OSTWALD'S KLASSIKER
[DE]R EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.

Nr. 90.

ABHANDLUNG

über

die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten

von

A. BRAVAIS,
Lieutenant zur See und Professor an der École Polytechnique.

(1848.)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

Ankündigung.

in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein **Forschungsmittel** von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die **Klassiker der exakten Wissenschaften** sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der **Mathematik**, **Astronomie**, **Physik**, **Chemie** (einschliesslich **Krystallkunde**) und **Physiologie** enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. **Arthur von Oettingen** (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. **Bruns** (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. **Wangerin** (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. **Groth** (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. **Pfeffer** (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. **Ostwald** (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss**, Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. **Wangerin**. (62 S.) *M* —.80.

» 14. **C. F. Gauss**, Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. **Netto**. Mit 1 Taf. (81 S.) *M* 1.50.

» 17. **A. Bravais**, Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. **Groth** herausg. von C. u. E. **Blasius**. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.—.

Fortsetzu[illegible]lages.

ABHANDLUNG

über

die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten

von

A. BRAVAIS,

Lieutenant zur See und Professor an der École Polytechnique.

(1848.)

Uebersetzt und herausgegeben

von

C. und E. Blasius.

Mit 2 Tafeln.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1897.

Abhandlung

über

die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten

von

A. Bravais,

Lieutenant zur See und Professor an der École Polytechnique.

(Der Académie des Sciences vorgelegt am 11. December 1848.)

---

§ I. — Einleitende Definitionen.

Um ein System von regelmässig im Raum vertheilten Punkten zu erhalten, nehmen wir zwei willkürlich gewählte Punkte, und verbinden sie miteinander durch eine gerade Linie, welche wir nach beiden Richtungen ins Unendliche verlängern. Wir besetzen diese Gerade mit einer unbeschränkten Reihe anderer Punkte, die alle unter sich äquidistant, und durch einen, dem Abstand der beiden Ausgangspunkte gleichen, constanten Zwischenraum getrennt sind. Das geradlinige System dieser äquidistanten Punkte soll im Laufe dieser Abhandlung den Namen »Punktreihe« erhalten. Der fundamentale Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten soll mit dem Namen »Parameter der Punktreihe« bezeichnet werden.

Wir nehmen eine zweite Punktreihe von demselben Parameter, bringen sie, parallel zur ersten, in eine in Bezug auf dieselbe willkürlich gewählte Lage, und verbinden diese beiden Reihen miteinander durch eine geometrische Ebene, welche ihrer [2] Natur nach in jeder Richtung unbegrenzt ist. Wir besetzen diese Ebene mit einer Folge von eben solchen Punktreihen, die parallel und äquidistant unter einander sind; wir lassen endlich, um die Lage dieser Punktreihen zu bestimmen, jede derselben als Ganzes und in ihrer Längsrichtung gleiten, bis die Punkte, welche auf jeder Punktreihe als Ausgangspunkt gedient haben, sich auf einer und derselben Geraden befinden, die mehr oder weniger gegen die gemeinsame Richtung der Punktreihen geneigt ist. Wir werden ein solches auf der Ebene vertheiltes System von Punkten mit dem Gattungsnamen »Netz« bezeichnen.

Wir nehmen ein zweites Netz von der gleichen Form und Grösse wie das vorige, bringen es auf eine parallele, von der ersten durch einen willkürlichen Zwischenraum getrennte Ebene, indem wir Sorge tragen, dass alle homologen Linien in den beiden Netzen gleich gerichtet sind, was durch eine gemeinsame Parallel-Verschiebung aller Theile des ursprünglichen Netzes bewirkt werden kann. Wir vertheilen eine unendliche Anzahl von gleichen und gleich gerichteten Netzen auf einer unendlichen Anzahl von Ebenen, die den beiden ersten parallel und äquidistant unter einander sind, und tragen Sorge, jedes Netz auf seiner Ebene gleiten zu lassen, bis alle Punkte, die als Ausgang dienen, auf einer und derselben Geraden liegen, welche nothwendiger Weise ausserhalb der Ebene des ursprünglichen Netzes ist. Das so erhaltene Punktsystem soll in dieser Abhandlung mit dem Namen »Schaar« bezeichnet werden; es ist unbegrenzt nach seinen drei Dimensionen.

Die Figur 1 zeigt das Resultat der von uns vorgenommenen Operationen. $OAA'A'' \ldots$ ist die erste Punktreihe; die Folge der Punkte A, A', A'', ... muss man sich links über O hinaus fortgesetzt denken. $BPP' \ldots$ bildet die zweite Punktreihe. Von den Punkten B', B'', ... gehen andere gleiche und parallele Punktreihen aus. Die Ausgangspunkte O, B, B', B'', ... der Reihen liegen nothwendiger Weise auf einer geraden Linie. Da alle diese Punktreihen äquidistant sind, so ist einleuchtend, dass man

$$OB = BB' = B'B'' \ldots$$

hat, so dass $OBB'B'' \ldots$ auch eine Punktreihe des Systems ist; aber sie unterscheidet sich von $OAA'A''$ durch ihre Richtung, und auch im allgemeinen Fall durch die Grösse ihres Parameters, welcher augenscheinlich gleich OB ist.

Ein zweites Netz, ähnlich dem Netz $OAA'A'' \ldots BPP' \ldots B' \ldots B'' \ldots$, hat seinen Ausgangspunkt in D, und dehnt sich von D in einer Ebene aus, die parallel mit der Ebene OAB ist; seine erste Punktreihe ist $DQQ'Q'' \ldots$, die andern gehen von R, R', R'', ... aus. [3] Diese Punkte sind auf der neuen Ebene die Homologen von B, B', B'', ... Die anderen Netze des Systems gehen von den Punkten D', D'', ... aus. Alle die Punkte O, D, D', D'', ... liegen in einer geraden Linie, und wegen des gleichen Abstands der parallelen Ebenen, deren jede ein Netz enthält, hat man

$$OD = DD' = D'D'' \ldots,$$

so dass $ODD'D''\ldots$ auch eine Punktreihe ist, welche sich aber von $OAA'A''\ldots$ und $OBB'B''\ldots$ sowohl durch ihre Richtung, als auch durch die Grösse ihres Parameters unterscheidet.

Die so erhaltene Schaar zeigt eine regelmässige Vertheilung, welche durch die folgenden Eigenschaften charakterisirt ist, die einleuchtend genug sind, um keines Beweises zu bedürfen.

Keiner der integrirenden Punkte unterscheidet sich von den anderen durch irgend welche Eigenthümlichkeit der relativen Lage.

Die Configuration einer als unbegrenzt gedachten Schaar um einen ihrer willkürlich gewählten Punkte ist die gleiche, welches auch der angenommene Punkt sein mag. Wenn zum Beispiel dieser Punkt zum Anfangspunkt irgendwelcher rechtwinkeliger oder schiefwinkeliger Coordinaten genommen ist; so wird man um jeden nacheinander zum Ausgang gewählten Punkt ähnlich gelegene Punkte mit gleichen Coordinaten finden, vorausgesetzt dass bei dem Wechsel des Anfangspunktes die neuen Axen ihre ursprüngliche Richtung bewahrt haben.

Bevor ich weiter gehe, werde ich für die Punkte, welche ein Netz oder eine Schaar bilden, eine besondere Bezeichnung feststellen. Es ist in der That nothwendig, sie von den rein mathematischen Punkten zu unterscheiden, welche an irgend einem Orte des Raumes existiren.

Ich werde sie also Gitterpunkte nennen. Man kann ohne Nachtheil, um die Begriffe festzulegen, diesen Gitterpunkten sehr kleine Dimensionen geben, wirkliche Molecüle daraus machen und speciell den Mittelpunkten dieser Molecüle, deren polyedrische Form übrigens unbestimmt bleibt, den Namen Gitterpunkt ertheilen.

Ich werde annehmen, diese Gitterpunkte seien unter sich durch solche Kräfte verbunden, dass die ganze Schaar eine unveränderliche Gestalt, mit constant bleibendem Abstand der

Punkte unter sich habe, dass sie indessen fähig sei, sich wie ein fester Körper im Raum zu bewegen, sowohl parallel mit sich selbst als um [4] eine gegebene Axe, sobald es nöthig wird, ihr derartige Bewegungen der Translation oder der Rotation zu geben.

Wenn man das ganze System parallel mit sich selbst bewegt, so dass ein Gitterpunkt wie z. B. A, Fig. 1, an den Ort kommt, welchen vorher ein anderer Gitterpunkt B inne hatte, so wird jeder der anderen Gitterpunkte gleichfalls einen Ort im Raume einnehmen, der bei dem Anfang der Bewegung von einem Gitterpunkte des Systems verlassen wurde. Ich sage alsdann, dass durch die allgemeine Bewegung, welche der Schaar gegeben ist, der Ort der Gitterpunkte nicht verändert ist, oder einfacher dass eine Wiederherstellung der Orte der Gitterpunkte stattgefunden hat.

Solange die Geraden OAA', BPP', ... und die Ebenen, welche sie vereinigen, im Raum fixirt bleiben, behält die Schaar die Kennzeichen des Verfahrens, das angewandt wurde, um sie zu construiren. Aber wir können in Gedanken alle diese Geraden und alle diese Ebenen unterdrücken, und versuchen eine umgekehrte Aufgabe von derjenigen zu lösen, welche uns soeben beschäftigt hat, eine Aufgabe, die wir im Folgenden zusammenfassen.

Aufgabe I. — Zu einer gegebenen Schaar sollen die Punktreihen, Ebenen und Netze gefunden werden, welche sie hervorbringen können.

Nehmen wir aufs Gerathewohl zwei Punkte oder Gitterpunkte, wie z. B. O und A (Fig. 1), welche der gegebenen Schaar angehören, und verbinden sie durch die Gerade OA. Wenn es auf dieser Verbindungsgeraden zwischen O und A andere Gitterpunkte a, b, c, ... gäbe, die dem System angehörten, so würden wir den Gitterpunkt a, den nächsten an O, besonders ins Auge fassen und Oa wäre dann ein einfacher Theil von OA. Also kann man immer annehmen, dass zwischen den beiden gewählten Gitterpunkten O und A kein anderer dazwischen liegender Gitterpunkt existirt.

Verlängern wir OA nach beiden Richtungen und nehmen

$$AA' = OA, \qquad A'A'' = AA', \ldots;$$

so werden alle diese Punkte A', A''... gemäss dem allgemeinen Gesetze, welches die regelmässige Vertheilung charakterisirt, unserer Schaar angehören. Dieses erste Verfahren bestimmt eine der Punktreihen des Systems. Es ist indessen nöthig zu bemerken, dass diese so gefundene Reihe nicht nothwendiger Weise eine von denen ist, welche ursprünglich dazu gedient haben die Schaar zu construiren.

Ausserhalb der Punktreihe $OAA'A''\ldots$ nehmen wir aufs Gerathewohl einen Gitterpunkt B und verbinden O mit B; wenn andere Gitterpunkte zwischen O und B existirten, würden wir nur [5] den nächsten an O beibehalten. So können wir also immer voraussetzen, dass zwischen O und B kein anderer Punkt, der dem System der Schaar angehört, existirt.

Nachdem dieses festgestellt, construiren wir über OB und OA das Parallelogramm $OAPB$; P wird dem Netz der Ebene OAB angehören. Nun könnte im Innern dieses Parallelogramms im Allgemeinen eine endliche Anzahl von Gitterpunkten wie m, n, ... existiren, welche dem Netz der Ebene angehören. In diesem Fall muss man den Punkt B verwerfen und ihn durch denjenigen dieser Gitterpunkte ersetzen, dessen Entfernung von OA ein Minimum ist. Nennen wir ihn m; ziehen wir von m die Strecke mm' parallel und gleich OA und vollenden das Parallelogramm $OAm'm$. Dann wird m' nicht allein dem Netze angehören, sondern man kann behaupten, dass das Parallelogramm $Om'mA$ weder in seinem Innern noch auf seinen Seiten irgend einen Punkt der allgemeinen Schaar zeigt, mit Ausnahme der vier Gitterpunkte O, A, m, m'.

Um die Figur 1 nicht nutzlos zu compliciren, nehme ich das Parallelogramm $OAPB$ wieder auf, und beschränke mich darauf anzunehmen, dass der Punkt B mit Rücksicht darauf gewählt ist, den beiden folgenden Bedingungen zu genügen:

1. Dass zwischen O und B kein Punkt der Schaar existirt;

2. Dass ein solcher ebenso wenig im Innern des über OA und OB construirten Parallelogramms existirt. Wir haben eben gesehen, dass es immer wenigstens einen Gitterpunkt giebt, der diesen Bedingungen genügt.

Alsdann können wir, da wir die Parameter OA und OB der beiden Punktreihen kennen, nicht nur alle Punkte finden, die zu diesen Punktreihen gehören, sondern wir können auch durch die Schnittpunkte der beiden durch $AA'A''\ldots$ und $BB'B''\ldots$ gelegten Systeme von Parallelen das Netz der Ebene OAB vollständig wiederherstellen. Wir bemerken, dass dieses Netz nicht nothwendiger Weise dasselbe ist, welches im Anfang zur Construction der Schaar gedient hat.

Nachdem wir nacheinander eine Punktreihe, dann ein Netz erhalten haben, wird es uns nicht schwerer werden, das ganze System wiederzufinden.

Wir wollen ausserhalb der Ebene OAB einen Punkt D wählen, den wir der Bedingung unterwerfen, dass kein dazwischen liegender Gitterpunkt weder auf der Verbindungslinie zwischen O und D existire, noch auf der Oberfläche des Parallelogramms $AODQ$, noch auf derjenigen des Parallelogramms $BODR$, noch im Innern des Parallelepipedes $OAPSQDRB$, welches über den Parametern OA, OB, OD als Kanten construirt ist. Man [6] muss sich vergewissern, wie wir es für den Punkt B in dem Falle der Ebene gethan haben, dass diese Bedingungen thatsächlich erfüllt sind.

Es giebt ein einfaches Mittel, um direct den Punkt D zu erhalten. Es besteht darin, eine geometrische Ebene sich parallel mit sich selbst bewegen zu lassen, von einer Anfangsstellung an, in welcher sie mit der Ebene OAB zusammenfällt. Sobald diese Ebene in ihrer Bewegung einen ersten Gitterpunkt der Schaar erreicht, nimmt man ihn als den gesuchten Punkt an und macht aus der Entfernung OD den Parameter der dritten Punktreihe $ODD'D'' \ldots$

Die Lösung, welche wir eben gegeben haben, zeigt, dass man die Aufgabe I auf sehr viele verschiedene Arten lösen kann, und es ist sogar nicht schwierig einzusehen, dass die Zahl dieser Lösungen eine unendliche ist. In der That besitzt die Ebene $DQSR$ die Eigenschaft, in dem System aller ihrer Parallelen so nahe als möglich an der Ebene OAB zu sein. Wenn wir irgend einen Gitterpunkt betrachten, wie z. B. S, der dem Netz, das diese Ebene trägt, angehört, so ist klar, dass wir die Punktreihe OD durch die neue Punktreihe OS ersetzen können; wir erhalten alsdann alle Punkte der gegebenen Schaar, als Schnitte des Systems der zu OAB parallelen Ebenen, mit dem System der Geraden, die parallel mit OS durch alle Punkte des Netzes $OAA' \ldots BB'$ gelegt sind.

Ebenso könnte man, indem man OS und OA, oder OS und OB als anfängliche Punktreihen nimmt, die Schaar wiederherstellen, indem man als Constructionsmittel das Netz der Ebene OAS oder dasjenige der Ebene OBS nimmt, was uns neue Lösungen der Aufgabe gäbe; und da die Zahl der Netzpunkte unendlich ist, so ist es die Zahl dieser Lösungen ebenfalls.

Wenn in einem Netz zwei Punktreihen OA und OB so beschaffen sind, dass kein einziger Gitterpunkt in das Innere des Parallelogramms fällt, welches über den Parametern OA, OB dieser Punktreihen construirt wird, so nenne ich diese Punktreihen *conjugirt*, und in dem Falle, wo sie zu Coordinaten-Axen gewählt würden, sollen sie den Namen *conjugirte Axen* erhalten.

Das System der Punktreihen, welche parallel zu zwei conjugirten Punktreihen $OAA' \ldots$, $OBB' \ldots$ liegen, schneidet das Netz in parallelogrammatische, unter einander gleiche Felder. Ich werde dieses Parallelogramm ($OAPB$ Fig. 1) ($OAmB$ Fig. 2) *Grundparallelogramm* oder *parallelogrammatische Masche des Netzes* nennen.

Der nicht allseitig begrenzte Raum, welcher zwischen einer Punktreihe wie $OAA'A'' \ldots$ und ihrer [7] nächst benachbarten BPP' (Fig. 1) begriffen ist, soll den Namen *Streifen* erhalten. Der Streifen ist dadurch charakterisirt, dass niemals irgend ein Gitterpunkt in seinem Innern existirt, sondern nur auf den beiden Geraden, die ihn begrenzen.

Die beiden parallelen Punktreihen, welche einen Streifen einschliessen, sollen *angrenzende* genannt werden. Jeder Punktreihe entsprechen zwei angrenzende Punktreihen, welche in Beziehung auf die gegebene Punktreihe auf entgegengesetzten Seiten liegen. Die Ebene eines Streifens, oder von zwei parallelen Punktreihen, oder allgemeiner, die Ebene, welche drei Gitterpunkte enthält, die nicht auf gerader Linie liegen, soll *Netzebene* genannt werden. Sie trägt auf ihrer Oberfläche ein vollständiges Netz von Gitterpunkten.

Wenn die Parameter von drei Punktreihen OA, OB, OC (Fig. 1) im Raume als Kanten eines, sowohl in seinem Inneren wie auf seinen Seitenflächen von jedem Gitterpunkt freien Parallelepipedes dienen können, werde ich diese drei Punktreihen mit dem Namen *conjugirte Punktreihen* bezeichnen, und in dem Falle, wo man sie als Coordinatenaxen gebrauchen wollte, mit dem Namen *conjugirte Axen*.

Die drei Ebenen, welche diese Punktreihen paarweise verbinden, sollen *conjugirte Netzebenen* oder *conjugirte Ebenen* genannt werden.

Eine Punktreihe soll zu der *Netzebene conjugirt* heissen, wenn zwei in Bezug auf das Netz dieser Ebene conjugirte Punktreihen auch zu der gegebenen Punktreihe conjugirt sind. Der nicht allseitig begrenzte Raum, welcher zwischen einer Netzebene und der nächsten unter den ihr parallelen Netzebenen enthalten ist, soll mit dem Namen *Schicht* bezeichnet werden. Es kann keinen Gitterpunkt in dem Innern einer Schicht geben. Die beiden parallelen Netzebenen, welche die Schicht begrenzen, sollen *angrenzende* genannt werden. Zu jeder Netzebene gehören zwei angrenzende Ebenen, die ihr parallel und in Bezug auf die gegebene Ebene auf entgegengesetzten Seiten liegen.

Die drei Systeme von Netzebenen, die parallel den drei conjugirten Ebenen AOB, AOD, BOD (Fig. 1) liegen, schneiden den Raum in parallelepipedische Zellen, welche alle inhaltlich und zum Decken gleich sind. Ich werde das so erhaltene, über den drei conjugirten Parametern OA, OB, OD construirte Parallelepiped *Grund-Parallelepiped* oder *Kern* der Schaar nennen.

Sämmtliche Punkte dieses Systems können durch das Aneinanderlegen solcher Parallelepipede, Seite an Seite, wieder erhalten werden.

[8] Nach Feststellung unserer Terminologie können wir die grundlegenden Eigenschaften irgend einer Schaar folgendermaassen zusammenfassen:

»Die Gitterpunkte einer Schaar sind auf einem System paralleler und äquidistanter Ebenen angeordnet und bilden auf jeder dieser Ebenen ein Netz, dessen Configuration auf jeder Ebene dieselbe ist.«

»In jedem dieser Netze bilden die Punkte Systeme von parallelen, deckbar gleichen und äquidistanten Punktreihen.«

»Auf jeder Punktreihe haben die Gitterpunkte gleichen Abstand unter einander. Man kann die gegebenen Gitterpunkte eines Netzes immer als Schnittpunkte je zweier Geraden erhalten, welche zwei verschiedenen Systemen von parallelen und äquidistanten Geraden angehören. Die ganze Ebene erscheint dann in parallelogrammatische, deckbar gleiche Felder zerschnitten, welche keine Lücke zwischen sich lassen.«

»Man kann die Gitterpunkte einer Schaar immer als die Schnittpunkte von drei Ebenen erhalten, die drei verschiedenen Systemen von parallelen und in jedem System gleich entfernten Ebenen angehören. Der Raum ist alsdann in parallelepipedische Zellen zerschnitten, welche alle inhaltlich und zum Decken gleich sind und keine Lücke zwischen sich lassen.«

»Die Theilung der Ebene oder des Raumes in gleiche Parallelogramme oder Parallelepipede, deren Ecken mit den Gitterpunkten der Schaar zusammenfallen, lässt sich auf unendlich viele verschiedene Weisen durchführen.«

§ II. — Von den Netzen im Allgemeinen.

Bezeichnungen und Definitionen. — Wir wollen das Netz der Figur 2 untersuchen. Der Punkt O soll zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählt werden.

Seien $OAA' \ldots$, $OBB' \ldots$ die beiden Punktreihen, welche zur Construction des Netzes gedient haben, und bezeichnen wir mit a und b die beiden Parameter, sodass wir haben

$$OA = a \quad \text{und} \quad OB = b. \tag{1}$$

Seien ξ, η die linearen Coordinaten der auf die schrägen Axen OA, OB bezogenen Punkte der Ebene. Für einen beliebigen Punkt P werden die Verhältnisse $\frac{\xi}{a}$ und $\frac{\eta}{b}$ [9]
positive oder negative ganze Zahlen sein, die wir die Zahlencoordinaten des Gitterpunktes P nennen wollen und welche durch die Buchstaben m und n bezeichnet werden sollen, wenn P ein bestimmter Gitterpunkt ist, und durch die Buchstaben x und y, wenn P ein unbestimmter Gitterpunkt des Netzes ist. Man erhält je nach dem Falle

$$\frac{\xi}{a} = m, \quad \frac{\eta}{b} = n, \tag{2}$$

$$\frac{\xi}{a} = x, \quad \frac{\eta}{b} = y. \tag{3}$$

Die allgemeine Gleichung des Netzes, betrachtet als ebene Curve mit getrennten und in jedem Gitterpunkt des Netzes verschwindenden Zweigen, lässt sich analytisch in folgender Form schreiben:

$$\sin^2 \frac{\xi}{a} \pi + \sin^2 \frac{\eta}{b} \pi = 0,$$

wobei π die Zahl 3,14159 ... ist. Diese Gleichung ist erfüllt für jeden Gitterpunkt des Netzes und ist es nicht für jeden anderen Punkt der Ebene.

Aufgabe II. — **Die Gleichung einer durch den Anfangspunkt und durch den Gitterpunkt P (Fig. 2) gehenden Punktreihe zu finden.**

Seien m und n die Zahlen-Coordinaten von P, so wird die Gleichung von OP in laufenden linearen Coordinaten sein.

$$\frac{\xi}{ma} = \frac{\eta}{nb}.$$

Seien x und y die Zahlen-Coordinaten irgend eines der Punktreihe OP zugehörigen Punktes, so wird man haben

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}. \tag{4}$$

Dieses ist die Gleichung der Punktreihe OP in Zahlen-Coordinaten.

Wenn m und n einen grössten gemeinschaftlichen Theiler D hätten, würde der Punkt $\frac{m}{D}, \frac{n}{D}$ zu der Punktreihe OP gehören, und wäre von allen Gitterpunkten dieser Punktreihe der nächste an dem Punkt O; wenn aber m und n relative Primzahlen sind, so ist OP der Parameter der Punktreihe.

Man kann die Gleichung (4) in der Form schreiben

$$nx - my = 0. \tag{5}$$

[10] Wenn man dann

$$\frac{n}{D} = g, \quad \frac{m}{D} = -h \tag{6}$$

setzt, wobei g und h ganze und relative Primzahlen positiver oder negativer Art sind, so wird die Gleichung

$$gx + hy = 0. \tag{7}$$

Satz I. — **Wenn m und M (Fig. 3) zwei Gitterpunkte eines Netzes sind, und wenn man durch einen dritten Gitterpunkt O eine mit mM gleiche und parallele Strecke On legt, so wird der Endpunkt dieser Strecke ein vierter Gitterpunkt des Netzes sein.**

Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten nach einander auf m und O, ohne die Richtung der Axen zu ändern; wir nennen ξ und η die Coordinaten von M in Bezug auf die durch m gelegten Axen. Es folgt aus den allgemeinen Eigenschaften der Netze und Schaaren (Seite 5), dass es in dem Netz einen Punkt von gleichen Coordinaten in dem System der durch O gelegten Axen geben wird. Sei n dieser Punkt. Die Strecke On wird gleich und parallel mM sein.

Corollarsatz. — Wenn man Mm um eine Strecke $m\mu = mM$ (Fig. 3) verlängert, so wird μ einer der Gitterpunkte des Netzes sein; also ist der Punkt m ein geometrischer Mittelpunkt des Netzes und dasselbe ist der Fall für alle anderen Gitterpunkte.

Aufgabe III. — Die allgemeine Gleichung der zu der Punktreihe OP (Fig. 2) parallelen Punktreihen zu finden.

Durch einen Gitterpunkt mit den Zahlen-Coordinaten m', n' lege man eine Parallele zu OP; ihre Gleichung in linearen Coordinaten wird sein

$$\frac{\xi - m'a}{ma} = \frac{\eta - n'b}{nb}.$$

Schafft man a aus dem ersten und b aus dem zweiten Gliede weg, so hat man

$$\frac{x - m'}{m} = \frac{y - n'}{n},$$

oder wenn man die Gleichungen (6) berücksichtigt,

$$g(x - m') + h(y - n') = 0.$$

Man hätte diese Gleichung direct aus der Gleichung (7) folgern können, indem man x und y in $x - m'$ und $y - n'$ verwandelte. Also

$$gx + hy = gm' + hn',$$

[11] oder

(8) $$gx + hy = C,$$

indem man das letzte Glied mit C bezeichnet; C ist nothwendiger Weise eine ganze Zahl. Diese Gleichung, welche so allgemein wie möglich ist, umfasst das ganze System der mit OP parallelen Punktreihen.

Bezeichnungen und Definitionen. — Wir werden künftig die Bezeichnung (gh) gebrauchen, um das ganze System der Punktreihen darzustellen, welche der durch die Gleichung (7) dargestellten Geraden parallel sind.

Die ganzen positiven oder negativen Zahlen g und h sollen die Charakteristiken für dieses System von Punktreihen in Bezug auf die Axen der x und der y sein.

Aufgabe IV. — Den Parameter der Punktreihen mit der Bezeichnung (gh) zu finden.

Sei δ der Winkel AOB (Fig. 2); sei A der Parameter der Punktreihe OP, welche vom Anfangspunkte nach dem Gitterpunkte geht, dessen Coordinaten $\frac{m}{D}$ und $\frac{n}{D}$ sind. So wird man nach einer bekannten Formel erhalten:

$$A^2 = \left(\frac{m}{D}\right)^2 a^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2 b^2 + 2\left(\frac{m}{D}\right)\left(\frac{n}{D}\right) ab \cos\delta,$$

und wenn man die Charakteristiken g, h substituirt

$$A^2 = h^2 a^2 + g^2 b^2 - 2ghab \cos\delta. \tag{9}$$

Aufgabe V. — Die Zahl der Gitterpunkte zu finden, welche in dem über den Parametern OA und OP oder OB und OP (Fig. 2) construirten Parallelogramm enthalten sind.

Nehmen wir an, dass die Zahlen-Coordinaten m und n des Punktes P positiv seien. Die Zahl der Punktreihen $Bm\ldots$, $B'rn\ldots$, $B''p\ldots$, welche parallel der x-Axe liegen, und die das Parallelogramm $OAPQ$ durchschneiden, ist gleich $n-1$. Da jeder zwischen OP und AQ gelegene Abschnitt dieser Punktreihen dem Parameter OA gleich ist, so muss er einen Gitterpunkt enthalten, welcher im Innern des Parallelogramms $OAPQ$ gelegen ist, weil er weder auf OP noch auf AQ fallen kann; folglich wird die Zahl der in diesem Parallelogramm enthaltenen Gitterpunkte $n-1$ sein. Ebenso wird die Zahl der innerhalb des Parallelogramms $OBPR$ gelegenen Gitterpunkte $m-1$ sein.

Wenn m und n negativ wären, würde man sie durch einen passenden Austausch der positiven mit den negativen Halbaxen positiv machen.

Aufgabe VI. — Die Gleichung der an OP angrenzenden Punktreihen zu finden.

Die allgemeine Gleichung der zu OP parallelen Punktreihen ist

$$gx + hy = gm' + hn';$$

[12] g und h sind gegebene relative Primzahlen; m' und n' willkürlich gewählte Zahlen.

Nun weiss man aus der Theorie der Kettenbrüche, dass man m' und n' immer so bestimmen kann, dass der Gleichung

$$gm' + hn' = +1,$$

oder der Gleichung

$$gm' + hn' = -1.$$

genügt ist.

Die Gleichung (8) wird alsdann

$$gx + hy = \pm 1, \tag{10}$$

und stellt die beiden an die Punktreihe OP angrenzenden Punktreihen $pp'\ldots$ und $rr'\ldots$ dar. Es ist klar, dass man in dem Netze keine anderen, dem Anfangspunkte O näher gelegenen Punktreihen haben kann.

Anderer Beweis der Lösung. — Seien m, n, p, q (Fig. 2) die im Innern des Parallelogramms $OAPQ$ gelegenen Punkte. Keine zwei von ihnen können in derselben Entfernung von OP liegen, denn wenn m und p in diesem Falle wären, so würde mp parallel OP sein, und auf einer mit OP parallelen Punktreihe hätte man einen geringeren Parameter als OP, was nicht sein kann.

Also wenn man die Linien pp', mm', qq' und nn' zieht, bilden sie den Anfang der Serie der mit OP parallelen Punktreihen, folglich müssen diese Linien äquidistant sein.

Da die Zahl der zwischen OP und AQ enthaltenen Gitterpunkte gleich $n - 1$ ist (Aufgabe V), so wird diejenige der zwischen diesen beiden Geraden liegenden Streifen gleich n sein. Also wird OA in n gleiche Abschnitte getheilt und man hat

$$Op' = \frac{OA}{n} = \frac{a}{n}. \tag{11}$$

Wenn man jetzt die Punktreihe pp' bis p'', dem Schnitte mit der Halbaxe der negativen y verlängert, so würde man ebenso mit Hülfe des über OP und OB construirten Parallelogramms beweisen, dass

$$Op'' = -\frac{b}{m}. \tag{12}$$

Nun ist offenbar die Gleichung von pp' in linearen Coordinaten

$$\frac{\xi}{Op'} + \frac{\eta}{Op''} = 1.$$

[13] Wenn man für ξ und η ihre aus den Gleichungen (2) hervorgehenden Werthe setzt, und statt Op' und Op'' ihre aus den Gleichungen (11) und (12) hervorgehenden Werthe, so bekommt man

$$nx + my = + 1.$$

Auf der anderen Seite von OP giebt es in dem Parallelogramm $OBPR$ eine andere angrenzende Punktreihe, die Punktreihe rr', welche mit OP einen Streifen von derselben Breite bildet, als der zwischen pp' und OP eingeschlossene Streifen.

Ihre Gleichung wird augenscheinlich

$$nx - my = - 1$$

sein, folglich sind die beiden angrenzenden Punktreihen in der gemeinschaftlichen Gleichung

$$nx - my = \pm 1$$

einbegriffen, und wenn man statt m und n die Charakteristiken g und h der Punktreihe OP setzt, indem man beachtet, dass m und n relative Primzahlen sind, da OP ein Parameter ist, so wird diese

$$gx + hy = \pm 1.$$

Aufgabe VII. — In einem System von Punktreihen deren symbolische Bezeichnung (gh) ist, soll festgestellt werden, welche Anzahl von Streifen dieses Systems zwischen dem Gitterpunkte mit den Coordinaten M und N und dem Gitterpunkte mit den Coordinaten M' und N' enthalten ist.

Denken wir uns, dass die an OP angrenzende Punktreihe pp' (Fig. 2) die Einheit als Ordnungszahl erhalte, die folgende Reihe mm' erhalte die Zahl 2, und so weiter; dann, dass man die Ordnungszahlen -1, -2, -3, ... den auf der entgegengesetzten Seite liegenden Punktreihen rr', ss'... gebe.

Die Punktreihe Nr. 1 wird die Gleichung haben

$$gx + hy = 1.$$

Die Gleichung der Punktreihe Nr. 2, die zweimal so weit vom Anfangspunkt entfernt ist als die vorige, wird sein

$$gx + hy = 2.$$

Die Punktreihe, deren Ordnungszahl C ist, wird als Gleichung haben

$$gx + hy = C.$$

[14] Woraus man ersieht, dass in der Gleichung (8) das letzte Glied gerade die Ordnungszahl der Punktreihe ist, welche man untersucht.

Seien also C und C' die Ordnungszahlen der Punktreihen, welche durch die Gitterpunkte (M, N) und (M', N') gehen, so ist

$$C = gM + hN,$$

$$C' = gM' + hN',$$

$$C - C' = g(M - M') + h(N - N'). \tag{13}$$

So wird also die Zahl der zwischen den beiden gegebenen Gitterpunkten liegenden Streifen, bis auf das Zeichen, den Werth haben

$$g(M - M') + h(N - N').$$

Corollarsatz. — In dem über den Parametern OP und OP' (Fig. 2) construirten Parallelogramm wollen wir die Coordinaten der Gitterpunkte P und P' mit (m, n) und (m', n') bezeichnen. Die Zahl der zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten dieses Parallelogramms gelegenen Streifen wird, bis auf das Zeichen, gleich $mn' - nm'$ sein.

Aufgabe VIII. — **Die Bedingung zu finden, unter der zwei Punktreihen conjugirt sind.**

Seien m und n die Zahlen-Coordinaten eines Gitterpunktes P (Fig. 2), seien m' und n' diejenigen eines anderen Gitterpunktes p. Man nimmt an, dass m und n relative Primzahlen seien, sowie, dass m' und n' relative Primzahlen seien, und gesucht werde die Bedingung, unter welcher OP und Op conjugirte Punktreihen sind.

Der Gitterpunkt p muss der einen oder der anderen der beiden an OP angrenzenden Punktreihen angehören, sonst würden die zu OP parallelen Punktreihen mit denen, welche parallel Op sind, sich in Punkten schneiden, die nicht alle Gitterpunkte des Netzes wären, und die Punktreihen OP und Op wären nicht conjugirt. Also muss, wenn man

$$x = m', \; y = n'$$

in der Gleichung (10) setzt, dieser genügt sein, was die Bedingung giebt

$$gm' + hn' = \pm 1, \tag{14}$$

und wenn man darin die Werthe von g und h einsetzt, die aus der Gleichung (6) gezogen sind, indem [15] man beachtet, dass $D = 1$ ist, so verwandelt sich diese Bedingung in

$$nm' - mn' = \pm 1. \tag{15}$$

Umgekehrt wird, wenn dieser Bedingung genügt ist, der Gitterpunkt (m', n') einer der an OP angrenzenden Punktreihen angehören, und seine Verbindungslinie mit dem Anfangspunkt wird eine zu der Punktreihe OP conjugirte Punktreihe bilden.

Wenn man statt m, n die Charakteristiken g, h der Punktreihe OP setzt und statt m', n' die Charakteristiken g', h' der Punktreihe Op, so hat man

$$hg' - gh' = \pm 1; \tag{16}$$

dies wird die Bedingung dafür sein, dass die durch die Symbole (gh) und $(g'h')$ bezeichneten Punktreihen conjugirt sind, und dass sie die Gitterpunkte des Netzes als ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte wiedererzeugen.

Aufgabe IX. — Die Bedingung zu finden, unter welcher drei Gitterpunkte (m, n), (m', n') und (m'', n'') angrenzenden Punktreihen angehören.

Legen wir den Anfangspunkt nach (m'', n''); dann werden die Zahlen-Coordinaten der beiden anderen Gitterpunkte $(m - m'', n - n'')$, $(m' - m'', n' - n'')$ sein.

Damit die Punktreihen, welche von dem neuen Ausgangspunkte nach diesen beiden Gitterpunkten gehen, conjugirte seien, muss man

$$(n - n'')(m' - m'') - (m - m'')(n' - n'') = \pm 1$$

haben, das heisst nach der Reduction

$$nm' - n'm + n''m - nm'' + n'm'' - m'n'' = \pm 1.$$

Aufgabe X. — Die Coordinatenaxen zu ändern und die neuen Coordinaten als Functionen der alten auszudrücken und umgekehrt.

Seien (m, n) und (m', n') die Zahlen-Coordinaten der beiden Gitterpunkte P und P' (Fig. 3); m und n sind relative Primzahlen, und dasselbe gilt von m' und n'.

OP und OP' seien als neue Coordinatenaxen gewählt, und X und Y seien die Zahlen-Coordinaten eines Gitterpunktes M in diesem neuen System.

Wenn man alsdann Mm parallel mit OP' bis zum

Schnittpunkt m mit OP zieht, und Mn parallel mit OP bis zu dem Schnittpunkt mit OP', so hat man

$$Om = Mn = X \cdot OP,$$
$$On = Mm = Y \cdot OP'.$$

[16] Die Zahlen-Coordinaten des Punktes m in dem alten System der conjugirten Axen OA, OB sind mX und nX; diejenigen des Punktes n sind $m'Y$ und $n'Y$.

Um die Coordinaten x und y des Punktes M im alten System zu erhalten, hat man zu beachten, dass in dem Uebergang von m zu M die Zahlen-Abscisse und -Ordinate dieselbe Vergrösserung erfahren, wie in dem Uebergange von O nach n, weil On gleich und parallel mit Mm ist. Also

$$(17) \qquad \begin{cases} x = mX + m'Y, \\ y = nX + n'Y. \end{cases}$$

Man folgert daraus, durch Elimination,

$$(18) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{n'}{n'm - m'n}\, x + \dfrac{m'}{m'n - n'm}\, y, \\[2ex] Y = \dfrac{n}{nm' - n'm}\, x + \dfrac{m}{mn' - nm'}\, y. \end{cases}$$

Wenn die Punktreihen OP, OP' conjugirt sind, so verändern sich diese Gleichungen in

$$(19) \qquad \begin{cases} \pm X = n'x - m'y, \\ \pm Y = -nx + my. \end{cases}$$

Man lasse die Axen der X und der Y sich durch eine gemeinsame Bewegung um O drehen, bis die Halbaxe der positiven X und die Halbaxe der positiven x zusammenfallen; wenn dann die Halbaxen der positiven Y und der positiven y sich auf derselben Seite in Bezug auf die zusammenfallenden Axen befinden, so sollte das obere Zeichen in den ersten Gliedern der Gleichungen (19) den Vorzug erhalten. Im entgegengesetzten Falle nehme man das untere Zeichen an.

Corollarsatz. — Nehmen wir an, dass die Axe der y sich allein verändert, und durch die zu der unveränderlich bleibenden Axe der x conjugirte Punktreihe OP ersetzt werde, und sei m_0 die Zahlen-Abscisse des Punktes P. Man wird bei dieser Veränderung der Axen erhalten

$$m = 1, \quad n = 0,$$
$$m' = m_0, \quad n' = 1;$$

daraus schliesst man

$$x = X + m_0 Y,$$
$$y = Y,$$

[17] und umgekehrt,

$$Y = y, \quad X = x - m_0 y.$$

Die mit der verschobenen Axe parallele Zahlen-Coordinate bleibt unveränderlich.

Aufgabe XI. — Man sucht das Symbol einer gegebenen Punktreihe (gh) in einem neuen Axensystem.

Seien immer wieder (m, n) und (m', n') die Zahlen-Coordinaten der Endpunkte der neuen Axen.

Wenn man in der Gleichung

$$gx + hy = C$$

die aus den Gleichungen (17) gezogenen Werthe von x, y substituirt, so erhält man

$$(gm + hn) X + (gm' + hn') Y = C,$$

woraus man sieht, dass, wenn man das neue Symbol durch (GH) darstellt, man von (gh) auf (GH) gelangt vermittelst der Formeln

$$G = gm + hn, \qquad (20)$$
$$H = gm' + hn'.$$

Corollarsatz. — Wenn man sich darauf beschränkt, unter Beibehaltung der x-Axe die Axe der y zu verändern, und als neue Axe der positiven y die Punktreihe zu nehmen, die vom Anfangspunkte zum Gitterpunkte $(-1, -1)$ geht, welche Punktreihe die im umgekehrten Sinne genommene Verlängerung von der Diagonale des über a und b construirten Parallelogramms ist, so erhält man

$$m = 1, \quad n = 0,$$
$$m' = -1, \quad n' = -1;$$

wodurch das Symbol (g, h) in $(g, -g - h)$ verändert wird.

Wenn man dann die Charakteristik der Punktreihe (gh) in Bezug auf diese neue Axe i nennt, so hat man die Gleichung

$$i = -g - h.$$

Sei c der Parameter der neuen Axe; dann wird der auf dieser Axe zwischen dem Anfangspunkte und der Punktreihe

$$gx + hy = 1\,,$$

[18] die in dem neuen System

$$gx + iY = 1\,,$$

geworden, enthaltene Abschnitt ersichtlich als Werth $\frac{c}{i}$ haben.

Man sieht daraus, dass, »wenn die Parameter a, b, c paarweise conjugirter Punktreihen auf eine Weise gewählt sind, dass sie drei Kräfte vorstellen, die einander auf der Ebene des Netzes das Gleichgewicht halten, jede Punktreihe, welche angrenzend an eine durch den Anfangspunkt gehende Punktreihe ist, auf den Parametern dieser Punktreihen die drei Abschnitte $\frac{a}{g}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{c}{i}$ bestimmen wird, wobei g, h, i ganze positive oder negative Primzahlen sind, die der Beziehung

$$g + h + i = 0 \tag{21}$$

genügen. Man kann alsdann ohne Unterschied das eine oder das andere der Symbole (gh), (gi), (ih) als Symbol der Punktreihe (gh) nehmen.«

Bezeichnung mit drei Charakteristiken. — Wenn man die Lage der Punktreihen des Netzes auf drei Coordinatenaxen, welche den eben angegebenen Bedingungen genügen, bezieht, so kann man das Symbol (gh) durch ein Symbol mit drei Zeichen (ghi) ersetzen.

Die Formel (9) nimmt in diesem System der Charakteristiken eine bemerkenswerthe Form an.

Seien (Fig. 5)

$$OA = a, \quad OC = b, \quad OE = c, \quad AOC = \delta\,;$$

so hat man

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\delta\,.$$

Indem man in der Gleichung (9) den aus dieser Formel abgeleiteten Werth $2ab\cos\delta$ substituirt und beachtet, dass man

$$h^2 + gh = -hi, \quad g^2 + gh = -gi$$

hat, erhält man für das Quadrat des Parameters der Punktreihe (ghi)

$$A^2 = -hia^2 - gib^2 - ghc^2 = -ghi\left(\frac{a^2}{g} + \frac{b^2}{h} + \frac{c^2}{i}\right). \tag{22}$$

Satz II. — *Wenn eine Punktreihe OP (Fig. 3) in dem durch [19] zwei conjugirte Punktreihen OA und OB gebildeten Winkel AOB enthalten ist, so werden alle zu OP conjugirten Punktreihen in demselben Winkelraum AOB enthalten sein.*

Wählen wir OA zur Halbaxe der positiven x, OB zur Halbaxe der positiven y, und seien m und n die Zahlen-Coordinaten des Gitterpunktes P, sie seien positiv und grösser als Null.

Setzen wir voraus, dass Op eine zu OP conjugirte Punktreihe sei, und seien

$$m' = m_0, \quad n' = -n_0$$

die Zahlen-Coordinaten des Gitterpunktes p; m_0 und n_0 sind ganze und positive Zahlen. Die allgemeine Bedingung, welche durch die Gleichung (15) vorgeschrieben ist, wird

$$nm_0 + mn_0 = \pm 1.$$

Nun ist es aber unmöglich, ihr mit solchen Werthen der Zahlen m, n, m_0, n_0, welche positiv und grösser als Null sind, zu genügen. Also kann die Punktreihe Op nicht zu OP conjugirt sein.

Aus demselben Grunde kann eine Punktreihe wie Oq (dieselbe Figur) nicht zu OP conjugirt sein. Folglich u. s. w.

Satz III. — *Das Grund-Parallelogramm des Netzes hat einen constanten Flächeninhalt, auf welche Weise es auch construirt sei.*

Ich werde von jetzt an die Fläche des Grund-Parallelogramms eines Netzes mit ω bezeichnen; $OAmB$ (Fig. 2) sei ein solches Parallelogramm.

Da die Punktreihen OP und Op conjugirt sind, wollen wir über OP und Op das Parallelogramm $OPp\varpi$ construiren, welches die aus diesem Punktreihen-Systeme abgeleitete Masche unseres Netzes sein wird. Ich behaupte, dass der

$$\text{Flächeninhalt } OP\varpi p = \text{Flächeninhalt } OAmB = \omega$$

sei.

In der That hat das Parallelogramm $OP\varpi p$ dieselbe Basis wie $OAQP$, aber die Höhe ist verschieden, und man hat [Gleichung (11)]

$$OP\varpi p : OAQP = Op' : OA = 1 : n,$$

wobei n die Zahlen-Ordinate des Gitterpunktes P ist.

Aber andrerseits ist

$$OAmB : OAQP = OB : OB^{\mathrm{IV}} = 1 : n;$$

[20] also

$$\text{Flächeninhalt } OP\varpi p = \text{Flächeninhalt } OAmB = \omega.$$

Zweiter Beweis. — Seien (m, n) die Zahlen-Coordinaten von P und (m', n') diejenigen von p. In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie wird bewiesen, dass das Dreieck, welches den Anfangspunkt mit den beiden Punkten verbindet, deren lineare Coordinaten (ξ, η) und (ξ', η') sind, als Flächeninhalt, wenn die Coordinaten-Axen rechtwinklig sind, den absoluten Werth des Ausdrucks hat

$$\tfrac{1}{2}(\eta\xi' - \xi\eta'),$$

und wenn die Axen schiefwinklig sind und mit einander einen Winkel δ bilden

$$\tfrac{1}{2}(\eta\xi' - \xi\eta') \sin\delta.$$

Also wenn man setzt

$$\text{Winkel } AOB = \delta,$$

hat man bis auf das Zeichen

$$\begin{aligned}\text{Flächeninhalt des } \triangle OpP &= \tfrac{1}{2} \sin\delta (nbm'a - man'b)\\ &= \tfrac{1}{2} ab \sin\delta (nm' - mn'),\end{aligned}$$

also wegen der Gleichung (15)

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle OpP = \tfrac{1}{2} ab \sin\delta.$$

Also

$$\text{Flächeninhalt } OP\varpi p = ab \sin\delta = \text{Flächeninhalt } OAmB = \omega.$$

Dritter Beweis. — Wir wollen übereinkommen, als Dichtigkeit des Netzes die Anzahl der Gitterpunkte zu bezeichnen, welche in der Einheit der Fläche enthalten sind, wobei die Dimensionen dieser Einheit der Fläche alle beide unendlich gross im Vergleich zu den Parametern der in Betracht gezogenen Punktreihen angenommen seien.

Nachdem dies festgesetzt, seien (Fig. 3)

$$OP = a', \quad Op = b', \quad pOP = \delta', \quad \text{Flächeninhalt } OP\varpi p = \omega';$$

so hat man

$$\omega' = a'b' \sin\delta'.$$

Nehmen wir auf der verlängerten Geraden OP, angefangen bei O, eine in Bezug auf a' sehr grosse Länge $\varkappa$, und von O auf der verlängerten Geraden Op eine in Bezug auf b' sehr grosse Länge ι, in der Weise, dass das über diesen beiden Längen $\varkappa$ und ι construirte Parallelogramm der Einheit der Fläche gleich sei, und [21] dass man also habe

$$\varkappa\iota \sin \delta' = 1 .$$

Die Anzahl der in diesem Parallelogramm enthaltenen Gitterpunkte berechnet sich wie die Zahl der Kugeln in der Basis eines rechtwinkligen Haufens nach der Formel

$$\frac{\varkappa}{a'} \times \frac{\iota}{b'} .$$

Man wird also haben, wenn ϱ diese immer sehr grosse Zahl ist,

$$\varrho = \frac{\varkappa\iota}{a'b'} = \frac{\varkappa\iota \sin \delta'}{a'b' \sin \delta'} = \frac{1}{\omega'} ;$$

nun muss aber die Zahl ϱ, welche die Dichtigkeit des Netzes misst, constant bleiben, welches auch das System der conjugirten Axen sein mag, das man zu seiner Bestimmung angenommen hat. Man erhält also

$$\omega' = \omega = ab \sin \delta. \tag{23}$$

Satz IV. — Der mittlere Abstand der Gitterpunkte eines Netzes ist gleich der Quadratwurzel aus dem Flächeninhalt seines Grund-Parallelogramms.

Poisson*) hat als »mittleren Abstand der Molecüle eines Körpers« die Seite eines Würfels bezeichnet, welcher gleich ist der Einheit des Volumens des Körpers, durch die Zahl der Molecüle getheilt, welche diese Volumen-Einheit enthält. Man kann diese Erklärung auf den Fall der Ebene anwenden, und den mittleren Abstand der Gitterpunkte eines Netzes die Seite eines Quadrats nennen, welches gleich ist der Einheit der Fläche, getheilt durch die Zahl der Gitterpunkte, welche sie enthält.

Sei ε dieser mittlere Abstand; wenn man fortfährt, die Zahl der in der Einheit des Flächeninhalts enthaltenen Gitterpunkte mit ϱ zu bezeichnen, so hat man

---

*) Journal de l'École Polytechnique, 20. Heft, p. 5. — Mémoires de l'Académie des Sciences, Band XVIII, p. 7.

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\varrho};$$

folglich nach dem vorigen Satze

(24) $$\varepsilon^2 = \omega, \quad \varepsilon = \sqrt{\omega},$$

wobei ω der constante Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms des Netzes ist.

[**22**] Aufgabe XII. — In dem Punktreihen-System, dessen symbolische Bezeichnung (gh) ist, die Breite eines Streifens zu finden.

Seien $\varDelta$ die unbekannte Breite dieses Streifens, A der Parameter der beiden angrenzenden Punktreihen, welche ihn einschliessen. Der Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms ist dann gleich $\varDelta A$. Man hat also

(25) $$\varDelta A = \omega.$$

Indem man die aus den Gleichungen (9) und (23) gezogenen Werthe für A und ω substituirt, erhält man

$$\varDelta = \frac{ab \sin \delta}{\sqrt{h^2 a^2 + g^2 b^2 - 2 g h a b \cos \delta}},$$

oder einfacher

(26) $$\varDelta = \frac{\sin \delta}{\sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} - 2 \frac{gh}{ab} \cos \delta}}.$$

Definition. — Ich bezeichne als elementares Dreieck jedes Dreieck, das als Ecken drei Punkte des Netzes hat, welche zwei angrenzenden Punktreihen angehören.

Ein solches Dreieck ist immer die Hälfte eines der Grund-Parallelogramme des Netzes.

Man kann es als die dreieckige Masche des Netzes ansehen.

Ich bezeichne mit dem Namen hauptelementares Dreieck oder kürzer unter dem Namen Haupt-Dreieck dasjenige, welches den kleinsten Parameter des Netzes zur Basis hat, und dessen Winkel an der Basis spitz sind, einer von ihnen kann ausnahmsweise ein Rechter werden.

Satz V. — Die elementaren Dreiecke haben einen constanten Flächeninhalt, der gleich der Hälfte des Flächeninhalts des Grund-Parallelogramms ist. Das

Dreieck, welches den Anfangspunkt zur Spitze und die Strecke, welche die Punkte (m, n) und (m', n') verbindet, zur Basis hat, hat als Flächeninhalt das Product des Flächeninhalts des elementaren Dreiecks in den absoluten Werth des Factors $mn' - nm'$.

Der erste Theil des Satzes ist klar; die Flächeninhalte der elementaren Dreiecke haben als gemeinsamen Werth $\frac{1}{2}\,\omega$.

Seien nun P und P' (Fig. 2) die Gitterpunkte mit den Zahlen-Coordinaten (m, n) und (m', n'), so wird man nach dem zweiten Beweise des [23] Satzes III haben:

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, OPP' = \tfrac{1}{2}\, ab \sin \delta (nm' - mn').$$

Nun ist

$$ab \sin \delta = \omega;$$

folglich

$$(27) \quad \text{Flächeninhalt des } \triangle\, OPP' = \tfrac{1}{2}\omega (nm' - mn').$$

Wenn man m und n mit einem gemeinsamen Factor D multiplicirt, so werden das erste und das zweite Glied beide Dmal grösser, so dass die Gleichung (27) nicht gestört wird; sie wird es ebenso wenig in dem Fall, wo man m' und n' mit einem Factor D' multiplicirte. Also findet diese Gleichung immer statt, selbst wenn m, n oder m', n' nicht relative Primzahlen sind.

Aufgabe XIII. — Das Haupt-Dreieck eines Netzes zu finden.

Man wähle willkürlich einen Gitterpunkt O (Fig. 4) und suche unter allen anderen Gitterpunkten den O zunächst liegenden.

Sei A dieser Gitterpunkt, OA also der kleinste Parameter des Netzes. In O und A errichte man die Geraden Op und Am senkrecht auf OA, und suche in dem nicht allseitig begrenzten Raume $pOAm$ den der Geraden OA zunächst gelegenen Gitterpunkt. Man wird ihn nothwendigerweise in B, auf der an OA angrenzenden Punktreihe finden. Verbindet man OB und BA, so wird OAB das Haupt-Dreieck des Netzes sein.

Satz VI. — Das Haupt-Dreieck ist das einzige elementare Dreieck, dessen drei Winkel spitz sind.

In der That, sei OAB (Fig. 5) das Haupt-Dreieck. Ziehen wir die Gerade COF parallel zu BA; die drei Punktreihen AOD, BOE, COF sind paarweise conjugirt. Also wird jedes Elementar-Dreieck, das seine Spitze in O hat, in einem der sechs Winkelräume AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA enthalten sein (Satz II). Sei $O\alpha\beta$ ein solches Dreieck; die Punktreihe $O\gamma$, welche von O parallel mit $\alpha\beta$ gezogen ist, muss, da sie zu $O\alpha$ und $O\beta$ conjugirt ist, in demselben Winkelraum AOB enthalten sein (Satz II). Wenn das Dreieck $O\alpha\beta$ drei spitze Winkel hätte, so müsste der Winkelraum, welcher durch die drei Geraden $O\alpha$, $O\beta$ und $O\gamma$ eingeschlossen wird, gleich 90 Grad oder mehr sein. Das ist aber im gegenwärtigen Fall unmöglich, weil, wie wir eben bewiesen haben, der Winkel $\alpha O\gamma$ nothwendigerweise kleiner als der spitze oder rechte Winkel AOB ist.

[**24**] Um also ein spitzwinkliges Dreieck zu erhalten, muss man $O\alpha$ mit OA und $O\beta$ mit OB zusammenfallen lassen, und man findet so das Haupt-Dreieck wieder.

Anmerkung. — Die sechs Dreiecke, welche das Sechseck $ABCDEF$ bilden, sind alle inhaltlich und deckbar gleich, sie bilden also nur eine einzige Lösung. Man wird bemerken, dass diese Dreiecke von zwei Arten sind: die Einen, nämlich OAB, DOC, EFO, drehen ihren kleinsten Parameter nach unten, und können durch eine einfache Translation, ohne Drehung zur Deckung gebracht werden; die drei anderen stehen in umgekehrter Lage, und man kann sie mit den ersten nur durch eine Drehung von 180°, um eine auf der Ebene Senkrechte, zur Deckung bringen.

Zum Beispiel wird DOC sich mit DOE durch eine halbe Umdrehung in seiner Ebene, um die Mitte O' der den beiden Dreiecken gemeinsamen Basis OD, zur Deckung bringen lassen. Eine halbe Umdrehung um O würde DOC mit AOF zur Deckung bringen.

Corollarsatz. — Da das Haupt-Dreieck keinen einzigen Winkel hat, der grösser ist als 90°, so schliesst man daraus:

1. Dass sein kleinster Winkel zwischen Null und 60°, inclusive, enthalten ist;
2. Dass sein mittlerer Winkel zwischen 45 und 90°, inclusive, enthalten ist;
3. Dass sein grösster Winkel zwischen 60 und 90°, inclusive, enthalten ist.

Satz VII. — Das Haupt-Dreieck gehört dem breitesten Streifen an.

Aus der Gleichung (25) folgert man nämlich

$$\Delta = \frac{\omega}{A}.$$

Da nun ω für das ganze Netz constant ist, so erreicht Δ sein Maximum, wenn der Parameter seinen Minimalwerth annimmt. Wenn man also den Minimal-Parameter zur Basis des Haupt-Dreiecks nimmt, und eine Parallele zu der Basis durch die Spitze dieses Dreiecks legt, so wird der zwischen diesen Parallelen eingeschlossene, das Haupt-Dreieck enthaltende Streifen der breiteste des ganzen Netzes sein.

Anmerkung. — Dieser Maximalwerth von Δ kann nicht geringer sein als $a\sqrt{\frac{3}{4}}$, [25] wenn man mit a den Minimal-Parameter des Netzes bezeichnet. Man construire nämlich um O (Fig. 4) als Mittelpunkt den Viertelkreis ANP, und um A als Mittelpunkt den Viertelkreis ONM. Die Spitze B des Haupt-Dreiecks wird in dem nicht allseitig begrenzten Raum $pPNMm$ liegen. Die Höhe Δ dieses Dreiecks wird die kleinstmögliche sein, wenn B mit N zusammenfällt. Wenn man also die Maximalbreite der Streifen des Netzes mit Δ_0 bezeichnet, so hat man

$$\Delta_0 > \text{ oder } = a\sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$

Satz VIII. — **Das Haupt-Dreieck enthält die drei kleinsten Parameter des ganzen Netzes.**

Seien OA (Fig. 5) der Minimal-Parameter und OB die kleinste der beiden andern Seiten des Haupt-Dreiecks; seien OAB und OBC die beiden über OB construirten Haupt-Dreiecke. Die zu OA normale Linie Oi wird zwischen den Gitterpunkten B und C durchgehen. Für irgend einen der verlängerten Punktreihe BC angehörigen Gitterpunkt α wird man augenscheinlich bekommen

$$i\alpha > iB\,, \quad i\alpha > iC;$$

also

$$O\alpha > OB\,, \quad O\alpha > OC, \quad \text{wofür auch } AB \text{ stehen kann.}$$

Wenn der Punkt α der an BC angrenzenden Punktreihe angehörte, derselben welche die Normale Oii' in der Entfernung $Oi' = 2\,Oi$ schneidet, so hätte man

$$O\alpha > Oi';$$

nun hat man ferner

$$Oi' = 2\,Oi = 2\,AB \times \sin OAB.$$

Und schliesslich noch, dem Corollarsatz zum Lehrsatz VI entsprechend, weil OAB der mittlere Winkel ist:

$$OAB > \text{oder} = 45^{\circ}, \quad 2 \sin OAB > \text{oder} = \sqrt{2};$$

also

$$O\alpha > AB\sqrt{2}.$$

So wird also in allen Fällen der Parameter $O\alpha$ den Parameter AB übertreffen, der, der Veraussetzung nach, die grösste Seite des Haupt-Dreiecks ist.

Anmerkung. — Ausnahmsweise kann natürlich

$$OB = OA, \text{ und selbst } OC = OB = OA$$

sein. [26] Man kann auch ausnahmsweise $O\alpha = OC$ haben, aber nur in dem Falle, wo das Dreieck BOA in O rechtwinklig wäre.

Corollarsatz. — Das Haupt-Dreieck ist unter allen Elementar-Dreiecken des Netzes das Dreieck von kleinstem Umfang.

Satz IX. — Wenn irgend ein Punkt im Innern eines Haupt-Dreiecks genommen wird, so wird eine der drei Ecken dieses Dreiecks diesem Punkt immer näher liegen als jeder andere Gitterpunkt des Netzes.

Man würde diesen Satz beweisen, indem man über OA, OB und BA (Fig. 5) als Durchmessern Halbkreise ausserhalb des Dreiecks BOA construirte und beachtete, dass diese drei Halbkreise keinen einzigen Gitterpunkt enthalten können.

§ III. — Von den symmetrischen Netzen.

Definitionen. — Jede Gerade, welche ein Netz in zwei symmetrische Hälften theilt, das heisst solche Hälften, von denen jede durch eine halbe Umdrehung um die Gerade, Gitterpunkt auf Gitterpunkt, mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann, soll Symmetrie-Axe des Netzes heissen. Die Gitterpunkte, welche so zur Deckung gebracht werden, sollen homolog in Bezug auf die Symmetrie-Axe heissen. Wir werden bald sehen, dass diese Axen immer als Punktreihen angesehen werden können. Das Netz, welches eine oder mehrere Symmetrie-Axen besitzt, soll symmetrisches Netz heissen, und im entgegengesetzten Fall asymmetrisches.

Wenn das Netz mehrere Symmetrie-Axen besitzt, so können diese Axen *gleichartig oder ungleichartig sein.*

Zwei Symmetrie-Axen sollen gleichartig genannt werden, wenn die Anordnung des Netzes um jede von ihnen die gleiche ist, was als erste Bedingung verlangt, dass sie denselben Parameter haben. Wenn man dann in Gedanken die Gitterpunkte des Netzes mit jeder dieser Axen verbindet, zum Beispiel vermittelst auf diese Axen gefällter Senkrechten, so dass man zwei gleiche Netze bildet, deren Gitterpunkte sich decken, und wenn eins dieser Systeme als beweglich angenommen wird, so müssen, damit diese Axen von derselben Art sind, durch geeignete Bewegungen des beweglichen Netzes gleichzeitig die bewegliche Axe mit der festen und die beweglichen mit den festen Gitterpunkten zur Deckung gebracht werden können.

Zwei Symmetrie-Axen sind von verschiedener Art, wenn die Anordnung des Netzes um beide von ihnen nicht dieselbe ist.

[27] *Satz X. — Jeder Symmetrie-Axe, welche keinen Gitterpunkt des Netzes enthält, entsprechen andere ihr parallele Axen, welche durch Gitterpunkte gehen; das Haupt-Dreieck ist alsdann rechtwinklig.*

Sei GH eine solche Symmetrie-Axe (Fig. 6); seien A ein Gitterpunkt und A' der zu A homologe Gitterpunkt auf einer zu GH normalen Linie. Man verbinde A, A', und wähle auf der Punktreihe AA' die beiden der Axe GH am nächsten liegenden Gitterpunkte, den einen auf einer Seite, den andern auf der andern. Nehmen wir an, dass die Gitterpunkte AA' dieser Bedingung genügen, und ziehen wir AB und $A'B'$ parallel mit GH.

Sei jetzt BB' die an die Punktreihe AA' angrenzende Punktreihe; ihr Parameter wird nothwendigerweise gleich AA' sein, ihre Durchschnittspunkte mit den Geraden AB und $A'B'$ werden Gitterpunkte des Netzes sein; denn wenn ein Gitterpunkt zwischen B und B' fiele, so würde er in einer Entfernung von seinem homologen sein, die kleiner wäre als der Parameter AA', was nicht möglich ist. Also werden AB und $A'B'$ Punktreihen vom Parameter $AB = A'B'$ und conjugirt zu AA', BB' sein. Diese Punktreihen sind augenscheinlich Symmetrie-Axen. Das Haupt-Dreieck ist alsdann $A'AB$, oder $A'B'B$; es ist rechtwinklig.

Corollarsatz. — Man kann die Axe GH durch die ihr parallelen Symmetrie-Axen AB und $A'B'$ ersetzen, oder durch irgend eine zu AB parallele Punktreihe, die, wie ersichtlich, auch eine Symmetrie-Axe sein wird.

Man sagt dann, dass das Netz eine zu AB parallele Symmetrie-Axe besitzt. Man muss darunter verstehen, dass alle zu AB parallelen Punktreihen solche Axen sind.

Nachdem ein System von parallelen Symmetrie-Axen gefunden ist, welche durch Gitterpunkte gehen, kann man sich fragen, ob es nicht Axen gäbe, die mit den vorigen parallel wären und keinen Gitterpunkt enthielten. Ich bezeichne diese letzteren mit dem Namen Zwischenaxen; aber da diese Axen, wenn sie vorhanden sind, keinen neuen Begriff in das Studium der Netze bringen, werde ich sie nicht beachten, und werde künftig annehmen, dass jede Symmetrie-Axe durch einen Gitterpunkt gehe.

Satz XI. — Jede Symmetrie-Axe, welche durch einen Gitterpunkt geht, ist eine der Punktreihen des Netzes.

Sei GOH (Fig. 7) die durch den Gitterpunkt O gehende Axe, und sei A ein anderer Gitterpunkt ausserhalb der Axe. Der Punkt A hat seinen homologen in A', zufolge der [28] Symmetrie, welche die Axe GOH besitzt; aber andererseits hat, vermöge der allgemeinen Symmetrie jedes Netzes, A' einen correspondirenden Gitterpunkt A'' auf der anderen Seite von O in Bezug auf A'. Also ist die Gerade AA'' eine Punktreihe; aber sie ist parallel mit GOH; folglich ist GOH auch eine Punktreihe des Netzes.

Satz XII. — Jeder Symmetrie-Axe entspricht eine zweite Symmetrie-Axe, die senkrecht zu ihr steht und sie in einem Gitterpunkt schneidet.

Wenn man die Gerade IOK (Fig. 7) zieht, welche durch den Gitterpunkt O geht und normal zu GOH ist, so wird sie Mittelsenkrechte von AA'' sein; also entspricht jedem Gitterpunkt A ein anderer Gitterpunkt A'', der sein homologer in Bezug auf IOK ist; folglich ist IOK auch eine Symmetrie-Axe des Netzes.

Satz XIII. — Jeder Symmetrie-Axe entspricht eine unendliche Anzahl anderer Symmetrie-Axen, die ihr parallel sind und durch alle Gitterpunkte des Netzes gehen.

Dies ist ein Resultat der allgemeinen Gesetze der regelmässigen Vertheilung der Gitterpunkte in irgend einem Netze.

Die Symmetrie eines Netzes nach einer bestimmten Richtung ist niemals durch eine einzige Axe charakterisirt, sondern durch ein System von parallelen Axen, welche ein completes System von unter sich parallelen Punktreihen bilden, die alle Gitterpunkte des Netzes umfassen.

Satz XIV. — Jedes Netz, welches eine Symmetrie-Axe besitzt, hat als Haupt-Dreieck ein rechtwinkliges Dreieck oder ein gleichschenkliges Dreieck.

Sei nämlich OMm (Fig. 8) die durch zwei benachbarte Gitterpunkte O und M gehende Symmetrie-Axe; sei $O'M'$ die Gerade, auf der die an OM angrenzende Punktreihe gelegen ist. Die zwischen den Senkrechten OO' und MM' befindliche Strecke $O'M'$ muss einen der Gitterpunkte des Netzes enthalten.

Sei also N dieser Gitterpunkt, der seinen homologen in N' hat. Wenn man

$$M'N'' = O'N = O''N'$$

macht, so wird die Strecke MN'' gleich und parallel ON' sein, also wird N'' einer der Gitterpunkte des Netzes sein (Satz I). Nun kann es aber keine zwei verschiedene Gitterpunkte N und N'' zwischen O' und M' geben. Es muss also einer von den beiden folgenden Fällen vorliegen: entweder erstens muss $NN'' = O'M'$ sein, in welchem Falle N auf O' und N'' auf M' fällt, [29] oder zweitens muss $NN'' = 0$ sein. In dem ersten Falle wird das Haupt-Dreieck $O'OM$ oder OMM' sein, das heisst rechtwinklig. In dem zweiten Falle fällt N mit der Mitte P von $O'M'$ zusammen; das Dreieck OPM ist gleichschenklig und ist überdies, wenn $POM > 45$ Grad ist, das Haupt-Dreieck des Netzes; wenn aber $POM < 45$ Grad, so wird das Dreieck POP', wobei P' der homologe Gitterpunkt des Gitterpunktes P ist, das Haupt-Dreieck sein (Satz VI); es wird ebenfalls gleichschenklig sein.

Corollarsatz I. — Jedes Netz, dessen Haupt-Dreieck ungleichseitig ist, ist asymmetrisch.

Corollarsatz II. — Jedes symmetrische Netz hat als Grund-Parallelogramm ein Rechteck oder einen Rhombus: das Rechteck $OO'M'M$ (Fig. 8), wenn das Haupt-Dreieck $OO'M$ ist; den Rhombus $OPMP'$, wenn das Haupt-Dreieck OPP' oder OPM ist.

Satz XV. — Umgekehrt besitzt das Netz, wenn das Haupt-Dreieck rechtwinklig ist, zwei Symmetrie-Axen, die parallel mit den kleineren Seiten des Dreiecks sind, und wenn das Haupt-Dreieck gleichschenklig ist, besitzt das Netz zwei Symmetrie-Axen, die eine parallel und die andere senkrecht zu der Basis.

Das Netz mit rechtwinkliger Masche hat die Seiten des Rechtecks zu Axen; es giebt in diesem Falle Zwischenaxen der Symmetrie, die mit den vorigen parallel sind und durch die Mittelpunkte der Grund-Rechtecke gehen. Das Netz mit rhombischer Masche hat die Diagonalen des Rhombus zu Axen.

Definition. — Ein Netz centriren, oder die Maschen eines Netzes centriren heisst, neue Gitterpunkte in dem Mittelpunkte von jedem der Grund-Parallelogramme hinzufügen.

Satz XVI. — Wenn man alle Rechtecke eines Netzes mit rechtwinkligen Maschen centrirt, so bildet man ein Netz mit rhombischen Maschen; wenn man alle Rhomben eines Netzes mit rhombischen Maschen centrirt, so wird das Netz rechtwinklig.

Dieser Satz ist evident, es ist wichtig zu bemerken, dass diese Veränderungen die Symmetrie-Axen des Systems nicht ändern.

Satz XVII. — In dem Netz mit centrirten Rhomben und in dem Netz mit nicht centrirten Rhomben kommen dieselben Systeme von Punktreihen vor. [30] Dasselbe ist der Fall bei den Netzen mit rechtwinkligen centrirten oder nicht centrirten Maschen.

Sei $abc\ldots$, $ABC\ldots$ (Fig. 9) ein rhombisches Netz mit der Masche $AaBa'$, und betrachten wir das System der Punktreihen, welche parallel einer der Diagonalen des Rhombus, z. B. AB, liegen. Wenn man diese Diagonale zur Axe der x nimmt, so wird irgend eine der zu dieser Axe parallelen Punktreihen durch die Zahlengleichung

$$y = n$$

charakterisirt sein, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Das rhombische Netz verwandelt sich in das rechtwinklige Netz mit der Masche $ABA'B'$, wenn man alle durch die Gleichung

$$y = 2j + 1$$

dargestellten Punktreihen wegnimmt, wobei j irgend eine ganze Zahl ist. Diese Verminderung lässt alle Gitterpunkte mit ungeraden Zahlen-Ordinaten verschwinden.

Die Punktreihe, welche zwei Gitterpunkte mit den geradzahligen Ordinaten $2j$ und $2j'$ verbindet, kommt augenscheinlich sowohl in dem ursprünglichen Netz vor als in dem gehälfteten. Wenn man einen Gitterpunkt mit der geradzahligen Ordinate $2j$ mit einem Gitterpunkt von der Ordinate $2j' + 1$ verbindet, so wird die so erhaltene Punktreihe, wenn sie jenseits dieses letzten Gitterpunktes um eine Strecke gleich dem Abstand der beiden gegebenen Gitterpunkte verlängert wird, in einem dritten Gitterpunkte enden, der eine Ordinate gleich $4j' + 2 - 2j$, also eine geradzahlige Ordinate besitzt. Diese Punktreihe wird also dem gehälfteten Netze angehören, aber ihr Parameter wird darin zwei Mal grösser sein als in dem ursprünglichen Netze.

Wenn man endlich die beiden Gitterpunkte mit ungeraden Ordinaten $2j + 1$ und $2j' + 1$ verbindet, so giebt es zwar die auf diese Weise erhaltene Punktreihe nicht in dem gehälfteten Netze; aber wenn man eine ihr Parallele durch den Gitterpunkt zieht, der als Anfangspunkt dient, so wird das äussere Ende des Parameters auf einen Punkt fallen, der als Ordinate $\pm (2j' - 2j)$ hat, und der den Punktreihen des gehälfteten Netzes angehört.

Die Halbirung des Netzes hat also kein einziges System der Punktreihen verschwinden lassen.

Man kann ebenso beweisen, dass, wenn man in dem Netze mit rechteckiger Masche $a'Ab'A'$ (Fig. 10), alle Punktreihen von ungerader Ordnung wie abc, [**31**] $a'b'c'd'$, ... in dem System der zu den Diagonalen $a'b'$, AB parallelen Punktreihen unterdrückte, das Netz mit rhombischer Masche $ABA'B'$, welches aus dieser Weglassung entsteht, die gleichen Systeme von Punktreihen zeigen wird wie das ursprüngliche Netz, abgesehen von den nothwendigen Aenderungen in den Parametern dieser Punktreihen oder in den Zwischenräumen, welche sie trennen.

Satz XVIII. — Wenn das Haupt-Dreieck eines Netzes zu gleicher Zeit rechtwinklig und gleichschenklig ist, so wird das Netz vier Systeme von Axen haben: zwei Systeme, die unter sich rechtwinklig und von derselben Art sind, werden die Seiten des Grund-Quadrats als Parameter haben;

zwei andere Systeme, von einer anderen Art als die vorigen, werden gleichfalls rechtwinklig unter einander sein, sie werden die Diagonalen des Grund-Quadrats als Parameter haben und die vorigen Axen unter Winkeln von 45 Grad schneiden.

Dieses ist eine evidente Folgerung aus dem Satze XV.

Satz XIX. — Wenn das Haupt-Dreieck eines Netzes gleichseitig ist, so wird das Netz sechs Systeme von Axen besitzen: drei Systeme einer ersten Art werden wie die Seiten des Haupt-Dreiecks gerichtet sein; drei andere unter sich gleiche Systeme, aber von einer anderen Art als die vorigen, werden senkrecht auf den Seiten des Haupt-Dreiecks sein.

Dieses ist wieder eine Folge des Satzes XV. Die Figur 11 stellt die Vertheilung der Axen vor; die ausgezogenen Linien entsprechen den Axen der ersten Art, die punktirten Linien denen der zweiten.

Eintheilung der symmetrischen Netze.

Aus dem Gesichtspunkt ihrer Symmetrie kann man vier verschiedene Classen von Netzen unterscheiden:

Erste Classe. — Netze mit sechs Symmetrie-Axen, drei von einer Art und drei von einer anderen Art. Diese Classe zeigt nur eine einzige Art; das Netz mit dreieckiger gleichseitiger Masche, welches als Grund-Parallelogramm einen Rhombus mit Winkeln von 60 und 120 Grad hat. (Siehe Satz XIX).

Zweite Classe. — Netze mit vier Symmetrie-Axen, zwei von einer Art, zwei von einer anderen Art. Diese Classe zeigt nur eine einzige Art; das Netz mit quadratischen Maschen. (Siehe Satz XVIII).

Dritte Classe. — Netze mit zwei Symmetrie-Axen. Diese Classe zeigt zwei verschiedene Arten: das Netz mit rhombischer Masche oder centrirtem Rechteck; das [32] Netz mit rechtwinkliger Masche oder centrirtem Rhombus (Sätze XV und XVI). Die beiden Axen sind unter sich rechtwinklig und von verschiedener Art.

Vierte Classe. — Asymmetrische Netze, die Masche ist ein Parallelogramm mit ungleichen Seiten, dessen Winkel von 90 Grad verschieden sind.

Von den gleichartigen Punktreihen in den symmetrischen Netzen.

Definition. — Wir wollen wie auf Seite 30 voraussetzen, dass in dem gegebenen Netze zwei gleiche Netze existiren, die, Gitterpunkt auf Gitterpunkt, übereinandergelegt sind, so dass sie nur ein einziges Netz vorstellen. Das eine der beiden Netze soll als unbeweglich angenommen werden, aber das andere soll sich als Ganzes bewegen können, sei es durch Translation oder durch Drehung.

Nachdem dies festgestellt, sollen, wenn vor irgend einer Verschiebung eine gegebene Punktreihe des beweglichen Netzes mit der feststehenden Punktreihe $abc\ldots$ zusammenfällt und man durch passende Bewegungen des beweglichen Netzes diese Punktreihe mit der festen Punktreihe $ABC\ldots$ zur Deckung bringen kann, während gleichzeitig die beiden Netze Gitterpunkt auf Gitterpunkt zusammenfallen, die beiden Punktreihen $abc\ldots$ und $ABC\ldots$ gleichartig heissen.

Satz XX. — Zwei parallele Punktreihen können immer als gleichartig betrachtet werden.

Denn wenn man dem beweglichen Netze eine passende Bewegung der Translation, ohne Drehung, giebt, so wird man das gewünschte Zusammenfallen immer herbeiführen können.

Satz XXI. — Zwei Punktreihen sind gleichartig, wenn sie denselben Parameter haben, und wenn man über diesen Parametern als Basis zwei, unter einander gleiche, Elementar-Dreiecke construiren kann.

Durch eine einfache Translation kann man stets einen Gitterpunkt der beweglichen Punktreihe mit einem Gitterpunkt der festen Punktreihe zusammenfallen lassen. Sei also O (Fig. 12) der gemeinsame Punkt; sei OA die bewegliche Punktreihe, über deren Parameter OA man das Elementar-Dreieck OAa construirt hat. Sei OA' die feste Punktreihe, über deren Parameter OA' man das Elementar-Dreieck $OA'a'$ construirt hat. Man hat als Voraussetzung $OA = OA'$. Es ist erlaubt anzunehmen, dass man $Oa = Oa'$ hat, denn wenn man $Oa' = aA$ hätte, so würde eines der Elementar-Dreiecke auf der entgegengesetzten Seite des Parameters, der ihm zur Basis dient, construirt werden können, und die Beziehung $Oa = Oa'$ wäre dann erfüllt.

[33] Wenn wir jetzt das bewegliche Netz um einen Winkel gleich AOA' um eine durch O gehende und zur Ebene des Netzes normale Rotations-Axe drehen, so werden die beiden Elementar-Dreiecke zusammenfallen, und die Deckung der beiden Netze wird eine vollständige sein.

In dem Falle, wo die beiden Elementar-Dreiecke invers gelegen wären, wie es OaA und $Oa'''A'''$ sind, könnte man die Deckung nicht durch Drehung um die Normale der Ebene erreichen; aber dann würde man dazu gelangen, indem man das bewegliche Netz um 180° um die Gerade OO', die den Winkel AOA''' halbirt, sich drehen lässt. Folglich sind auch in diesem Falle die beiden Punktreihen von derselben Art.

Anmerkung. — Die Halbirende des durch zwei Punktreihen mit gleichen aber invers gelegenen Elementar-Dreiecken gebildeten Winkels ist eine Symmetrie-Axe des Netzes.

Definition. — Die Punktreihen OA und OA' (Fig. 12), deren Elementar-Dreiecke durch Drehung um die durch O gehende Normale zur Deckung gebracht werden können, sollen *direct ähnlich* heissen. Die Punktreihen OA und OA''', deren Elementar-Dreiecke invers sind, sollen *invers ähnlich* genannt werden.

Wenn die beiden Elementar-Dreiecke, welche über den Parametern als Basis construirt sind, gleichschenklig sind, so sind die Punktreihen gleichzeitig direct ähnlich und invers ähnlich.

Satz XXII. — *Zwei, in Bezug auf eine der Symmetrie-Axen des Netzes homologe Punktreihen sind gleichartig und invers ähnlich.*

Die inverse Ähnlichkeit ist hier das Resultat der Symmetrie.

Satz XXIII. — *Wenn zwei oder mehrere gleichartige und direct ähnliche Punktreihen vorhanden sind, die von demselben Punkte ausgehen, so theilt das vollständige System dieser Punktreihen den diesen Gitterpunkt umgebenden Raum in gleiche Theile.*

Unter den Punktreihen, welche OA (Fig. 12) direct ähnlich sind, können wir diejenige herausgreifen, die mit OA den kleinsten Winkel einschliesst. Sei OA' diese Punktreihe. Lassen wir das bewegliche Netz sich um die durch O gehende Normale drehen, bis die bewegliche Punktreihe OA mit der festen Punktreihe OA' zusammenfällt. Bei dieser Bewegung wird die bewegliche Punktreihe OA' nach OA'' kommen, welches [34] eine der Punktreihen des festen Netzes sein muss, und man findet so

$$A'OA'' = AOA'.$$

Eine Drehung um denselben Winkel, und in demselben Sinne wie vorher, wird die bewegliche Punktreihe OA nach OA'' bringen, und wenn man so fortfährt, wird OA schliesslich auf $O\alpha$, die Verlängerung von OA fallen, nach einer gesammten Drehung von 180 Grad. Alle die auf diese Weise erhaltenen Punktreihen OA, OA', OA'', ... werden direct ähnlich sein, und wenn man die Gesammtzahl dieser Punktreihen mit q bezeichnet, hat man

$$AOA' = \frac{180^\circ}{q}.$$

Satz XXIV. — Die Gesammtzahl der gleichartigen und direct ähnlichen Punktreihen in einem Netze kann nicht grösser als drei sein.

Sei q die Gesammtzahl der direct ähnlichen Punktreihen; sei O (Fig. 13) ihr gemeinsamer Gitterpunkt, und OM der kleinste Parameter des Netzes. Man drehe OM um O um einen Winkel gleich $\frac{180^\circ}{q}$: man weiss aus dem vorigen Satz, dass bei dieser Bewegung das bewegliche Netz mit dem feststehenden wieder zusammenfällt.

Sei also $MOM' = \frac{180^\circ}{q}$; M' wird einer der Gitterpunkte des Netzes sein. Man beschreibe einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OM, und mache Bogen $M''M'$ = Bogen $M'M$, Bogen $M'''M''$ = $M''M'$ u. s. w. Die Punkte M, M' und M'' werden alle dem Netze angehören, und die Sehnen MM' und $M'M''$ werden die Seiten eines regelmässigen, eingeschriebenen Polygons sein, dessen Seitenzahl gleich $2q$ ist.

Dieses Polygon kann nur ein Quadrat oder ein Sechseck sein. Construiren wir nämlich die Raute $MM'M''m$, so wird augenscheinlich Winkel $M'Mm$ = Winkel $M'OM$ sein; also werden die Dreiecke $M'OM$ und $M'Mm$ gleichschenklig und ähnlich sein, und man hat

$$M'm = \frac{\overline{M'M}^2}{OM}.$$

Wenn folglich $M'M < OM$ ist, wird *a fortiori* $M'm < OM$, und da m ein Gitterpunkt des Netzes ist, wäre OM nicht mehr der kleinste Parameter. Nun ist aber bei jedem regelmässigen eingeschriebenen Polygon mit höherer Seitenzahl als sechs die Seite kleiner [35] als der Radius. Also muss das Polygon $MM'M''' \ldots$ ein Quadrat oder ein Sechseck sein, und die Zahl q wird gleich 2 oder 3 sein. Wenn $q = 2$ ist, so besitzt das Netz eine quadratische Masche; wenn $q = 3$ ist, besitzt das Netz eine dreieckige, gleichseitige Masche.

Corollarsatz. — Der Winkel, welcher von zwei direct ähnlichen Punktreihen gebildet wird, kann nur gleich 60 oder 90 Grad sein.

Satz XXV. — Gleichartige und direct ähnliche Punktreihen können nur in Netzen mit quadratischer oder dreieckig gleichseitiger Masche vorkommen.

Dieser Satz ist eine Folgerung aus dem vorhergehenden Corollarsatz. Die beiden folgenden, welche keines Beweises mehr bedürfen, sind die Umkehrungen dieser Sätze.

Satz XXVI. — In jedem Netz mit quadratischer Masche, welches in seiner Ebene um einen seiner Gitterpunkte gedreht wird, wird der Ort der Gitterpunkte nach jeder viertel Umdrehung wieder derselbe, und jedem Punktreihen-System entspricht ein anderes System gleichartiger direct ähnlicher Punktreihen, welches senkrecht zu ihm steht.

Satz XXVII. — In jedem Netz mit dreieckig gleichseitiger Masche, welches sich um einen seiner Gitterpunkte dreht, wird der Ort der Gitterpunkte derselbe nach jedem Sechstel der Umdrehung, und jedem Punktreihen-System entsprechen zwei andere Systeme von gleichartigen und direct ähnlichen Punktreihen, welche eine Neigung von 60 Grad zu dem gegebenen Systeme haben.

Definitionen. — Wenn ein Netz bei einer Drehung um eine Normale zu seiner Ebene die Stellung seiner Gitterpunkte bei jedem Viertel der Umdrehung wiedererhält, so soll diese Gerade eine quaternäre Symmetrie-Axe des Netzes genannt werden. Wenn der Ort der Gitterpunkte nach jedem Sechstel der Umdrehung derselbe wird, so ist die Drehungs-Axe eine senäre Symmetrie-Axe. Wenn solche Axen vorhanden sind, so bilden sie ein System von parallelen, durch jeden Gitterpunkt gehenden Geraden.

Die quaternäre Symmetrie charakterisirt das Netz mit quadratischer Masche, die senäre Symmetrie das Netz mit dreieckig gleichseitiger Masche.

Die Figuren 14, 15 und 16 zeigen die Art der Anordnung der gleichartigen Punktreihen, seien sie direct oder invers ähnlich, um einen und denselben Gitterpunkt O für diese verschiedenen Classen von Netzen. Die ausgezogenen Linien sind Symmetrie-Axen, die Striche von ungleicher Länge bezeichnen die Axen von verschiedenen Arten, die punktirten Linien sind die Punktreihen, deren Art [36] dieselbe ist als diejenige einer Punktreihe von gegebenem Parameter. Die Figur 14 bezieht sich auf die Netze der ersten Classe mit dreieckig gleichseitiger Masche; die Figur 15 auf die Netze der zweiten Classe, oder mit quadratischer Masche, die Figur 16 auf die Netze der dritten Classe, mit rhombischer oder rechteckiger Masche.

Satz XXVIII. — In einem asymmetrischen Netze kann es keine gleichartigen Punktreihen von verschiedener Richtung geben.

Das ist klar für die invers ähnlichen Punktreihen (man sehe den Corollarsatz zum Satz XXI). Für die direct ähnlichen Punktreihen ist es nicht weniger klar, in Folge des Satzes XXV.

Satz XXIX. — Zwei gleichartige Symmetrie-Axen sind gleichartige Punktreihen für das Netz.

Diese Axen sind Punktreihen des Netzes (Sätze X und XI), und da, wenn zwei solche Axen zur Deckung gebracht werden, auch das feste mit dem beweglichen Netze zur Deckung kommt, sind diese Punktreihen von derselben Art. (Definition S. 36).

Definition. — Man kann als Winkel derselben Art in einem Netze solche definiren, die gleich und zwischen zwei paarweise gleichartigen Punktreihen gelegen sind.

§ IV. — Von den Schaaren im Allgemeinen.

Wir wollen die Schaar der Figur 1 betrachten, deren Gitterpunkt O zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen ist, und welche vermittelst der drei Punktreihen $OAA'A''\ldots$,

$OBB'B''\ldots$, $ODD'D''\ldots$ construirt ist. Wir werden die Parameter dieser Punktreihen mit a, b und d bezeichnen, nämlich

(28) $$OA = a\,,\quad OB = b\,,\quad OD = d\,;$$

ξ, η und ζ sollen die linearen Coordinaten der auf die schiefwinkligen Axen OA, OB und OD bezogenen Punkte im Raume sein; m, n und p sollen die Zahlen-Coordinaten der bestimmten Gitterpunkte vorstellen; x, y und z die beweglichen Zahlen-Coordinaten, welche unbestimmten Gitterpunkten angehören, so dass man, je nach dem Fall, hat

(29) $$\frac{\xi}{a} = m\,,\quad \frac{\eta}{b} = n\,,\quad \frac{\zeta}{d} = p\,,$$

(30) $$\frac{\xi}{a} = x\,,\quad \frac{\eta}{b} = y\,,\quad \frac{\zeta}{d} = z\,.$$

[37] Man wird bemerken, dass die ganze Schaar als eine Fläche mit getrennten und geschlossenen Schalen betrachtet werden kann, deren jede in einem Gitterpunkt der Schaar zum Verschwinden kommt.

Die Gleichung dieser Fläche lässt sich in der Form schreiben

$$\sin^2 \frac{\xi}{a}\pi + \sin^2 \frac{\eta}{b}\pi + \sin^2 \frac{\zeta}{d}\pi = 0\,.$$

Aufgabe XIV. — Die Gleichung einer Punktreihe zu finden, welche durch den Anfangspunkt und durch einen gegebenen Gitterpunkt T (Fig. 20) geht.

Seien m, n und p die Zahlen-Coordinaten von T; dann wird die Gleichung von OT in laufenden linearen Coordinaten sein

$$\frac{\xi}{ma} = \frac{\eta}{nb} = \frac{\zeta}{pd}\,;$$

in Zahlen-Coordinaten wird man haben

(31) $$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}\,.$$

Wenn m, n und p einen grössten gemeinsamen Theiler D hätten, so würde der Gitterpunkt $\left(\frac{m}{D}, \frac{n}{D}, \frac{p}{D}\right)$ der Punktreihe

OT angehören, und wäre unter allen Gitterpunkten der Reihe der dem Gitterpunkt O zunächst liegende. Wenn m, n und p keinen anderen gemeinschaftlichen Divisor besitzen als die Einheit, so ist OT der Parameter der Punktreihe.

Ich werde künftig annehmen, dass die Gitterpunkte, welche wir Gelegenheit haben werden mit dem Anfangspunkt durch eine Gerade zu verbinden, dieser Bedingung genügen, dass ihre drei Zahlen-Coordinaten keine anderen gemeinschaftlichen Theiler haben als die Einheit.

Bezeichnung. — Die Punktreihe, welche vom Anfangspunkt nach dem Gitterpunkt (m, n, p) geht, wobei m, n und p keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, soll künftig durch das Symbol mnp bezeichnet werden.

Satz XXX. — Seien T und T' zwei Gitterpunkte einer Schaar (Fig. 20); wenn man durch einen dritten Gitterpunkt O die Strecke OA gleich und parallel mit TT' zieht, so wird das äusserste Ende dieser Strecke ein vierter Gitterpunkt der Schaar sein.

Dieser Satz lässt sich beweisen wie der Satz I.

[**38**] Aufgabe XV. — Die allgemeine Gleichung der mit der Punktreihe OT (Fig. 20), deren Symbol mnp ist, parallelen Punktreihen zu finden.

Seien m', n' und p' die Coordinaten eines zweiten Gitterpunktes, der willkürlich gewählt wurde: die Punktreihe, welche durch diesen Gitterpunkt parallel mit OT geführt ist, wird als Gleichung in Zahlen-Coordinaten haben

$$\frac{x - m'}{m} = \frac{y - n'}{n} = \frac{z - p'}{p}. \tag{32}$$

Aufgabe XVI. — Den Parameter der Punktreihe OT und ihrer Parallelen zu finden (Fig. 20).

Seien α, β und δ die Winkel, welche die drei Halbaxen der positiven Coordinaten miteinander in der yz-Ebene, in der xz-Ebene und in der xy-Ebene bilden.

Kommen wir überein, durch $Pmnp$ den Parameter der vom Anfangspunkte nach dem Gitterpunkte (m, n, p) gehenden Punktreihe OT zu bezeichnen. Man wird nach einer bekannten Formel als Werth des Quadrats dieses Parameters haben

$$\left\{\begin{aligned} P^2mnp = m^2a^2 + n^2b^2 + p^2d^2 + 2mnab\cos\delta \\ + mpad\cos\beta + 2npbd\cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Man könnte in dieser Formel a durch $P\,100$, b durch $P\,010$ und d durch $P\,001$ ersetzen.

Aufgabe XVII. — Die Gleichung der Netzebene zu finden, welche durch den Anfangspunkt O und die beiden Gitterpunkte T und T' (Fig. 20) geht.

Die Formeln der analytischen Geometrie geben

$$\xi(nbp'd - pdn'b) + \eta(pdm'a - map'd) + \zeta(man'b - nbm'a) = 0,$$

und nach Division durch abd

$$x(np' - pn') + y(pm' - mp') + z(mn' - nm') = 0. \tag{34}$$

Sei jetzt D der grösste gemeinsame Theiler der Binome $np' - pn'$, $pm' - mp'$ und $mn' - nm'$. Setzen wir

$$\frac{np' - pn'}{D} = g, \quad \frac{pm' - mp'}{D} = h, \quad \frac{mn' - nm'}{D} = k, \tag{35}$$

[39] so erhalten wir

$$gx + hy + kz = 0. \tag{36}$$

Bezeichnung, Definition. — Wir wollen die symbolische Bezeichnung (ghk) annehmen, um die Gesammtheit der mit der Fläche OTT' parallelen Netzebenen darzustellen. Die ganzen positiven oder negativen Zahlen g, h und k, sollen die Charakteristiken dieses Systems der Netzebenen in Beziehung auf die Axen der x, der y und der z sein. In dem Falle wo dieses Symbol (ghk) ein Missverständniss zuliesse, würde man es durch (g, h, k) ersetzen. Wenn eine der drei Charakteristiken, k z. B., das Zeichen — bekäme, würde man es über diese Charakteristik setzen, was (ghk) in $(gh\bar{k})$ verwandeln würde.

Aus diesem Uebereinkommen folgt, dass das Symbol der xy-Ebene (001) sein wird, dasjenige der xz-Ebene (010) und dasjenige der yz-Ebene (100).

Satz XXXI. — Die Spur irgend einer durch den Anfangspunkt gehenden Netzebene, wie OTT' (Fig 20), auf einer der drei Coordinaten-Ebenen ist eine den Netzen dieser beiden Ebenen gemeinsam zugehörige Punktreihe.

Die Gleichungen dieser Spur in der Ebene der xy sind

$$z = 0, \quad gx + hy = 0.$$

Der zweiten dieser Gleichungen ist genügt durch $x = h$, $y = -g$; also ist diese Spur eine Punktreihe. Wenn g und h nicht relative Primzahlen sind, so giebt es andere Gitterpunkte zwischen dem Anfangspunkte und dem Punkte $x = h$, $y = -g$. Sei im Allgemeinen D der grösste gemeinsame Theiler von g und h; so wird die Spur der Ebene $(g h k)$ auf der Ebene der xy eine Punktreihe mit dem Symbol $\left(\frac{g}{D}\,\frac{h}{D}\right)$ sein.

Corollarsatz I. — Der Schnitt von zwei beliebigen Netzebenen wird eine den Netzen beider Ebenen gemeinsame Punktreihe sein, vorausgesetzt dass er einen Gitterpunkt enthält; denn man kann immer eine der beiden Ebenen als Ebene der xy wählen (Aufgabe I) und den gemeinsamen Gitterpunkt zum Anfangspunkt.

Corollarsatz II. — Wenn dieser Schnitt durch keinen Gitterpunkt der Schaar geht, so ist er wenigstens parallel mit einem gewissen Punktreihensystem. Um diese Punktreihen zu erhalten, führe man durch einen willkürlich gewählten Gitterpunkt zwei, zu den gegebenen Ebenen parallele Netzebenen; ihr Schnitt wird eine der Punktreihen dieses Systems geben.

[40] Aufgabe XVIII. — Die allgemeine Gleichung der Netzebenen zu finden, welche parallel der Ebene OTT' (Fig. 20) sind, und deren Symbol (ghk) ist.

Durch den Gitterpunkt (m'', n'', p'') wollen wir eine Ebene parallel zu OTT' legen; ihre Gleichung wird sein

$$gx + hy + kz = gm'' + hn'' + kp''$$

oder

$$gx + hy + kz = C, \tag{37}$$

indem wir das letzte Glied durch C bezeichnen; C ist nothwendiger Weise eine ganze Zahl. Diese Gleichung, welche so allgemein als möglich ist, umfasst das ganze System der zu OTT' parallelen Netzebenen.

Aufgabe XIX. — Die Gleichung der an die Ebene OTT' (Fig. 20) angrenzenden Netzebenen zu finden.

Man weiss aus der Theorie der Kettenbrüche, dass, wenn g, h und k keinen anderen gemeinsamen Theiler haben als die Einheit, es immer möglich sein wird, der Doppel-Gleichung

$$gx + hy + kz = \pm 1 \tag{38}$$

durch ganzzahlige Werthe der x, y, z zu genügen.

Die beiden durch diese Gleichung gegebenen Netzebenen sind die angrenzenden der Ebene OTT'; denn für jede andere Ebene, deren Gleichung

$$gx + hy + kz = C$$

wäre, würden die Schnittpunkte mit den Axen der x, der y und der z in grösseren Entfernungen vom Anfangspunkt liegen als für die Ebenen der Gleichung (38).

Man könnte diesen Satz auch beweisen, ohne auf die Theorie der Kettenbrüche zurück zu greifen.

Aufgabe XX. — Man fragt, welche Anzahl von Schichten in einem System von Netzebenen, dessen symbolische Bezeichnung (ghk) ist, zwischen dem Gitterpunkt mit den Coordinaten M, N, und P und dem Gitterpunkt mit den Coordinaten M', N' und P' enthalten ist.

Nehmen wir an, dass die Netzebene

$$gx + hy + kz = 1$$

die Einheit als Ordnungszahl erhalte, dass die folgende Ebene die [41] Zahl 2 bekomme, u. s. w. Die Ebene

$$gx + hy + kz = C$$

soll die Ordnungszahl C haben.

Seien jetzt C und C' die Ordnungszahlen der durch die Gitterpunkte (M, N, P) und (M', N', P') gehenden Netzebenen, so wird man haben

$$C = gM + hN + kP, \quad C' = gM' + hN' + kP'.$$

Es wird also die Zahl der zwischen den beiden gegebenen Gitterpunkten liegenden Schichten bis aufs Zeichen den Werth haben

$$g(M - M') + h(N - N') + k(P - P').$$

Aufgabe XXI. — Die Bedingung zu finden, unter welcher eine durch den Anfangspunkt gehende Netzebene mit dem Symbol (ghk) einer Punktreihe conjugirt ist, welche vom Anfangspunkt zum Gitterpunkt $(m''n''p'')$ geht.

Der Gitterpunkt (m'', n'', p'') muss augenscheinlich auf einer der beiden an die Ebene

$$gx + hy + kz = 0$$

angrenzenden Netzebenen gelegen sein.

So wird also die gesuchte Bedingung sein

$$gm'' + hn'' + kp'' = \pm 1. \tag{39}$$

Wenn die Ebene (ghk) die Gitterpunkte (m, n, p) und (m', n', p') enthält, wie das oben (Aufgabe XVII) angenommen ist, und wenn man in der Gleichung (39) g, h und k durch ihre aus der Gleichung (35) gezogenen Werthe ersetzt, so wird die gesuchte Bedingung

$$m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D. \tag{40}$$

In dieser Formel ist D der grösste gemeinschaftliche Theiler der Binome $np' - pn'$, $pm' - mp'$ und $mn' - nm'$.

Satz XXXII. — Wenn drei von ein und demselben Gitterpunkt ausgehende Punktreihen im Raum conjugirt sind, so sind sie paarweise auf ihrer Verbindungsebene conjugirt.

Dieser Satz folgt offenbar aus der Definition der conjugirten Punktreihen (Seite 9).

[**42**] Das über den Parametern dieser drei Punktreihen construirte Parallelepiped ist eins der Grund-Parallelepipede der Schaar. Die drei Seiten, welche sich am Anfangspunkte treffen, bilden drei conjugirte Ebenen, die als angrenzende Ebenen die anderen drei Seiten haben.

Satz XXXIII. — Wenn man das System der drei conjugirten Punktreihen OA, OB und OD (Fig. 17) durch das System der drei conjugirten Punktreihen OA', OB und OD ersetzt, so wird das Volumen des Parallelepipedes durch diesen Wechsel nicht verändert.

Die Gerade AA' wird nämlich in einer zu der Ebene BOD parallelen Ebene gelegen sein, so werden also die Grund-Parallelepipede in den beiden Axen-Systemen dieselbe Basis $OBB'D$ haben, und ihre Höhe wird dieselbe sein.

Satz XXXIV. — Wenn man statt des Systems der drei conjugirten Punktreihen OA, OB und OD (Fig. 17) das System OA, OB' und OD' setzt, bei dem die Punktreihen OB' und OD' einander in der Ebene BOD conjugirt sind, so wird das Volumen des Grund-Parallelepipeds nach diesem Wechsel dasselbe bleiben.

Denn die parallelogrammatischen Grundflächen dieser Parallelepipede in der Ebene OBD haben gleichen Inhalt (Satz III); die Höhen sind dieselben; folglich sind die Volumen gleich.

Satz XXXV. — Das Grund-Parallelepiped einer Schaar hat immer dasselbe Volumen, welches auch das System der conjugirten Punktreihen sein mag, das ihm zu Grunde liegt.

Seien Ox, Oy, Oz (Fig. 18) die drei Parameter, welche dazu gedient haben, die Gitterpunkte der Schaar zu construiren; sei Ω das Volumen des über diesen drei Parametern construirten Parallelepipedes; seien OA, OB und OD die drei conjugirten Punktreihen, welche uns gegeben sind, und Ω' das Volumen des entsprechenden Grund-Parallelepipedes.

Sei jetzt OA' die Spur der Ebene AOB auf der Ebene der xy; diese Spur ist eine der Punktreihen des Netzes der Ebene AOB (Satz XXXI). Sei also OB' eine der ihr conjugirten in derselben Ebene. Man könnte, gemäss dem Satz XXXIV, das System der Punktreihen (OA, OB, OD) durch das System (OA', OB', OD) ersetzen, ohne das Volumen Ω' des Grund-Parallelepipedes zu verändern.

Sei ebenso OD' die Punktreihe, welche die Spur der Ebene $OB'D$ auf der Ebene der xy bildet, und sei OB'' eine zu OD' conjugirte Punktreihe auf der Ebene $OB'D$. Man könnte [43] statt des Systems (OA', OB', OD) das System (OA', OD', OB'') setzen, ohne das Volumen Ω' des Grund-Parallelepipedes zu verändern.

Man kann schliesslich (OA', OD', OB'') durch (Ox, Oy, OB'') ersetzen, weil Ox und Oy zwei in der Ebene $A'OD'$, welche mit der Ebene der xy zusammenfällt, liegende conjugirte Punktreihen sind. Das Volumen des Grund-Parallelepipedes wird gleich Ω' bleiben.

Wenn man dieses letzte Parallelepiped mit dem über Ox, Oy, Oz, construirten Parallelepiped vergleicht, so erhält man, gemäss dem Satz XXXIII

$$\Omega' = \Omega .$$

Zweiter Beweis. — Wir wollen übereinkommen, die Zahl der in der Einheit des Volumens enthaltenen Gitterpunkte *Dichtigkeit der Schaar* zu nennen, wobei die Dimensionen dieser Volumen-Einheit, alle drei, unendlich gross im Vergleich zu den Parametern der Punktreihen, welche man betrachtet, angenommen werden.

Nachdem dies festgestellt, seien (Fig. 18)

$$OA = a', \quad OB = b', \quad OD = d',$$

Winkel $AOB = \delta'$, die Neigung von OD gegen die Ebene $AOB = \tau'$.

Man wird nach einer bekannten Formel erhalten

$$\Omega' = a'b'd' \sin \delta' \sin \tau'.$$

Nehmen wir auf den verlängerten Geraden OA, OB und OD Längen $\varkappa$, ι und σ, welche sehr gross im Vergleich zu a', b', d' sind, so dass das über $\varkappa$, ι und σ construirte Parallelepiped der Einheit des Volumens gleich sei, und dass man daher habe

$$\varkappa \iota \sigma \sin \delta' \sin \tau' = 1.$$

Die Zahl der in diesem Parallelepiped enthaltenen Gitterpunkte berechnet sich wie die Zahl der Kugeln in einem Haufen mit rechtwinkligen Seiten, ist also

$$\frac{\varkappa}{a'} \times \frac{\iota}{b'} \times \frac{\sigma}{d'}.$$

Es wird also, wenn ϱ diese stets sehr grosse Zahl ist,

$$\varrho = \frac{\varkappa \iota \sigma}{a'b'd'} = \frac{\varkappa \iota \sigma \sin \delta' \sin \tau'}{a'b'd' \sin \delta' \sin \tau'} = \frac{1}{\Omega'}.$$

[**44**] Nun aber muss die Zahl ϱ, welche die Dichtigkeit der Schaar misst, constant bleiben, welches auch das System von conjugirten Axen sei, das man zu ihrer Bestimmung angenommen hat.

Wenn man also setzt

$$Ox = a, \quad Oy = b, \quad Oz = d,$$

Winkel $xOy = \delta$, Neigung von Oz gegen $xOy = \tau$, so wird man haben

$$\Omega' = \Omega = abd \sin \delta \sin \tau. \tag{41}$$

Satz XXXVI. — Umgekehrt werden, wenn das über den Parametern der Punktreihen OA, OB und OD (Fig. 18) construirte Parallelepiped dem Grund-Parallelepiped der Schaar inhaltsgleich ist, die drei Punktreihen conjugirt sein.

Nehmen wir an, dass im Innern des Parallelepipedes ein Gitterpunkt der Schaar liege, und nennen diesen Punkt P, der so nahe als möglich an der Ebene AOB gewählt sei; das über OP, OA und OB construirte Parallelepiped würde gleich Ω sein (voriger Satz), also müsste das über OD, OA und OB construirte Parallelepiped, welches die gleiche Basis in der Ebene OAB und eine grössere Höhe hat, ein grösseres Volumen haben als Ω, was der in der Formulirung des Satzes enthaltenen Voraussetzung zuwider ist. Folglich u. s. w.

Aufgabe XXII. — Die Bedingung zu finden, unter der drei Punktreihen conjugirt sind.

Seien (m, n, p), (m', n', p') und (m'', n'', p'') die Coordinaten von den drei Gitterpunkten T, T' und T'' (Fig. 20). Man setzt voraus, dass m, n und p keinen anderen gemeinsamen Theiler als die Einheit haben, und dass für m', n', p' und m'', n'', p'' das Gleiche gilt. Man sucht die Bedingung, unter welcher die Punktreihen OT, OT' und OT'', deren Symbole mnp, $m'n'p'$ und $m''n''p''$ sind, conjugirte Punktreihen sind.

Seien (ξ, η, ζ) (ξ', η', ζ') und (ξ'', η'', ζ'') die linearen Coordinaten der Punkte T, T' und T'', in dem System der conjugirten Axen Ox, Oy und Oz, welche a, b und d als Parameter haben.

Man beweist in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie, dass das Volumen eines Tetraeders, das seine Spitze im Anfangspunkt hat, und die Ecken seiner dreieckigen Basis in den Punkten (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') und $(\xi''; \eta'', \zeta'')$, [45]
bis aufs Vorzeichen den Werth hat

$$\tfrac{1}{6}\,(\xi\eta'\zeta'' - \xi\zeta'\eta'' + \zeta\xi'\eta'' - \eta\xi'\zeta'' + \eta\zeta'\xi'' - \zeta\eta'\xi''),$$

wenn das System der Axen rechtwinklig ist.

Wenn aber die Axen schiefwinklig sind, und wenn man

$$\text{Winkel } xOy = \delta, \text{ Neigung von } Oz \text{ gegen } xOy = \tau$$

hat, so muss dieses Volumen mit $\sin\varrho\,\sin\tau$ multiplicirt werden.

Wenn man also das Volumen des über den Parametern OT, OT' und OT'' construirten Parallelepipedes Ω' nennt, und dasjenige des Grundparallelepipedes Ω, so wird bis auf das Vorzeichen

$$\begin{aligned}\Omega' = (mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' \\ + np'm'' - pn'm'')\,abd \sin\delta \sin\tau,\end{aligned}$$

oder auch wegen der Gleichung (41)

$$\begin{aligned}\Omega' = (mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' \\ + np'm'' - pn'm'')\,\Omega.\end{aligned} \tag{42}$$

Wenn die Punktreihen conjugirt sind, muss $\Omega' = \Omega$ sein (Satz XXXV). Also wird die gesuchte Bedingung sein

(43) $mn'p''-mp'n''+pm'n''-nm'p''+np'm''-pn'm''=\pm 1.$

Umgekehrt wird man, wenn der Gleichung (43) genügt ist, daraus schliessen, dass $\Omega'=\Omega$, und die drei Punktreihen werden conjugirte sein (Satz XXXVI).

Aufgabe XXIII. — Die Bedingung dafür zu finden, dass zwei Punktreihen, welche vom Anfangspunkt nach den Punkten T und T' (Fig. 20) gehen, in der Netzebene, die diese beiden Punktreihen enthält, conjugirt sind.

Seien (m, n, p) und (m', n', p') die Coordinaten von T und T'. Die Gleichung der Ebene OTT' wird durch die Formel (36) gegeben sein, in welcher g, h und k Werthe haben, die aus den Formeln (35) hervorgehen. Die Gleichung der beiden an OTT' angrenzenden Netzebenen ist (Aufgabe XIX) gegeben durch

$$gx+hy+kz=\pm 1.$$

Also könnte diese Gleichung geschrieben werden

$$x(np'-pn')+y(pm'-mp')+z(mn'-nm')=\pm D.$$

[46] Seien jetzt (m'', n'', p'') die Coordinaten eines Gitterpunktes T'', der einer dieser angrenzenden Ebenen angehört. OT'' wird eine zu der Ebene OTT' conjugirte Punktreihe sein, und man hat

(44) $m''(np'-pn')+n''(pm'-mp')+p''(mn'-nm')=\pm D.$

Wenn aber OT und OT' schon zwei zu einander in der Ebene OTT' conjugirte Punktreihen sind, so werden OT, OT' und OT'' drei conjugirte Punktreihen sein, und man wird gemäss der durch (43) ausgesprochenen Bedingung erhalten

$$m''(np'-pn')+n''(pm'-mp')+p''(mn'-nm')=\pm 1.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung (44) schliesst man, dass $D=1$ ist. Umgekehrt wird, wenn $D=1$ ist, der Bedingung (43) genügt sein, und die Punktreihen OT und OT' werden zu einander in ihrer Verbindungsebene conjugirt sein (Satz XXXII).

Also wenn $np'-pn'$, $pm'-mp'$, und $mn'-nm'$ keinen anderen gemeinsamen Theiler haben als die Einheit, so sind die Punktreihen OT und OT' conjugirte Punktreihen des Netzes der Ebene OTT', und die Umkehrung dieses Satzes ist ebenfalls richtig.

Satz XXXVII. — Wenn (m, n, p) und (m', n', p') die Zahlen-Coordinaten der Gitterpunkte T und T'

(Fig. 20) sind, so wird die Zahl der zu OT oder OT' parallelen Streifen, welche zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten des über OT und OT' construirten Parallelogramms enthalten sind, dem grössten gemeinsamen Theiler der drei Binome $np'-pn'$, $pm'-mp'$ und $mn'-nm'$ gleich sein.

Seien nämlich m'', n'' und p'' die Coordinaten eines Gitterpunktes T'', welcher einer an die Ebene OTT' angrenzenden Netzebene angehört. Man wird haben (Gleichung 44)

$$m''(np'-pn')+n''(pm'-mp')+p''(mn'+nm')=\pm D.$$

Sei Ω' das Volumen des über den drei Kanten OT, OT' und OT'' construirten Parallelepipedes; der Werth von Ω' wird durch die Gleichung (42) gegeben, welche sich in dem gegenwärtigen Fall umwandelt in

$$\Omega'=\Omega D.$$

Seien jetzt ω der Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms des Netzes der Ebene OTT', und ω' der Flächeninhalt des über OT und OT', construirten Parallelogramms, sei endlich $\varDelta$ die Dicke der zwischen T'' und der Ebene OTT' gelegenen Schicht, so wird man haben

$$\Omega=\varDelta\omega,\ \Omega'=\varDelta\omega',$$

[47] folglich auch

(45) $$\omega'=\omega D.$$

Nun wird das Verhältniss $\omega':\omega$ offenbar gleich sein der Anzahl der zu OT oder zu OT' parallelen Streifen, welche durch das Dreieck OTT' gehen: also wird D die Zahl dieser Streifen darstellen; folglich wird diese Zahl gleich dem grössten gemeinschaftlichen Theiler unserer drei Binome sein.

Satz XXXVIII. — In einem System von parallelen Netzebenen, die (ghk) zum Symbol haben, und deren Grund-Parallelogramm als Inhalt ω hat, ist der Flächeninhalt des, durch die Schnittpunkte der conjugirten Axen mit der Ebene

$$gx+hy+kz=1$$

bestimmten Dreiecks gleich dem Quotienten aus dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}\omega$ durch das Product ghk der Charakteristiken, und der Flächeninhalt des durch die Schnittpunkte derselben Axen mit der Ebene

$$gx + hy + kz = ghk$$

bestimmten Dreiecks hat als Werth das Product von $\frac{1}{2}\omega$ und ghk.

Sei GHK (Fig. 19) die Ebene

$$gx + hy + kz = 1\,,$$

und $G'H'K'$ die Ebene

$$gx + hy + kz = ghk\,,$$

so dass man, da a, b, d die drei Parameter von Ox, Oy, Oz sind, erhalte

$$(46)\qquad \begin{cases} OG' = hka\,, & OG = \dfrac{a}{g}\,, \\ OH' = gkb\,, & OH = \dfrac{b}{h}\,, \\ OK' = ghd\,, & OK = \dfrac{d}{k}\,, \end{cases}$$

$$\text{Flächeninhalt } G'H'K' : \text{Flächeninhalt } GHK = \overline{OG'}^2 : \overline{OG}^2 = g^2h^2k^2 : 1\,.$$

Bringen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach G', während die Axen ihre Richtung behalten. Die Zahlen-Coordinaten $(m,\ n,\ p)$ und $(m',\ n',\ p')$ [48] der Gitterpunkte H' und K' werden für diese Stellung der Axen sein

$$\begin{aligned} m &= -hk, & n &= gk, & p &= 0\,, \\ m' &= -hk, & n' &= 0, & p' &= gh\,; \end{aligned}$$

man folgert daraus

$$\begin{aligned} np' - pn' &= g^2hk, \\ pm' - mp' &= gh^2k, \\ mn' - nm' &= ghk^2, \end{aligned}$$

und, wenn D der grösste gemeinsame Theiler der drei Binome ist,

$$D = ghk,$$

da ja g, h, k relative Primzahlen sind.

Sei also ω der Flächeninhalt der Grund-Masche der Netze auf den Ebenen GHK und $G'H'K'$; so wird man in Folge des Satzes XXXVII und der Gleichung (45) haben

(47) 2 Flächeninhalt des $\triangle\, G'H'K' = \omega D = ghk\omega$,

was den zweiten Theil des Lehrsatzes beweist. Und da man andererseits

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, GHK = \frac{\text{Flächeninhalt des } \triangle\, G'H'K'}{g^2 h^2 k^2}$$

hat, so folgt daraus

(48) $$2 \text{ Flächeninhalt des } \triangle\, GHK = \frac{\omega}{ghk}\,.$$

Aufgabe XXIV. — Den Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms in dem System der Netzebenen, die durch das Symbol (ghk) bezeichnet werden, zu finden.

Ich werde die Seiten zOy, zOx und yOx der körperlichen Ecke O (Fig. 19) α, β und δ nennen; μ, ν und ϖ die Flächenwinkel derselben körperlichen Ecke, wobei μ der Flächenwinkel ist, dessen Kante Ox ist, ν, ϖ die Flächenwinkel, deren Kanten Oy und Oz sind. Ich werde $S(ghk)$ den unbekannten Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms der Netze auf den Ebenen (ghk) nennen. Nachdem dies festgesetzt, erhält man durch eine bekannte Formel, die ich der analytischen Geometrie des Raumes entnehme,

(49) $$\left\{\begin{aligned} \overline{GHK}^2 &= \overline{GHO}^2 + \overline{GKO}^2 + \overline{HKO}^2 \\ &- 2\, GHO \cdot GKO \cos\mu - 2\, GHO \cdot HKO \cos\nu \\ &- GKO \cdot HKO \cos\varpi. \end{aligned}\right.$$

[49] Ist die Ebene GHK die Netzebene, welche als Gleichung

$$gx + hy + kz = 1$$

hat, so bekommt man

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, GHO = \tfrac{1}{2}\, OG \cdot OH \sin\delta = \tfrac{1}{2}\, \frac{a}{g}\, \frac{b}{h} \sin\delta\,,$$

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, GKO = \tfrac{1}{2}\, OG \cdot OK \sin\beta = \tfrac{1}{2}\, \frac{a}{g}\, \frac{d}{k} \sin\beta\,,$$

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, HKO = \tfrac{1}{2}\, OH \cdot OK \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\, \frac{b}{h}\, \frac{d}{k} \sin\alpha\,.$$

Wir wollen jetzt

$$bd \sin \alpha \text{ mit } \varphi\,,$$
$$ad \sin \beta \text{ mit } \chi\,,$$
$$ab \sin \delta \text{ mit } \psi$$

bezeichnen;

- φ wird der Flächeninhalt der Masche des Netzes auf der Ebene der yz, also $S(100)$, sein,
- χ wird der analoge Flächeninhalt für die Ebene der xz, also $S(010)$, sein,
- ψ wird der analoge Flächeninhalt für die Ebene der xy, also $S(001)$, sein.

Man wird alsdann haben

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, GHO = \tfrac{1}{2}\frac{\psi}{gh},$$

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, GKO = \tfrac{1}{2}\frac{\chi}{gk},$$

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, HKO = \tfrac{1}{2}\frac{\varphi}{hk};$$

aber andererseits, in Folge des Satzes XXXVIII,

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, GHK = \tfrac{1}{2}\,\frac{S\,(ghk)}{ghk}.$$

Also, wenn man diese Werthe in der Gleichung (49) einsetzt, erhält man

$$(50)\ \begin{cases} S^2\,(ghk) = g^2\varphi^2 + h^2\chi^2 + k^2\psi^2 - 2gh\varphi\chi \cos \varpi \\ \qquad\qquad - 2gk\varphi\psi \cos \nu - 2hk\chi\psi \cos \mu\,, \end{cases}$$

und diese Gleichung ergiebt den Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms der Netzebene (ghk), sobald man die analogen Flächeninhalte in den Netzen der drei conjugirten Coordinaten-Ebenen kennt.

Aufgabe XXV. — Die Dicke der Schichten zu finden, welche parallel zu den Netzebenen mit dem Symbol (ghk) sind.

Sei wieder $S\ (ghk)$ der Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms des Netzes von [50] dem System (ghk). Seien $\varDelta$ die Dicke der entsprechenden Schichten und Ω das

Volumen des Grund-Parallelepipedes, so wird man haben

(51) $$\Omega = \varDelta S(ghk).$$

Behalten die Winkel α, β, δ, μ, ν, ϖ ihre frühere Bedeutung bei, so können wir die Gleichung (41) in die Form bringen

(52) $$\Omega = abd\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}.$$

Entnehmen wir aus der Gleichung (50) den Werth von $S^2(ghk)$, um ihn in die zum Quadrat erhobene Gleichung (51) einzusetzen, so erhalten wir

$$\varDelta^2 = \frac{a^2b^2d^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta)}{g^2\varphi^2+h^2\chi^2+k^2\psi^2-2gh\varphi\chi\cos\varpi-2gk\varphi\psi\cos\nu-2hk\chi\psi\cos\mu}.$$

Wenn wir schliesslich φ, χ, ψ durch ihre Werthe in a, b, d, α, β und δ ersetzen, so wird diese Gleichung

(53) $$\varDelta^2 = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}{\frac{g^2\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{h^2\sin^2\beta}{b^2}+\frac{k^2\sin^2\delta}{d^2}-2\frac{gh\sin\alpha\sin\beta}{ab}\cos\varpi-2\frac{gk\sin\alpha\sin\delta}{ad}\cos\nu-2\frac{hk\sin\beta\sin\delta}{bd}\cos\mu}.$$

Man hätte auch direct auf diese Formel kommen können, wenn man den analytischen Ausdruck für die Senkrechte gesucht hätte, die von dem Anfangspunkt auf diejenige Ebene gefällt ist, deren Gleichung in linearen Coordinaten die folgende ist

$$g\frac{\xi}{a}+h\frac{\eta}{b}+k\frac{\zeta}{d}=1.$$

Satz XXXIX. — Der mittlere Abstand der Gitterpunkte einer Schaar ist gleich der Cubikwurzel aus dem Volumen ihres Grund-Parallelepipedes.

In Uebereinstimmung mit der von *Poisson* gegebenen Definition des mittleren Abstandes (siehe Seite 24) wollen wir den mittleren Abstand der Gitterpunkte einer Schaar die Seite eines Würfels nennen, die gleich der Einheit des Volumens ist, getheilt durch die Zahl der Gitterpunkte, welche diese Einheit des Volumens enthält.

Sei E dieser mittlere Abstand; indem wir die als sehr gross vorausgesetzte Zahl der Gitterpunkte, welche die Einheit des Volumens enthält, wieder ϱ nennen, erhalten wir

$$E^3 = \frac{1}{\varrho};$$

[51] woraus wir wegen $\varrho = \frac{1}{\Omega}$ schliessen (siehe den zweiten Beweis des Satzes XXXV)

$$E^3 = \Omega, \quad E = \sqrt[3]{\Omega}, \tag{54}$$

wobei Ω das constante Volumen des Grund-Parallelepipedes der Schaar ist.

Aufgabe XXVI. — Die Coordinaten-Axen zu verändern und die neuen Coordinaten als Functionen der alten auszudrücken und umgekehrt.

Seien (m, n, p), (m', n', p') und (m'', n'', p'') die Zahlen-Coordinaten der äusseren Enden T, T' und T'' (Fig. 20) von den Parametern der drei Punktreihen, welche als neue Axen dienen sollen. Seien X, Y und Z die Zahlen-Coordinaten irgend eines Gitterpunktes in dem neuen Axen-System. Auf eine analoge Weise wie diejenige, welche zu den Gleichungen (17) führt, erhält man

$$\left\{\begin{aligned} x &= mX + m'Y + m''Z, \\ y &= nX + n'Y + n''Z, \\ z &= pX + p'Y + p''Z. \end{aligned}\right. \tag{55}$$

Es wird angenommen, dass die Punktreihe OT, welche vom Anfangspunkt nach dem Punkt (m, n, p) geht, als Axe der X dient. Die Punktreihe OT' dient als Axe der Y, und die Punktreihe OT'' als Axe der Z.

Ich setze jetzt, um abzukürzen,

$$\left\{\begin{aligned} & mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = (mn'p''), \\ & mn' - nm' = (mn'),\ nm'' - mn'' = (nm''),\ m'n'' - n'm'' = (m'n''), \\ & pm' - mp' = (pm'),\ mp'' - pm'' = (mp''),\ p'm'' - m'p'' = (p'm''), \\ & np' - pn' = (np'),\ pn'' - np'' = (pn''),\ n'p'' - p'n'' = (n'p''). \end{aligned}\right. \tag{56}$$

Wenn man, vermittelst des bekannten Verfahrens der Elimination, aus den Gleichungen (55) die Werthe von X, Y, Z berechnet, so erhält man

$$X = \frac{(n'p'')}{(mn'p'')}x + \frac{(p'm'')}{(mn'p'')}y + \frac{(m'n'')}{(mn'p'')}z,$$

$$Y = \frac{(pn'')}{(mn'p'')}x + \frac{(mp'')}{(mn'p'')}y + \frac{(nm'')}{(mn'p'')}z,$$

$$Z = \frac{(np')}{(mn'p'')}x + \frac{(pm')}{(mn'p'')}y + \frac{(mn')}{(mn'p'')}z;$$

[52] woraus man sieht, dass, wenn X, Y, Z immer ganze Zahlen sein sollen, es nothwendig ist, dass die drei gegebenen Punktreihen conjugirt sind.

Indem man diese Voraussetzung macht, wird

$$(mn'p'') = \pm 1,$$

was die vorhergehenden Gleichungen in die folgenden verwandelt

$$(57)\qquad \begin{cases} \pm X = (n'p'')x + (p'm'')y + (m'n'')z, \\ \pm Y = (pn'')x + (mp'')y + (nm'')z, \\ \pm Z = (np')x + (pm')y + (mn')z. \end{cases}$$

Man führe durch eine passende Drehung des Systems OT, OT', OT'' um O, OT auf Ox, führe OT' in die Ebene xOy, indem Sorge getragen wird, dass OT' und Oy auf derselben Seite liegen in Bezug auf die nach beiden Richtungen unendlich verlängerte Gerade Ox: wenn dann OT'' und Oz in Bezug auf die Ebene der xy auf dieselbe Seite fallen, so muss den ersten Gliedern der Gleichung (57) das Zeichen $+$ gegeben werden; im umgekehrten Falle muss das Zeichen $-$ vorgezogen werden.

Corollarsatz. — Nehmen wir an, dass die Axe der z allein verändert, und durch OT'' ersetzt werde, und nennen wir m_0, n_0 die den Axen der x und der y parallelen Zahlen-Coordinaten von T''.

In diesem Fall wird sein

$$\begin{array}{lll} m = 1, & n = 0, & p = 0, \\ m' = 0, & n' = 1, & p' = 0, \\ m'' = m_0, & n'' = n_0, & p'' = 1, \end{array}$$

und die Gleichungen (55) werden geben

$$\begin{aligned} x &= X + m_0 Z, \\ y &= Y + n_0 Z, \\ z &= Z. \end{aligned}$$

Die umgekehrten Formeln werden dann sein

$$\begin{aligned} X &= x - m_0 z, \\ Y &= y - n_0 z, \\ Z &= z. \end{aligned}$$

Die der veränderten Axe parallele Zahlen-Coordinate bleibt unverändert.

[53] **Aufgabe XXVII. — Man fragt, was aus dem Symbol einer Netzebene (ghk) in einem neuen Axen-System wird.**

Seien wieder (m, n, p), (m', n', p') und (m'', n'', p'') die Zahlen-Coordinaten der äusseren Enden T, T', T'' (Fig. 20) der Parameter von den drei Punktreihen, welche als neue Axen dienen sollen. Wenn man in der allgemeinen Gleichung

$$gx + hy + kz = C$$

die aus den Gleichungen (55) entnommenen Werthe von x, y, z substituirt, so wird

$$(gm + hn + kp)\,X + (gm' + hn' + kp')\,Y \\ + (gm'' + hn'' + kp'')\,Z = C,$$

woraus man sieht, dass in diesem neuen Axen-System das Symbol der Ebenen (ghk) sich in $(gm + hn + kp,\ gm' + hn' + kp',\ gm'' + hn'' + kp'')$ verwandelt, das heisst, dass, wenn das neue Symbol (GHK) ist, man hat

$$(58)\qquad \begin{cases} G = gm + hn + kp, \\ H = gm' + hn' + kp', \\ K = gm'' + hn'' + kp''. \end{cases}$$

Corollarsatz. — Wenn man die Axen der x und y beibehält und sich darauf beschränkt, die Axe der z zu ersetzen und zur neuen Axe der z die Punktreihe $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ zu wählen, welche die in umgekehrtem Sinne genommene Verlängerung der Diagonale von dem über a, b, d construirten Parallelepiped ist, so erhält man

$$\begin{array}{lll} m = 1, & n = 0, & p = 0, \\ m' = 0, & n' = 1, & p' = 0, \\ m'' = -1, & n'' = -1, & p'' = -1, \end{array}$$

was das Symbol (ghk) in $(g, h, -g-h-k)$ verwandelt.

Wenn man alsdann die Charakteristik der Netzebene (ghk) in Bezug auf diese neue Axe l nennt, so wird man die Gleichung haben

$$l = -g - h - k.$$

Wenn e der Parameter der neuen Axe ist, so wird der auf dieser Axe zwischen dem Anfangspunkt und der Ebene

$$gx + hy + kz = 1,$$

[54] welche in dem neuen System

$$gx + hy + lZ = 1$$

geworden ist, gelegene Abschnitt augenscheinlich den Werth $\frac{e}{l}$ haben.

Man sieht daraus, dass, »wenn die Parameter a, b, d, e von vier Punktreihen, die paarweise conjugirt sind, so gewählt sind, dass sie vier einander im Raum das Gleichgewicht haltende Kräfte vorstellen, jede an eine durch den Anfangspunkt gehende Netzebene angrenzende Ebene auf den Parametern dieser Punktreihen die Abschnitte $\frac{a}{g}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{d}{k}$, $\frac{e}{l}$ bestimmen wird, wobei g, h, k, l positive oder negative ganze Zahlen sind. Man kann alsdann die Bezeichnungen (ghk), (ghl), (glk), (lhk) ohne Unterschied als Symbol der Netzebene nehmen, und zwischen den vier Charakteristiken g, h, k, l wird die Beziehung bestehen

$$g + h + k + l = 0\,.\text{«} \tag{59}$$

Bezeichnung mit vier Charakteristiken. — Wenn man, um die Stellung der Netzebenen der Schaar zu bestimmen, vier Axen anwendet, welche den eben dargelegten Bedingungen genügen, so ist es zweckmässig, das Symbol (ghk) durch das Symbol mit vier Charakteristiken $(ghkl)$ zu ersetzen.

Definitionen. — Ich bezeichne mit dem Namen Elementar-Tetraeder jedes Tetraeder, welches als Ecken vier Gitterpunkte der Schaar hat, die in solcher Weise gewählt sind, dass jeder von ihnen auf einer an die Netzebene, welche die drei anderen Gitterpunkte enthält, angrenzenden Ebene gelegen ist, oder auch »jedes Tetraeder, welches über drei conjugirten Parametern, die von demselben Gitterpunkt ausgehen, construirt ist.«

Ein solches Tetraeder bildet immer den sechsten Theil von einem der Grund-Parallelepipede der Schaar, also ist das Volumen aller dieser Tetraeder dasselbe und gleich $\frac{1}{6}\Omega$.

Ich nenne Haupt-Tetraeder dasjenige, dessen Basis das spitzwinklige Dreieck ist, welches von den beiden kleinsten Parametern der ganzen Schaar umfasst wird, und dessen drei an der Basis liegende Flächenwinkel spitz sind, zwei von diesen drei Winkeln können ausnahmsweise Rechte werden.

[55] **Satz XL.** — Jedes Tetraeder, welches als Ecken den Anfangspunkt und die drei Punkte (m, n, p), $(m', n' p')$ und (m'', n'', p'') hat, hat als Volumen das Product des Volumens des Elementar-Tetraeders mit dem Factor

$$mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm''.$$

Dieser Satz ist eine Folge der Formel (42).

Sei $OTT'T''$ (Fig. 20) das gegebene Tetraeder, dann wird man haben

(60) Volumen des Tetraeders $OTT'T'' = \frac{1}{6}\Omega\,(mn'p'')$.

Diese Formel bleibt richtig, wenn m, n, p oder m', n', p' oder m'', n'', p'' andere gemeinsame Theiler haben als die Einheit.

Aufgabe XXVIII. — Das Haupt-Tetraeder einer Schaar zu finden.

Wählen wir willkürlich einen Gitterpunkt O (Fig. 21), und suchen die beiden kleinsten Parameter OA, OB; entwerfen wir sie in einem solchen Sinne, dass der Winkel AOB spitz sei, oder höchstens gleich 90 Grad, was immer möglich sein wird. Vollenden wir das Dreieck AOB, welches eins der Hauptdreiecke der Netzebene AOB sein wird, und construiren über irgend einer seiner drei Seiten, z. B. über AB, das zweite Hauptdreieck BAO', welches, mit dem vorigen vereint, das Grundparallelogramm $OAO'B$ vollendet. Ueber dem Umriss dieses Parallelogramms errichten wir senkrecht die Seiten eines nach beiden Richtungen unbegrenzten Prismas. Die Netzebene, welche angrenzend an die Ebene $OAO'B$ und über dieser gelegen ist, wird von dem Umriss des Prismas nach einem, der Basis $OAO'B$ gleichen, Parallelogramm geschnitten, welches in seinem Innern einen Gitterpunkt der Schaar enthalten muss, wenn es nicht zwei oder vier davon auf seinem Umriss enthält. Sei D dieser Gitterpunkt; die Punktreihen OA, OB und OD werden conjugirt und die Pyramide $OABD$ wird das Haupt-Tetraeder sein.

Wenn der so erhaltene Gitterpunkt in d gelegen wäre, und sich orthogonal auf das Innere des zweiten Dreiecks BAO' projicirte, so würden die Punktreihen $O'A$, $O'B$ und $O'd$ conjugirt sein, und die Pyramide $O'ABd$ wäre das Haupt-Tetraeder.

Anmerkung. — Sei $OABD$ das Haupt-Tetraeder, welches aus der vorhergehenden Construction hervorgeht und nothwendiger Weise über der Ebene $OAO'B$ gelegen ist. Wenn wir dieselbe Construction auf der an die Ebene $OAO'B$ angrenzenden Ebene wiederholen, die unter derselben gelegen ist, so erhalten wir einen anderen [56] Gitterpunkt D', dessen Lage in Bezug auf D so sein wird, dass A, D, B und D' ein Parallelogramm bilden. Das Tetraeder $O'ABD'$ wird auch ein Haupt-Tetraeder sein, aber es wird unter der Ebene $OAO'B$ gelegen sein. Es ist leicht zu sehen, dass $OABD$ und $O'ABD'$ zwei inverse*) Polyeder sind, deren Symmetriepol in ω, dem Mittelpunkt des Parallelogramms $OAO'B$ liegt, woraus man ersieht, dass »in jeder Schaar zwei Haupt-Tetraeder existiren, die invers zu einander sind«.

Satz XLI. — Alle Kantenwinkel des Haupt-Tetraeders sind spitz; einige von ihnen (vier höchstens) können ausnahmsweise Rechte sein.

Seien OA, OB (Fig. 21) die beiden kleinsten Parameter der Schaar und $OABD$ ihr Haupt-Tetraeder.

Die ausgesprochene Behauptung ist evident für die drei Winkel der Basis OAB. Man lege durch O eine Ebene normal zu OA; schon nach der Construction des Tetraeders können OD und OA nicht auf verschiedenen Seiten in Bezug auf diese Ebene gelegen sein, also $AOD < 90$ Grad. Man kann auf dieselbe Art beweisen, dass eine ähnliche Ungleichung für die Winkel DOB, DAO, DAB, DBO, DBA stattfindet.

Jetzt schliesst man aus $OB < OD$ auf $ODB < OBD < 90$ Grad; aus $OA < OD$ schliesst man, dass $ODA < OAD < 90$ Grad; endlich aus $BD > BO$, $DA > OA$ folgert man

$$BD^2 + DA^2 > BO^2 + OA^2.$$

Nun hat man, da der Winkel BOA ein spitzer oder ein rechter ist, $BO^2 + OA^2 >$ oder $= BA^2$; also auch

$$BD^2 + DA^2 > BA^2;$$

folglich kann der Winkel BDA 90 Grad nicht übersteigen.

Die Zahl der rechten Winkel des Tetraeders kann ausserdem vier nicht übersteigen, da das Tetraeder nicht mehr als vier Seiten hat.

Anmerkung. — Die Eigenschaften des Haupt-Tetraeders sind eingeschränkter als diejenigen, welche das Haupt-Dreieck

*) Wegen der Definition dieser Ausdrücke sehe man die Anmerkung *) auf Seite 68.

in den Netzen besitzt. Seine Flächenwinkel sind nicht alle nothwendiger Weise spitz. Es besitzt nicht nothwendiger Weise alle die kleinsten Parameter des Systems, und endlich ist es nicht nöthig, dass das Haupt-Dreieck vom kleinsten Flächeninhalt eine seiner vier Seitenflächen bildet.

[57] Es folgt ohne Beweis eine Zusammenstellung verschiedener Eigenschaften des Haupt-Tetraeders.

Satz XLII. — Wenn b der grössere der beiden Minimal-Parameter der Schaar ist, und wenn B der Winkel ist, welcher der Seite b in dem mit diesen Parametern construirten Dreieck gegenüber liegt, so ist die Höhe des Haupt-Tetraeders wenigstens gleich $b\sqrt{1 - \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 B}$.

Corollarsatz. — Dieselbe Höhe wird wenigstens gleich $b\sqrt{\frac{1}{2}}$ sein.

Satz XLIII. — Der kleinste unter den Parametern der Schaar ausserhalb der Ebene, welcher die beiden Minimal-Parameter enthält, ist nothwendiger Weise die eine der drei Kanten, welche die Spitze des Haupt-Tetraeders mit den drei Ecken seiner Basis verbinden.

Satz XLIV. — Wenn OB, OA (Fig. 21) die beiden Minimal-Kanten des Haupt-Tetraeders $OABD$ sind, wobei OA die kleinere von beiden ist, und wenn man durch B die Strecke BO' gleich und parallel mit OA legt, so wird eines der vier Dreiecke AOB, AOD, BOD, $BO'D$ das elementare Dreieck mit kleinstem Flächeninhalt der ganzen Schaar sein.

Corollarsatz. — Die Netzebene mit kleinstem Flächeninhalt enthält immer wenigstens einen der beiden Minimal-Parameter der Schaar.

§ V. — Von den symmetrischen Schaaren.

Definitionen. — Ich nenne Symmetrie-Axe einer Schaar eine Gerade, wenn bei einer Drehung der Schaar als Ganzes um dieselbe durch einen gewissen Winkel dieselben Punkte des Raumes vor und nach der Drehung mit Punkten der Schaar besetzt sind. Ich sage alsdann, dass der scheinbare Ort der Gitterpunkte der Schaar nach dieser Drehung wiederhergestellt ist.

Um die folgenden Auseinandersetzungen deutlicher zu gestalten, werde ich voraussetzen, dass zwei gleiche Schaaren vorhanden sind, die, Gitterpunkt mit Gitterpunkt, zusammenfallen, so dass sie nur eine einzige Schaar vorstellen. Die Lage einer dieser Schaaren wird als unveränderlich angenommen, die andere möge sich ganz in einem Stücke und wie ein fester Körper bewegen können, sowohl durch Translation wie durch Rotation.

[**58**] Wenn die bewegliche Schaar, indem sie sich um die Axe dreht, nach einer halben Umdrehung, oder einer Drehung von 180 Grad, wieder mit der feststehenden Schaar zusammenfällt, wird die Axe mit dem Namen binäre Symmetrie-Axe oder kürzer binäre Axe bezeichnet. Irgend ein beliebiger Gitterpunkt der Schaar hat seinen homologen Punkt auf der anderen Seite der Axe. Die Gerade, welche diese beiden Punkte verbindet, ist zur Axe normal und wird durch sie halbirt.

Wenn das Zusammenfallen nach einer Drittel-, einer Viertel- oder einer Sechstel-Umdrehung erfolgt, so soll die Drehungsaxe den Namen ternäre, quaternäre oder senäre Symmetrie-Axe erhalten. In den Schaaren mit ternärer Symmetrie-Axe sind die Gitterpunkte je zu dreien um die Axe geordnet, und jeder Gitterpunkt hat zwei homologe. Die Anordnung ist eine solche zu vieren um die quaternären Axen, und zu sechsen um die senären Axen.

Die Symmetrie einer Axe soll als Ordnungszahl 2, 3, 4 oder 6 haben, je nachdem dieselbe binär, ternär, quaternär oder senär ist. Diese Ordnungszahl soll bei den Rechnungen durch den Buchstaben q bezeichnet werden.

Zwei Symmetrie-Axen derselben Ordnung sollen Axen derselben Art heissen, wenn die Anordnung der Gitterpunkte um die eine von ihnen dieselbe ist wie um die andere. Um diese Aehnlichkeit der Anordnung zu constatiren, verbindet man in Gedanken die Gitterpunkte der Schaar mit jeder der beiden Axen, und eins der beiden Systeme wird als beweglich vorausgesetzt. Wenn man dann zu gleicher Zeit die bewegliche Axe mit der festen, und die beweglichen Gitterpunkte mit den festen zur Deckung bringen kann, so sollen die Axen von derselben Art heissen.

Es ist nothwendig, dass die Axen von derselben Ordnung sind, und dass ihre Parameter gleich sind, wenn sie von derselben Art sein sollen. Im Allgemeinen sind diese Bedingungen hinreichend. Es giebt indessen einen besonderen Fall, wo zwei binäre Axen denselben Parameter haben können, ohne von derselben Art zu sein.

Zwei Axen, welche den vorhergehenden Bedingungen nicht genügen, sollen Axen von verschiedener Art heissen.

Jede Schaar, welche eine oder mehrere Symmetrie-Axen besitzt, soll symmetrische Schaar heissen, und im entgegengesetzten Fall soll sie asymmetrisch genannt werden.

Jede Ebene, welche eine Schaar in zwei geometrisch symmetrische Hälften theilt, soll Symmetrie-Ebene der Schaar heissen. Jeder Gitterpunkt besitzt alsdann seinen homologen auf der entgegengesetzten Seite der Ebene.

[59] Satz XLV. — Der kleinste Winkel, welcher die Orte der Gitterpunkte einer symmetrischen Schaar während ihrer Drehung um eine Symmetrie-Axe wiederherstellt, ist ein Theiler von 360 Grad.

Sei M (Fig. 13) einer der Gitterpunkte der Schaar, und MO die von M auf die Axe gefällte Senkrechte. Lassen wir die bewegliche Schaar eine Drehung MOM' um die Axe machen, wodurch der Ort der Gitterpunkte nicht verändert wird, und sei

$$MOM' = Q.$$

Während der bewegliche Gitterpunkt M sich über den festen Gitterpunkt M' stellt, wird der bewegliche Gitterpunkt M' auf M'' kommen, und wir erhalten

$$OM'' = OM' = OM, \quad M''OM' = Q.$$

Wir beschreiben einen Kreis um den Mittelpunkt O mit dem Radius OM und machen

$$\text{Bogen } M''M' = \text{Bogen } M'M, \quad \text{Bogen } M'''M'' = \text{Bogen } M''M'.$$

Es ist klar, dass $M, M', M'', \ldots$ ebenso viele Gitterpunkte der festen Schaar sein werden, und dass die Sehnen der Bogen ein regelmässiges eingeschriebenes Polygon bilden werden, welches nach einer oder mehreren Umdrehungen sich in sich selbst am Ausgangspunkt bei M schliessen wird; sonst gäbe es eine unendliche Zahl von Gitterpunkten der Schaar auf dem Umfang des Kreises, was unmöglich ist. Ausserdem kann man immer annehmen, dass M, M' zwei benachbarte Punkte sind, und dann wird MOM' der kleinste Drehungswinkel sein, der die Orte der Gitterpunkte wiederherstellt. Man erhält also, wenn man diesen kleinsten Winkel Q nennt,

$$(61) \qquad Q = \frac{360^\circ}{q}.$$

Satz XLVI. — Eine Schaar kann nur binäre, ternäre, quaternäre oder senäre Symmetrie-Axen besitzen.

Vollenden wir über MM', $M'M''$ (Fig. 13) die Raute $MM'M''m$. Der Punkt m wird ein Gitterpunkt der Schaar sein, und wir werden leicht finden, dass

$$Om = OM'(1-4\sin^2 \tfrac{1}{2}Q).$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Für } q = 2, & Q = 180^\circ, & \text{haben wir} & Om = -3\,OM'; \\
\text{Für } q = 3, & Q = 120^\circ, & & Om = -2\,OM'; \\
\text{Für } q = 4, & Q = 90^\circ, & & Om = -OM'; \\
\text{Für } q = 5, & Q = 72^\circ, & & Om = -\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}OM' \\
 & & & \quad = -0{,}382\,OM'; \\
\text{Für } q = 6, & Q = 60^\circ, & & Om = 0; \\
\text{Für } q > 6, & Q = < 60^\circ, & & Om < OM'.
\end{array}$$

[**60**] Die Lösungen $q = 5$ und $q > 6$ sind offenbar nicht zulässig; denn man kann immer annehmen, dass M in der kleinsten Entfernung von der Drehungsaxe genommen ist, und folglich ist die Ungleichung $Om < OM'$ unmöglich, ausser in dem Falle, wo man $Om = 0$ hätte, weil dann O ein Gitterpunkt der Schaar sein würde.

Also wenn die Schaar eine Symmetrie-Axe besitzt, hat man nothwendiger Weise

$$q = 2,\ 3,\ 4 \text{ oder } 6,$$

wobei q die Ordnungszahl der Symmetrie ist, welche der Axe, die man untersucht, eigen ist.

Corollarsatz. — Drehungen von 60, 90, 120, 180, 240, 270 und 300 Grad sind die einzigen, welche in gewissen Fällen die Orte der Gitterpunkte einer Schaar wiederherstellen können.

Satz XLVII. — Wenn in einer Schaar eine Symmetrie-Axe vorhanden ist, welche durch keinen Gitterpunkt geht, so sind die parallelen Geraden, welche durch Gitterpunkte geführt sind, Axen, welche dieselbe Symmetrie besitzen.

Sei q die Ordnungszahl der Symmetrie der untersuchten Axe MM' (Fig. 22) und sei m ein beliebiger Gitterpunkt, welcher nach einer Drehung der beweglichen Schaar um $\dfrac{360^\circ}{q}$

den Ort des Gitterpunktes m' einnimmt. Wenn man die bewegliche Schaar, nachdem sie erst diese Drehung erlitten hat, parallel mit ihr selbst von m' nach m bringt, so wird sie sich in denselben Verhältnissen befinden, als wenn sie von Anfang an um eine Gerade nmn' gedreht wäre, welche durch m parallel zu MM' gelegt wäre; und da der Ort der Gitterpunkte nicht verändert ist, so ist diese Gerade nmn' auch eine Symmetrie-Axe der Schaar. Die Ordnung der Symmetrie dieser Axe wird im Allgemeinen gleich q sein. Immerhin kann es, da eine Axe der Ordnung jq, wobei j irgend eine ganze Zahl ist, erst recht die Eigenschaften der Axen von der Ordnung q besitzt, vorkommen, dass die neue Axe von einer höheren Ordnung wäre, aber diese muss immer ein Vielfaches der Ordnung der Symmetrie der gegebenen Axe sein*).

Definition. — Wir werden mit dem Namen Zwischen-Axen die Axen bezeichnen, [61] welche keinen einzigen Gitterpunkt der Schaar enthalten. Nach dem vorhergehenden Lehrsatz sind die Zwischen-Axen immer von Axen der gleichen Symmetrie begleitet, welche durch die Gitterpunkte gelegt sind, woraus folgt, dass man sich ganz ordnungsmässig darauf beschränken kann, nur die letzteren zu beachten bei allen Untersuchungen, welche nicht den Zweck haben, in besonderer Weise die Eigenschaften der Zwischen-Axen zu bestimmen.

Satz XLVIII. — Jede Symmetrie-Axe, welche einen Gitterpunkt enthält, ist eine der Punktreihen der Schaar.

Sei MM' (Fig. 22) die gegebene Axe, welche durch den Gitterpunkt M geht; seien m ein anderer, ausserhalb der Axe gelegener Gitterpunkt und m', m'', ... seine Homologen in Bezug auf diese Axe. Verbinden wir M mit m, m', m'', ... Wenn wir jetzt die Diagonale $M\mu$ des über Mm und Mm' construirten Parallelogramms ziehen, so wird diese Diagonale, sowohl nach Grösse wie Richtung, einer der Parameter der Schaar sein, in Folge des Satzes XXX. Ebenso wird, wenn wir $M\mu$ mit Mm'' combiniren, die neue Diagonale $M\mu'$ dieselben Eigenschaften haben. Das so erhaltene Endresultat wird, nachdem die ganze Serie der Homologen von m erschöpft

*) Diesen Beweis verdanken wir Herrn *Cauchy*; da er einfacher ist, als der Beweis, den ich selbst von diesem Lehrsatz gegeben hatte, so habe ich diesen letzteren durch ihn ersetzt. (Siehe die *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Band XXIX, pag. 135.)

ist, dasselbe sein, als wenn man mechanisch Kräfte zusammengesetzt hätte, welche nach Grösse und Richtung gleich Mm, Mm', Mm'' ... wären, um deren Resultante zu construiren. Wenn man aber jede dieser Kräfte in Componenten nach der Richtung MM' und senkrecht hierzu zerlegt, so ist ersichtlich, dass die zu MM' normalen Componenten sich in Folge der Symmetrie gegenseitig aufheben, und dass die verticalen Componenten allein übrig bleiben werden. Wenn also O der Schnittpunkt von MM' mit der Ebene des Polygons $mm'm''$ ... ist, so wird jede dieser verticalen Componenten gleich MO sein; wenn man also $MM' = qMO$ nimmt, so wird M' auch ein Gitterpunkt sein; also ist MM' eine Punktreihe der Schaar.

Satz XLIX. — Jede Ebene, welche normal zu einer Symmetrie-Axe durch einen Gitterpunkt gelegt wird, ist eine Netzebene der Schaar.

Seien M der gegebene Gitterpunkt (Fig. 22) und MM' die gegebene Axe, die man immer als durch M gehend voraussetzen kann. Seien m irgend ein anderer Gitterpunkt, m' und m'' seine Homologen. Die Linien, welche parallel zu mm', $m'm''$, $m''m$, ... durch M gelegt werden, sind augenscheinlich Punktreihen der Schaar, also wird die Ebene, welche normal zu MM' liegt und alle diese Geraden enthält, eine der Netzebenen der Schaar sein.

[62] Wenn die Axe MM' eine binäre Axe wäre, so würde man einen zweiten Gitterpunkt μ, der ausserhalb der Ebene mMM' gelegen, zu Hülfe nehmen. Derselbe Beweis würde auch dann noch anwendbar sein.

Satz L. — Wenn in einer Schaar eine Symmetrie-Ebene existirt, welche keinen einzigen Gitterpunkt enthält, so ist jede parallele Ebene, welche durch einen Gitterpunkt geht, auch eine Symmetrie-Ebene des Systems.

Seien m (Fig. 23) ein beliebiger Gitterpunkt und m' sein Homologer auf der anderen Seite der gegebenen Ebene GH, die der Voraussetzung nach eine Symmetrie-Ebene der Schaar sein soll. Wenn man die bewegliche Schaar, parallel mit ihr selbst, von m' nach m führt, das heisst in einer zur Ebene normalen Richtung, so weiss man, dass sie zu der festen Schaar symmetrisch bleibt bezüglich einer Ebene, welche in der Mitte der den beweglichen Punkt m' mit dem festen Punkt m verbindenden Strecke normal ist. Im Grenzfall, wenn m' mit m zusammentrifft, wird die Symmetrie-Ebene, immer parallel mit sich selbst, schliesslich durch m gehen; aber dann fallen die beiden Schaaren, die bewegliche und die feststehende, zusammen; folglich wird die durch m parallel zu GH gelegte Ebene eine Symmetrie-Ebene des Systems sein.

Anmerkung. — Man kann von den Zwischen-Ebenen der Symmetrie absehen und nur diejenigen beachten, welche durch Gitterpunkte gehen.

Satz LI. — Jede Symmetrie-Ebene, welche einen Gitterpunkt enthält, ist eine Netzebene.

Sei M (Fig. 23) der in der Symmetrie-Ebene GH gelegene Gitterpunkt; seien m, m' zwei in Bezug auf diese Ebene homologe Gitterpunkte. Die Diagonale der über Mm und Mm' construirten Raute wird, nach Grösse und Richtung, der Parameter einer der Punktreihen des Systems sein. Es ist nun aber klar, dass sie in der Symmetrie-Ebene enthalten ist. Man kann ebenso beweisen, dass andere Punktreihen existiren, welche durch M gehen und der Symmetrie-Ebene angehören, aber nicht in der Ebene mMm' gelegen sind; woraus man sieht, dass die Symmetrie-Ebene nothwendiger Weise eine Netzebene ist.

Satz LII. — Wenn eine Schaar eine Symmetrie-Axe von gerader Ordnung besitzt, so besitzt sie auch ein System von Symmetrie-Ebenen, welche alle zu dieser Axe normal sind, und umgekehrt zieht das Vorhandensein einer Symmetrie-Ebene dasjenige eines Systems von Axen von gerader Ordnung, die zu ihr normal sind, nach sich.

Ich habe in einer Notiz über die symmetrischen Polyeder der Geometrie [63] bewiesen*), dass, wenn man das inverse Polyeder eines gegebenen Polyeders P um 180 Grad um eine Gerade A dreht, die durch den Symmetrie-Pol gelegt ist, man das symmetrische Polyeder zu P bezüglich der normal zu der Geraden A durch den Pol gelegten Symmetrie-Ebene erhält.

Nehmen wir einen beliebigen Gitterpunkt O (Fig. 23) zum Symmetrie-Pol und construiren wir die inverse Schaar, welche Gitterpunkt auf Gitterpunkt mit der ursprünglichen zusammenfällt; dann, nachdem wir durch O eine Gerade mOm'

---

*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, Band XIV, p. 138. Das inverse Polyeder von P erhält man, indem man die Ecken von P mit einem festen Punkte verbindet, welcher den Namen Symmetrie-Pol erhält, und indem man diese Geraden jenseits des Poles um eine ihnen gleiche Strecke verlängert.

parallel zu der Axe von gerader Ordnung gelegt haben, lassen wir die inverse Schaar sich um 180° um diese Gerade drehen, so wird sie in Folge der Symmetrie der Axe Punkt für Punkt wieder mit sich selbst zusammenfallen. Also wird, in Uebereinstimmung mit der oben erwähnten allgemeinen Eigenschaft, die durch O normal zu der Axe gelegte Ebene eine Symmetrie-Ebene für die beiden zusammenfallenden Schaaren sein und folglich für die zwei Hälften der gegebenen Schaar.*)

Der umgekehrte Satz wird in der folgenden Weise bewiesen:

Sei O (Fig. 23) ein Gitterpunkt, welcher auf der der festen und der beweglichen Schaar gemeinsamen Symmetrie-Ebene gelegen ist. Man weiss aus der allgemeinen Theorie der inversen Polyeder (siehe die angeführte Notiz), dass, wenn man das symmetrische Polyeder eines Polyeders P um 180°, um die in diesem Gitterpunkt O errichtete Normale zu der Symmetrie-Ebene dreht, man das inverse Polyeder wiederfinden muss. Im gegenwärtigen Fall wird man, wenn man die bewegliche Schaar diese halbe Umdrehung machen lässt, sie mit der inversen Schaar wieder zusammentreffen lassen, die augenscheinlich nicht verschieden von der gegebenen Schaar ist. Also ist die Normale eine binäre Axe des Systems. Man sieht, dass sie im Allgemeinen eine Axe von einer beliebigen geraden Ordnung sein kann.**)

Definition. — Wenn man fortfährt, die Gesammtheit aller Punktreihen in einer Schaar, die unter sich parallel sind, als *Punktreihen-System* zu bezeichnen, so hat man in einem solchen System die *Richtung*, die *Grösse des Parameters* [**64**] und endlich die *Dichtigkeit des Systems* zu betrachten, welche gleich der Anzahl der Punktreihen ist, die in einem prismatischen Raum von dem senkrechten Querschnitt gleich 1 und mit Kanten, die parallel der gemeinsamen Richtung der Punktreihen laufen, enthalten sind.

Es folgt aus der Constanz der Volumen der Grund-Parallelepipede, dass beim Uebergang aus einem Punktreihen-System in ein anderes der Quotient des Parameters durch die

---

*) Man kann diesen Satz auch als unmittelbare Folge des Satzes XXI meiner Abhandlung »Ueber die Polyeder von symmetrischer Form« ansehen, *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, Band XIV.

**) Dieser reciproke Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze IV meiner Abhandlung »Ueber die Polyeder von symmetrischer Form«.

Dichtigkeit sich nicht verändert und dem Volumen Ω des Grund-Parallelepipedes gleich bleibt.

Wenn man ein Punktreihen-System durch das Dazwischenschieben von neuen äquidistanten Gitterpunkten zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten auf jeder Punktreihe verändert, so modificirt man die Schaar, und je nachdem die Zahl der eingeschobenen Gitterpunkte 1, 2, 3, ... auf jedem Parameter ist, wird die neue Schaar verdoppelt, verdreifacht oder vervierfacht sein bezüglich der Anzahl ihrer Gitterpunkte. Alsdann verkleinert sich das Grund-Parallelepiped in dem Verhältniss der Einheit zu den Zahlen 2, 3, 4, ... Nachdem dies festgestellt, kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz LIII. — **Dieselben Punktreihen-Systeme finden sich in der ursprünglich gegebenen Schaar und in der Schaar wieder, die daraus durch die Zwischenschaltung von neuen Gitterpunkten auf einem ihrer Punktreihen-Systeme abgeleitet ist.**

Es seien drei conjugirte Axen als Coordinaten-Axen genommen, wobei die Axe der z eine der Punktreihen des durch die Zwischenschaltung von neuen Gitterpunkten modificirten Systems ist; dann werden, wenn a, b, d die drei Parameter dieser Axen sind, a, b, $\frac{d}{\theta}$ die drei Parameter in der neuen Schaar sein, wobei $\theta - 1$ die Zahl der auf jedem Parameter hinzugefügten Gitterpunkte ist. Um auf die ursprüngliche Schaar zurückzukommen, unterdrücke man in jener alle Netzebenen von der Form

$$z = j\theta + 1, \quad = j\theta + 2, \quad \ldots, \quad = j\theta + \theta - 1,$$

wobei j eine beliebige ganze Zahl ist, und behalte nur die Ebenen $z = 0$, $z = \theta$, $z = 2\theta$, ..., $z = j\theta$ bei.

Betrachten wir jetzt die Punktreihe, welche von dem Anfangspunkt O (Fig. 20) nach dem Gitterpunkte t mit den Coordinaten (m, n, p) von der Schaar mit zwischengeschalteten Gitterpunkten geführt ist. Alsdann wird, wenn die Ordinate p ein Vielfaches von θ ist, der Gitterpunkt t der ursprünglichen Schaar angehören, und das System der Punktreihen Ot wird sich mit derselben Grösse des Parameters in der ursprünglichen Schaar wiederfinden. Wenn die Ordinate p [**65**] kein Vielfaches von θ ist, so verlängere man Ot um $tt'' = (\theta - 1)Ot$; da die Zahlen-Ordinate von dem Gitterpunkt t'', die parallel zu den z liegt, dann ein Vielfaches von

θ geworden ist, so wird der Punkt t'' dann der ursprünglichen Schaar angehören; so wird also das System der Punktreihen Ot in der Schaar noch bestehen, nachdem die Netzebenen

$$z = j\theta + 1, \quad z = j\theta + 2, \quad \ldots, \quad z = j\theta + \theta - 1$$

unterdrückt sind.

Demnach bestehen alle Punktreihen-Systeme, ohne dass ihre Richtung verändert wäre, nach Unterdrückung der zwischengeschalteten Gitterpunkte. Diese Systeme sind nur in Bezug auf ihre Dichtigkeit oder die Grösse ihres Parameters verändert, für jedes von ihnen lässt die Unterdrückung der Gitterpunkte das Verhältniss des Parameters zu der Dichtigkeit im Verhältniss $\theta : 1$ wachsen.

Corollarsatz. — Dieselben Punktreihen-Systeme finden sich in den beiden Schaaren wieder mit Modificationen, welche nur die Grösse des Parameters oder die Dichtigkeit des Systems betreffen; es folgt daraus, dass dieselben Systeme der Netzebenen auch in beiden Schaaren vorhanden sind; immerhin wird die Dicke der Schichten oder der Flächeninhalt der Grund-Masche in der Weise von der einen zur anderen variiren, dass ihr Product im Verhältniss $\theta : 1$ durch die Unterdrückung der zwischengeschalteten Punkte wächst.

Nach diesen allgemeinen Sätzen wollen wir nach einander die Eigenschaften durchnehmen, welche jede besondere Art der Symmetrie charakterisiren.

Binäre Symmetrie.

Satz LIV. — In jeder Schaar mit binärer Symmetrie-Axe wird, wenn man die beiden angrenzenden Netzebenen einer zur binären Axe normalen Netzebene betrachtet, das Netz einer dieser beiden Ebenen mit der orthogonalen Projection des Netzes der anderen zusammenfallen.

Denn seien P eine zur Axe normale Netzebene und P', P'' ihre beiden angrenzenden; die Netze von P' und P'' sind homolog in Beziehung auf die Ebene P, welche eine Symmetrie-Ebene der Schaar ist (Lehrsatz LII); also ist das Netz einer der Ebenen P', P'' die orthogonale Projection des Netzes der anderen.

Corollarsatz. — Wenn man allen diesen auf einander folgenden Netzebenen, die alle normal zu der Axe sind, Ordnungszahlen giebt, so sieht man, dass in der Reihe der Ebenen mit geraden Zahlen dasselbe Netz sich durch orthogonale Projection wieder herstellen wird, [66] und das Gleiche gilt von der Reihe der Ebenen mit ungeraden Ordnungszahlen.

Satz LV. — Jede Schaar mit binärer Symmetrie-Axe kann angesehen werden, als wäre sie aus einem geraden Prisma mit parallelogrammatischer Basis abgeleitet, welches in gewissen Fällen in dem Centrum seiner Form einen der Gitterpunkte der Schaar aufweisen kann.

Sei $ABCDE$ (Fig. 24) das Netz, welches auf der zur binären Axe normalen und durch einen Gitterpunkt A gehenden Ebene entworfen ist. Nehmen wir diese Ebene zur Ebene der xy; ihre Gleichung in Zahlen-Coordinaten wird $z = 0$ sein.

Alle Netze, welche auf den Ebenen $z = \pm 2$, $z = \pm 4$, $z = \pm 6$, ... entworfen sind, werden sich orthogonal auf das Netz $ABCD$... projiciren (Satz LIV).

Die Netze der Ebenen $z = \pm 1$, $z = \pm 3$, ... können auch möglicher Weise orthogonal auf $ABCD$... projicirt werden; in diesem Fall wird das Grund-Parallelepiped ein gerades Prisma mit parallelogrammatischer Basis sein.

Aber das Gegentheil kann auch stattfinden. Nehmen wir dann an, dass einer der Gitterpunkte A' des Netzes $z = 1$ sich nach a auf die Ebene $z = 0$ projicire. Wenn man A mit A' verbindet, und AA' um eine ihr selbst gleiche Grösse bis D'' verlängert, so wird D'' offenbar ein Gitterpunkt des Netzes $z = 2$ sein, und wenn man die Senkrechten $A'a$, $D''D$ fällt, so wird D einer der Gitterpunkte des Netzes $z = 0$ sein (Satz LIV), und a wird auf der Mitte der Strecke AD liegen. Da der Gitterpunkt A willkürlich gewählt wurde, so sieht man, dass a ein geometrischer Mittelpunkt von dem Netz $ABCD$... ist, und auf der Mitte eines der Parameter AD dieses Netzes liegt. Construiren wir jetzt über AD als Basis zwei gleiche und entgegengesetzt liegende Elementar-Dreiecke wie ACD, AED; der Punkt a wird der Mittelpunkt des Grundparallelogramms $ACDE$ sein, und A' wird das Centrum der Form des geraden Prismas sein, das als untere Basis $ACDE$ hat, und dessen obere Basis sich auf der Ebene $z = 2$ befindet. Die Schaar könnte also als aus einer unendlichen Zahl solcher Prismen zusammengesetzt angesehen werden, welche von gleicher Höhe wie der Abstand der Ebenen $z = 0$, $z = 2$ wären, und von denen jedes ausserdem in dem Centrum seiner Form einen der Gitterpunkte der Schaar trüge.

Anmerkung I. — Es ist immer erlaubt vorauszusetzen, dass A so gewählt wurde, dass er unter allen Gitterpunkten des Netzes $z = 0$ der nächste an dem Punkte a ist; wenn dann AD nicht der kleinste Parameter des Netzes $z = 0$ ist, sei AB dieser kleinste Parameter der in einem solchen Sinne aufgetragen sei, dass man [67] $BAD < 90$ Grad habe. Weil man $aB > aA$ hat, liegt der Gitterpunkt B ausserhalb des Kreises, der über AD als Durchmesser beschrieben ist, und daher ist es sicher, dass man $ABD < 90$ Grad hat. Aber andererseits hat man, wegen $AB < BD$ auch $ADB < BAD < 90$ Grad; also sind die drei Winkel des Dreiecks BAD spitz; so wird also BAD das Hauptdreieck des Netzes $z = 0$ sein (Satz VI). Demnach wird die Projection von A' immer auf die Mitte von einer der drei Seiten des Hauptdreiecks fallen, was beweist, dass das Alterniren der Netze mit abwechselnd gerader und ungerader Ordnungszahl sich nur auf drei verschiedene Weisen machen kann, je nachdem die Projection der Gitterpunkte des Netzes $z = 1$ auf die Mitte der kleinen, der mittleren oder der grossen Seite des Haupt-Dreiecks des Netzes $z = 0$ fällt.

Man sieht daraus ebenfalls, dass die Schaar als aus Prismen zusammengesetzt angesehen werden kann, die ein Parallelogramm wie $ABCD$ zur Basis, als Höhe den Abstand der Ebenen $z = 0$ und $z = 2$ haben, und Gitterpunkte auf den Mittelpunkten von zweien ihrer rechteckigen verticalen Seitenflächen tragen. Man kann sich dann immer die Basis einer jeden der beiden centrirten Seitenflächen als von einer der drei Seiten des Haupt-Dreiecks gebildet denken.

Anmerkung II. — Im Fall des Alternirens der Netze kann man auch statt des geraden, centrirten Prismas das Oktaeder der Figur 28 nehmen, dessen Axe $A'A''$ die parallelogrammatische Basis $ACDE$ normal und in der Mitte durchschneidet.

Es muss bemerkt werden, dass dieses Oktaeder deshalb doch noch kein Grundkörper ist, welcher fähig wäre, durch unmittelbares Aneinanderfügen alle Gitterpunkte der Schaar zu reproduciren.

Terbinäre Symmetrie.

Satz LVI. — Wenn der Grundkörper der Schaar ein centrirtes oder nicht centrirtes gerades Prisma mit rhombischer Basis ist, so besitzt die Schaar drei binäre Symmetrie-Axen, die rechtwinklig zu einander sind.

Nehmen wir an, dass der Rhombus $ACDE$ (Fig. 24) die Basis des geraden Grund-Prismas sei; wenn wir alsdann die Augen auf die Figur 25 werfen, welche auf der Ebene $z = 0$ erstens das Netz $z = 0$ zeigt, dessen Punktreihen durch ausgezogene Linien dargestellt sind, und als Projection auf dieses Netz die Netze $z = 2j$, sowie die Netze $z = 2j + 1$, aber diese letzteren nur in dem Falle, dass sich [68] alle Projectionen decken; zweitens, aber nur für den Fall des Alternirens, die Netze $z = 2j + 1$, dargestellt durch die punktirten Linien ac, cd, de, ae etc., so wird es klar, dass jede normal zu der Ebene der Zeichnung liegende Ebene, welche mit einer der Diagonalen des Rhombus, z. B. der Linie $\alpha\alpha'$ gleich gerichtet ist, eine Symmetrie-Ebene für die Schaar sein wird, weil alles zur Rechten und zur Linken dieser Ebene gleich ist. Also wird die zu dieser Ebene normale Diagonale AD eine binäre Axe des Systems sein (Satz LII). Man würde ebenso beweisen, dass die zweite Diagonale EC auch eine binäre Axe ist.

Anmerkung I. — In dem Falle, dass a (Fig. 25) auf die Mitte von AA' fiele, c auf die Mitte von AC, d auf die Mitte von ED, etc., würde der vorige Satz nicht mehr anwendbar sein, selbst wenn das Grund-Prisma noch ein gerades Prisma mit rhombischer Basis wäre.

Anmerkung II. — Wenn das Haupt-Dreieck gleichseitig wird, und wenn ausserdem die Netze übereinander liegen, so wird die Symmetrie senär, und die Schaar gehört einer besonderen Classe an, von der später die Rede sein wird; wenn dagegen, in diesem Fall, die aufeinanderfolgenden Netze alternirend sind, so wird die allgemeine Symmetrie der Schaar durch diesen Umstand nicht beeinflusst.

Satz LVII. — Wenn das zur binären Axe normale Netz rechteckige Maschen hat, so besitzt die Schaar drei zu einander rechtwinklige, binäre Symmetrie-Axen.

In dem Fall, wo die Netze nicht-alternirend über einander liegen, ist der Grundkörper ein rechtwinkliges, nicht centrirtes Parallelepiped und der Satz ist einleuchtend.

Wenn die Netze alternirend sind, so können zwei verschiedene Fälle eintreten: entweder fällt der Punkt a der Figur 24 auf die Mitte der Hypotenuse des Haupt-Dreiecks, welches dann rechtwinklig ist, oder auf die Mitte einer der beiden kleinen Seiten.

Im ersten Fall zeigt die Figur 26 die Projection der alternirenden Netze auf die Ebene $z = 0$. In diesem Falle sind die normal zur Ebene $z = 0$, durch die Geraden AC, ac, ED, ... gehenden Ebenen, sowie die Ebenen, welche durch AE, ae, CD, ... gehen, augenscheinlich Symmetrie-Ebenen der Schaar; also sind dann die Seiten der Rechtecke binäre Axen (Satz LII).

In dem zweiten Fall wird die Projection durch die Figur 27 dargestellt, wo $ACDE$ [69] die Masche des Netzes $z = 0$ ist und $acde$ diejenige des Netzes $z = 1$. In diesem Fall sind offenbar auch wieder die durch die Seiten des Rechtecks gelegten Ebenen Symmetrie-Ebenen der Schaar. Man wird bemerken, dass man in diesem letzten Fall als Grundkörper ein gerades Prisma mit rhombischer Basis annehmen kann; es genügt in der That, die rhombische Netzmasche, welche in der zu $z = 0$ normalen Ebene liegt und die Gerade $AaEe$ als Spur hat, zur Basis zu nehmen.

Anmerkung. — Wenn das Rechteck sich in ein Quadrat verwandelte, so würde die Symmetrie eine quaternäre und die Schaar würde in eine besondere Classe gehören, über die wir bald sprechen werden; indessen bleibt die Symmetrie die gleiche, wenn das Alterniren der Figur 27 entspräche.

Definition. — Wir wollen mit dem Namen terbinäre Symmetrie diejenige bezeichnen, welche durch drei binäre, zu einander normale Axen charakterisirt ist. Diese drei Axen sind, obgleich von derselben Ordnung, von verschiedenen Arten.

Satz LVIII. — In jeder Schaar mit terbinärer Symmetrie, haben die zu den binären Axen normalen Netzebenen entweder rhombische oder rechteckige Maschen.

Es seien die drei binären Axen zu Axen der x, der y und der z genommen. Wenn man die Schaar um 180 Grad um die Axe der x dreht, so muss das Netz $z = 0$ wieder mit sich selbst zusammenfallen; deshalb muss die Axe der x eine Axe von binärer Symmetrie für das Netz der Ebene der xy sein, was verlangt, dass seine Masche rhombisch oder rechteckig sei (Satz XIV, Corollarsatz II). Es würde dasselbe für die Netze gelten, welche in den Ebenen der xz und yz liegen.

Corollarsatz. — Es folgt aus den vorhergehenden Sätzen, dass jede terbinäre Schaar in eine der vier folgenden Kategorien gehört:

1. Nicht centrirtes, gerades Prisma mit rhombischer Basis, oder gerades rechteckiges Prisma, das zwei seiner Seitenflächen centrirt hat;
2. Centrirtes, gerades Prisma mit rhombischer Basis;
3. Nicht centrirtes, gerades rechteckiges Prisma;
4. Centrirtes, gerades rechteckiges Prisma.

In den Fällen 2 und 4 kann man, um die Schaar abzuleiten, das Prisma durch ein Oktaeder $ACDEA'A''$ (Fig. 28) mit rhombischer Basis (zweiter Fall) oder mit rechteckiger Basis (vierter Fall) ersetzen.

Anmerkung. — Ich habe in meiner »Abhandlung über die Polyeder von symmetrischer [70] Form« mehrere Lehrsätze über die binäre Symmetrie bewiesen. Man kann dieselben auf die Schaaren anwenden, indem man nicht aus den Augen verliert, dass irgend ein Gitterpunkt als das Symmetrie-Centrum der Schaar angesehen werden kann, und als der Ort, an dem sich ihre Axen und Symmetrie-Ebenen kreuzen. Ich werde mich darauf beschränken, hier den Inhalt des folgenden Satzes (Corollar des Satzes XIII meiner Abhandlung) zu wiederholen, dessen directer Beweis im Uebrigen keine Schwierigkeit bieten würde.

»Wenn zwei binäre Axen existiren, die zu einander normal sind, so ist immer eine dritte vorhanden, welche normal zu ihrer Ebene ist«.

Satz LIX. — Dieselben Systeme von Punktreihen und von Netzebenen finden sich in der Schaar, welche von dem centrirten geraden Prisma abgeleitet wird, und in der Schaar, welche von demselben nicht centrirten geraden Prisma abgeleitet wird.

Die Centrirung des Prismas ist nichts anderes als die Einschaltung eines Gitterpunktes auf die Mitte einer seiner vier Diagonalen. Wenn man dieselbe Einschaltung bei allen Prismen der Schaar durchführt, indem man immer die Diagonale wählt, welche der ursprünglich genommenen parallel ist, so ist klar, dass man eine verdoppelte Schaar hat, in welcher man gemäss dem Satze LIII dieselben Systeme von Punktreihen und von Netzebenen wiederfinden muss, wie in der ursprünglichen Schaar. Folglich, etc.

Ternäre Symmetrie.

Satz LX. — *In jeder Schaar, welche eine ternäre Axe besitzt, hat das Netz der zur Axe normalen Netzebene dreieckige, gleichseitige Maschen.*

Sei M (Fig. 11 und Fig. 29) einer der Gitterpunkte der Schaar, der so gewählt ist, dass er so nahe als möglich bei der Axe der ternären Symmetrie liegt, ohne indessen auf dieser Axe zu sein. Wir legen durch M die zur Axe normale Ebene, welche sie in O schneidet, und construiren endlich das gleichseitige Dreieck MNP um O als Mittelpunkt.

Wenn O ein Gitterpunkt der Schaar ist, so wird das Netz die Anordnung, welche in der Figur 11 dargestellt ist, zeigen; M', N', P' werden auch Gitterpunkte sein, und die Symmetrie-Axe wird nicht nur eine ternäre, sondern, was mehr ist, eine senäre Axe sein. Wählen wir nämlich die Ebene der Figur (Fig. 11) als Ebene der xy; es ist klar, dass das Netz der Ebenen $z = 1$, $z = 2, \ldots$ sich orthogonal auf [71] dasjenige der Ebene $z = 0$ projiciren wird; denn indem man das Netz $z = 0$ nach der Ebene $z = 1$ parallel mit ihm selbst bewegt, darf keiner der Gitterpunkte des Sechsecks $MM'NN'PP'$ sich der Axe nähern. Unter diesen Umständen wird die Gerade, welche durch O normal zu der Ebene der Figur gelegt ist, augenscheinlich eine senäre Axe sein.

Indem wir uns diesen Fall vorbehalten, wollen wir in diesem und den folgenden, sich auf die *einfach ternäre Symmetrie* beziehenden Sätzen annehmen, dass der Mittelpunkt O (Fig. 29) des Dreiecks MNP kein Gitterpunkt der Schaar ist, was indessen nicht besagt, dass die durch diesen Punkt geführte Axe keinen einzigen Gitterpunkt enthalte.

Das Dreieck MNP (Fig. 29), das Resultat der angegebenen Construction, wird offenbar das Haupt-Dreieck des Netzes sein; folglich hat das Netz dreieckige, gleichseitige Maschen.

Satz LXI. — *In jeder Schaar mit einfach ternärer Symmetrie haben zwei zur ternären Axe normale Netzebenen, welche durch zwei dazwischenliegende Netzebenen getrennt sind, Netze, welche sich orthogonal aufeinander projiciren.*

Nehmen wir die unterste dieser vier Ebenen zur Ebene der xy, so dass ihre Gleichung $z = 0$ sei. Ich behaupte, dass das Netz der Ebene $z = 3$ sich rechtwinklig auf das Netz $z = 0$ projiciren wird.

Sei $ABCDEF$ (Fig. 29) ein regelmässiges Sechseck, dessen Ecken dem Netze $z = 0$ angehören, und errichten wir auf seiner Ebene, durch den Mittelpunkt O, welcher auch ein Gitterpunkt des Netzes ist, eine Normale, die eine ternäre Axe des Systems sein wird (Satz XLVII). Dann bringen wir parallel mit sich selbst das Netz $z = 0$ auf die Ebene $z = 1$. Sei MNP das Haupt-Dreieck des Netzes $z = 1$, ein Dreieck, dessen Fläche durch die in O errichtete Normale durchstochen wird. Die Figur zeigt die rechtwinklige Projection dieses Dreiecks auf die Ebene $z = 0$.

Wenn O mit der Projection eines der Gitterpunkte M, N, P zusammenfiele, so würden die Netze in den Ebenen $z = 0$, $z = 1$ übereinander liegen, und die Symmetrie wäre senär.

Da dieser Fall ausgeschlossen ist, so verlangt die ternäre Symmetrie der in O errichteten Normale, dass O mit dem Mittelpunkte des Dreiecks MNP zusammenfalle; und da letzteres Dreieck seine Seiten parallel zu AB, AO und BO haben muss, so kann es nur zwei Stellungen haben, die invers zu einander sind, MNP und $M'N'P'$. Das Dreieck MNP, dessen Eckpunkte augenscheinlich mit den Centren der Form der Dreiecke [72] AOF, BOC, DOE zusammenfallen, kann angesehen werden, als entstände es aus einer Translation, ohne Drehung, von AOB oder COD oder EOF. Das Dreieck $M'N'P'$ dessen Ecken die Centren der Form von DOC, EOF und AOB sind, würde aus der Translation von einem der Dreiecke BOC, DOE, FOA hervorgehen.

Nehmen wir an, dass das Netz $z = 1$ in der Projection das Netz mit unterbrochenen Linien $MNP\ldots$ der Figur sei. Dann muss, in der Raute $AOFG$, die grosse Diagonale OG durch M gehen, und man erhält vermöge der bekannten Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks $OM = \frac{1}{3}\,OG$. Wenn man also den Gitterpunkt O mit dem auf der Ebene $z = 1$ gelegenen Gitterpunkt verbindet, welcher M als Projection hat, und den ich M_1 nennen werde (der aber nicht in der Figur angegeben ist), so wird die schräge Gerade OM_1 Träger einer Punktreihe vom Parameter OM_1. Indem man auf dieser Punktreihe eine Strecke $OG_3 = 3\,OM_1$ abträgt, muss der Gitterpunkt G_3 (der nicht auf der Figur markirt ist) offenbar seine Projection in G haben, und ausserdem wird er der Ebene $z = 3$ angehören. Woraus man sieht, dass das Netz $z = 3$ sich auf das Netz $z = 0$ projicirt.

Zweiter Beweis. — Sei $O O' O'' O'''$ (Fig. 30) die ternäre Axe, welche durch den Gitterpunkt O geht, der als der Ebene $z = 0$ angehörig betrachtet wird; diese Axe wird in O' und O'' von den Ebenen $z = 1$, $z = 2$ geschnitten, und im Punkte O''' von der Ebene $z = 3$. Das gleichseitige Dreieck $M'N'P'$ der Figur ist die dreieckige Masche des Netzes der Ebene $z = 1$, und es hat seinen Mittelpunkt in O' auf der ternären Axe.

Durch die Axe $O O'''$ und durch einen der drei Gitterpunkte M', N', P', zum Beispiel durch M', führen wir die Ebene $M' O O' m'$, welche $N' P'$ in deren Mitte m' schneiden und senkrecht auf dieser Linie sein wird. Ueber OP', ON', als Seiten, construiren wir den Rhombus $ON'P'M''$, dessen vierte Ecke M'' der Schaar angehören wird, in der Ebene $z = 2$ gelegen, und ausserdem in der Ebene $M'OO'm'$ enthalten sein wird.

Man wird dann haben

$$M'' O'' = 2\, O' m' = M' O',$$
$$O''' O'' = O O',$$
$$O O' M' = 90^\circ = O''' O'' M''.$$

Also die Dreiecke $O O' M'$ und $O''' O'' M''$ sind congruent: folglich ist $M'' O'''$ gleich und parallel zu OM'; so ist also O''' auch ein Gitterpunkt der Schaar (Satz XXX). Demnach projiciren sich die Gitterpunkte des Netzes $z = 3$ orthogonal auf diejenigen des Netzes $z = 0$.

[73] Anmerkung. — Es ist leicht zu sehen, dass das punktirte Netz $M'N'P' \ldots$ (Fig. 29) die orthogonale Projection des Netzes der Ebene $z = 2$ sein wird.

Wenn hingegen das Netz $M'N'P' \ldots$ die orthogonale Projection des Netzes $z = 1$ gewesen wäre, dann würde MNP diejenige des Netzes $z = 2$ gewesen sein.

Corollarsatz. — Wenn man auf der Punktreihe OG_3 den Gitterpunkt M_1 unterdrückt, ebenso wie den auf M_1 folgenden derselben Punktreihe, und wenn man dieselbe Operation auf dem ganzen System der zu OG_3 parallelen Punktreihen, welche von den Gitterpunkten des Netzes $z = 0$ ausgehen, wiederholt, wird man die ternäre Schaar in eine senäre Schaar verwandeln, die als Kern ein gerades Prisma mit rhombischer Basis von 60 und 120 Grad haben wird. Umgekehrt geht man von der senären Schaar auf die entsprechende ternäre Schaar über, die dreimal reicher an Gitterpunkten ist, indem man zwei neue Gitterpunkte auf jedem Parameter eines Punktreihen-Systems einschaltet, welches zu einer der beiden grossen Diagonalen des Grund-Prismas von rhombischer Basis parallel ist.

Aber es ist wichtig zu bemerken, dass man auf diese Weise zwei verschiedene Schaaren erhält, je nachdem man die eine oder die andere der beiden Diagonalen gewählt hat; diese Schaaren haben die Eigenschaft zusammenzufallen, wenn man eine von ihnen um 180 Grad um die ternäre Axe dreht. Also können aus einer und derselben senären Schaar zwei ternäre Schaaren entstehen, welche durch ihre Lage im Raume verschieden sind, eine *directe* ternäre Schaar und eine *inverse* ternäre Schaar.

Satz LXII. — *Jede Schaar mit einfach ternärer Symmetrie hat als Kern ein Rhomboeder.*

Nehmen wir die Figur 30 und den zweiten Beweis des vorigen Satzes wieder auf. Drehen wir das Parallelogramm $OM'O''M''$ durch 120 Grad um OO'''; dann wird der Gitterpunkt M' nacheinander an die Stelle von N' und P' treten, und der Gitterpunkt M'' wird an die Stelle von N'' und P'' treten. Nun werden, ebenso wie die vier Gitterpunkte O, N', P', M'' einen ebenen Rhombus bilden, auch $OM'N'P''$ und $OM'P'N''$ den vorigen gleiche ebene Rhomben sein, und es ist klar, dass dasselbe von den drei oberen Flächen gilt.

Der so erhaltene Körper wird also ein Rhomboeder sein, und da er weder in seinem Innern, noch auf seinen [74] Seiten oder Kanten irgend einen Gitterpunkt der Schaar enthält, so kann er als das Grundparallelepiped oder der Kern der Schaar angesehen werden.

Corollarsatz. — Man kann die Schaar auch aus einem der elementaren Tetraeder $OM'N'P'$, $O'''M''N''P''$ (Fig. 30) ableiten; die vier Ecken genügen, um das ganze System der Schaar vollständig zu bestimmen; aber dieses Tetraeder ist genau genommen kein Grundkörper.

Satz LXIII. — *Jede Schaar mit ternärer Symmetrie besitzt drei Symmetrie-Ebenen, welche durch die Axe gehen und senkrecht auf den drei Richtungen der Seiten des Hauptdreiecks des Netzes der zur Axe normalen Ebenen sind.*

Die Figur 29 zeigt in orthogonaler Projection die drei Netze der Ebenen $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$; alle anderen Netze der Ebenen $z = p$ projiciren sich auf die vorigen; die Netze der Form $z = 3j$ auf das Netz $z = 0$, diejenigen der Form $z = 3j + 1$ auf das Netz $z = 1$, diejenigen der Form $z = 3j + 2$ auf das Netz $z = 2$. Es sei durch O die Gerade OMG normal zu der Seite AF gelegt, und durch diese Gerade eine zur Ebene der Zeichnung normale Ebene. Diese Ebene wird offenbar eine Symmetrie-Ebene für jedes der drei Netze sein; folglich wird sie auch eine Symmetrie-Ebene für die Schaar sein.

Ebenso würden die durch O normal zu den Seiten AB und BC gelegten Ebenen Symmetrie-Ebenen sein; überdies verlangt die ternäre Symmetrie, dass es drei Ebenen giebt. Folglich u. s. w.

Die normal zu der Ebene der Zeichnung und parallel zu den Seiten durch O gelegten Ebenen sind keine Symmetrie-Ebenen der Schaar.

Anmerkung. — Die Krystallographen bezeichnen mit dem Namen Hauptschnitt des Rhomboeders jede Ebene wie $OM'm''O'''M''m'$ (Fig. 30), welche durch die geometrische Axe des Rhomboeders und durch zwei seiner sechs seitlichen Ecken wie M' und M'' geht. OO''' wird die Axe des Rhomboeders genannt.

Man sieht darnach, dass die drei Hauptschnitte des Rhomboeders, welches einer ternären Schaar als Kern dient, Symmetrie-Ebenen für diese Schaar sind.

Satz LXIV. — In den Schaaren mit ternärer Symmetrie ist jede Seite der dreieckig gleichseitigen Masche eines zur ternären Axe normalen Netzes eine binäre Axe der Schaar.

Dies ist eine offenbare Folge aus den Sätzen LII und LXIII. Man [75] sieht es überdies deutlich auf der Fig. 29, indem man das Netz MNP als zur Ebene $z = 1$ gehörig ansieht und das Netz $M'N'P'$ als zur Ebene $z = -1$ gehörig. Alsdann kommt, nach einer Drehung von 180 Grad um die Gerade AOD, M auf P' und P auf M', u. s. w.; so dass das Netz $z = 1$ die Stelle des Netzes $z = -1$ einnimmt und umgekehrt. Ebenso würden sich die Netze $z = p$ und $z = -p$ für einander substituiren; folglich ist AOD eine binäre Axe.

Quaternäre Symmetrie.

Satz LXV. — **In jeder Schaar mit quaternärer Symmetrie-Axe hat das Netz der zur quaternären Axe normalen Netzebenen quadratische Maschen.**

Sei M (Fig. 31) ein Gitterpunkt der Schaar, welcher in der kleinsten Entfernung von der quaternären Axe, aber ausserhalb dieser Axe liegt. Durch M legen wir eine zur Axe normale Ebene, die sie in dem Punkte O schneidet; dann zeichnen wir in den Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OM ein Quadrat $MM'M''M'''$, dessen eine Ecke M sei; die vier Punkte M, M', M'' und M''' werden dem Netz dieser Ebene angehören. Dann wird, wenn der Punkt O einer der Gitterpunkte der Schaar ist, das Netz als Grund-Parallelogramm das Quadrat $OMmM'$ haben, und im entgegengesetzten Falle das Quadrat $MM'M''M'''$.

Satz LXVI. — **Jede Schaar mit quaternärer Symmetrie-Axe leitet sich aus dem geraden Prisma mit quadratischer Basis ab, das sowohl centrirt wie nicht centrirt sein kann.**

Da die quaternäre Axe offenbar alle Eigenschaften einer binären Axe besitzt, so wird der Kern der Schaar ein gerades centrirtes oder nicht centrirtes Prisma mit parallelogrammatischer Basis sein (Satz LV).

Wenn das Prisma nicht centrirt ist, so werden sich alle Netze der Ebenen $z = p$ auf dasjenige der zur quaternären Axe normalen Ebene $z = 0$ projiciren und es wird daraus in orthogonaler Projection die in der Figur 32 angegebene Anordnung folgen.

Wenn das Prisma centrirt ist, so werden sich die Netze der Ebenen $z = 2j$ auch auf das Netz mit quadratischer Masche $z = 0$ projiciren; aber die Projection der Gitterpunkte der Ebenen $z = 2j + 1$ (Fig. 32) wird auf die Mitte einer der drei Seiten des Haupt-Dreiecks ABC fallen (Satz LV, Anmerkung I). Nun kann sie aber weder auf O' noch auf O'' fallen; denn das über dem Quadrat $ABCD$, als Basis, errichtete gerade Prisma würde zwei seiner Seitenflächen centrirt haben, und die beiden [76] anderen nicht centrirt, ein Resultat, das augenscheinlich unvereinbar mit der Symmetrie der vier durch die Gitterpunkte A, B, C, D geführten quaternären Axen sein würde. Also wird die Projection des Netzes $z = 1$ auf O, das heisst auf die Mittelpunkte der Quadrate des Netzes $z = 0$ fallen, wie die Figur 33 es angiebt.

Corollarsatz I. — Der Satz LIII kann auf die quaternären Schaaren angewandt werden. Dieselben Systeme von Punktreihen und von Netzebenen finden sich in der von dem geraden centrirten Prisma abgeleiteten Schaar wieder und in der gehälfteten Schaar, die man erhält, indem man die in die Centren der Prismen gesetzten Gitterpunkte unterdrückt.

Corollarsatz II. — Man kann statt des geraden centrirten Prismas mit quadratischer Basis das Oktaeder mit quadratischer Basis der Figur 28 nehmen; immerhin ist dieser Körper kein Grundkörper der Schaar.

Satz LXVII. — In dem Falle des geraden, nicht centrirten Prismas mit quadratischer Basis sind die vier Seitenkanten quaternäre Symmetrie-Axen; die zu diesen parallelen Axen, welche durch die Mittelpunkte der quadratischen Basen geführt sind, sind jbenfalls quaternäre Axen, aber von der Art dereenigen, die wir mit dem Namen Zwischenaxen bezeichnet haben; sie enthalten keinen Gitterpunkt der Schaar.

Satz LXVIII. — In dem Falle des geraden, centrirten Prismas mit quadratischer Basis sind alle quaternären Symmetrie-Axen Punktreihen, deren Parameter die Höhe des Prismas ist.

Satz LXIX. — In jeder quaternären Schaar giebt es Symmetrie-Ebenen, welche durch die Axe gehen, und von denen die einen wie die Seiten und die anderen wie die Diagonalen des Grund-Quadrats des Netzes gerichtet sind, das normal zur quaternären Axe ist.

Corollarsatz. — Jede Seite und jede Diagonale des Grund-Quadrats des zur quaternären Axe normalen Netzes ist eine binäre Axe der Schaar (Satz LII).

Definitionen. — Die zu den Seiten der Quadrate parallelen Axen sollen binäre Axen der ersten Art heissen, und die Axen, welche den Diagonalen dieser Quadrate parallel sind, sollen binäre Axen der zweiten Art genannt werden. Die ersteren haben die Seite des Quadrats und die anderen die Diagonale desselben als Parameter.

[77] Diese vier Systeme von Axen schneiden sich unter Winkeln von 45 und 90 Grad.

Diese verschiedenen Angaben bedürfen keines Beweises.

Senäre Symmetrie.

Satz LXX. — In jeder Schaar mit senärer Axe hat das Netz der zur Axe normalen Ebenen dreieckig gleichseitige Maschen, und die verschiedenen Netze dieser Ebenen projiciren sich orthogonal aufeinander.

Sei M (Fig. 11) ein ausserhalb der Axe in der kleinsten Entfernung genommener Gitterpunkt. Legen wir durch M eine zur Axe normale Ebene, die sie im Punkt O schneidet. Construiren wir nun das regelmässige Sechseck $MM'NN'PP'$, das seinen Mittelpunkt in O hat. Jede seiner Ecken wird ein Gitterpunkt der Schaar sein, und dasselbe gilt von dem Mittelpunkt O. Diese Ebene wird als Ebene der xy genommen $z = 0$ als Gleichung haben.

Auf die Netzebenen $z = 1$, $z = 2, \ldots$ ist derselbe Beweis anwendbar; der Schnittpunkt jeder dieser Ebenen mit der Axe wird auch ein Gitterpunkt sein. Also decken sich die Netze dieser Ebenen in orthogonaler Projection mit dem Netze der Ebene $z = 0$. Ueberdies ist es klar, dass diese Netze dreieckig gleichseitige Maschen haben.

Corollarsatz. — Die senäre Axe ist eine der Punktreihen der Schaar, und diese Punktreihe ist zu ihrer normalen Ebene conjugirt.

Satz LXXI. — Jede Schaar mit senärer Symmetrie-Axe leitet sich ab aus einem geraden Prisma mit dreieckig gleichseitiger Basis.

Dies ist eine Folge des vorhergehenden Corollarsatzes. Wenn man auf dem Rhombus $OMM'N$ (Fig. 11) ein gerades Prisma errichtet, das als Höhe das Intervall hat, welches die Ebene $z = 0$ von der Ebene $z = 1$ trennt, so wird dieser Körper das Grundparallelepiped der Schaar sein, weil OM und ON zwei conjugirte Punktreihen des Netzes der Ebene $OMM'N$ sind.

Das gerade Prisma von gleicher Höhe und mit dreieckiger Basis OMM' kann auch als Grundkörper der Schaar genommen werden.

Corollarsätze. — Alle zur senären Axe parallelen Punktreihen sind auch senäre Axen.

[78] Jede zur senären Axe Parallele, welche durch den Mittelpunkt eines der gleichseitigen Dreiecke des zur Axe

normalen Netzes gelegt ist, ist eine Zwischenaxe, deren Symmetrie ternär ist.

Jede zur senären Axe Parallele, welche durch die Mitte einer der Seiten der gleichseitigen Dreiecke des Netzes $z=0$ gelegt ist, ist ebenfalls eine Zwischenaxe, aber von binärer Symmetrie.

Alle zur senären Axe normalen Netzebenen sind Symmetrie-Ebenen.

Alle Netzebenen, welche durch die senäre Axe gehen und den Seiten der Dreiecke des Netzes $z = 0$ parallel liegen, sind Symmetrie-Ebenen. Es giebt drei verschiedene Systeme solcher Ebenen.

Alle Netzebenen, welche durch die senäre Axe gehen und senkrecht auf den Seiten der Dreiecke des Netzes $z = 0$ stehen, sind auch Symmetrie-Ebenen. Es giebt drei verschiedene Systeme solcher Ebenen.

In jedem der gleichseitigen Dreiecke des Netzes $z = 0$ ist jede Seite eine binäre Symmetrie-Axe der Schaar. Es giebt drei Systeme solcher Axen und die Axen sind von derselben Art.

In den nämlichen Dreiecken ist jede auf eine Seite gefällte Senkrechte, welche durch die entgegengesetzte Ecke gelegt ist, auch eine binäre Symmetrieaxe. Es giebt drei Systeme solcher Axen; diese Axen sind von gleicher Art unter einander, aber von verschiedener Art als die vorhergehenden.

Definitionen. — Die zu den Seiten parallelen Axen sollen binäre Axen der ersten Art heissen; die auf den Seiten senkrechten Axen, deren Parameter die grosse Diagonale des Grund-Rhombus des Netzes $z = 0$ ist, sollen binäre Axen der zweiten Art genannt werden.

Diese sechs Axen-Systeme schneiden sich unter einander unter Winkeln von 30, 60 und 90 Grad.

Satz LXXII. — Wenn man in einer Schaar von einfach ternärer Symmetrie unter den Netzen der zur Axe normalen Netzebenen diejenigen wegnimmt, welche eine nicht durch drei theilbare Ordnungszahl haben, so erhält man eine Schaar von senärer Symmetrie; alle Punktreihen und Netzebenen der ursprünglichen Schaar finden sich in der neuen Schaar wieder.

Der erste Theil des ausgesprochenen Lehrsatzes ist bereits bewiesen (Satz LXI, Corollarsatz). Die angegebene Wegnahme kommt darauf hinaus, [79] zwei Gitterpunkte von je dreien auf jeder der grossen Diagonalen der geraden Grund-Prismen mit rhombischer Basis zu beseitigen. Nun haben wir aber gesehen (Satz LIII), dass die Einschaltung von neuen Gitterpunkten oder die Beseitigung der eingeschobenen Gitterpunkte in einem System von parallelen Punktreihen die verschiedenen Systeme der Punktreihen oder der Netzebenen nicht ändert, wenigstens was die Richtung dieser Systeme anbetrifft.

Die Beseitigung der Ebenen mit Indices, die nicht Vielfache von 3 sind, modificirt die Systeme der Punktreihen, sei es indem es ihre Dichtigkeit dreimal geringer macht, sei es indem es ihren Parameter dreimal grösser macht. Sie modificirt die Systeme der Netzebenen, sei es indem sie die Dicke der Schichten verdreifacht, sei es indem sie den Flächeninhalt der Grundmasche der Netze dieser Ebenen verdreifacht.

Terquaternäre Symmetrie.

Der Inhalt der folgenden Lehrsätze und die Definition auf Seite 94 werden zeigen, was man unter *terquaternärer Symmetrie* zu verstehen hat.

Satz LXXIII. — *Wenn eine Schaar zwei Axen von ternärer Symmetrie besitzt, die nicht parallel sind, so besitzt sie deren vier, welche wie die vier grossen Diagonalen eines Würfels angeordnet sind, das heisst sich unter dem Winkel 70° 31′ 44″ schneiden, dessen Cosinus gleich $\frac{1}{3}$ ist, und sie kann keine grössere Zahl von diesen Axen besitzen.*

Seien OA und OB (Fig. 34) die beiden gegebenen Symmetrieaxen, welche von demselben Gitterpunkte O ausgehen, und verlängern wir sie, bis sie die Kugel mit dem Centrum O und dem Radius gleich 1 treffen. Schlagen wir den Bogen des grössten Kreises AB, und lassen wir das System OAB sich durch 120 Grad um OB drehen, bis es nach OCB kommt, dann durch 120 Grad um OC, etc. Auf diesem Wege werden wir leicht beweisen, dass die ternären Axen entweder wie die vier Diagonalen eines Würfels oder wie die zehn Diagonalen eines regelmässigen Dodekaeders angeordnet sind;

aber wenn man den Mittelpunkt des so erhaltenen regelmässigen sphärischen Polygons $ABCD\ldots\omega$ nennt (Fig. 34), so muss $O\omega$ auch eine Symmetrieaxe der Art sein, dass die Wiederherstellung der Gitterpunkte sich nach einer Drehung durch den Winkel $A\omega C$ um $O\omega$ vollzieht. Nun würde man in dem Falle des regelmässigen Dodekaeders haben

$$A\omega C = 144^\circ,$$

[80] ein Winkel, der niemals die Orte der Gitterpunkte wiederherstellen kann (siehe den Corollarsatz zum Satze XLVI). Also muss der Fall der zehn ternären Axen, die wie die Diagonalen eines regelmässigen Dodekaeders liegen, ausgeschlossen werden; folglich etc.

Diejenigen unserer Leser, welche einen ausführlicheren Beweis dieses Satzes wünschen sollten, finden ihn in meiner »Abhandlung über die Polyeder von symmetrischer Form«. Ich beschränke mich darauf, an das, was ich in dieser Abhandlung bewiesen habe, zu erinnern:

1. Wenn in einem Polyeder zwei Axen von höherer Ordnung als der zweiten vorkommen, so ist das Polyeder sphäroedrisch (Satz XL der angeführten Abhandlung);

2. Dass zwei Gruppen von sphäroedrischen Polyedern existiren, die quaterternären mit vier ternären Axen, die so zu einander liegen wie die vier Diagonalen eines Würfels, und die decemternären mit zehn ternären Axen, die zu einander liegen wie die zehn Diagonalen eines regelmässigen Dodekaeders. (Corollarsatz zu Satz XLIII derselben Abhandlung);

3. Dass die decemternären Polyeder zugleich zehn quinäre Axen haben (Satz LII derselben Abhandlung).

Da die Schaaren niemals quinäre Axen besitzen können, so können sie folglich nicht zehn ternäre Axen haben.

Daraus folgt offenbar, dass eine jede Schaar, welche zwei ternäre Axen hat, in die Kategorie der quaterternären Polyeder gehört, und sogar in die specielle Art der quaterternären Polyeder mit Symmetrie-Centrum, weil jeder Gitterpunkt einer Schaar als ihr Symmetrie-Centrum genommen werden kann. So ist also der vorliegende Satz vollständig bewiesen.

Satz LXXIV. — Die Verbindungs-Ebene von zwei ternären, nicht parallelen Axen ist eine Symmetrie-Ebene der Schaar.

Seien OA (Fig. 35) die eine dieser Axen, und OB die zweite. Um den Gitterpunkt O beschreibe man mit dem Radius OA gleich 1 eine Kugel, ziehe den Bogen grössten Kreises AB und die Bögen grösster Kreise AC und AD, so dass man

$$BAC = 120^0, \quad BAD = 120^0, \quad AC = AD = AB$$

hat. Durch OA gehen drei Symmetrie-Ebenen, welche die Kugel nach drei grössten Kreisen schneiden werden (Satz LXIII). Wenn diese Ebenen nicht [81] wie AB, AC und AD gerichtet wären, würden sie es wie Ab, Ac und Ad sein; B, C, D würden Homologe in B', C', D' haben; so würden also nicht nur OB, OC und OD ternäre Axen sein, sondern dasselbe würde der Fall sein für OB', OC', OD', was dem vorhergehenden Satze zuwider wäre. Folglich sind OAB, OAC, OAD Symmetrie-Ebenen; es sind überdies die drei Hauptschnitte des Grund-Rhomboeders, dessen Axe wie OA gerichtet ist.

Satz LXXV. — Die Halbirenden der Winkel $70^0\ 31'\ 44''$ und $109^0\ 28'\ 16''$, welche zwei ternäre Axen miteinander bilden, sind Symmetrieaxen für das Netz der Netzebene, welche diese beiden Axen verbindet.

Der Beweis dieses Satzes wird leicht aus den Principien gefolgert, welche ich in meiner »Abhandlung über die Polyeder von symmetrischer Form« niedergelegt habe. Denn es folgt daraus, dass die Halbirende des stumpfen Winkels ($109^0\ 28'\ 16''$) von zwei ternären Axen eines quaterternären Polyeders immer eine binäre oder quaternäre Symmetrie-Axe des Polyeders ist (Satz XLIV jener Abhandlung); also ist diese Winkelhalbirende eine Symmetrieaxe für die Netze aller Netzebenen, welche durch diese Gerade gehen. Die Halbirende des spitzen Winkels der beiden ternären Axen wird also auch eine Symmetrieaxe des Netzes ihrer Ebene sein (Satz XII).

Aufgabe XXIX. — Die Schaaren zu finden, welche vier Axen von ternärer Symmetrie besitzen.

In irgend einer Schaar mit rhomboedrischem Kerne sei OO' (Fig. 36) die ternäre Axe mit OO' als Parameter; O und O' sind zwei Gitterpunkte und einer der drei Hauptschnitte ist zur Ebene der Zeichnung genommen. Sei $AOA'O'$ dieser Hauptschnitt. Wenn man sich durch die Gitterpunkte O, A, A' und O' zur Axe normale Ebenen GOH, AmB, $A'm'B'$

und $G' O' H'$ gelegt denkt, so können diese Ebenen angesehen werden, als hätten sie als Gleichungen

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2, \quad z = 3;$$

sie theilen also den Parameter der Axe OO' in drei gleiche Theile.

Nennen wir jetzt

μ den Winkel des Rhomboeders, das heisst den Winkel, den zwei Seitenflächen dieses Rhomboeders miteinander bilden, welche alle beide durch O oder alle beide durch O' gehen;

[82] a den Parameter der binären Axen der Schaar, das heisst die Länge der Seiten des gleichseitigen Dreiecks, das die Masche des Netzes der Ebenen $z = 0$, $z = 1, \ldots$ bildet;

d den Parameter der ternären Axe, das heisst die Länge OO'.

Es ist leicht zu sehen, dass man, welches auch der Winkel μ des Rhomboeders sein mag,

$$Am = A'm' = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,a\,,$$

$$Om = mm' = O'm' = \tfrac{1}{3}d$$

haben wird; der Winkel μ hängt von dem Verhältniss ab, das zwischen den Parametern a und d besteht, und man findet ebenso leicht, dass diese Abhängigkeit durch die Formel

$$\text{(62)} \qquad \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mu = \frac{a^2}{d^2} + \tfrac{1}{3}$$

ausgedrückt wird.

Nach dieser Einleitung, die sich auf alle ternären Schaaren anwenden lässt, suchen wir die Bedingung, unter der die Schaar vier ternäre Axen besitzt.

Nehmen wir zur Ebene der Zeichnung die Verbindungsebene von OO' mit der zweiten ternären Axe, welche OA sein wird. Man weiss, 1. dass diese Ebene einer der drei Hauptschnitte des Rhomboeders mit der Axe OO' sein wird (Satz LXXIV); 2. dass man haben muss

$$\cos mOA = \tfrac{1}{3} \text{ (Satz LXXIII)},$$

woraus folgt, dass

$$OA = 3\,Om = OO'$$

ist; 3. dass die Halbirende OM des Winkels AOO' eine Symmetrieaxe des Netzes der Ebene der Figur ist (Satz LXXV).

Man sieht hieraus, dass, wenn man AM parallel mit OO' zieht und $O'M$ parallel mit OA, die Figur $OAMO'$ ein Rhombus sein wird, dessen vier Ecken Gitterpunkte sein werden, die dem Netz der Zeichnungs-Ebene angehören, und dessen Diagonalen OM, AO' Symmetrieaxen des Netzes sein werden (Satz LXXV). Wenn man jetzt OA in drei gleiche Theile On, nn' und $n'A$ theilt, werden die zu OA normalen Ebenen, welche durch O, n, n' und A gehen, die Halbirende OM in C, B' und N schneiden. Da die Gitterpunkte unseres Netzes sich nur befinden können einerseits auf dem System der Punktreihen $G'O'H'$, $A'm'B'$, BmA, andererseits [**83**] auf dem System der Punktreihen APN, $n'RB'Q$, nCO', so dürfen diese Gitterpunkte nur auf den Durchschnittspunkten dieser Geraden gesucht werden. Aber zuvörderst ist es klar, dass die vier Punkte R, P, Q, D' der Schaar nicht angehören können; denn wenn das für den Punkt D' der Fall wäre, so würde er, wenn man ihn um 120 Grad um OO' drehte, an einen solchen Ort des Raumes kommen, dass er u als Projection auf der Ebene der Figur haben würde, und in dem Innern der Schicht gelegen wäre, die zwischen den beiden durch O und n normal zu OA gelegten Ebenen eingeschlossen ist, was augenscheinlich unmöglich ist. Also können nur die Punkte C, B', N Gitterpunkte in dem Innern des Rhombus $OAMO'$ sein. Folglich beschränkt sich die Zahl der Lösungen auf drei, wobei der Parameter der Punktreihe $OCB'M$ nothwendiger Weise gleich OM oder gleich $OB' = \frac{1}{2} OM$ oder gleich $OC = \frac{1}{4} OM$ ist.

Erste Lösung. — Der Parameter der Punktreihe auf der Halbirenden ist gleich OM. Das Parallelogramm $AOA'O'$ ist alsdann der Hauptschnitt des Rhomboeders mit OO' als Axe.

Dieses Rhomboeder ist vollständig bestimmt durch die Gleichung

$$\overline{Am}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{Om}^2 = \tfrac{8}{9} d^2,$$

woraus man findet

$$a^2 = 3\,\overline{Am}^2 = \tfrac{8}{3} d^2,$$

$$tang^2 \tfrac{1}{2} \mu = 3\,, \quad \mu = 120^\circ\,.$$

Die aus dem Rhomboeder von 120° sich ableitende Schaar, auf welche wir so geführt sind, kann erhalten werden, indem alle Würfel einer Schaar mit cubischem Kern centrirt werden. In der That kann der Punkt O als der niedrigste Gitterpunkt eines Würfels angesehen werden, dessen Mittelpunkt in O' und dessen höchster Gitterpunkt in O'' wäre. Das Parallelogramm $OA'O''M$ wäre dessen Hauptschnitt, der durch die Diagonale OO'' gelegt ist; der Gitterpunkt A wäre der Mittelpunkt eines der sechs Würfel, welche sich an die Seiten des Würfels $OA'O''M$ anschmiegen.

Zweite Lösung. — Der Parameter der Punktreihe auf der Halbirenden ist gleich OB'. Das Rechteck $OB'O'B$ ist alsdann der Hauptschnitt des Rhomboeders, das OO' als Axe hat. Da die Kante $O'B'$ des Rhomboeders normal zu der Seitenfläche ist, die $O'B$ als Spur hat, so sieht man, dass das entsprechende Rhomboeder ein [84] Würfel ist. Man würde dieses Resultat auch aus den Formeln ableiten

$$a^2 = 3\,\overline{Bm}^2 = \tfrac{3}{4}\,\overline{Am}^2 = \tfrac{2}{3}\,d^2,$$
$$\mathrm{tang}^2\,\tfrac{1}{2}\,\mu = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} = 1, \quad \mu = 90^\circ.$$

Dritte Lösung. — Der Parameter der Punktreihe auf der Halbirenden ist gleich OC. In diesem Falle sind O, C, B', N und M Gitterpunkte der Schaar. Der Hauptschnitt ist $OCO'C'$. Man hat alsdann

$$a^2 = 3\,\overline{Cm}^2 = \tfrac{3}{4}\,\overline{Bm}^2 = \tfrac{1}{6}\,d^2,$$
$$\mathrm{tang}^2\,\tfrac{1}{2}\mu = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}, \quad \mu = 70^\circ 31' 44''.$$

Aus dem Werthe $70^\circ 31' 44''$ des Flächenwinkels des Grund-Rhomboeders erkennt man, dass seine beiden Endabschnitte oben und unten zwei regelmässige Tetraeder sind. Man hat überdies

$$\overline{OC}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{Cm}^2 = \tfrac{1}{9}\,d^2 + \tfrac{1}{8}\,d^2 = \tfrac{1}{6}\,d^2 = a^2,$$

was hinlänglich beweist, dass die drei Seitenflächen dieses Tetraeders gleichseitige Dreiecke sind.

Die Gitterpunkte C, C' liegen in den Mittelpunkten von zwei der Seiten des Würfels, dessen Hauptschnitt $OBO'B'$ ist; die vier Gitterpunkte, welche sich rechtwinklig nach D und D' auf die Ebene der Zeichnung projiciren, befinden sich in den Centren der vier anderen Seiten desselben Würfels. So kann man sich also die vorliegende Schaar als aus einem

Würfel abgeleitet denken, dessen sechs Seitenflächen centrirt sind.

Zusammengefasst lautet unser Ergebniss: Der Würfel, das Rhomboeder von 120° (das Rhomboeder, das Kanten des Würfels gerade abstumpft, nach der Ausdrucksweise der Krystallographen) und das Rhomboeder von 70° 31′ 44″ (von dem der Würfel Kanten gerade abstumpft) sind die einzigen Rhomboeder, welche als Kern einer Schaar dienen können, die vier ternäre Axen besitzt.

Satz LXXVI. — Die Schaaren, welche vier ternäre Axen besitzen, besitzen auch drei quaternäre Axen.

Man kann an die Stelle der drei Rhomboeder, die wir eben erhalten haben, den centrirten Würfel, den nicht centrirten Würfel und den Würfel mit sechs centrirten Seiten setzen. Nun besitzt jeder dieser Körper augenscheinlich drei quaternäre Axen; dies sind die Linien [85], welche Mitten der einander gegenüber liegenden Seiten dieser Würfel paarweise verbinden. Diese quaternären Axen sind zu einander rechtwinklig.

Satz LXXVII. — Wenn zwei Axen von quaternärer Symmetrie vorhanden sind, so giebt es deren drei, welche rechtwinklig zusammenstossen, und es kann keine grössere Anzahl geben.

Dieser Satz liesse sich beweisen wie der Satz LXXIII. Die Schnittpunkte der Axen mit der Kugel vom Radius 1 bilden ein System von sechs Punkten, die so vertheilt sind, dass sie die Ecken eines regelmässigen eingeschriebenen Oktaeders vorstellen; folglich u. s. w.

Der Satz ist überdies eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze XLI meiner »Abhandlung über die Polyeder von symmetrischer Form«.

Aufgabe XXX. — Die Schaaren zu finden, welche drei quaternäre Axen besitzen.

Der Grund-Körper jeder Schaar mit einer quaternären Axe ist ein gerades Prisma mit quadratischer Basis, das centrirt oder nicht centrirt ist (Satz LXVI). Sei nun $OACB$ (Fig. 37) die Basis dieses Prismas, wobei O, A, C, B Gitterpunkte der Schaar sind.

Sei a der Parameter der Punktreihen, welche den Seiten dieses Quadrats gleich gerichtet sind,

d der Parameter der normal zu seiner Ebene gerichteten Punktreihen.

Die beiden quaternären Axen, über die noch zu verfügen ist, liegen nothwendiger Weise in der Ebene $OACB$ (Satz LXXVII); sie sind folglich entweder wie OA und OB, oder wie OC und GOE gerichtet; sonst würde die binäre Symmetrie, welche die letzteren Linien besitzen (Satz LXIX, Corollarsatz), die Zahl der quaternären Axen verdoppeln, was dem Satz LXXVII widersprechen würde. Hieraus ergeben sich die drei folgenden Lösungen:

Erste Lösung. — Wenn das Prisma nicht centrirt ist, so können die in der Ebene der Zeichnung liegenden Axen nicht OC und GOE sein; denn eine Drehung von 90° um OC würde A in das Innere des prismatischen Raumes führen, welcher $OACB$ zur Basis hat, und der frei von jedem Gitterpunkt in seinem Innern bleiben muss. Aber man kann OA und OB als quaternäre Axen nehmen, und indem man $OACB$ um 90 Grad um OA dreht, erhält man, wie man sieht,

$$d = a.$$

Also ist in diesem Fall der Grund-Körper ein nicht centrirter Würfel.

[86] Zweite Lösung. — Wenn das Prisma centrirt ist, sei D sein Mittelpunkt (der nicht auf der Zeichnung markirt ist), welcher sich orthogonal auf d, das Centrum des Quadrats $OACB$ projicirt.

Wenn die quaternären Axen, über die zu verfügen ist, alsdann wie OA und OB gerichtet sind, so wird eine Drehung der Figur $OACB$ durch 90 Grad um OA wie vorhin ergeben

$$a = d.$$

Der Punkt D wird den Mittelpunkt des Würfels, der $OACB$ als Basis hat, einnehmen; der Grund-Körper ist alsdann ein centrirter Würfel.

Dritte Lösung. — Wenn endlich die verfügbaren quaternären Axen OC und GOE sind, wird nach einer Drehung von 90 Grad um OC A nach D kommen; woraus man folgert

$$Dd = Ad = a\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

und indem man diese Höhe verdoppelt, erhält man die Höhe des Grund-Prismas, nämlich

$$d = a\sqrt{2}.$$

Aber wenn man dann das Quadrat $OCFE$ als Basis nimmt, verwandelt sich das Prisma augenscheinlich in einen auf seinen sechs Flächen centrirten Würfel.

Corollarsatz. — Die drei Arten von Schaaren, welche die Lösung der Aufgabe XXX liefert, stimmen überein mit den drei Arten von Schaaren, welche die Lösung der Aufgabe XXIX liefert.

Es folgt daraus, dass die Schaaren, welche drei quaternäre Symmetrie-Axen besitzen, vier ternäre Symmetrie-Axen besitzen und umgekehrt.

Satz LXXVIII. — Jede Schaar, welche zu gleicher Zeit eine ternäre Axe und eine quaternäre Axe besitzt, hat drei quaternäre und vier ternäre Axen.

Die drei quaternären Axen sind eine Folge der Symmetrie, welche der gegebenen ternären Axe eigen ist; die Schaar besitzt also auch vier ternäre Axen (vorhergehender Corollarsatz).

Definition. — Wir werden künftig die drei Arten von Schaaren, deren Existenz wir festgestellt haben, und die zu gleicher Zeit drei quaternäre und vier ternäre Axen besitzen, terquaternäre Schaaren nennen [87]. Die Symmetrie, welche diese Schaaren charakterisirt, soll terquaternäre Symmetrie heissen. Das gleichzeitige Vorhandensein von zwei dieser sieben Axen genügt, um die terquaternäre Symmetrie festzustellen.

Satz LXXIX. — Jede terquaternäre Schaar besitzt sechs binäre Axen, welche die rechten Winkel, die von den paarweise verbundenen quaternären Axen gebildet werden, halbiren.

Seien $x'Ox$, $y'Oy$ und $z'Oz$ (Fig. 42) drei quaternäre Axen, die sich im Gitterpunkt O schneiden. Die Symmetrie der quaternären Axe Oz verlangt, dass die beiden Halbirenden der Winkel xOy, $x'Oy$ binäre Axen seien (Satz LXIX, Corollarsatz). Dasselbe würde für die vier anderen Winkelhalbirenden der Fall sein.

Satz LXXX. — Jede terquaternäre Schaar besitzt drei Symmetrie-Ebenen, welche die quaternären Axen paarweise verbinden, und sechs andere Symmetrie-Ebenen, welche die ternären Axen paarweise verbinden, aber von anderer Art als die drei vorigen sind.

Das Vorhandensein der drei quaternären Axen fordert, dass die zu diesen Axen normalen Netzebenen Symmetrie-

Ebenen der Schaar seien (Satz LII). Die sechs binären Axen verlangen ebenso sechs Symmetrie-Ebenen, welche zu ihnen normal sein müssen; übrigens hat man schon gesehen (Satz LXXIV), dass die Verbindungs-Ebene von zwei ternären Axen eine Symmetrie-Ebene ist: eine solche Ebene ist offenbar normal zu einer der sechs binären Axen des Systems.

Anmerkung. — Um sich die gegenseitige Stellung dieser Axen und Ebenen vorzustellen, kann man einen Würfel betrachten, dessen Mittelpunkt der Punkt ist, in dem sie sich treffen. Die vier Diagonalen des Würfels sind die ternären Axen; die drei Geraden, welche die Mitten der einander gegenüberliegenden Seiten paarweise verbinden, sind die quaternären Axen; die sechs Geraden, welche die Mitten der einander gegenüberliegenden Kanten paarweise verbinden, sind die binären Axen; die Ebenen, welche durch den Mittelpunkt parallel zu den Seitenflächen gelegt werden, sind die drei Symmetrie-Ebenen der ersten Art; und die Ebenen, welche durch zwei gegenüberliegende Kanten gelegt werden, sind die sechs Symmetrie-Ebenen der zweiten Art.

Man kann auch die Oberfläche der Kugel mit Hülfe von drei grössten Kreisen in acht Dreiecke mit drei rechten Winkeln theilen: die Ecken Q, Q', Q'', ... dieser Dreiecke sind alsdann die äusseren Enden von quaternären Axen; die Mittelpunkte [88] T, T', T'', ... dieser selben Dreiecke sind die äusseren Enden von ternären Axen, und die Mitten B, B', B'', ... ihrer Seiten sind die äussersten Enden von binären Axen.

Wenn man sich darauf beschränkt, nur die kleinsten der von diesen Axen gebildeten Winkel zu beachten, und indem man den Mittelpunkt der Kugel O nennt, erhält man die folgenden Beziehungen der Winkel:

$$QOQ' = 90^\circ, \qquad QOT = 54^\circ 44' 8'',$$
$$TOT' = 70^\circ 31' 44'', \qquad QOB = 45^\circ,$$
$$BOB' = 60^\circ, \qquad TOB = 35^\circ 15' 52''.$$

Satz LXXXI. — **Wenn in einer Schaar eine senäre Symmetrie-Axe vorkommt, so kann es darin keine andere Axe geben als binäre, welche in der zu dieser Axe normalen Ebene gelegen sind.**

Zunächst können vor allem nicht gleichzeitig zwei senäre Axen existiren, weil es kein regelmässiges Polyeder giebt, dessen Kantenwinkel zu sechsen in jeder Ecke zusammenstossen (siehe die Beweise der Sätze LXXIII und LXXVII, oder besser noch den Satz XLI meiner »Abhandlung über die Polyeder von symmetrischer Form«).

Wenn in der Schaar eine ternäre oder quaternäre, oder selbst eine zu der senären Axe schrägliegende binäre Axe vorkäme, so würde die dieser Axe eigene Symmetrie die senäre Axe zwingen, sich zu wiederholen, und es würde in der Schaar wenigstens zwei senäre Axen geben, was nach der vorhergehenden Bemerkung nicht möglich ist.

Classification der symmetrischen Schaaren.

In Bezug auf ihre Symmetrie kann man sieben Classen von Schaaren unterscheiden, die ich in folgender Weise bezeichne:

Erste Classe. — Terquaternäre Schaaren. Drei quaternäre Axen, vier ternäre Axen und sechs binäre Axen, welche wie die Linien angeordnet sind, die in einem Würfel die Centren der Gegenseiten, die Gegenecken und die Mitten der Gegenkanten paarweise verbinden. Drei zu den quaternären Axen normale Symmetrie-Ebenen; sechs zu den binären Axen normale Symmetrie-Ebenen.

Drei verschiedene Arten von Anordnungen:

1. Der Würfel;

[89] 2. Der centrirte Würfel, an dessen Stelle man das Rhomboeder von 120 Grad setzen kann;

3. Der Würfel mit centrirten Flächen, statt dessen man das Rhomboeder von $70^\circ\,31'\,44''$, oder das centrirte Prisma mit quadratischer Basis setzen kann, dessen Höhe gleich ist der Seite der Basis multiplicirt mit $\sqrt{2}$. Das regelmässige Tetraeder und das regelmässige Oktaeder können auch zur Ableitung dieser dritten Art dienen.

Zweite Classe. — Senäre Schaaren. Eine senäre Axe, die normal zu einer Netzebene ist, deren Netz dreieckige, gleichseitige Maschen besitzt; drei binäre Axen einer ersten Art, den Seiten des Haupt-Dreiecks parallel; drei binäre Axen einer zweiten Art, den Höhen parallel.

Eine Symmetrieebene, normal zu der senären Axe; drei Symmetrieebenen von einer Art, normal zu den binären Axen der ersten Art; drei Symmetrieebenen einer anderen Art, normal zu den binären Axen der zweiten Art.

Eine einzige Art der Anordnung, angegeben durch die sechs Ecken eines geraden Prismas mit dreieckig gleichseitiger Basis. Das Grund-Parallelepiped ist ein gerades Prisma, dessen Basis ein Rhombus von 60 und 120 Grad ist.

Dritte Classe. — Quaternäre Schaaren. Eine quaternäre Axe, die normal zu einer Netzebene ist, deren Netz quadratische Maschen besitzt; zwei binäre Axen einer ersten Art, parallel zu den Seiten dieses Quadrats; zwei binäre Axen einer zweiten Art, parallel zu den Diagonalen.

Eine zu der quaternären Axe normale Symmetrieebene; zwei Symmetrieebenen von einer Art, normal zu den binären Axen der ersten Art; zwei Symmetrieebenen einer anderen Art, normal zu den binären Axen der zweiten Art.

Zwei verschiedene Arten von Anordnungen:

1. Das gerade Prisma mit quadratischer Basis;

2. Das centrirte gerade Prisma mit quadratischer Basis; man kann statt dessen ein gerades Oktaeder mit quadratischer Basis nehmen.

Vierte Classe. — Ternäre Schaaren. Eine ternäre Axe, normal zu einer Netzebene, deren Netz dreieckig gleichseitige Maschen besitzt; drei binäre Axen von einer Art, parallel zu den Seiten des Haupt-Dreiecks.

Drei Symmetrieebenen, welche durch die ternäre Axe gehen und senkrecht auf den binären Axen sind.

[90] Eine einzige Art der Anordnung, die durch die acht Ecken eines Rhomboeders angegeben ist.

Fünfte Classe. — Terbinäre Schaaren. Drei binäre Symmetrieaxen, zu einander rechtwinklig und alle drei von verschiedener Art; drei Symmetrieebenen, welche diese Axen paarweise verbinden.

Vier verschiedene Arten von Anordnungen:

1. Das gerade Prisma mit rechteckiger Basis;

2. Das centrirte gerade Prisma mit rechteckiger Basis; man kann statt dessen das gerade Oktaeder mit rechteckiger Basis nehmen;

3. Das gerade Prisma mit rhombischer Basis; man kann dafür ein gerades Prisma mit rechteckiger Basis nehmen, das auf seinen beiden Grundflächen, oder auf zwei seiner Seitenflächen, die parallel und einander gegenüber liegend sind, centrirt ist;

4. Das centrirte gerade Prisma mit rhombischer Basis;

man kann statt seiner ein gerades Oktaeder mit rhombischer Basis nehmen, dessen drei Hauptschnitte Rhomben sind.

Sechste Classe. — Binäre Schaaren. Eine einzige binäre Symmetrieaxe; eine einzige Symmetrieebene, die zu der Axe normal ist, und deren Netz als Haupt-Dreieck irgend ein spitzwinkliges Dreieck hat.

Zwei verschiedene Arten von Anordnungen:

1. Das gerade, nicht centrirte Prisma mit parallelogrammatischer Basis;

2. Das gerade centrirte Prisma mit parallelogrammatischer Basis; man kann statt dessen das gerade Prisma mit parallelogrammatischer Basis nehmen, das zwei centrirte Seitenflächen hat.

Siebente Classe. — Asymmetrische Schaaren. Keine Axe, keine Symmetriebene.

Eine einzige Art der Anordnung:

Das schiefe Prisma mit parallelogrammatischer Basis.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Symmetrieaxen in den verschiedenen Classen der Schaaren:

[91]

Schaaren.	Zahl der Axen				Gesammtzahl der Axen.
	senäre.	quaternäre.	ternäre.	binäre.	
Terquaternäre	0	3	4	6	13
Senäre	1	0	0	6	7
Quaternäre . .	0	1	0	4	5
Ternäre	0	0	1	3	4
Terbinäre . . .	0	0	0	3	3
Binäre	0	0	0	1	1
Asymmetrische	0	0	0	0	0

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die Gesammtzahl der Axen genügt, um jede dieser Classen vollständig zu definiren, da sie nothwendiger Weise eine der sieben Zahlen 13, 7, 5, 4, 3, 1, 0 sein muss; die erste dieser Zahlen drückt den höchsten Grad der Symmetrie aus, der in einer Schaar vorkommen kann.

In Beziehung auf die Art der Axen wird man bemerken:

1. Dass die quaternären Axen immer von derselben Art sind;

2. Dass dasselbe der Fall bei den ternären Axen ist;

3. Aber dass bei den binären Axen es nicht immer so ist.

Wir wollen binäre Axen der ersten Art diejenigen mit dem kleinsten Parameter nennen; binäre Axen der zweiten Art diejenigen, deren Parameter grösser ist als der der Axen der ersten Art, aber kleiner als derjenige der Axen der dritten Art, wenn letztere Axen in der Schaar vorhanden sind; binäre Axen der dritten Art solche mit allergrösstem Parameter.

Die folgende Tabelle zeigt die Vertheilung der binären Axen nach den Arten für jede unserer ersten sechs Classen. Ich habe die Zahl der Symmetrieebenen, welche die Classe charakterisirt, hinzugefügt; jede von ihnen entspricht einer binären, quaternären oder senären Axe, die zu ihr normal ist. Bezüglich der Symmetrieebenen von gleicher Art oder von verschiedenen Arten wolle man sich nach folgender Regel richten: »Axen von gerader Ordnung und von gleicher Art entsprechen immer Symmetrieebenen von gleicher Art; umgekehrt sind, wenn die Axen von verschiedener Art sind, auch die Symmetrieebenen, die zu ihnen normal sind, von verschiedener Art.«

Die Gesammtzahl der Symmetrieebenen ist immer der Gesammtzahl der in der Schaar vorhandenen Axen von gerader Ordnung gleich.

[92] Die grösste Zahl dieser Symmetrieebenen ist also gleich 9.

Schaaren.	Binäre Axen von			Gesammtzahl der Symmetrie-ebenen.
	erster Art.	zweiter Art.	dritter Art.	
Terquaternäre	6	0	0	9
Senäre	3	3	0	7
Quaternäre . .	2	2	0	5
Ternäre	3	0	0	3
Terbinäre . . .	1	1	1	3
Binäre	1	0	0	1

In der zweiten Classe (senäre Schaaren) ist, wenn der Parameter der binären Axen der ersten Art 1 beträgt, derjenige der Axen der zweiten Art immer gleich $\sqrt{3}$.

In der dritten Classe (quaternäre Schaaren) ist, wenn der Parameter der binären Axen der ersten Art 1 beträgt, derjenige der Axen der zweiten Art immer gleich $\sqrt{2}$.

In der fünften Classe (terbinäre Schaaren) sind die Verhältnisse unbestimmt.

Symbolische Bezeichnungen der Symmetrie der Schaaren.

Wenn man durch einen der Gitterpunkte einer Schaar alle Axen und Symmetrieebenen legt, die ihr angehören, so kann man die Schaar als ein Polyeder betrachten, dessen Mittelpunkt in dem gewählten Gitterpunkt liegt.

Man nennt Symmetriecentrum in einem Polyeder einen so gelegenen, centralen Punkt, dass, wenn man ihn mit irgend einer Ecke des Polyeders verbindet, und die Verbindungsgerade über diesen Mittelpunkt hinaus um eine ihr selbst gleiche Grösse verlängert, der so erhaltene Punkt ebenfalls eine Ecke des Polyeders ist, welche die homologe der ursprünglichen Ecke in Bezug auf dieses Symmetriecentrum genannt wird.

Nicht alle Polyeder besitzen ein solches Symmetriecentrum; wenn es existirt, so führt seine Gegenwart ein besonderes Element der Symmetrie bei ihnen ein, das wichtig zu berücksichtigen ist.

In irgend einer Schaar sind sämmtliche Gitterpunkte offenbar [93] Centren der Symmetrie, diese Vielzähligkeit der Centren stimmt überein mit der Vielzähligkeit, die man in dem System der zu einer gegebenen Axe parallelen Symmetrieaxen bemerkt.

Man kann dieselben symbolischen Bezeichnungen, welche mir gedient haben, um die Symmetrie der gewöhnlichen Polyeder auszudrücken (Abhandlung über die Polyeder von symmetrischer Form, *Journal de Mathématiques*, Band XIV), auch auf die Schaaren anwenden.

In den Symbolen, welche ich angenommen habe, bedeutet der Buchstabe C ein Polyeder, das ein Symmetriecentrum besitzt; dieses Symbol muss sich augenscheinlich in allen Ausdrücken für die Symmetrie der Schaaren vorfinden.

Die Buchstaben $\varLambda$, L, L' bezeichnen Symmetrieaxen; $\varLambda^2$, L^2, L'^2 binäre Axen; $\varLambda^3$, L^3, ... ternäre Axen, und so weiter, wobei der obere Index die Ordnungszahl der Axe angiebt.

Der Buchstabe Λ wird immer für die Hauptaxe angewandt, welche die Einzige ihrer Art ist.

Die Zahl der Axen von gleicher Art wird durch den Coefficienten angezeigt, welcher dem symbolischen Buchstaben dieser Axen vorangeht; so bedeutet die Bezeichnung (Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$) eine senäre Hauptaxe verbunden mit drei binären Axen einer bestimmten Art und drei anderen binären Axen einer anderen Art.

Die Symmetrieebenen werden durch die Buchstaben Π, P, P' bezeichnet; man wird den Buchstaben Π für die Symmetrieebene wählen, welche zur Hauptaxe Λ normal ist; die Symbole P^q, P'^q, $P^{q'}$ für die zu den Axen L^q, L'^q, $L^{q'}$ normalen Symmetrieebenen. Die Anzahl dieser Ebenen wird in Form eines Coefficienten vor den Buchstaben P gesetzt: so wird also (Π, $3P^2$, $3P'^2$) eine zur Hauptaxe normale Symmetrieebene bedeuten, drei Symmetrieebenen von einer Art, normal zu den Axen $3L^2$, und drei Symmetrieebenen einer anderen Art, normal zu den Axen $3L'^2$.

Nachdem dies festgesetzt ist, werden die Symbole unserer sieben Classen von Schaaren die folgenden sein.

Schaaren.	Symbole ihrer Symmetrie.
Terquaternäre	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$.
Senäre	Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, Π, $3P^2$, $3P'^2$.
Quaternäre	Λ^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, Π, $2P^2$, $2P'^2$.
Ternäre	Λ^3, $3L^2$, C, $3P^2$.
Terbinäre	Λ^2, L^2, L'^2, C, Π, P^2, P'^2.
Binäre	Λ, C, Π.
Asymmetrische	$0L$, C, $0P$.

[94] Es ist wichtig, zu bemerken, dass hier die Buchstaben C, Λ, L, Π, P, ... nicht einen einzigen Punkt, eine einzige Linie, oder eine einzige Ebene vorstellen, wie das bei den Polyedern mit begrenzter Zahl der Ecken stattfindet, sondern ein ganzes System von Punkten, oder ein System von Axen, die alle parallel sind, oder ein System von gleichfalls unter einander parallelen Ebenen.

Es bleibt noch hinzuzufügen, dass es in den Schaaren Centren der Symmetrie giebt, welche nicht mit den Gitterpunkten der Schaar zusammenfallen; diese Symmetriecentren sind die Analogen der Zwischenaxen und der Zwischenebenen, von denen wir pp. 65—66 und 67—68 gesprochen haben. So existiren in der asymmetrischen Classe acht verschiedene Systeme von Symmetriecentren, nämlich: 1. die Gitterpunkte der Schaar; 2. die Centren der Grund-Parallelepipede; 3. die Centren der Seiten dieser Parallelepipede, welche Centren sich in drei verschiedene Kategorien theilen; 4. die Mitten der Kanten, welche ebenfalls drei verschiedene Systeme von Centren bilden. Man kann hierüber die Abhandlung von Herrn *Philippe Breton* nachsehen (*Journal de Mathématiques de M. Liouville*, Band X, Seite 430).

Es sei wohlverstanden, dass wir uns darauf beschränken, nur die Centren zu betrachten, welche mit den Gitterpunkten zusammenfallen, ebenso wie wir bei den Symmetrieaxen nur diejenigen berücksichtigt haben, welche durch die Gitterpunkte giengen.

Von den verschiedenen Arten der Anordnung der Gitterpunkte in derselben Classe von Schaaren.

Man hat bereits bemerken können, dass derselben Classe von Schaaren Schaaren angehören, die nach der Anordnung der Gitterpunkte sich vollkommen verschieden zeigen, obgleich bei allen die Axen und die Symmetrieebenen dieselben sind. Ich werde sie die verschiedenen *Arten* der Classe nennen. Herr *Frankenheim*, der in seinen schönen Untersuchungen über die Krystallographie *) zu einer Unterabtheilung derselben Art gekommen ist, hat diese Arten mit dem Namen *Ordnungen* bezeichnet, aber der Ausdruck »*Arten*« ist, scheint mir, hier vorzuziehen, da er den geometrischen Thatbestand ausdrückt, dem sie entsprechen. Aus demselben Grunde verwerfe ich die Bezeichnung *Typen*, unter welcher ich sie anfangs in einer Mittheilung an die Société Philomathique am 17. März 1849 beschrieben habe.

[95] Zwei Schaaren von derselben Classe gehören verschiedenen Arten der Symmetrie an, wenn man die eine der Schaaren, indem man in continuirlicher Weise die Zwischenräume ihrer Gitterpunkte variirt, *ohne dass sie einen einzigen Augenblick ihre Symmetrieaxen verliert*, trotz-

*) *Acta Naturae curiosorum*, Band XIX, 2. Theil, pag. 483.

dem nur theilweise mit der anderen Schaar zur Deckung bringen kann. Solches sind zum Beispiel die Schaar, welche vom Würfel abgeleitet wird, und diejenige, welche vom centrirten Würfel abgeleitet wird. Wenn man in dieser letzteren die Seite des Würfels sich verändern lässt, so kann man die Hälfte der Gitterpunkte mit denen der ersten Schaar zur Deckung bringen; aber die andere Hälfte, welche sich auf den Centren der Form der Würfel befinden, bleiben ausser Deckung.

Zwei Schaaren gehören derselben Art an, wenn eine continuirliche Variation ihrer Parameter sie deckbar machen kann.

Wenn die drei Axen, deren Parameter man variiren lässt, conjugirte Punktreihen von jeder der beiden Schaaren sind, so gehören diese immer zu derselben Art der Anordnung; denn das Zusammenfallen der homologen conjugirten Punktreihen, Gitterpunkt auf Gitterpunkt, zieht dasjenige der Schaaren nach sich.

Alle verschiedenen Arten einer und derselben Classe können immer aus einer der Arten der Classe abgeleitet werden durch das Hinzufügen von neuen Gitterpunkten, sei es im Centrum der Form des Grundkörpers, sei es auf den Centren seiner Seitenflächen; wir sagen alsdann, dass man diesen Körper im Centrum seiner Form oder auf seinen Seitenflächen *centrirt*.

Ich will einige neue Details zu dem hinzufügen, was schon über die Eintheilung unserer Classen oder *Systeme* in Arten gesagt ist.

Terquaternäres System. — Es umfasst drei verschiedene Arten:

1. Die hexaedrische Art: der Grundkörper ist ein Würfel, der ein Molecül auf jeder seiner Ecken trägt (siehe die Bemerkung auf Seite 5, Zeile 33);

2. Die oktaedrische Art: der Körper, aus dem sie abgeleitet wird, ist ein regelmässiges Oktaeder, das auf jeder seiner Ecken ein Molecül trägt; man kann es durch ein regelmässiges Tetraeder ersetzen, welches eine ihm äquivalente Form ist, oder auch durch das Rhomboeder von $70^{\circ}\,31'\,44''$. Diese Art wird vom Würfel durch Centrirung der sechs Seitenflächen dieses Körpers abgeleitet; alsdann trägt der neue Würfel (Würfel mit centrirten Seitenflächen) ausser den Molecülen seiner Ecken ein solches im Centrum von jeder seiner Seitenflächen. Die Symmetrie des so erhaltenen Körpers ist unmittelbarer ein-

leuchtend als diejenige von allen seinen anderen äquivalenten Formen;

3. Die dodekaedrische Art: der Körper, aus dem sie abgeleitet wird, ist ein Rhombendodekaeder, [96] welches ein Molecül auf jeder seiner vierzehn Ecken und ausserdem ein centrales Molecül trägt.

Man kann sie aus dem Würfel ableiten, indem man ein Molecül in dem Centrum der Form des Körpers hinzufügt. Wenn man die acht Ecken eines solchen Würfels durch Gerade mit den sechs Centren der benachbarten Würfel verbindet, welche jeder seiner sechs Seitenflächen anliegen, so kommt man auf das centrirte Rhombendodekaeder zurück.

Man kann auch als Grundkörper das Rhomboeder von 120 Grad nehmen; aber die Symmetrie der Schaar ist alsdann weniger einleuchtend als in dem Fall, wo man den centrirten Würfel betrachtet.

Senäres System. — Eine einzige Art (siehe Seite 96).

Quaternäres System. — Es umfasst zwei verschiedene Arten:

1. Die hexaedrische Art, deren Grundkörper ein gerades Prisma mit quadratischer Basis ist;

2. Die oktaedrische Art, welche sich von einem geraden Oktaeder mit quadratischer Basis ableitet. Man erhält dieses Oktaeder, indem man das gerade Prisma mit quadratischer Basis centrirt und dieses Centrum mit den vier Ecken der Basis verbindet und diese wieder mit dem Centrum des unten anliegenden Prismas.

Ternäres System. — Eine einzige Art (siehe Seite 97).

Terbinäres System. — Vier verschiedene Arten:

1. Die rechteckig hexaedrische Art: der Grundkörper ist ein gerades Prisma mit rechteckiger Basis, das auf jeder seiner acht Ecken Molecüle trägt; die Netze der drei Symmetrieebenen des Systems haben alsdann rechteckige Maschen;

2. Die rhombisch hexaedrische Art: der Grundkörper ist ein gerades Prisma mit rhombischer Basis. Diese Art wird aus der vorigen abgeleitet vermittelst der Centrirung von zwei gegenüberliegenden Flächen, zum Beispiel der beiden Basen des Grund-Prismas. Man weiss in der That, dass, wenn man die Maschen eines rechteckigen Netzes centrirt, dieses sich in ein Netz mit rhombischer Masche verwandelt. In diesem Fall besitzen die Netze der beiden verticalen Symmetrieebenen rechteckige Maschen; aber in der dritten Ebene ist die

Masche rhombisch: die zu dieser letzten Ebene normale Axe kann je nach dem Fall von erster, zweiter oder dritter Art sein;

3. Die rechteckig oktaedrische Art: der Körper, aus welchem sie abgeleitet wird, ist ein gerades Oktaeder mit rechteckiger Basis. Man könnte ihn aus dem geraden Prisma mit gleicher Basis und gleicher Höhe ableiten, indem man dieses letztere in seinem Centrum der Form centrirte, und [97] diesen neuen Gitterpunkt mit den vier Gitterpunkten des Rechtecks der Basis verbände, und diese wieder mit dem Centrum des unten anliegenden Prismas. Die Netze der drei Symmetrieebenen haben alsdann rechteckige Maschen;

4. Die rhombisch oktaedrische Art, durch das gerade Oktaeder mit rhombischer Basis gegeben. Man wird sie aus dem rechteckigen hexaedrischen Prisma ableiten, indem man die sechs Seitenflächen dieses letzteren Prismas centrirt. Diese sechs neuen Gitterpunkte geben, paarweise verbunden, das gerade Oktaeder mit rhombischer Base. Die Netze der drei Symmetrieebenen werden dann rhombische Maschen haben.

Man sieht, dass diese vier Arten dem geraden, nicht centrirten Prisma, dem geraden, auf seinen beiden Basen centrirten Prisma, dem geraden Prisma, das in seinem Centrum der Form centrirt ist, und dem geraden, auf seinen sechs Seitenflächen centrirten Prisma entsprechen.

Binäres System. — Dieses System zeigt nur zwei verschiedene Arten:

1. Die hexaedrische Art, deren Grundkörper ein gerades Prisma mit parallelogrammatischer Basis ist;

2. Die oktaedrische Art, die sich aus der vorigen ableitet, indem man die Prismen dieser letzteren im Centrum der Form centrirt, oder auch indem man zwei von ihren vier verticalen Seitenflächen centrirt. Diese beiden Arten der Ableitung entsprechen einer und derselben Art von Schaaren*) (Satz LV, Anmerkung I).

---

*) Herr *Frankenheim* (*Acta Nat. curiosorum*, Band XIX, 2. Theil, pag. 570) giebt in den binären Schaaren (System der schiefen Säule von Haüy) drei verschiedene Arten:

1. Das gerade Prisma mit parallelogrammatischer Basis;
2. Das schiefe Prisma mit rhombischer Basis;
3. Das gerade Oktaeder mit parallelogrammatischer Basis.

Es ist leicht zu sehen, dass die Arten 2 und 3 doppelte Anwendung finden, und nur verschiedenen Stellungen der binären Axe entsprechen, welche horizontal und quer in der schiefen Säule

Wenn man nach der Centrirung von zwei verticalen Seitenflächen das Prisma um 90 Grad dreht, indem man die Kanten vertical stellt, in welchen sich die vier nicht centrirten Seitenflächen schneiden, so erhält man als Grundkörper ein Prisma mit rhombischer, nicht horizontaler Basis, welches das schiefe rhomboidische Prisma der Mineralogen ist.

Asymmetrisches System. — Dieses System zeigt nur eine einzige Art.

[98] Ausser durch die Uebereinstimmung in den Stellungen der Axen und Symmetrieebenen sind die verschiedenen Arten eines und desselben Systems unter einander durch die im folgenden Lehrsatze dargelegten Eigenschaften verknüpft.

Satz LXXXII. — Alle Schaaren, welche den verschiedenen Arten einer und derselben Classe angehören, und sich eine aus der anderen durch geeignete Centrirung ableiten, zeigen dieselben Systeme von Punktreihen und dieselben Systeme von Netzebenen.

In der That, wenn man die Grund-Parallelepipede centrirt, so kommt das darauf hinaus, dass man einen Gitterpunkt auf die Mitte einer der im Uebrigen willkürlich gewählten Diagonalen des Parallelepipeds hinzufügt. Diese Einschaltung wird gemäss dem Satze LIII die Systeme der Punktreihen und Netze der Schaar nicht ändern, wenigstens nicht was ihre absolute Richtung anbetrifft.

Wenn man zwei gegenüberliegende Flächen des Grund-Parallelepipedes centrirt, so kommt das darauf hinaus, dass man einen Gitterpunkt auf die Mitte einer der beiden Diagonalen der Flächen hinzufügt, das heisst, man verdoppelt dadurch die Anzahl der Gitterpunkte des Systems der entsprechenden Punktreihen; die Systeme der Punktreihen und Netzebenen bleiben aber, was ihre Lage anbetrifft, noch dieselben. Folglich etc.

Anmerkung. — Derselbe Satz lässt sich auch auf die senäre und die ternäre Schaar anwenden, welche dieselbe

---

mit rhombischer Basis von Haüy ist, während sie vertical in dem geraden Oktaeder mit parallelogrammatischer Basis ist.

Die rationellen Eintheilungen der oktaedrischen Art hängen von der Art ab, in welcher sich der Gitterpunkt, der das Centrum des Prismas ist, auf dessen Basis projicirt, in Beziehung auf die drei Seiten des Hauptdreiecks des Netzes.

Hauptaxe und dasselbe Netz auf der zu dieser Axe normalen Ebene haben. Man kann sogar bemerken, dass das übereinstimmende Vorkommen derselben Punktreihen, Systeme und Netzebenen sich auch auf die senäre Schaar und die beiden directen und inversen ternären Schaaren bezieht, die daraus durch die Einschaltung von zwei neuen Gitterpunkten auf jedem Parameter der diagonalen Punktreihen des Grund-Prismas mit rhombischer Basis abgeleitet werden (Satz LXI, Corollarsatz).

Von den Netzebenen derselben Art und den Punktreihen derselben Art in den symmetrischen Schaaren.

Definition. — Zwei Netzebenen sind von derselben Art in einer Schaar, wenn die Anordnung der Gitterpunkte in Beziehung auf eine dieser Ebenen dieselbe ist wie die Anordnung der Gitterpunkte in Beziehung auf die andere. Um diese Aehnlichkeit der Anordnung festzustellen, verbindet man in Gedanken die Gitterpunkte der Schaar mit jeder der beiden Ebenen, und eins der beiden Systeme wird als beweglich angenommen. Dann werden, wenn zu gleicher [99] Zeit die bewegliche Ebene und die feststehende Ebene, und die beweglichen Gitterpunkte mit den feststehenden Gitterpunkten zur Deckung gebracht werden können, die Netzebenen von derselben Art sein.

Damit zwei Netzebenen von derselben Art seien, ist es nöthig, dass ihre Netze zur Deckung gebracht werden können, aber diese Bedingung ist nicht immer ausreichend. Es ist ausserdem nöthig, dass die Deckung der Netze diejenige der ausserhalb der Ebenen gelegenen Gitterpunkte nach sich ziehe.

Ich habe gezeigt (Journal de M. Liouville, Band XIV, pag. 137), 1. dass man das inverse Polyeder eines gegebenen Polyeders erhielt, indem man willkürlich einen Punkt nahm und diesen Punkt oder Symmetriepol mit den Ecken des gegebenen Polyeders verband, und diese Geraden nach rückwärts um ihnen selbst gleiche Grössen verlängerte; 2. dass man, vermittelst des inversen Polyeders, indem es eine Drehung von 180 Grad um irgend eine durch den Pol gelegte Gerade erfuhr, ein symmetrisches Polyeder des gegebenen Polyeders (im geometrischen Sinne dieses Ausdrucks) erhielt in Bezug auf eine zu der Geraden normale Symmetrieebene.

Die inverse Schaar einer gegebenen Schaar ist immer fähig, mit der ursprünglichen Schaar zusammenzufallen; es genügt als Symmetriepol einen der Gitterpunkte zu nehmen. Es folgt daraus, dass das Gleiche gilt von einer Schaar und einer zu ihr symmetrischen (im geometrischen Sinne des Wortes) oder anders ausgedrückt, dass zwei in Bezug auf irgend eine Symmetrieebene symmetrische Schaaren immer zur Deckung gebracht werden können.

Satz LXXXIII. — Wenn dadurch, dass man das Netz der Netzebene M der beweglichen Schaar mit dem Netz der Netzebene F der feststehenden Schaar zur Deckung brächte, die beiden Schaaren anstatt zusammenzufallen, eine zu der andern in Bezug auf die Ebene der aufeinander gelegten Netze symmetrisch (im geometrischen Sinne) würden, so wären die beiden Netzebenen von derselben Art.

In der That, wenn man dann die bewegliche Schaar um 180 Grad um eine Gerade dreht, welche durch einen der Gitterpunkte der zusammenfallenden Netze geht, und normal zu der Ebene dieser Netze ist, so wird man die bewegliche Schaar mit der Inversen der festen Schaar zur Deckung bringen*), das heisst mit der feststehenden Schaar selbst.

[100] Satz LXXXIV. — In jeder Schaar, die eine Symmetrieebene besitzt, sind zwei Netzebenen, die symmetrisch (im geometrischen Sinne) in Bezug auf diese Ebene sind, von derselben Art.

Indem man die eine dieser beiden Ebenen, welche als zur beweglichen Schaar gehörig betrachtet wird, um die Gerade dreht, in der sich diese Ebenen schneiden, wird man ihre Netze zur Deckung bringen, und die bewegliche Schaar wird (im geometrischen Sinne) symmetrisch zur festen Schaar in Bezug auf die Ebene der aufeinander gelegten Netze werden. Also werden diese Ebenen, gemäss dem vorhergehenden Lehrsatze, von derselben Art sein.

Man kann auch direct feststellen, dass die beiden gegebenen Ebenen von derselben Art sind, indem man sie beide durch einen willkürlich gewählten Gitterpunkt S gehen lässt, und durch S eine Normale zu der Symmetrie-Ebene legt. Diese Normale wird eine Axe von gerader Ordnung sein (Satz LII); wenn man also die bewegliche Schaar sich um einen

*) Notiz über die symmetrischen Polyeder der Geometrie, Satz IV (*Journal de Mathématiques*, Band XIV, pag. 139).

Winkel gleich q mal dem Winkel $\frac{360^\circ}{2q}$ drehen lässt, wobei $2q$ die Ordnungszahl der Symmetrie der Axe ist, so wird eine Wiederherstellung der Orte der Gitterpunkte stattfinden, und es ist leicht zu sehen, dass die beiden gegebenen Netzebenen Gitterpunkt auf Gitterpunkt zur Deckung kommen werden.

Satz LXXXV. — Zwei parallele Netzebenen sind von derselben Art.

Es genügt, das bewegliche Netz parallel mit sich selbst fortzubewegen, um die Deckung der Gitterpunkte zu erhalten.

Satz LXXXVI. — Wenn in einer Schaar zwei gleichartige, aber nicht parallele, Netzebenen vorkommen, so besitzt diese Schaar wenigstens eine Symmetrieaxe.

Man kann immer voraussetzen, die beiden Netzebenen, die ich F und M nennen werde, hätten einen gemeinsamen Gitterpunkt S, der nicht an den Bewegungen der beweglichen Schaar theilnimmt. Nehmen wir an, dass geeignete Drehungen dieser Schaar das bewegliche Netz M schliesslich auf das feststehende Netz F geführt haben. Die Coincidenz kann immer (nach der bekannten Theorie der Zusammensetzung der Drehungen in der Mechanik) als durch eine einzige Drehung der beweglichen Schaar um eine durch den Gitterpunkt S gehende Rotationsaxe hervorgebracht angesehen werden. Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Gerade, ebenso wie der einzige Rotationswinkel, welcher M zur Deckung [101] mit F bringt, sich vollkommen bestimmen lässt, unter der Bedingung allerdings, dass der Rotationswinkel 180 Grad nicht übersteigt. Diese Gerade, welche so die Eigenschaft besitzt, nach einer geeigneten Drehung die Orte der Gitterpunkte wiederherzustellen, wird eine Symmetrieaxe der Schaar sein.

Corollarsatz. — Es kann in den asymmetrischen Schaaren keine Netzebenen derselben Art, die nicht parallel sind, geben.

Definition. — Zwei nicht parallele Netzebenen derselben Art heissen homologe in Bezug auf eine Symmetrieaxe der Schaar, wenn die einzige Drehung, welche ihre Netze zur Deckung bringt, so dass die bewegliche Schaar sich auf die feststehende Schaar legt, um diese Axe stattfindet. Man folgert daraus nachstehenden Lehrsatz:

Satz LXXXVII. — Zwei nicht parallele Netzebenen derselben Art sind immer homolog in Bezug auf eine Symmetrieaxe.

Corollarsatz. — Man erhält alle Systeme der Netzebenen, welche von derselben Art sind wie eine gegebene Netzebene, wenn man die homologen dieser Ebene in Bezug auf alle Symmetrieaxen der Schaar aufsucht.

Satz LXXXVIII. — Die Zahl der Netzebenen von derselben Art, welche homolog in Bezug auf eine Symmetrieaxe von der Ordnung q sind, ist gleich q, wenn diese Netzebenen keine besondere Beziehung der Lage hinsichtlich der Axe zeigen, das heisst, wenn diese Ebenen weder normal noch parallel zu dieser Axe sind.

Indem man die Ebene um $\frac{360^\circ}{q}$, $2\frac{360^\circ}{q}$, ..., $(q-1)\frac{360^\circ}{q}$ sich drehen lässt, wird man ihre $q-1$ homologen erhalten. Es ist klar, dass ihre Gesammtzahl gleich q ist: diese Ebenen sind alle von einander verschieden, das heisst sie können nicht parallel unter sich sein.

Satz LXXXIX. — Die Zahl der Netzebenen derselben Art, die homolog in Bezug auf eine Axe von der Ordnung q und dieser Axe parallel sind, ist gleich q, wenn q ungerade ist, und gleich $\frac{1}{2}q$, wenn q gerade ist.

Die Gesammtzahl der Ebenen ist auch hier noch gleich q; aber in dem besonderen Falle, wo q eine gerade Zahl wäre, würden die Ebenen paarweise parallel werden; die Anzahl der Ebenen von verschiedener Richtung reducirt sich also dann auf $\frac{1}{2}q$.

[102] Satz XC. — Die Zahl von Ebenen derselben Art, welche homolog in Bezug auf die Axe von der Ordnung q sind, reducirt sich auf die Einheit in dem Falle, wo die ursprünglich gegebene Ebene zu der Axe normal ist.

Dieser Satz ist einleuchtend.

Vermittelst dieser Principien wird man die Frage nach der Bestimmung der Netzebenen derselben Art in Bezug auf ihre Zahl und ihre relative Lage in einer gegebenen Schaar leicht lösen können, sei es in dem Falle, wo diese Ebenen keine Eigenthümlichkeit der Stellung bezüglich der Symmetrie-axen zeigten, sei es in dem Fall, wo sie parallel oder normal zu einer bestimmten Zahl dieser Axen wären. Diese Frage ist von grosser Wichtigkeit in der Krystallographie.

Man kann für die Punktreihen derselben Art ganz ähnliche Sätze aufstellen als diejenigen, welche für die Netzebenen derselben Art gelten.

Definitionen. — Die Definition der Punktreihen derselben Art ist dieselbe wie diejenige der Axen oder Netzebenen derselben Art; die der homologen Punktreihen ist derjenigen der homologen Netzebenen gleich.

Satz XCI. — Wenn man den Parameter der Punktreihe M der beweglichen Schaar mit demjenigen der Punktreihe F der feststehenden Schaar zusammenfallen liesse, und dabei die beiden Schaaren statt zusammenzufallen zu einander symmetrisch würden (im geometrischen Sinne dieses Wortes) in Bezug auf eine durch die Punktreihe F gehende Ebene, so würden die beiden Punktreihen von derselben Art sein.

Denn wenn man alsdann die bewegliche Schaar um 180 Grad um eine Gerade dreht, welche durch einen der Gitterpunkte der Punktreihe F geht und normal zur Symmetrieebene ist, so wird man die bewegliche Schaar mit der inversen der feststehenden Schaar, das heisst mit der feststehenden Schaar selbst zur Deckung bringen.

Satz XCII. — In jeder Schaar, welche eine Symmetrieebene besitzt, sind zwei in Bezug auf diese Ebene (im geometrischen Sinne) symmetrische Punktreihen auch von derselben Art.

Satz XCIII. — Zwei parallele Punktreihen sind von derselben Art.

Satz XCIV. — Wenn es in einer Schaar zwei Punktreihen von derselben Art giebt, die aber nicht parallel sind, so besitzt diese Schaar wenigstens eine Symmetrieaxe.

[103] Satz XCV. — Zwei nicht parallele Punktreihen derselben Art sind immer homolog in Bezug auf eine Symmetrieaxe.

Corollarsatz. — Man erhält alle Systeme von Punktreihen von derselben Art wie eine gegebene Punktreihe, indem man die homologen der letzteren in Bezug auf alle Symmetrieaxen der Schaar aufsucht.

Satz XCVI. — Die Zahl der Punktreihen derselben Art, welche homolog in Bezug auf eine Axe der Ordnung q sind, ist gleich q, wenn diese Punktreihen weder parallel noch normal zu dieser Axe sind.

Satz XCVII. — Die Zahl der Punktreihen derselben Art, welche in Bezug auf eine Axe von der Ordnung q homolog und normal zu ihr sind, ist gleich q, wenn q ungerade ist, und gleich $\frac{1}{2}q$, wenn q gerade ist.

Satz XCVIII. — Die Zahl der in Bezug auf die Axe von der Ordnung q homologen Punktreihen reducirt sich auf die Einheit im Fall der parallelen Lage der Punktreihe und der Axe.

Diese Sätze würden sich genau ebenso beweisen lassen, wie die Sätze LXXXIV bis XC. Sie sind übrigens eine nothwendige Folge der Reciprocität, die zwischen den Punktreihen und den Netzebenen in den Schaaren, welche »zu einander polare Schaaren« genannt werden, besteht. Von dieser Reciprocität wird im nächsten Paragraphen die Rede sein.

Satz XCIX. — Symmetrieaxen derselben Art sind zu gleicher Zeit Punktreihen derselben Art.

Dieser Satz folgt aus den Definitionen der Axen derselben Art (Seite 63) und der Punktreihen derselben Art (Seite 111).

§ VI. — Von den polaren Schaaren.

Definitionen und Bezeichnungen. — In einer gegebenen Schaar errichten wir in einem ihrer willkürlich als Anfangspunkt genommenen Gitterpunkte Normalen zu drei conjugirten Ebenen dieser Schaar, und auf jeder dieser Normalen tragen wir Längen ab, welche gleich sind den Flächeninhalten der Elementar-Parallelogramme der Netze, die auf jeder dieser Ebenen liegen, dividirt durch den mittleren Abstand der Gitterpunkte. Wenn man mit diesen drei neuen Axen und diesen Längen als Parameter [**104**] eine Schaar construirt, so soll sie die polare Schaar der ursprünglichen genannt werden, und sie wird wichtige Eigenschaften besitzen, die wir kennen lernen werden.

Wie das Symbol ghk in der ursprünglichen Schaar eine Punktreihe bezeichnet, welche vom Anfangspunkt nach dem Gitterpunkt geht, dessen Zahlen-Coordinaten g, h, k sind, so soll in der polaren Schaar das Symbol $[ghk]$ eine Punktreihe bezeichnen, welche vom Anfangspunkt nach dem Punkt geht, dessen Zahlen-Coordinaten g, h, k sind.

Wie das Symbol (ghk) die Netzebene bezeichnete, deren Gleichung

$$gx + hy + kz = 0$$

ist, so soll das Symbol $[(ghk)]$ eine Netzebene, deren Gleichung von derselben Form ist, in der polaren Schaar bezeichnen.

Ich werde fortfahren, mit $Pghk$ den Parameter einer Punktreihe zu bezeichnen, welche vom Anfangspunkt nach dem Gitterpunkt geht, dessen Zahlen-Coordinaten g, h, k sind, das heisst den Parameter der Punktreihe ghk.

Ich werde mit $P[ghk]$ den Parameter einer Punktreihe bezeichnen, die vom Anfangspunkt nach dem Punkt geht, dessen Zahlen-Coordinaten g, h, k in der polaren Schaar sind, das heisst den Parameter der polaren Punktreihe $[ghk]$.

Der Flächeninhalt des Elementar-Parallelogramms des auf der Netzebene (ghk) entworfenen Netzes soll in der ursprünglichen Schaar auch weiter $S(ghk)$ genannt werden.

Ebenso soll $S\,[(ghk)]$ der Flächeninhalt des Elementar-Parallelogramms des Netzes sein, welches auf der Netzebene gezeichnet ist, deren Bezeichnung $[(ghk)]$ in der polaren Schaar ist.

Der mittlere Abstand soll nach wie vor E genannt werden, und wenn wir bemerken, 1. dass 100, 010, 001 die symbolischen Bezeichnungen der Axen der x, der y und der z sind; 2. dass (100), (010), (001) die symbolischen Bezeichnungen der Ebenen der yz, der xz und der xy sind, so wird man nach den vorhergehenden Festsetzungen haben

$$(63)\quad P[100] = \frac{S(100)}{E}\,,\quad P[010] = \frac{S(010)}{E}\,,\quad P[001] = \frac{S(001)}{E}\,.$$

Ich werde fortfahren, durch α, β, δ die ebenen Winkel in den Ebenen der yz, der xz und der xy zu bezeichnen, und durch μ, ν, ϖ die Flächenwinkel, welche als Kanten die Axen [**105**] der x, der y und der z haben. Nachdem dies festgesetzt ist, wird man offenbar haben

$$(64)\qquad \begin{cases} S(100) = P\,010 \cdot P\,001 \cdot \sin\alpha\,, \\ S(010) = P\,100 \cdot P\,001 \cdot \sin\beta\,, \\ S(001) = P\,100 \cdot P\,010 \cdot \sin\delta\,. \end{cases}$$

In der polaren Schaar wollen wir zur Axe der $[x]$ die Normale zu der Ebene der yz nehmen, zur Axe der $[y]$ die Normale zu der Ebene der xz, und zur Axe der $[z]$ die Normale zu der Ebene der xy. Die drei positiven Halbaxen sollen nach derselben Seite gerichtet sein wie die positive Halbaxe von gleicher Bezeichnung in der ursprünglichen Schaar, in Bezug auf die Ebene, zu welcher jede dieser neuen Axen normal ist. Die drei ebenen Winkel dieser Axen sollen durch $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\delta]$ dargestellt werden; ihre drei Flächenwinkel durch $[\mu]$, $[\nu]$, $[\varpi]$.

Satz C. — Da die Winkel α, β, δ die ebenen Winkel des Grund-Parallelepipedes der ursprünglichen Schaar sind, und μ, ν, ϖ seine Flächenwinkel, so werden die ebenen Winkel der polaren Schaar $180^\circ - \mu$, $180^\circ - \nu$, $180^\circ - \varpi$ sein, und die Flächenwinkel $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \delta$.

Dieses ist eine wohlbekannte Folge der Eigenschaften der sphärischen polaren Dreiecke.

Man wird also haben

$$(65)\quad [\alpha] = 180^\circ - \mu, \quad [\beta] = 180^\circ - \nu, \quad [\delta] = 180^\circ - \varpi.$$

$$(66)\quad [\mu] = 180^\circ - \alpha, \quad [\nu] = 180^\circ - \beta, \quad [\varpi] = 180^\circ - \delta.$$

Satz CI. — Wenn man in der Spitze O eines Tetraeders $OABD$ (Fig. 38) auf den drei Seitenflächen OBD, OAD und OAB die Normalen Oa, Ob und Od errichtet, die in Bezug auf jede Fläche auf derselben Seite liegen wie die der Fläche gegenüberliegende Ecke, und die beziehungsweise den Flächeninhalten dieser drei dreieckigen Seiten gleich sind, so wird die Diagonale des über den Kanten Oa, Ob, Od construirten Parallelepipedes normal zu der Basis ABD und gleich dem Flächeninhalt dieser Basis sein.

Man hat nach der Construction

$$Oa = \text{Flächeninhalt } OBD,$$
$$Ob = \text{Flächeninhalt } OAD,$$
$$Od = \text{Flächeninhalt } OAB.$$

Ebenso wie Oa, Ob und Od senkrecht zu den Ebenen OBD, OAD und [106] OAB sind, ebenso werden OA, OB und OD senkrecht zu den Ebenen Obd, Oad, und Oab sein.

Fällen wir von O die Normale OP auf die Basis ABD, und legen wir durch a die Ebene $aA'p$ parallel zu der Ebene bOd und folglich normal zu der Kante OA. Diese Ebene mag OA in A' und OP in p schneiden. Projiciren wir die Dreiecke OBD und ABD auf die Ebene $aA'p$. O und A werden die gleiche Projection in A' haben; also werden die beiden Dreiecksprojectionen zusammenfallen. Die erste der beiden Dreiecksprojectionen hat als Werth

$$\text{Flächeninhalt } OBD \cos\,(\text{Ebene } ODB\widehat{,}\,\text{Ebene } aA'p),$$

und, indem man die Ebenen durch ihre Normalen ersetzt,

$$\text{Flächeninhalt } OBD \cos\,(Oa\widehat{,}\,OA)$$

$$= \text{Flächeninhalt } OBD \; \frac{OA'}{Oa} = OA'.$$

Die andere Dreiecksprojection wird in gleicher Weise sein

$$\text{Flächeninhalt}\,ABD\cos(Op\widehat{,}\,OA) = \text{Flächeninhalt } ABD\,\frac{OA'}{Op}.$$

Indem man beide Ausdrücke gleich setzt, erhält man also

$$OA' = \text{Flächeninhalt } ABD\,\frac{OA'}{Op},$$

demnach

(67) $$Op = \text{Flächeninhalt } ABD.$$

Legen wir jetzt durch b eine zu aOd parallele Ebene; dann wird man ebenso beweisen, dass diese Ebene OP in einer Entfernung von O schneidet, die genau dem Flächeninhalt ABD gleich ist, das heisst in dem schon erhaltenen Punkt p.

Dasselbe wird der Fall sein, wenn wir durch d eine zu aOb parallele Ebene legen. Diese drei Ebenen mit ihren parallelen Ebenen bOd, aOd, aOb bilden ein Parallelepiped, dessen Kanten Oa, Ob, Od sind, und wovon Op die Diagonale ist. Diese Diagonale ist also gleich mit und normal zu dem Dreieck ABD.

Corollarsatz. — Wenn die Kanten Oa, Ob, Od, ohne den Flächeninhalten der Seiten gleich zu sein, ihnen in dem Verhältniss $1:B$ proportional wären, so würde die Diagonale Op auch zu dem Flächeninhalt ABD in demselben Verhältniss $1:B$ stehen; sie würde normal zu der Ebene ABD bleiben.

[107] Satz CII. — Wenn (ghk) das Symbol einer zu einer gegebenen Schaar gehörenden Netzebene ist, und wenn man in ihrer polaren Schaar die Gerade zieht, welche von dem Anfangspunkte nach dem Punkte führt, dessen Zahlen-Coordinaten g, h, k sind, so wird diese Gerade mit dem Symbol $[ghk]$ normal zu der Ebene (ghk) sein.

Seien Ox, Oy, Oz (Fig. 39) die drei conjugirten Punktreihen, die als Coordinaten-Axen der ursprünglichen Schaar genommen sind, und seien a, b, d die Parameter dieser Punktreihen. Machen wir

$$OA = hka, \quad OB = gkb, \quad OD = ghd.$$

Die Gleichung der Ebene ABD in Zahlen-Coordinaten wird sein

$$gx + hy + kz = ghk.$$

Man wird ausserdem haben:

$$\begin{aligned} &\text{Flächeninhalt } OBD = \tfrac{1}{2} g^2 hkbd \sin\alpha = \tfrac{1}{2} g^2 hk S(100),\\ (68)\quad &\text{Flächeninhalt } OAD = \tfrac{1}{2} gh^2 kad \sin\beta = \tfrac{1}{2} gh^2 k S(010),\\ &\text{Flächeninhalt } OAB = \tfrac{1}{2} ghk^2 ab \sin\delta = \tfrac{1}{2} ghk^2 S(001). \end{aligned}$$

Die Symbole $S(100)$, $S(010)$, $S(001)$ stellen nach unserem Uebereinkommen die Flächeninhalte der Grund-Parallelogramme auf der Ebene der yz, der Ebene der xz und der Ebene der xy vor.

Construiren wir nun die drei Axen der polaren Schaar, und seien auf diesen Axen genommen

$$Oa = gP[100] = \frac{gS(100)}{E},$$

$$Ob = hP[010] = \frac{hS(010)}{E},$$

$$Od = kP[001] = \frac{kS(001)}{E},$$

wobei E der mittlere Abstand der Gitterpunkte ist.

Sei Op die Diagonale des über Oa, Ob und Od construirten Parallelepipedes; die Zahlen-Coordinaten von p

werden g, h und k in der polaren Schaar sein, und die Bezeichnung der Punktreihe Op wird $[ghk]$ sein.

Wenn man die Werthe von Oa, Ob und Od mit den Ausdrücken der Flächeninhalte OBD, [108] OAD und OAB (Gleichungen 68) vergleicht, so sieht man, dass sie ihnen proportional sind in dem Verhältniss

$$\frac{1}{E} : \tfrac{1}{2} ghk = 1 : \tfrac{1}{2} ghkE.$$

Also wird nach dem Corollarsatz zu dem Satze CI die Diagonale Op normal zu der Basis ABD sein, das heisst zu dem System der Netzebenen, dessen Symbol (ghk) ist.

Zweiter Beweis. — Wenn man den Satz CII durch die analytische Geometrie des Raumes beweisen will, so nennt man τ die Neigung der Axe Oz gegen die Ebene der xy (Fig. 39); ξ_0, η_0, ζ_0 die linearen Coordinaten des Punktes a; ξ_1, η_1, ζ_1 diejenigen des Punktes b; ξ_2, η_2, ζ_2 diejenigen des Punktes d, und man setzt

$$(69) \quad 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta = J^2.$$

Man hat alsdann

$$\zeta_2 = \frac{Od}{\sin\tau} = \frac{Od \sin\delta}{J} = \frac{kab \sin^2\delta}{JE};$$

woraus man leicht die Werthe von ξ_2, η_2 durch die bekannten Gleichungen der Normale zu der Ebene der xy in dem System der schiefwinkligen Axen folgern kann.

Man würde ebenso ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_0, η_0, ζ_0 bestimmen.

Die Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes p werden dann durch die Formeln gegeben

$$\xi JE = (\xi_0 + \xi_1 + \xi_2) JE$$
$$= gbd \sin^2\alpha - had \sin\alpha \sin\beta \cos\varpi - kab \sin\alpha \sin\delta \cos\nu;$$
$$\eta JE = (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) JE$$
$$= -gbd \sin\alpha \sin\beta \cos\varpi + had \sin^2\beta - kab \sin\beta \sin\delta \cos\mu;$$
$$\zeta JE = (\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2) JE$$
$$= -gbd \sin\beta \sin\delta \cos\mu - had \sin\alpha \sin\delta \cos\nu + kab \sin^2\delta.$$

Wenn man also um abzukürzen setzt

$$(70)\begin{cases} \dfrac{g}{a}\sin^2\alpha-\dfrac{h}{b}\sin\alpha\sin\beta\cos\varpi-\dfrac{k}{d}\sin\alpha\sin\delta\cos\nu=r, \\ -\dfrac{g}{a}\sin\alpha\sin\beta\cos\varpi+\dfrac{h}{b}\sin^2\beta-\dfrac{k}{d}\sin\beta\sin\delta\cos\mu=s, \\ -\dfrac{g}{a}\sin\beta\sin\delta\cos\mu-\dfrac{h}{b}\sin\alpha\sin\delta\cos\nu+\dfrac{k}{d}\sin^2\delta=t, \end{cases}$$

[109] so werden die Gleichungen der Geraden Op sein

$$\frac{\xi}{r}=\frac{\eta}{s}=\frac{\zeta}{t}.$$

Nun ist aber bekannt, dass diese Gleichungen, nach der Substitution der Werthe von r, s und t, die Normale zu der Ebene darstellen, deren Gleichung

$$\frac{g}{a}\xi+\frac{h}{b}\eta+\frac{k}{d}\zeta=0,$$

und deren symbolische Bezeichnung (ghk) ist.

Satz CIII. — Wenn (ghk) das Symbol einer Netzebene in einer Schaar ist, so wird ihre Normale eine Punktreihe der polaren Schaar sein, und wird darin $[ghk]$ als Symbol haben.

Dies lässt sich aus der Umformung des vorhergehenden Satzes entnehmen.

Satz CIV. — Der Parameter der Punktreihe $[ghk]$ ist gleich dem Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms, das auf der Ebene (ghk) entworfen ist, dividirt durch den mittleren Abstand der Gitterpunkte.

Die Bezeichnungen bleiben die gleichen wie in den vorhergehenden Sätzen. Sei Op (Fig. 39) der Parameter der Punktreihe $[ghk]$, wobei g, h und k keinen anderen gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit haben. Nach dem Corollarsatz zu Satz CI wird man haben

$$Op : \text{Flächeninhalt } ABD = Oa : \text{Flächeninhalt } OBD;$$

nun ist aber dieses Verhältniss $1 : \frac{1}{2}\, ghkE$; folglich

$$Op=\frac{2 \text{ Flächeninhalt } ABD}{ghkE}.$$

Aber es ist bewiesen worden (Satz XXXVIII, Gleichung 47), dass man

$$\text{Flächeninhalt } ABD = \tfrac{1}{2} ghk\omega$$

hat, wobei ω der Flächeninhalt des Grund-Parallelogramms des Netzes auf der Ebene ABD ist. Folglich wird man haben, indem man ω durch $S(ghk)$ ersetzt,

$$2 \text{ Flächeninhalt } ABD = ghkS(ghk),$$

$$Op = \frac{S(ghk)}{E};$$

[110] woraus man die allgemeine Formel ableitet

$$P[ghk] = \frac{S(ghk)}{E}, \tag{71}$$

welches der algebraische Ausdruck des Satzes ist, den wir zu beweisen hatten.

Anmerkung. — Demnach sind die Formeln (63) nur besondere Fälle der Formel (71).

Corollarsatz I. — Eine gegebene Schaar hat nur eine einzige polare Schaar, welche bestimmt ist, sobald man den Gitterpunkt feststellt, der beiden Schaaren gemeinsam sein soll. Denn die polare Schaar, welche aus drei beliebig genommenen conjugirten Punktreihen construirt ist, muss nach dem vorhergehenden Satz mit der aus jedem anderen Punktreihen-System construirten polaren Schaar zusammenfallen.

Corollarsatz II. — Wenn drei Ebenen in einer Schaar conjugirt sind, so sind ihre Normalen conjugirte Punktreihen der Polaren.

Das über diesen drei Punktreihen construirte Parallelepiped, soll das Polar-Parallelepiped desjenigen sein, welches sich in der ursprünglichen Schaar aus den drei conjugirten Ebenen und ihren angrenzenden construiren lässt.

Corollarsatz III. — Umgekehrt sind, wenn drei Punktreihen in einer Schaar conjugirt sind, ihre normalen Ebenen conjugirte Ebenen in der polaren Schaar.

Corollarsatz IV. — Die Bedingung dafür, dass drei Netzebenen (ghk), $(g'h'k')$ und $(g''h''k'')$ conjugirt sind, erhält man, indem man die Bedingung sucht, unter der $[ghk]$, $[g'h'k']$ und $[g''h''k'']$ drei conjugirte Punktreihen sind. Sie wird also sein (Gleichung 43)

$$gh'k'' - gk'h'' + kg'h'' - hg'k'' + hk'g'' - kh'g'' = \pm 1.$$

Aufgabe XXXI. — Man berechne $S(ghk)$ oder den Flächeninhalt der Masche des Netzes der Netzebene (ghk).

Man hat allgemein in der ursprünglichen Schaar (Aufgabe XVI)

$$
(72)\quad \left\{
\begin{aligned}
P^2 ghk = {} & g^2 P^2 100 + h^2 P^2 010 + k^2 P^2 001 \\
& + 2gh P100 \cdot P010 \cdot \cos\delta \\
& + 2gk P100 \cdot P001 \cdot \cos\beta \\
& + 2hk P010 \cdot P001 \cdot \cos\alpha .
\end{aligned}
\right.
$$

Wenn man ausdrückt, dass die gleiche Beziehung in der polaren [111] Schaar stattfindet, und indem man dann

$$P[ghk] \text{ durch } \frac{1}{E} S(ghk),$$

$$P[100] \text{ durch } \frac{1}{E} S(100),$$

$$P[010] \text{ durch } \frac{1}{E} S(010),$$

$$P[001] \text{ durch } \frac{1}{E} S(001),$$

$$[\alpha] \text{ durch } 180^\circ - \mu,$$

$$[\beta] \text{ durch } 180^\circ - \nu,$$

$$[\delta] \text{ durch } 180^\circ - \varpi$$

ersetzt, erhält man

$$
(73)\quad \left\{
\begin{aligned}
S^2(ghk) = {} & g^2 S^2(100) + h^2 S^2(010) + k^2 S^2(001) \\
& - 2gh S(100) \cdot S(010) \cos\varpi \\
& - 2gk S(100) \cdot S(001) \cos\nu \\
& - 2hk S(010) \cdot S(001) \cos\mu .
\end{aligned}
\right.
$$

Dies ist die Formel, welche wir schon erhielten (Gleichung 50); aber es war zweckmässig, sie der Formel (72) gegenüber zu stellen, um das merkwürdige Gesetz der Reciprocität zu zeigen, welches sie verbindet.

Bemerkung bezüglich der Formeln (72) und (73). — Wenn man in der Gleichung (72) setzt

$$P100 = \sqrt{a},\quad P010 = \sqrt{a'},\quad P001 = \sqrt{a''},\quad Pghk = \sqrt{f},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a'a''}},\quad \cos\beta = \frac{b'}{\sqrt{aa''}},\quad \cos\delta = \frac{b''}{\sqrt{aa'}},$$

so wird diese Gleichung

$$f = ag^2 + a'h^2 + a''k^2 + 2b''gh + 2b'gk + 2bhk.$$

Die Grösse f hat von Herrn *Gauss* den Namen **ternäre Form** bekommen (*Gauss*, Disquisitiones Arithmeticae, p. 426), und der berühmte Mathematiker bezeichnet sie durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} = f.$$

Die Grösse

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D$$

wurde von Herrn *Gauss* die **Determinante der Form** genannt. Indem man [112] a, a', a'' und b, b', b'' durch ihre Werthe ersetzt, und die Gleichungen (52) und (54) berücksichtigt, findet man

$$D = P^2 100 \cdot P^2 010 \cdot P^2 001$$
$$(-1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta) = -E^6,$$

wobei der Buchstabe E wieder den mittleren Abstand der Gitterpunkte darstellt.

Man sieht hieraus, dass jede ternäre Form einer Schaar von **reellen** oder **imaginären** Punkten entspricht; dass jeder besondere Werth von f für bestimmte und ganzzahlige Werthe von g, h und k das Quadrat der Entfernung zweier Punkte oder Gitterpunkte der Schaar ausdrückt; dass die Determinante der Form mit dem Zeichen — genommen gleich ist dem Quadrat des Volumens des Grund-Parallelepipedes, oder der sechsten Potenz des mittleren Abstandes der Gitterpunkte, etc.

Analoge Resultate ergeben sich für die binären Formen

$$ag^2 + 2bgh + a'h^2,$$

deren Determinante $b^2 - aa'$, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, das Quadrat des **Flächeninhaltes** des Grund-Parallelogramms darstellt, oder die vierte Potenz des mittleren Abstandes der Gitterpunkte desjenigen Netzes, welches aus dieser binären Form abgeleitet wird.

Die ternäre Form

$$\begin{pmatrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - b'b'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{pmatrix}$$

ist von Herrn *Gauss* die adjungirte Form der Form

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

genannt worden; sie ist in den Disquisitiones durch den Buchstaben F bezeichnet.

Es folgt aus der Entstehungsweise von a, a', a'', b, b' und b'', dass man hat

$$\begin{aligned}
b^2 - a'a'' &= -P^2 010 \cdot P^2 001 \cdot \sin^2 \alpha = -S^2(100), \\
b'^2 - aa'' &= -S^2(010), \\
b''^2 - aa' &= -S^2(001), \\
ab - b'b'' &= P^2 100 \cdot P 010 \cdot P 001 (\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta) \\
&= S(001) \cdot S(010) \cdot \cos \mu, \\
a'b' - bb'' &= S(001) \cdot S(100) \cdot \cos \nu, \\
a''b'' - bb' &= S(100) \cdot S(010) \cdot \cos \varpi;
\end{aligned}$$

[113] Man wird also nach der Substitution dieser Werthe in die Form F haben

$$\begin{aligned}
-F = g^2 S^2(100) &+ h^2 S(010) + k^2 S^2(001) \\
&- 2gh S(100) \cdot S(010) \cdot \cos \varpi \\
&- 2gk S(100) \cdot S(001) \cdot \cos \nu \\
&- 2hk S(010) \cdot S(001) \cdot \cos \mu;
\end{aligned}$$

also auch

$$F = -S^2(ghk) = -E^2 P^2 [ghk].$$

So stellt also die adjungirte ternäre Form das Quadrat des Elementar-Parallelogramms der Ebene (ghk) mit dem Zeichen — dar. Man sieht auch, dass, wenn die Form f sich geometrisch durch eine Schaar darstellen lässt, ihre adjungirte Form F in gleicher Weise durch die polare Schaar dargestellt werden wird, nachdem jedoch die Parameter der polaren Schaar alle mit dem mittleren Abstand E multiplicirt worden sind, das heisst mit der mit negativem Zeichen genommenen sechsten Wurzel aus der Determinante D.

Auf die merkwürdige Analogie, welche zwischen den Eigenschaften der binären und ternären Formen und den geometrischen Eigenschaften besteht, welche die Netze und Schaaren besitzen, hat Herr *Seeber* in seinen »Untersuchungen über die ternären Formen« aufmerksam gemacht (siehe *Crelle's* Journal, Band XX, p. 318).

Satz CV. — *Das Volumen des Elementar-Parallelepipedes ist das gleiche in der ursprünglichen Schaar und in ihrer polaren.*

Seien Ω das Volumen des Grund-Parallelepipedes der gegebenen Schaar und $[\Omega]$ dasjenige ihrer polaren Schaar. Man hat offenbar

$$[\Omega] = \frac{ab \sin\delta}{E} \frac{ad \sin\beta}{E} \frac{bd \sin\alpha}{E} \sin\mu \sin\nu \sin\delta,$$

wobei a, b, d die Parameter der ursprünglichen Schaar sind.

Man hat andererseits

$$(74) \qquad \begin{cases} \sin\beta \sin\delta \sin\mu = J, \\ \sin\alpha \sin\delta \sin\nu = J, \end{cases}$$

wenn J wieder durch die Gleichung (69) gegeben ist. Also

$$[\Omega] = \frac{a^2 b^2 d^2 J^2}{E^3},$$

[114] und da überdies

$$abdJ = \Omega \text{ (Gleichung 41)},$$
$$E^3 = \Omega \text{ (Gleichung 54)},$$

so wird endlich

$$(75) \qquad [\Omega] = \Omega.$$

Anmerkung. — Die polare Schaar hat dieselbe Dichtigkeit, das heisst denselben Reichthum an Gitterpunkten wie die ursprüngliche Schaar; der mittlere Abstand E behält denselben Werth in den beiden Schaaren. Also

$$(76) \qquad [E] = E.$$

Satz CVI. — *Wenn man die polare Schaar einer polaren Schaar construirt, so kommt man auf die ursprüngliche Schaar zurück.*

Bestimmen wir den elementaren Flächeninhalt des Netzes der Ebene der $[yz]$ in der polaren Schaar. Seiten des Grund-Parallelogramms sind die beiden Parameter

$$\frac{ad \sin\beta}{E}, \quad \frac{ab \sin\delta}{E};$$

der eingeschlossene Winkel $[\alpha]$ ist gleich $180^\circ - \mu$ (Satz C). Also wird man haben

$$S[(100)] = \frac{a^2 bd \sin\beta \sin\delta \sin\mu}{E^2} = \frac{Ea^2 bd \sin\beta \sin\delta \sin\mu}{\Omega}.$$

Nun hat man andererseits

$$abd \sin\beta \sin\delta \sin\mu = abdJ = \Omega;$$

also

$$S[(100)] = Ea = EP100.$$

Man würde ebenso beweisen, dass man hat

$$S[(010)] = Eb = EP010,$$
$$S[(001)] = Ed = EP001.$$

Wenn man, der Richtung nach, die Axen der Schaar construirt, welche die polare der über Oa, Ob, Od (Fig. 39) construirten Schaar ist, so trifft man wieder auf OA, OB, OD. Wenn man, der Grösse nach, die Parameter dieser Axen, den festgesetzten Formeln (Gleichungen 63)

$$\frac{S[(100)]}{[E]}, \quad \frac{S[(010)]}{[E]}, \quad \frac{S[(001)]}{[E]}$$

[**115**] gemäss, construirt, so kommt man wegen $[E] = E$ wieder auf die Parameter a, b, d, oder $P100$, $P010$, $P001$ zurück. Die so erhaltene Schaar fällt also mit der ursprünglichen Schaar zusammen.

Satz CVII. — Wenn ghk das Symbol einer Punktreihe in einer Schaar ist, so wird die zu ihr normale Ebene eine Netzebene der polaren Schaar sein und sie wird $[(ghk)]$ als Symbol haben.

Denn man kann, zufolge des vorhergehenden Satzes, die polare Schaar als die ursprüngliche ansehen, und die ursprüngliche als die polare Schaar der anderen. Alsdann muss (Satz CIII) das Symbol der Normale der Ebene $(ghk)[ghk]$ sein. Um auf unsere erste Auffassung zurückzukommen, genügt es, die Klammern [] von einem Symbol auf das andere zu übertragen, und man sieht, dass das Symbol der zu der

Ebene $[(ghk)]$ Normalen ghk sein wird; also ist die Punktreihe ghk normal zu der Netzebene $[(ghk)]$.

Corollarsatz. — Wenn $[ghk]$ das Symbol einer Punktreihe der polaren Schaar ist, so wird (ghk) dasjenige der zu ihr normalen Ebene sein, welche eine Netzebene der ursprünglichen Schaar sein wird.

Definition. — Die Eigenschaften der polaren Schaaren im Raum haben ihre analogen auf der Ebene. Jedem Netze entspricht ein polares Netz, welches man in der folgenden Weise erhält:

Seien $Oa = a$, $Ob = b$ die beiden Parameter auf den Axen Ox, Oy (Fig. 40); sei δ der Winkel xOy; sei ε der mittlere Abstand, der durch die Formel

$$\varepsilon^2 = ab \sin \delta$$

gegeben ist. Ueber diesem Netz, und mit dem zu der Ebene xOy normalen Parameter ε als Axe der z construire man eine Schaar, welche das Netz der Ebene xOy als Basis hat.

Man wird haben

$$\Omega = \varepsilon ab \sin \delta = \varepsilon^3;$$

so wird also ε der mittlere Abstand der Gitterpunkte dieser Hülfsschaar sein.

Indem man ihre polare Schaar construirt, sieht man, dass die Axe der $[x]$ die Normale $O[x]$ zu der Axe Oy sein wird, und dass die Axe der $[y]$ die Normale $O[y]$ zu der Axe der Ox sein wird. Seien also $O[a] = [a]$, $O[b] = [b]$ die auf diese Axe bezüglichen Parameter, so wird man haben

$$[a] = \frac{b\varepsilon}{\varepsilon} = b, \quad [b] = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon} a = a.$$

[116] Wenn man über diesen Parametern ein Netz construirt, wird man das Polare des gegebenen Netzes erhalten. Wenn man alsdann auf der Verlängerung der Geraden $O[y]$ die Strecke $O[b'] = O[b]$ abträgt, so wird der Gitterpunkt $[b']$ auch dem polaren Netz angehören, und da man

$$O[a] = Ob, \quad O[b'] = Oa$$

hat, werden die Dreiecke bOa und $[a]O[b']$ congruent sein. Daraus folgt der nächste Satz.

Satz CVIII. — Ein polares Netz wird aus dem ursprünglichen Netz abgeleitet durch eine Drehung von 90 Grad des letzteren um einen der Gitterpunkte, welchen man als Anfangspunkt wählt.

Anmerkung. — Wenn nach dieser Drehung die Axe der positiven y zu der Axe der positiven $[x]$ des polaren Netzes wird, so wird die Axe der positiven x die Axe der negativen $[y]$ werden. Das Umgekehrte wird stattfinden, wenn die Drehung im entgegengesetzten Sinne gemacht wird.

Satz CIX. — **Jede polare Schaar besitzt dieselben Symmetrieaxen wie die ursprüngliche Schaar.**

Sei O (Fig. 41), der den beiden Schaaren gemeinsame Gitterpunkt, der Anfangspunkt der Coordinaten; seien OO' eine Symmetrieaxe der ursprünglichen Schaar, und OP eine der Punktreihen der polaren Schaar, wobei O und P zwei benachbarte Gitterpunkte auf dieser Punktreihe sein mögen. Legen wir durch O normal zu OP die Ebene RR', welche eine Netzebene der ursprünglichen Schaar sein muss (Satz CVII, Corollarsatz).

Sei jetzt q die Ordnungszahl der Symmetrie der Axe OO'; lassen wir RR' sich um OO' drehen um $\frac{360^\circ}{q}$, um $\frac{2 \cdot 360^\circ}{q}$, $\frac{3 \cdot 360^\circ}{q}$, u. s. w.: so wird man ebenso viele Netzebenen der gleichen Art erhalten (Satz LXXXVIII), deren Normalen ebenfalls Punktreihen der polaren Schaar sein werden (Satz CIII). Diese Normalen erhält man, indem man OP um OO' dreht durch Winkel von $\frac{360^\circ}{q}$, $\frac{2 \cdot 360^\circ}{q}$, u. s. w.: bei dieser Bewegung wird der Punkt P nach einander auf P', auf P'', u. s. w. kommen; woraus man sieht, dass er $q - 1$ homologe Gitterpunkte in Bezug auf die Axe OO' haben wird, und da P irgend ein Gitterpunkt der polaren Schaar ist, so wird die Axe OO' eine Symmetrieaxe der Ordnung q in dieser letzteren Schaar sein.

Corollarsatz. — Wenn in der ursprünglichen Schaar Symmetrieebenen vorkommen, [117] so werden diese Ebenen auch Symmetrieebenen der polaren Schaar sein; denn jeder Symmetrieebene entspricht eine Symmetrieaxe von gerader Ordnung, und diese Axe muss sich in der polaren Schaar wiederfinden. Nun aber entspricht jeder Symmetrieaxe von gerader Ordnung umgekehrt auch eine Symmetriebene, welche zu ihr normal ist; deshalb wird sich auch diese Symmetrieebene in der polaren Schaar wiederfinden.

Satz CX. — Wenn man alle Parallelepipede centrirt, deren Vereinigung eine gegebene Schaar A bildet, deren polare $[A]$ bekannt ist, und wenn man so eine neue Schaar A' hervorbringt, so wird die Schaar, die man erhält, indem man die sechs Seiten der polaren Parallelepipede centrirt, welche die Schaar $[A]$ bilden, und darauf alle ihre Dimensionen in dem Verhältniss $1:\sqrt[3]{2}$ vergrössert, die polare Schaar von A' sein.

Sei Ω' der Kern der Schaar A'; das Volumen dieses Kernes wird augenscheinlich gleich der Hälfte des Volumens des alten Kerns sein, so dass man haben wird

$$\Omega' = \tfrac{1}{2}\Omega.$$

Seien E und E' die mittleren Abstände in den Schaaren A und A', so wird man haben

$$E'^3 = \tfrac{1}{2}E^3, \quad E = E'\sqrt[3]{2}.$$

Andererseits hat man in der Polaren von A', indem man die Grössen, welche sich auf die Schaar A' und ihre polare $[A']$ beziehen, durch Accente kenntlich macht,

$$P'[100] = \frac{S'(100)}{E'}, \; P'[010] = \frac{S'(010)}{E'}, \; P'[001] = \frac{S'(001)}{E'}.$$

Da aber die Netze auf den Ebenen der yz, der xz und der xy nicht durch die Centrirung verändert werden, erhält man

$$S'(100) = S(100) = EP[100],$$
$$S'(010) = S(010) = EP[010],$$
$$S'(001) = S(001) = EP[001].$$

Also durch Substitution

$$(77) \qquad \left\{ \begin{aligned} P'[100] &= \sqrt[3]{2} \cdot P[100], \\ P'[010] &= \sqrt[3]{2} \cdot P[010], \\ P'[001] &= \sqrt[3]{2} \cdot P[001]. \end{aligned} \right.$$

[**118**] $P[100]$, $P[010]$ und $P[001]$ stellen nach Grösse und Richtung die Kanten der drei aneinanderstossenden Seiten des Grund-Parallelepipeds der polaren Schaar $[A]$ vor. Wenn man dagegen die Diagonal-Ebenen (110), (101) und (011)

betrachtet, und speciell diejenigen, welche als Gleichung in der ursprünglichen Schaar

$$x + y = 1, \quad x + z = 1, \quad y + z = 1$$

haben, so sieht man leicht, dass diese Ebenen durch das Centrum des Grund-Parallelepipedes gehen: demnach werden die Parallelogramme der Netze dieser Ebenen alle centrirt, und der Flächeninhalt ihrer Masche wird um die Hälfte kleiner. Man hat also

$$\begin{aligned} S'(110) &= \tfrac{1}{2} S(110), \\ S'(101) &= \tfrac{1}{2} S(101), \\ S'(011) &= \tfrac{1}{2} S(011). \end{aligned}$$

Also

$$(78) \quad \begin{cases} P'[110] = \dfrac{S'(110)}{E'} = \dfrac{E}{E'} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \dfrac{S(110)}{E} = \sqrt[3]{2} \cdot \tfrac{1}{2} P[110], \\ \text{und ebenso} \\ P'[101] = \sqrt[3]{2} \cdot \tfrac{1}{2} P[101], \\ P'[011] = \sqrt[3]{2} \cdot \tfrac{1}{2} P[011]. \end{cases}$$

$P[110]$, $P[101]$ und $P[011]$ stellen nach Grösse und Richtung die Diagonalen der drei aneinanderstossenden Seiten des Grund-Parallelepipedes der polaren Schaar $[A]$ dar.

Aus den Gleichungen (77) und (78) schliesst man, dass man, um die Schaar $[A']$ zu erhalten, die Dimensionen des Grund-Parallelepipedes der Polaren $[A]$ mit $\sqrt[3]{2}$ multipliciren, und dann die Parameter der Diagonalen ihrer sechs Seiten um die Hälfte verkleinern muss, was erreicht wird indem man ihre Seitenflächen centrirt.

Die erste dieser beiden Operationen verwandelt den Kern Ω der Polaren $[A]$ in $\Omega\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2\Omega$. Durch die zweite Operation bekommt das Grund-Parallelepiped zwei Mal kleinere Basen und Höhen, sein Kern 2Ω wird also gleich

$$\tfrac{1}{4} 2\Omega = \tfrac{1}{2}\Omega = \Omega',$$

das heisst gleich dem Kern der Schaar A'. Die Centrirung der so erhaltenen Schaar $[A']$ ist demnach vollständig; eine weitere Centrirung würde, wenn sie stattfinden [**119**] könnte, die Dichtigkeit von $[A']$ grösser machen als diejenige von

A', was nicht möglich ist (Satz CV, Anmerkung). Also ist $[A']$ die Polare von der centrirten Schaar A'.

Satz CXI. — Wenn man die Flächen der Grund-Parallelepipede centrirt, welche eine gegebene Schaar A bilden, deren Polare $[A]$ bekannt ist, um durch diese Centrirung eine neue Schaar A' zu erzeugen, so wird man die Polare $[A']$ der Schaar A' erhalten, indem man die polaren Parallelepipede, welche die Schaar $[A]$ bilden, centrirt und alle ihre Dimensionen in dem Verhältniss $\sqrt[3]{2}:1$ verkleinert.

Seien ganz allgemein M und N zwei Schaaren, wovon jede die Polare der anderen ist; sei M_c das was aus der Schaar M wird, wenn man alle ihre Parallelepipede centrirt; sei N_f das was aus N wird, wenn man die Flächen ihrer Parallelepipede, der Polaren derjenigen von M centrirt. Es folgt aus dem vorhergehenden Satz, dass sowohl M_c wie N_f die Bedingungen in Bezug auf ihre Dimensionen-Verhältnisse erfüllen, um Polaren von einander zu sein; nur anstatt

$$\text{Kern } M_c = \text{Kern } N_f$$

hat man

$$\text{Kern } M_c = 2 \text{ Kern } N_f. \tag{79}$$

Wenn man dann die Dimensionen von N_f in dem Verhältniss $\sqrt[3]{2}$ zur Einheit vergrössert, werden die Kerne gleich und die Schaaren sind gegenseitig polar (voriger Satz).

Man kann dasselbe Resultat erhalten, indem man die Dimensionen von M_c in dem Verhältniss $\sqrt[3]{2}:1$ verkleinert; die Kerne werden gleich, und die Schaaren gegenseitig polare.

Im gegenwärtigen Falle setzen wir $N = A$, $M = [A]$, und $N_f = A'$; hier wird M_c die Schaar $[A]$ sein, deren Parallelepipede man centrirt hat, und M_c mit Dimensionen, die in dem Verhältniss $\sqrt[3]{2}:1$ verkleinert sind, wird die Polare von A' sein.

Satz CXII. — Wenn man in den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ die Basen der Grund-Parallelepipede centrirt, welche eine Schaar A bilden, deren Polare $[A]$ bekannt ist, so wird man die Polare der Schaar mit centrirten Basen [**120**] A' erhalten, indem man auf den Ebenen $[z] = 0$, $[z] = 1$ die Basen von $[A]$

centrirt, die Parameter auf den Axen der $[x]$ und der $[y]$ mit dem Verhältniss $\sqrt[3]{2}:1$ multiplicirt, und denjenigen der Axe der $[z]$ mit dem Verhältniss $\sqrt[3]{2}:2$.

Wenn man die Methode anwendet, welche bei dem Beweis des Satzes CX gedient hat, findet man

$$E = E'\sqrt[3]{2},$$

$$\begin{aligned}
S'(100) &= S(100) = EP[100],\\
S'(010) &= S(010) = EP[010],\\
S'(001) &= \tfrac{1}{2}S(001) = \tfrac{1}{2}EP[001],
\end{aligned}$$

$$(80)\qquad \begin{cases}
P'[100] = \sqrt[3]{2}\cdot P[100],\\
P'[010] = \sqrt[3]{2}\cdot P[010],\\
P'[001] = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\cdot P[001],
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S'(110) &= \tfrac{1}{2}S(110),\\
S'(101) &= S(101),\\
S'(011) &= S(011),
\end{aligned}$$

$$(81)\qquad \begin{cases}
P'[110] = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\cdot P[110],\\
P'[101] = \sqrt[3]{2}\cdot P[101],\\
P'[011] = \sqrt[3]{2}\cdot P[011].
\end{cases}$$

Aus den Gleichungen (80) und (81) schliesst man, dass alle Dimensionen der Schaar $[A]$ mit $\sqrt[3]{2}$ multiplicirt werden müssen, und dass dann der auf die Axe der $[z]$ bezügliche Parameter ebenso wie der Parameter der Diagonale [110] um die Hälfte verkleinert werden muss. Diese letzte Operation ist äquivalent dem Centriren der Parallelogramme in der Ebene der $[xy]$.

Die erste Operation verändert den Kern Ω der Schaar $[A]$ in 2Ω; die zweite halbirt ihn und führt ihn auf den Werth Ω zurück; die dritte halbirt und macht ihn gleich $\frac{1}{2}\Omega$; dieses ist nun auch der Werth des Kernes der Schaar A'. Also wird die so erhaltene Schaar die Polare von A' sein.

Aufgabe XXXII. — **Die polare Schaar einer Schaar mit binärer Symmetrie zu finden.**

Seien Oz die binäre Axe (Fig. 42) und d ihr Parameter. Seien $Ox = a$, $Oy = b$ und $xOy = \delta$.

[**121**] Nehmen wir zuerst das nicht centrirte Prisma an, und setzen

$$abd \sin \delta = R^3; \tag{82}$$

wenn E der mittlere Abstand ist, werden wir haben

$$E^3 = R^3 .$$

Die Axe der $[z]$ wird mit Oz zusammenfallen, die Axen der $[x]$ und der $[y]$ werden in der Ebene der xy gelegen sein, und man wird haben

$$[a] = E^2 \frac{1}{a \sin \delta} = \frac{d}{E} b ,$$

$$[b] = E^2 \frac{1}{b \sin \delta} = \frac{d}{E} a ,$$

$$[d] = E^2 \frac{1}{d} = \frac{E^2}{d^2} d .$$

Da die Axen der x, y und z conjugirt sind, weil das gerade Prisma nicht centrirt ist, werden die Axen der $[x]$, der $[y]$ und der $[z]$ es gleichfalls sein, und die Grundform der polaren Schaar wird ein gerades Prisma mit parallelogrammatischer Basis sein. Das Netz der Ebene der $[x][y]$ wird das in dem Verhältniss $d : E$ vergrösserte oder verkleinerte polare Netz des Netzes der xy sein.

Wenn das Grundprisma centrirt wäre (siehe den Satz LV), so müsste man die Flächen des polaren Prismas, das man erhält, ohne zuvörderst die Centrirung in Betracht zu ziehen, centriren (Satz CX), und darauf seine Dimensionen in dem Verhältniss $1 : \sqrt[3]{2}$ vergrössern. Man erhielte auf diese Weise als Grundform ein gerades Oktaeder mit parallelogrammatischer Basis oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein gerades centrirtes Prisma mit parallelogrammatischer Basis. Man findet dann für die Kanten dieses letzteren Prismas

$$[a] = R^2 \sqrt[3]{2}\, \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\delta}}{2ab\sin\delta},$$

$$[b] = R^2 \sqrt[3]{2}\, \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta}}{2ab\sin\delta},$$

$$[d] = R^2 \sqrt[3]{2}\, \frac{1}{d},$$

und für den von $[a]$ und $[b]$ eingeschlossenen Winkel

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2ab\sin\delta}{a^2 - b^2}\right).$$

[122] Aufgabe XXXIII. — Die polare Schaar einer Schaar von terbinärer Symmetrie zu finden.

Nehmen wir als Coordinaten-Axen die drei Axen von binärer Symmetrie. Seien a, b und d die Parameter der Axen der x, der y und der z; $[a]$, $[b]$ und $[d]$ diejenigen der Axen der $[x]$, der $[y]$ und der $[z]$. Die Axe der $[x]$ wird mit der Axe der x zusammenfallen, die Axe der $[y]$ mit derjenigen der y und die Axe der $[z]$ mit derjenigen der z.

Nachdem dies festgestellt, können vier verschiedene Fälle vorkommen.

Wenn das gerade Prisma mit den Kanten a, b und d nicht centrirt ist, so wird die polare Schaar als Grundform ein gerades Prisma mit rechteckiger Basis haben.

Setzen wir, um abzukürzen,

$$abd = R^3, \tag{83}$$

so werden wir offenbar haben

$$E^3 = R^3, \tag{84}$$

$$[a] = E^2\,\frac{1}{a}, \quad [b] = E^2\,\frac{1}{b}, \quad [d] = E^2\,\frac{1}{d}.$$

Wenn das gerade Prisma im Mittelpunkt seines Volumens centrirt ist (der Fall, in dem die Schaar als aus dem geraden Oktaeder mit rechteckiger Basis abgeleitet angesehen werden kann), so ist das Polare ein gerades Prisma, das auf seinen sechs Flächen centrirt ist, und man findet leicht (Satz CX)

(85)
$$E^3 = \tfrac{1}{2} R^3,$$
$$[a] = R^2 \sqrt[3]{2}\,\frac{1}{a} = 2E^2\,\frac{1}{a},$$

$$[b] = R^2 \sqrt[3]{2}\,\frac{1}{b} = 2E^2\,\frac{1}{b},$$
$$[d] = R^2 \sqrt[3]{2}\,\frac{1}{d} = 2E^2\,\frac{1}{d};$$

das über $[a]$, $[b]$ und $[d]$ construirte Prisma muss darauf auf seinen sechs Flächen centrirt werden, und dann wird es gleichbedeutend einem geraden Oktaeder mit rhombischer Basis sein.

Wenn das gerade Prisma auf seinen sechs Flächen centrirt ist (der Fall, wo die Schaar als von einem geraden Oktaeder mit rhombischer Basis abgeleitet betrachtet werden kann), so kommt man gemäss dem Satze CXI auf das gerade, centrirte Prisma zurück, welches dem geraden Oktaeder mit rechteckiger Basis gleichbedeutend ist. Seien wieder a, b und d die Kanten [123] des geraden Prismas mit centrirten Flächen. Man wird nach dem Satz CXI haben

(86)
$$E^3 = \tfrac{1}{4} R^3,$$
$$[a] = R^2 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{a} = 2E^2\,\frac{1}{a},$$
$$[b] = R^2 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{b} = 2E^2\,\frac{1}{b},$$
$$[d] = R^2 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{d} = 2E^2\,\frac{1}{d};$$

$[a]$, $[b]$ und $[d]$ werden die Kanten des geraden rechteckigen Prismas sein, welches, indem es centrirt wird, die Grundform der gesuchten Polaren werden wird.

Endlich, wenn das Prisma auf zweien seiner Flächen centrirt wäre, z. B. auf seinen beiden Basen (der Fall, wo die Schaar als von einem geraden Prisma mit rhombischer Basis abgeleitet angesehen werden kann), fände man, indem man sich an die Vorschriften des Satzes CXII hielte, und durch den vorhergehenden analoge Berechnungen

$$[a] = 2E^2\,\frac{1}{a}, \quad [b] = 2E^2\,\frac{1}{b}, \quad [d] = E^2\,\frac{1}{d};$$

dann würde man das über $[a]$ und $[b]$ construirte Rechteck centriren. Man hätte auf diese Weise ein neues gerades Prisma mit rhombischer Basis.

Man kann sich für diesen letzten Fall auch auf die Lösung der Aufgabe XXXII stützen. Man mache in den auf diese Aufgabe bezüglichen Rechnungen

$$a = a', \quad b = a', \quad E = E',$$

was darauf hinausläuft, die beiden Diagonalen der rechteckigen centrirten Basis als Axen der x und der y zu nehmen. Dann ist

$$E'^3 = a'^2 d \sin \delta, \tag{87}$$

$$[a'] = E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a'$$

$$[b'] = E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a'$$

$$[d] = E'^2 \frac{1}{d} = \frac{E'^2}{d^2} d,$$

und der Winkel des Rhombus in der Basis des Polaren wird $180^\circ - \delta$.

Corollarsatz I. — Das Polare des geraden Prismas mit rechteckiger Basis ist ein gerades Prisma mit rechteckiger Basis; dasjenige des geraden Prismas mit rhombischer Basis ist [**124**] ein gerades Prisma mit rhombischer Basis: die beiden Rechtecke oder die beiden Rhomben sind ähnlich.

Corollarsatz II. — Das gerade Oktaeder mit rechteckiger Basis und das gerade Oktaeder mit rhombischer Basis sind zu einander polar.

Aufgabe XXXIV. — Die polare Schaar einer ternären oder rhomboedrischen Schaar zu finden.

Die Polare einer Schaar, welche mit einem Rhomboeder construirt ist, dessen Kantenwinkel gleich α, und dessen Flächenwinkel gleich μ ist, ist ein anderes Rhomboeder, dessen Kantenwinkel $[\alpha]$ (Satz C) gleich $180^\circ - \mu$, und dessen Flächenwinkel $[\mu]$ gleich $180^\circ - \alpha$ ist*).

---

*) Dieses Rhomboeder hat Professor *Weiss* »Invertirungs-Rhomboeder« genannt (*Abhandlungen der Berliner Akademie*, Band XV, p. 93).

Das ursprüngliche Rhomboeder wird vollständig bestimmt sein, wenn man den Parameter a des zur ternären Axe normalen Netzes mit dreieckig gleichseitiger Masche und den Parameter d dieser ternären Axe giebt. Man findet alsdann durch die bekannten Eigenschaften des Rhomboeders

$$(88)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-\cos\alpha)} = \dfrac{d^2}{9a^2} + \tfrac{1}{3}, \\[2ex] \dfrac{1}{2(1+\cos\mu)} = \dfrac{a^2}{4d^2} + \tfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Seien $[a]$ und $[d]$ die Parameter von gleicher Bedeutung im polaren Rhomboeder. Man wird haben

$$\frac{1}{2(1+\cos[\mu])} = \frac{[a]^2}{4[d]^2} + \tfrac{1}{3}.$$

Nun ist

$$1 + \cos[\mu] = 1 - \cos\alpha;$$

also

$$\frac{d^2}{9a^2} = \frac{[a]^2}{4[d]^2};$$

also endlich

$$(89)\qquad \frac{a[a]}{2} = \frac{d[d]}{3},$$

eine Beziehung, welche die Bedingung ausdrückt, unter welcher zwei Rhomboeder jedes dem polaren des anderen ähnlich sind.

Wegen der Gleichheit der beiden Volumen hat man ferner die Bedingung

$$(90)\qquad E^3 = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,a^2 d = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,[a]^2[d].$$

[**125**] Man wird daraus die Werthe von $[a]$ und $[d]$ berechnen, und zwar

$$[a] = d\sqrt[3]{\frac{2a}{3d}} = 2E^2\,\frac{1}{a},$$

$$[d] = a\sqrt[3]{\frac{9a}{4d}} = 3E^2\,\frac{1}{d}.$$

Aufgabe XXXV. — Die polare Schaar einer Schaar mit quaternärer Symmetrie zu finden.

Seien a und a die beiden Parameter der Seiten der quadratischen Basis; sei d der Parameter der Axe der z, der Axe der quaternären Symmetrie.

Wenn es sich um ein Prisma mit quadratischer Basis handelt, das nicht centrirt ist, wird man haben

$$(91) \qquad a^2 d = R^3, \qquad E^3 = R^3,$$

$$[a] = E^2 \frac{1}{a}, \quad [d] = E^2 \frac{1}{d};$$

das Polare wird auch ein Prisma mit quadratischer Basis sein.

Wenn es sich um ein centrirtes Prisma mit quadratischer Basis handelt, so wird das Polare ein centrirtes Prisma mit quadratischer Basis sein, dessen Elemente sich aus der Lösung des zweiten Falles der Aufgabe XXXIII ableiten lassen. In den auf diesen Fall bezüglichen Formeln mache man $b = a$; man wird ein gerades centrirtes Prisma mit quadratischer Basis finden, das sich durch die Formeln bestimmt

$$(92) \qquad E^3 = \tfrac{1}{2} R^3,$$

$$[a] = \sqrt{2} E^2 \frac{1}{a}, \quad [d] = 2 E^2 \frac{1}{d}.$$

Aufgabe XXXVI. — Die polare Schaar einer Schaar mit senärer Symmetrie zu finden.

Die Grundform der Schaar ist ein gerades Prisma von der Höhe d mit rhombischer Basis, deren Seiten a und a, mit dem eingeschlossenen Winkel δ gleich 120 Grad, sind.

Man findet alsdann (siehe die Lösung der Aufgabe XXXIII, vierter Fall), dass die Grundform der Polaren ein gerades Prisma mit rhombischer Basis ist, wobei der Winkel des Rhombus $180^\circ - \delta$ oder 60 Grad ist, das heisst ein Prisma mit senärer Symmetrie, wie man es erwarten musste (Satz CIX).

Seien $[a]$ und $[a]$ die Seiten des Rhombus in dem polaren Prisma, und $[d]$ die [126] Höhe; so wird man haben, indem man die Formeln (87) anwendet,

$$(93) \qquad E^3 = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, a^2 d,$$

$$[a] = \sqrt{\tfrac{4}{3}}\, E^2 \frac{1}{a},$$

$$[d] = E^2 \frac{1}{d}.$$

Man hat zwischen a, d, $[a]$ und $[d]$ die Beziehungen

$$\frac{a[a]}{2} = \frac{d[d]}{\sqrt{3}}, \tag{94}$$

$$a^2 d = [a]^2 [d], \tag{95}$$

welches die Analogen von (89) und (90) sind.

Das Netz der zur senären Axe normalen Ebene dreht sich um 90 Grad in seiner Ebene und modificirt sich in Bezug auf seinen kleinsten Parameter.

Aufgabe XXXVII. — **Die polare Schaar einer Schaar mit terquaternärer Symmetrie zu finden.**

Wenn die Grundform der Schaar ein Würfel ist, so wird ihre Polare als Grundform denselben Würfel haben.

Wenn die Grundform der Schaar ein centrirter Würfel mit der Seite a ist, so wird ihre Polare ein Würfel mit centrirten Flächen sein (Satz CX), dessen Seite $[a]$ durch die Formel

$$[a] = a\sqrt[3]{2}$$

gegeben sein wird.

Wenn umgekehrt die Grundform ein Würfel mit centrirten Flächen mit der Seite a wäre (oder ein reguläres Oktaeder mit der Seite $a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$), so würde die Polare ein centrirter Würfel mit der durch die Gleichung

$$[a] = a\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

gegebenen Seite $[a]$ sein (Satz CXI).

So sind also die beiden letzten Arten gegenseitig polar zu einander.

Man könnte diese letzteren Resultate auch beweisen, indem man die Grund-Rhomboeder in Betracht zöge. Das Rhomboeder von 90 Grad hat einen Kantenwinkel von 90 Grad; es wird also als Polares ein Rhomboeder von 90 Grad haben (Lösung der Aufgabe XXXIV).

[**127**] Das Rhomboeder von 70° 31′ 44″ hat einen Kantenwinkel von 60 Grad; es wird also das Rhomboeder von 120 Grad als Polares haben.

Das Rhomboeder von 120 Grad hat einen Kantenwinkel von 109° 28′ 16″; es wird also das Rhomboeder von 70° 31′ 44″ als Polares haben.

Obwohl man die vorstehende Abhandlung als eine rein geometrische Speculation betrachten kann, und obwohl die darin nachgewiesenen Beziehungen unabhängig sind von den physikalischen Eigenschaften der Körper, so hat doch der Verfasser diese Arbeit ausgeführt in der Absicht, sich derselben später zur Erklärung der Fundamentalerscheinungen der Krystallographie zu bedienen, und behielt bei Abfassung der Arbeit dieses Ziel besonders im Auge.

Seit *Haüy* hat man stets ausdrücklich oder stillschweigend angenommen, dass in den krystallisirten Körpern die Mittelpunkte der Molekel in gleichen Abständen, in geradlinigen Reihen, parallel den Schnittgeraden der Spaltungsflächen, angeordnet sind. Das aus diesen Mittelpunkten bestehende geometrische System ist demnach nichts anderes als was wir eine »Schaar von Punkten« genannt haben, und alle in dieser Abhandlung ausgeführten Ueberlegungen lassen sich darauf anwenden.

Wenn man nun annimmt, dass irgend eine im Moment der Krystallisation eingreifende Ursache bewirkt, dass die sich bildende Schaar eher einer symmetrischen als einer unsymmetrischen Structur zuneigt, so wird offenbar die schliesslich gebildete Schaar einer der sieben Classen (Seite 96) und vorzugsweise einer der ersten sechs, die allein Symmetrie-Axen oder -Ebenen besitzen, angehören. Die Betrachtung der krystallisirten Körper, künstlicher sowohl wie natürlicher, beweist *a posteriori*, dass es sich so verhält; und die geometrische Eintheilung der Schaaren entspricht auf's getreueste derjenigen, die man auf Grund langwieriger und sorgfältiger Untersuchung für die Krystallsysteme hat aufstellen müssen.

Aber welche Ursache bewirkt diese Neigung der von den Mittelpunkten der Krystallmolekel gebildeten Schaaren zur symmetrischen Regelmässigkeit? Diese Frage werde ich in einer anderen Abhandlung zu beantworten versuchen, deren Abfassung eben abgeschlossen ist und die hoffentlich demnächst gedruckt werden kann. Die wesentlichsten Ergebnisse dieser neuen Arbeit sind [128] der Société Philomathique in den Sitzungen vom 17. und vom 24. März, vom 19. Mai, vom 7. Juli und vom 17. November 1849 mitgetheilt worden (siehe die Zeitschrift *l'Institut*, Jahrgang 1849, in den Berichten über diese Sitzungen). Die Abhandlung, die der Leser eben beendigt hat, ebenso wie diejenige »Ueber die Polyeder von symmetrischer Form«, abgedruckt in Band XIV vom

Journal de Mathématiques des Herrn *Liouville*, bilden in gewisser Beziehung die Prolegomena der krystallographischen Theorie, welche dort entwickelt ist.

Ich beschränke mich hier darauf, die polyedrische oder wenn man will die polyatomige Form der Molekel des krystallisirten Körpers als das zu bezeichnen, was die Art der Symmetrie der entsprechenden krystallinischen Schaar bestimmt; dieselbe Ursache, in ihre weiteren Consequenzen verfolgt, erklärt in einfacher Weise die Gesammtheit der Erscheinungen der Hemiedrie, der Zwillingsbildung und des Dimorphismus. Wenn sie auch nicht völlig das noch so schwierige Problem des Dimorphismus löst, so deutet sie doch wenigstens an, auf welche Weise man suchen muss den Dimorphismus von der Isomerie zu unterscheiden, und sie lässt erkennen, dass, in gewissen Fällen, der eigentliche Dimorphismus, d. h. die Krystallisation identischer Molekel in zwei verschiedenen Krystallsystemen, je nach dem Zustand des umgebenden Mittels, wohl zulässig ist, wenn er auch den augenblicklich in der Mineralogie am meisten anerkannten Auffassungen widerspricht.

Ein Bericht über die vorliegende Abhandlung wurde von Herrn *Cauchy* in der Académie des Sciences am 6. August 1849*) verlesen (siehe Comptes rendus, Band XXIX, Seite 133).

Es sei mir am Schlusse gestattet, dem berühmten Berichterstatter zu danken für das Wohlwollen, mit dem er meine Arbeit gewürdigt hat.

---

*) Mitglieder der Commission: die Herren *Biot*, *Beudant*, *Dufrénoy*, *Regnault*, *Lamé*, Berichterstatter *Cauchy*.

Anmerkungen.

Die vorliegende *Bravais*'sche Arbeit ist im Journal de l'École Polytechnique (T. 19, XXXIII[e] cahier, p. 1—128) erschienen. In den Gesammelten krystallographischen Abhandlungen, welche unter dem Titel Études cristallographiques im Jahre 1866 herausgegeben wurden, bildet sie den zweiten Abschnitt. Es gingen ihr die kurze »Notiz über die symmetrischen Polyeder der Geometrie« und die »Abhandlung über die Polyeder von symmetrischer Form« (*Liouville*'s Journ. de math. **14.** p. 137—140 bezw. 141—180, 1849) voraus, deren Uebersetzung im 17. Heft der »Klassiker« veröffentlicht ist. Auch der neuen Uebersetzung liegt der Abdruck von 1866 zu Grunde.

Die Bedeutung der *Bravais*'schen krystallographischen Abhandlungen und speciell der jetzt vorliegenden ist nicht eine rein historische. Denn sie haben nicht nur mittelbar oder unmittelbar die Anregung zu der weiteren Entwickelung auf dem Gebiete der Theorien von der Krystallstructur gegeben, sondern sie müssen auch heute noch als ein sehr wesentlicher Bestandtheil dieser Theorien aufgefasst werden.

Bravais selbst hat nicht vergessen, seines Vorgängers *Frankenheim* Erwähnung zu thun, der thatsächlich die 14 Arten von Schaaren schon früher gefunden.

Was die Bezeichnungen anlangt, haben wir uns möglichst eng an das Original gehalten, daher auch die Ausdrücke binär, ternär, u. s. w. beibehalten. Nur in einem Falle erlaubten wir uns eine stärkere Abweichung, nämlich in Bezug auf die Punkte, welche bei *Bravais* »Sommets« heissen. Dem Vorgange von *Sohncke* folgend, haben wir diese Punkte als Gitterpunkte bezeichnet, obwohl wir das aus ihnen zusammengesetzte Gebilde (Assemblage) nicht Raumgitter, sondern, sowohl der geringeren Abweichung wie der Kürze wegen, »Schaar« nannten.

Im Einzelnen bedarf die Abhandlung kaum weiterer Erläuterungen, wenn es uns nur gelungen ist, den Sinn des Verfassers überall richtig wiederzugeben. Es giebt wohl wenige Arbeiten, die nach nahezu einem halben Jahrhundert die Frische und innere Abgeschlossenheit besitzen, welche die *Bravais*'sche Arbeit auszeichnen, die wenigsten können auch wie diese, trotz der an Umfang und Ergebnissen reichen späteren Forschung, mit so grossem Nutzen für das Verständniss des gegenwärtigen Standes unserer Kenntnisse gelesen werden*).

Herrn Dr. *M. Radaković* danken wir auch hier für seine freundliche Durchsicht des Manuscriptes.

Seite 7, Z. 23 v. o. steht im Original m statt m'.
Seite 15, Z. 6 v. u. steht im Original OR statt OB.
Seite 25, Z. 14 v. o. steht im Original (20) statt (23).
Seite 25, Z. 16 u. 18 v. u. steht im Original

$$\Delta = \frac{ab \sin\delta}{\sqrt{h^2a^2 + g^2b^2 + 2ghab\cos\delta}} = \frac{\sin\delta}{\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + \frac{g^2}{a^2} + \frac{2gh}{ab}\cos\delta}}$$

statt

$$\Delta = \frac{ab \sin\delta}{\sqrt{h^2a^2 + g^2b^2 - 2ghab\cos\delta}} = \frac{\sin\delta}{\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + \frac{g^2}{a^2} - \frac{2gh}{ab}\cos\delta}}.$$

Seite 43, Z. 7 v. o. steht im Original

$$\xi(nbpd' - pdn'b) + \eta\,(\ldots$$

statt

$$\xi(nbp'd - pdn'b) + \eta\,(\ldots$$

*) In Bezug auf die späteren Untersuchungen verweisen wir auf *L. Sohncke*, Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur (Leipzig 1879), Aufsätze von *Sohncke* und *L. Wulff* in der Zeitschrift für Krystallographie (z. B. *L. Sohncke*, Erweiterung der Theorie der Krystallstructur, Ztschr. f. Kryst. **14**, 426, 1888), Arbeiten von *E. v. Fedorow* (Ztschr. f. Kryst.) und das Buch von *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig 1891.

Seite 44, Z. 1 u. 2 v. o. steht im Original

$$x = g,\ y = -h$$

statt

$$x = h,\ y = -g\,.$$

Seite 47, Z. 15 v. u. steht im Original AO' statt $A'O$.

Seite 49, Z. 3 v. u. steht im Original $p'n'm''$ statt $pn'm''$.

Seite 57, Z. 10 v. o. steht im Original

$$Z = \cdots\cdots + (mn'')z\,,$$

statt

$$Z = \cdots\cdots + (mn')z\,.$$

Seite 72, Z. 13 v. u. steht im Original aD statt AD.

Seite 114, Z. 19 v. o. steht im Original a statt α.

Seite 120, Z. 12 v. u. steht im Original $180 - \mu$ statt $180 - \varpi$.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Fig. 4.

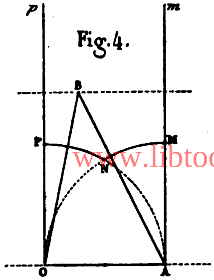


Fig. 5.

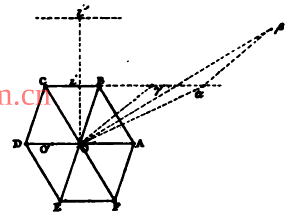


Fig. 6.

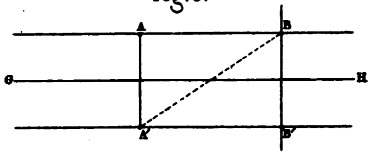


Fig. 11.

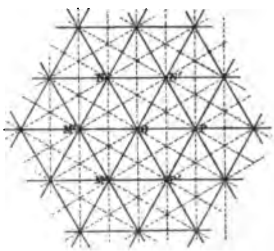
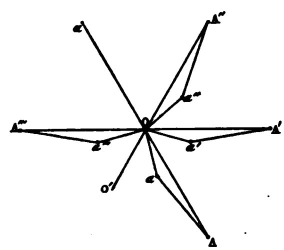


Fig. 12.



ig. 18.

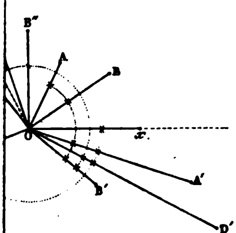
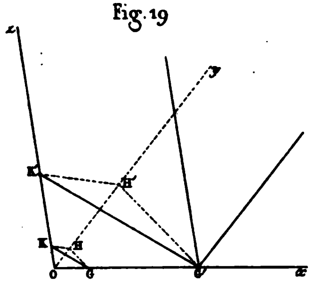


Fig. 19



Nr. 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'sch Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. W . Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (4 ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über onen zweier Variabler mit vier Perioden, welche di nd der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. gegeben von H. Weber. Aus dem Französisch A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie anscendenten erster Ordnung. (1847.) Herausg er. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchunger

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdots {}^3+\cdots\cdots$$

(1826.) Herausge ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler** che Trigonometrie. Grun . und allgemeine dem Französischen n von E. Hammer.

» 7