « чемъ другія предложенія были бы несправедливы ,
 « приводимый Р. Симсономъ примѣръ проиивъ іого
 « опредѣленія или теоремы Евклидовой ничего не
 « доказыиаеиъ ; напроиивъ того послѣ многократ-
 « ныхъ о семъ размысленій я думаю , что сія
 « теорема совершенно справедлива , но повидимому
 « не легко оную доказать ».

И дѣйствительно равенство шакowychъ тѣлъ за-
 виситъ наипаче отъ того , что сопровождающія
 ихъ одинакія обшояиельства (равенство и подо-
 біе плоскостей) дѣлаютъ каждую съ своей спо-
 роны фигуру непремѣнною ; и что нѣтъ никакой
 причины , чтобы одна фигура была неравна другой.
 Словомъ , опредѣленіе опноиительно равенства тѣлъ
 естъ шакое предложеніе , котораго справедливосиъ
 почти очевидна , и которое , по сей можетъ бытъ
 самой причинъ , легче пониматъ , нежели доказатъ.
 Въ заключеніе скажемъ съ Лежандромъ : соиіе се

théorème est intéressant par lui-même, il serait à désirer qu'on en trouvât une démonstration générale.

Что касается до подобія многоугольниковъ значущагося въ опредѣленіи ϕ мъ и часпію Γ омъ, то Р Симсонъ замѣняетъ оныя слѣдующимъ: «Подобныя «прямолинейныя» шѣла суть шѣ, кои содержимы «равномногими подобными плоскостями и имѣють всѣ «полстые углы равные каждый каждому.» Но Лежандръ справедливо замѣчаетъ, что сіе опредѣленіе не можетъ быть принято, ибо заключаешь въ себѣ лишнія условія: отбросивъ же условіе, заключающее равенство полстыхъ угловъ, сіе опредѣленіе превратится въ Евклидово, которое находишь онъ недоспапочнымъ, пошому что предполагается въ немъ равенство шѣлъ. На семъ основываясь Лежандръ опровергаетъ опредѣленіе Симсонова и замѣняетъ оное слѣдующими двумя: «1. Двѣ прехспоронныя пирамиды суть подобныя, когда имѣють «двѣ стороны подобныя, - подобнорасположенныя «и равно между собою наклоненныя. 2. Два много- «гранника суть подобныя, когда имѣють основа- «нія подобныя, и сходспвенныхъ угловъ вершины, «которыя суть внѣ сихъ основаній; опредѣлены «вершинами подобныхъ прехспоронныхъ пирамидъ.» Но сіе опредѣленіе; какъ замѣчаетъ Гурьевъ, сверхъ неудобства, что раздѣлено на двѣ часпіи, имѣетъ еще то, что весьма принужденно; и что вшорая часпъ его сомнительна; при чемъ въ самомъ употребленіи пребуетъ многихъ теоремъ; какъ по видѣшъ можно изъ предложенныхъ на сей конецъ Лежандромъ. Впрочемъ; поелику подобіе многогранниковъ есть шокмо прашее наименованіе свойспвъ

подъ симъ именемъ означенныхъ; то и нѣтъ никакой причины опровергать Эвклидова опредѣленія, шѣмъ болѣе что подобіе шѣлъ съ подобіемъ плоскихъ фигуръ имѣетъ весьма близкое сходство. И дѣйствительно, если дана плоская прямолинейная фигура, и еще прямая линия; то изъ сей прямой извѣстнымъ спроеіемъ опредѣляясь всѣ стороны и всѣ углы многоугольника, то есть всѣ величины предполагаемыя въ опредѣленіи подобныхъ плоскихъ фигуръ. Равнымъ образомъ, если данъ многогранникъ, и еще прямая сходственная съ его стороною; то опредѣляясь всѣ плоскости подобныхъ плоскостямъ даннаго многогранника, то есть всѣ величины предполагаемыя въ опредѣленіи подобныхъ многогранниковъ.

(82) Опредѣленіе. Подобныя прямолинейныя шѣла называются подобно положенными, или подобно написанными изъ шѣхъ ихъ споронъ, кои суть сходственные спороны подобныхъ ихъ плоскостей.

(83) Слѣдствіе. Изъ сего явствуетъ, что прямая, исходящая отъ центра шара до поверхности онаго, суть взаимно равныя; и также всѣ поперечники шара равны взаимно.

(84) Опредѣленіе. Высота шѣла, находящагося между плоскостію и прямою къ ней параллельною, или между двумя плоскостями параллельными, есть прямая, перпендикулярно къ основанію проведенная, отъ какой ниспѣ почки взятой на прямой или на плоскости противоположащей основанію. Высота же пирамиды и конуса есть прямая, отъ вершины перпендикулярно къ основанію проведенная.

(85) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что прямая линія пересѣкаетъ плоскость въ одной точкѣ.

(86) По мнѣнію нѣкоторыхъ школастиковъ сіе предложеніе непосредственно слѣдуетъ изъ опр. 35 и 7 кн. I.

(87) И отъ тойже точки внѣ плоскости не могутъ быть проведены двѣ прямыя перпендикулярныя къ оной. Ибо, еслии возможно, пусть проведены будутъ; то онѣ будутъ параллельны*, что *6. нелѣпо.

(88) Въ семъ предложеніи должно, или по крайней мѣрѣ можно, пропустить слѣдующее: пошому же BC есть и къ плоскости . . . прямыхъ AB, BC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(89) Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой.

Пусть будутъ параллельныя плоскости AB, CD (ф. 27); и пусть прямая EF будетъ перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, AB . Говорю, что EF перпендикулярна и къ плоскости CD .

Пусть чрезъ EF проведены будутъ двѣ плоскости; и одна изъ нихъ пусть пересѣкаетъ параллельныя плоскости въ прямыхъ EA, FC , а другая въ прямыхъ EB, FD .

Итакъ EA параллельна къ FC , а EB къ FD *. *16. И поелику EF перпендикулярна къ плоскости AB ; то EF со всѣми прямыми линіями, съ нею

- вспрѣчающимися и лежащими на сей плоскости ;
- *опр.3. дѣлаетъ углы прямые*. Вспрѣчается же съ EF каждая изъ прямыхъ EA , EB , лежащихъ на той плоскости: посему каждый изъ угловъ FEA , FEB есть прямой. И поелику FC параллельна къ AE , и на нихъ падаетъ EF : то два угла FEA , EFC равны
- *29. I. двумъ прямымъ*; но уголъ FEA прямой, посему и уголъ EFC прямой. Потому же и уголъ EFD прямой. Чего ради EF къ каждой изъ прямыхъ FC , FD есть подъ прямыми углами. Но ежели прямая, къ двумъ прямымъ встрѣчающимся взаимно, будетъ поставлена подъ прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подъ прямыми
- *4. углами и къ плоскости тѣхъ прямыхъ*: посему EF подъ прямыми углами къ плоскости прямыхъ FC , FD . Но сія плоскость есть плоскость CD : посему EF перпендикулярна къ плоскости CD .

Итакъ прямая перпендикулярная, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е В.

(90) Плоскость, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой.

Пусть будутъ параллельныя плоскости AB , CD (ф. 28); и пусть плоскость EF будетъ перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, AB . Говорю, что EF перпендикулярна и къ плоскости CD .

Пусть взаимныя сѣченія плоскостей AB , CD съ плоскостію EF будутъ прямая GF , EH ; возьми на GF какую внесъ точку G ; и опустивъ точку G

проведи на плоскости EF ; подь прямыми углами къ GF , прямую GE^* . *11,1.

Поселику плоскость EF перпендикулярна къ плоскости AB , и прямая GE проведена на плоскости EF , подь прямыми углами къ GF взаимному съчению сихъ плоскостей; то прямая GE перпендикулярна къ плоскости AB^* . Но плоскость AB *опр.4. параллельна къ плоскости CD ; а прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой*: посему GE^*A . перпендикулярна и къ плоскости CD . Но ежели прямая будеть подь прямыми углами къ какой ниестъ плоскости; то всякія плоскости, проходящія чрезъ сію прямую, будуть къ тойже плоскости подь прямыми углами*: слѣдственно и плоскость EF перпендикулярна къ плоскости CD . *18.

Ипакъ плоскость, и проч. ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(91) Параллелепипеды, содержимые равноугольными плоскостями, суть взаимно въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній споронъ, кои около ихъ подстрыхъ угловъ.

Пусть будуть параллелепипеды AB, CD (ф. 29.), содержимые равноугольными плоскостями; а именно: пусть будеть равноугольна плоскость AG плоскости CN , плоскость $АН$ плоскости CR , и плоскость $НG$ плоскости RN : посему и прочія при плоскости параллелепипеда AB равноугольны прочимъ премоу параллелепипеда CD . Говорю, что AB къ CD имѣеть отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ CF , и EG къ FN , и EH къ FR .

Продолжи AE , GE , HE впрямъ; и положи EK равную CF , и EL равную F , и еще EM равную FR ; и дополни параллелограммъ LK , который бу-
 ъ33. деть, какъ уже доказано было, равенъ параллелограмму CN . Изъ основанія LK дополни параллелепипеды LQ и KP ; и возьми какую ниесць пря-
 *акс.а, V. мую S ; и сдѣлай какъ AE къ EK , такъ S къ T , и какъ GE къ EL , такъ T къ V , и какъ HE къ EM , такъ V къ X .

Поелику параллелепипеды AB , LQ имѣють пу-
 же высоту; по какъ AB къ LQ , такъ основаніе
 *32. AG къ основанію KL *. Но AG къ KL имѣеть
 отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ EK ,
 *23, VI. и GE къ EL *, которое есть отношеніе прямыхъ S
 *(45). къ V *: посему какъ S къ V , такъ параллелепипедъ AB
 къ параллелепипеду LQ . И поелику параллелепипедъ QR
 пересѣченъ плоскостію LK , параллельною къ про-
 пивулежащимъ плоскостямъ: по какъ основаніе
 HK къ основанію KM , такъ параллелепипедъ QL
 *25. къ параллелепипеду KP *. Но какъ основаніе HK
 *I. I. къ основанію KM , такъ HE къ EM *, и такъ V
 къ X , по строенію: посему какъ V къ X , такъ
 *II, V. QL къ KP *. И такъ, поелику доказано, что какъ
 S къ V , такъ параллелепипедъ AB къ LQ ; и какъ
 V къ X , такъ параллелепипедъ QL къ KP : по
 равномѣрно, какъ S къ X , такъ параллелепипедъ
 *22, V. AB къ параллелепипеду KP *. Но KP равенъ CD :
 *7 и II, V. посему какъ S къ X , такъ AB къ CD *. И по-
 елику есть одинъ рядъ величинъ S , T , V , X
 имѣющихъ взаимное отношеніе; а другой рядъ
 отношеній: AE къ EK ; GE къ EL ; HE къ EM ,
 которыя сущь пѣже съ отношеніями величинъ

перваго ряда; по S къ X имѣеть отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ EK , и GE къ EL , и HE къ EM *: посему параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣеть отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ EK , и GE къ EL , и HE къ EM . Но отношеніе сложенное изъ сихъ естъ поже съ отношеніемъ сложеннымъ изъ отношеній AE къ CF , и GE къ NF , и EH къ FR *; ибо EK равна CF , а EL равна FN , *⁷ и E, V . и EM равна FR : чего ради параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣеть отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ CF , и GE къ NF , и EH къ FR *. *^{11, V}.

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГѢ ДВѢНАДЦАТОЙ.

(92) Слѣдствіе. Очерпанія подобныхъ многоугольниковъ въ кругахъ, суть взаимно какъ поперечники круговъ.

Ибо премѣненіемъ, какъ AB къ FG , такъ BC къ CH , и такъ CD къ HK , и такъ DE къ KL , и еще такъ EA къ LF . Но какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*: посему какъ AB къ FG , такъ *^{12, V}. AB, BC, CD, DE, EA къ FG, CH, HK, KL, LF ; по естъ, такъ очерпаніе многоугольника $ABCDE$ къ очерпанію многоугольника $FGHKL$. Доказано же, что какъ AB къ FG , такъ поперечникъ BM къ поперечнику GN : слѣдственно какъ очерпаніе многоугольника $ABCDE$ къ очерпанію многоугольника $FGHKL$, такъ поперечникъ BM къ поперечнику GN *. *^{11, V}.

(93) Слѣдствие. Описюда явствуетъ, что подобныя многоугольники въ кругахъ, суть взаимно какъ круги. Ибо и многоугольники и круги суть взаимно въ удвоенномъ отношеніи поперечниковъ.

(94) Предложенную нами фигуру можно замѣнить фигурою 30.

(95) Сие слѣдствіе можно еще доказать такъ:

Пусть будутъ подобныя пирамиды, коихъ основанія многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$, а вершины точки M , N ; сходственные же спороны пусть будутъ AB , FG ; и пусть основанія $ABCDE$, $FGHKL$ раздѣлены будутъ на подобныя треугольники ABC ,
 20, VI. ACD , ADE , FGH , FHK , FKL .

Поелику треугольникъ ABM подобенъ треугольнику FGN , и треугольникъ ABC треугольнику FGH : то какъ AM къ AB , такъ FN къ FG ; и какъ AB къ AC , такъ FG къ FH : посему, равноѣстно,
 *22, V. какъ AM къ AC , такъ FN къ FH *. Пошому же и какъ AC къ CM , такъ FH къ HN . Чего ради еще равноѣстно, какъ AM къ MC , такъ FN къ NH . Инакъ спороны треугольниковъ ACM , FHN суть пропорціональныя: и пошому треугольникъ ACM есть
 *5, VI. равноугольный треугольнику FHN *; слѣдственно и подобенъ ему. Чего ради пирамида $ABCM$ подобна пирамидѣ $FGHN$ *, ибо онѣ содержатся равномногими подобными плоскостями. Пошому же и пирамида $ACDM$ подобна пирамидѣ $FGHN$, а пирамида $ADEM$ пирамидѣ $FKLN$. И поелику подобныя пирамиды, имѣющія треугольныя основанія, суть взаимно въ удвоенномъ отношеніи сходственныхъ споронъ*: то пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$ имѣетъ удвоенное

отношеніе прямая AC къ FN . Поэтому же и пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $FHKN$ имѣеть упрощенное отношеніе AC къ FN . Чего ради какъ пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$, такъ пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $FHKN$ *. Подобно же докажемъ, *сл.Е,V. что какъ пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $FHKN$, такъ пирамида $ADEM$ къ пирамидѣ $FKLN$. И поелику какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*; посему какъ пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$, такъ цѣлая пирамида, $ABCD$ EM къ цѣлой $FGHKL$ N. Но пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$ имѣеть упрощенное отношеніе прямая AB къ FG : посему и пирамида $ABCD$ EM къ пирамидѣ $FGHKL$ N имѣеть упрощенное отношеніе прямая AB къ FG .

Слѣдствіе. Всякія подобныя прямолинейныя тѣла суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ. Ибо отъ кѣйкихъ почекъ внутри ихъ или отъ вершинъ полныхъ ихъ угловъ, можно раздѣлить сїи тѣла на пирамиды, коихъ вершины будутъ при тѣхъ почкахъ, а основанія плоскости, коими ограничиваются тѣла. Сїи пирамиды будутъ взаимно подобны и пропорціональны цѣлымъ тѣламъ, что докажется какъ и предъидущее слѣдствіе. Но поелику сїи пирамиды суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ; то и оныя цѣлыя тѣла будутъ взаимно въ упрощенномъ отношеніи тѣхъ же сходственныхъ сторонъ.

(96) Слѣдствіе. 1. Подобно докажемъ, что равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями параллелограммы,

основанія сущь обратно пропорціональны высотамъ: И копорыхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями параллелограммы, основанія обратно пропорціональны высотамъ, шѣ сущь равныя.

Слѣдствие 2. Равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія многоугольныя, основанія сущь обратно пропорціональны высотамъ: И копорыхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія многоугольныя, основанія обратно пропорціональны высотамъ, шѣ сущь равныя. Ибо, еспли соспавлены будутъ параллелограммы равные основаніямъ пирамидъ; и на сихъ параллелограммахъ воспавлены будутъ пирамиды равновысопныя первымъ пирамидамъ: по пирамиды на параллелограммахъ будутъ равны пирамидамъ на многоугольникахъ. И поному предлагаемое справедливо.

(97) Ибо, просянувъ AS , AP (ф. 31), поелику AK равна AB , и KS равна BP ; то двѣ прямыя AK , KS раены двумъ прямымъ AB , BP , каждая каждой; и основаніе AS равно основанію AP : посему уголъ AKS *8,1. равенъ углу ABP *. А и прямой уголъ SXK равенъ прямому углу BVP : ишакъ два треугольника KSX , BPV имѣють два угла равные двумъ угламъ, они же имѣють и одну сторону равную одной сторонѣ, кои противолежатъ равнымъ угламъ, то есть SK равную PB : посему и прочія стороны *26,1. будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ*; а посему SX равна PV , и KX равна BV .

(98) Ибо вообрази, что опъ почекъ Q , T (ф. 31) проведены перпендикулярныя прямыя къ плоскости круга $BCDE$, что и онѣ упадутъ на BO , KN ; и чрезъ почки, въ конхъ вспрыпашь сіи прямыя, просяни

прямую; и еще пропяти BQ , KT : то подобно докажешся, что KB параллельна къ TQ . Доказано же, что KB параллельна и къ P : посему SP параллельна къ TQ : слѣдственно чепыреугольникъ *9, XI. $SPQT$ есть на одной плоскости. Потому же и чепыреугольникъ $TQRU$ есть на одной плоскости.

(99) И дѣйствительно, поелику KB , BP , KS (ф. 31) равны, а PS меньше; то и углы KYB , BYP , KYS взаимно равны, а уголъ PYS меньше. Но чепыре угла KYB , BYP , PYS , SYK равны чепыремъ прямымъ; посему уголъ KYB тупой, и треугольникъ KBY есть тупоугольный. Въ тупоугольныхъ же треугольникахъ квадрапъ изъ стороны, противулежащей тупому углу, больше квадраповъ изъ сторонъ, содержащихъ тупой уголъ: посему квадрапъ изъ BK больше квадраповъ изъ KY , BY Но квадрапъ изъ KY равенъ квадрапу изъ BY , ибо KY равна BY : посему квадрапъ изъ BK больше нежели двукрапный квадрапъ изъ BY .

Далѣе помошь, вмѣсто «Опъ почки K проводи перпендикулярную къ BP прямую KZ » лучше сказать: «Пропяти KV : то подобно какъ и прежде докажемъ, что уголъ KBV равенъ углу PBV . И поелику KB равна KP , а BV общая; то двѣ прямыя KB , BV равны двумъ прямымъ PB , BV ; и содержатъ углы равные: посему и уголъ KVB равенъ углу BVP . Но уголъ BVP прямой; посему и уголъ BVK прямой; слѣдственно KV перпендикулярна къ AB ».

Ипакъ явно, что линію KZ должно счипати за одну и ту же съ KV .

(100) Какъ доказано въ началѣ (99).

(101) Говорю же, что и прочія плоскости вписаннаго многогранника, кои между дугами BO , KO (ф. 31), не прикасаются къ меньшему шару.

Опъ A проводи, перпендикулярную къ плоскости четьреугольника $SPQT$, прямую Ay ; и прошии $Pу$, $уS$: по подобно тому какъ доказано о четьреугольникѣ $KBPS$ и шокѣ Y , докажемъ, что шокъ $у$ естъ центръ, а $Pу$ прямая опъ центра круга описаннаго около $SPQT$; и что SP больше TQ . И поелику четьреугольники $KBPS$, $SPQT$ суть вписываемые въ кругахъ, и двѣ прошивулежащія стороны SK , PB четьреугольника $KBPS$ равны двумъ прошивулежащимъ сторонамъ TS , QP четьреугольника $SPQT$, каждая каждой; а прочія двѣ стороны KB , SP больше двухъ прочихъ сторонъ SP , TQ , каждая каждая: посему и прямая KY больше прямой $Sу$ *. Поелику же AK равна AS ; по и квадрапъ изъ AK равенъ квадрапу изъ AS . Квадрапу же изъ AK равны квадрапы изъ KY , YA ; а квадрапу изъ AS равны квадрапы изъ $Sу$, $уA$: посему квадрапы изъ KY , YA равны квадрапамъ изъ $Sу$, $уA$. Но въ нихъ квадрапъ изъ KY больше квадрапа изъ $Sу$, ибо KY больше $Sу$: посему остальной квадрапъ изъ AY меньше остальнаго изъ $уA$; а посему $Aу$ больше AY . Но AY больше AG или Ag ; и пакъ шѣмъ паче $Aу$ больше Ag . Сіе же подобно докажется и о четьреугольникѣ $TQRU$ и о треугольникѣ URO . Такъ же докажемъ и о всѣхъ прочихъ плоскостяхъ помянутаго многогранника, что оныя не прикасаются къ меньшему шару.

ЛЕММА. Ежели будущъ два четьреугольника $ABCD$, $EFGH$ (ф. 32) вписанные въ кругахъ, коихъ центры

внутри сихъ чепыреугольниковъ ; и еспѣли двѣ прошивулежащія спороны DA , CB одного будутъ равны двумъ прошивулежащимъ споронамъ HE , GF другого ; каждая каждой , а прочія двѣ спороны AB , CD будутъ больше прочихъ двухъ EF , GH , каждая каждая : по и прямая отъ центра круга $ABCD$ будетъ больше прямой отъ центра круга $EFGH$, по естъ AK больше LE .

Ибо, буде не такъ ; по AK или равна LE , или меньше ея. Пустъ, во первыхъ, будетъ равна. Пропяни KB , KC , KD , LF , LG , LN . И поелику двѣ прямыя AK , KD равны двумъ прямымъ KL , LN , и основаніе AD равно основанію HE ; посему и уголъ DKA равенъ углу HLE . Потому же и уголъ BKC , равенъ углу GLF . Еще же , поелику двѣ прямыя AK , KB равны двумъ прямымъ EL , LF ; но основаніе AB больше основанія EF : посему и уголъ AKB больше угла ELF . Потому же и уголъ DKC больше угла HLG . Чего ради чепыре угла около почки K сущъ больше чепырехъ угловъ около почки L . Но чепыре угла около K равны чепыремъ прямымъ : посему чепыре угла около L меньше чепырехъ прямыхъ : что невозможно : слѣдственно AK не равна EL .

Говорю еще , что и не меньше. Ибо , буде возможно, пустъ будетъ меньше. Возьми каждую изъ прямыхъ LM , LN равную AK ; и пропяни MN . Ипакъ двѣ прямыя AK , KD равны двумъ прямымъ ML , LN , и содержащъ углы равные : посему основаніе AD равно основанію MN . И поелику EN параллельна къ MN : по треугольникъ ENL естъ равноугольный треугольнику NLM , слѣдственно и

подобенъ ему. Посему какъ LE къ LM , такъ EN къ MN : но LE больше LM ; посему и N больше MN . По положенію же EN равна AD , посему и AD больше MN ; но и равна ей, по доказанному; что невозможно: чего ради AK не меньше EL . Доказано же, что и ни равна; слѣдственно AK больше LE . ч. и д. н.

Еслии будетъ остроугольный треугольникъ OPQ , коего двѣ стороны OP , OQ равны двумъ противуположающимъ четиътреугольника $ABCD$ сторонамъ DA , CB , каждая каждой; а основаніе его PQ будетъ меньше котороя ниесъ изъ остальныхъ сторонъ AB , CD : то подобно докажемъ, что AK будетъ больше прямой отъ центра круга описаннаго около треугольника OPQ .

(102) Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что подобныя прямолинейныя шѣла, вписанныя въ шарахъ, суть взаимно какъ сіи шары.

К О Н Е Ц Ъ

ПОГРѢШНОСТИ.

Стран. Слрок. Нѣсч. www.libtool.com.cn Читай.

6	26	*опр. 18.	*опр. 15.
14	13	*акс. 3.	*акс. 1 и 9.
24	3	ч. и д. н.	ч. и д. н. (13)
—	20	ч и д. н.	ч. и д. н. (14)
44	12	имъ еснѣ	еснѣ
47	10	AB	AD
52	6	и около	и пусть будущъ около
53	2	На	По
—	6	С а	а С
68	2	чрезъ G	чрезъ H
99	13	HK	KG
106	3	Ипакъ	И какъ
107	20	*11, I.	*12, I.
123	3	CB	CD
136	6	ABC*; центръ F	ABC центръ F*;
139	26	GAC	HAC
140	2	GAC	HAC
146	3	равноугольный	прямоугольный
155	14	LD	LK
189	13	HQ	HP
251	5	*20.	*лем: 22.
281	16	*38, I.	*33, I.
286	26	CD	CB
290	14	BA	BD
325	2	CE	CF
350	23	EK, KF,	KF,
361	19	ABCH	ABCG
368	19	*оп. 13, XI.	*оп. 9, XI.

Слран. Слрок. Напеч.

Читай.

396 3 *оп. 14, X.

*оп. 14, XI.

398 23 *8, XI.

*7, XI.

412 6 центра С

центра D

413 20 фиг. 3.

фиг. 4.

422 1 AD

AC

428 26 къ нему.

къ кругу.

430 22 равноспоронный. А доказано, что и равноугольный. Читай: равноугольный.

А доказано, что и равноспоронный.

434 13 В, С

В, D

439 11 и D къ E

и D къ F

441 25 С, D

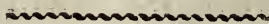
В, D

456 24 отношеніе,

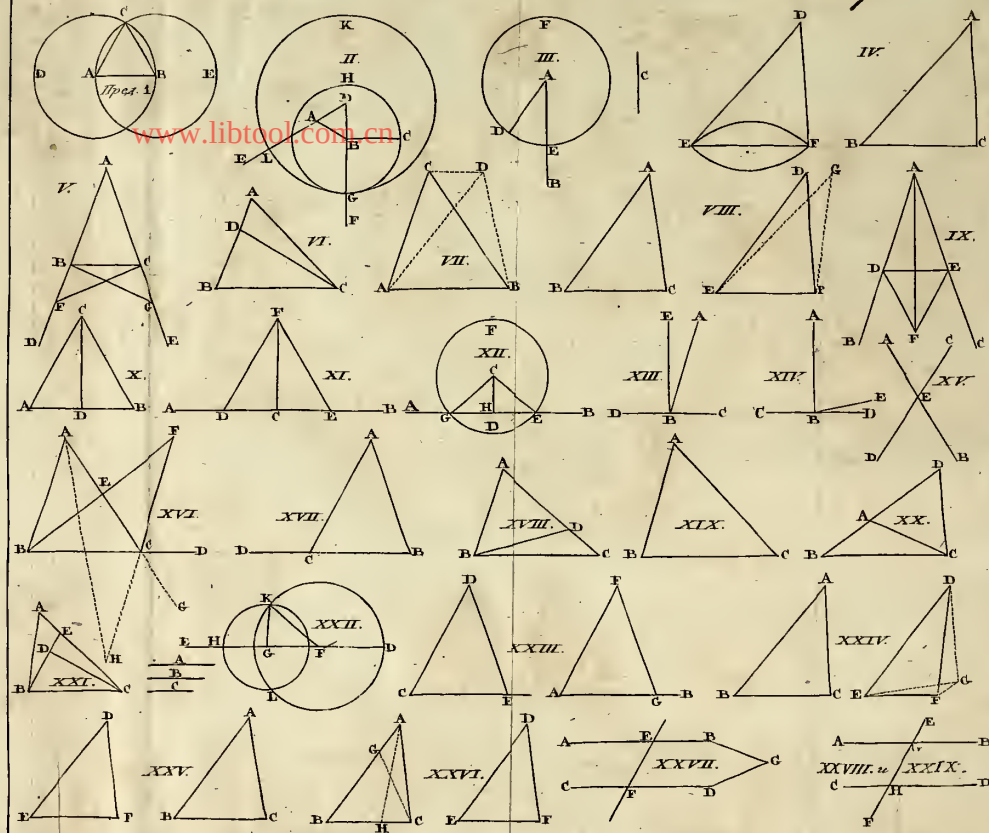
отношеніе, нежели

460 4 29е и 30е

28е и 29е



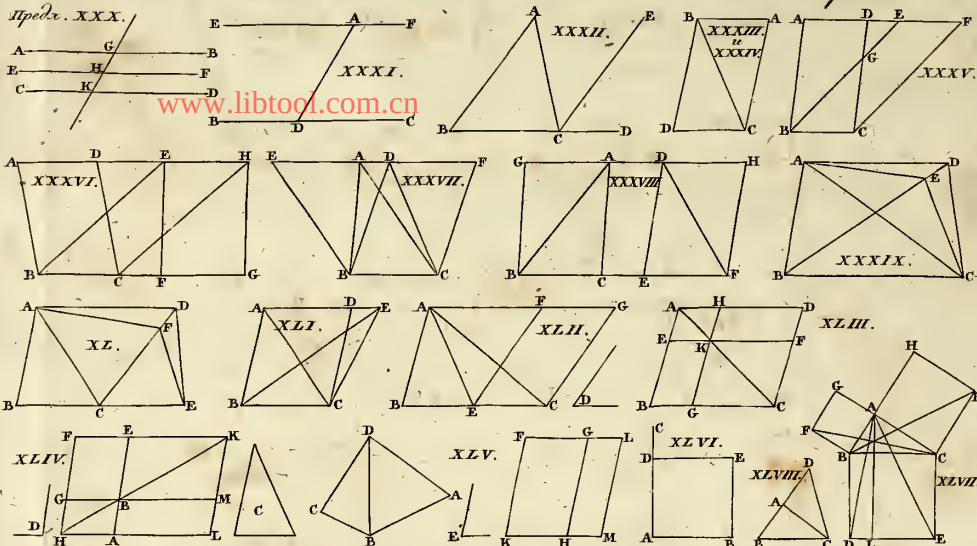
Эвклидовых Началь Книга первая.



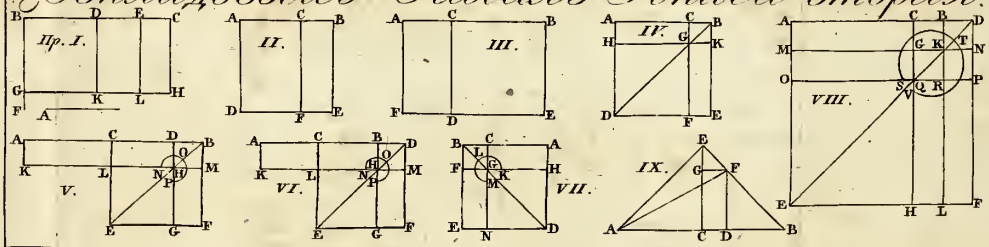
www.libtool.com.cn

Евклидовых Началъ Книга первая.

Предл. XXX.

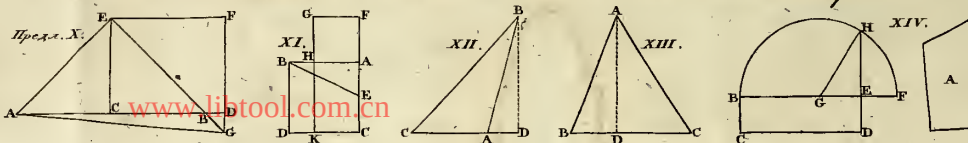


Евклидовых Началъ Книга вторая.

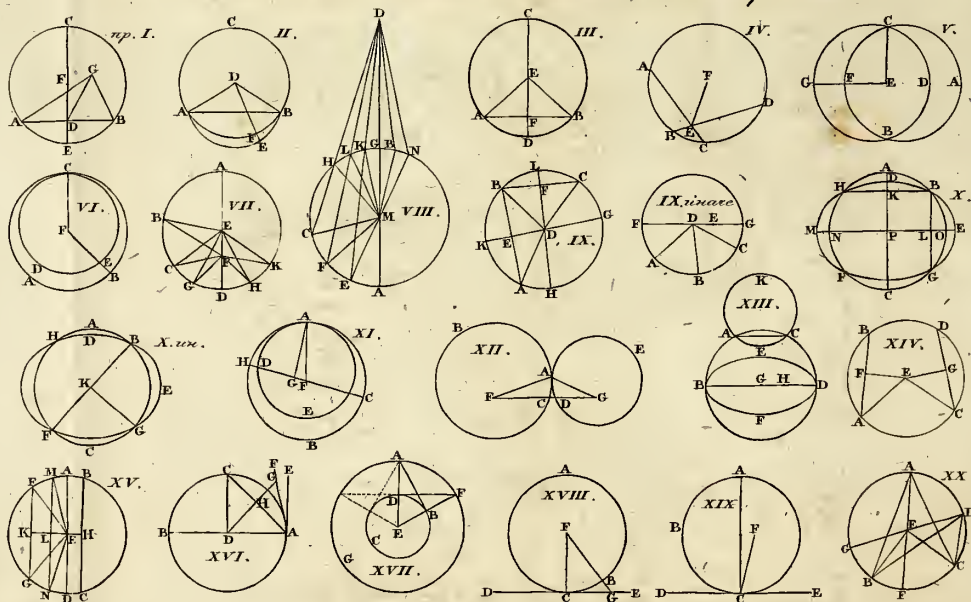


www.libtool.com.cn

Евклидовых Началъ Книга вторая.

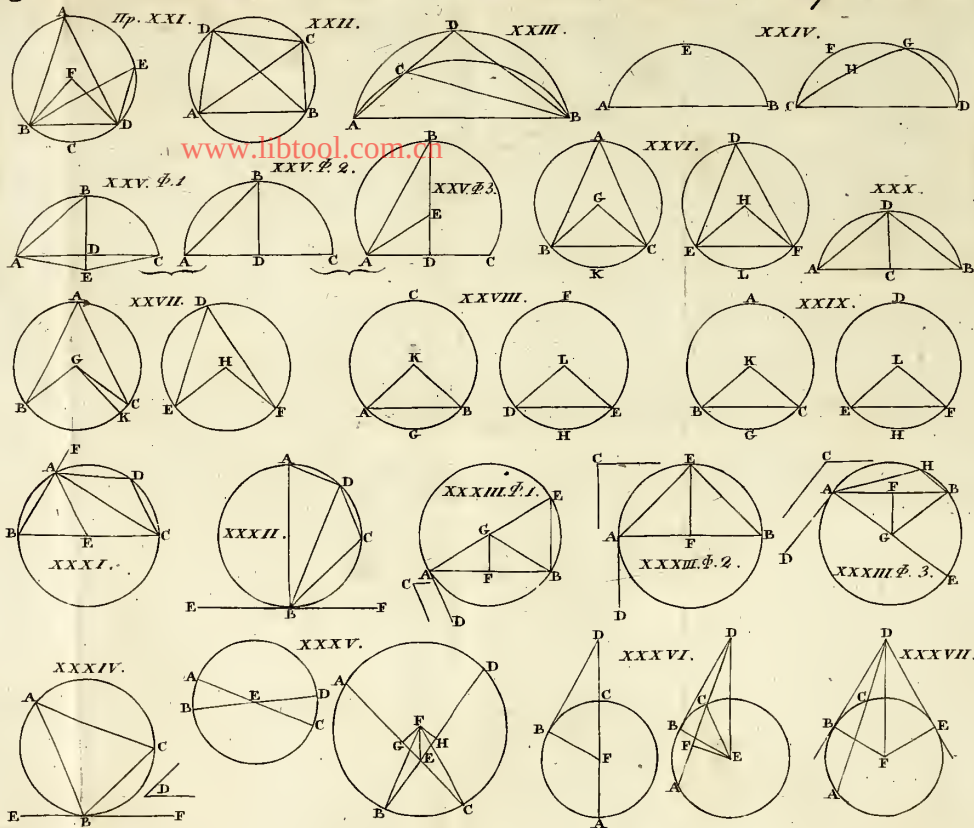


Евклидовых Началъ Книга третья.



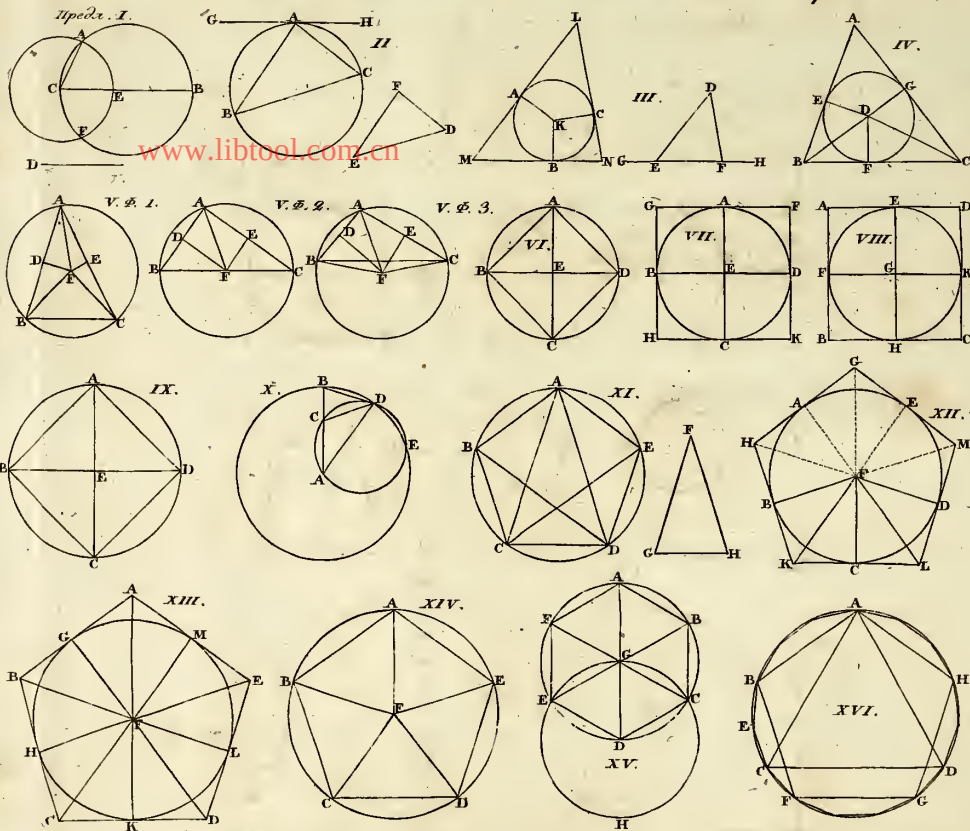
www.libtool.com.cn

Евклидовыя Начала Книги третья.



www.libtool.com.cn

Эвклидовых Началъ Кнѣга четвертая.



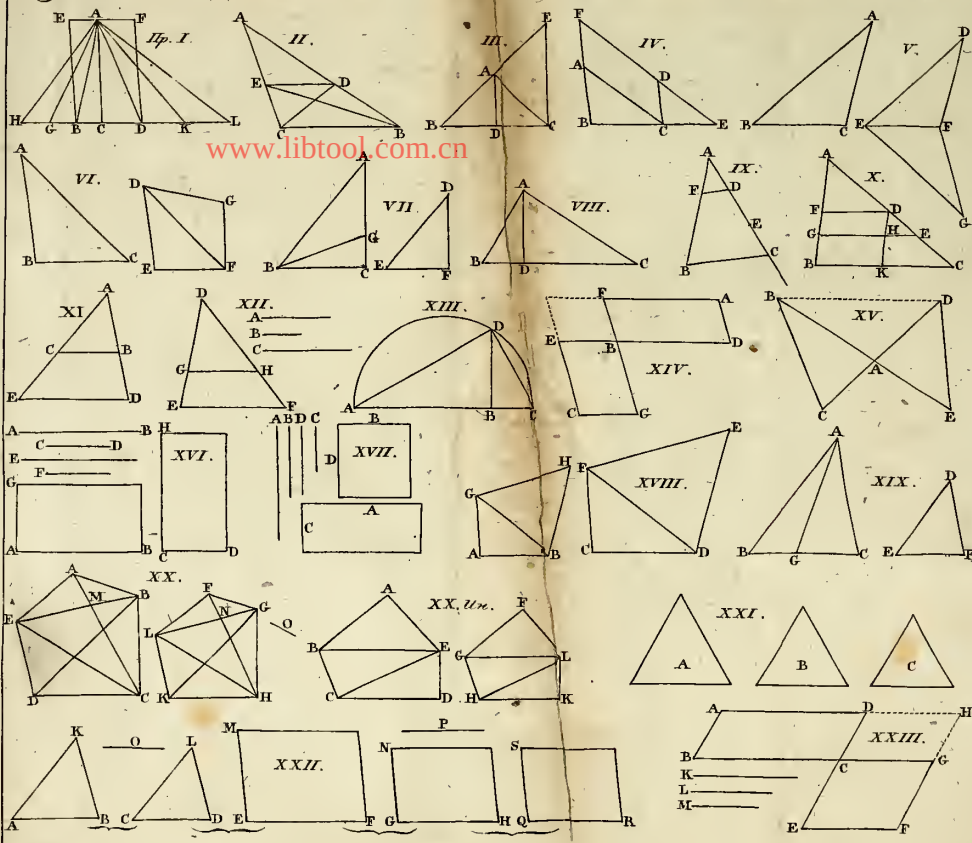
www.libtool.com.cn

Зеклидовскихъ Гармонъ Книга пятая.

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX. X. XI. XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII. XVIII. XIX. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. XXV.

www.libtool.com.cn

Евклидовых Началъ Книга шестая.



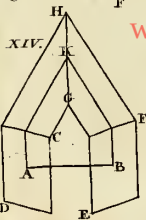
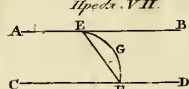
www.libtool.com.cn



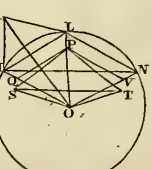
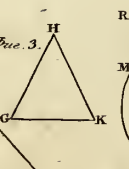
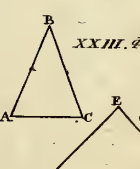
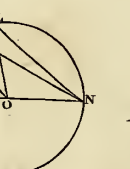
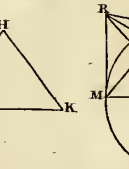
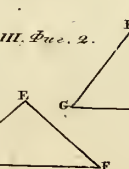
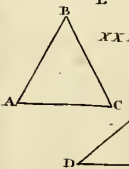
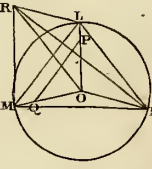
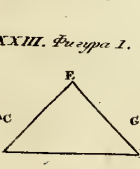
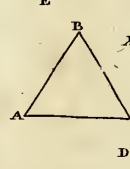
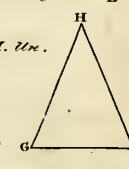
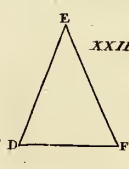
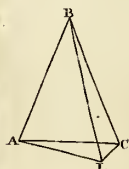
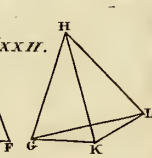
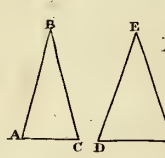
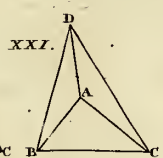
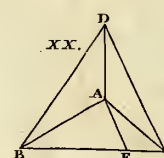
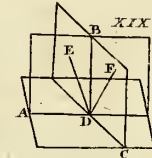
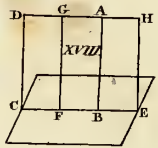
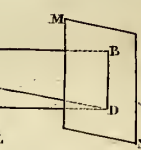
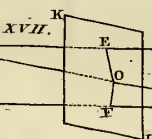
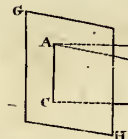
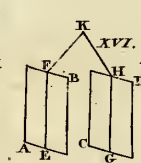
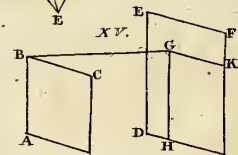
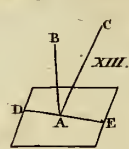
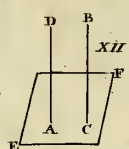
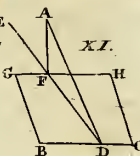
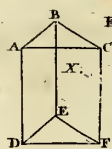
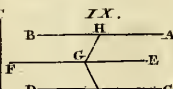
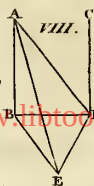
www.libtool.com.cn

Эвклидовых Аксиом Книга одиннадцатая

Испед. VII.



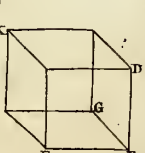
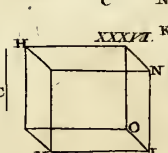
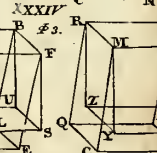
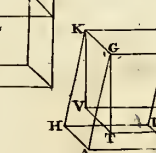
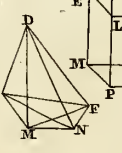
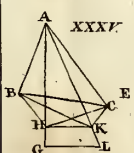
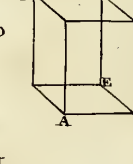
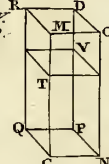
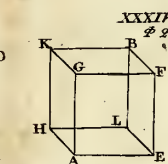
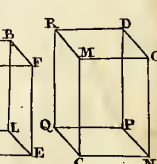
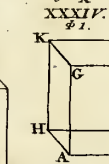
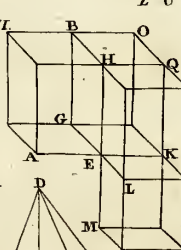
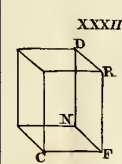
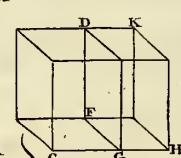
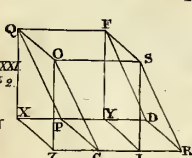
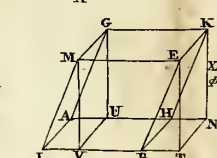
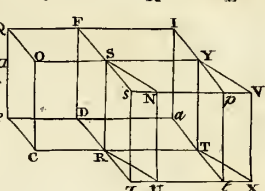
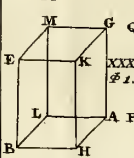
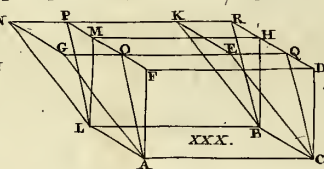
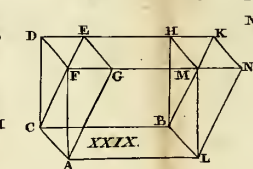
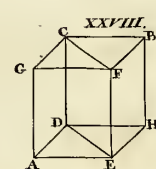
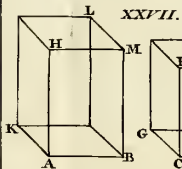
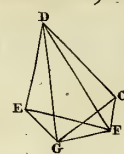
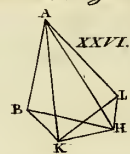
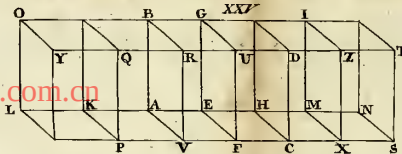
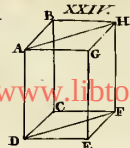
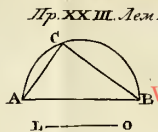
www.libtool.com.cn



www.libtool.com.cn

Эквидовыхъ Начальъ Грѣса одиннадцатая.

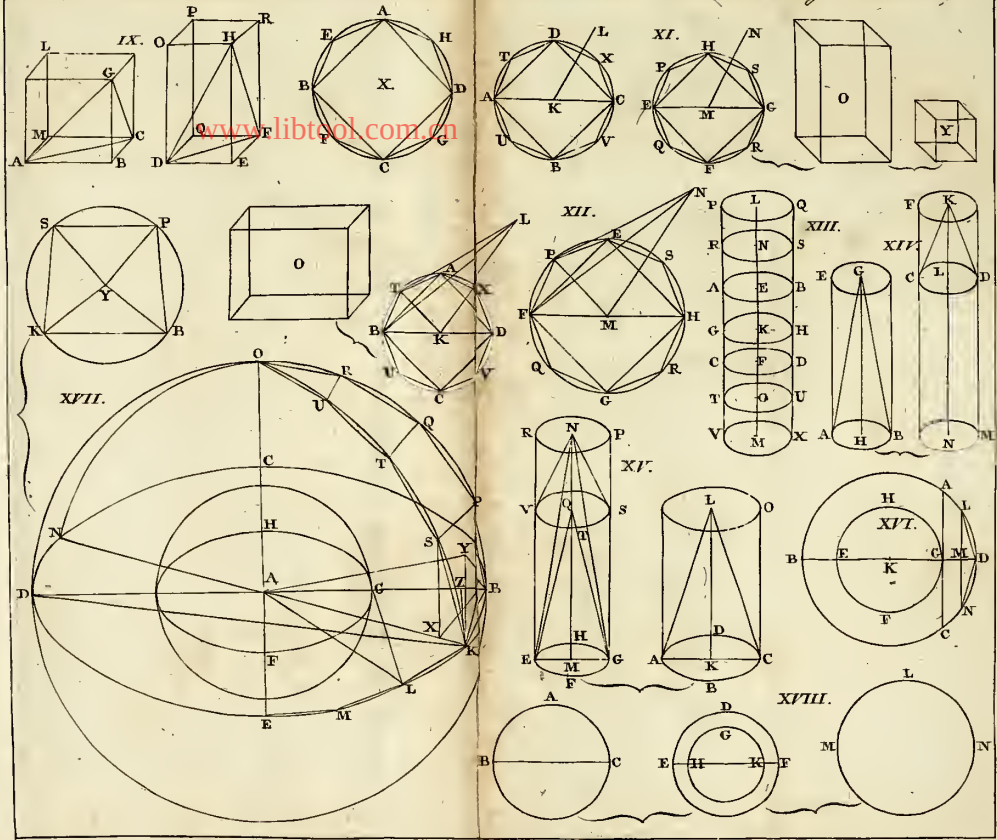
Пр. XXXIII. Лек.



www.libtool.com.cn

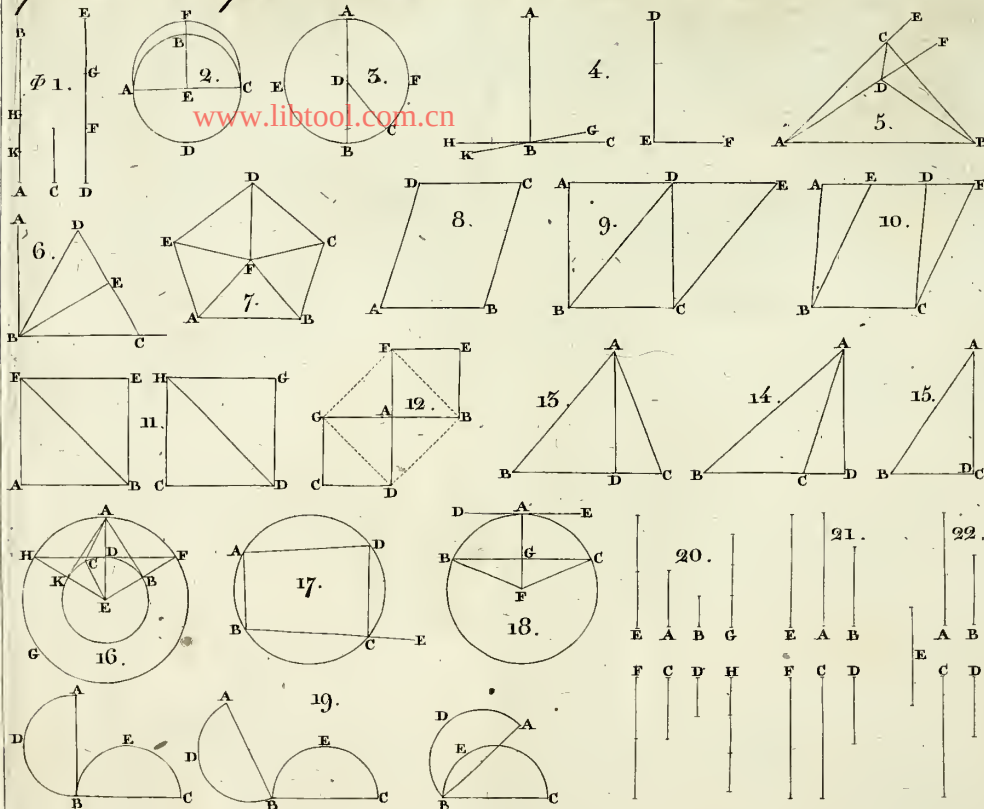
www.libtool.com.cn

Решительных Началъ Книжа догматическая.



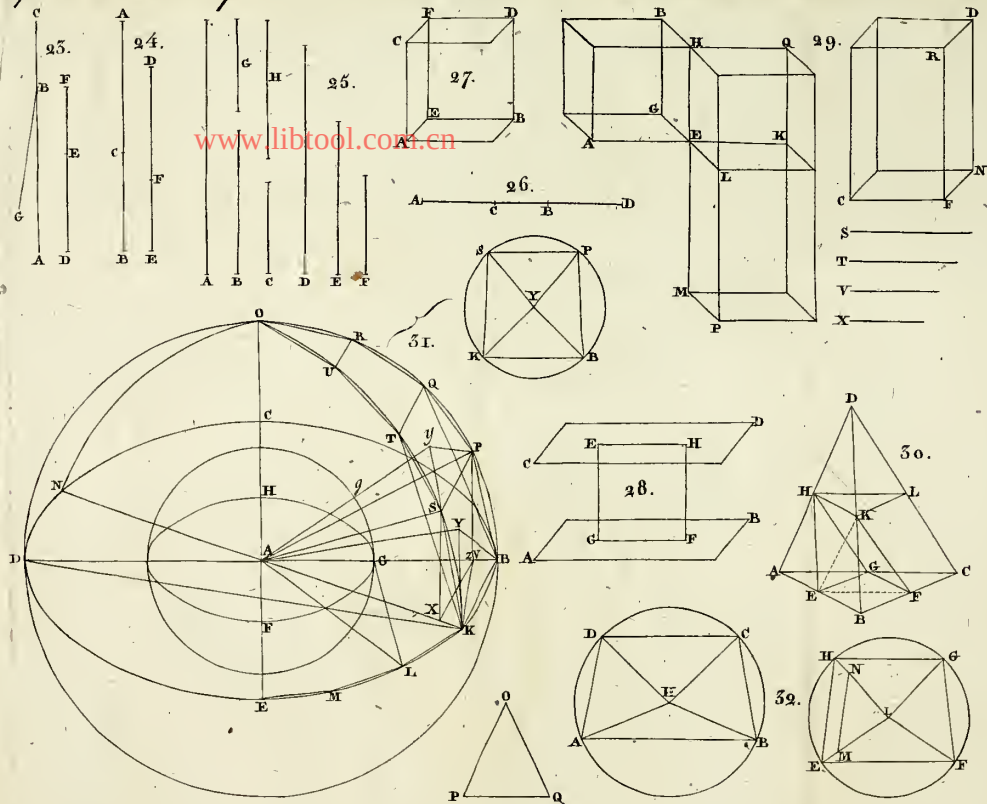
www.libtool.com.cn

Примы и прибавленія къ Евклидовымъ Началамъ



www.libtool.com.cn

Примѣтъ и прибавленія къ Евклидовымъ Началамъ



www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

155 07 0

www.libtool.com.cn

**THE LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF
NORTH CAROLINA
AT CHAPEL HILL**



RARE BOOK COLLECTION

The André Savine Collection

QA31
.E87517
1819

www.libtool.com.cn