

Stanford University Libraries



www.libtool.com.cn

6105 027 416 507

ARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO

www.indd.com.cn

ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS

VERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI

D UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB

TY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · S

S · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN

ARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO

ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS

VERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI

D UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB

TY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · S

S · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN

ARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO

ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER



www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN

NEUNTER BAND.

ARLANDINGEN

GEV. 1848

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



NEUNTER BAND.
MIT ZEHN TAFELN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

1864.

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE
DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



SECHSTER BAND.
MIT ZEHN TAFELN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

1864.

7338511713114

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
50 EAST LAKE STREET
CHICAGO, ILL. 60607-7171

PHYSICAL CHEMISTRY OF POLYMERS
BY
J. H. DILLIARD

LIBRARY
ROMA, ORNATE CHIARELLI
YT29EVNU

137937

INHALT.

V. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte, erster Theil	S. 4
V. G. HANKEL, Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes	- 53
A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnungen der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abtheilung	- 94
METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris	- 499
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen	- 574

www.libtool.com.cn

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. H A N K E L.

FÜNFTE ABHANDLUNG.

MAASSBESTIMMUNGEN DER ELEKTROMOTORISCHEN
KRÄFTE

ERSTER THEIL.

Eine genaue experimentelle Untersuchung führte Volta sehr bald zu der Ansicht, dass die von Galvani durch metallische Belegungen in den Froschpräparaten hervorgerufenen Zuckungen nicht, wie letzterer annahm, von einer eigenthümlichen thierischen Elektricität herrührten, sondern vielmehr den Einwirkungen einer mittelst der genannten Belegungen künstlich erzeugten Elektricität ihren Ursprung verdanken. Infolge des Ganges seiner Forschungen war Volta anfänglich sehr geneigt, den Vorgang oder die Kraft, welche hiebei das elektrische Fluidum in Bewegung setzt, in die Berührung der Metalle mit den feuchten Leitern zu verlegen; indess überzeugten ihn bald weitere Versuche, dass bei der gewöhnlichen Erregung der galvanischen Reize mittelst zweier verschiedener Metalle die erzielte Wirkung weit mehr dem wechselseitigen Contacte dieser Metalle als ihrer beiderseitigen Berührung mit den feuchten Leitern beizumessen sei, obwohl er auch bei Berührung von Metallen mit feuchten Leitern elektrische Erregungen, und zwar öfter in hohem Grade, nachzuweisen vermochte.

Seit jener Zeit sind nun seitens der Physiker vielfache Anstrengungen zur Ermittlung der bei Berührung der verschiedenen Metalle unter einander und mit Flüssigkeiten eintretenden elektrischen Erregungen gemacht worden. Betrachten wir jedoch die Gesammtheit aller dieser Untersuchungen, so kann uns das Mangelhafte und Unsichere der meisten derselben nicht entgehen; abgesehen von dem Fehlen genauer Zahlenwerthe, haben fast alle Experimentatoren sich nicht einmal Rechenschaft gegeben, durch welche Kräfte eigentlich der beobachtete Ausschlag des von ihnen zur Prüfung angewandten Elektrometers hervorgerufen wurde.

Der eben angedeutete Zustand der Lehre von der Erregung der Elektricität durch Berührung heterogener Leiter machte es möglich, dass man den Ursprung der Elektricität der Volta'schen Säule gar nicht mehr in der Berührung der verschiedenen Leiter, sondern allein in dem

chemischen Prozesse suchen zu müssen glaubte. Wird nun auch gegenwärtig von den meisten Physikern diese Ansicht nicht für richtig gehalten, so vermochte man doch bis jetzt nicht, über die elektrischen Erregungen, welche infolge der Berührung der verschiedenen zu einer galvanischen Kette oder Volta'schen Säule zusammengestellten Leiter entstehen, eine bestimmte Nachweisung zu geben. Die Wichtigkeit aber, welche eine genaue Kenntniss der elektromotorischen Kräfte nicht nur für die Physik, sondern auch für die Chemie hat, fordert dringend, dass die an diesem Punkte der Elektrizitätslehre seit länger als einem halben Jahrhunderte vorhandene grosse Lücke endlich ausgefüllt werde. Wenn bisher nicht mehr Versuche nach dieser Richtung hin unternommen oder veröffentlicht worden sind, so dürfte der Grund davon nicht in einer Verkenntung ihrer Wichtigkeit, sondern vielmehr in den mit genauen Bestimmungen jener Kräfte verknüpften ausserordentlichen Schwierigkeiten zu suchen sein, die hauptsächlich in der Mangelhaftigkeit der zur Messung sehr schwacher elektrischer Spannungen benutzten Apparate begründet waren.

Das Nachfolgende wird den Beweis liefern, dass das von mir construirte und bereits früher beschriebene Elektrometer in Verbindung mit einer geeigneten condensatorischen Vorrichtung die oben erwähnten Hindernisse beseitigt hat, so dass die Bestimmung der elektromotorischen Kräfte in einem weiten, nur durch äussere, der Elektrizitätslehre fremde Hindernisse (Mangel brauchbarer Oberflächen bei vielen Metallen) beschränkten Umfange möglich geworden ist.

Da man bei den früheren bloss qualitativen Bestimmungen sich mit der Beobachtung eines zufällig vorhandenen Zustandes elektrischer Erregungen begnügte, ohne sich, wie bereits bemerkt, über den eigentlichen Ursprung derselben vollständige Rechenschaft zu geben, so mussten die meisten im Laufe der Zeit an den Oberflächen der Metalle und der Flüssigkeiten eintretenden Veränderungen ungeachtet ihrer Wichtigkeit für das Verständniss gewisser Vorgänge ihrem genaueren Verlaufe nach unbekannt bleiben. Ich habe daher ausser den Werthen der elektromotorischen Kräfte zwischen Metallen und Flüssigkeiten im Augenblicke der Berührung auch die in nicht zu langer Zeit in diesen Kräften eintretenden Veränderungen der Messung unterworfen.

Bei dem mangelhaften Zustande fast aller früheren Untersuchungen über die elektromotorischen Kräfte würde es ein gar zu zeitraubendes

und meistens sehr unfruchtbares Geschäft sein, das Geschichtliche dieses Theiles der Elektrizitätslehre hier ins Einzelne zu verfolgen; ich gehe daher sogleich zu einer Mittheilung meiner Beobachtungen über, und werde alle bereits vorliegenden brauchbaren oder in gewisser Beziehung wichtigen Angaben an den betreffenden Orten namhaft machen.

I. Vorrichtungen zur Beobachtung und Messung der elektromotorischen Kräfte.

1. Elektrometer.

Zur Messung der elektrischen Spannungen diente gewöhnlich das von mir construirte, in den Berichten der mathematisch-physischen Classe der Gesellschaft für 1850 S. 71 ff. und in Poggendorff's Annalen Bd. 84. S. 28 beschriebene und in meiner Abhandlung über die Messung der atmosphärischen Elektrizität (Bd. V. S. 393 der Abhandlungen der Gesellschaft) mit *A* bezeichnete Elektrometer; nur in speciellen Fällen ist auch das analog eingerichtete und in der letzt-erwähnten Abhandlung S. 403 mit *C* bezeichnete Elektrometer angewandt worden.

Es mag hier genügen daran zu erinnern, dass beide Elektrometer im Allgemeinen aus einem Goldblättchen bestehen, welches zwischen zwei isolirten und mittelst Mikrometerschrauben verstellbaren Messing-scheiben hängt. Diese Scheiben stehen mit den beiden Polen einer in ihrer Mitte zur Erde abgeleiteten Volta'schen Säule aus Kupfer, Zink und Wasser in Verbindung, empfangen also entgegengesetzte gleich starke Elektricitäten und streben infolge dessen das zwischen ihnen hängende Goldblättchen, sobald es elektrisch wird, in gleichem Sinne zu bewegen. Die Grösse der Ablenkung dieses Blättchens wird durch ein mit Ocularmikrometer versehenes Mikroskop genau gemessen.

Mittelst eines zwischen die Pole der Säule und die Scheiben eingeschalteten Commutators lassen sich die beiden Elektricitäten in den Scheiben verwechseln, wodurch bei unveränderter elektrischer Spannung im Goldblättchen letzteres einen gleich grossen Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite zeigt. Beobachtet man nun nicht die einfache Ablenkung des Goldblättchens aus der Ruhelage, sondern die Differenz der

Skalentheile des Ocularmikrometers, auf welche das Goldblättchen in den beiden entgegengesetzten Lagen des Commutators sich einstellt, so hat man (vgl. Bd. V. S. 417) den Vortheil, 1) dass man von der Ruhelage des Blättchens unabhängig ist, 2) dass die gemessenen Ausschläge doppelt so gross ausfallen, und 3) dass man dieselben durch wiederholtes Umlegen des Commutators beliebig oft messen kann, falls die Spannung im Goldblättchen constant bleibt. Eigentlich ist die Hälfte des Unterschiedes der beiden extremen Stellungen des Goldblättchens beim Umlegen des Commutators die wahre Ablenkung; da es jedoch im Folgenden stets nur auf relative Werthe ankommt, so sind, um Irrungen zu vermeiden, überall, wo beobachtete Ausschläge erwähnt werden, niemals die Ablenkungen selbst, sondern stets die doppelten Werthe derselben, also die vom Goldblättchen beim Umlegen des Commutators durchlaufenen Skalentheile angeführt worden.

Infolge der Berührung heterogener Leiter kann das Goldblättchen des Elektrometers, wenn es mit der Erde in Verbindung steht, niemals unelektrisch sein; im Allgemeinen wird also mein Elektrometer beim Umlegen des Commutators einen geringen Ausschlag geben, der aber in keiner Weise den Gebrauch des Instrumentes beeinträchtigt, sobald man denselben nur stets gehörig in Rechnung zieht.*)

*) Jedenfalls dürfte es die Bequemlichkeit erhöhen, wenn dieser ursprünglich in dem Elektrometer vorhandene Ausschlag einen möglichst geringen Werth besitzt; ich will daher in der Kürze angeben, wie es am schnellsten gelingt, ihn möglichst klein zu machen, oder falls es sein müsste, selbst ganz zum Verschwinden zu bringen.

Man stelle zunächst das Goldblättchen genau in die Mitte der beiden Scheiben zwischen denen es hängt, oder genauer ausgedrückt, so, dass es von den zu beiden Seiten befindlichen elektrischen Scheiben eine gleiche Einwirkung erleidet, wenn dieselben mit einer und derselben Elektrizitätsquelle in Verbindung gesetzt werden.

Wie schon Bd. V. S. 414 dieser Abhandlungen erwähnt, lässt sich die eben geforderte Stellung der beiden Scheiben leicht finden, wenn man dieselben durch ihre Zuleitungsdrähte mit der Erde, das Goldblättchen aber mit dem einen Pole einer Volta'schen Säule in Verbindung setzt, und dann jene Scheiben mittelst der Mikrometerschrauben so lange verschiebt, bis die Lage des Goldblättchens bei seiner Verbindung mit dem Säulenpole dieselbe bleibt, wie bei seiner Ableitung zum Erdboden. Indess gelingt es öfter nicht, die Lage des Goldblättchens absolut unverändert zu erhalten; es bleiben bisweilen je nach der Stärke der dem Goldblättchen mitgetheilten Spannung kleine Bewegungen übrig, deren Grösse jedoch noch nicht $\frac{1}{10}$ Skalentheil erreicht und die aus einer elektrischen Verschiedenheit der beiden Scheiben hervorgehen. Aber auch in solchen Fällen lässt sich durch den zuvor angegebenen Versuch der gleiche Abstand der Scheiben finden; man braucht nur ab-

Sollen längere Zeit fortgesetzte Beobachtungen mit einander verglichen werden, so müssen die beobachteten Ausschläge des Goldblättchens auf gleiche Empfindlichkeit des Elektrometers reducirt werden.

wechselnd den negativen und den positiven Pol einer Säule zu dem Goldblättchen zu leiten und die Scheiben so zu stellen, dass die Ausschläge des Goldblättchens bei Verbindung mit beiden Polen in gleicher Grösse nach entgegengesetzten Seiten erfolgen.

Ist auf vorstehende Weise die Stellung der beiden Scheiben berichtigt worden, so verbindet man die Scheiben durch Vermittelung eines Commutators mit den Polen einer in ihrer Mitte zur Erde abgeleiteten Säule und prüft dann, ob die Pole gleiche Spannungen besitzen, indem man abwechselnd den einen oder den anderen derselben mit dem Goldblättchen in Verbindung setzt. Die Gleichheit der Spannungen an beiden Polen ist bewiesen, wenn die durch Umlegen des Commutators bei Verbindung beider Pole mit dem Goldblättchen entstehenden Ausschläge dieselbe Grösse erreichen. Hat man die Elemente der Säule möglichst gleichartig ausgewählt, so wird die Ungleichheit der Spannungen in den beiden Hälften gewöhnlich nur gering sein; sollte sie indess wider Erwarten zu gross ausfallen, so schwächt man den stärkeren Pol durch Fortnehmen eines oder einiger Elemente, oder durch Ersetzen eines Zinkkupfer-elementes durch ein schwächeres, z. B. aus Zinn und Kupfer gebildetes Element.

Sind auf diese Weise die beiden Pole der Säule gleich stark gemacht, so würde, falls das Goldblättchen absolut unelektrisch wäre, durch die Verbindung der Pole mit den Scheiben des Elektrometers keine Bewegung des Goldblättchens eintreten können. Es ist zwar die Vertheilung der Elektrizität auf den Scheiben eine andere, wenn sie mit den Polen der Säule in Verbindung stehen, als wenn auf ihnen bloss durch Vertheilung von Seiten des Goldblättchens eine elektrische Schicht erzeugt wird; indess macht bei der Regelmässigkeit der Gestalt der Scheiben und bei der symmetrischen Anordnung aller Theile auf beiden Seiten des Goldblättchens eine gleiche Vertheilungswirkung seitens dieses letzteren auf die Scheiben auch eine gleiche Einwirkung der durch die Pole der Säule gleich stark elektrisirten Scheiben auf das Goldblättchen wahrscheinlich.

Wie schon oben bemerkt, ist nun aber das Goldblättchen infolge der in seiner Ableitung zur Erde liegenden Berührungen heterogener Leiter stets elektrisch; infolge dessen wird daher auch nach Regulirung der Scheibenabstände und der Intensitäten der Säulenpole beim Umlegen des Commutators stets ein kleiner Ausschlag des mit der Erde in Verbindung stehenden Goldblättchens sich zeigen. Ist er hinreichend gering, so lässt man ihn ruhig fortbestehen und zieht seinen Betrag bei jeder Messung in Rechnung; sollte indess seine Grösse unbequem sein, so kann man die betreffende Correction durch eine geringe Aenderung in der Stärke eines der Säulenpole nahe oder vollständig beseitigen. Man braucht nämlich nur denjenigen Säulenpol, welcher mit der im Goldblättchen vorhandenen Spannung gleichnamig ist, angemessen ein wenig zu verstärken, oder, was denselben Erfolg hat, den anderen Pol entsprechend zu schwächen; der stärkere Pol ruft dann durch seine kräftigere Vertheilungswirkung auf dem Goldblättchen eine der ursprünglich in demselben vorhandenen Spannung entgegengesetzte Elektrizität hervor und neutralisirt dadurch jene. Da beide Scheiben gleichweit von dem Goldblättchen abstehen, so hat jede derselben, wenn sie mit

Bei lange gestandenen und stark oxydirten Kupfer- und Zinkelementen entstehen nämlich durch Temperaturschwankungen Aenderungen in den Spannungen der mit den Scheiben verbundenen Pole der Säule. Bleibt die Säule ruhig und ungestört an ihrem Orte, so sind im Sommer bei nicht beträchtlichen Schwankungen der Zimmertemperatur diese Aenderungen wenig erheblich. Im Laufe vieler Wochen verhielten sich z. B. bei meiner Säule, deren Elemente bereits seit geraumer Zeit im Wasser standen, die extremen Werthe der Spannungen wie 0,95:1,06; im Laufe eines Tages liegen unter den bezeichneten Umständen diese Aenderungen zwischen sehr viel engeren Grenzen. Dagegen müssen im Winter bei starken Schwankungen der Zimmertemperatur jene Aenderungen grösser werden; ist z. B. während der Nacht das Zimmer stark erkaltet, und man beobachtet vom Augenblicke des Einheizens an, so kann im Laufe zweier Stunden, wo das Wasser in den Elementen nahe die Temperatur des warmen Zimmers angenommen hat, die Spannung in den Polen der Säule selbst in dem oben angegebenen Verhältnisse von 0,95:1,06 steigen. Nach dem im V. Bande dieser Ab-

dem stärkeren Pole verbunden wird, dasselbe Uebergewicht über die andere mit dem schwächeren Pole verbundene, und erzeugt also dieselbe Vertheilung im Goldblättchen, so dass bei jeder der beiden Lagen des Commutators die ursprüngliche Elektricität des Goldblättchens neutralisirt wird. Es sind freilich jetzt die beiden Spannungen in den Scheiben einander nicht mehr völlig gleich; indess kann das Goldblättchen beim Umlagen des Commutators doch keine Bewegung zeigen, weil es eben in jeder Lage des Commutators selbst keine Elektricität besitzt.

Es gibt noch ein anderes Verfahren, um bei gleichem Abstände und gleichstarker Ladung der Scheiben die infolge der Ableitung des Goldblättchens zur Erde erzeugte Elektricität zu neutralisiren. Dasselbe besteht in der Einschaltung eines galvanischen Elementes von einer jener Elektricität gleichen, aber entgegengesetzten Spannung. Indess können durch unvorsichtiges Schliessen desselben leicht Schwankungen eintreten, weshalb ich das erste Verfahren für bequemer und sicherer halte.

Wenn bei den folgenden Messungen, wo das Elektrometer meistens eine solche Empfindlichkeit hatte, dass ein Element aus Zink, Kupfer und Wasser bei unmittelbarer Verbindung seiner Pole mit dem Goldblättchen einen Ausschlag von $1\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{4}$ Skalentheile erzeugte, bei directer Ableitung des Goldblättchens zur Erde durch Umlagen des Commutators keine grössere Bewegung des Goldblättchens als von 0,15 Skalentheilen eintrat, so habe ich dieselbe gewöhnlich bestehen lassen und bei jeder Messung in Rechnung gezogen. Uebrigens wird im Verlaufe eines Tages theils durch eintretende geringe Aenderungen in der Stärke der Säulenpole, theils durch schwache Aenderungen in der Lage des Goldblättchens infolge von Veränderungen der Luftströmungen im Inneren des Gehäuses jener Ausschlag etwas wachsen oder abnehmen weshalb es zweckmässig ist, ihn vor jeder Versuchsreihe von Neuem zu ermitteln.

handlungen S. 428 angegebenen Verfahren erhält man die nöthigen Reductionscoefficienten durch das Verhältniss der Quadratwurzeln aus dem Mittel der Ausschläge, welche bei successiver Verbindung der beiden Pole der Säule mit dem Goldblättchen des Elektrometers beobachtet werden.

Um bei den folgenden Messungen für das Elektrometer einen festen Standpunkt zu gewinnen, war das Instrument auf einem Fensterbrette aufgestellt, während die Volta'sche Säule, deren Pole den Scheiben ihre Spannung mittheilten, sich in einer Ecke des Zimmers befand. Luftzüge und Bestrahlungen durch Sonnenlicht wurden durch Doppelfenster und grosse Papierschirme vom Elektrometer abgehalten; die Säule konnte niemals davon getroffen werden.

Schliesslich sei hier noch bemerkt, dass zur Vermeidung von Vertheilungswirkungen auf das Goldblättchen, die Scheiben und deren Zuleitungsdrähte sowohl das ganze gläserne Gehäuse als auch die vom Commutator nach den Scheiben führenden Drähte durch passende mit der Erde in leitender Verbindung stehende Metallschirme bedeckt oder von denselben eingeschlossen waren; bloss der mit Schellack umkleidete Träger des Goldblättchens ragte oben hervor.

2. Condensatorische Vorrichtungen.

Der Condensator war früher wegen der Unsicherheit seiner Angaben sehr in Verruf; das Nachfolgende wird jedoch zeigen, dass er bei zweckmässiger Einrichtung und Behandlung ein vollkommen sicheres und zuverlässiges Messinstrument werden kann.

Mein zur directen Messung dienender Condensator bestand aus zwei runden horizontalen Metallplatten gewöhnlich von 95^{mm} Durchmesser, deren untere fest lag, während die obere mittelst einer besonderen Vorrichtung der unteren beliebig genähert und bis auf eine gewisse Weite (bis 330^{mm}) wieder von ihr entfernt werden konnte. Die einander zugewandten Seiten der Platten waren möglichst eben geschliffen und weder mit einem Firniss noch mit Siegelacktröpfchen versehen; die isolirende Schicht zwischen ihnen sollte, wie dies auch bereits bei dem letzten von Kohlrausch construirten Condensator*) der

*) Poggendorff's Annal. Bd. 88. S. 464.

Fall war, allein die atmosphärische Luft bilden, weil jeder Firniß zu Ladungen Veranlassung gegeben und vor Allem die Herstellung bestimmter Zustände der Oberfläche gehindert haben würde. Die beiden Flächen jeder Platte waren ferner einander nach Möglichkeit parallel gemacht.

Um für die untere Platte einen sicheren und nöthigenfalls zur Isolirung geeigneten Träger zu gewinnen, wurde ein weiter Glaszylinder auf ein mit drei Stellschrauben versehenes Brett gekittet, auf seinem oberen Rande drei $\frac{1}{4}$ Zoll hohe Schellackstäbchen angebracht, und auf dieselben eine Kupferplatte von der zuvor beschriebenen Form gelegt. Da es wünschenswerth war, dass diese Platte auf dem Träger unverrückbar fest sass, so befeuchtete ich vor ihrem Auflegen die Spitzen der drei Schellackstäbchen mit etwas absolutem Alkohol, was ein hinreichendes Ankleben der Platte zur Folge hatte. Durch die Stellschrauben liess sich die obere Fläche der Kupferplatte mittelst einer sehr empfindlichen Wasserwage (1 Theilstrich = 5 Secunden) horizontal stellen. Um durch etwa nöthig werdende seitliche Verschiebungen des ganzen Trägers die Horizontalität der Kupferplatte nicht wieder zu stören, war derselbe auf die horizontale ebene Fläche einer Serpentinplatte gestellt. Uebrigens diente nicht die so eben erwähnte festgeklebte Kupferplatte als untere Condensatorplatte, sondern es wurde auf diese Kupferplatte erst die eigentliche Condensatorplatte gelegt, und falls ihre Flächen nicht genau parallel waren, die obere Fläche jedes Mal mittelst der Wasserwage genau horizontal gerichtet. An der Kupferplatte befand sich ein kleiner Fortsatz, von welchem aus ein Draht die Verbindung mit der Erde oder mit dem Goldblättchen eines Elektrometers vermittelt. Um eine Ladung der Wände des gläsernen Cylinders in den Fällen, wo die untere Platte isolirt sein musste, zu verbinden, wurde die Seitenfläche des Cylinders mit einer Hülle aus Stanniol umgeben, diese Hülle bis nahe unter die untere Fläche der Kupferplatte geschoben und mittelst eines Drahtes zur Erde abgeleitet.

Bei der Bestimmung des elektrischen Verhaltens des Quecksilbers ward unterhalb der oberen Condensatorplatte eine flache eiserne Schale von 96^{mm} Durchmesser aufgestellt und in diese das Quecksilber gegossen.

Sollte die untere Condensatorfläche aber aus Wasser oder einer Salzlösung gebildet werden, so wurde der zuvor beschriebene Träger von der Serpentinplatte entfernt und an seine Stelle eine andere Vor-

richtung gebracht, die aus einem Trichter bestand, dessen Umfang am oberen Rande genau kreisrund und bis zu einem äusseren Durchmesser von 95^{mm} abgeschliffen war. Von dem unteren engeren Theile desselben ging ein zweimal rechtwinklig gebogenes Glasrohr erst seitwärts und dann aufwärts, und trug ungefähr in der Höhe des Randes des Trichters eine etwas weitere Glasröhre. In jenem Trichter befand sich die Flüssigkeit, z. B. das Wasser, deren Spannung gemessen werden sollte, während die zur Ableitung dienenden Metalle in die Flüssigkeit der seitlichen Glasröhre eingetaucht wurden. Der eben geschliffene Rand des Trichters wurde mittelst einer Wasserwage horizontal gestellt und dann der Trichter bis zum Rande gefüllt.

Um die Höhe der Flüssigkeit besser zu erkennen, diente folgende kleine Vorrichtung. Auf den Rand des Trichters wurde eine in ihrer Mitte durchbohrte ebene Glasplatte gelegt; diese Durchbohrung war aber von unten her durch Anlegen einer kleinen ebenen Glasplatte von etwas grösserem Durchmesser als die Oeffnung wieder geschlossen; die obere Fläche dieser kleinen Glasplatte lag folglich genau im Niveau des Trichterrandes. Der Trichter ruhte in einem Holzgestelle; an diesem befand sich ein zwischen Spitzen beweglicher Arm, der an seinem gerade bis über die Mitte des Trichters reichenden Ende eine mit Platinspitze versehene Schraube trug. Der Arm besass ferner einen Anschlag, der ihn in horizontaler Lage über der Glasplatte festhielt. In dieser Lage wurde die Schraube so gestellt, dass ihre Spitze die obere Fläche der kleinen Glasplatte so eben berührte, darauf der Arm zurückgeschlagen, die Glasplatte entfernt, der Arm wieder vorgelegt und endlich der Trichter so weit mit Flüssigkeit gefüllt, bis deren Oberfläche die Spitze erreichte.

Die obere bewegliche Platte der Condensatorvorrichtung bestand aus Kupfer und trug an ihrem Rande drei unter gleichen Winkeln von einander abstehende, 18^{mm} lange Fortsätze, die an ihren Enden in verticaler Richtung durchbohrt waren. In diese Durchbohrungen passten kleine Schrauben, die sich an den unteren Enden dreier 60^{mm} langer, der besseren Isolirung wegen mit Schellack überzogener Glasstäbchen befanden. Von den oberen Enden dieser Glasstäbchen gingen drei dünne, 1,2 Meter lange Kupferdrähte vertical aufwärts nach dem Rande einer starken Zinkplatte; ein Heben und Senken dieser letzteren hatte also die entsprechende Bewegung der Condensatorplatte zur Folge.

Drei von dem Rande der Zinkplatte ausgehende starke Stäbe vereinigten sich in einiger Höhe über ihrem Mittelpunkte in einem Ringe, worin das Ende einer seidenen Schnur befestigt war. Diese Schnur lief zuerst über eine an der Wölbung des Fensters, auf dessen Brett der ganze Apparat stand, angebrachte feste Rolle hinweg. ging dann vertical abwärts, schlug sich unten nahe über dem Fensterbrette nochmals über eine Rolle und wickelte sich zuletzt auf eine grosse neben dem Elektrometer am Fensterbrette festgeschraubte Scheibe oder Rolle auf. Die Axe dieser Scheibe trug eine Kurbel, mittelst deren die Scheibe behufs des Hebens und Senkens der Condensatorplatte umgedreht wurde. Der Umfang der Scheibe war so gross, dass es keiner vollen Umdrehung bedurfte, um die obere Condensatorplatte bis 330^{mm} von der unteren zu entfernen, wenn sie zuvor mit derselben fast in Berührung gewesen war. Sollte die obere Condensatorplatte in einem Abstände von 330^{mm} über der unteren festgehalten werden, so geschah dies durch einen über die Kurbel gelegten Haken; um aber die obere Platte ganz in der Nähe der unteren in eine genau gemessene Entfernung einstellen zu können, diente ein am Umfange der Scheibe angebrachter Stift, der sich gegen eine Schraube legte. Durch Vor- und Zurückdrehen der Schraube erhielt der Stift und dadurch die Scheibe eine so geringe Bewegung, dass sich die obere Condensatorplatte ohne Schwierigkeit in beliebig kleinem Abstände von der unteren festhalten liess.

Um die obere Condensatorplatte der unteren parallel zu stellen, waren in der starken Zinkplatte drei zweckmässig eingerichtete Schrauben angebracht, welche die drei Kupferdrähte trugen, und ohne Torsion zu erzeugen ein geringes Heben und Senken derselben gestatteten. Ein Drehen und Schwanken der Platte beim Auf- und Niedergehen ward dadurch vermieden, dass die drei Kupferdrähte unterhalb der Zinkplatte (1,1 Meter oberhalb der unteren Condensatorplatte) durch drei den Durchbohrungen der Fortsätze der Kupferplatte genau entsprechende Oeffnungen in einer starken am Fensterrahmen befestigten Metallplatte hindurchgingen. Diese Metallplatte erhielt ebenso wie die obere Zinkplatte und dadurch auch die an ihr befestigten Kupferdrähte eine metallische Ableitung zur Erde, um jeder Ansammlung von Electricität vorzubeugen. Ausserdem war die zum Heben und Senken dienende Schnur, sowohl in ihrem verticalen als auch im unteren horizontalen Theile nach der Seite des Condensators und Elektrometers hin

ist einem cylinderförmig gebogenen und mit der Erde in leitender Verbindung stehenden Bleche bedeckt.

Zur Messung der Abstände der beiden Condensatorplatten bei ihrer Annäherung diente ein mit Ocularmikrometer versehenes Mikroskop, das vor denselben so aufgestellt war, dass die scharfen Ränder der beiden Platten deutlich auf den Theilstrichen erschienen. Ein Theilstrich des Ocularmikrometers entsprach einem Abstände von $0,094^{\text{mm}}$, also nahe $1/10^{\text{mm}}$. Gewöhnlich wurden die Platten in einem Abstände von 10 Theilstrichen einander gegenübergestellt, und dabei stets dieselben Theilstriche gewählt, was auch bei geringen Aenderungen in der Höhe der oberen Condensatorplatte sich leicht ausführen liess, weil das Mikroskop durch eine Schraube im Ocular verschoben werden konnte. Es wurde absichtlich nur eine schwache Vergrösserung angewandt, um das Mikroskop der Platte nicht zu sehr nähern zu müssen; das Objectiv stand 100^{mm} vom Rande der Platten ab. Da die Einstellung der scharfen Bilder stets auf volle Theilstriche geschah, so war kein Gesamtfehler von $\frac{1}{10}$ Theilstrich möglich; der Abstand der Platten war also stets bis auf $0,01^{\text{mm}}$ genau bekannt.

Um nun die obere Condensatorplatte in continuirlicher Weise mit dem Goldblättchen des Elektrometers zu verbinden, war auf die Mitte der Platte ein rundes Messingstück gesetzt, das nach oben eine in eine Schraubenklemme endigende cylindrische Verlängerung trug. Andererseits ging von dem Träger des Goldblättchens im Elektrometer ein mässig starker Platindraht horizontal aus, und war in einigem Abstände vom Träger nochmals durch eine auf dem Fensterbrette befestigte isolirende Vorrichtung gestützt. Mit dem nach dem Condensator hingewandten Ende dieses Drahtes war das eine Ende eines sehr dünnen, zu einer lockeren und mässig weiten Spirale gewundenen Platindrahtes verknüpft, während dessen anderes Ende in der zuvor erwähnten Schraubenklemme des auf der Condensatorplatte stehenden Messingstückes fest sass. Diese Spirale musste selbstverständlich eine angemessene Länge erhalten, um die Bewegung der oberen Condensatorplatte nicht zu hindern.

Der Draht in der Nähe des Elektrometers war absichtlich aus Platin gewählt, um stets eine metallische Oberfläche darzubieten, da an ihm die Ableitung des Goldblättchens und der mit ihm zusammenhängenden oberen Condensatorplatte zur Erde erfolgte. Diese Ableitung geschah

aber nicht durch Berührung des Drahtes mit der Hand, sondern durch einen nicht allzudünnen, mit der Erde in ununterbrochener Verbindung stehenden Kupferdraht, der an seinem oberen Ende ein Stück Platindraht trug. Der Kupferdraht war so lang, dass die ihn führende Hand nicht in die Nähe der oberen Verbindungsdrähte und des Condensators kam, sondern fast ganz hinter Schirmen verdeckt blieb. Ward das obere Platinstück dieses Drahtes an den Platindraht des Elektrometers angelegt, so trat eine vollständige Entladung aller dem Goldblättchen auf anderen Wegen als durch die Berührung der heterogenen Leiter in der Ableitung zugeführten Elektrizität ein.

Während Kohlrausch in der oben bereits citirten Abhandlung über seinen Condensator noch bemerkt, dass in demselben infolge des Anschraubens der Platten auf geringe Zeit eine Einwirkung zu Gunsten einer der beiden Elektrizitäten eingetreten, welche die nächsten Messungen beeinträchtigt habe; dass es ferner nach längerem Gebrauche doch nöthig geworden sei, die Oberfläche des Schellacks am Träger mittelst einer durchs Löthrohr angeblasenen Flamme zu säubern: so ist bei meinem Condensator keine dieser störenden Ursachen mehr vorhanden, und lässt sich die Vertauschung der unteren Condensatorplatte, die ja nur auf der oben erwähnten auf den Schellackstäbchen festgekitteten Kupferplatte liegt, gegen eine andere mit grösster Leichtigkeit und ohne alle Uebelstände ausführen.

Die Aufstellung eines Condensators geschah übrigens nicht etwa deshalb, weil mein Elektrometer nicht die hinreichende Empfindlichkeit besessen hätte, sondern ward vielmehr durch gewisse gleich im nächsten Abschnitte mitzutheilende Messungen, welche allein mit seiner Hilfe ausführbar sind, gefordert. Hätte es sich z. B. nur um die Messung der Spannung an den Polen eines aus Zink, Kupfer und Wasser gebildeten Elementes gehandelt, so würde ich durch Annäherung der Scheiben des Elektrometers an das Goldblättchen und durch Vermehrung der Elemente der Volta'schen Säule leicht ohne Condensator vielfach grössere Ausschläge haben erzielen können, als ich sie unter Anwendung des Condensators aus derselben Quelle bei der gewöhnlich benutzten Empfindlichkeit des Elektrometers erhielt. Man muss nämlich beachten, dass die in der oberen Platte bei Annäherung an die untere gebundene, und nach dem Aufwärtsziehen in ihr frei werdende Elektrizität sich über die obere Platte, über das auf ihr befindliche Messingstück, über den

gen dünnen spiralförmig gewundenen und über den dickeren Platinblech, sowie endlich über das Messingstäbchen und das Goldblättchen des Elektrometers verbreitete, was die auf letzterem auftretende Spannung natürlich sehr verminderte. Wenn z. B. die untere Condensatorplatte mit dem einen Pole eines galvanischen Elementes verbunden wurde, dessen anderer Pol zur Erde geführt war, wenn ferner die obere Condensatorplatte, während sie in einem Abstände von 10 Theilstrichen über der unteren schwebte, zur Erde abgeleitet, dann wieder isolirt und um 330^{mm} gehoben wurde: so betrug je nach der Länge und Form der Platinspirale der Ausschlag im Elektrometer nur das 2 $\frac{1}{4}$ bis 4fache von demjenigen, welcher bei unmittelbarer Verbindung jenes Poles des galvanischen Elementes mit dem Elektrometer entstand.

Aus dem zuletzt Gesagten erhellt, dass das Elektrometer, auch wenn die untere Condensatorplatte stets mit derselben Elektricitätsquelle in Verbindung steht, doch sehr verschiedene Ausschläge zeigen kann, sobald sich die mit der oberen Condensatorplatte zusammengehörige Leiteroberfläche ändert. Bei vergleichenden Versuchen ist hier sorgfältig darauf zu achten, dass namentlich die Form der Spirale dieselbe bleibt; ist letztere vielleicht durch zufälliges Zerren geändert worden, so bedarf es neuer Versuche über den Condensationscoefficienten, oder überhaupt irgend einer Messung, welche das Verhältniss der früheren Ausschläge zu den späteren kennen lehrt.

Es ist leicht, dadurch dass man die obere Condensatorplatte aus Kupfer und die untere aus Zink wählt, oder dass man den einen Pol des Elementes aus blankem Zink, Kupfer und Wasser wenige Minuten nach dem Eintauchen der Metalle in die Flüssigkeit mit der unteren Condensatorplatte verbindet, auf einige Zeit eine hinreichend constante Kraft zu erhalten, um zu ermitteln, in welcher Weise die Ausschläge des Elektrometers mit den Abständen der Condensatorplatten sich ändern. In Abständen von 5, 10, 20 u. s. w. Theilstrichen ausgeführte Messungen zeigten, dass diese Ausschläge hinreichend genau den Abständen der Platten umgekehrt proportional genommen werden konnten. Dieses Gesetz gestattet die bisweilen bei zu schwachen oder zu starken elektrischen Spannungen in anderen Abständen angestellten Messungen auf den Abstand von 10 Theilstrichen zu reduciren.

Sobald die obere Condensatorplatte im isolirten Zustande von der unteren entfernt wird, beginnt die frei gewordene Elektricität in die

Luft zu entweichen, wozu namentlich der dünne Draht die Hauptveranlassung bietet. Ist das Elektrometer in gutem Stande und die Luft nicht zu feucht, wie z. B. während des Winters in einer geheizten Stube, so bleibt sich dieser Verlust bei gleicher Spannung sehr nahe gleich, und ist innerhalb der schwachen im Folgenden benutzten Elektricitäten der Grösse der Spannung proportional. Ich habe mich gewöhnt, die erste Beobachtung des Ausschlags sehr nahe 5 Secunden nach dem Aufziehen der Condensatorplatte vorzunehmen; ein Zeitraum, der bei einiger Uebung völlig zur Ausführung der nöthigen Verrichtungen hinreicht. Nach weiteren 15 Secunden bestimme ich dann den Ausschlag zum zweiten Male und vermag daraus den Verlust innerhalb dieser Zeit zu berechnen. Bei einem Ausschlage von 3 Skalentheilen betrug dieser Verlust in 15 Secunden in der Regel 0,45 Skalentheile, so dass er also in 5 Secunden auf 0,15 Skth. stieg. Wenn im Laufe einer Versuchsreihe die äusseren Umstände unverändert blieben und nur die Messungen dieser Reihen unter einander verglichen werden sollten, so wurde übrigens die Correction unnöthig; denn da dieselbe den Intensitäten proportional ging, so waren die Verhältnisse der corrigirten und der nicht corrigirten Werthe dieselben.

Um bei allen Versuchen den Verlust möglichst gleich zu machen, habe ich es vermieden, Messungen mit entgegengesetzten Elektricitäten sehr rasch unmittelbar auf einander folgen zu lassen. So viel als möglich trug ich, falls es die Umstände erforderten, Sorge, vor jeder neuen Messung dem Elektrometer eine Ladung mit derselben Elektricität und bis zu nahe demselben Grade, den ich zu erwarten hatte, zu ertheilen und gerade wie bei einer gewöhnlichen Messung zu verfahren; eine solche vorläufige Ladung und Beobachtung genügte, um nachher auch unter sehr ungünstigen Verhältnissen den gewöhnlichen Verlust zu erzielen.

Es ist allerdings nicht zu leugnen, dass die Verbindung der oberen Condensatorplatte mit dem Goldblättchen des Elektrometers durch den langen dünnen Platindraht sowohl wegen der grossen Capacität, als auch wegen der leicht möglichen Veränderungen in der Gestalt desselben gewisse Uebelstände mit sich führt, und man könnte daran denken, den zuvor beschriebenen Condensator gewissermassen umzukehren, d. h. während bisher die obere bewegliche Platte mit dem Elektrometer verbunden und die untere feststehende zur Erde abgeleitet war, gerade

gekehrt die untere feststehende mit dem Elektrometer und die obere bewegliche mit dem Erdboden in dauernde Verbindung zu setzen. Handelte es sich, wie im nächsten Abschnitte, bloss um die Ermittlung der elektrischen Differenzen der festen Metalle, so liesse sich allerdings leicht ein Leiter von möglichst geringer Oberfläche herstellen, wenn man unmittelbar auf dem Stäbchen des Elektrometers, welches das Goldblättchen trägt, eine Kupferplatte anbrächte und auf diese die untere Condensatorplatte legte. Um vergleichbare Resultate zu erhalten, würde man indess stets sorgfältig darauf zu achten haben, dass sich beim Auflegen einer neuen Platte die elektrische Capacität des Leiters nicht ändert. Bei Untersuchungen des Verhaltens von Flüssigkeiten könnte jedoch die oben angedeutete Einrichtung schon nicht mehr unmittelbar angewandt werden; man würde die Flüssigkeit wieder neben dem Elektrometer anbringen und durch einen Draht, der freilich stärker und kürzer sein könnte als der Draht der obigen Platinspirale, mit jenem Instrumente verbinden müssen. Bei der neuen Einrichtung dürfte man endlich mit dem Uebelstande zu kämpfen haben, dass die untere mit dem Elektrometer in Verbindung stehende Platte ganz in der Nähe des Experimentators läge, und nach dem Entfernen der obern Platte sowohl von Seiten der zufällig im Körper des Beobachters erregten, als auch besonders durch die in der Luft des Zimmers vorhandene Elektrizität Vertheilungswirkungen erführe, von denen die letzteren namentlich um so stärker ausfallen würden, je weiter man die obere Platte entfernte.

Alle diese Rücksichten haben mich bewogen, das frühere Verfahren behufs genauer Messungen beizubehalten; was aber nicht hinderte, die neue Einrichtung in gewissen speciellen Fällen z. B. zu einer blossen Vergleichung zweier Platten zu benutzen. Zu letzterem Zwecke liess ich, da ich an dem ersten Apparate keine Aenderungen anbringen mochte, folgende Vorrichtung construiren.

Auf dem einen Ende eines Brettes von 800^{mm} Länge war das oben §. 5 erwähnte Elektrometer *C* fest angeschraubt; der Stift, an welchem das Goldblättchen hing, trug oben je nach dem Bedürfniss eine kleinere oder grössere kreisförmige Scheibe aus etwas starkem Messingblech. Durch diese Scheibe gingen nahe an ihrem Rande von unten her drei Schrauben hindurch, auf deren Spitzen die zu untersuchende Platte gelegt wurde. Auf demselben Brette standen in der Nähe seines anderen Endes ein Paar kleine Säulen von 240^{mm} Höhe, deren jede ein Lager zur Aufnahme

der Axe eines starken eisernen Hebels enthielt. Der eine 350^{mm} lange Arm dieses Hebels trug, wenn er nach der Seite des Elektrometers gewandt war, an seinem unteren Ende gerade über dem Elektrometer eine Scheibe von 96^{mm} Durchmesser mit einem nach unten hervorstehenden Rande. Legte man diesen Arm nach der anderen Seite hinüber, so war die Vertiefung nach oben gewandt; es liess sich in dieselbe bequem eine Metallplatte von 95^{mm} Durchmesser einsetzen und mittelst dreier Schrauben, welche durch das ziemlich starke Messing des Randes hindurch gingen, befestigen. War dieser Arm nach Befestigung der Platte wieder nach dem Elektrometer hinübergelegt, so konnte er mittelst einer Stellschraube, die auf einer 400^{mm} von seinem Ende befindlichen hölzernen Säule sass, in jedem beliebigen Abstände über der auf das Elektrometer gelegten Platte erhalten werden, während man diese letztere selbst mittelst der drei Schrauben, worauf sie lag, der oberen sehr nahe horizontalen Platte parallel zu stellen im Stande war. Um die Umlegung des 350^{mm} langen Hebelarms von der einen Seite nach der andern möglich zu machen, war der andere Arm des Hebels so kurz, dass er zwischen den Säulen, die seine Axe trugen, durchschlug; der leichteren Handhabung wegen befand sich auf ihm eine verschiebbare Bleimasse, welche das Gewicht der anderen Seite nahezu äquilibrirte.

Die Axe des Hebels und somit auch die an ihm befestigte obere Condensatorplatte blieb mit der Erde in steter Verbindung; wurde nun, während die Platten einander nahe gegenüberstanden, auch die untere Platte abgeleitet und dann nach wiederhergestellter Isolirung derselben mittelst des Hebels die obere Platte entfernt, so entstand, falls die einander zugewandten Oberflächen der Platten nicht gleichartig waren, ein Ausschlag.

3. Die Galvanometer.

Zur Messung der galvanischen Ströme dienten gewöhnlich Spiegelgalvanometer von angemessener Empfindlichkeit. Bei sehr grossen Widerstände benutzte ich entweder das in meiner letzten Abhandlung (Bd. VI. dieser Abh. S. 261) beschriebene Galvanometer mit drei Drähten von zusammen 9960 Windungen, oder auch einen von Sauerwald in Berlin gefertigten Multiplicator mit 30000 Windungen, dessen Ausschläge in einem oberhalb aufgestellten Spiegel mittelst eines Fernrohres beobachtet wurden.

Verfahren zur Bestimmung der durch die Berührung verschiedener Metalle entstehenden elektromotorischen Kräfte.

Das von mir zur Messung der elektromotorischen Kräfte angewandte Verfahren hat eine gewisse Aehnlichkeit mit den sogenannten Wägungen auf einer Wagschale. Wie hierbei die Belastung der einen Seite dieselbe bleibt, so wurde bei meinen Versuchen die Beschaffenheit der einen Condensatorplatte, und zwar der oberen, niemals geändert. Diese obere aus Kupfer bestehende Platte blieb (mit einer einzigen Ausnahme) unausgesetzt an den drei Kupferdrähten hängen; sie wurde nur vor Beginn jeder Versuchsreihe mit einem feinen Haarpinsel auf ihrer unteren Seite abgerieben, um möglicherweise daran hängende Fäserchen zu entfernen, während die Reinigung ihrer oberen Fläche mittelst des Pinsels nur selten geschah, um nicht durch zufälliges Anstossen an die Platinspirale eine andere Capacität des Leiters entstehen zu lassen. Der Zustand der unteren Fläche der lange in der Luft gehangenen Kupferplatte durfte wohl als nahe constant betrachtet werden, wie dies auch die späteren Versuche bestätigten; indess habe ich es doch stets vorgezogen, mich auf diese Voraussetzung nicht zu stützen; die Versuche wurden vielmehr stets so angeordnet, dass eine völlige Identität dieser Oberfläche nur für die kurze Zeit von höchstens einigen Stunden, häufig nur von einigen Minuten nöthig war, und dass obenein noch nach Verlauf dieser Zeit die unverändert gebliebene Beschaffenheit jener Oberfläche durch einen speciellen Versuch festgestellt wurde.

Während die obere Condensatorplatte nicht ohne Störung des Apparates gewechselt werden konnte, liess sich dagegen die untere Platte, welche einfach auf die S. 10 erwähnte, auf den Schellackstäbchen festsetzende Kupferplatte gelegt wurde; sehr leicht durch eine andere ersetzt, und ebenso war die Horizontalstellung der neuen Platte mittelst der Wasserwage, sowie die Einstellung eines bestimmten Theilstriches des Ocularmikrometers auf ihren oberen Rand schnell und genau ausführbar.

Zum besseren Verständnisse dürfte es beitragen, wenn ich mein Verfahren an einem ganz speciellen Beispiele erläutere.

Gesetzt, es sollte die elektromotorische Kraft oder elektrische Differenz zwischen frisch geputztem Zink und eben solchem Kupfer ermittelt werden: so wurde zunächst die blanke Zinkplatte als untere

Condensatorplatte horizontal und genau unterhalb der oberen kupfernen hingelegt, darauf letztere Platte der Zinkplatte bis auf 10 Theilstriche des Ocularmikrometers genähert und der vom Träger des Goldblättchens ausgehende und mit der oberen Platte in Verbindung stehende Platindraht in der S. 14 beschriebenen Weise abgeleitet; sodann die Ableitung wieder entfernt, nach eingetretener Isolirung die obere Platte bis 330^{mm} emporgehoben, 5 Secunden nach Beginn des Aufziehens der Platte durch Umlegen des Commutators der Ausschlag im Elektrometer beobachtet und endlich zur Bestimmung des Verlustes nach 15 Secunden die Grösse desselben wiederum gemessen. War der Verlust bereits genau bekannt, so konnte die zweite Beobachtung des Ausschlages wegfallen. Auf diesen ersten Versuch folgte durch Niederlassen der Platte u. s. f. ein zweiter, auf diesen ein dritter u. s. w. Die zu einem Versuche nöthige Zeit betrug, wenn die zweite Beobachtung zur Bestimmung des Verlustes ausfiel, ungefähr $\frac{1}{4}$ Minute, während sie durch Hinzufügung derselben um $\frac{1}{4}$ Minute zunahm. In Zwischenzeiten von $\frac{1}{4}$ oder respective $\frac{1}{2}$ Minuten wurden mehrere Beobachtungen ausgeführt und aus denselben das Mittel genommen.

Darauf wurde genau an die Stelle der Zinkplatte die frisch geputzte Kupferplatte als untere Condensatorplatte gebracht, ebenso wie zuvor verfahren und gleichfalls aus mehreren aufeinanderfolgenden Messungen das Mittel gezogen.

Die Differenz zwischen dem Ausschlage, welcher sich zeigte, als die untere Platte aus frischgeputztem Zink bestand, und demjenigen, der nach ihrer Ersetzung durch die frischgeputzte Kupferplatte beobachtet wurde, liefert, wie ich sogleich zeigen werde, ein Maass für die durch die Berührung zwischen diesem Zink und Kupfer entstehende elektromotorische Kraft, oder für die elektrische Differenz der beiden genannten Metalle.

Ich will zunächst annehmen, es bestehe die obere Condensatorplatte aus einer auf ihrer unteren Fläche vollkommen blanken Kupferplatte und die untere aus einer auf ihrer oberen Fläche ebenso vollkommen blanken Zinkplatte. Es seien ferner die beiden Platten mit ihren zugewandten Oberflächen einander bis auf 10 Theilstriche des Ocularmikrometers genähert und in dieser Lage durch Platindrähte (um überhaupt ein drittes Metall zu nennen) zur Erde geleitet, sowie auch durch diese Drähte untereinander metallisch verbunden.

In welchem Zustande die mittelst des Blitzableiters oder der Gasröhren des Hauses mit der Erde zusammenhängenden Platindrähte sich befinden, vermögen wir nicht zu bestimmen; wir dürfen aber durchaus nicht annehmen, dass sie gar keine elektrischen Spannungen haben; jedenfalls indess werden sie auf eine kurze Zeit denselben elektrischen Zustand besitzen. Infolge der Berührung mit ihnen wird das Zink und ebenso das Kupfer in einem gewissen Grade elektrisch.

Denken wir uns die Kupfer- und Zinkplatte zunächst so weit von einander abstehend, dass beide auf einander nicht condensirend wirken, so wird die Zinkplatte eine Spannung erhalten, wie sie der algebraischen Summe aus der elektromotorischen Kraft zwischen Zink und Platin und der bereits im Platin vorhandenen Spannung entspricht. Aehnlich wird das Kupfer eine der Summe der elektrischen Differenz zwischen Kupfer und Platin und der in ersterem bereits vorhandenen Spannung entsprechende Elektrizität annehmen.

Um die durch die Berührung der verschiedenen Metalle entstehenden elektrischen Erregungen kurz bezeichnen zu können, will ich die Metalle durch besondere Zeichen, gewöhnlich die cursiv gedruckten Zeichen der chemischen Aequivalente, andeuten, diese Zeichen unmittelbar nebeneinander stellen und in Klammern einschliessen. Dabei soll noch die Vereinbarung getroffen werden, dass der Werth eines solchen symbolischen Ausdruckes als positiv anzusehen ist, wenn das zuerst stehende Metall in Berührung mit dem zweiten positiv elektrisch wird; als negativ im entgegengesetzten Falle. Kehrt man daher die Reihenfolge der beiden Metalle um, so geht der durch das Symbol bezeichnete Werth der elektrischen Spannung in seinen entgegengesetzten Werth über, also z. B. $(ZnPt) = - (PtZn)$. Ausdrücke, wie $(ZnPt)$ und $(PtCu)$ oder $(CuPt)$, welche ein gemeinschaftliches Element besitzen, können durch Addition, respective Subtraction verbunden werden, um die Spannung $(ZnCu)$ zu erhalten, welchem Vorgange die Gleichungen $((ZnPt) + (PtCu)) = ((ZnPt) - (CuPt)) = (ZnCu)$ entsprechen.

Da wir, wie schon bemerkt, in dem obigen Beispiele nicht wissen, in welchem Zustande sich der zur Erde geführte Platindraht (Pt) befindet, so wollen wir annehmen, wir hätten ihm durch Berührung mit einer Substanz (A) eine Spannung ertheilt, die gleich (PtA) sei und im Laufe der nächsten Versuche unverändert bleibe. Dann hat das durch dieses

Platin abgeleitete Zink die Spannung $(ZnPt) \rightarrow (PtA)$ und das eben dadurch abgeleitete Kupfer die Spannung $(CuPt) \rightarrow (PtA)$.

Um von ganz bestimmten Vorstellungen auszugehen, wollen wir annehmen, dass ebenso wie mit der oberen Kupferplatte auch mit der unteren Zinkplatte ein Elektrometer in Verbindung stehe, und dass ferner die Form des Apparates nach beiden Seiten hin vollständig symmetrisch sei, so dass mit der Verwechselung der beiden Metallplatten auch die Ausschläge der beiden Elektrometer sich gegen einander vertauschen würden.

Da beide Seiten des Apparates an den zur Verbindung der Metallplatten mit den Goldblättchen der Elektrometer dienenden Drähten zur Erde abgeleitet sind, so kann die auf jenen Platten vorhandene Spannung nicht zu den Goldblättchen gelangen; diese zeigen bloss die infolge ihrer Ableitung vorhandene Elektrizität. Man sieht aber andererseits auch leicht, dass die Spannung des Goldblättchens auf die Wirkung des Condensators keinen Einfluss zu üben vermag, wovon ich mich übrigens noch durch einen directen Versuch versichert habe, indem ich in die Verbindung des Goldblättchens eines Elektrometers mit der entsprechenden Condensatorplatte ein kleines Element aus Zink, Platin und Wasser einschaltete und die Ableitung zur Erde zwischen dieser Kette und der Condensatorplatte anbrachte; die Spannung der Kette lud bloss das Elektrometer, nicht aber den Condensator, und es war nur nöthig, diesen Ausschlag bei den Messungen mit dem Condensator in Abzug zu bringen, um, abgesehen von der Aenderung in der Capacität des Leiters, dieselben Werthe zu erhalten als bei Ausschluss des Elements. Der Einfachheit wegen wollen wir hiernach, da die Allgemeinheit der Erörterung darunter nicht leidet, die ursprüngliche Spannung auf den Goldblättchen der Elektrometer gleich Null setzen. So lange dann die Ableitungsdrähte an den beiden Verbindungsdrähten liegen, zeigen unter dieser Voraussetzung die Elektrometer durch Umlegen ihrer Commutatoren weder bei entfernten noch bei genäberten Condensatorplatten einen Ausschlag; dagegen ist der elektrische Zustand der Condensatorplatten je nach ihrem gegenseitigen Abstände sehr verschieden.

Gesetzt die untere Fläche der oberen kupfernen Condensatorplatte sei durch ihre Ableitung zur Erde in völlig unelektrischem Zustande während die obere Fläche der unteren Zinkplatte durch ihre Ableitung eine positiv elektrische Spannung besitze, und zwar betrage die Dicke

der elektrischen Schicht auf einem bestimmten Punkte derselben, während die obere Platte unendlich weit entfernt ist, $(ZnPt) + (PtA)$. Durch die Annäherung der oberen Platte möge die Dicke dieser Schicht auf $m((ZnPt) + (PtA))$ steigen; wo $m > 1$ ist, und zwar um so mehr, je näher die Platten einander kommen. An dem entsprechenden Punkte der oberen Platte wird infolge der blossen Vertheilungswirkung eine entgegengesetzt elektrische Schicht von der Dicke $n((ZnPt) + (PtA))$ hervorgerufen, wo je nach den Abständen $n \geq 1$ sein kann, jedenfalls aber $n < m$ ist.*) Werden nun die beiden Platten isolirt und dann von einander entfernt, so wird das mit der Zinkplatte in Verbindung stehende Elektrometer einen mit $(m-1)((ZnPt) + (PtA))$, und ebenso das untere mit der Kupferplatte verbundene Elektrometer einen entgegengesetzten mit $n((ZnPt) + (PtA))$ proportionalen Ausschlag geben.

Nehmen wir anstatt der Zinkplatte bloss die Kupferplatte als elektrisch an und zwar so stark, dass an dem gewählten Punkte bei Abwesenheit der Zinkplatte eine elektrische Schicht von der Dicke $((CuPt) + (PtA))$ vorhanden sei, so wird nach Annäherung, Isolirung und Entfernung der Zinkplatte in dem mit der Kupferplatte verbundenen Elektrometer ein mit $(m-1)((CuPt) + (PtA))$, und in dem anderen mit der Zinkplatte verbundenen ein entgegengesetzter mit $n((CuPt) + (PtA))$ proportionaler Ausschlag entstehen.

Sind nun; wie es wirklich der Fall ist, beide Platten in der angegebenen Weise elektrisch, so muss das mit der Kupferplatte verbundene Elektrometer einen mit $(m-1)((CuPt) + (PtA)) - n((ZnPt) + (PtA))$, und das andere mit der Zinkplatte verbundene Instrument einen mit $(n-1)((ZnPt) + (PtA)) - n((CuPt) + (PtA))$ proportionalen Ausschlag zeigen. Bezeichnen wir diese Werthe unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen durch $-N$ und $+N'$, so wird

$$\begin{aligned} -N &= (m-1)((CuPt) + (PtA)) - n((ZnPt) + (PtA)) \\ +N' &= (n-1)((ZnPt) + (PtA)) - n((CuPt) + (PtA)). \end{aligned}$$

Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, so kommt

$$\begin{aligned} N+N' &= (m-1)((ZnPt) - (CuPt)) + n((ZnPt) - (CuPt)) \\ &= (m+n-1)((ZnPt) - (CuPt)) = (m+n-1)(ZnCu). \end{aligned}$$

*) Obschon die Grössen m und n nicht von einander unabhängig sind, so ist es doch für das Folgende nicht nöthig, ihre Abhängigkeit zu kennen.

Setzen wir an die Stelle des Kupfers Silber, so würden wir aus den Ausschlägen $-M$ und $+M'$ in analoger Weise erhalten

$$(M+M') = (m+n-1)(ZnAg)$$

und entsprechend für die übrigen Metalle.

Die beobachteten Ausschläge würden demnach den elektrischen Spannungen zwischen den zu Condensatorplatten gewählten Metallen proportional sein.

Im Vorstehenden war von den Condensatorplatten aus der gesammte Apparat vollkommen symmetrisch angenommen, eine Anordnung, die sich nicht in allen Fällen herstellen lässt. Wir haben also zu untersuchen, wie die Verhältnisse sich gestalten, wenn eine der beiden Platten mit einem Leiter von grösserer Capacität als die andere verbunden ist. Wird z. B. die Capacität der mit der Zinkplatte zusammenhängenden leitenden Oberfläche, über welche sich die auf ihr condensirt gewesene Elektrizität verbreitet, grösser als die auf der anderen Seite, so muss der Ausschlag auf der Zinkseite entsprechend geringer werden, was wir durch Hinzufügung des Factors $k < 1$ bezeichnen wollen. Es sei jetzt der Ausschlag auf der Zinkseite M , so haben wir

$$\begin{aligned} -N &= (m-1)((CuPt) + (PtA)) - n((ZnPt) + (PtA)) \\ +M &= k(m-1)((ZnPt) + (PtA)) - kn((CuPt) + (PtA)) \end{aligned}$$

Die Differenz beider Gleichungen gibt

$$N+M = (k(m-1) + n)(ZnPt) - (m+kn-1)(CuPt) - (1-k)(m-n-1)(PtA)$$

aus welchem Ausdrucke kein der Spannung $(ZnCu)$ proportionaler Werth gefunden werden kann.

Verwechselte man die beiden Condensatorplatten, setzte also die Zinkplatte an die Stelle der Kupferplatte und umgekehrt, so dass jetzt auf Seiten der Kupferplatte die grössere Oberfläche läge, so würde man für die Ausschläge N_1 und M_1 an den beiden Elektrometern erhalten

$$\begin{aligned} +N_1 &= (m-1)((ZnPt) + (PtA)) - n((CuPt) + (PtA)) \\ -M_1 &= k(m-1)((CuPt) + (PtA)) - kn((ZnPt) + (PtA)) \end{aligned}$$

woraus folgt

$$N_1+M_1 = (m+kn-1)(ZnPt) - (k(m-1) + n)(CuPt) + (1-k)(m-n-1)(PtA)$$

Aus den Gleichungen für $N+M$ und N_1+M_1 ergibt sich

$$\begin{aligned} N+M+N_1+M_1 &= (1+k)(m+n-1)((ZnPt) - (CuPt)) \\ &= (1+k)(m+n-1)(ZnCu) \end{aligned}$$

Die Summe aller dieser Ausschläge ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen würde also in diesem Falle wieder eine der elektrischen Spannung $(ZnCu)$ proportionale Grösse liefern.

Auf dem angegebenen Wege wäre allerdings eine relative Messung der bei Berührung der Metalle entstehenden elektrischen Spannungen möglich; indess wird dabei ein Vertauschen der Platten gegen einander erfordert, was bei dem obigen Apparate nicht möglich war, und wenn es sich um flüssige Oberflächen als Condensatorplatten handelt, überhaupt niemals ausführbar ist. Ich habe daher dem oben S. 19 beschriebenen Verfahren, bei welchem sämtliche Substanzen gegen eine obere unverändert bleibende Condensatorplatte verglichen wurden, auch bei Metallen den Vorzug gegeben: eine leichte Rechnung wird zeigen, dass dasselbe ebenfalls den elektrischen Differenzen der Metalle genau proportionale Werthe liefert.

Da die untere Fläche der lange an der Luft gehangenen oberen Kupferplatte, wenn auch noch glänzend, doch nicht mehr als frisch geputzt betrachtet werden darf, so will ich sie nicht mit (Cu) , sondern mit (K) bezeichnen, und um nicht noch eine Spannung zwischen Kupfer und der unteren oxydirten Fläche schreiben zu müssen, annehmen, die ganze Platte bestehe aus derselben Substanz, wie ihre Oberfläche. Man wird gleich sehen, dass die Natur dieser oberen Platte und ihrer unteren Fläche für das Endresultat völlig gleichgültig ist, wenn nur während der Messungen an der unteren Zink- und Kupferplatte die Beschaffenheit ihrer unteren Fläche constant bleibt.

Es sei zuerst die frisch geputzte Zinkplatte als untere Condensatorplatte hingelegt, so erhalten wir einen Ausschlag $-P$, wobei

$$-P = (m-1) ((KPt) + (PtA)) - n ((ZnPt) + (PtA)).$$

Wird jetzt die Zinkplatte durch eine frisch geputzte Kupferplatte, die gegen (K) positiv ist, ersetzt, so entsteht wieder ein negativer, aber schwächerer Ausschlag $-p$, wobei

$$-p = (m-1) ((KPt) + (PtA)) - n ((CuPt) + (PtA)).$$

Ziehen wir nun die erste Gleichung von der zweiten ab, so folgt

$$P-p = n ((ZnPt) - (CuPt)) = n (ZnCu)$$

wonach also die Differenz der beiden Ausschläge P und p als ein relatives Maass für die elektromotorische Kraft $(ZnCu)$ betrachtet werden kann, da n für den unveränderten Apparat eine constante Grösse darstellt.

Die vorstehenden Erörterungen gelten natürlich auch in ihrem ganzen Umfange von dem weiter oben S. 18 beschriebenen Apparate. Dieser Apparat hatte, wie schon angedeutet

Wung

eines Metalles nicht durch directe Messung, sondern durch Vergleichung mit anderen Metallen, zwischen denen man es einschliesst, annähernd zu bestimmen. Er fand seine Anwendung namentlich in solchen Fällen, wo ich keine ebene Platte besass, sondern mit einer mehr oder weniger wellenförmigen Oberfläche mich begnügen musste. Bei seiner Construction war besonders darauf gesehen, dass die obere in den Hebel eingelegte Condensatorplatte leicht gegen eine andere ausgewechselt werden konnte. Da nun, wie sich aus den späteren Messungen ergeben wird, durch kürzeres oder längeres Aussetzen der Metallplatten an die Luft alle Zwischenstufen zwischen den Endgliedern der sogenannten Spannungsreihe dargestellt werden konnten, so liess sich der Ort eines gegebenen Metalles durch Vergleichung mit zwei Metallplatten, deren Stellung in jener Reihe durch directe Messungen bekannt war, in gewisse Grenzen einschliessen. Die früheren Formeln lehren jedoch, dass selbst wenn die obere Platte der unteren genau gleich ist und das Goldblättchen keine ursprüngliche Spannung besitzt, das Elektrometer doch infolge der Ableitungsverhältnisse noch einen wenn auch nur geringen Ausschlag geben muss; auf diesen ist also bei der Abgleichung oder Einschliessung in gewisse Grenzen Rücksicht zu nehmen.

Zum Schlusse dieses Abschnittes mögen noch einige allgemeine Angaben und Bemerkungen über das Putzen der Metallflächen Platz finden.

Die nachfolgenden Versuche werden darthun, dass die Spannung, welche bei den zuvor beschriebenen Messungen zwischen Kupfer und Zink sich zeigt, gar sehr von der Beschaffenheit dieser Oberflächen abhängt, weshalb es nothwendig wird, stets genau anzugeben, in welchem Zustande die Oberflächen der Platten sich befunden haben, oder welchen Operationen sie zuvor unterworfen worden sind; selbst die edlen Metalle verändern durch blosses Liegen an der Luft die Beschaffenheit ihrer Oberflächen. Ferner werden durch Wasser und andere Flüssigkeiten, auch wenn man die Platten sofort nach dem Benetzen damit wieder abtrocknet, Aenderungen erzeugt, und unter Umständen so schnell, dass ein infolge der blossen Annäherung der Hand eingetretenes Beschlag einer Platte, der sofort wieder verschwindet, hinreicht, um merkliche Modificationen hervorzurufen.

Wenn die Platten auf ihrer Oberfläche stark angelaufen oder oxydirt waren, so reinigte ich sie früher zuerst durch Schleifen mittelst eines Baumwollenbäusches mit Tripel und Wasser und dann durch

reiben mit einem sehr feinen Schmirgelpapier. Später liess ich die Behandlung mit Tripel fort, nahm dafür aber ein etwas gröberes Schmirgelpapier, das kräftig griff, und schliff die Platte dann noch mit zwei feineren Sorten. Dabei lag die Platte in einer schwachen Vertiefung, welche auf der oberen Seite eines runden Holzklotzes von nahe gleichem Durchmesser mit der Platte ausgedreht war, deren Tiefe aber die Dicke der Platte noch nicht erreichte; der umgebende Rand war schmal und nach aussen abschüssig, um das Anhäufen des Schmutzes nach Möglichkeit zu vermeiden.

Es ist jedoch selbst mit gutem Schmirgelpapier, auch wenn es oft neuert wird, nicht leicht eine reine Oberfläche zu erzielen; die Platten zeigen leicht dunkle Flecken und Streifen, welche dadurch entstehen, dass man das vom Schmirgelpapier und von der Platte Abgeriebene so rasch in die Oberfläche wieder hineinreibt. Ich benutzte deshalb beim Schleifen der Platten mit dem Papier gleichzeitig ein reines leinenes Handtuch, womit, sobald ich die Oberfläche der Platte ein oder einige Male mit dem Schmirgelpapier überfahren hatte, sofort der darauf haftende und festhaftende Schmutz entfernt wurde. Dies war besonders

am Ende des Putzens nöthig, wo die Platte so lange mit immer frischen Stellen eines reinen Handtuches ziemlich kräftig gerieben werden musste, bis dasselbe, falls solches überhaupt möglich, völlig rein blieb. Um die seitwärts gestossenen Schmutz mit dem Handtuche wieder von der Platte zu ziehen, war über den zuvor erwähnten Holzklotz ein weiteres reines Handtuch gebreitet; auf dieses wurde die Metallplatte gelegt und in die schwache Vertiefung eingedrückt; auch die Stelle des sauberen Tuches musste öfter und namentlich zu Ende des Putzens gewechselt werden. Fürchtet man bei diesen Operationen ein Beschlagen der Platte durch die von der Hand ausgedünstete Feuchtigkeit, so ist letztere mit einem ledernen Handschuh zu bekleiden.

Da manche Platten sehr oft geputzt wurden, so stellte sich die Nothwendigkeit heraus, sie von Zeit zu Zeit wieder eben zu schleifen; es geschah gewöhnlich durch Aufeinanderschleifen zweier Platten mit feingepulvertem Bimstein und Wasser. Die untere Platte lag dabei in der Vertiefung des oben beschriebenen Holzklotzes, während ein mit gleicher Vertiefung versehenes gegen $\frac{1}{4}$ Zoll dickes rundes Holzstück über die obere Platte gelegt wurde und zu ihrer Bewegung einen bestimmten Angriff darbot.

Um alle Störungen zu vermeiden wurde jede Platte vor dem letzten Reinigen auf die Kupferplatte des Trägers gerade unterhalb der oberen Condensatorplatte gelegt und mittelst der Wasserwage horizontal gestellt. Da die Kupferplatte des Trägers mit der darauf gelegten gleiche Grösse hatte und sich genau unter der oberen Condensatorplatte befand, so konnte die als untere Condensatorplatte dienende Platte hinweggenommen und geputzt werden, und man war doch sicher, sie trotz des nicht vollkommenen Parallelismus ihrer Flächen genau wieder in dieselbe Lage wie zuvor gebracht zu haben, wenn man bei ihrem Auflegen auf die Kupferplatte des Trägers die Ränder beider Platten zusammenfallen liess und ausserdem die aufgelegte Platte so drehte, dass zwei zuvor an diesen Rändern angebrachte Marken, ebenso wie bei der vorhergegangenen Nivellirung, über einander fielen; eine Abweichung von der früheren Lage verrieth sich übrigens augenblicklich in dem seitwärts stehenden Mikroskope.

Um die Platten anfassen zu können, ohne mit den Fingern ihrer Oberfläche zu nahe zu kommen, war am Rande ein Fortsatz eingeschraubt; derselbe wurde, sobald die Platte auf den Träger in ihre richtige Stellung gebracht war, entfernt.

III. Maassbestimmungen der durch die Berührung der Metalle entstehenden elektromotorischen Kräfte.

Die Bestimmung der Werthe der elektrischen Spannungen, welche bei der Berührung der Metalle mit Ausschluss aller Flüssigkeiten auftreten, ist nur mittelst der im Vorstehenden beschriebenen condensatorischen Vorrichtungen möglich, und daher selbstverständlich auch nur bei solchen Metallen ausführbar, die sich zu Platten mit geeigneten Oberflächen formen lassen. Es ist mir gelungen, die elektromotorischen Kräfte oder die elektrischen Differenzen der folgenden einfachen Metalle und Legirungen: Aluminium, Zink, amalgamirtes Zink, Zinn, Cadmium, Blei, Antimon, Wismuth, Neusilber, Messing, Quecksilber, gewalztes Eisen, Stahl, Gusseisen, Kupfer, Gold, Palladium, Silber und Platin, so wie der Kohle zu bestimmen, und ich werde die betreffenden Resultate, so wie die Aenderungen, welche die frisch geputzten Oberflächen bei längerem Aussetzen an die Luft erlitten, im Nachfolgenden mittheilen.

A. Einfache Metalle.

1. Zink.

Zum besseren Verständniss wird es beitragen, wenn ich bei diesem ersten Metalle zum Theil die einzelnen Beobachtungsdata selbst aufführe.

Die nach der kurz zuvor angegebenen Methode gereinigte Zinkplatte ward auf die Kupferplatte des Trägers gelegt und dann in der S. 19 näher beschriebenen Weise verfahren. Dabei wurden z. B. an einem Tage als Stellungen des Goldblättchens in den beiden Lagen des Commutators, die ich durch *a* und *b* unterscheiden will, bei vier auf einander folgenden Versuchen beobachtet:

Stellung des Goldblättchens in der Lage des Commutators

	<i>a</i>	<i>b</i>
beim 1. Versuche	auf 26,3	auf 21,9
» 2. »	» 26,35	» 21,9
» 3. »	» 26,35	» 21,95
» 4. »	» 26,35	» 21,95

Man erkennt, dass sich die Ruhelage des Goldblättchens im nicht elektrischen Zustande während der drei auf die vorstehenden Beobachtungen verwandten Minuten etwas geändert hat; doch ist eine solche Aenderung auf die Genauigkeit der Messungen, die nur von den Differenzen der Stellungen des Goldblättchens in den beiden entgegengesetzten Lagen des Commutators abhängen, ohne allen Einfluss. Diese Differenzen geben der Reihe nach die Ausschläge:

- 4,40 Skalentheile
- 4,45 »
- 4,40 »
- 4,40 »

woraus das Mittel — 4,41 folgt.

Dieser Werth ist nun noch wegen des ursprünglichen Ausschlags des Goldblättchens bei Ableitung zur Erde, so wie wegen der Abweichung der Spannung in den Säulenpolen von der als normal angenommenen zu corrigiren. Zur Zeit der Beobachtungen betrug jener ursprüngliche Ausschlag + 0,15 Skalentheile, und die Spannung in den Säulenpolen, deren normale Stärke einem Ausschlage von 30,0 Skth. entsprechen sollte, war bis auf 32,2 Skth. gestiegen. Während die ur-

sprüngliche Ladung des Goldblättchens eine Erhöhung des beobachteten Werthes um 0,15 Skth. verlangt, fordert die Reduction auf die normale Spannung der Säulenpole eine Verkleinerung desselben um 0,15 Skth., so dass im vorliegenden speciellen Falle diese beiden Correctionen sich zufällig aufheben. Schliesslich wäre auch noch eine Correction wegen des Electricitätsverlustes in der Zeit vom Aufziehen der Platte bis zur Messung des Ausschlags anzubringen. Da jedoch dieser Verlust bei allen Beobachtungen dieses Abschnittes, deren Resultate unter einander verglichen werden, in gleichem Maasse eintrat, d. h. den gemessenen Ausschlägen proportional war, so konnte (vgl. S. 16) von dieser Correction abgesehen werden, da sie auf die relativen Werthe keinen Einfluss äussert.

Es wird nicht ohne Interesse sein, hier die Mittelwerthe mehrerer an verschiedenen Tagen ausgeführter Versuchsreihen namhaft zu machen um zu zeigen, wie weit es gelingt, den Zustand der Zinkplatte durch Putzen in gleicher Weise herzustellen und überhaupt den gesammten elektrischen Messapparat selbst auf etwas längere Zeit in fast unverändertem Zustande zu erhalten.

Als Mittelwerth wurde an einem Tage gefunden	— 4,42 Skth.
Am folgenden Tage betrug derselbe	— 4,41 „
Eine 19 Tage später ausgeführte Beobachtungsreihe lieferte	— 4,39 „

Der Ausschlag, welchen eine frisch geputzte Zinkplatte gibt, kann jedoch, wie bereits oben S. 15 bemerkt, nur so lange derselbe bleiben, als der Zustand der elektrometrischen Vorrichtung selbst unverändert erhalten wird; die schwache Abnahme vom ersten bis dritten der vorstehenden Werthe dürfte auf eine sehr geringe in jener Vorrichtung (wahrscheinlich in Gestalt und Lage des dünnen Platindrahtes) eingetretene Aenderung hinweisen. Als wenige Tage nach der letzten zuvor angeführten Messung der ganze Apparat, um ihn vom Staube zu reinigen, auseinandergenommen und neu zusammengesetzt wurde, hatte sich, wie vorauszusehen, infolge der veränderten Gestalt der neu geformten Platinspirale die Grösse des Ausschlags beträchtlich geändert.

Als Mittel aus vier Versuchen mit der frisch geputzten Zinkplatte erhielt ich jetzt	— 4,93 Skth.
gleich darauf nach abermaligem Putzen als Mittel von fünf Beobachtungen	— 4,92 „
nach sechs Stunden, nach erneutem Putzen	— 4,92 „
und nach zwei Tagen nach wiederholtem Putzen	— 4,94 „

Lässt sich auch, wie das Vorstehende zeigt, der Apparat bei sorgfältiger Behandlung längere Zeit in unverändertem Zustande erhalten, so wird es doch nie gerathen sein, längere Zeit aus einander liegende Messungen unmittelbar mit einander zu vergleichen. Die im Nachfolgenden mitgetheilten Werthe waren entweder, und zwar gilt dies von der Mehrzahl, bei einem und demselben Zustande des Apparates, von dessen Vorhandensein ich mich durch specielle Controlversuche (durch Messung der Ausschläge bei frisch geputztem Zink und Kupfer) tatsächlich überzeugt hatte, ausgeführt und konnten daher unmittelbar unter einander verglichen werden; oder sie waren unter etwas veränderten Umständen angestellt worden und bedurften dann, um mit den anderen verglichen zu werden, einer kleinen Correction. Diese Correction liess sich durch öfter wiederholte Messungen der Ausschläge bei frisch geputztem Zink und Kupfer erhalten. Der Kürze wegen werde ich die Einzelheiten dieser Correctionen später nicht anführen, sondern gleich die auf die Umstände, wie sie bei den obigen letzten vier Versuchsreihen statt hatten, reducirten und also mit den übrigen unter diesen Umständen gemachten Beobachtungen unmittelbar vergleichbaren Werthe angeben, indess stets durch den Zusatz (red.) bemerken, dass die betreffende Zahl in der angedeuteten Rücksicht einer kleinen Reduction unterworfen worden ist.

Als allgemeines Mittel aus den letzten vier Mittelwerthen würde sich bei dem damaligen Zustande des Apparates für frisch geputztes Zink ein Ausschlag von $-4,93$ Skth. ergeben.

Bereits oben S. 26 wurde darauf hingewiesen, dass sich die elektrische Beschaffenheit der Metalloberflächen durch das Liegen an der Luft ändert. Wenn eine frisch geputzte Zinkplatte einige Zeit an der Luft liegt, so rückt sie in der sogenannten Spannungsreihe allmählich immer weiter nach dem Kupfer hin. Die Schnelligkeit, mit welcher dies geschieht, ist je nach dem besonderen Zustande der Zinkoberfläche und der Luft des Zimmers, worin die Platte aufbewahrt wird, nicht immer gleich gross. Während eine frisch geputzte Zinkplatte in der oberen Condensatorplatte eine solche Elektrizitätsmenge hervorrief, dass nach dem Aufziehen der letzteren ein Ausschlag von $-4,93$ Skth. entstand, gab die 19 Stunden lang der Luft ausgesetzt gewesene Platte nur einen Ausschlag von $-4,43$ Skth., der nach 4 Tagen auf $-4,33$, und nach länger als zwei Monaten auf $-3,43$ Skth. (red.) herabsank. Es ist sehr

wahrscheinlich, dass durch längeres Liegen an der Luft der Zustand der Zinkplatten sich noch weiter verändert und somit die elektrische Differenz gegen blankes Zink noch mehr gesteigert haben würde. Die absolute Grenze, bis zu welcher diese Aenderung überhaupt gehen kann, würde sich ohne besondere mit der Platte vorzunehmende Operationen nicht wohl bestimmen lassen.

Es dürfte der Mühe lohnen, frisch gereinigte Platten unter Glasglocken der Einwirkung verschiedener Gase, sowie mehr oder weniger dem Sonnenlichte und höheren oder niederen Temperaturen auszusetzen; indess würde die Durchführung einer solchen Untersuchung mich augenblicklich von dem nächsten Ziele, das ich mir gesteckt habe, abziehen und verspare ich dieselbe deshalb auf eine andere Zeit.

2. Kupfer.

Durch ähnliche Hilfsmittel, wie die von mir zur Messung der atmosphärischen Elektrizität nach absolutem Maasse angewandten, würde auch eine Reduction der zwischen den verschiedenen Metallen bestehenden elektrischen Spannungen auf absolute Maasse ausführbar sein. Für jetzt habe ich indess vorgezogen, alle im Nachfolgenden mitgetheilten Bestimmungen elektromotorischer Kräfte nur in einem relativen Maasse auszudrücken, nämlich in der Spannung zwischen Zink und Kupfer, einer Einheit, zu deren Wahl mich vorzugsweise praktische Gesichtspunkte bewogen. Wegen dieses Umstandes lasse ich hier gleich auf das Zink das Kupfer folgen, damit ich die beim Contacte der später untersuchten Metalle entstehenden elektrischen Spannungen in jener Einheit auszudrücken vermag.

Nach einem ersten sorgfältigen Putzen gab eine Kupferplatte, welche an die Stelle der im vorigen Abschnitte behandelten Zinkplatte gelegt war, bei gleichem Verfahren einen Ausschlag von $-0,70$ Skth.; nach einem gleich darauf erfolgten zweiten Putzen einen Ausschlag von $-0,72$ Skth. Unter Zugrundelegung des Mittels aus beiden Werthen, $-0,71$ Skth., würde die elektrische Differenz zwischen blankem Zink und Kupfer durch $4,93 - 0,71 = 4,22$ gemessen werden.

Nehmen wir diese Spannung $(Zn Cu) = 4,22$ als Einheit, so hätte nach dem Obigen das 19 Stunden an der Luft gelegene Zink gegen blankes Zink eine elektrische Differenz $0,12 (Zn Cu)$, und das über zwei

nate an der Luft gelegene Zink unter gleichen Umständen eine elektrische Differenz von 0,43 (*Zn Cu*) gezeigt.*) Durch längeres Aussetzen die Luft hat sich also die Oberfläche des Zinks um fast die Hälfte ; Intervalles zwischen Zink und Kupfer geändert.

Auch die Oberfläche des Kupfers erleidet beim Liegen an der Luft Veränderungen; ja es scheint dieselbe unter Umständen sogar empfindlicher zu sein, als beim Zink. So ist es mir einmal vorgekommen, dass einem Abende, wo zur Beleuchtung der Apparate zwei Argand'sche Gasflammen länger als zwei Stunden in einem mässig grossen Zimmer brannten, eine frisch geputzte Kupferplatte sich innerhalb weniger Minuten merklich änderte, während eine unmittelbar darauf untersuchte Zinkplatte im gleichen Zeitraume keine merkliche Aenderung zeigte. Selbstverständlich rückt das Kupfer durch Aussetzen an die Luft ebenso wie das Zink nach der negativen Seite der Spannungsreihe hin.

Als die oben erwähnte Kupferplatte 6 Tage an der Luft gelegen hatte, erhielt ich einen Ausschlag von $-0,10$ Skth., was gegen blankes Zink, das von jetzt an stets durch (*Zn*) bezeichnet werden soll, eine elektrische Differenz von 1,14 (*Zn Cu*) gibt. Am folgenden Tage beobachtete ich einen Ausschlag von $-0,05$ Skth., also fast denselben Werth. Als später die Platte von Neuem geputzt worden, fand ich bereits nach 24 Stunden, wo während der letzten zwei Stunden zwei Gaslampen gebrannt hatten, nur noch einen Ausschlag von $-0,20$ Skth. Eine länger als zwei Monate an der Luft gelegene und nur durch einen weichen Pinsel vom Staube gereinigte Platte lieferte einen Ausschlag von $-0,31$ Skth.; doch bin ich nicht im Stande anzugeben, ob diese letztere Platte gerade diejenige gewesen, welche früher nach wenigen Tagen bis $-0,05$ Skth. herabgesunken war. Sollte dies der Fall sein, so wäre die Kupferplatte nach einem Sinken in der Spannungsreihe wieder etwas gestiegen; ein Vorgang, der mit anderen gelegentlichen Beobachtungen am Kupfer in Uebereinstimmung stehen, und sich beim Blei und Silber (vgl. S. 38 u. 45) wiederholen würde.

Ich hielt es für nöthig, auch eine galvanoplastisch niedergeschlagene Kupferplatte zu untersuchen. Eine aus einer grossen Kupferdruckplatte herausgeschnittene und, um ihr die nöthige Steifigkeit zu geben, auf eine

*: Kohlrausch fand die Spannung des blanken Zinks gegen das an der Luft umgelaufene und oxydirte zu 0,40 (*Zn Cu*). (Pogg. Ann. Bd 88. S. 473).

Zinkplatte gelöthete Platte verhielt sich nach dem Putzen den gewöhnlichen Kupfer genommenen Platten sehr nahe gleich, doch ein klein wenig negativer als das gewöhnliche Kupfer, so dass die elektrische Differenz zwischen blankem Zink und diesem galvanischen $1,01 (Zn\ Cu)$ betrug; länger als zwei Monate der Luft ausgesetzt, ergab galvanoplastisch erzeugte Platte einen Ausschlag von $-0,15$ Skt gegen (Zn) einer elektrischen Differenz $= 1,13 (Zn\ Cu)$ entspricht.

3. Aluminium.

Als im Jahre 1848 Poggendorff*) ein von Wöhler dargegebenes Stück Aluminium mit anderen Metallen, um seine Stellung in der Spannungsreihe zu bestimmen, in sehr verdünnte Schwefelsäure tauchte, fand er es positiver als Platin, Silber, Kupfer, Wismuth, Arsen und Nickel, dagegen negativer als Blei, Zinn, Eisen, Cadmium und schloss damals seine Mittheilung dieser Versuche mit den Worten ab, dass nach diesem Resultate das Aluminium ein ziemlich negatives Metall sei. Auch die 1855 von Wheatstone**) und zum Theil auch 1857 von Buff***) über galvanische Ketten aus Aluminium und anderen Metallen mit verschiedenen Flüssigkeiten angestellten Versuche können als eine Bestätigung des Schlusssatzes in Poggendorff's Notizen erscheinen. Indess machten es mir meine Beobachtungen über eine Kette aus Aluminium, Kupfer und destillirtem Wasser sehr wahrscheinlich, dass das Aluminium keineswegs ein ziemlich negatives Metall sein könnte, es vielmehr positiver als Zink und Zinn sein müsse, und die zu erwähnten Beobachtungen in den Einwirkungen der Flüssigkeiten auf das Metall ihre Begründung finden dürften.

Da es zur unzweifelhaften Bestimmung der Stellung eines Metalls in der Spannungsreihe nur ein Mittel gibt, nämlich das zuvor auf Zink und Kupfer angewandte Verfahren unter Ausschluss jeder Flüssigkeit, so schaffte ich mir aus der Aluminiumfabrik in Amfreville eine hinreichend grosse und dicke Aluminiumplatte, so dass ich aus ihr eine den gewöhnlichen Kupfer- und Zinkplatten ähnliche Condensatorplatte von 100 mm Durchmesser und 4,5 mm Dicke fertigen konnte. Die angewandte Aluminiumplatte war von der reinsten Sorte und enthielt nach einer in

*) Pogg. Ann. Bd. 73. S. 649.

**) Proc. of Roy. Soc. VII, 369.

***): Annal. der Chem. u. Pharm. Bd. 102. S. 265 ff.

chen Laboratorium von Hrn. Dr. Stadler ausgeführten Analyse nur aus Eisen und Kieselsäure. Beim Uebergiessen mit Salzsäure entwickelte das Aluminium einen übelriechenden, auf Kohle deutenden Wasserstoff. Die Platte war gewalzt und lieferte beim Abdrehen und Schleifen eine sehr vollkommene ebene Fläche. Dagegen hatte das Putzen derselben grosse Schwierigkeit: man reibt bei der Weichheit des Metalles gar zu leicht das Schmirgelpulver in die Platte; man darf mit dem Schmirgelpapier nicht stark aufdrücken, und muss zuletzt haltend mit einem etwas harten Handtuche reiben, das anfangs beträchtlich geschwärzt wird, später aber nur schwache Spuren des abgeriebenen Metalles zeigt.

An dem ersten Tage, wo die oben mitgetheilten Messungen von Zink und Kupfer ausgeführt wurden, hatte ich die Aluminiumplatte mit Bimstein und Wasser auf einer Zinkplatte neu abgeschliffen. Nach darauf erfolgtem sorgfältigen Putzen erhielt ich gegen die obere Kupferplatte einen Ausschlag von $-5,27$ Skth.; ein wiederholtes Putzen lieferte $-5,26$ Skth. Hiernach ist das Aluminium gegen (Zn) unzweifelhaft positiv, und die elektrische Differenz beider würde $0,08$ (Zn Cu) betragen. Ich wusste durch frühere Messungen bereits, dass diese Differenz bei reinerer Oberfläche der Aluminiumplatte noch höher steigen kann. Ich begann daher nach zwei Tagen die Messungen von Neuem; durch das zweitägige Liegen an der Luft hatte sich die Aluminiumplatte so verändert, dass sie nur noch einen Ausschlag von $-4,52$ Skth. gab, wonach sie also gegen (Zn) negativ sein und mit ihm eine Spannung $0,10$ (Zn Cu) erzeugen würde. Durch sorgfältiges Putzen stieg die Platte jetzt in der Spannungsreihe so weit, dass gegen die obere Kupferplatte unmittelbar nach einander folgende Ausschläge gemessen wurden:

— $5,97$ Skth.

— $5,86$ „

— $5,86$ „

— $5,81$ „

Nach Verlauf von weiteren zwei Minuten war der Ausschlag gesunken auf

— $5,67$ Skth.

und nach neuen zwei Minuten auf

— $5,52$ Skth.

Durch blosses Abreiben mit einem Handtuche verminderte sich derselbe noch weiter bis

— $5,37$ Skth.

Aus diesen Beobachtungen folgt eine grosse Veränderlichkeit Aluminiums an der Luft. Aus der ersten Messung — 5,97 Skth. ergiebt die elektrische Differenz zwischen Aluminium und (Zn) zu 0,25 (Zn Cu) früheren hier nicht mitgetheilten Versuchen war es mir auch gelungen, eine Differenz von 0,22 (Zn Cu) zu beobachten. Ich glaube dass die Zahl 0,25 (Zn Cu) schon die ganze Höhe der Differenz bei blanken Metallen darstellt; denn erstens war die Platte selbst nach dem sorgfältigen Putzen durchaus nicht überall gleich stark glänzend zweitens wird sich dieselbe in der Zeit zwischen dem Putzen und der ersten Messung, ja selbst während des Abreibens mit dem Tuche etwas geändert haben. Ich gebe daher die Zahl 0,25 (Zn Cu) nur als untere Grenze; aus ihr folgt aber im Gegensatze zu den früheren Messungen der früheren Beobachtungen, dass das Aluminium ein sehr sensibles Metall ist und in der Spannungsreihe noch um ein Viertel des Intervalles zwischen Zink und Kupfer oberhalb des Zinks steht.

Als die Platte vier Tage an der Luft gelegen hatte, gab sie die obere Condensatorplatte nur noch eine Spannung von — 3,44 was einer elektrischen Differenz gegen (Zn) gleich 0,35 (Zn Cu) entspricht aber in dem Sinne, dass jetzt (Zn) gegen das an der Luft gelegene Aluminium positiv war. Die Aluminiumplatte war unmittelbar nach Zinkplatte geputzt worden, hatte stets neben letzterer gelegen und war genau denselben Einflüssen ausgesetzt gewesen; nach jenen vier Tagen betrug der Ausschlag dieser Zinkplatte noch — 4,33 Skth. Hieraus folgt die elektrische Differenz der gleichzeitig der Luft ausgesetzt gewesenen Zink- und Aluminiumplatte 0,24 (Zn Cu). Blankes Aluminium gibt gegen Zink nach vier Tagen an der Luft gelegenes Aluminium die Spannung 0,60 (Zn Cu). Nachdem die Platte länger als zwei Monate der Luft ausgesetzt gewesen hielt ich nur noch einen Ausschlag von — 2,40 Skth. (red.), woraus die elektrische Differenz gegen blankes Zink = 0,60 (Zn Cu) und gegen blankes Aluminium = 0,85 (Zn Cu) folgt. Innerhalb vier Tagen hat also das Aluminium seinen Ort in der Spannungsreihe um fast $\frac{1}{2}$, und innerhalb zweier Monate um mehr als $\frac{2}{3}$ des Intervalles zwischen Zink und Kupfer geändert.

4. Zinn.

Eine gegossene Platte von englischem Zinn wurde, um die nöthige Steifigkeit zu geben, auf eine Zinkplatte gelöthet; ihre geglättete Oberfläche war nicht ganz untadelhaft, sondern zeigte einige

kleine Grübchen, deren Gesamtwirkung übrigens die nachfolgend angeführten Resultate nicht merklich zu stören vermochte.

Als Mittel aus einer ersten Versuchsreihe ergab sich ein Ausschlag von $-3,94$ Skth., aus einer zweiten ein Ausschlag von $-3,96$ Skth. Das Mittel aus beiden Werthen $-3,95$ Skth. führt zu einer elektrischen Differenz zwischen (Zn) und Zinn $= 0,23$ (Zn Cu).

Die 7 Tage an der Luft gelegene Platte gab nur noch einen Ausschlag von $-3,38$ Skth., was einer elektrischen Differenz zwischen (Zn) und dieser Zinnplatte $= 0,36$ (Zn Cu) entspricht. Nachdem die Zinnplatte länger als zwei Monate der Luft ausgesetzt gewesen und wahrscheinlich durch etwas Chlorzink, das von der gelötheten Fläche durch eine poröse Stelle nach der Oberfläche gedrungen, an einer Stelle nahe am Rande etwas schwärzlich gefärbt war, sank der Ausschlag auf $-2,92$ Skth. (red.); in diesem Zustande würde die Platte mit (Zn) eine Spannung $= 0,48$ (Zn Cu) dargeboten haben.

5. *Kadmium.*

Als eine Platte käuflichen Kadmiums als untere Condensatorplatte benutzt wurde, erhielt ich als Mittel aus einer ersten Versuchsreihe $-3,57$ Skth., und als Mittel aus einer zweiten $-3,54$ Skth.; das Mittel aus beiden Reihen ist $-3,55$ Skth.

Leider war die Kadmiumplatte etwas zu klein gegossen; ihr Durchmesser erreichte nur $93,3^{\text{mm}}$, während, wie schon oben bemerkt, der Durchmesser der übrigen Platten 95^{mm} betrug. Ich liess deshalb eine Zinkplatte ebenfalls bis zu einem Durchmesser von $93,3^{\text{mm}}$ abdrehen, und legte dieselbe genau so auf den Träger für die untere Condensatorplatte, wie zuvor die Kadmiumplatte gelegen hatte. Diese Zinkplatte zeigte im Mittel aus zwei Versuchsreihen, welche $-4,51$ Skth. und $-4,48$ Skth. gaben, einen Ausschlag von $-4,49$ Skth. Um also die für die Kadmiumplatte gefundene Zahl mit den für die übrigen Metalle erhaltenen vergleichbar zu machen, musste der beobachtete Ausschlag von $-3,55$ Skth. im Verhältniss von $4,49:4,93$ erhöht werden. Der auf diese Weise berechnete Ausschlag von $-3,90$ Skth. weist eine elektrische Differenz zwischen (Zn) und Kadmium $= 0,24$ (Zn Cu) nach.

Nach siebentägigem Aussetzen an die Luft hatte der Ausschlag bis $-3,38$ Skth. (red.), und nach länger als zweimonatlichem Liegen, wodurch

die Platte ein ziemlich dunkles Aussehen erhalten, bis $-2,32$ Skth. (red abgenommen; der erstere Zustand entspricht einer elektrischen Differenz gegen (Zn) im Betrage von $0,36 (Zn Cu)$ und der letztere im Betrage von $0,61 (Zn Cu)$.

6. Blei.

Obgleich ich bei der leichten Oxydirbarkeit des Bleis mit sehr geringen Hoffnungen auf brauchbare Resultate an die Bestimmung der Stellung des Bleis in der Spannungsreihe ging, da zwischen dem Putzen und der Messung seiner elektrischen Differenz gegen die obere Kupferplatte stets einige Zeit verfließen musste: so scheinen doch die Versuche selbst darzuthun, dass der erzielte Werth nicht so ungenau sein kann, als ich fürchtete.

Als die auf eine Zinkplatte gelöthete Bleiplatte sorgfältig geputzt war, erhielt ich in einer ersten Versuchsreihe als Mittel der beobachteter Ausschläge $-3,09$ Skth.; eine zweite Reihe nach erneutem Putzen gab den Mittelwerth $-3,07$ Skth. Zehn Minuten nach dem Putzen betrug der Ausschlag noch $-2,95$ Skth., hatte sich also nur wenig geändert. Die gleich grosse elektrische Spannung nach zwei verschiedenen Reinigungen, sowie die langsame Abnahme derselben dürften es nicht unwahrscheinlich machen, dass die obigen Spannungen von einer ziemlich reinen Bleifläche herrühren. Das Mittel aus den vorstehend genannten beiden Werthen $-3,08$ Skth. entspricht einer elektrischen Differenz gegen (Zn) gleich $0,44 (Zn Cu)$.

Die vier Tage der Luft ausgesetzte Platte gab einen Ausschlag von $-2,18$ Skth.; nach mehreren Wochen, während deren Verlauf die Oberfläche sich stark blau und gelblich gefärbt hatte, betrug derselbe $-2,41$ Skth., und nach länger als zwei Monaten, wo die Platte sehr dunkel aussah, $-2,38$ Skth. (red.) Den drei letzten Ausschlägen entsprechen der Reihe nach die elektrischen Differenzen gegen Zink: $0,65 (Zn Cu)$, $0,59 (Zn Cu)$, $0,49 (Zn Cu)$. Es tritt also hier der eigenthümliche Fall ein, dass ein der Einwirkung der Luft preisgegebene Metallplatte erst ihren Ort in der Spannungsreihe in der Weise ändert, dass sie nach der negativen Seite hinrückt, später aber umkehrt und fast die ursprüngliche Stellung wieder erreicht. Eine Erklärung dieses eigenthümlichen Vorganges dürfte dadurch gegeben sein, dass das Blei anfangs oxydirt, und dann später das Oxyd in Schwefelblei verwandelt wird. Diese Ansicht erscheint u

so annehmbarer, als der Schwefelwasserstoff weniger leicht das Metall als das Oxyd in Schwefelmetall verwandelt; eine strenge Prüfung derselben liesse sich übrigens, falls es nöthig wäre, auf experimentellem Wege in mehrfacher Weise liefern. Ich erinnere noch daran, dass wahrscheinlich eine ähnliche Ortsveränderung (s. S. 33), wenn auch in geringerem Maasse, beim Kupfer eintritt, und dass wir ebendieselbe Erscheinung später S. 45 beim Silber wieder antreffen werden.

7. Antimon.

Aus Antimon, das durch Schmelzen mit Salpeter gereinigt war, wurde eine Platte gegossen und bis zu einem Durchmesser von 95^{mm} abgedreht; ihre polirte Fläche zeigte zahlreiche äusserst feine dunkle Pünktchen.

Aus den Mittelwerthen dreier Versuchsreihen von $-1,97$, $-2,05$, $-1,99$ Skth. ergibt sich das allgemeine Mittel $-2,00$ Skth., dem eine elektrische Differenz gegen Zink $= 0,69$ (*Zn Cu*) entspricht.

Als die Platte 7 Tage an der Luft gelegen hatte, betrug das Mittel der beobachteten Ausschläge $-1,65$ Skth., und nach länger als zwei Monaten $-1,25$ Skth. (red.), woraus sich die elektrische Differenz gegen Zn respective zu $0,78$ (*Zn Cu*) und $0,87$ (*Zn Cu*) ergibt.

8. Wismuth.

Eine Platte von käuflichem Wismuth bot als Mittel einer Versuchsreihe einen Ausschlag von $-1,87$ Skth., und als Mittel einer zweiten einen Ausschlag von $-1,94$ Skth. dar; aus dem Mittel dieser beiden Werthe $-1,89$ Skth. folgt gegen (*Zn*) eine elektrische Differenz $0,72$ (*Zn Cu*).

Achtzehn Stunden nach der zweiten Versuchsreihe, während welcher Zeit die Platte frei an der Luft gelegen, betrug dieser Ausschlag noch $-1,87$ Skth., hatte sich also nur wenig verringert; nach 2 Tagen war er bis $-1,42$ Skth., nach 5 Tagen bis $-1,12$ Skth., und nach länger als zwei Monaten bis $-0,98$ Skth. (red.) gesunken. Diesen vier Ausschlägen entsprechen der Reihe nach die elektrischen Differenzen gegen Zink: $0,73$ (*Zn Cu*), $0,84$ (*Zn Cu*), $0,90$ (*Zn Cu*) und $0,94$ (*Zn Cu*).

9. *Quecksilber.*

Da ich die leichte Veränderlichkeit der Quecksilberoberfläche fürchtete, so wurde die schon S. 10 erwähnte eiserne Schale auf eine grössere Holzscheibe gekittet, die am Rande eine kreisförmige Rinne zur Aufnahme des über den Rand der Schale geworfenen Quecksilbers besass. Das Quecksilber hatte längere Zeit unter einer Sublimatlösung gestanden, war dann von derselben getrennt und nach mehrmaligem Filtriren durch einen Papiertrichter in einer hölzernen verschlossenen Büchse ebenfalls wieder längere Zeit aufbewahrt worden. Bei Anfüllung der Schale floss das flüssige Metall aus der Büchse durch einen am Boden befindlichen Hahn ab. Um behufs der Messung eine möglichst reine Oberfläche zu erzielen, wurde die obere Schicht des über den Rand der Eisenschale hervorragenden Quecksilbers durch Abstreichen mit der geradlinigen Kante eines steifen Papieres zur Seite geschoben, in die untere Holzrinne geworfen, und unmittelbar darauf die Grösse der Spannung beobachtet.

Die Bestimmung der Stellung des Quecksilbers in der sogenannten Spannungsreihe kann nicht auf dieselbe Genauigkeit, wie die übrigen Messungen Anspruch machen, indem sich die Oberfläche wegen ihrer convexen Gestalt am Rande nicht scharf auf die Theilstriche des Ocularmikrometers einstellen liess und ausserdem die untere Condensatorfläche (die Quecksilberoberfläche) etwas grösser war als sonst.

Wie ich vorausgesehen, zeigte sich in der That die Oberfläche des Quecksilbers sehr veränderlich, selbst wenn es so rein war, dass nach 24stündigem Stehen die Oberfläche noch ebenso blank erschien als nach dem Einfüllen. Wurde Quecksilber in die eiserne Schale gegossen und unmittelbar nach dem Abstreichen der Oberfläche die Messung vorgenommen, so erhielt ich Ausschläge, die von $-1,3$ bis $-1,5$ Skth. (red.) schwankten; die Schwankung rührte theils von Aenderungen in der Oberflächenbeschaffenheit des Quecksilbers, theils von ungenauer Einstellung des Abstandes der Condensatorflächen her. Da mit der Zeit der negative Ausschlag sich verringerte, so dürfte man wohl $-1,5$ Skth. (red.) als den wahrscheinlicheren Werth betrachten. Aus ihm würde sich eine elektrische Differenz zwischen Zink und Quecksilber $= 0,81$ (*Zn Cu*) ergeben, das Quecksilber also in die Nähe des Eisens zu stehen kommen.

Sehr bald jedoch nahm der anfängliche Ausschlag ab, so dass er nach 5 Minuten nur $-1,0$, nach weiteren 7 Minuten nur noch $-0,9$ Skth.

ig, nach 2 Stunden sogar in $+0,4$, und nach weiteren 5 Stunden $+0,9$ Skth. übergegangen war. Unmittelbar nach Ableseung des positiven Ausschlages wurde die Haut von der Oberfläche abgerieben, und sofort ein Ausschlag von $-1,2$ Skth. beobachtet. Der relative Ausschlag von $+0,9$ Skth. würde eine Spannung der längeren an der Luft gestandenen Quecksilberoberfläche gegen (Zn) im Bezüge von $1,40$ (Zn Cu) liefern.

Die vorstehenden Versuche wurden erst nach Durchführung fast aller richtigen ausgeführt, um nicht möglicherweise den Zustand der unteren Platte der oberen kupfernen Condensatorplatte zu stören, auf welcher die Platte, wenn sie dicht über der Quecksilberoberfläche schwebte, leicht Quecksilberdämpfe niederschlagen konnten.

10. Eisen.

Es hat viele Mühe gekostet, eine tadelfreie Eisenplatte darzustellen; alle Platten, die ich hatte schmieden lassen, zeigten nach dem Abdrehen mehr oder weniger beträchtliche Grübchen. Zuletzt gelang es, eine schöne glatte Oberfläche zu erzielen, als eine Platte von sehr gutem Weissblech auf eine andere geschmiedete Eisenplatte aufgelöthet und die freie Seite des Bleches vom Zinn möglichst sorgfältig gereinigt wurde.

Eine erste Reihe von Messungen gab einen Ausschlag von $-1,52$ Skth. und eine zweite einen Ausschlag von $-1,50$ Skth.; aus dem Mittelwert geht für die elektrische Differenz dieses Eisens gegen (Zn) der Werth $1,51$ (Zn Cu) hervor.

Obwohl, wie erwähnt, die Oberfläche der Platte durch Abschleifen möglichst sorgfältig von anhängendem Zinn gereinigt worden, konnte doch der Verdacht nicht zurückgewiesen werden, dass möglicherweise das Zinn, wenn auch nur in geringem Maasse, in das Eisen eingedrungen sei und mit ihm sich chemisch verbunden habe. Ich schabte deshalb von der Oberfläche der bereits zu den vorstehenden Messungen benutzten Platte eine kleine Menge ab, und in der That ergab die chemische Untersuchung in dieser Masse Spuren von Zinn. Die Platte hatte durch dieses Abschaben ziemlich starke Vertiefungen erhalten; ich liess sie bis zur Herstellung einer vollkommen ebenen Oberfläche von Neuem abschleifen und durfte hoffen, durch diese Operation die noch zinnhaltigen Schichten beseitigt zu haben.

Als die Platte jetzt von Neuem auf ihr elektrisches Verhalten untersucht wurde, zeigte sie sich in der That dem Kupfer ein wenig näher stehend. Sie erzeugte im Mittel aus zwei Versuchsreihen einen Ausschlag von $-1,44$ Skth., während die Zinkplatte einen solchen von $-5,56$ und die Kupferplatte von $-0,67$ Skth. gab.*) Hieraus folgt eine elektrische Differenz gegen (Zn) im Betrage von $0,84$ (Zn Cu).

Der Sicherheit wegen liess ich noch die untere Seite der dicken geschmiedeten Platte, auf deren obere Seite jene Weissblechplatte aufgelöthet worden, eben schleifen; sie zeigte mehrere kleine Vertiefungen. Bei der Messung erhielt ich einen mit dem vorstehend genannten sehr nahe übereinstimmenden Ausschlag von $-1,50$ Skth.

Nachdem die Platte nach den ersten Messungen 7 Tage der Luft ausgesetzt gewesen war, hatte der Ausschlag bis auf $-0,72$ Skth. abgenommen; nach länger als zwei Monaten fand ich ihn sogar nur $-0,37$ Skth. (red.), wobei jedoch die Oberfläche durchaus keine Rostflecken zeigte. Die beiden letzten Ausschläge liefern für die elektrische Differenz gegen (Zn) respective $1,00$ (Zn Cu) und $1,08$ (Zn Cu).

Weiterhin werden auch Messungen über die Stellung von Stahl und Gusseisen in der Spannungsreihe mitgetheilt werden; aus ihnen folgt, dass Beimengungen von Kohle das Eisen negativer machen. Da das obige Eisenblech auch nicht absolut frei von Kohle gewesen sein wird, so müsste eigentlich der obige Werth $0,84$ (Zn Cu) nur als ein Grenzwert angesehen werden, oberhalb dessen (unter der Voraussetzung, dass auch bereits geringe Mengen Kohle das Eisen nach der negativen Seite verschieben) der Werth des reinen Eisens liegen würde; indess dürfte die Abweichung des wahren Werthes von dem eben aufgestellten wahrscheinlich nicht erheblich sein.

11. Gold.

Ich liess zunächst eine Kupferplatte auf galvanischem Wege etwas stark vergolden, so dass sie einiges Reiben mit Schmirgelpapier aushielt, ohne dass das Kupfer sichtbar ward. Leider wurden die ersten Messungen im Winter bei Gaslicht dadurch sehr gestört, dass die Oberfläche dieser Platte nach dem Putzen ihre Beschaffenheit sehr schnell

*) Der elektrische Messapparat war einige Zeit zuvor ganz aus einander genommen, gereinigt und dabei auch die obere Kupferplatte geputzt worden.

änderte, ähnlich wie beim Kupfer (S. 33), und sicherlich musste diese schnelle Aenderung ebenfalls den durch mehrstündiges Brennen einer oder zweier Gasflammen in der Luft des Zimmers verbreiteten Gasen zugeschrieben werden, denn bei einem früheren vorläufigen Versuche, wo kein Gas gebrannt hatte, hielt sich der Zustand selbst bis zum andern Tage nahe constant.

Der grösste Ausschlag, den die frisch geputzte Goldplatte gab, war $-0,65$ Skth.; er sank in $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Minuten auf $-0,50$ Skth., in einer neuen halben Minute auf $-0,40$, und nach 10 Minuten betrug er nur noch $-0,20$ Skth. Der erste Ausschlag entspricht einer elektrischen Differenz gegen (Zn) im Betrage von $1,01$ (Zn Cu), und der letzte einer solchen Differenz von der Grösse $1,12$ (Zn Cu).

Nach Verlauf eines halben Jahres liess ich die Platte nochmals galvanisch vergolden. Um etwaige Spuren von Kupfer, die sich aus der bereits länger gebrauchten Flüssigkeit niedergeschlagen haben könnten, von der äussern Oberfläche hinwegzunehmen, übergoss ich die eine Seite der Platte zwei Mal mit der stärksten rauchenden Salpetersäure, und liess dieselbe das erste Mal eine und das zweite Mal zwei Minuten darauf stehen. Die Farbe der Platte wurde dadurch etwas dunkler. Nach dem Putzen zeigte sich indess die mit Salpetersäure behandelte Seite der andern davon unberührt gebliebenen ganz gleich; sie gaben in dem neu gereinigten Messapparate einen Ausschlag von $-0,64$ Skth., während die Kupferplatte einen solchen von $-0,63$ Skth. erzeugte. Hiernach würde also das Gold mit dem Kupfer dieselbe Stelle in der Spannungsreihe einnehmen, und gegen Zink eine elektrische Differenz $=1,00$ (Zn Cu) zeigen. Bei den jetzigen Versuchen hielt sich der Zustand der Platte längere Zeit constant, so dass während der Messungen selbst keine Aenderung zu bemerken war; es hatte aber auch seit mehreren Tagen kein Gas im Zimmer gebrannt. Als die Platte 5 Tage der Luft ausgesetzt gewesen war, zeigte sie gegen (Zn) eine Spannung $=1,19$ (Zn Cu)*).

*) Kohlrausch gibt für (Zn Au) den Werth $1,15$ (Zn Cu); als Goldplatte diente eine (chemisch rein) vergoldete Messingplatte. Pogg. Ann. Bd. 82. S. 15 und Bd. 88. S. 472. Kohlrausch erwähnt nicht, dass er die Goldplatte frisch geputzt habe; es scheint vielmehr ein Abreiben derselben nicht stattgefunden zu haben, denn er sagt an dem letzten Orte nur: »Das Gold wurde in den andern Condensator gebracht und einer Zinktafel gegenüber gestellt, welche erst kürzlich gereinigt worden war.« Wäre das Gold nicht geputzt worden, so dürfte der Grund des Unterschiedes zwischen den von Kohlrausch und von mir erhaltenen Werthen offen vorliegen.

während diese Spannung unmittelbar darauf nach neuem Putzen der Oberfläche wieder $= 1,00$ (*ZnCu*) wurde. Nach mehreren Tagen gab die an der Luft gelegene Goldplatte gegen (*Zn*) sogar eine Spannung, die fast $1,30$ (*ZnCu*) erreichte.

Ich habe auch versucht, den Ort einer dichten Goldplatte zu bestimmen. Eine dünne Platte vom reinsten Golde, wie es der Probierer dem Goldarbeiter liefert, deren Durchmesser $73,2^{\text{mm}}$ betrug, wurde auf eine gleich grosse Kupferplatte aufgelöthet; leider war die Löthung nicht überall gleich gut gelungen, weshalb sich beim Putzen mit Schmirgelpapier an einer kleinen Stelle die Goldplatte von der Kupferplatte löste und daselbst eine niedrige etwas breite Blase bildete; ausserdem zeigten sich unter dem Mikroskope auf der Platte kleine weisse entweder von anhängendem Zinn oder Eisen gebildete Flecken. Die Farbe der frisch geputzten Oberfläche war sehr dunkelgelb.

Diese Goldplatte wurde auf ein geeignetes Stativ so unter die obere kupferne Condensatorplatte gelegt, dass die vorderen Ränder beider in einer Verticale lagen und der Abstand der beiden Platten mittelst des Mikroskops ebenso wie sonst gemessen werden konnte. Der bei diesen Versuchen beobachtete Ausschlag war aber wegen der geringen Grösse der Goldplatte nicht unmittelbar mit den Ausschlägen, welche die grösseren Platten lieferten, vergleichbar, weshalb eine Zink- und eine Kupferplatte von gleichem Durchmesser mit der Goldplatte angefertigt werden mussten. Nach sorgfältigem Putzen wurden dieselben genau an die Stelle der Goldplatte gelegt, und wie mit dieser verfahren.

Die Zinkplatte erzeugte einen Ausschlag von $-2,36$ Skth., die Kupferplatte von $-0,39$ Skth., und die Goldplatte von $-0,47$ Skth.; hieraus würde eine elektrische Differenz des Goldes gegen (*Zn*) gleich $0,96$ (*ZnCu*) folgen, also die frisch geputzte Oberfläche des Goldes sogar noch positiver als die frische Oberfläche des Kupfers sein.

Als die gewalzte Goldplatte einen Tag an der Luft gelegen hatte, gab sie einen Ausschlag von $+0,05$ Skth., was eine elektrische Differenz gegen (*Zn*) gleich $1,22$ (*ZnCu*) anzeigt.

12. Palladium.

Eine viereckige Palladiumplatte von 59^{mm} Länge und 49^{mm} Breite deren Benutzung ich der Güte meines verehrten Collegen Herrn Prof Erdmann verdanke, wurde, da ihre Oberfläche etwas wellenförmig

war, mittelst des S. 17 beschriebenen mit Hebelvorrichtung versehenen Apparates in Bezug auf ihr elektrisches Verhalten untersucht. Das Palladium liess sich sehr schwer reinigen.

Als die Palladiumplatte mit einer seit länger als zwei Monaten an der Luft gelegenen Silberplatte verglichen wurde, zeigte sie sich schwach positiv; dagegen erschien sie gegen eine ebenso lange an der Luft gelegene Kupferplatte negativ, so dass das Mittel aus den Werthen für die beiden Platten, 1,15 (*Zn Cu*), sich nicht sehr von der Wahrheit entfernen wird.

13. Silber.

Eine mässig dicke Platte chemisch reinen Silbers von 95^{mm} Durchmesser wurde auf eine Kupferplatte gelöthet, und gab nach sorgfältiger Reinigung nur einen äusserst geringen Ausschlag; derselbe betrug im Mittel einer ersten Versuchsreihe + 0,07 Skth., und einer zweiten + 0,05 Skth.; aus dem Mittel beider Werthe + 0,06 Skth. folgt gegen (*Zn*) eine elektrische Differenz 1,18 (*Zn Cu*).*

Nach zweitägigem Liegen an der Luft betrug der Ausschlag in einem Falle + 0,10 Skth.; ein Abreiben mit einem Handtuche änderte Nichts. Bei einem andern Versuche gab die Platte bereits zwei Stunden nach dem Putzen den Ausschlag + 0,17 Skth.; nachdem sie dann 5 Tage an der Luft gelegen, in welcher Zeit nur am vorletzten Tage auf einige Zeit Gas im Zimmer gebrannt hatte, fand ich einen Ausschlag von + 0,53 Skth., was gegen (*Zn*) eine elektrische Differenz von 1,30 (*Zn Cu*) anzeigt. Die Platte blieb nun länger als zwei Monate unangerührt an der Luft liegen und zeigte nach dieser Zeit eine besonders am Rande merkliche gelbe Färbung; in diesem Zustande auf ihr elektrisches Verhalten untersucht gab sie fast gar keinen Ausschlag, verhielt sich also dem reinen Silber sehr nahe gleich. Auch beim Silber erfolgt also, ebenso wie beim Blei und vielleicht auch beim Kupfer, durch Liegen an der Luft eine Veränderung der Oberfläche in der Weise, dass, vielleicht infolge der Einwirkung des Sauerstoffes der Luft, dieselbe erst nach der negativen Seite der Spannungsreihe hin sich verschiebt, und dann, wahrscheinlich durch das gebildete Schwefelsilber, wieder nach dem ursprünglichen

*, Kohlrausch fand für (*Zn Ag*) den Werth 1,09 (*Zn Cu*); als Silberplatte diente eine versilberte Messingplatte. Pogg. Ann. Bd. 82. S. 15 und Bd. 88. S. 472.

Orte zurückkehrt. Ob die Platte durch noch längeres Aussetzen an die Luft sich dem Zinke vielleicht noch mehr nähern kann, habe ich bis jetzt nicht zu untersuchen vermocht.

13. *Platin.*

Eine dünne auf eine ebengeschliffene Kupferplatte aufgelöthete Platinplatte von 95^{mm} Durchmesser gab in drei übereinstimmenden Versuchsreihen im Mittel den Ausschlag + 0,27 Skth., in einer vierten den Ausschlag + 0,32. Aus dem Mittel + 0,28 Skth. ergibt sich eine elektrische Differenz gegen (Zn) im Betrage von 1,23 (Zn Cu). *)

Auch die Oberfläche des Platins erleidet durch Liegen an der Luft gewisse Veränderungen.

B. Legirungen.

1. *Amalgamirtes Zink.*

Eine Zinkplatte von gleicher Grösse mit den zu den vorstehenden Messungen benutzten ward durch Reiben mit Quecksilber und etwas Schwefelsäure amalgamirt, dann mit Wasser abgewaschen und mit Fliesspapier abgerieben. Nachdem sie länger als zwei Monate an der Luft gelegen, wurden einige Tropfen reines Quecksilber darauf gebracht, mit einem Stückchen Schmirgelpapier behufs einer vollständigen Amalgamirung darauf herumgerieben und dann die Platte durch Abreiben mit Papier und Handtuch von allem überflüssigen Quecksilber und von etwa anhängendem Schmutze befreit. Die Platte wurde nun entweder in diesem Zustande sofort als untere Condensatorplatte benutzt, oder auch nochmals mit frischem Quecksilber übergossen und durch blosses Abstreichen mit Papier möglichst von einer Oxydhaut gereinigt.

Die Fläche der amalgamirten Platte war nicht vollkommen eben, sondern hatte durch stellenweis stärkeren Angriff des Quecksilbers einige sehr schwach vertiefte Stellen. Indess war die Unebenheit nicht so

*) Kohlrausch fand für (Zn Pt) den Werth 1,23 (Zn Cu); als Platinplatte diente eine Kupferplatte, welche durch Hilfe von Platinsalmiak mittelst eines ziemlich starken Stromes mit Platin überzogen war. Die von Kohlrausch benutzte Zinkplatte war durch Kaliumzinkcyanür auf galvanischem Wege mit einer Schicht reinen Zinks überzogen worden. Pogg. Annal. Bd. 82. S. 15 und Bd. 88. S. 472.

oss, dass bei dem gewählten Abstände der beiden Condensatorplatten
hr erhebliche Störungen in dem Werthe der Spannungen zu be-
rchten gewesen wären.

Wenn die Platte nach dem Amalgamiren mehr oder weniger stark
mit einem Handtuche abgerieben wurde, so gab sie höchstens die Span-
nung von $-4,76$ Skth.; indess erschien nach einem solchen Abreiben
die Oberfläche nicht überall stark glänzend. Als in einem anderen Ver-
uche die Platte mit Quecksilber übergossen und durch Ueberstreichen
mit Papier eine dünne Schicht darauf gelassen wurde, erhielt ich einen
Ausschlag von $-5,07$ Skth. Dabei war aber die Platte schon auf einer
seite vom Rande her etwas blind geworden. Dürfte man diese Zahl als
ichtig annehmen, so würde das amalgamirte Zink noch etwas positiver
sein, als das gewöhnliche; indess kann die geringe Erhöhung des Aus-
schlages auch dadurch erzeugt worden sein, dass die Oberfläche der
amalgamirten Platte durch die Quecksilberschicht, die nicht ganz eben
erschien, der oberen Kupferplatte mehr genähert war, als eine mit ihrem
Rande in gleicher Höhe angebrachte gewöhnliche Zinkplatte mit ebener
Oberfläche.

Als die Platte ein anderes Mal, nachdem sie frisch amalgamirt und
bloss mit Papier abgewischt war, eine Spannung von $-4,76$ zeigte,
verringerte sich dieser Ausschlag nach $1\frac{1}{4}$ stündigem Liegen an der Luft
bis $-4,28$.

Da mir die Darstellung einer vollkommen reinen, überall gleich-
mässig glänzenden Zinkplatte so, wie ich gewünscht hätte, nicht ge-
lungen ist, so wage ich aus den vorstehend angeführten Messungen
nur den Schluss zu ziehen, dass das amalgamirte Zink in Bezug auf
seine Stellung in der Spannungsreihe nicht weit vom gewöhnlichen Zink
abstehen kann.

2. Neusilber.

Eine dünne Neusilberplatte wurde auf eine Eisenplatte gelöthet;
nach einer von Herrn Sachsse im chemischen Laboratorium ausge-
führten Analyse wurde in $1,0475$ gr. dieser Legirung gefunden:

Kupfer	0,625 gr.
Zink	0,2538
Nickel	0,161
	<hr/>
	1,0408

was nach Procenten berechnet die Zusammensetzung gibt:

Kupfer	59,6
Zink	24,2
Nickel	15,3
	<hr/>
	99,1

Sorgfältig geputzt, gab die Neusilberplatte einen Ausschlag von $-1,74$ Skth. (red.), woraus gegen (Zn) eine elektrische Differenz $= 0,75$ (ZnCu) folgt. Nachdem die Platte länger als zwei Monate an der Luft gelegen hatte, beobachtete ich einen Ausschlag von $-0,94$ Skth. (red.), was einer elektrischen Differenz gegen (Zn) im Betrage von $0,95$ (ZnCu) entspricht.

3. Messing.

Eine von Herrn Dr. Stadler im chemischen Laboratorium ausgeführte Analyse lieferte für die Zusammensetzung dieses Messings folgende Resultate:

Zur Analyse wurden verwandt $1,858$ gr.; darin fand sich

Kupfer	$1,244$ gr.
Zinkoxyd	$0,602$
Blei	$0,016$
Zinn	Spuren
	<hr/>
	$1,862$

oder nach Procenten berechnet

Kupfer	66,95
Zink	32,40
Blei	0,86
	<hr/>
	100,21.

Die frisch gereinigte Platte lieferte einen Ausschlag von $-1,62$ Skth. (red.), würde also mit (Zn) eine elektromotorische Kraft von $0,78$ (ZnCu) erzeugt haben. Nach zweitägigem Liegen an der Luft betrug der Ausschlag nur noch $-1,15$ Skth. (red.), was gegen (Zn) eine elektrische Differenz $0,90$ (ZnCu) gibt.

4. Stahl.

Da der Stahl mehr Kohle als das Schmiedeeisen enthält, so war vorauszusehen, dass er negativer als dieses sein würde.

Eine nicht gehärtete Stahlplatte von 94,1^{mm} Durchmesser gab einen Ausschlag von $-1,06$ Skth. (red.), der nach den früher beim Kadmium mitgetheilten Versuchen auf die normale Grösse von 95^{mm} reducirt, in $-1,11$ Skth. übergeht. Hieraus folgt gegen (Zn) eine elektrische Differenz von 0,91 (ZnCu). Die länger als zwei Monate an der Luft gelegene Platte brachte einen Ausschlag von $-0,44$ Skth. (red.) hervor, zeigte also gegen (Zn) eine elektrische Differenz 1,07 (ZnCu).

5. Gusseisen.

Ebenso wie beim Schmiedeeisen war es auch beim Gusseisen schwierig, eine geeignete Platte zu finden; nach mehrfachen fruchtlosen Bemühungen lieferte endlich eine aus einer Kochofenplatte herausgeschlagene Scheibe eine vollkommen tadelfreie Oberfläche. Je nach dem Gehalte an Kohlenstoff und der Art seiner Verbindung wird das Gusseisen in der Spannungsreihe eine andere Stellung einnehmen.

Die frisch geputzte Platte gab einen Ausschlag von $-1,04$ Skth. (red.), woraus gegen (Zn) die elektrische Differenz 0,92 (ZnCu) folgt.

Nachdem die Platte länger als zwei Monate der Luft ausgesetzt gewesen, war der Ausschlag auf $-0,55$ Skth. (red.) gesunken, was einer elektrischen Differenz gegen (Zn) im Betrage von 1,04 (ZnCu) entspricht.

C. Kohle.

Ich habe mir viele Mühe gegeben, aus der an Bodenstücken von Gasretorten abgesetzten dichten Kohle mit fast muschligem Bruche ein zu einer Condensatorplatte von 95^{mm} Durchmesser brauchbares Stück zu gewinnen; indess gelang dies wegen der schaligen Absonderungsflächen nicht. Ich musste mich daher mit einem weniger dichten, etwas porösen Stücke aus den cylindrischen Theilen der Retorte begnügen.

Wurde die hieraus gearbeitete Condensatorplatte von 95^{mm} Durchmesser nach demselben Verfahren wie die Metallplatten mit Schmirgelpapier geputzt, dann mit einem Handtuche abgestäubt und abgerieben, so zeigte sie, unmittelbar darauf auf die Kupferplatte des Trägers gelegt, ein eigenthümliches Verhalten. Je nach der seit dem Reiben verflossenen Zeit brachte sie anfangs einen mehr oder weniger grossen negativen Ausschlag (z. B. von $-1,0$ Skth.) hervor, derselbe stieg und erreichte in

...nahmen ein Maximum (z. B. von $-3,0$ Skth.), worauf eine allmähliche Abnahme des Ausschlags und dann ein allmählicher Uebergang in den positiven Ausschlag eintrat, der zuletzt die Grösse $+0,16$ Skth. erreichte. Dieser Uebergang wird durch Isolation der nach dem Abreiben auf den Kohlenplatten nachweisen, dass der obige negative Ausschlag durch die Reibung erzeugt und durch mangelhaftes Leitungsvermögen der Kohlenplatten in der Platte zurückgehaltenen schwachen elektrischen Funken verdankte. Wurde die Platte, während sie einen Ausschlag von $+0,16$ Skth. gab, unter den Recipienten der Luftpumpe gebracht, so zeigte sich der frühere Ausschlag unverändert. Diese Beobachtung beweist also, dass die Condensation von Gasen bei der früheren eigenthümlichen Zu- und Abnahme nicht im Spiele gewesen, sondern dieselbe allein durch die Aenderung der mittelst Reibung in der Platte erzeugten Elektricität bedingt worden.

Nicht bloss beim Reiben mit einem leinenen Handtuche, sondern auch beim Ueberstreichen mit einem feinen Haarpinsel zeigte sich der oben erwähnte negative Ausschlag, so dass also die Kohle oder gewisse in der Platte sitzende Theilchen selbst durch Reiben mit Haaren positiv elektrisch wurden.

Der durch die elektrische Differenz des angewandten Kohlenstückes gegen die obere kupferne Condensatorplatte hervorgerufene Ausschlag betrug $+0,16$ Skth., den man allerhöchstens mit Rücksicht auf die zahlreichen Grübchen in der Platte bis $+0,20$ Skth. erhöhen dürfte. Nimmt man diese letztere Zahl als richtig an, so folgt daraus gegen (Zn) eine elektrische Differenz $1,22$ (Zn Cu), wonach also die Kohle in der Spannungsreihe ihren Ort in der Nähe des Platins erhielt. Nach mehrtägigem Aussetzen an die Luft gab sie unverändert den obigen Ausschlag von $+0,16$ Skth.

D. Zusammenstellung der im Vorstehenden erhaltenen Resultate.

Der leichteren Uebersicht wegen will ich zum Schlusse dieses Abschnittes einen grossen Theil der durch die beschriebenen Versuche gewonnenen Zahlenresultate zusammenstellen.

einigen einfachen Metalle und die Kohle (C) erhalten wir:

(Zn) = 0,25 (Zn Cu)	(Zn Fe) = 0,84 (Zn Cu)
(Zn Sn) = 0,23 „	(Zn Cu) = 1,00 „
(Zn Cd) = 0,24 „	(Zn Au) = 1,00 „
(Zn Pb) = 0,44 „	(Zn Pd) = 1,15 „
(Zn Sb) = 0,69 „	(Zn Ag) = 1,18 „
(Zn Bi) = 0,72 „	(Zn C) = 1,22 „
(Zn Hg) = 0,81 „	(Zn Pt) = 1,23 „

Aus vorstehenden Werthen lässt sich nun ohne Weiteres eine solche Spannungsreihe construiren. Ich werde das Intervall zwischen dem Kupfer = 100 setzen, aber zur Vermeidung negativer Vorzeichen den Ort des Zinks mit 200 und folglich den des Kupfers mit 100 bezeichnen. In dieser Tabelle sollen auch die Legirungen mit aufgeführt werden, so wie die Orte angegeben werden, welche die Oberflächen derselben alle kürzere oder längere Zeit nach ihrer Reinigung einnehmen.

des Metalles.	Ort in der Spannungsreihe				Betrag der grössten beobachteten Veränderung.
	unmittelbar nach dem Putzen.	1 bis 2 Tage nach dem Putzen.	4—7 Tage nach dem Putzen.	länger als 2 Monate nach dem Putzen.	
Zink	225		165	140	85
verunreinigtes Zink	200 ?				
	200	188		157	43
	177		164	152	25
Aluminium	176		164	139	37
	156		135	151	21
Stannum	131		122	113	18
Antimon	128	116	110	106	22
Bismut	125			105	20
Zinn	122	110			
Silber	119	60			59
	116		100	92	24
	109			93	16
Platin	108			96	12
	100		86		14
	100		81		19
Gold	85				
	82		70	82	12
	78		78		
	77				

Die fünfte Columne der vorstehenden Tabelle zeigt, dass die Metalle nach längerem Liegen an der Luft infolge von Aenderungen der Oberflächen ihre Reihenfolge ändern können. So tritt z. B. das Aluminium unter das Zinn, das Blei rückt durch Schwefelung über das Kadmium.

In der sechsten Columne habe ich die grösste Ortsveränderung, welche ein Metall mir gezeigt hat, aufgeführt. Man sieht, wie dieselbe im Allgemeinen am positiven Ende am grössten ist, wo sie für Aluminium sogar die enorme Grösse 0,35 (*Zn Cu*) erreicht, und (abgesehen vom flüssigen Quecksilber) nach dem negativen Ende hin abnimmt. Da die Aenderung der Metalloberflächen von den zufällig in der Zwischenzeit seit dem Reinigen und der Beobachtung im Zimmer z. B. durch Brennen der Gasflammen erzeugten, oder aus den Nebenzimmern z. B. von Bunsen'schen oder Grove'schen Elementen eingedrungenen Gasen abhängig ist, und auch in der Zeit von zwei Monaten sicherlich ihr Maximum noch nicht erreicht hat, so können die Zahlen der sechsten Columne nur zur Charakterisirung der Vorgänge im Allgemeinen dienen, und dies um so mehr, da es scheint, als ob in gewissen Fällen die Oxydation und die Schwefelung, was jedoch einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben muss, einen entgegengesetzten Einfluss in Betreff der Ortsveränderung ausüben.

MESSUNGEN
ÜBER DIE
ABSORPTION DER CHEMISCHEN STRAHLEN
DES SONNENLICHTES
VON
W. G. HANKEL.

www.libtool.com.cn

Die Veränderungen, welche gewisse chemische Präparate, namentlich das Chlorsilber durch Aussetzen an das Licht erleiden, konnten der Beobachtung der Chemiker nicht wohl entgehen; indess wurde der Grund derselben anfangs nicht immer in der Einwirkung des Lichtes gesucht, wie z. B. für die ebengenannte Substanz Boyle die Luft als Ursache der Schwärzung betrachtete.

Erst seit Scheele 1773 gefunden, dass ein mit Chlorsilber bestrichener Papierstreifen in dem violetten Theile des durch ein Prisma erzeugten Sonnenspectrums sich schneller schwärzt, als in den übrigen Farben desselben, sind die chemischen Wirkungen des Lichtes vielfach Gegenstand eifriger Untersuchungen gewesen, und zwar war die Forschung seitens der Physiker, besonders nach Ritter's Entdeckung der jenseits des Violetten liegenden chemischen Strahlen, vorzugsweise auf den Einfluss des sowohl durch Brechung im Prisma, als auch des durch Absorption in gefärbten Gläsern erzeugten verschiedenfarbigen Lichtes gerichtet. Nur gelegentlich wurden im vorigen Jahrhundert und in den ersten drei Jahrzehnten des gegenwärtigen vereinzelt Beobachtungen über den Durchgang der sogenannten chemischen Strahlen durch farblose Substanzen angestellt, die jedoch nach der Weise ihrer Ausführung die Frage, ob beim Durchgange durch jene Stoffe überhaupt eine Absorption stattfindet oder nicht, nur im Allgemeinen zu beantworten vermochten, dagegen zur Aufstellung genauer Werthe für die Grösse derselben nicht geeignet waren. So beobachtete bereits Scheele, dass Chlorsilber auch unter Wasser geschwärzt wurde, und Senebier fand, als er das ebengenannte Präparat mit zwölf $\frac{1}{4}$ Linien dicken Glas tafeln bedeckt hatte, erst nach Verlauf von 22 Minuten eine Färbung, während dasselbe unter einer zwischen zwei Glasplatten eingeschlossenen Wasserschicht von zwei Zoll Dicke schon nach 3 Minuten sich

violett färbte. Auch in den letzten Jahrzehnten sind Versuche, die Absorption der chemischen Strahlen bei ihrem Durchgange durch verschiedene feste und flüssige Substanzen in Zahlen auszudrücken, nur sehr wenige und zwar blos für zerstreutes Tageslicht und für Gaslicht ausgeführt worden; für Sonnenlicht dagegen fehlen meines Wissens derartige Messungen bis jetzt gänzlich.

Angeregt besonders durch die Arbeiten Melloni's über die Aenderung der Wärmestrahlen beim Durchgange durch verschiedene Substanzen kam im Jahre 1838 Becquerel auf die Idee, zu untersuchen, ob die Strahlen, welche die Fähigkeit besitzen, in gewissen Körpern Phosphorescenz hervorzurufen, ähnlich wie die Wärmestrahlen beim Durchgange durch verschiedene Stoffe diese Fähigkeit theilweise oder auch gänzlich verlieren. Schon Placidus Heinrich*) hatte im dritten Abschnitte seines bekannten Werkes, der von der Phosphorescenz durch Bestrahlung mittelst des elektrischen Lichtes handelt, gefunden, dass die Phosphorescenz auch erfolgt, wenn z. B. der Canton'sche Phosphor unter Glas liegt und der elektrische Funke über dem Glase wegfährt; „doch fiel sie nicht so gut aus und bei schwachen Phosphoren trat gar kein Leuchten ein.“ Im Anschluss hieran untersuchte Becquerel**) den Einfluss farbloser und gefärbter Gläser; später verband er sich zur Fortsetzung der Versuche mit Biot. Beide Beobachter***) nahmen wahr, dass Bergkrystall und Gyps die auf die Phosphoren wirksamen Strahlen des elektrischen Lichtes viel besser durchliessen als farbloses Glas; der Gyps schien sogar einen noch leichteren Durchgang zu gewähren als der Bergkrystall. Unmittelbar darauf debnte Biot†) seine Untersuchungen auch auf den Durchgang des zerstreuten Tageslichts durch verschiedene Substanzen aus, und fand auch hier, sowohl in Bezug auf die Schwärzung eines nach Daguerre's Angabe bereiteten Papiere, als auch in Bezug auf die Phosphorescenz der mit Schwefel geglühten Austerschalen die im Verein mit Becquerel für das elektrische Licht erhaltenen Resultate bestätigt.

Die vorstehenden Resultate veranlassten unmittelbar darauf Ma-

*) Pl. Heinrich, die Phosphorescenz der Körper. 1811. S. 94.

**) Compt. rend. VIII. 216. Pogg. Ann. 49. 544.

***) Compt. rend. VIII. 223. Pogg. Ann. 49. 549.

†) Compt. rend. VIII. 259. Pogg. Ann. 49. 557.

Malaguti*), die Schwächung der chemischen Strahlen des zerstreuten Tageslichtes beim Durchgange durch Flüssigkeiten zu messen. Er fertigte durch Bestreichen mit geeigneten Gemengen aus Bleiweiss, Tusche und Krapplack Papiere, die alle Farbennuancen und Schattenstufen darboten, welche das nach Daguerre's Vorschrift bereitete Papier nach und nach im Lichte annimmt. Darauf setzte er ein Stück des Daguerre'schen Papiers, das einestheils von zwei Glasplatten, anderentheils von eben diesen Glasplatten und einer dazwischen gebrachten Flüssigkeit bedeckt war, dem Tageslichte aus, und bestimmte die Zeit der Bestrahlung, welche erfordert wurde, damit jene beiden Theile des Daguerre'schen Papiers genau die Nuance eines daneben gelegten mit der obigen Farbenmischung bestrichenen Streifens annahm. Die chemischen Wirkungen des auf die beiden Theile des empfindlichen Papiers gelangten Lichtes setzte er umgekehrt wie die Zeiten, welche gleiche chemische Veränderungen auf dem Papiere erzeugten. Malaguti untersuchte eine Reihe von Flüssigkeiten, von denen einige die chemische Wirkung des durch sie hindurchgehenden Lichtes schwächten, andere nicht. Die von Malaguti berechneten Resultate sind aber aus später anzuführendem Grunde nicht unmittelbar brauchbar; auch die von ihm beobachtete sonderbare Thatsache, dass die beiden Glasplatten, wenn sie zwischen sich eine 9^{mm} dicke Wasserschicht enthielten, mehr chemische Strahlen hindurchliessen, als wenn der Raum zwischen ihnen mit Luft erfüllt war, wird später ihre vollständige Erklärung finden.

Besonders seit 1843 hat sich Edmund Becquerel**) sehr eifrig mit der Untersuchung der Eigenschaften der chemischen Strahlen und ihres Verhaltens beim Durchgange durch verschiedene Substanzen beschäftigt, und dabei seine Aufmerksamkeit vorzugsweise auf das Verhalten der verschiedenen Strahlen des Spectrums gerichtet. Zur Messung der chemischen Wirksamkeit der Strahlen von verschiedener Brechbarkeit diente ihm sein elektrochemisches Actinometer. Es bestand dasselbe aus zwei auf einer Seite jodirten Silberplatten, die in ein gläsernes mit destillirtem Wasser gefülltes Gefäss eingesetzt und mit den Enden des Multiplicatordrahtes eines empfindlichen Galvanometers verbunden waren. Wurde die eine Platte auf ihrer jodirten Seite vom Lichte

* Annal. de chim. et de phys. 72. 1. Pogg. Ann. 49. 567.

** Annal. de chim. et de phys. 3. Sér. 9. 257.

bestrahlt, so entstand ein elektrischer Strom, dessen Stärke durch den Ausschlag der Magnetnadel im Galvanometer gemessen und dessen Intensität der auf die Platte ausgeübten chemischen Wirkung proportional gesetzt wurde. — Um den Einfluss gewisser in die Bahn des Lichtes eingeschalteter Substanzen auf die verschiedenen Strahlen des Spectrums zu erforschen, liess er zwei Bündel Sonnenlichtes durch ein Prisma gehen und stellte in die Bahn des einen Strahles vor das Prisma die auf ihre Durchdringlichkeit zu untersuchende Substanz. Hinter dem Prisma befand sich eine Linse, welche entweder auf einer nach Daguerre's Verfahren jodirten Silberplatte oder auf einem nach Talbot's Vorschrift bereiteten empfindlichen Papiere scharfe Spectren der beiden Lichtbündel entwarf; bei dem empfindlichen Papiere wurden die Einwirkungen des Lichtes durch Gallussäure sichtbar gemacht. Aus der Vergleichung der beiden abgebildeten Spectra ergab sich, welche Strahlen von der eingeschalteten Substanz vorzugsweise absorbiert worden waren. Während z. B. nach dem Durchgange durch Wasser das auf dem Metall oder Papierblatte abgebildete chemische Spectrum keine merkliche Aenderung zeigte, waren nach dem Durchgange durch eine Lösung von schwefelsaurem Chinin alle Wirkungen jenseits des Fraunhofer'schen Strahles *H* verschwunden. Wenn E. Becquerel an die Stelle der so eben erwähnten empfindlichen Platten Leuchtsteine brachte, so konnte er die Einwirkung der verschiedenen Farben des Spectrums auf dieselben beobachten; auch bei diesen Versuchen zeigte sich die erregende Kraft des Lichtes nach Einschaltung der Lösung von schwefelsaurem Chinin jenseits des eben genannten Strahles *H* erloschen.

In demselben Jahre veröffentlichte W. Draper*) die Beschreibung seines Tithometers, das gleichfalls zur Messung der chemischen Kräfte der Lichtstrahlen dienen sollte. Er benutzte dazu die Wirkung des Lichtes auf ein Gemenge von gleichen Raumtheilen Chlorgas und Wasserstoffgas; die Volumenverminderung, welche infolge der Absorption der gebildeten Salzsäure eintrat, diente als Maass der chemischen Wirkung des Lichtes. Das Instrument war hinreichend empfindlich, um selbst auf die Strahlen einer Argand'schen Lampe zu reagiren. Draper zeigte, dass bei constant erhaltener Flamme die Menge des verschwundenen Gasgemisches sowohl der Dauer der Bestrahlung als auch

*) The Lond., Edinb. and Dubl. Mag. and Journ. of Science. 3. Ser. 23. 401.

ler Menge der einfallenden Strahlen proportional war, und suchte mittelst dieses Apparates die Intensität der chemischen Wirkung für die verschiedenfarbigen Strahlen des Spectrums zu bestimmen.

Den von Draper eingeschlagenen Weg haben in den Jahren 1855 bis 1859 Bunsen und Roscoe weiter verfolgt, und die Resultate ihrer ebenso mühsamen als verdienstvollen Arbeiten in einer Reihe von Abhandlungen*) niedergelegt; sie haben sich bestrebt, die Fehlerquellen, welche von dem von Draper selbst befolgten Verfahren unzertrennlich waren, zu beseitigen, und nach einem genauen Studium aller auf den Vorgang der Bildung und Absorption der Chlorwasserstoffsäure Einfluss übenden oft sehr merkwürdigen Umstände ihr Augenmerk vorzugsweise auf die Gewinnung eines allgemein vergleichbaren und absoluten Maasses für die chemischen Strahlen gerichtet. Dabei erhielten sie auch Gelegenheit, die optische und chemische Extinction der Strahlen zu behandeln; ich werde die von ihnen erhaltenen Resultate, soweit sie auf die von mir untersuchten Substanzen Bezug haben, später an den betreffenden Stellen anführen, und bemerke hier nur noch, dass die von Bunsen und Roscoe über die Extinction der genannten Strahlen angestellten Versuche nur mit Gaslicht und dem vom Zenith eines vollkommen wolkenlosen Himmels reflectirten Lichte ausgeführt wurden.

Für eine möglichst vollständige Kenntniss der Vorgänge bei der Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes in verschiedenen Medien würde allerdings die blosser Angabe des Gesamtverhältnisses der einfallenden Strahlen zu den austretenden nicht genügen; es würde dazu die genauere Bestimmung des eben bezeichneten Verhältnisses für die verschieden brechbaren Strahlen des Spectrums, wie dies z. B. von Becquerel angestrebt worden ist, unbedingt erforderlich sein. So wie indess die von Melloni über den Durchgang der strahlenden Wärme durch die verschiedenen diathermanen Substanzen ausgeführten Messungen, trotzdem dass auf das Verhalten der Strahlen verschiedener Brechbarkeit keine Rücksicht genommen ist, dennoch für den betreffenden Zweig der Physik eine grosse Wichtigkeit behaupten: so steht auch zu hoffen, dass analogen Untersuchungen über den Durchgang der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes in ihrer Gesammtheit durch die verschiedenen durchsichtigen Medien das Interesse nicht fehlen wird. Ich

*) Poggend. Annal. 96, 373; 100, 43; 100, 481; 101, 235 und 108, 193.

hatte daher, besonders auch durch die von Stokes in so vortrefflicher Weise behandelten und mit der Absorption im genauesten Zusammenhange stehenden Erscheinungen der sogenannten Fluorescenz oder inneren Dispersion veranlasst, schon seit einer Reihe von Jahren die Anstellung von Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des reinen directen Sonnenlichtes beabsichtigt; indess ward die Ausführung dieses Planes in den früheren Jahren durch die grosse Entfernung meiner Wohnung von dem physikalischen Cabinet verhindert, indem dieselbe, was bei der Seltenheit eines zu derartigen Versuchen geeigneten Zustandes des Himmels durchaus nöthig, die Benutzung auch jedes auf nur kurze Zeit eintretenden reinen Sonnenscheins unmöglich machte. Nachdem in diesem Frühjahr der bezeichnete Uebelstand beseitigt, habe ich im Laufe des Sommers alle mir durch die Vorlesungen freigelassene geeignete Zeit auf die Ausführung solcher Messungen verwandt, deren Resultate ich im Folgenden mittheilen werde. Ist auch die Anzahl der bisher von mir untersuchten Substanzen nur gering, so habe ich doch ihre Veröffentlichung nicht aufgeschoben, da es bei der Unbeständigkeit unserer Sommer unsicher ist, ob die Witterung des nächsten eine beträchtliche Vermehrung derselben gestatten wird, indem bei dem grossen Zeitaufwande, welchen diese Versuche stets erfordern, in einem regnichten Sommer die Ausbeute nur sehr gering ausfallen kann.

Bisher habe ich nur farblose oder möglichst farblose Substanzen dem Versuche unterworfen, weshalb auch in dem zuvor gegebenen kurzen Berichte über die Arbeiten älterer Physiker auf die Untersuchungen über den Durchgang der Lichtstrahlen durch farbige Gläser kein Bezug genommen wurde. Ich werde jetzt zunächst die von mir angewandte Methode erläutern, und dann die über die Absorption der chemischen Strahlen erhaltenen Resultate mittheilen.

I. Verfahren zur Bestimmung des Verhaltens der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes beim Durchgange durch feste und flüssige Substanzen.

Ein hölzerner parallelepipedischer Kasten von 260^{mm} Länge, 166^{mm} Breite und 82^{mm} Höhe war durch eine Scheidewand der Länge nach in zwei Hälften getheilt, von denen jede mittelst eines genau passenden Deckels lichtdicht verschlossen werden konnte. An der vorderen schmalen Seite jeder Hälfte befand sich eine messingene 63^{mm} lange Fassung, in welcher sich eine aus gleichem Metalle gefertigte cylindrische Röhre von 141^{mm} Länge, die an beiden Enden mit Blendungen von 20^{mm} Oeffnung versehen war, verschieben liess. Die diesen Oeffnungen gegenüber liegende hintere Wand jeder Kastenhälfte bestand aus einer Messingplatte, welche eine 13^{mm} im Durchmesser haltende Oeffnung trug, deren Mittelpunkt mit den Mittelpunkten der Oeffnungen in den entsprechenden Blendungen der zuvor erwähnten cylindrischen Röhren in gerader Linie lag.

Der beschriebene Kasten war auf einem schweren messingenen Stative befestigt, und liess sich mit Leichtigkeit so stellen, dass die beiden parallelen Verbindungslinien der Mittelpunkte aller drei in jeder Kastenhälfte befindlichen Oeffnungen durch die Sonne gingen. Um stets auch ohne Abheben der Deckel die eben bezeichnete Stellung finden zu können, war seitlich am vorderen Ende des Kastens eine Linse angebracht, deren Brennweite nahe die Länge des Kastens erreichte. In ihrem Brennpunkte befand sich seitlich am hinteren Ende des Kastens ein auf eine Messingplatte geklebtcs Stück weisses Papier, worauf genau der Ort des durch die Linse erzeugten Sonnenbildes für diejenige Stellung des Apparates angegeben war, in welcher die Verbindungslinien obiger Oeffnungen die Richtung nach der Sonne hatten. Das Innere des Kastens, so wie Röhren und Blendungen waren erst sorgfältig mit einer festhaftenden Farbe geschwärzt und dann noch über der Flamme einer mit Terpentinöl gefüllten Lampe mit Russ bedeckt worden, so dass keine Reflexionen im Innern eintreten konnten.

Bis jetzt habe ich das Sonnenlicht nur auf mit Chlorsilber imprägnirtes Papier wirken lassen, das trotz seiner einfachen Zubereitung

für die gegenwärtig beabsichtigten Versuche eine mehr als hinreichende Empfindlichkeit besass. Ein Streifen des zu sogenannten positiven Bildern in der Photographie dienenden Papiers von ungefähr 115^{mm} Länge und 45^{mm} Breite ward in einem gegen das Tageslicht vollständig abgeschlossenen und nur durch eine Gasflamme erhellten Raume so auf eine in einer Porzellanschale befindliche Lösung von 1 Th. reinem Chlornatrium in 10 Th. Wasser gelegt, dass er sogleich überall benetzt wurde, nach 1½ bis 3 Minuten mittelst einer mit Elfenbeinspitzen versehenen Pincette abgehoben, mit der benetzten Seite auf reines Filtrirpapier gelegt und nach Bedeckung mit einem steifen Papierblatte durch Ueberfahren und Andrücken mittelst der Hand von aller anhängenden Flüssigkeit befreit. Erschien nach dem Aufheben die abgetrocknete Fläche gleichförmig, so ward eben diese mit Kochsalz imprägnirte Seite des Streifens sofort auf eine Lösung von 1 Th. salpetersaurem Silberoxyd in 10 Th. Wasser gelegt, nach 1½ bis 3 Minuten abgehoben und in zuvor angegebener Weise abermals auf reinem Filtrirpapier abgetrocknet. Unmittelbar darauf legte ich dann diesen noch feuchten Streifen mit der nicht imprägnirten Seite auf eine Glasplatte von 140^{mm} Länge und 59^{mm} Breite, welche in die flache Vertiefung eines Brettchens eingelassen war, und befestigte sie auf derselben durch einen Rahmen aus dünnem Messingblech, der durch zwei Vorreiber gegen das Papier angedrückt wurde.

Dieses Brettchen besass genau die Grösse des Querschnittes des zuvor beschriebenen Kastens und war ringsum mit einem hervorragenden Messingrande versehen; ward es mit diesem Rande über die hintere Seite des Kastens geschoben und daselbst durch zwei über Stifte greifende Haken befestigt, so war jeder seitliche Zutritt des Lichtes zu dem auf der Glasplatte liegenden empfindlichen Papiere unmöglich gemacht.

Um nicht stets den ganzen Apparat transportiren zu müssen, hatte ich in dem Messingrande des Brettchens dicht vor dem Papiere noch einen messingenen Schieber anbringen lassen. War derselbe eingeschoben, so konnte das mit dem empfindlichen Papiere belegte Brettchen für sich aus dem gegen das Tageslicht geschützten Raume in den Sonnenschein getragen und an der hinteren Seite des obigen Apparates befestigt werden, ohne dass jener Papierstreifen irgend eine Lichteinwirkung empfing.

Sollte der Apparat in Wirksamkeit gesetzt werden, so ward er zuerst so eingestellt, dass das von der seitwärts angebrachten Linse erzeugte Sonnenbild in den bezeichneten Kreis fiel, und sodann der Schieber schnell und gleichzeitig von beiden Hälften entfernt. Das Sonnenlicht bestrahlte bloß die hinter den Oeffnungen liegenden Theile des empfindlichen Papiers; und zwar war, wie man leicht sieht, gerade die bei den früheren Vorbereitungen benetzte Seite desselben der Sonne zugekehrt. Sollte die Bestrahlung für die beiden Hälften des Kastens gleichzeitig aufhören, so wurde der Schieber vor beide Hälften schnell und gleichzeitig wieder vorgeschoben; sollte dieselbe jedoch für beide Hälften ungleich lange dauern, so wurde das Licht von jeder Hälfte für sich durch eine im rechten Zeitpunkte vorgenommene Bedeckung der ihr entsprechenden Messingröhre an der Vorderseite des Kastens mittelst eines passenden Deckels abgehalten.

Durch die Einwirkung des Sonnenlichtes entstanden auf dem Papierstreifen zwei je nach der Dauer der Bestrahlung mehr oder weniger dunkle kreisrunde Flecke von 13^{mm} Durchmesser. Um diese Bilder zu fixiren, ward der Papierstreifen in dem gegen alles Tageslicht abgeschlossenen Raume in eine Lösung von 1 Th. unterschwefligsaurem Natron in 10 Th. Wasser gebracht; nach mehreren Minuten, wo man annehmen konnte, dass alles unverändert gebliebene Chlorsilber aufgelöst war, zum Auslaugen der Reihe nach in mehrere mit destillirtem Wasser gefüllte Gefässe gebracht, auf Fliesspapier von allem anhängenden Wasser befreit und endlich an der Luft getrocknet.

Halt man die Porzellangefässe gehörig zugedeckt, damit namentlich nicht Papierfasern hineinfliegen, filtrirt die Lösungen in kürzeren Zeiträumen, spült dabei jedes Mal die Porzellangefässe sorgfältig aus, und sorgt für reine Oberflächen des zum Abtrocknen dienenden ungeleimten Papiers: so ist es unter Anwendung eines guten gleichförmigen photographischen Papiers bei dem angegebenen Verfahren leicht, bei gleich langer Bestrahlung zwei genau gleich dunkle und gleichförmige Bilder zu erzielen.

Sollte nun für eine Substanz ermittelt werden, wie gross die von ihr durchgelassene Lichtmenge im Verhältniss zu der einfallenden ist, so ward dieselbe in die eine Hälfte des zuvor beschriebenen Apparates gebracht. Bei gleich langer Strahlung des Lichtes durch beide Hälften des Kastens erschien natürlich das Bild der frei durchstrahlten Hälfte

stärker geschwärzt; es wurde dann eine Reihe von Versuchen angestellt, bei denen bloß für die zweite Hälfte des Kastens, wo die Substanz eingeschaltet war, die Zeit der Durchstrahlung successive so lange vergrößert wurde, bis beide Bilder auf dem Papierstreifen gleich dunkel erschienen. Diese Beurtheilung konnte allerdings sofort nach dem Versuche noch vor dem Fixiren in dem nur durch Gaslicht erhellten Raume geschehen; indess war das Auge durch das vorhergehende Sonnenlicht gewöhnlich so abgestumpft, dass es beim Gaslichte geringe Unterschiede in der Nuance der Bilder nicht wahrzunehmen vermochte. Daher zog ich es vor, die Dauer der Bestrahlung der zweiten Hälfte soweit fortzusetzen, bis ich sicher war, den Punkt der Gleichheit der Bilder merklich überschritten zu haben, und dann später unter den fixirten Bildern diejenigen auszusuchen, welche wirklich gleich waren, oder der Gleichheit am nächsten kamen.

Das empfindliche Papier wurde dem Sonnenlichte nur kurze Zeit ausgesetzt; Morgens um 7 Uhr gab gewöhnlich eine höchstens 10 Sekunden lange Strahlung durch die freie Hälfte des Kastens die gewünschte Färbung; mit höher steigender Sonne musste diese Zeit allmählich verkürzt, gegen 10 Uhr hin auf 5 Sekunden und um Mittag auf noch weniger beschränkt werden. Die Zeit der Bestrahlung wurde übrigens nach einem Zähler, der halbe Sekunden schlug, gemessen. Durch Uebung erlangt man bald die nöthige Fertigkeit, die vorderen Röhren mit den bereit gehaltenen Deckeln in den gewünschten Augenblicken gegen das Licht zu schliessen. Da der Schluss stets auf volle Schläge des Zählers geschah, so liessen sich die Fehler in dieser Operation sehr verringern; nach Ausweis der Versuche können sie für gewöhnlich den vierten Theil eines Schlages, also $\frac{1}{4}$ Sekunde, nicht übersteigen. Bei einer Bestrahlungsdauer von nur 5 Sekunden würde also die Unsicherheit noch innerhalb $\frac{1}{6}$, oder innerhalb $2\frac{1}{2}$ p. C. liegen, während bei einer Dauer von 10 Sekunden diese Grenze auf nahe 1 p. C. herabsinkt.

Eine Aenderung der Bestrahlungsdauer mit der Tageszeit war, von einem später zu erwähnenden Grunde noch abgesehen, schon deshalb nöthig, weil es eine gewisse mittlere Nuance gibt, bei welcher das Auge am leichtesten einen Unterschied wahrzunehmen vermag; zu dunkle und zu schwache Bilder eignen sich weniger gut. Die Beurtheilung der Gleichheit der schwachen Unterschiede zwischen den fer-

gen Bildern geschah am besten in einem sehr hellen, nur durch das erstreute Licht erleuchteten Zimmer. Um eine schärfere Vergleichung zu ermöglichen, wurden die beiden Bilder jedes Streifens quer durchgeschnitten und die Hälften zweier verschiedener Bilder an einander gehalten. Dabei ist sehr sorgfältig darauf zu achten, dass nicht durch die Finger irgend eine Beschattung entsteht; so wie es auch nothwendig wird, die an einander gehaltenen Hälften ihre Lagen wechseln zu lassen, die eine Hälfte erst oben, dann unten, darauf rechts und später links von der anderen zu halten. Es zeigt sich nämlich häufig eine Neigung auf einer Stelle das Bild dunkler zu schätzen als auf der anderen. Dass die Bilder nicht wellenförmig gekrümmt sein dürfen, versteht sich von selbst. Da das Auge sehr bald ermüdet, ist es nicht zweckmässig, viele solcher Bestimmungen, deren ich fast tausend zu machen hatte, unmittelbar hintereinander vorzunehmen.

Unter Anwendung aller dieser Vorsichtsmaassregeln bringt man es durch Uebung bald dahin, die Fehler der Vergleichen innerhalb 2 p. C. zu halten. Bisweilen wird die Genauigkeit durch den Umstand etwas beeinträchtigt, dass die beiden zu vergleichenden Bilder einen etwas verschiedenen Farbenton zeigen, was natürlich die scharfe Vergleichung erschwert. Uebrigens habe ich mich nicht allein mit meinem Urtheile begnügt, sondern stets noch das Gutachten eines Gehülfen benutzt, der völlig damit unbekannt blieb, durch welche Bestrahlungen die beiden Bilder erzeugt waren und also ganz unbefangen sein Urtheil abgeben konnte. Die öftere Wiederholung dieser Bestimmungen lieferte stets das gleiche Resultat.

Um nun aus diesen Versuchen einen Schluss auf die durch die eingeschaltete Substanz aufgehaltenen Strahlen zu machen, habe ich angenommen, dass das einfallende Licht zu dem durchgelassenen sich umgekehrt wie die für beide zur Erzeugung gleich tief gefärbter Bilder nöthige Zeit verhielt. Traf es sich, dass unter den vorliegenden Versuchen, wo ich die Bestrahlungszeit für die geschwächten Strahlen stets nach halben oder ganzen Sekunden vergrössert hatte, keine zwei Bilder genau gleich erschienen, so wurde aus dem Unterschiede der Gleichheit am nächsten kommenden Bilder, bei denen das durch die Einschaltung geschwächte Licht einmal das schwächere und dann das stärkere war, die Zeitdauer der Bestrahlung ermittelt, bei welcher eine Gleichheit eingetreten sein würde.

Die vorstehende Annahme, die auch schon Malaguti bei seinen oben erwähnten Messungen gemacht hat, erschien nach den Vorgängen der Photographie, wofern man die Einwirkung auf eine angemessen kurze Dauer beschränkt, allerdings wohl begründet. Andererseits konnten aber wieder gerade bei nur kurze Zeit dauernder Bestrahlung aus gewissen von Bunsen und Roscoe beobachteten und von ihnen mit dem Namen der chemischen Induction belegten Vorgängen Bedenken entspringen. Wenn auch diese Bedenken durch die grosse Intensität des von mir angewandten Lichtes, des reinen Sonnenlichtes, als nicht begründet sich darthun liessen, so glaubte ich doch die gemachte Annahme auf experimentellem Wege einer Prüfung unterwerfen zu müssen. Ich habe dazu zwei auf verschiedenen Vorgängen beruhende Wege eingeschlagen. Der erste gründet sich auf die Polarisation des Lichtes, während der zweite sich auf die Reflexion stützt, aber dabei die Richtigkeit der Fresnel'schen Formeln für die Intensitäten des reflectirten Lichtes, wenigstens innerhalb der von mir erstrebten Grenzen von Genauigkeit, voraussetzt. Die Anordnungen für das erste Verfahren waren folgende:

Das Sonnenlicht fiel zuerst auf den Metallspiegel eines vor dem Fenster stehenden von Duboscq gefertigten Silbermann'schen Heliostaten, und ward von ihm in stets horizontaler Richtung in das Zimmer reflectirt. Dasselbst ging es durch eine 130^{mm} lange mit drei Blendungen von 25^{mm} Oeffnung versehene Messingröhre, sodann durch ein 115^{mm} langes und 28^{mm} in der Seite haltendes vollkommen farbloses Nicol'sches Prisma, und endlich durch ein aus einem Rochon'schen Fernrohre heraus genommenes doppeltbrechendes Prisma aus Bergkrystall, aus welchem je nach der Stellung der Hauptschnitte der beiden Prismen das im Nicol'schen Prisma polarisirte Lichtbündel entweder einfach oder gespalten heraustrat. Ich wählte gerade das genannte Bergkrystallprisma, weil es vollkommen farblos erschien und daher die Spaltung des gemeinen Lichtes in ihm stets zwei gleich helle ungefärbte Bilder lieferte.

Das Bergkrystallprisma sass unverändert fest und spaltete das Lichtbündel in horizontaler Richtung; dagegen liess sich das Nicol'sche Prisma mit seiner Hülse drehen, und die Drehung mittelst einer an der Hülse befestigten Alhidade auf einem getheilten Kreise ablesen. Der von Oertling in Berlin in halbe Grade getheilte Kreis von 127^{mm}

Durchmesser gestattete mittelst zweier gegenüberliegender Nonien die Messung bis auf 1 Minute.

Die eben beschriebene Vorrichtung war an dem vorderen Ende eines innen durch Russ vollständig geschwärzten Kastens von 2,85 Meter Länge angebracht. Auf das hintere Ende desselben passte die bereits oben beschriebene Vorrichtung zur Aufnahme des empfindlichen Papiers; nur ward für den vorliegenden Zweck ein aus zwei Theilen bestehender messingener Schieber nothwendig, da jedes der beiden durch Doppelbrechung erzeugten Bilder besonders bedeckt werden musste. Um die Bilder auf dem Papiere mit möglichst scharfem Umrisse zu erhalten, war unmittelbar vor dem Nicol'schen Prisma eine Glaslinse von 2,85 Meter Brennweite aufgestellt, so dass also ihr Brennpunkt gerade auf das empfindliche Papier fiel.

Die beiden erzeugten Bilder hatten einen Durchmesser von ungefähr 26,5^{mm} und standen mit ihren nächsten Rändern um 12,5^{mm} von einander ab, so dass jede der betreffenden Stellen durch ihren Schieber bequem gegen das Licht geschützt werden konnte. Zur Sicherheit war übrigens in das hintere Ende des Kastens noch ein verticales Messingblech als Scheidewand eingeschoben worden.

Um für alle Lagen des Nicol'schen Prismas das Verhältniss der Intensitäten der beiden erzeugten Bilder angeben zu können, musste zunächst diejenige Stellung gesucht werden, wo eins der beiden Bilder verschwand. Zu diesem Zwecke wandte ich das Instrument um, richtete also das offene Ende des 2,85 Meter langen Kastens gegen das vom Heliostaten kommende Sonnenlicht, und bedeckte es mit einem undurchsichtigen Schirme, der in seiner Mitte eine 3 bis 4^{mm} grosse Oeffnung zum Durchlassen der Sonnenstrahlen besass. Das hinter der mit den Blendungen versehenen Röhre befindliche Auge erblickte im Allgemeinen zwei Bilder von verschiedener Intensität; das Nicol'sche Prisma ward dann so gedreht, dass das eine Bild vollständig verschwand. Um dies vollständige Verschwinden wahrnehmen zu können, stellte ich den Kasten in der Weise etwas schief gegen die Richtung der Sonnenstrahlen, dass das hellstrahlende Sonnenbild nicht in das Auge zu gelangen vermochte, indem sonst wegen der Blendung des Auges jede Beobachtung unmöglich wurde.

Wie genau es möglich ist, die Stellung zu finden, wobei ein Bild verlischt, mögen folgende Zahlen, die in unmittelbar aufeinanderfolgen-

den Versuchen gefunden wurden, lehren; das eine Bild verschwand bei der Stellung auf

237° 42'

237 43

237 40

237 45

237 42

Mittel 237° 43'

Die Abweichung vom Mittel betrug hier im Maximum 3'; sie hat ihren Grund hauptsächlich in einer vorübergegangenen Blendung, indem nach jeder Messung die Alhidade bald nach der einen, bald nach der anderen Seite etwas verrückt wurde; die genauere Einstellung geschah mittelst einer an der Alhidade befindlichen Führungsschraube. Bei einer Abweichung von 3' von der Lage, wo die Intensität des einen Bildes gleich Null ist, würde eben dieses Bild nur die Intensität von $\frac{1}{10}$ des anderen Bildes besitzen.

In der um 180° von der angegebenen Stellung entfernten Lage verschwand das andere Bild auch vollständig; dagegen blieb in der um 90° oder 270° entfernten Stellung infolge der etwas schiefen Lage des Nicol'schen Prisma gegen die Strahlen ein äusserst schwacher Schein in demselben zurück.

Wird das Nicol'sche Prisma von der Stellung auf 237° 43' aus um den Winkel α gedreht, so ist bekanntlich das Verhältniss der Intensitäten der beiden entstehenden Bilder wie $\cos^2 \alpha : \sin^2 \alpha$ oder wie $1 : \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Leider ward der vorstehend beschriebene Apparat erst im Herbst fertig, so dass es mir nur noch möglich war, an einem einzigen Tage Prüfungen der oben gemachten Annahme anzustellen, und überdies war der Himmel an diesem Tage nicht ganz rein, sondern an verschiedenen Stellen, namentlich in der Nähe der Sonne, mit dünnem, federartigem Schleier bedeckt; in Ermangelung eines besseren musste ich mich jedoch für jetzt damit begnügen. Ich glaube indess, dass auch in der vorliegenden Form die Versuche genügen werden, um darzuthun, dass innerhalb der von mir beabsichtigten Grenzen der Genauigkeit, die Annahme, dass bei nicht zu weitgehender Zersetzung die Schwärzung des empfindlichen Papierses mit der Zeit proportional geht, als gültig betrachtet werden kann.

Die Alhidade ward auf 202° 27' eingestellt, wobei nach dem oben

geführten Gesetze die Intensität des einen Bildes doppelt so gross sein musste, wie die des anderen. Das rechte Bild war das schwächere, das linke das stärkere; die Bestrahlung im ersten dauerte 4 Minuten, im zweiten 2 Minuten. Das erstere Bild erschien ein klein wenig dunkler als das zweite, was mit dem Vorgange am Himmel wohl übereinstimmte, indem ein vor der Sonne liegender dünner Schleier im Zerkücheln begriffen war. Ein zweiter Versuch gab dasselbe Resultat. Bei dem dritten erschienen beide Bilder genau gleich stark; bei einem vierten dagegen zeigte sich gerade umgekehrt wie früher das rechte Bild 2 Minuten bestrahlte Bild ein wenig stärker als das andere 4 Minuten lang bestrahlte, und zwar infolge eines schwachen Wolkenschleiers, der in den letzten 2 Minuten das Sonnenlicht wieder etwas schwächte.

Um sicher zu sein, dass die beiden aus dem Bergkrystalle austretenden Strahlen nicht verschieden waren (wovon ich mich übrigens auch durch einen speciellen Versuch, bei welchem die Alhidade auf $192^{\circ}43'$ stand, und beide Bilder gleiche Intensität besitzen mussten, überzeugt wurde), drehte ich die Alhidade nach der anderen Seite auf $182^{\circ}59'$. Jetzt war das linke Bild das schwächere; als nun das rechte Bild 2 Minuten lang und das linke 4 Minuten lang bestrahlt wurde, zeigten in zwei Versuchen die beiden Bilder keinen Unterschied.

Das zweite oben erwähnte Verfahren zur Prüfung der Richtigkeit der Annahme, dass bei verschiedener Intensität der Bestrahlungen innerhalb gewisser Grenzen die zur Erzielung gleich dunkel gefärbter Bilder nöthigen Bestrahlungszeiten jenen Intensitäten umgekehrt proportional sind, werde ich erst im dritten Abschnitte, welcher von der Absorption im Glase handelt, erläutern können, indem dabei eben diese Absorption selbst mit in Betracht gezogen werden muss.

In einem gewissen Sinne liesse sich eine Art von Bestätigung für die obige Annahme auch aus dem Umstande herleiten, dass die Resultate unverändert blieben, wenn etwas mehr oder weniger dunkel gefärbte Bilder erzeugt wurden, oder wenn infolge eines höheren oder tieferen Standes der Sonne die Bestrahlungszeiten verändert werden mussten.

Da ungleich feuchte, mit Chlorsilber imprägnirte Papiere nicht dieselbe Empfindlichkeit besitzen, so wird die obige Annahme selbst innerhalb mässiger Grenzen der Schwärzung des Papieres doch nicht mehr Geltung behalten, wenn bei einer langen Bestrahlungsdauer der Aechtigkeitszustand der beiden vom Lichte getroffenen Stellen des

Papieres nicht derselbe bleibt; was z. B. eintritt, wenn der eine des Papieres frei an der Luft liegt, während der andere mit einer Platte bedeckt ist.

II. Verhalten des Bergkrystalls.

Biot und Becquerel fanden bereits bei ihren schon oben erwähnten gemeinschaftlichen Untersuchungen über die Absorption d. nigen Strahlen des elektrischen Lichtes, welche die Leuchtsteine zeigen, dass nicht nur eine Bergkrystallplatte von 5,95^{mm}, sondern auch eine senkrecht gegen die Axe geschnittene Platte von 41,20^{mm} eine grössere Menge dieser Strahlen hindurchliess als eine Glasplatte von nur 3,65^{mm} Dicke; und eben dies Resultat erhielt später Biot für dieselben Strahlen im zerstreuten Tageslichte, so wie für die Wirkung dieses Lichtes auf ein nach Daguerre's Vorschrift bereit empfindliches Papier. Stokes*) erwähnt in seiner berühmten Abhandlung über die Veränderung der Brechbarkeit des Lichtes, dass Quarz für die unsichtbaren Strahlen von hoher Brechbarkeit vollkommen durchgänglich zu sein scheine, indem die genannten Strahlen durch einen Bergkrystall eine Dicke von 1 oder 2 Zoll parallel und winkelrecht zur Axe ohne wahrnehmbaren Verlust durchdringen, und schlug deshalb die Glasprismen und Glaslinsen durch Prismen und Linsen aus Bergkrystall zu ersetzen; ein Vorschlag, der von ihm und später von Arago ausgeführt wurde. In gleicher Weise fand Stokes, dass die Strahlen von hoher Brechbarkeit im elektrischen Funken, für welche das Glas opak ist, ebenfalls durch Quarz gehen.

a) Senkrecht gegen die Axe geschnittene Platten.

Ich wende mich zunächst zu den von mir mit senkrecht gegen die Axe geschnittenen Bergkrystallplatten ausgeführten Messungen.

Während das Sonnenlicht durch die eine Hälfte des eben beschriebenen Kastens frei durchstrahlte, war in der anderen Hälfte in die Richtung der Strahlen, dicht vor der Oeffnung im Messingbleche am hinteren Ende des Kastens, ein senkrecht gegen die Axe geschnittener Bergkrystall von vollkommener Farblosigkeit eingeschaltet, so dass das

*) Pogg. Ann. Ergänzungsband IV. 308.

Die Fläche senkrecht traf. Die rechts drehende Krystallplatte war 3,5 mm dick, und gab zwischen gekreuzten Nicol'schen Prismen des Polarisationsapparates eine orange Farbe.

Um gleich starke Bilder zu erzeugen, musste die Strahlung durch den Bergkrystall $5\frac{1}{2}$ Sek. dauern, wenn für die freie Strahlung nur 5 Sek. benutzt wurden. Das Licht erlitt also beim Durchgange durch diesen Bergkrystall eine Schwächung im Verhältniss von 11 : 10 oder von 10 : 91. Bei einem zweiten Versuche erschien das $5\frac{1}{2}$ Sek. lang von ihm durch die Bergkrystallplatte hindurchgegangenen Lichte bestrahlte Bild um ein äusserst Geringes tiefer gefärbt als das andere, wonach also die Abnahme in der Intensität des durch den Bergkrystall gegangenen Lichtes noch etwas geringer sein würde.

Untersuchen wir jetzt, ob aus dieser Schwächung des Lichtes beim Durchgange durch den Bergkrystall eine Absorption der Strahlen in dessen Innerem folgt oder ob dieser Verlust allein von der Reflexion an den beiden Begrenzungsflächen der Platte herrührt.

Nach den Fresnel'schen Formeln für die Intensität des reflectirten Lichtes erhalten wir bei senkrechtem Einfall die Lichtmenge

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

wenn n den Brechungsexponenten beim Uebergange aus dem ersten Mittel zum zweiten bedeutet und die einfallende Lichtmenge = 1 gesetzt wird. Nehmt man mit Rücksicht darauf, dass der Bergkrystall auch die Strahlen mit hoher Brechbarkeit durchlässt, für n den von Rudberg für die Fraunhofer mit H bezeichnete Stelle des Spectrums gefundenen Brechungsexponenten, so wird $n = 1,558$, und hiermit ergibt sich der Werth des obigen Ausdruckes für die von der ersten Fläche reflectirte Lichtmenge zu 0,0476. Setzen wir die einfallende Lichtmenge = 100, so werden also an der ersten Fläche 4,76 Strahlen reflectirt. Von den 5,24 in die Platte eindringenden Strahlen würden nun, wofern keine Absorption in derselben stattfindet, an der zweiten Fläche 4,53 reflectirt und von diesen beim Anlangen an der ersten Fläche wieder 0,22 nach rückwärts geworfen werden.

Sehen wir ihrer Geringfügigkeit wegen von den folgenden Reflexionen ab, so erhalten wir nach dem Vorstehenden für das nach vorwärts reflectirte Licht 9,07, so dass also ohne Rücksicht auf Absorption 90,93 Strahlen aus der Platte austreten sollten. Dieser Werth stimmt so gut

mit dem zuvor durch den Versuch erhaltenen überein, dass in der That keine durch das angewandte Verfahren wahrnehmbare Absorption der chemischen Strahlen im Bergkrystall stattfinden kann.

Dies Resultat liess sich noch weiter prüfen, indem hinter die erste Bergkrystallplatte eine zweite und selbst eine dritte gestellt wurde.

Als hinter die erste Platte eine zweite, ebenfalls senkrecht gegen die Axe geschnittene Platte eines links drehenden Bergkrystalles von 3,8^{mm} Dicke, welche zwischen gekreuzten Nicol'schen Prismen die gelbe Farbe zeigte, gestellt wurde, erhielt ich gleich starke Bilder, wenn die freie Strahlung 5 Sekunden, die andere durch die Platten gegangene aber 6 Sekunden gedauert hatte.

Hieraus folgt eine Schwächung des Lichtes im Verhältniss von 100 : 83,3.

Beim Durchgange durch die erste Platte ward gemäss der Rechnung das Licht infolge der Reflexion im Verhältniss von 100 : 90,93 geschwächt. Wenden wir eben dies Verhältniss auf die zweite Platte an, auf welche also nur 90,93 Strahlen aufgefallen sind, so erhalten wir für das durchgelassene Licht 82,68, eine Zahl, die hinlänglich genau mit der durch den Versuch gefundenen übereinstimmt.

Als endlich eine dritte, gleichfalls senkrecht gegen die Axe geschnittene Platte eines rechts drehenden Krystalles von 10,5^{mm} Dicke, welche zwischen gekreuzten Nicol'schen Prismen roth erschien, hinter die vorigen gestellt wurde, ergaben sich zwei gleiche Bilder bei Bestrahlungen von resp. 5 und 6½ Sekunden, woraus eine Schwächung im Verhältniss von 100 : 76,9 folgt.

Da nach der vorstehenden Berechnung auf die dritte Platte nur 82,68 Strahlen auffallen, so ergibt sich durch Anwendung des Verhältnisses von 100 : 90,93 für die dritte Platte die durchgelassene Lichtmenge = 76,9, also ebenfalls mit dem Versuche übereinstimmend.

Aus den vorstehenden Versuchen dürfte mit Bestimmtheit hervorgehen, dass bei klaren farblosen senkrecht gegen die Axe geschnittenen Bergkrystallen selbst bei einer Dicke von 19^{mm} keine merkliche Verschluckung der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes stattfindet.

b) Parallel mit der Axe geschnittene Platten.

Während senkrecht gegen die Axe geschnittene Bergkrystallplatte die chemischen Strahlen in nicht wahrnehmbarer Weise absorbiert

inen parallel mit der Axe geschnittene, welche also vom Lichte in rechter Richtung gegen die Axe durchdrungen werden, eine absorbierende Wirkung auf diese chemischen Strahlen auszuüben. Es war mir gekommen, als ob Platten der letzteren Art auch für das gewöhnliche Licht etwas weniger durchgänglich sind, als Platten der ersteren. Ich liess mir deshalb eine möglichst farblose parallel mit der Axe geschnittene Platte von nur 0,6^{mm} Dicke anfertigen lassen, aber auch diese schien mir Hindurchblicken eher weniger als mehr Licht durchzulassen, als die senkrecht gegen die Axe geschnittenen Platten von viel grösserer Dicke. Mit Rücksicht auf das Krystallsystem, welchem der Bergkrystall angehört, kann ein solcher Unterschied der Durchsichtigkeit, der wohl in einem Dichroismus seinen Grund haben dürfte, nichts Aufserordentliches darbieten. Nach einer Aeusserung in der Eingangs angezogenen Abhandlung halten Biot und Becquerel den Rauchtropas rückwärtlich der die Phosphorescenz erregenden Strahlen in der Richtung der Axe für leichter durchgänglich als senkrecht darauf.

Als die parallel mit der Axe geschnittene Bergkrystallplatte von 0,6^{mm} Dicke in der oben beschriebenen Vorrichtung in die Bahn des Lichtstrahlenbündels eingeschaltet wurde, schien die 5 $\frac{1}{2}$ Sekunden dauernde Wirkung dieses Lichtes noch ein wenig schwächer als die nur 1 $\frac{1}{2}$ Sekunden dauernde Wirkung der freien Strahlung im anderen Bilde.

Ebenso verhielt sich eine zweite parallel mit der Axe geschnittene 1^{mm} dicke Bergkrystallplatte, die im gewöhnlichen Lichte deutlich dunkler erschien als die oben erwähnten senkrecht gegen die Axe geschnittenen Platten.

Wurden die beiden parallel mit der Axe geschnittenen Platten hintereinandergestellt, so schwächten sie die chemischen Strahlen im Verhältnisse von 100 : 79.

Um übrigens die Frage eines verschiedenen Durchganges des Lichtes durch den Bergkrystall je nach der Richtung der Strahlen gegen die Axe mit voller Bestimmtheit zu entscheiden, müssen die Beobachtungen nicht an verschiedenen Exemplaren, sondern an einem und demselben Stücke angestellt werden. Ich werde versuchen, mir durch Flächen senkrecht und parallel zur Axe begrenzten klaren Krystalle von Bergkrystall für diese Messungen zu verschaffen.

III. Verhalten des Glases.

Delaroché hatte bekanntlich 1812 gefunden, dass Wärmestrahlen, welche schon durch eine Glasplatte hindurchgegangen waren, eine zweite Glasplatte besser, d. h. mit viel geringerem Verluste als die erste durchdrangen, was auf eine in der ersten Platte erlittene Modification hinwies. Melloni bestimmte durch seine Untersuchungen diese Modification noch genauer und zeigte, dass, mit Ausnahme des klaren Steinsalzes, alle Substanzen, auch die sogenannten farblosen, sich gegen die durchgehenden Wärmestrahlen wie farbige Medien gegen das Licht verhalten.

Aus den schon oben angeführten Versuchen folgt, dass die chemischen Strahlen des zerstreuten Tageslichtes bei ihrem Durchgange durch Glas geschwächt werden; es fragt sich aber nun, ob beim Durchgange durch farblose Glasplatten diese Schwächung nur Folge der Reflexionen an den Begrenzungsflächen oder auch Folge der Absorption im Innern der Masse ist, und ob die Absorption, falls sie stattfindet, die leuchtenden Strahlen in ähnlicher Weise wie die Wärmestrahlen bei ihrem Durchgange durch diese Substanz modificirt.

a) Farbloses Glas von St. Gobain.

Ich werde zunächst die Versuche über Absorption der chemischen Strahlen in zwei von Steinheil in München erhaltenen sehr vollkommen planparallelen Platten aus farblosem Glase von St. Gobain berichten, und daran sogleich die oben erwähnten Messungen über die Reflexion an ihren Flächen anschliessen.

Die beiden Gläser stammten aus einer und derselben Platte; ihre Dicke betrug fast genau 5^{mm}, ihre Breite 27^{mm}, die Länge der einen 54^{mm}, und die der anderen 108^{mm}. Die Brechungsexponenten für die verschiedenen Strahlen des Spectrums in diesem Glase sind nach Steinheil

$$\begin{aligned} \text{für den Strahl } C &= 1,527 \\ D &= 1,530 \\ E &= 1,533 \\ F &= 1,536 \end{aligned}$$

stimmen also fast genau mit den von Fraunhofer für sein Crownglas Nr. 9 gefundenen überein. Es wird daher gestattet sein, als Brechungs

ponenten der Strahlen G und H in jenen Glasplatten ebenfalls die von **raunhofer** für sein **Crown**glas erhaltenen Werthe 1,542 und 1,547 annehmen.

Die Messungen ergaben für die Schwächung des durch eine dieser Platten hindurchgegangenen Sonnenlichtes das Verhältniss 100 : 81, also ebenfalls eine grössere Schwächung als im Bergkrystall, was auf eine Absorption der chemischen Strahlen schliessen lässt. Es handelt sich jetzt nun darum, den Werth derselben mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen.

Wählen wir ebenso wie beim Bergkrystall den Brechungsexponenten des Strahles H als Mittelwerth für die chemischen Strahlen, also $n = 1,547$, so ergibt sich nach der Formel

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

die Reflexion an der Vorderfläche einer Glasplatte = 0,04613, wenn wir die einfallende Lichtmenge als Einheit nehmen. Setzen wir die an der Vorderfläche reflectirte Lichtmenge $0,04613 = \rho$, so tritt in das Glas die Lichtmenge $1 - \rho$ ein. Wird nun von dieser beim Durchgange durch die ganze Dicke des Glases der μ^e Theil absorbirt, so gelangt auf die hintere Fläche nur die Lichtmenge $(1 - \rho)(1 - \mu)$; von dieser wird daselbst wieder der ρ^e Theil reflectirt, so dass, abgesehen von den folgenden wenig beträchtlichen Reflexionen die austretende Lichtmenge $(1 - \rho)(1 - \mu) - (1 - \rho)(1 - \mu)\rho = (1 - \rho)^2(1 - \mu)$, oder wenn wir die einfallende Lichtmenge = 100 setzen, $100(1 - \rho)^2(1 - \mu)$ beträgt.

Der Werth von μ ist nun, da ρ bekannt, aus der Gleichung

$$100(1 - \rho)^2(1 - \mu) = 81$$

leicht zu berechnen; man erhält $\mu = 0,1098$. Von 100 einfallenden Strahlen werden also 10,98 absorbirt. Mithin sind beim Durchgange durch die obige Glasplatte an der ersten Fläche 4,613 Strahlen reflectirt, im Innern 10,47 Strahlen absorbirt, und an der hintern Fläche wieder 3,92 Strahlen reflectirt worden.

Um nun zu entscheiden, ob die aus dieser Glasplatte ausgetretenen Strahlen eine wesentliche Aenderung erlitten hatten, schaltete ich hinter das erste Glas noch ein zweites ein, und zwar befand sich die 108^{mm} lange Glasplatte dabei an der vordern Seite des Kastens, in einer auf die daselbst befindliche Messingröhre aufgesetzten hölzernen Fassung.

Beide Gläser zusammen liessen 64 p. C. der einfallenden Strahlen

durch. Dies ist aber nahe die Menge, welche man unter der Voraussetzung, dass keine Aenderung in der Beschaffenheit der durch die Platte gegangenen Lichtstrahlen eingetreten sei, findet; de verhält sich $100 : 81 = 81 : 65,6$.

Die beiden Platten aus farblosen Glase von St. Gobain absorbirte also jede bei einer Dicke von 5^{mm} 12,09 p. C., also bei 1^{mm} Dicke 2,418 p. C. der eintretenden Strahlen, und dabei erleidet die Absorptionsfähigkeit der durchgegangenen Strahlen keine merkliche Aenderung.

Für diese beiden Gläser habe ich aber nicht nur bei senkrechtem Einfall der Strahlen gegen die Oberflächen der Platten, sondern für verschiedene Neigungen derselben die Menge des hindurchgegangenen Lichtes gemessen. Es wurde zu diesem Behufe in die einsteinhälfte ein starkes Metallstück eingelegt, in dessen Mitte sich ein drehbarer mit zwei kleinen Alhidaden versehener Zapfen befand. Die Alhidaden bewegten sich über einem in ganze Grade getheilten Kreis von 60^{mm} Durchmesser. Oberhalb desselben trug der Zapfen eine Scheibe in der Richtung, in welche eine der obigen Glasplatten mit ihrem Rande eingesetzt und durch Stellschrauben mit ihren Flächen der Zapfenaxe parallel gestellt werden konnte. Nach Ausmittlung der Stellung, bei welcher diese Flächen der Richtung der Sonnenstrahlen genau parallel waren, liess sich die Platte mittelst des getheilten Kreises leicht unter jeder beliebigen Neigung gegen die Strahlen stellen. Für kleine Winkel zwischen der Normale (auf den Seitenflächen der Platten) und den einfallenden Strahlen konnte allein die kleinere, dagegen für grosse Einfallswinkel nur die grössere der beiden Platten benutzt werden.

Die Versuche ergaben nun für die nachstehend bezeichneten Einfallswinkel der Strahlen (dieselben stets von der Normale auf den Seitenflächen der Platte aus gerechnet) folgende Werthe:

Einfallswinkel.	Durchgelassene Strahlen.
0°	81
50	73,5
60	71
70	58
75	< 46
80	nahe 33

Der Werth für 50° ist das Mittel aus 2 Beobachtungen, welche 74 p. C. ergaben. Da vom Einfallswinkel 60° an eine stetige

Schwächung eintritt, so habe ich auf die Feststellung der unter diesem Winkel durchgelassenen Lichtmengen besondere Sorgfalt verwendet; um Fehler in der Einstellung der Glasplatte auszuschneiden, wurde die grössere Platte erst rechts und dann links gegen die Strahlen geneigt, sodann aus der einen Hälfte des Kastens in die andere versetzt, hier ebenfalls links und rechts gegen die Strahlen geneigt, und endlich durch die kleinere Glasplatte ersetzt, die gleichfalls wieder rechts und links gegen die Strahlen geneigt wurde. Der Reihe nach gaben diese verschiedenen Versuche folgende Werthe der durchgelassenen Lichtmengen: 74, 71, 72, 70, 70, 70. Das Mittel aus allen sechs Beobachtungen gibt 71.

In gleicher Weise wurde mit der grösseren Platte bei dem Einfallswinkel von 70° verfahren; rechts und links gegen die Strahlen in der einen und der anderen Kastenhälfte angebracht, gab sie für die durchgelassene Strahlenmenge der Reihe nach 60, 57, 57, 59 p. C. Eine frühere Messung hatte 57 p. C. ergeben. Das Mittel aus allen fünf Beobachtungen ist 58 p. C.

Bei Einfallswinkeln von 75° und 80° waren die Versuche nicht hinreichend weit fortgesetzt worden; nach den vorliegenden Bildern musste die Intensität des unter 75° durchgegangenen Lichtes etwas unter 46 p. C., und die Intensität des unter 80° durchgegangenen nahe an 33 p. C. liegen.

Wir wollen nun die erhaltenen Beobachtungsergebnisse mit den durch Rechnung aus den Fresnel'schen Formeln hergeleiteten Werthen vergleichen.

Nach Fresnel*) ist die Intensität des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes, wenn die Intensität des einfallenden Lichtes als Einheit genommen wird

$$\frac{\sin^2 (\alpha - \alpha')}{\sin^2 (\alpha + \alpha')}$$

wo α den Einfallswinkel und α' den Brechungswinkel bedeutet. Mit denselben Bezeichnungen erhalten wir für die Intensität des senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirten Lichtes

$$\frac{\text{tg}^2 (\alpha - \alpha')}{\text{tg}^2 (\alpha + \alpha')}$$

Für die Intensität des reflectirten nicht polarisirten Sonnenlichtes, das wir aus zwei gleich starken Lichtbündeln, deren eines in der Einfall-

*) Pogg. Annal. Bd. 22. 100.

ebene und das andere senkrecht gegen dieselbe polarisirt ist, bestehend betrachten können, gilt also der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 (\alpha - \alpha')}{\sin^2 (\alpha + \alpha')} + \frac{\tan^2 (\alpha - \alpha')}{\tan^2 (\alpha + \alpha')} \right)$$

Da, wie man sieht, eine Vertauschung von α und α' an dem Werthe dieser Ausdrücke Nichts ändert, so ist die Intensität des an beiden Flächen der Platten reflectirten Lichtes, die auf jede derselben einfallende Lichtmenge = 1 gesetzt, genau dieselbe.

In der folgenden Tabelle, wo in der ersten verticalen Spalte die Winkel stehen, welche die Strahlen nach aussen hin mit der Normale auf den Flächen bildet, enthält die zweite Spalte die nach der ersten Formel, die dritte Spalte die nach der zweiten Formel und endlich die vierte Spalte die nach der dritten Formel berechneten Intensitäten.

Einfallswinkel.	Intensitäten des		
	in der Einfallsebene polarisirten Lichtes.	senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirten Lichtes.	gemeinen Lichtes.
0°	0,04613	0,04613	0,04613
10	0,04780	0,04416	0,04598
20	0,05442	0,03889	0,04650
30	0,06595	0,02968	0,04781
40	0,08702	0,01730	0,05216
50	0,1243	0,00454	0,0644
60	0,1927	0,00118	0,0969
70	0,3187	0,04018	0,1794
75	0,4186	0,1038	0,2612
80	0,5559	0,2336	0,3947
85	0,7444	0,4905	0,6174

Nach diesen Formeln würde also die Intensität der reflectirten Strahlen bei nicht polarisirtem Lichte von der senkrechten Incidenz an erst etwas abnehmen, und dann anfangs langsam und zuletzt rascher wachsen.

Bezeichnen wir für die einzelnen Incidenzen den in der vierten Spalte stehenden zugehörigen Reflexionscoefficienten mit ρ , so lässt sich für die einzelnen Incidenzen die Menge des durchgegangenen Lichtes nach der früheren Formel $100 (1 - \rho)^2 (1 - \mu)$ berechnen, wenn der Grösse μ die entsprechenden Werthe beigelegt werden. Da nämlich die Dicke der durchdrungenen Schicht mit der Schiefe des Einfalls wächst, so muss man für jede Incidenz einen besonderen Werth von μ wählen; letzterer ist aber leicht zu erhalten, weil die durch das angewandte Glas hin-

durchgegangenen Strahlen ihre Natur nicht ändern, die Absorption also stets proportional der Dicke der durchdrungenen Schicht zunimmt, so dass man die einzelnen Werthe von μ findet, wenn man den Werth dieser Grösse für die senkrechte Incidenz im Verhältniss der Dicke jener Schicht wachsen lässt. Die folgende Tabelle enthält in der ersten verticalen Spalte die Einfallswinkel, in der zweiten die Dicke der durchlaufenen Schicht, und in der dritten die zugehörigen Werthe von μ .

Einfallswinkel.	Dicke der durchlaufenen Glasschicht.	Zugehörige Werthe von μ .
0°	1,000	0,1098
10	1,006	0,1105
20	1,025	0,1126
30	1,057	0,1160
40	1,100	0,1207
50	1,151	0,1264
60	1,207	0,1325
70	1,259	0,1382
75	1,280	0,1406
80	1,297	0,1424
85	1,307	0,1435

Berechnen wir mittelst der Zahlen der letzten Spalte dieser und der vorhergehenden Tabelle nach der obigen Formel $100(1-\rho)^2(1-\mu)$ die Menge des bei den verschiedenen Incidenzen durchgelassenen Lichtes, indem wir für ρ und μ stets die entsprechenden Werthe einsetzen, so erhalten wir die in der zweiten Spalte der nächsten Tabelle stehenden Werthe; die dritte Spalte enthält das Resultat der Messungen.

Einfallswinkel.	Menge der durchgelassenen Strahlen	
	berechnet.	beobachtet.
0°	81,0	81
10	81,0	
20	80,7	
30	80,1	
40	79,0	
50	76,5	73,5
60	70,7	71
70	58,1	58
75	46,9	< 46
80	31,4	nahe 33
85	12,5	

Die Zahlen der zweiten und dritten Spalte zeigen eine so grosse Uebereinstimmung, dass, die Richtigkeit der Fresnel'schen Formeln vorausgesetzt, die oben über die mit der Zeit proportionale Wirkung der chemischen Strahlen auf das empfindliche Papier gemachte Annahme auch durch diese Messungen gerechtfertigt ist.

Geht man umgekehrt von der Richtigkeit dieser letzten Annahme aus, so können die vorstehenden Versuche auch zum Nachweise der Gültigkeit der Fresnel'schen Formeln für die Intensität der reflectirten und durchgelassenen chemisch wirkenden Strahlen des Lichtes wenigstens innerhalb der bei den vorliegenden Versuchen erstrebten Genauigkeit dienen. Man sieht sogleich, dass die Anwendung einer unter veränderlichen Winkeln gegen die einfallenden Strahlen geneigten Glasplatte ein neues Verfahren zur Bestimmung der Absorption der genannten Lichtstrahlen in anderen Medien bietet: man stellt in die eine Hälfte des Kastens die zu untersuchende Substanz, in die zweite das gegen die Strahlen geneigte Glas, und ändert den Einfallswinkel so lange, bis bei gleicher Bestrahlungsdauer die beiden Hälften des Kastens gleich intensive Bilder liefern. Die durch die eingeschaltete Substanz hindurchgelassene Lichtmenge ist dann der durch die Glasplatte hindurchgedungenen gleich, welche letztere in der zuvor angegebenen Weise berechnet wird. Wäre man im Besitz einer hinlänglich grossen Bergkry stallplatte, so würde die Rechnung wegen Mangels einer Absorption bloss die Reflexion zu berücksichtigen haben. Dies Verfahren hat einen besonderen Vorzug, indem es selbst in solchen Fällen anwendbar bleibt, wo der Himmel nicht völlig rein ist, weil alle Schwankungen in der Lichtintensität beide Bilder in gleicher Weise treffen.

b) Gewöhnliches Glas.

Eine möglichst vollkommene unbelegte Platte gewöhnlichen Spiegelglases wurde in Stücke von 50^{mm} Länge und Breite zerschnitten. Auf der Bruchfläche erschien das Glas etwas grünlich; die Dicke einer Platte betrug 2,2^{mm}.

Wurde eines dieser Stücke in der einen Hälfte des Kastens senkrecht gegen die einfallenden Strahlen aufgestellt, so schwächte es das Licht im Verhältniss von 100 : 74, also viel beträchtlicher als das mehr als doppelt so dicke Glas von St. Gobain.

Nehmen wir denselben Brechungsexponenten, wie für dieses letztes Glas, setzen also $n = 1,547$ und infolge dessen $\rho = 0,04613$, so n wir aus der Gleichung

$$100 (1-\rho)^2 (1-\mu) = 74$$

0,1868, während der Werth von μ für eine gleich dicke Platte des St. Gobain nur 0,04834 beträgt. Der Grund dieser mehrer Mal so starken Absorption ist wohl hauptsächlich in der grünen Färbung des Glases zu suchen, wenngleich dieselbe so gering dass das Sonnenlicht nach dem Durchgange durch 6 bis 7 solcher Platten noch ungefärbt erschien.

Als nach und nach immer mehr dieser Glasplatten eingeschaltet len, ergaben die Beobachtungen für die Menge der durchgelassenen Strahlen folgende Werthe:

Anzahl d. eingeschalteten Glasplatten.	Durchgelassene Lichtmenge.
1	74
2	59
3	48
4	42
5	37
6	32
7	29
8	26
10	21
14	14

Wir könnten die vorstehenden Versuche sogleich benutzen, um die Frage zu entscheiden, ob die chemischen Strahlen bei ihrem Durchgange durch diese Glasplatten ihre Eigenschaften geändert haben, und würde, was die schwach grünliche Färbung allerdings schon vermuthen lässt, finden, dass die zweite Platte das auf sie auffallende Lichtbündel nach dem Durchgange weniger schwächt als die erste Platte das auf sie auffallende Licht. Ein Gleiches gilt für die dritte Platte u. s. f. Indess lässt sich das auf diesem Wege erhaltene Resultat mit den Beobachtungen zweier Versuche behaftet sein, indem die aus der ersten Platte austretende Lichtmenge mit der aus der zweiten austretenden verglichen werden müsste.

Ich habe deshalb vorgezogen, die Absorptionen für einzelne Plat-

n direct zu bestimmen. Ich stellte nämlich in der einen Kastenhälfte, und in der anderen zwei Glasplatten senkrecht gegen die Basis Lichtes auf. Das Verhältniss der durch eine und der durch zwei Glasplatten hindurchgelassene Lichtmenge war 100 : 83. Daraus folgt für die zweite Platte der Absorptionscoefficient $\mu = 0,0978$, während für die erste Platte 0,1868 betrug.

Bei einem weiteren Versuche, wo die Strahlung durch zwei Glasplatten direct mit der durch drei solche Platten verglichen wurde, fand ich das Verhältniss der durch beide Systeme hindurchgegangenen Lichtmengen wie 100 : 85, woraus für die dritte Platte der Absorptionscoefficient $\mu = 0,0659$ folgt.

Als einerseits sechs, andererseits sieben Gläser in die Bahn der Strahlen gestellt wurden, ergab sich das Verhältniss der durchgegangenen Lichtmengen wie 100 : 91, was also auf keine erhebliche Absorption an sieben Gläsern schliesen lässt, indem die Reflexion allein hinreichend würde, um den durch das siebente Glas bewirkten Verlust zu erklären.

Dass von der siebenten Platte an die Absorption sehr gering wirkt, ergibt sich auch aus der Vergleichung der von 6 Platten durchgelassenen Lichtmenge mit der durch 7, 8, 10 und 14 hindurchgegangenen. Bechnet man von der durch 6 Platten hindurchgelassenen Lichtmenge ausgehend einfach unter der Voraussetzung, dass von der siebenten Platte an die ganze Schwächung des hindurchgegangenen Lichtes allein von der Reflexion an den Begrenzungsflächen herrührt, die aus 7, 8, 10 und 14 Platten austretenden Lichtmengen, so erhält man der Reihe nach die Werthe 29,4 ; 26,5 ; 21,9 ; 15,0. Vergleicht man diese Zahlen mit den unmittelbar durch den Versuch gegebenen, so stimmen sie mit denselben nahe überein, weichen höchstens um 1 p. C. von denselben ab. Unbenutzt erkennt man an der Zunahme der Unterschiede mit wachsender Plattenzahl noch einen geringen Einfluss der Absorption.

Die oben durch specielle Versuche für die erste, zweite und dritte Platte bestimmten Absorptionscoefficienten waren der Reihe nach 0,1868, 0,0978 und 0,0659; wie man sieht, verhalten sich dieselben nahe wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, stehen also nahe im umgekehrten Verhältnisse der durchlaufenden Schichten; doch ist der zweite etwas grösser als $\frac{1}{2} \mu$, wenn $0,1868 = \mu$ gesetzt wird, und ebenso auch der dritte etwas grösser als $\frac{1}{4} \mu$.

Man könnte versucht sein, das so eben näherungsweise aufgestellte Gesetz als streng richtig zu betrachten. Dann würde die nach Durch

dringung von n Glasplatten noch übrig gebliebene Lichtmenge einfach durch die Formel

$$(1-\rho)^{2n} \left\{ (1-\mu) \left(1-\frac{1}{2}\mu\right) \dots \left(1-\frac{1}{n}\mu\right) \right\}$$

gegeben sein. Berechnet man nun nach dieser Formel die von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14 Glasplatten durchgelassenen Lichtmengen, so erhält man der Reihe nach: 74,0; 61,0; 52,1; 45,2; 39,6; 34,9; 30,9; 27,5; 21,9; 14,1. Eine Vergleichung dieser Zahlen mit den oben gefundenen Beobachtungsdaten zeigt ebenfalls, dass die Absorptionen in der zweiten, dritten und den nächsten Schichten in etwas stärkerem Maasse als nach dem zu Grunde gelegten Gesetze, in den späteren Schichten aber in etwas schwächerem Maasse erfolgen. Dies letzte Resultat ergibt sich auch aus der Vergleichung der bei Einschaltung von 7 und 14 Platten angestellten Messungen. Berechnet man nach der Formel $100 (1-\rho)^{14} (1-\mu_1)^7 = 29$ den Absorptionscoefficienten μ_1 , im Mittel für die Dicke einer Platte, so erhält man $\mu_1 = 0,0794$. Dagegen wird der Absorptionscoefficient μ_n , im Mittel für die Platten von der 8^{ten} bis 14^{ten}, berechnet nach der Formel $29 (1-\rho)^{14} (1-\mu_n)^7 = 14$, gleich 0,0096 gefunden, wonach also $\mu_n < \frac{1}{2} \mu_1$ ist.

Zum Schlusse dieses Abschnittes muss ich noch erwähnen, dass Bunsen und Roscoe bei ihren Messungen keine merkliche Absorption der chemischen Strahlen in ihren Glasplatten von 4,7^{mm} Dicke wahrgenommen haben. Dies kann seinen Grund einerseits darin haben, dass sie nicht mit Sonnenlicht, sondern mit Gaslicht operirten, für welches letztere bei dem Mangel der Strahlen von sehr hoher Brechbarkeit das Fehlen einer merklichen Absorption im Glase nichts Auffallendes haben würde; andererseits gingen aber bei ihren Messungen, wofern die Anordnung in den betreffenden Versuchen genau die in der zweiten Abhandlung*) beschriebene gewesen ist, die Strahlen zur Abhaltung jeder Wärmewirkung durch einen mit zwei Glasplatten verschlossenen und mit Wasser gefüllten 80 bis 90^{mm} langen Cylinder, und ausserdem durch farblosen Glimmer, und es konnten bei dem Durchgange durch die genannten Substanzen die chemischen Strahlen des Gaslichtes bereits soweit verändert gewesen sein, dass ihre Absorption in einem neu hinzugefügten Glase unmerklich wurde.

*) Pogg. Ann. Bd. 100. S. 68.

IV. Verhalten des Wassers.

Senebier gibt an, dass das Hornsilber in derselben Zeit (in 20 Sek.) unter einer mit Wasser gefüllten Flasche gefärbt wurde als in freier Luft; indess war es bei diesem Versuche wohl nicht auf eine genaue Messung abgesehen. Malaguti erhielt bei seinen Versuchen das merkwürdige Resultat, dass unter zwei Glasplatten, zwischen denen Wasser eingeschlossen war, das empfindliche Papier eher geschwärzt wurde, als wenn das Wasser zwischen diesen Platten fehlte. Malaguti gibt für die Intensität des durch die Glasplatten allein und des durch dieselben mit dazwischen befindlichem Wasser gegangenen Lichtes das Verhältniss 76,43 : 100*). Bunsen und Roscoe**) fanden bei ihren Untersuchungen über die Wirkung der Strahlen des Gaslichtes, dass, soweit die Genauigkeit ihrer Beobachtungen reichte, die Absorption in Wassersäulen bis zu 80^{mm} Länge als Null betrachtet werden konnte.

Zu Versuchen über den Durchgang der Sonnenstrahlen durch Wasser liess ich zwei messingene cylindrische Röhren verfertigen, die genau in einander passten. An dem einen Ende waren sie offen, an dem anderen trugen sie ein dickes Bodenstück mit 30^{mm} weite Oeffnung, in welche sich ein anderes Messingstück einschrauben liess. Diese eingeschraubten Stücke besaßen ebenfalls Oeffnungen; dieselben waren durch die beiden früher erwähnten mit der Axe parallel geschnittenen und durch sehr wenig Wachs aufgekitteten Bergkrystallplatten verschlossen. Bei der inneren Röhre befand sich die Platte auf der äusseren und bei der äusseren auf der inneren Seite des Bodens, so dass beim Hineinschieben des ersten Cylinders in den zweiten die beiden Platten aneinander stiessen. Auf der äusseren Fläche des inneren Cylinders war eine Theilung angebracht, mittelst welcher der Abstand der beiden Platten gemessen werden konnte. Der Raum zwischen beiden wurde mit Wasser angefüllt.

Im dritten Abschnitte ist bereits angeführt worden, dass die beiden Bergkrystallplatten zusammen 79 p. C. der einfallenden Strahlen durchliessen.

Als etwas Wasser zwischen die beiden Platten gebracht und die-

*) Diese Zunahme ist, wie die späteren Rechnungen lehren, jedenfalls zu hoch.
**) Pogg. Ann. Bd. 401, S. 245.

ien möglichst dicht aneinander geschoben wurden, zeigte sich so die von Malaguti beobachtete Erscheinung eines leichteren Durchganges der Strahlen, indem jetzt nicht wie zuvor 79 p. C., sondern 82 C. das Glas durchdrangen. Es ist dies nur eine Folge davon, dass die Stelle zweier Reflexionen zwischen Luft und Bergkrystall zwei Reflexionen zwischen Wasser und Bergkrystall getreten sind. Da die Brechungsverhältnisse dieser letzten beiden Substanzen weniger verschieden sind, als bei Luft und Bergkrystall, so muss die Reflexion an den Grenzen jener beiden Substanzen viel geringer ausfallen als an der Grenze zwischen Luft und Bergkrystall.

Indess ist die beobachtete Steigerung der durchgelassenen Lichtmenge viel geringer, als sie nach der Rechnung sein sollte. Durch die Einschaltung des Wassers zwischen die Bergkrystalle fallen zwei Reflexionen an der Grenze zwischen Luft und Bergkrystall hinweg, die einen Verlust von nahe 9 p. C. erzeugen; an ihre Stelle treten zwei Reflexionen zwischen Wasser und Bergkrystall, welche aber nur einen Verlust von noch nicht ganz 2 p. C. hervorbringen, so dass also durch die Einschaltung des Wassers die durchgelassene Lichtmenge von 79 auf 85 p. C. hätte steigen sollen. Den Grund der geringeren Zunahme möchte ich in dem Umstande suchen zu müssen, dass die Flächen der Bergkrystalle nicht vollständig vom Wasser benetzt wurden. Damit ist jedoch nicht gemeint, dass etwa kleine Luftbläschen auf ihnen sitzen geblieben wären. Die Bergkrystalle mit der dünnen dazwischenliegenden Wasserschicht erschienen vielmehr vollkommen rein und klar, und auch das hinter der Oeffnung aufgefangene Sonnenbild zeigte sich ohne Trübel; dagegen zog sich, wenn die Platten an der Luft lagen und nur mit einigen Tropfen bedeckt waren, die Flüssigkeit auf ihnen zusammen. Der Grund davon dürfte in dem Reinigen der Platten gelegen haben; dieselben waren mit etwas Wachs auf dem Messing befestigt, und namentlich bei der dünneren konnte beim Putzen der oberen Fläche leicht ein unendlich dünner Ueberzug von Wachs auf diese Fläche, die nachher mit dem Wasser in Berührung kam, gebracht worden sein. Ich werde den Vorgang später einer weiteren Prüfung unterwerfen.

Es wurde nun sehr sorgfältig bereitetes frisch destillirtes Wasser in dickeren Schichten eingeschaltet.

Als die Wasserschicht 8^{mm} dick war, gingen durch die beiden Bergkrystalle und das Wasser noch 80 p. C. hindurch.

Bei einer Dicke von 16^{mm} betrug die durchgegangene Lichtmenge nahe ebensoviel.

Für eine Schicht von 32^{mm} Dicke fand ich die durchgegangene Lichtmenge 78 p. C.

Selbst eine Schicht von 64^{mm} Dicke liess noch 77 p. C. der einfallenden Strahlen hindurch.

Die Absorption des Wassers ist also für die chemischen Strahlen des Sonnenlichtes sehr gering; doch gilt dies nur von frisch destillirtem Wasser; Wasser, das ebenfalls sorgfältig bereitet, aber fast zwei Monate in Flaschen aus weissem Glase aufbewahrt worden, hatte eine etwas grössere Absorptionskraft erhalten, indem durch die beiden Bergkrystalle und eine Schicht dieses Wassers von 8^{mm} Dicke nur noch 74 p. C. der einfallenden Menge hindurchgingen. Ob diese Aenderung der Absorption allein darin zu suchen, dass das Wasser aus dem Glase Salze aufnimmt, oder ob geringe organische Beimischungen dazu beigetragen haben, muss eine weitere Untersuchung lehren.

V. Verhalten des schwefelsauren Chinins.

Da die sogenannte Fluorescenz jedenfalls nur auf Kosten des einfallenden Lichtes erfolgt, so schien es mir ein besonderes Interesse zu haben, stark fluorescirende Flüssigkeiten auf den Durchgang der chemischen Strahlen zu untersuchen. Ich wählte dazu Lösungen von schwefelsaurem Chinin, weil dies Salz leicht in beliebigen Mengen zu erlangen war, und richtete die Versuche auch auf die Aenderungen, welche die Concentration der Lösungen in der Absorption des Lichtes herbeiführt. Die Lösungen wurden in dem bereits für das Wasser benutzten Apparate untersucht.

a) *Sehr verdünnte Lösung.*

0,0872 Gr. schwefelsaures Chinin wurden in 200 Gr. destillirten Wassers gelöst, und die Lösung, um sie möglichst klar zu erhalten, kurz vor dem Gebrauche durch schwedisches Papier filtrirt. Die Schwächung des durch diese Lösung hindurchgegangenen Lichtbündels rührte theils von der Reflexion an den Begrenzungsflächen, theils von der Absorption in den Bergkrystallen und der zwischen ihnen eingeschlossenen Flüssigkeit her. Die erste Spalte der nächsten Tabelle enthält die Dicke die-

Flüssigkeitsschicht, die zweite die durchgelassene Lichtmenge, die dritte den gesammten Lichtverlust und die vierte die Absorption in der Flüssigkeit allein. Bei der Berechnung der Zahlen dieser letzten Spalte ist eine gewisse geringe Unsicherheit nicht zu vermeiden, insofern durch mehr oder minder vollständige Benetzung der Bergkrystallflächen die Reflexion an den Grenzflächen zwischen ihnen und der Flüssigkeit etwas variiren konnte. Da bei Anstellung der Versuche dieser Umstand nicht bekannt war, so sind nach Füllung des Apparates keine speciellen Messungen zur Bestimmung der in jedem einzelnen Falle durchgelassenen Lichtmengen angestellt worden, wie dies zuvor beim Wasser geschehen; es bleibt daher nur übrig, den bei letzterwähnten Versuchen gefundenen Werth von 82 p. C. für den Verlust durch Reflexion als Grunde zu legen.

Dicke d. Flüssigkeitsschicht.	Durchgelassene Lichtmenge.	Gesamtverlust.	Absorption in der Flüssigkeit.
4 mm	64	36	18
16	52	48	30
32	49	51	33

b) *Verdünnte Lösung.*

Als 0,1606 Gr. desselben schwefelsauren Chinins in 200 Gr. Wasser gelöst waren, wurden folgende Resultate erhalten:

Dicke d. Flüssigkeitsschicht.	Durchgelassene Lichtmenge.	Gesamtverlust.	Absorption in der Flüssigkeit.
1 mm	73	27	9
2	65	35	17
4	59	41	23
8	52	48	30
16	48	52	34
32	44	56	38
64	41	59	41

c) *Noch weniger verdünnte Lösung.*

0,3445 Gr. desselben schwefelsauren Chinins wurden in 200 Gr. Wasser gelöst, und nach dem Filtriren folgende Werthe für den Durchgang der chemischen Strahlen erhalten:

Dicke d. Flüssigkeits-schicht.	Durchgelas-sene Licht-menge.	Gesamtver-lust.	Absorption in der Flüssig-keit.
1 mm	70	30	42
2	62	38	20
4	54	46	28
8	48	52	34
16	43	57	39
32	38	62	44
64	32	68	50

d) Concentrirte Lösung.

0,7436 Gr. desselben schwefelsauren Chinins wurden mit 200 Gr. Wasser übergossen; auch nach mehrtägigem Stehen blieben noch einzelne äusserst geringe Theilchen ungelöst. Nach dem Filtriren zeigte die Flüssigkeit folgende Absorptionen:

Dicke d. Flüssigkeits-schicht.	Durchgelas-sene Licht-menge.	Gesamtver-lust.	Absorption in der Flüssig-keit.
16 ^{mm}	50	50	32
32	47	53	35

Die vorstehenden Messungen lehren, dass das aus den Lösungen des schwefelsauren Chinins austretende Licht seine Eigenschaften in der Weise geändert hat, dass es neue Schichten dieser Flüssigkeiten mit geringerem Verluste zu durchdringen vermag; und zwar wird diese Modification bereits nach dem Durchgange durch eine Schicht von nur 1^{mm} Dicke bemerklich. Während z. B. für die dritte der untersuchten Lösungen die Menge der in dem ersten Millimeter der Flüssigkeit absorbirten Strahlen, (die einfallende Lichtmenge stets gleich 100 gesetzt), 14,62 beträgt, erreicht dieselbe für das zweite Millimeter nur die Höhe 11,32, sinkt im dritten und vierten Millimeter im Mittel auf 6,68, im fünften bis achten Millimeter im Mittel bis 2,90, im neunten bis sechzehnten im Mittel bis 1,38, im siebzehnten bis 32^{sten} im Mittel bis 0,78, und endlich im 33^{sten} bis 64^{sten} im Mittel bis 0,52.

Vergleichen wir nun schliesslich die obigen Zahlen mit Rücksicht auf die Concentration der Flüssigkeit, so zeigt sich, dass bei den drei ersten Lösungen, deren jede nahe doppelt soviel schwefelsaures Chinin enthielt als die nächst vorhergehende, die Absorption der chemischen

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

DARLEGUNG
DER THEORETISCHEN BERECHNUNG
DER IN DEN
MONDTAFELN
ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.

VON
P. A. HANSEN.

ERSTE ABHANDLUNG.

Um die Veröffentlichung der theoretischen Berechnung der Störungen des Mondes, auf welchen die Mondtafeln, deren Verfasser ich bin, beruhen, nicht allzu weit hinaus zu schieben, wird in dieser Abhandlung nicht die Ableitung und Berechnung aller dieser Störungen vorgenommen. Die Breitenstörungen werden zwar vollständig berechnet, aber von den Störungen der Länge und des Radius Vectors nur der Theil, den ich als den Haupttheil bezeichnen kann. Ich bin nemlich während der Berechnung dieser Störungen darauf gekommen, dass man dieselbe in mehrere Theile zerlegen kann. Der erste dieser Theile, der welcher hier dargestellt wird, kann mit Ausnahme einiger kleinen zur Bewegung des Perigäums des Mondes gehörigen Glieder selbstständig ohne merkliche Ungenauigkeit ausgeführt werden, während die anderen Theile, die später erscheinen werden, ohne den ersten Theil zu haben nicht ausgeführt werden können. Die Methode, die ich anwende, ist mit geringer Abweichung die, welche ich in dem »*Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat*« betitelten Werke ausführlich erklärt habe; des Zusammenhanges wegen leite ich hier die Gleichungen, nach welchen die Rechnung ausgeführt worden ist, von Neuem auf kurze Art ab. Ich substituire, wie ich in meinen Störungsrechnungen immer gethan habe, sogleich die numerischen Werthe der Coefficienten in die betreffenden Ausdrücke und führe die Multiplicationen und Integrationen unmittelbar mit den Zahlenwerthen aus. Nach allen Erfahrungen, die ich gemacht habe, ist dieses in den Störungsrechnungen überhaupt das kürzeste und sicherste Verfahren, um ein Resultat zu erhalten, dessen Genauigkeit verbürgt werden kann. Zwar kann man auch durch die Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten ein beliebig genaues Resultat erhalten, wenn man nur den Operationen, die jedenfalls nothwendig sind, keine solche beimischt, wodurch die Convergenz

der Reihen bedeutend geschwächt oder gar in Frage gestellt werden muss, allein es ist schwer in den Bedingungsgleichungen, auf welche die Methode der unbestimmten Coefficienten führt, a priori die Glieder die Merkliches geben, von denen, die Unmerkliches geben, zu unterscheiden, und man geräth bei dieser Methode daher leicht in die unangenehme Alternative, entweder eine Anzahl von Gliedern mit zuzuziehen, die sich schliesslich als unmerklich erweisen, oder merklich Glieder auszulassen. Auch muss man doch bei dieser Methode, da die Anzahl der Bedingungsgleichungen sehr gross ist und die Unbekannten derselben nicht bloss in der ersten, sondern auch in den höheren Potenzen vorkommen, für die Coefficienten derselben ihre numerischen Werthe substituiren, und die Auflösung numerisch durch eine Reihe von Annäherungen ausführen. Es ist daher einfacher, und zugleich sicherer, sofort die numerischen Werthe der Coefficienten in die bekannten Glieder zu substituiren, und die Unbekannten ohne Bildung der Bedingungsgleichungen durch eine Reihe von Annäherungen zu ermitteln. Man erlangt auf diese Art sogleich von jedem zu substituierenden Gliede die Kenntniss, ob es merklich ist oder nicht, mit anderen Worten, ob das Resultat der Substitution die numerische Grenze, bis zu welcher hinab man die Störungen berechnen will, übersteigt oder nicht, und im letzteren Falle fällt die Substitution von selbst weg. Die Annäherungen haben selbstverständlich ein Ende, und man hat die richtigen Werthe der Unbekannten erhalten, wenn die zuletzt substituirtten Werthe der Unbekannten wieder aus der Rechnung hervorgehen. Aus diesem Grunde war es unnöthig in der Darlegung meiner Berechnung der Störungen, die in dieser Abhandlung enthalten ist, alle Annäherungen, die ich ausgeführt habe, darzulegen, sondern es genügt die in den Mondtafeln angegebenen Störungen zu Grunde zu legen, und damit eine Annäherung vollständig durchzuführen. Das Resultat dieser Annäherung ist über die Richtigkeit der von mir in den Mondtafeln gegebenen Störungen entscheidend, und zeigt in den einzelnen Coefficienten keine grösseren Unterschiede wie die, welche aus den zufälligen Fehlern, mit welchen in jeder derartigen Rechnung die letzte Decimalstelle unausweichlich behaftet ist, erklärt werden können. Ausserdem habe ich noch Entwicklungen und Berechnungen hinzugefügt, durch welche die Hauptrechnung an sich einer tief eingreifenden Prüfung unterworfen wird.

Am Ende der Rechnung habe ich die von Plana und Damoiseau gegebenen Längenstörungen mit den meinigen verglichen, und nicht unerhebliche Unterschiede gefunden. Gern hätte ich auch die von Delaunay neuerdings berechneten Störungen mit den meinigen verglichen, allein das von ihm vor Kurzem darüber veröffentlichte Werk ist bis jetzt nicht in meine Hände gelangt.

Zu den oben erwähnten Operationen, durch welche die Convergenz der Reihen bedeutend geschwächt, oder gar ganz in Frage gestellt werden muss, rechne ich in erster Reihe die Auflösung der Nenner, die durch die Integrationen eingeführt werden, in unendliche, nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegung der Sonne zu der des Mondes fortschreitende Reihen. Diese Reihen werden so unregelmässig, und die numerischen Coefficienten derselben wachsen so stark, dass, wenn sie auch in der That im Allgemeinen für den Mond convergiren sollten,*) man über die Genauigkeit, die ihre Fortsetzung bis zu irgend einer Potenz des genannten Verhältnisses gewährt, sich gar kein Urtheil bilden kann. Wenn auch von der einen oder anderen dieser Reihen die numerischen Werthe der ersten Glieder abnehmen, so ist damit ihre Convergenz auf keine Weise dargethan, denn man kennt unendliche Reihen, deren Glieder fortwährend abnehmen, und die dennoch divergent sind. Bei den hier in Rede stehenden Reihen kann man nicht einmal aus der Abnahme der ersten Glieder darthun, dass auch alle folgenden in Bezug auf ihre numerischen Werthe abnehmen müssen, es bleibt der Fall gar nicht ausgeschlossen, dass sie von einer gewissen Potenz an wieder an numerischem Werthe wachsen könnten. Und nicht einmal in allen diesen Reihen findet eine Abnahme der numerischen Werthe der ersten Glieder statt, es sind deren vorhanden, in welchen grade das Gegentheil statt findet, und Glieder vorkommen, die grössere numerische Werthe haben, wie die vorhergehenden, algebraisch einer niedrigeren Ordnung angehörigen. Die Entwicklung der Mondstörungen in solche Reihen kann daher nur erst dann ein Resultat liefern, über

*) Dass es einen Werth des genannten Verhältnisses giebt, für welchen sie divergiren müssen, und dass dieser Werth weit kleiner wie Eins ist, ist klar; ja selbst für den Werth, den dieses Verhältniss in der Mondbewegung hat, giebt es Argumente, deren Coefficienten, wenn sie durch diese Reihen ausgedrückt werden, gewiss divergiren. Dazu gehören unter andern die Coefficienten der Argumente

dessen numerische Genauigkeit ein bestimmtes Urtheil möglich ist, wenn es gelungen sein wird, die Summe der nicht entwickelten Glieder, mit anderen Worten, den Betrag des Rests einer jeden dieser Reihen mit hinreichender Annäherung anzugeben, und — es will mich bedünken, als läge diese Restbestimmung in weiter Ferne. Von der numerischen Genauigkeit der durch die Theorie erlangten Werthe der Störungscoefficienten hängt aber ihre Brauchbarkeit einzig und allein ab, denn mit ungenauen Werthen derselben lassen sich keine brauchbaren Tafeln darstellen.

Da auf die Störungen, deren Berechnung in dieser Abhandlung dargelegt wird, schon Mondtafeln gegründet worden sind, so halte ich es für angemessen, die allgemeinen Grundsätze, die meines Erachtens nach bei der Bearbeitung von Mond- oder Planetentafeln angewandt werden müssen, und die ich stets befolgt habe, auszusprechen. Zuerst muss man sich durch die Theorie, die nach dem jetzigen Stande dieser Sache auf keinem andern Grunde fussen kann, wie auf dem Newtonschen Gravitationsgesetz, möglichst genaue Ausdrücke der in der Bewegung des betreffenden Himmelskörpers stattfindenden Abweichungen von der elliptischen Bewegung verschaffen, aus dieser verbunden mit vorläufigen Werthen der Constanten, die nur durch Beobachtungen ermittelt werden können, eine hinreichende Anzahl von Oertern des Himmelskörpers berechnen, diese mit den Beobachtungen vergleichen, und daraus die Verbesserungen der angenommenen Werthe der durch die Theorie unbestimmbaren Constanten ableiten. Findet man hierauf, dass die Beobachtungen regelmässige Abweichungen von den berechneten Oertern zeigen, so muss man vor Allem die Störungsrechnungen nachsehen, um in Erfahrung zu bringen, ob darin etwa Fehler oder Auslassungen begangen worden sind, und wenn solche sich nicht auffinden lassen, oder nach der Auffindung solcher dennoch regelmässige Abweichungen übrig bleiben, so muss man diese durch geeignete Aenderung des einen oder anderen Coefficienten auszugleichen suchen, es mag dieses Verfahren Empirismus genannt werden oder nicht. Denn man bedarf solcher Tafeln, die mit den Beobachtungen möglichst gut übereinstimmen, und im Gegentheil, Tafeln, die bei der Vergleichung mit den Beobachtungen wesentliche Unterschiede übrig lassen, sind unbrauchbar, an solchen ist Zeit und Mühe vergeblich angewandt, wenn gleich sie irgend einem theoretischen Resultat noch so strenge angeschlossen worden wären.

Bei der Bearbeitung von Mondtafeln sind es nicht bloß die sechs optischen Elemente, die durch die Theorie unbestimmbar sind, es sind hier deren mehrere vorhanden. Vor Allem kommt der Halbmesser des Mondes hinzu, dessen Verbesserung als Unbekannte in die Bewegungsgleichungen, wodurch die Verbesserungen der angenommenen optischen Elemente ermittelt werden sollen, mit eingeführt werden muss; und zwar müssen hier der verticale und der horizontale Halbmesser unabhängig von einander eingeführt werden, da man im Voraus nicht wissen kann, ob sich eine Verschiedenheit derselben herausstellen wird oder nicht. Der Mondhalbmesser tritt hier deshalb als wesentlichere Unbekannte auf wie in der Theorie der Planeten, weil gewöhnlich sowohl in Rectascension wie in Declination nur Ein Rand der Beobachtung zugänglich ist, und man bei der Reduction der Beobachtungen auf den Mittelpunkt des Mondes weit mehr fehlen kann, wie bei den Planeten in ähnlichem Falle. Eine Anzahl der in der Mondbewegung vorhandenen Störungsglieder, und darunter eins, dessen Coefficient D'' übersteigt, hängen von der Sonnenparallaxe ab, die für sich auch durch Beobachtungen bestimmt werden kann. Alle von der Sonnenparallaxe abhängigen Störungsglieder müssen daher mit einem Factor versehen werden, der die Verbesserung der der Berechnung der Störungen zu Grunde gelegten Sonnenparallaxe bestimmt. Der Unterschied dieses Factors von der Zahl Eins bildet eine neue Unbekannte, die auch in eben genannten Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der optischen Elemente einverleibt werden muss. Ferner befinden sich unter den Mondstörungen einige, die von der Figur der Erde, und namentlich von dem Unterschied der Trägheitsmomente derselben, abhängen,*) hieraus entsteht eine neue Unbekannte, die auch in den genannten Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden muss. Endlich war bisher nicht ausgemacht, ob nicht auch die Figur des Mondes merklichen Einfluss auf die Mondbewegung hat, und es musste daher auch ein solcher Einfluss mit berücksichtigt werden. Vor Allem sind wieder die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers, von welchen etwaige merkliche Einflüsse abhängen, und die grösste

*) Minder genau ist es diese Glieder von der Abplattung der Erde abhängig machen, die übrigens auch nur durch Beobachtungen oder Messungen gefunden werden kann.

Wirkung dieser erstreckt sich auf die der Zeit selbst proportionale Theile der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes. Es mussten daher auch die Verbesserungen der angenommenen Werthe dieser Bewegungen als zwei neue Unbekannte den Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden. Es hat sich, wie man in dieser Abhandlung sehen wird, herausgestellt, dass dieser Einfluss nicht ganz unmerklich zu sein scheint. Uebrigens ist es mit sehr grossen Schwierigkeiten verbunden diese beiden Coefficienten aus der Theorie mit der Genauigkeit zu bestimmen, die gute Mondtafeln erfordern, und man müsste daher auch in dem Falle, dass die Figur des Mondkörpers darauf keinen merklichen Einfluss ausüben könnte, zu deren Bestimmung durch die Beobachtungen seine Zuflucht nehmen.

Zufolge dieser Aufzählung enthielten die Bedingungsgleichungen für die Bestimmung der durch die Theorie unbestimmbaren Elemente zwölf Unbekannte, und nach der Auflösung dieser Gleichungen ergab sich sofort eine Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Mondörtern, die sehr wenig zu wünschen übrig liess.

Ich meinte indess aus dieser Vergleichung wahrnehmen zu können, dass eine noch grössere Uebereinstimmung möglich sein könnte, und da die Figur des Mondkörpers und dessen Rotationsbewegung noch etwas Unaufgeklärtes darzubieten scheint, wie aus den Arbeiten von Nicollet und Wichmann über die Libration hervorgeht, so meinte ich hierin eine neue Quelle von Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes finden zu können, und kam nach längerer Ueberlegung darauf, dass wohl der Mittelpunkt der Figur des Mondes von dessen Schwerpunkt verschieden sein könnte, und dass, wenn dieses der Fall sei, alle Störungsglieder der Länge mit einem von dieser Entfernung abhängigen Factor zu multipliciren seien, und den Breitenstörungen ein constantes Glied hinzuzufügen sei. Dieser Factor und diese Constante wurden als neue Unbekannte in die Bedingungsgleichungen eingeführt, und letztere von Neuem aufgelöst. Aus dem Resultat dieser Arbeit musste erkannt werden, dass dieser Unterschied in der That vorhanden sei, und die Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und den Beobachtungen hatte sich vergrössert. Schliesslich bemerkte ich noch, dass eine kleine Spur von der Wirkung einer Ungleichheit von langer Periode im Resultat der Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen zu erkennen war, und um diese auszugleichen versuchte ich eine Verbesserung des

Coefficienten der Ungleichheit, die von $8V - 13E$ abhängt, da die kleinsten Unterschiede davon herzurühren schienen. Da hierauf die letzte Spur einer solchen Wirkung verschwand und die Tafeln dadurch gewonnen hatten, so adoptirte ich, dem oben ausgesprochenen Grundsatz gemäss, den verbesserten Coefficienten. Dieses sind die Grundzüge, nach welchen ich die Mondtafeln bearbeitet habe, und der eben genannte Coefficient ist unter allen in den Mondtafeln vorkommenden, durch die Theorie bestimmbaren und in der That bestimmten, Coefficienten der einzige, den ich schliesslich zu ändern Veranlassung gehabt habe.

Das Problem der drei Körper ist namentlich in seiner Anwendung auf die Ermittlung der Mondbewegung sehr verwickelt, und dessen Durchführung mit wesentlichen Schwierigkeiten behaftet. Es hat lange Zeit und grossen Aufwand an mathematischen Kräften erfordert, um es nur einiger Maassen zur Ausbildung zu bringen. Jeder Astronom weiss aus der Geschichte dieses Problems, dass man zu verschiedenen Zeiten darauf Verzicht leisten zu müssen vermeinte, alle durch die Beobachtungen erkannten Ungleichheiten der Bewegung des Mondes dadurch darzustellen, und zur Ansicht seine Zuflucht nahm, dass entweder dem Newtonschen Gravitationsgesetz neue Glieder einzuverleiben seien, oder dass überhaupt noch andere Kräfte auf die Bewegungen des Mondes und der Planeten einwirken müssten. Denn nicht nur in der Bewegung des Mondes, sondern auch in mehreren Punkten der Planetenbewegungen wollten die auf das Newtonsche Gravitationsgesetz gegründeten Theorien, oder theoretische Ausarbeitungen, sich den Beobachtungen keinesweges anschliessen. Unter den Gelehrten, die die eben angeführten Ansichten aussprachen, befanden sich die grössten Mathematiker ihrer Zeit, und dennoch waren diese Ansichten irrthümlich, denn im Laufe der Zeit, bald früher, bald später, stellte sich heraus, dass die Unterschiede zwischen der Theorie und den Beobachtungen, die man für objectiv gehalten hatte, in der That subjectiv waren. Man hatte von den mannigfachen Verzweigungen, die das Problem darbietet und wahrzunehmen erfordert, die einen oder anderen übersehen. Es gelang jedes Mal die Quelle des Unterschiedes, auf den man gekommen war, in der Behandlung des Problems zu finden.

Nach diesen Prämissen ist es immer eine bedenkliche Sache, in dem Falle, wo ein theoretisch gefundener Coefficient mit den Beobach-

... übereinstimmen will, den Unterschied, der sich darbietet, in ~~Vermuthung~~ unbekannter Kräfte zu bezeichnen. Dieser Ausweg wird in ~~der~~ ~~Wahrscheinlichkeit~~ je grösser der sich darbietende Unterschied ist. Da ~~er~~ ~~aber~~ ~~beobachtet~~ die früher in dieser Beziehung ausgesprochen worden ~~ist~~ das Newtonsche Gravitationsgesetz sich schliesslich immer ~~bestätigt~~ ~~hat~~ ~~so~~ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich fernerhin auch ~~bestätigen~~ ~~werde~~ sehr gross, und neu auftauchende Unterschiede, ~~welche~~ ~~sich~~ ~~früher~~ ~~dargeboten~~ ~~haben~~, subjectiven Ursprungs sind.

Die Abhandlung ist in folgende Abschnitte eingetheilt.

- 1. Anwendung der Differentialgleichungen, die in dieser Abhandlung angewandt werden sollen. Art. 1—13.
- 2. Beweis zweier Sätze, die in der Mondbewegung statt finden. Art. 14—18.
- 3. Successive Entwicklung der Differentialgleichungen der Mondbewegung. Art. 19—31.
- 4. Substitution der numerischen Werthe in diejenigen im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke, die ganz bekannt sind. Art. 32—64.
- 5. Berechnung der Producte, die in den vollständigen Ausdrücken vorkommen. Art. 65—86.
- 6. Integration der im Vorhergehenden entwickelten Differentialgleichungen.
Berücksichtigung der Werthe von λe und λJ in den Bewegungen des Perigäums und der Knoten. Art. 87—110.
- 7. Ueberweitige, zur Prüfung dienende, Berechnung der Glieder der Längenstörungen, die einen kleinen Divisor im Quadrat bekommen. Art. 111—121.
- 8. Berechnung der Störungen der Länge und des Radius Vectors aus den im Vorhergehenden erhaltenen Werthen.
Prüfung der ganzen Berechnung dieser Störungen. Art. 122—128.
- 9. Berechnung der Breitenstörungen und der Reduction der Länge auf die Ekliptik aus den vorhergehenden Werthen. Art. 129—142.

- § 10. Vergleichung der hier berechneten Längenstörungen des Mondes mit denen von Plana und Damoiseau. Art. 143—148.
- § 11. Vorläufige Berechnung der durch die Figur der Erde in der Mondbewegung verursachten Störungen.
Berechnung der Trägheitsmomente des Erdkörpers. Art. 149—160.
- § 12. Von den durch die Figur des Mondes in der Mondbewegung entstehenden Störungen.
Berechnung der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers. Art. 161—166.
- § 13. Entwicklung des von der Mondmasse abhängigen Theils der Knotenbewegung des Mondes. Art. 167—169.
- § 14. Von der Einwirkung der Planeten auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes, auf die Coefficienten der von der Figur der Erde bewirkten Ungleichheiten, so wie auf die Evectionen und die Variation. Art. 170—180.

§ 1. Ableitung der Differentialgleichungen, die in dieser Abhandlung angewandt werden sollen.

1.

Die Differentialgleichungen, die ich anwenden werde, sind die der *Fundamenta nova etc.*, die ich stets für die geeignetsten halten muss, und die ich auch mit Anwendung der excentrischen Anomalie als unabhängige Veränderliche, bei der Berechnung der Störungen der kleinen Planeten angewandt habe. Ich könnte mich begnügen, diese Differentialgleichungen aus dem oben angezogenen Werk abzuschreiben, allein ich halte dafür, dass es nicht undienlich sein wird, eine ähnliche, einfache Ableitung derselben anzugeben, wie in der Theorie der kleinen Planeten geschehen ist. Auf die zuletzt genannten Gleichungen kann ich mich nicht beziehen, da in der Mondtheorie die Störungen der mittleren Anomalie ausdrücklich anzuwenden sind, während in der Planetentheorie zwischen den Störungen der mittleren Anomalie und denen der mittleren Länge nicht unterschieden zu werden braucht und auch nicht unterschieden wird.

•

Es sollen mit $a_0, n_0, e_0, \pi_0, c_0$ die unveränderlichen, mittleren Werthe der halben grossen Achse, der Bewegung der mittleren Anomalie, der Excentricität, der Länge des Perigäums des Mondes in seiner Bahn, und der mittleren Anomalie für die Zeit $t=0$ verstanden werden, während a, n, e, χ, c die veränderlichen Elemente bezeichnen, und die Curve, die der Mond beschreibt, in der »idealen Ebene« (im Sinne meiner ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten *) der Bahn gedacht wird. Wenn ausserdem mit $n_0 z$ die Function bezeichnet wird, die an die Stelle der mittleren Anomalie gesetzt, mit $1+\nu$ der Factor, mit welchem der aus der Anwendung von $n_0 z$ hervorgehende Radius Vector multiplicirt werden muss, und mit $n_0 y t$ die Bewegung des Perigäums auf der »idealen Mondbahn«, so gehen einestheils die wahre Mondlänge v in der idealen Mondbahn und der wahre Werth des Radius Vectors r aus den folgenden Gleichungen hervor,

$$(1) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} n_0 z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} \\ \bar{r} \sin \bar{f} = a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \cdot \sin \bar{\varepsilon} \\ \bar{r} \cos \bar{f} = a_0 \cos \bar{\varepsilon} - a_0 e_0 \\ a_0^3 n_0^2 = k^2 (1 + m) \\ v = \bar{f} + n_0 y t + \pi_0 \\ r = \bar{r} (1 + \nu) \end{array} \right.$$

und andernteils aus den folgenden,

$$(2) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} n t + c = \varepsilon - e \sin \varepsilon \\ r \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin \varepsilon \\ r \cos f = a \cos \varepsilon - a e \\ a^3 n^2 = k^2 (1 + m) \\ v = f + \chi \end{array} \right.$$

wo ausser den schon erklärten Bezeichnungen ε die excentrische, \bar{f} die wahre Anomalie, m die Mondmasse und k die Gaussische Constante bedeuten.

Ich bemerke hiezu, dass in den »Fundamenta etc.« w statt des obigen ν angewandt ist, und dass ich in meiner früheren Berechnung der Mondstörungen auch w statt ν angewandt habe. Später habe ich aber gefunden, dass die Anwendung von ν auf eine einfachere Differential-

*) S. Abhandlungen d. K. G. d. Wissenschaften. Bd. V.

gleichung führt wie die von w , und deshalb wende ich hier jene Function an. Der Uebergang von v zu w , oder von w zu v ist leicht zu bewerkstelligen. In Bezug auf das Glied $n_0 y t$ bemerke ich, dass um den vollständigen Werth von y zu erhalten, welcher eine Function der Zeit ist, es einfacher sein wird, $n_0 \int y dt$ statt $n_0 y t$ in die Gleichungen einzuführen; da in dieser Abhandlung jedoch nur der constante Theil von y entwickelt und berechnet werden wird, so reicht die Form $n_0 y t$ aus. Die Differentialgleichungen werden übrigens für jede der beiden angegebenen Formen dieser Function dieselbe äussere Form bekommen.

2.

Die Gleichungen des vor. Art. geben auf bekannte Art durch die Differentiation

$$\frac{dv}{dt} = n_0 \frac{a_0^2}{r^2} \sqrt{1-e_0^2} \cdot \frac{dz}{dt} + n_0 y$$

$$\frac{dv}{dt} = n \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}$$

woraus

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\bar{r}^2 a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r^2 a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{\bar{r}^2}{a_0^2} \dots \dots \dots (3)$$

folgt. Die Gleichung $r = \bar{r} (1 + v)$ giebt aber

$$1 - \frac{\bar{r}}{r} = \frac{v}{1+v}$$

und wenn man diese ins Quadrat erhebt, erhält man

$$\frac{\bar{r}^2}{r^2} = -1 + 2 \frac{\bar{r}}{r} + \left(\frac{v}{1+v} \right)^2$$

Substituirt man nun diese in (3), so wird

$$\frac{dz}{dt} = - \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} + 2 \frac{\bar{r}}{r} \frac{a n \sqrt{1-e^2}}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} + \left(\frac{v}{1+v} \right)^2 \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{\bar{r}^2}{a_0^2}$$

erner ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e \cos f}{a(1-e^2)}$$

nimmt man hiemit r aus der vorstehenden Gleichung, und setzt zur kürzung

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{a n}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{k^2 \sqrt{1+m}}{a^2 n \sqrt{1-e^2}} = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{a} \sqrt{1-e^2}} \\ k_0 &= \frac{a_0 n_0}{\sqrt{1-e_0^2}} = \frac{k^2 \sqrt{1+m}}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{a_0} \sqrt{1-e_0^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{h_0}{h} + 2 \frac{h \bar{r}^2}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos f) + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\nu}{1 + \nu}\right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \bar{r}^2$$

oder wenn wir

$$\bar{W} = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h \bar{r}^2}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos f)$$

einführen,

$$(5) \dots \dots \dots \frac{dx}{dt} = 1 + \bar{W} + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\nu}{1 + \nu}\right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \bar{r}^2$$

Einen anderen Ausdruck für dz bekommen wir, wenn wir nicht nur h , sondern auch unmittelbar ν in (3) einführen. Es wird dadurch

$$(6) \dots \dots \dots \frac{dx}{dt} = \frac{h_0}{h(1 + \nu)^2} - \frac{y}{\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \bar{r}^2$$

Dieser Ausdruck gibt dz durch ν und h , während der vorhergehende unmittelbar auf die störenden Kräfte hingeführt werden kann.

3.

Die oben eingeführte Function \bar{W} ist Function von z und den veränderlichen Elementen. Um dies zu zeigen, braucht man nur \bar{f} statt f einzuführen, und dieses geschieht durch die folgende Gleichung

$$f = \bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi$$

die aus (1) und (2) folgt. Es wird hiemit

$$(7) \dots \bar{W} = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h \bar{r}^2}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left\{ 1 + e \cos (\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\}$$

woraus ersichtlich ist, dass \bar{W} Function der veränderlichen Elemente h , e und χ , so wie von \bar{r} und \bar{f} ist, die ihrer Seits bloß Function der veränderlichen z sind.

Um \bar{W} unmittelbar auf die störenden Kräfte hinzuführen, müssen für h , e und χ ihre Ausdrücke gesetzt werden, um aber bei dieser Substitution Integralzeichen zu vermeiden, muss zuvor \bar{W} nach diesen Grössen differentiirt werden. Da hierbei \bar{r} und \bar{f} als Constante zu betrachten sind, so ist es angemessen, die Veränderliche t , die in denselben enthalten ist, vorläufig durch eine Constante τ zu ersetzen und neues Zeichen dafür einzuführen. Sei daher ζ eine Function von τ , die in t übergeht, wenn man darin τ in t verwandelt, und $\bar{\rho}$ und $\bar{\varphi}$ zwei Functionen von ζ , die bez. in \bar{r} und \bar{f} übergehen, wenn man darin ζ in t verwandelt. Setzen wir nun die letzteren an die Stelle jener und schreiben zur Unterscheidung W statt \bar{W} , so wird

$$W = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left\{ 1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\}$$

und wenn wir vorläufig die Differentiation in Bezug auf die genannten veränderlichen Elemente durch ein der Function vorgesetztes d . bedeuten, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{h_0}{h} + 2 \frac{h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)) \right\} \\ - \frac{2n_0 y \bar{\rho} h}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} e \sin(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \end{aligned}$$

Folge des Vorhergehenden erhalten wir jetzt die Gleichungen

$$\frac{d\bar{\varphi}}{n_0 d\zeta} = \frac{a^2}{\bar{\rho}^2} \sqrt{1 - e_0^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{\rho}}{n_0 d\zeta} = \frac{a_0 e_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} \sin \bar{\varphi}$$

und der obige Ausdruck für W giebt damit

$$\begin{aligned} \frac{dW}{n_0 d\zeta} = \frac{2h e_0 \sin \bar{\varphi}}{h_0 (1 - e_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\} \\ - \frac{2h a_0}{h_0 \bar{\rho} \sqrt{1 - e_0^2}} e \sin(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}^2}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left(\frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) = \frac{\frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{n_0 d\zeta}}{a^2 \sqrt{1 - e_0^2}} \cdot \frac{h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left\{ 1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\} \\ - \frac{2h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} e \sin(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \end{aligned}$$

omit der obige Ausdruck für $\frac{dW}{dt}$ in

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{h_0}{h} + 2 \frac{h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)) \right\} \\ + \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left(\frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} \left[W + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

übergeht.

5.

Anstatt die Differentiale der veränderlichen Elemente zu substituiren, werde ich wieder die Ausdrücke derselben durch die idealen Coordinaten v und r und der ersten Differentiale derselben suchen, und diese substituiren. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = n \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin f \\ f = \bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi \end{aligned}$$

lassen ohne Mühe

$$\begin{aligned} r \frac{dv}{dt} - h = h e \cos(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \\ \frac{dr}{dt} = h e \sin(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \end{aligned}$$

woraus

$$\left(r \frac{dv}{dt} - h\right) \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) + \frac{dr}{dt} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) = he \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \lambda)$$

folgt, und überdies giebt die erste der angeführten Gleichungen

$$h = \frac{k^2(1+m)}{r^2 \frac{dv}{dt}}$$

es wird hiemit zuerst, mit Zuziehung der Gleichungen (4)

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) r \frac{dv}{dt} + \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) \frac{dr}{dt} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\bar{\rho} h}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left[\cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1 \right] - \frac{h_0}{h} \right\} \\ &\quad + \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left(\frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} \left[W + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

Da in der gestörten Bewegung die idealen Coordinaten nebst ih-
ersten Differentialen dieselbe Form haben wie in der ungestörten,
brauchen wir bei der jetzt auszuführenden Differentiation nur die ers-
ten Differentiale dieser Coordinaten veränderlich zu setzen, und wir
kommen daher

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) r \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) \frac{d^2r}{dt^2} \\ &\quad - \frac{2\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left[\cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1 \right] \frac{dh}{dt} + \frac{h_0}{h^2} \frac{dh}{dt} \\ &\quad + \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left(\frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} \left[W + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\} \\ \frac{dh}{dt} &= - \frac{k^2(1+m)}{r^2} \frac{d^2v}{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = - \frac{h^2 r^2}{k^2(1+m)} \frac{d^2v}{dt^2} \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für die idealen Coordinaten v und r s-
aber *)

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2v}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dt} &= k^2(1+m) \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) \\ \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{dv^2}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= k^2(1+m) \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) \end{aligned}$$

wo Ω die Störungsfunktion bezeichnet. Wir müssen demzufolge in
vorstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} k^2(1+m) \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) &\text{ für } \frac{d^2v}{dt^2} \\ k^2(1+m) \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) &\text{ für } \frac{d^2r}{dt^2} \end{aligned}$$

substituieren, und hiemit ergiebt sich sogleich

*) S. Abhandl. d. K. S. Gesellschaft d. Wissensch. B. V. pag. 70.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= h_0 \left\{ 2 \frac{\bar{\rho}}{r} \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1 + \frac{2h^2 \bar{\rho}}{h_0^2 a_0^2 (1 - e_0^2)} [\cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1] \right\} \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) \\ &+ 2h_0 \frac{\bar{\rho}}{r} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) r \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) \\ &+ \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left(\frac{dW}{dn_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} [W + \frac{h_0}{h} + 1] \right\} \\ \frac{dh}{dt} &= -h^2 \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) \end{aligned}$$

die mit den bez. Gleichungen der »Fundamenta etc.« übereinstimmen.

6.

Nachdem durch die Entwicklung und die darauf folgende Integration aus der eben für $\frac{dW}{dt}$ gefundenen Gleichung W ermittelt worden ist, muss darin t für τ gesetzt werden, wodurch \bar{W} erhalten wird, welche Function in den Ausdruck (5) für $\frac{dx}{dt}$ zu substituiren ist. Hiebei kann man sich eine grosse Erleichterung verschaffen, die aus dem Umstande entspringt, dass $\bar{\rho}$ und $\bar{\varphi}$ bei der ersten Integration constant angenommen werden mussten. Setzt man

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + n_0 \delta z$$

so ist δz von der Ordnung der störenden Kräfte, und setzt man dem analog

$$n_0 \zeta = n_0 \tau + c_0 + n_0 \delta \zeta$$

so ist $\delta \zeta$ auch von der Ordnung der störenden Kräfte und übrigens eine Function, die in δz übergeht, wenn man τ in t verwandelt. Substituiren wir daher in $\frac{dW}{dt}$ für $\bar{\rho}$ und $\bar{\varphi}$ nur die Glieder, die von $n_0 \tau + c_0$ abhängen, das heisst nur die elliptischen Ausdrücke, oder um möglichst deutlich zu sein, die Glieder, die aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} n_0 \tau + c_0 &= \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0 \\ \rho_0 \sin \varphi_0 &= a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \cdot \sin \varepsilon_0 \\ \rho_0 \cos \varphi_0 &= a_0 \cos \varepsilon_0 - a_0 e_0 \end{aligned}$$

folgen, und nennen die daraus entstehende Function $\frac{dW_0}{dt}$, so ergibt sich auch nach der Integration durch Hilfe des Taylor'schen Theorems, und wenn man

$$\gamma = n_0 \tau + c_0$$

setzt

veröffentlichte Theorie der idealen Coordinaten gegründet; dieses ist in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten geschehen, wo aber eine etwas andere Endform angenommen werden musste, wie in der Mondtheorie. Dieses ist der Grund, weshalb ich diese Entwicklungen hier kurz wiederholen werde. Auslassungen, die ich mir hier der Kürze wegen in den Ableitungen erlauben werde, kann man durch Nachschlagen in den beiden ebengenannten Schriften ergänzen, in welchen diese Theorien ausführlich vorgetragen sind.

Bezieht man den Ort des Mondes auf eine beliebige feste Ebene und eine feste Linie in derselben durch die rechtwinklichen Coordinaten x, y, z , und nennt die entsprechenden Coordinaten der Sonne x', y', z' , ihre Masse m' , so ist bekanntlich

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^2} \right\}$$

wo

$$A^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Nach den Differentiationen von Ω , die die partiellen Differentialquotienten geben, die in der Störungstheorie gebraucht werden, muss man $z=0$ machen, wodurch x und y von selbst in die idealen Coordinaten des Mondes X und Y übergehen, und da bei den für $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ erforderlichen Differentiationen z unberührt bleibt, so darf man in dem vorstehenden Ausdruck von Ω , insofern er nur für die eben genannten partiellen Differentiale angewandt werden soll, sogleich $z=0$ machen. Es wird dadurch

$$(9) \dots \Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A} - \frac{Xx' + Yy'}{r'^2} \right\} = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A} + \frac{A^2 - r'^2 - r'^2}{2r'^2} \right\}$$

wo

$$A^2 = (X-x')^2 + (Y-y')^2 + z'^2$$

wird.

9.

Bezeichnet man die gegenseitige Neigung der Mond- und der Sonnenbahn mit J , den Bogen, welcher sich auf der Mondbahn in der Richtung der Bewegung von der positiven X Achse bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn erstreckt mit φ , und den Bogen, welcher sich auf der Sonnenbahn in derselben Richtung von der positiven X Achse bis zu demselben Knoten erstreckt, mit ψ , so bekommt man

bestimmt man diese, so wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{he \sin f}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{he e_0 \sin(f-\bar{f})}{a_0(1-e_0^2)} - \frac{he_0 \sin \bar{f}}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{y}{2\sqrt{1-e_0^2}} \frac{d.r^2}{a_0^2 dx} (1+\nu)$$

ferentiiert man aber die Gleichung (7) nach z , so bekommt man zuerst

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dz} &= \frac{2he_0 \sin \bar{f}}{a_0(1-e_0^2)} \{1 + e \cos(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)\} \\ &- \frac{2he}{a_0(1-e_0^2)} \sin(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \\ &- \frac{2he e_0}{a_0(1-e_0^2)} \cos \bar{f} \sin(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d\bar{W}}{dz} = \frac{2he_0 \sin \bar{f}}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{2he e_0 \sin(\bar{f}-f)}{a_0(1-e_0^2)} - \frac{2he \sin f}{a_0(1-e_0^2)}$$

des wird daher

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\bar{W}}{dz} + \frac{y}{2\sqrt{1-e_0^2}} \frac{d.r^2}{a_0^2 dx} (1+\nu) \dots \dots \dots (8)$$

Die Hinführung der Function $\frac{d\bar{W}}{dz}$ auf die störenden Kräfte ist dieselbe wie die von \bar{W} , und das für diese letztere oben abgeleitete Resultat findet auch hier Anwendung, da bei der Differentiation nach z die veränderlichen Elemente unberührt geblieben sind. Da ferner auch

$$\left(\frac{d\bar{W}}{n_0 dt}\right) = \left(\frac{dW_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 W_0}{dy^2}\right) n_0 dz + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 W_0}{dy^3}\right) (n_0 dz)^2 + \dots$$

ergibt sich sogleich

$$-\frac{1}{2} n_0 \int \left\{ \left(\frac{dW_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 W_0}{dy^2}\right) n_0 dz + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 W_0}{dy^3}\right) (n_0 dz)^2 + \dots - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{d.r^2}{a_0 n_0 dx} (1+\nu) \right\} dt$$

von C die der Integration hinzugefügte Constante, und auch

$$\frac{d.r^2}{n_0 dz} = \left(\frac{d.r^2}{dy}\right) + \left(\frac{d^2.r^2}{dy^2}\right) n_0 dz + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3.r^2}{dy^3}\right) (n_0 dz)^2 + \dots$$

ist.

8.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen sind Functionen der Veränderlichen nz , ν und h . Die Störungsfunction ist auch Function von nz und ν , sie enthält ferner die analogen auf die Sonnenbewegung beziehenden Veränderlichen $n'z'$ und ν' , und ausserdem noch drei von der Neigung zwischen der Mondbahn und der Sonnenbahn abhängige Veränderliche. Die bezüglichen Ausdrücke habe ich schon in den *fundamenta etc.* entwickelt, allein sie sind dort nicht auf die später

$$\begin{aligned} \omega - \omega' &= n_0(y - y' - 2\eta) t + 2K \\ \omega + \omega' &= n_0(y + y' + 2\alpha) t + 2N \end{aligned}$$

also $2K$ der Unterschied dieser beiden Entfernungen, — oder der beiden Perigäen — und $2N$ die Summe derselben, weniger den der Zeit proportionalen Bewegungen derselben. Ich bemerke noch, dass ebenso wie bei n_0yt , auch für $n_0\alpha t$ und $n_0\eta t$ der Strenge nach $n_0\int\alpha dt$ und $n_0\int\eta dt$ gesetzt werden muss, jene abgekürzte Bezeichnung aber hier angewandt werden durfte, weil in dieser Abhandlung noch nicht die veränderlichen Glieder in α und η , die, gleichwie die in y , von den Planeten herrühren, berücksichtigt werden sollen.

Da $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ ist, so können aus den obigen Ausdrücken für Ω und \mathcal{A} leicht die Differentialquotienten nach v und r abgeleitet werden.

10.

Zur Vervollständigung der Differentialgleichungen für die Bewegung des Mondes ist noch die Ableitung der Gleichungen für die im vor. Art. eingeführten Functionen J, N, K übrig. Statt der beiden ersten dieser werde ich jedoch die auch schon in den »*Fundamenta etc.*« vorkommenden P und Q einführen, die mit jenen in folgender Verbindung stehen,

$$(11) \dots\dots\dots \begin{cases} P = 2 \sin \frac{1}{2}J \sin (N - N_0) \\ Q = 2 \sin \frac{1}{2}J \cos (N - N_0) \end{cases}$$

wobei N_0 der von den störenden Kräften unabhängige Theil von N , oder vielmehr der Werth von N ist, welcher zur Zeitepoche statt findet.

Führen wir den Bogen ein, welcher sich auf der Mondbahn vom aufsteigenden Knoten derselben auf der xy Ebene*) der im Art. 8 eingeführten Coordinaten $x y z$ bis zum aufsteigenden Knoten derselben auf der Sonnenbahn erstreckt und nennen ihn Φ , und führen wir auch den Bogen der Sonnenbahn ein, welcher sich vom aufsteigenden Knoten dieser Bahn auf der xy Ebene bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn erstreckt, und nennen ihn Ψ . Seien ferner i und i' die Neigungen der Mond- und der Sonnenbahn gegen die xy Ebene, und θ und θ' die dazu gehörigen Längen der aufsteigenden Knoten, dann sind $\Phi, \Psi, \theta - \theta'$ die Seiten eines sphärischen Dreiecks, welchen

*) Eine Ebene, deren Lage völlig willkürlich ist.

bezw. die Winkel i $\pm 180^\circ - i$, J gegenüber liegen. Die allgemeinen trigonometrischen, auf dieses Dreieck angewandten, Relationen geben uns die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dJ &= \cos \Phi di + \sin \Phi \sin i d\theta \\ &\quad - \cos \Psi di' - \sin \Psi \sin i' d\theta' \\ d\Phi &= -\cotg J \sin \Phi di + (\cotg J \cos \Phi \sin i - \cos i) d\theta \\ &\quad + \operatorname{cosec} J \sin \Psi di' - \operatorname{cosec} J \cos \Psi \sin i' d\theta' \\ d\Psi &= -\operatorname{cosec} J \sin \Phi di + \operatorname{cosec} J \cos \Phi \sin i d\theta \\ &\quad + \cotg J \sin \Psi di' - (\cotg J \cos \Psi \sin i' + \cos i') d\theta' \end{aligned}$$

in welchen aber die Grössen Φ , Ψ , θ , θ' durch andere ersetzt werden müssen.

11.

Sei σ der Bogen der Mondbahn, welcher sich von der positiven X Achse bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der xy Ebene, und σ' der Bogen der Sonnenbahn, welcher sich von der positiven X' Achse bis zum aufsteigenden Knoten der Sonnenbahn auf der xy Ebene erstreckt, dann geben uns die Definitionen der Bögen φ , ψ , Φ , Ψ , σ , σ' die folgenden Gleichungen

$$\varphi = \Phi + \sigma, \quad \psi = \Psi + \sigma'$$

und hiemit werden die Differentiale der Gleichungen (10)

$$\begin{aligned} dN &= -nadt - \frac{1}{2} (d\Phi + d\Psi + d\sigma + d\sigma') \\ dK &= n\eta dt - \frac{1}{2} (d\Phi - d\Psi + d\sigma - d\sigma') \end{aligned}$$

wo alle Differentiale in Bezug auf die Zeit zu verstehen sind. Erwägen wir, dass ausserdem

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i}, \quad d\theta' = \frac{d\sigma'}{\cos i'}$$

ist*), so giebt die Substitution in die Differentialgleichungen des vor. Art.

$$\begin{aligned} dJ &= \cos \Phi di + \sin \Phi \operatorname{tg} i d\sigma - \cos \Psi di' - \sin \Psi \operatorname{tg} i' d\sigma' \\ dN &= -nadt + \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} J (\sin \Phi di - \cos \Phi \operatorname{tg} i d\sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} J (\sin \Psi di' - \cos \Psi \operatorname{tg} i' d\sigma') \\ dK &= n\eta dt - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J (\sin \Phi di - \cos \Phi \operatorname{tg} i d\sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J (\sin \Psi di' - \cos \Psi \operatorname{tg} i' d\sigma') \end{aligned}$$

*) S. Erste Abb. über d. Stör. d. kl. Pl. § 1.

Die Differentiation der Gleichungen (11) giebt

$$dP = \cos \frac{1}{2} J \sin (N - N_0) dJ + 2 \sin \frac{1}{2} J \cos (N - N_0) dN$$

$$dQ = \cos \frac{1}{2} J \cos (N - N_0) dJ - 2 \sin \frac{1}{2} J \sin (N - N_0) dN$$

Führen wir noch die Functionen p, q, p', q' durch die folgenden Gleichungen ein,

$$(12) \dots \dots \dots \begin{cases} p = \sin i \sin \sigma \\ q = \sin i \cos \sigma \\ p' = \sin i' \sin \sigma' \\ q' = \sin i' \cos \sigma' \end{cases}$$

woraus durch die Differentiation

$$di = \frac{\sin \sigma}{\cos i} dp + \frac{\cos \sigma}{\cos i} dq$$

$$d\sigma = \frac{\cos \sigma}{\sin i} dp - \frac{\sin \sigma}{\sin i} dq$$

$$di' = \frac{\sin \sigma'}{\cos i'} dp' + \frac{\cos \sigma'}{\cos i'} dq'$$

$$d\sigma' = \frac{\cos \sigma'}{\sin i'} dp' - \frac{\sin \sigma'}{\sin i'} dq'$$

folgt, so können wir die vorstehenden Differentialgleichungen leicht in die folgenden umwandeln,

$$dP = -n\alpha Q dt - \cos \frac{1}{2} J \left\{ \cos (\varphi + N - N_0) \frac{dp}{\cos i} - \sin (\varphi + N - N_0) \frac{dq}{\cos i} \right\}$$

$$+ \cos \frac{1}{2} J \left\{ \cos (\psi + N - N_0) \frac{dp'}{\cos i'} - \sin (\psi + N - N_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

$$dQ = n\alpha P dt + \cos \frac{1}{2} J \left\{ \sin (\varphi + N - N_0) \frac{dp}{\cos i} + \cos (\varphi + N - N_0) \frac{dq}{\cos i} \right\}$$

$$- \cos \frac{1}{2} J \left\{ \sin (\psi + N - N_0) \frac{dp'}{\cos i'} + \cos (\psi + N - N_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

$$dK = n\eta dt + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \left\{ \cos \varphi \frac{dp}{\cos i} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos i} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \left\{ \cos \psi \frac{dp'}{\cos i'} - \sin \psi \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

durch welche schliesslich die Differentiale von P, Q, K von den Differentialen von p, q, p', q' abhängig gemacht worden sind.

12.

Die Ausdrücke der Differentiale von p und q durch die störenden Kräfte entnehme ich aus meiner ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten, und dieselbe würde auch die der Differentiale von p' und q' geben, die ich vorziehe hier stehen zu lassen, da sie weiter

unten nur in einigen wenigen besonderen Fällen gebraucht worden. Die Gleichungen (12) der genannten Abhandlung sind

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha''}{dt} &= -h\gamma'' Y \left(\frac{d\Omega}{dZ} \right) \\ \frac{d\beta''}{dt} &= h\gamma'' X \left(\frac{d\Omega}{dZ} \right)\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}\alpha'' &= -\sin i \sin \sigma, \quad \beta'' = \sin i \cos \sigma, \quad \gamma'' = \cos i \\ X &= r \cos v, \quad Y = r \sin v\end{aligned}$$

ist. Es wird also zuerst

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= h \cos i \left(\frac{d\Omega}{dZ} \right) r \sin v \\ \frac{dq}{dt} &= h \cos i \left(\frac{d\Omega}{dZ} \right) r \cos v\end{aligned}$$

Um den Differentialquotienten von Ω nach Z zu erhalten, müssen wir den Ausdruck von Ω des Art. 8 nach z differenzieren, und nach der Differentiation $z=0$ machen. Hiemit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\Omega}{dZ} \right) &= \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^3} - \frac{1}{r'^3} \right\} z' \\ &= -\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^3} - \frac{1}{r'^3} \right\} r' \sin J (v' - \psi)\end{aligned}$$

also

$$\left. \begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -h \cos i \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^3} - \frac{1}{r'^3} \right\} r r' \sin J \sin v \sin (v' - \psi) \\ \frac{dq}{dt} &= -h \cos i \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^3} - \frac{1}{r'^3} \right\} r r' \sin J \cos v \sin (v' - \psi)\end{aligned} \right\} \dots (13)$$

woraus sich

$$\begin{aligned}\cos \varphi \frac{dp}{\cos i dt} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos i dt} &= \\ &= -h \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^3} - \frac{1}{r'^3} \right\} r r' \sin J \sin (v - \varphi) \sin (v' - \psi) \\ \sin \varphi \frac{dp}{\cos i dt} + \cos \varphi \frac{dq}{\cos i dt} &= \\ &= -h \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^3} - \frac{1}{r'^3} \right\} r r' \sin J \cos (v - \varphi) \sin (v' - \psi)\end{aligned}$$

ergibt.

13.

Den Ausdruck für \mathcal{L}^2 können wir wie folgt stellen,

$$\mathcal{L}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \{ \cos (v - \varphi) \cos (v' - \psi) + \cos J \sin (v - \varphi) \sin (v' - \psi) \}$$

und damit giebt der Ausdruck (8) durch die partielle Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\varphi} &= -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin J \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \\ \frac{d\Omega}{d\psi} &= -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \left\{ \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) - \cos J \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \right\} \\ \frac{d\Omega}{dK} &= -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \left\{ \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) - \cos J \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \right\} \end{aligned}$$

Man betrachte Ω als Function von J, φ, ψ zu betrachten, wie hier geschehen ist, und man kann Ω als Function von P, Q, K betrachten, und um von diesen verschiedenen Differentialen auf diese überzugehen, erhält man aus den in Vorstehenden aufgestellten Relationen leicht die folgenden Resultate.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) &= \left(\frac{d\Omega}{dJ} \right) \frac{\sin(N-N_0)}{\cos \frac{1}{2}J} - \left[\left(\frac{d\Omega}{d\varphi} \right) + \left(\frac{d\Omega}{d\psi} \right) \right] \frac{\cos(N-N_0)}{2 \sin \frac{1}{2}J} \\ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) &= \left(\frac{d\Omega}{dJ} \right) \frac{\cos(N-N_0)}{\cos \frac{1}{2}J} + \left[\left(\frac{d\Omega}{d\varphi} \right) + \left(\frac{d\Omega}{d\psi} \right) \right] \frac{\sin(N-N_0)}{2 \sin \frac{1}{2}J} \\ \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) &= - \left(\frac{d\Omega}{d\varphi} \right) + \left(\frac{d\Omega}{d\psi} \right) \end{aligned}$$

Woraus in Verbindung mit den vorstehenden

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) &= -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin \frac{1}{2}J \left\{ \begin{aligned} &2 \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \\ &+ \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \cos(N-N_0) \\ &+ \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \end{aligned} \right\} \\ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) &= -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin \frac{1}{2}J \left\{ \begin{aligned} &2 \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \\ &- \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \sin(N-N_0) \\ &- \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \end{aligned} \right\} \\ \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) &= -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \cos^2 \frac{1}{2}J \left\{ \begin{aligned} &2 \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \\ &- 2 \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Resultat, und hieraus

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}P \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) &= \\ -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin J \cos \frac{1}{2}J \left\{ \begin{aligned} &\sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \\ &- \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \end{aligned} \right\} \\ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}Q \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) &= \\ -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin J \cos \frac{1}{2}J \left\{ \begin{aligned} &\sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \\ &+ \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \end{aligned} \right\} \\ \frac{1}{2}P \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) + \frac{1}{2}Q \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) &= -\frac{m}{1+m} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin^2 \frac{1}{2}J \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \end{aligned}$$

Durch Hülfe dieser kann man die letzten beiden Gleichungen des vor. Art. wie folgt schreiben.

$$\begin{aligned} \cos \varphi \frac{dp}{\cos idt} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos idt} &= h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \cos (N - N_0) \\ &\quad + h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \sin (N - N_0) \\ \sin \varphi \frac{dp}{\cos idt} + \cos \varphi \frac{dq}{\cos idt} &= -h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \sin (N - N_0) \\ &\quad + h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \cos (N - N_0) \end{aligned}$$

und überdies

$$\cos \varphi \frac{dp}{\cos idt} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos idt} = \frac{h}{2} \cotg \frac{1}{2} J \left\{ P \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) + Q \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \right\}$$

womit die drei letzten Gleichungen des Art. 11, wenn man zugleich für φ seinen Ausdruck setzt, in die folgenden übergehen,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -n\alpha Q - h \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos \theta + \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin \theta \\ \frac{dQ}{dt} &= n\alpha P + h \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin \theta - \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos \theta \\ \frac{dK}{dt} &= n\eta + \frac{1}{2} h \left\{ P \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) + Q \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{Qdp'}{\cos i' dt} + \frac{Pdq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \cos \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{Pdp'}{\cos i' dt} - \frac{Qdq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \sin \theta \end{aligned}$$

wo

$$\theta = n(\alpha + \eta)t + N_0 - K - \pi'$$

ist, und das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ecliptik bedeutet. Diese Gleichungen stimmen mit denen der *Fundamenta etc.* vollständig überein und werden zur Berechnung der Breitenstörungen des Mondes dienen. Die Grössen α und η müssen so bestimmt werden, dass in den Ausdrücken von P und K keine der Zeit proportionalen Glieder vorkommen. Ihre Summe bildet, nachdem sie mit n multiplicirt worden ist, die siderische Bewegung der Mondknoten auf der Ecliptik.

§ 2. Beweis zweier Sätze, die in der Mondbewegung statt finden.

11.

Bei der vollständigen Entwicklung der eben für die Breitenstörungen des Mondes abgeleiteten Differentialgleichungen müssen in

dp' und dq' nicht bloss die in der Sonnenbewegung vom Mond ruhenden Glieder, sondern auch die von den Planeten bewirkten substituirt werden. Unter diesen ist die Säcularänderung der Ebene der Sonnenbahn von merkwürdigem Einfluss auf P , Q , K , und somit auf die Aenderung der Ebene der Mondbahn. Wir können diese Grössen wie folgt darstellen,

$$\frac{dp'}{\cos i' dt} = b, \quad \frac{dq'}{\cos i' dt} = c$$

und dürfen hier unter b und c constante Grössen verstehen. Substituirt wir diese in die Differentialgleichungen des Art. 13, und integriren unter blosser Rücksicht auf dieselben, so bekommen wir, indem wir auch auf die Glieder niedrigster Ordnung Rücksicht nehmen,

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{b}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta \\ \delta Q &= -\frac{b}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta \end{aligned}$$

wenn wir überhaupt mit δP und δQ die in P und Q enthaltenen Sinus bezeichnen. Auf K brauchen wir hier keine Rücksicht zu nehmen, da δK eine Grösse höherer Ordnung ist wie δP und δQ .

Diese Gleichungen zeigen, dass die Säcularänderungen der Sonnenbahn in der Mondbahn keine ähnlichen hervorbringen, sondern in periodische Ungleichheiten übergehen, deren Periode in P und Q der siderischen Umlaufszeit der Mondknoten auf der Ecliptik gleichkommt, geben daher den Satz der Méc. cél., nach welchem die Ecliptik in Säcularänderung die Mondbahn nach sich zieht. Diese Gleichungen bestätigen ausserdem einen anderen Satz, den ich schon vor mehreren Jahren öffentlich habe, welcher sich folgender Maassen aussprechen lässt:

»Wenn man von den periodischen Ungleichheiten die durch die Sonne und anderswie in der Breite des Mondes erzeugt werden absieht, so bewegt sich der Mond mit constanter Neigung nicht auf der gleichzeitig stattfindenden Ecliptik, sondern auf einer, welche nahe drei Jahre vorher statt fand, und deren Knoten von der gleichzeitigen Ecliptik überdies um einen Quadranten zurückgewichen sind.«

Um diesen Satz zu beweisen bemerke ich zuerst, dass die Vorhergehenden leicht zu erkennen ist, dass das Argument des Mondes auf der Ecliptik den folgenden Ausdruck hat:

$$\bar{l} + n(y + \alpha - \eta)t + N + K$$

Berechnung der in den Meßstellen M_1 und M_2 gemessenen Werte y_1 und y_2

Wir haben vier verschiedene Meßstellen M_1, M_2, M_3, M_4 zur Verfügung.

$$y_1 = a_1 x + b_1 \quad (1)$$

Die Meßwerte y_1 sind für $x = 1, 2, 3, 4, 5$ gemessen.

$$y_2 = a_2 x + b_2 \quad (2)$$

Die Meßwerte y_2 sind für $x = 1, 2, 3, 4, 5$ gemessen.

$$y_3 = a_3 x + b_3 \quad (3)$$

$$y_4 = a_4 x + b_4 \quad (4)$$

Die Meßwerte y_3 sind für $x = 1, 2, 3, 4, 5$ gemessen.

$$y_4 = a_4 x + b_4 \quad (5)$$

$$y_5 = a_5 x + b_5 \quad (6)$$

The rest of the page contains extremely faint and illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the document. It appears to contain several paragraphs of text and possibly some mathematical derivations or data tables, but they are not readable.

... der Sonnenbewegung vom Monde her-
 ... die von den Planeten bewirkten sub-
 ... ist die Säcularänderung der Ebene der
 ... Einfluss auf P , Q , K , und somit auch
 ... der Mondbahn. Wir können diese Glieder

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = b, \quad \frac{d\theta}{dt} = c$$

... constante Grössen verstehen. Substituiren
 ... Gleichungen des Art. 13, und integriren mit
 ... so bekommen wir, indem wir auch bloss
 ... Ordnung Rücksicht nehmen,

$$= \frac{b}{2} t^2 \sin \theta - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta$$

$$= \frac{b}{2} t^2 \cos \theta - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta$$

... P und δQ die in P und Q enthaltenen Stör-
 ... brauchen wir hier keine Rücksicht zu nehmen.
 ... Ordnung ist wie δP und δQ .

... zeigen, dass die Säcularänderungen der Sonnen-
 ... hervorbringen, sondern in pe-
 ... übergehen, deren Periode in P und Q der si-
 ... der Mondknoten auf der Ecliptik gleichkommt. Sie
 ... der Méc. cél., nach welchem die Ecliptik in ihrer
 ... Mondbahn nach sich zieht. Diese Gleichungen geben
 ... Satz, den ich schon vor mehreren Jahren ver-
 ... folgender Maassen aussprechen lässt:

... periodischen Ungleichheiten die durch die
 ... wie in der Breite des Mondes erzeugt werden,
 ... der Mond mit constanter Neigung nicht
 ... Ecliptik, sondern auf der,
 ... Jahre vorher statt fand, und deren Knoten mit
 ... Ecliptik überdies um einen Quadranten zurück ge-

... diesen Satz zu beweisen bemerke ich zuerst, dass aus dem
 ... leicht zu erkennen ist, dass das Argument der Breite
 ... der Ecliptik den folgenden Ausdruck hat:

$$j + n(y + \alpha - \eta)t + N + K$$

vergehen wir daher wieder die kleinen Störungen von K , setzen h zur Abkürzung

$$\omega = n(y + \alpha - \eta)t + N_0 + K_0$$

und nennen den Sinus der Breite des Mondes S , so wird

$$S = \sin J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N)$$

Wenn wir $\delta N = N - N_0$ machen. Erwägen wir nun dass

$$P = 2 \sin \frac{1}{2} J \sin \delta N$$

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J \cos \delta N$$

und dass wir

$$P = \delta P$$

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + \delta Q$$

setzen dürfen, so bekommen wir, wenn wir wieder nur die Glieder der niedrigsten Ordnung berücksichtigen,

$$\delta S = \delta Q \sin (\bar{f} + \omega) + \delta P \cos (\bar{f} + \omega)$$

Substituiert man hierin die obigen Ausdrücke für δP und δQ , so bekommt man

$$\delta S = - \frac{b}{n(\alpha + \eta)} \sin (\bar{f} + \omega - \theta) - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \cos (\bar{f} + \omega - \theta)$$

wo $\bar{f} + \omega - \theta$ die wahre siderische Länge des Mondes in seiner Bahn bedeutet. Der vorstehende Ausdruck giebt zu erkennen, dass der Mond durch die Veränderung, die die Lage der Ecliptik im Laufe der Zeit erleidet, genöthigt wird, sich auf einer Ebene mit unveränderlicher Neigung zu bewegen, die von der gleichzeitigen Lage der Ecliptik verschieden ist, aber gegen diese eine bestimmte Lage hat. Um diese Lage zu ermitteln, nenne ich die Neigung der fraglichen Ebene gegen die gleichzeitige Ecliptik i_1 , und die Länge des aufsteigenden Knotens derselben auf dieser θ_1 . Somit ergibt sich aus dem vorstehenden Ausdruck für δS sofort

$$\sin i_1 \sin \theta_1 = \frac{c}{n(\alpha + \eta)}; \quad \sin i_1 \cos \theta_1 = - \frac{b}{n(\alpha + \eta)}$$

Wenn wir nur die erste Potenz von b und c berücksichtigen, so können wir in den obigen Ausdrücken für dp' und $dq' \cos i' = 1$ und nach den Integrationen θ' für σ' setzen; hiedurch wird

$$\sin i' \sin \theta' = bt; \quad \sin i' \cos \theta' = ct$$

Setzt man hierin

$$i = - \frac{t}{n(\alpha + \eta)}$$

und bezeichnet die zu diesem Werthe der Zeit gehörigen Werthe von i' und θ' mit i_2 und θ_2 , so entstehen die Gleichungen

$$\sin i_1 \sin \theta_1 = - \sin i_2 \cos \theta_2$$

$$\sin i_1 \cos \theta_1 = + \sin i_2 \sin \theta_2$$

woraus

$$i_1 = i_2, \quad \theta_1 = \theta_2 - 90^\circ$$

hervorgehen. Nimmt man das Julianische Jahr zur Einheit der Zeit an, dann ist sehr nahe $n(\alpha + \eta) = 69680''$, mithin $t = -2,95$ Jul. Jahren, oder

$$t \text{ nahe} = -3 \text{ Jahren,}$$

womit der obige Satz bewiesen ist.

15.

Der im vor. Art. gefundene Ausdruck von δS zeigt, dass in der Mondbreite eine Ungleichheit vorhanden ist, die von der Säcularänderung der Ecliptik abhängt und die siderische Länge des Mondes in seiner Bahn zum Argument hat. Eine ähnliche Ungleichheit wird von der Abplattung der Erde bewirkt, die aber die tropische Länge des Mondes in seiner Bahn zum Argument hat. Beide fallen also in der Zeitepoche zusammen, und entfernen sich nur nach Maassgabe des Anwachsens der Präcession von einander. Die Verschiedenheit, die dadurch entsteht, kann man durch eine Säcularänderung der Ungleichheit ausdrücken, und so habe ich es in den Mondtafeln gemacht. Die Glieder

$$+ 8'',764 \sin (f + \omega - \Theta + 169^\circ 51')$$

$$+ 0'',000388 (t - 1800) \cos (f + \omega - \Theta + 278^\circ 39')$$

die in der Einleitung der Mondtafeln als zum Ausdruck von S gehörig gegeben sind, so wie die in den Längenstörungen vom Argument Θ abhängigen, bilden die Summe der beiden hier in Rede stehenden Ungleichheiten. Den Coefficienten $8'',764$, in so weit er von der Abplattung der Erde abhängt, kann man nicht aus der Theorie bestimmen, sondern muss Beobachtungen dazu anwenden. Die Bögen $169^\circ 51'$ und $278^\circ 39'$, so wie der Coefficient der Säcularänderung — der übrigens so klein ist, dass ich ihn in den Tafeln selbst übergehen durfte — sind aus der Theorie bestimmt, wie man weiter unten sehen wird. Man muss ebenfalls die Theorie zu Hülfe nehmen, wenn man die aus dem Coefficienten sich ergebende Abplattung der Erde bestimmen will.

16.

Bei der Ermittlung der Mondstörungen muss auch auf die Uneichheiten, die der Mond in der Bewegung der Erde (oder der hier pponirten Bewegung der Sonne) hervorbringt, Rücksicht genommen werden, da die Rückwirkung dieser Ungleichheiten auf die Bewegung des Mondes nicht unmerklich ist. Es lässt sich diese Rückwirkung durch Hilfe eines Satzes, den ich jetzt beweisen werde, sehr leicht und mit der wünschenswerthen Genauigkeit berücksichtigen. Bezeichnen wir irgend welche rechtwinkliche Coordinaten des Mondes, die ihren Anfangspunkt im Schwerpunkt der Erde haben, mit x, y, z , und die analogen der Sonne mit x', y', z' , dann bekommt die von der Einwirkung der Sonne herrührende Störungfunction des Mondes den folgenden Ausdruck,

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{axx' + yy' + zz'}{(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Da der Ursache, dass die Entfernung des Mondes von der Erde immer viel kleiner ist wie die der Sonne, kann man den vorstehenden Ausdruck in eine nach den Potenzen des Verhältnisses dieser beiden Entfernungen fortschreitende, sehr stark convergirende Reihe auflösen. Aus der Gleichung

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - 2(axx' + yy' + zz') + (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

so die drei mittleren Glieder rechter Hand sich zu den drei ersten im Allgemeinen verhalten wie $r:r'$, und die drei letzten zu den drei ersten wie $r^2:r'^2$, folgt

$$\begin{aligned} \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{axx' + yy' + zz'}{(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(axx' + yy' + zz')^2}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad - \frac{3(axx' + yy' + zz')(x^2 + y^2 + z^2)}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{5(axx' + yy' + zz')^3}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.} \end{aligned}$$

lassen wir nun das erste Glied weg, welches keine Wirkung auf die Mondbewegung ausübt, und setzen

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{3(axx' + yy' + zz')^2}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ \Omega_2 &= \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{5(axx' + yy' + zz')^3}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{3(axx' + yy' + zz')(x^2 + y^2 + z^2)}{2(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

wird

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \text{etc.}$$

Die beiden hingeschriebenen Glieder sind bis auf sehr Weniges ausreichend um alle Mondstörungen zu erhalten; Ω_1 ist viel grösser wie Ω_2 , denn es ist im Allgemeinen

$$\Omega_1 : \Omega_2 = r' : r \text{ nahe} = 400 : 1$$

Es braucht jedenfalls nur die erste Potenz der in der Sonnenbewegung statt findenden Störungen berücksichtigt zu werden, und man braucht diese auch nur in Ω_1 zu berücksichtigen, da ihre Wirkung auf Ω_2 ganz unmerklich ist. Bezeichnen wir nun die durch den Mond in der Bewegung der Sonne hervorgebrachten Ungleichheiten mit $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, substituiren $x' + \delta x'$, etc. für x' , etc. in Ω_1 , behalten nur die erste Potenz dieser Incremente bei, und nennen $\delta\Omega_1$ den dadurch entstehenden Zuwachs von Ω_1 , so ergibt sich

$$\delta\Omega_1 = \frac{m'}{1+m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3(x'x' + y'y' + z'z')(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ - \frac{15(x'x' + y'y' + z'z')^2(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{7}{2}}} \\ + \frac{3(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right\}$$

und es wird nun

$$\Omega = \Omega_1 + \delta\Omega_1 + \Omega_2$$

Differentiiren wir den vorstehenden Ausdruck nach x , so ergibt sich

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx}\right) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x'(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ + \frac{3(x'x' + y'y' + z'z')\delta x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ - \frac{15(x'x' + y'y' + z'z')x'(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{7}{2}}} \\ + \frac{3x(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right\}$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Differentialquotienten nach y und z .

17.

Die einzig merkliche Einwirkung des Mondes auf die Bewegung der Erde (oder der hier supponirten der Sonne) besteht darin, dass σ verursacht, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Erde und des Mondes, statt des Schwerpunktes jener, eine Ellipse um die Sonne beschreibt. Nennen wir daher, auf diesen Schwerpunkt bezogen, die rechtwinklichen Coordinaten der Erde ξ , η , ζ , und die des Mondes x_1 , y_1 , z_1 , so wird

$$0 = \xi + mx_1; \quad 0 = \eta + my_1; \quad 0 = \zeta + mz_1$$

Nennen wir ferner die auf denselben Schwerpunkt bezogenen Coordinaten der Sonne x'_1, y'_1, z'_1 , so ergibt sich

$$x' = x'_1 - \xi; \quad y' = y'_1 - \eta; \quad z' = z'_1 - \zeta$$

und ebenso erhält man

$$x = x_1 - \xi; \quad y = y_1 - \eta; \quad z = z_1 - \zeta$$

Hieraus bekommt man

$$x' = x'_1 + \frac{m}{1+m} x; \quad y' = y'_1 + \frac{m}{1+m} y; \quad z' = z'_1 + \frac{m}{1+m} z$$

und es wird daher

$$\delta x' = \frac{m}{1+m} x; \quad \delta y' = \frac{m}{1+m} y; \quad \delta z' = \frac{m}{1+m} z$$

Substituirt man diese Ausdrücke in dem am Ende des vor. Art. erhaltenen Ausdruck, so ergibt sich

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx} \right) = \frac{m}{1+m} \cdot \frac{m'}{1+m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x'(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ + \frac{6x(xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ - \frac{15x'(xx' + yy' + zz')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right\}$$

Differentiirt man aber den obigen Ausdruck für Ω_2 nach x , so bekommt man

$$\left(\frac{d\Omega_2}{dx} \right) = - \frac{m'}{1+m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x'(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{3x(xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ - \frac{15x'(xx' + yy' + zz')^2}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right\}$$

Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke zeigt dass

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx} \right) = - \frac{2m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dx} \right)$$

oder

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx} \right) + \left(\frac{d\Omega_2}{dx} \right) = \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dx} \right)$$

in, und ähnliche Gleichungen ergeben sich für die partiellen Differentiale nach y und z . Es wird demzufolge

$$\left(\frac{d\Omega}{dx} \right) = \left(\frac{d\Omega_1}{dx} \right) + \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dx} \right)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dy} \right) = \left(\frac{d\Omega_1}{dy} \right) + \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dy} \right)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dz} \right) = \left(\frac{d\Omega_1}{dz} \right) + \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dz} \right)$$

welchen die Einwirkung der Mondstörungen der Erde auf die Mondbewegung vollständig berücksichtigt ist. Da nun in den Differential-

gleichungen für die Mondbewegung nur Differentialquotienten von \mathcal{Q} nach irgend welchen Coordinaten oder elliptischen Elementen des Mondes vorkommen, und alle solche Differentialquotienten auf die Form

$$A \left(\frac{d\Omega}{dx} \right) + B \left(\frac{d\Omega}{dy} \right) + C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)$$

gebracht werden können, in welcher A , B , C die Coordinaten oder elliptischen Elemente der Sonne nicht enthalten, so ergibt sich folgender

Satz.

»Um die Rückwirkung der in der Bewegung der Erde (oder Sonne) vom Monde verursachten Störungen auf die Mondbewegung vollständig zu berücksichtigen, braucht man nur dem eben mit \mathcal{Q}_2 bezeichneten Gliede der Störungfunction, das ist demjenigen, welches bei der weiteren folgenden Entwicklung derselben mit r^3 multiplicirt sein wird, den Factor

$$\frac{1-m}{1+m}$$

beizufügen.«

18.

Plana wendet in seiner Mondtheorie den oben gefundenen Factor, oder vielmehr die Abkürzung $1-2m$ desselben an, findet aber, dass ein Glied übrig bleibt, welches dem Satze nicht entspricht.*) In Bezug darauf bemerke ich, dass die in den Gleichungen des Art. 13 für dP , dQ , dK mit dp' und dq' multiplicirten Glieder zwar ausserhalb des eben bewiesenen Satzes liegen, eben weil sie nicht von der Störungfunction des Mondes, sondern von der der Sonne (oder Erde) abhängen. Dieser Satz gilt aber unbedingt für alle in der von der Sonne bewirkten Störungfunction des Mondes befindlichen Glieder.

Poisson hat die Richtigkeit dieses Satzes bestritten, und behauptet, dass er nur für die Glieder der niedrigsten Ordnung im Coefficienten der parallactischen Gleichung statt finde.***) Er sucht diese Behauptung a posteriori dadurch zu beweisen, dass er den Coefficienten der parallactischen Gleichung von der Form $K-\lambda L$ annimmt, wo λ die Mondmasse bedeutet, und die Grössen K und L in Reihen entwickelt, die nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes fortschreiten. Er findet

*) Théorie du mouv. d. l. lune. Tome III, p. 821.

**) Mémoire sur le mouv. d. l. lune autour d. l. terre, art. 38.

$$L = \frac{15}{4} + \frac{27}{4} m$$

während

$$K = \frac{15}{8} + \frac{93}{8} m$$

ist, wenn m das eben genannte Bewegungsverhältniss bedeutet. Da nun zufolge des obigen Satzes hier $L = 2K$ werden müsste, so scheint aus diesen Entwicklungen hervorzugehen, dass der Satz sich nur auf das erste Glied von K und L erstrecke. Allein der obige Ausdruck von L ist unrichtig, es sind in der Berechnung desselben Combinationen übergegangen worden, die auch mit m multiplicirte Glieder geben. Wenn man diese zuzieht, so erhält man

$$L = \frac{15}{4} + \frac{93}{4} m$$

dem Satze entsprechend. Der Poissonsche Einwand gegen den Satz hat also keinen Grund.

§ 3. Specielle Entwicklung der Differentialgleichungen der Mondbewegung.

19.

Zunächst ist die Störungfunction Ω zu entwickeln, und die Entwicklung davon nach den Potenzen des Mondradius die angemessenste. Sie ist schon in den »*Fundamenta etc.*« ausführlich behandelt, und ich werde daher die dort erhaltenen Resultate ohne Weiteres hier aufnehmen. Trennen wir die einzelnen Glieder nach den Potenzen von r , und setzen mit Weglassung des mit r^0 multiplicirten Gliedes, welches in den Differentiationen von selbst wegfällt, zuerst

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \frac{m'}{1+m} \frac{r^2}{r'^2} \left(\frac{3}{2} H^2 - \frac{1}{2} \right) \\ \Omega^{(2)} &= \frac{m'}{1+m} \frac{r^3}{r'^2} \left(\frac{5}{2} H^3 - \frac{3}{2} H \right) \\ \Omega^{(3)} &= \frac{m'}{1+m} \frac{r^4}{r'^2} \left(\frac{35}{8} H^4 - \frac{15}{4} H^2 + \frac{3}{8} \right) \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} H &= \cos^2 \frac{1}{2} J \cos (\bar{f} - \bar{f}' + n(y - y' - 2\eta)t + 2K) \\ &+ \sin^2 \frac{1}{2} J \cos (f + f' + n(y - y' + 2\alpha)t + 2N) \end{aligned}$$

o wird

$$\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} + \Omega^{(3)} + \text{etc.}$$

Schon das dritte der hier aufgenommenen Glieder kann mit Ausnahme einiger sehr kleinen Glieder, die vorzugsweise auf y und α einwirken, nichts Merkliches geben, und um so weniger können die folgenden hier weggelassenen Glieder Merkliches geben.

20.

Bei den ersten Entwicklungen werden nun von r, \bar{f}, r', \bar{f}' nur die elliptischen Ausdrücke angewandt, und J, K, N als Constante betrachtet, der Unterschied zwischen diesen und den vollständigen Werthen derselben wird später berücksichtigt werden. Die Entwicklungen geschehen nach den Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien des Mondes und der Sonne, wobei aber auch die verschiedenen Combinationen der oben im Ausdruck von H befindlichen, mit t multiplicirten Glieder, so wie die Combinationen von N und K in Betracht kommen. Der Einfachheit wegen können wir auch für N und K die bereits im Art. 9 eingeführten und mit ω und ω' bezeichneten Grössen anwenden, wenn wir in den ersten Entwicklungen N_0 und K_0 statt N und K schreiben. Es wird daher zuerst

$$(14) \dots \dots \dots \begin{cases} \omega = n(y + \alpha - \eta)t + N_0 + K_0 \\ \omega' = n(y' + \alpha + \eta)t + N_0 - K_0 \end{cases}$$

und es bedeutet ω die mittlere Entfernung des Mondperigäums vom aufsteigenden Knoten, so wie ω' die mittlere Entfernung des Sonnenperigäums von demselben Knoten. Später, bei der Berücksichtigung der von der Neigung und der Knotenlänge abhängigen Störungen müssen wir wieder N und K statt N_0 und K_0 substituieren.

Schreiben wir auch der Kürze wegen f und f' statt \bar{f} und \bar{f}' , so wird daher in jedem Falle

$$H = \cos^2 \frac{1}{2} J \cos(f - f' + \omega - \omega') + \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(f + f' + \omega + \omega')$$

Die Sonnenmasse m' , die hier in Theilen der Erdmasse ausgedrückt werden muss, und deshalb eine grosse Zahl ist, kann auch, und zwar bleibend, eliminirt werden. Da wir hier unter n und n' die Bewegungen der mittleren Anomalien des Mondes und der Sonne verstehen müssen, wie die Entwicklungen des § 1 unabweislich verlangen, so müssen wir auch die grossen Halbachsen der Ellipsen so verstehen, dass sie den Gleichungen

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m); \quad n'^2 a'^3 = k^2 (1 + m')$$

ige leisten, und aus diesen zieht man ohne Mühe

$$\frac{m'}{1+m} \frac{a^2}{a'^2} = u^2 \frac{m'}{1+m'}$$

$$u = \frac{n'}{n}$$

21.

Aus dem obigen Ausdruck von H , in welchem zwei verschiedene ω und ω' vorkommen, folgt leicht, dass in H^2 und folglich auch in $\Omega^{(1)}$ fünf verschiedene Gruppen dieser Bögen vorkommen müssen. Theilen wir daher der leichteren Uebersicht wegen $\Omega^{(1)}$ in fünf Theile, so dass

$$\Omega^{(1)} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_5$$

erhalten, so giebt die in den »Fundamenta etc.« nachzusehende Entwicklung, wenn wir auch zur Abkürzung

$$u^2 \frac{m'}{1+m'} = u_1^2$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{3}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_3 = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_4 = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_5 = \frac{3}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

setzen.

$$a\Omega_1 = u_1^2 \beta_1 \sum P^{(i)} K^{(i')} \cos (ig + i'g')$$

$$a\Omega_2 = u_1^2 \beta_2 \sum Q^{(i)} G^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$a\Omega_3 = u_1^2 \beta_3 \sum Q^{(i)} K^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega)$$

$$a\Omega_4 = u_1^2 \beta_4 \sum P^{(i)} G^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega')$$

$$a\Omega_5 = u_1^2 \beta_5 \sum Q^{(i)} G^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega')$$

so die Summationen sowohl in Bezug auf i wie auf i' von $-\infty$ bis $+\infty$ auszudehnen sind, und die Coefficienten die folgenden Ausdrücke haben: *)

*) Ich habe hier $Q^{(i)}$ und $G^{(i')}$ statt der in den »Fundamenta etc.« angewandten Bezeichnung $Q_c^{(i)} + Q_s^{(i)}$ und $G_c^{(i')} - G_s^{(i')}$ geschrieben.

$$P^{(0)} = 1 + \frac{3}{2} e^2$$

$$P^{(4)} = -e + \frac{1}{8} e^3 - \frac{1}{192} e^5 + \dots$$

$$P^{(2)} = -\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{12} e^4 - \frac{1}{96} e^6 + \dots$$

$$P^{(8)} = -\frac{1}{8} e^3 + \frac{9}{128} e^5 + \dots$$

$$P^{(4)} = -\frac{1}{12} e^4 + \frac{1}{15} e^6 + \dots$$

$$P^{(5)} = -\frac{25}{884} e^5 + \dots$$

$$P^{(6)} = -\frac{9}{160} e^6 + \dots$$

$$P^{(-4)} = P^{(4)}$$

$$Q^{(-3)} = -\frac{17}{640} e^5 + \dots$$

$$Q^{(-2)} = -\frac{1}{16} e^4 - \frac{11}{480} e^6 + \dots$$

$$Q^{(-4)} = -\frac{7}{24} e^3 - \frac{47}{884} e^5 + \dots$$

$$Q^{(0)} = \frac{5}{2} e^2$$

$$Q^{(1)} = -3e + \frac{13}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 + \dots \text{*)}$$

$$Q^{(2)} = 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{23}{16} e^4 - \frac{65}{288} e^6 + \dots$$

$$Q^{(3)} = e - \frac{19}{8} e^3 + \frac{107}{64} e^5 + \dots$$

$$Q^{(4)} = e^2 - \frac{5}{2} e^4 + \frac{101}{48} e^6 + \dots$$

$$Q^{(5)} = \frac{25}{24} e^3 - \frac{1075}{884} e^5 + \dots$$

$$Q^{(6)} = \frac{9}{8} e^4 - \frac{261}{80} e^6 + \dots$$

$$Q^{(7)} = \frac{2401}{1920} e^5 + \dots$$

$$Q^{(8)} = \frac{64}{45} e^6 + \dots$$

*) In den »*Fundamenta etc.*« steht durch Druckfehler $Q_s^{(1)} = \dots + \frac{33}{24} e^3 - 1$ statt $+\frac{23}{24} e^3$. In meinen Manuscripten hat immer der richtige Werth $+\frac{23}{24} e^3$ gestan-

$$K^{(0)} = (1 - e'^2) - \frac{1}{2}$$

$$K^{(1)} = \frac{3}{2} e' + \frac{27}{16} e'^3 + \dots$$

$$K^{(2)} = \frac{9}{4} e'^2 + \frac{7}{4} e'^4 + \dots$$

$$K^{(3)} = \frac{53}{16} e'^3 + \dots$$

$$K^{(4)} = \frac{281}{48} e'^4 + \dots$$

$$K^{(5)} = \frac{1773}{256} e'^5 + \dots$$

$$K^{(-i')} = K^{(i')}$$

$$G^{(2)} = \frac{1}{24} e'^4 + \dots$$

$$G^{(1)} = \frac{1}{48} e'^3 + \dots$$

$$G^{(0)} = 0$$

$$G^{(-1)} = -\frac{1}{2} e' + \frac{1}{16} e'^3 + \dots$$

$$G^{(-2)} = 1 - \frac{5}{2} e'^2 + \frac{13}{12} e'^4 + \dots$$

$$G^{(-3)} = \frac{7}{2} e' - \frac{123}{16} e'^3 + \dots$$

$$G^{(-4)} = \frac{17}{2} e'^2 - \frac{115}{6} e'^4 + \dots$$

$$G^{(-5)} = \frac{845}{48} e'^3 + \dots$$

$$G^{(-6)} = \frac{533}{16} e'^4 + \dots$$

omit man vollständig ausreicht.

22.

Der zweite Theil der Störungfunction $\Omega^{(2)}$ enthält H^3 , und besteht daher aus sieben in Bezug auf ω und ω' verschiedenen Theilen, von jedoch zwei unmerklich sind. Zur Berücksichtigung der übrigen fünf Theile setze ich

$$\Omega^{(2)} = \Omega_6 + \Omega_7 + \Omega_8 + \Omega_9 + \Omega_{10}$$

und um den zweiten Satz des vor. § sogleich zu berücksichtigen, multiplicire ich jeden dieser fünf Theile mit

$$\lambda = \frac{1-m}{1+m}$$

Setzt man ausserdem zur Abkürzung

$$\mu = \frac{a}{a'}$$

$$\beta_6 = \frac{8}{8} - \frac{33}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{75}{8} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_7 = \frac{5}{8} - \frac{15}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{15}{8} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_8 = \frac{9}{4} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_9 = \frac{15}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_{10} = \frac{15}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

so ergibt sich

$$a\Omega_6 = \lambda\mu u_1^2 \beta_6 \Sigma A^{(v)} C^{(v)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega')$$

$$a\Omega_7 = \lambda\mu u_1^2 \beta_7 \Sigma B^{(v)} D^{(v)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega')$$

$$a\Omega_8 = \lambda\mu u_1^2 \beta_8 \Sigma A^{(v)} C^{(-v)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega')$$

$$a\Omega_9 = \lambda\mu u_1^2 \beta_9 \Sigma B^{(v)} C^{(v)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - \omega')$$

$$a\Omega_{10} = \lambda\mu u_1^2 \beta_{10} \Sigma A^{(v)} D^{(v)} \cos (ig + i'g' + \omega - 3\omega')$$

wo die Ausdehnung der Summationen in Bezug auf i und i' dieselbe wie im vor. Art. Die hier vorkommenden Functionen der Excentric haben die folgenden Ausdrücke:

$$A^{(-3)} = \frac{7}{128} e^4 + \dots$$

$$A^{(-2)} = \frac{1}{8} e^3 + \dots$$

$$A^{(-1)} = \frac{11}{8} e^2 + \frac{7}{48} e^4 + \dots$$

$$A^{(0)} = -\frac{5}{2} e - \frac{15}{8} e^3 + \dots$$

$$A^{(1)} = 1 + 2e^2 - \frac{11}{64} e^4 + \dots$$

$$A^{(2)} = -\frac{1}{2} e + e^3 + \dots$$

$$A^{(3)} = -\frac{3}{8} e^2 + \frac{11}{16} e^4 + \dots$$

$$A^{(4)} = -\frac{7}{24} e^3 + \dots$$

$$A^{(5)} = -\frac{95}{384} e^4 + \dots$$

$$B^{(-1)} = \frac{75}{128} e^4 + \dots$$

$$B^{(0)} = -\frac{35}{8} e^3$$

$$B^{(1)} = \frac{57}{8} e^2 - \frac{65}{16} e^4 + \dots$$

$$B^{(2)} = -\frac{9}{2}e + \frac{33}{4}e^3 + \dots$$

$$B^{(3)} = 1 - 6e^2 + \frac{591}{64}e^4 + \dots$$

$$B^{(4)} = \frac{3}{2}e - \frac{57}{8}e^3 + \dots$$

$$B^{(5)} = \frac{15}{8}e^2 - \frac{135}{16}e^4 + \dots$$

$$B^{(6)} = \frac{9}{4}e^3 + \dots$$

$$B^{(7)} = \frac{348}{128}e^4 + \dots$$

$$C^{(2)} = \frac{23}{12}e'^3 + \dots$$

$$C^{(1)} = \frac{11}{8}e'^2 + \dots$$

$$C^{(0)} = e'(1 - e'^2) - \frac{1}{2}$$

$$C^{(-1)} = 1 + 2e'^2 + \dots$$

$$C^{(-2)} = 3e' + \frac{33}{12}e'^3 + \dots$$

$$C^{(-3)} = \frac{53}{8}e'^2 + \dots$$

$$C^{(-4)} = \frac{77}{6}e'^3 + \dots$$

$$D^{(0)} = 0$$

$$D^{(-1)} = \frac{1}{8}e'^2 + \dots$$

$$D^{(-2)} = -e' + \frac{5}{4}e'^3 + \dots$$

$$D^{(-3)} = 1 - 6e'^2 + \dots$$

$$D^{(-4)} = 5e' - 22e'^3 + \dots$$

$$D^{(-5)} = \frac{127}{8}e'^2 + \dots$$

$$D^{(-6)} = \frac{163}{4}e'^3 + \dots$$

mit man vollständig ausreicht.

Der hier vorkommende Factor μ bezeichnet, wie sein Ausdruck, das Verhältniss der mittleren Sonnenparallaxe zur mittleren Mondparallaxe und es hängen daher alle aus Ω_6 bis Ω_{10} sich ergebenden Störungen von der Sonnenparallaxe ab, und nicht bloß die sogenannte actische Ungleichheit, die in dieser Beziehung oft ausschliesslich führt wird. Die Sonnenparallaxe kann aber nur durch Beobachtung bestimmt werden, und der jetzt im Gebrauch befindliche Werth

derselben ist erstens auf keinen Fall genau genug, um in der Mondtheorie definitiv angewandt werden zu können, und zweitens in der letzten Reihe von Jahren ohnehin mehrmals als wesentlich von dem richtigen Werthe desselben abweichend bezeichnet worden. In Folge dieser Umstände wurde es bei der Bearbeitung der Mondtafeln nothwendig, den Werth des Factors μ , welcher in den Störungsrechnungen angenommen worden war, durch die Mondbeobachtungen zu berichtigen, und dieses Verfahren ist daher kein Empirismus.

23.

Der dritte oben aufgestellte Theil der Störungfunction, nemlich $\Omega^{(3)}$, besteht, wenn man seinen vollständigen Ausdruck betrachtet, aus noch mehr Abtheilungen, wie die beiden vorhergehenden Theile, allein die Betrachtung der grössten derselben reicht aus, da nur diese etwas Merkliches geben können. Es wird zufolge des Art. 19, wenn man die Grössen μ und u einführt,

$$a\Omega^{(3)} = \mu^2 u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(\frac{a'}{r}\right)^5 \left\{ \frac{35}{8} H^4 - \frac{15}{4} H^2 + \frac{3}{8} \right\}$$

und der Ausdruck von H des Art. 20 giebt, wenn man nur die Glieder aufnimmt, die Merkliches geben können,

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega') \\ &\quad + \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2f' + 2\omega') \\ H^4 &= \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega') \\ &\quad + \frac{3}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2f' + 2\omega') \\ &\quad + \frac{1}{8} \cos(4f - 4f' + 4\omega - 4\omega') \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \frac{35}{8} H^4 - \frac{15}{4} H^2 + \frac{3}{8} &= \frac{9}{64} - \frac{45}{16} \sin^2 \frac{1}{2} J \\ &\quad + \frac{5}{16} \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega') \\ &\quad + \frac{45}{16} \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2f' + 2\omega') \\ &\quad + \frac{35}{64} \cos(4f - 4f' + 4\omega - 4\omega') \end{aligned}$$

folgt. Berücksichtigen wir nun nur die erste Potenz der Excentricitäten und nehmen von den mit e' multiplicirten Gliedern nur das zugleich mit $\cos g'$ multiplicirte Glied auf, da die übrigen unmerklich sind, so müssen

die Ausdrücke

$$f = g + 2e \sin g, \quad f' = g'$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^4 = 1 - 4e \cos g, \quad \left(\frac{a'}{r}\right)^5 = 1 + 5e' \cos g'$$

substituirt werden, und hiemit erhält man

$$\begin{aligned} a\Omega^{(3)} = & \mu^2 u^2 \left\{ \frac{9}{64} - \frac{45}{16} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} - \frac{9}{16} \mu^2 u^2 e \cos g \\ & + \frac{45}{16} \mu^2 u^2 e' \cos g' - \frac{5}{4} \mu^2 u^2 e \cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ & + \frac{5}{16} \mu^2 u^2 \cos (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{45}{16} \mu^2 u^2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos (2g' + 2\omega') \\ & - \frac{105}{32} \mu^2 u^2 e \cos (3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') + \frac{35}{64} \mu^2 u^2 \cos (4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ & + \frac{35}{32} \mu^2 u^2 e \cos (5g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \end{aligned}$$

Man wird weiter unten sehen, dass die grösste Wirkung dieser Glieder sich auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten erstreckt.

24.

Wir kommen jetzt zur Entwicklung des Ausdrucks für dW_0 des Art. 6, in welchem auch zuerst nur die elliptischen Ausdrücke der darin vorkommenden Functionen berücksichtigt werden sollen. Setzt man

$$\frac{dW_0}{n_0 dt} = T + \frac{\nu}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^3} \left(\frac{dW_0}{d\gamma} \right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2 a_0 d\gamma} \left[W_0 + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\}$$

so wird, wenn wir zuerst nur auf die elliptischen Ausdrücke der in T enthaltenen Functionen Rücksicht nehmen, und um dieses anzudeuten T_0 statt T schreiben, übrigens aber das Zeichen 0 weglassen, wo daraus keine Undeutlichkeit entstehen kann,

$$\begin{aligned} T_0 = & \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 \frac{e}{r} \cos (f-\varphi) - 1 + \frac{2e}{a(1-e^2)} [\cos (f-\varphi) - 1] \right\} \left(\frac{da\Omega}{dv} \right) \\ & + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{e}{r} \sin (f-\varphi) r \left(\frac{da\Omega}{dr} \right) \end{aligned}$$

Man kann diesen Ausdruck auf mehrere Arten entwickeln. Man kann die Entwicklung der Coefficienten von $\left(\frac{da\Omega}{dv}\right)$ und $r\left(\frac{da\Omega}{dr}\right)$ unmittelbar suchen, und so habe ich es in den »*Fundamenta etc.*« ausgeführt. Man kann statt dessen T_0 so umformen, dass $\left(\frac{da\Omega}{dg}\right)$ statt $\left(\frac{da\Omega}{dv}\right)$ darin enthalten ist, dies ist das Verfahren, welches ich bei der Berechnung der gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns befolgt habe.*) Endlich

*) S. Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Berlin 1831.

kann man auch $\left(\frac{da\Omega}{ds}\right)$ und $\left(\frac{da\Omega}{dg}\right)$ statt $r\left(\frac{da\Omega}{dr}\right)$ einführen, wie ich schon früher angegeben habe.*) Dieses Verfahren ist jedoch nur dann mit Vortheil anzuwenden, wenn der Ausdruck von Ω nach den Potenzen von e ausdrücklich vorhanden ist. Dieses ist hier der Fall und ich werde daher dieses dritte Verfahren anwenden. Ordnen wir den obigen Ausdruck von T_0 nach den verschiedenartigen Functionen von ρ und φ , die darin enthalten sind, so bekommen wir leicht zuerst

$$T_0 = -\frac{3}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + 2 \frac{\rho \cos \varphi}{a\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \sin f + \frac{\cos f}{1-e^2} + \frac{e}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + a \sin f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\} + 2 \frac{\rho \sin \varphi}{a\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \sin f + \frac{\sin f}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) - a \cos f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\}$$

und dieser kann in den folgenden umgewandelt werden,

$$T_0 = -\frac{3}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{ae \cos f}{r} + \frac{e \cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + ae \sin f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\} + \frac{2\rho \cos \varphi + 3ae}{a\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \cos f + \frac{\cos f}{1-e^2} + \frac{e}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + a \sin f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\} + \frac{2\rho \sin \varphi}{a\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \sin f + \frac{\sin f}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) - a \cos f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\}$$

Da der gewöhnliche Ausdruck für $\frac{dv}{dg}$, nemlich

$$\frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} = \frac{ae \cos f}{r\sqrt{1-e^2}} + \frac{e \cos f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, so wird

$$\left(\frac{da\Omega}{dg}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{ae \cos f}{r} + \frac{e \cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + \frac{ae \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{da\Omega}{ds}\right) = \left(\frac{a \sin f}{r} + \frac{\sin f}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) - a \cos f \left(\frac{da\Omega}{dv}\right)$$

woraus

$$\left(\frac{da\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{a \cos f}{r} + \frac{\cos f}{1-e^2} + \frac{e}{1-e^2} \right\} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + \frac{ae \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dr}\right)$$

folgt. Hiemit geht der vorstehende Ausdruck von T_0 unmittelbar in den folgenden über,

$$T_0 = -3 \left(\frac{da\Omega}{dg}\right) + \frac{1}{e} \left\{ \left(\frac{da\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) \right\} \left(2 \frac{\rho}{a} \cos \varphi + 3e\right) + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{ds}\right) 2 \frac{\rho}{a} \sin \varphi$$

*) S. Schumacher Astr. Nachr. Bd. 19. p. 55.

welches der einfachste Ausdruck ist, auf welchen T_0 hingeführt werden kann.

25.

Das im vorstehenden Ausdruck von T_0 enthaltene Differential von Ω nach g wird unmittelbar erhalten, weil in den vorhergehenden Entwicklungen von $a\Omega$ der Bogen g ausdrücklich enthalten ist, und da

$$\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\omega}\right)$$

ist, so verhält es sich ebenso mit dem Differential nach v , da der Bogen ω auch ausdrücklich in den Entwicklungen von Ω enthalten ist. Die Ermittlung der Coefficienten der Function

$$\frac{1}{\sigma} \left\{ \left(\frac{da\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) \right\}$$

aus $a\Omega$ führt darauf hin, dass die Coefficienten von $a\Omega$ mit den folgenden Factoren zu multipliciren,

$$\begin{aligned} a\Omega_1 \text{ und } a\Omega_4 & \quad \text{mit } -\frac{i}{\sigma} \\ a\Omega_2, a\Omega_3 \text{ und } a\Omega_5 & \quad -\frac{i}{\sigma} + \frac{3}{\sigma\sqrt{1-e^2}} \\ a\Omega_6, a\Omega_8 \text{ und } a\Omega_{10} & \quad -\frac{i}{\sigma} + \frac{1}{\sigma\sqrt{1-e^2}} \\ a\Omega_7 \text{ und } a\Omega_9 & \quad -\frac{i}{\sigma} + \frac{3}{\sigma\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

und ausserdem die Cosinusse, die Ω enthält, in Sinusse zu verwandeln sind. Das Differential von Ω nach e wird ebenfalls unmittelbar erhalten. da oben die Functionen $P^{(i)}$, $Q^{(i)}$, etc. in Reihen, die nach den Potenzen von e fortschreiten, ausgedrückt worden sind.

Setzen wir nun noch

$$\begin{aligned} 2\frac{e}{a} \cos \varphi + 3e &= 2f \cos \gamma + \dots \\ 2\frac{e \sin \varphi}{a\sqrt{1-e^2}} &= 2f' \sin \gamma + \dots \end{aligned}$$

wo die Zeichen f und f' nicht wie bisher die wahren Anomalien bedeuten, sondern

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 - \frac{7}{9216}e^6 + \dots \\ f' &= 1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4 - \frac{1}{9216}e^6 + \dots \end{aligned}$$

ist. so haben wir alles, welches zur Entwicklung von T_0 erforderlich ist. Die Coefficienten f und f' sind die einzigen der Entwicklung der

vorstehenden Functionen, die gebraucht werden, und der Grund davon liegt in einem längst von mir bewiesenen und weiter unten anzuführenden Satze, der die unmittelbare Berücksichtigung der mit $\left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2\gamma, \left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 3\gamma,$ etc. multiplicirten Glieder überflüssig macht, und dadurch eine bedeutende Abkürzung der Berechnungen herbeiführt.

26.

Die Ausdrücke des vor. Art. könnte man unmittelbar zur numerischen Entwicklung von T_0 anwenden, allein es ist einfacher, die aus denselben hervorgehenden, nach den Potenzen von e fortschreitenden Reihen zu ermitteln und anzuwenden, es wird hiedurch T_0 auf dieselbe Form gebracht wie \mathcal{Q} . Da bei dieser Umwandlung T_0 in die, den zehn Abtheilungen von \mathcal{Q} entsprechenden, Theile zerlegt werden muss, so werde ich mich dabei der Bezeichnung $T_1, T_2,$ etc. bedienen. Es ergibt sich hienach

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 3u_1^2 \beta_1 \sum i P^{(i)} K^{(i)} \sin (ig + i'g') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_1 \sum P^{\pm 1, i} K^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g') \\
 T_2 &= 3u_1^2 \beta_2 \sum i Q^{(i)} G^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_2 \sum Q^{\pm 1, i} G^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 T_3 &= 3u_1^2 \beta_3 \sum i Q^{(i)} K^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega) \\
 &\quad + u_1^2 \beta_3 \sum Q^{\pm 1, i} K^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + 2\omega) \\
 T_4 &= 3u_1^2 \beta_4 \sum i P^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_4 \sum P^{\pm 1, i} G^{(-i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + 2\omega') \\
 T_5 &= 3u_1^2 \beta_5 \sum i Q^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_5 \sum Q^{\pm 1, i} G^{(-i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 T_6 &= 3\lambda \mu u_1^2 \beta_6 \sum i A^{(i)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_6 \sum A^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 T_7 &= 3\lambda \mu u_1^2 \beta_7 \sum i B^{(i)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_7 \sum B^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 T_8 &= 3\lambda \mu u_1^2 \beta_8 \sum i A^{(i)} C^{(-i)} \sin (ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_8 \sum A^{\pm 1, i} C^{(-i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 T_9 &= 3\lambda \mu u_1^2 \beta_9 \sum i B^{(i)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_9 \sum B^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 T_{10} &= 3\lambda \mu u_1^2 \beta_{10} \sum i A^{(i)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_{10} \sum A^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + \omega - 3\omega')
 \end{aligned}$$

is dem Vorbergehenden erhellet leicht, dass

$$\begin{aligned}
 P^{\pm 1, i} &= -\frac{i}{e} P^{(i)} f \pm \frac{dP^{(i)}}{de} f' \\
 Q^{\pm 1, i} &= \left\{ -\frac{i}{e} + \frac{2}{e\sqrt{1-e^2}} \right\} Q^{(i)} f \pm \frac{dQ^{(i)}}{de} f' \\
 A^{\pm 1, i} &= \left\{ -\frac{i}{e} + \frac{1}{e\sqrt{1-e^2}} \right\} A^{(i)} f \pm \frac{dA^{(i)}}{de} f' \\
 B^{\pm 1, i} &= \left\{ -\frac{i}{e} + \frac{3}{e\sqrt{1-e^2}} \right\} B^{(i)} f \pm \frac{dB^{(i)}}{de} f'
 \end{aligned}$$

27.

Die Entwicklung der vorstehenden Functionen in Reihen ist sehr zu bewerkstelligen, wenn man ausser den oben schon angegebenen Reihen noch die folgende

$$\frac{1}{e\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} e + \frac{3}{8} e^3 + \frac{5}{16} e^5 + \dots$$

t. Man erhält mit hinreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned}
 P^{-1, 0} &= -3e + \frac{3}{8} e^3 - \frac{1}{64} e^5 \\
 P^{-1, 1} &= 2 - e^2 + \frac{5}{32} e^4 \\
 P^{-1, 2} &= e - \frac{3}{4} e^3 + \frac{13}{64} e^5 \\
 P^{-1, 3} &= \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^4 \\
 P^{-1, 4} &= \frac{2}{3} e^3 - \frac{5}{6} e^5 \\
 P^{-1, 5} &= \frac{125}{192} e^4 \\
 P^{-1, -1} &= 0 \\
 P^{-1, -2} &= -\frac{1}{24} e^3 + \frac{1}{96} e^5 \\
 P^{-1, -3} &= -\frac{3}{64} e^4
 \end{aligned}$$

und ausserdem

$$\underline{\underline{P^{1, i} = -P^{-1, -i}}}$$

erner

$$\begin{aligned}
 Q^{-1, -1} &= \frac{11}{64} e^4 \\
 Q^{-1, -3} &= -\frac{17}{64} e^4 \\
 Q^{-1, 0} &= \frac{5}{4} e^3 + \frac{25}{24} e^5 \\
 Q^{-1, -2} &= -\frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{6} e^5
 \end{aligned}$$

$$Q^{-1,1} = -\frac{11}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^4$$

$$Q^{1,-1} = -\frac{7}{4}e^2 - \frac{5}{8}e^4$$

$$Q^{-1,2} = 6e - \frac{17}{2}e^3 + \frac{95}{32}e^5$$

$$Q^{1,0} = 10e + \frac{35}{32}e^5$$

$$Q^{-1,3} = -2 + 11e^2 - \frac{443}{32}e^4$$

$$Q^{1,1} = -6 + 5e^2 - \frac{21}{32}e^4$$

$$Q^{-1,4} = -4e + 17e^3 - \frac{1063}{48}e^5$$

$$Q^{1,2} = -4e + \frac{17}{4}e^3 - \frac{59}{48}e^5$$

$$Q^{-1,5} = -\frac{25}{4}e^2 + 25e^4$$

$$Q^{1,3} = -\frac{7}{2}e^2 + \frac{11}{3}e^4$$

$$Q^{-1,6} = -9e^3 + 36e^5$$

$$Q^{1,4} = -\frac{7}{2}e^3 + \frac{45}{8}e^5$$

$$Q^{-1,7} = -\frac{2401}{192}e^4$$

$$Q^{1,5} = -\frac{725}{192}e^4$$

Ferner

$$A^{-1,0} = \frac{25}{8}e^2$$

$$A^{1,-2} = e^2$$

$$A^{-1,1} = -\frac{7}{2}e + \frac{17}{4}e^3$$

$$A^{1,-1} = \frac{11}{2}e + \frac{3}{16}e^3$$

$$A^{-1,2} = 1 - \frac{9}{2}e^2$$

$$A^{1,0} = -5 - \frac{15}{2}e^2$$

$$A^{-1,3} = \frac{3}{2}e - \frac{75}{16}e^3$$

$$A^{1,1} = \frac{9}{2}e - \frac{15}{8}e^3$$

$$A^{-1,4} = \frac{7}{4}e^2$$

$$A^{1,2} = \frac{13}{8}e^2$$

oder

$$\begin{aligned}
 B^{-1,1} &= \frac{61}{4} e^3 \\
 B^{1,-1} &= \frac{75}{16} e^3 \\
 \hline
 B^{-1,2} &= -\frac{177}{8} e^3 \\
 B^{1,0} &= -\frac{105}{4} e^3 \\
 \hline
 B^{-1,3} &= \frac{27}{2} e - \frac{275}{8} e^3 \\
 B^{1,1} &= \frac{57}{2} e - \frac{223}{16} e^3 \\
 \hline
 B^{-1,4} &= -3 + \frac{63}{2} e^2 \\
 B^{1,2} &= -9 + \frac{57}{2} e^2 \\
 \hline
 B^{-1,5} &= -\frac{15}{2} e + \frac{225}{16} e^3 \\
 B^{1,3} &= -\frac{21}{2} e + 30 e^3 \\
 \hline
 B^{-1,6} &= -\frac{27}{2} e^2 \\
 B^{1,4} &= -\frac{93}{8} e^2 \\
 \hline
 \hline
 \end{aligned}$$

mit man zur Berechnung von T_0 vollständig ausreicht.

28.

Es ist noch der Theil von T_0 zu entwickeln, welcher von $\Omega^{(3)}$ abhängt und daher mit $T_0^{(3)}$ bezeichnet werden soll. Bringen wir auch die Entwicklung diesen auf die Form

$$T_0^{(3)} = A \left(\frac{da\Omega^{(3)}}{dv} \right) + Br \left(\frac{da\Omega^{(3)}}{dr} \right)$$

folgt aus den „Fundamenta etc.“ mit dem hier ausreichenden Grade an Genauigkeit, dass

$$A = -3 + 4 \cos(g - \gamma) - 6e \cos g - e \cos \gamma + 5e \cos(2g - \gamma)$$

$$B = 2 \sin(g - \gamma) - 3e \sin g + e \sin \gamma + 3e \sin(2g - \gamma)$$

und nun der Ausdruck von $a\Omega^{(3)}$ des Art. 23

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2} \mu^2 u^2 e \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{5}{8} \mu^2 u^2 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &+ \frac{105}{8} \mu^2 u^2 e \sin(3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') - \frac{25}{16} \mu^2 u^2 \sin(4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\
 &- \frac{25}{8} \mu^2 u^2 e \sin(5g - 4g' + 4\omega - 4\omega')
 \end{aligned}$$

$$r \left(\frac{da\Omega^{(2)}}{dr} \right) = \frac{9}{16} \mu^2 u^2 - \frac{9}{4} \mu^2 u^2 e \cos g + \frac{45}{4} \mu^2 u^2 e' \cos g' - 5 \mu^2 u^2 e \cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ + \frac{5}{4} \mu^2 u^2 \cos (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{105}{8} \mu^2 u^2 e \cos (3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{35}{16} \mu^2 u^2 \cos (4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') + \frac{35}{8} \mu^2 u^2 e \cos (5g - 4g' + 4\omega - 4\omega')$$

giebt, so bekommt man

$$T_0^{(2)} = -\frac{27}{16} \mu^2 u^2 e \sin g \\ + \frac{9}{8} \mu^2 u^2 \sin (-\gamma + g) - \frac{9}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 2g) + \frac{45}{4} \mu^2 u^2 e' \sin (-\gamma + g - g') \\ + \frac{45}{16} \mu^2 u^2 e \sin \gamma - \frac{45}{4} \mu^2 u^2 e' \sin (\gamma - g - g') \\ - \frac{15}{4} \mu^2 u^2 e \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{15}{8} \mu^2 u^2 \sin (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ - \frac{5}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ + \frac{105}{16} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{5}{8} \mu^2 u^2 \sin (\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ - \frac{945}{32} \mu^2 u^2 e \sin (3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{5}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 4g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{105}{8} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{15}{16} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{245}{8} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma + 2g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{105}{16} \mu^2 u^2 \sin (4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') + \frac{525}{32} \mu^2 u^2 e \sin (5g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ - \frac{35}{16} \mu^2 u^2 \sin (-\gamma + 5g - 4g' + 4\omega - 4\omega') - \frac{105}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 6g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ - \frac{105}{16} \mu^2 u^2 \sin (\gamma + 3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') - \frac{175}{16} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma + 4g - 4g' + 4\omega - 4\omega')$$

die den oben entwickelten Gliedern von T_0 hinzuzufügen sind.

29.

Im Vorhergehenden sind die Entwicklungen des Differentialis der Längenstörungen und der des Radius Vectors für die erste Potenz der störenden Kraft ausgeführt, und wir könnten daher jetzt schon zur Entwicklung der Differentiale, von welchen die Breitenstörungen abhängen, übergehen. Allein zur Berechnung der Störungen der zweiten und höheren Ordnungen wird die Entwicklung von noch einer Hilfsgrösse erfordert, die ich hier sogleich einschalten will, um eine spätere, sonst nothwendig werdende, Digression zu vermeiden. Diese Hilfsgrösse wird in den *Fundamenta etc.* U genannt und hat folgenden Ausdruck,

$$U = \frac{2e}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} [\cos (f-\varphi) - 1] \left(\frac{da\Omega}{dv} \right)$$

dessen Entwicklung auch dort gegeben ist. Statt dieser Hilfsgrösse kann man mit einigem Vortheil die folgende anwenden,

$$G_0 = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \frac{\epsilon}{r} \cos(f-\varphi) \left(\frac{da\Omega}{d\omega} \right) + \frac{\epsilon}{r} \sin(f-\varphi) r \left(\frac{da\Omega}{dr} \right) \right\}$$

deren Entwicklung ich auf dieselbe Form bringen werde, wie oben die von T_0 .

30.

Theilen wir auch G_0 in die zehn den Abtheilungen von Ω entsprechenden Theile, so giebt zuerst der Umstand, dass für die Abtheilungen 1 und 4

$$\left(\frac{da\Omega}{d\omega} \right) = 0$$

ist, die Gleichungen

$$G_1 = T_1 \text{ und } G_4 = T_4$$

für alle übrigen Abtheilungen ist aber G von T verschieden. Der obige Ausdruck giebt zuerst durch eine leichte Umformung

$$G_0 = -3eA + \left(2 \frac{\epsilon}{a} \cos \varphi + 3e \right) A + 2 \frac{\epsilon}{a} \sin \varphi B$$

wo

$$A = \frac{a \cos f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} \left(\frac{da\Omega}{d\omega} \right) + \frac{a \sin f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} r \left(\frac{da\Omega}{dr} \right)$$

$$B = \frac{a \sin f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} \left(\frac{da\Omega}{d\omega} \right) - \frac{a \cos f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} r \left(\frac{da\Omega}{dr} \right)$$

Wenden wir uns nun zuerst zur Abtheilung 2, so ist

$$a\Omega_2 = u_1^2 \beta_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

also

$$\left(\frac{da\Omega_2}{d\omega} \right) = -2u_1^2 \beta_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \sin(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

$$r \left(\frac{da\Omega_2}{dr} \right) = 2u_1^2 \beta_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

und hiemit wird

$$A_2 = -\frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \sin(f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

$$B_2 = -\frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \cos(f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

Setzen wir wie in den »Fundamenta etc.« pag. 160

$$\left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \cos 2f' = \sum_{-\infty}^{+\infty} G_e^{(i')} \cos i'g'$$

$$\left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \sin 2f' = \sum_{-\infty}^{+\infty} G_s^{(i')} \sin i'g'$$

$$G_e^{(-i')} = G_e^{(i')}, \quad G_s^{(-i')} = -G_s^{(i')}$$

so ergibt sich durch das a. a. O. erklärte Verfahren zuerst

$$A_2 = - \frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-e^2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} G^{(i)} \frac{r}{a} \sin (f - i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$B_2 = - \frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-e^2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} G^{(i)} \frac{r}{a} \cos (f - i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

wo

$$G^{(i)} = G_e^{(i)} - G_s^{(i)}$$

also dieselbe Function ist, die oben ebenso bezeichnet wurde. Setzen wir ferner

$$\frac{2r \cos f}{a \sqrt{1-e^2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_e^{(i)} \cos ig$$

$$\frac{2r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_s^{(i)} \sin ig$$

so bekommen wir auf dieselbe Art wie oben

$$A_2 = - u_1^2 \beta_2 \sum L^{(i)} G^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$B_2 = - u_1^2 \beta_2 \sum L^{(i)} G^{(i)} \cos (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

wo

$$L^{(i)} = L_e^{(i)} + L_s^{(i)}$$

und die Summation sowohl nach i wie nach i' von $-\infty$ bis $+\infty$ zudehnen ist. Substituirt man diese nebst

$$2 \frac{e}{a} \cos \varphi + 3e = 2f \cos \gamma$$

$$2 \frac{e}{a} \sin \varphi = 2f'' \sin \gamma$$

wo f derselbe Coefficient wie im Art. 25 und

$$f'' = f' \sqrt{1-e^2}$$

ist, so wird

$$G_2 = u_1^2 \beta_2 \sum U^{(i)} G^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$+ u_1^2 \beta_2 \sum U^{\pm 1, i} G^{(i)} \sin (\pm \gamma + ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

wo

$$U^{(i)} = 3eL^{(i)}$$

$$U^{-1, i} = - (f - f'') L^{(i)}$$

$$U^{1, i} = - (f + f'') L^{(i)}$$

31.

Da wohl nicht nöthig sein wird, die Entwicklungen der übrigen Abtheilungen von G_0 speciell auseinander zu setzen, da sie eben so geführt werden, wie die der Abtheilung 2, die eben gegeben wurde, werde ich die Zusammenstellung hier gleich folgen lassen. Es wird

$$\begin{aligned}
 G_1 &= T_1 \\
 G_2 &= u_1^2 \beta_2 \sum U^{(i)} G^{(i)} \sin(ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_2 \sum U^{\pm 1, i} G^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 G_3 &= u_1^2 \beta_3 \sum U^{(i)} K^{(i)} \sin(ig + i'g' + 2\omega) \\
 &\quad + u_1^2 \beta_3 \sum U^{\pm 1, i} K^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega) \\
 G_4 &= T_4 \\
 G_5 &= u_1^2 \beta_5 \sum U^{(i)} G^{(-i)} \sin(ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_5 \sum U^{\pm 1, i} G^{(-i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 G_6 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_6 \sum V^{(i)} C^{(i)} \sin(ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_6 \sum V^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 G_7 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_7 \sum W^{(i)} D^{(i)} \sin(ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_7 \sum W^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 G_8 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_8 \sum V^{(i)} C^{(-i)} \sin(ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_8 \sum V^{\pm 1, i} C^{(-i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 G_9 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_9 \sum W^{(i)} C^{(i)} \sin(ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_9 \sum W^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 G_{10} &= \lambda \mu u_1^2 \beta_{10} \sum V^{(i)} D^{(i)} \sin(ig + i'g' + \omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_{10} \sum V^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + \omega - 3\omega')
 \end{aligned}$$

es haben die hier eingeführten Functionen von e die folgende Bedeutung

$$\begin{aligned}
 U^{(i)} &= 3eL^{(i)} \\
 U^{\pm 1, i} &= -(f \pm f'') L^{(i)} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} L_c^{(i)} \cos ig &= \frac{2r \cos f}{a \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} L_s^{(i)} \sin ig &= \frac{2r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} \\
 L^{(i)} &= L_c^{(i)} + L_s^{(i)} \\
 \hline
 V^{(i)} &= -3eH^{(i)} \\
 V^{\pm 1, i} &= H^{(i)} f \mp M^{(i)} f'' \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} H_c^{(i)} \cos ig &= \frac{r^2 \cos 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} - \frac{2r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} H_s^{(i)} \sin ig &= \frac{r^2 \sin 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} M_c^{(i)} \cos ig &= \frac{r^2 \cos 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{2r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 H^{(i)} &= H_c^{(i)} + H_s^{(i)} \\
 M^{(i)} &= M_c^{(i)} + H_s^{(i)} \\
 \hline
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^{(i)} &= 3eK^{(i)} \\
 W^{\pm 1, i} &= -(f \pm f'') K^{(i)} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} K_c^{(i)} \cos ig &= \frac{3r^2 \cos 3f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} K_s^{(i)} \sin ig &= \frac{3r^2 \sin 3f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 K^{(i)} &= K_c^{(i)} + K_s^{(i)}
 \end{aligned}$$

32.

Durch das Verfahren, welches ich in den »*Fundamenta etc.*« ausführlich erklärt habe, reducirt man die hier erforderlichen Reihenentwicklungen auf die von r^2 , und namentlich ist

$$\begin{aligned}
 \frac{3r \cos f}{a \sqrt{1-e^2}} &= -\frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{d \cdot r^2}{dg} \\
 \frac{3r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} &= \frac{1}{a^2 e} \frac{d \cdot r^2}{dg}
 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
 L_c^{(0)} &= -3e - \frac{3}{8}e^3 - \frac{9}{8}e^5 \\
 L_c^{(1)} &= 1 + \frac{1}{8}e^2 + \frac{41}{192}e^4, & L_s^{(1)} &= 1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4 \\
 L_c^{(2)} &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{12}e^3 + \frac{1}{12}e^5, & L_s^{(2)} &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{6}e^3 + \frac{1}{48}e^5 \\
 L_c^{(3)} &= \frac{3}{8}e^2 - \frac{21}{128}e^4, & L_s^{(3)} &= \frac{3}{8}e^2 - \frac{27}{128}e^4 \\
 L_c^{(4)} &= \frac{1}{8}e^3 - \frac{7}{30}e^5, & L_s^{(4)} &= \frac{1}{8}e^3 - \frac{1}{15}e^5 \\
 L_c^{(5)} &= \frac{125}{884}e^4, & L_s^{(5)} &= \frac{125}{884}e^4 \\
 L_c^{(6)} &= \frac{27}{80}e^5, & L_s^{(6)} &= \frac{27}{80}e^5
 \end{aligned}$$

folgt, also

$$\begin{aligned}
 L^{(-3)} &= \frac{1}{12}e^3 + \frac{1}{16}e^5 \\
 L^{(-1)} &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{24}e^4 \\
 L^{(0)} &= -3e - \frac{3}{8}e^3 - \frac{9}{8}e^5 \\
 L^{(1)} &= 2 + \frac{7}{32}e^4 \\
 L^{(2)} &= e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{48}e^5 \\
 L^{(3)} &= \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{8}e^4 \\
 L^{(4)} &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^5 \\
 L^{(5)} &= \frac{125}{192}e^4 \\
 L^{(6)} &= \frac{27}{40}e^5
 \end{aligned}$$

Ferner, es ist in den »*Fundamenta etc.*« pag. 160 schon

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f = \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_c^{(i)} \cos ig$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f = \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_s^{(i)} \sin ig$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_2^{(i)} \cos ig$$

gesetzt worden, folglich wird

$$H^{(i)} = \frac{Q^{(i)} - 2R_2^{(i)}}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$M^{(i)} = \frac{Q^{(i)} + 2R_2^{(i)}}{\sqrt{1-e^2}}$$

da $Q^{(i)} = Q_c^{(i)} + Q_s^{(i)}$ ist, und endlich erhalten wir

$$K^{(i)} = \frac{3Q^{(i)}}{\sqrt{1-e^2}}$$

Diese Ausdrücke geben

$$H^{(-2)} = \frac{1}{2} e^2, \quad M^{(-2)} = -\frac{1}{2} e^2$$

$$H^{(-1)} = 2e + \frac{11}{24} e^3, \quad M^{(-1)} = -2e - \frac{25}{24} e^3$$

$$H^{(0)} = -2 - \frac{3}{2} e^2, \quad M^{(0)} = 2 + \frac{13}{2} e^2$$

$$H^{(1)} = -e + \frac{7}{8} e^3, \quad M^{(1)} = -5e - \frac{5}{8} e^3$$

$$H^{(2)} = 1 - \frac{3}{2} e^2, \quad M^{(2)} = 1 - \frac{5}{2} e^2$$

$$H^{(3)} = e - \frac{13}{8} e^3, \quad M^{(3)} = e - \frac{17}{8} e^3$$

$$H^{(4)} = e^2, \quad M^{(4)} = e^2$$

$$K^{(-1)} = -\frac{7}{8} e^3$$

$$K^{(0)} = \frac{15}{2} e^2$$

$$K^{(1)} = -9e + \frac{5}{8} e^3$$

$$K^{(2)} = 3 - 6e^2$$

$$K^{(3)} = 3e - \frac{45}{8} e^3$$

$$K^{(4)} = 3e^2$$

$$K^{(5)} = \frac{25}{8} e^3$$

33.

Da ferner

$$f = 1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4$$

$$f'' = 1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4$$

$$f - f'' = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{12}e^4$$

$$f + f'' = 2 - e^2 - \frac{1}{32}e^4$$

ist, so bekommt man leicht,

$$U^{(-1)} = \frac{3}{4}e^3 + \frac{5}{8}e^5$$

$$U^{-1,0} = \frac{3}{4}e^3 + \frac{5}{8}e^5$$

$$U^{1,-2} = -\frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{24}e^5$$

$$U^{(0)} = -9e^2 - \frac{9}{2}e^4$$

$$U^{-1,1} = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4$$

$$U^{1,-1} = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4$$

$$U^{(0)} = 6e + \frac{21}{32}e^3$$

$$U^{-1,2} = -\frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{48}e^5$$

$$U^{1,0} = 6e + \frac{21}{32}e^3$$

$$U^{(2)} = 3e^2 - \frac{3}{4}e^4$$

$$U^{-1,3} = -\frac{3}{16}e^4$$

$$U^{1,1} = -\frac{1}{4} + 2e^2 - \frac{3}{8}e^4$$

$$U^{(3)} = \frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{8}e^5$$

$$U^{-1,4} = -\frac{1}{6}e^5$$

$$U^{1,2} = -2e + \frac{3}{8}e^3 - \frac{11}{96}e^5$$

$$U^{(4)} = 2e^4$$

$$U^{-1,5} = 0e^5$$

$$U^{1,3} = -\frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^4$$

$$U^{(5)} = \frac{125}{64}e^5$$

$$U^{-1,6} = 0e^5$$

$$U^{1,4} = -\frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{8}e^5$$

$V^{(-1)} = -6e^2$ $V^{-1,0} = \frac{9}{2}e^2$ $V^{1,-2} = e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $V^{(0)} = 6e + \frac{9}{2}e^2$ $V^{-1,1} = -6e + \frac{15}{4}e^2$ $V^{1,-1} = 4e - \frac{1}{2}e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $V^{(1)} = 3e^2$ $V^{-1,2} = 2 - 5e^2$ $V^{1,0} = -4 - 6e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $V^{(2)} = -3e + \frac{9}{2}e^2$ $V^{-1,3} = 2e - \frac{19}{4}e^2$ $V^{1,1} = 4e - \frac{5}{4}e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $V^{(3)} = -3e^2$ $V^{-1,4} = 2e^2$ $V^{1,2} = \frac{5}{4}e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/>	$W^{(0)} = \frac{45}{2}e^2$ $W^{-1,1} = \frac{9}{4}e^2$ $W^{1,-1} = \frac{7}{4}e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $W^{(1)} = -27e^2$ $W^{-1,2} = -\frac{3}{4}e^2$ $W^{1,0} = -15e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $W^{(2)} = 9e - 18e^2$ $W^{-1,3} = -\frac{3}{4}e^2$ $W^{1,1} = 18e - \frac{39}{4}e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $W^{(3)} = 9e^2$ $W^{-1,4} = 0e^2$ $W^{1,2} = -6 + 15e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $W^{(4)} = 9e^2$ $W^{-1,5} = 0e^2$ $W^{1,3} = -6e + \frac{57}{4}e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $W^{(5)} = 0e^2$ $W^{-1,6} = 0e^2$ $W^{1,4} = -6e^2$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/>
--	--

die für die Berechnung der Mondstörungen mehr wie hinreichend ausgedehnt sind.

34.

Bei der noch auszuführenden Entwicklung von $G^{(3)}$ dürfen wir uns auf die von den Excentricitäten unabhängigen Glieder beschränken, und hiemit ergibt sich leicht, dass

$$G_0^{(3)} = 2 \cos(g-\gamma) \left(\frac{da\Omega^{(4)}}{dv} \right) + 2 \sin(g-\gamma) r \left(\frac{da\Omega^{(4)}}{dr} \right)$$

wird. Durch Zuziehung der im Art. 28 entwickelten Differentialquotienten von $a\Omega^{(3)}$ findet man daher sogleich

$$G_0^{(3)} = \frac{9}{8} \mu^2 u^2 \sin(-\gamma+g) + \frac{5}{8} \mu^2 u^2 \sin(-\gamma+3g-2g'+2\omega-2\omega')$$

$$- \frac{15}{8} \mu^2 u^2 \sin(\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega')$$

$$- \frac{35}{8} \mu^2 u^2 \sin(\gamma+3g-4g'+4\omega-4\omega')$$

35.

Dass in den vorhergehenden Entwicklungen von T_0 und G_0 von den beiden Functionen

$$2 \frac{e}{a} \cos \varphi + 3e \quad \text{und} \quad 2 \frac{e}{a} \sin \varphi$$

nur die mit $\cos \gamma$ und bez. $\sin \gamma$ multiplicirten Glieder gebraucht werden, hat seinen Grund in einem Satze, den ich zuerst in den »Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns« bewiesen und später in den »Fundamenta etc.« wiederholt habe, weil in einigen inzwischen über meine Theorie erschienenen Aufsätzen desselben entweder gar nicht, oder doch nur auf höchst mangelhafte Weise erwähnt worden war, während er einen sehr wesentlichen Bestandtheil dieser Theorie bildet, indem er die Berechnung der Störungen auf sehr bedeutende Weise abkürzt, und nicht bloß für die erste Potenz der störenden Kraft, sondern ganz allgemein gilt. Dieser Satz kann so gestellt werden:

»Wenn L, G, H Functionen von bloß t bedeuten, und F eine Function von folgender Form ist,

$$F = L + G \cos \varphi + H \sin \varphi$$

»die sich in eine convergirende Reihe von der folgenden Form entwickeln lässt,

$$F = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \alpha^x \cdot \frac{\cos(x\gamma + \beta t + \beta')}{\sin(x\gamma + \beta t + \beta')}$$

»wo x eine ganze Zahl ist, aber β und β' die mannigfaltigsten Werthe annehmen können, so ist

»für positive Werthe von x

$$\alpha^{(x)} = r_1^{(x)} \cdot \alpha^{(x)} + \theta^{(x)} \cdot \alpha^{(x-1)}$$

»und für negative Werthe von x

$$\alpha^{-x} = r_1^{-x} \cdot \alpha^{-x} + \theta^{-x} \cdot \alpha^{-x-1}$$

»wenn

$$r_1^{-x} = \frac{\frac{dR_2^{(x)}}{dt}}{2 \frac{dR_2^{(x-1)}}{dt}} + x \frac{R_2^{(x)}}{2R_2^{(x-1)}}$$

$$r_1^x = \frac{\frac{dR_2^{(x)}}{dt}}{2 \frac{dR_2^{(x-1)}}{dt}} - x \frac{R_2^{(x)}}{2R_2^{(x-1)}}$$

»gesetzt wird, wo \ast immer positiv angenommen werden muss, und
 » $R_2^{(\ast)}$ die Entwicklungscoefficienten von $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ sind, so dass

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = R_2^{(0)} + 2R_2^{(1)} \cos g + 2R_2^{(2)} \cos 2g + \text{etc.}$$

»wird.«

Aus den in den »*Fundamenta etc.*« gegebenen Werthen von $R_2^{(\ast)}$ findet man durch die obigen Ausdrücke,

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{2} e - \frac{1}{8} e^3 + 0 e^5 + \dots$$

$$\eta^{(3)} = \frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{128} e^6 + \dots$$

$$\eta^{(4)} = \frac{1}{8} e^3 - \frac{1}{4} e^5 + \dots$$

$$\eta^{(5)} = \frac{125}{884} e^4 - \frac{125}{884} e^6 + \dots$$

$$\eta^{(6)} = \frac{27}{80} e^5 + \dots$$

$$\eta^{(7)} = \frac{16807}{46080} e^6 + \dots$$

$$\theta^{(2)} = -\frac{1}{48} e^2 - \frac{1}{192} e^4 + \dots$$

$$\theta^{(3)} = -\frac{3}{128} e^4 - \frac{1}{640} e^6 + \dots$$

$$\theta^{(4)} = -\frac{1}{40} e^5 + \dots$$

$$\theta^{(5)} = -\frac{125}{4608} e^6 + \dots$$

Da die beiden hier vorkommenden Functionen von γ und g , nemlich T_0 und G_0 von derselben Form sind, wie die oben allgemein mit Γ bezeichnete Function, so findet der vorstehende Satz darauf Anwendung, und es brauchten daher vorläufig nur die Glieder berücksichtigt zu werden, in welchen γ mit ± 1 multiplicirt ist. Hiemit gütigte es, alle Entwicklungen auszuführen und erst am Schlusse derselben, oder mit andern Worten zugleich mit der Integration der Differentialgleichung für dW_0 , in welcher sie eintreten, braucht man auf die Glieder Rücksicht zu nehmen, die $\pm 2\gamma$, $\pm 3\gamma$, etc. enthalten, und man erhält diese Glieder auf höchst einfache Weise durch den vorstehenden Satz, d. i. durch die Multiplication der zu $\pm \gamma$ gehörigen Glieder mit den obigen η und θ genannten Factoren, von welchen die θ überdiess so klein sind, dass sie fast gar nicht in Betracht kommen.

Wir kommen jetzt zur Entwicklung der Functionen, von welcher die Breitenstörungen abhängen. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -n_0 \alpha Q + n_0 B \\ &\quad + \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ &\quad - \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ \frac{dQ}{dt} &= n_0 \alpha P + n_0 C \\ &\quad - \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ &\quad - \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ \frac{dK}{dt} &= n_0 \gamma + n_0 D \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{Q dp'}{\cos i' dt} + \frac{P dq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \cos [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{P dp'}{\cos i' dt} - \frac{Q dq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \sin [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \end{aligned}$$

dann ist zufolge des Art. 13

$$\begin{aligned} n_0 B &= -h \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ n_0 C &= h \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ n_0 D &= \frac{1}{2} h \left\{ P \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) + Q \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \right\} \end{aligned}$$

Da nach den Entwicklungen allenthalben für P , Q , K die Werthe gesetzt werden müssen, die sie mit Ausschluss der in ihnen enthaltenen Störungen annehmen, so ergibt sich aus den Gleichungen (41), dass nach den Entwicklungen

$$P = 0; \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0; \quad K = K_0$$

gesetzt werden muss. Für J_0 und K_0 werde ich jedoch in der Folge an den Orten, wo keine Unbestimmtheit daraus entstehen kann, der Kürze wegen bloß J und K schreiben. Berücksichtigen wir nun fürerst in den vorstehenden Ausdrücken nur die erste Potenz der störenden Kraft der Sonne, so wird, wenn wir den übrigen Bezeichnungen analog auch die Bezeichnungen B_0 , C_0 , D_0 einführen,

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left(\frac{da\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J \\ D_0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left(\frac{da\Omega}{dQ} \right) \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2} \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass mit Ausnahme der von dp' und dq' abhängigen Glieder, die übrigens in K wenig oder nichts hervorbringen,

$$\delta K = - \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J} \delta P$$

ist, wenn wir mit δK und δP die in K und P enthaltenen Störungen bezeichnen. Wir werden weiter unten sehen, dass diese Relation mit sehr unbedeutender Abweichung auch für das Quadrat und die höheren Potenzen der störenden Kraft statt findet, und können sie daher ohne Schaden der Genauigkeit in den nachfolgenden Entwicklungen anwenden. Die Relation zwischen den Grössen α und η ist anders. Bezeichnen wir das constante Glied in der Entwicklung von $\left(\frac{da\Omega}{dQ}\right)$ mit A , so wird in Folge der vorstehenden Gleichungen

$$2\alpha \sin \frac{1}{2} J + \frac{A \cos^2 \frac{1}{2} J}{\sqrt{1-e^2}} = 0$$

$$\eta + \frac{A \sin \frac{1}{2} J}{2 \sqrt{1-e^2}} = 0$$

woraus

$$\eta = \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J$$

hervorgeht. Diese Relation bekommt übrigens durch die Betrachtung des Quadrats und der höheren Potenzen der störenden Kraft einen nicht unwesentlichen Zusatz.

37.

Die in p' und q' enthaltenen planetarischen Störungen der Sonnenbewegung werden zwar in dieser Abhandlung nicht berücksichtigt werden, aber die in denselben mit enthaltenen Ungleichheiten, die der Mond in der Sonnenbewegung verursacht, müssen in Betracht gezogen werden, da sie nicht unmerklich sind, und Glieder von derselben Form geben, wie die in B , C und D enthaltenen. Um die genannten Glieder zu erhalten, müssen wir dp' und dq' unmittelbar durch die störende Kraft ausdrücken, und dies geschieht am Einfachsten dadurch, dass wir in den Gleichungen (13), die dp und dq geben, alle auf den Mond sich beziehenden Grössen auf die Sonne, und umgekehrt, übertragen. Hierbei ist zu bemerken, dass wir statt der Bögen φ und ψ zwei analoge φ' und ψ' uns denken müssen, die sich eben so auf die Mond- und die Sonnenbahn beziehen, wie jene auf die Sonnen- und die Mondbahn. Aus der Bedeutung von φ und ψ ist nun leicht zu erkennen, dass die Relationen

$$\varphi - \psi' = 180^\circ; \quad \psi - \varphi' = 180^\circ$$

statt finden, von welchen hier jedoch nur die erstere gebraucht wird. Die Gleichungen (13) geben auf diese Weise

$$\begin{aligned}\frac{dp'}{dt} &= \frac{m}{1+m'} h' \cos i' \sin J \left\{ \frac{1}{\mathcal{A}^2} - \frac{1}{r^2} \right\} r r' \sin v' \sin (v - \varphi) \\ \frac{dq'}{dt} &= \frac{m}{1+m'} h' \cos i' \sin J \left\{ \frac{1}{\mathcal{A}^2} - \frac{1}{r^2} \right\} r r' \cos v' \sin (v - \varphi)\end{aligned}$$

Da nahe $\frac{r^2}{\mathcal{A}^2} = \frac{1}{(400)^2}$ ist, so dürfen wir in diesen Gleichungen \mathcal{A} übergehen. Es muss ferner der sicheren numerischen Berechnung wegen die grosse Sonnenmasse m' eliminirt werden, und dieses geschieht durch die Gleichung

$$1 + m' = \frac{a'^2 n'^2}{a^2 n^2} (1 + m)$$

Endlich müssen auch

$$\begin{aligned}v' &= \bar{f}' + n y' t + \pi' \\ v - \varphi &= \bar{f} + n (y + \alpha - \eta) t + N + K \\ u &= \frac{n'}{n}\end{aligned}$$

berücksichtigt werden. Nach diesen Substitutionen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{dp'}{\cos i' dt} &= -\frac{1}{2} n \frac{m}{1+m} \frac{a^2 r'}{a'^2 r^2 u} \frac{\sin J}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos (\bar{f} - \bar{f}' + n(y - y' + \alpha - \eta)t + N + K - \\ - \cos (\bar{f} + \bar{f}' + n(y + y' + \alpha - \eta)t + N + K + \end{array} \right. \\ \frac{dq'}{\cos i' dt} &= -\frac{1}{2} n \frac{m}{1+m} \frac{a^2 r'}{a'^2 r^2 u} \frac{\sin J}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \begin{array}{l} \sin (\bar{f} - \bar{f}' + n(y - y' + \alpha - \eta)t + N + K - \\ + \sin (\bar{f} + \bar{f}' + n(y + y' + \alpha - \eta)t + N + K + \end{array} \right.\end{aligned}$$

die mit den Gleichungen der »Fundamenta etc.« p. 198 übereinstimmen.

38.

Substituirt man nun die eben gefundenen Ausdrücke in die Ausdrücke des Art. 36 für dP , dQ , dK , so ergibt sich, wenn wir der Kürze wegen f und f' statt \bar{f} und \bar{f}' schreiben,

$$\begin{aligned}\frac{dP}{ndt} &= -\alpha Q - G \left(\frac{r'}{a'} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \left\{ \begin{array}{l} \cos (f - f' + n(y - y' - 2\eta)t + \delta N + 2\alpha \\ - \cos (f + f' + n(y + y' + 2\alpha)t + \delta N + 2\alpha) \end{array} \right. \\ \frac{dQ}{ndt} &= \alpha P + G \left(\frac{r'}{a'} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \left\{ \begin{array}{l} \sin (f - f' + n(y - y' - 2\eta)t + \delta N + 2\alpha \\ + \sin (f + f' + n(y + y' + 2\alpha)t + \delta N + 2\alpha) \end{array} \right. \\ \frac{dK}{ndt} &= \eta - \frac{1}{2} G \left(\frac{r'}{a'} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} J \left\{ \begin{array}{l} \cos (f - f' + n(y - y' - 2\eta)t + 2K) \\ - \cos (f + f' + n(y + y' + 2\alpha)t + 2N) \end{array} \right.\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$G = \frac{m}{1+m} \frac{a}{a'} \frac{1}{u \sqrt{1-e^2}}$$

gesetzt worden ist. Man erkennt sogleich, dass hier die Relation

$$\delta K = \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J} \delta P$$

statt findet, die sich von der oben gefundenen ähnlichen bloß durch das Vorzeichen unterscheidet.

Bei der ersten Anwendung, die von den eben entwickelten Gleichungen gemacht werden wird, kann man sich mit den Gliedern niedrigster Ordnung begnügen, und daher die Excentricitäten Null machen. Es wird somit

$$\frac{dP}{ndt} = -G \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \{ \cos(g-g'+\omega-\omega') - \cos(g+g'+\omega+\omega') \}$$

$$\frac{dQ}{ndt} = G \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \{ \sin(g-g'+\omega-\omega') + \sin(g+g'+\omega+\omega') \}$$

wo

$$G = \frac{m}{1+m} \frac{a}{a'} \frac{1}{u}$$

ist. Auf K braucht hier keine Rücksicht genommen zu werden.

Es scheint auf den ersten Anblick, dass hier noch zwei Glieder merklich werden können, die von der Excentricität der Mondbahn abhängen, weil sie bei den Integrationen kleine Divisoren bekommen, nemlich die Glieder, die

$$\frac{\sin}{\cos}(-g'+\omega-\omega') \quad \text{und} \quad \frac{\sin}{\cos}(g'+\omega+\omega')$$

zu den Argumenten haben, aber es zeigt sich leicht, dass die Coefficienten dieser Glieder Null sind.

Bei der Berechnung der Mondbreite über der Ecliptik müssen übrigens sowohl die eben entwickelten Glieder wie die von den Planetenmassen abhängigen periodischen Glieder in dp' und dq' weggelassen werden, und zwar aus folgendem Grunde. Unter der Ebene der gleichzeitigen Ecliptik, auf welche wir die Oerter der Planeten und Satelliten beziehen, verstehen wir nicht die Ebene, welche durch irgend zwei den Zeiten t und $t+dt$ gehörige Radii Vectores der Sonne gelegt werden kann, sondern die Ebene, die von einer beliebigen festen Ecliptik sich nur im Laufe der Zeit vermöge der Säcularänderungen, welchen die Lage der Sonnenbahn im Raume unterworfen ist, allmählig entfernt. Es dürfen daher bei der Ermittlung der Mondbreite über der gleichzeitigen Ecliptik in δP , δQ , δK nur die Säcularänderungen der Lage der Sonnenbahn im Raume aufgenommen werden, und in § 2 ist gezeigt

worden, dass diese in der Mondbreite nicht wieder eine Säcularänderung, sondern eine periodische Ungleichheit hervorbringen.

Bei der Berechnung der in δP , δQ , δK enthaltenen Glieder zweiter und höherer Ordnung in Bezug auf die störende Kraft müssen hingegen die im Vorstehenden entwickelten Glieder mit berücksichtigt werden. Sie liefern, wie man weiter unten sehen wird, einen nicht unmerklichen Beitrag zur Bewegung der Mondknoten.

39.

Wir kommen jetzt zur Entwicklung der im Art. 36 mit B und C bezeichneten Grössen, die auf verschiedene Arten ausgeführt werden kann. Um diese Entwicklung so einzurichten, dass sie zugleich zur Berechnung der vom Quadrat und den höheren Potenzen der störenden Kraft abhängigen Glieder dienen kann, ist es am Zweckmässigsten B und C gradezu in Functionen von P und Q zu verwandeln, und zu diesem Zweck müssen wir zuvörderst Ω als Function dieser Grössen darstellen. Zu diesem Ende haben wir einestheils die Factoren von $a\Omega_1$, $a\Omega_2$, $a\Omega_3$, etc. zu betrachten, die Functionen von J sind, und in den Art. 21 und 22 mit β_1 , β_2 , etc. bezeichnet wurden, und andererseits die Functionen von N und K , die in den Argumenten vorkommen und in ω und ω' enthalten sind. Wir müssen daher für jetzt die durch die Gleichungen (14) gegebenen Ausdrücke dieser Grössen substituiren, und dabei N und K statt N_0 und K_0 schreiben, wobei wir indess von den mit der Zeit ausdrücklich multiplicirten Gliedern absehen können, da diese von den vorzunehmenden Differentiationen unberührt bleiben. Für die Substitutionen, die auszuführen sind, geben die Gleichungen (14)

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} J &= \frac{1}{4} P^2 + \frac{1}{4} Q^2 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J &= \frac{1}{16} P^4 - \frac{1}{8} P^2 Q^2 + \frac{1}{16} Q^4 \\ \sin^2 \frac{1}{2} J \sin 2(N - N_0) &= \frac{1}{4} P Q \\ \sin^2 \frac{1}{2} J \cos 2(N - N_0) &= \frac{1}{4} Q^2 - \frac{1}{4} P^2 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \sin 2(N - N_0) &= \frac{1}{8} P^3 Q + \frac{1}{8} P Q^3 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \cos 2(N - N_0) &= \frac{1}{16} Q^4 - \frac{1}{16} P^4 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \sin 4(N - N_0) &= \frac{1}{4} P Q^3 - \frac{1}{4} P^3 Q \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \cos 4(N - N_0) &= \frac{1}{16} Q^4 - \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{1}{16} P^4 \end{aligned}$$

Substituiren wir nun diese in die Ausdrücke für $a\Omega_1$, $a\Omega_2$, etc. des

Art. 21 und in die für $a\Omega_3, a\Omega_6$, etc. des Art. 22 und schreiben zur Abkürzung für die mit t multiplicirten Glieder, die wir hier nicht näher kennen zu lernen brauchen, $n\alpha_2 t, n\alpha_3 t$, etc., so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &= u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \geq P^{(i)} K^{(i)} \cos (ig + i'g') \\
 &= u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \geq Q^{(i)} G^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K) \\
 &= u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \geq Q^{(i)} K^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \\
 &\quad - u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \geq Q^{(i)} K^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \\
 &= u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \geq P^{(i)} G^{(-i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \\
 &\quad - u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \geq P^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \\
 &= u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^4 - \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \geq Q^{(i)} G^{(-i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \\
 &\quad - u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} P Q^3 - \frac{3}{8} P^3 Q \right\} \geq Q^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \\
 &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \geq A^{(i)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_6 t + 2K) \\
 &= i \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \geq B^{(i)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_7 t + 6K) \\
 &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \geq A^{(i)} C^{(-i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \\
 &\quad - \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \geq A^{(i)} C^{(-i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \\
 &= i \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \geq B^{(i)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \\
 &\quad - i \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \geq B^{(i)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \\
 &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \geq A^{(i)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K) \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \geq A^{(i)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K)
 \end{aligned}$$

40.

Differentiiren wir nun diese Ausdrücke nach P, Q und K , und substituiren die Differentialquotienten in die Ausdrücke für B und C des Art. 36, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
 &= h u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q - \frac{3}{8} P^2 Q - \frac{3}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \geq P^{(i)} K^{(i)} \cos (ig + i'g') \\
 &= h u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q - \frac{3}{8} P^2 Q - \frac{3}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \geq Q^{(i)} G^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K) \\
 &+ h u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} P - \frac{3}{8} P^3 - \frac{3}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^5 + \frac{3}{8} P^3 Q^2 + \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \geq Q^{(i)} G^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K)
 \end{aligned}$$

$$n_0B_3 = hu_1^2 \left\{ -\frac{3}{4}Q + \frac{9}{16}P^2Q + \frac{9}{16}Q^3 \right. \\ \left. - \frac{3}{8}P^4Q - \frac{3}{8}P^2Q^3 - \frac{3}{8}Q^5 \right\} \Sigma Q^{(i)} K^{(i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_3t + 2N_0 + 2K) \\ + hu_1^2 \left\{ \frac{3}{4}P - \frac{9}{16}P^3 - \frac{9}{16}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{8}P^5 + \frac{3}{8}P^3Q^2 + \frac{3}{8}PQ^4 \right\} \Sigma Q^{(i)} K^{(i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_3t + 2N_0 + 2K)$$

$$n_0B_4 = hu_1^2 \left\{ -\frac{3}{4}Q - \frac{3}{8}P^2Q + \frac{9}{16}Q^3 \right. \\ \left. + \frac{3}{8}P^4Q - \frac{3}{8}Q^5 \right\} \Sigma P^{(i)} G^{(-i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_4t + 2N_0 - 2K) \\ + hu_1^2 \left\{ \frac{3}{4}P - \frac{3}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{8}P^5Q^2 + \frac{3}{8}PQ^4 \right\} \Sigma P^{(i)} G^{(-i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_4t + 2N_0 - 2K)$$

$$n_0B_5 = hu_1^2 \left\{ \frac{9}{16}P^2Q - \frac{3}{8}Q^3 \right. \\ \left. - \frac{9}{8}P^4Q - \frac{3}{8}P^2Q^3 + \frac{3}{8}Q^5 \right\} \Sigma Q^{(i)} G^{(-i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_5t + 4N_0) \\ + hu_1^2 \left\{ -\frac{3}{8}P^3 + \frac{9}{16}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{8}P^5 - \frac{3}{8}P^3Q^2 - \frac{9}{8}PQ^4 \right\} \Sigma Q^{(i)} G^{(-i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_5t + 4N_0)$$

$$n_0B_6 = h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8}Q - \frac{13}{24}P^2Q - \frac{13}{24}Q^3 \right. \\ \left. + \frac{7}{12}P^4Q + \frac{7}{12}P^2Q^3 + \frac{7}{12}Q^5 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_6t + 2K) \\ + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8}P - \frac{3}{8}P^3 - \frac{3}{8}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{7}{12}P^5 + \frac{7}{12}P^3Q^2 + \frac{7}{12}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_6t + 2K)$$

$$n_0B_7 = h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{8}Q - \frac{1}{8}P^2Q - \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}P^4Q + \frac{1}{8}P^2Q^3 + \frac{1}{2}Q^5 \right\} \Sigma B^{(i)} D^{(i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_7t + 6K) \\ + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{8}P - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}P^5 + \frac{1}{2}P^3Q^2 + \frac{1}{2}PQ^4 \right\} \Sigma B^{(i)} D^{(i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_7t + 6K)$$

$$n_0B_8 = h\lambda\mu u_1^2 \left\{ -\frac{9}{8}Q + \frac{9}{8}P^2Q + \frac{9}{8}Q^3 \right. \\ \left. - \frac{1}{8}P^2Q^3 - \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(-i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_8t + 2N_0) \\ + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{9}{8}P - \frac{3}{8}P^3 - \frac{9}{8}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{8}P^5 + \frac{1}{8}P^3Q^2 + \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(-i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_8t + 2N_0)$$

$$n_0B_9 = h\lambda\mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{8}Q + \frac{7}{8}P^2Q + \frac{7}{8}Q^3 \right. \\ \left. - \frac{1}{8}P^4Q - \frac{1}{8}P^2Q^3 - \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma B^{(i)} C^{(i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_9t + 2N_0 + 4) \\ + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{8}P - \frac{7}{8}P^3 - \frac{7}{8}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{8}P^5 + \frac{1}{8}P^3Q^2 + \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma B^{(i)} C^{(i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_9t + 2N_0 + 4)$$

$$n_0B_{10} = h\lambda\mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{8}Q - \frac{1}{8}P^2Q + \frac{7}{8}Q^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{8}P^4Q + \frac{1}{8}P^2Q^3 - \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma A^{(i)} D^{(i')} \cos (ig + i'g' + n\alpha_{10}t - 2N_0 + 4) \\ + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{8}P + \frac{1}{8}P^3 + \frac{13}{24}PQ^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}P^5 - \frac{1}{8}P^3Q^2 - \frac{7}{12}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(i)} D^{(i')} \sin (ig + i'g' + n\alpha_{10}t - 2N_0 + 4)$$

$$n_0C_1 = hu_1^2 \left\{ -\frac{3}{4}P + \frac{9}{16}P^3 + \frac{9}{16}PQ^2 \right. \\ \left. - \frac{3}{8}P^5 - \frac{3}{8}P^3Q^2 - \frac{3}{8}PQ^4 \right\} \Sigma P^{(i)} K^{(i')} \cos (ig + i'g')$$

$$\begin{aligned} C_2 = hu_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}P^2Q^2 - \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K) \\ & + hu_1^2 \left\{ \frac{1}{4}Q - \frac{1}{8}P^2Q - \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{8}P^4Q + \frac{1}{8}P^2Q^3 + \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 = hu_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}P^2Q^2 - \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} K^{(6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \\ & + hu_1^2 \left\{ -\frac{1}{4}Q + \frac{1}{8}P^2Q + \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^4Q - \frac{1}{8}P^2Q^3 - \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma Q^{(6)} K^{(6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 = hu_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 + \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma P^{(6)} G^{(-6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \\ & + hu_1^2 \left\{ -\frac{1}{4}Q + \frac{1}{8}P^2Q + \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^4Q - \frac{1}{8}P^2Q^3 \right\} \Sigma P^{(6)} G^{(-6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 = hu_1^2 & \left\{ \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^5 + \frac{1}{8}P^3Q^2 + \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(-6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \\ & + hu_1^2 \left\{ \frac{1}{8}P^2Q - \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^4Q - \frac{1}{8}P^2Q^3 + \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(-6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_6 = h\lambda\mu u_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}P^2Q^2 - \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_6 t + 2K) \\ & + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{4}Q - \frac{1}{8}P^2Q - \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{8}P^4Q + \frac{1}{8}P^2Q^3 + \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_6 t + 2K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_7 = h\lambda\mu u_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}P^2Q^2 - \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma B^{(6)} D^{(6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_7 t + 6K) \\ & + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{4}Q - \frac{1}{8}P^2Q - \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{8}P^4Q + \frac{1}{8}P^2Q^3 + \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma B^{(6)} D^{(6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_7 t + 6K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_8 = h\lambda\mu u_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}P^2Q^2 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(-6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \\ & + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4}Q + \frac{1}{8}P^2Q + \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^4Q - \frac{1}{8}P^2Q^3 - \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(-6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_9 = h\lambda\mu u_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}P^2Q^2 - \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma B^{(6)} C^{(6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \\ & + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4}Q + \frac{1}{8}P^2Q + \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^4Q - \frac{1}{8}P^2Q^3 - \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma B^{(6)} C^{(6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{10} = h\lambda\mu u_1^2 & \left\{ -\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P^2 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}P^3 + \frac{1}{8}P^2Q^2 + \frac{1}{8}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(6)} D^{(6)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K) \\ & + h\lambda\mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{4}Q - \frac{1}{8}P^2Q - \frac{1}{8}Q^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{8}P^4Q + \frac{1}{8}P^2Q^3 - \frac{1}{8}Q^5 \right\} \Sigma A^{(6)} D^{(6)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K) \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind allgemein gültig, und wenn man darin h_0 statt K_0 statt K , so wie

$$P = 0; \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0$$

setzt, so bekommt man die Ausdrücke für die erste Potenz der störenden Kraft.

41.

Für die erste Potenz der störenden Kraft wird also

$$\begin{aligned} &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J + 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma P^{(i)} K^{(i)} \cos (ig + i'g') \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{2}{3} - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{2}{3} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(i)} G^{(i)} \cos (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J - 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(i)} K^{(i)} \cos (ig + i'g' + 2\omega) \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J - 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma P^{(i)} G^{(-i)} \cos ig + i'g' + 2\omega' \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sin^3 \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(i)} G^{(-i)} \cos (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{2.5}{3} - \frac{1.5.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{7.5}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(i)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{1.5}{3} - \frac{4.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{1.5}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(i)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2.9}{4} \sin^2 \frac{1}{2} J - 15 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(i)} C^{(-i)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1.5}{3} + \frac{7.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{1.5}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(i)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1.5}{3} + \frac{7.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{1.5}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(i)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega') \\ &= 0 \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{2}{3} - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{2}{3} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(i)} G^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J - 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(i)} K^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega) \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma P^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega') \\ &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sin^3 \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{7.5}{3} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(i)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - \omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{1.5}{3} - \frac{4.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{4.5}{3} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(i)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{2.9}{4} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{1.5}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(i)} C^{(-i)} \sin (ig + i'g' + \omega - \omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1.5}{3} + \frac{7.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{4.5}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(i)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\ &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{1.5}{3} - \frac{1.5}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{1.5}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(i)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - \omega') \end{aligned}$$

Die Form dieser Ausdrücke bietet ein leichtes Mittel zu ihrer Berechnung dar. Da sie sich nur von Ω darin unterscheiden, dass in jedem der zehn Theile, aus welchen sie bestehen, eine andere Function von J eintritt, so braucht man, um B und C zu erhalten, nur Ω nach der Entwicklung mit dem betreffenden Verhältniss der Function von J zu multipliciren, welches sich aus dem Vorbergehenden leicht ergibt. Wir erhalten somit die

Factoren, womit $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt werden

muss, um

B_0 und C_0

zu geben, wie folgt:

1)	$\frac{6 \cos J \cos^2 \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	0
2)	$2 \sin \frac{1}{2} J$	$2 \sin \frac{1}{2} J$
3)	$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J}$
4)	$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{1}{\sin \frac{1}{2} J}$
5)	$\frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J}$
6)	$\frac{(44 - 30 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} J}{4 - 44 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J}$	$\sin \frac{1}{2} J$
7)	$\frac{3 \cos J \cos^2 \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} J}{4 - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$3 \sin \frac{1}{2} J$
8)	$\frac{(8 - 20 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}{(3 - 40 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{\cos^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J}$
9)	$\frac{(4 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}{\cos J \sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{4 - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J}$
10)	$\frac{(4 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}{\cos J \sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{4 + \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J}$

wo die linker Hand hingeschriebenen Indices 1 bis 10 sich auf $a\Omega_1$ bis $a\Omega_{10}$ beziehen. Ausser der Multiplication der letztgenannten Functionen mit diesen Factoren müssen für C_0 die in Ω enthaltenen Cosinusse in die Sinusse derselben Bögen verwandelt werden.

Endlich giebt der im Art. 23 aufgestellte Ausdruck von $\Omega^{(3)}$ die kleinen Glieder

$$B_0^{(3)} = \mu^2 u^2 \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} J - \mu^2 u^2 \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} J \cos (2g' + 2\omega')$$

$$C_0^{(3)} = - \mu^2 u^2 \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} J \sin (2g' + 2\omega')$$

womit die Entwicklungen der Glieder, die die von der ersten Potenz der störenden Kraft abhängigen Theile der Störungen geben, beendigt sind.

42.

In Betreff der vom Quadrat und den höheren Potenzen der ~~st~~ störenden Kraft abhängigen Glieder bemerke ich im Voraus, dass sie alle aus Factoren zusammen gesetzt sind, die zwei verschiedenen Gattungen angehören. Der erste Factor dieser Glieder ergiebt sich aus den im Vorhergehenden entwickelten Functionen und ist daher an sich bekannt, der zweite Factor, welcher, vom Cubus der störenden Kraft an, aus dem Product von zwei oder mehreren Factoren besteht, ist eine Function der zu ermittelnden Störungen selbst, die also zu diesem Zweck als bekannt betrachtet werden müssen. Man kann zu dem Ende die Störungen, deren Form bekannt sein muss und auch leicht gefunden werden kann, mit unbestimmten Coefficienten aufstellen und in die vorhergehenden Gleichungen substituiren, wodurch man die Bedingungsgleichungen erhält, auf deren Auflösung die Auflösung der vorliegenden Aufgabe beruht. Vor der Auflösung dieser Bedingungsgleichungen muss man jedenfalls die numerischen Werthe der bekannten Coefficienten darin substituiren, und da diese Bedingungsgleichungen eine sehr grosse Anzahl von Unbekannten enthalten, auch nicht linearisch sind, sondern die Quadrate, Producte und höhere Potenzen der zu berechnenden Coefficienten enthalten, so kann die Auflösung nur durch eine Reihe von Annäherungen ausgeführt werden, die damit angefangen werden müssen, dass man genäherte Werthe der Unbekannten substituirt, und nach und nach zu den genauen Werthen dieser gelangt.

Dieses ist das rationelste Verfahren, welches angewandt werden kann, aber da es nur durch eine Reihe von Annäherungen zum Ziele führt, so vergiebt man nichts von der Genauigkeit, die jeden Falls zu erlangen ist, wenn man das Princip der successiven Annäherungen in den Vordergrund stellt und die Bildung der Bedingungsgleichungen unterlässt. Man kann mit Weglassung der Bedingungsgleichungen genäherte numerische Werthe der Störungen in die Gleichungen der Bewegung substituiren und wird darauf, weil die störende Kraft weit kleiner ist, wie die Hauptkraft, mehr genäherte Werthe derselben zum Resultat erhalten; substituirt man nun diese, so werden noch genauere Werthe zum Vorschein kommen, und wiederholt man diese Substitutionen so lange, bis die zuletzt substituirtten Werthe selbst aus der Rechnung hervorgehen, so hat man die wahren Werthe der Unbekannten, das ist der Störungen erhalten.

Von theoretischer Seite betrachtet stehen die beiden eben betrachteten Methoden einander gleich, man kann durch jede derselben das Resultat mit beliebiger Genauigkeit erhalten, vorausgesetzt, dass man nicht Operationen hinein schiebt, wodurch die Convergenz der Reihen beträchtlich gemindert, oder ganz und gar in Zweifel gestellt wird. Von practischer Seite betrachtet hat jedoch die Methode der successiven Annäherungen mit sofortiger Anwendung der numerischen Coefficienten vor der der unbestimmten Coefficienten, auch wenn man hier die bekannten Theile der Bedingungsgleichungen sogleich durch ihre numerischen Werthe ausdrückt, einen bedeutenden Vortheil voraus. Bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen ist es sehr schwer, die Glieder, welche Merkliches geben, im vollen Umfang der Gleichung von den übrigen zu unterscheiden, die Unmerkliches geben. Man geräth daher leicht in die unangenehme Alternative, entweder Glieder jener Art auszulassen, wodurch der Genauigkeit des Resultats geschadet wird, oder bei jeder dieser Art aufzunehmen, wovon in dieser ohnehin mühsamen Aufgabe überflüssige und unnöthige Arbeit die Folge ist. Bei der beschriebenen Methode der successiven Annäherungen hingegen zeigt sich bei jedem Coefficienten auf den ersten Blick, welche Substitutionen merkliches und welche Unmerkliches geben werden, und die eben angeführte Klippe wird auf die leichteste Art vermieden. Man ist der Genauigkeit des Resultats im Voraus gewiss und erhält auch schliesslich über die Genauigkeit eines jeden der berechneten Coefficienten ein so sicheres Urtheil, wie bei keiner andern Methode möglich ist.

Es ist oben schon gesagt worden, dass man, um der Genauigkeit des Resultats sicher zu werden, dem Verfahren keine solche Operationen beimischen darf, wodurch die Convergenz der Reihen bedeutend geschwächt oder ganz und gar in Zweifel gestellt werden müsste; eine solche nachtheilige Operation ist die Auflösung der Nenner der Coefficienten, die durch die Integrationen entstehen, in unendliche Reihen, wie nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes fortschreiten. Bei diesem Verfahren, welches in der letzten Reihe von Jahren mehr wie ein Mal angewandt worden ist, kann man über die absolute Genauigkeit des Resultats gar keinen sicheren Schluss fällen, denn abgesehen davon, dass man schliesslich nicht einmal die Convergenz der daraus entstehenden Ausdrücke der Störungscoefficienten darthun kann, liegt es auch, wenigstens jetzt noch, ausser

dem Bereiche der Möglichkeit, die Summe der nicht entwickelten Glieder höherer Ordnung zum Mindesten annähernd zu bestimmen. Ohne solche Restbestimmung dieser Reihen, von welchen ausserdem vergeblich erwartet werden muss, dass das Gesetz der Fortschreitung derselben aufgefunden würde, ist es unmöglich, von der absoluten Genauigkeit, die die Summe der berechneten Glieder gewährt, sich eine Vorstellung zu machen.

43.

Es sind jetzt von den Producten, aus welchen die Störungsglieder der höheren Ordnungen bestehen, die im vor. Art. bezeichneten ersten Factoren, die an sich bekannt sind, zu entwickeln. Bezeichnen wir wieder, gleichwie im Art. 24, die Glieder des Ausdrucks für dW_0 des Art. 6, die y nicht explicite enthalten, mit T , schreiben aber den strengen Werth von T hin, so wird

$$T = h_0 \left\{ 2 \frac{e_0}{r} \cos(\bar{f} - \varphi_0) - 1 + 2 \frac{h^2 e_0}{h_0^2 a_0 (1 - e_0^2)} [\cos(\bar{f} - \varphi_0) - 1] \right\} \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) \\ + 2 h_0 \frac{e_0}{r} \sin(\bar{f} - \varphi_0) r \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)$$

Erinnern wir uns nun, dass $r = \bar{r} (1 + \nu)$, so ist ersichtlich, dass im vorstehenden Ausdruck die Coefficienten der Differentialquotienten von Ω in drei wesentlich verschiedene Theile zerfallen. Der eine dieser Theile enthält weder ν noch h^2 , der andere enthält nur ν , und der dritte nur h^2 , während ausser diesen beiden Veränderlichen diese Coefficienten Functionen der Veränderlichen nz sind.

Dem Vorhergehenden zufolge ist Ω Function von

$$\bar{f}, r, P, Q, K$$

also auch Function von

$$nz, \nu, P, Q, K$$

der Sonnenkoordinaten nicht zu gedenken. Wir haben aber im Art. 19 gesehen, dass durch die dort eingeführte Zerlegung von Ω in die beiden Theile $\Omega^{(1)}$ und $\Omega^{(2)}$, $\Omega^{(1)}$ eine Function ist, die r^2 , und $\Omega^{(2)}$ eine Function, die r^3 zum allgemeinen Factor hat, während beide r auf keine andere Weise enthalten. Substituiren wir daher \bar{r} statt r in $\Omega^{(1)}$ und $\Omega^{(2)}$, und nennen die daraus entstehenden Functionen $\bar{\Omega}^{(1)}$ und $\bar{\Omega}^{(2)}$ so bekommen wir die Gleichungen

$$\Omega^{(1)} = \bar{\Omega}^{(1)} (1 + \nu)^2; \quad \Omega^{(2)} = \bar{\Omega}^{(2)} (1 + \nu)^3$$

d diese erstrecken sich auf alle Differentialquotienten von Ω , die hier braucht werden. Setzt man nun in Folge dieser Betrachtungen

$$\begin{aligned} \bar{G} &= 2h_0 \left\{ \frac{e_0}{r} \cos(\bar{f}-\varphi_0) \left(\frac{d\bar{\Omega}}{d\omega} \right) + \frac{e_0}{r} \sin(\bar{f}-\varphi_0) \bar{r} \left(\frac{d\bar{\Omega}}{dr} \right) \right\} \\ \bar{U} &= 2 \frac{h_0 e_0}{a_0(1-e_0^2)} [\cos(\bar{f}-\varphi_0) - 1] \left(\frac{d\bar{\Omega}}{d\omega} \right) \\ \bar{\Sigma} &= -h_0 \left(\frac{d\bar{\Omega}}{d\omega} \right) \end{aligned}$$

d

$$\bar{T} = \bar{G} + \bar{U} + \bar{\Sigma} \dots \dots \dots (16)$$

sind \bar{T} , \bar{G} , \bar{U} , $\bar{\Sigma}$ blos Functionen von

$$nz, P, Q, K$$

weder ν noch h enthalten, und es ergibt sich, wenn wir diese vier actionen auch nach $\bar{\Omega}^{(1)}$ und $\bar{\Omega}^{(2)}$ je in zwei Theile zerlegen,

$$\begin{aligned} &= \bar{T}^{(1)} + \bar{G}^{(1)}\nu + \bar{U}^{(1)} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\} + \bar{\Sigma}^{(1)} (2\nu + \nu^2) \\ &= \bar{T}^{(2)} + \bar{G}^{(2)} (2\nu + \nu^2) + \bar{U}^{(2)} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\} + \bar{\Sigma}^{(2)} (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \end{aligned} \quad (17)$$

also die Wirkung der Incremente $n\delta z$, δP , δQ , δK auf T von der Wirkung der Incremente ν und $\delta \frac{h^2}{h_0^2}$ abgesondert ist.

44.

Die Functionen B und C , von welchen die Breitenstörungen abhängen, lassen sich auf ähnliche Weise behandeln. Die vollständigen Ausdrücke derselben sind zufolge des Art. 36

$$\begin{aligned} n_0 B &= -h \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ n_0 C &= h \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left(\frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \end{aligned}$$

setzen wir nun hier

$$\begin{aligned} \bar{B} &= -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{da\bar{\Omega}}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left(\frac{da\bar{\Omega}}{dK} \right) \right\} \\ \bar{C} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{da\bar{\Omega}}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left(\frac{da\bar{\Omega}}{dK} \right) \right\} \end{aligned}$$

theilen auch B und C je nach $\Omega^{(1)}$ und $\Omega^{(2)}$ in zwei Theile, so ergibt sich

$$B^{(1)} = \bar{B}^{(1)} + \bar{B}^{(1)} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

$$B^{(2)} = \bar{B}^{(2)} + \bar{B}^{(2)} \left\{ (1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

$$C^{(1)} = \bar{C}^{(1)} + \bar{C}^{(1)} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

$$C^{(2)} = \bar{C}^{(2)} + \bar{C}^{(2)} \left\{ (1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} + 1 \right\}$$

wo dieselbe Absonderung bewirkt ist wie oben.

45.

Die in den vorstehenden Ausdrücken erforderlichen Functionen von ν und h kann man leicht durch w und $\delta \frac{h_0}{h}$ ausdrücken, wenn man bedenkt, dass

$$w = \log. \text{ nat } (1 + \nu); \quad \frac{h_0}{h} = 1 + \delta \frac{h_0}{h}$$

ist. Man bekommt leicht

$$\nu = w + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{6}w^3 + \frac{1}{24}w^4 + \dots$$

$$2\nu + \nu^2 = 2w + 2w^2 + \frac{4}{3}w^3 + \frac{5}{24}w^4 + \dots$$

$$3\nu + 3\nu^2 + \nu^3 = 3w + \frac{9}{2}w^2 + \frac{9}{2}w^3 + \frac{27}{8}w^4 + \dots$$

$$\delta \frac{h^2}{h_0^2} = -2\delta \frac{h_0}{h} + 3 \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - 4 \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^3 + \dots$$

$$(1 + \nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 = (2\nu + \nu^2) + \delta \frac{h^2}{h_0^2} + (2\nu + \nu^2) \delta \frac{h^2}{h_0^2}$$

$$(1 + \nu)^3 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 = (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) + \delta \frac{h^2}{h_0^2} + (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \delta \frac{h^2}{h_0^2}$$

$$\delta \frac{h}{h_0} = -\delta \frac{h_0}{h} + \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^3 + \dots$$

$$(1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 = (2\nu + \nu^2) + \delta \frac{h}{h_0} + (2\nu + \nu^2) \delta \frac{h}{h_0}$$

$$(1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 = (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) + \delta \frac{h}{h_0} + (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \delta \frac{h}{h_0}$$

die alle sehr leicht und sicher berechnet werden können, wenn w und $\delta \frac{h_0}{h}$ nebst deren Potenzen gegeben sind. Zur Berechnung von $\delta \frac{h_0}{h}$ sind zwei sehr verschiedene Verfahren vorhanden. Im Art. 5 wurde die Gleichung

$$\frac{dh}{dt} = -h^2 \left(\frac{d\Omega}{dv} \right)$$

gefunden, da nun $d \frac{1}{h} = -\frac{dh}{h^2}$ ist, so wird zufolge des Vorhergehenden

$$(18) \dots \dots \delta \frac{h_0}{h} = -n \int \{ \bar{\Sigma}^{(1)} + \bar{\Sigma}^{(1)} (2\nu + \nu^2) \} dt \\ - n \int \{ \bar{\Sigma}^{(2)} + \bar{\Sigma}^{(2)} (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \} dt$$

und hängt daher nur von Functionen ab, die ohnehin für die Berechnung von T gebraucht werden.

Andernteils kann $\delta \frac{h_0}{h}$ auch durch Hilfe der Gleichung (6), nemlich durch

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h_0}{h(1+\nu)^2} - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{r^2}{a_0^2}$$

ohne besondere Integration berechnet werden, wenn $n\delta z$, ν und y als bekannt vorausgesetzt werden. Eine leichte Entwicklung giebt

$$\begin{aligned} \delta \frac{h_0}{h} &= \frac{d\delta z}{dt} + (2\nu + \nu^2) + \frac{d\delta z}{dz} (\nu + \nu^2) \\ &+ \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + \frac{d \cdot r^2}{a^2 dg} n\delta z + \frac{1}{2} \frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dg^2} (n\delta z)^2 + \dots \right\} \\ &+ \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + \frac{d \cdot r^2}{a^2 dg} n\delta z + \frac{1}{2} \frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dg^2} (n\delta z)^2 + \dots \right\} (2\nu + \nu^2) \end{aligned} \quad (19)$$

wo auch $\frac{d\delta z}{dt} = \frac{dx}{dt} - 1$ gesetzt worden ist.

Die Anwendung des ersten Ausdrucks von $\delta \frac{h_0}{h}$ ist die vortheilhaftere, wendet man aber beide Ausdrücke an, so erhält man eine durchgreifende Controlle der Berechnung der Störungen. Will man diesen Zweck verfolgen, so muss man aus beiden Ausdrücken $\delta \frac{h_0}{h}$ mit möglichster Genauigkeit berechnen, will man aber $\delta \frac{h_0}{h}$ nur zum Zweck der Substitution in die vorhergehenden Ausdrücke ermitteln, so ist die grösste Genauigkeit in der Berechnung davon nicht erforderlich, da $\frac{h}{h_0}$ und $\frac{h^2}{h_0^2}$, die nur in den Ausdrücken von T , B , C gebraucht werden, allenthalben mit Functionen von der ersten Ordnung der störenden Kraft multiplicirt werden, und also eine etwaige Ungenauigkeit in den Coefficienten des Ausdrucks von $\delta \frac{h_0}{h}$ bedeutend verkleinert in die Störungen der Länge, des Radius und der Breite übergeht.

46.

Die Functionen

$$\overline{T}, \overline{G}, \overline{U}, \overline{\Sigma}, \overline{B}, \overline{C}$$

auf welchen dem Vorhergehenden zufolge die Berechnung der Störungen mitberuht, sind, wie schon angeführt ist, Functionen der vier Veränder-

und müssen in Bezug auf den Zuwachs, den diese durch die Störungen erhalten, mittelst des auf mehrere Veränderliche ausgedehnten Taylorschen Theorems entwickelt werden. Da

$$nz = g + n\delta z$$

gesetzt wird, wo g die elliptische mittlere Anomalie des Mondes bezeichnet, so ist $n\delta z$ der Zuwachs von nz , für die übrigen Veränderlichen werde ich den Zuwachs durch ein dem betreffenden Buchstaben vorgesetztes δ bezeichnen, wie schon oben theilweise geschehen ist. Nach den Differentiationen, die das auf mehrere Veränderliche ausgedehnte Taylorsche Theorem erfordert, müssen in allen Differentialquotienten die elliptischen Werthe der Grössen, von welchen sie Functionen sind, substituirt werden, auch muss gleich wie oben

$$P = 0 \quad \text{und} \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J$$

geschrieben werden. Das Increment δK kann durch die Relation, die im Art. 46 gefunden wurde, eliminirt werden, nemlich durch

$$\delta K = -F\delta P$$

wo zur Abkürzung

$$F = \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J}$$

gesetzt ist. Man erhält nach diesen Bemerkungen, und wenn man nur die Glieder hinschreibt, die in der Mondtheorie Merkliches geben können,

$$\begin{aligned} \bar{T} = & T_0 + \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z + R\delta P + Y\delta Q \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 T_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \left(\frac{dR}{dg}\right) (n\delta z) \delta P + \left(\frac{dY}{dg}\right) (n\delta z) \delta Q \\ & + \frac{1}{2} S\delta P^2 + V\delta P\delta Q + \frac{1}{2} Z\delta Q^2 \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 T_0}{dg^3}\right) (n\delta z)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 R}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 \delta P + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 Y}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 \delta Q \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{dS}{dg}\right) n\delta z \cdot \delta P^2 + \left(\frac{dV}{dg}\right) n\delta z \cdot \delta P\delta Q + \frac{1}{2} \left(\frac{dZ}{dg}\right) n\delta z \cdot \delta Q^2 \end{aligned}$$

wo die eingeführten Bezeichnungen die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{dT_0}{dP}\right) - F \left(\frac{dT_0}{dK}\right) \\ Y &= \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \\ S &= \left(\frac{d^2 T_0}{dP^2}\right) - 2F \left(\frac{d^2 T_0}{dP dK}\right) + F^2 \left(\frac{d^2 T_0}{dK^2}\right) \\ V &= \left(\frac{d^2 T_0}{dP dQ}\right) - F \left(\frac{d^2 T_0}{dQ dK}\right) \\ Z &= \left(\frac{d^2 T_0}{dQ^2}\right) \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck habe ich in den folgenden zusammengezogen,

$$\begin{aligned} \bar{T} = T_0 + \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right) (n\delta z)^3 \\ + H\delta P + N\delta Q \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

den ich weiter unten anwenden werde, und in welchem zur Abkürzung

$$\begin{aligned} H &= R + \left(\frac{dR}{dg}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2R}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} L\delta P + M\delta Q \\ N &= Y + \left(\frac{dY}{dg}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Y}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} O\delta Q \\ L &= S + \left(\frac{dS}{dg}\right) n\delta z \\ M &= V + \left(\frac{dV}{dg}\right) n\delta z \\ O &= Z + \left(\frac{dZ}{dg}\right) n\delta z \end{aligned}$$

gesetzt worden ist.

Die Entwicklung der Functionen \bar{G} , \bar{U} , $\bar{\Sigma}$, \bar{B} , \bar{C} führt auf ganz ähnliche Ausdrücke, die nicht hingeschrieben zu werden brauchen, da man nur im obigen Ausdruck zu diesem Zweck T_0 bez. in G_0 , U_0 , Σ_0 , B_0 , C_0 umzuändern nöthig hat. Die Entwicklung von \bar{G} , oder statt dessen die von \bar{U} , nach diesem Ausdruck ist unnöthig, da man sie auf einfachere Weise erhalten kann. Die Bedingungsgleichung (16) giebt nemlich entweder

$$\bar{G} = \bar{T} - \bar{U} - \bar{\Sigma} \quad \text{oder} \quad \bar{U} = \bar{T} - \bar{G} - \bar{\Sigma}$$

und hieraus folgen die Coefficienten von \bar{G} , oder bez. \bar{U} , auf die einfachste Weise, nachdem man die Coefficienten der anderen drei Functionen durch den Ausdruck (20) berechnet hat. Dieser braucht also ausser \bar{T} nur noch entweder auf die Functionen

$$\bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{B}, \bar{C} \quad \text{oder auf} \quad \bar{G}, \bar{\Sigma}, \bar{B}, \bar{C}$$

angewandt zu werden. Auch braucht man der Strenge nach in der Anwendung desselben auf diese zuletzt genannten Functionen nicht alle hingeschriebenen Glieder zu berücksichtigen, sondern darf dort mehrere Glieder der höchsten Ordnung übergehen.

47.

Es sind noch die Ausdrücke für die Differentialquotienten nach P , Q , K zu entwickeln, und diese Berechnung kann auf ähnliche Art ausgeführt werden, wie die oben für B und C , man kann nemlich die

constanten Factoren angeben, durch deren Anwendung auf bez. T, U, Σ und Ω , oder statt der letzteren $\frac{\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$, die genannten Differentialquotienten hervorgehen.

Wenden wir uns zuerst zu T, U, Σ , so ist zu bedenken, dass die Functionen von J , die in den zehn einzelnen Theilen von Ω enthalten sind, unverändert in T, U, Σ übergehen, und nur die Cosinuse, die Ω enthält, sich in Sinusse verwandeln. Differentiiren wir daher die Ausdrücke von $a\Omega_1, a\Omega_2, \text{etc.}$ des Art. 39 nach P, Q, K , nachdem darin die Cosinuse in Sinusse mit gleichem Vorzeichen, und die Sinusse in Cosinuse mit entgegengesetztem Vorzeichen verwandelt worden sind, setzen nach den Differentiationen

$$P = 0, \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J$$

und dividiren mit den bez. Factoren von $a\Omega_1, a\Omega_2, \text{etc.}$, so ergeben sich die

Factoren, womit die Ausdrücke von T und U und Σ

multiplicirt werden müssen, um die bez. Ausdrücke von

zu geben, wie folgt:

	R	und	Y
1)	0		$-\frac{6 \cos J \sin \frac{1}{2} J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
2)	$-\frac{2 \sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$		$-\frac{2 \sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$
3)	$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$		$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
4)	$\frac{4}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$		$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
5)	$\frac{2}{\sin \frac{1}{2} J}$		$\frac{2}{\sin \frac{1}{2} J}$
6)	$-\frac{\sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$		$-\frac{(4 - 50 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}{4 - 44 \sin^2 \frac{1}{2} J + 35 \sin^4 \frac{1}{2} J}$
7)	$-\frac{3 \sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$		$-\frac{3 \cos J \sin \frac{1}{2} J}{4 - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
8)	$\frac{4}{\sin \frac{1}{2} J}$		$\frac{3 - 20 \sin^2 \frac{1}{2} J}{(3 - 40 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}$
9)	$\frac{4 - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$		$\frac{4 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos J \sin \frac{1}{2} J}$
10)	$-\frac{4 + \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$		$\frac{4 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos J \sin \frac{1}{2} J}$

Ausserdem müssen in R die in T, U, Σ enthaltenen Sinusse alle in Cosinuse umgewandelt werden, während in Y die Sinusse bleiben.

Vergleicht man die vorstehenden Factoren mit denen des Art. 41, so sieht man, dass sie sich zu diesen verhalten wie 1 : $-\cos^2 \frac{1}{2} J$

48.

Differentiirt man die Ausdrücke von $a\Omega_1, a\Omega_2, Aa_1$ des Art. 39 nochmals unter denselben Bedingungen wie oben, so bekommt man die

Factoren, womit die Ausdrücke von

T und U und Σ

multiplicirt werden müssen, um die bez. Ausdrücke von

$S; \quad V; \quad Z$

zu geben, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
 1) \dots \dots \frac{3 \cos J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots - \frac{3 - 18 \sin^2 \frac{1}{2} J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 2) \dots \dots \dots - \frac{4 + 3 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots - \frac{4 - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 3) \dots \dots \dots - \frac{4 - 5 \sin^2 \frac{1}{2} J + 3 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J + 7 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 4) \dots \dots \dots - \frac{4 + 3 \sin^2 \frac{1}{2} J - \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{4}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 5) \dots \dots \dots - \frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2} J}
 \end{array}$$

wo in den Ausdrücken von V ausserdem die in T, U, Σ enthaltenen Sinusse in Cosinusse zu verwandeln sind, während in denen von S und Z die Sinusse bleiben.

Die zu $a\Omega_6$, etc. gehörigen Factoren habe ich nicht angesetzt, weil die daraus entstehenden Glieder nichts Merkliches geben können.

49.

Differentiirt man ferner den allgemeinen Ausdruck für $n_0 B$ des Art. 40, und behandelt das Differentiale eben so wie im Vorbergehenden geschehen ist, so bekommt man die

Factoren, womit $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

R und Y

in Bezug auf B zu erhalten, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
 1) \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots \frac{3 - 27 \sin^2 \frac{1}{2} J + 30 \sin^4 \frac{1}{2} J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 2) \dots \dots \dots \frac{4 + 3 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \dots \dots \dots \frac{4 - 5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 3) \dots\dots\dots & \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2} J + 6 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2} J + 10 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 4) \dots\dots\dots & \frac{4-3 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2} J + 10 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 5) \dots\dots\dots & \frac{3 \cos^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3-5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \\
 6) \dots\dots\dots & \frac{4+44 \sin^2 \frac{1}{2} J - 75 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(4-44 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J)} \dots\dots\dots - \frac{44-128 \sin^2 \frac{1}{2} J + 250 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(4-44 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J)} \\
 7) \dots\dots\dots & \frac{3+9 \sin^2 \frac{1}{2} J - 27 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J)} \dots\dots\dots - \frac{3-27 \sin^2 \frac{1}{2} J + 30 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J)} \\
 8) \dots\dots\dots & \frac{(3-30 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}{2(8-10 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3-69 \sin^2 \frac{1}{2} J + 100 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(8-10 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J} \\
 9) \dots\dots\dots & \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2} J + 18 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2} J + 20 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J} \\
 10) \dots\dots\dots & - \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2} J - 6 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2} J + 20 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J}
 \end{aligned}$$

Hier müssen ausserdem in R die Cosinusse, welche Ω enthält, in Sinusse verwandelt werden.

Durch nochmalige Differentiation des Ausdrucks von $n_0 B$ und übrigen gleiche Behandlung ergeben sich die

Factoren, womit $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$$S; \qquad V; \qquad Z$$

in Bezug auf B zu erhalten, wie folgt:

$$\begin{aligned}
 1) \dots & - \frac{(9-12 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots - \frac{(27-60 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 2) \dots & - \frac{(6+2 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}{\cos^4 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{8 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^4 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{(6-10 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}{\cos^4 \frac{1}{2} J} \\
 3) \dots & \frac{4+\sin^2 \frac{1}{2} J-4 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^4 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{2-8 \sin^2 \frac{1}{2} J+7 \sin^4 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J \cos^4 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 4) \dots & \frac{4-7 \sin^2 \frac{1}{2} J+4 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{2-2 \sin^2 \frac{1}{2} J-\sin^4 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J \cos^4 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \\
 5) \dots & \frac{3-2 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3 \cos J}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3-10 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}
 \end{aligned}$$

Ausserdem müssen hier in V die Cosinusse, die Ω enthält, in Sinus verwandelt werden.

Behandelt man endlich den Ausdruck für $n_0 C$ des Art. 40 auf dieselbe Weise, so bekommt man die

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 171

Factoren, womit $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt werden muss,
in die Ausdrücke von

$$R \quad \text{und} \quad Y$$

in Bezug auf C zu erhalten.

1)	$\dots\dots\dots - \frac{(8-6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}{1-6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots 0$	
2)	$\dots\dots\dots - \frac{1+8 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots \frac{1-5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	
3)	$\dots\dots\dots - \frac{1-5 \sin^2 \frac{1}{2} J + 6 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{1-9 \sin^2 \frac{1}{2} J + 10 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	
4)	$\dots\dots\dots - \frac{1+8 \sin^2 \frac{1}{2} J - 2 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{1-8 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	
5)	$\dots\dots\dots - \frac{3 \cos^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3-5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}$	
6)	$\dots\dots\dots - \frac{11-70 \sin^2 \frac{1}{2} J + 89 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(1-11 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots \frac{1-23 \sin^2 \frac{1}{2} J + 125 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(1-11 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J)}$	
7)	$\dots\dots\dots - \frac{3+6 \sin^2 \frac{1}{2} J - 39 \sin^4 \frac{1}{2} J + 48 \sin^6 \frac{1}{2} J}{2(1-8 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots \frac{3-27 \sin^2 \frac{1}{2} J + 45 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(1-8 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J)}$	
8)	$\dots\dots\dots - \frac{3 \cos^2 \frac{1}{2} J}{2(8-40 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3-29 \sin^2 \frac{1}{2} J + 50 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(8-40 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}$	
9)	$\dots\dots\dots - \frac{1-10 \sin^2 \frac{1}{2} J + 33 \sin^4 \frac{1}{2} J - 32 \sin^6 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \cos^2 \frac{1}{2} J \sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{1-15 \sin^2 \frac{1}{2} J + 30 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J}$	
10)	$\dots\dots\dots - \frac{1+6 \sin^2 \frac{1}{2} J - 15 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \cos^2 \frac{1}{2} J \sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots \frac{1-3 \sin^2 \frac{1}{2} J - 10 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J}$	

Ausserdem müssen hier in Y die Cosinuse, welche Ω enthält, in Sinusse verwandelt werden. Schliesslich erhält man die

Factoren, womit $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt werden muss,
in die Ausdrücke von

$$S; \quad V; \quad Z$$

in Bezug auf C zu erhalten.

1)	$\dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots \frac{(9-12 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}{1-6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots 0$	
2)	$\dots\dots\dots - \frac{(6+2 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots \frac{8 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{(6-10 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	
3)	$\dots\dots\dots - \frac{1+\sin^2 \frac{1}{2} J - 4 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots \frac{2-8 \sin^2 \frac{1}{2} J + 75 \sin^4 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	
4)	$\dots\dots\dots - \frac{7-5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{1-4 \sin^2 \frac{1}{2} J + 2 \sin^4 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	
5)	$\dots\dots\dots - \frac{3-2 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3-6 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J} \dots\dots\dots - \frac{3-10 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}$	

Ausserdem müssen hier in S und Z die Cosinuse, welche Ω enthält, in Sinusse verwandelt werden.

51.

Es ist oben bemerkt worden, dass die Relation $\delta K = -F\delta P$ strenge genommen nur für die erste Potenz der störenden Kraft gilt, es ist daher noch zu untersuchen, welche Abweichung davon sich herausstellt, wenn man auf das Quadrat und die höheren Potenzen derselben Rücksicht nimmt. Zu dem Ende bemerke ich, dass mit Uebergang der von dp' und dq' abhängigen Glieder, die hier nicht in Betracht kommen, die Gleichungen des Art. 13 für dP , dQ , dK , nachdem die erste mit Q , und die zweite mit P multiplicirt worden ist,

$$-\left(\frac{dP}{dt} + n\alpha Q\right) Q + \left(\frac{dQ}{dt} - n\alpha P\right) P = \frac{1}{4} \left(\frac{dK}{dt} - n\eta\right) \cos^2 \frac{1}{2} J$$

geben. Zuzufolge des Art. 36 ist aber, auch mit Uebergang der von dp' und dq' abhängigen Glieder,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} + \alpha Q &= B \\ \frac{dQ}{ndt} - \alpha P &= C \end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$(21) \dots\dots\dots \frac{dK}{ndt} = \eta + \frac{C}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J} P - \frac{B}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J} Q$$

wodurch die Entwicklung von dK auf die Entwicklungen von B und C strenge hingeführt worden ist, die ohnehin für die Berechnung von δP und δQ ausgeführt werden müssen. Um die Abweichung des Werthes von δK von dem Werthe von $-F\delta P$ zu ermitteln, brauchen wir nur für die Functionen $\frac{P}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J}$ und $\frac{Q}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J}$ ihre Ausdrücke durch δP und δQ zu substituiren. Um diese zu bekommen, bemerke ich, dass

$$\begin{aligned} Q &= 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + \delta Q, \quad P = \delta P \\ \sin^2 \frac{1}{2} J &= \frac{1}{4} P^2 + \frac{1}{4} Q^2 \end{aligned}$$

ist, woraus sogleich

$$\cos^2 \frac{1}{2} J = \cos^2 \frac{1}{2} J_0 - \sin \frac{1}{2} J_0 \delta Q - \frac{1}{4} \delta P^2 - \frac{1}{4} \delta Q^2$$

folgt. Bleiben wir jetzt in den folgenden Ausdrücken bei dem Quadrat der störenden Kraft stehen, so bekommen wir leicht

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} J} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0} + \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta Q + \frac{1}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta P^2 + \frac{1+3 \sin^2 \frac{1}{2} J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta Q^2$$

und hiemit

$$\begin{aligned} \frac{P}{\cos^2 \frac{1}{2} J} &= \frac{\delta P}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta P \delta Q \\ \frac{Q}{\cos^2 \frac{1}{2} J} &= 2 \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0} + \frac{1 + \sin^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta Q + \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta P^2 + \frac{3 \sin \frac{1}{2} J_0 + \sin^2 \frac{1}{2} J_0}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta Q^2 \end{aligned}$$

substituirt man diese in (21), und nimmt auf die Gleichung

$$B = \frac{dP}{ndt} + 2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 + \alpha \delta Q$$

Rücksicht, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dK}{ndt} = & \eta - F \frac{dP}{ndt} - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0 + \frac{C}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta P - \left\{ \frac{1 + \sin^2 \frac{1}{2} J_0}{4 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B + \alpha F \right\} \delta Q \\ & - \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta P^2 + \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} C \delta P \delta Q - \frac{3 \sin \frac{1}{2} J_0 + \sin^3 \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta Q^2 \end{aligned}$$

wo wie oben

$$F = \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J_0}$$

ist. Setzt man nun

$$\delta K = -F \delta P + \delta \delta K$$

und

$$\begin{aligned} X = & \frac{C}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta P - \left\{ \left[\frac{1}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} + 2F^2 \right] B + \alpha F \right\} \delta Q \dots \dots \dots (22) \\ & - \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta P^2 + \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} C \delta P \delta Q - \frac{3 \sin \frac{1}{2} J_0 + \sin^3 \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta Q^2 \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{d\delta \delta K}{ndt} = \eta - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0 + X \dots \dots \dots (23)$$

wo die Function X die Abweichung der Relation $\delta K = -F \delta P$ von der Strenge ausdrückt. Der numerische Werth von X hat, wie man weiter unten sehen wird, grösstentheils nur auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten Einfluss.

§ 4. Substitution der numerischen Werthe in diejenigen im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke, die ganz bekannt sind.

52.

Die in meiner Berechnung der Mondstörungen stets angewandten Elemente der Mondbahn sind die folgenden,

$$\begin{aligned} n &= 17179157,4 \dots \text{ in } 365\frac{1}{4} \text{ Tagen} \\ e &= 0,05490079 \\ J &= 5^\circ 8' 48'' \end{aligned}$$

wie ich hier wieder zu Grunde legen werde. Die Vergleichung der daraus berechneten Störungen mit den Beobachtungen hat gezeigt, dass dieser Werth von n so nahe richtig ist, dass daraus nicht die geringste merkliche Verbesserung der Störungen erwächst. Denn nach Ausweis der Mondtafeln ist

$$n = 17179158,3715$$

gefunden worden, und der Unterschied 1,0 zwischen diesen beiden Werthen ist auf die Berechnung der Störungen bis auf Tausendtheile von Secunden herab durchaus ohne Wirkung. Um zu untersuchen, in wie weit dieses auch mit den obigen Werthen von e und J der Fall ist, müssen wir die Betrachtung aufnehmen, dass der Mittelpunkt der Figur des Mondes mit dem Schwerpunkt desselben nicht zusammenfällt. Nennen wir die grade Aufsteigung und Abweichung des Mondes α und δ , und den Winkel zwischen dem durch den Mond gezogenen Declinationskreis und dem auf die Mondbahn am Orte des Mondes senkrecht gefällten Bogen grössten Kreises K , ferner die auf den Radius Vector projecirte und in Theilen der Entfernung des Mondes von der Erde ausgedrückte Entfernung des Mittelpunkts der Figur des Mondes vom Schwerpunkt desselben N , die mittlere Mondlänge b , die Neigung des Mondäquators gegen die Ecliptik J , und setzen

$$u = (f + \omega) - (l + \Theta)$$

$$A_3 = \cos K \frac{2+e \cos f}{1-e^2} \sin f, \quad A_5 = -\sin K \sin (f + \omega)$$

$$B_3 = \sin K \frac{2+e \cos f}{1-e^2} \sin f, \quad B_5 = \cos K \sin (f + \omega)$$

so ist,*) abgesehen von den Verbesserungen der übrigen Elemente.

$$\begin{aligned} \cos \delta \cdot \Delta \alpha &= A_3 (\Delta e + Ne) + A_5 (\Delta J + N \sin (J + J')) \\ &\quad + \{n\delta z \cos K + u \sin (J + J') \cos (f + \omega) \sin K\} N \\ \Delta \delta &= B_3 (\Delta e + Ne) + B_5 (\Delta J + N \sin (J + J')) \\ &\quad + \{n\delta z \sin K - u \sin (J + J') \cos (f + \omega) \cos K\} N \end{aligned}$$

Wenn also N nicht gleich Null ist, so bekommt man durch die Vergleichung der theoretisch berechneten Mondörter mit den beobachteten nicht unmittelbar Δe und ΔJ , sondern statt dessen $\Delta e + Ne$ und $\Delta J + N \sin (J + J')$. Bei der nachherigen Berechnung der Mondörter müssen nun zwar die beiden letztgenannten Grössen angewandt werden, aber zur Berechnung der Störungen bloss $e + \Delta e$ und $J + \Delta J$, und es müssen daher diese aus jenen ermittelt werden. Bei der Vergleichung mit den Beobachtungen ist nach Ausweis der Mondtafeln (p. 46) gefunden worden

*) S. Mem. of the Royal Astronomical Society, Vol. XXIV. Sur la figure de la Lune. Art. 16.

$$1 + N = 1,0001544^*)$$

und hiemit ergibt sich

$$Ne = + 0,000008476$$

$$N \sin (J + J') = + 3,70$$

wenn man $J' = 1^\circ 32'$ setzt.

Das zweite dieser Glieder ist (p. 15) in dem Gliede $+ 3,70 \sin (g + \omega)$ — welches etwas genauer ist, als wenn $+ 3,70 \sin (f + \omega)$ gesetzt worden wäre — den Breitenstörungen hinzugefügt, aber das erste dem dort angeführten Werthe von e einverleibt gelassen worden, weil es mit zur Berechnung der Mittelpunktsgleichung gezogen werden muss. Wir haben daher (p. 15)

$$e + Ae + Ne = 0,05490807$$

woraus

$$e + Ae = 0,05489959$$

und durch Hülfe des oben angeführten, in den Störungsrechnungen angewandten Werthes von e

$$Ae = - 0,00000420 = - 0,25$$

Dieser Werth ist zu klein, um Berücksichtigung zu verdienen, da sein Einfluss auf den grössten der Störungscoefficienten, der Evection in Länge, kein volles Zehnthel einer Secunde beträgt; höchstens wird unten untersucht werden, ob er zur Knotenbewegung etwas Merkliches beitragen kann.

Für den Werth von J ist in den Mondtafeln $5^\circ 8' 39,96$ angegeben, aber in den Breitenstörungen kommt ausserdem das Glied $+ 2,705 \sin (g + \omega)$ vor, und um den mittleren Werth der Neigung zu erhalten, muss der Coefficient dieses Gliedes zu dem eben angeführten Werth von J addirt werden. Es ergibt sich daher

$$J + AJ = 5^\circ 8' 42,67$$

da, wie oben erklärt wurde, das Glied $N \sin (J + J')$ schon abgetrennt ist. Mit dem oben angegebenen, bei den Störungsrechnungen zu Grunde gelegten Werthe von J bekommt man hieraus

*) Nimmt man die Entfernung des Mondes von der Erde in runder Zahl zu 0000 geogr. Meilen an, und multiplicirt diese Zahl mit dem obigen Werthe von N , so bekommt man 8 geogr. Meilen für die Entfernung des Mittelpunkts der Figur des Mondes von dem Schwerpunkt desselben, wie ich früher angegeben habe.

$$AJ = - 5,33$$

Die grösste Wirkung dieses Werthes erstreckt sich, wie sich weiter unten zu erkennen geben wird, auf die Bewegung des Perigäums; auf den Coefficienten der Evection in Breite wirkt er mit $- 0,150$ ein, wie leicht zu finden ist, und auf alle übrigen Störungscoefficienten bedeutend weniger. *)

Die bei der Berechnung der Mondstörungen angewandten Elemente der Sonnenbahn sind die folgenden:

$$\begin{aligned} n' &= 1295966,1 \dots \text{ in } 365\frac{1}{4} \text{ Tagen} \\ e' &= 0,01679226 \dots \text{ für den Anf. d. J. 1800} \\ ny' &= 11,25 \end{aligned}$$

Ich gebe diese Grössen auch so, wie ich sie angewandt habe. Sie sind vor der Beendigung meiner Sonnentafeln ermittelt und auf die Berechnung der Mondstörungen angewandt worden. Die kleinen Unterschiede hievon, die sich durch meine Bestimmung der Elemente der Sonnenbahn, die in meinen Sonnentafeln angegeben sind, herausgestellt haben, sind auf die Mondstörungen von keinem merklichen Einfluss. Wenn übrigens sich irgend ein merklicher Einfluss herausgestellt hätte, so wäre er leicht zu berücksichtigen gewesen.

Die Logarithmen derjenigen Functionen dieser Elemente, die hier vorzugsweise gebraucht werden, sind die folgenden:

$$\begin{aligned} \log n &= 7,2350019 \\ \log e &= 8,7395786 \\ \log \sqrt{1-e^2} &= 9,9993445 \\ \log \sin \frac{1}{4}J &= 8,6522274 \\ \log \cos \frac{1}{4}J &= 9,9995618 \\ \log \cos J &= 9,9982456 \\ \log n' &= 6,1125936 \\ \log e' &= 8,2251091 \\ \log \sqrt{1-e'^2} &= 9,9999388 \end{aligned}$$

Ferner habe ich angenommen

$$m = \frac{1}{80}; \quad m' = 354936$$

und hieraus folgt

*) z. B. auf die Evection in Länge beträgt der Einfluss nur $+ 0,012$.

P. A. HANSEN,

$$\begin{aligned}\log G^{(2)} &= 1,520 \\ \text{» } G^{(1)} &= 2,9941 \\ \text{» } G^{(0)} &= -\infty \\ \text{» } G^{(-1)} &= 7,9240638n \\ \text{» } G^{(-2)} &= 9,9996937 \\ \text{» } G^{(-3)} &= 8,7689080 \\ \text{» } G^{(-4)} &= 7,37937 \\ \text{» } G^{(-5)} &= 5,9210 \\ \text{» } G^{(-6)} &= 4,423\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log C^{(2)} &= 4,958 \\ \text{» } C^{(1)} &= 6,5885 \\ \text{» } C^{(0)} &= 8,22542 \\ \text{» } C^{(-1)} &= 0,0002449 \\ \text{» } C^{(-2)} &= 8,70235 \\ \text{» } C^{(-3)} &= 7,2714 \\ \text{» } C^{(-4)} &= 5,784\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log D^{(0)} &= -\infty \\ \text{» } D^{(-1)} &= 5,5471 \\ \text{» } D^{(-2)} &= 8,22496n \\ \text{» } D^{(-3)} &= 9,99926 \\ \text{» } D^{(-4)} &= 8,92354 \\ \text{» } D^{(-5)} &= 7,6509 \\ \text{» } D^{(-6)} &= 6,285\end{aligned}$$

54.

Wir erhalten ferner durch die Ausdrücke der Artt. 21 folgenden Werthe, die zur Berechnung der Coefficienten von a

$$\begin{aligned}\log P^{(0)} &= 0,0019594 \\ \text{» } P^{(1)} &= 8,7394151n \\ \text{» } P^{(2)} &= 6,876661n \\ \text{» } P^{(3)} &= 5,31491n \\ \text{» } P^{(4)} &= 3,8781n \\ \text{» } P^{(5)} &= 2,512n \\ P^{(-i)} &= P^{(i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log Q^{(-3)} &= 2,122n \\ » Q^{(-2)} &= 3,775n \\ » Q^{(-1)} &= 5,68418n \\ » Q^{(0)} &= 7,8770972 \\ » Q^{(1)} &= 9,2159903n \\ » Q^{(2)} &= 9,9967208 \\ » Q^{(3)} &= 8,7364651 \\ » Q^{(4)} &= 7,475881 \\ » Q^{(5)} &= 6,23293 \\ » Q^{(6)} &= 5,0057 \\ » Q^{(7)} &= 3,795 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log A^{(-3)} &= 3,696 \\ » A^{(-2)} &= 5,4405 \\ » A^{(-1)} &= 7,61760 \\ » A^{(0)} &= 9,1384993n \\ » A^{(1)} &= 0,0026076 \\ » A^{(2)} &= 8,4359227n \\ » A^{(3)} &= 7,05078n \\ » A^{(4)} &= 5,6836n \\ » A^{(5)} &= 4,352n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log B^{(-1)} &= 4,726 \\ » B^{(0)} &= 6,8597n \\ » B^{(1)} &= 8,33119 \\ » B^{(2)} &= 9,39038n \\ » B^{(3)} &= 9,99210 \\ » B^{(4)} &= 8,90941 \\ » B^{(5)} &= 7,74623 \\ » B^{(6)} &= 6,5708 \\ » B^{(7)} &= 5,386 \end{aligned}$$

55.

hülfe der vorhergehenden Zahlenwerthe bekommt man nun genden Zahlenwerthe der Coefficienten von $a\Omega$, wo die statt der Zahlen selbst, die in Einheiten der Secunde aus- stehen sind, stehen.

g, g'	$\frac{a\Omega}{\cos}$	g, g'	$\frac{a\Omega}{\cos}$	g, g'	$\frac{a\Omega}{\cos}$
1.	$=0\omega+0\omega'$	2.		3.	
0,0	2,4644160	4,-1	8,3429n	-1,1	4,635n
1,0	1,5029020n	5,-1	7,100n	0,1	6,8277
2,0	9,64015n	-2,-2	6,698n	1,1	8,16661n
3,0	8,0784n	-1,-2	8,62679n	2,1	8,94734
4,0	6,642n	0,-2	0,8197068	3,1	7,6871
-4,-1	5,043n	1,-2	2,1585999n	4,1	6,427
-3,-1	6,480n	2,-2	2,9393304	-2,0	4,304n
-2,-1	8,04130n	3,-2	1,6790747	-1,0	6,2336n
-1,-1	9,9040565n	4,-2	0,41849	0,0	8,426557
0,-1	1,1666005	5,-2	9,1755	1,0	9,765451
1,-1	9,9040565n	6,-2	7,948	2,0	0,546181
2,-1	8,04130n	7,-2	6,737	3,0	9,28593
3,-1	6,480n	-2,-3	5,467n	4,0	8,02534
4,-1	5,043n	-1,-3	7,3960n	5,0	6,7824
-3,-2	4,881n	0,-3	9,5889213	-1,-1	4,635n
-2,-2	6,443n	1,-3	0,9278142n	0,-1	6,8277
-1,-2	8,30523n	2,-3	1,7085447	1,-1	8,16661n
0,-2	9,56777	3,-3	0,44829	2,-1	8,94734
1,-2	8,30523n	4,-3	9,1877	3,-1	7,6871
2,-2	6,443n	5,-3	7,945	4,-1	6,427
3,-2	4,881n	6,-3	6,717	1,-2	6,568n
-2,-3	4,863n	-1,-4	6,006n	2,-2	7,3485
-1,-3	6,698n	0,-4	8,1994	3,-2	6,088
0,-3	7,9608	1,-4	9,53828n	4.	$=2\omega'$
1,-3	6,698n	2,-4	0,31901	-1,4	6,668n
2,-3	4,836n	3,-4	9,0587	0,4	7,9307
-1,-4	5,087n	4,-4	7,798	1,4	6,668n
0,-4	6,348	5,-4	6,555	-2,3	6,195n
1,-4	5,087n	0,-5	6,741	-1,3	8,0576n
2.	$=2\omega-2\omega'$	1,-5	8,0799n	0,3	9,32015
1,1	5,153n	2,-5	8,8606	1,3	8,0576n
2,1	5,934	3,-5	7,600	2,3	6,195n
3,1	4,674	4,-5	6,340	-3,2	5,863n
0 = 0		1,-6	6,582n	-2,2	7,4256n
-1,-1	6,551	2,-6	7,363	-1,2	9,28839n
0,-1	8,74408n	3,-6	6,102	0,2	0,550929
1,-1	0,08297	3.	$=2\omega$	1,2	9,28839n
2,-1	0,86370n	1,2	6,568n	2,2	7,4256n
3,-1	9,60344n	2,2	7,3485	3,2	5,863n
		3,2	6,088	-2,1	5,350

4.		6.		7.	
-1,1	7,2128	-1,-2	6,346	1,-5	6,237
0,1	8,47530n	0,-2	7,8674n	2,-5	7,296n
1,1	7,2128	1,-2	8,73152	3,-5	7,898
2,1	5,350	2,-2	7,1648n	4,-5	6,815
0	= 0	3,-2	5,780n		
		0,-3	6,432n	8.	= $\omega + \omega'$
5.	= $2\omega + 2\omega'$	1,-3	7,301	0,2	5,957n
0,2	5,430	2,-3	5,734n	1,2	6,821
1,2	6,7692n			2,2	5,254n
2,2	7,54999	7.	= $3\omega - 3\omega'$	-1,1	5,734
3,2	6,2897	1,-2	6,812n	0,1	7,2546n
		2,-2	7,8709	1,1	8,1187
6.	= $\omega - \omega'$	3,-2	8,4726n	2,1	6,552n
0,1	5,753n	4,-2	7,390n	0,0	5,479n
1,1	6,618	5,-2	6,226n	1,0	6,344
2,1	5,051n	-1,-3	4,981		
-1,0	5,870	0,-3	7,1144n	9.	= $3\omega - \omega'$
0,0	7,39048n	1,-3	8,58593	2,-1	7,428n
1,0	8,25459	2,-3	9,64512n	3,-1	8,0302
2,0	6,6879n	3,-3	0,24684	4,-1	6,948
3,0	5,303n	4,-3	9,16445		
-2,-1	5,467	5,-3	8,0010	10.	= $\omega - 3\omega'$
-1,-1	7,6444	6,-3	6,825	0	= 0
0,-1	9,1653073n	0,-4	6,039n	0,-3	7,176n
1,-1	0,0294156	1,-4	7,510	1,-3	8,0398
2,-1	8,46273n	2,-4	8,5694n	2,-3	6,473n
3,-1	7,0776n	3,-4	9,1711		
4,-1	5,711n	4,-4	8,0884		
		5,-4	6,925		

Die Reihenfolge der Argumente in der vorstehenden Tafel ist geordnet:

1) nach den 10 Theilen, in welche $a\Omega^{(1)} + a\Omega^{(2)}$ oben zerlegt worden ist und die sich durch die verschiedenen Functionen von ω und unterscheiden, die im Argument den Vielfachen von g und g' hinzugefügt werden müssen. Diese sind neben dem bez. Index von $a\Omega$ über jeder dieser 10 Hauptabtheilungen angegeben, während die erste Columne der Tafel die Vielfachen von g und g' anzeigt. Z. B. in der Abtheilung 2) neben den Zahlen 1 und -2 der ersten Columne steht der Logarithmus des Coefficienten von

$$\cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

u. s. w. Jede dieser 10 Abtheilungen ist überdies von der folgenden durch einen Doppelstrich abgesondert;

2) innerhalb jeder der eben genannten 10 Abtheilungen, nach der Ordnung der Zahlen, mit welchen g' in den Argumenten multiplicirt ist. Die hieraus hervorgehenden Abtheilungen sind durch einfache Striche von einander abgesondert;

3) in jeder dieser Abtheilungen nach der Ordnung der Zahlen, mit welchen g multiplicirt ist.

Diese Anordnung, die ich im Folgenden stets beibehalten werde, gewährt einen sicheren Ueberblick über das Ganze und über die Glieder, die merklich werden können. Jede der unter 3) genannten Abtheilungen besteht aus einer unendlichen Reihe, die von einem grössten Gliede an vorwärts und rückwärts in Bezug auf den Index von g , oder in Bezug auf die Excentricität der Mondbahn convergirt. Stellt man hingegen innerhalb jeder der unter 1) genannten Abtheilungen die Glieder der verschiedenen unter 2) genannten Abtheilungen zusammen, in welchen der Index von g derselbe ist, so bekommt man lauter Reihen, die von einem grössten Gliede an vorwärts und rückwärts in Bezug auf den Index von g' , oder in Bezug auf die Excentricität der Erd- (oder Sonnen-) Bahn convergiren. Die unter 1) genannten Abtheilungen selbst bilden endlich gruppenweis die Glieder einer unendlichen, convergirenden Reihe, die nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Entfernung des Mondes von der Erde zu der der Sonne von der Erde fortschreitet.

56.

Zur Erlangung der numerischen Werthe der Coefficienten von T , wurden zuerst die Ausdrücke des Art. 27 in Zahlen verwandelt und wie folgt gefunden:

$$\begin{aligned} \log P^{-1,0} &= 9,2165362n \\ \text{» } P^{-1,1} &= 0,3003753 \\ \text{» } P^{-1,2} &= 8,7385964 \\ \text{» } P^{-1,3} &= 7,35294 \\ \text{» } P^{-1,4} &= 6,0440 \\ \text{» } P^{-1,5} &= 4,772 \end{aligned}$$

$\log P^{-1,-1} = -\infty$
» $P^{-1,-2} = 4,8382n$
» $P^{-1,-3} = 3,629n$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$P^{1,i} = -P^{-1,-i}$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$\log Q^{-1,-1} = 4,193$
» $Q^{1,-2} = 4,382n$
» $Q^{-1,0} = 6,31674$
» $Q^{1,-2} = 5,9177n$
» $Q^{-1,1} = 8,2194407n$
» $Q^{1,-1} = 7,7228180n$
» $Q^{-1,2} = 9,5158734$
» $Q^{1,0} = 9,7395791$
» $Q^{-1,3} = 0,2937980n$
» $Q^{1,1} = 0,7770595n$
» $Q^{-1,4} = 9,3360615n$
» $Q^{1,2} = 9,3402468n$
» $Q^{-1,5} = 8,26978n$
» $Q^{1,3} = 8,02148n$
» $Q^{-1,6} = 7,1676n$
» $Q^{1,4} = 6,7607n$
» $Q^{-1,7} = 6,055n$
» $Q^{1,5} = 5,535n$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$\log A^{-1,0} = 7,9740$
» $A^{1,-2} = 7,479$
» $A^{-1,1} = 9,28206n$
» $A^{1,-1} = 9,47998$
» $A^{-1,2} = 9,99407$
» $A^{1,0} = 0,7009291n$
» $A^{-1,3} = 8,91156$
» $A^{1,1} = 9,39224$
» $A^{-1,4} = 7,722$
» $A^{1,2} = 7,690$

log	$B^{-1,1} = 7,403$
»	$B^{1,-1} = 6,890$
»	$B^{-1,2} = 8,8241n$
»	$B^{1,0} = 8,8983n$
»	$B^{-1,3} = 9,86534$
»	$B^{1,1} = 0,19346$
»	$B^{-1,4} = 0,46315n$
»	$B^{1,2} = 0,95007n$
»	$B^{-1,5} = 9,6049n$
»	$B^{1,3} = 9,7570n$
»	$B^{-1,6} = 8,609n$
»	$B^{1,4} = 8,545n$

Ferner nach den Ausdrücken der Artt. 47 u. 48 die

Logg. der Factoren, womit die Coefficienten von T_0 multiplicirt werden müssen, um die von

	R	und	Y
zu erhalten,			
1)	$-\infty$		9,4338983n
2)	8,9541338n		8,9541338n
3)	1,3468945		1,3468945
4)	1,3486490		1,3468945
5)	1,64880		1,64880
6)	8,65310n		9,69932n
7)	9,13022n		9,13022n
8)	1,34777		1,34484
9)	1,34602		1,34601
10)	1,34953n		1,34061

Logg. der Factoren, womit die Coefficienten von T_0 multiplicirt werden müssen, um die von

	$S,$	$V,$	Z
zu erhalten.			
1)	0,48063n	$-\infty$	0,47710n
2)	0,00437n	7,90827	9,99912n
3)	2,39188n	2,39099	2,39010
4)	2,39889n	2,39451	2,39010
5)	3,1726n	3,1726	2,1726

57.

Sie können nun durch Anwendung der Ausdrücke des Art. 26 die Zusammenstellung machen, welche die Coefficienten von T_0 , die der hier erforderlichen Differentialquotienten von T_0 enthält.

g, g'	T_0 sin	R cos	Y sin	S sin	V cos	Z sin
1.						
-1, 1, 0	+1158,410		-314,60	-3503		-3475
0, 1, 0	-95.504		+25.94	+289		+286
-1, 2, 0	+31.775		-8.63	-96		-95
1, 0, 0	+95.50433		-25.94	-289		-286
0, 2, 0	-2.620		+0.71	+8		+8
-1, 3, 0	+1.308		-0.36	-4		-4
1, 1, 0	0		0	0		0
0, 3, 0	-0.108		+0.03			
-1, 4, 0	+0.064		-0.02			
1, 2, 0	+0.004		0.00			
0, 4, 0	-0.005					
-1, 5, 0	+0.003					
1, 3, 0	0.000					
-3, -1	+0.003					
-2, -1	0.000					
-4, -1	-0.002					
-2, -1	+0.066		-0.02			
-1, -1	0		0.00			
-3, -1	-0.033		+0.01			
-1, -1	+2.406		-0.65	-7		-7
1, 0, -1	-2.40535		+0.65	+7		+7
-2, -1	-0.800		+0.22	+2		+2
0, 0, -1	0		0	0		0
1, 1, -1	+29.17538		-7.92	-88		-88
-1, -1	-29.17538		+7.92	+88		+88
0, 1, -1	-2.406		+0.65	+7		+7
1, 2, -1	+0.800		-0.22	-2		-2
1, 0, -1	+2.40535		-0.65	-7		-7
0, 2, -1	-0.066		+0.02			
1, 3, -1	+0.033		-0.01			
1, 1, -1	0		0.00			
0, 3, -1	-0.003					
1, 4, -1	+0.002					
1, 2, -1	0.000					
-2, -2	+0.002					
-1, -2	0					
-3, -2	-0.001					
-1, -2	+0.061		+0.02			
-1, 0, -2	-0.0606		+0.02			
-2, -2	-0.020		+0.01			

74.						
0,0,-2	0		0	0		
-1,1,-2	+0.7348		-0.20	-2		-
1,-1,-2	-0.7348		+0.20	+2		+
0,1,-2	-0.064		+0.02			
-1,2,-2	+0.020		-0.01			
1,0,-2	+0.0606		-0.02			
0,2,-2	-0.002					
-1,3,-2	+0.004					
1,1,-2	0					
0,-1,-3	+0.002					
-1,0,-3	-0.002					
1,-2,-3	0.000					
0,0,-3	0					
-1,1,-3	+0.018					
1,-1,-3	-0.018					
0,1,-3	-0.002					
-1,2,-3	0.000					
1,0,-3	+0.002					
2.						
0 = 0						
0,-1,-1	-0.004					
-1,0,-1	-0.00453					
1,-2,-1	+0.004					
0,0,-1	0	0	0			
-1,1,-1	+0.12204	-0.04	-0.04			
1,-1,-1	+0.03889	0.00	0.00			
0,1,-1	+3.632	-0.33	-0.33	-4		-
-1,2,-1	-2.415	+0.22	+0.22	+2		+
1,0,-1	-4.04165	+0.36	+0.36	+4		+
0,2,-1	-43.838	+3.94	+3.94	+44		+
-1,3,-1	+14.480	-1.30	-1.30	-15		-
1,1,-1	+44.060	-3.96	-3.96	-45		-
0,3,-1	-3.642	+0.32	+0.32	+4		+
-1,4,-1	+1.596	-0.44	-0.44	-2		-
1,2,-1	+1.644	-0.45	-0.45	-2		-
0,4,-1	-0.264	+0.02	+0.02			
-1,5,-1	+0.137	-0.04	-0.04			
1,3,-1	+0.077	-0.04	-0.04			
0,5,-1	-0.049					
-1,6,-1	+0.044					
1,4,-1	+0.004					
0,-2,-2	+0.003					
-1,-1,-2	+0.001					
1,-3,-2	-0.004					
0,-1,-2	+0.127	-0.04	-0.04			
-1,0,-2	+0.1817	-0.02	-0.02			
1,-2,-2	-0.073	+0.04	+0.04			
0,0,-2	0	0	0	0		
-1,1,-2	-14.5228	+1.31	+1.31	+15		+
1,-1,-2	-4.6284	+0.42	+0.42	+5		-

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 187

2.						
0,1,-2	-432.236	+38.90	+38.90	+437	-4	+431
-1,2,-2	+287.397	-25.86	-25.86	-290	+2	-287
1,0,-2	+481.0483	-43.28	-43.28	-486	+4	-480
0,2,-2	+5217.731	-469.47	-469.47	-5270	+42	-5208
-1,3,-2	-1723.485	+155.08	+155.08	+1744	-14	+1720
1,1,-2	-5244.077	+471.85	+471.85	+5296	-43	+5234
0,3,-2	+429.851	-38.67	-38.67	-434	+3	-429
-1,4,-2	-189.964	+17.09	+17.09	+192	-2	+190
1,2,-2	-191.803	+17.26	+17.26	+194	-2	+191
0,4,-2	+31.454	-2.83	-2.83	-32		-31
-1,5,-2	-16.308	+1.47	+1.47	+17		+16
1,3,-2	-9.207	+0.83	+0.83	+9		+9
0,5,-2	+2.247	-0.20	-0.20	-2		-2
-1,6,-2	-1.289	+0.12	+0.12	+1		+1
1,4,-2	-0.505	+0.05	+0.05	+1		+1
0,6,-2	+0.160					
-1,7,-2	-0.100					
1,5,-2	-0.030					
0,-1,-3	+0.007					
-1,0,-3	+0.014					
1,-2,-3	-0.004					
0,0,-3	0	0	0			
-1,4,-3	-0.854	+0.08	+0.08			
1,-1,-3	-0.272	+0.02	+0.02			
0,1,-3	-25.406	+2.29	+2.29	+26		+25
-1,2,-3	+16.892	-1.52	-1.52	-17		-17
1,0,-3	+28.275	-2.54	-2.54	-29		-28
0,2,-3	+306.687	-27.59	-27.59	-310	+2	-306
-1,3,-3	-101.303	+9.42	+9.42	+102	-1	+101
1,1,-3	-308.236	+27.72	+27.72	+311	-2	+308
0,3,-3	+25.266	-2.27	-2.27	-26		-25
-1,4,-3	-11.166	+1.00	+1.00	+11		+11
1,2,-3	-11.274	+1.01	+1.01	+11		+11
0,4,-3	+1.849	-0.17	-0.17	-2		-2
-1,5,-3	-0.959	+0.09	+0.09	+1		+1
1,3,-3	-0.541	+0.05	+0.05	+1		+1
0,5,-3	+0.132					
-1,6,-3	-0.076					
1,4,-3	-0.030					
0,0,-4	0					
-1,1,-4	-0.035					
1,-1,-4	-0.014					
0,1,-4	-1.036	+0.09	+0.09			
-1,2,-4	+0.689	-0.06	-0.06			
1,0,-4	+1.153	-0.10	-0.10			
0,2,-4	+12.507	-1.13	-1.13	-13		-12
-1,3,-4	-4.131	+0.37	+0.37	+4		+4
1,1,-4	-12.570	+1.13	+1.13	+13		+13

2.						
0,3,-4	+1.030	-0.09	-0.09			
-1,4,-4	-0.455	+0.04	+0.04			
1,2,-4	-0.460	+0.04	+0.04			
0,4,-4	+0.075					
-1,5,-4	-0.039					
1,3,-4	-0.022					
0,4,-5	-0.036					
-1,2,-5	+0.024					
1,0,-5	+0.040					
0,2,-5	+0.435					
-1,3,-5	-0.444					
1,4,-5	-0.437					
0,3,-5	+0.036					
-1,4,-5	-0.016					
1,2,-5	-0.016					
0,2,-6	+0.014					
-1,3,-6	-0.005					
1,4,-6	-0.014					
3.						
0,2,2	+0.013					
-1,3,2	-0.004					
1,1,2	-0.013					
0,0,1	0					
-1,1,1	-0.00148					
1,-1,1	-0.00047					
0,1,1	-0.044	-0.98	-0.98	+11	-11	-1
-1,2,1	+0.029	+0.64	+0.64	-7	+7	+
1,0,1	+0.04900	+1.09	+1.09	-12	+12	+1
0,2,1	+0.532	+11.82	+11.82	-131	+131	+13
-1,3,1	-0.176	-3.93	-3.93	+44	-44	-4
1,1,1	-0.534	-11.85	-11.85	+131	-131	-13
0,3,1	+0.044	+0.98	+0.98	-11	+11	+1
-1,4,1	-0.019	-0.42	-0.42	+5	-5	-
1,2,1	-0.020	-0.45	-0.45	+5	-5	-
0,-1,0	+0.001					
-1,0,0	+0.00073					
1,-2,0	0.000					
0,0,0	0	0	0	0	0	0
-1,1,0	-0.05874	-1.31	-1.31	+15	-14	-1
1,-1,0	-0.04872	-0.42	-0.42	+5	-5	-
0,1,0	-1.748	-38.85	-38.85	+431	-430	-42
-1,2,0	+1.162	+25.83	+25.83	-286	+286	+28
1,0,0	+1.94554	+43.25	+43.25	-480	+479	+47
0,2,0	+21.102	+469.04	+469.04	-5202	+5191	+518
-1,3,0	-6.970	-154.92	-154.92	+1718	-1715	-171
1,1,0	-21.209	-471.43	-471.43	+5229	-5218	-520
0,3,0	+1.739	+38.65	+38.65	-429	+428	+42
-1,4,0	-0.768	-17.07	-17.07	+190	-189	-18
1,2,0	-0.776	-17.23	-17.23	+191	-191	-19

3.						
0,4,0	+0.127	+2.82	+2.82	-34	+34	+34
-1,5,0	-0.066	-1.47	-1.47	+16	-16	-16
1,3,0	-0.037	-0.82	-0.82	+9	-9	-9
0,0,-1	0					
-1,1,-1	-0.00148					
1,-1,-1	-0.0047					
0,1,-1	-0.044	-0.98	-0.98	+11	-11	-11
-1,2,-1	+0.029	+0.64	+0.64	-7	+7	+7
1,0,-1	+0.04900	+1.09	+1.09	-12	+12	+12
0,2,-1	+0.532	+11.82	+11.82	-131	+131	+131
-1,3,-1	-0.176	-3.93	-3.93	+44	-44	-44
1,1,-1	-0.534	-11.85	-11.85	+131	-131	-131
0,3,-1	+0.044	+0.98	+0.98	-11	+11	+11
-1,4,-1	-0.019	-0.42	-0.42	+5	-5	-5
1,2,-1	-0.020	-0.45	-0.45	+5	-5	-5
0,2,-2	+0.013					
-1,3,-2	-0.004					
1,1,-2	-0.013					
4.						
0,0,4	0					
-1,1,4	+0.047					
1,-1,4	-0.047					
0,-1,3	+0.034	+0.76	+0.76	-9	+8	+8
-1,0,3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
1,-2,3	-0.011	-0.25	-0.24	+3	-3	-3
0,0,3	0	0	0	0	0	0
-1,1,3	+0.1455	+9.27	+9.23	-104	+103	+102
1,-1,3	-0.1455	-9.27	-9.23	+104	-103	-102
0,1,3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
-1,2,3	+0.011	+0.25	+0.24	-3	+3	+3
1,0,3	+0.034	+0.76	+0.76	-9	+8	+8
0,-2,2	+0.016	+0.36	+0.36	-4	+4	+4
-1,-1,2	0	0	0	0	0	0
1,-3,2	-0.008	-0.18	-0.18	+2	-2	-2
0,-1,2	+0.583	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
-1,0,2	-0.5828	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
1,-2,2	-0.194	-4.33	-4.31	+49	-48	-48
0,0,2	0	0	0	0	0	0
-1,1,2	+7.0688	+157.76	+157.12	-1771	+1754	+1736
1,-1,2	-7.0688	-157.76	-157.12	+1771	-1754	-1736
0,1,2	-0.583	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
-1,2,2	+0.194	+4.33	+4.31	-49	+48	+48
1,0,2	+0.5828	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
0,2,2	-0.016	-0.36	-0.36	+4	-4	-4
-1,3,2	+0.008	+0.18	+0.18	-2	+2	+2
1,1,2	0	0	0	0	0	0
0,-1,1	-0.005	-0.11	-0.11			
-1,0,1	+0.00490	+0.11	+0.11			
1,-2,1	+0.002	+0.05	+0.05			

4.						
0,0,1	0	0	0	0	0	0
-1,1,1	-0.05940	-1.33	-1.32	+15	-15	-15
1,-1,1	+0.05940	+1.33	+1.32	-15	+15	+15
0,1,1	+0.005	+0.11	+0.11			
-1,2,1	-0.002	-0.05	-0.05			
1,0,1	-0.00490	-0.11	-0.11			
0	= 0					
5.						
0,1,2	-0.002	-0.09	-0.09			
-1,2,2	+0.001	+0.05	+0.05			
1,0,2	+0.0020	+0.09	+0.09			
0,2,2	+0.021	+0.93	+0.93	-31	+31	+31
-1,3,2	-0.007	-0.32	-0.32	+10	-10	-10
1,1,2	-0.021	-0.93	-0.93	+31	-31	-31
0,3,2	+0.002	+0.09	+0.09			
-1,4,2	-0.001	-0.03	-0.03			
1,2,2	-0.001	-0.03	-0.03			
6.						
0,1,1	+0.001					
-1,2,1	0.000					
1,0,1	-0.00207					
0,-1,0	0.000					
-1,0,0	+0.00017					
1,-2,0	0.000					
0,0,0	0					
-1,1,0	-0.00342					
1,-1,0	+0.00539					
0,1,0	+0.054		-0.03			
-1,2,0	+0.018		-0.01			
1,0,0	-0.08972		+0.05			
0,2,0	-0.003					
-1,3,0	+0.001					
1,1,0	+0.004					
0,-1,-1	-0.013					
-1,0,-1	+0.01002					
1,-2,-1	+0.003					
0,0,-1	0	0	0			
-1,1,-1	-0.20364	+0.01	+0.10			
1,-1,-1	+0.32121	-0.01	-0.16			
0,1,-1	+3.210	-0.14	-1.61			
-1,2,-1	+1.049	-0.05	-0.53			
1,0,-1	-5.34253	+0.24	+2.67			
0,2,-1	-0.174		+0.09			
-1,3,-1	+0.087		-0.04			
1,1,-1	+0.262		-0.13			
0,3,-1	-0.011					
-1,4,-1	+0.006					
1,2,-1	+0.005					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 191

6.						
0,0,-2	0					
-1,1,-2	-0.0103					
1,-1,-2	+0.0162					
0,4,-2	+0.162		-0.08			
-1,2,-2	+0.053		-0.03			
1,0,-2	-0.2691		+0.13			
0,2,-2	-0.009					
-1,3,-2	+0.004					
1,1,-2	+0.013					
0,0,-3						
-1,1,-3	0.000					
1,-1,-3	+0.001					
0,1,-3	+0.006					
-1,2,-3	+0.002					
1,0,-3	-0.010					
7.						
0,1,-2	-0.002					
-1,2,-2	+0.002					
1,0,-2	+0.0024					
0,2,-2	+0.045					
-1,3,-2	-0.022					
1,1,-2	-0.047					
0,3,-2	-0.267					
-1,4,-2	+0.088					
1,2,-2	+0.269					
0,4,-2	-0.029					
-1,5,-2	+0.012					
1,3,-2	+0.017					
0,0,-3						
-1,1,-3	+0.005					
1,-1,-3	+0.001					
0,1,-3	+0.116					
-1,2,-3	-0.120					
1,0,-3	-0.142					
0,2,-3	-2.651	+0.36	+0.36			
-1,3,-3	+1.318	-0.18	-0.18			
1,1,-3	+2.807	-0.38	-0.38			
0,3,-3	+15.889	-2.14	-2.14			
-1,4,-3	-5.223	+0.70	+0.70			
1,2,-3	-16.025	+2.16	+2.16			
0,4,-3	+1.751	-0.24	-0.24			
-1,5,-3	-0.724	+0.10	+0.10			
1,3,-3	-1.027	+0.14	+0.14			
0,5,-3	+0.150					
-1,6,-3	-0.073					
1,4,-3	-0.063					
0,1,-4	+0.010					
-1,2,-4	-0.010					
1,0,-4	-0.012					

7.						
0,2,-4	-0.223					
-1,3,-4	+0.111					
1,4,-4	+0.236					
0,3,-4	+1.334	-0.17	-0.17			
-1,4,-4	-0.439	+0.06	+0.06			
1,2,-4	-1.346	+0.17	+0.17			
0,4,-4	+0.147					
-1,5,-4	-0.061					
1,3,-4	-0.086					
0,2,-5	-0.012					
-1,3,-5	+0.006					
1,1,-5	+0.013					
0,3,-5	+0.071					
-1,4,-5	-0.023					
1,2,-5	-0.072					
8.						
0,0,1	0	0	0			
-1,1,1	-0.00250	-0.06	-0.06			
1,-1,1	+0.00395	+0.09	+0.09			
0,1,1	+0.039	+0.87	+0.86			
-1,2,1	+0.013	+0.31	+0.31			
1,0,1	-0.06563	-1.47	-1.46			
0,0,0	0					
-1,1,0	-0.00004					
1,-1,0	+0.00007					
0,1,0	+0.001					
-1,2,0	0.000					
1,0,0	-0.00110					
9.						
0,3,-1	+0.096	+2.13	+2.13			
-1,4,-1	-0.032	-0.71	-0.71			
1,2,-1	-0.097	-2.15	-2.15			
10.						
	0 = 0					
0,1,-3	+0.033	-0.74	+0.73			
-1,2,-3	+0.011	-0.25	+0.24			
1,0,-3	-0.055	+1.23	-1.22			

58.

Ausserdem erhalten wir durch den Ausdruck des Art. 28

$$\begin{aligned}
 &= -0,004 \sin g \\
 &+ 0,008 \sin(-\gamma+g) + 0,000 \sin(-\gamma+2g) + 0,00142 \sin(-\gamma+g-g') \\
 &\quad + 0,00116 \sin \gamma \quad - 0,00142 \sin(\gamma-g-g') \\
 &- 0,002 \sin(g-2g'+2\omega-2\omega') + 0,014 \sin(2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 &\quad 0,000 \sin(-\gamma+2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 &+ 0,0027 \sin(\gamma-2g'+2\omega-2\omega') - 0,019 \sin(\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 &\quad - 0,012 \sin(3g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 &+ 0,000 \sin(-\gamma+4g-2g'+2\omega-2\omega') + 0,005 \sin(-\gamma+4g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 &+ 0,000 \sin(\gamma+2g-2g'+2\omega-2\omega') + 0,013 \sin(\gamma+2g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 &+ 0,049 \sin(4g-4g'+4\omega-4\omega') + 0,007 \sin(5g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 &- 0,016 \sin(-\gamma+5g-4g'+4\omega-4\omega') - 0,003 \sin(-\gamma+6g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 &- 0,049 \sin(\gamma+3g-4g'+4\omega-4\omega') - 0,005 \sin(\gamma+4g-4g'+4\omega-4\omega')
 \end{aligned}$$

die weiter unten berücksichtigt werden sollen.

59.

Zur Berechnung der Coefficienten von G_0 wurden von den Functionen des Art. 33 die folgenden numerischen Werthe gefunden:

$$\begin{aligned}
 \log U^{(-1)} &= 6,0948 \\
 \text{» } U^{-1,0} &= 6,0948 \\
 \text{» } U^{1,-2} &= 5,4408n \\
 \hline
 \text{» } U^{(0)} &= 8,43406n \\
 \text{» } U^{-1,1} &= 7,17856n \\
 \text{» } U^{1,-1} &= 7,17856n \\
 \hline
 \text{» } U^{(1)} &= 9,5177302 \\
 \text{» } U^{-1,2} &= 5,61678n \\
 \text{» } U^{1,0} &= 9,5177302 \\
 \hline
 \text{» } U^{(2)} &= 7,95595 \\
 \text{» } U^{-1,3} &= 4,2313n \\
 \text{» } U^{1,1} &= 0,6014054n \\
 \hline
 \text{» } U^{(3)} &= 6,5701 \\
 \text{» } U^{-1,4} &= 2,920n \\
 \text{» } U^{1,2} &= 9,0396267n \\
 \hline
 \end{aligned}$$

$\log U^{(4)} = 5,259$
» $U^{-1,5} = \text{---}$
» $U^{1,3} = 7,65394 n$
<hr/>
» $U^{(15)} = 3,989$
» $U^{-1,6} = \text{---}$
» $U^{1,4} = 6,3424 n$
<hr/> <hr/>
$\log V^{(-1)} = 8,2574 n$
» $V^{-1,0} = 8,1324$
» $V^{1,-2} = 7,4792$
<hr/>
» $V^{(0)} = 9,51874$
» $V^{-1,1} = 9,51694 n$
» $V^{1,-1} = 9,34148$
<hr/>
» $V^{(1)} = 7,9563$
» $V^{-1,2} = 0,29775$
» $V^{1,0} = 0,60402 n$
<hr/>
» $V^{(2)} = 9,21473 n$
» $V^{-1,3} = 9,03749$
» $V^{1,1} = 9,34123$
<hr/>
» $V^{(3)} = 7,9563 n$
» $V^{-1,4} = 7,7802$
» $V^{1,2} = 7,5764$
<hr/> <hr/>
$\log W^{(0)} = 7,571$
» $W^{-1,1} = 6,571$
» $W^{1,-1} = 6,462$
<hr/>
» $W^{(1)} = 8,9106 n$
» $W^{-1,2} = 7,3542 n$
» $W^{1,0} = 8,6553 n$
<hr/>
» $W^{(2)} = 9,6912$
» $W^{-1,3} = 6,094 n$
» $W^{1,1} = 9,9942$
<hr/>
» $W^{(3)} = 8,4334$
» $W^{-1,4} = \text{---}$
» $W^{1,2} = 0,77487 n$
<hr/>

$$\begin{aligned} \log W^{(4)} &= 7,173 \\ & \text{» } W^{-1,5} = \text{---} \\ & \text{» } W^{1,3} = 9,5158 n \\ & \text{» } W^{(5)} = \text{---} \\ & \text{» } W^{-1,6} = \text{---} \\ & \text{» } W^{1,4} = 8,257 n \end{aligned}$$

60.

Demit und mit den Factoren, deren numerische Werthe im Art. 56 oben wurden, ergeben sich die folgenden numerischen Werthe der Coefficienten von G_0 nebst den hier erforderlichen Differentialquotienten von G_0 , nach den Ausdrücken des Art. 31.

g, g'	G_0 sin	R cos	Y sin	S sin	V cos	Z sin
4.						
-1,1,0	+1158,410		-314,60	-3503"		-3475"
0,1,0	-95.504		+25.94	+289		+286
-1,2,0	+31.775		-8.63	+96		-95
1,0,0	+95.504		-25.94	-289		-286
0,2,0	-2.620		+0.71	+8		+8
-1,3,0	+1.308		-0.36	-4		-4
1,1,0	0		0	0		0
0,3,0	-0.108		+0.03			
-1,4,0	+0.064		-0.02			
1,2,0	+0.004		0.00			
0,4,0	-0.005					
-1,5,0	+0.003					
1,3,0	0.000					
-3,-1	+0.003					
-2,-1	0.000					
-4,-1	-0.002					
-2,-1	+0.066		-0.02			
-1,-1	0		0.00			
-3,-1	-0.033		+0.01			
-1,-1	+2.406		-0.65	-7		-7
1,0,-1	-2.405		+0.65	+7		+7
-2,-1	-0.800		+0.22	+2		+2
0,0,-1	0		0.	0		0
1,1,-1	+29.175		-7.92	-88		-88
-1,-1	-29.175		+7.92	+88		+88
0,1,-1	-2.406		+0.65	+7		+7
1,2,-1	+0.800		-0.22	-2		-2
1,0,-1	+2.405		-0.65	-7		-7

1.						
0,2,-1	-0.066		+0.02			
-1,3,-1	+0.033		-0.04			
1,1,-1	0		0.00			
0,3,-1	-0.003					
-1,4,-1	+0.002					
1,2,-1	0.000					
0,-2,-2	+0.002					
-1,-1,-2	0					
1,-3,-2	-0.001					
0,-1,-2	+0.064		-0.02			
-1,0,-2	-0.064		+0.02			
1,-2,-2	-0.020		+0.01			
0,0,-2	0		0	0*		
-1,1,-2	+0.735		-0.20	-2		
1,-1,-2	-0.735		+0.20	+2		
0,1,-2	-0.064		+0.02			
-1,2,-2	+0.020		-0.01			
1,0,-2	+0.064		-0.02			
0,2,-2	-0.002					
-1,3,-2	+0.004					
1,1,-2	0					
0,-1,-3	+0.002					
-1,0,-3	-0.002					
1,-2,-3	0.000					
0,0,-3	0					
-1,1,-3	+0.018					
1,-1,-3	-0.018					
0,1,-3	-0.002					
-1,2,-3	0.000					
1,0,-3	+0.002					
2.						
0,0,-1	+0.200					
-1,1,-1	+0.011					
1,-1,-1	+0.011					
0,1,-1	-2.425	+0.22	+0.22	+2		+5
-1,2,-1	0	0	0	0		
1,0,-1	-2.425	+0.22	+0.22	+2		+5
0,2,-1	-0.067	+0.04	+0.04	0		
-1,3,-1	0	0	0	0		
1,1,-1	+29.403	-2.64	-2.64	-30		-30
0,3,-1	-0.003	0	0	0		
-1,4,-1	0	0	0	0		
1,2,-1	+0.807	-0.08	-0.08	-1		-1
0,4,-1	0					
-1,5,-1	0					
1,3,-1	+0.033					
0,-1,-2	+0.109					
-1,0,-2	+0.109					
1,-2,-2	-0.024					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 197

2.						
0,0,-2	-23'806	+2',14	+2',14	+24"		+24"
-1,1,-2	-1.322	+0.12	+0.12	+2		+2
1,-1,-2	-1.322	+0.12	+0.12	+2		+2
0,1,-2	+288.629	-25.96	-25.96	-291	+2"	-288
-1,2,-2	-0.036	0	0.	0	0	0
1,0,-2	+288.629	-25.96	-25.96	-291	+2	-288
0,2,-2	+7.917	-0.07	-0.07	-7	0	-7
-1,3,-2	-0.004	0	0	0	0	0
1,1,-2	-3499.572	+314.88	+314.88	+3535	-28	+3493
0,3,-2	+0.326	-0.03	-0.03	0	0	0
-1,4,-2	0	0	0	0	0	0
1,2,-2	-95.992	+8.64	+8.64	+97	-1	+95
0,4,-2	+0.046	0	0	0		0
-1,5,-2	0	0	0	0		0
1,3,-2	-3.950	+0.36	+0.36	+4		+4
0,5,-2	+0.001					
-1,6,-2	0					
1,4,-2	-0.193					
0,0,-3	-1.399	+0.13	+0.13			
-1,1,-3	-0.078	0	0			
1,-1,-3	-0.078	0	0			
0,1,-3	+16.965	-1.53	-1.53	-17		-17
-1,2,-3	-0.002	0	0	0		0
1,0,-3	+16.965	-1.53	-1.53	-17		-17
0,2,-3	+0.465	-0.04	-0.04	0		0
-1,3,-3	0	0	0	0		0
1,1,-3	-205.698	+18.49	+18.49	+207		+206
0,3,-3	+0.049	0	0	0		0
-1,4,-3	0	0	0	0		0
1,2,-3	-5.642	+0.50	+0.50	+5		+5
0,4,-3	+0.004					
-1,5,-3	0					
1,3,-3	-0.232					
0,5,-3	0					
-1,6,-3	0					
1,4,-3	-0.044					
0,0,-4	-0.057					
-1,1,-4	-0.003					
1,-1,-4	-0.003					
0,1,-4	+0.692					
-1,2,-4	0					
1,0,-4	+0.692					
0,2,-4	+0.019	0	0	0		0
-1,3,-4	0	0	0	0		0
1,1,-4	-8.389	+0.77	+0.77	+9		+9
0,3,-4	+0.004					
-1,4,-4	0					
1,2,-4	-0.230					

2.						
0,4,-4	0					
-1,5,-4	0					
1,3,-4	-0.009					
0,1,-5	+0.024					
-1,2,-5	0					
1,0,-5	+0.024					
0,2,-5	+0.004					
-1,3,-5	0					
1,1,-5	-0.292					
0,3,-5	0					
-1,4,-5	0					
1,2,-5	-0.008					
3.						
0,1,1	+0.029	+0.65	+0.65	-7"	+7"	+7"
-1,2,1	0	0	0	0	0	0
1,0,1	+0.029	+0.65	+0.65	-7	+7	+7
0,2,1	+0.004	+0.02	+0.02	0	0	0
-1,3,1	0	0	0	0	0	0
1,1,1	-0.356	-7.91	-7.91	+87	-87	-87
0,3,1	0	0	0	0	0	0
-1,4,1	0	0	0	0	0	0
1,2,1	-0.010	-0.23	-0.23	+3	-3	-3
0,0,0	-0.096	-2.15	-2.15	+24	-24	-24
-1,1,0	-0.005	-0.13	-0.13	+2	-2	-2
1,-1,0	-0.005	-0.13	-0.13	+2	-2	-2
0,1,0	+1.167	+25.94	+25.94	-288	+287	+287
-1,2,0	0	0	0	0	0	0
1,0,0	+1.167	+25.94	+25.94	-288	+287	+287
0,2,0	+0.032	+0.69	+0.69	-7	+7	+7
-1,3,0	0	0	0	0	0	0
1,1,0	-14.154	-314.64	-314.64	+3489	-3482	-3476
0,3,0	+0.004	0	0	0	0	0
-1,4,0	0	0	0	0	0	0
1,2,0	-0.388	-8.69	-8.69	+96	-96	-95
0,4,0	0	0	0	0	0	0
-1,4,0	0	0	0	0	0	0
1,3,0	-0.016	-0.35	-0.35	+4	-4	-4
0,1,-1	+0.029	+0.65	+0.65	-7	+7	+7
-1,2,-1	0	0	0	0	0	0
1,0,-1	+0.029	+0.65	+0.65	-7	+7	+7
0,2,-1	+0.004	+0.02	+0.02	0	0	0
-1,3,-1	0	0	0	0	0	0
1,1,-1	-0.356	-7.91	-7.91	+87	-87	-87
0,3,-1	0	0	0	0	0	0
-1,4,-1	0	0	0	0	0	0
1,2,-1	-0.010	-0.23	-0.23	+3	-3	-3

<u>4.</u>						
0, -1, 3	+0,034	+0,76	+0,76	-9"	+8"	+8"
-1, 0, 3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
1, -2, 3	-0.011	-0.25	-0.24	+3	-3	-3
0, 0, 3	0	0	0	0	0	0
-1, 1, 3	+0.415	+9.27	+9.23	-104	+103	+102
1, -1, 3	-0.415	-9.27	+9.23	+104	-103	-102
0, 1, 3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
-1, 2, 3	+0.011	+0.25	+0.24	-3	+3	+3
1, 0, 3	+0.034	+0.76	+0.76	-9	+8	+8
0, -2, 2	+0.016	+0.36	+0.36	-4	+4	+4
-1, -1, 2	0	0.00	0.00	0	0	0
1, -3, 2	-0.008	-0.18	-0.18	+2	-2	-2
0, -1, 2	+0.583	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
-1, 0, 2	-0.583	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
1, -2, 2	-0.194	-4.33	-4.31	+49	-48	-48
0, 0, 2	0	0	0	0	0	0
-1, 1, 2	+7.069	+157.76	+157.12	-1771	+1754	+1736
1, -1, 2	-7.069	-157.76	-157.12	+1771	-1754	-1736
0, 1, 2	-0.583	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
-1, 2, 2	+0.194	+4.33	+4.31	-49	+48	+48
1, 0, 2	+0.583	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
0, 2, 2	-0.016	-0.36	-0.36	+4	-4	-4
-1, 3, 2	+0.008	+0.18	+0.18	-2	+2	+2
1, 1, 2	0	0.00	0.00	0	0	0
0, -1, 1	-0.005	-0.11	-0.11			
-1, 0, 1	+0.005	+0.11	+0.11			
1, -2, 1	+0.002	+0.05	+0.05			
0, 0, 1	0	0	0	0	0	0
-1, 1, 1	-0.059	-1.33	-1.32	+15	-15	-15
1, -1, 1	+0.059	+1.33	+1.32	-15	+15	+15
0, 0, 1	+0.005	+0.11	+0.11			
-1, 2, 1	-0.002	-0.05	-0.05			
1, 0, 1	-0.005	-0.11	-0.11			
<u>5.</u>						
0, 0, 2	0	0	0			
-1, 3, 2	0	0	0			
1, 2, 2	-0.014	-0.62	-0.62			
<u>6.</u>						
0, 0, 0	+0.006					
-1, 1, 0	-0.006					
1, -1, 0	+0.004					
0, 1, 0	0					
-1, 2, 0	+0.036					
1, 0, 0	-0.072					
0, 2, 0	-0.003					
-1, 3, 0	+0.002					
1, 1, 0	+0.004					

6.					
0, -1, -1	-0.019				
-1, 0, -1	+0.014				
1, -2, -1	+0.003				
0, 0, -1	+0.351				
-1, 1, -1	-0.350				
1, -1, -1	+0.233				
0, 1, -1	+0.010	0.00	0.00		
-1, 2, -1	+2.111	-0.10	-1.06		
1, 0, -1	-1.274	+0.19	+2.14		
0, 2, -1	-0.174				
-1, 3, -1	+0.116				
1, 1, -1	+0.233				
0, 3, -1	-0.010				
-1, 4, -1	+0.006				
1, 2, -1	+0.004				
0, 0, -2	+0.018				
-1, 1, -2	-0.018				
1, -1, -2	+0.012				
0, 1, -2	0.000				
-1, 2, -2	+0.106				
1, 0, -2	-0.215				
0, 2, -2	-0.009				
-1, 3, -2	+0.006				
1, 1, -2	+0.012				
0, 1, -3	0.000				
-1, 2, -3	+0.004				
1, 0, -3	-0.008				
7.					
0, 1, -2	+0.002				
-1, 2, -2	0				
1, 0, -2	+0.001				
0, 2, -2	-0.015				
-1, 3, -2	0				
1, 1, -2	-0.030				
0, 3, -2	-0.001				
-1, 4, -2	0				
1, 2, -2	+0.180				
0, 4, -2	0				
-1, 5, -2	0				
1, 3, -2	+0.010				
0, 0, -3	+0.007				
-1, 1, -3	+0.001				
1, -1, -3	+0.001				
0, 1, -3	-0.147				
-1, 2, -3	-0.004				
1, 0, -3	-0.081				
0, 2, -3	+0.883	+0.12	-0.12		
-1, 3, -3	0	0	0		
1, 1, -3	+1.774	-0.24	-0.24		

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 201

7.						
0,3,-3	+0,049	0	0			
-1,4,-3	0	0	0			
1,2,-3	-10.706	+1,44	+1,44			
0,4,-3	+0,003	0	0			
-1,5,-3	0	0	0			
1,3,-3	-0.589	+0.08	+0.08			
0,5,-3	0					
-1,6,-3	0					
1,4,-3	-0.033					
0,1,-4	-0.042					
-1,2,-4	0					
1,0,-4	-0.007					
0,2,-4	+0.074					
-1,3,-4	0					
1,1,-4	+0.149					
0,3,-4	+0.004					
-1,4,-4	0					
1,2,-4	-0.899					
0,4,-4	0					
-1,5,-4	0					
1,3,-4	-0.050					
0,2,-5	+0.004					
-1,3,-5	0					
1,1,-5	+0.008					
0,3,-5	0					
-1,4,-5	0					
1,2,-5	-0.048					
8.						
0,0,1	+0.004					
-1,1,1	-0.004					
1,-1,1	+0.003					
0,1,1	0.000	0				
-1,2,1	+0.026	+0.60	+0.60			
1,0,1	-0.053	-1.18	-1.18			
9.						
0,3,-1	0	0	0			
-1,4,-1	0	0	0			
1,2,-1	-0.065	-1.42	-1.42			
10.						
0,1,-3	0	0				
-1,2,-3	+0.022	-0.50	+0.50			
1,0,-3	-0.044	+0.98	-0.98			

Ausserdem giebt der Ausdruck des Art. 34

$$G_0^{(8)} = + 0,008 \sin(-\gamma + g) + 0,005 \sin(-\gamma + 3g - 2g' + 2\omega - 2\alpha) \\ - 0,014 \sin(\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\alpha) \\ - 0,033 \sin(\gamma + 3g - 4g' + 4\omega - 4\alpha)$$

Da Σ_0 auf die einfachste Weise aus $a\Omega$ folgt und die Factor-
welche die Differentialquotienten von Σ_0 geben, dieselben sind wie
für T_0 und G_0 , so bekommen wir ohne Weiteres die folgenden num-
schen Werthe:

g, g'	Σ_0 sin	R cos	Y sin	S sin	V cos	Z sin
1.	= 0					
2.						
-1, -1	+0,004					
0, -1	-0,1111					
1, -1	+2,425	-0,22	-0,22	-2		-2
2, -1	-14,635	+1,32	+1,32	+15		+15
3, -1	-0,804	+0,07	+0,07	+1		+1
4, -1	-0,044					
5, -1	-0,003					
-2, -2	-0,001					
-1, -2	-0,085					
0, -2	+13,2249	-1,19	-1,19	-13		-13
1, -2	-288,592	+25,96	+25,96	+291	-2	+288
2, -2	+1741,871	-156,73	-156,73	-1760	+14	-1738
3, -2	+95,667	-8,61	-8,61	-97	+1	-95
4, -2	+5,250	-0,47	-0,47	-5		-5
5, -2	+0,300					
6, -2	+0,018					
-1, -3	-0,005					
0, -3	+0,7773					
1, -3	-16,963	+1,53	+1,53	+17		+17
2, -3	+102,384	-9,21	-9,21	-103		-102
3, -3	+5,623	-0,51	-0,51	-6		-6
4, -3	+0,309					
5, -3	+0,018					
0, -4	+0,032					
1, -4	-0,692					
2, -4	+4,175	-0,38	-0,38	-4		-4
3, -4	+0,229					
4, -4	+0,013					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 203

2.						
1,-5	-0,024					
2,-5	+0.145					
3,-5	+0.008					
3.						
2,2	+0.004					
0,1	+0.0013					
1,1	-0.029	-0,65	-0,65	+7"	-7"	-7"
2,1	+0.177	+3.94	+3.94	-44	+44	+44
3,1	+0.010	+0.22	+0.22	-2	+2	+2
0,0	+0.05348	+1.19	+1.19	-13	+13	+13
1,0	-1.167	-25.94	-25.94	+288	-287	-287
2,0	+7.045	+156.59	+156.59	-1737	+1734	+1730
3,0	+0.387	+8.60	+8.60	-95	+95	+95
4,0	+0.021	+0.47	+0.47	-5	+5	+5
0,-1	+0.0013					
1,-1	-0.029	-0.65	-0.65	+7	-7	-7
2,-1	+0.177	+3.94	+3.94	-44	+44	+44
3,-1	+0.010	+0.22	+0.22	-2	+2	+2
2,-2	+0.004					
4.						
	= 0					
5.						
2,2	+0.007	+0.32	+0.32			
6.						
0,0	-0.00246					
1,0	+0.018					
-1,-1	+0.004					
0,-1	-0.1466					
1,-1	+1.072	-0.05	-0.54			
2,-1	-0.029					
3,-1	-0.001					
0,-2	-0.0074					
1,-2	+0.054					
2,-2	-0.001					
1,-3	+0.002					
7.						
1,-2	-0.002					
2,-2	+0.022					
3,-2	-0.089					
4,-2	-0.007					
0,-3	-0.0042					
1,-3	+0.116					
2,-3	-1.327	+0.18	+0.18			
3,-3	+5.304	-0.72	-0.72			
4,-3	+0.439	-0.06	-0.06			
5,-3	+0.030					

7.						
1,-4	+0,010					
2,-4	-0.111					
3,-4	+0.445					
4,-4	+0.037					
2,-5	-0.006					
3,-5	+0.024					
8.						
0,1	-0.0018					
1,1	+0.013	+0,29	+0,29			
0,0	-0.00003					
9.						
3,-1	+0.032	+0.71	+0.71			
10.						
1,-3	+0.011	-0.25	+0.24			

63.

Verwandelt man nun die sich auf B_0 beziehenden Factoren Artt. 41 u. 49 in Zahlen, und fügt ihnen den Divisor $\sqrt{1-e^2} h$ so bekommt man die folgenden Logarithmen, welche zu denen der efficienten von $a\Omega$ addirt werden müssen, um die in den Ueberschlüssen genannten Functionen zu erhalten.

$a\Omega$	B_0	R	Y	S	V	Z
1	9.4336774	$-\infty$	0.47512	9.61123n	$-\infty$	0.08757n
2	8.9539129	0.00415	9.99714	9.43308n	6.8622n	9.43133n
3	1.3466736n	2.39166	2.38812n	1.05002	1.64770n	2.00057
4	1.3466736n	2.39342	2.38812n	1.04298	1.65033n	2.00057
5	1.64858n	3.1725	3.1719n	4.5205	4.5194	4.5182n
6	9.69910	9.7187	0.7360			
7	9.13000	0.1820	0.1721			
8	1.34462n	2.3884	2.3776n			
9	1.34579n	2.3890	2.3837n			
10	1.34579n	2.3926n	2.3837n			

Hiemit ergaben sich die folgenden Coefficienten.

g, g'	B_0 cos	R sin	Y cos	S cos	V sin	Z cos
1.						
0,0	+79,08488		+870,02	-119"		-356"
1,0	-8.644		-95.07	+13		+39
2,0	-0.119		-1.30			
3,0	-0.003		-0.04			
-2,-1	-0.003		-0.03			
-1,-1	-0.218		-2.39			
0,-1	+3.9836		+43.82	-6		-18
1,-1	-0.218		-2.39			
2,-1	-0.003		-0.03			
-1,-2	-0.005		-0.06			
0,-2	+0.1004		+1.10			
1,-2	-0.005		-0.06			
0,-3	+0.0025		+0.03			
2.						
0,-1	-0.0050	-0,06	-0.06			
1,-1	+0.109	+1.22	+1.20			
2,-1	-0.657	-7.38	-7.26	+2		+2
3,-1	-0.036	-0.40	-0.40			
4,-1	-0.002	-0.02	-0.02			
-1,-2	-0.004	-0.04	-0.04			
0,-2	+0.5937	+6.67	+6.56	-2		-2
1,-2	-12.957	-145.46	-143.13	+39		+39
2,-2	+78.207	+877.98	+863.92	-236		-235
3,-2	+4.295	+48.22	+47.44	-13		-13
4,-2	+0.235	+2.65	+2.60			
5,-2	+0.013	+0.15	+0.15			
0,-3	+0.0349	+0.39	+0.39			
1,-3	-0.762	-8.55	-8.41	+2		+2
2,-3	+4.597	+51.61	+50.78	-14		-14
3,-3	+0.252	+2.83	+2.79			
4,-3	+0.014	+0.16	+0.15			
1,-4	-0.031	-0.35	-0.34			
2,-4	+0.188	+2.10	+2.07			
3,-4	+0.010	+0.12	+0.11			
2,-5	+0.007	+0.07	+0.07			
3.						
1,2	+0.008					
2,2	-0.050	+0.55	-0.55			
3,2	-0.003					
0,1	-0.0149	+0.17	-0.16			
1,1	+0.326	-3.62	+3.59			
2,1	-1.968	+21.83	-21.65		-4"	+9
3,1	-0.108	+1.20	-1.19			
4,1	-0.006					

<u>3.</u>						
-1,0	+0.004					
0,0	-0.59324	+6.58	-6.53			
1,0	+12.946	-143.59	+142.42	-7"	+26"	-58"
2,0	-78.437	+866.64	-859.60	+39	-156	+352
3,0	-4.291	+47.60	-47.21	+2	-9	+19
4,0	-0.236	+2.61	-2.59			
5,0	-0.013					
0,-1	-0.0149	+0.17	-0.16			
1,-1	+0.326	-3.62	+3.59			
2,-1	-1.968	+21.83	-21.65		-4	+9
3,-1	-0.108	+1.20	-1.19			
4,-1	-0.006					
1,-2	+0.008					
2,-2	-0.050	+0.55	-0.55			
3,-2	-0.003					
<u>4.</u>						
-1,4	+0.010					
0,4	-0.489	+2.11	-2.08			
1,4	+0.010					
-2,3	+0.003					
-1,3	+0.254	-2.83	+2.79			
0,3	-4.6433	+51.71	-51.09	+2	-9	+21
1,3	+0.254	-2.83	+2.79			
2,3	+0.003					
-3,2	+0.002					
-2,2	+0.059	-0.66	+0.65			
-1,2	+4.316	-48.07	+47.48	-2	+9	-19
0,2	-78.9957	+879.74	-869.06	+39	-159	+356
1,2	+4.316	-48.07	+47.48	-2	+9	-19
2,2	+0.059	-0.66	+0.65			
3,2	+0.002					
-1,1	-0.036	+0.40	-0.40			
0,1	+0.6637	-7.39	+7.30		+1	-3
1,1	-0.036	+0.40	-0.40			
<u>5.</u>						
0,2	-0.0012					
1,2	+0.026	-0.87	+0.87	-19	-19	+19
2,2	-0.158	+5.28	-5.27	+118	+117	-117
3,2	-0.009	+0.29	-0.29	+6	+6	-6
<u>6.</u>						
0,0	-0.00123					
1,0	+0.009					
0,-1	-0.0732	-0.07	-0.80			
1,-1	+0.535	+0.56	+5.83			
2,-1	-0.015	-0.02	-0.16			
0,-2	-0.0037					
1,-2	+0.027	+0.03	+0.29			

+0,004 -0.004	-0,04	-0,04			
+0.005 -0.060 +0.238 +0.020	-0.67 +2.68 +0.22	-0.66 +2.62 +0.22			
-0.005 +0.020					
+0.0020 -0.015					
+0.0398 -0.291 +0.008	-0.44 +3.24 -0.09	+0.43 -3.14 +0.09			
+0.00067 -0.005					
+0.059 -0.238 -0.020	-0.66 +2.62 +0.22	+0.65 -2.59 -0.22			
+0.0333 -0.243 +0.007	+0.37 -2.70 +0.07	+0.36 -2.65 +0.07			

Ausdruck des Art. 44 für $B^{(3)}$ giebt

$$B_0^{(3)} = + 0,00095 - 0,0010 \cos (2g' + 2\omega')$$

icirt man den Ausdruck für $a\Omega^{(3)}$ des Art. 23 mit den Facto-
g auf B des Art. 49, so wird

$$R = \frac{4}{3} \mu^2 u^2 \sin (2g' + 2\omega')$$

$$Y = - \frac{4}{3} \mu^2 u^2 \cos (2g' + 2\omega')$$

len

$$R = + 0,010 \sin (2g' + 2\omega')$$

$$Y = - 0,010 \cos (2g' + 2\omega')$$

the weiter unten berücksichtigt werden sollen.

64.

Die Factoren der Artt. 44 und 50 zur Berechnung von dessen Differentialquotienten haben in Zahlen verwandelt die Logarithmen, von welchen auch der Logarithmus von $\sqrt{1-}$ abgezogen worden ist. Diese Zahlen sind daher die Logarith Factoren von $a\Omega$, wie oben.

$a\Omega$	C_0	R	Y	S	V
1	$-\infty$	0.48042n	$-\infty$	$-\infty$	9.61123
2	8.9539129	0.00415n	9.99714	9.43308n	6.8622
3	1.3466736n	2.39166n	2.38812n	1.05002	1.64770
4	1.3484281n	2.39867n	2.39342n	1.89362	1.34666n
5	1.64858n	3.1725n	3.1719n	4.5205	4.5194n
6	8.65288	0.7460n	9.6797		
7	9.13000	0.1820n	0.1721		
8	1.34755n	2.3973n	2.3867n		
9	1.34580n	2.3893n	2.3837n		
10	1.34931	2.4030n	2.3943		

Hiemit ergaben sich die folgenden Zahlenwerthe.

g, g'	C_0 sin	R cos	Y sin	S sin	V cos
1.					
0,0		-880,70			+119"
1,0		+96.23			-13
2,0		+1.32			
3,0		+0.04			
-2,-1		+0.03			
-1,-1		+2.42			
0,-1		-44.36			+6
1,-1		+2.42			
2,-1		+0.03			
-1,-2		+0.06			
0,-2		-1.12			
1,-2		+0.06			
0,-3		-0.03			
2.					
0,-1	-0,0050	+0.06	-0,06		
1,-1	+0.109	-1.22	+1.20		
2,-1	-0.657	+7.38	-7.26	+2"	
3,-1	-0.036	+0.40	-0.40		
4,-1	-0.002	+0.02	-0.02		

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 209

2.						
-1,-2	-0,004	+0,04	-0,04			
0,-2	+0.5937	-6.67	+6.56	-2"		-2"
1,-2	-12.957	+145.46	-143.13	+39		+39
2,-2	+78.207	-877.98	+863.92	-236		-235
3,-2	+4.295	-48.22	+47.44	-13		-13
4,-2	+0.235	-2.65	+2.60			
5,-2	+0.013	-0.15	+0.15			
0,-3	+0.0349	-0.39	+0.39			
1,-3	-0.762	+8.55	-8.41	+2		+2
2,-3	+4.597	-51.61	+50.78	-14		-14
3,-3	+0.252	-2.83	+2.79			
4,-3	+0.014	-0.16	+0.15			
1,-4	-0.031	+0.35	-0.34			
2,-4	+0.188	-2.10	+2.07			
3,-4	+0.010	-0.12	+0.11			
2,-5	+0.007	-0.07	+0.07			
3.						
1,2	+0.008					
2,2	-0.050	-0.55	-0.55			
3,2	-0.003					
0,1	-0.0149	-0.17	-0.16			
1,1	+0.326	+3.62	+3.59			
2,1	-1.968	-21.83	-21.65	+4"		+9
3,1	-0.108	-1.20	-1.19			
4,1	-0.006					
-1,0	+0.004					
0,0	-0.59324	-6.58	-6.53			
1,0	+12.946	+143.59	+142.42	-7	-26	-58
2,0	-78.137	-866.64	-859.60	+39	+156	+352
3,0	-4.291	-47.60	-47.21	+2	+9	+19
4,0	-0.236	-2.61	-2.59			
5,0	-0.013					
0,-1	-0.0149	-0.17	-0.16			
1,-1	+0.326	+3.62	+3.59			
2,-1	-1.968	-21.83	-21.65		+4	+9
3,-1	-0.108	-1.20	-1.19			
4,-1	-0.006					
1,-2	+0.008					
2,-2	-0.050	-0.55	-0.55			
3,-2	-0.003					
4.						
-1,4	+0.010					
0,4	-0.190	-2.13	-2.11			
1,4	+0.010					
-2,3	+0.004					
-1,3	+0.255	+2.86	+2.83			
0,3	-4.6621	-52.34	-51.71	+16	-5	+7
1,3	+0.255	+2.86	+2.83			
2,3	+0.004					

g, g'	$n\delta z$ sin	w cos	δP sin	δQ cos
<u>1.</u>	<u>$= 0\omega + 0\omega'$</u>			
0,0		-1348,840		+34,700
1,0	0	+85.881	-10,556	+2.630
2,0	-4,609	+5.830	-0.198	+0.138
3,0	-0.177	+0.311	-0.005	+0.004
4,0	-0.011	+0.020		
-3,-1	+0.030	+0.046		
-2,-1	+1.088	+1.123	+0.007	+0.004
-1,-1	+73.260	+38.600	+0.247	+0.071
0,-1	+657.520	+24.146	-48.721	+0.463
1,-1	+111.688	-51.632	-0.418	+0.182
2,-1	+1.215	-1.163	-0.007	+0.006
3,-1	+0.025	-0.041		
-2,-2	+0.007	+0.009		
-1,-2	+0.795	+0.450	+0.007	+0.003
0,-2	+7.330	+0.515	-0.597	+0.044
1,-2	+2.134	-0.926	-0.013	+0.007
2,-2	+0.036	-0.030		
-1,-3	+0.007	+0.004		
0,-3	+0.088	+0.007		
1,-3	+0.053	-0.023		
<u>2.</u>	<u>$= 2\omega - 2\omega'$</u>			
0,0	-0.130	+0.026	+0.002	-0.003
1,0	-2.476	+1.244		
2,0	-0.050	+0.045		
-1,-1	-0.092	-0.032		
0,-1	+3.699	+0.676	-0.089	-0.012
1,-1	-27.651	+13.951	+0.072	-0.097
2,-1	-23.004	+16.423	-0.529	+0.516
3,-1	-1.335	+1.297	-0.024	+0.024
4,-1	-0.066	+0.089		
-2,-2	-0.025	-0.029		
-1,-2	-1.881	-1.078	-0.003	-0.007
0,-2	-41.630	-51.619	-4.829	+4.887
1,-2	+4467.016	-2084.607	-15.842	+14.534
2,-2	+2145.014	-1521.761	+39.628	-40.580
3,-2	+60.018	-69.083	+1.459	-1.469
4,-2	+2.081	-3.391	+0.062	-0.061
5,-2	+0.084	-0.181		

Der Ausdruck des Art. 41 giebt

$$C_0^{(3)} = -0.0010 \sin(2g' + 2\omega')$$

welcher weiter unten berücksichtigt werden wird.

Ausser den in den vorhergehenden Tafeln angesetzten Differentialquotienten der Functionen T_0 , G_0 , Σ_0 , B_0 , C_0 werden noch die nach g , und später auch die nach γ gebraucht. Da aber g und γ explicite in den Argumenten vorkommen, und diese Differentialquotienten daher auf die einfachste Art aus den Functionen selbst erhalten werden, so habe ich nicht für nöthig gehalten sie mit anzuführen.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass die Coefficienten der vorhergehenden Tafeln, die mit mehr wie drei Decimalen angesetzt sind, diejenigen sind, die bei den Integrationen kleine Divisoren bekommen. Auf diesen Umstand muss auch in allen folgenden Rechnungen Rücksicht genommen werden.

§ 5. Berechnung der Producte, die in den vollständigen Ausdrücken enthalten sind.

65.

Im Vorhergehenden sind alle bekannten Glieder aufgestellt, die man zur genauen Berechnung der von der Sonne in der Bewegung des Mondes verursachten Störungen braucht, die noch erforderlichen Glieder sind Unbekannte; sie sind die Störungen selbst. Die Aufgabe ist transcendent, wie so viele andere. Zur Auflösung derselben sind die Unbekannten selbst erforderlich, und man kann sie entweder sogleich, aber mit unbestimmten Coefficienten versehen, einführen, oder man kann sie nach und nach, indem man von genäherten Werthen derselben ausgeht, durch eine Reihe von Annäherungen bestimmen. Den letzteren Weg habe ich, wie schon im Art. 42 angeführt ist, eingeschlagen.

Die genäherten Werthe erhält man, indem man die Differentialgleichungen mit bloßer Rücksicht auf die erste Potenz der störenden Kraft integrirt. Hier wurden daher, mit Weglassung alles Uebrigen, zuerst bloß die in den mit T_0 , B_0 , C_0 überschriebenen Columnen der Art. 57, 63 und 64 enthaltenen Zahlenwerthe in die Differentialgleichungen für nz , ν , P , Q substituirt, und die Integrationen ausgeführt. Die so erhaltenen Werthe der eben genannten Unbekannten, wozu noch

15.		$= 6\omega - 6\omega'$			
3,-5	-0.003	+0.001			
4,-5	-0.011	+0.009			
5,-5	-0.007	+0.006			
2,-6	+0.012	-0.003			
3,-6	+0.288	-0.182			
4,-6	+0.540	-0.397			
5,-6	+0.334	-0.277			
6,-6	+0.084	-0.079			
7,-6	+0.009	-0.014			
3,-7	+0.037	-0.023			
4,-7	+0.085	-0.063			
5,-7	+0.062	-0.049			
6,-7	+0.015	-0.015			
<hr/>					
3.	$= 2\omega$				
2.2			-0.018	+0.018	
0,1	+0.048	-0.008	-0.224	+0.243	
1,1	-0.353	+0.179	+0.364	-0.364	
2,1	+0.130	-0.094	-0.813	+0.813	
3,1	+0.002	-0.003	-0.025	+0.025	
-1,0	+0.072	+0.030			
0,0	+5.998	+1.122	-26.017	+25.759	
1,0	-84.906	+42.572	+12.848	-12.820	
2,0	+4.290	-2.824	-36.962	+36.960	
3,0	+0.085	-0.106	-1.385	+1.385	
4,0			-0.058	+0.058	
0,-1	-0.042	-0.006	+0.174	-0.174	
1,-1	+0.276	-0.142	+0.307	-0.307	
2,-1	+0.123	-0.094	-1.021	+1.021	
3,-1	+0.003	-0.003	-0.048	+0.048	
1,-2			+0.010	-0.010	
2,-2	+0.005	-0.003	-0.025	+0.025	
<hr/>					
4.	$= 2\omega'$				
-1,4			-0.015	+0.015	
0,4			-0.600	+0.600	
1,4			+0.008	-0.008	
-2,3	+0.010	+0.006			
-1,3	+0.544	+0.220	-0.337	+0.333	
0,3	-3.447	+0.382	-19.317	+19.441	
1,3	-0.169	+0.102	+0.314	-0.315	

+0.004	+0.005		
+0.158	+0.129	-0.031	+0.028
+10.993	+4.830	-4.755	+4.657
-81.610	+6.352	-484.180	+485.919
-4.700	+2.636	+5.636	-5.647
-0.074	+0.080	+0.095	-0.095
-0.005	-0.003		
-0.195	-0.090	+0.076	-0.076
+2.008	-0.085	+9.913	-9.958
-0.054	+0.028	+0.036	-0.036
+0.004	+0.004	+0.145	-0.147
$= 2\omega + 2\omega'$			
-0.008	+0.005	+0.010	-0.009
+0.005	-0.004	-0.055	+0.055
$= 4\omega - 2\omega'$			
+0.002	-0.002		
+0.006	-0.005		
+0.015	-0.008	-0.015	+0.015
-1.085	+0.629	+0.088	-0.088
-0.599	+0.442	-0.372	+0.370
+0.009	+0.005		
+0.002	-0.001		
-0.044	+0.026		
-0.041	+0.029	-0.030	+0.030
+0.002	-0.001		
$= 2\omega - 4\omega'$			
-0.029	+0.014		
-0.014	+0.012		
+0.034	-0.016	+0.417	+0.416
+0.193	-0.113	+0.775	+0.780
+0.236	-0.191	+0.543	+0.520
-0.064	+0.036		
-0.003	+0.004		
-0.027	+0.004		
+0.034	-0.024	+0.045	+0.070
+0.008	+0.004		
$= 6\omega - 4\omega'$			
-0.014	+0.010		
-0.019	+0.014		
-0.006	+0.005		

7.				
1,—4	—0,076	+0,037		
2,—4	—0.230	+0.140		
3,—4	+0.084	—0.072		
4,—4	+0.005	—0.005		
14.				
		= $5\omega - 5\omega'$		
3,—5	—0.052	+0.035		
4,—5	—0.002	+0.003		
5,—5	+0.008	—0.007		
8.				
		= $\omega + \omega'$		
0,1	+0.084	—0.018	+0,549	—0,549
1,1	+0.760	—0.412	{ —0.323	{ +0.324
			{ +3.204	{ —3.204
0,0			—0.016	+0.017
1,0	+0.083	—0.043		
9.				
		= $3\omega - \omega'$		
2,—1	—0.007	+0.004	+0.033	—0.033
3,—1	+0.008	—0.008	—0.069	+0.069
10.				
		= $\omega - 3\omega'$		
0,—3			—0.195	—0.204
1,—3	—0.295	+0.097	—0.325	—0.329

In der vorstehenden Tafel bei den Argumenten 1,—1 in 6, und 1,1 in 8 sind zwei Zahlenwerthe angegeben, von diesen ist der obere der Werth, der den im Vorhergehenden mit *B* und *C* bezeichneten Functionen angehört, der untere ist die aus den Werthen von dp' und dq' in δP und δQ wegen der Einwirkung des Mondes auf die Sonnenbreite entspringende Ungleichheit. Diese muss zwar, wie im Art. 38 erklärt wurde, bei der Berechnung der aus δP und δQ entstehenden Störungen höherer Ordnung mit hinzugezogen, aber schliesslich bei der Berechnung der Breitenstörungen des Mondes weggelassen werden.

67.

Ausser den im vor. Art. angegebenen Werthen von $n\delta z$ und w selbst werden zur Berechnung der Mondstörungen deren Quadrate und höhere Potenzen gebraucht; diese werde ich daher zunächst anführen. Es sind diese die ersten numerischen Producte, die zu berechnen sind, und die ich, gleichwie alle übrigen, auf die Art berechnet habe, die ich in früheren Abhandlungen ausführlich erklärt habe, und daher darauf verweise.

g, g'	$\frac{1}{2} (n\delta z)^2$ cos	$\frac{1}{6} (n\delta z)^3$ sin	$\frac{1}{24} (n\delta z)^4$ cos	w^2 cos	$2w^3$ cos	$4w^4$ cos
1.						
0,0	+30,397		+0,0015	+25,065	-0,740	+0,0
1,0	+23,463	-0,002	+0,0018	+15,342	-0,592	+0,0
2,0	+0,448		+0,0004	+1,050	-0,024	+0,0
3,0	+0,007			+0,057		
-2,-1	-0,001	+0,005		+0,032	+0,009	
-1,-1	+0,780	+0,048	+0,0001	+0,041	+0,044	
0,-1	+2,549	+0,106	+0,0002	+1,11285	-0,04127	+0,0
1,-1	+1,588	+0,053	+0,0002	+1,721	-0,073	+0,0
2,-1	+0,062	+0,007	+0,0004	+0,068	-0,012	
3,-1	+0,002			+0,003		
-2,-2	-0,009			+0,005		
-1,-2	-0,093	+0,002		+0,017		
0,-2	-0,477	+0,006		+0,0267	-0,0005	
1,-2	-0,114	+0,003		+0,045		
2,-2	-0,013	+0,001		+0,010		
0,-3	-0,008			+0,003		
1,-3	-0,002			+0,002		
2.						
0,1				-0,00042	+0,00001	
0,0	+0,022	-0,001		+0,00602	-0,00058	
1,0	+0,042	-0,006		-0,016		
2,0	+0,005	-0,003		-0,004		
3,0	-0,002					
-1,-1	-0,001			+0,025		
0,-1	+1,159	+0,007	+0,0003	+0,53033	-0,03614	+0,0
1,-1	+7,721	+0,015	+0,0007	-0,033	-0,032	
2,-1	+4,244	+0,008	+0,0005	-0,750	+0,008	
3,-1	+0,491	+0,001	+0,0004	-0,312	+0,006	
4,-1	+0,020			-0,021		
-2,-2	-0,002			-0,004		
-1,-2	-0,042	+0,001		-0,060	-0,023	
0,-2	+0,196	+0,126		-0,0743	-0,2585	+0,0
1,-2	+0,920	+0,396		+26,995	-1,203	+0,0
2,-2	+0,764	+0,291		+19,305	-0,984	+0,0
3,-2	+0,210	+0,069		+0,290	-0,215	+0,0
4,-2	+0,034	+0,003		-0,021	-0,021	
5,-2	+0,001			-0,003		
-1,-3	-0,004			-0,024		
0,-3	-0,720	+0,010	-0,0002	-0,405	-0,004	
1,-3	-7,435	+0,035	-0,0007	+0,634	-0,064	
2,-3	-4,572	+0,033	-0,0006	+1,734	-0,110	+0,0
3,-3	-0,671	+0,009	-0,0002	+0,421	-0,044	
4,-3	-0,022			+0,026		
0,-4	-0,039			-0,022		
1,-4	-0,425	-0,004		+0,001		
2,-4	-0,360	-0,002		+0,083	-0,003	
3,-4	-0,060			+0,037		
1,-5	-0,016					
2,-5	-0,018			+0,003		
3,-5	-0,003			+0,004		

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 221

14.						
2,-2	+0,025			-0,013		
3,-2	+0.010			-0.008		
1,-3	-0.034	+0,007		-0.006	-0,008	
2,-3	+0.338	+0.045		-0.149	-0.003	
3,-3	+0.459	+0.043		-0.279	+0.047	
4,-3	+0.162	+0.014		-0.148	+0.016	
5,-3	+0.043	+0.004		-0.048	+0.003	
0,-4	+0.020			+0.017		
1,-4	+0.456	+0.002	-0,0005	+0.529	-0.044	+0,004
2,-4	-23.947	+0.010	-0.0016	+11.126	-0.427	+0.023
3,-4	-23.184	+0.012	-0.0018	+15.714	-0.604	+0.031
4,-4	-6.211	+0.005	-0.0007	+6.441	-0.238	+0.014
5,-4	-0.355		-0.0004	+0.551	-0.042	+0.002
6,-4	-0.015			+0.039		
1,-5	+0.040	-0.004		+0.044	+0.006	
2,-5	-2.171	-0.042	-0.0002	+0.952	-0.023	
3,-5	-2.776	-0.042	-0.0002	+1.780	-0.068	+0.004
4,-5	-0.918	-0.016	-0.0001	+0.899	-0.043	+0.001
5,-5	-0.057	-0.002		+0.085	-0.005	
1,-6	+0.004					
2,-6	-0.126	-0.004		+0.051		
3,-6	-0.203	-0.005		+0.124	-0.004	
4,-6	-0.075	-0.002		+0.074		
5,-6	-0.002			+0.007		
2,-7	-0.006					
3,-7	-0.012			+0.006		
4,-7	-0.005			+0.005		
15.						
3,-5	+0.006	+0.002	-0.0002	-0.003	+0.002	
4,-5	+0.013	+0.003	-0.0002	-0.008	+0.005	
5,-5	+0.009	+0.002	-0.0004	-0.007	+0.004	
2,-6	-0.007	+0.002		+0.008	-0.008	
3,-6	-0.326	-0.086		+0.184	-0.124	+0.006
4,-6	-0.542	-0.125		+0.393	-0.253	+0.012
5,-6	-0.306	-0.064		+0.291	-0.192	+0.009
6,-6	-0.069	-0.013		+0.084	-0.059	+0.002
7,-6	-0.006	-0.004		+0.010	-0.006	
3,-7	-0.043	-0.012	+0.0004	+0.022	-0.045	
4,-7	-0.087	-0.020	+0.0002	+0.061	-0.038	
5,-7	-0.056	-0.012	+0.0004	+0.051	-0.033	
6,-7	-0.013	-0.002		+0.016	-0.010	
3.						
0,1	-0.04					
1,1	-0.40					
2,1	+0.04			+0.04		
0,0	-0.13			-0.04		
1,0	+0.87			-0.66		
2,0	+0.48			-0.06		
3,0	+0.04			-0.02		
0,-1	0.00					
1,-1	+0.14					
2,-1	+0.04			-0.04		

<u>4.</u>					
-1,3	-0.03			-0.02	
0,3	-0.17			-0.02	
1,3	-0.02				
-2,2	+0.02			-0.02	
-1,2	-0.38			-0.39	
0,2	-0.90			-0.53	
1,2	+0.06			-0.07	
0,1	+0.13				
1,1	+0.03				
<u>12.</u>					
1,-2	-0.07			-0.02	
2,-2	+0.90			-0.45	
3,-2	+0.40			-0.34	
2,-3	+0.04			-0.02	
<u>13.</u>					
1,-3	+0.03				
2,-3	+0.02				
1,-4	-0.94			-0.08	
2,-4	-0.31			-0.11	
3,-4	+0.04				
<u>6.</u>					
0,0	-0.04			-0.01	
1,0	-0.19			+0.12	
2,0	-0.02			+0.01	
-1,-1	-0.01			-0.03	
0,-1	-1.35			-0.60	
1,-1	-0.82			-1.19	
2,-1	-1.10			-0.02	
0,-2	+0.17			+0.08	
1,-2	+0.24			+0.04	
2,-2	+0.03			-0.01	
<u>7.</u>					
2,-2	-0.20			+0.09	
3,-2	-0.10			+0.06	
1,-3	+0.11			-0.03	
2,-3	+1.36			-0.62	
3,-3	+0.64			-0.43	
4,-3	+0.03			-0.03	
1,-4	+0.01				
2,-4	+0.07			-0.02	
3,-4	+0.05			-0.03	
<u>14.</u>					
3,-5	+0.05			-0.02	
4,-5	+0.03			-0.01	

Der Richtigkeit sowohl dieser wie der vorhergehenden und nachfolgenden Rechnungen habe ich mich durch Controllen, deren meine Methode viele, und schon früher erklärte, darbietet, versichert. Wer sich durch eigene Anschauung von der Richtigkeit derselben überzeugen will, braucht nur die Zahlenwerthe nachzurechnen. Das grösste der vorstehenden Producte erfordert zu seiner Berechnung eine Zeit von nur höchstens zwei bis drei Stunden. Aber auch einzelne Glieder dieser Producte kann man abgesondert von den übrigen nachrechnen. Schreibt man sich alle Glieder des einen Factors auf den oberen Rand eines Stück Papiers, und alle Glieder des andern Factors auf den unteren Rand eines andern Stück Papiers, und verwandelt zugleich die Glieder eines der beiden Factors in Theile des Kreisradius, so erkennt man auf den ersten Blick die Combinationen, die auf den Coefficienten, den man berechnen will, merklichen Einfluss haben. Ich werde von einigen Coefficienten von w^2 zur Erläuterung die einzelnen Glieder, aus welchen sie bei der Multiplication entstanden sind, anführen.

1.	1.	0, -1 in 1.	11.	11.	
0,0	0,-1	-0,31579	2,-3	2,-4	- 2
1,0	-1,-1	+ 1607	3,-3	3,-4	- 6
1,0	1,-1	- 2150	2,-4	2,-5	+ 12
2,0	-2,-1	+ 3	3,-4	3,-5	+ 37
2,0	2,-1	- 3	4,-4	4,-5	+ 5
-1,-1	-1,-2	+ 8			
0,-1	0,-2	+ 6			
1,-1	1,-2	+ 23			
2.	2.				
1,0	1,-1	+ 8			
0,-1	0,-2	- 17			
1,-1	1,-2	- 14099			
2,-1	2,-2	- 12116			
3,-1	3,-2	- 44			
0,-2	0,-3	+ 56			
1,-2	1,-3	+ 89666			
2,-2	2,-3	+ 79283			
3,-2	3,-3	+ 184			
1,-3	1,-4	+ 129			
2,-3	2,-4	+ 273			
3,-3	3,-4	+ 1			
					+ 1,11285

wie in der Tafel angeführt ist. Dieser Coefficient gehört zu denen, die aus vielen Gliedern bestehen, und es wären noch ein Paar kleine Glieder hinzugekommen, wenn ich die Combinationen, die die Abtheilungen 3 und 3, 4 und 4, 6 und 6 geben, hinzugezogen hätte. Da aber die Wirkung dieser Combinationen auf das Endresultat fast ganz verschwindet, so habe ich sie weggelassen. Ferner:

1.	2.	1.-2 in 2.	2.	2.	2.-4 in 11.
0,-1	1,-1	+0,002	1,-2	1,-2	+10,534
-1,-1	2,-1	+ 3	0,-2	2,-2	+ 381
1,0	0,-2	- 22	1,-1	1,-3	- 6
0,0	1,-2	+27,263	1.	11.	
1,0	2,-2	- 634	0,0	2,-4	+ 224
2,0	3,-2	- 2	1,0	3,-4	- 12
0,-1	1,-3	- 10	2.	15.	
1,-1	2,-3	+ 27	1,-2	3,-6	+ 2
2.	11.		2,-2	4,-6	+ 3
1,-2	2,-4	+ 173			+11,126
2,-2	3,-4	+ 190			
3,-2	4,-4	+ 3			
2,-3	3,-5	+ 2			
		+26,995			

mit der vorstehenden Tafel gleichlautend. Auf diese Art kann man so viele Glieder nachrechnen, wie man will.

Eine andere Frage von Wichtigkeit knüpft sich an die vorstehende Tafel. Wie man sieht bin ich bis zu $(ndz)^4$ und w^4 gegangen, und es fragt sich daher, ob diese Grenze zur genauen Berechnung der Mondstörungen ausreichend ist, oder ob nicht die höheren Potenzen von ndz und w Merkliches geben können? Um diese Frage zu erörtern, ist erstens zu erwägen, dass der grösste Coefficient in ndz , der der Evection, in Theilen des Kreisradius nahe $= \frac{1}{46}$ ist, das grösste Glied der einzelnen Theile, aus welchen $(ndz)^2$ besteht, ist also nahe $= \frac{1}{(46)^2}$, das grösste Glied in $(ndz)^3$ nahe $= \frac{1}{(46)^3}$, das grösste Glied in $(ndz)^4$ nahe $= \frac{1}{(46)^4}$, u. s. w. In w ist der grösste Coefficient nur ohngefähr halb so gross, und die Abnahme der grössten Glieder in w^2 , etc. also viel grösser. Die Potenzen von ndz und w , und nicht minder die von δP und δQ ,

können daher unter einander mit der Summe einer Anzahl von geometrischen Reihen verglichen werden, deren Exponenten sehr klein sind, und die daher eine bedeutende Convergenz besitzen. Wenn man daher eine gewisse Potenz von $n\delta z$ angeben kann, die nichts Merkliches hervorbringt, so kann man sicher sein, dass alle höheren Potenzen um so sehr nichts Merkliches geben können. Es wird nun in der Folge $n\delta z$ nur mit Functionen wie $\left(\frac{dT_0}{dg}\right)$ multiplicirt vorkommen, und da der grösste Coefficient in $\left(\frac{dT_0}{dg}\right)$ zufolge des Art. 57 = 10435", und der in $n\delta z = 4467''$ ist, so wird unter den einzelnen Theilen, aus welchen $\left(\frac{dT_0}{dg}\right)n\delta z$ besteht, das grösste Glied = 226", also sehr merklich. Es wird ferner $\frac{1}{2}(n\delta z)^2$ in der Folge nur mit Functionen wie $\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right)$ multiplicirt vorkommen, aber der grösste Coefficient in $\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right)$ ist = 20870", und der in $\frac{1}{2}(n\delta z)^2 = 30''$, das grösste Glied in $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2$ ist daher = 3", viel kleiner wie das vorherige. Ferner, der grösste Coefficient in $\left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right)$ ist = 46534", und der in $\frac{1}{6}(n\delta z)^3 = 0''45$, also das grösste Glied in $\frac{1}{6}\left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right)(n\delta z)^3 = 0''10$, schon sehr klein. Das grösste Glied in $\left(\frac{d^4T_0}{dg^4}\right)$ ist = 439604" und das grösste Glied in $\frac{1}{24}(n\delta z)^4 = 0''0018$, es wird daher das grösste Glied in $\frac{1}{24}\left(\frac{d^4T_0}{dg^4}\right)(n\delta z)^4 = 0''001$, welches für unmerklich zu erachten ist. Aus mehrerem Grunde kann w^4 , wo diese Function auf ähnliche Art eintritt, wie $(n\delta z)^4$ nur Unmerkliches geben. Aus diesem Grunde durfte ich in den folgenden Rechnungen bei $(n\delta z)^3$ stehen bleiben, und $(n\delta z)^4$ ist in der vorstehenden Tafel nur deshalb angesetzt worden, damit jeder deutlich erkennen könne, dass nichts Merkliches daraus hervorgeht. Mit w^4 verhält es sich etwas anders. Es tritt, wie man weiter unten sehen wird, auch in dem Gliede $\frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2$ des Ausdrucks (5) für dz auf, ohne mit einer Grösse erster Ordnung multiplicirt zu werden, wie stets mit $n\delta z$ und dessen Potenzen der Fall ist, es äussert daher *ceteris paribus* w^4 eben so grosse Wirkung auf das Endresultat wie $(n\delta z)^3$, mit anderen Worten, jede dieser beiden Functionen giebt im Endresultat Glieder von der vierten Ordnung in Bezug auf die störende Kraft. Es geht aus dieser Darlegung hervor, dass hiemit jede wünschenswerthe Genauigkeit erreicht wird, und die Glieder der fünf-

ten, und mehr noch die der höheren Ordnungen nur Unmerk vorbringen können.

68.

Zufolge der Entwicklungen des § 3 werden in der Folge Functionen ν , $2\nu + \nu^2$, $3\nu + 3\nu^2 + \nu^3$ gebraucht werden, die aus w und den Potenzen davon durch die folgenden Reihen werden müssen.

$$\begin{aligned}\nu &= w + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{4}w^3 + \frac{1}{8}w^4 \\ 2\nu + \nu^2 &= 2w + 2w^2 + \frac{1}{2}w^3 + \frac{3}{4}w^4 \\ 3\nu + 3\nu^2 + \nu^3 &= 3w + \frac{3}{2}w^2 + \frac{3}{2}w^3 + \frac{27}{8}w^4\end{aligned}$$

Diese Functionen sind in der folgenden Tafel zusammengeste

g, g'	ν cos	$2\nu + \nu^2$ cos	$3\nu + 3\nu^2 + \nu^3$ cos
<u>1.</u>			
0,0	-1336,369	-2648,040	-3935,43
1,0	+93.503	+202.058	+325.37
2,0	+6.353	+13.742	+22.16
3,0	+0.340	+0.736	+1.19
-3,-1	+0.046	+0.092	+0.14
-2,-1	+1.440	+2.316	+3.53
-1,-1	+38.622	+77.292	+116.04
0,-1	+24.699	+50.490	+77.36
1,-1	-50.777	-99.870	-147.32
2,-1	-1.130	-2.198	-3.13
3,-1	-0.039	-0.076	-0.11
-2,-2	+0.012	+0.028	+0.05
-1,-2	+0.459	+0.934	+1.43
0,-2	+0.528	+1.084	+1.67
1,-2	-0.903	-1.762	-2.58
2,-2	-0.025	-0.040	-0.05
0,-3	+0.009	+0.020	+0.04
1,-3	-0.022	-0.042	-0.06
<u>2.</u>			
0,0	+0.029	+0.064	+0.11
1,0	+1.236	+2.456	+3.66
2,0	+0.043	+0.082	+0.12
-1,-1	-0.019	-0.044	+0.02
0,-1	+0.938	+2.388	+4.33
1,-1	+13.931	+27.814	+44.63
2,-1	+16.049	+31.340	+45.91
3,-1	+1.141	+1.974	+2.50
4,-1	+0.078	+0.136	+0.17

<u>2.</u>			
-2,-2	-0,034	-0,066	-0,11
-4,-2	-1.110	-2.292	-3.56
0,-2	-54.678	-103.556	-155.76
1,-2	-2074.209	-4116.020	-6135.03
2,-2	-1542.190	-3005.562	-4480.59
3,-2	-68.956	-137.728	-206.42
4,-2	-3.404	-6.838	-10.31
5,-2	-0.183	-0.368	-0.56
<hr/>			
-1,-3	-0.078	-0.180	-0.31
0,-3	-2.424	-5.248	-8.49
1,-3	-88.409	-176.216	-263.45
2,-3	-106.606	-211.534	-314.84
3,-3	-5.298	-10.198	-14.72
4,-3	-0.289	-0.552	-0.79
<hr/>			
0,-4	-0.113	-0.248	-0.41
1,-4	-2.992	-5.984	-8.98
2,-4	-5.206	-10.332	-15.37
3,-4	-0.273	-0.510	-0.68
<hr/>			
1,-5	-0.096	-0.192	-0.29
2,-5	-0.217	-0.432	-0.64
<hr/>			
<u>11.</u>			
2,-2	+0.044	+0.040	
3,-2	+0.008	+0.008	
<hr/>			
1,-3	-0.020	-0.050	-0.15
2,-3	+0.128	+0.106	-0.07
3,-3	+0.303	+0.338	+0.11
4,-3	+0.122	+0.104	-0.05
5,-3	+0.016	+0.016	
<hr/>			
0,-4	+0.020	+0.056	+0.11
1,-4	-0.095	+0.332	+1.28
2,-4	-11.596	-12.274	-2.24
3,-4	-18.046	-20.614	-8.09
4,-4	-5.773	-5.252	+1.45
5,-4	-0.626	-0.708	-0.25
6,-4	-0.054	-0.070	
<hr/>			
1,-5	+0.002	+0.046	+0.14
2,-5	-1.028	-1.116	-0.27
3,-5	-2.076	-2.406	-1.02
4,-5	-0.790	-0.702	+0.24
5,-5	-0.089	-0.098	
<hr/>			
2,-6	-0.059	-0.068	
3,-6	-0.145	-0.168	-0.08
4,-6	-0.065	-0.056	
<hr/>			
<u>15.</u>			
3,-6	-0.100	-0.076	
4,-6	-0.224	-0.174	
5,-6	-0.147	-0.098	

3.			
1,1		+0.36	
2,1		-0.46	
0,0	-1.10	+2.16	
1,0	+12.24	+83.82	
2,0	-2.85	-5.77	
3,0		-0.25	
1,-1		-0.28	
2,-1		-0.21	
4.			
-1,3		+0.40	
0,3		+0.72	
1,3		+0.20	
-2,2		+0.22	
-1,2	+1.63	+8.88	
0,2	+6.08	+11.64	
1,2	+2.60	+5.13	
2,2		+0.16	
-1,1		-0.18	
0,1		-0.17	
1,1		+0.06	
12.			
2,-2		+0.36	
3,-2		+0.20	
13.			
1,-4		-0.38	
2,-4		-0.60	
6.			
-1,0		+0.28	
0,0		-0.58	-0.87
1,0		-17.22	-25.65
2,0		-0.48	-0.72
-1,-1		-0.70	
0,-1		+0.30	-0.45
1,-1		+141.52	+165.48
2,-1		+3.02	+4.50
3,-1		+0.11	
0,-2		+0.22	
1,-2		+0.58	
2,-2		+0.08	
7.			
2,-2		-0.14	
3,-2		-0.06	
1,-3		+1.02	
2,-3		+2.54	
3,-3		-2.02	
4,-3		-0.11	
2,-4		+0.24	
3,-4		-0.20	
8.			
1,1		-0.82	-1.23

69.

Wir brauchen ausserdem zur Berechnung der Störungen $\delta \frac{h^2}{h_0^2}$ und diese erhalten wir am Einfachsten, wenn wir zuerst $\delta \frac{h_0}{h}$, und Potenzen davon berechnen. Die Coefficienten von $\delta \frac{h_0}{h}$, die folgende Tafel giebt, habe ich auf zwei verschiedene Arten berechnet. Mit Ausnahme des constanten Gliedes, welches auf jeden Fall den Ausdruck (19) berechnet werden muss, habe ich die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 durch (18) berechnet, aber da die Zahlen, die zur Berechnung nöthig sind, auch anderweitig gebraucht werden, so habe ich sie erst weiter unten folgen. Die Abtheilungen 3, 4, etc. sind durch den Ausdruck (19) berechnet. Jene habe ich so genau wie möglich gerechnet, in dieser habe ich die Genauigkeit nicht so weit getrieben, sie sind indess für den Zweck, zu dem sie dienen sollen, hinreichend genau.

g, g'	$\delta \frac{h_0}{h}$ cos	$\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2$ cos	$2 \left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3$ cos
1.			
0,0	-966,852	+6,893	-0,108
1,0	-59,289	-0,622	+0,022
2,0	-2,130	-0,435	+0,013
3,0	-0,092	-0,017	
4,0	-0,004		
-3,-1	-0,004		
-2,-1	-0,059	-0,014	
-1,-1	-1,856	-0,045	+0,002
0,-1	-4,174	+0,292	-0,008
1,-1	-3,606	-0,036	+0,002
2,-1	-0,149	-0,029	
3,-1	-0,008		
-2,-2	-0,001		
-1,-2	-0,057	-0,004	
0,-2	-0,147	+0,011	
1,-2	-0,124	-0,003	
2,-2	-0,005	-0,004	
0,-3	-0,013		
1,-3	-0,005		
2.			
0,0	+0,0648		
1,0	-0,010		
2,0	-0,002		
3,0	-0,001		

<u>2.</u>			
-1,-1	+0.004	+0.002	
0,-1	+0.143	+0.007	
1,-1	+1.497	-0.018	
2,-1	-10.237	+0.080	+0.001
3,-1	-0.524		
4,-1	-0.028		
<hr/>			
-2,-2	+0.002		
-1,-2	+0.124	+0.029	
0,-2	-93.423	+0.959	-0.017
1,-2	-329.077	+2.880	-0.057
2,-2	+920.705	-8.550	+0.153
3,-2	+33.086	-0.577	+0.003
4,-2	+1.342	-0.034	-0.003
5,-2	+0.061		
6,-2	+0.003		
<hr/>			
-1,-3	+0.007		
0,-3	-3.068	+0.040	
1,-3	-20.671	+0.183	-0.004
2,-3	+59.596	-0.566	+0.011
3,-3	+2.340	-0.055	
4,-3	+0.104	-0.001	
5,-3	+0.005		
<hr/>			
0,-4	-0.094		
1,-4	-0.906	+0.008	
2,-4	+2.640	-0.026	
3,-4	+0.112	-0.002	
4,-4	+0.005		
<hr/>			
1,-5	-0.037		
2,-5	+0.098		
3,-5	+0.005		
<hr/>			
<u>11.</u>			
3,-2	-0.003		
<hr/>			
1,-3	-0.004		
2,-3	+0.018	+0.003	
3,-3	-0.128	+0.024	
4,-3	-0.042	-0.045	
5,-3	-0.005	-0.004	
<hr/>			
0,-4	0.000	+0.021	
1,-4	-0.080	+0.149	-0.003
2,-4	-0.621	-0.150	+0.003
3,-4	+7.463	-1.554	+0.042
4,-4	+1.967	+1.978	-0.056
5,-4	+0.185	+0.144	-0.004
6,-4	+0.015	+0.009	
<hr/>			
1,-5	-0.002	+0.014	
2,-5	-0.068	-0.008	
3,-5	+0.836	-0.196	+0.005
4,-5	+0.264	+0.257	-0.007
5,-5	+0.026	+0.020	
6,-5	+0.002		

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 234

11.			
2,-6	-0,005	+0,001	
3,-6	+0.057	-0.014	
4,-6	+0.021	+0.021	
5,-6	+0.001		
3,-7	+0.002		
4,-7	+0.001		
15.			
4,-5	-0.002		
5,-5	-0.001		
3,-6	-0.001	-0.002	
4,-6	+0.064	-0.016	+0,001
5,-6	+0.040	+0.030	-0.010
6,-6	+0.010	+0.010	+0.009
7,-6	+0.002		
4,-7	+0.011		
5,-7	+0.008	+0.006	
6,-7	+0.002		
3.			
2,1	+0.13		
0,0	+2.54	-0.02	
1,0	-3.21	+0.03	
2,0	+3.06	+0.03	
3,0	+0.10		
2,-1	+0.05		
4.			
0,3	-0.09		
-1,2	+0.03		
0,2	-1.27	+0.01	
1,2	-0.38		
12.			
2,-2	-1.72	+0.01	
3,-2	-1.47	+0.01	
4,-2	-0.08		
2,-3	-0.09		
3,-3	-0.10		
13.			
1,-4	+0.10		
2,-4	+0.19		
6.			
0,0	-0.53		
0,-1	+3.24	-0.03	
1,-1	+2.64	-0.02	
2,-1	-0.06		
1,-2	-0.06		
2,-2	-0.03		
7.			
2,-2	-0.01		
3,-2	-0.03		

7.			
1,-3	+0,18		
2,-3	-0.80		
3,-3	+1.67	-0,04	
4,-3	+0.14		
2,-4	-0.07		
3,-4	+0.17		

Zufolge der folgenden Ausdrücke des Art. 45

$$\delta \frac{h}{h_0} = -\delta \frac{h_0}{h} + \left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 - \left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3$$

$$(1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 = (2\nu+\nu^2) + \delta \frac{h}{h_0} + (2\nu+\nu^2) \delta \frac{h}{h_0}$$

$$(1+\nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 = (3\nu+3\nu^2+\nu^3) + \delta \frac{h}{h_0} + (3\nu+3\nu^2+\nu^3) \delta \frac{h}{h_0}$$

$$\delta \frac{h^2}{h_0^2} = -2\delta \frac{h_0}{h} + 3\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 - 4\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3$$

$$(1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 = (2\nu+\nu^2) + \delta \frac{h^2}{h_0^2} + (2\nu+\nu^2) \delta \frac{h^2}{h_0^2}$$

ergaben sich die folgenden Coefficienten

<i>g. g'</i>	$\delta \frac{h}{h_0}$ cos	$(1+\nu) \frac{h}{h_0} - 1$ cos	$(1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1$ cos	$\delta \frac{h^2}{h_0^2}$ cos	$(1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1$ cos
1.					
0,0	+973,799	-1683,24	-2975,1	+1954,595	-714,507
1,0	+58.656	+267.33	+394.1	+116.668	+332.013
2,0	+1.688	+15.29	+23.7	+2.929	+16.445
3,0	+0.073	+0.80	+1.3	+0.433	+0.864
-3,-1		+0.09		+0.002	+0.094
-2,-1	+0.048	+2.38	+3.5	+0.085	+2.443
-1,-1	+1.840	+79.66	+148.5	+3.573	+84.909
0,-1	+4.471	+55.71	+82.9	+9.242	+61.015
1,-1	+3.569	-96.44	-144.1	+7.100	-93.045
2,-1	+0.120	-2.12	-3.1	+0.241	-2.082
3,-1	+0.008	-0.07		+0.016	-0.062
-2,-2		+0.03		+0.002	+0.031
-1,-2	+0.053	+0.98	+1.5	+0.102	+1.057
0,-2	+0.158	+1.26	+1.9	+0.327	+1.461
1,-2	+0.121	-1.63	-2.5	+0.239	-1.524
2,-2	+0.004	-0.04		+0.007	-0.036
0,-3	+0.043	+0.03		+0.026	+0.049
1,-3	+0.005	-0.03		+0.010	-0.030
2.					
0,0	-0.065			-0.132	-0.071
1,0	+0.010	+2.48	+3.7	+0.020	+2.499
2,0	+0.002	+0.08		+0.004	+0.083
3,0	+0.004			+0.002	+0.002

2.					
-1,-1	-0,002	-0,003		-0,002	-0,070
0,-1	-0.106	+2.18	+4,0	-0.205	+2.018
1,-1	-1.515	+26.66	+40.6	-3.048	+25.524
2,-1	+10.346	+41.59	+56.1	+20.712	+51.902
3,-1	+0.524	+2.31	+2.7	+1.048	+2.661
4,-1	+0.028	+0.16	+0.2	+0.056	+0.168
-2,-2	-0.002	-0.07		-0.004	-0.064
-1,-2	-0.095	-2.37	-3.6	-0.161	-2.426
0,-2	+94.393	-11.31	-64.5	+189.757	+81.904
1,-2	+331.994	-3808.45	-5839.4	+666.908	-3498.150
2,-2	-929.347	-3937.58	-5443.9	-1867.366	-4878.180
3,-2	-33.665	-172.53	-244.8	-67.909	-207.895
4,-2	-1.376	-8.31	-11.7	-2.786	-9.813
5,-2	-0.064	-0.43	-0.7	-0.122	-0.501
6,-2	-0.003			-0.006	-0.006
-1,-3	-0.007	-0.17	-0.3	-0.014	-0.156
0,-3	+3.108	-2.17	-5.4	+6.256	+0.946
1,-3	+20.856	-156.69	-244.5	+41.899	-137.053
2,-3	-60.168	-272.21	-375.8	-120.912	-333.456
3,-3	-2.395	-12.48	-16.9	-4.845	-14.820
4,-3	-0.105	-0.65	-0.9	-0.211	-0.754
5,-3	-0.005			-0.010	-0.010
0,-4	+0.091	-0.16	-0.3	+0.182	-0.064
1,-4	+0.914	-5.12	-8.1	+1.836	-4.265
2,-4	-2.666	-13.03	-18.1	-5.358	-15.764
3,-4	-0.114	-0.61	-0.8	-0.230	-0.713
4,-4	-0.005			-0.010	-0.009
1,-5	+0.037	-0.15	-0.3	+0.074	-0.121
2,-5	-0.098	-0.53	-0.7	-0.196	-0.629
3,-5	-0.005			-0.010	-0.010
41.					
2,-2					+0.015
3,-2	+0.003			+0.006	+0.004
1,-3	+0.004	-0.04		+0.008	-0.023
2,-3	-0.015	+0.14		-0.027	+0.158
3,-3	+0.152	+0.37		+0.328	+0.403
4,-3	-0.003	-0.06		-0.051	-0.255
5,-3	+0.001	+0.02		-0.002	-0.015
0,-4	+0.021	+0.06		+0.063	+0.069
1,-4	+0.231	-0.46		+0.643	-1.113
2,-4	+0.469	-15.64	-7.2	+0.786	-19.194
3,-4	-9.038	-22.80	-6.9	-19.672	-26.513
4,-4	+0.039	+1.77	+11.9	+2.112	+10.804
5,-4	-0.039	-0.18	+0.6	+0.070	+0.490
6,-4	-0.006	-0.03		-0.018	-0.013
1,-5	+0.016	-0.04		+0.046	-0.071
2,-5	+0.060	-1.45	-0.8	+0.112	-1.813
3,-5	-1.035	-2.77	-1.0	-2.270	-3.320
4,-5	-0.003	+0.34	+1.6	+0.257	+1.434
5,-5	-0.006	-0.03	-0.2	+0.008	+0.069
6,-5	-0.002			-0.004	+0.007

<u>11.</u>					
2,-6	+0.006	-0.09		+0.013	-0.1
3,-6	-0.071	-0.20		-0.156	-0.2
4,-6	0.000			+0.021	+0.1
5,-6	-0.004			-0.002	+0.0
3,-7				-0.004	-0.0
4,-7				-0.002	+0.0
<u>15.</u>					
3,-6		-0.09		-0.004	-0.1
4,-6	-0.08	-0.15		-0.178	-0.1
5,-6	-0.02			+0.030	+0.1
<u>3.</u>					
2,1	-0.13	-0.29			
0,0	-2.53	-0.42			
1,0	+3.24	+87.34			
2,0	-3.03	-8.83			
3,0	-0.10	-0.35			
2,-1	-0.05	-0.26			
<u>4.</u>					
0,3	+0.09	+0.81			
-2,2		+0.22			
-1,2	-0.03	+8.71			
0,2	+1.28	+13.00			
1,2	+0.38	+5.58			
-1,1		-0.18			
0,1		-0.17			
<u>12.</u>					
2,-2	+1.73	+2.13			
3,-2	+1.48	+1.48			
4,-2	+0.08				
2,-3	+0.09				
3,-3	+0.10				
<u>13.</u>					
1,-4	-0.10	-0.48			
2,-4	-0.19	-0.79			
<u>6.</u>					
0,0	+0.53	-0.05	-0.34		
1,0		-17.30	-25.65		
2,0		-0.48	-0.72		
-1,-1		-0.70			
0,-1	-3.27	-2.82	-3.72		
1,-1	-2.66	+109.22	+162.82		
2,-1	+0.06	+3.14	+4.56		
1,-2	+0.06	+0.68			
2,-2	+0.03	+0.11			
<u>7.</u>					
2,-2	+0.04	-0.14			
3,-2	+0.03	+0.01			

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 235

7.					
1,-3	-0,18	+0,90			
2,-3	+0.80	+3.48			
3,-3	-1.68	-3.92			
4,-3	-0.11	-0.24			
2,-4	+0.07	+0.31			
3,-4	-0.17	-0.37			
8.					
1,1		-0.82	-1,23		

In den vorhergehenden Functionen und Producten sind stets mehr Glieder angesetzt, wie unumgänglich nöthig. Die Angabe der kleineren Glieder dient um zu erkennen zu geben, dass sie in der That auf die Producte nur unmerklichen Einfluss äussern.

70.

Im Vorhergehenden sind alle Hilfsfunctionen enthalten, die für die Störungen, deren Berechnung in dieser Abhandlung dargelegt werden soll, erforderlich sind, und wir können nun an die Berechnung der für diese erforderlichen Producte gehen. Zuerst werde ich die Berechnung von \bar{T} nach dem Ausdruck (20) vornehmen, und davon den Anfang mit den von δP und δQ abhängigen Gliedern machen. Aus den oben gegebenen numerischen Werthen der Coefficienten der betreffenden Factoren fand sich:

Für T^*)

γ, g, g'	S sin	S_1 sin	L sin	V cos	V_1 cos	M cos
4.						
-1,1,0	-3503"	+7"	-3496"			
0,1,0	+289	+123	+412			
-1,2,0	-96	-61	-157			
1,0,0	-289	-62	-351			
0,2,0	+8	+14	+22			
	-4	-8	-12			
	0	-4	-4			
0,-1,-1	-7	-5	-12			
	+7	+3	+10			
	+2	+3	+5			

*) Um Raum zu gewinnen ist hier

$$S_1 = \left(\frac{dS}{dg}\right) n \delta z, \quad V_1 = \left(\frac{dV}{dg}\right) n \delta z$$

esetzt worden.

<u>1.</u>						
0,0,-1	0"	-1"	-1"			
	-88	-6	-94			
	+88	-6	+82			
0,1,-1	+7	+7	+14			
	-2	-3	-5			
	-7	-3	-10			
<u>2.</u>						
0,2,-1	+44	+20	+64			
	-45	-10	-25			
	-45	-10	-55			
0,0,-2	0	+3	+3			
	+15	0	+15			
	+5	-2	+3			
0,1,-2	+437	+2	+439			
	-290	-38	-328			
	-486	-39	-525			
0,2,-2	-5270	+5	-5265	+42"	+2"	+44"
	+1744	-24	+1720	-14	-1	-15
	+5296	-19	+5277	-43	-1	-44
0,3,-2	-434	+2	-432			
	+192	-1	+191			
	+194	0	+194			
0,4,-2	-32		-32			
	+17		+17			
	+9		+9			
0,1,-3	+26	-2	+24			
	-17	-1	-18			
	-29	-1	-30			
0,2,-3	-340	-18	-328			
	+102	+8	+110			
	+344	+8	+349			
0,3,-3	-26	-5	-34			
	+11	+2	+13			
	+11	+2	+13			
<u>4.</u>						
0,3,-4		-112	-112			
		+54	+54			
		+57	+57			
0,4,-4		-69	-69			
		+35	+35			
		+34	+34			
<u>3.</u>						
0,2,1	-134	+17	-144	+131	-17	+144
	+44	-8	+36	-44	+8	-36
	+134	-8	+123	-134	+8	-123
0,1,0	+434	0	+434	-430	0	-430
	-286	-19	-305	+286	+19	+305
	-480	-19	-499	+479	+19	+498

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 237

3.						
0,2,0	-5202"	+4"	-5498"	+5494"	-2"	+5489"
	+1718	-11	+1707	-1715	+10	-1705
	+5229	-10	+5219	-5218	+9	-5209
0,3,0	-429		-429	+428		+428
	+190		+190	-189		-189
	+194		+194	-194		-194
0,4,0	-34		-34	+34		+34
	+16		+16	-16		-16
	+9		+9	-9		-9
2,-1	-134	-17	-148	+134	+17	+148
	+44	+8	+52	-44	-8	-52
	+134	+8	+139	-134	-8	-139
4.						
0,0,3	0	+4	+4	0	-4	-4
	-104	-2	-106	+103	+2	+105
	+104	-2	+102	-103	+2	-104
-1,2	-146	+2	-144	+145	-2	+143
	+146	-1	+145	-145	+1	-144
	+49	-1	+48	-48	+1	-47
0,0,2	0	+49	+49	0	-49	-49
	-1774	-24	-1792	+1754	+24	+1775
	+1774	-27	+1744	-1754	+27	-1727
0,1,2	+146	+120	+266	-145	-120	-265
	-49	-60	-109	+48	+60	+108
	-146	-58	-204	+145	+58	+203
12.						
3,-2		-110	-110		+112	+112
		+52	+52		-53	-53
		+55	+55		-56	-56
4,-2		-68	-68		+68	+68
		+35	+35		-35	-35
		+34	+34		-34	-34

Für T^*)

γ, g, g'	Z sin	Z_1 sin	O sin
4.			
-1,4,0	-3475"	+6"	-3469"
0,4,0	+286	+122	+408
-1,2,0	-95	-60	-155
4,0,0	-286	-64	-347

Hier ist wieder

$$Z_1 = \left(\frac{dZ}{dg} \right) ndz$$

<u>1.</u>			
0,2,0	+8"	+14"	+22"
	-4	-8	-12
	0	-4	-4
0,-1,-1	-7	-5	-12
	+7	+2	+9
	+2	+2	+4
0,0,-1	0	-1	-1
	-88	-6	-94
	+88	-6	+82
0,1,-1	+7	+7	+14
	-2	-3	-5
	-7	-3	-10
<u>2.</u>			
0,2,-1	+44	+17	+64
	-15	-8	-23
	-45	-8	-53
0,0,-2	0	+3	+3
	+15	0	+15
	+5	-2	+3
0,1,-2	+434	+2	+433
	-287	-38	-325
	-480	-39	-519
0,2,-2	-2508	+5	-5203
	+1720	-21	+1699
	+5234	-19	+5215
0,3,-2	-429	+2	-427
	+190	-1	+189
	+194	0	+194
0,4,-2	-31		-31
	+16		+16
	+9		+9
0,1,-3	+25	-2	+23
	-17	-1	-18
	-28	-1	-29
0,2,-3	-306	-17	-323
	+104	+7	+108
	+308	+7	+315
0,3,-3	-25	-5	-30
	+11	+2	+13
	+11	+2	+13
<u>11.</u>			
0,3,-4		-111	-111
		+53	+53
		+56	+56
0,4,-4		-68	-68
		+35	+35
		+31	+31

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 239

3.			
0,2,1	+131" -44 -134	-17" +8 +8	+114" -36 -123
0,1,0	-429 +285 +478	0 +19 +19	-429 +304 +497
0,2,0	+5184 -1714 -5208	0 +9 +8	+5184 -1702 -5200
0,3,0	+427 -189 -190		+427 -189 -190
0,4,0	+34 -16 -9		+34 -16 -9
0,2,-1	+134 -44 -134	+17 -8 -8	+148 -52 -139
4.			
0,0,3	0 +102 -102	-4 +2 +2	-4 +104 -100
0,-1,2	+143 -143 -48	-2 +1 +1	+144 -142 -47
0,0,2	0 +1736 -1736	-49 +21 +27	-49 +1757 -1709
0,1,2	-143 +48 +143	-119 +60 +58	-262 +108 +201
12.			
0,3,-2		+112 -54 -57	+112 -54 -57
0,4,-2		+69 -35 -34	+69 -35 -34

habe ich, mit Ausnahme der beiden ersten Abtheilungen, in jeder Abtheilung nur das erste Argument angesetzt, da die beiden anderen Argumente daraus nach der unveränderlichen Regel folgen, dass zu

$$ig - i'g' + \dots$$

die beiden folgenden

$$- \gamma + (i+1)g - i'g' + \dots$$

$$+ \gamma + (i-1)g - i'g' + \dots$$

n. Ich werde fortfahren, diese beiden wegzulassen.

71.

Wir erhalten nun weiter

für T^*)

γ, g, g'	R COS	R_1 COS	R_2 COS	$\frac{1}{2}L\delta P$ COS	$M\delta Q$ COS	H COS
1.						
0,0,0		+4,50		-0,05	+0,44	+4,86
-1,1,0		-4,28		+0,07	-0,56	-4,77
0,1,0		+10,93		-0,07	-0,31	+10,55
-1,2,0		-5,58		+0,08	+0,18	-5,32
1,0,0		-5,20		+0,06	+0,22	-4,92
0,2,0		+1,25		+0,21	+0,32	+1,78
		-0,74		-0,07	-0,11	-0,92
		-0,35		-0,20	-0,32	-0,87
0,3,0		+0,12		+0,02	+0,03	+0,17
		-0,08		-0,04	-0,01	-0,10
		-0,03		-0,04	-0,04	-0,05
0,-1,-1		+0,39	-0,03	-0,03		+0,33
		-0,18	+0,01	+0,02		-0,15
		-0,21	+0,03	+0,01		-0,17
0,0,-1		+0,50	0,00	-0,03		+0,47
		-0,24	-0,04	-0,19		-0,44
		-0,26	+0,02	+0,23		-0,04
0,1,-1		+0,57	+0,04	+0,03		+0,62
		-0,29	-0,03	-0,04		-0,33
		-0,26	-0,04	-0,02		-0,29
0,2,-1		+0,07				+0,07
		-0,04				-0,04
		-0,02				-0,02
0,0,-2		+0,02				+0,02
		-0,01				-0,01
		-0,01				-0,01
2.						
0,1,-1	-0,33	+0,19		-0,03		-0,17
	+0,22	-0,05		+0,02		+0,19
	+0,36	-0,13		+0,03		+0,26
0,2,-1	+3,94	+1,53		+0,32	+0,01	+5,80
	-1,30	-0,76		-0,10	0,00	-2,16
	-3,96	-0,76		-0,32	-0,02	-5,06
0,3,-1	+0,32	+0,35		+0,03		+0,70
	-0,14	-0,19		-0,01		-0,34
	-0,15	-0,14		-0,01		-0,30
0,0,-2	0	+0,07	-0,13	-0,01	0,00	-0,07
	+1,34	-0,03	+0,03	-0,07	-0,11	+1,43
	+0,42	-0,03	+0,10	+0,08	+0,11	+0,68

*) Hier ist $R_1 = \left(\frac{dR}{dg}\right) n\delta z$; $R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2R}{dg^2}\right) (n\delta z)^2$

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 241

2.						
-2	+38,90	+0,08	0,00	-0,21	-0,59	+38,18
	-25.86	-0.04	-0.05	+0.13	+0.45	-25.34
	-43.28	-0.04	+0.05	+0.28	+0.63	-42.33
-2	-169.47	+0.29	+0.27	+3.08	+6.10	-159.73
	+155.08	-0.14	-0.22	-0.93	-2.16	+151.63
	+471.85	-0.14	-0.05	-3.17	-5.96	+462.53
-2	-38.67		+0.16	+0.20	+0.56	-37.73
	+17.09		-0.12	-0.03	-0.24	+16.70
	+17.26		-0.04	-0.12	-0.28	+16.82
-2	-2.83		+0.02	+0.02	+0.04	-2.75
	+1.47		-0.02	-0.01	-0.02	+1.42
	+0.83		-0.00	-0.01	-0.01	+0.84
-3	+2.29	-0.11		+0.02	-0.02	+2.18
	-1.52	0.00		-0.02	+0.01	-1.53
	-2.54	+0.08		-0.02	+0.02	-2.46
-3	-27.59	-1.52	+0.02	-0.11	+0.44	-28.79
	+9.12	+0.75	-0.01	+0.04	-0.14	+9.76
	+27.72	+0.76	0.00	+0.10	-0.10	+28.18
-3	-2.27	-0.43		-0.02	+0.02	-2.70
	+1.00	+0.24		+0.04	-0.04	+1.24
	+1.04	+0.19		+0.01	-0.01	+1.20
-4	-1.13	-0.11		-0.02		-1.26
	+0.37	+0.05		+0.01		+0.43
	+1.13	+0.05		+0.01		+1.19
1.						
-3		+0.15	+0.04			+0.19
		-0.07	-0.03			-0.10
		-0.07	-0.01			-0.08
-3		+0.09	+0.02			+0.11
		-0.05	-0.01			-0.06
		-0.05	0.00			-0.05
-4		+0.51				+0.51
		-0.60				-0.60
		-0.04				-0.04
-4		-9.97		+0.07	+0.13	-9.77
		+4.77		-0.03	-0.06	+4.68
		+5.11		-0.03	-0.07	+5.01
-4		-6.11		+0.04	+0.08	-6.02
		+3.16		-0.02	-0.04	+3.10
		+2.83		-0.02	-0.04	+2.77
-4		-0.86				-0.86
		+0.51				+0.51
		+0.28				+0.28
3,-5		-1.03	-0.03			-1.06
		+0.18	+0.03			+0.51
		+0.53	+0.01			+0.54
1,-5		-0.77	-0.02			-0.79
		+0.39	+0.02			+0.41
		+0.36	0.00			+0.36

<u>3.</u>						
0,1,1	-0.98 +0.64 +1.09	-0.49 +0.15 +0.23		-0.02 +0.01 +0.02		-1.19 +0.80 +1.34
0,2,1	+11.82 -3.93 -11.85	-1.53 +0.81 +0.81		+0.22 -0.06 -0.21	+0.02 -0.01 -0.02	+10.53 -3.19 -11.27
0,3,1	+0.98 -0.42 -0.45	-0.35 +0.19 +0.14		+0.02 -0.01 -0.01		+0.65 -0.22 -0.32
0,0,0	0 -1.31 -0.42	-0.14 -0.02 +0.07		0.00 -0.12 +0.12	0.00 +0.02 -0.02	-0.14 -1.43 -0.25
0,1,0	-38.85 +25.83 +43.25	-0.09 +1.72 +1.77	-0.11 +0.08 +0.03	+0.28 -0.17 -0.36	-0.05 +0.11 -0.17	-38.82 +27.57 +44.52
0,2,0	+469.04 -154.92 -471.45	+0.05 +0.82 +0.73	-0.30 +0.23 +0.07	-3.08 +0.93 +3.15	+0.99 -0.50 -0.82	+466.70 -153.44 -468.32
0,3,0	+38.65 -17.09 -17.23	-0.05 +0.06 +0.01	-0.16 +0.12 +0.04	-0.28 +0.12 +0.14	+0.14 -0.05 -0.08	+38.30 -16.84 -17.12
0,4,0	+2.82 -1.47 -0.82		-0.02 +0.02 0.00	-0.02 +0.01 +0.01		+2.78 -1.44 -0.81
0,1,-1	-0.98 +0.64 +1.09	+0.11 +0.07 -0.01		+0.04 -0.03 -0.05		-0.83 +0.68 +1.03
0,2,-1	+11.82 -3.93 -11.85	+1.51 -0.68 -0.70		-0.43 +0.15 +0.43	+0.02 -0.01 -0.02	+12.92 -4.47 -12.14
0,3,-1	+0.98 -0.42 -0.45	+0.43 -0.24 -0.19		-0.05 +0.02 +0.02		+1.36 -0.64 -0.62
<u>4.</u>						
0,-1,3	+0.76 -0.76 -0.25	+0.03 -0.06 -0.05				+0.79 -0.82 -0.30
0,0,3	0 +9.27 -9.27	-0.45 -0.03 -0.01	+0.02 -0.02 0.00	0.00 -0.04 +0.04	-0.03 +0.03 +0.01	-0.46 +9.21 -9.23
0,1,3	-0.76 +0.25 +0.76	-0.72 +0.34 +0.33	+0.03 -0.03 -0.01			-1.45 +0.56 +1.08
0,-2,2	+0.36 0.00 -0.18	-0.02 +0.04 +0.01		+0.15 -0.17 -0.05		+0.49 -0.16 -0.22
0,-1,2	+13.04 -13.04 -4.33	-0.13 -0.10 +0.17		-0.32 +0.29 -0.07	+0.04 -0.04 -0.04	+12.60 -12.86 -4.27

<u>6.</u>						
0,1,-1	-0,14	-0,25				-0,39
	-0.05	+0.13				+0.08
	+0.24	+0.12				+0.36
<u>7.</u>						
0,2,-3	+0.36	+0.03				+0.39
	-0.18	-0.01				-0.19
	-0.38	-0.01				-0.39
0,3,-3	-2.14	+0.28				-1.86
	+0.70	-0.14				+0.56
	+2.16	-0.14				+2.02
<u>8.</u>						
0,4,4	+0.87	-0.34				+0.56
	+0.34	+0.10				+0.44
	-1.47	+0.11				-1.36
<u>9.</u>						
0,3,-1	+2.13	+0.28				+2.41
	-0.74	-0.14				-0.85
	-2.13	-0.14				-2.27
<u>10.</u>						
0,1,-3	-0.74	0.00				-0.74
	-0.25	+0.05				-0.20
	+1.23	+0.05				+1.28

der

für T^*)

γ, g, g'	Y sin	Y_1 sin	Y_2 sin	$\frac{1}{2} \delta \delta Q$ sin	N sin
<u>4.</u>					
-1,1,0	-344,60	+0,58		+2,08	-341,94
0,1,0	+25.94	+11.05		-0.32	+36.67
-1,2,0	-8.63	-5.43		+0.10	-13.96
1,0,0	-25.94	-5.60		+0.32	-31.22
0,2,0	+0.74	+1.25		+0.12	+2.08
	-0.36	-0.74		-0.04	-1.14
	0.00	-0.35		-0.13	-0.48
0,3,0	+0.03	+0.12		+0.02	+0.17
	-0.02	-0.08		-0.01	-0.11
	0.00	-0.03		-0.01	-0.04
0,-1,-1	-0.65	-0.37	+0,03		-0.99
	+0.65	+0.15	-0.01		+0.79
	+0.22	+0.12	-0.03		+0.31

*) S die obigen Anmerkungen.

<u>3.</u>					
0,1,-1	-0.98	+0.11		+0.02	-0.85
	+0.64	+0.07		-0.01	+0.70
	+1.09	-0.04		-0.02	+1.06
0,2,-1	+11.82	+1.51		-0.12	+13.21
	-3.93	-0.69		+0.05	-4.5
	-11.85	-0.70		+0.12	-12.4
0,3,-1	+0.98	+0.43		-0.02	+1.3
	-0.42	-0.24		+0.01	-0.6
	-0.45	-0.19		+0.04	-0.6
<u>4.</u>					
0,-1,3	+0.76	+0.03		-0.04	+0.7
	-0.76	-0.06		+0.04	-0.8
	-0.24	-0.05		0.00	-0.2
0,0,3	0	-0.45	+0.02	0.00	-0.4
	+9.23	-0.04	-0.02	-0.14	+9.0
	-9.23	-0.04	0.00	+0.14	-9.1
0,1,3	-0.76	-0.72	+0.03	+0.04	-1.4
	+0.24	+0.34	-0.03	0.00	+0.5
	+0.76	+0.34	-0.04	-0.04	+1.0
0,-2,2	+0.36	+0.02		+0.15	+0.5
	0.00	-0.04		-0.17	-0.1
	-0.18	-0.04		-0.05	-0.2
0,-1,2	+12.96	+0.25		-0.30	+12.9
	-12.96	-0.29		+0.25	-13.0
	-4.31	-0.02		+0.12	-4.2
0,0,2	0	-4.48		-0.03	-4.5
	+157.12	+1.94		-2.03	+157.0
	-157.12	+2.52		+2.08	-152.5
0,1,2	-12.96	-10.76		+0.28	-23.5
	+4.31	+5.39		-0.06	+9.6
	+12.96	+5.29		-0.28	+17.9
0,2,2	-0.36	-1.23		+0.05	-1.5
	+0.18	+0.73		-0.02	+0.89
	0.00	+0.34		-0.04	+0.30
0,-1,1	-0.11	-0.02			-0.13
	+0.11	+0.03			+0.14
	+0.05	+0.04			+0.09
0,0,1	0	-0.07	-0.02	0.00	-0.09
	-1.32	+0.28	+0.04	-0.02	-1.05
	+1.32	+0.28	0.00	+0.02	+1.62
0,1,1	+0.11	-0.22	-0.04		-0.15
	-0.05	+0.15	+0.03		+0.13
	-0.11	+0.14	+0.04		+0.04
<u>5.</u>					
0,0,2				0.00	0.00
				+0.06	+0.06
				-0.06	-0.06

STÖRUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 249

,2	-0,09			-0,23	-0,32
	+0,05			+0,15	+0,20
	+0,09			+0,29	+0,38
,2	+0,93			+3,05	+3,98
	-0,32			-0,92	-1,24
	-0,93			-3,14	-4,07
,2	+0,09			+0,21	+0,30
	-0,03			-0,10	-0,13
	-0,03			-0,07	-0,10
-1		+0,19	-0,04		+0,15
		-0,10	+0,03		-0,07
		-0,10	+0,01		-0,09
-2		-0,51	-0,02	-0,15	-0,68
		+0,61	+0,01	+0,05	+0,67
		+0,05	0,00	+0,15	+0,20
-2		+10,14		+0,13	+10,27
		-4,84		-0,05	-4,89
		-5,20		-0,18	-5,38
-2		+6,16		-0,53	+5,63
		-3,17		+0,18	-2,99
		-2,84		+0,51	-2,33
-2		+0,86		-0,06	+0,80
		-0,51		+0,03	-0,48
		-0,28		+0,04	-0,24
-3		+0,70	+0,03		+0,73
		-0,33	-0,03		-0,36
		-0,36	-0,01		-0,37
-3		+0,53	+0,02	-0,03	+0,52
		-0,26	-0,02	+0,01	-0,27
		-0,26	0,00	+0,03	-0,23
4		-0,07	-0,13	0,00	-0,20
		-0,05	+0,03	+0,01	-0,01
		+0,04	+0,10	-0,01	+0,13
4		+0,01	-0,11	+0,28	+0,18
		+1,66	+0,03	-0,16	+1,53
		+1,70	+0,08	-0,37	+1,44
4		-0,31	-0,03	-3,06	-3,40
		+0,99	+0,01	+0,91	+1,94
		+0,90	+0,02	+3,16	+4,08
5		0,00			0,00
		+0,18			+0,18
		+0,18			+0,18
,0				+0,17	+0,17
				-0,06	-0,06
				-0,17	-0,17

<u>18.</u>					
0,3,0				-0,02	-0,02
				0.00	0.00
				+0.07	+0.07
0,4,0				+0.27	+0.27
				-0.10	-0.10
				-0.25	-0.25
<u>19.</u>					
0,-1,4				+0.09	+0.09
				-0.07	-0.07
				-0.04	-0.04
0,0,4				-0.03	-0.03
				+1.04	+1.04
				+1.04	+1.04
0,4,4				-0.16	-0.16
				+0.06	+0.06
				+0.13	+0.13
<u>6.</u>					
0,0,-1	0	-0,02			-0.02
	+0,40	0.00			+0.10
	-0.16	-0.04			-0.17
0,1,-1	-1.64	-0.25			-1.86
	-0.53	+0.22			-0.34
	+2.67	+0.21			+2.88
0,2,-1	+0.09	+0.04			+0.10
	-0.04	0.00			-0.04
	-0.13	-0.03			-0.16
<u>7.</u>					
0,2,-3	+0.36	+0.04			+0.37
	-0.18	-0.02			-0.20
	-0.38	-0.04			-0.39
0,3,-3	-2.44	+0.28			-1.86
	+0.70	-0.14			+0.56
	+2.16	-0.14			+2.02
<u>8.</u>					
0,4,1	+0.86	+0.25			+1.11
	+0.34	-0.18			+0.13
	-1.46	-0.17			-1.63
<u>9.</u>					
0,3,-1	+2.13	-0.28			+1.85
	-0.74	+0.14			-0.57
	-2.13	+0.14			-1.99
<u>10.</u>					
0,4,-3	+0.73	0.00			+0.73
	+0.24	-0.05			+0.19
	-1.22	-0.05			-1.27

www.libtool.com.cn

12	-0.12
10	6.6
17	+0.47
27	+0.47
10	-0.11
25	-0.25

19	+0.25
7	-0.47
	-0.47
	-0.33
	+1.04
	+1.7
	-0.16
	+0.16
	+0.16

	-0.22
	+0.12
	-0.17
	-1.2
	-0.31
	+2.82
	+0.4
	-0.04
	-0.16

	+0.37
	-0.20
	-0.39
	-1.86
	+0.57
	+2.02

1.11	
1.15	
1.2	

Mit Zuziehung der vorhergehenden Factoren lassen sich nun alle Producte berechnen, die der Ausdruck (20) zur Erlangung von \bar{T} verlangt. Hiebei werde ich jedoch eine Abkürzung eintreten lassen, die durch diese Abhandlung ganz durchgehen, und ihre Ergänzung erst in einer zweiten Abhandlung erhalten wird. Im Vorhergehenden, so weit es sich um die Ermittlung der Störungen von P und Q , und ihres Einflusses auf die Längenstörungen handelte, wurden alle Abtheilungen berücksichtigt, und dies war namentlich in Bezug auf die Abtheilungen 3 und 4 und die davon zunächst abhängenden nothwendig, weil sie Coefficienten derselben Ordnung wie die Abtheilungen 1 und 2 hervorbringen. In den Längenstörungen und denen des Radius Vectors ist dieses anders. Die Abtheilungen 3, 4, u. s. w. geben nur Glieder die zwei oder mehr Ordnungen höher sind wie die, welche die Abtheilungen 1 und 2 geben. Die Einwirkung der Abtheilungen 3, 4 und aller folgenden überhaupt auf die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 der Längenstörungen ist daher wenigstens von der vierten Ordnung und so klein, dass man sie fast allenthalben übergehen kann. Die einzige Ausnahme hievon bildet das Argument 1,0,0 in der Abtheilung 1, von dessen Coefficienten die Bewegung des Perigäums des Mondes abhängt. Man kann daher in den noch zur Erlangung der Störungen der Länge und des Radius Vectors des Mondes nöthigen Rechnungen, die Störungen in verschiedene Classen theilen, die sich abgesondert von einander berechnen lassen, wodurch die ganze Arbeit bedeutend verkürzt wird.

Es werden von den Störungen der Länge und des Radius Vectors in dieser Abhandlung nur diejenigen berechnet werden, die den Abtheilungen 1, 2, 11, 15 angehören, denn um die Publication nicht zu sehr zu verzögern, soll den übrigen Abtheilungen eine zweite Abhandlung gewidmet werden. Die Berechnung dieser habe ich übrigens durch Anwendung eines besonderen Prinzips vereinfacht, welches zu seiner Zeit erklärt werden wird. Wir bekommen nach diesen Erklärungen hier: *)

*) Es ist in der folgenden Tafel

$$T_1 = \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\partial z; \quad T_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) (n\partial z)^2; \quad T_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right) (n\partial z)^3$$

γ, g, g'	T_0 sin	T_1 sin	T_2 sin	T_3 sin	$H\delta P$ sin	A
<u>1.</u>						
-1,1,0	+1158,410	-6,570	-0,170	-0,029	+0,432	+0,0
0,1,0	-95.504	-120.819	-0.004	+0.041	-0.066	-0.0
-1,2,0	+34.775	+59.458	-0.067	-0.053	+0.020	+0.0
1,0,0	+95.50433	+64.02935	+0.06716	+0.00012	+0.06435	+0.0
0,2,0	-2.620 +1.308 0	-13.616 +8.142 +3.749	-0.004 -0.001 +0.001	+0.025 -0.027 -0.003	+0.028 -0.010 -0.026	+0.0 -0.0 -0.0
0,3,0	-0.108 +0.064 +0.004	-1.248 +0.824 +0.248	0.000 -0.001 -0.001	+0.006 -0.006 0.000	+0.002 -0.001 -0.001	+0.0 -0.0 -0.0
0,4,0	-0.005 +0.003 0.000	-0.103 +0.073 +0.017				
0,-3,-1	+0.003 0.000 -0.002	+0.057 -0.012 -0.038	-0.016 +0.002 +0.012			
0,-2,-1	+0.066 0 -0.033	+0.475 -0.128 -0.282	-0.112 +0.024 +0.087			
0,-1,-1	+2.406 -2.40435 -0.800	+4.406 -2.07739 -1.942	-0.440 +0.10715 +0.322	-0.004 -0.00008 +0.004	-0.00205	-0.0
0,0,-1	0 +29.17538 -29.17538	+0.90112 +1.07714 +1.67212	-0.44447 +0.19091 +0.22460	-0.00059 -0.00268 +0.00280	-0.00126 +0.01694 -0.01436	-0.0 +0.0 -0.0
0,1,-1	-2.406 +0.800 +2.40535	-6.453 +3.495 +3.52969	-0.461 +0.322 +0.12587	+0.002 -0.005 +0.00005	+0.00357	+0.0
0,2,-1	-0.066 +0.033 0	-0.832 +0.492 +0.242	-0.136 +0.105 +0.029			
0,3,-1	-0.003 +0.002 0.000	-0.074 +0.049 +0.016	-0.019 +0.017 +0.003			
0,-2,-2	+0.002 0 -0.001	+0.013 -0.002 -0.009	-0.006 +0.001 +0.004			
0,-1,-2	+0.061 -0.0606 -0.020	+0.151 -0.0732 -0.066	-0.023 +0.0060 +0.017			
0,0,-2	0 +0.7348 -0.7348	+0.0683 +0.0235 +0.0449	-0.0293 +0.0137 +0.0139	-0.0004 +0.0004 -0.0003	-0.0004 -0.0004 +0.0002	-0.0 -0.0 +0.0
0,1,-2	-0.061 +0.020 +0.0606	-0.187 +0.106 +0.1072	-0.030 +0.020 +0.0077			

-						
-2	-0,002 +0.001 0	-0,023 +0.014 +0.008	-0,007 +0.006 +0.002			
, -3	+0.002 -0.002 0.000	+0.005 -0.002 -0.002				
, -3	0 +0.018 -0.018	+0.003 -0.001 -0.001				
, -3	-0.002 0.000 +0.002	-0.004 +0.002 +0.002				
-						
-1,0		0.000 -0.00007 0.000	0.000 +0.00015 0.000	0,000 +0.00001 0.000		
,0,0		+0.001271 -0.00176 -0.00024	-0.000330 -0.00012 +0.00062	-0.000307 0.00000 +0.00036		
,1,0		-0.026 +0.0112 +0.01401	+0.002 -0.0039 -0.00023	+0.00026	-0,00005	-0,00003
,2,0		-0.049 +0.027 +0.026	+0,025 -0.019 -0.006			
,3,0		-0.010 +0.005 +0.004	+0.010 -0.008 -0.002			
, -1	-0.004 -0.00153 +0.001	+0.006 -0.0016 -0.003	-0.013 +0.00224 +0.009	+0.00033	-0.00001	+0.00001
, -1	0 +0.12201 +0.03889	+0.10584 -0.12882 +0.00893	-0.06656 +0.01050 +0.05387	-0.00526 +0.00026 +0.00632	+0.00002 +0.00012 +0.00003	-0.00003 -0.00002 +0.00006
1, -1	+3.632 -2.414 -4.04165	-2.114 +0.709 +1.64745	-0.145 +0.036 +0.07354	+0.001 -0.005 +0.00436	+0.004 -0.002 -0.00392	+0.00101
2, -1	-43.838 +14.480 +44.060	-16.928 +8.446 +8.550	-0.122 +0.075 +0.045	+0.011 -0.014 +0.001	-0.053 +0.018 +0.052	+0.001 -0.005 +0.003
3, -1	-3.612 +1.596 +1.611	-3.950 +2.154 +1.549	-0.050 +0.037 +0.014	+0.008 -0.008 -0.001	-0.004 +0.002 +0.002	
4, -1	-0.264 +0.137 +0.077	-0.456 +0.279 +0.126	-0.008 +0.008 +0.002			
5, -1	-0.049 +0.011 +0.004	-0.043 +0.029 +0.009				

2.						
0, -2, -2	+0.003 +0.004 -0.004	+0.012 -0.003 -0.008	-0.028 +0.004 +0.024			
0, -1, -2	+0.127 +0.1817 -0.073	+0.079 -0.0426 -0.044	-0.234 +0.0435 +0.183		-0.0041	-0
0, 0, -2	0 -14.5228 -4.6284	-0.0602 -0.6007 +0.0884	-1.4436 +0.3034 +1.0921	-0.0010 -0.0003 +0.0007	+0.0002 +0.0079 -0.0113	-0 +0 -0
0, 1, -2	-432.236 +287.397 +481.0483	+0.300 +12.102 +12.5456	-2.347 +1.025 +1.1606	-0.004 -0.004 0.0000	-0.064 +0.035 +0.0755	-0. +0. +0.
0, 2, -2	+5217.734 -1723.485 -5244.077	-1.945 +7.142 +6.520	-3.574 +2.478 +0.993	+0.002 -0.004 -0.004	+0.538 -0.162 -0.552	+0. -0. -0.
0, 3, -2	+429.851 -189.964 -191.803	-0.843 +0.673 +0.284	-1.799 +1.360 +0.443		+0.062 -0.028 -0.037	+0 -0 -0
0, 4, -2	+34.454 -16.308 -9.207	-0.188 +0.112 +0.074	-0.320 +0.253 +0.062		+0.003 -0.002 -0.004	
0, 5, -2	+2.247 -1.289 -0.503	-0.019 +0.012 +0.006	-0.044 +0.033 +0.007			
0, 6, -2	+0.160 -0.100 -0.030	-0.004 +0.004 0.000	-0.003 +0.003 0.000			
0, -1, -3	+0.007 +0.014 -0.004	+0.005 -0.003 -0.003	-0.019 +0.004 +0.016			
0, 0, -3	0 -0.854 -0.272	-0.043 +0.018 -0.044	-0.120 +0.027 +0.094	+0.005 -0.004 -0.006		
0, 1, -3	-25.406 +16.892 +28.275	+1.212 +0.846 -0.072	-0.238 +0.120 +0.104	-0.004 +0.004 -0.004	-0.007 +0.004 +0.007	-0 +0 +0
0, 2, -3	+306.687 -101.303 -308.236	+16.662 -7.584 -7.827	-0.370 +0.264 +0.092	-0.010 +0.043 -0.004	+0.091 -0.030 -0.090	+0 -0 -0
0, 3, -3	+25.266 -11.166 -11.274	+4.850 -2.565 -2.044	-0.213 +0.162 +0.050	-0.008 +0.009 +0.004	+0.008 -0.004 -0.004	
0, 4, -3	+1.847 -0.959 -0.544	+0.571 -0.346 -0.160	-0.039 +0.032 +0.009			
0, 5, -3	+0.132 -0.076 -0.030	+0.056 -0.036 -0.044	-0.004 +0.003 0.000			

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 255

-4	0 -0,035 -0.044	+0,002 +0.003 -0.002	-0,007 +0.002 +0.007			
-4	-1.036 +0.689 +1.153	+0.085 +0.038 -0.026	-0.040 +0.004 +0.008			
-4	+12.507 -4.134 -12.570	+1.169 -0.536 -0.554	+0.005 -0.005 0.000	+0,003 -0.001 -0.003		
-4	+1.030 -0.455 -0.460	+0.362 -0.192 -0.153	+0.004 0.000 0.000			
-4	+0.075 -0.039 -0.022	+0.045 -0.026 -0.013				
-5	-0.036 +0.024 +0.040	+0.003 -0.004 -0.003				
-5	+0.435 -0.444 -0.437	+0.053 -0.026 -0.026				
-5	+0.036 -0.016 -0.046	+0.017 -0.010 -0.007				
-2		+0.003 -0.003 0.000				
-2		-0.057 +0.028 +0.029	+0.004 0.000 0.000			
-2		-0.003 +0.003 0.000				
-3		-0.004 +0.006 0.000	+0.004 -0.003 0.000			
-3		+0.171 -0.138 -0.049	-0.053 +0.023 +0.015			
-3		-1.598 +0.757 +0.829	-0.398 +0.289 +0.098	-0,004 +0.002 0.000		
-3		-1.240 +0.632 +0.582	-0.287 +0.247 +0.068	-0.001 +0.004 0.000		
-3		-0.182 +0.103 +0.063	-0.074 +0.057 +0.016			

<u>11.</u>						
0,0,-4		0,000 -0.002 +0.004	-0,003 +0.001 +0.002	+0,002 0.000 -0.003		
0,1,-4		-0.002 -0.194 +0.077	-0.014 +0.002 +0.009	+0.013 -0.001 -0.014		
0,2,-4		-5.724 +6.743 +0.635	-0.037 +0.082 -0.049	+0.002 +0.010 -0.014	+0,003 -0.001 -0.003	-0 +0 +0
0,3,-4		+110.540 -52.786 -56.604	-0.093 +0.129 -0.036	-0.038 +0.046 -0.002	+0.034 -0.014 -0.028	-0 +0 +0
0,4,-4		+68.064 -34.945 -34.351	-0.073 +0.073 -0.001	-0.040 +0.048 +0.005	-0.038 +0.012 +0.041	+0 -0 -0
0,5,-4		+9.570 -5.572 -3.051	-0.022 +0.019 +0.004	-0.017 +0.019 +0.002	-0.006 +0.003 +0.004	+0 -0 -0
0,6,-4		+1.047 -0.645 -0.248	-0.004 +0.003 0.000	-0.003 +0.003 0.000		
0,7,-4		+0.083 -0.056 -0.016				
0,1,-5		+0.002 -0.021 +0.006				
0,2,-5		-0.604 +0.702 +0.072	+0.030 0.000 -0.018			
0,3,-5		+11.342 -5.357 -5.836	+0.375 -0.259 -0.404	-0.006 +0.007 0.000		
0,4,-5		+8.540 -4.356 -3.996	+0.298 -0.220 -0.074	-0.006 +0.007 0.000		
0,5,-5		+1.239 -0.718 -0.403	+0.088 -0.067 -0.049	-0.001 +0.001 0.000		
0,6,-5		+0.124 -0.080 -0.032	+0.043 -0.041 -0.002			
0,2,-6		-0.042 +0.047 +0.006	+0.002 -0.001 0.000			
0,3,-6		+0.720 -0.337 -0.373	+0.044 -0.032 -0.042			

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 257

—6	+0,648 -0.329 -0.307	+0,040 -0.030 -0.040			
—6	+0.094 -0.054 -0.034	+0.009 -0.007 -0.003			
,—7	+0.037 -0.019 -0.019				
,—7	+0.035 -0.018 -0.017				
5.					
,—5	-0.045 +0.007 +0.008	-0.028 +0.025 +0.007	-0,003 +0.005 +0.004		
,—5	-0.024 +0.013 +0.012	-0.039 +0.028 +0.009	-0.005 +0.006 +0.004		
,—6	-0.009 +0.030 -0.011	-0.048 +0.084 +0.006	-0.002 +0.003 0.000		
,—6	+0.725 -0.327 -0.381	+1.183 -0.830 -0.305	-0.004 +0.004 0.000		
,—6	+0.987 -0.488 -0.482	+1.391 -1.034 -0.339	-0.001 +0.001 0.000		
,—6	+0.391 -0.206 -0.171	+0.560 -0.428 -0.427			
,—6	+0.064 -0.037 -0.022	+0.106 -0.085 -0.024			
,—7	-0.004 +0.005 -0.004	-0.005 +0.009 +0.004			
,—7	+0.106 -0.046 -0.057	+0.178 -0.127 -0.046	+0.004 -0.005 -0.004		
5,—7	+0.170 -0.084 -0.084	+0.242 -0.184 -0.059	+0.005 -0.006 -0.004		
6,—7	+0.074 -0.039 -0.033	+0.108 -0.082 -0.025	+0.003 -0.003 0.000		

Die Summe der vorstehenden Producte ist $=T$; ich habe diese nicht beigeschrieben, weil ich befürchte, dass alsdann bei der Tafel eine grössere Breite bekommen würde, als das ξ Format gestattet. Diese Summe wird übrigens weiter unten bei den Functionen, zu welchen sie jedenfalls addirt werden muss, angeführt werden.

Die einzelnen Coefficienten der vorstehenden Tafel kann man dieselbe Weise prüfen, wie im Art. 67 erklärt wurde. Ich werde hier einigen Coefficienten die einzelnen Glieder, aus welchen sie bestehen, hier als Anleitung zu einer solchen Prüfung hersetzen. Namentlich für das Argument 1,0,0 der Abtheilung 1, aus welchem die Breite des Perigäums hervorgeht, alle Producte im Einzelnen anführen

		in $\left(\frac{dT_0}{dg}\right) n \delta z$	in $\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) \times \frac{1}{2}$		
1.	1.	1,0,0 in 1.	1.	1.	1,0,0 in
2,0	-1,2,0	-0,00071	1,0	-1,1,0	+0,065
-1,-1	1,-1,-1	- 518	2,0	-1,2,0	+
1,-1	-1,1,-1	+ 790	-1,-1	1,-1,-1	+
			1,-1	-1,1,-1	+
2.	2.		2.	2.	
1,-1	-1,1,-1	- 1	2,-1	-1,2,-1	-
2,-1	-1,2,-1	+ 27	3,-1	-1,3,-1	+
3,-1	-1,3,-1	- 14	1,-2	-1,1,-2	-
1,-2	-1,1,-2	- 15726	2,-2	-1,2,-2	+ 2
2,-2	-1,2,-2	+2.98876	3,-2	-1,3,-2	- 7
3,-2	-1,3,-2	- 75225	4,-2	-1,4,-2	-
1,-3	-1,1,-3	- 383	1,-3	-1,1,-3	+
2,-3	-1,2,-3	- 41	2,-3	-1,2,-3	-
3,-3	-1,3,-3	+ 1270	3,-3	-1,3,-3	+ 1
4,-3	-1,4,-3	- 381	4,-3	-1,4,-3	+
2,-4	-1,2,-4	- 2	1,-4	1,1,-1	-
3,-4	-1,3,-4	+ 3	2,-1	1,2,-1	-
1,-4	1,1,-1	- 1	1,-2	1,1,-2	+ 11
2,-1	1,2,-1	+ 295	2,-2	1,2,-2	+ 1
-1,-2	1,-1,-2	+ 18	3,-2	1,3,-2	+
1,-2	1,1,-2	+ 2	1,-3	1,1,-3	- 5
2,-2	1,2,-2	+56.78475	2,-3	1,2,-3	-
3,-2	1,3,-2	+1.99462	1,-4	1,1,-4	-
4,-2	1,4,-2	+ 402			+0,067
1,-3	1,1,-3	+ 1			
2,-3	1,2,-3	+ 14804			
3,-3	1,3,-3	+ 848			
4,-3	1,4,-3	+ 2			
1,-4	1,1,-4	+ 21			
2,-4	1,2,-4	+ 2			
		+61,02935			

		in $\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) \times \frac{1}{4}(n\delta z)^2$	
1.	1.	1,0,0 in 1.	
4,0	-1,1,0	+0,00004	
2.	2.		
1,-2	1,1,-2	-	505
2,-2	1,2,-2	-	409
3,-2	1,3,-2	-	4
1,-3	1,1,-3	-	3
1,-2	-1,1,-2	+	4
2,-2	-1,2,-2	-	463
3,-2	-1,3,-2	+	780
1,-2	-1,1,-2	+	9
2,-3	-1,2,-3	-	4
3,-3	-1,3,-3	+	6
		+0,00042	

		in $H\delta P$				in $N\delta Q$	
1.	1,0,0 in 1.	1.	1.	1,0,0 in 1.			
-1,1,0	+0,00042	0,0	1,0,0	-0,00524			
-1,0,-1	+	1,0	-1,1,0	+		199	
1,1,0	-	2.	2.				
1,0,-1	-	1,-2	-1,1,-2	-			5
2.		2,-2	-1,2,-2	-			288
-1,1,-2	-	3,-2	-1,3,-2	+			54
-1,2,-2	-	2,-3	-1,2,-3	-			4
-1,3,-2	+	0,-2	1,0,-2	-			55
-1,2,-3	-	1,-2	1,1,-2	+			1645
1,0,-2	-	2,-2	1,2,-2	-			168
1,1,-2	+	1,-3	1,1,-3	+			6
1,2,-2	-	3.	3.				
1,1,-3	+	1,1	1,1,1	+			4
3.		0,0	1,0,0	+			281
1,1,1	+	1,0	1,1,0	+			4453
1,0,0	+	2,0	1,2,0	-			453
1,1,0	+	1,-1	1,1,-1	+			4
1,2,0	-	1,0	-1,1,0	-			4
1,1,-1	+	2,0	-1,2,0	-			247
-1,1,0	-	3,0	-1,3,0	+			52
-1,2,0	-	4.	4.				
-1,3,0	+	0,3	-1,0,3	+			4
4.		0,2	-1,0,2	+			1534
-1,0,3	+	1,2	-1,1,2	+			215
-1,0,2	+	0,3	1,0,3	+			5
-1,1,2	+	-1,2	1,-1,2	-			172
1,0,3	+	0,2	1,0,2	+			2117
1,-1,2	-					+0,05947	
1,0,2	+						
+0,06435							

Als zweites Beispiel wähle ich die drei Coefficienten des Argumentes $1, -2$ in der Abtheilung 2, und im Product $\left(\frac{dT_0}{dg}\right) ndz$. Hier sind die einzelnen Glieder nebst den Argumenten, denen sie angehören, folgenden:

2.	1.	0, 1, -2	1.	-1, 2, -2	1.	1, 0, -2
1, -2		0	-1, 1, 0	+12,544	-1, 1, 0	+12,5437
0, -2	0, 1, 0	+0,040	-1, 2, 0	6		0
2, -2	0, 1, 0	-0,497		0	-1, 2, 0	+ 0.3305
3, -2	0, 2, 0	-		0	-1, 3, 0	+ 6
1, -1		0	-1, 1, -1	-	1, -1, -1	- 20
1, -3		0	1, -1, -1	+ 14	-1, 1, -1	+ 140
2, -3	0, 1, -1	- 4			-1, 2, -1	+ 6
1.	2.		2.		2.	
-1, -1	0, 2, -1	- 16	-1, 3, -1	+ 8	1, 1, -1	+ 78
0, -1	0, 1, -1	+ 6	-1, 2, -1	- 8		
2, 0	0, 3, -2	+ 14	-1, 4, -2	- 9	1, 2, -2	- 43
0, -1	0, 1, -3	+ 40	-1, 2, -3	- 54		
1, -1	0, 2, -3	- 466	-1, 3, -3	+ 82	1, 1, -3	+ 834
11.	2.		2.		2.	
2, -4	0, 1, -2	- 32			-1, 2, -2	+ 419
3, -4	0, 2, -2	+ 904	1, 1, -2	- 454	-1, 3, -2	- 4477
4, -4	0, 3, -2	+ 33	1, 2, -2	- 10	-1, 4, -2	- 197
5, -4					-1, 5, -2	- 2
2, -5					-1, 2, -3	+ 2
3, -5	0, 2, -3	+ 6	1, 1, -3	- 3	-1, 3, -3	- 30
4, -5					-1, 4, -3	- 2
		+0,300		+12,102		+12,5456

Auf diese Art kann man jeden einzelnen Coefficienten der vorstehenden Tafel nachrechnen, will man indess ein ganzes Product nachrechnen, so verfährt man am Kürzesten, wenn man die partiellen Producte der Reihe nach, so wie man sie durch Multiplication aller Glieder des einen Factors mit allen Gliedern des andern Factors erhalten hat, in die auf einem andern Papier aufgestellten Columnen der betreffenden Argumente einträgt. Man braucht die Combinationen, aus welchen die einzelnen Glieder hervorgegangen sind, nicht hinzuzufügen, denn wenn später das Bedürfniss eintreten sollte, diese für den einen oder anderen Coefficienten kennen zu lernen, so lassen sie sich mit sehr geringer Mühe auffinden.

73.

Wir kommen nun zu der mit G bezeichneten Function, die eben behandelt werden muss wie T , nur kann man hier ein Weniges an Genauigkeit vergeben, da G nur mit einem Factor erster Ordnung multiplicirt in das Endresultat übergeht.

Für G

γ, g, g'	S sin	S_1 sin	L sin	V cos	V_1 cos	M cos
<u>1.</u>						
-1,4,0	-3503"	+17"	+3486"			
0,4,0	+289 -96 -289	-2 0 -35	+287 -96 -324			
0,-4,-1	-7 +7 +2	0 +2 0	-7 +9 +2			
0,0,-1	0 -88 +88	0 -5 -7	0 -93 +81			
0,4,-1	+7 -2 -7	0 0 -2	+7 -2 -9			
<u>2.</u>						
0,2,-1	0 0 -30	0 0 -6	0 0 -36			
0,0,-2	+24 +2 +2	+3 0 -2	+27 +2 0			
0,1,-2	-294 0 -294	+2 -38 -39	-289 -38 -330			
0,2,-2	-7 0 +3535	+3 -20 -18	-4 -20 +3517	0 0 -28"		0 0 -28"
0,3,-2	0 0 +97	+2 -1 0	+2 -1 +97			
0,1,-3	-17 0 -17	0 -2 -2	-17 -2 -19			
0,2,-3	0 0 +207	0 -1 +5	0 -1 +212			

11.						
0,3,-4		-2"	-2"			
		0	0			
		+38	+38			
0,4,-4		0	0			
		0	0			
		+20	+20			
3.						
0,2,1	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	
	+87"	-6	+81	-87"	+6"	-81
0,4,0	-288	0	-288	+287	0	+287
	0	-19	-19	0	+19	+19
	-288	-19	-307	+287	+19	+306
0,2,0	-7	+2	-5	+7	-2	+5
	0	-10	-10	0	+10	+10
	+3489	-9	+3480	-3482	+9	-3473
0,3,0	0		0	0		0
	0		0	0		0
	+96		+96	-96		-96
0,2,-1	0	0	0	0	0	0
	0	-1	-1	0	+1	+1
	+87	+5	+92	-87	-5	-92
4.						
0,0,3	0	0	0	0	0	
	-104	+3	-104	+103	-3	+10
	+104	+2	+106	-103	-2	-10
0,-1,2	-146	+1	-145	+145	-1	+1
	+146	0	+146	-145	0	-1
	+49	0	+49	-48	0	-1
0,0,2	0	+3	+3	0	-3	-3
	-1771	0	-1771	+1754	0	+175
	+1771	-18	+1753	-1754	+18	-173
0,1,2	+146	0	+146	-145	0	-14
	-49	0	-49	+48	0	+4
	-146	-39	-185	+145	+39	+18
12.						
0,3,-2		-1	-1		+1	+1
		0	0		0	0
		+38	+38		-38	-38
0,4,-2		0	0		0	0
		0	0		0	0
		+22	+22		-22	-22

Ferner für G.

γ, g, g'	Z sin	Z ₁ sin	O sin
<u>1.</u>			
-1,1,0	-3475"	+18"	-3457"
0,1,0	+286 -95 -286	-1 0 -37	+285 -95 -323
0,-1,-1	-7 +7 +2	0 +2 0	-7 +9 +2
0,0,-1	0 -88 +88	0 -5 -7	0 -93 +81
0,1,-1	+7 -2 -7	0 0 -2	+7 -2 -9
<u>2.</u>			
0,2,-1	0 0 -30	0 0 -6	0 0 -36
0,0,-2	+24 +2 +2	+3 0 -2	+27 +2 0
0,1,-2	-288 0 -288	+1 -37 -38	-287 -37 -326
0,2,-2	-7 0 +3493	+3 -20 -18	-4 -20 +3475
0,3,-2	0 0 +95	+1 -1 0	+1 -1 +95
0,1,-3	-17 0 -17	0 -2 -2	-17 -2 -19
0,2,-3	0 0 +206	0 -1 +5	0 -1 +211
<u>11.</u>			
0,3,-4		-1 0 +38	-1 0 +38
0,4,-4		0 0 +20	0 0 +20

<u>3.</u>			
0,2,1	0	0	0
	0	0	0
	-87"	+6"	-81"
0,1,0	+287	0	+287
	0	+19	+19
	+287	+19	+306
0,2,0	+7	-2	+5
	0	+10	+10
	-3476	+9	-3467
0,3,0	0		0
	0		0
	-95		-95
0,2,-1	0	0	0
	0	+1	+1
	-87	-5	-92
<u>4.</u>			
0,0,3	0	0	0
	+102	-3	+99
	-102	-2	-104
0,-1,2	+143	-1	+142
	-143	0	-143
	-48	0	-48
0,0,2	0	-3	-3
	+1736	0	+1736
	-1736	+18	-1718
0,1,2	-143	0	-143
	+48	0	+48
	+143	+39	+182
<u>12.</u>			
0,3,-2		+1	+1
		0	0
		-38	-38
0,4,-2		0	0
		0	0
		-22	-22

Ferner für G.

γ, g, g'	R cos	R_1 cos	$\frac{1}{2}L\delta P$ cos	$M\delta Q$ cos	H cos
<u>1.</u>					
0,0,0		+0,3		0,0	+0,3
-1,1,0		-1,6		-0,3	-1,9
0,1,0		+0,1			+0,1
		0,0			0,0
		-3,6			-3,6

UNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.

-1	0,0 0.0 -2.6	0,0 0.0 -0.5			0,0 0.0 -3.1
-2	+2.4 0.0 0.0				-2.4 0.0 0.0
-2	-26.0 0.0 -26.0		+0,2 0.0 +0.2	+0,3 0.0 +0.4	-25.5 0.0 -25.4
-2	-0.4 0.0 +314.9	0.0 0.0 -0.4	0.0 +0.4 -2.4	0.0 -0.2 -3.9	-0.4 -0.4 +308.8
-2	0.0 0.0 +8.6				0.0 0.0 +8.6
-3	-1.5 0.0 -1.5				-1.5 0.0 -1.5
-3	0.0 0.0 +18.5	0.0 0.0 +0.5			0.0 0.0 +19.0
-4		-0.4 0.0 +3.4			-0.4 0.0 +3.4
-4		0.0 0.0 +1.8	0.0 0.0 -0.2		0.0 0.0 +1.6
0	0.0 0.0 -7.9	0.0 0.0 +0.5	0.0 0.0 -0.4		0.0 0.0 -7.5
0	-2.2 0.0 0.0	-0.4 0.0 0.0			-2.3 0.0 0.0
0	+25.9 0.0 +25.9	-0.4 +1.7 +1.8	-0.2 0.0 -0.3		+25.6 +1.7 +27.4
0	+0.7 0.0 -314.6	-0.4 +0.9 +0.8	0.0 0.0 +2.4	0.0 -0.2 -0.4	+0.6 +0.7 -312.4
0	0.0 0.0 -8.7				0.0 0.0 -8.7

www.libtoog.com.cn

<u>3.</u> 0,2,-1	0.0 0.0 -7.9	0.0 0.0 -0.5	0.0 0.0 +0.3		0.0 0.0 -8.1
<u>4.</u> 0,0,3	0 +9.3 -9.3	0.0 -0.2 -0.1			0.0 +9.1 -9.4
0,-1,2	+13.0 -13.0 -4.3	-0.1 0.0 0.0	-0.2 +0.2 0.0		+12.7 -12.8 -4.3
0,0,2	0 +157.8 -157.8	-0.3 0.0 +1.6	0.0 -2.2 +2.2	0.0 +0.3 0.0	-0.3 +155.9 -154.0
0,1,2	-13.0 +4.3 +13.0	0.0 0.0 +3.5	+0.2 0.0 -0.3		-12.8 +4.3 +16.2
0,0,4	0 -1.3 +1.3	0.0 +0.3 +0.3			0.0 -1.0 +1.6
<u>5.</u> 0,2,2	0.0 0.0 -0.6		0.0 0.0 +2.2	0.0 0.0 -4.1	0.0 0.0 -2.5
<u>12.</u> 0,3,-2		+0.2 0.0 -3.5			+0.2 0.0 -3.5
0,4,-2		0.0 0.0 -4.8		0.0 0.0 +0.3	0.0 0.0 -1.5
<u>13.</u> 0,1,-4		0.0 -1.7 -1.7	+0.2 0.0 +0.2		+0.2 -1.7 -1.5
0,2,-4		+0.1 -0.9 -0.8	0.0 0.0 -2.0	0.0 +0.2 -0.2	+0.1 -0.7 -3.0
<u>19.</u> 0,0,4			0.0 -1.1 +1.1	0.0 +2.1 -2.0	0.0 +1.0 -0.9

www.libtool.com.cn Ferner für G

γ, g, g'	Y sin	Y_1 sin	$\frac{1}{2}08Q$ sin	N sin
<u>1.</u>				
-1,1,0	-314,6	+1,6	+2,0	-310,0
0,1,0	+25.9	-0.1	-0.2	+25.6
	-8.6	0.0	0.0	-8.6
	-25.9	-3.6	+0.3	-29.2
0,0,-1	0	0.0		0.0
	-7.9	-0.4		-8.3
	+7.9	-0.6		+7.3
<u>2.</u>				
0,2,-1	0.0	0.0		0.0
	0.0	0.0		0.0
	-2.6	-0.5		-3.1
0,0,-2	+2.1	+0.3		+2.4
	0.0	-0.0		0.0
	0.0	-0.2		-0.2
0,1,-2	-26.0	+0.1	+0.2	-25.7
	0.0	-3.7	0.0	-3.7
	-26.0	-3.8	+0.2	-29.6
0,2,-2	-0.1	+0.3	0.0	+0.2
	0.0	-1.8	+0.3	-1.5
	+314.9	-1.7	-2.0	+314.2
0,3,-2	0.0			0.0
	0.0			0.0
	+8.6			+8.6
0,1,-3	-1.5	0.0		-1.5
	0.0	-0.2		-0.2
	-1.5	-0.2		-1.7
0,2,-3	0.0	0.0		0.0
	0.0	-0.2		-0.2
	+18.5	+0.4		+18.9
<u>11.</u>				
0,3,-4		-0.1		-0.1
		0.0		0.0
		+3.4		+3.4
0,4,-4		0.0	0.0	0.0
		0.0	0.0	0.0
		+1.8	-0.2	+1.6
<u>3.</u>				
0,2,1	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0
	-7.9	+0.5	+0.1	-7.3
0,0,0	-2.2	-0.1		-2.3
	0.0	0.0		0.0
	0.0	0.0		0.0

3.				
0,1,0	+25.9	-0.1	-0.2	+25.6
	0.0	+1.8	0.0	+1.8
	+25.9	+1.8	-0.3	+27.4
0,2,0	+0.7	-0.1	0.0	+0.6
	0.0	+0.9	-0.3	+0.6
	-344.6	+0.8	+2.0	-344.8
0,3,0	0.0			0.0
	0.0			0.0
	-8.7			-8.7
0,2,-1	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0
	-7.9	-0.5	+0.2	-8.2
4.				
0,0,3	0	0.0		0.0
	+9.2	-0.2		+9.0
	-9.2	-0.1		-9.3
0,-1,2	+13.0	-0.1	-0.2	+12.7
	-13.0	0.0	+0.3	-12.7
	-4.3	0.0	0.0	-4.3
0,0,2	0	-0.3	0.0	-0.3
	+157.1	+0.1	-2.0	+155.2
	-157.1	+1.7	+2.0	-153.4
0,1,2	-13.0	0.0	+0.2	-12.8
	+4.3	0.0	0.0	+4.3
	+13.0	+3.5	-0.3	+16.2
0,0,1	0	0.0		0.0
	-1.3	+0.3		-1.0
	+1.3	+0.3		+1.6
5.				
0,2,2	0.0		0.0	0.0
	0.0		0.0	0.0
	-0.6		-2.2	-2.8
12.				
0,3,-2		+0.2		+0.2
		0.0		0.0
		-3.5		-3.5
0,4,-2		0.0	0.0	0.0
		0.0	0.0	0.0
		-1.8	+0.3	-1.5
13.				
0,1,-4		0.0	-0.2	-0.2
		+1.7	0.0	+1.7
		+1.7	-0.2	+1.5
0,2,-4		-0.1	0.0	-0.1
		+0.9	0.0	+0.9
		+0.9	+2.2	+3.1
19.				
0,0,4			0.0	0.0
			+1.1	+1.1
			-1.1	-1.1

Folge der auf G angewandten Gleichung (20) bekommen wir schliesslich

γ, g, g'	G_0 sin	G_1 sin	G_2 sin	G_3 sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
4.						
-1,1,0	+1158,410	-18,303	-0,182	+0,002	+0,421	+0,369
0,1,0	-95.504 +31.775 +95.505	+1.357 -0.490 +38.988	+0.014 -0.087 +0.070	-0.003	-0.032 +0.003 +0.056	-0.029 +0.002 +0.054
0,2,0	-2.620 +1.308 0	+0.036 -0.024 +1.772	+0.007 -0.010 +0.003	-0.004	-0.016	-0.015
0,3,0	-0.108 +0.064 +0.004	+0.001 -0.001 +0.097				
0,-2,-1	+0.066 0 -0.033	-0.026 -0.055 +0.021	+0.013			
0,-1,-1	+2.406 -2.405 -0.800	-0.221 -1.224 +0.327	-0.003 +0.063 +0.008			
0,0,-1	0 +29.175 -29.175	-0.094 +0.688 +2.742	-0.010 +0.028 +0.047		+0.015 -0.014	+0.014 -0.013
0,1,-1	-2.406 +0.800 +2.405	-0.067 +0.375 +2.359	-0.004 +0.075			
0,2,-1	-0.066 +0.033 0.000	-0.031 +0.024 +0.127	+0.017			
0,3,-1	-0.003 +0.002 0.000	-0.001 +0.001 +0.009				
0,-1,-2	+0.061 -0.061 -0.020	-0.009 -0.043 +0.012	+0.004			
0,0,-2	0 +0.735 -0.735	-0.001 +0.013 +0.101	+0.004 +0.001			
0,1,-2	-0.061 +0.020 +0.061	-0.002 +0.016 +0.072	+0.004			
0,2,-2	-0.002 +0.001 0.000	+0.005				
0,0,-3	0 +0.018 -0.018	+0.005 -0.002 +0.003				
0,1,-3	-0.002 0.000 +0.002	+0.005 +0.002				

2. 0,1,0		-0,004 -0.004 +0.009				
0,2,0		0.000 +0.002 +0.018				
0,0,-1	+0,200 +0.011 +0.011	-0.099 -0.004 +0.029	-0,004 -0.003 +0.007 +0.005			
0,1,-1	-2.425 0 -2.425	-0.475 +0.226 +1.191	-0.003 -0.015 +0.035		-0,003 -0.003	
0,2,-1	-0.067 0 +29.403	-0.096 +0.099 +5.723	+0.002 -0.012 +0.030	-0,004	+0.035	-0,002
0,3,-1	-0.003 0 +0.807	-0.013 +0.004 +0.924	+0.001 -0.002 +0.008			
0,4,-1	0 0 +0.033	+0.062				
0,-1,-2	+0.109 +0.109 -0.024	-0.044 -0.028 +0.031	+0.020			
0,0,-2	-23.806 -1.322 -1.322	-1.066 -0.390 +0.553	-0.018 +0.226 +0.004		-0.003 +0.010 -0.010	-0.003 +0.006 -0.006
0,1,-2	+288.629 -0.036 +288.629	-0.497 +12.240 +12.946	-0.064 +0.201 +0.202	-0.001 -0.001	+0.034 -0.002 +0.051	+0.029 -0.015 +0.050
0,2,-2	+7.917 -0.001 -3499.572	-1.027 +6.629 +6.417	-0.037 +0.051 +0.540	-0.001 -0.001	+0.014 -0.373	+0.044 -0.354
0,3,-2	+0.326 0 -95.992	-0.551 +0.535 +0.231	-0.006 +0.003 +0.258		-0.004 -0.021	-0.003 +0.001 -0.008
0,4,-2	+0.016 0 -3.950	-0.041 +0.035 +0.048	+0.031			
0,5,-2	+0.001 0 -0.193	+0.003	+0.002			
0,0,-3	-1.399 -0.078 -0.078	-0.023 -0.035 +0.029	+0.002 +0.021 -0.005			
0,1,-3	+16.965 -0.002 +16.965	+0.416 +0.839 +0.284	-0.003 +0.044 -0.005		+0.002 +0.004	

RECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 271

-3	+0,465 0 -205.698	+0,030 +0.622 -5.014	-0,005 +0.023 +0.039	+0,004	-0,064	+0,002 -0.024
-3	+0.019 0 -5.642	-0.047 +0.053 -1.236	-0.004 +0.003 +0.029			
-3	+0.004 0 -0.232	-0.004 +0.003 -0.079				
-4	-0.057 -0.003 -0.003	+0.004 -0.004 +0.004				
-4	+0.692 0 +0.692	+0.029 +0.039	+0.002			
-4	+0.019 0 -8.389	+0.004 +0.038 -0.355	+0.004 +0.003		-0.002	
-4	+0.004 0 -0.230	-0.003 +0.002 -0.095				
-4	0 0 -0.009	-0.005				
-5	+0.024 0 +0.024					
-5	+0.004 0 -0.292	-0.017				
-5	0 0 -0.008	-0.002				
-2		-0.002 0.000 0.000				
-2		0.000 0.000 +0.019				
-3		+0.003 0.000 0.000				
-3		-0.045 +0.002 -0.033	-0.005 +0.002 +0.008			
-3		-0.034 +0.004 +0.553	-0.003 +0.004 +0.065			

74.

Auf ganz dieselbe Art erhält man

für Σ

g, g'	S sin	S_1 sin	L sin	V cos	V_1 cos	M cos
<u>1.</u>						
1,0		+40"	+40"			
2,0		+2	+2			
-1,-1		-2	-2			
0,-1		0	0			
1,-1		+2	+2			
<u>2.</u>						
2,-1	+15"	+6	+21			
0,-2	-13		-13			
1,-2	+291		+291			
2,-2	-1760		-1760	+14"		+14'
3,-2	-97		-97			
4,-2	-5		-5			
1,-3	+17		+17			
2,-3	-103	-6	-109			
3,-3	-6		-6			
<u>11.</u>						
3,-4		-36	-36			
4,-4		-21	-21			
<u>3.</u>						
2,1	-44	+6	+38	+44	-6"	+38
1,0	+288		+288	-287		-287
2,0	-1737		-1737	+1734		+1734
3,0	-95		-95	+95		+95
2,-1	-44	-6	-50	+44	+6	+50
<u>4.</u>						
-1,2		-1	-1		+1	+1
0,2		+15	+15		-15	-15
1,2		+39	+39		-39	-39
<u>12.</u>						
3,-2		-36	-36		+37	+37
4,-2		-21	-21		+21	+21

Ferner für Σ'

g, g'	Z sin	Z_1 sin	O sin
1.			
<u>1,0</u>		+40"	+40"
2,0		+3	+3
-1,-1		-2	-2
0,-1		0	0
1,-1		+2	+2
2.			
<u>2,-1</u>	+15"	+6	+21
0,-2	-13		-13
1,-2	+288		+288
2,-2	-1738		-1738
3,-2	-95		-95
4,-2	-5		-5
1,-3	+17		+17
2,-3	-102	-6	-108
3,-3	-6		-6
11.			
<u>3,-4</u>		-37	-37
4,-4		-21	-21
3.			
<u>2,1</u>	+44	-6	+38
1,0	-287		-287
2,0	+1730		+1730
3,0	+95		+95
2,-1	+44	+6	+50
4.			
<u>-1,2</u>		+1	+1
0,2		-15	-15
1,2		-39	-39
12.			
<u>3,-2</u>		+37	+37
4,-2		+21	+21

Ferner für Σ

g'	R cos	R_1 cos	R_2 cos	$\frac{1}{2}L\delta P$ cos	$M\delta Q$ cos	H cos
<u>1.</u>						
0		+1,35		-0,02	+0,14	+1,47
0		+3.49		-0.03	-0.15	+3.34
0		+0.25		+0.07	+0.11	+0.43
-1		+0.12				+0.12
-1		+0.17				+0.17
-1		+0.18				+0.18

2.				
1,-1	-0.22	+0.00		+0.31
2,-1	+1.32	+0.00		-3.23
3,-1	+0.07	+0.00		-1.90
0,-2	-1.19	+0.00		-0.18
1,-2	+25.96	+0.00		-0.35
2,-2	-156.73	+0.00		-0.22
3,-2	-8.64			
4,-2	-0.47			
1,-3	+1.53		+0.04	-0.68
2,-3	-9.24		-0.03	+3.41
3,-3	-0.51			+0.12
2,-4	-0.38			+1.19
11.				
2,-4		-1.06	-0.04	+0.13
3,-4			-0.09	-0.86
4,-4			-0.04	-0.04
5,-4		+0.02		+0.04
3,-5		+0.50		-0.07
4,-5		+0.12		
3.				
1,1	-0	-0.16		-0.16
2,1	+3	+0.14		-0.02
3,1	+1	-1.35		-0.01
0,0	+	-3.52		+0.02
1,0	-	-0.25		
2,0	+1			
3,0				
1,-1				-0.16
2,-1				+1.02
3,-1				+0.05
4.				
0,3		-0.34		-0.05
-1,2		+3.32		+0.07
0,2		+1.94		-0.18
1,2		+0.18		
2,2		+0.24		+0.24
5.		+0.16		+0.16
1,2				
2,2				
3,2		-0.06		-1.03
4.				
2,				+0.06
3				-0.02
4				+0.09
!				
	-0.54	-0.09		-0.63

13.						
2,-1		-0;06		+1;03	+0;04	+0;98
18.						
2,0				-0.06	+0.11	+0.05
3,0				+0.02	-0.03	-0.01
4,0				-0.09	+0.18	+0.09
6.						
1,-1	-0;05	-0.09				-0.14
7.						
2,-3	+0.18					+0.18
3,-3	-0.72	+0.09				-0.63
8.						
1,1	+0.29	+0.09				+0.38
9.						
3,-1	+0.71	-0.09				+0.62
10.						
1,-3	-0.25					-0.25

Ferner für Σ .

g, g'	Y sin	Y_1 sin	Y_2 sin	$\frac{1}{2}OQ$ sin	N sin
1.					
1,0		+3;67		-0;06	+3;64
2,0		+0.25		+0.05	+0.30
-1,-1		-0.12			-0.12
0,-1		-0.05			-0.05
1,-1		+0.18			+0.18
2.					
1,-1	-0;22	+0.05			-0.17
2,-1	+1.32	+0.50		+0.02	+1.84
3,-1	+0.07	+0.40			+0.17
0,-2	-1.19	-0.02	+0;04		-1.17
1,-2	+25.96	-0.03	+0.08	-0.15	+25.86
2,-2	-156.73	+0.09	+0.09	+0.86	-155.69
3,-2	-8.61		+0.04	+0.06	-8.51
4,-2	-0.47				-0.47
1,-3	+1.53	-0.02			+1.51
2,-3	-9.21	-0.50		+0.07	-9.64
3,-3	-0.51	-0.13			-0.64
2,-4	-0.38	-0.03			-0.41

www.libtool.cn

<u>11.</u>					
2,-4		-0.34			+0.34
3,-4		-3.25		+0.02	-3.23
4,-4		-1.91		+0.01	-1.90
5,-4		-0.18			-0.18
3,-5		-0.35			-0.35
4,-5		-0.22			-0.22
<u>3.</u>					
1,1	-0.65	-0.04		+0.01	-0.68
2,1	+3.94	-0.50		-0.03	+3.41
3,1	+0.22	-0.10			+0.12
0,0	+1.19				+1.19
1,0	-25.94		-0.04	+0.13	-25.85
2,0	+156.59	+0.06	-0.09	-0.86	+155.70
3,0	+8.60		-0.04	-0.04	+8.52
1,-1	-0.65	+0.02		+0.01	-0.62
2,-1	+3.94	+0.50		-0.07	+4.37
3,-1	+0.22	+0.12			+0.34
<u>4.</u>					
0,3		-0.16	.		-0.16
-1,2		+0.14		-0.02	+0.12
0,2		-1.35		-0.04	-1.36
1,2		-3.52		+0.02	-3.50
2,2		-0.25			-0.25
<u>5.</u>					
1,2				-0.16	
2,2	+0.32			+1.02	+1.34
3,2				+0.05	
<u>12.</u>					
2,-2		-0.34		-0.05	-0.36
3,-2		+3.32		+0.07	+3.39
4,-2		+1.91		-0.18	-1.73
5,-2		+0.18			+0.18
3,-3		+0.24			+0.24
4,-3		+0.16			+0.16
<u>13.</u>					
2,-4		-0.06		-1.03	-1.09
<u>18.</u>					
2,0				+0.06	+0.06
3,0				-0.02	-0.02
4,0				+0.09	+0.09
<u>6.</u>					
1,-1	-0.54	-0.09			-0.63

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 279

7.					
2,-3	+0,18				+0,18
3,-3	-0.72	+0,09			-0.63
8.					
1,1	+0.29	+0.09			+0.38
9.					
3,-1	+0.71	-0.09			+0.62
10.					
1,-3	+0.24				+0.24

mit erhalten wir wieder schliesslich

g'	Σ_0 sin	Σ_1 sin	Σ_2 sin	Σ_3 sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
1.						
1,0		-40,349	-0,006	+0,013	-0,013	-0,011
2,0		-2.895	-0.005	+0.006	+0.008	+0.008
1,0		-0.191				
.0		-0.013				
, -1		+0.006	-0.004			
, -1		+0.103	-0.029			
, -1		+1.509	-0.144	-0.001		
-1		+0.34128	-0.14179	-0.00021	-0.00033	+0.00002
-1		-2.115	-0.148			
-1		-0.181	-0.036			
-1		-0.013	-0.004			
-2		+0.002				
-2		+0.052	-0.006			
-2		+0.0235	-0.0092			
-2		-0.061	-0.009			
-2		-0.006				
-3		+0.002				
-3		-0.002				
		+0.000811	-0.000119	-0.000091		
		-0.009	+0.002			
		-0.016	+0.008			
		-0.003				
-1	+0,001	+0.001	+0.003			
-1	-0.11110	+0.08046	-0.02007	-0.00162	-0.00002	-0.00002
-1	+2.425	-0.472	-0.036	+0.001	+0.003	
-1	-14.635	-5.582	-0.038	+0.004	-0.018	
-1	-0.804	-1.082	-0.014	+0.002		
-1	-0.044	-0.094	-0.002			
-1	-0.003	-0.006				

<u>1.</u>				
0,-1,-1	+6,368 -4.38028 -2.446	+2,182 -3.566 -0.465	+1,367	+2,819 -0.844 -1.954
0,0,-1	+0.45765 +30.47233 -27.30352	-0.104 +29.920 -26.443	+0.49896	+0.363 +0.552 -0.891
0,1,1	-9.348 +4.642 +6.06734	-2.477 +1.175 +4.839	-2.263	-4.578 +3.437 +1.228
0,2,-1	-1.034 +0.630 +0.271	-0.097 +0.057 +0.144	-0.217	-0.720 +0.573 +0.127
0,3,-1	-0.096 +0.068 +0.049	-0.004 +0.003 +0.009	-0.017	-0.075 +0.065 +0.040
0,-2,-2	+0.009 -0.004 -0.006		+0.002	+0.007 -0.004 -0.006
0,-1,-2	+0.189 -0.1278 -0.069	+0.052 -0.100 -0.008	+0.046	+0.091 -0.028 -0.061
0,0,-2	+0.0387 +0.7722 -0.6789	-0.004 +0.752 -0.633	+0.0143	+0.025 +0.020 -0.046
0,1,-2	-0.278 +0.148 +0.1755	-0.063 +0.036 +0.137	-0.070	-0.145 +0.112 +0.039
0,2,-2	-0.032 +0.021 +0.040	-0.002 +0.004 +0.005	-0.006	-0.024 +0.020 +0.005
0,-1,-3	+0.007 -0.004 -0.002			+0.007 -0.004 -0.002
0,0,-3	+0.003 +0.047 -0.049	+0.005 +0.046 -0.045	+0.002	-0.004 +0.004 -0.004
0,1,-3	-0.006 +0.002 +0.004	+0.003 0.000 +0.004	-0.002	-0.007 +0.002 0.000
<u>2.</u>				
0,-1,0	0.000 +0.00009 0.000			
0,0,0	+0.000634 -0.00188 +0.00074		+0.000604	
0,1,0	-0.024 +0.0073 +0.01396	-0.004 -0.004 +0.009	-0.007	-0.016 +0.008 +0.005

www.lib2ol.com.cn

0,2,0	-0,24 +0.008 +0.020	0,000 +0.002 +0.014	-0,008	-0,016 +0.006 +0.006
0,3,0	0.000 -0.003 +0.002		-0.003	+0.003 -0.003 +0.002
0,-1,-1	-0.008 +0.00088 +0.007		-0.004	-0.007 +0.004 +0.007
0,0,-1	+0.03404 +0.00405 +0.10810	+0.098 +0.014 +0.045	-0.05237	-0.042 -0.010 +0.063
0,1,-1	+1.408 -1.676 -2.31921	-2.906 +0.211 -1.202	+1.921	+2.393 -1.887 -1.117
0,2,-1	-60.929 +23.000 +52.711	-0.161 +0.087 +35.188	-20.269	-40.499 +22.913 +17.523
0,3,-1	-7.608 +3.781 +3.175	-0.015 +0.002 +1.739	-1.898	-5.695 +3.779 +1.436
0,4,-1	-0.728 +0.424 +0.205	0.000 0.000 +0.095	-0.140	-0.588 +0.424 +0.110
0,5,-1	-0.062 +0.040 +0.013		-0.009	
0,-2,-2	-0.013 +0.002 +0.015		-0.003	
0,-1,-2	-0.027 +0.1808 +0.069	+0.065 +0.101 +0.007	-0.104	+0.012 +0.080 +0.062
0,0,-2	-1.5059 -14.8068 -3.4649	-24.896 -1.470 -0.781	+13.1051	+10.285 -13.337 -2.684
0,1,-2	-434.396 +300.571 +494.8991	+288.128 +12.387 +301.877	-289.135	-433.389 +288.184 +193.022
0,2,-2	+5213.220 -1714.138 -5237.630	+6.853 +6.736 -3193.343	+1740.750	+3465.617 -1720.874 -1744.287
0,3,-2	+427.338 -187.976 -191.162	-0.234 +0.539 -95.532	+95.093	+332.479 -188.515 -95.630
0,4,-2	+30.949 -15.945 -9.072	-0.025 +0.035 -3.871	+5.137	+25.837 -15.980 -5.204

2.				
0,5,-2	+2.187 -1.244 -0.490	+0.001 0.000 -0.188	+0.290	+1.896 -1.244 -0.302
0,6,-2	+0.456 -0.096 -0.030		+0.018	
0,-1,-3	-0.007 +0.012 +0.009		-0.008	+0.001 +0.012 +0.009
0,0,-3	-0.458 -0.810 -0.198	-1.420 -0.092 -0.054	+0.722	+0.540 -0.718 -0.144
0,1,-3	-24.442 +17.837 +28.312	+17.380 +0.881 +17.248	-16.855	-24.967 +16.956 +11.064
0,2,-3	+323.093 -108.648 -316.096	+0.490 +0.647 -210.754	+107.823	+214.780 -109.295 -105.342
0,3,-3	+29.903 -13.564 -13.241	-0.029 +0.056 -6.849	+6.964	+22.974 -13.620 -6.392
0,4,-3	+2.381 -1.273 -0.692	-0.003 +0.003 -0.311	+0.423	+1.964 -1.276 -0.381
0,5,-3	+0.184 -0.109 -0.041		+0.026	+0.158 -0.109 -0.030
0,0,-4	-0.005 -0.030 -0.006	-0.056 -0.004 -0.002	+0.028	+0.023 -0.026 -0.004
0,1,-4	-0.964 +0.731 +1.135	+0.721 +0.041 +0.692	-0.681	-1.001 +0.691 +0.442
0,2,-4	+13.684 -4.672 -13.127	+0.023 +0.039 -8.749	+4.566	+9.095 -4.712 -4.371
0,3,-4	+1.393 -0.647 -0.613	-0.002 +0.002 -0.325	+0.337	+1.051 -0.641 -0.281
0,4,-4	+0.120 -0.065 -0.035		+0.021	+0.091 -0.061 -0.041
0,1,-5	-0.033 +0.023 +0.037	+0.024 +0.024	-0.024	-0.031 +0.021 +0.011
0,2,-5	+0.488 -0.170 -0.463	+0.001 -0.309	+0.162	+0.321 -0.171 -0.151

www.lit2ool.com.cn

0,3,-5	+0,053 -0.026 -0.023	-0,010	+0,012	+0,041 -0.026 -0.013
11. 0,2,-2	+0.003 -0.003 0.000	-0.002	+0.002	+0.003 -0.003 0.000
0,3,-2	-0.056 +0.028 +0.029	+0.019	-0.019	-0.037 +0.028 +0.010
0,4,-2	-0.003 +0.003 0.000			
0,4,-3	-0.003 +0.003 0.000	+0.003	-0.003	-0.003 +0.003 0.000
0,2,-3	+0.118 -0.115 -0.034	-0.050 +0.004 -0.025	+0.064	+0.104 -0.119 -0.009
0,3,-3	-1.997 +1.048 +0.927	-0.034 +0.002 +0.618	-0.648	-1.315 +1.046 +0.309
0,4,-3	-1.528 +0.850 +0.650	-0.003 +0.422	-0.479	-1.046 +0.850 +0.228
0,5,-3	-0.256 +0.160 +0.079	+0.042	-0.064	-0.192 +0.160 +0.037
0,0,-4	-0.001 -0.001 +0.003		+0.001	
0,4,-4	-0.003 -0.193 +0.072	-0.030 -0.013 +0.031	+0.011	+0.016 -0.180 +0.041
0,2,-4	-5.762 +6.836 +0.575	+3.119 +0.142 +0.377	-3.483	-5.398 +6.694 +0.198
0,3,-4	+110.433 -52.622 -56.654	+1.658 +0.177 -37.806	+36.128	+72.647 -52.799 -18.848
0,4,-4	+67.966 -34.834 -31.355	+0.120 +0.060 -20.234	+21.120	+46.726 -34.894 -11.121
0,5,-4	+9.531 -5.534 -3.045	+0.006 +0.006 -1.631	+2.213	+7.312 -5.540 -1.414
0,6,-4	+1.010 -0.639 -0.248	-0.416	+0.185	+0.825 -0.639 -0.132

<u>14.</u>				
0,7,-4	+0.083 -0.056 -0.016		+0.042	
0,4,-5	+0.002 -0.021 +0.006	-0.004	+0.004	+0.002 -0.021 +0.006
0,2,-5	-0.574 +0.702 +0.054	+0.328 +0.017 +0.036	-0.357	-0.545 +0.685 +0.018
0,3,-5	+11.744 -5.609 -5.940	+0.216 +0.025 -3.967	+3.812	+7.683 -5.634 -1.973
0,4,-5	+8.832 -4.569 -4.070	+0.018 +0.007 -2.645	+2.780	+6.034 -4.576 -1.425
0,5,-5	+1.326 -0.784 -0.422	-0.227	+0.316	+1.010 -0.784 -0.195
0,6,-5	+0.137 -0.094 -0.034	-0.015	+0.023	+0.114 -0.094 -0.019
0,2,-6	-0.040 +0.046 +0.006	+0.019 +0.004	-0.024	-0.035 +0.046 +0.002
0,3,-6	+0.764 -0.369 -0.385	+0.015 -0.258	+0.246	+0.503 -0.369 -0.127
0,4,-6	+0.688 -0.359 -0.317	-0.205	+0.216	+0.472 -0.359 -0.112
0,5,-6	+0.103 -0.061 -0.034	-0.016	+0.021	+0.082 -0.061 -0.018
0,3,-7	+0.037 -0.019 -0.019	-0.013	+0.012	+0.025 -0.019 -0.006
0,4,-7	+0.035 -0.018 -0.017	-0.012	+0.012	+0.023 -0.018 -0.005
<u>15.</u>				
0,4,-5	-0.048 +0.037 +0.016	+0.010	-0.016	-0.032 +0.037 +0.006
0,5,-5	-0.068 +0.047 +0.022	+0.014	-0.020	-0.048 +0.047 +0.008
0,3,-6	-0.059 +0.117 -0.005	+0.038 -0.004	-0.039	-0.058 +0.117 -0.004

-6	+1,907 -1.156 -0.686	+0,044 +0.002 -0.460	+0,616	+1,247 -1.158 -0.226
-6	+2.377 -1.518 -0.821	+0.013 +0.002 -0.534	+0.754	+1.610 -1.520 -0.287
-6	+0.952 -0.634 -0.298		+0.275	+0.677 -0.634 -0.112
-6	+0.170 -0.122 -0.043		+0.040	+0.130 -0.122 -0.019
-7	-0.009 +0.014 0.000	+0.003	-0.006	-0.006 +0.014 0.000
-7	+0.288 -0.178 -0.104	+0.005 -0.068	+0.093	+0.200 -0.178 -0.036
-7	+0.447 -0.271 -0.144	+0.004 -0.094	+0.134	+0.284 -0.271 -0.050
-7	+0.185 -0.124 -0.058		+0.053	+0.132 -0.124 -0.022

76.

jetzt, um T zu erhalten, nur noch zufolge der ersten
) die Producte

$$\bar{G}\nu; \bar{U} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\}; \bar{\Sigma}(2\nu + \nu^2)$$

deren Factors im Vorhergehenden enthalten sind. Diese
 den sich in der folgenden Tafel, welcher ich \bar{T} hinzugefügt
 e Glieder, aus welchen jetzt T besteht, neben einander

\bar{T} sin	$\bar{G}\nu$ sin	(U) sin	(Σ) sin	T sin
1152,442	-18,858	-1,046		+1132,538
-216.412	+1.479	-36.539	-18,923	-270.395
+91.148	+0.537	+18.133		+109.818
+156.72478	+16.81227	+18.35442		+191.89147

$$(U) = \bar{U} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\}; (\Sigma) = \bar{\Sigma}(2\nu + \nu^2)$$

1.					
0,2,0	-16.164 +9.404 +3.698	-0.047 +0.034 +0.932	-2,494 +1.495 +0.486	-4,382	-20,700 +10.9 +5.4
0,3,0	-1.346 +0.879 +0.249	-0.003 0.000 +0.012	-0.205 +0.134 +0.039	-0.086	-1.6 +1.0 +0.33
0,4,0	-0.408 +0.076 +0.017		-0.013 +0.009 +0.003	-0.004	-0.12 +0.08 +0.02
0,-3,-1	+0.044 -0.040 -0.028		+0.009 -0.001 -0.005	+0.002	+0.055 -0.011 -0.03
0,-2,-1	+0.429 -0.404 -0.228	+0.044 -0.040 -0.007	+0.097 -0.024 -0.055	+0.048	+0.58 -0.1 -0.5
0,-1,-1	+6.368 -4.38028 -2.416	-0.054 -0.46406 -0.137	+1.161 -0.60518 -0.554	+0.629	+8. -5. -3.
0,0,-1	+0.45765 +30.47233 -27.30352	-0.05060 -0.83144 +0.68938	+0.24316 -0.17679 -0.08035	+0.41593	+0 +20 -25
0,1,-1	-9.348 +4.612 +6.06734	+0.064 -0.107 +1.07765	-2.060 +1.047 +1.01206	-1.074	-12 +5 +8
0,2,-1	-1.034 +0.630 +0.274	+0.009 -0.005 +0.037	-0.121 +0.076 +0.013	-0.070	-1 +0 +0
0,3,-1	-0.096 +0.068 +0.019		-0.007 +0.005 +0.003	-0.006	-0. +0.4 +0.4
0,-2,-2	+0.009 -0.001 -0.006		+0.001 -0.001 -0.001		+0.0 -0.0 -0.0
0,-1,-2	+0.489 -0.1278 -0.069	-0.003 -0.0147 -0.005	+0.037 -0.0190 -0.017	+0.019	+0.24 -0.10 -0.01
0,0,-2	+0.0387 +0.7722 -0.6789	-0.0044 -0.0342 +0.0235	+0.0183 -0.0111 -0.0078	+0.0079	+0.01 +0.7 -0.6
0,1,-2	-0.278 +0.448 +0.1755	+0.004 -0.004 +0.0327	-0.064 +0.034 +0.0302	-0.035	-0.3 +0.1 +0.2
0,2,-2	-0.032 +0.021 +0.040		-0.002 +0.001 -0.001	-0.004	-0.0 +0.0 +0.0
0,-1,-3	+0.007 -0.004 -0.002				+0.0 -0.0 -0.0

RECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 289

-3	+0,003 +0.017 -0.019	-0,002 +0.001	+0,001	+0,002	+0,006 +0.015 -0.018
-3	-0.006 +0.002 +0.004	+0.002	-0.001	-0.002	-0.009 +0.002 +0.006
1,0	0.000 +0.00009 0.000	-0.00001	-0.00003		+0.00005
0,0	+0.000634 -0.00188 +0.00071	-0.000270 +0.00003 -0.00038	+0.000623 -0.00069 +0.00001	+0.000503	+0.001490 -0.00254 +0.00037
0,0	-0.024 +0.0073 +0.01396	0.000 +0.0012 +0.00335	-0.011 +0.0028 +0.00419	-0.003	-0.038 +0.0113 +0.02150
0,0	-0.024 +0.008 +0.020	-0.001	+0.002 -0.001 -0.003	+0.003	-0.019 +0.006 +0.017
0,0	0.000 -0.003 +0.002				0.000 -0.003 +0.002
-1	-0.008 +0.00088 +0.007	+0.003 +0.00068	-0.005 +0.00186 +0.004	-0.003	-0.013 +0.00342 +0.011
-1	+0.03401 +0.00405 +0.10810	-0.04847 +0.01273 -0.02109	+0.05195 -0.05546 -0.00906	+0.04578	+0.08327 -0.03868 +0.07795
-1	+1.408 -1.676 -2.31921	+0.030 -0.089 +0.58714	-0.962 +0.486 +0.48561	-0.511	-0.035 -1.279 -1.24646
-1	-60.929 +23.000 +52.711	+0.036 -0.056 -0.336	+0.465 -0.226 -0.243	+0.392	-60.036 +22.718 +52.132
-1	-7.608 +3.781 +3.175	+0.002 -0.002 -0.340	+0.730 -0.369 -0.353	+0.355	-6.521 +3.410 +2.182
-1	-0.728 +0.424 +0.205	-0.019	+0.088 -0.048 -0.028	+0.028	-0.612 +0.376 +0.158
-1	-0.062 +0.040 +0.013		+0.007 -0.004 -0.002		-0.055 +0.036 +0.011
-2	-0.013 +0.002 +0.015		-0.006 +0.001 +0.004	-0.002	-0.021 +0.003 +0.019
-2	-0.027 +0.1808 +0.069	-0.027 +0.0185 +0.015	-0.062 +0.0016 +0.052	-0.037	-0.153 +0.2009 +0.136

2.					
0,0,-2	-175059 -14.8068 -3.4649	-0,2695 +0.4494 +0.3272	-0,8552 +0.2798 +0.6444	-0,6023	-3,2329 -14.0776 -2.5263
0,1,-2	-434.396 +300.571 +494.8991	-2.219 -5.469 +3.2534	+2.601 -1.701 -1.0922	+4.098	-429.916 +293.401 +497.0603
0,2,-2	+5243.220 -1714.438 -5237.630	+0.484 -4.399 +26.453	-12.674 +6.313 +6.426	-22.557	+5178.476 -1712.224 -5204.751
0,3,-2	+427.338 -187.976 -194.462	+0.368 -0.342 -0.390	+2.296 -1.200 -1.269	-0.264	+429.738 -189.488 -192.821
0,4,-2	+30.949 -15.945 -9.072	+0.025 -0.049 -0.060	+0.444 -0.248 -0.453	+0.050	+34.465 -16.212 -9.285
0,5,-2	+2.187 -1.244 -0.490	+0.001 -0.004	+0.048 -0.032 -0.014	+0.007	+2.213 -1.276 -0.508
0,6,-2	+0.456 -0.096 -0.030		+0.008 -0.006 -0.001		+0.164 -0.402 -0.031
0,-1,-3	-0.007 +0.012 +0.009	-0.002	-0.007 +0.004	-0.001	-0.017 +0.012 +0.013
0,0,-3	-0.458 -0.810 -0.198	+0.007 +0.029 +0.038	-0.422 +0.064 +0.072	-0.080	-0.353 -0.720 -0.088
0,1,-3	-24.442 +17.837 +28.312	-0.427 -0.367 -0.066	+0.724 -0.379 -0.345	+0.510	-23.338 +17.091 +27.901
0,2,-3	+323.093 -108.648 -316.096	-0.001 -0.427 +1.482	-0.445 +0.060 +0.091	-4.402	+321.845 -109.015 -314.523
0,3,-3	+29.903 -43.564 -43.244	+0.032 -0.033 +0.400	-0.554 +0.260 +0.290	-0.434	+28.950 -43.337 -42.551
0,4,-3	+2.384 -4.273 -0.692	+0.004 +0.049	-0.053 +0.027 +0.018	-0.028	+2.304 -4.246 -0.655
0,5,-3	+0.484 -0.409 -0.044		-0.006 +0.004 +0.001		+0.478 -0.405 -0.040
0,0,-4	-0.005 -0.030 -0.006	+0.004 +0.004 +0.002	-0.004 +0.003 +0.001	-0.002	-0.010 -0.026 -0.003
0,1,-4	-0.964 +0.734 +1.435	-0.005 -0.017 -0.044	+0.043 -0.023 -0.022	+0.033	-0.890 +0.691 +1.402

RECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 291

-4	+13,684 -4.672 -13.427	-0,025 +0.061	+0,019 -0.010 -0.009	-0,038	+13,665 -4.707 -13.075
-4	+1.393 -0.647 -0.613	+0.002 +0.032	-0.050 +0.023 +0.025	-0.033	+1.312 -0.624 -0.556
-4	+0.120 -0.065 -0.035		-0.008 +0.005 +0.002	-0.002	+0.110 -0.060 -0.033
-5	-0.033 +0.023 +0.037		+0.002 -0.001 -0.001		-0.031 +0.022 +0.036
-5	+0.488 -0.170 -0.463	+0.002		-0.002	+0.486 -0.170 -0.461
-5	+0.053 -0.026 -0.023		-0.002 +0.001 +0.001		+0.051 -0.025 -0.022
2	+0.003 -0.003 0.000		-0.003 +0.002 +0.001	-0.002	-0.002 -0.001 +0.001
2	-0.056 +0.028 +0.029	-0.009	+0.018 -0.009 -0.010	-0.009	-0.029 +0.019 +0.010
2	-0.003 +0.003 0.000				-0.003 +0.003 0.000
3	-0.003 +0.003 0.000		-0.003 +0.003 +0.001		-0.006 +0.006 +0.001
3	+0.118 -0.115 -0.034	+0.025 -0.001 +0.009	-0.055 +0.043 +0.017	-0.031	+0.057 -0.073 -0.008
3	-1.997 +1.048 +0.927	+0.022 -0.001 -0.278	+0.481 -0.247 -0.222	+0.290	-1.204 +0.800 +0.427
3	-1.528 +0.850 +0.650	+0.001 -0.285	+1.002 -0.544 -0.450	+0.320	-0.205 +0.306 -0.085
3	-0.256 +0.160 +0.079		+0.164 -0.100 -0.051	+0.044	-0.051 +0.060 0.000
4	-0.001 -0.001 +0.003	+0.003	+0.005 -0.005 -0.002	-0.001	+0.006 -0.006 +0.001
4	-0.003 -0.193 +0.072	+0.086 +0.009 -0.024	-0.199 +0.185 +0.073	-0.070	-0.186 +0.001 +0.121

11.					
0,2,-4	-5.762 +6.836 +0.575	-1.381 -0.087 -1.051	+4.294 -2.675 -1.959	+2.407	-0.442 +4.074 -2.435
0,3,-4	+110.433 -52.622 -56.654	-1.095 -0.130 +16.720	-24.423 +11.327 +12.537	-15.741	+69.174 -41.425 -27.397
0,4,-4	+67.966 -34.834 -31.355	-0.069 -0.047 +13.355	-43.627 +21.853 +21.337	-13.778	+10.492 -13.028 +3.337
0,5,-4	+9.531 -5.534 -3.045	-0.001 -0.005 +0.958	-5.865 +3.210 +2.041	-1.339	+2.326 -2.329 -0.046
0,6,-4	+1.010 -0.639 -0.248		-0.560 +0.328 +0.132	-0.100	+0.350 -0.311 -0.037
0,7,-4	+0.083 -0.056 -0.016	+0.059 +0.002	-0.048 +0.029 +0.041	-0.008	+0.027 -0.027 -0.003
0,1,-5	+0.002 -0.021 +0.006	+0.008 -0.004	-0.016 +0.016 +0.005	-0.005	-0.011 -0.005 +0.007
0,2,-5	-0.574 +0.702 +0.054	-0.140 -0.010 -0.105	+0.414 -0.262 -0.185	+0.244	-0.056 +0.430 -0.236
0,3,-5	+11.711 -5.609 -5.940	-0.143 -0.017 +1.695	-2.323 +1.060 +1.186	-1.591	+7.654 -4.566 -3.059
0,4,-5	+8.832 -4.569 -4.070	-0.011 -0.006 +1.747	-5.644 +2.860 +2.733	-1.817	+1.360 -1.715 +0.410
0,5,-5	+1.326 -0.784 -0.422		-0.808 +0.453 +0.277	-0.193	+0.325 -0.331 -0.010
0,6,-5	+0.137 -0.091 -0.034	+0.135 +0.008	-0.081 +0.049 +0.021	-0.044	+0.042 -0.042 -0.005
0,2,-6	-0.040 +0.046 +0.006	-0.010 -0.007	+0.024 -0.017 -0.011	+0.016	-0.010 +0.029 -0.012
0,3,-6	+0.764 -0.369 -0.385	-0.011 +0.105	-0.135 +0.060 +0.069	-0.099	+0.519 -0.309 -0.211
0,4,-6	+0.688 -0.359 -0.317		-0.438 +0.224 +0.211	-0.142	+0.108 -0.135 +0.029
0,5,-6	+0.103 -0.061 -0.034	+0.135 +0.010	-0.062 +0.035 +0.021	-0.015	+0.026 -0.026 -0.003

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 293

<u>14.</u>					
0,3,-7	+0,037 -0.049 -0.049	+0,006	-0,008 +0.003 +0.003	-0,006	+0,023 -0.046 -0.040
0,4,-7	+0.035 -0.048 -0.017	+0.008	-0.024 +0.013 +0.043	-0.008	+0.003 -0.005 +0.004
<u>15.</u>					
4,-5	-0.048 +0.037 +0.016	-0.006	+0.019 -0.013 -0.006	+0.008	-0.021 +0.024 +0.004
5,-5	-0.068 +0.047 +0.022	-0.010	+0.043 -0.031 -0.012	+0.016	-0.009 +0.016 0.000
3,-6	-0.059 +0.147 -0.005	-0.023 -0.004 -0.004	+0.072 -0.071 -0.040	+0.036	+0.026 +0.042 -0.049
4,-6	+1.907 -1.156 -0.686	-0.032 -0.003 +0.280	-0.679 +0.427 +0.226	-0.385	+0.811 -0.732 -0.180
5,-6	+2.377 -1.518 -0.821	-0.010 -0.001 +0.396	-1.505 +1.048 +0.445	-0.569	+0.293 -0.171 +0.020
6,-6	+0.951 -0.634 -0.298	+0.112	-0.584 +0.455 +0.111	-0.219	+0.149 -0.179 -0.012
7,-6	+0.170 -0.122 -0.043	+0.015	-0.109 +0.083 +0.019	-0.027	+0.034 -0.039 -0.009
3,-7	-0.009 +0.011 0.000	-0.002	+0.012 -0.011 -0.002	+0.005	+0.006 +0.003 -0.002
4,-7	+0.288 -0.178 -0.101	-0.003 +0.011	-0.035 +0.062 +0.033	-0.033	+0.134 -0.114 -0.030
5,-7	+0.417 -0.271 -0.111	-0.011 +0.049	-0.263 +0.183 +0.074	-0.079	+0.033 -0.088 +0.004
6,-7	+0.183 -0.124 -0.039	+1.028	-0.113 +0.090 +0.022	-0.011	+0.031 -0.034 -0.010

Wie oben werde ich auch hier von dem Coefficienten des Argument 1,0.0 in 1., welcher die Bewegung des Perigäums giebt, die einzelnen Combinationen ansetzen.

in $\bar{G}\nu$			in $\bar{U} \left\{ (1+\nu) \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\}$		
1.	1.	1,0,0 in 1.	1.	1.	1,0,0 in 1.
0,0	1,0,0	-0,87254	0,0	1,0,0	-0,07605
1,0	1,1,0	+ 40	1,0	1,1,0	+ 158
-1,-1	1,-1,-1	- 247	-2,-1	1,-2,-1	- 1
0,-1	1,0,-1	+ 29	-1,-1	1,-1,-1	- 18
1,-1	1,1,-1	- 2	0,-1	1,0,-1	+ 18
1,0	-1,1,0	- 25857	1,-1	1,1,-1	- 3
2,0	-1,2,0	- 48	1,0	-1,1,0	- 944
0,-1	-1,0,-1	+ 21	2,0	-1,2,0	- 238
1,-1	-1,1,-1	+ 369	3,0	-1,3,0	- 2
2.	2.		-1,-1	-1,-1,-1	+ 1
1,-1	1,1,-1	+ 119	0,-1	-1,0,-1	+ 12
2,-1	1,2,-1	+ 7	1,-1	-1,1,-1	+ 13
0,-2	1,0,-2	- 3782	2,-1	-1,2,-1	+ 2
1,-2	1,1,-2	+17.53924	2.	2.	
2,-2	1,2,-2	+ 35019	1,-1	1,1,-1	+ 109
3,-2	1,3,-2	+ 65	2,-1	1,2,-1	+ 18
0,-3	1,0,-3	- 40	-1,-2	1,-1,-2	+ 2
1,-3	1,1,-3	+ 4518	0,-2	1,0,-2	+ 3833
2,-3	1,2,-3	+ 177	1,-2	1,1,-2	+14.79114
1,-4	1,1,-4	+ 6	2,-2	1,2,-2	+1.13083
2,-4	-1,2,-1	- 1	3,-2	1,3,-2	+ 262
0,-2	-1,0,-2	+ 1	0,-3	1,0,-3	+ 3
1,-2	-1,1,-2	- 738	1,-3	1,1,-3	+ 3499
2,-2	-1,2,-2	+ 4540	2,-3	1,2,-3	+ 517
3,-2	-1,3,-2	+ 113	3,-3	1,3,-3	+ 1
1,-3	-1,1,-3	- 2	1,-4	1,1,-4	+ 5
2,-3	-1,2,-3	+ 23	2,-4	1,2,-4	+ 1
3,-3	-1,3,-3	+ 1	2,-1	-1,2,-1	+ 24
11.	11.		3,-1	-1,3,-1	- 15
2,-4	1,2,-4	+ 107	0,-2	-1,0,-2	- 2
3,-4	1,3,-4	+ 88	1,-2	-1,1,-2	- 14308
4,-4	1,4,-4	+ 2	2,-2	-1,2,-2	+3.40780
2,-5	1,2,-5	+ 1	3,-2	-1,3,-2	- 86724
3,-5	1,3,-5	+ 1	4,-2	-1,4,-2	- 449
		+16,81227	5,-2	-1,5,-2	- 2
			1,-3	-1,1,-3	- 24
			2,-3	-1,2,-3	+ 1371
			3,-3	-1,3,-3	- 391
			4,-3	-1,4,-3	- 2
			2,-4	-1,2,-4	+ 3
			3,-4	-1,3,-4	- 1
			11.	11.	
			2,-4	1,2,-4	+ 88
			3,-4	1,3,-4	+ 71
			4,-4	1,4,-4	- 4
			3,-5	1,3,-5	+ 1
			2,-4	-1,2,-4	- 1
			3,-4	-1,3,-4	+ 43
			4,-4	-1,4,-4	+ 138
			5,-4	-1,5,-4	+ 4
			4,-5	-1,4,-5	+ 2
					+18,35442

in der vorstehenden Tafel angegeben ist.

77.

Es ist schon bemerkt worden, dass in den vorstehenden Zahlenreihen, mit Ausnahme der Glieder, die von δP und δQ herrühren, nur Abtheilungen 1, 2, 11, 15 berücksichtigt worden sind, da die übrigen Abtheilungen nur wenig oder nichts hinzufügen. Es sind im Vorgehenden die Daten enthalten, durch welche Jeder sich überzeugen kann, dass dieses in der That der Fall ist. Nur Eine Ausnahme wurde bemerkt, und diese betrifft den Coefficienten des Arguments 1,0,0 der Abtheilung 1, welcher die Bewegung des Perigäums giebt. Da in diesem die letzte der hier angegebenen Decimalen noch merklichen Werth hat,* so müssen die genannten, übrigens zu übergehenden, Glieder, wenn man untersuchen will wie nahe der berechnete Werth der Bewegung des Perigäums mit dem beobachteten übereinstimmt, mit zugegeben werden.

Berücksichtigen wir zuerst nur das Quadrat der störenden Kraft, reduciren sich die Ausdrücke (17) auf die folgenden.

$$T^{(1)} = T_0^{(1)} + \left(\frac{dT_0^{(1)}}{dg}\right) n\delta z + \{2T_0^{(1)} - G_0^{(1)}\} \nu - 2\{T_0^{(1)} - G_0^{(1)}\} \delta \frac{h_0}{h}$$

$$T^{(2)} = T_0^{(2)} + \left(\frac{dT_0^{(2)}}{dg}\right) n\delta z + \{3T_0^{(2)} - G_0^{(2)}\} \nu - 2\{T_0^{(2)} - G_0^{(2)}\} \delta \frac{h_0}{h}$$

und aus den in den vorhergehenden Tafeln enthaltenen numerischen Reihen findet man leicht,

$$\begin{aligned} &= -0,059 \cos(-1,1,0, \text{ in } 3.); & 2T_0^{(1)} - G_0^{(1)} &= +2,724 \sin(1,0,0, \text{ in } 3.) \\ &-21.209 \cos(1,1,0, \text{ » }) & &-0.112 \sin(-1,1,0, \text{ » }) \\ &+2,324 \cos(-1,2,0, \text{ » }) & &-28.264 \sin(1,1,0, \text{ » }) \\ &-1,552 \cos(1,2,0, \text{ » }) & &+2,324 \sin(-1,2,0, \text{ » }) \\ &+7.069 \cos(-1,1,2, \text{ in } 4.) & &-1.164 \sin(1,2,0, \text{ » }) \\ &+7.069 \cos(1,-1,2, \text{ » }) & &+7.069 \sin(-1,1,2, \text{ in } 4.) \\ & & &-0.583 \sin(-1,0,2, \text{ » }) \\ & & &+0.583 \sin(1,0,2, \text{ » }) \\ & & &-7.069 \sin(1,-1,2, \text{ » }) \\ &= -0,204 \cos(-1,1,-1, \text{ in } 6.); & 3T_0^{(2)} - G_0^{(2)} &= -0,261 \sin(-1,1,-1, \text{ in } 6.) \\ &+0.262 \cos(1,1,-1, \text{ » }) & &+0.553 \sin(1,1,-1, \text{ » }) \end{aligned}$$

* Man wird weiter unten sehen, dass die Zahlenwerthe des genannten Coefficienten nahe 767,7 Mal vergrößert in die jährliche Bewegung des Perigäums übergehen.

P. A. HANSEN,

$$\begin{aligned}
 -1''558 \sin(1,0,0, \text{ in } 3.) \\
 +14.110 \sin(1,1,0, \text{ " }) \\
 -2.324 \sin(-1,2,0, \text{ " })
 \end{aligned}$$

Man hat nun oben gegebenen numerischen Werthen vor
 zusetzen nach der Ausführung der Multiplicationen.

$\frac{d^2 T_0^{(1)} - G_0^{(1)}}{dy} n dz$	$\{2T_0^{(1)} - G_0^{(1)}\} \nu + \{3T_0^{(2)} - G_0^{(2)}\} \nu$		
1,0,0, in 1.	3.	3.	1,0,0, in 1.
+0,00004	0,0	1,0,0	+0,00001
- 436	1,0	-1,1,0	+ 1
+ 2	1,0	1,1,0	- 288
+ 2	2,0	-1,2,0	+ 2
	2,0	1,2,0	+ 1
- 19	4.	4.	
- 8	-1,2	1,-1,2	- 8
	0,2	-1,0,2	+ 1
	0,2	1,0,2	+ 1
- 6	1,2	-1,1,2	- 1
+ 9	6.	6.	
-0,00443	1,-1	-1,1,-1	+ 1
	1,-1	1,1,-1	+ 9
			-0,00280
	$-2\{T_0^{(1)} - G_0^{(1)}\} \frac{d^2 h_0}{h}$		
	3.	3.	1,0,0, in 1.
	0,0	1,0,0	-0,00004
	1,0	1,1,0	- 11
	2,0	-1,2,0	+ 2
			-0,00010

Der Werth, den hier die Combination 1,0 und 1,1,0 in 3. gegeben
 hat, kann man vermuthen, dass der Cubus der störenden Kraft nicht ganz
 vernachlässigt sein wird. Die betreffenden Glieder erhält man aus der
 Formel (17) wie folgt,

$$\frac{d^2 T_0^{(1)}}{dy} (n dz)^2 + \frac{d(2T_0^{(1)} - G_0^{(1)})}{dy} \nu n dz + (T_0^{(1)} - G_0^{(1)}) \left\{ \nu^2 + 3 \left(\frac{d^2 h_0}{h} \right)^2 \right\}$$

und das Vorhergehende giebt die folgenden Zahlenwerthe,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (n dz)^2 &= + 0,87 \cos(1,0,0); \\
 \nu n dz &= + 0,82 \sin(1,0,0); \\
 \nu^2 + 3 \left(\frac{d^2 h_0}{h} \right)^2 &= - 0,57 \cos(1,0,0); \\
 &= + 21,21 \sin(1,1,0, \text{ in } 3.); \\
 &= - 28,26 \cos(1,1,0, \text{ " }); \\
 &= - 7,06 \sin(1,1,0, \text{ " });
 \end{aligned}$$

Die Multiplication giebt hiemit für

$$\begin{array}{r} 4,0,0, \text{ in } 4. \\ \hline +0,00005 \\ +0,00006 \\ \hline +0,00004 \\ \hline +0,00012 \end{array}$$

Addiren wir nun alle in diesem Art. berechneten Producte, so ergibt sich

$$T = -0,00724 \sin(4,0,0, \text{ in } 4.)$$

welche der Tafel des vor. Art. hinzuzufügen sind.

78.

Ausserdem ist noch der Beitrag zur Bewegung des Perigäums zu berücksichtigen, welcher aus $T^{(3)}$ entsteht, und wobei auch das Quadrat der störenden Kraft in Betracht kommt. Es wird in Bezug hierauf ähnlicher Weise wie im vor. Art.

$$T^{(3)} = T_0^{(3)} + \left(\frac{dT_0^{(3)}}{dg}\right) n\delta z + \{4T_0^{(3)} - G_0^{(3)}\} \nu - 2\{T_0^{(3)} - G_0^{(3)}\} \delta \frac{h_0}{h}$$

und die numerischen Angaben der Artt. 58 und 64 geben für den gegenwärtigen Fall

$$\begin{aligned} T_0^{(3)} &= +0,00416 \sin(4,0,0, \text{ in } 4.) \\ \left(\frac{dT_0^{(3)}}{dg}\right) &= -0,019 \cos(4,1,-2, \text{ in } 2.) \\ 4T_0^{(3)} - G_0^{(3)} &= -0,062 \sin(4,1,-2, \text{ in } 2.) \\ -2\{T_0^{(3)} - G_0^{(3)}\} &= +0,010 \sin(4,1,-2, \text{ in } 2.) \end{aligned}$$

Nach der Ausführung der Multiplicationen dieser Glieder mit den Evectionen, d. h. mit den mit $\frac{\sin}{\cos}(4,-2, \text{ in } 2.)$ multiplicirten Gliedern von $n\delta z$, ν , $\delta \frac{h_0}{h}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_0^{(3)} &= +0,00416 \sin(4,0,0, \text{ in } 4.) \\ \left(\frac{dT_0^{(3)}}{dg}\right) n\delta z &= +0,00024 \text{ » » » } \\ \{4T_0^{(3)} - G_0^{(3)}\} \nu &= +0,00034 \text{ « » » } \\ -2\{T_0^{(3)} - G_0^{(3)}\} \delta \frac{h_0}{h} &= -0,00004 \text{ » » » } \\ \hline T^{(3)} &= +0,00467 \sin(4,0,0, \text{ in } 4.) \end{aligned}$$

die ebenfalls dem in der Tafel des Art. 76 enthaltenen, numerischen Werthe des Coefficienten desselben Arguments hinzuzufügen sind.

Es sind ausserdem noch zwei Umstände vorhanden, die auf die Bewegung des Mondes Einfluss haben. diese sind: Die Figur der Erde die Form des Aequators die Anziehung der Planeten, und die in Art. 75 angegebenen Verbesserungen der der Rechnung zu Grunde gelegten Werte der Erdschwerkraft mit der Neigung der Mondbahn. Diese Umstände sollen weiter unten berücksichtigt werden.

73.

Es laßt sich annehmen, dass im Vorhergehenden die Zahlenwerthe enthalten sind, aus welchen die Abtheilungen 1, 2, 41, 45, mit Ausnahme des constanten Theiles des Werthes von $\delta \frac{h}{k}$ des Art. 69 im Voraus berechnet worden sind. Es sind diese die Summen der Columnen für \bar{z} des Art. 73 und für $\bar{z} \pm \sigma$ des Art. 76. Man sieht, dass der Werth von $\frac{h}{k}$ selbst noch nicht gebraucht wird. Die ausserdem noch erforderlichen Werthe der Integrationsdivisoren werden weiter unten angegeben werden.

81.

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Störungen von P und Q nach dem Ausdruck 29), indem wir darin B_0 und C_0 statt T_0 substituiren. Hier können wir einige der Glieder höchster Ordnung übergehen, namentlich die in den Ausdrücken für L , M , O . für welche Grössen wir unmittelbar bez. S , V , Z in die Ausdrücke für H und N substituiren werden. Es ergab sich

für B

q, q	R sin	R_1 sin	R_2 sin	$\frac{1}{2}S\delta P$ sin	$V\delta Q$ sin	H sin
1,						
1,0		-19.99				-19.99
2,0		-1.46				-1.46
3,0		-0.10				-0.10
-2,-1		+0.06				+0.06
-1,-1		+0.75	-0.06			+0.69
0,-1		+0.17	-0.08	+0.01		+0.10
1,-1		-1.06	-0.07			-1.13
2,-1		-0.09	-0.02			-0.11

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 299

1.						
-1,-2		+0,03				+0,03
0,-2		+0.04				+0.04
1,-2		-0.05				-0.05
2.						
0,-1	-0,06	+0.04	-0,04			-0.03
1,-1	+1.22	-0.24	-0.03			+0.95
2,-1	-7.38	-2.81	-0.02			-10.21
3,-1	-0.40	-0.54				-0.94
4,-1	-0.02	-0.04				-0.06
-1,-2	-0.04	+0.04	-0.03			-0.06
0,-2	+6.67	+0.17	-0.22			+6.62
1,-2	-145.46	+0.12	-0.37			-145.69
2,-2	+877.98	+0.18	-0.58	+0,01	+0,02	+877.42
3,-2	+48.22	-0.05	-0.26		-0.17	+47.94
4,-2	+2.65	-0.02	-0.03			+2.60
5,-2	+0.15					+0.15
0,-3	+0.39	-0.02	-0.02			+0.35
1,-3	-8.55	+0.10	-0.04			-8.49
2,-3	+51.61	+2.81	-0.05			+54.37
3,-3	+2.83	+0.71	-0.03			+3.54
4,-3	+0.16	+0.06				+0.22
1,-4	-0.35					-0.35
2,-4	+2.10	+0.20				+2.30
3,-4	+0.12	+0.04				+0.16
2,-5	+0.07					+0.07
11.						
2,-3		+0.04	-0.04			+0.03
3,-3		-0.27	-0.07			-0.34
4,-3		-0.20	-0.04			-0.24
1,-4		+0.02				+0.02
2,-4		-1.75				-1.75
3,-4		+18.24				+18.24
4,-4		+10.68		-0.01		+10.67
5,-4		+1.12				+1.12
6,-4		+0.08				+0.08
2,-5		-0.17				-0.17
3,-5		+1.86	+0.06			+1.92
4,-5		+1.36	+0.05			+1.44
5,-5		+0.14				+0.14
3,-6		+0.13				+0.13
4,-6		+0.09				+0.09
15.						
4,-6		+0.12	+0.20			+0.32
5,-6		+0.16	+0.22			+0.38
6,-6		+0.06	+0.08			+0.14

3.						
2,2	+0.55	-0.10				-
0,1	+0.17	+0.07				-
1,1	-3.62	-0.23				-
2,1	+21.83	-2.82	-0.04			+
3,1	+1.20	-0.55				+
0,0	+6.58	+0.54				+
1,0	-143.59	+0.32	-0.18	-0.04	-0.02	-
2,0	+866.64	-0.87	-0.33	+0.22	+0.12	+80
3,0	+47.60	-0.31	-0.26	+0.01	+0.01	+
4,0	+2.64	-0.02	-0.02			+
0,-1	+0.17					+
1,-1	-3.62	+0.10				-
2,-1	+21.83	+2.74	-0.04			+
3,-1	+1.20	+0.68				+
2,-2	+0.55	+0.10				+
4.						
0,4	+2.11	-0.03				+
-1,3	-2.83	-0.05				-
0,3	+54.71	-0.77	+0.04			+
1,3	-2.83	-1.30	+0.06			-
-2,2	-0.66	+0.02				-
-1,2	-48.07	+0.13		-0.01		-
0,2	+879.74	-7.45		+0.15		+87
1,2	-48.07	-19.55				-
2,2	-0.66	-1.43				-
-1,1	+0.40	+0.09				+
0,1	-7.39	-0.10	-0.04			-
1,1	+0.40	-0.46	-0.07			-
5.						
1,2	-0.87	+0.07			+0.04	-
2,2	+5.28	-0.33		-0.02	-0.18	+
3,2	+0.29	-0.05			-0.01	+
12.						
3,-1		+0.35	-0.07			+
4,-1		+0.16	-0.04			+
2,-2		-1.67				-
3,-2		+17.70				+1
4,-2		+10.54				+1
5,-2		+1.11				+
6,-2		+0.08				+
2,-3		-0.11				-
3,-3		+1.21	+0.06			+
4,-3		+0.99	+0.05			+
5,-3		+0.10				+
3,-4		+0.06				+
4,-4		+0.05				+

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 301

13.						
0,-4		-0,39	-0,23			-0,62
1,-4		-0.12	-0.19	+0,02		-0.29
2,-4		+0.90	-0.05	-0.14		+0.74
3,-4		+0.25				+0.25
0,-5		-0.04	-0.02			-0.06
1,-5		-0.02	-0.02			-0.04
2,-5		+0.09				+0.09
3,-5		+0.03				+0.03
18.						
2,0		+0.05				+0.05
3,0		-0.24				-0.24
4,0		+0.05				+0.05
19.						
0,4		-0.05		-0.02	-0,19	-0.26
1,4		-0.10			+0.01	-0.09
2,4		-0.04				-0.04
6.						
0,-1	-0,07	-0.04				-0.11
1,-1	+0.56	+0.49				+1.05
2,-1	-0.02	+0.04				-0.04
1,-2	+0.03	-0.05				-0.02
7.						
3,-2	0.00	+0.08				+0.08
2,-3	-0.67	-0.04				-0.68
3,-3	+2.68	-0.52				+2.16
4,-3	+0.22	-0.04				+0.18
14.						
4,-5		+0.09				+0.09
5,-5		+0.09				+0.09
8.						
0,1	-0.44	-0.09				-0.53
1,1	+3.21	+0.47				+3.68
2,1	-0.09	+0.02				-0.07
9.						
2,-1	-0.66	+0.03				-0.63
3,-1	+2.62	-0.49				+2.13
4,-1	+0.22	-0.04				+0.18
10.						
0,-3	+0.37	+0.05				+0.42
1,-3	-2.70	+0.02				-2.68
2,-3	+0.07	-0.04				+0.06

Ferner für *B*

<i>g, g'</i>	<i>Y</i> COS	<i>Y</i> ₁ COS	<i>Y</i> ₂ COS	$\frac{1}{2}Z\delta Q$ COS	<i>N</i> COS
1.					
0,0	+870 ^o .02	-7 ^o .45		+0 ^o .20	+862 ^o .77
1,0	-95.07	-19.42		-0.01	-114.50
2,0	-1.30	-1.50		+0.02	-2.78
3,0	-0.04	-0.10			-0.14
-2,-1	-0.03	-0.04			-0.07
-1,-1	-2.39	-0.56	+0 ^o .06		-2.89
0,-1	+43.82	-0.85		+0.02	+42.99
1,-1	-2.39	-1.16	-0.07		-3.62
2,-1	-0.03	-0.11	-0.02		-0.16
-1,-2	-0.06	-0.03			-0.09
0,-2	+1.10	-0.06			+1.04
1,-2	-0.06	-0.05			-0.14
2.					
0,-1	-0.06	+0.07	+0.01		+0.02
1,-1	+1.20	-0.23			+0.97
2,-1	-7.26	-2.79	+0.02		-10.07
3,-1	-0.40	-0.55			-0.95
4,-1	-0.02	-0.04			-0.06
-1,-2	-0.04	+0.01	+0.03		0.00
0,-2	+6.56	+0.94	-0.17		+7.33
1,-2	-143.13	+0.36	+0.01	-0.05	-142.84
2,-2	+863.92	-1.58	-0.48	+0.24	+862.10
3,-2	+47.44	-0.54	-0.26	+0.01	+46.65
4,-2	+2.60	-0.05	-0.02		+2.53
5,-2	+0.15				+0.15
0,-3	+0.39	+0.09	+0.02		+0.50
1,-3	-8.44	+0.11	+0.01		-8.29
2,-3	+50.78	+2.64	-0.03		+53.39
3,-3	+2.79	+0.65	-0.01		+3.43
4,-3	+0.15	+0.06			+0.21
1,-4	-0.34	+0.01			-0.33
2,-4	+2.07	+0.19			+2.26
3,-4	+0.11	+0.04			+0.15
2,-5	+0.07				+0.07
11.					
2,-3		+0.04	-0.01		+0.03
3,-3		-0.27	-0.07		-0.34
4,-3		-0.20	-0.04		-0.24
1,-4		+0.01			+0.01
2,-4		-1.72			-1.72
3,-4		+17.95			+17.95
4,-4		+10.50		+0.01	+10.51
5,-4		+1.10			+1.10
6,-4		+0.08			+0.08

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 303

14.					
2,-5		-0,17			-0,17
3,-5		+1.83	+0,06		+1.89
4,-5		+1.34	+0.05		+1.39
5,-5		+0.14			+0.14
3,-6		+0.12			+0.12
4,-6		+0.09			+0.09
15.					
4,-6		+0.11	+0.19		+0.30
5,-6		+0.16	+0.22		+0.38
6,-6		+0.06	+0.08		+0.14
3.					
2,2	-0,55	+0.40			-0.45
0,4	-0.16	-0.07			-0.23
1,4	+3.59	+0.22			+3.81
2,1	-21.65	+2.77	+0.03		-18.85
3,1	-1.19	+0.55			-0.64
0,0	-6.53	-0.55		-0,02	-7.10
1,0	+142.42	-0.17	+0.17	+0.05	+142.47
2,0	-859.60	+0.19	+0.52	-0.23	-859.12
3,0	-47.21	+0.21	+0.26	-0.01	-46.75
4,0	-2.59	+0.02	+0.02		-2.55
0,-1	-0.16				-0.16
1,-1	+3.59	-0.10			+3.49
2,-1	-21.65	-2.71	+0.03		-24.33
3,-1	-1.19	-0.67			-1.86
2,-2	-0.55	-0.10			-0.65
4.					
0,4	-2.08	+0.05			-2.03
-1,3	+2.79	+0.05			+2.84
0,3	-51.09	+0.76	-0.04	-0.03	-50.40
1,3	+2.79	+1.29	-0.06		+4.02
-2,2	+0.65	-0.02			+0.63
-1,2	+47.48	-0.15		+0.02	+47.35
0,2	-869.06	+7.39		-0.42	-862.09
1,2	+47.48	+19.41		+0.03	+66.92
2,2	+0.65	+1.41			+2.06
-1,1	-0.40	-0.09			-0.49
0,1	+7.30	+0.10	+0.04		+7.44
1,1	-0.40	+0.44	+0.06		+0.10
5.					
1,2	+0.87	-0.07		-0.04	+0.76
2,2	-5.27	+0.33		+0.21	-4.73
3,2	-0.29	+0.05		+0.01	-0.23
12.					
3,-4		-0.34	+0.06		-0.28
4,-4		-0.16	+0.04		-0.12

<u>12.</u>					
2,-2		+1.77			+1.77
3,-2		-18.24			-18.24
4,-2		-10.49		-0.02	-10.51
5,-2		-1.10			-1.10
6,-2		-0.08			-0.08
2,-3		+0.11			+0.11
3,-3		-1.24	-0.06		-1.30
4,-3		-0.98	-0.05		-1.03
5,-3		-0.09			-0.09
3,-4		-0.06			-0.06
4,-4		-0.05			-0.05
<u>13.</u>					
0,-4		-0.38	-0.22		-0.60
1,-4		-0.12	-0.19		-0.31
2,-4		+0.89	-0.04	-0.02	+0.83
3,-4		+0.24			+0.24
0,-5		-0.04	-0.02		-0.06
1,-5		-0.02	-0.02		-0.04
2,-5		+0.09			+0.09
3,-5		+0.03			+0.03
<u>18.</u>					
2,0		-0.05			-0.05
3,0		+0.24			+0.24
4,0		-0.05			-0.05
<u>19.</u>					
0,4		+0.05		+0.24	+0.26
1,4		+0.11		+0.01	+0.12
2,4		+0.01			+0.01
<u>6.</u>					
0,-1	-0.80	-0.13			-0.93
1,-1	+5.83	+0.45			+6.28
2,-1	-0.16	+0.04			-0.12
1,-2	+0.29	-0.03			+0.26
<u>7.</u>					
3,-2	-0.04	+0.06			+0.02
2,-3	-0.66	+0.06			-0.60
3,-3	+2.62	-0.48			+2.14
4,-3	+0.22	-0.04			+0.18
<u>14.</u>					
4,-5		+0.09			+0.09
5,-5		+0.05			+0.05
<u>8.</u>					
0,1	+0.43	+0.09			+0.52
1,1	-3.14	+0.55			-2.59
2,1	+0.09	-0.02			+0.07

RECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 305

9.					
, -1	+0,65	-0,03			+0,62
, -1	-2.59	+0.49			-2.10
, -1	-0.22	+0.04			-0.18
10.					
, -3	+0.36	+0.07			+0.43
, -3	-2.65	+0.02			-2.63
, -3	+0.07	-0.01			+0.06

Für C

R	R ₁	R ₂	$\frac{1}{2}S\delta P$	V δQ	H
cos	cos	cos	cos	cos	\ cos
-880,70	+7,66		-0,17	-0,06	-873,27
+96.23	+18.98		+0.02		+115.23
+1.32	+1.42				+2.74
+0.04	+0.10				+0.14
+0.03	+0.04				+0.07
+2.42	+0.55	-0,06			+2.94
-44.36	+0.88		-0.01		-43.49
+2.42	+1.45	+0.07			+3.64
+0.03	+0.11	+0.02			+0.16
+0.06	+0.03				+0.09
-1.12	+0.06				-1.06
+0.06	+0.05				+0.11
+0.06	-0.01	-0.01			+0.04
-1.22	+0.24				-0.98
+7.38	+2.84	+0.02			+10.24
+0.10	+0.57				+0.97
+0.02	+0.04				+0.06
+0.04	-0.02	-0.03			-0.01
-6.67	-0.92	-0.24			-7.83
+145.46	-0.34	-0.04	-0.04	-0.02	+145.08
-877.98	+0.89	+0.49	+0.10	+0.24	-876.29
-48.22	+0.57	+0.26			-47.39
-2.65	+0.05	+0.03			-2.57
-0.15					-0.15
-0.39	-0.04	-0.02			-0.45
+8.55	-0.11	-0.04			+8.43
-51.61	-2.78	+0.05			-54.34
-2.83	-0.66	+0.03			-3.46
-0.16	-0.06				-0.22
+0.35					+0.35
-2.10	-0.20				-2.30
-0.12	-0.04				-0.16
-0.07					-0.07

<u>11.</u>						
2,-3		-0.04	+0.04			-0.03
3,-3		+0.26	+0.07			+0.33
4,-3		+0.20	+0.04			+0.24
1,-4		-0.02				-0.02
2,-4		+1.74				+1.74
3,-4		-18.23				-18.23
4,-4		-10.67		+0.04		-10.66
5,-4		-1.12				-1.12
6,-4		-0.08				-0.08
2,-5		+0.17				+0.17
3,-5		-1.97	-0.06			-2.03
4,-5		-1.36	-0.05			-1.41
5,-5		-0.14				-0.14
3,-6		-0.13				-0.13
4,-6		-0.09				-0.09
<u>15.</u>						
4,-6		-0.12	-0.20			-0.32
5,-6		-0.16	-0.22			-0.38
6,-6		-0.06	-0.08			-0.14
<u>3.</u>						
2,2	-0.55	+0.10				-0.45
0,1	-0.17	-0.07				-0.24
1,1	+3.62	+0.22				+3.84
2,1	-21.83	+2.82	+0.04			-18.97
3,1	-1.20	+0.55				-0.65
0,0	-6.58	-0.53			+0.04	-7.10
1,0	+143.59	-0.33	+0.18	+0.04	+0.02	+143.50
2,0	-866.64	+0.86	+0.53	-0.21	-0.09	-865.55
3,0	-47.60	+0.34	+0.26	-0.01	-0.01	-47.05
4,0	-2.61	+0.02	+0.02			-2.57
0,-1	-0.17					-0.17
1,-1	+3.62	+0.06				+3.68
2,-1	-21.83	-2.71	+0.04			-24.50
3,-1	-1.20	-0.68				-1.88
2,-2	-0.55	-0.10				-0.65
<u>4.</u>						
0,4	-2.13	+0.05				-2.08
-1,3	+2.86	+0.01				+2.87
0,3	-52.34	+0.77	-0.04			-51.61
1,3	+2.86	+1.30	-0.06			+4.10
-2,2	+0.67	-0.03				+0.64
-1,2	+48.66	-0.84		-0.02	-0.02	+47.78
0,2	-890.42	+7.54		+0.01	+0.29	-882.58
1,2	+48.66	+19.53		+0.02	-0.01	+68.20
2,2	+0.67	+1.43				+2.10

RECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 307

-0,44	-0,09				-0,50
+7,48	+0,10	+0,04			+7,62
-0,41	+0,45	+0,07			+0,11
+0,87	-0,07		-0,04	-0,03	+0,76
-5,28	+0,33		+0,04	+0,16	-4,75
-0,29	+0,05			+0,01	-0,23
	-0,35	+0,07			-0,28
	-0,16	+0,04			-0,12
	+1,61		-0,01	+0,02	+1,61
	-17,67				-17,67
	-10,54				-10,53
	-1,11				-1,11
	-0,08				-0,08
	+0,11	-0,06			+0,11
	-1,27	-0,05			-1,33
	-0,99				-1,04
	-0,10				-0,10
	-0,06				-0,06
	-0,05				-0,05
	-0,40	-0,23			-0,63
	-0,11	-0,19	-0,03		-0,33
	+0,21	-0,04	+0,15		+0,32
	+0,29				+0,29
	-0,04	-0,02			-0,06
	-0,02	-0,02			-0,04
	+0,02				+0,02
	+0,03				+0,03
	-0,05				-0,05
	-0,47				-0,47
	+0,08				+0,08
	+0,05		+0,16		+0,21
	+0,10		-0,01		+0,09
	+0,01				+0,01
+0,81	+0,14				+0,95
-5,96	-0,45				-6,41
+0,16	-0,03				+0,13
-0,30	+0,03				-0,27

7.						
3,-2	+0.04	-0.06				-0.02
2,-3	+0.67	-0.06				+0.61
3,-3	-2.68	+0.49				-2.19
4,-3	-0.22	+0.04				-0.18
44.						
4,-5		-0.09				-0.09
5,-5		-0.05				-0.05
8.						
0,1	+0.45	+0.09				+0.54
1,1	-3.28	-0.47				-3.75
2,1	+0.09	-0.02				+0.07
9.						
2,-1	+0.66	-0.03				+0.63
3,-1	-2.62	+0.49				-2.13
4,-1	-0.22	+0.04				-0.18
10.						
0,-3	+0.38	+0.05				+0.43
1,-3	-2.77	+0.02				-2.75
2,-3	+0.08	-0.04				+0.07

Ferner für C

g, g'	Y sin	Y_1 sin	Y_2 sin	$\frac{1}{2}Z\delta Q$ sin	N sin
1.					
1,0		-20.34		-0.04	-20.32
2,0		-1.44		+0.04	-1.40
3,0		-0.10			-0.10
-2,-1		+0.05			+0.05
-1,-1		+0.76	-0.06		+0.70
0,-1		+0.17	-0.07		+0.10
1,-1		-1.06	-0.07		-1.13
2,-1		-0.09	-0.02		-0.11
-1,-2		+0.03			+0.03
0,-2		+0.04			+0.01
1,-2		-0.05			-0.05
2.					
0,-4	-0.06	+0.04	-0.04		-0.03
1,-4	+1.20	-0.24	-0.02		+0.94
2,-4	-7.26	-2.77	-0.02		-10.05
3,-4	-0.40	-0.53			-0.93
4,-4	-0.02	-0.04			-0.06

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 309

2.					
-1,-2	-0'04	+0'01	-0'02		-0'05
0,-2	+6.56	+0.15	-0.22		+6.49
1,-2	-143.13	+0.13	-0.36	-0'03	-143.39
2,-2	+863.92	-0.48	-0.57	+0.18	+863.05
3,-2	+47.44	-0.01	-0.26	+0.01	+47.18
4,-2	+2.60	-0.02	-0.02		+2.56
5,-2	+0.15				+0.15
0,-3	+0.39	-0.01	-0.02		+0.36
1,-3	-8.41	+0.10	-0.03		-8.34
2,-3	+50.78	+2.71	-0.05	+0.02	+53.46
3,-3	+2.79	+0.69	-0.02		+3.46
4,-3	+0.15	+0.06			+0.21
1,-4	-0.34	+0.01			-0.33
2,-4	+2.07	+0.19			+2.26
3,-4	+0.11	+0.04			+0.15
2,-5	+0.07				+0.07
11.					
2,-3		+0.04	-0.04		+0.03
3,-3		-0.27	-0.07		-0.34
4,-3		-0.19	-0.04		-0.23
1,-4		+0.01			+0.01
2,-4		-1.72			-1.72
3,-4		+17.95			+17.95
4,-4		+10.47		+0.01	+10.48
5,-4		+1.09			+1.09
6,-4		+0.08			+0.08
2,-5		-0.17			-0.17
3,-5		+1.84	+0.06		+1.87
4,-5		+1.34	+0.05		+1.39
5,-5		+0.13			+0.13
3,-6		+0.12			+0.12
4,-6		+0.09			+0.09
15.					
4,-6		+0.12	+0.19		+0.31
5,-6		+0.16	+0.22		+0.38
6,-6		+0.06	+0.08		+0.14
3.					
2,2	-0.55	+0.10			-0.45
0,1	-0.16	-0.07			-0.23
1,1	+3.59	+0.22			+3.81
2,1	-21.65	+2.77	+0.03		-18.85
3,1	-4.19	+0.55			-0.64
0,0	-6.53	-0.54			-7.07
1,0	+142.42	-0.18	+0.17	+0.03	+142.44
2,0	-859.60	+0.18	+0.52	-0.18	-859.08
3,0	-47.21	+0.20	+0.26	-0.01	-46.76
4,0	-2.59	+0.02	+0.02		-2.55

3.					
0,-1	-0.16				-0.16
1,-1	+3.59	-0.10			+3.49
2,-1	-21.65	-2.72	+0.03		-24.34
3,-1	-1.19	-0.67			-1.86
2,-2	-0.35	-0.10			-0.65
4.					
0,4	-2.11	+0.03			-2.08
-1,3	+2.83				+2.83
0,3	-51.71	+0.76	-0.04		-50.99
1,3	+2.83	+1.29	-0.06		+4.06
-2,2	+0.66	-0.03			+0.63
-1,2	+48.07	-0.85			+47.22
0,2	-879.74	+7.48		-0.01	-872.27
1,2	+48.07	+19.39			+67.46
2,2	+0.66	+1.42			+2.08
-1,1	-0.40	-0.09			-0.49
0,1	+7.39	+0.10	+0.04		+7.53
1,1	-0.40	+0.44	+0.06		+0.10
5.					
1,2	+0.87	-0.07		-0.03	+0.77
2,2	-5.27	+0.33		+0.21	-4.73
3,2	-0.29	+0.05		+0.01	-0.23
12.					
3,-1		-0.34	+0.06		-0.28
4,-1		-0.16	+0.04		-0.12
2,-2		+1.77			+1.77
3,-2		-18.25		+0.01	-18.24
4,-2		-10.46		-0.03	-10.49
5,-2		-1.10			-1.10
6,-2		-0.08			-0.08
2,-3		+0.11			+0.11
3,-3		-1.20	-0.06		-1.26
4,-3		-0.98	-0.05		-1.03
5,-3		-0.09			-0.09
3,-4		-0.06			-0.06
4,-4		-0.05			-0.05
13.					
0,-4		+0.38	+0.26		+0.64
1,-4		+0.10	+0.19	+0.02	+0.31
2,-4		-0.21	+0.04	-0.13	-0.30
3,-4		-0.28			-0.28
0,-5		+0.04	+0.02		+0.06
1,-5		+0.02	+0.02		+0.04
2,-5		-0.02			-0.02
3,-5		-0.03			-0.03
18.					
2,0		-0.04			-0.04
3,0		+0.24			+0.24
4,0		-0.05			-0.05

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 311

19.					
0,4		+0,05		+0,08	+0,13
1,4		+0.10			+0.10
2,4		+0.01			+0.01
6.					
0,-1	-0,07	-0.04			-0.11
1,-1	+0.51	+0.48			+0.99
2,-1	-0.01				-0.01
1,-2	+0.02	-0.04			-0.02
7.					
3,-2	-0.04	+0.07			+0.03
2,-3	-0.66	-0.01			-0.67
3,-3	+2.62	-0.51			+2.11
4,-3	+0.22	-0.04			+0.18
14.					
4,-5		+0.09			+0.09
5,-5		+0.05			+0.05
8.					
0,1	+0.44	+0.09			+0.53
1,1	-3.20	-0.46			-3.66
2,1	+0.09	-0.02			+0.07
9.					
2,-1	+0.65	-0.03			+0.62
3,-1	-2.59	+0.49			-2.10
4,-1	-0.22	+0.04			-0.18
10.					
0,-3	-0.37	-0.05			-0.42
1,-3	+2.72	-0.02			+2.70
2,-3	-0.07	+0.01			-0.06

81.

Hiermit und mit den früher angegebenen Factoren ergeben sich die enden Producte, deren Summe \bar{B} giebt.

g, g'	B_0 cos	B_1 cos	B_2 cos	$H\delta P$ cos	$N\delta Q$ cos
1.					
0,0	+79,08488	-0,67340	+0,00093	-1,01877	-1,04640
1,0	-8.641	-1.754	+0.001	+0.142	+0.206
2,0	-0.119	-0.127		-0.064	-0.038
3,0	-0.003	-0.009		-0.003	-0.003
2,-1	-0.003	-0.003			
1,-1	-0.218	-0.048	+0.006	+0.005	+0.009
0,-1	+3.9836	-0.0780	+0.0004	-0.0708	-0.0791
1,-1	-0.218	-0.104	-0.006		+0.006
2,-1	-0.003	-0.010		-0.002	-0.002

<u>1.</u>					
-1,-2	-0.005	-0.003			
0,-2	+0.1004	-0.0034	+0.0001	-0.0017	-0.0021
1,-2	-0.005	-0.003			
0,-3	+0.003				
<u>2.</u>					
0,0			+0.00004	-0.00004	+0.00004
0,-1	-0.0050	+0.0043	+0.0014	-0.0009	
1,-1	+0.109	-0.020	-0.001	+0.019	+0.003
2,-1	-0.657	-0.052	-0.002	-0.106	-0.006
3,-1	-0.036	-0.050		-0.005	+0.001
4,-1	-0.002				
-1,-2	-0.004	+0.002	+0.002	+0.004	+0.003
0,-2	+0.5937	+0.0849	+0.0216	-0.0646	-0.0499
1,-2	-12.957	+0.032	+0.002	+0.192	+0.263
2,-2	+78.207	-0.145	-0.042	-1.106	-1.120
3,-2	+4.295	-0.050	-0.024	-0.040	-0.046
4,-2	+0.235	-0.004	+0.002	-0.002	-0.003
5,-2	+0.013				
0,-3	+0.035	+0.003	+0.002	-0.003	-0.003
1,-3	-0.762	+0.009	+0.001	-0.006	+0.018
2,-3	+4.597	+0.244	-0.005	+0.026	-0.082
3,-3	+0.252	+0.059	-0.002	+0.004	-0.004
4,-3	+0.014	+0.004			
1,-4	-0.031	+0.001			
2,-4	+0.188	+0.018		+0.005	-0.001
3,-4	+0.010	+0.003			
<u>11.</u>					
2,-3		+0.002			
3,-3		-0.025	-0.006		
4,-3		-0.017	-0.003		
2,-4		-0.156		+0.006	+0.007
3,-4		+1.626		+0.025	+0.021
4,-4		+0.950		-0.095	-0.094
5,-4		+0.100		-0.009	-0.009
2,-5		-0.014			
3,-5		+0.166	+0.006	+0.007	+0.005
4,-5		+0.121	+0.003	-0.009	-0.011
5,-5		+0.011			
<u>3.</u>					
1,2	+0.008				
2,2	-0.050	+0.009			
3,2	-0.003				
0,1	-0.0149	-0.0056	-0.0004	+0.0002	+0.0037
1,1	+0.326	+0.020		+0.012	-0.011
2,1	-1.968	+0.252	+0.003	-0.077	+0.036
3,1	-0.108	+0.050		-0.005	+0.001

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 313

3.					
-1,0	+0,004	-0,004		+0,004	-0,007
0,0	-0.59324	-0.05089	-0,00144	+0.04744	+0.10871
1,0	+12.946	-0.015	+0.016	-0.143	-0.243
2,0	-78.137	+0.018	+0.047	+0.935	+1.114
3,0	-4.291	+0.017	+0.024	+0.069	+0.022
4,0	-0.236	+0.002	+0.002	+0.004	+0.003
0,-1	-0.0149	+0.0004		+0.0014	+0.0023
1,-1	+0.326	-0.009		-0.022	-0.011
2,-1	-1.968	-0.245	+0.003	+0.140	+0.051
3,-1	-0.108	-0.063		+0.010	+0.003
1,-2	+0.008				
2,-2	-0.050	-0.009		+0.006	+0.003
3,-2	-0.003				
4.					
-1,4	+0.010				
0,4	-0.189	+0.004		-0.001	+0.003
1,4	+0.010				
-1,3	+0.254	+0.002		+0.008	-0.011
0,3	-4.643	+0.069	-0.003	-0.101	+0.133
1,3	+0.254	+0.118	-0.006	-0.002	-0.011
-2,2	+0.059	-0.004		-0.051	+0.049
-1,2	+4.316	-0.044		+0.022	-0.155
0,2	-78.9957	+0.6711		+0.0125	+2.0619
1,2	+4.316	+1.764		-0.015	-0.184
2,2	+0.059	+0.128		-0.016	-0.012
-1,1	-0.036	-0.009		-0.006	
0,1	+0.6637	+0.0088	+0.0030	+0.1032	+0.0123
1,1	-0.036	+0.042	+0.006	-0.002	-0.001
0,0		+0.00028	+0.00008	+0.00039	-0.00042
5.					
0,2	+0.0012	+0.0012		+0.0634	-0.0621
1,2	+0.026	-0.007		-0.193	+0.193
2,2	-0.158	+0.030		+1.099	-1.094
3,2	-0.009	+0.005		+0.040	-0.040
12.					
3,-1		-0.034	+0.006		
4,-1		-0.016	+0.003		
2,-2		+0.161		+0.063	+0.051
3,-2		-1.658		+0.032	-0.064
4,-2		-0.952		+0.009	+0.171
5,-2		-0.100			
2,-3		+0.010		+0.003	+0.003
3,-3		-0.111	-0.006	+0.004	
4,-3		-0.090	-0.003	+0.002	+0.011
13.					
0,-4		-0.036	-0.020	-0.017	+0.005
1,-4		-0.010	-0.017	+0.142	-0.220
2,-4		+0.081	-0.005	-0.943	+1.106
3,-4		+0.023		-0.068	+0.063

<u>13.</u>					
1,-5		-0,004	-0,002	+0,013	-0,021
2,-5		+0.006		-0.095	+0.115
<u>18.</u>					
1,0		0.000		-0.009	+0.009
2,0		-0.005		+0.056	-0.056
3,0		+0.029		-0.016	+0.015
4,0		-0.004		+0.088	-0.088
<u>19.</u>					
0,6				+0.005	-0.005
-1,5				-0.005	+0.005
0,5				+0.104	-0.100
1,5				-0.008	+0.008
-1,4				-0.046	+0.046
0,4				+1.024	-1.016
1,4				-0.090	+0.089
0,3				-0.030	+0.030
<u>6.</u>					
0,0	-0,00423	-0.00003	+0.00007	+0.00004	+0.00011
1,0	+0.009				
0,-1	-0.0732	-0.0099	-0.0040	+0.0026	+0.0032
1,-1	+0.535	+0.040		-0.004	-0.016
2,-1	-0.045	+0.003		+0.003	+0.001
0,-2	-0.0037	-0.0004			
1,-2	+0.027				
<u>7.</u>					
3,-2	-0.004	+0.007			
2,-3	-0.060	+0.006		-0.003	+0.004
3,-3	+0.238	-0.043		+0.006	-0.010
4,-3	+0.020	-0.004			
3,-4	+0.020				
<u>8.</u>					
0,2	+0.0020				
1,2	-0.015				
0,1	+0.0398	+0.0067		-0.0024	-0.0041
1,1	-0.294	-0.044		+0.004	+0.014
2,1	-0.008	-0.004		+0.003	-0.001
0,0	+0.00067	-0.00034	-0.00002		
1,0	-0.005	+0.007			
<u>9.</u>					
2,-1	+0.059	-0.003		-0.004	-0.004
3,-1	-0.238	+0.044		+0.004	+0.004
4,-1	-0.020				
<u>10.</u>					
0,-3	+0.033	+0.003		+0.002	-0.004
1,-3	-0.243	+0.002		-0.002	+0.007
2,-3	+0.007			+0.004	-0.004

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 315

chwie oben für die Bewegung des Perigäums, werde ich auch hier einzelnen Theile der Glieder angeben, aus welchen die Bewegung Knoten hervorgeht.

$\left(\frac{dB_0}{dg}\right) n\delta z$			$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2B_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2$		
1.	1.	0,0, in 1.	1.	1.	0,0, in 1.
-1,-1	-1,-1	-0 ^o 00004	1,0	1,0	+0 ^o 00049
1,-1	1,-1	+ 6	2.	2.	
2.	2.		2,-1	2,-1	+ 3
2,-1	2,-1	- 7	1,-2	1,-2	+ 3
1,-2	1,-2	+ 44030	2,-2	2,-2	- 58
2,-2	2,-2	- 84330	3,-2	3,-2	- 2
3,-2	3,-2	- 488	1,-3	1,-3	- 1
1,-3	1,-3	+ 37	2,-3	2,-3	+ 20
2,-3	2,-3	- 346	3.	3.	
3,-3	3,-3	- 4	1,0	1,0	- 3
3.	3.		2,0	2,0	+ 37
1,0	1,0	+ 267	<hr/>		
2,0	2,0	+ 463	+0 ^o 00048		
4.	4.				
-1,2	-1,2	+ 12			
1,2	1,2	+ 5			
6.	6.				
1,-1	1,-1	+ 16			
		<hr/>			
		-0 ^o 67340			

$\frac{1}{6} \left(\frac{d^3B_0}{dg^3}\right) (n\delta z)^3$		
2.	2.	0,0 in 1.
1,-2	1,-2	-0 ^o 00004
2,-2	2,-2	+ 44
3,-2	3,-2	+ 2
		<hr/>
		+0 ^o 00045

HδP			NδQ		
1.	1.	0,0, in 1.	1.	1.	0,0, in 1.
1,0	1,0	+0,00051	0,0	0,0	+0,14514
0,-1	0,-1	- 1	1,0	1,0	- 73
2.	2.		0,-1	0,-1	+ 5
2,-1	2,-1	+ 1	2.	2.	
0,-2	0,-2	- 8	2,-1	2,-1	- 1
1,-2	1,-2	+ 560	0,-2	0,-2	+ 9
2,-2	2,-2	+ 8428	1,-2	1,-2	- 503
3,-2	3,-2	+ 17	2,-2	2,-2	- 8480
1,-3	1,-3	+ 2	3,-2	3,-2	- 17
2,-3	2,-3	+ 34	1,-3	1,-3	- 2
11.	11.		2,-3	2,-3	- 34
3,-4	3,-4	+ 2	11.	11.	
3.	3.		3,-4	3,-4	- 2
2,1	2,1	- 4	3.	3.	
0,0	0,0	- 45	2,1	2,1	- 4
1,0	1,0	- 447	0,0	0,0	- 45
2,0	2,0	- 7755	1,0	1,0	- 443
3,0	3,0	- 16	2,0	2,0	- 7697
2,-1	2,-1	- 6	3,0	3,0	- 16
4.	4.		2,-1	2,-1	- 6
0,3	0,3	- 239	4.	4.	
-1,2	-1,2	+ 56	0,3	0,3	- 237
0,2	0,2	-1.02397	-1,2	-1,2	+ 54
1,2	1,2	- 92	0,2	0,2	-1.04546
0,1	0,1	- 18	1,2	1,2	- 92
12.	12.		0,1	0,1	- 18
3,-2	3,-2	- 2	12.	12.	
6.	6.		3,-2	3,-2	- 2
1,-1	1,-1	- 1	6.	6.	
8.	8.		1,-1	1,-1	- 6
1,1	1,1	+ 3	8.	8.	
		-1,01877	1,1	1,1	+ 2
					-1,04640

Da das eben in $\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 B_0}{dg^2} \right) (n\delta z)^3$ angeführte Glied das einzige dieses Products ist, welches merklich ist, so habe ich dafür keine besondere Columnne in der vorstehenden Tafel anlegen wollen, sondern habe dem Gliede in $\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 B_0}{dg^2} \right) (n\delta z)^2$ hinzugefügt. Beim Argument 0,0, in enthält also die Columnne für B_2 die Summe der beiden Glieder +0,00048 und +0,00045.

Man bekommt ferner die folgenden Producte, deren Summe \bar{C} l.

g, g'	C_0 sin	C_1 sin	C_2 sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
1.					
1,0		-1,842		+0,054	+0,028
2,0		-0.431		-0.060	-0.039
3,0		-0.044		-0.003	-0.003
-2,-1		+0.005			
-1,-1		+0.070	-0,006	-0.015	-0.005
0,-1		+0.0453	-0.0064	+0.2439	+0.0074
1,-1		-0.096	-0.006	-0.041	+0.002
2,-1		-0.009		-0.002	-0.002
-1,-2		+0.003			
0,-2		+0.0040	-0.0004	+0.0079	+0.0003
1,-2		-0.004			
2.					
0,0		+0.00005		+0.00004	
0,-1	-0,0050	+0.0036	-0.0009	-0.0001	-0.0004
1,-1	+0.109	-0.021	-0.004	+0.020	+0.004
2,-1	-0.657	-0.250	-0.002	-0.104	-0.007
3,-1	-0.036	-0.049		-0.005	-0.007
4,-1	-0.002				
-1,-2	-0.004	+0.004	-0.002	-0.005	-0.004
0,-2	+0.5937	+0.0440	-0.0202	+0.0666	+0.0473
1,-2	-12.957	+0.043	-0.034	+0.199	+0.119
2,-2	+78.207	-0.046	-0.052	-1.416	-0.788
3,-2	+4.295	-0.002	-0.024	-0.039	-0.050
4,-2	+0.235	-0.002	-0.002	-0.002	-0.004
5,-2	+0.013				
0,-3	+0.035	-0.004	-0.002	+0.003	+0.005
1,-3	-0.762	+0.009	-0.003	-0.003	+0.008
2,-3	+4.597	+0.246	-0.005	+0.025	-0.053
3,-3	+0.252	+0.063	-0.002	+0.004	-0.004
4,-3	+0.014	+0.009			
1,-4	-0.031	+0.004			
2,-4	+0.188	+0.048		+0.006	-0.002
3,-4	+0.010	+0.003			
11.					
2,-3		+0.002			
3,-3		-0.025	-0.006		
4,-3		-0.017	-0.003		
2,-4		-0.156		+0.006	+0.007
3,-4		+1.626		+0.022	+0.023
4,-4		+0.950		-0.095	-0.093
5,-4		+0.100		-0.009	-0.009

8.					
0,2	+0,0020				
1,2	-0.015				
0,1	+0.0400	+0,0066		-0,0046	-0,01
1,1	-0.293	-0.042		-0.044	+0.0
2,1	+0.008	-0.001		+0.004	-0.0
0,0	+0.00067	-0.00034	-0,00002		
1,0	-0.005	+0.006			
9.					
2,-1	+0.059	-0.003			
3,-1	-0.238	+0.044		+0.001	+0.0
4,-1	-0.020				
10.					
0,-3	-0.034	-0.003		-0.002	+0.0
1,-3	+0.245	-0.002		+0.008	-0.0
2,-3	-0.007			+0.001	

82.

Die für dP und dQ noch erforderlichen Producte von \bar{B} un $(1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1$ und bez. $(1+\nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1$ sind nebst jenen Function der Summe davon in den beiden folgenden Tafeln enthalten. Columnne, welche die Producte

$$\bar{B} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\} \text{ und bez. } \bar{B} \left\{ (1+\nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

enthält, habe ich die Ueberschrift weggelassen, die keinen Platz würde.

g, g'	\bar{B}		B
	cos	cos	cos
1.			
0,0	+76,34724	-1,24001	+75,10723
1,0	-10.046	-0.493	-10.539
2,0	-0.348	-0.043	-0.391
3,0	-0.018	-0.002	-0.020
-2,-1	-0.006	-0.004	-0.010
-1,-1	-0.246	+0.015	-0.231
0,-1	+3.7561	-0.0791	+3.6770
1,-1	-0.322	-0.066	-0.388
2,-1	-0.017	-0.001	-0.018
-1,-2	-0.008		-0.008
0,-2	+0.0933	-0.0025	+0.0908
1,-2	-0.008	-0.002	-0.010
2.			
0,0	+0.00004	+0.00004	+0.00005

<u>2.</u>			
0,-1	-0,0005	+0,0053	+0,0048
1,-1	+0.108	-0.041	+0.067
2,-1	-1.023	-0.003	-1.026
3,-1	-0.090	+0.045	-0.075
-1,-2	+0.007	+0.003	+0.010
0,-2	+0.5857	+0.0812	+0.6669
1,-2	-12.468	-1.198	-13.666
2,-2	+75.794	-2.009	+73.785
3,-2	+4.135	+0.043	+4.178
4,-2	+0.228	+0.008	+0.236
0,-3	+0.034	+0.004	+0.038
1,-3	-0.740	-0.063	-0.803
2,-3	+4.777	-0.158	+4.619
3,-3	+0.309	-0.045	+0.294
1,-4	-0.030	-0.002	-0.032
2,-4	+0.210	-0.009	+0.201
<u>11.</u>			
3,-3	-0.031	+0.014	-0.017
2,-4	-0.143	+0.101	-0.042
3,-4	+1.672	-0.602	+1.070
4,-4	+0.761	-0.763	-0.002
5,-4	+0.082	-0.073	+0.009
2,-5	-0.014	+0.012	-0.002
3,-5	+0.184	-0.058	+0.126
4,-5	+0.104	-0.101	+0.003
<u>3.</u>			
2,2	-0.041	+0.002	-0.039
0,1	-0.0167	-0.0047	-0.0214
1,1	+0.344	+0.052	+0.396
2,1	-1.754	+0.038	-1.716
3,1	-0.062	-0.016	-0.078
0,0	-0.51912	-0.03174	-0.55083
1,0	+12.561	+0.559	+13.120
2,0	-76.023	+1.322	-74.701
3,0	-4.159	-0.032	-4.191
4,0	-0.225	-0.004	-0.229
0,-1	-0.0111	+0.0015	-0.0096
1,-1	+0.284	+0.004	+0.288
2,-1	-2.019	+0.043	-1.976
3,-1	-0.158	+0.016	-0.142
2,-2	-0.050	+0.002	-0.048
<u>4.</u>			
-1,4	+0.010		+0.010
0,4	-0.183	+0.004	-0.179
1,4	+0.010		+0.010
-1,3	+0.253	+0.004	+0.257
0,3	-4.545	+0.086	-4.459
1,3	+0.353	+0.027	+0.380

<u>4.</u>			
-2,2	+0.056	+0.002	+0.058
-1,2	+4.169	-0.149	+4.020
0,2	-76.2502	+1.2389	-75.0113
1,2	+5.884	+0.646	+6.527
2,2	+0.159	+0.043	+0.202
<hr/>			
-1,1	-0.051	-0.048	-0.069
0,1	+0.7910	-0.0069	+0.7841
1,1	+0.009	+0.034	+0.043
0,0	+0.00033	+0.00023	+0.00056
<hr/>			
<u>5.</u>			
0,2	+0.0012	+0.0011	+0.0023
1,2	+0.019	-0.016	+0.003
2,2	-0.123		-0.123
<hr/>			
<u>12.</u>			
3,-1	-0.025	+0.008	-0.017
2,-2	+0.275	-0.111	+0.164
3,-2	-1.690	+0.645	-1.075
4,-2	-0.772	+0.764	-0.008
5,-2	-0.100	+0.074	-0.026
3,-3	-0.113	+0.037	-0.076
4,-3	-0.080	+0.071	-0.009
<hr/>			
<u>13.</u>			
0,-4	-0.068	-0.049	-0.117
1,-4	-0.105	+0.652	+0.547
2,-4	+0.239	+0.687	+0.926
3,-4	+0.018	-0.008	+0.010
1,-5	-0.011		-0.011
2,-5	+0.026	+0.089	+0.115
<hr/>			
<u>18.</u>			
3,0	+0.028	-0.016	+0.012
<hr/>			
<u>19.</u>			
0,4	+0.008	-0.002	+0.006
<hr/>			
<u>6.</u>			
0,0	-0.00104	-0.00016	-0.00120
1,0	+0.009	-0.006	+0.003
0,-1	-0.0783	-0.0109	-0.0892
1,-1	+0.558	+0.042	+0.600
2,-1	-0.008	-0.006	-0.014
0,-2	-0.0038	+0.0002	-0.0036
1,-2	+0.027	-0.003	+0.024
<hr/>			
<u>7.</u>			
2,-3	-0.056	-0.010	-0.066
3,-3	+0.191	+0.010	+0.201
<hr/>			
<u>8.</u>			
0,2	+0.0020		+0.0020
1,2	-0.015		-0.015

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 323

8.			
0,1	+0,0403	+0,0070	+0,0473
1,1	-0.320	-0.030	-0.350
2,1	-0.007	+0.005	-0.002
0,0	+0.00034	-0.00038	-0.00004
9.			
2,-1	+0.051	+0.007	+0.058
3,-1	-0.186	-0.013	-0.199
10.			
0,-3	+0.037	+0.004	+0.041
1,-3	-0.236	-0.013	-0.249

Von dem Gliede dieser Tafel, welches zur Knotenbewegung beiträgt, sind die folgenden die einzelnen Theile.

$\bar{B} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$		
$+ \bar{B} \left\{ (1+\nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$		
1.	1.	0,0, in 1.
0,0	0,0	-0,62304
1,0	1,0	- 651
2,0	2,0	- 1
-1,-1	-1,-1	- 5
0,-1	0,-1	+ 51
1,-1	1,-1	+ 8
2.	2.	
2,-1	2,-1	- 10
0,-2	0,-2	- 2
1,-2	1,-2	+ 14510
2,-2	2,-2	- 72350
3,-2	3,-2	- 174
1,-3	1,-3	+ 28
2,-3	2,-3	- 316
3,-3	3,-3	- 1
2,-4	2,-4	- 1
11.	11.	
3,-4	3,-4	- 9
3.	3.	
1,0	1,0	+ 266
2,0	2,0	+ 163
4.	4.	
0,3	0,3	- 1
-1,2	-1,2	+ 9
0,2	0,2	- 240
1,2	1,2	+ 8
12.	12.	
3,-2	3,-2	- 1
6.	6.	
1,-1	1,-1	+ 22
		-1,24004

mit der vorstehenden Tafel übereinstimmend. *)

83.

Zur Berücksichtigung von $\mathcal{N}^{(3)}$ ist der Ausdruck

$$B^{(3)} = B_0^{(3)} + R\delta P + Y\delta Q$$

anzuwenden, und dafür wurde im Art. 63 gefunden,

$$B_0^{(3)} = +0''00095$$

$$R = +0.010 \sin(2g' + 2\omega')$$

$$Y = -0.010 \cos(2g' + 2\omega')$$

Multiplicirt man diese mit den betreffenden Gliedern der Ausdrücke für δP und δQ , so bekommt man

$$R\delta P + Y\delta Q = -0''00002$$

woraus

$$B^{(3)} = +0''00093$$

folgt, welcher dem Coefficienten des Arguments 0,0, in 1. der Tafel des vor. Art. hinzugefügt werden muss.

Ausserdem kommen auch hier nicht nur die im Art. 78 in Bezug auf die Bewegung des Perigäums angeführten Umstände in Betracht, sondern auch die Mondmasse liefert einen Beitrag zur Bewegung der Knoten, wie sich weiter unten ergeben wird.

84.

Wir kommen nun zum letzten Product, welches für die Erlangung des Werthes von C zu berechnen ist, nemlich $\bar{C} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$ und bez. $\bar{C} \left\{ (1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$. Die Ueberschrift ist wieder weggelassen, weil sie keinen Platz finden würde.

g, g'	\bar{C} sin	sin	C sin
1.			
1,0	-1''760	-0''830	-2''590
2,0	-0.230	-0.036	-0.266
3,0	-0.047	-0.002	-0.049

*) Der Factor, womit diese Grössen in die jährliche Bewegung der Knoten übergehen, ist noch etwas grösser wie der oben für die Bewegung des Perigäums angeführte. Er ist nahe = 925,8.

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 325

<u>1.</u>			
-2,-1	+0,005	+0,002	+0,007
-1,-1	+0.044	+0.028	+0.072
0,-1	+0.2302	+0.0024	+0.2323
1,-1	-0.111	-0.048	-0.159
2,-1	-0.043	-0.003	-0.046
<hr/>			
-1,-2	+0.003		+0.003
0,-2	+0.0088	+0.0003	+0.0094
1,-2	-0.004	-0.002	-0.006
<hr/>			
<u>2.</u>			
0,0	+0.00006	-0.00004	+0.00005
0,-1	-0.0025	+0.0017	-0.0008
1,-1	+0.108	-0.018	+0.090
2,-1	-1.043	+0.044	-0.999
3,-1	-0.097	+0.044	-0.083
<hr/>			
-1,-2	-0.044	-0.002	-0.046
0,-2	+0.7044	-0.0267	+0.6747
1,-2	-12.660	+0.139	-12.521
2,-2	+76.205	-0.636	+75.569
3,-2	+4.180	+0.027	+4.207
4,-2	+0.225	+0.006	+0.234
<hr/>			
0,-3	+0.040	-0.002	+0.038
1,-3	-0.751	+0.019	-0.732
2,-3	+4.810	-0.028	+4.782
3,-3	+0.313	-0.018	+0.295
<hr/>			
1,-4	-0.030		-0.030
2,-4	+0.210	-0.002	+0.208
<hr/>			
<u>11.</u>			
3,-3	-0.034	+0.044	-0.017
2,-4	-0.143	+0.108	-0.035
3,-4	+1.671	-0.596	+1.075
4,-4	+0.762	-0.767	-0.005
5,-4	+0.082	-0.074	+0.008
<hr/>			
2,-5	-0.044	+0.042	-0.002
3,-5	+0.179	-0.058	+0.121
4,-5	+0.101	-0.104	0.000
<hr/>			
<u>3.</u>			
2,2	-0.044	+0.002	-0.039
<hr/>			
0,1	-0.0467	-0.0046	-0.0213
1,1	+0.350	+0.052	+0.402
2,1	-1.754	+0.039	-1.715
3,1	-0.062	-0.046	-0.078
<hr/>			
0,0	-0.54409	-0.02869	-0.54278
1,0	+12.563	+0.533	+13.096
2,0	-76.021	+1.330	-74.691
3,0	-4.159	-0.032	-4.191
4,0	-0.225	-0.004	-0.229

3.			
0,-1	-0.0140	+0.0045	-0.0095
1,-1	+0.284	+0.004	+0.288
2,-1	-2.022	+0.043	-1.979
3,-1	-0.156	+0.016	-0.140
2,-2	-0.051	+0.002	-0.049
4.			
-1,4	+0.010		+0.010
0,4	-0.187	+0.004	-0.183
1,4	+0.010		+0.010
-1,3	+0.256	+0.004	+0.260
0,3	-4.561	+0.086	-4.475
1,3	+0.362	+0.027	+0.389
-2,2	+0.056	-0.004	+0.052
-1,2	+4.120	-0.484	+3.936
0,2	-76.5443	+1.2462	-75.2951
1,2	+5.894	+0.644	+6.538
2,2	+0.159	+0.043	+0.202
-1,1	-0.052	-0.018	-0.070
0,1	+0.7936	-0.0070	+0.7866
1,1	0.000	+0.034	+0.034
0,0	+0.00032	+0.00022	+0.00054
5.			
0,2	+0.0014	+0.0010	+0.0024
1,2	+0.018	-0.016	+0.002
2,2	-0.122		-0.122
12.			
3,-1	-0.025	+0.008	-0.017
2,-2	+0.274	-0.111	+0.163
3,-2	-1.686	+0.645	-1.071
4,-2	-0.774	+0.762	-0.012
5,-2	-0.100	+0.074	-0.026
3,-3	-0.115	+0.037	-0.078
4,-3	-0.075	+0.071	-0.004
13.			
0,-4	+0.066	+0.049	+0.115
1,-4	+0.103	-0.655	-0.552
2,-4	-0.202	-0.686	-0.888
3,-4	-0.022	+0.007	-0.015
1,-5	+0.011		+0.011
2,-5	-0.020	-0.090	-0.110
18.			
3,0	+0.028	-0.016	+0.012
19.			
0,4	+0.009	-0.002	+0.007
6.			
0,0	+0.00041	+0.00007	+0.00048

6.			
0,-1	-0,0459	-0,0008	-0,0467
1,-1	+0.105	+0.017	+0.122
2,-1	+0.018	-0.003	+0.015
0,-2	-0.0020	+0.0003	-0.0017
1,-2	-0.002	-0.003	-0.005
7.			
2,-3	-0.062	-0.003	-0.065
3,-3	+0.188	+0.017	+0.205
8.			
0,2	+0.0020		+0.0020
1,2	-0.015		-0.015
0,1	+0.0405	+0.0069	+0.0474
1,1	-0.332	-0.030	-0.362
2,1	+0.040	+0.005	+0.045
0,0	+0.00034	-0.00037	-0.00003
9.			
2,-1	+0,056	+0.007	+0.063
3,-1	-0,191	-0.043	-0.204
10.			
0,-3	-0.038	-0.006	-0.044
1,-3	+0.237	+0.043	+0.250

85.

Um die Glieder von $\delta\delta K$ zu ermitteln, müssen nach Art. 51 die

$$C \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} J} \delta P \text{ und } - \left\{ \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} J} + 2F^2 \right] B + \alpha F \right\} \delta Q$$

ausdrucks für X berechnet werden, während die dort mit δP^2 , etc. multiplicirten Glieder weggelassen werden können, weil sie durchaus nicht merkliches geben. Jene Producte sind in den Columnen ohne Beschriftung der folgenden Tafel enthalten, deren letzte Columnne ihre Formel, oder X giebt.

$g. g'$	cos	cos	X cos
1.			
0,0	+0,0259	+0,0497	+0,0456
1,0	-0.003	-0.002	-0.005
0,-1	+0.0048	+0.0045	+0.0033
2.			
0,-2	+0.0015	+0.0006	+0.0021
1,-2	-0.004	-0.007	-0.011
2,-2	+0.025	+0.030	+0.055

3.			
0,0	-0,00013	-0,00483	-0,00496
1,0	-0.005	+0.006	+0.001
2,0	+0.025	-0.029	-0.004
4.			
0,3	-0.002	-0.005	-0.007
0,2	-0.0040	-0.0943	-0.0953
0,1	+0.0023		+0.0023
13.			
1,-4	+0.004	+0.004	+0.008
2,-4	-0.025	-0.025	-0.050
19.			
0,4	-0.023	+0.023	0.000

Die Meisten dieser Glieder können ihrer Kleinheit wegen über-
 gangen werden. Da das constante Glied in X auch zu den Bewegungen
 des Perigäums und der Knoten beiträgt, so gebe ich wieder die einzel-
 nen Theile, aus welchen es besteht.

$C \frac{1}{4 \cos^2 i} \delta P$			$-\left\{ \left[\frac{1}{4 \cos^2 i} + 2F^2 \right] B + \alpha F \right\} \delta Q$		
2.	2.	0,0, in 1.	1.	1.	0,0, in 1.
1,-2	1,-2	+0,00012	0,0	0,0	-0,00634
2,-2	2,-2	+ 182	1,0	1,0	+ 2
2,-3	2,-3	+ 1	2.	2.	
3.			3.		
0,0	0,0	+ 1	1,-2	1,-2	+ 12
1,0	1,0	+ 10	2,-2	2,-2	+ 182
2,0	2,0	+ 168	2,-3	2,-3	+ 1
4.			3.		
0,3	0,3	+ 5	0,0	0,0	+ 1
-1,2	-1,2	- 1	1,0	1,0	+ 10
0,2	0,2	+ 2214	2,0	2,0	+ 168
1,2	1,2	+ 2	4.		
		+0,02594	0,3	0,3	+ 5
			-1,2	-1,2	- 1
			0,2	0,2	+ 2222
			1,2	1,2	+ 2
					+0,04970

Tafel übereinstimmend.

86.

i der Berechnung aller vorhergehenden Producte tritt ein Umn, der in der Planetentheorie nicht vorkommt. Dort sind alle nte von der Form $ig + i'g'$, und man hat bei der Verwandlung ducte der Sinusse und Cosinusse in linearische Sinusse und Cosinus die Werthe von i und i' der beiden in jedem partiellen Pro-Betracht kommenden Argumente zu addiren und zu subtrahiren. der Mondtheorie, wo alle Argumente von der Form

$$ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega'$$

kommen auch die Werthe von i'' und i''' bei den genannten Addition und Subtractionen selbstverständlich in Betracht. Da diese aber vorgehenden in den neunzehn Gruppen, die mit den Zahlen 1 bis 19 bezeichnet wurden, zusammengestellt sind, so hat man, ehe man an die Addition und Subtraction der betreffenden Werthe von i und i' geht, zu untersuchen, welche Gruppen jedes einzelne Argument hervorbringen können. Dies ist häufig sehr leicht im Kopfe auszuführen, allein man erleichtert sich die Sache sehr, wenn man sich eine Tafel der verschiedenen Combinationen bildet, die überhaupt ein Argument irgend einer Gruppe hervorbringen können. Die Tafeln, die ich zu diesem Zweck angewandt habe, will ich hier setzen und erklären. Zuvor will ich aber die Bedeutung der Ziffern, die die verschiedenen Abtheilungen bezeichnen, erklären.

- | | | | | |
|-----|---------------------|----------------------|----|------------------------|
| 1. | bedeutet den Zusatz | $0\omega + 0\omega'$ | zu | $ig + i'g'$ |
| 2. | » | » | » | $2\omega - 2\omega'$ » |
| 3. | » | » | » | 2ω » |
| 4. | » | » | » | $2\omega'$ » |
| 5. | » | » | » | $2\omega + 2\omega'$ » |
| 6. | » | » | » | $\omega - \omega'$ » |
| 7. | » | » | » | $3\omega - 3\omega'$ » |
| 8. | » | » | » | $\omega + \omega'$ » |
| 9. | » | » | » | $3\omega - \omega'$ » |
| 10. | » | » | » | $\omega - 3\omega'$ » |
| 11. | » | » | » | $4\omega - 4\omega'$ » |
| 12. | » | » | » | $4\omega - 2\omega'$ » |
| 13. | » | » | » | $2\omega - 4\omega'$ » |

14. bedeutet den Zusatz $5\omega - 5\omega'$ zu $ig + i'g'$
 15. „ „ „ $6\omega - 6\omega'$ „ „
 16. „ „ „ $6\omega - 4\omega'$ „ „
 17. „ „ „ $4\omega - 6\omega'$ „ „
 18. „ „ „ 4ω „ „
 19. „ „ „ $4\omega'$ „ „

und hiemit ist die Richtigkeit der folgenden symbolischen Gleichung leicht zu erkennen.

$$\begin{array}{ll}
 1. = 1. \underline{+} 1. & 2. = 2. \underline{+} 1. \\
 = 2. - 2. & = 11. - 2. \\
 = 3. - 3. & = - 4. + 3. \\
 = \text{etc.} & = 12. - 3. \\
 & = 13. + 4. \\
 & = -19. + 5. \\
 \\
 11. = 11. \underline{+} 1. & 15. = 15. \underline{+} 1. \\
 = 2. + 2. & = 11. + 2. \\
 = 13. + 3. & \\
 = 12. - 4. & \\
 \\
 3. = 3. \underline{+} 1. & 4. = 4. \underline{+} 1. & 5. = 5. \underline{+} 1. \\
 = 4. + 2. & = -13. + 2. & = 4. + 3. \\
 = 12. - 2. & = 3. - 2. & \\
 = 5. - 4. & = 5. - 3. & \\
 \\
 & 12. = 12. \underline{+} 1. & 13. = 13. \underline{+} 1. \\
 & = 3. + 2. & = - 4. + 2. \\
 & = 11. + 4. & = -19. + 3. \\
 & = 18. - 4. & = 11. - 3. \\
 \\
 16. = 16. \underline{+} 1. & 17. = 17. \underline{+} 1. \\
 = 12. + 2. & = 13. + 2. \\
 = 11. + 3. & = 15. - 3. \\
 = 15. + 4. & = 11. - 4. \\
 \\
 18. = 18. \underline{+} 1. & 19. = 19. \underline{+} 1. \\
 = 3. + 3. & = -13. + 3. \\
 = 12. + 4. & = 4. + 4. \\
 = 2. + 5. & = - 2. + 5.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 6. = 6. \underline{+1.} & 7. = 7. \underline{+1.} \\
 = -6. \underline{+2.} & = 6. \underline{+2.} \\
 = 7. \underline{-2.} & = 14. \underline{-2.} \\
 = -8. \underline{+3.} & = 10. \underline{+3.} \\
 = 9. \underline{-3.} & = 9. \underline{-4.} \\
 = 10. \underline{+4.} & \\
 = 8. \underline{-4.} & \\
 \\
 14. = 14. \underline{+1.} & 8. = 8. \underline{+1.} \\
 = 7. \underline{+2.} & = -10. \underline{+2.} \\
 = 11. \underline{+6.} & = 9. \underline{-2.} \\
 & = -6. \underline{+3.} \\
 & = 6. \underline{+4.} \\
 & = -8. \underline{+5.} \\
 \\
 9. = 9. \underline{+1.} & 10. = 10. \underline{+1.} \\
 = 8. \underline{+2.} & = -8. \underline{+2.} \\
 = 6. \underline{+3.} & = 7. \underline{-3.} \\
 = 7. \underline{+4.} & = 6. \underline{-4.}
 \end{array}$$

Die Gleichungen bilden bei der Berechnung der Producte einen sehr angenehmen Zusammenhang, der die Arbeit sehr erleichtert.

Integration der im Vorhergehenden entwickelten Differentialgleichungen. Berücksichtigung der Werthe von Δe und ΔJ in den Bewegungen des Perigäums und der Knoten.

87.

Nachdem im Vorhergehenden die Function T entwickelt, und die Werthe der Coefficienten derselben berechnet worden sind, ist es nun zuerst das Differential von W_0 zu bilden und die Integration derselben zu vollziehen. Dieses Differential steht zufolge des Art. 24 mit T in folgender Verbindung:

$$\frac{dW_0}{a_0 dt} = T + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^2} \left(\frac{dW_0}{dy} \right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} \left[W_0 + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\}$$

Die Grösse erster Ordnung in Bezug auf die störende Kraft ist, die man in dem damit multiplicirten Theile der vorstehenden Gleichung damit aus, dass man für $\left(\frac{dW_0}{dy} \right)$, W_0 , $\frac{h_0}{h}$ die Werthe substituirt, die die zunächst vorhergehende Annäherung gegeben hat.

So habe ich diese Integration in den »*Fundamenta etc.*« erklärt, und so habe ich sie in der That bei der Berechnung der Mondstörungen von Annäherung zu Annäherung ausgeführt.

Um diese Integration hier auf dieselbe Weise auszuführen, müsste ich die Werthe der oben genannten Functionen, welche diese in der vorletzten Annäherung erhalten haben, anführen, allein dieses ist unnöthig, da man die vorstehende Gleichung auch direct integriren kann. Ich werde hier um so mehr die directe Integration anwenden, hierin der Beweis mit enthalten ist, dass die vorletzte Annäherung Werthe der Störungen gegeben hat, die von den definitiven, in den Mondtafeln angewandten nur unerheblich verschieden sind. Da wenn dieses nicht der Fall wäre, so müsste die directe Integration von der oben beschriebenen indirecten erheblich verschiedenes Resultat geben.

88.

Wenden wir uns zur Gleichung (7) und nehmen mit dieser die Veränderungen vor, die erforderlich sind, um W_0 aus \bar{W} zu erhalten. Diese Veränderungen bestehen in nichts Weiterem als dass \bar{r} in ρ_0 und \bar{f} in φ_0 verwandelt werden müssen. Es wird demzufolge

$$W_0 = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2he_0}{h_0 a_0 (1-e_0^2)} \{1 + e \cos(\varphi_0 + n_0 y t + \pi_0 - \chi)\}$$

Führen wir hierin die Elemente

$$\mathcal{Z} = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h}{h_0} - \frac{2e_0}{1-e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0) - e_0\}$$

$$\mathcal{I} = \frac{2}{1-e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0) - e_0\}$$

$$\mathcal{P} = \frac{2}{1-e_0^2} \frac{h}{h_0} e \sin(\chi - n_0 y t - \pi_0)$$

ein, so wird

$$(25) \dots W_0 = \mathcal{Z} + \mathcal{I} \left(\frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{2}{3} e_0 \right) + \mathcal{P} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0$$

wo die bei der Integration veränderlichen Functionen \mathcal{Z} , \mathcal{I} , \mathcal{P} von constanten getrennt sind. Die obigen Ausdrücke geben ausserdem die Relation

$$\mathcal{Z} + \frac{2}{3} e_0 \mathcal{I} = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1$$

von welcher wir Gebrauch machen werden.

89.

Setzen wir

$$V = T - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{h}{h_0} \frac{d \cdot e_0^2}{a_0^2 dy} \dots \dots \dots (26)$$

so geht zufolge der eben entwickelten Relation der Ausdruck für dW_0 des vorvor. Art. in den folgenden über,

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{n_0 dt} = & V + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^2} \left(\frac{dW_0}{dy} \right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} W_0 \right\} \\ & + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \mathcal{Z} + \frac{1}{2} e_0 \mathcal{I} \right\} \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} \end{aligned}$$

Der Ausdruck für W_0 des vor. Art. giebt aber

$$\left(\frac{dW_0}{dy} \right) = -\mathcal{I} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{1-e_0^2}} + \mathcal{Y} \frac{\cos \varphi_0 + e_0}{\sqrt{1-e_0^2}}$$

und ausserdem ist

$$\frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} = \frac{e_0 e_0 \sin \varphi_0}{a_0 \sqrt{1-e_0^2}}$$

und hieraus ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^2} \left(\frac{dW_0}{dy} \right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} W_0 \right\} + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \mathcal{Z} + \frac{1}{2} e_0 \mathcal{I} \right\} \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} = \\ -y \mathcal{I} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 + y \mathcal{Y} \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

Es wird daher

$$\frac{dW_0}{n_0 dt} = V - y \mathcal{I} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 + y \mathcal{Y} \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 \dots \dots \dots (27)$$

90.

Die Function V , die durch die Gleichung (26) mit T verbunden ist, hat zufolge dieser Gleichung augenscheinlich dieselbe Form wie T , und die Form dieser Function ist aus den vorhergehenden Entwicklungen sichtbar. Heben wir nun aus dem vollständigen Ausdruck von V irgend drei Glieder aus, die von derselben Function von t abhängen, so bekommen wir

$$\begin{aligned} V = & \mathcal{A}_0 \sin(n_0 \beta t + \theta) + \mathcal{A}_{-1} \sin(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \\ & + \mathcal{A}_1 \sin(\gamma + n_0 \beta t + \theta) \end{aligned}$$

wo $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{-1}, \mathcal{A}_1$ numerische Coefficienten bezeichnen, und die Ausdrücke von β und θ aus den vorhergehenden Entwicklungen von T nicht zu entnehmen sind. Es folgt hieraus, dass im Integral aus den bigen Gliedern die folgenden entstehen müssen,

$$\begin{aligned} W_0 = & \mathcal{H}_0 \cos(n_0 \beta t + \theta) + \mathcal{H}_{-1} \cos(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \dots \dots (28) \\ & + \mathcal{H}_1 \cos(\gamma + n_0 \beta t + \theta) \end{aligned}$$

und die nächste Aufgabe ist, Π_0, Π_{-1}, Π_1 in Functionen von A_0, A_{-1}, \dots darzustellen, womit die Integration ausgeführt ist.

Wir haben schon oben in § 3 eingeführt,

$$\frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} e_0 = f \cos \gamma + \dots, \quad \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 = f'' \sin \gamma + \dots$$

wo die Coefficienten f und f'' folgende Ausdrücke haben.

$$f = 1 - \frac{3}{8} e^2 + \frac{5}{192} e^4 - \frac{7}{9216} e^6 + \dots$$

$$f'' = 1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{11}{192} e^4 - \frac{457}{9216} e^6 + \dots$$

und hiemit wird die Gleichung (25)

$$W_0 = \mathcal{X} + \mathcal{Y} f \cos \gamma + \mathcal{Y} f'' \sin \gamma$$

Dem Ausdruck (28) von W_0 können wir aber auch folgende Form geben

$$W_0 = \Pi_0 \cos(n_0 \beta t + \theta) + \{\Pi_{-1} + \Pi_1\} \cos(n_0 \beta t + \theta) \cos \gamma \\ + \{\Pi_{-1} - \Pi_1\} \sin(n_0 \beta t + \theta) \sin \gamma$$

woraus folgt, dass den hier in Betracht gezogenen drei Gliedern von W_0 die folgenden in $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ entsprechen,

$$\mathcal{X} = \Pi_0 \cos(n_0 \beta t + \theta)$$

$$\mathcal{Y} = \frac{\Pi_{-1} + \Pi_1}{f} \cos(n_0 \beta t + \theta)$$

$$\mathcal{Y}' = \frac{\Pi_{-1} - \Pi_1}{f''} \sin(n_0 \beta t + \theta)$$

wodurch

$$-y \mathcal{Y}' \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 + y \mathcal{Y} \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 = -\{l\Pi_{-1} - l\Pi_1\} \sin(n_0 \beta t + \theta) \\ + \{l\Pi_{-1} - l''\Pi_1\} \sin(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \\ + \{l''\Pi_{-1} - l\Pi_1\} \sin(\gamma + n_0 \beta t + \theta)$$

wird, wenn man zur Abkürzung

$$l = \frac{2ey}{2f''}, \quad l' = \frac{f^2 + f''^2}{2ff''} y, \quad l'' = \frac{f^2 - f''^2}{2ff''} y$$

setzt. Substituirt man nun die entwickelten Glieder in (27), so kommt man die identische Gleichung

$$(29) \quad \begin{cases} 0 = \{\beta\Pi_0 + A_0 - l\Pi_{-1} + l\Pi_1\} \sin(n_0 \beta t + \theta) \\ + \{\beta\Pi_{-1} + A_{-1} + l'\Pi_{-1} - l''\Pi_1\} \sin(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \\ + \{\beta\Pi_1 + A_1 + l''\Pi_{-1} - l\Pi_1\} \sin(\gamma + n_0 \beta t + \theta) \end{cases}$$

woraus zuerst

$$0 = \beta\Pi_0 + A_0 - l\Pi_{-1} + l\Pi_1$$

$$0 = \beta\Pi_{-1} + A_{-1} + l'\Pi_{-1} - l''\Pi_1$$

$$0 = \beta\Pi_1 + A_1 + l''\Pi_{-1} - l\Pi_1$$

und hieraus durch die Elimination

$$\begin{aligned} \Pi_{-1} &= -\frac{\beta - l'}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_{-1} - \frac{l''}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_1 \\ \Pi_1 &= -\frac{\beta + l'}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_1 + \frac{l''}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_{-1} \\ \Pi_0 &= -\frac{A_0}{\beta} + \frac{l}{\beta} \Pi_{-1} - \frac{l}{\beta} \Pi_1 \end{aligned}$$

folgt, womit die Integration im Allgemeinen ausgeführt ist.

91.

Die oben gefundenen Gleichungen können für die Anwendung ein wenig vereinfacht werden. Aus den obigen Ausdrücken für l' und l'' findet man

$$l'^2 - l''^2 = y^2$$

Die Ausdrücke für f und f'' geben ferner

$$\begin{aligned} \frac{f}{f''} &= 1 + \frac{1}{4} e^2 + \frac{33}{96} e^4 + \frac{327}{1536} e^6 + \dots \\ \frac{f''}{f} &= 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{17}{96} e^4 - \frac{167}{1536} e^6 - \dots \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} l' &= y \left(1 + \frac{1}{32} e^4 + \frac{5}{96} e^6 + \dots \right) \\ l'' &= y \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{5}{24} e^4 + \frac{247}{1536} e^6 + \dots \right) \end{aligned}$$

folgt. In diesem Ausdruck von l' ist der Coefficient von y so wenig von Eins verschieden, dass selbst für die grössten in der Mondbewegung vorkommenden Glieder unbedenklich $l' = y$ gesetzt werden darf. Die drei zu Ende des vor. Art. gefundenen Gleichungen gehen daher für die Anwendung in die folgenden über,

$$\left. \begin{aligned} -\Pi_{-1} &= \frac{A_{-1}}{\beta + y} + \frac{l''}{\beta^2 - y^2} A_1 \\ -\Pi_1 &= \frac{A_1}{\beta - y} - \frac{l''}{\beta^2 - y^2} A_{-1} \\ -\Pi_0 &= \frac{A_0}{\beta} - \frac{l}{\beta} \Pi_{-1} + \frac{l}{\beta} \Pi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

wo

$$\begin{aligned} l' &= y \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{5}{24} e^4 + \frac{247}{1536} e^6 \right) \\ l &= y \left(\frac{3}{2} e + \frac{15}{16} e^3 + \frac{43}{64} e^5 \right) \end{aligned}$$

ist. Diese Ausdrücke sind um so mehr in der Anwendung einfach, da die mit l'' und l multiplicirten Glieder nur in einigen wenigen Coefficienten Merkliches geben.

92.

Das im Vorhergehenden entwickelte Integrationsverfahren erleidet eine Ausnahme für die Glieder, in welchen $\beta = 0$ ist. Dieser Fall tritt nur ein Mal und zwar in der Abtheilung 1. ein. Die allgemeine Form der Argumente dieser Abtheilung ist, wie man gesehen hat,

$$ig + i'g'$$

und da $g = n_0 t + c_0$, $g' = n'_0 t + c'_0$ ist, so wird

$$ig + i'g' = n_0(i + i'u)t + ic_0 + i'c'_0$$

wenn wir wie oben $u = \frac{n'_0}{n_0}$ setzen. Es wird also hier

$$\beta = i + i'u, \theta = ic_0 + i'c'_0$$

und für $i = i' = 0$ wird

$$\beta = 0, \theta = 0$$

in allen übrigen Abtheilungen können diese Werthe nicht vorkommen, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Betrachten wir nun zuerst das erste Glied der identischen Gleichung (29), so zeigt sich, dass in dieser wegen $\sin(n_0 \beta t + \theta) = 0$ der Coefficient willkürlich ist, folglich ist im allgemeinen Problem auch Π_0 willkürlich. Ich werde diese Constante wie früher mit b bezeichnen.*)

Wenden wir uns zu den beiden anderen Gliedern der identischen Gleichung (29), so ist zu bedenken, dass für $\beta = 0$ und $\theta = 0$ in den obigen Ausdrücken für V und W_0 die beiden letzten Glieder sich in Ein Glied zusammenziehen, und in Bezug auf diese

$$\begin{aligned} V &= (A_1 - A_{-1}) \sin \gamma \\ W_0 &= (II_1 + II_{-1}) \cos \gamma \end{aligned}$$

wird. Die beiden letzten Glieder in (29) ziehen sich folglich auch in Ein Glied zusammen, und geben

$$0 = A_1 - A_{-1} + (l'' - l') (II_1 + II_{-1})$$

oder wenn man die Ausdrücke für l'' und l' substituirt und zur Abkürzung

$$A_1 - A_{-1} = k, II_1 + II_{-1} = \xi$$

setzt,

$$(34) \dots\dots\dots 0 = fk - yf''\xi$$

*) Genau genommen habe ich sie in den »Fundamenta etc.« — b genannt.

se Gleichung enthält die beiden Unbekannten y und ξ , und da keine eite Gleichung zwischen diesen beiden Unbekannten da ist, so ist die e derselben im allgemeinen Problem willkürlich, und bildet über-upt das zweite Glied der dem Integral hinzuzufügenden willkührli- en Constante. Es ist hier ξ die willkührliche Grösse, von welcher) ubrigens durch vollständige Entwicklung der vorstehenden Gleich- ung zeigen lässt, dass sie sich mit der Excentricität verbindet; die ge Gleichung dient daher zur Bestimmung von y . Der ganze Aus- ick der unserm Integral hinzuzufügenden willkührlichen Constante ist

$$b + \xi \cos \gamma$$

nn man von den Gliedern, die mit $\cos 2\gamma$, etc. multiplicirt sind, ab- ut, die gleichwie die übrigen ähnlichen durch den Satz des Art. 35 echnet werden müssen. Das dritte in der Planetentheorie vorkom- nde mit $\sin \gamma$ multiplicirte Glied dieser Constante fällt in der Mond- orie weg, indem es sich der in den Argumenten explicite enthaltenen nge des Mondperigäums einverleibt.

Diese Integrationsconstante ist nur in der allgemeinen Aufgabe in - That willkürlich, in jeder speciellen Anwendung derselben auf end einen bestimmten Himmelskörper aber bestimmt, wie ich vor igen Jahren Veranlassung hatte aufs Ausführlichste erörtern zu müs- u. Die Bestimmung dieser Constante richtet sich nach der Beschaf- heit der Elemente, die der Berechnung der Störungen zu Grunde egt worden sind. Hier, wo wir die mittleren Elemente der Mond- n zu Grunde gelegt haben, muss zufolge meiner früheren Ausein- setzungen b so bestimmt werden, dass in dem vollständigen Aus- ick von $n_0 z$ ausser dem Gliede $n_0 t$ kein der Zeit proportionales Glied, l ξ so, dass in demselben Ausdruck kein mit $\sin \gamma$ multiplicirtes ed enthalten ist.

93.

Um aus der Gleichung (31) y zu bestimmen, muss sie weiter ent- kelt werden, da k Function von y ist. Da

$$\frac{d \cdot \varrho_0^2}{a_0^2 d\gamma} = \frac{2e\varrho_0 \sin \gamma_0}{a_0 \sqrt{1-e_0^2}} = \frac{2f'e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \gamma$$

wird die Gleichung (26) zuerst

$$V = T - y \frac{h}{h_0} \frac{2f'e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \gamma \dots \dots \dots (32)$$

und da wir überhaupt jetzt in dieser Gleichung nur auf das mit \sin multiplicirte Glied Rücksicht zu nehmen haben, so können wir setzen

$$\frac{h}{h_0} = 1 + c$$

indem die periodischen Glieder dieser Function hier keine Wirkung ausüben. Der numerische Werth von c ist im Art. 69 angegeben, und befindet sich neben dem Argument 0,0 der Abtheilung 1. Sei ausserdem

$$T = M \sin \gamma$$

dann ist der numerische Werth von M der, welcher im Art. 76 neben dem Argument 1,0,0 in der Abtheilung 1. angegeben ist. Da wir schon oben $V = k \sin \gamma$ gesetzt haben, so giebt die obige Gleichung

$$k = M - y (1 + c) \frac{2f'e}{1 - e^2}$$

und substituiren wir diesen Ausdruck von k in (31), so ergibt sich

$$(33) \dots \dots \dots y = \frac{fM(1 - e^2)}{2ef' + 2cef' + \xi f'(1 - e^2)}$$

woraus y bestimmt werden muss.

94.

Es giebt noch einen Fall, in welchem die im Art. 91 für die Integration entwickelten Ausdrücke nicht angewandt werden können, nemlich den, wo entweder $\beta - y$ oder $\beta + y$ sehr klein, oder gar Null wird, und in welchem daher ein anderes Verfahren angewandt werden muss. In Bezug auf die Glieder, die in dieser Abhandlung berechnet werden, tritt dieser Fall nicht ein, weshalb ich ihn hier unerörtert lasse.

95.

Wenden wir uns jetzt zu der Integration der Gleichungen, die die Breitenstörungen geben, und zwar zuerst zu denen für P und Q . Diese sind zufolge des Vorhergehenden

$$\begin{aligned} \frac{dP}{n_0 dt} &= -\alpha Q + B \\ \frac{dQ}{n_0 dt} &= \alpha P + C \end{aligned}$$

Heben wir nun aus den vollständigen Ausdrücken von B und C irgend zwei correspondirende Glieder aus, und bezeichnen sie mit

$$B = F \cos (n_0 \beta t + \theta)$$

$$C = A \sin (n_0 \beta t + \theta)$$

und Q die Glieder

$$P = \Theta \sin (n_0 \beta t + \theta)$$

$$Q = H \cos (n_0 \beta t + \theta)$$

en sollen. Die Substitution dieser Ausdrücke in die vorstehenden führt sogleich auf die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\beta \Theta = -\alpha H + F) \cos (n_0 \beta t + \theta) \\ (-\beta H = \alpha \Theta + A) \sin (n_0 \beta t + \theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

durch die Elimination

$$\left. \begin{aligned} \Theta = \frac{\beta}{\beta^2 - \alpha^2} F + \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} A \\ H = -\frac{\beta}{\beta^2 - \alpha^2} A - \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} F \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

ist, womit die Integration im Allgemeinen ausgeführt ist.

96.

haben wieder für $\beta = 0$, welche Bedingung auch hier $\theta = 0$ zieht, einen Ausnahmefall zu betrachten. Die zweite Gleichung ist in diesem Falle schon dadurch erfüllt, dass $\sin (n_0 \beta t + \theta) = 0$. Der Coefficient bleibt daher bei der allgemeinen Integration unbestimmt, und bildet die willkürliche Constante. Da nun dem Vorhergehenden zufolge

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + \delta Q$$

von der Ordnung der Störungen ist, so hat hier die willkürliche Constante den Ausdruck $2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k$, wo k von der Ordnung der Störungen ist, und bildet das constante Glied im vollständigen Ausdruck Q . Nennen wir dieses Glied, der im vor. Art. eingeführten Bezeichnung gemäss, H_0 , so wird also

$$H_0 = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k$$

wo unter J_0 die mittlere Neigung der Mondbahn gegen die Erdstrecke verstanden wird, so muss k so bestimmt werden, dass im Ausdruck der Störungen des Sinus der Mondbreite, dessen Hauptglied $\sin J_0 \sin (\bar{f} + \omega)$ ist, ein $\sin (g + \omega)$ multiplicirtes Glied vorkommt, oder mit andern Worten der Coefficient des in dem Ausdruck der Störungen des Sinus der Mondbreite mit $\sin (g + \omega)$ multiplicirten Gliedes gleich Null ist.

Wenden wir uns nun zur ersten Gleichung (34) für den Fall $\beta =$ und substituiren darin den oben gefundenen Ausdruck für H_0 , so muß um dieser Gleichung zu genügen,

$$- \alpha (2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k) + I_0 = 0$$

sein, wenn wir mit I_0 das constante Glied im vollständigen Ausdruck von B , dessen numerische Coefficienten im Art. 82 gegeben sind, bezeichnen. Diese Gleichung giebt

$$(36) \dots \dots \dots \alpha = \frac{I_0}{2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k}$$

wodurch der Werth von α gegeben ist.

Die zweite willkürliche Constante, die diesen beiden Integralen zukommt, fällt mit dem Bogen θ zusammen. Wenn β nahe $= \pm \alpha$, so kann sich auch hier ereignen, dass die Gleichungen (35) nicht angewandt werden können. Die alsdann nöthigen Abänderungen sollen erklärt werden, wenn der Fall eintritt.

97.

Es ist noch die Integration darzulegen, wodurch die im Art. 51 eingeführte Function $\delta\delta K$ erhalten wird. Diese ist sehr einfach. Sei der Ausdruck des Differential's davon, dessen numerische Coefficienten im Art. 85 entwickelt wurden, zufolge des Art. 51

$$\frac{d\delta\delta K}{ndt} = \sum X \cos(n\beta t + \theta) + \eta - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0$$

und dem entsprechend im Integral

$$\delta\delta K = \sum R \sin(n\beta t + \theta)$$

so ist im Allgemeinen für jedes Glied

$$(37) \dots \dots \dots R = \frac{X}{\beta}$$

wo aber wieder der Fall $\beta = 0$ ausgenommen werden muss. Bezeichnen wir den Coefficienten des constanten Gliedes unter dem Summenzeichen \sum im Ausdruck des Differential's von $\delta\delta K$ mit X_0 , so wird diesem Falle

$$0 = X_0 + \eta - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0$$

woraus

$$(38) \dots \dots \dots \eta = \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0 - X_0$$

hervorgeht. Diese Gleichung dient daher zur Bestimmung von η .

98.

Ehe wir zur Bestimmung der numerischen Werthe der Bewegungen des Perigäums und der Knoten übergehen können, müssen wir den in Art. 52 angeführten Umstand, dass die Werthe von e und J , die schliesslich durch die Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen hervorgegangen sind, kleine Unterschiede von den der Berechnung der Störungen zu Grunde gelegten Werthen zeigen, berücksichtigen, da er einen geringen Einfluss auf die genannten Bewegungen hat. Der geringe Betrag dieser a. a. O. mit Δe und ΔJ bezeichneten Unterschiede macht deren Berücksichtigung sehr einfach, und es hat deswegen namentlich Δe auf die Bewegung des Perigäums nur sehr kleinen, unmerklichen Einfluss. Der Grund davon ist der folgende. Im Ausdruck (33) für y ist der Zähler M durchweg mit e multiplicirt, und der Nenner ebenfalls, indem auch der analytische Ausdruck von ξ mit e multiplicirt ist; es erhebt sich daher in der Hauptsache der Einfluss von Δe auf y auf. Nun enthalten freilich auch die einzelnen Theile des Ausdrucks (33) Glieder, die mit $e^3, e^5, \text{etc.}$ multiplicirt sind, allein wegen des geringen Betrages von Δe ist die Wirkung davon auf diese Glieder unmerklich. In Bezug auf die Knotenbewegung findet für ΔJ ein ähnliches Verhalten statt. Alle Glieder des Ausdrucks (36) für α sind mit $\sin \frac{1}{2}J$ multiplicirt, und die Wirkung einer Verbesserung dieses Factors ist daher Null, so dass nur die Wirkung von ΔJ auf die mit $\sin \frac{3}{2}J, \text{etc.}$ multiplicirten Glieder übrig bleibt. Da im Ausdruck (36) auch Glieder vorkommen, die mit $e^3, e^4, \text{etc.}$ multiplicirt sind, so ist Δe nicht ohne Wirkung, die aber in unserem Falle nur sehr klein sein kann.

99.

In meiner dritten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten habe ich ausführlich gezeigt, wie man die Verbesserungen der Störungen berechnen kann, wenn alle der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente mit Fehlern behaftet sind, im gegenwärtigen Falle stellt ich jedoch diese Verbesserung weit einfacher dar, theils weil wir uns nur mit zwei Elementen zu beschäftigen haben, und theils weil die Verbesserungen dieser Elemente so sehr klein sind.

Der Grundsatz, von welchem wir bei dieser Verbesserung der Störungen ausgehen müssen, ist selbstverständlich der, dass wir die Aus-

drücke der Differentiale der Störungen in Bezug auf e und J suchen, und darin die Incremente Δe und ΔJ nebst ihren Potenzen und Producten substituiren müssen, wodurch die Verbesserungen der Störungen mit jeder beliebigen Genauigkeit erhalten werden. In Bezug auf ΔJ ist diese Substitution bei der hier angewandten Methode sehr einfach, denn da ohne Rücksicht auf die Störungen $Q = 2 \sin \frac{1}{2} J$ ist, so brauchen wir nur zu dem im Art. 66 angegebenen Werthe von δQ das Increment $\frac{\Delta J}{\cos \frac{1}{2} J}$, oder blos ΔJ , hinzuzufügen, und damit die Rechnungen ohne weitere Abänderung der Formeln durchzuführen, da die Differentiale der Störungen nach P und Q ohnehin schon gegeben sind. In Bezug auf Δe ist etwas anders zu verfahren, da in der angewandten Methode e nicht als Veränderliche auftritt. Statt dessen dienen die Veränderlichen $n dz$, ν und $\delta \frac{h_0}{h}$, und man braucht daher nur den Einfluss von Δe auf diese Veränderlichen zu ermitteln, und die daraus folgenden Incremente $n \Delta z$, $\Delta \nu$ und $\Delta \frac{h_0}{h}$ den Werthen von $n dz$, ν und $\delta \frac{h_0}{h}$ der Art. 66 u. 69 hinzuzufügen und damit die Rechnung fortzusetzen. Die im Vorhergehenden mit unten angehängter Null bezeichneten Functionen dürfen hiebei nicht geändert werden, sondern müssen die nemlichen numerischen Werthe behalten, die sie im Vorhergehenden bekommen haben.

100.

Zufolge des Vorhergehenden ist mit bloßer Rücksicht auf den vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} \frac{d\delta z}{dt} &= 2 \left(\frac{r}{a} \cos f + \frac{1}{2} e \right) \Delta e \\ \nu &= - \frac{1}{2} \frac{d\delta z}{dt} + \frac{1}{2} \delta \frac{h_0}{h} \\ \frac{1}{h} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{an} \end{aligned}$$

Die Entwicklung giebt mit ausreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \cos f + \frac{1}{2} e &= \cos g + \frac{1}{2} e \cos 2g + \dots \\ \Delta \frac{h_0}{h} &= - \frac{e}{1-e^2} \Delta e = - e \Delta e \end{aligned}$$

wenn man hier $1 - e^2$ übergeht. Hiemit wird

$$\begin{aligned} n \Delta z &= 2 \Delta e \sin g + \frac{1}{2} e \Delta e \sin 2g + \dots \\ \Delta \nu &= - \frac{1}{2} e \Delta e - \Delta e \cos g - \frac{1}{2} e \Delta e \cos 2g + \dots \end{aligned}$$

www.libtop.com.cn $2\Delta v + \Delta \frac{h}{h_0} = -2\Delta e \cos g - e\Delta e \cos 2g - \dots$

wozu noch

$$\Delta Q = \Delta J$$

kommt.

101.

Wenn wir nun zuerst schlechtweg ΔJ in der Bewegung des Perigäums berücksichtigen, so ist blos das Product des Coefficienten des Arguments 1,0,0 in 1. des Ausdrucks von N für T mit ΔJ den bisherigen Gliedern hinzuzufügen. Der Art. 71 giebt diesen Coefficienten $= -34,22$, und der Art. 52 giebt $\Delta J = -5,33$; das Product dieser beiden Grössen ist

$$= + 0,00084$$

Gehen wir einen Schritt weiter und berücksichtigen auch die Producte von ΔJ mit δP und δQ , so ist leicht zu finden, dass die daher rührende Verbesserung in dem Product

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J_0}$$

besteht. Die betreffenden Tafeln des Art. 72 geben

$$H\delta P + N\delta Q = + 0,12382$$

und hiemit wird

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J_0} = - 0,00003$$

also sehr klein. Addiren wir nun die beiden berechneten Glieder, so wird ihre Summe

$$= + 0,00078$$

die ganze Verbesserung, die der Coefficient M des Ausdrucks (33) wegen Δe und ΔJ bekommt, da, wie oben erklärt wurde, Δe nichts Merkliches geben kann.

Der Art. 52 giebt $\Delta e = -0,25$, und hiemit geben die Ausdrücke des vor. Art.

$$n\Delta z = -0,50 \sin g - 0,01 \sin 2g$$

$$2\Delta v + \Delta \frac{h}{h_0} = + 0,50 \cos g + 0,03 \cos 2g$$

Multiplirt man diese mit den betreffenden Gliedern von $\left(\frac{dB_0}{dg}\right)$ und \bar{B} , so wird die Summe der Producte

$$= - 0,00002$$

und diese ist die ganze Verbesserung, die der Coefficient T_0 des Aus-

drucks (36) wegen Δe bekommt. Die Verbesserung wegen ΔJ kann aus dem im Art. 98 angeführten Grunde auch nur klein werden, allein da hier ΔJ beträchtlich grösser ist wie Δe , so will ich sie berechnen. Zuerst ist, gleichwie oben, das Product des constanten Gliedes von N für B mit ΔJ zu berechnen. Dieses Glied ist zufolge des Art. 80 $= +862''77$, und da $\Delta J = -5''33$ ist, so wird dieses Product

$$= -0''02230$$

Ferner ist wieder das Product

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J}$$

zu berücksichtigen, in welchem, wenn wir ganz genau verfahren wollen, das Product des constanten Gliedes von N mit dem constanten Gliede von δQ ausser Berücksichtigung gelassen werden muss. Aus dem Art. 81 ergibt sich unter dieser Bedingung

$$H\delta P + N\delta Q = -1''01877 - 1''04640 - 0''44314 = -2''21031$$

und hieraus

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J} = +0''00064$$

und die ganze Verbesserung von Γ_0 wegen ΔJ wird also

$$= -0''02166$$

Es muss nun aber auch die Constante k im Nenner des Ausdrucks (36) das Increment ΔJ bekommen, und hiemit wird

$$\Delta \alpha = - \frac{\Gamma_0}{(2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k)^2} \Delta J$$

oder die Verbesserung von Γ_0 , wenn wir den bisherigen Nenner $2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k$ beibehalten wollen,

$$= - \frac{\Gamma_0}{2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k} \Delta J$$

Nun giebt der Art. 82 $\Gamma_0 = +75''11$ und hiemit wird

$$- \frac{\Gamma_0}{2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k} \Delta J = +0''02157$$

fügt man diesem die oben gefundene Verbesserung hinzu, so wird die vollständige Verbesserung von Γ_0 wegen ΔJ

$$= -0''00009$$

also sehr klein.

In Bezug auf die Function X des Art. 85 ist im constanten Gliede die Verbesserung

$$- \left\{ B \frac{1 + \sin^2 \frac{1}{2} J}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J} + \alpha F \right\} \Delta J = + 0,0010$$

abringen.

102.

Da nun alle von der störenden Kraft der Sonne herrührenden Glieder, die auf y , α , η Wirkung äussern, berechnet sind, so können wir Berechnung der Zahlenwerthe der letzt genannten Grössen nach den Formeln (33), (36), (38) vornehmen. Für den mit M bezeichneten Coefficienten haben wir aus

$$\begin{array}{l} \text{Art. 76} \dots +194,89447 \\ \text{» 77} \dots -0.00721 \\ \text{» 78} \dots +0.00167 \\ \text{» 101} \dots +0.00078 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \text{aus } T^{(1)} \text{ und } T^{(2)} \\ \text{aus } T^{(3)} \\ \text{wegen } \Delta J \end{array} \right\}$$

$$M = +194,88671$$

ist ferner

$$\begin{aligned} \log f &= 9,9995090 \\ \log f'' &= 9,9994809 \\ c &= +973,799 \text{ aus Art. 69} \end{aligned}$$

Wie weiter unten wird sich ergeben, dass

$$\xi = -310,321$$

Fügen wir noch aus dem Art. 52

$$\begin{aligned} \log e &= 8,7395786 \\ \log (1-e^2) &= 9,9986890 \end{aligned}$$

zu, so ist alles beisammen, welches zur Berechnung von y erforderlich ist. Den Logarithmus des Nenners des Ausdrucks (33) finde ich

$$= 9,0353919$$

und hiemit wird

$$y = +1761,3718$$

Zur Bestimmung von α durch (36) haben wir für T_0

$$\begin{array}{l} \text{Art. 82} \dots +75,10723 \\ \text{» 83} \dots +0.00093 \\ \text{» 101} \dots -0.00011 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{aus } B^{(1)} \text{ und } B^{(2)} \\ \text{aus } B^{(3)} \\ \text{wegen } \Delta e \text{ und } \Delta J \end{array} \right\}$$

$$T_0 = +75,10805$$

Aus dem Art. 52 ist

$$\log 2 \sin \frac{1}{2} J = 8,9532574$$

346

P. A. HANSEN,

und aus dem Art. 66

$$k = +34,700$$

hiemit wird der Logarithmus des Nenners des Ausdrucks (36)

$$= 8,9540703$$

und man bekommt

$$\alpha = 834,8648$$

Aus dem Art. 85 ist X_0

$$\begin{array}{r} +0,0456 \\ \text{Art. 101} \dots +0,0010 \text{ wegen } \mathcal{A} \\ \hline X_0 = +0,0466 \end{array}$$

und hiemit giebt der Ausdruck (38)

$$\eta = +1,6399$$

womit die von der störenden Kraft der Sonne herrührenden Theile dieser Grössen gegeben sind.

103.

Um die im vor. Art. erhaltenen Werthe von y , α , η mit den Resultaten der Beobachtungen vergleichen zu können, müssen noch die in den Artt. 78 und 83 angegebenen Umstände, die mitwirkend sind, berücksichtigt werden. Um den Gang der Darstellung, welche sich nur auf die von der Sonne bewirkten Ungleichheiten bezieht, nicht zu unterbrechen, habe ich die Entwicklung der zu y und α hinzukommenden Glieder an den Schluss dieser Abhandlung verlegt und entnehme daraus die folgenden Zahlenwerthe. Zu y kommt

$$\begin{array}{r} +0,0251 \text{ vermöge der Einwirkung der Planetenmassen} \\ +0,0705 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{der Figur der Erde} \\ +y' \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{der Figur des Mondes} \\ \hline \text{im Ganzen } +0,0956 + y' \end{array}$$

und zu α kommt

$$\begin{array}{r} -0,0065 \text{ wegen Einwirkung der Mondmasse} \\ +0,0181 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{der Planetenmassen} \\ +0,0709 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{der Figur der Erde} \\ +\alpha' \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{der Figur des Mondes} \\ \hline +0,0825 + \alpha' \text{ im Ganzen.} \end{array}$$

Die hieraus folgende Aenderung von γ ist so klein, dass man sie übersehen kann. Die obigen Wirkungen der Mond- und der Planetenmassen lassen ohne Weiteres aus der Theorie berechnet werden können, in Bezug auf die Wirkung der Figur der Erde ist der Umstand benutzt worden, dass diese auch in der Länge und der Breite des Mondes merkliche Ungleichheiten verursacht. Nachdem der Coefficient der daher rührenden Breitenstörung durch Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen bestimmt worden war, waren die obigen von der Figur der Erde herrührenden Theile von γ und α gegeben, da die Theorie eine Relation zwischen diesen Theilen und jenem Coefficienten festsetzt. In Bezug auf die Einwirkung der Figur des Mondes ist ein solches Auskunftsmittel nicht vorhanden, da die periodischen Störungen, die davon herrühren, so klein sind, dass sie sich der Beobachtung entziehen. Es blieb daher hiefür kein anderes Mittel übrig als die oben angeführten unbestimmten Grössen γ' und α' anzuwenden, und aus der Vergleichung des so entstehenden Resultats der Theorie mit den Beobachtungen die Einwirkung der Figur des Mondes auf γ und α zu ermitteln. Wenn man aus irgend einer anderen Erscheinung die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers hinreichend sicher ermitteln könnte, so würde man daraus α' und γ' berechnen können, da sie Functionen dieser Unterschiede sind; aber dieses Mittel ist nicht vorhanden.

Da dieses sich so verhält, so ist die vollständige Bestimmung der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes aus der Theorie unmöglich, und die von mir bei der Bearbeitung der Mondtafeln angewandte Bestimmung dieser Bewegungen durch die Beobachtungen ist daher auch kein Empirismus.

Aber selbst wenn es gelänge eine Erscheinung aufzufinden, durch welche man die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers mit einer für den hier verfolgten Zweck hinreichenden Sicherheit bestimmen könnte, müsste man doch auf die prioristische Bestimmung der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes für den Zweck ihrer Anwendung in den Mondtafeln Verzicht leisten, da der Haupttheil derselben, nemlich der von der störenden Kraft der Sonne herrührende, sich mit der erforderlichen Genauigkeit nur auf höchst schwierige Weise berechnen lässt. Die Anzahl der Decimalen der Secunde, die in dieser Behandlung mit in Rechnung gezogen worden ist, reicht für eine hinreichend genaue Bestimmung der Coefficienten der periodischen Un-

gleichheiten vollständig aus, denn man wird durch diese Anzahl von Decimalen die am Schwierigsten zu bestimmenden Coefficienten wenigstens bis auf ein Paar Hunderttheile der Secunde richtig erhalten, und die leichter zu bestimmenden Coefficienten genauer. Aber damit kann man in den jährlichen Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes die Hunderttheile von Secunden keineswegs verbürgen, während die Mondtafeln eine weit genauere Bestimmung dieser Bewegungen verlangen. Um dieses in der theoretischen Berechnung derselben leisten zu können, müsste man die Coefficienten der periodischen Störungen mit mehr Decimalen berechnen wie hier geschehen ist, und dadurch würde die Ausdehnung der Arbeit beträchtlich grösser werden, ohne sonstigen Nutzen zu schaffen.

Addiren wir nun die oben gefundenen verschiedenen Theile von y und α , so ergibt sich

$$\begin{aligned} y &= 1761'4674 + \eta' \\ \alpha &= 834.9471 + \alpha' \\ \eta &= 1.6399 \end{aligned}$$

und multipliciren wir diese mit dem aus dem Art. 52 zu entnehmenden, und in Theilen des Kreisradius zu verwandelnden Werthe von n , so wird

$$\begin{aligned} ny &= 146707'20 + ny' \\ n\alpha &= 69540.18 + n\alpha' \\ n\eta &= 136.58 \end{aligned}$$

Die siderische Bewegung des Perigäums auf der Ecliptik hat $n(y-2\eta)$, und die siderische, rückläufige Bewegung der Knoten $n(\alpha+\eta)$ zum Ausdruck; die vorstehenden Werthe geben

$$\begin{aligned} n(y-2\eta) &= 146434'04 + ny' \\ n(\alpha+\eta) &= 69676.76 + n\alpha' \end{aligned}$$

und dagegen habe ich mit Weglassung der höheren Decimalen nach Ausweis der Mondtafeln aus den Beobachtungen gefunden

$$\begin{aligned} \text{jährl. sid. Bew. des Perigäums} &= 146435'60 \\ \text{» » » der Knoten} &= 69679.62 \end{aligned}$$

Vergleicht man diese mit den vorstehenden Werthen, so erhält man

$$\begin{aligned} ny' &= +1'56 \\ n\alpha' &= +2.85 \end{aligned}$$

oder in Theilen des Kreisradius

$$y' = + 0,0000000908$$

$$\alpha' = + 0,0000001659$$

er Wirkung der Figur des Mondkörpers auf die Bewegungen des Jovis und der Knoten des Mondes zuzuschreiben sind. Man wird sehen, dass daraus nicht unannehmbare Werthe der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers hervorgehen.

104.

Zur Ausführung der Integrationen müssen wir uns zuerst die Bedeutung der im Art. 90 eingeführten und mit β bezeichneten Grösse genwärtigen. Diese ist in den verschiedenen Abtheilungen von T nieden, und man findet leicht, dass in

- 1) . . . $\beta = i + i'u$
- 2) . . . $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) - 2y'$
- 11) . . . $\beta = i + i'u + \frac{1}{2}(y - 2\eta) - \frac{1}{2}y'$
- 15) . . . $\beta = i + i'u + 6(y - 2\eta) - 6y'$
- 3) . . . $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta)$
- 4) . . . $\beta = i + i'u + 2(\alpha + \eta) + 2y'$
- 5) . . . $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) + \frac{1}{2}(\alpha + \eta) + 2y'$
- 12) . . . $\beta = i + i'u + \frac{1}{2}(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) - 2y'$
- 13) . . . $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) - 2(\alpha + \eta) - \frac{1}{2}y'$
- 16) . . . $\beta = i + i'u + 6(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) - \frac{1}{2}y'$
- 17) . . . $\beta = i + i'u + \frac{1}{2}(y - 2\eta) - 2(\alpha + \eta) - 6y'$
- 18) . . . $\beta = i + i'u + \frac{1}{2}(y - 2\eta) + \frac{1}{2}(\alpha + \eta)$
- 19) . . . $\beta = i + i'u + \frac{1}{2}(\alpha + \eta) + \frac{1}{2}y'$
- 6) . . . $\beta = i + i'u + (y - 2\eta) - y'$
- 7) . . . $\beta = i + i'u + 3(y - 2\eta) - 3y'$
- 14) . . . $\beta = i + i'u + 5(y - 2\eta) - 5y'$
- 8) . . . $\beta = i + i'u + (y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) + y'$
- 9) . . . $\beta = i + i'u + 3(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) - y'$
- 10) . . . $\beta = i + i'u + (y - 2\eta) - 2(\alpha + \eta) - 3y'$

nicht mit der im vor. Art. eben so bezeichneten Grösse identisch sondern wie früher das Verhältniss der Bewegung des Sonnenperi- zu n bezeichnet.

aus dem Art. 52 erhalten wir jetzt, da die vorhergehenden Grössen in den des Kreisradius ausgedrückt werden müssen,

$$u = 0,07543826$$

$$y' = 0,000000655$$

und der vor. Art. giebt

$$y - 2y_i = 0,008524027$$

$$a + y_i = 0,004056055$$

$$y = 0,008539927$$

$$a = 0,004048105$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe von β für den Index i von y und i' von y' . Es brauchten in jeder Abtheilung nur einige Werthe angegeben zu werden, da die übrigen daraus von selbst folgen.

i, i'	β	i, i'	β	i, i'	β
1.		11.		3.	
1,0	1	0,-2	-0.11678	1,-2	0.8713
2,0	2	1,-2	+0.88322	2,-2	1.871
-2,-1	-2.0754	0,-3	-0.19221	4.	
-1,-1	-1.075438	1,-3	+0.80779	-1,4	-0.6901
0,-1	-0.07543826	-1,-4	-1.2677	0,4	+0.3099
1,-1	+0.9245617	0,-4	-0.26766	1,4	1.3099
2,-1	+1.924562	1,-4	+0.73234	-1,3	-0.76557
-1,-2	-1.1509	0,-5	-0.34310	0,3	+0.23413
0,-2	-0.150877	1,-5	+0.65690	1,3	1.2344
1,-2	+0.84912	1,-6	0.5815	-1,2	-0.84101
-1,-3	-1.226	2,-6	1.5815	0,2	0.158990
0,-3	-0.2263	2,-7	1.506	1,2	1.1590
1,-3	+0.7737	3,-7	2.506	-1,1	-0.9164
2.		15.		0,1	+0.083552
-1,-0	-0.98295	1,-5	0.674	1,1	1.0836
0,-0	+0.0170467	2,-5	1.674	-1,0	-0.9919
1,-0	+1.01705	1,-6	0.598	0,0	+0.008113
-1,-1	-1.0584	2,-6	1.598	1,0	1.0081
0,-1	-0.05839152	2,-7	1.523	5.	
1,-1	+0.9416085	3,-7	2.523	-1,2	-0.8320
-1,-2	-1.13383	3.		0,2	+0.1680
0,-2	-0.1338298	1,2	1.176	1,2	1.168
1,-2	+0.8661702	2,2	2.176	12.	
-1,-3	-1.2093	-1,1	-0.8994	0,-1	-0.0332
0,-3	-0.2092680	0,1	+0.10060	1,-1	+0.9668
1,-3	+0.7907320	1,1	1.1006	-1,-2	-1.1087
-1,-4	-1.285	-1,0	-0.9748	0,-2	-0.4087
0,-4	-0.28471	0,0	+0.025160	1,-2	+0.8913
1,-4	+0.71529	1,0	1.02516	-1,-3	-1.184
0,-5	-0.3604	-1,-1	-1.0503	0,-3	-0.1844
1,-5	+0.6399	0,-1	-0.050278	1,-3	+0.8159
		1,-1	+0.94972		

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 351

13.		6.		7.	
-3	-1.217	-1,1	-0.9160	-1,-3	-1.201
-3	-0.2174	0,1	+0.08396	0,-3	-0.20075
-3	+0.7826	1,1	1.0840	1,-3	+0.79925
-4	-1.2928	-1,0	-0.99148	0,-4	-0.2762
-4	-0.2928	0,0	+0.0085234	1,-4	+0.7238
-4	+0.7072	1,0	1.00852	8.	
-5	-0.3683	-1,-1	-1.0669	0,0	0.01664
-5	+0.6317	0,-1	-0.0669449	1,0	1.0166
		1,-1	+0.933085	-1,1	-0.9079
-4	0.7575	-1,-2	-1.1424	0,1	+0.09208
-4	1.7575	0,-2	-0.14235	1,1	1.092
		1,-2	+0.85765	9.	
-6	0.5734	-1,-3	-1.218	1,-1	0.9582
-6	1.5734	0,-3	-0.2178	2,-1	1.958
		1,-3	+0.7822	10.	
0	2.050	7.		0,0	0.00040995
0	3.050	-1,-2	-1.125	-1,-3	-1.226
		0,-2	-0.1253	0,-3	-0.2259
4	0.3180	1,-2	+0.8747	1,-3	+0.7741
4	1.318				

bekommt man die folgenden Werthe von $\beta+y$ und $\beta-y$, von denen ich nur diejenigen angesetzt habe, die in dieser Abhandlung verwendet werden, und dieselbe Abkürzung angewandt habe, wie in der folgenden Tafel.

$\beta+y$	$\beta-y$	i'	$\beta+y$	$\beta-y$
		2.		
1.0085399	0.9914601	-1,-3	-1.2007	-1.2178
2.00854	1.991460	0,-3	-0.2007281	-0.2178080
1 -1.066898	-1.083978	1,-3	+0.7992719	+0.7821920
1 -0.06689833	-0.08397819	-1,-4	-1.276	-1.293
1 +0.9331046	+0.9160219	0,-4	-0.27618	-0.29325
2 -1.1423	-1.1594	1,-4	+0.72382	+0.70675
2 -0.142337	-0.159417	0,-5	-0.3516	-0.3686
2 +0.85766	+0.84058	1,-5	+0.6484	+0.6314
3 -1.218	-1.235	11.		
3 -0.2178	-0.2348	0,-2	-0.10824	-0.12532
3 +0.7822	+0.7652	1,-2	+0.89176	+0.87468
		0,-3	-0.18368	-0.20075
		1,-3	+0.81632	+0.79925
0 -0.97444	-0.99149	-1,-4	-1.2591	-1.2762
0 +0.0250867	+0.0085068	0,-4	-0.25912	-0.27620
0 1.02559	1.00854	1,-4	+0.74088	+0.72380
1 -1.04985	-1.06693	0,-5	-0.33456	-0.35164
1 +0.0498516	-0.0669345	1,-5	+0.66544	+0.64836
1 +0.9501484	+0.9330686	1,-6	0.5900	0.5730
2 -1.12529	-1.14237	2,-6	1.590	1.573
2 -0.1252899	-0.1423697	2,-7	1.515	1.497
2 +0.8747101	+0.8576303	3,-7	2.515	2.497

15.			15.		
1,-5	0.683	0.665	1,-6	0.607	0.589
2,-5	4.683	4.665	2,-6	4.607	4.589
			2,-7	4.532	4.514
			3,-7	2.532	2.514

Es ergibt sich ferner durch die Ausdrücke des Art. 94

$$\log l = 6.847939$$

$$\log l'' = 4.80964$$

und hiemit die folgenden Werthe von $\frac{l''}{\beta^2 - \gamma^2}$, die einzigen, die Mliches geben können,

i, i'	$\log \frac{l''}{\beta^2 - \gamma^2}$
1.	
1,0	4.8097
0,-1	7.0604
2.	
0,-1	7.2864
1,-1	4.862
0,-2	6.5583
1,-2	4.9345
2,-2	4.268
3,-2	3.895
0,-3	6.169
1,-3	5.014

sowie die folgenden von $\frac{l}{\beta}$,

i, i'	$\log \frac{l}{\beta}$	i, i'	$\log \frac{l}{\beta}$
1.		2.	
1,0	6.8480	1,-2	6.9104
2,0	6.547	2,-2	6.577
3,0	6.374	3,-2	6.394
-1,-1	6.816n	4,-2	6.264
0,-1	7.9704n	0,-3	7.527n
1,-1	6.882	1,-3	6.950
-1,-2	6.787n	2,-3	6.595
0,-2	7.6694n	3,-3	6.402
1,-2	6.919	4,-3	6.269
2.		0,-4	7.394n
0,0	8.61632	1,-4	6.994
0,-1	8.08162n	1,-5	7.042
1,-1	6.8744	4.	
2,-1	6.560	0,-4	7.420n
3,-1	6.379	1,-4	6.983
-1,-2	6.794n	2,-4	6.609
0,-2	7.724386n	3,-4	6.411
		4,-4	6.276
		2,-5	6.629

Zugleich mit dieser Integration müssen die Glieder der Functionen $\rho \cos \varphi$ und $\rho \sin \varphi$, die von 2γ , 3γ , etc. abhängen, und die zufolge des Satzes des Art. 35 bisher weggelassen werden durften, ergänzt werden, und diese Ergänzung wird durch die Multiplication der von $\pm \gamma$ abhängigen Glieder mit den dort angegebenen Factoren bewirkt. Die numerischen Werthe dieser Factoren sind

$$\begin{aligned} \log \eta^{(2)} &= 8.4382213 \\ \text{„ } \eta^{(3)} &= 7.05254 \\ \text{„ } \eta^{(4)} &= 5.7406 \\ \text{„ } \eta^{(5)} &= 4.4695 \\ \text{„ } \eta^{(6)} &= 3.226 \\ \log \theta^{(2)} &= 4.5379 n \\ \text{„ } \theta^{(3)} &= 3.328 n \end{aligned}$$

Hiemit sind alle Divisoren und Factoren gegeben, die für die erste Integration gebraucht werden.

Um über die Anwendung dieses Satzes, und den Vortheil den er bei der Berechnung der Störungen verursacht, möglichst vollständige Aufklärung zu geben, schalte ich die folgende Auseinandersetzung hier ein. Die allgemeine Form der Argumente aller im Vorhergehenden entwickelten Functionen ist

$$x\gamma + ig + i'g' + i''\omega - i'''\omega'$$

wo x nicht minder wie i , i' , i'' , i''' irgend eine ganze Zahl ist, die vom grössten negativen Werthe, welchem ein merklicher Coefficient zukommt, bis zum grössten positiven Werthe, für welchen dasselbe der Fall ist, ausgedehnt werden muss. Da die Verwandlung von γ in g nur erst nach der ersten Integration erfolgen darf, so müssten in allen Theilen, aus welchen das Differential von W_0 besteht, wenn man den genannten Satz unberücksichtigt lassen wollte, für jedes Glied, welches einen merklichen Werth bekommt, die Coefficienten der folgenden Argumente berechnet werden,

$$\begin{aligned} & ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ - \gamma + (i + 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ - 2\gamma + (i + 2)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ - 3\gamma + (i + 3)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma + (i - 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & + 2\gamma + (i - 2)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & + 3\gamma + (i - 3)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

wogegen der Satz ausdrückt, dass es ausreichend ist, nur die Coefficienten der drei folgenden Argumente zu berechnen

$$\begin{aligned} & ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & - \gamma + (i + 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & + \gamma + (i - 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \end{aligned}$$

indem die Coefficienten aller übrigen Argumente aus den beiden letzten dieser drei auf die allereinfachste Art berechnet werden können. Da diese Eigenschaft sich nicht nur ohne Ausnahme auf alle Theile von $\frac{dW_0}{dt}$ erstreckt, sondern nach der Integration auch für W_0 statt findet, so lässt sich die Berechnung der Glieder, in deren Argumenten -2γ , -3γ , etc. $+2\gamma$, $+3\gamma$, etc. vorkommt, bis nach der Integration verschieben, oder kann vielmehr mit der Integration selbst zugleich ausgeführt werden.

Seien mit bloßer Rücksicht auf die drei eben bezeichneten Argumente des Differentialis durch das im Vorhergehenden entwickelte Integrationsverfahren im Integral die drei folgenden Glieder für jeden in Betracht kommenden Werth der Indices i , i' , etc. erhalten worden,

$$\begin{aligned} W_0 = & II(0, i, i', i'', i''') \cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + II(-1, i, i', i'', i''') \cos(-\gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + II(1, i, i', i'', i''') \cos(\gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \end{aligned}$$

so werden in Folge des genannten Satzes im vollständigen Ausdruck von W_0 die folgenden Glieder anzusetzen sein.

$$\begin{aligned} W_0 = & II(0, i, i', \dots) \cos(ig + i'g' + \dots) \\ & + II(-1, i+1, i' \dots) \cos(-\gamma + ig + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_2 II(-1, i+2, i'', \dots) + \theta_2 II(1, i+2, i'', \dots)\} \cos(-2\gamma + (i+2)g + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_3 II(-1, i+3, i''', \dots) + \theta_3 II(1, i+3, i''', \dots)\} \cos(-3\gamma + (i+3)g + i'g' + \dots) \\ & + \text{etc.} \\ & + II(1, i-1, i', \dots) \cos(\gamma + (i-1)g + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_2 II(1, i-2, i'', \dots) + \theta_2 II(-1, i-2, i'', \dots)\} \cos(2\gamma + (i-2)g + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_3 II(1, i-3, i''', \dots) + \theta_3 II(-1, i-3, i''', \dots)\} \cos(3\gamma + (i-3)g + i'g' + \dots) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Durch dieses einfache Verfahren, welches dadurch noch einfacher wird, dass θ_2, θ_3 , etc. ihrer kleinen numerischen Werthe wegen nur in den seltensten Fällen in Betracht kommen, können daher alle im Vorhergehenden ausgelassenen Glieder mit Leichtigkeit und Sicherheit berechnet werden.

105.

Um dW_0 zu bilden, ist noch das letzte Glied der Gleichung (32), nemlich

$$-y \frac{h}{h_0} \frac{2f'e}{1-e^2} \sin \gamma$$

zu berechnen. Aber für die Bestimmung von y wurde schon das constante Glied von $\frac{h}{h_0}$ vollständig verwandt, und es bleibt daher nur noch

$$y \delta \frac{h}{h_0} \frac{2f'e}{1-e^2} \sin \gamma$$

zu berücksichtigen übrig, in welchem Ausdruck überdies die Constante, die der Ausdruck von $\delta \frac{h}{h_0}$ enthält, wegzulassen ist, eben weil sie schon zur Bestimmung von y verwandt worden ist. Setzt man zur Abkürzung

$$K = 2y \frac{f'e}{1-e^2} \sin \gamma$$

so ist mit der eben erklärten Beschränkung das Product

$$- K \delta \frac{h}{h_0}$$

zu berechnen. Da man

$$K = 2 \cdot 6,67152 \cdot \sin \gamma$$

findet, wo die in () eingeschlossene Zahl der Logarithmus des numerischen Werths des Coefficienten ist, und der Ausdruck von $\delta \frac{h}{h_0}$ im Art. 69 gegeben ist, so findet man leicht die folgenden einzig merklichen Glieder des Products.

γ, g, g'	$-\frac{K\delta^h}{\sin}$	γ, g, g'	$-\frac{K\delta^h}{\sin}$	γ, g, g'	$-\frac{K\delta^h}{\sin}$
<u>1.</u>		<u>2.</u>		<u>2.</u>	
-1, 1, 0	+0 ^o .028	-1, 0, 0	-0 ^o .00003	-1, 0, -3	+0 ^o .001
-1, 2, 0	+0.001	1, 0, 0	+0.00003	-1, 1, -3	+0.010
1, 1, 0	-0.028	-1, 0, -1	-0.00005	-1, 2, -3	-0.028
1, 2, 0	-0.001	-1, 1, -1	-0.00071	1, 0, -3	-0.001
-1, -1, -1	+0.001	-1, 2, -1	+0.005	-1, 3, -3	-0.001
-1, 0, -1	+0.00210	1, 0, -1	+0.00005	1, 1, -3	-0.010
-1, 1, -1	+0.00168	1, 1, -1	+0.001	1, 2, -3	+0.028
1, -1, -1	-0.00083	1, 2, -1	-0.005	1, 3, -3	+0.001
1, 0, -1	-0.00210	-1, 0, -2	+0.0443	-1, 2, -4	-0.001
1, 1, -1	-0.002	-1, 1, -2	+0.1558	1, 2, -4	+0.001
-1, 0, -2	+0.0001	-1, 2, -2	-0.436	<u>11.</u>	
-1, 1, -2	+0.0001	1, 0, -2	-0.0443	-1, 3, -4	-0.004
1, 0, -2	-0.0001	-1, 3, -2	-0.016	1, 3, -4	+0.004
		1, 1, -2	-0.156		
		1, 2, -2	+0.436		
		1, 3, -2	+0.016		

Es ist jetzt

$$V = T - K\delta \frac{h}{h_0}$$

die Function, von welcher je drei mit einander bei der Integration Verbindung tretende Coefficienten im Art. 90 mit A_0, A_{-1}, A_1 bezeichnet wurden. Die Coefficienten von T , in so weit sie aus den beiden ersten Theilen $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ folgen, befinden sich im Art. 76, und die Coefficienten von $T^{(3)}$, die merklich sind, enthält der Art. 58. Um vollständig zu sein, muss man auch die Wirkung der Planeten betrachten, die hier in den numerischen Entwicklungen festgesetzte Grösse um ein Weniges übersteigt. Ich finde hiefür

γ, g, g'	T sin
<u>2.</u>	
0, 1, -2	-0 ^o .003
-1, 2, -2	+0.002
1, 0, -2	+0.0037
0, 2, -2	+0.018
-1, 3, -2	-0.006
1, 1, -2	-0.018

deren Ableitung ich am Schlusse dieser Abhandlung geben werde.

106.

Stellt man nun die verschiedenen Theile, aus welchen V besteht, zusammen, wobei der Coefficient von 1,0,0 in der Abth. 1. übergangen werden muss, weil er schon zur Bestimmung von y gedient hat, und bricht die Integration nach den Ausdrücken (30) aus, so bekommt man den folgenden Werth von W_0 , dem ich sogleich die Differentialquotienten, die davon gebraucht werden, hinzugefügt habe.

γ, g, g'	W_0 cos	$\left(\frac{dW_0}{dy}\right)$ sin	$\left(\frac{d^2W_0}{dy^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d^3W_0}{dy^3}\right)$ sin	$\left(\frac{d^4W_0}{dy^4}\right)$ cos
1.					
0,0,0	+2939,993				
-1,1,0	-1122,984		+1122,984		-1122,98
-2,2,0	-1,499		+5,996		-23,98
-3,3,0	-0,004,4		+0,037		-0,33
0,1,0	+269,609				
-1,2,0	-54,664	-54,664	+54,664	+54,66	-54,66
-2,3,0	-0,100	-0,200	+0,400	+0,80	-1,60
1,0,0	-310,321	+310,321	+310,321	-310,32	-310,32
2,-1,0	-30,803	+61,606	+123,212	-246,42	-492,84
3,-2,0	-0,061,7	+0,185	+0,555	-1,67	-5,01
0,2,0	+10,023				
-1,3,0	-3,633	-3,633	+3,633	+3,63	-3,63
-2,4,0	-0,007	-0,014	+0,028	+0,06	-0,11
1,1,0	-5,124	+5,124	+5,124	-5,12	-5,12
2,0,0	-8,511	+17,022	+34,044	-68,09	-136,18
3,-1,0	-1,267,4	+3,802	+11,407	-34,22	-102,66
4,-2,0	-0,003,0	+0,012	+0,048	-0,19	-0,77
0,3,0	+0,546				
-1,4,0	-0,252	-0,252	+0,252	+0,25	-0,25
1,2,0	-0,165	+0,165	+0,165	-0,17	-0,17
2,1,0	-0,137	+0,274	+0,548	-1,10	-2,19
3,0,0	-0,350,3	+1,051	+3,153	-9,46	-28,38
4,-1,0	-0,061,8	+0,247	+0,989	-3,96	-15,84
0,4,0	+0,031				
-1,5,0	-0,017	-0,017	+0,017	+0,02	-0,02
1,3,0	-0,007	+0,007	+0,007	-0,01	-0,01
2,2,0	-0,004	+0,008	+0,016	-0,03	-0,06
3,1,0	-0,005,8	+0,017	+0,052	-0,16	-0,47
4,0,0	-0,017,1	+0,068	+0,274	-1,10	-4,40
5,-1,0	-0,003,3	+0,017	+0,083	-0,42	-2,08
0,-3,-1	+0,018				
1,-2,-1	-0,005	-0,005	+0,005	+0,01	-0,01
2,-1,-1	-0,004	-0,008	+0,016	+0,03	-0,06
-3,0,-1	-0,091,9	-0,276	+0,827	+2,48	-7,44
-4,1,-1	-0,001,7	-0,007	+0,027	+0,11	-0,43
, -4, -1	-0,008	+0,008	+0,008	-0,01	-0,01

4.					
0,-2,-1	+0.281				
-1,-1,-1	-0.157	-0.157	+0.157	+0.16	-0.16
-2,0,-1	-2.234	-4.468	+8.936	+17.87	-35.74
-3,1,-1	-0.035.6	-0.107	+0.320	+0.96	-2.88
1,-3,-1	-0.094	+0.094	+0.094	-0.09	-0.09
0,-1,-1	+7.523				
-1,0,-1	-81.437	-81.437	+81.437	+81.44	-81.44
-2,1,-1	-0.866	-1.732	+3.464	+6.93	-13.86
-3,2,-1	-0.003.2	-0.010	+0.029	+0.09	-0.27
1,-2,-1	-1.491	+1.491	+1.491	-1.49	-1.49
2,-3,-1	-0.003	+0.006	+0.012	-0.02	-0.05
0,0,-1	{+11.8233				
	{+11.8225				
-1,1,-1	-31.5798	-31.5798	+31.580	+31.58	-31.58
-2,2,-1	-0.0788	-0.1576	+0.315	+0.63	-1.26
-3,3,-1	-0.0002.7	-0.0008	+0.002	+0.01	-0.03
1,-1,-1	-24.6285	+24.6285	+24.629	-24.63	-24.63
2,-2,-1	-0.0409	+0.0818	+0.164	-0.33	-0.66
3,-3,-1	-0.0001.1	+0.0003	+0.001	0.00	-0.01
0,1,-1	+13.372				
-1,2,-1	-2.873	-2.873	+2.873	+2.87	-2.87
-2,3,-1	-0.007	-0.014	+0.028	+0.06	-0.11
1,0,-1	+97.102	-97.102	-97.102	+97.10	+97.10
2,-1,-1	-0.676	+1.352	+2.704	-5.41	-10.82
3,-2,-1	-0.001.7	+0.005	+0.015	-0.05	-0.15
0,2,-1	+0.631				
-1,3,-1	-0.240	-0.240	+0.240	+0.24	-0.24
1,1,-1	-0.348	+0.348	+0.348	-0.35	-0.35
2,0,-1	+2.664	-5.328	-10.656	+21.31	+42.62
3,-1,-1	-0.027.8	+0.083	+0.250	-0.75	-2.25
0,3,-1	+0.037				
-1,4,-1	-0.019	-0.019	+0.019	+0.02	-0.02
1,2,-1	-0.011	+0.011	+0.011	-0.01	-0.01
2,1,-1	-0.010	+0.020	+0.040	-0.08	-0.16
3,0,-1	+0.109.6	-0.329	-0.986	+2.96	+8.88
4,-1,-1	-0.001.4	+0.006	+0.022	-0.09	-0.35
0,-2,-2	+0.005				
-1,-1,-2	-0.002	-0.002	+0.002	0.00	0.00
-2,0,-2	-0.031	-0.062	+0.124	+0.25	-0.50
-3,1,-2	-0.001.0	-0.003	+0.009	+0.03	-0.09
1,-3,-2	-0.002	+0.002	+0.002	0.00	0.00
0,-1,-2	+0.210				
-1,0,-2	-1.134	-1.134	+1.134	+1.13	-1.13
-2,1,-2	-0.023	-0.046	+0.092	+0.18	-0.37
1,-2,-2	-0.042	+0.042	+0.042	-0.04	-0.04
0,0,-2	{+0.4334				
	{+0.4344				
-1,1,-2	-0.8476	-0.8476	+0.848	+0.85	-0.85
-2,2,-2	-0.0026	-0.0052	+0.010	+0.02	-0.04
1,-1,-2	-0.5719	+0.5719	+0.572	-0.57	-0.57
2,-2,-2	-0.0012	+0.0024	+0.005	-0.01	-0.02

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 359

1.					
0,1,-2	+0,438				
1,2,-2	-0.096	-0,096	+0,096	+0,10	-0,10
1,0,-2	+1.495	-1.495	-1.495	+1.50	+1.50
-1,-2	-0.016	+0.032	+0.064	-0.13	-0.26
0,2,-2	+0.024				
1,3,-2	-0.008	-0.008	+0.008	+0.01	-0.01
1,1,-2	-0.044	+0.044	+0.044	-0.01	-0.01
2,0,-2	+0.044	-0.082	-0.164	+0.33	+0.66
-1,-2	-0.000.6	+0.002	+0.005	-0.02	-0.06
-1,-3	+0.006				
1,0,-3	-0.018	-0.018	+0.018	+0.02	-0.02
-2,-3	-0.004	+0.001	+0.001	0.00	0.00
0,0,-3	{ +0.027				
	{ +0.022				
1,1,-3	-0.049	-0.049	+0.049	+0.02	-0.02
-1,-3	-0.045	+0.045	+0.045	-0.02	-0.02
0,1,-3	+0.042				
1,2,-3	-0.004	-0.004	+0.004	0.00	0.00
1,0,-3	+0.025	-0.025	-0.025	+0.03	+0.03
2.					
0,0,0	{ +0.01744				
	{ +0.01448				
-1,1,0	+0.00248	+0.00248	-0.002		
-2,2,0	-0.00045	-0.00030	0.000		
1,-1,0	+0.00037	-0.00037	0.000		
0,1,0	+0.037				
-1,2,0	-0.006	-0.006	+0.006	+0.01	-0.01
1,0,0	-2.531	+2.531	+2.531	-2.53	-2.53
0,2,0	+0.009				
-1,3,0	-0.002	-0.002	+0.002	0.00	0.00
1,1,0	-0.017	+0.047	+0.017	-0.02	-0.02
2,0,0	-0.069	+0.138	+0.276	-0.55	-1.10
-1,-1	-0.042				
1,0,-1	+0.070	+0.070	-0.070	-0.07	+0.07
2,1,-1	+0.004	+0.002	-0.004	-0.01	+0.02
3,2,-1	+0.000.7	+0.002	-0.006	-0.02	+0.06
-2,-1	+0.005	-0.005	-0.005	+0.01	+0.01
0,0,-1	{ +1.2006				
	{ +0.2017				
1,1,-1	+0.0444	+0.0444	-0.044	-0.04	+0.04
2,2,-1	+0.0179	+0.0358	-0.072	-0.14	+0.28
3,3,-1	-0.0086.9	-0.0264	+0.078	+0.23	-0.69
-1,-1	+0.0734	-0.0734	-0.073	+0.07	+0.07
-2,-1	+0.0004	-0.0002	0.000	0.00	0.00
0,1,-1	+0.079				
1,2,-1	+0.653	+0.653	-0.653	-0.65	+0.65
2,3,-1	-0.214	-0.422	+0.844	+1.69	-3.38
3,4,-1	-0.004.0	-0.003	+0.009	+0.03	-0.08
1,0,-1	-18.624	+18.624	+18.624	-18.62	-18.62
-1,-1	+0.002	-0.004	-0.008	+0.02	+0.04

2.					
0,2,-1	+30.921				
-1,3,-1	-7.701	-7.701	+7.701	+7.70	-7.7
-2,4,-1	-0.024	-0.048	+0.096	+0.19	-0.3
1,1,-1	-55.873	+55.873	+55.873	-55.87	-55.8
2,0,-1	-0.511	+1.022	+2.044	-4.09	-8.1
0,3,-1	+2.215				
-1,4,-1	-0.863	-0.863	+0.863	+0.86	-0.8
-2,5,-1	-0.002	-0.004	+0.008	+0.02	-0.0
1,2,-1	-1.282	+1.282	+1.282	-1.28	-1.2
2,1,-1	-1.533	+3.066	+6.132	-12.26	-24.5
3,0,-1	-0.021.0	+0.063	+0.189	-0.57	-1.7
0,4,-1	+0.155				
-1,5,-1	-0.076	-0.076	+0.076	+0.08	-0.0
1,3,-1	-0.054	+0.054	+0.054	-0.05	-0.0
2,2,-1	-0.035	+0.070	+0.140	-0.28	-0.0
3,1,-1	-0.063.1	+0.189	+0.568	-1.70	-5.1
4,0,-1	-0.001.0	+0.004	+0.016	-0.06	-0.0
0,5,-1	+0.011				
-1,6,-1	-0.006	-0.006	+0.006		
1,4,-1	-0.003	+0.003	+0.003		
2,3,-1	-0.001	+0.002	+0.004		
3,2,-1	-0.001.5	+0.005	+0.014		
4,1,-1	-0.003.1	+0.012	+0.050		
0,-2,-2	-0.010				
-1,-1,-2	+0.003	+0.003	-0.003		
-2,0,-2	+0.037	+0.074	-0.148		
-3,1,-2	+0.018.0	+0.054	-0.162		
-4,2,-2	-0.008.6	-0.034	+0.138		
-5,3,-2	+0.001.8	+0.009	-0.045		
1,-3,-2	+0.006	-0.006	-0.006		
0,-1,-2	-0.136				
-1,0,-2	+1.777	+1.777	-1.777	-1.78	+0
-2,1,-2	+0.416	+0.832	-1.664	-3.33	+6
-3,2,-2	-0.176.4	-0.529	+1.588	+4.76	-14
-4,3,-2	+0.032.8	+0.131	-0.525	-2.10	+8
1,-2,-2	+0.064	-0.064	-0.064	+0.06	+0.
0,0,-2	{ -5.7871				
	{ -5.7921				
-1,1,-2	+15.9607	+15.9607	-15.961	-15.96	+15.
-2,2,-2	-4.2869	-8.5738	+17.148	+34.30	-68.
-3,3,-2	+0.6722.2	+2.0167	-6.050	-18.15	+54.
-4,4,-2	+0.0027.0	+0.0108	-0.043	-0.17	+0.
1,-1,-2	-2.2115	+2.2115	+2.212	-2.21	-2.
2,-2,-2	+0.0017	-0.0034	-0.007	+0.01	+0.
0,1,-2	+191.422				
-1,2,-2	-156.273	-156.273	+156.273	+156.27	-156
-2,3,-2	+16.338	+32.676	-65.352	-130.70	+261
-3,4,-2	+0.055.2	+0.166	-0.497	-1.49	+4
1,0,-2	+3491.070	-3491.070	-3491.070	+3491.07	+3491
2,-1,-2	-0.061	+0.122	+0.244	-0.49	-0

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 364

2.					
0,2,-2	-2775,038				
-1,3,-2	+595,624	+595,624	-595,624	-595,62	+595,62
-2,4,-2	+1,342	+2,684	-5,368	-10,74	+21,48
-3,5,-2	+0,003,8	+0,011	-0,034	-0,10	+0,30
1,1,-2	+6068,983	-6068,983	-6068,983	+6068,98	+6068,98
2,0,-2	+95,760	-191,520	-383,040	+766,08	+1532,16
3,-1,-2	-0,002,5	+0,008	+0,023	-0,07	-0,21
0,3,-2	-149,783				
-1,4,-2	+48,904	+48,904	-48,904	-48,90	+48,90
-2,5,-2	+0,091	+0,182	-0,364	-0,73	+1,46
1,2,-2	+103,566	-103,566	-103,566	+103,57	+103,57
2,1,-2	+166,470	-332,940	-665,880	+1331,76	+2663,52
3,0,-2	+3,940,0	-11,820	-35,460	+106,38	+319,14
0,4,-2	-8,131				
-1,5,-2	+3,326	+3,326	-3,326	-3,33	+3,33
-2,6,-2	+0,006	+0,012	-0,024	-0,05	+0,10
1,3,-2	+3,243	-3,243	-3,243	+3,24	+3,24
2,2,-2	+2,841	-5,682	-11,364	+22,73	+45,46
3,1,-2	+6,849,5	-20,549	-61,646	+184,94	+554,82
4,0,-2	+0,192,1	-0,768	-3,074	+12,30	+49,20
0,5,-2	-0,461				
-1,6,-2	+0,217	+0,217	-0,217	-0,22	+0,22
1,4,-2	+0,132	-0,132	-0,132	+0,13	+0,13
2,3,-2	+0,087	-0,174	-0,348	+0,70	+1,40
3,2,-2	+0,116,9	-0,351	-1,052	+3,16	+9,48
4,1,-2	+0,334,0	-1,336	-5,344	+21,38	+85,52
5,0,-2	+0,010,3	-0,052	-0,258	+1,29	+6,45
0,6,-2	-0,028				
-1,7,-2	+0,015	+0,015	-0,015	-0,02	+0,02
1,5,-2	+0,006	-0,006	-0,006	+0,01	+0,01
2,4,-2	+0,004	-0,008	-0,016	+0,03	+0,06
3,3,-2	+0,003,7	-0,011	-0,033	+0,10	+0,30
4,2,-2	+0,005,7	-0,023	-0,091	+0,36	+1,46
5,1,-2	+0,017,9	-0,090	-0,450	+2,25	+11,25
6,0,-2	+0,000,6	-0,004	-0,022	+0,13	+0,79
0,-1,-3	-0,014				
-1,0,-3	+0,061	+0,061	-0,061		
-2,1,-3	+0,024	+0,048	-0,096		
-3,2,-3	-0,010,7	-0,032	+0,096		
-4,3,-3	+0,002,2	+0,009	-0,035		
1,-2,-3	+0,006	-0,006	-0,006		
0,0,-3	{ -1,256				
	{ -1,293				
-1,1,-3	+0,891	+0,891	-0,891	-0,89	+0,89
-2,2,-3	-0,260	-0,520	+1,040	+2,08	-4,16
-3,3,-3	+0,044,0	+0,132	-0,396	-1,19	+3,57
1,-1,-3	-0,072	+0,072	+0,072	-0,07	-0,07

2.					
0,1,-3	+29.157				
-1,2,-3	-9.483	-9.483	+9.483	+9.48	-9.48
-2,3,-3	+1.068	+2.136	-4.272	-8.54	+17.08
-3,4,-3	+0.004.0	+0.012	-0.036	-0.11	+0.33
1,0,-3	+128.094	-128.094	-128.094	+128.09	+128.09
2,-1,-3	-0.002	+0.004	+0.008	-0.02	-0.04
<hr/>					
0,2,-3	-179.736				
-1,3,-3	+38.944	+38.944	-38.944	-38.94	+38.94
-2,4,-3	+0.096	+0.192	-0.384	-0.77	+1.54
1,1,-3	+402.117	-402.117	-402.117	+402.12	+402.12
2,0,-3	+3.514	-7.028	-14.056	+28.11	+56.22
<hr/>					
0,3,-3	-10.364				
-1,4,-3	+3.510	+3.510	-3.510	-3.51	+3.51
-2,5,-3	+0.007	+0.014	-0.028	-0.06	+0.12
1,2,-3	+7.027	-7.027	-7.027	+7.03	+7.03
2,1,-3	+11.030	-22.060	-44.120	+88.24	+176.48
3,0,-3	+0.144.5	-0.433	-1.301	+3.90	+11.70
<hr/>					
0,4,-3	-0.606				
-1,5,-3	+0.260	+0.260	-0.260	-0.26	+0.26
1,3,-3	+0.235	-0.235	-0.235	+0.24	+0.24
2,2,-3	+0.193	-0.386	-0.772	+1.54	+3.08
3,1,-3	+0.453.8	-1.361	-4.084	+12.25	+36.75
4,0,-3	+0.007.0	-0.028	-0.112	+0.45	+1.80
<hr/>					
0,5,-3	-0.037				
-1,6,-3	+0.018	+0.018	-0.018	-0.02	
1,4,-3	+0.011	-0.011	-0.011	+0.01	
2,3,-3	+0.006	-0.012	-0.024	+0.05	
3,2,-3	+0.008.0	-0.024	-0.072	+0.22	
4,1,-3	+0.022.1	-0.088	-0.354	+1.42	
<hr/>					
0,0,-4	-0.026				
-1,1,-4	-0.059				
-2,2,-4	+0.036	+0.036	-0.036		
-3,3,-4	-0.011	-0.022	+0.044		
-4,4,-4	+0.001.9	+0.006	-0.017		
1,-1,-4	-0.002	+0.002	+0.002		
<hr/>					
0,1,-4	+1.226				
-1,2,-4	-0.401	-0.401	+0.401	+0.40	-0.40
-2,3,-4	+0.047	+0.094	-0.188	-0.38	+0.76
1,0,-4	+3.758	-3.758	-3.758	+3.76	+3.76
<hr/>					
0,2,-4	-7.967				
-1,3,-4	+1.728	+1.728	-1.728	-1.73	+1.73
-2,4,-4	+0.005	+0.010	-0.020	-0.04	+0.08
1,1,-4	+18.500	-18.500	-18.500	+18.50	+18.50
2,0,-4	+0.403	-0.206	-0.412	+0.82	+1.64
<hr/>					
0,3,-4	-0.483				
-1,4,-4	+0.168	+0.168	-0.168	-0.17	+0.17
1,2,-4	+0.325	-0.325	-0.325	+0.33	+0.33
2,1,-4	+0.507	-1.014	-2.028	+4.06	+8.12
3,0,-4	+0.004.2	-0.013	-0.038	+0.14	+0.33

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 363

<u>2.</u>				
0,4,-4	-0,030			
-1,5,-4	+0.013	+0,013	-0,013	
1,3,-4	+0.012	-0.012	-0.012	
2,2,-4	+0.009	-0.018	-0.036	
3,1,-4	+0.020.9	-0.063	-0.188	
<hr/>				
0,1,-5	+0.048			
-1,2,-5	-0.013	-0.013	+0.013	
-2,3,-5	+0.002	+0.004	-0.008	
1,0,-5	+0.098	-0.098	-0.098	
<hr/>				
0,2,-5	-0.296			
-1,3,-5	+0.064	+0.064	-0.064	
1,1,-5	+0.731	-0.731	-0.731	
2,0,-5	+0.003	-0.006	-0.012	
<hr/>				
0,3,-5	-0.019			
-1,4,-5	+0.007	+0.007	-0.007	
1,2,-5	+0.014	-0.014	-0.014	
2,1,-5	+0.020	-0.040	-0.080	
<hr/>				
<u>11.</u>				
0,2,-2	+0.001			
-1,3,-2	0.000	0.000		
1,1,-2	-0.001	+0.001		
<hr/>				
0,3,-2	+0.010			
-1,4,-2	-0.005	-0.005		
1,2,-2	-0.005	+0.005		
<hr/>				
0,4,-3	+0.007			
-1,2,-3	-0.003	-0.003		
-2,3,-3	+0.001	+0.002		
1,0,-3	+0.005	-0.005		
<hr/>				
0,2,-3	-0.032			
-1,3,-3	+0.026	+0.026	-0.026	
-2,4,-3	-0.006	-0.012	+0.024	
1,1,-3	+0.010	-0.010	-0.010	
<hr/>				
0,3,-3	+0.429			
-1,4,-3	-0.210	-0.210	+0.210	
-2,5,-3	-0.002	-0.004	+0.008	
1,2,-3	-0.237	+0.237	+0.237	
<hr/>				
0,4,-3	+0.054			
-1,5,-3	-0.064	-0.064	+0.064	
1,3,-3	+0.030	-0.030	-0.030	
2,2,-3	-0.007	+0.014	+0.028	
<hr/>				
0,5,-3	+0.011			
-1,6,-3	-0.010	-0.010	+0.010	
1,4,-3	0.000	0.000	0.000	
2,3,-3	+0.001	-0.001	-0.002	
<hr/>				
0,0,-4	+0.023			
-1,1,-4	+0.008	+0.008	-0.001	
-2,2,-4	0.000	0.000	0.000	
-3,3,-4	-0.001.7	-0.005	+0.015	
-4,4,-4	+0.000.6	+0.002	-0.010	
1,-1,-4	+0.001	-0.001	-0.001	

44.					
0,1,-4	+0.251				
-1,2,-4	-0.001	-0.001	+0.001		
-2,3,-4	-0.041	-0.082	+0.164		
-3,4,-4	+0.012.5	+0.038	-0.113		
4,0,-4	+0.439	-0.439	-0.439		
0,2,-4	+0.248				
-1,3,-4	-1.484	-1.484	+1.484	+1.48	-1.48
-2,4,-4	+0.304	+0.608	-1.216	-2.43	+4.86
-3,5,-4	+0.003.1	+0.009	-0.028	-0.08	+0.24
4,1,-4	+3.365	-3.365	-3.365	+3.37	+3.37
2,0,-4	+0.012	-0.024	-0.048	+0.10	+0.20
0,3,-4	-25.312				
-1,4,-4	+11.072	+11.072	-11.072	-11.07	+11.07
-2,5,-4	+0.075	+0.150	-0.300	-0.60	+1.20
4,2,-4	+15.886	-15.886	-15.886	+15.89	+15.89
2,1,-4	+0.092	-0.184	-0.368	+0.74	+1.48
0,4,-4	-2.822				
-1,5,-4	+2.751	+2.751	-2.751	-2.75	+2.75
-2,6,-4	+0.011	+0.022	-0.044	-0.09	+0.18
4,3,-4	-1.209	+1.209	+1.209	-1.21	-1.21
2,2,-4	+0.436	-0.872	-1.744	+3.49	+6.98
3,1,-4	+0.003.8	-0.011	-0.034	+0.10	+0.20
0,5,-4	-0.493				
-1,6,-4	+0.406	+0.406	-0.406		
-2,7,-4	+0.001	+0.002	-0.004		
4,4,-4	+0.014	-0.014	-0.014		
2,3,-4	-0.033	+0.066	+0.132		
3,2,-4	+0.017.9	-0.054	-0.161		
0,6,-4	-0.061				
-1,7,-4	+0.046	+0.046	-0.046		
4,5,-4	+0.008	-0.008	-0.008		
2,4,-4	0.000	0.000	0.000		
3,3,-4	-0.001.4	+0.004	+0.012		
4,2,-4	+0.000.9	-0.004	-0.016		
0,7,-4	-0.004				
-1,8,-4	+0.003	+0.003			
4,6,-4	+0.001	-0.001			
0,1,-5	+0.017				
-1,2,-5	+0.003	+0.003			
-2,3,-5	-0.004	-0.008			
-3,4,-5	+0.001.4	+0.004			
4,0,-5	+0.020	-0.020			
0,2,-5	+0.033				
-1,3,-5	-0.161	-0.161	+0.161		
-2,4,-5	+0.034	+0.068	-0.136		
4,1,-5	+0.364	-0.364	-0.364		
0,3,-5	-2.881				
-1,4,-5	+1.246	+1.246	-1.246	-1.25	+1.25
-2,5,-5	+0.010	+0.020	-0.040	-0.08	+0.16
4,2,-5	+1.856	-1.856	-1.856	+1.86	+1.86
2,1,-5	+0.010	-0.020	-0.040	+0.08	+0.16

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 365

11.					
0,4,-5	-0,372				
-1,5,-5	+0.368	+0,368	-0,368	-0,37	+0,37
-2,6,-5	+0.002	+0.004	-0.008	-0.02	+0.04
1,3,-5	-0.155	+0.155	+0.155	-0.16	-0.16
2,2,-5	+0.051	-0.102	-0.204	+0.41	+0.82
0,5,-5	-0.070				
-1,6,-5	+0.059	+0.059	-0.059		
1,4,-5	+0.003	-0.003	-0.003		
2,3,-5	-0.004	+0.008	+0.016		
3,2,-5	+0.002.1	-0.006	-0.019		
0,6,-5	-0.007				
-1,7,-5	+0.006	+0.006			
1,5,-5	+0.001	-0.001			
0,2,-6	+0.006				
-1,3,-6	-0.011	-0.011			
-2,4,-6	+0.002	+0.004			
1,1,-6	+0.021	-0.021			
0,3,-6	-0.201				
-1,4,-6	+0.086	+0.086	-0.086		
-2,5,-6	+0.001	+0.002	-0.004		
1,2,-6	+0.134	-0.134	-0.134		
2,1,-6	+0.001	-0.002	-0.004		
0,4,-6	-0.030				
-1,5,-6	+0.029	+0.029	-0.029		
1,3,-6	-0.011	+0.011	+0.011		
2,2,-6	+0.004	-0.008	-0.016		
0,5,-6	-0.006				
-1,6,-6	+0.005	+0.005	-0.005		
1,4,-6	+0.001	-0.001	-0.001		
0,3,-7	-0.009				
-1,4,-7	+0.005	+0.005			
1,2,-7	+0.007	-0.007			
0,4,-7	-0.001				
-1,5,-7	+0.001	+0.001			
1,3,-7	-0.001	+0.001			
15.					
0,4,-5	+0.006				
-1,5,-5	-0.005	-0.005			
1,3,-5	-0.001	+0.001			
0,5,-5	+0.002				
-1,6,-5	-0.003	-0.003			
1,4,-5	0.000	0.000			
0,3,-6	-0.010				
-1,4,-6	-0.012	-0.012			
-2,5,-6	+0.004	+0.008			
1,2,-6	+0.012	-0.012			
0,4,-6	-0.225				
-1,5,-6	+0.159	+0.159	-0.159		
-2,6,-6	+0.002	+0.004	-0.008		
1,3,-6	+0.070	-0.070	-0.070		

15.					
0,5,-6	-0,064				
-1,6,-6	+0.084	+0,084	-0,084		
-2,7,-6	+0.004	+0.002	-0.004		
1,4,-6	-0.006	+0.006	+0.006		
2,3,-6	+0.002	-0.004	-0.008		
0,6,-6	-0.027				
-1,7,-6	+0.027	+0.027	-0.027		
1,5,-6	+0.009	-0.009	-0.009		
0,7,-6	-0.005				
-1,8,-6	+0.005	+0.005			
1,6,-6	+0.002	-0.002			
0,3,-7	-0.002				
-1,4,-7	-0.004	-0.004			
-2,5,-7	+0.004	+0.002			
1,2,-7	+0.004	-0.004			
0,4,-7	-0.038				
-1,5,-7	+0.026	+0.026			
1,3,-7	+0.042	-0.042			
0,5,-7	-0.042				
-1,6,-7	+0.046	+0.046			
1,4,-7	0.000	0.000			
0,6,-7	-0.006				
-1,7,-7	+0.005	+0.005			
1,5,-7	+0.002	-0.002			

Unter den Gliedern dieser Tafel bilden die folgenden :

$+2939,993 - 310,324 \cos \gamma - 8,514 \cos 2\gamma - 0,350 \cos 3\gamma - 0,047 \cos 4\gamma$
 die Constante, die dem Integral hinzugefügt werden musste. Die beiden
 ersten Coefficienten derselben sind durch die in Art. 92 angegebenen
 Bedingungen bestimmt, und es ist also in Bezeichnungen des Art. 92

$$b = +2939,993; \quad \xi = -310,324$$

Die übrigen Coefficienten dieser Constante sind, gleichwie alle übrigen
 von $2\gamma, 3\gamma$, etc. abhängenden, durch den Satz des Art. 35 berechnet
 worden.

Ebenso wie die übrigen Coefficienten bekommt man auch die Co-
 efficienten dieser Constante von Annäherung zu Annäherung genauer,
 nachdem man in jeder Annäherung die beiden eben angezogenen Be-
 dingungen zu Grunde gelegt hat. Die Bestimmung derselben kann aber
 nur dann erst erfolgen, wenn alle noch zum Ausdruck von $\frac{d\delta x}{dt}$ kommenden
 Producte berechnet sind; ich habe oben schon die genauen Werthe an-
 gesetzt, obgleich die noch zu $\frac{d\delta x}{dt}$ hinzukommenden Producte erst weiter
 unten gegeben werden.

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 367

In dieser Tafel sind ferner bei den Argumenten, die schon in dieser ersten Integration einen kleinen Divisor erhalten haben, und für die Länge bei der zweiten Integration wieder denselben kleinen Divisor erhalten werden, die also schliesslich das Quadrat des kleinen Divisors enthalten, zwei Zahlenangaben angesetzt. Die obere dieser ist aus den vorübergehenden Entwicklungen und Rechnungen entsprungen, die untere wird in dem folgenden Paragraphen erklärt werden.

Zu mehrerer Deutlichkeit will ich von dem Integrationsverfahren, welches hier angewandt worden ist, ein ausführliches Beispiel anführen. Man hat aus den Ausdrücken (30) gesehen, dass hiebei immer je drei Glieder in Betracht kommen, in deren Argumenten die Indices von g und g' dieselben sind, hingegen γ die Indices $-1, 0, +1$ annimmt. Als Beispiel werde ich nun aus meiner Rechnung die drei Glieder der ersten Abtheilung ausheben, die die Indices $-1, 0, -1; 0, 0, -1; 1, 0, -1$ haben. Für diese steht die Rechnung wie folgt:

	-1, 0, -1	0, 0, -1	1, 0, -1
Aus Art. 76	-5",44952	+0",76614	+8",15705
additional Gl. s. Art. 105	+210		-210
	-5.44742		+8.15495
log γ	0.7361909	9.884308 n	0.9114213 n
log γ . ($\beta+y$); β ; ($\beta-y$)	8.8254153 n	8.877592 n	8.9241664 n
	4.9107756 n	1.006716	1.9872549
l''	7.7962		7.9715 n
l	9.88112		9.95760 n
	-81",428	+10",1558	+97",108
	-0.009	+0.7605	-0.006
		+0.9070	
$\Pi_{-1}; \Pi_0; \Pi_1$	-81.437	+11.8233	+97.102
$\eta^{(2)}$	0.34900 n		0.42547
$\eta^{(3)}$	8.9633 n		9.0398
$\eta^{(4)}$	7.656 n		7.727

Die Abkürzungen, die ich hier angewandt habe, sind die folgenden. Die mit l'' bezeichnete Zeile enthält die Producte $\frac{l''}{\beta^2-y^2} A_{-1}$ und $\frac{l''}{\beta^2-y^2} A_1$, und die mit l bezeichnete die Producte $\frac{l}{\beta} \Pi_{-1}$ und $\frac{l}{\beta} \Pi_1$, worauf die Zahlen folgen, die zufolge der Gleichungen (30) die Werthe von $\Pi_{-1}; \Pi_0; \Pi_1$ geben. Hierauf folgen die Logarithmen der Producte

dieser Coefficienten mit $\eta^{(2)}$; $\eta^{(3)}$; $\eta^{(4)}$, die zufolge des Satzes des Art. 35 die Coefficienten der Argumente $-2,0,-1$; $-3,0,-1$; $-4,0,-1$; und der Argumente $2,0,-1$; $3,0,-1$; $4,0,-1$ geben. Die im Art. 35 mit $\theta^{(2)}$, $\theta^{(3)}$, etc. bezeichneten Multiplicatoren sind in diesem Beispiel unmerklich, und überhaupt fast unmerklich. Ich habe mir hier eine kleine Abkürzung erlaubt, die nichts zu bedeuten hat. Anstatt die vollen Werthe von II_{-1} und II_1 mit $\eta^{(2)}$, etc. zu multipliciren, habe ich bloß den Haupttheil derselben, nemlich $\frac{A_{-1}}{\beta+y}$ und $\frac{A_1}{\beta-y}$ damit multiplicirt. Ein einziger Coefficient kommt vor, wo diese Abkürzung nicht zulässig ist, nemlich der vom Argument $-1,0,-2$ der Abtheilung 2, hier ist das erste Glied = $+1,957$ und das zweite = $-0,180$; in diesem Coefficienten ist die Summe dieser beiden Glieder zur Multiplication mit $\eta^{(2)}$ und $\eta^{(3)}$ verwandt worden. Man sieht aus dieser Darstellung, welche ungemein grosse Abkürzung der Rechnung der Satz des Art. 35 gewährt; ohne diesen hätte man alle von 2γ , 3γ , etc. abhängenden Glieder in der ganzen Rechnung mit durchführen müssen, während derselbe es möglich macht, diese bis auf den Punkt, wo wir jetzt angeht sind, gänzlich zu übergehen, und die nunmehrige Berücksichtigung derselben auf die einfachste Rechenoperation hinführt, die man sich denken kann.

107.

Verwandelt man nun in der Tafel des vor. Art. γ in g , oder mit anderen Worten, addirt man alle Coefficienten einer jeden Abtheilung derselben, so bekommt man die folgenden Werthe von \overline{W}_0 , $(\frac{d\overline{W}_0}{dy})$, etc.

g, g'	\overline{W}_0 cos	$(\frac{d\overline{W}_0}{dy})$ sin	$(\frac{d^2\overline{W}_0}{dy^2})$ cos	$(\frac{d^3\overline{W}_0}{dy^3})$ sin	$(\frac{d^4\overline{W}_0}{dy^4})$ cos
1.					
0,0	+1815,506		+1129,047		-1147,29
1,0	-126.344	+317,248	+489.152	-502,95	-864.43
2,0	-8.522	+22.313	+54.284	-103.93	-248.47
3,0	-0.420	+1.485	+5.107	-14.44	-46.83
4,0	-0.023	+0.100	+0.449	-1.70	-7.04

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 369

1.					
-3,-1	-0,093	-0,288	+0,883	+2,62	-7,95
-2,-1	-2.240	-4.638	+9.507	+18.90	-38.87
-1,-1	-76.277	-84.682	+86.433	+86.95	-97.44
0,-1	-44.5059	-7.0274	+56.694	+7.26	-58.47
1,-1	+106.946	-98.632	-94.482	+94.57	+83.15
2,-1	+2.679	-5.137	-9.812	+20.45	+39.78
3,-1	+0.105	-0.344	-0.894	+2.80	+8.34
-2,-2	-0.034	-0.065	+0.137	+0.28	-0.59
-1,-2	-0.989	-1.438	+1.268	+1.27	-1.54
0,-2	-0.9889	-0.2785	+1.435	+0.29	-1.48
1,-2	+1.824	-1.559	-1.335	+1.47	+1.14
2,-2	+0.039	-0.074	-0.137	+0.34	+0.58
-1,-3	-0.043	-0.047	+0.049	+0.02	-0.02
0,-3	-0.042	-0.004	+0.034	0.00	-0.04
1,-3	+0.036	-0.026	-0.024	+0.03	+0.03
2.					
0,0	+0.01748	+0.00484	-0.002		
1,0	-2.500	+2.525	+2.537	-2.52	-2.54
2,0	-0.079	+0.153	+0.295	-0.57	-1.12
-1,-1	+0.065	+0.069	-0.085	-0.09	+0.16
0,-1	+1.3252	-0.0225	-0.108	+0.12	-0.30
1,-1	-18.099	+18.845	+18.843	-17.53	-21.39
2,-1	-33.488	+49.146	+65.714	-52.07	-72.31
3,-1	-1.486	+3.544	+8.474	-13.23	-28.44
4,-1	-0.074	+0.244	+0.854	-2.04	-6.03
5,-1	-0.004	+0.046	+0.077		
-2,-2	+0.046	+0.100	-0.226		
-1,-2	+1.977	+2.147	-2.442	-2.39	+2.62
0,-2	+4.3468	+11.6225	-2.704	-2.18	+0.34
1,-2	+3842.549	-3614.379	-3400.402	+3544.66	+3599.69
2,-2	+3986.672	-5662.176	-7053.026	+6228.53	+8218.33
3,-2	+173.182	-399.240	-854.174	+1492.08	+3436.59
4,-2	+8.327	-26.904	-82.677	+249.83	+656.15
5,-2	+0.436	-1.828	-7.351	+26.44	+103.20
6,-2	+0.025	-0.127	-0.633	+2.86	+13.89
-1,-3	+0.068	+0.080	-0.102		
0,-3	-0.690	+0.575	-0.175	-0.07	+0.23
1,-3	+148.838	-135.425	-122.911	+128.90	+135.98
2,-3	+264.935	-370.009	-455.501	+320.52	+498.82
3,-3	+11.955	-25.996	-55.986	+95.60	+198.84
4,-3	+0.543	-1.750	-5.463	+14.22	+42.13
5,-3	+0.028	-0.117	-0.479	+1.68	
0,-4	-0.034	+0.022	-0.007		
1,-4	+4.630	-4.065	-3.545	+3.78	+4.12
2,-4	+12.369	-16.968	-20.660	+17.55	+21.95
3,-4	+0.524	-1.184	-2.559	+4.33	+8.95
4,-4	+0.025	-0.080	-0.249		
1,-5	+0.135	-0.107	-0.093		
2,-5	+0.502	-0.673	-0.807		
3,-5	+0.022	-0.047	-0.104		

14.					
2,-2	0,000	+0,001			
3,-2	0.000	0.000			
1,-3	+0.010	+0.006			
2,-3	-0.002	+0.002	-0,012		
3,-3	-0.020	+0.023	+0.455		
4,-3	+0.013	-0.080	+0.062		
5,-3	+0.002	-0.011	+0.008		
0,-4	+0.031	+0.004	-0.004		
1,-4	+0.661	-0.484	-0.387		
2,-4	+2.448	-4.256	-3.173	+2,44	+7,
3,-4	+1.813	-4.848	-27.626	+4.96	+29,
4,-4	-0.829	+3.099	-3.364	-0.46	+9,
5,-4	-0.087	+0.406	-0.453		
6,-4	-0.008	+0.038	-0.058		
7,-4	0.000	+0.002			
1,-5	+0.037	-0.021			
2,-5	+0.270	-0.457	-0.339		
3,-5	+0.241	-0.610	-3.182	+0.61	+3,
4,-5	-0.106	+0.425	-0.425	-0.14	+1,
5,-5	-0.010	+0.058	-0.065		
6,-5	0.000	+0.005			
2,-6	+0.018	-0.028			
3,-6	+0.021	-0.048	-0.228		
4,-6	-0.008	+0.032	-0.034		
5,-6	0.000	+0.004	-0.006		
3,-7	+0.003	-0.002			
4,-7	-0.001	+0.002			
15.					
4,-5	0.000	-0.004			
5,-5	-0.001	-0.003			
3,-6	-0.006	-0.016			
4,-6	+0.006	+0.093	-0.237		
5,-6	+0.017	+0.088	-0.090		
6,-6	+0.009	+0.018	-0.036		
7,-6	+0.002	+0.003			
3,-7	-0.001	0.000			
4,-7	0.000	+0.014			
5,-7	+0.004	+0.016			
6,-7	+0.001	+0.003			

Wir kommen jetzt zu der Integration, die δP und δQ giebt, nach den Ausdrücken (35) ausgeführt werden muss. Als Vorbereitungen hierzu bedarf es der numerischen Werthe der Divisoren $\beta + \alpha$ und β deren Product die in den (35) enthaltenen Divisoren giebt. Diese numerischen Werthe sind in der folgenden Tafel zusammengestellt.

i, \bar{i}	$\beta + \alpha$	$\beta - \alpha$	i, \bar{i}	$\beta + \alpha$	$\beta - \alpha$
1.			4.		
1,0	1.00405	0.99595	-1,1	-0.912	-0.920
2,0	2.0041	1.9960	0,1	+0.87600	+0.079504
-1,-1	-1.0714	-1.0795	1,1	1.088	1.080
0,-1	-0.071390	-0.079486	0,0	0.0121	0.00407
1,-1	+0.9286	+0.9205	5.		
-1,-2	-1.149	-1.155	0,2	0.188	0.180
0,-2	-0.1468	-0.1549	1,2	1.188	1.180
1,-2	+0.8532	+0.8451	12.		
2.			1,-2	0.895	0.887
0,0	0.02109	0.01300	2,-2	1.895	1.887
0,-1	-0.05434	-0.06244	3,-3	2.82	2.81
1,-1	+0.9457	+0.9376	13.		
-1,-2	-1.130	-1.138	0,-4	-0.289	-0.297
0,-2	-0.12978	-0.13788	1,-4	+0.7112	+0.7032
1,-2	+0.87022	+0.86212	2,-5	1.64	1.63
0,-3	-0.2052	-0.2133	18.		
1,-3	+0.7948	+0.7867	3,0	3.038	3.030
1,-4	0.719	0.711	19.		
2,-4	1.719	1.711	0,4	0.322	0.314
11.			6.		
2,-4	1.736	1.728	0,0	0.0126	0.00447
3,-4	2.736	2.728	0,-1	-0.6287	-0.07096
3.			1,-1	+0.9371	+0.9290
2,2	2.18	2.17	0,-2	-0.138	-0.146
0,1	0.1046	0.0965	1,-2	+0.862	+0.854
1,1	1.105	1.097	7.		
0,0	0.029208	0.021112	2,-3	1.80	1.80
1,0	1.0292	1.021	3,-3	2.80	2.80
0,-1	-0.04623	-0.05433	8.		
1,-1	+0.95377	+0.94567	0,2	0.172	0.164
2,-2	1.88	1.87	1,2	1.172	1.164
4.			0,1	0.0961	0.0880
-1,4	-0.686	-0.694	1,1	1.096	1.088
0,4	+0.3139	+0.3058	0,0	0.0207	0.0126
1,4	1.31	1.31	9.		
-1,3	-0.762	-0.770	2,-1	1.96	1.95
0,3	+0.23847	+0.23037	3,-1	2.96	2.95
1,3	1.238	1.230	10.		
-1,2	-0.8370	-0.8451	0,-3	-0.222	-0.230
0,2	+0.163038	+0.154942	1,-3	+0.778	+0.770
1,2	1.1630	1.1549			

Zu den Zahlenwerthen von B und C des Art. 82 kommen noch von $B^{(3)}$ und $C^{(3)}$ der Artt. 63 und 64, sowie die folgenden Glieder

$$B = -0,0006 \cos(2g' + 2\omega')$$

$$C = -0,0006 \sin(2g' + 2\omega')$$

die von den Planeten herrühren, und weiter unten erklärt werde Integration wird nun nach den Ausdrücken (35) ausgeführt, wob constante Glied in B übergangen werden muss, weil es schon z stimmung von α gedient hat. Die Rechnung, welche ohne Schw keiten ist, giebt die folgenden Resultate.

g, g'	δP sin	Diff.	δQ cos	Diff.	g, g'	δP sin	Diff.	δQ cos
1.					2.			
0,0			+34,788	-88	1,-4	-0,045	-1	+0,0
1,0	-10,550	-6	+2,633	-3	2,-4	+0,117	+2	-0,1
2,0	-0,195	-3	+0,133	+5	11.			
3,0	-0,007	+2	+0,006	-2	2,-4	-0,024	0	+0,0
-2,-1	+0,005	+2	+0,003	+1	3,-4	+0,393	-4	-0,5
-1,-1	+0,215	+2	+0,068	+3	3,-5	+0,047	-1	-0,0
0,-1	-48,717	-4	+0,465	-2	3.			
1,-1	-0,421	+3	+0,174	+8	2,2	-0,018	0	+0,0
2,-1	-0,009	+2	+0,008	-2	0,1	-0,222	+1	+0,0
-1,-2	+0,007	0	+0,003	0	1,1	+0,362	+2	-0,0
0,-2	-0,601	+4	+0,044	0	2,1	-0,818	+5	+0,0
1,-2	-0,012	-1	+0,007	0	3,1	-0,025	0	+0,0
2.					3.			
0,0	+0,004	-2	-0,004	+1	0,0	-26,038	+21	+25,0
0,-1	-0,084	-5	-0,020	+8	1,0	+12,848	0	-12,0
1,-1	+0,071	+1	-0,096	-1	2,0	-36,961	-1	+36,0
2,-1	-0,529	0	+0,515	+1	3,0	-1,392	+7	+1,0
3,-1	-0,025	+1	+0,028	-4	4,0	-0,057	-1	+0,0
-1,-2	-0,009	+6	-0,014	+7	0,-1	+0,176	-5	-0,1
0,-2	-4,834	+5	+4,895	-8	1,-1	+0,304	+3	-0,3
1,-2	-15,845	+3	+14,530	+4	2,-1	-1,015	-6	+1,0
2,-2	+39,627	+1	-40,581	+1	3,-1	-0,048	0	+0,0
3,-2	+1,460	-1	-1,470	+1	2,-2	-0,026	+1	+0,0
4,-2	+0,061	+1	-0,060	-1	4.			
0,-3	-0,178	-8	+0,178	-11	-1,4	-0,015	0	+0,0
1,-3	-1,020	+1	+0,931	-2	0,4	-0,586	-14	+0,0
2,-3	+2,583	+5	-2,675	-5	1,4	+0,008	0	-0,0
3,-3	+0,105	+2	-0,106	-1				

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 373

-0,334	-3	+0,338	-5	19.	0,4	+0,019	+41	-0,022	-38
-19.357	+40	+19.424	+17	6.					
+0.309	+5	-0.316	+1	0,0	-0.147	-16	+0.043	+6	
-0.032	+1	+0.028	0	0,-1	+1.322	+37	-0.170	+3	
-4.756	+1	+4.657	0	1,-1	+0.644	+26	-0.134	-35	
-484.181	+1	+485.923	-4	2,-1	-0.007	0	-0.006	+6	
+5.650	-14	-5.660	+13	0,-2	+0.025	+3	-0.011	+10	
+0.094	+1	-0.094	-1	1,-2	+0.028	-4	+0.006	0	
+0.075	+1	-0.076	0	7.					
+9.865	+48	-9.894	-64	2,-3	-0.037	-9	+0.036	+10	
+0.040	-4	-0.031	-5	3,-3	+0.072	+1	-0.073	-1	
+0.136	+9	-0.135	-12	8.					
+0.013	-3	-0.011	+2	0,2	+0.012	-	-0.012	-	
+0.003	-	-0.002	-	1,2	-0.013	-	+0.013	-	
-0.056	+1	+0.056	-1	0,4	+0.537	+12	-0.535	-14	
				1,4	-0.324	-2	+0.332	-8	
+0.086	+2	-0.086	-2	0,0	-0.003	-13	+0.003	+14	
-0.372	0	+0.370	0	9.					
-0.027	-3	+0.028	+2	2,-1	+0.030	+3	-0.032	-1	
				3,-1	-0.068	-1	+0.069	0	
+0.404	+13	+0.399	+17	10.					
+0.774	+4	+0.778	+2	0,-3	-0.185	-10	-0.198	-6	
+0.544	-1	+0.520	0	1,-3	-0.349	-6	-0.321	-8	
+0.070	-25	+0.067	+3						
+0.004	+9	-0.004	-9						

ie in den »Diff.« überschriebenen Columnen enthaltenen Zahlen sind
 1. Unterschiede zwischen den nebenstehenden Werthen, und den der
 2. Rechnung zu Grunde gelegten, im Art. 66 angegebenen Werthen. Diese
 3. Unterschiede sind alle befriedigend klein. Die dem Werthe von δQ hin-
 4. gütige Constante ist so bestimmt worden, dass der Coefficient des
 5. 1. Gliedes gleich Null ist. Wenn wie hier ein sehr genäherter
 6. Werth dieser Constante gegeben ist, so ist es ein Leichtes, die Verbes-
 7. serung desselben so zu bestimmen, dass die eben ausgesprochene Be-
 8. dingung erfüllt ist. Den genähernten Werth dieser Constante haben die
 9. folgenden Annäherungen gegeben.

110.

1. durch das unter der Bezeichnung X im Art. 85 gegebene Differential,
 2. durch die Integrationsformel (37), wo wieder das constante Glied

weggelassen werden muss, weil es schon zur Bestimmung von η wandt worden ist, bekommt man für $\delta\delta K$ die folgenden Coefficiente

g, g'	$\delta\delta K$ sin
1. 0, -1	-0,046
2. 0, -2 1, -2 2, -2	-0.016 -0.043 +0.034
3. 0, 0	-0.498
4. 0, 3 0, 2 0, 4	-0.030 -0.598 +0.028
13. 1, -4 2, -4	+0.044 -0.029

womit alle ersten Integrationen ausgeführt sind.

§ 7. Anderweitige, zur Prüfung dienende, Berechnung der Gl der Längenstörungen, die einen kleinen Divisor im Quadrat bekommen.

111.

Unter allen im Vorhergehenden berechneten Gliedern werden verständlich diejenigen im Resultat die wenigste Genauigkeit besitzen die das Quadrat eines kleinen Divisors erhalten. Denn um ihnen gleiche Genauigkeit wie den übrigen zu geben muss man sie im Differentia mehr Decimalstellen berechnen, und bei dieser Berechnung können wieder höhere Decimalen der übrigen Störungen in Betracht, und können hier eine merkliche Wirkung ausüben, während dieselben Decimale in den anderen Gliedern nur Unmerkliches zuwege bringen. Diese kommen nur in den Längenstörungen vor, wenn man wie hier die Störungen der mittleren Anomalie (oder Länge) berechnet, und

hängen in der Mondtheorie von den Argumenten ab, in welchen entweder blos der Index von g Null ist, oder ausserdem auch der von g' Null ist. Im Vorhergehenden bekommt das Glied der Abtheilung 2., welches das Argument $0,0,0$ hat, das Quadrat des kleinsten Divisor, und dieser ist zufolge des Art. 104 $= 0,0170 \dots$, hierauf folgen diese die das Argument $0,0,\overline{+1}$ haben, für welche der Divisor selbst nahe $= \frac{1}{43}$ ist, dann kommen die mit dem Argument $0,0,\overline{+2}$, wo der Divisor nahe $= \frac{2}{43}$ ist, u. s. w. Um in die Berechnung dieser Glieder die möglichste Sicherheit zu legen, ist es sehr wünschenswerth, sie ausser dem im Vorhergehenden angewandten Verfahren durch ein anderes berechnen zu können, bei welchem der Divisor sich vergrössert, und folglich die höheren Decimalen des Differentials geringeren Einfluss auf das Resultat ausüben. Ich werde im Folgenden ein solches Verfahren entwickeln und anwenden, wodurch der Divisor β^2 in $\beta \frac{\beta}{e'u}$ und $\beta \frac{\beta}{e'u^2}$ verwandelt wird, und daher eine weit grössere Genauigkeit im Resultat erlangt wird.

Dieses Verfahren lässt sich freilich nicht ohne einige Mühe anwenden, allein ich habe diese nicht gescheut, weil dadurch grössere Sicherheit im Resultat erlangt, und die Genauigkeit, die die im Vorhergehenden dargelegten Entwicklungen und Rechnungen besitzen, in ein helleres Licht gestellt wird.

112.

Erheben wir von den Gleichungen

$$\Xi = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h}{h_0} - \frac{3e_0}{4-e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0yt - \pi_0) - e_0\}$$

$$\Upsilon = \frac{2}{4-e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0yt - \pi_0) - e_0\}$$

$$\Psi = \frac{2}{4-e_0^2} \frac{h}{h_0} e \sin(\chi - n_0yt - \pi_0)$$

Art. 88 die beiden letzten ins Quadrat und addiren, so ergibt sich eine Gleichung, die sich leicht wie folgt stellen lässt,

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 e \cos(\chi - n_0yt - \pi_0) = -\frac{1}{2}(1-e_0^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2) + \frac{e^2}{2(4-e_0^2)} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \frac{e_0^2}{2(4-e_0^2)} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

minirt man hieraus $e \cos(\chi - n_0yt - \pi_0)$ mittelst der ersten, so bekommt man

$$\frac{h}{h_0} \Xi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{4-e_0^2}{4-e_0^2} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \frac{1}{2} (1-e_0^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2)$$

Es ist aber

$$\frac{1-e^2}{1-e_0^2} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 = \frac{a_0}{a}$$

und setzen wir daher $\frac{a_0}{a} = 1 + \delta \frac{a_0}{a}$, so wird

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} \delta \frac{a_0}{a} + \left\{ \frac{1}{3} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{E} \right\} \delta \frac{h}{h_0} + \frac{1}{3} (1+e_0^2) \{ \mathcal{I}^2 + \mathcal{P}^2 \}$$

wo mit Ausnahme des ersten Gliedes alle Glieder rechter Hand Grössen der zweiten Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte sind. Nun ist aber

$$\delta \frac{a_0}{a} = -2a_0 \int n \left(\frac{d\Omega}{dg} \right) dt$$

und

$$n \left(\frac{d\Omega}{dg} \right) = \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) dv + \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) dr$$

Es ist ferner das vollständige Differential von Ω , wenn wir nur auf die störende Kraft der Sonne Rücksicht nehmen,

$$d\Omega = \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) dv + \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) dr + \left(\frac{d\Omega}{dv'} \right) dv' + \left(\frac{d\Omega}{dr'} \right) dr'$$

und hiemit geht der obige Ausdruck für \mathcal{E} in den folgenden über.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & -3a_0 \Omega + \left\{ \frac{1}{3} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{E} \right\} \delta \frac{h}{h_0} + \frac{1}{3} (1-e_0^2) \{ \mathcal{I}^2 + \mathcal{P}^2 \} \\ & + 3a_0 \int \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dv'} \right) dv' + \left(\frac{d\Omega}{dr'} \right) dr' \right\} \cdot \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck besteht, wie man sieht, aus zwei von einander wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste dieser ist vom Integralzeichen befreit, und giebt daher in den Längenstörungen nur Glieder, die mit der ersten Potenz der Integrationsdivisoren behaftet sind. Der zweite Theil giebt zwar wieder in den Längenstörungen Glieder, die das Quadrat dieser Divisoren erhalten, aber er hängt von den Differentialen der Sonnenbewegung ab, und diese sind mit n' multiplicirt, während die Differentiale der Mondbewegung mit n multiplicirt sind. Nun ist aber nahe $n' : n = 1 : 13$, und es sind daher die Zähler der hieraus entstehenden Glieder nahe 13 Mal kleiner, wie die der im Vorhergehenden angewandten Ausdrücke.

Das erste der unter dem Integralzeichen stehenden Glieder dieses Ausdrucks kann von diesem Zeichen befreit, und auf übrigens bekannte Functionen hingeführt werden.

Da hier

$$\omega - \omega' = 2K, \quad \omega + \omega' = 2N$$

gesetzt werden darf, so erhält man leicht

$$\left(\frac{d\Omega}{d\omega}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \dots \dots \dots (A)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\omega'}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dv'}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dN}\right)$$

ad hiemit

$$\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \dots \dots \dots (B)$$

mit Weglassung der kleinen mit $d\phi'$ und dq' multiplicirten Glieder, die keine Wirkung äussern, ergibt sich aus dem Art. 13, dass

$$\frac{dP}{dt} = -n\alpha Q - h \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) \cos 2\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}hP \left(\frac{d\Omega}{dK}\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} = n\alpha P + h \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) \cos 2\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}hQ \left(\frac{d\Omega}{dK}\right)$$

, ferner ist $P^2 + Q^2 = 4 \sin^2 \frac{1}{2}J$

daraus

$$PdP + QdQ = \sin J dJ$$

ergibt hiemit geben die vorstehenden Gleichungen

$$\frac{\sin J}{h} \frac{dJ}{dt} = \left\{ P \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - Q \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) \right\} \cos 2\frac{1}{2}J - \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \sin 2\frac{1}{2}J$$

Aus den, die Relationen zwischen P und Q einerseits, und J und N andererseits ausdrückenden, Gleichungen (11) folgt aber, dass

$$P \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - Q \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dN}\right)$$

, es wird daher

$$\frac{\sin J}{h} \frac{dJ}{dt} = \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \cos 2\frac{1}{2}J - \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \sin 2\frac{1}{2}J$$

Die Gleichung (A) giebt ferner

$$2 \sin 2\frac{1}{2}J \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \sin 2\frac{1}{2}J + \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \sin 2\frac{1}{2}J$$

ad hiemit wird (B)

$$\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \cos J + \frac{\sin J}{h} \frac{dJ}{dt}$$

bedenkt man nun, dass zufolge des Vorhergehenden

$$d \frac{1}{h} = \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) dt$$

so wird das Integral der vorstehenden Gleichung

$$\int \left(\frac{d\Omega}{dv'}\right) dt = -\frac{\cos J}{h} + k$$

Es ist aber

konstante ist. Vermittelt dieser Integration

und setzen wir daher $\frac{a_0}{a}$

$$\frac{r}{a} + \int \left(\frac{\cos J}{h} - k \right) \frac{d^2 v'}{dt^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \delta \frac{a_0}{a} +$$

$\frac{r}{a}$ ist. Da $d^2 v'$ von der Ordnung

wo mit Ausnahme des der zweiten Ordnung aber

die grössten Glieder des Ausdrucks befreit sind. Substituieren aber die im vor. Art. abgeleitet

und

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - e_0^2) \{ \mathcal{I}^2 + \mathcal{P}^2 \}$$

Es ist ferner das störende Kraft

$$\frac{r}{a} + \left(\frac{d\Omega}{dr'} \right) dr'$$

$$d\Omega =$$

Glieder von der Ordnung $u^2 e'$ und ue

und hiemit geht

$$\ddot{x} =$$

114.

Diese

die eben abgeleitete Gleichung nur die Differentiale der Sonnencoordinaten brau-

wesentlich zeichnen die mit der zweiten das Quotienten drend d ist abentste den a

$$\ddot{x} = -2n^2 e' \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \sin f' dt^2$$

$$r = a \frac{1 - e' \cos f'}{1 - e_0^2}$$

für die Glieder von Ω , welche hier in Be-

$$\frac{h_0}{r} = -3\Omega$$

in der Gleichung $h_0 = \frac{a_0 n_0}{\sqrt{1 - e_0^2}}$ Bedacht, so be-

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - e^2) \{ \mathcal{I}^2 + \mathcal{P}^2 \}$$

$$\left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \left\{ \cos J - \cos J_0 + \cos J \delta \frac{h_0}{h} \right\} + \mathcal{I}$$

Au

Fu

$$\frac{1}{2} (1 - e^2) \left\{ \cos J - \cos J_0 + \cos J \delta \frac{h_0}{h} \right\} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \sin f'$$

Bemerkung zu machen. Das erste Glied, nemlich

$$\frac{1}{1+m} \frac{1}{r^2}$$

gelassen worden, weil nur Differentialquotienten vorkamen, die in diesem Ausdruck, wo Ω selbst vorkommt, scheitern, nicht berücksichtigt werden, aber es lässt sich leicht ohne Wirkung ist. Berücksichtigen wir

$$= 0, \left(\frac{d\Omega}{dr'} \right) = - \frac{m'}{1+m} \frac{1}{r'^3}$$

in den Ausdruck für \mathcal{E} des Art.

$$- 3a \frac{m'}{1+m} \frac{1}{r'} - 3a \frac{m'}{1+m} \int \frac{dr'}{r'^3} = 0$$

aus der oben gegebenen Entwicklung von $a\Omega$ hergeleitet werden kann.

115.

gleichwie im Art. 43 unter $\bar{\Omega}$ den Ausdruck von Ω in welchem \bar{r} statt r substituirt worden ist, so wird

$$a\Omega = a\bar{\Omega} + a\bar{\Omega} (2\nu + \nu^2)$$

aus $a\Omega_0$, in welchem nur die elliptischen Werthe der darin vorkommenden Functionen gesetzt worden ist, durch den Ausdruck (20) hergeleitet, nachdem darin $a\Omega_0$ statt T_0 gesetzt worden ist. Die Coefficienten, welche die Coefficienten von $a\Omega_0$ multiplicirt werden müssen, um den angeführten Ausdruck vorkommenden Differentialquotienten zu erhalten, sind dieselben wie für T_0 , und in den Artt. 47 u. 48 angegeben, müssen, da T_0 von Sinussen und Ω_0 von Cosinussen abhängt, die Coefficienten, welche R und V geben, das entgegengesetzte Zeichen bekommen; endlich müssen die Columnen, die in T_0 und den Differentialquotienten davon Sinusse enthielten, hier Cosinusse, und die, welche Cosinusse enthielten, hier Sinusse bekommen.

Nach diesen Bemerkungen ist es leicht, aus den im Art. 55 gegebenen Coefficienten von $a\Omega_0$, und den im Art. 56 gegebenen Werthen der Functionen für R, Y, S, V, Z die folgende Tafel herzustellen.

g, g'	$-3a\Omega_0$ cos	R sin	Y cos	S cos	V sin	Z cos
<u>1.</u>						
0,0	-874"052		+237"38	+2644"		+2622'
1,0	+95.504		-25.93	-289		-286
2,0	+1.310		-0.36	-4		-4
3,0	+0.036		-0.01			
4,0	+0.004					
-3,-1	+0.004					
-2,-1	+0.033		-0.01			
-1,-1	+2.406		-0.65	-7		-7
0,-1	-44.0273		+11.96	+133		+132
1,-1	+2.406		-0.65	-7		-7
2,-1	+0.033		-0.01			
3,-1	+0.004					
-2,-2	+0.004					
-1,-2	+0.064		-0.02			
0,-2	-1.4089		+0.30	+3		+3
1,-2	+0.064		-0.02			
2,-2	+0.004					
-1,-3	+0.002					
0,-3	-0.027					
1,-3	+0.002					
<u>2.</u>						
-1,-1	-0.004					
0,-1	+0.1664	+0"04	-0.04			
1,-1	-3.632	-0.33	+0.33	+4		+4
2,-1	+21.919	+1.97	-1.97	-22		-22
3,-1	+1.204	+0.11	-0.11	-1		-1
4,-1	+0.066	+0.01	-0.04			
5,-1	+0.004					
-2,-2	+0.004					
-1,-2	+0.127	+0.04	-0.04			
0,-2	-19.8074	-1.78	+1.78	+20		+20
1,-2	+432.236	+38.90	-38.90	-437	-4"	-432
2,-2	-2608.866	-224.74	+234.74	+2635	+21	+2604
3,-2	-143.284	-12.89	+12.89	+145	+1	+143
4,-2	-7.864	-0.71	+0.71	+8		+8
5,-2	-0.449	-0.04	+0.04			
6,-2	-0.027					
-1,-3	+0.007					
0,-3	-1.164	-0.10	+0.10			
1,-3	+25.406	+2.29	-2.29	-26		-25
2,-3	-153.344	-13.80	+13.80	+155	+1	+153
3,-3	-8.422	-0.76	+0.76	+9		+8
4,-3	-0.462	-0.04	+0.04			
5,-3	-0.026					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 381

2.						
0,-4	-0,047					
1,-4	+1.036	+0,09	-0,09			
2,-4	-6.253	-0.56	+0.56	+6"		+6"
3,-4	-0.343	-0.03	+0.03			
4,-4	-0.019					
<hr/>						
1,-5	+0.036					
2,-5	-0.218					
3,-5	-0.012					
2,-6	-0.007					
<hr/>						
3.						
2,2	-0.007	+0.15	-0.15			
<hr/>						
0,1	-0.0020	+0.04	-0.04			
1,1	+0.044	-0.98	+0.98	-11	-11"	+11
2,1	-0.266	+5.91	-5.91	+65	+65	-65
3,1	-0.015	+0.33	-0.33	+4	+4	-4
<hr/>						
-1,0	+0.001					
0,0	-0.08011	+1.78	-1.78	+20	+20	-20
1,0	+1.748	-38.85	+38.85	-431	-430	+429
2,0	-10.551	+234.52	-234.52	+2601	+2596	-2591
3,0	-0.579	+12.88	-12.88	+143	+143	-142
4,0	-0.032	+0.71	-0.71	+8	+8	-8
<hr/>						
0,-1	-0.0020	+0.04	-0.04			
1,-1	+0.044	-0.98	+0.98	-11	-11	+11
2,-1	-0.266	+5.91	-5.91	+65	+65	-65
3,-1	-0.015	+0.33	-0.33	+4	+4	-4
2,-2	-0.007	+0.15	-0.15			
<hr/>						
4.						
0,4	-0.026	+0.57	-0.57	+6	+6	-6
-1,3	+0.034	-0.76	+0.76	-9	-8	+8
0,3	-0.627	+13.99	-13.94	+157	+156	-154
1,3	+0.034	-0.76	+0.76	-9	-8	+8
<hr/>						
-2,2	+0.008	-0.18	+0.18	-2	-2	+2
-1,2	+0.583	-13.01	+12.96	-146	-145	+143
0,2	-10.6672	+238.07	-237.11	+2673	+2647	-2619
1,2	+0.583	-13.01	+12.96	-146	-145	+143
2,2	+0.008	-0.18	+0.18	-2	-2	+2
<hr/>						
-1,1	-0.005	+0.41	-0.41			
0,1	+0.0896	-2.00	+1.99	-23	-22	+22
1,1	-0.005	+0.41	-0.41			
<hr/>						
5.						
1,2	+0.002	-0.09	+0.09			
2,2	-0.011	+0.47	-0.47	+16	+16	-16
3,2	-0.001	+0.03	-0.03			
<hr/>						
6.						
1,1	-0.001					
0,0	+0.00737					
1,0	-0.054		+0.03			
2,0	+0.001					

6.			
-1,-1	-0.013		
0,-1	+0.4389	+0.02	-0.22
1,-1	-3.210	-0.14	+1.64
2,-1	+0.087		-0.04
3,-1	+0.004		
0,-2	+0.0221		
1,-2	-0.162		+0.08
2,-2	+0.004		
0,-3	+0.001		
1,-3	-0.006		
7.			
1,-2	+0.002		
2,-2	-0.022		
3,-2	+0.089		
4,-2	+0.007		
0,-3	+0.004		
1,-3	-0.116		
2,-3	+1.325	+0.18	-0.18
3,-3	-5.296	-0.74	+0.74
4,-3	-0.438	-0.06	+0.06
5,-3	-0.030		
1,-4	-0.010		
2,-4	+0.111		
3,-4	-0.445	-0.06	+0.06
4,-4	-0.037		
2,-5	+0.006		
3,-5	-0.024		
8.			
0,1	+0.0054	-0.12	+0.12
1,1	-0.039	+0.87	-0.86
2,1	+0.001		
0,0	+0.00009		
1,0	-0.001		
9.			
3,-1	-0.032	+0.74	-0.74
10.			
1,-3	-0.033	-0.74	-0.73

Die meisten der Zahlen dieser Tafel haben aus der Tafel für T_0 des Art. 56 entnommen werden können, da in T_0 die Glieder, welche den Index 0 für γ haben, $= +3ia\Omega_0$ sind.

116.

Auf dieselbe Art, wie oben, bekommt man nun die folgenden Producte.

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 383

Für $-3a\Omega$

g, g'	S cos	$\left(\frac{dS}{dg}\right) n\delta z$ cos	L cos	V sin	$\left(\frac{dV}{dg}\right) n\delta z$ sin	M sin
1.						
0,0	+2644"	-22"	+2622"			
1,0	-289	-57	-346			
2,0	-4	-5	-9			
-1,-1	-7	-3	-10			
0,-1	+133	-4	+129			
1,-1	-7	-3	-10			
2.						
2,-1	-22	-8	-30			
0,-2	+20	+3	+23			
1,-2	-437	+2	-435	-4"		-4"
2,-2	+2635	-2	+2633	+21		+21
3,-2	+145	-2	+143			
4,-2	+8		+8			
1,-3	-26		-26			
2,-3	+155	+8	+163			
3,-3	+9		+9			
11.						
2,-4		-5	-5			
3,-4		+55	+55			
4,-4		+32	+32			
5,-4		+3	+3			
3.						
2,1	+65	-8	+57	+65	-8"	+57
0,0	+20		+20	+20		+20
1,0	-431	-1	-432	-430	+1	-429
2,0	+2604	+1	+2602	+2596	-2	+2594
3,0	+143	+1	+144	+143	-1	+142
4,0	+8		+8	+8		+8
2,-1	+65	+8	+73	+65	+8	+73
4.						
0,3	+157	-3	+154	+156	-1	+155
-2,2	-2		-2	-2		-2
-1,2	-146	+1	-145	-145	+1	-144
0,2	+2673	-22	+2654	+2647	-22	+2625
1,2	-146	-58	-204	-145	-58	-203
2,2	-2	-5	-7	-2	-5	-7
0,1	-23		-23	-22		-22
12.						
3,-2		+54	+54		+54	+54
4,-2		+32	+32		+32	+32

P. A. HANSEN,

i, j	Z cos	$\left(\frac{dZ}{dg}\right) ndz$ cos	O cos
<hr/>			
1, 1	+2622"	-22"	+2600"
1, 1	-286	-57	-343
2, 1	-4	-5	-9
<hr/>			
1, -1	-7	-3	-10
1, -1	+132	-4	+128
1, -1	-7	-3	-10
<hr/>			
2.			
2, -1	-22	-8	-30
1, -2	+20	+3	+23
1, -2	-132	+2	-130
2, -2	+2604	-2	+2602
3, -2	+143	-2	+141
4, -2	+8		+8
<hr/>			
1, -3	-25		-25
2, -3	+153	+8	+161
3, -3	+8		+8
<hr/>			
11.			
2, -4		-5	-5
3, -4		+55	+55
4, -4		+32	+32
5, -4		+3	+3
<hr/>			
3.			
2, 1	-65	+8	-57
0, 0	-20		-20
4, 0	+429	-1	+428
2, 0	-2591	+2	-2589
3, 0	-142	+1	-141
4, 0	-8		-8
2, -1	-65	-8	-73
<hr/>			
4.			
0, 3	-154	+1	-153
-2, 2	+2		+2
-1, 2	+143	-1	+142
0, 2	-2619	+22	-2597
1, 2	+143	+58	+201
2, 2	+2	+5	+7
0, 1	+22		+22
<hr/>			
12.			
3, -2		-54	-54
4, -2		-32	-32

www.libtocl.com.cn

g, g'	R sin	$\left(\frac{dR}{dg}\right) n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2R}{dg^2}\right)(n\delta z)^2$ sin	$\frac{1}{2}L\delta P$ sin	$M\delta Q$ sin	H sin
1.						
1,0		+5,52		-0,07	-0,07	+5,38
2,0		+0,39		+0,10	+0,16	+0,65
3,0		+0,03				+0,03
-2,-1		-0,02				-0,02
-1,-1		-0,24	+0,02	-0,02		-0,24
0,-1		-0,05	+0,02	-0,33	-0,03	-0,39
1,-1		+0,29	+0,02	-0,03		+0,28
2,-1		+0,02				+0,02
0,-2		+0,04		-0,04		0,00
2.						
0,-1	+0,01					+0,04
1,-1	-0,33	+0,07		-0,02	+0,04	-0,27
2,-1	+1,97	+0,76		+0,17	+0,04	+2,94
3,-1	+0,11	+0,14		+0,04		+0,26
0,-2	-1,78	-0,03	+0,05	-0,14	-0,14	-2,04
1,-2	+38,90	-0,04	+0,10	-0,30	-0,44	+38,22
2,-2	-234,74	+0,12	+0,15	+1,68	+2,84	-229,98
3,-2	-12,89	-0,04	+0,07	+0,06	+0,20	-12,57
4,-2	-0,74					-0,74
0,-3	-0,10					-0,10
1,-3	+2,29	-0,02		+0,02	-0,02	+2,27
2,-3	-13,80	-0,74	+0,04	-0,04	+0,20	-14,37
3,-3	-0,76	-0,19		-0,04		-0,96
2,-4	-0,56	-0,04				-0,60
11.						
3,-3		+0,07	+0,02			+0,09
4,-3		+0,05	+0,04			+0,06
2,-4		+0,47				+0,47
3,-4		-4,88		-0,04	+0,06	-4,86
4,-4		-2,86		+0,15	+0,04	-2,67
5,-4		-0,30				-0,30
3,-5		-0,54	-0,02			-0,53
4,-5		-0,36	-0,04			-0,37
3.						
0,1	+0,04					+0,04
1,1	-0,98	-0,07		-0,02		-1,07
2,1	+5,94	-0,76		+0,14	-0,02	+5,24
3,1	+0,33	-0,14		+0,04		+0,20
0,0	+1,78	+0,14		-0,24	+0,03	+1,74
1,0	-38,85	+0,06	-0,05	+0,34	+0,12	-38,38
2,0	+234,52	-0,05	-0,14	-1,65	-0,24	+232,44
3,0	+12,88	-0,07	-0,07	-0,14	+0,03	+12,66
4,0	+0,74					+0,74

3.						
0,-1	+0.04					+0.04
1,-1	-0.98	+0.02		+0.04		-0.92
2,-1	+5.91	+0.74		-0.22	-0.02	+6.41
3,-1	+0.33	+0.19		-0.01		+0.51
4.						
0,4	+0.57					+0.57
-1,3	-0.76	-0.01				-0.77
0,3	+13.99	-0.22	+0.04	-0.05	-0.02	+13.74
1,3	-0.76	-0.35	+0.02	+0.02		-1.07
-2,2	-0.18			-0.08		-0.26
-1,2	-13.01	+0.23		+0.27	+0.05	-12.46
0,2	+238.07	-2.02		-3.34	-0.27	+232.44
1,2	-13.01	-5.28		+0.27	+0.10	-17.92
2,2	-0.18	-0.38		+0.02	+0.03	-0.54
-1,1	+0.11	+0.02		+0.01		+0.14
0,1	-2.00	-0.03	-0.01	-0.17		-2.24
1,1	+0.11	-0.42	-0.02	-0.01		-0.04
5.						
1,-2	-0.09			+0.28	-0.57	-0.38
2,-2	+0.47			-1.65	+3.29	+2.14
3,-2	+0.03			-0.06	+0.12	+0.09
12.						
2,-2		-0.47		-0.10	+0.01	-0.56
3,-2		+4.98		-0.04	+0.13	+5.07
4,-2		+2.86		-0.02	-0.25	+2.59
13.						
0,-4		-0.11	-0.05	+0.01	-0.02	-0.17
1,-4		-0.03	-0.05	-0.34	-0.11	-0.53
2,-4		+0.05	-0.01	+1.67	+0.28	+1.99
3,-4		+0.08		+0.10		+0.18
19.						
0,4				-1.56	+3.11	+1.55

g, g'	Y cos	$\left(\frac{dY}{dg}\right) n\delta z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2Y}{dg^2}\right)(n\delta z)^2$ cos	$\frac{1}{2}O\delta Q$ cos	N cos
1.					
0,0	+237.38	-2.02		-1.79	+233.57
1,0	-25.93	-5.25		+0.35	-30.83
2,0	-0.36	-0.38		-0.07	-0.81
3,0	-0.10	-0.03			-0.13
-2,-1	-0.01	-0.02			-0.03
-1,-1	-0.65	-0.15	+0.02		-0.78
0,-1	+11.96	-0.23		-0.12	+11.64
1,-1	-0.65	-0.31	-0.02		-0.98
2,-1	-0.01	-0.02			-0.03
0,-2	+0.30	-0.01			+0.29

RECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 387

-1	-0,01				-0,01
-1	+0.33	-0,07			+0.26
-1	-1.97	-0.76		-0,01	-2.74
-1	-0.41	-0.14			-0.25
-2	+1.78	+0.25	+0,05	-0.07	+2.01
-2	-38.90	+0.09		+0.44	-38.37
-2	+234.74	-0.42	-0.13	-1.90	+232.29
-2	+12.89	-0.12	-0.07	-0.09	+12.61
-2	+0.71				+0.71
-3	+0.10				+0.10
-3	-2.29	+0.03		+0.02	-2.24
-3	+13.80	+0.73	-0.01	-0.13	+14.39
-3	+0.76	+0.18			+0.94
-4	+0.56	+0.04			+0.60
1					
3		-0.07	-0.02		-0.09
3		-0.05	-0.01		-0.06
4		-0.47			-0.47
4		+4.88		+0.03	+4.91
4		+2.86		-0.15	+2.71
4		+0.30			+0.30
5		+0.51	+0.02		+0.53
5		+0.36	+0.01		+0.37
1	-0.04				-0.04
1	+0.98	+0.07		-0.01	+1.04
1	-5.94	+0.76		+0.04	-5.14
1	-0.33	+0.14			-0.19
0	-1.78	-0.14		+0.17	-1.75
0	+38.85	-0.06	+0.05	-0.44	+38.43
0	-234.52	+0.05	+0.14	+1.65	-232.68
0	-12.88	+0.07	+0.07	+0.05	-12.69
0	-0.71				-0.71
-1	-0.04				-0.04
-1	+0.98	-0.02		-0.04	+0.95
-1	-5.94	-0.74		+0.09	-6.56
-1	-0.33	-0.19			-0.52
1	-0.57				-0.57
	+0.76	+0.01		-0.01	+0.76
	-13.94	+0.22	-0.01	+0.20	-13.53
	+0.76	+0.35	-0.02	-0.01	+1.08
	+0.18			+0.08	+0.26
	+12.96	-0.03		-0.25	+12.68
	-237.11	+2.02		+3.11	-234.98
	+12.96	+5.28		-0.30	+17.94
	+0.18	+0.38		-0.02	+0.54

4.					
-1,1	-0,11	-0,02			-0,13
0,1	+1.99	+0.03	+0,01	+0,02	+2.05
1,1	-0.11	+0.12	+0.02		+0.03
5.					
1,2	+0.09			+0.29	+0.38
2,2	-0.47			-1.64	-2.11
3,2	-0.03			-0.06	-0.09
12.					
2,-2		+0.47		+0.08	+0.55
3,-2		-4.98		-0.09	-5.07
4,-2		-2.86		+0.26	-2.60
13.					
0,-4		-0.11	-0.05	+0.01	-0.15
1,-4		-0.03	-0.05	-0.33	-0.41
2,-4		+0.25	-0.04	+1.66	+1.90
3,-4		+0.06		+0.10	+0.16
19.					
0,4				-1.52	-1.52

g, g'	$-8a\Omega_0$ cos	$-8a\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)n\delta x$ cos	$-4a\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)(n\delta x)^2$ cos	$-4a\left(\frac{d^3\Omega}{dg^3}\right)(n\delta x)^3$ cos	HDP cos	NδQ cos
1.						
0,0	-874,052	+22,617	+0,005	-0,015	-0,317	-0,280
1,0	+95.504	+57.452	+0.003	-0.026	+0.059	+0.056
2,0	+1.310	+4.267	+0.002	-0.010	-0.012	-0.012
3,0	+0.036	+0.283	-0.001			
4,0	+0.001	+0.018				
-3,-1	+0.001	+0.011	-0.004			
-2,-1	+0.033	+0.131	-0.042			
-1,-1	+2.406	+1.949	-0.194	-0.002	+0.001	+0.001
0,-1	-44.0273	+2.6304	-0.0098	-0.0029	-0.0234	-0.0211
1,-1	+2.406	+3.151	+0.196	-0.001	+0.001	+0.001
2,-1	+0.033	+0.297	+0.054			
3,-1	+0.001	+0.018	+0.006			
-2,-2	+0.001	+0.002	-0.001			
-1,-2	+0.061	+0.068	-0.010			
0,-2	-1.1089	+0.1163	-0.0020	+0.0002	-0.0007	-0.0007
1,-2	+0.061	+0.088	+0.010			
2,-2	+0.001	+0.008	+0.003			
-1,-3	+0.002	+0.003				
0,-3	-0.027	+0.006				
1,-3	+0.002	+0.003				

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 389

	-0,00057 +0.014 +0.024 +0.004	-0,00065 -0.004 -0.012 -0.003	-0,00045			-0,00437 +0.010 +0.012 +0.004
-0,001 +0.1664 -3.632 +21.919 +1.204 +0.066 +0.004	-0.1016 +0.737 +8.383 +1.628 +0.140 +0.011	-0.004 -0.0320 +0.009 +0.048 +0.020 +0.002	-0.0030 -0.005 -0.006 -0.002	+0,0002 -0.005 +0.027 +0.001	0,0000 -0.001	-0.005 +0.0300 -2.896 +30.370 +2.851 +0.208 +0.015
+0.001 +0.427 -19.8074 +432.236 -2608.866 -143.284 -7.864 -0.449 -0.027	+0.003 +0.030 -0.6948 -0.034 +1.680 +0.632 +0.094 +0.007	-0.006 -0.070 -0.6977 -0.053 +1.455 +0.790 +0.103 +0.010	-0.0004	+0.001 -0.0193 +0.064 -0.288 -0.023	+0.001 -0.0135 +0.073 -0.301 -0.011	-0.002 +0.089 -21.2334 +432.286 -2606.320 -141.896 -7.667 -0.432 -0.027
+0.007 -1.164 +25.406 -153.344 -8.422 -0.462 -0.026	+0.003 +0.022 -0.240 -8.170 -2.050 -0.176 -0.014	-0.007 -0.059 -0.017 +0.440 +0.095 +0.012	+0.002 +0.004 +0.006 +0.004	+0.008 -0.047 -0.001	+0.004 -0.021	+0.003 -1.199 +25.165 -161.436 -10.374 -0.626 -0.040
-0.047 +1.036 -6.253 -0.343 -0.019	+0.004 -0.014 -0.572 -0.155 -0.013	-0.003 -0.005 -0.006 -0.004		-0.002		-0.046 +1.017 -6.833 -0.499 -0.032
+0.036 -0.218 -0.012	-0.026 -0.007					+0.036 -0.244 -0.019
	-0.003 +0.028 +0.004	-0.004				-0.003 +0.027 +0.004
	+0.004 -0.119 +0.780 +0.586 +0.071	-0.004 +0.021 +0.197 +0.132 +0.027				+0.003 -0.098 +0.977 +0.718 +0.098

-4		-0,003	-0,004				-
-4		-0.023	-0.005	+0,005			-
-4		+5.202	-0.004	+0.012	-0,002	+0,002	+
-4		-54.159	+0.033	+0.024	-0.019	+0.006	-5
-4		-34.673	+0.034	+0.019	+0.019	-0.026	-3
-4		-3.328	+0.008	+0.006	+0.004	-0.004	-
-4		-0.277					-
-4		-0.049					-
-5		-0.004					-
-5		+0.542	-0.010				+
-5		-5.527	-0.184	+0.003			-
-5		-4.026	-0.138	+0.003	+0.002	-0.003	-
-5		-0.438	-0.033				-
-5		-0.037	-0.003				-
-6		+0.036					+
-6		-0.348	-0.022				-
-6		-0.308	-0.018				-
-6		-0.033	-0.003				-
-7		-0.049					-
-7		-0.017					-
5.							
-5		+0.007	+0.014	+0.002			+
-5		+0.012	+0.018	+0.002			+
-6		+0.020	+0.037				+
-6		-0.344	-0.584				-
-6		-0.472	-0.655				-
-6		-0.174	-0.236				-
-6		-0.024	-0.035				-
-7		+0.005	+0.003				+
-7		-0.050	-0.087	-0.002			-
-7		-0.082	-0.114	-0.002			-
-7		-0.033	-0.045				-

Bei der nun auszuführenden Multiplication von $-3a\bar{2}$ mit $2\nu+$ braucht man im Product nur auf die Glieder Rücksicht zu nehmen, welchen der Index $i=0$ ist. Man erhält hierauf

g, g'	$-3a\bar{\Omega} (2\nu + \nu^2)$ cos	$-3a\bar{\Omega}$ cos	$-3a\Omega$ cos
1.			
0,0	+25,812	-852,042	-826,230
0,-1	+2.0488	-44.4544	-39.4053
0,-2	+0.0791	-0.9958	-0.9167
0,-3	+0.005	-0.021	-0.016
2.			
0,0	-0.00164	-0.00137	-0.00301
0,-1	-0.1394	+0.0300	-0.1094
0,-2	-0.6850	-21.2331	-21.9181
0,-3	+0.014	-1.199	-1.185
0,-4	+0.002	-0.046	-0.044

und addirt man hiezu die bez. Coefficienten von $-3a\bar{\Omega}$, die im vor. Art. enthalten sind, und die ich ausgehoben und hier wieder angeführt habe, so bekommt man die erforderlichen Coefficienten von $-3a\Omega$, die die letzte Columne angiebt.

Diese sind die Coefficienten des ersten Gliedes des im Art. 114 erhaltenen Ausdrucks für \mathcal{Z} . Das erste Glied von dZ ergibt sich aus dem vorstehenden, wenn man dasselbe mit $3e'u \left(\frac{a'}{r}\right) \frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}}$ multiplicirt. Nun ist

$$e' \left(\frac{a'}{r}\right) \frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}} = \left(e' - \frac{3}{8} e'^3 - \frac{1}{64} e'^5\right) \sin g' + \left(\frac{3}{2} e'^2 - \frac{11}{12} e'^4\right) \sin 2g' + \left(\frac{17}{8} e'^3 - \frac{231}{128} e'^5\right) \sin 3g' + \frac{71}{24} e'^4 \sin 4g' + \frac{523}{128} e'^5 \sin 5g' + \dots$$

verwandelt man diesen Ausdruck in Zahlen, und multiplicirt mit dem Factor $3u$, so wird

$$3e'u \left(\frac{a'}{r}\right) \frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}} = 2(7,278746) \sin g' + 2(5,67980) \sin 2g' + 2(4,0563) \sin 3g' + 2(2,425) \sin 4g' + \dots$$

und multiplicirt man den obigen Ausdruck von $-3a\Omega$ hiemit, so ergibt sich

g, g'	sin
1.	
0,-1	+3,43976
0,-2	+0.15393
0,-3	+0.0055
2.	
0,0	-0.001258
0,-1	-0.04470
0,-2	-0.00203
0,-3	+0.0415
0,-4	+0.003

Diese Tafel giebt die Coefficienten des ersten Gliedes von δZ .

Es ist

$$\cos J = \cos J_0 - 2 \sin \frac{1}{2} J_0 \delta Q - \frac{1}{2} \delta P^2 - \frac{1}{2} \delta Q^2$$

und die numerischen Werthe der Coefficienten dieses Ausdrucks gieb die folgende Tafel.

g, g'	$-2 \sin \frac{1}{2} J_0 \delta Q$ cos	$-\frac{1}{2} \delta P^2$ cos	$-\frac{1}{2} \delta Q^2$ cos	$\cos J - \cos J_0$ cos
1.				
0,0	-3,416	-0,291	-0,293	-3,700
1,0	-0,236	+0,005	+0,005	-0,226
2,0	-0,012	-0,002	-0,002	-0,016
-1,-1	-0,006			-0,006
0,-1	-0,0416	-0,0116	-0,0118	-0,0650
1,-1	-0,016			-0,016
0,-2	-0,0039	+0,0027	-0,0002	-0,0014
2.				
0,0	+0,00027	-0,00004		+0,00026
0,-1	+0,0014	-0,0002	+0,0003	+0,0012
1,-1	+0,009	-0,002		+0,007
2,-1	-0,046	+0,005		-0,041
3,-1	-0,002			-0,002
0,-2	-0,4380	-0,0310	-0,0313	-0,5003
1,-2	-1,302	+0,015	+0,013	-1,274
2,-2	+3,637	-0,043	-0,036	+3,558
3,-2	+0,132	-0,002	-0,002	+0,128
4,-2	+0,005			+0,005
0,-3	-0,015	-0,004	-0,004	-0,017
1,-3	-0,083	+0,002		-0,081
2,-3	+0,240	-0,007	-0,002	+0,231
3,-3	+0,010			+0,010
1,-4	-0,004			-0,004
2,-4	+0,011			+0,011
11.				
2,-4	-0,002			-0,002
3,-4	+0,035	-0,002	+0,001	+0,034
3.				
2,1	+0,073			+0,073
0,0	-2,313			-2,313
1,0	+1,154			+1,154
2,0	-3,319			-3,319
3,0	-0,124			-0,124
2,-1	-0,092			-0,092

www.libtcol.com.cn

0,3	-1,746			-1,746
-1,2	-0.448			-0.448
0,2	-43.634			-43.634
1,2	+0.507			+0.507
0,1	+0.893			+0.893

ausserdem $\log \cos J_0 = 9.9982456$ ist, so wird der Logarithmus theilen des Kreisradius ausgedrückten constanten Gliedes in

$$\cos J = 9.9982378$$

er Multiplication des Ausdrucks von $\delta \frac{h_0}{h}$ des Art. 69 mit dem enden Ausdruck von $\cos J$ bekommt man die Coefficienten der Columnne der nachstehenden Tafel.

g, g'	$\cos J \delta \frac{h_0}{h}$ cos	$\cos J - \cos J_0$ cos	Summe cos
1.			
0,0	-962,846	-3,700	-966,546
0,-1	-4.1564	-0.0650	-4.2214
0,-2	-0.1466	-0.0044	-0.1480
0,-3	-0.013		-0.013
2.			
0,-0	+0.06450	+0.00026	+0.06476
0,-1	+0.1125	+0.0012	+0.1137
0,-2	-93.0458	-0.5003	-93.5461
0,-3	-3.055	-0.017	-3.072
0,-4	-0.091		-0.091

Multiplirt man nun die Function, die die letzte Columnne dieser giebt, mit $-3u \sqrt{1-e^2} \cdot \sqrt{1-e^2} \left(\frac{a'}{r'}\right)^2$, so bekommt man das te Glied des obigen Ausdrucks für \mathcal{Z} , und multiplicirt man die-unction mit $-6e'u^2 \sqrt{1-e^2} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \sin f'$, so bekommt man das Glied des Ausdrucks für dZ . Es ist aber

$$\frac{4}{\sqrt{1-e^2}} + \left(2e' + \frac{3}{4} e'^3 + \frac{65}{96} e'^5\right) \cos g' + \left(\frac{5}{2} e'^2 + \frac{1}{8} e'^4\right) \cos 2g'$$

$$+ \left(\frac{13}{4} e'^3 - \frac{25}{64} e'^5\right) \cos 3g' + \frac{103}{24} e'^4 \cos 4g' + \frac{1097}{192} e'^5 \cos 5g' + \dots$$

$$)^3 \sin f = - \frac{d \cdot \left(\frac{a'}{r'}\right)^3}{dg} \sqrt{1-e^2}$$

und in Zahlen

$$\begin{aligned}
 -3u\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 &= -(9.3540575) - 2(7.5794513)\cos g' \\
 &\quad - 2(5.904444)\cos 2g' - 2(4.2404)\cos 3g' - 2(2.587)\cos 4g' \\
 -6e'u^2\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \sin f' &= -2(6.4567430)\sin g' - 2(5.079763)\sin 2g' \\
 &\quad - 2(3.5948)\sin 3g' - 2(2.066)\sin 4g'
 \end{aligned}$$

und daher erhält man

g, g'	cos
1.	
0, -1	+8",2899
0, -2	+0.2034
0, -3	+0.007
2.	
0, 0	-0.00764
0, -1	+0.3293
0, -2	+21.1492
0, -3	+1.049
0, -4	+0.040

für das vorletzte Glied von \mathcal{Z} , und

g, g'	sin
1.	
0, -1	-0",55338
0, -2	-0.02444
0, -3	-0.0009
2.	
0, 0	+0.004092
0, -1	+0.02684
0, -2	+0.00094
0, -3	-0.0268
0, -4	-0.002

für das letzte Glied in dZ .

Um die Differenz $\frac{1}{2}\delta\frac{h}{h_0} - \mathcal{Z}$ zu bilden, bemerke ich, dass die Coefficienten von $\delta\frac{h}{h_0}$ im Art. 69 gegeben, und in der Columnne für W_0 Art. 106 die Coefficienten, die den Argumenten angehören, deren er Index = 0 ist, die Coefficienten von \mathcal{Z} sind. Hiemit ergibt sich zu

www.libriol.com.cn

2,-6	+0.012	-0.006		+0.006
3,-6	+0.322	+0.191		+0.513
4,-6	+0.802	+0.597		+1.399
5,-6	+0.603	+0.497		+1.100
6,-6	+0.171	+0.162		+0.333
7,-6	+0.022	+0.023		+0.045
3,-7	+0.042	+0.023		+0.065
4,-7	+0.125	+0.093		+0.218
5,-7	+0.109	+0.087		+0.196
6,-7	+0.034	+0.031		+0.065

g, g'	$\left(\frac{d^2 W_0}{dy^2}\right) ndz$ sin	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^3 W_0}{dy^3}\right)(ndz)^2$ sin	$\frac{1}{6}\left(\frac{d^4 W_0}{dy^4}\right)(ndz)^3$ sin	$\frac{dW}{ndz} - \left(\frac{dW_0}{dy}\right)$ sin
<u>1.</u>				
4,0	+62.227	-0.077	-0.012	+62.138
2,0	+8.452	-0.041	-0.004	+8.407
3,0	+0.780	-0.008		+0.772
4,0	+0.070	-0.001		+0.069
-3,-1	-0.011	+0.008		-0.003
-2,-1	-0.123	+0.055		-0.068
-1,-1	-1.258	+0.197		-1.061
0,-1	+3.1503	+0.2805	-0.0004	+3.4304
1,-1	+4.890	+0.208		+5.098
2,-1	+0.774	+0.060		+0.834
3,-1	+0.081	+0.009		+0.090
-2,-2	+0.023	+0.001		+0.024
-1,-2	+0.081	+0.007		+0.088
0,-2	+0.1047	+0.0150		+0.1197
1,-2	+0.005	+0.012		+0.017
2,-2	-0.014	+0.003		-0.011
-1,-3	-0.001			-0.001
0,-3	0.000			0.000
1,-3	+0.002			+0.002
<u>2.</u>				
0,0	+0.00075	-0.00292	+0.00004	-0.00213
1,0	+0.041	-0.006		+0.035
2,0	+0.036	-0.009		+0.027
-1,-1	-0.089	+0.008		-0.081
0,-1	-0.1464	+0.0452	+0.0002	-0.1010
1,-1	+7.269	+0.065	-0.002	+7.332
2,-1	+13.138	+0.039	-0.002	+13.175
3,-1	+3.168	+0.010		+3.178
4,-1	+0.369	-0.001		+0.368

Da das dritte hierzu gehörige Glied hier nicht in Betracht kommt, so wird, wie dort abgeleitet wurde,

$$fY = (II_{-1} + II_1) \cos(n\beta t + \theta)$$

$$f''\Psi = (II_{-1} - II_1) \sin(n\beta t + \theta)$$

es ist also leicht, aus der Tafel für W_0 des Art. 106 die folgenden Coefficienten zu erhalten.

g, g'	fY cos	$f''\Psi$ sin	g, g'	fY cos	$f''\Psi$ sin
1.			2.		
0,0	-310,321		-1,-3	-0,072	+0,072
1,0	-1128,108	-1117,860	0,-3	+128,155	-128,033
2,0	-54,829	-54,499	1,-3	+403,008	-401,226
3,0	-3,640	-3,626	2,-3	-2,456	-16,510
4,0	-0,252	-0,252	3,-3	+39,179	+38,709
-3,-1	-0,094	+0,094	4,-3	+3,521	+3,499
-2,-1	-1,496	+1,486	5,-3	+0,260	+0,260
-1,-1	-24,785	+24,471	0,-4	+3,758	-3,758
0,-1	+15,665	-178,539	1,-4	+18,536	-18,464
1,-1	-31,928	-31,232	2,-4	-0,076	-0,726
2,-1	-2,884	-2,862	3,-4	+1,740	+1,716
3,-1	-0,240	-0,240	4,-4	+0,168	+0,168
-2,-2	-0,042	+0,042	0,-5	+0,098	-0,098
-1,-2	-0,574	+0,570	1,-5	+0,731	-0,731
0,-2	+0,361	-2,629	2,-5	+0,001	-0,027
1,-2	-0,862	-0,834	11.		
2,-2	-0,096	-0,096	1,-2	-0,001	+0,001
-1,-3	-0,015	+0,015	2,-2	-0,005	+0,005
0,-3	+0,007	-0,043	0,-3	+0,005	-0,005
1,-3	-0,019	-0,019	1,-3	+0,010	-0,010
2.			2,-3	-0,210	+0,234
0,0	-2,531	+2,531	3,-3	+0,056	-0,004
1,0	-0,015	+0,019	4,-3	-0,210	-0,210
-1,-1	+0,073	-0,073	5,-3	-0,064	-0,064
0,-1	-18,551	+18,691	0,-4	+0,439	-0,439
1,-1	-55,832	+55,914	1,-4	+3,373	-3,357
2,-1	-0,629	+1,935	2,-4	+15,885	-15,887
3,-1	-7,755	-7,647	3,-4	-2,693	-0,276
4,-1	-0,866	-0,860	4,-4	+11,086	+11,058
-2,-2	+0,064	-0,064	5,-4	+2,759	+2,743
-1,-2	-2,219	+2,225	6,-4	+0,407	+0,405
0,-2	+3492,847	-3489,293	1,-5	+0,364	-0,364
1,-2	+6084,944	-6053,022	2,-5	+1,859	-1,853
2,-2	-52,707	-259,839	3,-5	-0,316	-0,006
3,-2	+598,867	+592,381	4,-5	+1,249	+1,243
4,-2	+49,036	+48,772	5,-5	+0,369	+0,367
5,-2	+3,332	+3,320			
6,-2	+0,217	+0,217			

www.libtool.com
 mit ergeben sich die folgenden Quadrate

g, g'	$\frac{1}{3}(1-e^2)T^2$ cos	$\frac{1}{3}(1-e^3)T^2$ cos	Summe cos
<u>1.</u>			
0, -1	+4,6818	+4,6670	+9,3488
0, -2	+0.1735	+0.1434	+0.3166
0, -3	+0.006	+0.005	+0.011
<u>2.</u>			
0, 0	-0.00156	+0.01676	+0.01520
0, -1	-0.1163	+1.3690	+1.2527
0, -2	-16.3837	+12.4539	-3.9298
0, -3	-1.142	-0.039	-1.181
0, -4	-0.060	+0.003	-0.057

alle Glieder von \mathcal{Z} und dZ berechnet sind.

121.

dividirt man nun die beiden Glieder von dZ , dividirt mit den be-
 n Werthen von β , die im Art. 104 gegeben sind, und kehrt die
 um, so bekommt man

g, g'	Z cos
<u>1.</u>	
0, -1	+34,2847
0, -2	+0.8583
0, -3	+0.020
<u>2.</u>	
0, 0	+0,00974
0, -1	-0.2545
0, -2	-0.0084
0, -3	+0.070
0, -4	+0.004

die im Vorhergehenden entwickelten Glieder von \mathcal{Z} durch die
 den folgenden Werth von $\mathcal{Z} - Z$ geben, so erhält man den
 henden Werth von \mathcal{Z} , dem ich die Unterschiede mit dem vor-
 chneten hinzufüge,

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 399

$$\bar{v} = \bar{W}_0 + \left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{dy^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\bar{W}_0}{dy^3}\right) (n\delta z)^3$$

$$\frac{z}{a} = \frac{r_0^2}{a^2} + \left(\frac{d \cdot r_0^2}{a^2 dg}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \cdot r_0^2}{a^2 dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 \cdot r_0^2}{a^2 dg^3}\right) (n\delta z)^3$$

$$\frac{\bar{W}}{dz} = \left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{dy^2}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3\bar{W}_0}{dy^3}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^4\bar{W}_0}{dy^4}\right) (n\delta z)^3 + \dots$$

$$\frac{r^2}{dz} = \left(\frac{d \cdot r_0^2}{a^2 dg}\right) + \left(\frac{d^2 \cdot r_0^2}{a^2 dg^2}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 \cdot r_0^2}{a^2 dg^3}\right) (n\delta z)^2 + \dots$$

Die Factoren dieser Producte sind im Vorhergehenden enthalten, daraus hat sich ergeben

g, g'	$\left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) n\delta z$ cos	$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{dy^2}\right) (n\delta z)^2$ cos	$\frac{1}{6} \left(\frac{d^3\bar{W}_0}{dy^3}\right) (n\delta z)^3$ cos	$\bar{W} - \bar{W}_0$ cos
1.				
0,0	-68 ^o 904	+0 ^o 184	+0 ^o 008	-68 ^o 742
1,0	-83.067	+0.187	+0.012	-82.868
2,0	-4.417	+0.031	+0.004	-4.382
3,0	-0.240	+0.003		-0.237
4,0	-0.017			-0.017
-3,-1	+0.003	+0.003		+0.006
-2,-1	-0.052	+0.032		-0.020
-1,-1	-2.329	+0.123		-2.206
0,-1	-6.2340	+0.0289	+0.0014	-6.2037
1,-1	-5.620	-0.104		-5.724
2,-1	-0.439	-0.037		-0.476
3,-1	-0.030	-0.004		-0.034
-2,-2	+0.022			+0.022
-1,-2	+0.048	+0.006		+0.054
0,-2	-0.1444	-0.0004		-0.1448
1,-2	-0.029	-0.007		-0.036
2,-2	+0.017	-0.002		+0.015
-1,-3	-0.001			-0.001
0,-3	-0.008			-0.008
1,-3	-0.004			-0.004
2.				
0,0	-0.02669	+0.00038	+0.00010	-0.02624
1,0	-0.058	+0.006		-0.052
2,0	-0.032	+0.014		-0.021
-1,-1	-0.054	+0.005		-0.046
0,-1	-2.1224	+0.0264	+0.0014	-2.0946
1,-1	-7.938	+0.028	+0.002	-7.908
2,-1	-10.744	-0.003	+0.002	-10.742
3,-1	-2.114	-0.004		-2.118
4,-1	-0.166			-0.166
-2,-2	+0.014	+0.004		+0.015
-1,-2	+0.218	+0.042		+0.260
0,-2	+3.0349	+0.2608	-0.0004	+3.2956
1,-2	+0.454	-0.286		+0.165
2,-2	-4.640	-0.982		-5.622
3,-2	-2.164	-0.480		-2.644
4,-2	-0.258	-0.066		-0.324
5,-2	-0.023	-0.006		-0.029

P. A. HANSEN.

-0.001		-0.001
-0.043		-0.043
-0.310	-0.001	-0.311
-0.0180	-0.0011	-0.0191
+0.310	-0.001	+0.309
+0.061		+0.061
+0.001		+0.001
-0.003		-0.003
-0.0006		-0.0006
+0.003		+0.003
+0.00116	-0.00002	+0.00114
-0.002		-0.002
+0.0133	-0.0037	+0.0096
+0.013	-0.002	+0.011
-0.013	-0.004	-0.017
-0.011	-0.002	-0.013
-0.001		-0.001
-0.039		-0.039
-2.1253	-0.0004	-2.1257
-1.028		-1.028
+2.069		+2.069
+1.064		+1.064
+0.058		+0.058
+0.003		+0.003
-0.002		-0.002
-0.095	+0.003	-0.092
-0.074	+0.002	-0.072
+0.091	+0.003	+0.094
+0.076	+0.002	+0.078
+0.004		+0.004
-0.003		-0.003
-0.004		-0.004
+0.003		+0.003
+0.004		+0.004
-0.014	+0.011	-0.003
-0.017	+0.011	-0.006
+0.009	+0.014	+0.023
+0.017	+0.011	+0.028
+0.005	+0.003	+0.008
-0.001	+0.001	0.000
-0.002	+0.001	-0.001
+0.001	+0.001	+0.002
+0.002	+0.001	+0.003

g, g'	$\frac{y \frac{d.r_0^2}{\sqrt{1-e^2} a^2 dg}}{\sin}$	$\frac{y \frac{d^2.r_0^2}{\sqrt{1-e^2} a^2 dg^2} ndz}{\sin}$	$\frac{y \frac{d^2.r_0^2}{2\sqrt{1-e^2} a^2 dg^2} (ndz)^2}{\sin}$
1.			
1,0	-193,633	+0,002	+0,029
2,0	-5,312		+0,014
3,0	-0,249	+0,002	
4,0	-0,041		
3,-1		-0,002	
2,-1		-0,051	
1,-1		-0,312	-0,004
0,-1		-0,0868	-0,0003
1,-1		-0,311	+0,004
2,-1		-0,069	
3,-1		-0,003	
1,-2		-0,003	
0,-2		-0,004	
1,-2		-0,003	
2.			
0,0		+0,00116	-0,00002
1,-1		-0,002	
0,-1		+0,0136	-0,0038
1,-1		+0,009	-0,002
2,-1		+0,013	+0,004
3,-1		+0,011	+0,002
2,-2		-0,006	
1,-2		-0,098	
0,-2		-2,1511	-0,0004
1,-2		-0,989	
2,-2		-2,125	
3,-2		-1,123	
4,-2		-0,090	
5,-2		-0,006	
1,-3		-0,004	
0,-3		-0,097	+0,003
1,-3		-0,072	+0,002
2,-3		-0,095	-0,003
3,-3		-0,078	-0,002
4,-3		-0,006	
0,-4		-0,003	
1,-4		-0,004	
2,-4		-0,003	
3,-4		-0,004	

11.		
1.-6	-0.014	+0.011
2.-6	-0.017	+0.011
3.-6	-0.019	-0.008
4.-6	-0.017	-0.011
5.-6	-0.005	-0.003
1.-5	-0.001	+0.001
2.-5	-0.002	+0.001
3.-5	-0.001	-0.001
4.-5	-0.002	-0.001

y, y'	$-\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\bar{r}^2}{a^2 n dx}$ sin	$-\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\bar{r}^2}{a^2 n dx} y'$ sin	$-\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\bar{r}^2}{a^2 n dx} (1+y')$ sin
1.			
1,0	-193.602	+1.256	-192.346
2,0	-5.298	-0.012	-5.310
3,0	-0.217	-0.003	-0.220
4,0	-0.011		-0.011
-3,-1	-0.002		-0.002
-2,-1	-0.051	+0.018	-0.033
-1,-1	-0.313	+0.014	-0.299
0,-1	-0.0874	-0.0417	-0.1288
1,-1	-0.310	-0.010	-0.320
2,-1	-0.069	+0.024	-0.045
3,-1	-0.003		-0.003
-1,-2	-0.003		-0.003
0,-2	-0.0014	-0.0004	-0.0018
1,-2	-0.003		-0.003
2.			
0,0	+0.00114	+0.00057	+0.00171
-1,-1	-0.002		-0.002
0,-1	+0.0098	+0.0048	+0.0146
1,-1	+0.007	+0.007	+0.014
2,-1	+0.017	-0.009	+0.008
3,-1	+0.013	-0.009	+0.004
-2,-2	-0.006	-0.001	-0.007
-1,-2	-0.098	-0.052	-0.150
0,-2	-2.1515	-0.9777	-3.1292
1,-2	-0.989	-0.683	-1.672
2,-2	-2.125	+0.954	-1.171
3,-2	-1.123	+0.742	-0.381
4,-2	-0.090	+0.052	-0.038
5,-2	-0.006	+0.004	-0.002

3	-0,004	-0,002	-0,006
3	-0.094	-0.041	-0.135
3	-0.070	-0.049	-0.119
3	-0.098	+0.042	-0.056
3	-0.080	+0.052	-0.028
3	-0.006	+0.003	-0.003
4	-0.003	-0.001	-0.004
4	-0.004	-0.002	-0.006
4	-0.003	+0.001	-0.002
4	-0.004	+0.002	-0.002
4	-0.003	+0.006	+0.003
4	-0.006	+0.005	-0.004
4	-0.027	+0.017	-0.010
4	-0.028	+0.022	-0.006
4	-0.008	+0.007	-0.004
5	-0.001	-0.001	-0.002
5	-0.002		-0.002
5	-0.003	+0.001	-0.002

Vorbereitungen zu den letzten Integrationen ausgeführt sind.

125.

man nun nach Maassgabe der im Art. 122 angegebenen die vorstehend erhaltenen Glieder, und führt die Integration hier bloß in der Division mit den Werthen von β des α in Umtauschung des Sinus- und Cosinuszeichen mit einander, so bekommt man die Zahlenwerthe der folgenden mit beschriebenen Columnen.

$n\delta z$	Diff.	ν	Red.	w	Diff.
sin		cos	cos	cos	
0t		-1336,350	-12,472	-1348,822	-18
0		+93.520	-7.622	+85.898	-17
-4,604	-5	+6.353	-0.523	+5.830	0
-0.176	-1	+0.340	-0.029	+0.311	0
-0.009	-2	+0.020		+0.020	0

<u>1.</u>						
-3,-1	+0,029	+1	+0,048		+0,048	-5
-2,-1	+1.097	-9	+1.442	-0,017	+1.425	-2
-1,-1	+73.234	+24	+38.609	-0.022	+38.587	+3
0,-1	+657.468	+52	+24.695	-0.553	+24.142	+1
1,-1	+111.684	+7	-50.756	-0.855	-51.611	-21
2,-1	+1.215	0	-1.130	-0.033	-1.163	0
3,-1	+0.026	-1	-0.039	-0.001	-0.040	-1
<hr/>						
-2,-2	+0.002	+5	+0.010	-0.003	+0.007	-2
-1,-2	+0.800	-5	+0.457	-0.009	+0.448	+2
0,-2	+7.349	+11	+0.532	-0.014	+0.518	-3
1,-2	+2.159	-25	-0.910	-0.023	-0.933	+7
2,-2	+0.035	+1	-0.027	-0.005	-0.032	+2
<hr/>						
-1,-3	+0.011	-4	+0.008		+0.008	-4
0,-3	+0.075	+13	+0.009	-0.002	+0.007	0
1,-3	+0.044	+9	-0.018	-0.001	-0.019	-4
<hr/>						
<u>2.</u>						
0,0	-0.094	-36	+0.044	-0.003	+0.038	-12
1,0	-2.524	+48	+1.259	+0.008	+1.267	-23
2,0	-0.052	+2	+0.045	+0.002	+0.047	-2
<hr/>						
-1,-1	-0.040	-52	+0.007	-0.013	-0.006	-26
0,-1	+3.665	+34	+0.933	-0.262	+0.671	+5
1,-1	-27.620	-31	+13.908	+0.019	+13.927	+24
2,-1	-23.006	+2	+16.051	+0.375	+16.426	-3
3,-1	-1.337	+2	+1.144	+0.156	+1.300	-3
4,-1	-0.066	0	+0.078	+0.011	+0.089	0
<hr/>						
-2,-2	-0.026	+1	-0.035	+0.002	-0.033	+1
-1,-2	-1.893	+12	-1.105	+0.032	-1.073	-5
0,-2	-41.648	+18	-51.667	+0.059	-51.608	-11
1,-2	+4466.992	+24	-2071.495	-13.398	-2084.593	-14
2,-2	+2144.995	+19	-1512.178	-9.571	-1521.749	-12
3,-2	+60.020	-2	-68.958	-0.127	-69.085	+2
4,-2	+2.083	-2	-3.399	+0.013	-3.386	-5
5,-2	+0.084	0	-0.181	+0.002	-0.179	-2
6,-2	+0.004	-	-0.011		-0.011	-
<hr/>						
-1,-3	-0.082	-21	-0.076	+0.012	-0.064	-2
0,-3	-2.352	+34	-2.445	+0.203	-2.242	+24
1,-3	+198.103	+29	-88.404	-0.312	-88.716	-5
2,-3	+155.047	+14	-106.600	-0.858	-107.458	-6
3,-3	+5.166	+5	-5.297	-0.207	-5.504	-2
4,-3	+0.198	+5	-0.285	-0.013	-0.298	-4
5,-3	+0.009	-	-0.017		-0.017	-
<hr/>						
0,-4	-0.109	-145	-0.100	+0.011	-0.089	-13
1,-4	+7.035	-15	-3.005	-0.001	-3.006	+13
2,-4	+7.738	-1	-5.208	-0.041	-5.249	+1
3,-4	+0.287	+1	-0.275	-0.019	-0.294	+2
4,-4	+0.011	-1	-0.016		-0.016	0
<hr/>						
1,-5	+0.240	-1	-0.091		-0.091	-5
2,-5	+0.329	-3	-0.219	-0.002	-0.221	+2
3,-5	+0.012	-5	-0.011	-0.001	-0.012	+3



ige der Gleichung (25)

$$\psi \frac{e_0}{a_0} \sin q_0$$

hat, die Constante

$q_0 + \frac{3}{2} e_0 = f \cos \gamma$ ist, so er-
 constante b , und dem Element γ die

st. Da nun zufolge des Art. 88

$$\frac{h_0}{h} - 1 = 2\delta \frac{h}{h_0} - \delta \frac{h_0}{h}$$

geht auf das in dieser Gleichung enthaltene

$$\frac{h}{h_0} - \delta \frac{h_0}{h} - 3\delta \frac{h_0}{h} + 2 \left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 - 2 \left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3 + \dots$$

$$= -\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}\frac{e_0}{f} + \frac{2}{3}\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3$$

er die Gleichung (40) zur Bestimmung des constanten
 n Ausdruck

$$-\frac{1}{3}b - \frac{e_0}{3f} - \left(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}\right) - \nu^2 - \left(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}\right)(2\nu + \nu^2) + \frac{2}{3}\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3 \dots (41)$$

$$\nu^2 = w^2 + w^3 + \frac{7}{12} w^4$$

man leicht aus Art. 67 das constante Glied in

$$\nu^2 = + 24,699$$

Function $\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}$ ergibt sich aus den Angaben der
 , 122, 123, und kommt übrigens auch bei der Integration in
 , die $n\delta z$ gegeben hat. Multiplicirt man diese Function mit
 so findet man das constante Glied wie folgt:

berechnet. Die »Diff.« überschriebenen Columnen geben die Unterschiede zwischen den nebenstehenden Resultaten der hier durchgeführten Rechnung und den derselben zu Grunde gelegten in Art. 66 angeführten Störungen, die den Mondtafeln zu Grunde gelegt worden sind. Die Geringfügigkeit dieser Unterschiede, die grössten Theils nur in Tausendtheilen der Secunde bestehen, und blos bei den Coefficienten, die kleine Divisoren erhalten, und daher schwieriger zu berechnen sind, einige Hunderttheile der Secunde betragen, zeigt dass die von mir berechneten Störungscoefficienten in der That den Differentialgleichungen der Bewegung des Mondes gütigen, und davon die richtigen Integrale sind. Durch nochmalige Ausführung einer Annäherung würde man nur dann eine noch grössere Genauigkeit erlangen können, wenn man allenthalben eine Decimale mehr in Rechnung zöge wie hier geschehen ist, ich bin aber der Ansicht, dass die hier erlangte Genauigkeit bei dem jetzigen Zustande der Beobachtungskunst hinreichend ist. Ein einziger Coefficient weicht 0".145 von dem zu Grunde gelegten ab, und es kann vielleicht sein, dass hiebei ein kleiner Rechnungsfehler vorgekommen ist, obgleich die Untersuchung, die ich darüber angestellt habe, mir keinen gezeigt hat. Ausserdem beträgt der grösste Unterschied zwischen den der Rechnung zu Grunde gelegten, und den daraus erhaltenen Coefficienten nur 0".052; bei einigen wenigen Coefficienten gehen die Unterschiede auf Hunderttheile von Secunden, bei den meisten erreichen sie kein Hunderttheil.

126.

Es ist noch zu erklären, wie das constante Glied in ν berechnet worden ist. Es dient dazu die Gleichung (19), die auf folgende Art umgestellt werden kann. Aus der strengen Gleichung, woraus diese abgeleitet worden ist, folgt zuerst

$$\frac{h_0}{h} = \left(1 + \frac{d\delta z}{dt} + \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{r^2}{a^2} \right) (1 + \nu)^2$$

und aus dem Art. 122, oder der Gleichung (5), bekommt man

$$\frac{d\delta z}{dt} + \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{r^2}{a^2} = \bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h}$$

und hiemit ergibt sich

$$(40) \dots \delta \frac{h_0}{h} = \bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} + 2\nu + \nu^2 + \left(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} \right) (2\nu + \nu^2)$$

Um hieraus $\delta \frac{h_0}{h}$ zu eliminiren bemerke ich, dass zufolge der Gleichung (25)

$$W_0 = \mathcal{X} + \mathcal{I} \left(\frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{3}{2} e_0 \right) + \mathcal{Y} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0$$

und, dass dem Integral welches W_0 gegeben hat, die Constante

$$b + \xi \cos \gamma$$

hinzugefügt worden ist. Da nun $\frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{3}{2} e_0 = f \cos \gamma$ ist, so ergibt sich, dass dem Element \mathcal{X} die Constante b , und dem Element \mathcal{I} die Constante $\frac{\xi}{f}$ hinzugefügt worden ist. Da nun zufolge des Art. 88

$$\mathcal{X} + \frac{3}{2} e_0 \mathcal{I} = 2 \delta \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 = 2 \delta \frac{h}{h_0} - \delta \frac{h_0}{h}$$

ist, so wird mit bloßer Rücksicht auf das in dieser Gleichung enthaltene constante Glied

$$\begin{aligned} b + \frac{3}{2} e \frac{\xi}{f} &= 2 \delta \frac{h}{h_0} - \delta \frac{h_0}{h} \\ &= -3 \delta \frac{h_0}{h} + 2 \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - 2 \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

oder

$$\delta \frac{h_0}{h} = -\frac{1}{3} b - \frac{1}{2} \frac{e \xi}{f} + \frac{2}{3} \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^3$$

und es giebt daher die Gleichung (40) zur Bestimmung des constanten Gliedes in ν den Ausdruck

$$\begin{aligned} 2\nu &= -\frac{1}{3} b - \frac{e \xi}{2f} - \left(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} \right) \\ &\quad - \nu^2 - \left(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} \right) (2\nu + \nu^2) + \frac{2}{3} \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\delta \frac{h_0}{h} \right)^3 \dots \quad (41) \end{aligned}$$

Da

$$\nu^2 = w^2 + w^3 + \frac{7}{12} w^4$$

so findet man leicht aus Art. 67 das constante Glied in

$$\nu^2 = + 24''699$$

Die Function $\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h}$ ergibt sich aus den Angaben der Artt. 107, 122, 123, und kommt übrigens auch bei der Integration in Betracht, die πdz gegeben hat. Multiplicirt man diese Function mit $2\nu + \nu^2$, so findet man das constante Glied wie folgt:

$(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}) (2\nu + \nu^2)$		
1.	1.	0, 0, in 1.
0,0	0,0	-22,751
1,0	1,0	95
-1,-1	-1,-1	15
0,-1	0,-1	6
1,-1	1,-1	25
<u>2.</u>	<u>2.</u>	
1,-1	1,-1	2
2,-1	2,-1	3
0,-2	0,-2	2
1,-2	1,-2	-38.615
2,-2	2,-2	-29.149
3,-2	3,-2	57
1,-3	1,-3	67
2,-3	2,-3	142
<u>11.</u>	<u>11.</u>	
2,-4	2,-4	2
3,-4	3,-4	5
		<u>-90,936</u>

und hiemit stehen die einzelnen Theile der Constante, in der Reihenfolge wie sie in dem Ausdruck (41) angeführt sind, wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & -979,998 \\
 & +8.528 \\
 & -1772.134 \\
 & -24.699 \\
 & +90.936 \\
 & +4.595 \\
 & +0.072 \\
 \hline
 2\nu & = -2672,700 \\
 \nu & = -1336,350
 \end{aligned}$$

mit der vorstehenden Tafel übereinstimmend.

Wenn man das constante Glied in ν als bekannt betrachtet, so dient der Ausdruck (40), um das constante Glied in $\delta \frac{h_0}{h}$ zu berechnen. Mit den eben gefundenen Werthe des constanten Gliedes von ν ergibt sich

$$\delta \frac{h_0}{h} = -966,803$$

mit der Angabe des Art. 69, die aus der vorhergehenden Annäherung hat berechnet werden müssen, hinreichend übereinstimmend.

127.

Der Vollständigkeit wegen muss ich die Berechnung der Constante der Parallaxe angeben, die ich genau nach den bez. Entwicklungen der »*Fundamenta etc.*« ausgeführt habe. Nennt man die Aequatoreal-Horizontalparallaxe p , so ist

$$\log. \text{nat.} \sin p = \log. \text{nat.} \frac{D}{a_0} - \log. \text{nat.} \frac{1 - e_0^2}{1 + e_0 \cos f} - w$$

und das constante Glied dieses Ausdrucks giebt die Constante im Ausdruck von $\log. \text{nat.} p$. Es bezeichnet hier D den Aequatoreal-Halbmesser der Erde, und a_0 wie immer die mittlere grosse Halbachse der Mondbahn, die aber der Gleichung

$$a_0^3 n_0^2 = k^2 (1 + m)$$

entsprechen muss, in welcher n_0 die Bewegung der mittleren Anomalie des Mondes bedeutet. Nimmt man einstweilen für D den Radius der Erde, welcher dem Parallel entspricht, für welchen der Sinus der geocentrischen Breite $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, bezeichnet mit T die anomalistische Umlaufzeit des Mondes um die Erde, und mit P die Länge des einfachen Pendels, welches auf diesem Parallel Eine Schwingung in t Secunden vollbringen würde, wenn die Centrifugalkraft nicht vorhanden wäre, so wird *)

$$\frac{D}{a_0} = \left(\frac{1}{1+m} \cdot \frac{D}{P} \cdot \frac{4t^2}{T^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Nimmt man nun

$$P = 0,992666 \frac{\text{mir.}}{433,86} \text{ für } t = 1^s$$

$$D = 6370063 \text{ mir.}$$

$$m = \frac{1}{80}$$

$$T = 2380713^s$$

**) so bekommt man

$$\log. \text{br.} \frac{D}{a_0} = 8.2165305$$

und für den Aequatorealwerth von D

$$\log. \text{br.} \frac{D}{a_0} = 8.2170139$$

Das constante Glied in $\log. \text{nat.} \frac{1 - e_0^2}{1 + e_0 \cos f}$ hat zum Ausdruck

*) S. »*Fundamenta etc.*« p. 126.

**) S. Schum. Astr. Nachr. Bd. 17 p. 297 u. f.

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \dots$$

und hiemit ergibt sich das constante Glied in

$$\log. \text{br. } \frac{1 - e_0^2}{1 + e_0 \cos \gamma} = + 0.0003275$$

Aus dem constanten Gliede $- 1348.822$ des Ausdrucks von w des Art. 125 ergibt sich für den Briggischen Logarithmus, und in Theilen des Kreisradius

$$- 0.0028400$$

und hiemit wird das constante Glied in

$$\log. \text{br. } \sin p = 8.2195264$$

mit den Mondtafeln bis auf zwei Einheiten der letzten Decimale übereinstimmend. Die Reduction dieser Constante auf die des Sinus der Parallaxe selbst ist in der Einleitung zu den Mondtafeln gegeben, und braucht daher hier nicht wiederholt zu werden.

128.

Die Gleichung (19), oder welches dem gleich ist, die Gleichung (40) des vorvor. Art. giebt Veranlassung zu einer durchgreifenden Prüfung der hier berechneten Störungen der Länge und des Radius Vectors des Mondes. Die im Art. 69 angegebenen numerischen Werthe der Coefficienten von $\delta \frac{h_0}{h}$ sind, wie schon angeführt, soweit sie die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 betreffen, durch die Gleichung (18) berechnet, berechnen wir sie jetzt wieder durch (19) oder (40), so werden dazu ganz andere Zahlenwerthe angewandt werden müssen, und etwaige Fehler der hier ausgeführten Rechnungen müssten sich durch Unübereinstimmung der so erlangten doppelten Werthe der Coefficienten von $\delta \frac{h_0}{h}$ kund geben. Für die Anwendung der Gleichung (40) zu diesem Zweck ist nur die Berechnung des einen Products $(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}) (2\nu + \nu^2)$, und die Zusammensetzung von ν^2 aus den Potenzen von w erforderlich, indem die übrigen erforderlichen Grössen schon anderweitig vorkommen. Nach der Ausführung dieser eben genannten Rechnungen ergibt sich die folgende Zusammenstellung.

g, g'	$\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) \frac{2h_0}{h}$	2ν	ν^2	$\left(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) \frac{2h_0}{h}\right) \times (2\nu + \nu^2)$	$\delta \frac{h_0}{h}$	Diff
	cos	cos	cos	cos	cos	
1.						
1,0	-193,606	+187,040	+15,051	-67,767	-59,282	-7
2,0	-11.851	+12.705	+1.039	-4.028	-2.135	+5
3,0	-0.600	+0.679	+0.057	-0.232	-0.096	+4
4,0	-0.040	+0.040		-0.011	-0.011	+7
-3,-1	-0.087	+0.095		-0.006	+0.002	-3
-2,-1	-2.234	+2.284	+0.037	-0.146	-0.059	0
-1,-1	-78.449	+77.217	+0.048	-0.673	-1.857	+1
0,-1	-49.579	+49.389	+1.092	-5.073	-4.171	-3
1,-1	+102.947	-101.512	+1.684	-6.722	-3.603	-3
2,-1	+2.278	-2.260	+0.062	-0.231	-0.151	+2
3,-1	+0.074	-0.077	+0.003	-0.011	-0.011	+3
-2,-2	-0.004	+0.019	+0.005	-0.017	+0.003	-4
-1,-2	-0.918	+0.915	+0.017	-0.067	-0.053	-4
0,-2	-1.104	+1.064	+0.027	-0.128	-0.141	-6
1,-2	+1.830	-1.819	+0.045	-0.179	-0.123	-1
2,-2	+0.064	-0.053	+0.010	-0.033	-0.042	+7
-1,-3	-0.044	+0.015		-0.002	-0.001	+1
0,-3	-0.017	+0.018	+0.003	-0.008	-0.004	-9
1,-3	+0.034	-0.036	+0.002	-0.004	-0.004	+1
2.						
0,0	-0.003	+0.082	+0.006	-0.026	+0.059	+6
1,0	-2.568	+2.517	-0.016	+0.047	-0.020	+10
2,0	-0.104	+0.089	-0.004	+0.016	-0.003	+1
-1,-1	+0.044	+0.013	+0.025	-0.078	+0.004	0
0,-1	-0.224	+1.865	+0.512	-2.026	+0.127	-14
1,-1	-26.018	+27.816	-0.049	-0.269	+1.480	+17
2,-1	-44.652	+32.102	-0.746	+3.051	-10.245	+8
3,-1	-3.919	+2.287	-0.309	+1.417	-0.521	0
4,-1	-0.261	+0.155	-0.021	+0.097	-0.030	-2
-2,-2	+0.057	-0.069	-0.004	+0.017	+0.001	+1
-1,-2	+2.186	-2.210	-0.059	+0.234	+0.151	-27
0,-2	+7.700	-103.334	-0.197	+2.418	-93.443	-10
1,-2	+3870.203	-4142.390	+26.398	-83.283	-329.072	-5
2,-2	+4000.857	-3024.355	+18.814	-74.620	+920.696	+9
3,-2	+170.966	-137.916	+0.182	-0.143	+33.089	-3
4,-2	+7.995	-6.798	-0.032	+0.172	+1.337	+5
5,-2	+0.404	-0.361	-0.003	+0.014	+0.054	+7
6,-2	+0.025	-0.022			+0.003	-3
-1,-3	+0.101	-0.152	-0.024	+0.074	-0.001	+8
0,-3	+0.584	-4.889	-0.407	+1.636	-3.076	+8
1,-3	+156.718	-176.808	+0.602	-1.175	-20.663	-8
2,-3	+277.554	-213.200	+1.679	-6.430	+59.603	-7
3,-3	+14.338	-10.594	+0.400	-1.811	+2.333	+7
4,-3	+0.747	-0.570	+0.026	-0.107	+0.096	+8
5,-3	+0.044	-0.033		-0.008	0.000	+5

2.						
0,-4	+0.034	-0.200	-0.022	+0.084	-0.104	+13
1,-4	+5.037	-6.040	+0.004	+0.054	-0.918	+12
2,-4	+13.270	-10.446	+0.081	-0.300	+2.635	+5
3,-4	+0.776	-0.550	+0.037	-0.155	+0.108	+4
4,-4	+0.044	-0.031		-0.010	0.000	+5
1,-5						
1,-5	+0.153	-0.182		+0.003	-0.026	-11
2,-5	+0.539	-0.438	+0.003	-0.010	+0.094	+4
3,-5	+0.034	-0.022	+0.004	-0.008	+0.002	+3
11.						
2,-2						
2,-2	-0.062	+0.024	-0.013	+0.047	-0.004	+4
3,-2	-0.053	+0.018	-0.008	+0.040	-0.003	0
1,-3						
1,-3	+0.034	-0.024	-0.010	+0.015	+0.015	-19
2,-3	-0.632	+0.256	-0.154	+0.543	+0.016	+2
3,-3	-1.708	+0.607	-0.270	+1.242	-0.129	+1
4,-3	-0.900	+0.250	-0.140	+0.748	-0.042	0
5,-3	-0.112	+0.033	-0.016	+0.090	-0.005	0
0,-4						
0,-4	+0.007	+0.044	+0.017	-0.044	+0.021	-21
1,-4	+0.652	-0.187	+0.524	-1.063	-0.074	-6
2,-4	+52.045	-23.187	+10.915	-40.394	-0.621	0
3,-4	+97.581	-36.031	+15.446	-69.507	+7.459	+4
4,-4	+39.843	-11.545	+6.294	-32.610	+1.982	-15
5,-4	+3.658	-1.253	+0.545	-2.752	+0.198	-13
6,-4	+0.276	-0.110	+0.039	-0.188	+0.047	-2
7,-4	+0.017	-0.008		-0.013	-0.004	+4
1,-5						
1,-5	+0.034	+0.003	+0.044	-0.088	-0.010	+8
2,-5	+4.129	-2.054	+0.940	-3.380	-0.075	+7
3,-5	+10.997	-4.446	+1.746	-7.746	+0.851	-15
4,-5	+5.512	-1.580	+0.877	-4.531	+0.278	-14
5,-5	+0.549	-0.181	+0.082	-0.417	+0.033	-7
6,-5	+0.035	-0.016		-0.029	-0.010	+12
2,-6						
2,-6	+0.239	-0.114	+0.051	-0.183	-0.007	+2
3,-6	+0.763	-0.293	+0.122	-0.533	+0.059	-2
4,-6	+0.447	-0.130	+0.074	-0.375	+0.046	+5
5,-6	+0.047	-0.015	+0.007	-0.034	+0.005	-4
3,-7						
3,-7	+0.040	-0.016	+0.006	-0.029	+0.001	+1
4,-7	+0.028	-0.007	+0.004	-0.022	0.000	+1
15.						
3,-5						
3,-5	-0.012	+0.003	-0.002	+0.013	+0.002	-2
4,-5	-0.041	+0.008	-0.005	+0.039	+0.001	-3
5,-5	-0.038	+0.007	-0.005	+0.036	0.000	-1
2,-6						
2,-6	+0.014	-0.006	+0.004	-0.018	-0.006	+6
3,-6	+0.741	-0.197	+0.123	-0.670	-0.003	+2
4,-6	+1.936	-0.441	+0.268	-1.698	+0.065	-1
5,-6	+1.535	-0.292	+0.196	-1.398	+0.044	-1
6,-6	+0.472	-0.084	+0.054	-0.433	+0.009	+1
7,-6	+0.060	-0.012	+0.007	-0.054	+0.001	+1
3,-7						
3,-7	+0.094	-0.025	+0.014	-0.086	-0.003	+3
4,-7	+0.299	-0.070	+0.042	-0.266	+0.005	+6
5,-7	+0.274	-0.052	+0.034	-0.254	+0.002	+6
6,-7	+0.089	-0.016	+0.011	-0.086	-0.002	+4

Die letzte mit »Diff.« überschriebene Columnne giebt die Unterschiede zwischen den hier berechneten Coefficienten von $\delta \frac{h_0}{\lambda}$ und denen des Art. 69. Diese Unterschiede sind befriedigend klein, denn die meisten derselben betragen nur einige Tausendtheile von Secunden, und der grösste erreicht nur 0,027; überhaupt sind nur zwei Unterschiede vorhanden, die 0,02 übersteigen.

§ 9. Berechnung der Breitenstörungen und der Reduction der Länge auf die Ecliptik aus den vorhergehenden Werthen.

129.

Im Art. 9 wurde der Bogen der Mondbahn, welcher sich von der positiven Achse der X bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn erstreckt, mit φ bezeichnet, da nun v die von derselben Achse an gerechnete Länge des Mondes in seiner Bahn bedeutet, so ist $v - \varphi$ der Bogen, welcher sich vom genannten aufsteigenden Knoten bis zum Orte des Mondes erstreckt, mit anderen Worten, $v - \varphi$ ist das Argument der Breite des Mondes.

A. a. O. wurde ferner der Bogen der Sonnenbahn, welcher sich von der positiven X' Achse bis zu demselben Knoten erstreckt, mit ψ bezeichnet, wenn wir daher mit $-p$ den Bogen bezeichnen, welcher sich von demselben Anfangspunkt bis zur wahren Frühlingsnachtgleiche erstreckt, so ist $\psi + p$ der Bogen der Ecliptik, welcher sich von der Frühlingsnachtgleiche bis zu dem mehrmals genannten Knoten erstreckt, und p ist die Summe der Präcession und der Nutationen. Sei nun L die wahre tropische Länge des Mondes auf der Ecliptik, dann ist der Bogen der Ecliptik, welcher sich von demselben Knoten bis zur Projection des Mondortes auf der Ecliptik erstreckt $= L - \psi - p$, und die sphärische Trigonometrie giebt

$$\begin{aligned} \cos B \sin (L - \psi - p) &= \cos J \sin (v - \varphi) \\ \cos B \cos (L - \psi - p) &= \cos (v - \varphi) \\ \sin B &= \sin J \sin (v - \varphi) \end{aligned}$$

wenn ausserdem B die Breite des Mondes über der Ecliptik bedeutet. Es ist aber zufolge der Gleichungen (10)

$$\begin{aligned} \varphi &= -n(\alpha - \eta) t - N - K + \pi \\ \psi &= -n(\alpha + \eta) t - N + K + \pi' \end{aligned}$$

und da ferner

$$v = \bar{f} + nyt + \pi$$

ist, so wird

$$v - \varphi = \bar{f} + \omega + \delta N + \delta K$$

wenn man wie früher

$$\omega = n (y + \alpha - \eta) t + N_0 + K_0$$

setzt, und also ω die mittlere Entfernung des Mondperigäum. vom *nodis*-mals genannten Knoten bedeutet. Bezeichnen wir ferner, wie früher, mit θ das Supplement der mittleren siderischen Länge dieses Knotens, so wird

$$\theta = n (\alpha + \eta) t + N_0 - K_0 - \pi'$$

woraus

$$\psi = -\theta - \delta N + \delta K$$

folgt. Hiemit gehen die obigen trigonometrischen Gleichungen in die folgenden über

$$(42) \begin{cases} \cos B \sin (L + \theta - p + \delta N - \delta K) = \cos J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ \cos B \cos (L + \theta - p + \delta N - \delta K) = \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ \sin B = \sin J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \end{cases}$$

130.

Die Gleichungen (42) sind mit den folgenden identisch,

$$(43) \begin{cases} \cos B \sin (L - II - p) = \cos J_0 \sin (\bar{f} + \omega) - s \left(\operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} \right) \\ \cos B \cos (L - II - p) = \cos (\bar{f} + \omega) - s \frac{U}{k} \\ \sin B = \sin J_0 \sin (\bar{f} + \omega) + s \end{cases}$$

in welchen

$$(44) \begin{cases} U = \sin J \sin (\delta N + \delta K) \\ V = \sin J \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \\ s = V \sin (\bar{f} + \omega) + U \cos (\bar{f} + \omega) \\ k = \cos J_0 (\cos J_0 + \cos J) - V \sin J_0 \\ \quad = 1 + \cos J_0 \cos J - \sin J_0 \sin J \cos (\delta N + \delta K) \\ \sin (II + \theta + \delta N - \delta K) = \frac{\cos J_0 + \cos J}{k} \sin (\delta N + \delta K) \\ \cos (II + \theta + \delta N - \delta K) = \frac{(1 + \cos J_0 \cos J) \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin J}{k} \end{cases}$$

ist. *) Um die Identität der Gleichungen (42) und (43) nachzuweisen, substituirt ich zuerst die Ausdrücke für U und V in den Ausdruck für s , hiemit wird

$$s = \sin J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin (\bar{f} + \omega)$$

durch deren Substitution in die dritte (43) die Identität dieser mit der dritten (42) sich sogleich zeigt. Wenn man in der ersten (43) $\tan J_0$ mit k multiplicirt und dividirt, und den Werth von V substituirt, so wird sie

$$\cos B \sin (L - II - p) = \cos J_0 \sin (\bar{f} + \omega) - \frac{s}{k} (\sin J_0 \cos J + \cos J_0 \sin J \cos (\delta N + \delta K))$$

multiplicirt und dividirt man hier das erste Glied rechter Hand mit k , und substituirt den vorstehenden Ausdruck von s , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos B \sin (L - II - p) &= \frac{1}{k} \{ (\cos J_0 + \cos J) \sin (\bar{f} + \omega) \\ &- [\sin J_0 \sin J \cos J + \cos J_0 \sin^2 J \cos (\delta N + \delta K)] \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \frac{1}{k} \{ -(\cos J_0 + \cos J) \sin (\delta N + \delta K) \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ &+ \cos J [(1 + \cos J_0 \cos J) \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin J] \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \cos J \cos (II + \theta + \delta N - \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \quad (45) \\ &- \sin (II + \theta + \delta N - \delta K) \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \end{aligned}$$

vermöge der beiden letzten (44). Substituirt man den Ausdruck von U in die zweite (43), so wird diese

$$\cos B \cos (L - II - p) = \cos (\bar{f} + \omega) - \frac{s}{k} \sin J \sin (\delta N + \delta K)$$

und wenn man hier wieder das erste Glied rechter Hand mit k multiplicirt und dividirt, so wie den Ausdruck für s substituirt,

$$\begin{aligned} \cos B \cos (L - II - p) &= \frac{1}{k} \{ \cos (\bar{f} + \omega) + \cos J_0 \cos J \cos (\bar{f} + \omega) \\ &- \sin J_0 \sin J \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ &- \sin^2 J \sin (\delta N + \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \frac{1}{k} \{ \cos J (\cos J_0 + \cos J) \sin (\delta N + \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ &+ [(1 + \cos J_0 \cos J) \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin J] \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \cos J \sin (II + \theta + \delta N - \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \dots (46) \\ &+ \cos (II + \theta + \delta N - \delta K) \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \end{aligned}$$

*) In der ersten Abhandlung über die Stör. d. kl. Pl. habe ich diese in allgemeiner Form aufgestellten Gleichungen direkt aus den allgemein gestellten (42) abgeleitet.

vermöge der beiden letzten (44). Die Identität der Gleichungen (45) und (46) mit den beiden ersten (42) ist ohne Mühe herzustellen.

131.

Aus den beiden ersten Gleichungen (43) lässt sich der Ausdruck des Bogens $L - II - p$ durch eine sehr einfach und regelmässig fortschreitende Reihe geben, die man auf die folgende Weise erhält. Sei

$$\frac{U}{k} = A \sin w$$

$$\operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} = A \cos w$$

dann gehen die genannten Gleichungen in die folgenden über,

$$\cos B \sin (L - II - p) = \cos J_0 \sin (\bar{f} + \omega) - sA \cos w$$

$$\cos B \cos (L - II - p) = \cos (\bar{f} + \omega) - sA \sin w$$

Führt man hierin die imaginären Exponentialfunctionen ein, bezeichnet die Grundzahl der natürlichen Logarithmen mit c , und setzt zur Abkürzung

$$x = c^{(L-II-p) \sqrt{-1}}; \quad y = c^{(\bar{f}+\omega) \sqrt{-1}}; \quad z = c^{w \sqrt{-1}}$$

so wird

$$\cos B \left(x - \frac{1}{x} \right) = \cos J_0 \left(y - \frac{1}{y} \right) - \sqrt{-1} \cdot sA \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\cos B \left(x + \frac{1}{x} \right) = y + \frac{1}{y} + \sqrt{-1} \cdot sA \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

woraus durch Addition und Subtraction

$$\frac{2 \cos B}{1 + \cos J_0} \frac{x}{y} = 1 + \varepsilon \frac{1}{y^2} - \sqrt{-1} \cdot \eta s \frac{1}{yz}$$

$$\frac{2 \cos B}{1 + \cos J_0} \frac{y}{x} = 1 + \varepsilon y^2 + \sqrt{-1} \cdot \eta s yz$$

entsteht, in welchen zur Abkürzung

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0; \quad \eta = \frac{A}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0}$$

gesetzt worden ist. Dividirt man die erste durch die zweite, und nimmt die natürlichen Logarithmen, so bekommt man

$$2 \sqrt{-1} \cdot (L - II - p - \bar{f} - \omega) = \log \left(1 + \varepsilon \frac{1}{y^2} - \sqrt{-1} \cdot \eta s \frac{1}{yz} \right)$$

$$(47) \dots \dots \dots - \log \left(1 + \varepsilon y^2 + \sqrt{-1} \cdot \eta s yz \right)$$

Löst man diese Logarithmen in unendliche Reihen auf und geht zum Reellen über, so ergibt sich sogleich

$$\begin{aligned} & \sqrt{f+\omega+II+p-\epsilon} \sin 2l + \frac{1}{2}\epsilon^2 \sin 4l - \frac{1}{2}\epsilon^3 \sin 6l + \frac{1}{2}\epsilon^4 \sin 8l \sqrt{\dots} \\ -\eta s \{ & \cos(l+w) - \frac{1}{2}\epsilon \cos(3l+w) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \cos(5l+w) - \frac{1}{2}\epsilon^3 \cos(7l+w) \pm \dots \} \\ -\eta^2 s^2 \{ & \frac{1}{2} \sin(2l+2w) - \frac{1}{2}\epsilon \sin(4l+2w) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \sin(6l+2w) - \frac{1}{2}\epsilon^3 \sin(8l+2w) \pm \dots \} \\ \eta^3 s^3 \{ & \frac{1}{2} \cos(3l+3w) - \frac{1}{2}\epsilon \cos(5l+3w) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \cos(7l+3w) - \frac{1}{2}\epsilon^3 \cos(9l+3w) \pm \dots \} \\ \eta^4 s^4 \{ & \frac{1}{2} \sin(4l+4w) - \frac{1}{2}\epsilon \sin(6l+4w) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \sin(8l+4w) - \frac{1}{2}\epsilon^3 \sin(10l+4w) \pm \dots \} \\ & \sqrt{\text{etc.}} \end{aligned}$$

wo unter den Sinus- und Cosinuszeichen zur Abkürzung l statt $\sqrt{f+\omega}$ geschrieben worden ist. Diese Reihen schreiten nach so einfachen Gesetzen fort, dass ihre beliebige Fortsetzung nur die Mühe des Hinschreibens kostet. Ueber das Gesetz der Fortschreitung der Bögen, der numerischen Nenner und der Vorzeichen braucht nichts gesagt zu werden, in Bezug auf die numerischen Zähler ist zu bemerken, dass sie die Entwicklungscoefficienten des Binoms $(1+x)^{-n}$ sind, wenn nach und nach $n=1, =2, =3, =\text{etc.}$ gesetzt wird.

432.

Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von ηs des eben entwickelten Ausdrucks lassen sich auch durch endliche Ausdrücke geben, die nach einfachen Gesetzen fortschreiten. Der Gleichung (47) lässt sich leicht die folgende Form geben,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-1} \cdot (L-II-p-\bar{f}-\omega) &= \log\left(1 + \epsilon \frac{1}{y^2}\right) - \log(1 + \epsilon y^2) \dots (48) \\ &+ \log\left(1 - \frac{\sqrt{-1} \cdot \eta s \frac{1}{y^2}}{1 + \epsilon \frac{1}{y^2}}\right) - \log\left(1 + \frac{\sqrt{-1} \cdot \eta s y^2}{1 + \epsilon y^2}\right) \end{aligned}$$

und löst man die beiden hier zuletzt angesetzten Logarithmen in unendliche Reihen auf, so bekommt man

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-1} \cdot (L-II-p-\bar{f}-\omega) &= \log\left(1 + \epsilon \frac{1}{y^2}\right) - \log(1 + \epsilon y^2) \\ &- \sqrt{-1} \cdot \eta s \left\{ \frac{y^2}{1 + \epsilon y^2} + \frac{1}{1 + \epsilon \frac{1}{y^2}} \right\} - \frac{1}{2} \eta^2 s^2 \left\{ \frac{y^2 x^2}{(1 + \epsilon y^2)^2} - \frac{1}{(1 + \epsilon \frac{1}{y^2})^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot \eta^3 s^3 \left\{ \frac{y^2 x^2}{(1 + \epsilon y^2)^3} + \frac{1}{(1 + \epsilon \frac{1}{y^2})^3} \right\} + \frac{1}{2} \eta^4 s^4 \left\{ \frac{y^2 x^2}{(1 + \epsilon y^2)^4} - \frac{1}{(1 + \epsilon \frac{1}{y^2})^4} \right\} \end{aligned}$$

$\sqrt{\text{etc.}}$

Wenn man hier die Coefficienten von ηs , $\eta^2 s^2$, etc. auf gleiche Nenner bringt, so giebt sich ihre Transformation in Sinusse und Cosinusse sogleich zu erkennen. Es wird

$$\frac{yx}{1+\varepsilon y^2} + \frac{\frac{1}{y^2}}{1+\varepsilon \frac{1}{y^2}} = \frac{yx + \frac{1}{y^2} + \varepsilon \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}{1+\varepsilon \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \varepsilon^2} = 2 \frac{\cos(\bar{f}+\omega+\omega) + \varepsilon \cos(\bar{f}+\omega-\omega)}{1+2\varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega) + \varepsilon^2},$$

$$\frac{y^2 x^2}{(1+\varepsilon y^2)^2} - \frac{\frac{1}{y^2 x^2}}{\left(1+\varepsilon \frac{1}{y^2}\right)^2} = \frac{y^2 x^2 - \frac{1}{y^2 x^2} + 2\varepsilon \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1+\varepsilon \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \varepsilon^2\right)^2}$$

$$= 2 \sqrt{-1} \cdot \frac{\sin 2(\bar{f}+\omega+\omega) + 2\varepsilon \sin 2\omega - \varepsilon^2 \sin 2(\bar{f}+\omega-\omega)}{(1+2\varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega) + \varepsilon^2)^2}$$

u. s. w. Die beiden ersten imaginären Logarithmen der Gleichung (48) verwandelt man durch die folgenden Betrachtungen in einen reellen Kreisbogen. Seien a, b, d, e irgend welche reelle Grössen, zwischen welchen die Gleichung

$$\log(a + b \sqrt{-1}) = d + e \sqrt{-1}$$

stattfindet. Geht man zu den Exponentialgrössen über, so erhält man hieraus

$$a + b \sqrt{-1} = c^{d+e\sqrt{-1}} = c^d (\cos e + \sqrt{-1} \sin e)$$

woraus:

$$a = c^d \cos e; \quad b = c^d \sin e$$

folgt. Hiemit wird

$$d = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2); \quad e = \text{arc. tg } \frac{b}{a}$$

und es wird also

$$\log(a + b \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) + \sqrt{-1} \cdot \text{arc. tg } \frac{b}{a}$$

ebenso erhält man

$$\log(a - b \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) - \sqrt{-1} \cdot \text{arc. tg } \frac{b}{a}$$

Wenden wir diesen Satz auf die Gleichung (48) an, so ist

$$\log(a - b \sqrt{-1}) = \log\left(1 + \varepsilon \frac{1}{y^2}\right) \\ = \log(1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega) - \sqrt{-1} \cdot \varepsilon \sin 2(\bar{f}+\omega))$$

also

$$a = 1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega); \quad b = \varepsilon \sin 2(\bar{f}+\omega)$$

folglich

$$\log\left(1 + \varepsilon \frac{1}{y^2}\right) - \log(1 + \varepsilon y^2) \\ = -2 \sqrt{-1} \cdot \text{arc. tg } \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f}+\omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega)}$$

und die Gleichung (48) geht in die folgende über,

$$\begin{aligned}
 L &= \bar{f} + \omega + II + p - \text{arc. tg} \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)} \\
 &- \eta s \frac{\cos(\omega + l) + \varepsilon \cos(\omega - l)}{1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2} \\
 &- \eta^2 s^2 \frac{\sin(3\omega + 2l) + 2\varepsilon \sin 2\omega + \varepsilon^2 \sin(2\omega - 2l)}{2(1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2)^2} \\
 &+ \eta^3 s^3 \frac{\cos(3\omega + 2l) + 3\varepsilon \cos(3\omega + l) + 3\varepsilon^2 \cos(3\omega - l) + \varepsilon^3 \cos(3\omega - 2l)}{8(1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2)^3} \\
 &+ \eta^4 s^4 \frac{\sin(4\omega + 4l) + 4\varepsilon \sin(4\omega + 2l) + 6\varepsilon^2 \sin 4\omega + 4\varepsilon^3 \sin(4\omega - 2l) + \varepsilon^4 \sin(4\omega - 4l)}{4(1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2)^4} \\
 &\bar{+} \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

wo wieder l statt $\bar{f} + \omega$ geschrieben worden ist. Auch von dieser Reihe ist das Gesetz des Fortganges offenbar.

133.

Man kann noch weiter gehen, und die unendliche Reihe des eben gefundenen Ausdruckes für L auch in einen durch seine Tangente gegebenen Kreisbogen verwandeln. Sei

$$\begin{aligned}
 \lambda u &= \frac{y}{1 + \varepsilon y^2} \\
 \frac{\lambda}{u} &= \frac{\frac{1}{y}}{1 + \varepsilon \frac{1}{y^2}}
 \end{aligned}$$

wo $u = c^\mu \sqrt{-1}$ ist, und μ und λ aus diesen Gleichungen bestimmt werden müssen. Hiemit geht (48) über in

$$\begin{aligned}
 2 \sqrt{-1} \cdot (L - II - p - \bar{f} - \omega) &= \log \left(1 + \varepsilon \frac{1}{y^2} \right) - \log(1 + \varepsilon y^2) \\
 &+ \log \left(1 - \sqrt{-1} \cdot \eta s \lambda \frac{1}{xu} \right) - \log(1 + \sqrt{-1} \cdot \eta s \lambda \cdot xu)
 \end{aligned}$$

wo die beiden letzten Logarithmen dieselbe Form haben wie die beiden ersten. Die Vergleichung mit dem Satze des vor. Art. giebt in Bezug auf jene

$$a = 1 - \eta s \lambda \sin(\mu + \omega); \quad b = -\eta s \lambda \cos(\mu + \omega)$$

und hiemit erhalten wir sogleich

$$L = \bar{f} + \omega + II + p - \text{arc. tg} \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)} - \text{arc. tg} \frac{\eta s \lambda \cos(\mu + \omega)}{1 - \eta s \lambda \sin(\mu + \omega)}$$

Um die Ausdrücke für μ und λ zu erhalten, geben die eben eingeführten Gleichungen durch die Multiplication

$$\lambda^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon \left(y^2 + \frac{1}{y^2} \right) + \varepsilon^2}$$

oder

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega) + \varepsilon^2}}$$

Setzt man aber $\sin B_0 = \sin J_0 \sin(\bar{f} + \omega)$, so dass B_0 die Breite bedeutet, die statt findet, wenn man von den Breitenstörungen absieht, und erinnert sich, dass $\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0$ ist, so giebt der vorstehende Ausdruck

$$\lambda = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos B_0}$$

Dieselben Gleichungen geben auch durch eine einfache Transformation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{u}{y} - \frac{y}{u} \right) &= \varepsilon \left(\frac{1}{y^2} - y^2 \right) \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{u}{y} + \frac{y}{u} \right) &= 2 + \varepsilon \left(\frac{1}{y^2} + y^2 \right) \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\operatorname{tg}(\mu - \bar{f} - \omega) = - \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)}$$

Es wird also

$$\mu = \bar{f} + \omega - \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)}$$

$$(49) \dots L = \mu + \Pi + p - \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{\eta \lambda \cos(\mu + \omega)}{1 - \eta \lambda \sin(\mu + \omega)}$$

Es ist zu bemerken, dass μ den Werth von $L - \Pi - p$ in dem Falle darstellt, wo keine Breitenstörungen statt finden, und dass folglich der Einfluss der Breitenstörungen auf die auf die Ecliptik reducirte Länge durch den Kreisbogen des Ausdrucks (49) streng gegeben ist.

Der eben gefundene Ausdruck für L kann ausdrücklich auf die Breitenstörungen und das Argument der Breite hingeführt werden. Zu dem Ende stelle ich die im vor. Art. eingeführten Gleichungen wie folgt,

$$\frac{1}{\lambda u} = \frac{1}{y} + \varepsilon y; \quad \frac{u}{\lambda} = y + \varepsilon \frac{1}{y}$$

diese geben

$$\frac{1}{\lambda} \left(u + \frac{1}{u} \right) = y + \frac{1}{y} + \varepsilon \left(y + \frac{1}{y} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} \left(u - \frac{1}{u} \right) = y - \frac{1}{y} - \varepsilon \left(y - \frac{1}{y} \right)$$

also wenn man zum Reellen übergeht, und den im vor. Art. gefundenen Ausdruck für λ benutzt,

$$\sin \mu = \frac{\cos J_0}{\cos B_0} \sin (\bar{f} + \omega)$$

$$\cos \mu = \frac{1}{\cos B_0} \cos (\bar{f} + \omega)$$

Durch Hülfe dieser, so wie der Gleichungen

$$\lambda \eta \sin w = \frac{U}{k} \frac{1}{\cos B_0}$$

$$\lambda \eta \cos w = \left(\operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} \right) \frac{1}{\cos B_0}$$

die aus dem Art. 134 folgen, verwandelt man (49) leicht in die folgende.

$$L = \mu + \Pi + \rho$$

$$- \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{s \left(\operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} \right) \sec {}^2 B_0 \cos (\bar{f} + \omega) - s \frac{U}{k} \cos J_0 \sec {}^2 B_0 \sin (\bar{f} + \omega)}{1 - s \left(\sin J_0 + \frac{V}{k} \right) \sec {}^2 B_0 \sin (\bar{f} + \omega) - s \frac{U}{k} \sec {}^2 B_0 \cos (\bar{f} + \omega)} \quad (50)$$

die sich leicht entwickeln lässt und weiter unten angewandt werden soll. Es lassen sich aus den Gleichungen (43) noch mehrere andere sehr merkwürdige Reihen entwickeln, die ich aber hier der Kürze wegen übergehen will.

135.

Aus dem Vorhergehenden haben wir

$$\sin B = \sin B_0 + s$$

und zufolge der Gleichungen (44) ist

$$s = V \sin (\bar{f} + \omega) + U \cos (\bar{f} + \omega)$$

$$U = \sin J \sin (\delta N + \delta K)$$

$$V = \sin J \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0$$

diese Ausdrücke sind jetzt zu entwickeln. Im Vorhergehenden ist schon

$$P = 2 \sin \frac{1}{2} J \sin \delta N$$

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J \cos \delta N$$

eingeführt, setzen wir ausserdem

$$u = \cos \frac{1}{2}J \sin \delta K$$

$$v = \cos \frac{1}{2}J \cos \delta K$$

so wird

$$U = Pv + Qu$$

$$V = Qv - Pu - \sin J_0$$

Die Ausdrücke für P und Q geben

$$\cos^2 \frac{1}{2}J = 1 - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{4}Q^2$$

und da zufolge des Vorhergehenden

$$P = \delta P; \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2}J_0 + \delta Q$$

ist, so wird

$$\cos^2 \frac{1}{2}J = \cos^2 \frac{1}{2}J_0 - \sin \frac{1}{2}J_0 \delta Q - \frac{1}{4}\delta P^2 - \frac{1}{4}\delta Q^2$$

und wenn wir den Cubus der störenden Kraft übergehen,

$$\cos \frac{1}{2}J = \cos \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \delta Q - \frac{\delta P^2}{8 \cos \frac{1}{2}J_0} - \frac{\delta Q^2}{8 \cos^2 \frac{1}{2}J_0}$$

Mit derselben Uebergang geben die Ausdrücke für u und v

$$u = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \delta P + \cos \frac{1}{2}J_0 \delta \delta K + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2}J_0} \delta P \delta Q$$

$$v = \cos \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \delta Q - \frac{\delta P^2}{8 \cos^2 \frac{1}{2}J_0} - \frac{\delta Q^2}{8 \cos^4 \frac{1}{2}J_0}$$

und hiemit

$$U = \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta P + \sin J_0 \delta \delta K - \frac{\sin \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J_0}{\cos^2 \frac{1}{2}J_0} \delta P \delta Q$$

$$V = \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta Q + \frac{\sin \frac{1}{2}J_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2}J_0} \delta P^2 - \frac{3 \sin^2 \frac{1}{2}J_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2}J_0} \delta Q^2$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den Ausdruck für s , so ergibt sich

$$(51) \quad s = \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta Q \sin(\bar{f} + \omega) + \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta P \cos(\bar{f} + \omega)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{4} \delta P^2 - \frac{1}{4} \delta Q^2 \right\} \sin \frac{1}{2}J_0 \sin(\bar{f} + \omega) - \left\{ \delta P \delta Q - 2 \delta \delta K \right\} \sin \frac{1}{2}J_0 \cos(\bar{f} + \omega)$$

wenn man in den Grössen zweiter Ordnung die mit $\sin^2 \frac{1}{2}J_0$ multiplicirten, durchaus unmerklichen. Glieder weglässt.

136.

Bei der weiteren Entwicklung des eben abgeleiteten Ausdrucks für s kann man in den Gliedern zweiter Ordnung ohne Weiteres g statt \bar{f} substituiren, und ich werde sie daher in der folgenden Entwicklung nicht weiter beachten; nur darf nicht vergessen werden sie bei der numerischen Substitution hinzuzufügen, da sie eine Kleinigkeit geben.

Es ist nun bekanntlich

$$\frac{d \cdot r^2}{a^2 dg} = \frac{2re \sin f}{a \sqrt{1-e^2}}; \quad \frac{d \cdot r^2}{a^2 de} = -2 \frac{r}{a} \cos f$$

Und wenn man nochmals differentiirt

$$\frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dg^2} = 2 \frac{e \cos f}{1-e^2} + \frac{2e^2}{1-e^2}; \quad \frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dedg} = 2 \frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}$$

Setzt man daher

$$\frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \cos \bar{f} = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A_c^{(i)} \cos inz$$

$$\frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \sin \bar{f} = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s^{(i)} \sin inz$$

und wie früher

$$\frac{r^2}{a^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_2^{(i)} \cos ig$$

so wird allgemein

$$A_c^{(i)} = -\frac{1-e^2}{4e} i^2 R_2^{(i)} \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J}$$

$$A_s^{(i)} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{4} i \frac{dR_2^{(i)}}{de} \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J}$$

ausgenommen

$$A_c^{(0)} = -\frac{1}{2}e \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \sin(\bar{f} + \omega) = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} \sin(pnz + \omega)$$

$$\frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \cos(\bar{f} + \omega) = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} \cos(pnz + \omega)$$

wo

$$A^{(p)} = A_c^{(p)} + A_s^{(p)}$$

ist, und bezeichnet man ferner irgend zwei correspondirende Glieder von δP und δQ wie folgt,

$$\delta P = \alpha \sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')$$

$$\delta Q = \beta \cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')$$

dann erhält man sogleich

$$s = \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} (\alpha + \beta) \sin(pnz + ig + i'g' + (i'' + 1)\omega + i'''\omega') \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(-p)} (\alpha - \beta) \sin(pnz + ig + i'g' + (i'' - 1)\omega + i'''\omega')$$

Es ist aber

$$\sin(pnz + ig + i'g' + \text{etc.}) = \sin\{(p+i)g + i'g' + \text{etc.}\} \\ + n\delta z \cdot p \cos\{(p+i)g + i'g' + \text{etc.}\} \\ - \frac{1}{2}(n\delta z)^2 \cdot p^2 \sin\{(p+i)g + i'g' + \text{etc.}\} \\ + \text{etc.}$$

Setzt man daher

$$s = S_0 + S_1 ndz + \frac{1}{2} S_2 (ndz)^2 + \dots$$

so gibt eine leichte Substitution

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} (\alpha + \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''+1)\omega + i'''\omega'\} \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(-p)} (\alpha - \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''-1)\omega + i'''\omega'\} \\ S_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} p A^{(p)} (\alpha + \beta) \cos \{(p+i)g + i'g' + (i''+1)\omega + i'''\omega'\} \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{+\infty} p A^{(-p)} (\alpha - \beta) \cos \{(p+i)g + i'g' + (i''-1)\omega + i'''\omega'\} \\ S_2 &= -\sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 A^{(p)} (\alpha + \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''+1)\omega + i'''\omega'\} \\ &\quad - \sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 A^{(-p)} (\alpha - \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''-1)\omega + i'''\omega'\} \end{aligned}$$

u. s. w., die mit dem betreffenden Ausdruck der »*Fundamenta etc.*« übereinstimmen, und deren Anwendung sehr leicht und einfach ist.

137.

Aus den bekannten Werthen der Coefficienten $R_2^{(6)}$ gibt eine leichte Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} A_c^{(0)} &= -\frac{1}{2} e \\ A_c^{(1)} &= \frac{1}{4} - \frac{9}{32} e^2 + \frac{7}{64} e^4 + \dots \\ A_c^{(2)} &= \frac{1}{4} e - \frac{1}{8} e^3 + \frac{3}{32} e^5 + \dots \\ A_c^{(3)} &= \frac{9}{32} e^2 - \frac{7}{64} e^4 + \dots \\ A_c^{(4)} &= \frac{1}{8} e^3 - \frac{3}{64} e^5 + \dots \\ A_c^{(5)} &= \frac{9}{128} e^4 + \dots \\ A_c^{(6)} &= \frac{1}{128} e^5 + \dots \end{aligned} \right\} \times \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2} J}$$

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(1)} &= \frac{1}{4} - \frac{7}{32} e^2 + \frac{7}{64} e^4 + \dots \\ A_s^{(2)} &= \frac{1}{4} e - \frac{7}{32} e^3 + \frac{1}{32} e^5 + \dots \\ A_s^{(3)} &= \frac{9}{32} e^2 - \frac{9}{64} e^4 + \dots \\ A_s^{(4)} &= \frac{1}{8} e^3 - \frac{7}{64} e^5 + \dots \\ A_s^{(5)} &= \frac{9}{128} e^4 + \dots \\ A_s^{(6)} &= \frac{1}{128} e^5 + \dots \end{aligned} \right\} \times \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2} J}$$

und hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} A^{(-4)} &= -\frac{1}{32} e^5 + \dots \\ A^{(-3)} &= -\frac{9}{64} e^4 + \dots \\ A^{(-2)} &= -\frac{1}{24} e^3 + \frac{1}{96} e^5 + \dots \\ A^{(-1)} &= -\frac{1}{16} e^2 + \frac{1}{96} e^4 + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 A^{(0)} = -\frac{1}{4}e \\
 A^{(1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{8}e^4 + \dots \\
 A^{(2)} = \frac{1}{2}e - \frac{5}{8}e^3 + \frac{7}{8}e^5 + \dots \\
 A^{(3)} = -\frac{9}{8}e^2 - \frac{7}{4}e^4 + \dots \\
 A^{(4)} = \frac{3}{8}e^3 - \frac{7}{8}e^5 + \dots \\
 A^{(5)} = \frac{9}{8}e^4 + \dots \\
 A^{(6)} = \frac{9}{8}e^5 + \dots
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} A^{(0)} \\ A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ A^{(4)} \\ A^{(5)} \\ A^{(6)} \end{array}} \right\} \times \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J}$$

138.

Wenden wir uns jetzt zur Entwicklung der Störungen der Reduction der Länge auf die Ecliptik, wobei von der Gleichung (50) ausgegangen werden soll, so können wir wieder die Glieder dritter Ordnung übergehen, und demzufolge

$$k = 2 \cos^2 J_0$$

setzen. Wir dürfen ferner den Nenner des letzten Gliedes in (50) = 1 setzen, denn das grösste Glied, welches daraus entstehen kann, ist mit $s^2 \sin^2 J_0$ multiplicirt, und ganz unmerklich. Wir erhalten daher zuerst

$$L = \mu + II + p - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{\cos^2 B_0} - \frac{sV}{2 \cos^2 J_0} \cos(\bar{f} + \omega) + \frac{sU}{2 \cos J_0} \sin(\bar{f} + \omega)$$

oder wenn wir in die beiden letzten Glieder die Ausdrücke des Art. 135 für U, V, s substituiren und die Excentricität übergehen,

$$L = \mu + II + p - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{\cos^2 B_0} + \frac{1}{4}(\delta P^2 - \delta Q^2) \sin 2(g + \omega) - \frac{1}{4} \delta P \delta Q \cos 2(g + \omega)$$

Der vorletzten Gleichung (44) kann, nachdem der strenge Werth von k darin substituirt worden ist, die folgende Form gegeben werden,

$$\sin(II + \theta + \delta N - \delta K) = \frac{1}{\cos J_0} \frac{\sin(\delta N + \delta K)}{1 + V \frac{\operatorname{tg} J_0}{\cos J_0 + \cos J}}$$

woraus durch eine sehr einfache Entwicklung

$$II = -\theta + \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos J_0} \delta N + \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos J_0} \delta K + \frac{V \sin J_0}{2 \cos^2 J_0} (\delta N + \delta K)$$

folgt. Da aber

$$\operatorname{tg} \delta N = \frac{P}{Q}$$

ist, so wird

$$\delta N = \frac{\delta P}{2 \sin \frac{1}{2} J_0} - \frac{\delta P \delta Q}{4 \sin^2 \frac{1}{2} J_0}$$

substituirt man diesen Ausdruck sowohl wie die obigen Ausdrücke für V und δK , so bekommt man

$$II = -\theta + \frac{\sin \frac{1}{2}J}{2 \cos \frac{1}{2}J} \delta P \delta Q + \frac{2 \cos \frac{1}{2}J}{\cos J} \delta \delta K$$

wo das mit $\delta P \delta Q$ multiplicirte Glied völlig unmerklich ist, weil es auch mit $\sin \frac{1}{2}J$ multiplicirt ist. Setzt man nun

$$\mu = \bar{f} + \omega + R$$

und erwägt, dass

$$\begin{aligned} \omega &= n(y + \alpha - \eta) t + N_0 + K_0 \\ \theta &= n(\alpha + y) t + N_0 - K_0 - \pi' \\ 2 K_0 &= \pi - \pi' \end{aligned}$$

so bekommt man

$$(52) \quad L = \bar{f} + II_0 + p + R - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{1 - \sin^2 J_0 \sin^2(\bar{f} + \omega)} \\ + \frac{1}{4}(\delta P^2 - \delta Q^2) \sin 2(g + \omega) - \frac{1}{2} \delta P \delta Q \cos 2(g + \omega) + \frac{2 \cos \frac{1}{2}J_0}{\cos J_0} \delta \delta K$$

wo

$$\begin{aligned} II_0 &= n(y - 2\eta) t + \pi \\ \operatorname{tg} R &= - \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}J_0 \cos 2(\bar{f} + \omega)} \end{aligned}$$

ist, also II_0 die mittlere siderische Länge des Mondperigäums bedeutet, und R die gewöhnliche Reduction auf die Ecliptik ist.

139.

Indem ich zur numerischen Berechnung übergehe, werde ich zuerst die Glieder zweiter Ordnung des Ausdrucks (54) von s in Zahlen verwandeln. Es werden hiezu nur die grössten Coefficienten in δP und δQ gebraucht, da die übrigen nur Unmerkliches geben können. Somit wird

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}J \delta P^2 &= + 0.026 - 0.026 \cos(4g' + 4\omega') \\ \sin \frac{1}{2}J \delta Q^2 &= + 0.026 + 0.026 \cos(4g' + 4\omega') \\ \sin \frac{1}{2}J \delta P \delta Q &= - 0.026 \sin(4g' + 4\omega') \\ \sin \frac{1}{2}J \delta \delta K &= - 0.028 \sin(2g' + 2\omega') \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \{ \frac{1}{4} \delta P^2 - \frac{1}{4} \delta Q^2 \} \sin \frac{1}{2}J \sin(g + \omega) - \{ \delta P \delta Q - 2 \delta \delta K \} \sin \frac{1}{2}J \cos(g + \omega) \\ = - 0.013 \sin(g + \omega) \\ + 0.028 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\ - 0.028 \sin(g + 2g' + \omega + 2\omega') \\ - 0.026 \sin(g - 4g' + \omega - 4\omega') \end{aligned}$$

folgt.

140.

Die numerischen Werthe der im Art. 137 gegebenen Functionen sind

- $\log A^{(-2)} = 3.503 n$
- $A^{(-2)} = 4.837 n$
- $A^{(-1)} = 6.2735 n$
- $A^{(0)} = 8.43723 n$
- $A^{(1)} = 9.6963433$
- $A^{(2)} = 8.435595$
- $A^{(3)} = 7.22599$
- $A^{(4)} = 6.0390$
- $A^{(5)} = 4.868$
- $A^{(6)} = 3.702$

Daraus sich in Verbindung mit den Werthen von δP und δQ des Art. 109 nach die Ausdrücke des Art. 136 die Werthe von S_0, S_1, S_2 ergeben. Die folgende Tafel giebt um Wiederholung zu vermeiden nur die Coefficienten von S_1 und S_2 , die von S_0 folgen unten.

g, g'	S_1 cos	S_2 sin
$\frac{\omega}{1,2}$	+0,339	
-1,1	+0.206	
0,1	+0.024	
1,1	+25.290	-23,69
2,1	+2.635	-5.27
3,1	+0.240	
-3,0	+0.249	
-2,0	+2.735	+5.39
-1,0	+24.893	+23.91
0,0	-2.443	-11.24
1,0	+72.464	+1.02
2,0	+1.308	-2.45
3,0	-0.040	
-1,-1	-0.204	
0,-1	-0.054	
1,-1	-22.949	+24.97
2,-1	-2.706	+5.43
3,-1	-0.257	
1,-2	-0.254	

$\omega - 2\omega'$		
1, 0	-0.135	
0, -1	-0.062	
1, -1	-9.303	+10.35
2, -1	-1.127	+2.26
3, -1	-0.107	
-2, -2	+0.652	+1.39
-1, -2	+6.176	+7.11
0, -2	+5.078	+11.95
1, -2	+44.491	-521.08
2, -2	+56.064	-111.78
3, -2	+5.361	-15.78
4, -2	+0.475	-1.85
-1, -3	+0.263	
0, -3	+0.372	
1, -3	+16.614	-16.62
2, -3	+2.339	-4.66
3, -3	+0.230	
1, -4	+0.471	
2, -4	+0.079	
$\omega + 2\omega'$		
0, 2	-0.057	
1, 2	+0.915	
2, 2	+0.089	
3ω		
1, 0	-0.137	
$3\omega - 2\omega'$		
2, -2	-0.281	
3, -2	-0.517	
4, -2	-0.063	
1, -4	+0.377	
2, -4	+0.422	
3, -4	+0.616	
4, -4	+0.067	
$-\omega'$		
-1, 0	+0.080	
-2, -1	-0.083	
-1, -1	-0.784	
0, -1	-0.063	
1, -1	-0.497	
2, -1	-0.055	
$2\omega - \omega'$		
1, -1	+0.550	
2, -1	+0.384	
$2\omega - 3\omega'$		
1, -3	-0.162	
2, -3	-0.410	

141.

Nach der Multiplication von S_1 mit $n\delta z$, und S_2 mit $\frac{1}{2}(n\delta z)^2$ ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

g, g'	S_0 sin	$S_1 n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}S_2 (n\delta z)^2$ sin	2. Ordn. sin	s sin	Diff.
ω						
0,2	-0,010	-0,006			-0,016	+7
1,2	+0.303	-0.041			+0.262	+1
2,2	+0.017	-0.008			+0.009	-2
-2,1	-0.011	-0.009			-0.020	+6
-1,1	-0.220	-0.016	+0,003		-0.233	-17
0,1	-0.721	+0.138	+0.010		-0.573	+8
1,1	+23.629	-0.053	+0.002		+23.578	+5
2,1	+1.289	-0.009	-0.001		+1.279	-4
3,1	+0.079	+0.001			+0.080	-2
4,1	+0.005				+0.005	0
-4,0	-0.006				-0.006	+1
-3,0	-0.084	+0.004			-0.080	+1
-2,0	-1.382	+0.052	+0.002		-1.328	-1
-1,0	-25.380	+0.590	+0.003		-24.787	+7
0,0	+16.815	+5.104		-0,013	+21.919	-20
1,0	-2.350	+2.363			0	0
2,0	-1.382	+0.166			-1.216	-13
3,0	-0.097	+0.042			-0.055	+10
4,0	-0.007	+0.004			-0.003	+3
-2,-1	+0.011	+0.010			+0.021	0
-1,-1	+0.193	+0.056	-0.003		+0.246	-4
0,-1	+1.699	+0.163	-0.009		+1.853	-22
1,-1	-24.996	+0.235	-0.002		-24.763	-7
2,-1	-1.429	+0.032	+0.001		-1.396	+4
3,-1	-0.085	+0.002			-0.083	-2
4,-1	-0.005				-0.005	0
0,-2	+0.019	-0.002			+0.017	+4
1,-2	-0.303	-0.033			-0.336	+5
2,-2	-0.016	-0.010			-0.026	-2
$\omega - 2\omega'$						
0,0	+0.007				+0.007	+4
1,0	-0.135	+0.007			-0.128	-8
2,0	-0.007	+0.002			-0.005	+2
-1,-1	-0.023	-0.039			-0.062	-5
0,-1	+0.563	-0.397	-0.002		+0.164	-3
1,-1	-10.343	-0.839	-0.001		-11.183	-6
2,-1	-0.611	-0.176	-0.002		-0.789	+5
3,-1	-0.036	-0.022			-0.058	+2

$\omega - 2\omega'$						
-3,-2	-0.049				-0.049	-1
-2,-2	-0.303				-0.303	-1
-1,-2	-5.494	+0.004			-5.490	+19
0,-2	-44.805	+0.761	-0.048		-44.062	+37
1,-2	+522.336	+0.302	-0.082	+0.028	+522.584	+45
2,-2	+30.376	+0.248	-0.036		+30.588	0
3,-2	+1.883	+0.153	-0.009		+2.027	+2
4,-2	+0.120	+0.020			+0.140	-2
5,-2	+0.008	+0.001			+0.009	0
$\omega - 3\omega'$						
-2,-3	-0.012	+0.005			-0.007	-6
-1,-3	-0.211	+0.040			-0.174	-3
0,-3	-2.188	+0.441	-0.002		-1.779	+3
1,-3	+21.940	+0.868	-0.005		+22.773	-3
2,-3	+1.350	+0.229	-0.005		+1.574	+2
3,-3	+0.076	+0.036			+0.112	+5
$\omega - 4\omega'$						
0,-4	-0.076	+0.022			-0.054	-9
1,-4	+0.708	+0.048			+0.756	+4
2,-4	+0.040	+0.012			+0.052	+1
$\omega + 2\omega'$						
0,3	0.000	-0.002			-0.002	-3
1,3	+0.033	-0.007			+0.026	+31
2,3	-0.001				-0.001	+4
$\omega + 3\omega'$						
-1,2	+0.013	-0.010			+0.003	-
0,2	-0.099	-0.087			-0.186	-3
1,2	+0.806	-0.010		-0.028	+0.768	+29
2,2	+0.045	-0.002			+0.043	+3
1,1	-0.014	+0.006			-0.008	-11
$\omega - 4\omega'$						
0,-4	-0.002	+0.006			+0.004	-
1,-4	-0.008	+0.088		-0.026	+0.054	-44
1,-5	0.000	-0.003			-0.003	-5
3ω						
0,0	+0.008	-0.005			+0.003	-2
1,0	-0.136	-0.001			-0.137	+8
2,0	+0.008	-0.006			+0.002	+3
$3\omega - 2\omega'$						
0,-1	+0.003				+0.003	-2
1,-1	-0.051	-0.004			-0.052	-2
2,-1	-0.045	+0.271			+0.256	-1
3,-1	-0.008	+0.158			+0.150	-1
4,-1	0.000	+0.017			+0.017	-
-1,-2	+0.004	+0.028			+0.029	-2
0,-2	-0.009	+0.288	-0.006		+0.273	-9
1,-2	+0.134	+0.141	-0.036		+0.236	-8
2,-2	-0.998	+0.733	-0.031		-0.296	+27
3,-2	-0.491	+0.403	-0.008		-0.096	+20
4,-2	-0.033	+0.018			-0.045	+1
5,-2	-0.002				-0.002	-

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 437

3ω-2ω'						
0,-3	0,000	+0,010			+0,010	—
1,-3	0.000	+0.013	-0,003		+0.010	-5
2,-3	-0.068	-0.215	-0.003		-0.286	-2
3,-3	-0.047	-0.120	-0.004		-0.168	+1
4,-3	-0.003	-0.019			-0.022	+5
2,-4		-0.014			-0.014	—
3,-4		-0.014			-0.014	—
3ω-4ω'						
1,-3		+0.002			+0.002	+4
2,-3		-0.134	-0.009		-0.143	0
3,-3		-0.094	-0.007		-0.098	+2
4,-3		-0.012			-0.012	+2
0,-4	-0.022	+0.067			+0.045	-2
1,-4	+0.357	+0.047			+0.404	+17
2,-4	+1.156	+4.803	-0.002		+5.957	+4
3,-4	+0.550	+2.902	-0.004		+3.454	+3
4,-4	+0.032	+0.416			+0.448	0
5,-4	+0.002	+0.045			+0.047	-1
1,-5	+0.003	+0.008			+0.011	0
2,-5	+0.042	+0.400	+0.008		+0.450	-2
3,-5	+0.065	+0.306	+0.008		+0.379	-12
4,-5	+0.004	+0.046			+0.050	-4
2,-6		+0.021			+0.021	—
3,-6		+0.019			+0.019	—
5ω-6ω'						
2,-6		+0.005			+0.005	—
3,-6		+0.039	+0.029		+0.068	-5
4,-6		+0.054	+0.035		+0.086	-8
5,-6		+0.020	+0.015		+0.035	-4
6,-6		+0.002			+0.002	—
-ω'						
-1,0	-0.080				-0.080	-10
0,0	+0.004	+0.011			+0.015	-3
1,0	+0.003	+0.004			+0.004	+12
-2,-1	+0.044				+0.044	+4
-1,-1	+0.745	+0.006			+0.751	+10
0,-1	+0.699	+0.122			+0.821	-20
1,-1	-0.536	+0.036			-0.500	-22
2,-1	-0.028	-0.002			-0.030	-6
-1,-2	+0.019				+0.019	-5
0,-2	+0.016	-0.021			-0.005	-7
1,-2	-0.006	-0.002			-0.008	—
2ω-ω'						
0,0	+0.004				+0.004	0
1,0	-0.067	-0.002			-0.069	-3
2,0	-0.004	-0.005			-0.009	0

$2\omega - \omega'$						
0, -1	-0,030	-0,013			-0,043	+5
1, -1	+0,586	-0,009			+0,577	+29
2, -1	+0,215	-0,029			+0,186	+37
3, -1	+0,014	-0,005			+0,009	+8
1, -2	+0,007	+0,002			+0,009	+4
2, -2	+0,017	+0,009			+0,026	-4
$2\omega - 3\omega'$						
2, -2		+0,020			+0,020	+2
0, -3	+0,009	-0,011			-0,002	+9
1, -3	-0,205	-0,019			-0,224	-9
2, -3	-0,254	-0,137			-0,391	-1
3, -3	-0,023	-0,022			-0,045	+7

Die letzte Columne dieser Tafel giebt die Unterschiede der nebenstehenden Breitenstörungen von den in den Mondtafeln angewandten, wie man sieht erreicht keiner derselben 0,05.

In Bezug auf die Vergleichung der zu den Argumenten 0,0; 1,0; 2,0 der Abtheilung ω gehörigen Coefficienten mit denen der Mondtafeln ist zu bemerken, dass dort das Glied $+2,705 \sin(g + \omega)$ enthalten ist, während hier die Constante des Ausdrucks von δQ so bestimmt worden ist, dass der Coefficient von $\sin(g + \omega)$ in s gleich Null wird; welches der Strenge nach statt finden muss. Um die Vergleichung anzustellen, ist zu bemerken, dass mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\sin(\bar{f} + \omega) = -e \sin \omega + \sin(g + \omega) + e \sin(2g + \omega)$$

also

$+2,705 \sin(\bar{f} + \omega) = -0,149 \sin \omega + 2,705 \sin(g + \omega) + 0,149 \sin(2g + \omega)$, ist, die Glieder rechter Hand dieser Gleichung mussten Behufs der Vergleichung entweder dem vorstehenden Werth von s hinzuaddirt, oder von dem der Mondtafeln abgezogen werden.

142.

Setzen wir

$$L = \bar{f} + H_0 + p + R + R'$$

*) In den Mondtafeln pag. 14 steht durch Schreib- oder Druckfehler $+0,038 \sin(-g' + 2\omega - \omega')$, aber in den Tafeln selbst ist $-0,038$ angewandt, wie pag. 43 Tafel XIX nachweist, welches richtig ist.

so wird zufolge der Gleichung (52)

$$R' = \frac{1}{4}(\delta P^2 - \delta Q^2) \sin 2(g + \omega) - \frac{1}{4}\delta P \delta Q \cos 2(g + \omega) + \frac{2 \cos^2 J}{\cos J} \delta \delta K \\ - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{1 - \sin^2 J_0 \sin^2(\bar{f} + \omega)}$$

Nehmen wir blos auf die Evection Rücksicht, so geben die Ausdrücke von δP und δQ

$$\delta P^2 = + 0''.568 - 0''.568 \cos(4g' + 4\omega') \\ \delta Q^2 = + 0.572 + 0.572 \cos(4g' + 4\omega') \\ \delta P \delta Q = - 0.570 \sin(4g' + 4\omega')$$

und nehmen wir von dem Ausdruck von $\delta \delta K$ des Art. 110 nur die beiden grössten Glieder auf, so ergibt sich

$$R' = - 0''.397 \sin 2\omega \\ - 1.198 \sin(2g' + 2\omega') \\ - 0.285 \sin(2g - 4g' + 2\omega - 4\omega')^*) \\ - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{1 - \sin^2 J_0 \sin^2(\bar{f} + \omega)}$$

Die übrigen in den Mondtafeln in R' angegebenen Glieder gehören den Nutationen an, die hier unter dem Zeichen p im Ausdruck für L enthalten sind.

§ 10. Vergleichung der hier berechneten Längenstörungen des Mondes mit denen von Plana und Damoiseau.

143.

Ändert man in den von Plana in seiner »*Théorie de mouv. de la Lune*« und Damoiseau in seinen Mondtafeln angegebenen numerischen Ausdrücken der wahren Länge des Mondes auf der Ecliptik die Bezeichnungen und die Reihenfolge der Argumente in die hier gewählten ab, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung der von den beiden genannten Astronomen erhaltenen Ausdrücke.

*) Der Coefficient dieses Gliedes hat in den Mondtafeln durch Schreibfehler das entgegengesetzte Zeichen bekommen. In meinen alten Papieren steht das richtige Zeichen.

<i>g, g</i>	<i>Plana</i> sin	<i>Damoiseau</i> sin	<i>P - D</i>
1.			
1,0	+22644,63	+22639,70	—
2,0	+769.48	+768.80	+0,68
3,0	+36.72	+36.40	+0.62
4,0	+2.00	+2.10	-0.10
5,0	+0.12	+0.10	+0.02
-3,-1	+0.37	+0.39	-0.02
-2,-1	+7.34	+7.60	-0.26
-1,-1	+114.10	+109.40	+4.70
0,-1	+668.64	+673.00	-4.36
1,-1	+148.06	+148.00	+0.06
2,-1	+9.64	+9.80	-0.16
3,-1	+0.37	+0.50	-0.13
-2,-2	+0.07		+0.07
-1,-2	+1.17	+1.20	-0.03
0,-2	+7.87	+7.20	+0.67
1,-2	+2.43	+2.50	-0.37
2,-2	+0.07		+0.07
-1,-3	+0.02		+0.02
0,-3	+0.16		+0.16
1,-3	+0.02		+0.02
2.			
0,0	-0.49		-0.49
1,0	-2.04	-2.60	+0.59
2,0	-0.07	-0.33	+0.26
-4,-1	-0.44		-0.44
0,-1	-1.40	+0.70	-2.10
1,-1	-28.81	-29.00	+0.19
2,-1	-23.64	-24.60	+0.99
3,-1	-2.88	-3.00	+0.12
4,-1	-0.09	-0.19	+0.10
-2,-2	+0.87	+0.90	-0.03
-1,-2	+12.81	+13.00	-0.19
0,-2	+242.36	+244.90	+0.46
1,-2	+4585.65	+4588.20	-2.55
2,-2	+2370.32	+2369.70	+0.62
3,-2	+192.45	+192.20	-0.05
4,-2	+14.42	+14.40	+0.02
5,-2	+3.34	+4.00	+2.34
-1,-3	+0.33	+0.40	-0.07
0,-3	+7.76	+7.40	+1.34
1,-3	+209.74	+206.70	+3.04
2,-3	+165.85	+165.50	+0.35
3,-3	+14.04	+14.60	-0.56
4,-3	+0.61	+1.00	-0.39

2.			
0,-4	+0.16	+0.11	+0.05
1,-4	+7.53	+7.50	+0.03
2,-4	+7.81	+8.00	-0.19
3,-4	+0.32	+0.60	-0.28
1,-5	+0.11		+0.11
2,-5	+0.13		+0.13
11.			
2,-3	-0.51	-0.40	-0.11
3,-3	-0.92	-0.50	-0.42
4,-3	-0.20		-0.20
1,-4	+0.50	+1.40	-0.90
2,-4	+34.52	+31.00	+3.52
3,-4	+38.00	+38.50	-0.50
4,-4	+14.11	+14.20	+0.09
5,-4	+0.86	+1.90	-1.04
6,-4		+0.40	-0.40
2,-5	+1.20	+3.00	-1.80
3,-5	+3.84	+3.20	+0.64
4,-5	+1.21	+0.90	+0.31
15.			
4,-6		+0.50	-0.50
3.			
2,2	+0.01		+0.01
1,4	-0.16		-0.16
2,4	+0.59		+0.59
3,4	+0.20		+0.20
-1,0	+0.05		+0.05
0,0	+1.08	+1.30	-0.22
1,0	-37.19	-39.40	+2.21
2,0	-41.04	-41.80	+0.76
3,0	-45.20	-45.20	0.00
4,0	-4.09	-4.10	+0.01
5,0	-0.34		-0.34
1,-1	+0.16		+0.16
2,-1	-0.13		-0.13
3,-1	-0.20		-0.20
2,-2	-0.01		-0.01
4.			
0,4	-0.09		-0.09
-1,3	+0.28		+0.28
0,3	-2.33	-2.90	+0.57
1,3	-0.10		-0.10
-2,2	+0.53	+0.50	+0.03
-1,2	+6.15	+6.40	-0.25
0,2	-54.92	-56.50	+1.58
1,2	-0.03	-0.80	+0.77
2,2	+0.18	+0.50	-0.32

4.			
-1,1	-0.12		-0.12
0,1	+1.48	+1.40	+0.08
1,1	+0.04		+0.04
0,0	+0.02		+0.02
5.			
2,2	+0.10		+0.10
12.			
3,-1	+0.19		+0.19
4,-1	+0.03		+0.03
1,-2		+0.40	-0.40
2,-2	-0.94	-0.60	-0.34
3,-2	-9.38	-9.60	+0.22
4,-2	-3.38	-5.60	+2.22
5,-2	-0.63	-1.00	+0.37
3,-3	-0.25		-0.25
4,-3	-0.19	-0.17	-0.02
13.			
2,-3	+0.01		+0.01
1,-4	+0.40	+0.60	-0.20
2,-4	+0.05	-0.60	+0.65
3,-4	-0.04		-0.04
2,-5	-0.03		-0.03
48.			
3,0	+0.44		+0.44
4,0	+0.42	+0.40	+0.02
5,0	+0.09		+0.09
6.			
1,1	-0.04		-0.04
-1,0	+0.17		+0.17
0,0	+0.47	+2.00	-1.53
1,0	+17.22	+17.60	-0.38
2,0	+0.99	+1.20	-0.21
3,0	+0.12		+0.12
-1,-1	-0.80	-1.20	+0.40
0,-1	-18.05	-17.50	-0.55
1,-1	-122.11	-122.10	-0.01
2,-1	-8.24	-8.50	+0.26
3,-1	-0.36	-0.50	+0.14
0,-2	-0.03	-0.40	+0.37
1,-2	-0.38	-0.50	+0.12
2,-2	+0.08		+0.08
1,-3	+0.08		+0.08
7.			
2,-2	+0.19		+0.19
3,-2	+0.04		+0.04

7.			
1, -3	-0'64		-0'64
2, -3	-2.95	-3'00	+0.05
3, -3	+0.89	+0.40	+0.49
4, -3	+0.14		+0.14
3, -4	+0.04		+0.04
8.			
1, 1	+0.74		+0.74
1, 0	-0.02		-0.02
9.			
3, 0	-0.05		-0.05
3, -1	+0.15		+0.15
10.			
1, -3	-0.25		-0.25

esultat dieser Vergleichung lässt Manches zu wünschen übrig. Es
 en eine Anzahl von Unterschieden vor, die Secunden betragen,
 „4 bei der jährlichen Ungleichheit, 2'6 bei der Evection, 2'1 bei
 leinen Coefficienten von 0, -1 in 2., 3'0 bei 1, -3 in 2., 3'5 bei
 in 11., 2'2 bei 1, 0 in 3., u. s. w., der Unterschiede, die Zehntel
 den betragen, nicht zu gedenken.

144.

Um die vorstehenden Ausdrücke mit den hier berechneten Län-
 brungen vergleichen zu können, muss von denselben zuerst die
 ction der Länge auf die Ecliptik abgezogen werden, wodurch die
 e Länge in der Bahn erhalten wird. Hiezu werde ich mich der
 des Art. 131 bedienen, von welcher, da hier die Tausendtheile
 ecunden übergangen werden sollen, nur einige wenige Glieder in
 cht kommen. Bezeichnet man die mit umgekehrten Zeichen ge-
 enene Reduction auf die Ecliptik mit V , so enthält der Ausdruck

$$V = -II + \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sin 2(\bar{f} + \omega) - \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{1}{4} J \sin \frac{1}{2}(\bar{f} + \omega) \\ + \frac{sA}{\cos \frac{1}{2} J} \cos(\bar{f} + \omega + w) - \frac{sA \operatorname{tg} \frac{1}{2} J}{\cos \frac{1}{2} J} \cos(3\bar{f} + 3\omega + w)$$

lieder, die hier in Betracht kommen. Da mit ausreichender Ge-
 zeit

$$A \sin w = \frac{U}{2 \cos \frac{1}{2} J} \\ A \cos w = \operatorname{tg} J + \frac{V}{2 \cos \frac{1}{2} J}$$

geht der vorstehende Ausdruck in den folgenden über,

$$\begin{aligned}
 &= J \sin 2(\bar{f} + \omega) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 J \sin 4(\bar{f} + \omega) \\
 &\quad - \frac{sA \operatorname{tg} J \operatorname{tg}^2 J}{\cos^2 J} \cos 3(\bar{f} + \omega) \\
 &\quad - \frac{sU}{2 \cos^2 J \cos^2 J} \sin(\bar{f} + \omega)
 \end{aligned}$$

$$\dots + \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(p)} \sin(pnz + 2\omega)$$

... mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned}
 B^{(-1)} &= \frac{1}{4} e^3 \\
 B^{(0)} &= \frac{3}{4} e^2 \\
 B^{(1)} &= -2e + \frac{7}{4} e^3 \\
 B^{(2)} &= 1 - \frac{1}{2} e^2 \\
 B^{(3)} &= 2e - \frac{7}{4} e^3 \\
 B^{(4)} &= \frac{1}{4} e^2 \\
 B^{(5)} &= \frac{1}{4} e^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dots \bar{f} + \omega) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(p)} \sin(pg + 2\omega) \\
 &\quad + ndz \sum_{-\infty}^{+\infty} pB^{(p)} \cos(pg + 2\omega) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (ndz)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 B^{(p)} \sin(pg + 2\omega)
 \end{aligned}$$

... was wird

$$\dots = -4e \sin(3g + 4\omega) + \sin(4g + 4\omega) + 4e \sin(5g + 4\omega)$$

... Entwicklungen des Art. 136 können wir sogleich

$$\dots = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} \cos(pg + \omega) - 2ndz \sum pA^{(p)} \sin(pg + \omega)$$

... mit Benutzung der Ausdrücke für U, V und s des Art. 135

... ausreichend genau

$$\begin{aligned}
 \dots \bar{f} + \omega) - sU \sin(\bar{f} + \omega) &= \\
 &= \frac{\cos^2 J}{2 \cos^2 J} (\delta Q^2 - \delta P^2) \sin 2(g + \omega) + \frac{\cos^2 J}{\cos^2 J} \delta P \delta Q \cos 2(g + \omega)
 \end{aligned}$$

... dem Art. 138 mit Beiseitesetzung von θ , welcher Bogen hier in Betracht kommt,

$$II = 2\delta\delta K$$

... und daher schliesslich

$$\begin{aligned}
 V &= (1) + (2) ndz + \frac{1}{2} (3) (ndz)^2 + (4) \\
 &\quad + (5) + (6) ndz + (7)
 \end{aligned}$$

... zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(p)} \sin (pg + 2\omega) \\
&= \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sum_{-\infty}^{+\infty} p B^{(p)} \cos (pg + 2\omega) \\
&= -\operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 B^{(p)} \sin (pg + 2\omega) \\
&= -4e \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sin (3g + 4\omega) + \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sin (4g + 4\omega) + 4e \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sin (5g + 4\omega) \\
&= 2 \frac{s \operatorname{tg} J}{\cos \frac{1}{2} J} \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} \cos (pg + \omega) \\
&= -2 \frac{s \operatorname{tg} J}{\cos \frac{1}{2} J} \sum_{-\infty}^{+\infty} p A^{(p)} \sin (pg + \omega) \\
&= -2s \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \cos (3g + 3\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\delta Q^2 - \delta P^2) \sin (2g + 2\omega) + \frac{1}{2} \delta P \delta Q \cos (2g + 2\omega) - 2 \delta \delta K
\end{aligned}$$

tzf worden ist.

145.

Die numerischen Werthe der B Coefficienten habe ich wie folgt
 iden,

$$\begin{aligned}
\log B^{(-1)} &= 5.140 \\
\text{» } B^{(0)} &= 7.354 \\
\text{» } B^{(1)} &= 9.0394n \\
\text{» } B^{(2)} &= 9.99335 \\
\text{» } B^{(3)} &= 9.0361 \\
\text{» } B^{(4)} &= 7.9909 \\
\text{» } B^{(5)} &= 6.911
\end{aligned}$$

niemit

$$\begin{aligned}
(1) &= +0''01 \sin (-g + 2\omega) \\
&\quad + 0.94 \sin (2\omega) \\
&\quad - 45.62 \sin (g + 2\omega) \\
&\quad + 410.31 \sin (2g + 2\omega) \\
&\quad + 45.28 \sin (3g + 2\omega) \\
&\quad + 4.08 \sin (4g + 2\omega) \\
&\quad + 0.34 \sin (5g + 2\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) &= +0''09 \sin (3g + 4\omega) \\
&\quad - 0.42 \sin (4g + 4\omega) \\
&\quad - 0.09 \sin (5g + 4\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) &= +0''40 \sin 2\omega \\
&\quad + 1.20 \sin (2g' + 2\omega') \\
&\quad + 0.05 \sin (2g + 2g' + 2\omega + 2\omega') \\
&\quad - 0.05 \sin (4g - 2g' + 4\omega - 2\omega') \\
&\quad + 0.29 \sin (2g - 4g' + 2\omega - 4\omega')
\end{aligned}$$

Die übrigen Glieder von V nebst V selbst sind in der folgenden Tafel zusammengestellt.

g, g'	(2) $n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}(3)(n\delta z)^2$ sin	(5) sin	(6) $n\delta z$ sin	V sin
1.					
1,0	+0,17		-1,10	-0,28	-1,21
2,0	+0.02		+1.07	-0.04	+1.05
3,0			+0.12		+0.12
-1,-1			+0.02	+0.04	+0.03
0,-1			-2.17	+0.01	-2.16
1,-1			-0.03	-0.01	-0.04
0,-2			-0.03		-0.03
2.					
1,-1			+0.03	-0.04	+0.02
2,-1			-0.50	-0.04	-0.54
3,-1		-0,03	-0.06	-0.04	-0.10
4,-1		-0.02			-0.02
-1,-2			+0.04	+0.04	+0.02
0,-2			-0.14	-0.04	-0.15
1,-2			-3.29		-3.29
2,-2	+0.16		+23.25	-0.04	+23.40
3,-2	+0.04		+2.66	+0.04	+2.68
4,-2			+0.25		+0.25
1,-3			-0.15		-0.15
2,-3			+1.02	+0.04	+1.06
3,-3		+0.03	+0.13	+0.02	+0.18
4,-3		+0.02			+0.02
2,-4			+0.03		+0.03
11.					
2,-4			+0.04		+0.04
3,-4			+0.26		+0.26
4,-4			+0.17		+0.17
5,-4			+0.03		+0.03
3,-5			+0.02		+0.02
4,-5			+0.02		+0.02
3.					
0,4	+0.04				+0.04
1,4	-0.15		-0.09	-0.04	-0.25
2,4	-1.34		+1.06	-0.04	-0.29
3,4	-0.37		+0.12		-0.25
4,4	-0.05				-0.05
-1,0					+0.04
0,0			-1.17	-0.01	+0.16
1,0		-0.09	+0.92	-0.27	-45.06
2,0		-0.26	+0.05	-0.12	+409.98
3,0		-0.15	-0.05		+45.08
4,0		-0.03			+4.05
5,0					+0.34

www.litao31.com.cn

0,-1	-0,01				-0,01
1,-1	+0.08		+0,14	-0,01	+0.21
2,-1	+1.32		-1.11	-0.01	+0.20
3,-1	+0.44		-0.12		+0.32
4,-1	+0.07				+0.07
2,-2			-0.02		-0.02
4.					
0,4	-0.02		-0.03		-0.05
-1,3	+0.01		-0.01		0.00
0,3	-0.29	+0,02	-1.02	+0.04	-1.25
1,3	-0.44	+0.03	+0.02	+0.01	-0.38
2,3	-0.07				-0.07
-1,2	+0.12		-0.08	+0.01	+0.05
0,2	-3.80		-23.60	-0.01	-26.21
1,2	-9.40		+0.68		-8.72
2,2	-1.48		+0.28		-1.20
3,2	-0.16		+0.02		-0.14
0,1	+0.05	-0.02	+0.50	-0.04	+0.49
1,1	+0.06	-0.03	+0.03	+0.01	+0.07
5.					
1,2	+0.03				+0.03
2,2	-0.16		+0.03		-0.08
3,2	-0.04				-0.04
12.					
3,-1	-0.06	-0.03	+0.01	+0.01	-0.07
4,-1	-0.06	-0.02			-0.08
2,-2	-0.57		+0.01		-0.56
3,-2	+8.64		-0.01		+8.63
4,-2	+5.74				+5.69
5,-2	+1.00				+1.00
6,-2	+0.11				+0.11
2,-3	-0.02				-0.02
3,-3	+0.37	+0.03	-0.01	-0.01	+0.38
4,-3	+0.38	+0.02			+0.40
5,-3	+0.07				+0.07
4,-4	+0.02				+0.02
13.					
0,-4	+0.07	-0.12	+0.03		-0.02
1,-4	+0.07	-0.09	+0.28	-0.26	0.00
2,-4	+0.02	-0.02	+0.15	-0.13	+0.31
3,-4			+0.01	-0.01	0.00
16.					
4,-4	+0.06	+0.10			+0.16
5,-4	+0.08	+0.11			+0.19
6,-4	+0.03	+0.04			+0.07

www.bibliotecapetrarca.it
 demit ergab sich die folgende Tafel, in welcher zur Abkürzung

$$(1) = -\sum_0^\infty iC^{(i)} \cos ig$$

$$(2) = \sum_0^\infty i^2C^{(i)} \sin ig$$

$$(3) = \sum_0^\infty i^3C^{(i)} \cos ig$$

t worden ist.

g, g'	(1) $n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}(2)(n\delta z)^2$ sin	$\frac{1}{6}(3)(n\delta z)^3$ sin	V' sin
1.				
1,0	+0,25	+3,50		+3,75
2,0	+0,04	+1,77		+1,78
3,0	+0,25	+0,25		+0,50
4,0	+0,03	+0,02		+0,05
-3,-1	-0,52			-0,52
-2,-1	-6,53	-0,06		-6,59
-1,-1	-36,57	-0,15		-36,72
0,-1	-10,15	-0,05		-10,20
1,-1	-36,44	+0,14		-36,30
2,-1	-8,63	+0,11		-8,52
3,-1	-0,67	+0,01		-0,66
-2,-2	-0,07			-0,07
-1,-2	-0,44	+0,03		-0,38
0,-2	-0,16	+0,04		-0,15
1,-2	-0,40	-0,03		-0,43
2,-2	-0,15	-0,01		-0,16
2.				
0,0	+0,14			+0,14
1,0	+0,04			+0,04
2,0	+0,14			+0,14
-1,-1	-0,09	-0,12		-0,21
0,-1	+1,64	-0,45		+1,16
1,-1	+1,06	-0,17		+0,89
2,-1	+1,58	+0,40		+1,98
3,-1	+1,36	+0,29		+1,65
4,-1	+0,17	+0,07		+0,24
-2,-2	-0,98			-0,98
-1,-2	-15,14	-0,02		-15,13
0,-2	-253,17	-0,05	+0,02	-253,20
1,-2	-115,66	-0,03	+0,02	-115,67
2,-2	-248,32	+0,04	+0,02	-248,26
3,-2	-134,65	+0,05	+0,02	-134,58
4,-2	-12,56	+0,01		-12,55
5,-2	-1,00			-1,00

18.					
2,0	+0,02				+0,02
3,0	-0,17				-0,08
4,0	-0,02				-0,44
5,0					-0,09
6.					
0,-1			+0,06		+0,06
1,-1			+0,04		+0,04
2,-1			-0,02		-0,02
7.					
2,-3			-0,04		-0,04
3,-3			-0,02		-0,02
8.					
0,1			+0,02		+0,02
1,1	+0,24		-0,04		+0,20
2,1	+0,06		-0,03		+0,03
9.					
2,-1	-0,02		+0,03		+0,01
3,-1	-0,24				-0,24
4,-1	-0,04				-0,04
10.					
0,-3			-0,04		-0,04
1,-3			-0,02		-0,02

146.

Hierauf ist der Unterschied zwischen den Störungen der wahren Länge in der Bahn (oder vielmehr der wahren Anomalie) und der mittleren Anomalie in Betracht zu ziehen. Bezeichnen wir die Function, die zu jenen addirt werden muss um diese zu ermitteln mit V' , und die Mittelpunktsgleichung mit $\sum_0^\infty C^{(i)} \sin ig$, so ist leicht einzusehen, dass

$$V' = -ndz \sum_0^\infty i C^{(i)} \cos ig + \frac{1}{2} (ndz)^2 \sum_0^\infty i^2 C^{(i)} \sin ig + \frac{1}{6} (ndz)^3 \sum_0^\infty i^3 C^{(i)} \cos ig$$

wird. Aus den Mondtafeln folgt

$$C^{(1)} = 22642,67$$

$$C^{(2)} = 776,48$$

$$C^{(3)} = 36,92$$

$$C^{(4)} = 2,01$$

$$C^{(5)} = 0,12$$

$$C^{(6)} = 0,01$$

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 449

hiermit ergab sich die folgende Tafel, in welcher zur Abkürzung

$$(1) = -\sum_0^{\infty} i C^{(i)} \cos ig$$

$$(2) = \sum_0^{\infty} i^2 C^{(i)} \sin ig$$

$$(3) = \sum_0^{\infty} i^3 C^{(i)} \cos ig$$

t worden ist.

g, g'	(1) ndz sin	$\frac{1}{2}(2) (ndz)^2$ sin	$\frac{1}{6}(3) (ndz)^3$ sin	V' sin
1.				
1,0	+0,25	+3,50		+3,75
2,0	+0,01	+1,77		+1,78
3,0	+0,25	+0,25		+0,50
4,0	+0,03	+0,02		+0,05
-3,-1	-0,52			-0,52
-2,-1	-6,53	-0,06		-6,59
-1,-1	-36,57	-0,15		-36,72
0,-1	-10,15	-0,05		-10,20
1,-1	-36,44	+0,14		-36,30
2,-1	-8,63	+0,11		-8,52
3,-1	-0,67	+0,01		-0,66
-2,-2	-0,07			-0,07
-1,-2	-0,44	+0,03		-0,38
0,-2	-0,16	+0,01		-0,15
1,-2	-0,40	-0,03		-0,43
2,-2	-0,15	-0,01		-0,16
2.				
0,0	+0,14			+0,14
1,0	+0,01			+0,01
2,0	+0,14			+0,14
-1,-1	-0,09	-0,12		-0,21
0,-1	+1,61	-0,45		+1,16
1,-1	+1,06	-0,17		+0,89
2,-1	+1,58	+0,40		+1,98
3,-1	+1,36	+0,29		+1,65
4,-1	+0,17	+0,07		+0,24
-2,-2	-0,98			-0,98
-1,-2	-15,11	-0,02		-15,13
0,-2	-253,17	-0,05	+0,02	-253,20
1,-2	-115,66	-0,03	+0,02	-115,67
2,-2	-248,32	+0,04	+0,02	-248,26
3,-2	-134,65	+0,05	+0,02	-134,58
4,-2	-12,56	+0,01		-12,55
5,-2	-1,00			-1,00

2.				
-1,-3	-0.66	+0.02		-0.64
0,-3	-11.45	+0.44		-11.01
1,-3	-8.40	+0.29		-8.11
2,-3	-11.14	-0.37		-11.51
3,-3	-9.27	-0.34		-9.58
4,-3	-0.91	-0.08		-0.99
5,-3	-0.07			-0.07
0,-4	-0.42	+0.02		-0.40
1,-4	-0.42	+0.02		-0.40
2,-4	-0.41	-0.02		-0.43
3,-4	-0.46	-0.02		-0.48
4,-4	-0.05			-0.05
1,-5	-0.02			-0.02
2,-5	-0.01			-0.01
3,-5	-0.02			-0.02
11.				
1,-3	+0.02	-0.02		0.00
2,-3	+0.03	-0.03		0.00
3,-3	+0.03	+0.04		+0.04
4,-3	+0.03	+0.03		+0.06
5,-3	+0.01	+0.04		+0.02
0,-4	-0.17	+0.17		0.00
1,-4	-1.78	+1.48		-0.30
2,-4	-2.05	+1.35		-0.70
3,-4	-2.24	-0.97		-3.21
4,-4	-2.11	-1.43		-3.54
5,-4	-0.73	-0.53		-1.26
6,-4	-0.09	-0.09		-0.18
1,-5	-0.17	+0.14		-0.03
2,-5	-0.23	+0.16		-0.07
3,-5	-0.23	-0.07		-0.30
4,-5	-0.24	-0.17		-0.41
5,-5	-0.10	-0.07		-0.17
2,-6	-0.02	-0.04		-0.03
3,-6	-0.02	-0.04		-0.03
4,-6	-0.02	-0.04		-0.03
5,-6	-0.04			-0.04
15.				
2,-6	-0.02	+0.02		0.00
3,-6	-0.03	+0.03		0.00
4,-6	-0.04			-0.04
5,-6	-0.03	-0.03		-0.06
6,-6	-0.02	-0.02		-0.04
3.				
0,1	+0.02			+0.02
1,1	-0.04			-0.04
2,1	+0.02			+0.02
3,1	-0.04			-0.04

3.				
0,0	+4.64	-0.05		+4.59
1,0	-0.56	-0.03		-0.59
2,0	+4.64	+0.05		+4.69
3,0	+0.08	+0.03		+0.11
0,-1	-0.02			-0.02
1,-1	-0.01			-0.01
2,-1	-0.02			-0.02
3,-1	-0.01			-0.01
4.				
-2,3	-0.02			-0.02
-1,3	+0.19	+0.01		+0.20
0,3	-0.03			-0.03
1,3	+0.19	-0.01		+0.18
-3,2	-0.03			-0.03
-2,2	-0.29	+0.02		-0.27
-1,2	+4.49	+0.05		+4.54
0,2	-0.34	-0.02		-0.36
1,2	+4.44	-0.05		+4.39
2,2	+0.57			+0.57
-1,1	-0.11			-0.11
0,1	+0.01			+0.01
1,1	-0.11			-0.11
12.				
1,-2	+0.06	-0.05		+0.01
2,-2	+0.03	-0.02		+0.01
3,-2	+0.06	+0.05		+0.11
4,-2	+0.03	+0.02		+0.05
13.				
0,-4	-0.01	+0.05		+0.04
1,-4	-0.01	+0.02		+0.01
2,-4	-0.01	-0.05		-0.06
3,-4	-0.01	-0.02		-0.03
6.				
-1,0	-0.07			-0.07
0,0	-0.96			-0.96
1,0	-0.01			-0.01
2,0	-0.96			-0.96
3,0	-0.08			-0.08
-1,-1	+4.10	+0.07		+4.17
0,-1	+6.69	+0.05		+6.74
1,-1	+0.73	-0.07		+0.66
2,-1	+6.70	-0.05		+6.65
3,-1	+0.55			+0.55
0,-2	+0.03			+0.03
1,-2	0.00			0.00
2,-2	+0.03			+0.03

7.				
1,-2	-0.04			-0.04
2,-2	-0.04			-0.04
3,-2	-0.04			-0.04
4,-2	-0.04			-0.04
0,-3	+0.07			+0.07
1,-3	+0.17	-0.07		+0.10
2,-3	+0.03	-0.04		-0.04
3,-3	+0.17	+0.07		+0.24
4,-3	-0.02	+0.04		+0.02
8.				
0,1	-0.04			-0.04
1,1	0.00			0.00
2,1	-0.04			-0.04
10.				
0,-3	+0.02			+0.02
1,-3	0.00			0.00
2,-3	+0.02			+0.02

147.

Addirt man nun die Summen der vorstehenden Werthe von V' zu den im Art. 143 angegebenen Ausdrücken der auf die Eclipducirten Mondlänge, nachdem davon der elliptische Theil der punktsgleichung abgezogen worden ist, so erhält man die darauf vorgehenden Störungen der mittleren Anomalie des Mondes, die man in dieser Abhandlung berechnet unmittelbar vergleichen kann. Man reicht aus, den einen der beiden Ausdrücke des Art. 143 durch V' zu reduciren, da die dort gegebenen Unterschiede alsdann unmittelbar zur Vergleichung des andern angewandt werden können. Es ergiebt sich auf diese Art die folgende Zusammenstellung.

g, g'	$V+V'$ sin	Plana $n\delta z$ sin	$H-P$	$H-D$
4.				
1,0	+2.54	+1.50	—	—
2,0	+2.83	-4.17	-0.43	+0.25
3,0	+0.62	+0.42	-0.60	+0.02
4,0	+0.05	+0.04	-0.05	-0.15
-3,-1	-0.52	-0.15	+0.18	+0.16
-2,-1	-6.59	+0.75	+0.35	+0.09
-1,-1	-36.69	+74.44	-1.18	+0.52
0,-1	-12.36	+656.28	+1.19	-3.17
1,-1	-36.34	+111.72	-0.04	+0.02
2,-1	-8.52	+1.12	+0.10	-0.06
3,-1	-0.66	-0.29	+0.55	+0.42

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 453

1.				
-2,-2	-0,07	0,00	0,00	+0,07
-1,-2	-0.38	+0.79	+0.01	-0.02
0,-2	-0.18	+7.69	-0.37	+0.30
1,-2	-0.43	+1.70	+0.46	+0.09
2,-2	-0.16	-0.09	+0.13	+0.20
-1,-3		+0.02	-0.01	+0.01
0,-3		+0.16	-0.08	+0.08
1,-3		+0.02	+0.02	+0.04
2.				
0,0	+0.14	-0.05	-0.04	-0.23
1,0	+0.01	-2.00	-0.52	+0.07
2,0	+0.14	+0.07	-0.12	+0.14
-1,-1	-0.21	-0.35	+0.31	+0.17
0,-1	+1.16	-0.24	+3.91	+1.81
1,-1	+0.91	-27.90	+0.28	+0.47
2,-1	+1.44	-22.17	-0.84	+0.15
3,-1	+1.55	-1.33	-0.01	+0.11
4,-1	+0.22	+0.13	-0.20	-0.10
-2,-2	-0.98	-0.11	+0.08	+0.05
-1,-2	-15.13	-2.32	+0.43	+0.24
0,-2	-253.35	-40.99	-0.66	-0.20
1,-2	-118.96	+4466.69	+0.30	-2.25
2,-2	-224.86	+2145.46	-0.46	+0.16
3,-2	-131.90	+60.25	-0.23	-0.28
4,-2	-12.30	+1.82	+0.26	+0.28
5,-2	-1.00	+2.31	-2.23	+0.08
-1,-3	-0.64	-0.31	+0.23	+0.16
0,-3	-11.01	-3.25	+0.90	-0.44
1,-3	-8.26	+201.48	-3.38	-0.34
2,-3	-10.45	+155.40	-0.35	0.00
3,-3	-9.40	+4.64	+0.53	-0.03
4,-3	-0.97	-0.36	+0.56	+0.17
5,-3	-0.07	-0.07	+0.08	+0.08
0,-4	-0.40	-0.24	+0.13	+0.18
1,-4	-0.40	+7.13	-0.10	-0.07
2,-4	-0.40	+7.41	+0.33	+0.14
3,-4	-0.48	-0.16	+0.45	+0.17
4,-4	-0.05	-0.05	+0.06	+0.06
1,-5	-0.02	+0.09	+0.15	+0.26
2,-5	-0.01	+0.12	+0.21	+0.34
3,-5	-0.02	-0.02	+0.03	+0.03
11.				
2,-2			-0.03	-0.03
3,-2			-0.02	-0.02
1,-3			+0.04	+0.04
2,-3		-0.51	+0.16	+0.05
3,-3	+0.04	-0.88	+0.27	-0.15
4,-3	+0.06	-0.14	-0.10	-0.30
5,-3	+0.02	+0.02	-0.04	-0.04

<u>11.</u>				
0,-4			-0.03	-0.03
1,-4	-0.30	+0.20	+0.69	-0.21
2,-4	-0.69	+33.83	-3.79	-0.27
3,-4	-2.95	+35.05	+0.67	+0.17
4,-4	-3.37	+11.04	-0.36	-0.15
5,-4	-1.23	-0.37	+1.15	+0.11
6,-4	-0.18	-0.18	+0.23	-0.17
<hr/>				
1,-5	-0.03	-0.03	+0.08	+0.08
2,-5	-0.07	+1.13	+1.54	-0.26
3,-5	-0.28	+3.56	+0.58	+1.22
4,-5	-0.39	+0.82	+0.69	+1.00
5,-5	-0.17	-0.17	+0.29	+0.29
<hr/>				
2,-6	-0.03	-0.03	+0.18	+0.18
3,-6	-0.03	-0.03	+0.33	+0.33
4,-6	-0.03	-0.03	+0.16	+0.16
5,-6	-0.04	-0.04	+0.02	+0.02
<hr/>				
3,-7			+0.02	+0.02
4,-7			+0.01	+0.01
<hr/>				
<u>15.</u>				
4,-5			-0.04	-0.04
5,-5			-0.04	-0.04
<hr/>				
2,-6			+0.01	+0.01
3,-6			+0.29	+0.29
4,-6	-0.04	-0.04	+0.58	+0.08
5,-6	-0.06	-0.06	+0.39	+0.39
6,-6	-0.04	-0.04	+0.12	+0.12
<hr/>				
3,-7			+0.04	+0.04
4,-7			+0.09	+0.09
5,-7			+0.06	+0.06
6,-7			+0.02	+0.02
<hr/>				
<u>3.</u>				
0,1	+0.03	+0.03	+0.02	+0.02
1,1	-0.26	-0.42	+0.07	-0.09
2,1	-0.27	+0.32	-0.19	+0.40
3,1	-0.26	-0.06	+0.06	+0.26
<hr/>				
-1,0	+0.04	+0.06	+0.04	+0.06
0,0	+4.75	+5.83	+0.17	-0.05
1,0	-45.65	-82.84	-2.07	+0.14
2,0	+444.67	+3.63	+0.66	+1.42
3,0	+45.19	-0.01	+0.10	+0.10
4,0	+4.05	-0.04	+0.04	+0.05
5,0	+0.34	0.00	0.00	-0.34
<hr/>				
0,-1	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04
1,-1	+0.20	+0.36	-0.08	+0.08
2,-1	+0.18	+0.05	+0.07	-0.06
3,-1	+0.31	+0.11	-0.11	-0.31

www.libtool.com.cn

4.				
0,4	-0,05	-0,14	+0,14	+0,05
-2,3	-0.02	-0.02	+0.03	+0.03
-1,3	+0.20	+0.48	+0.06	+0.34
0,3	-1.28	-3.61	+0.16	+0.73
1,3	-0.20	-0.30	+0.13	+0.03
2,3	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07
-3,2	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03
-2,2	-0.27	+0.26	-0.10	-0.07
-1,2	+4.59	+10.74	+0.25	0.00
0,2	-26.57	-81.49	-0.12	+1.46
1,2	-4.33	-4.36	-0.34	+0.43
2,2	-0.63	-0.45	+0.38	+0.06
3,2	-0.14	-0.14	+0.14	+0.14
-1,1	-0.11	-0.23	+0.04	-0.08
0,1	+0.50	+1.98	+0.03	+0.11
1,1	-0.04	0.00	-0.05	-0.01
0,0		+0.02	-0.02	0.00
5.				
1,2	+0.03	+0.03	-0.04	-0.04
2,2	-0.08	+0.02	-0.02	+0.08
12.				
3,-1	-0.07	+0.12	-0.11	+0.08
4,-1	-0.08	-0.05	+0.05	+0.08
1,-2	+0.01	+0.01	+0.01	-0.39
2,-2	-0.55	-1.49	+0.40	+0.06
3,-2	+8.74	-0.64	+0.04	+0.26
4,-2	+5.74	+2.36	-2.35	-0.13
5,-2	+1.00	+0.37	-0.37	0.00
6,-2	+0.11	+0.11	-0.11	-0.11
2,-3	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
3,-3	+0.38	+0.13	-0.17	-0.42
4,-3	+0.40	+0.21	-0.21	-0.23
5,-3	+0.07	+0.07	-0.07	-0.07
13.				
1,-3			-0.03	-0.03
2,-3		+0.01	-0.02	-0.01
0,-4	+0.02	+0.02	+0.01	+0.01
1,-4	+0.01	+0.41	-0.22	-0.42
2,-4	+0.25	+0.30	-0.06	+0.59
3,-4	-0.03	-0.07	+0.01	-0.03
1,-5			-0.03	-0.03
2,-5		-0.03	+0.06	+0.03
3,-5			-0.01	-0.01
16.				
3,-4			-0.01	-0.01
4,-4	+0.16	+0.16	-0.18	-0.18
5,-4	+0.19	+0.19	-0.20	-0.20
6,-4	+0.07	+0.07	-0.07	-0.07

<u>18.</u>				
2,0	+0.02	+0.02	-0.02	-0.02
3,0	-0.08	+0.06	-0.06	+0.08
4,0	-0.44	-0.02	+0.02	+0.04
5,0	-0.09	0.00	0.00	+0.09
<u>6.</u>				
0,1			+0.04	+0.04
1,1		-0.04	-0.02	-0.06
-1,0	-0.07	+0.10	+0.18	+0.35
0,0	-0.96	-0.49	+1.05	-0.48
1,0	-0.04	+17.21	+0.28	-0.10
2,0	-0.96	+0.03	+0.23	+0.02
3,0	-0.08	+0.04	-0.04	+0.08
-1,-1	+1.17	+0.37	-0.93	-0.53
0,-1	+6.80	-11.25	-0.44	-0.99
1,-1	+0.70	+121.41	+0.04	+0.03
2,-1	+6.63	-1.64	0.00	+0.26
3,-1	+0.55	+0.19	-0.23	-0.09
-1,-2			-0.04	-0.04
0,-2	+0.03	0.00	-0.13	+0.24
1,-2		-0.38	-0.17	-0.05
2,-2	+0.03	+0.11	-0.19	-0.11
1,-3		+0.08	-0.04	+0.04
<u>7.</u>				
1,-2	-0.04	-0.04	-0.03	-0.03
2,-2	-0.04	+0.18	+0.09	+0.28
3,-2	-0.01	0.00	+0.12	+0.13
4,-2	-0.04	-0.04	+0.02	+0.02
0,-3	+0.07	+0.07	-0.05	-0.05
1,-3	+0.10	-0.54	-0.58	-1.22
2,-3	-0.02	-2.97	-0.15	-0.10
3,-3	+0.22	+1.11	-0.48	+0.04
4,-3	+0.02	+0.16	-0.14	0.00
1,-4			-0.08	-0.08
2,-4			-0.23	-0.23
3,-4		+0.04	+0.07	+0.08
4,-4			+0.01	+0.04
<u>14.</u>				
3,-5			-0.05	-0.05
<u>8.</u>				
0,1	-0.02	-0.02	+0.10	+0.10
1,1	+0.20	+0.94	-0.18	+0.56
1,0		-0.02	+0.10	+0.08

9.				
2,-4	+0,04	+0,04	-0,02	-0,02
3,-4	-0,24	-0,09	+0,10	+0,25
4,-4	-0,04	-0,04	+0,04	+0,04
<hr/>				
10.				
1,-3	-0,02	-0,27	-0,03	-0,28

Betrachtet man nun diese Unterschiede, und ordnet sie nach der Größe ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, da die Wirkung eines jeden derselben auf die Mondörter sowohl positiv wie negativ ist, so ergeben sich, wenn man zuerst nur bis 0,8 hinunter geht, die folgenden Unterschiede mit meinen Coefficienten,

bei <i>Plana</i>	bei <i>Damoiseau</i>
3,91	3,17
3,79	2,25
3,38	1,84
2,35	1,46
2,23	1,42
2,07	1,22
1,54	1,22
1,19	1,00
1,18	0,99
1,15	(Anzahl = 9)
1,05	
0,93	
0,90	
0,84	

(Anzahl = 14)

Insßerdem finden sich

bei <i>Plana</i>	bei <i>Damoiseau</i>
13 Unterschiede;	5 Unterschiede zwischen 0,8 und 0,5
19 „ „	17 „ „ „ 0,5 „ 0,3
56 „ „	58 „ „ „ 0,3 „ 0,1
85 „ „	98 „ „ „ < 0,1

Sortiert man alle Unterschiede der vorstehenden Tafel ohne Rücksicht auf die Zeichen, da jeder beides positiv und negativ einwirkt, so ist die Summe davon bei *Plana* = 55"; bei *Damoiseau* = 39"

Es kann daher von einer für die Anwendung ausreichend genauen Uebereinstimmung der von den beiden genannten Astronomen gegebenen Mondstörungen mit den meinigen keine Rede sein, die Unterschiede zwischen ihnen und mir sind vielmehr so erheblich, dass die Vergleichen jener Störungen mit den Beobachtungen wesentlich minder gut ausfallen muss, wie die Vergleichung der von mir berechneten. Auf ein gegenseitiges Aufheben dieser Unterschiede in den daraus sich ergebenden Mondörtern darf man nicht rechnen, da die Unterschiede einer jeden der im Vorhergehenden gebildeten Abtheilungen der Störungen häufig zugleich in ihrem Maximum eintreten. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass die Unterschiede zwischen Damoiseau und mir im Ganzen geringer sind, wie die zwischen Plana und mir.

148.

Für die Vergleichung der von Plana und Damoiseau aus der Theorie erhaltenen Bewegungen der Absiden- und der Knotenlinie mit den Beobachtungen nehme ich das Resultat auf, welches ich schon in Schum. Astr. Nachr. B. XIX p. 193 veröffentlicht habe, und ändere dasselbe nur, in so weit die in meinen Mondtafeln angegebenen Bewegungen es erfordern.

Für die jährliche Bewegung des Perigäums ergibt sich

$$\begin{aligned} \textit{Plana} - \textit{Beob.} &= -246'' \\ \textit{Dam.} - \textit{Beob.} &= +17.6 \end{aligned}$$

und für die der Knoten

$$\begin{aligned} \textit{Plana} - \textit{Beob.} &= -11''8 \\ \textit{Dam.} - \textit{Beob.} &= -4.8 \end{aligned}$$

Hier stimmen wieder Damoiseau's Resultate besser mit den Beobachtungen überein wie Plana's. Es muss indess dabei bemerkt werden, dass Damoiseau zu wenige Decimalen in seinem Ausdruck angegeben hat, um die Secunde zu verbürgen. Eine Einheit Aenderung in der letzten Stelle des von Damoiseau gegebenen numerischen Resultats würde in der jährlichen Bewegung der Absidenlinie 17",4 und in der der Knotenlinie 1",7 Aenderung hervorbringen.

Die von den beiden genannten Astronomen berechneten Breitenstörungen habe ich mit den meinigen nicht im Einzelnen verglichen, wohl aber auch da nicht unerhebliche Unterschiede bemerkt.

§ 11. Vorläufige Berechnung der durch die Figur der Erde in der
Mondbewegung verursachten Störungen.

Berechnung der Trägheitsmomente des Erdkörpers.

449.

In dem ersten Abschnitt der »*Fundamenta etc.*« habe ich ausführlich gezeigt, dass die Störungen, die von der Figur der in Betracht kommenden Körper bewirkt werden, von drei, auf alle massenhaltigen Theile dieser Körper auszudehnenden, Integralen abhängen, die dort mit $\iint V dM dm$; $\iint v dmdm'$; $\iint U dM dm'$ bezeichnet worden sind. Von diesen sind die Werthe der beiden letzten weit kleiner wie der Werth des ersten, und können nichts Merkliches geben. Wir werden uns daher hier nur mit dem ersten beschäftigen.

Bezeichnet man den Zuwachs, den die Störungsfuction dadurch bekommt, mit $\delta\Omega$, so wird

$$\delta\Omega = \frac{1}{Mm} \iint V dM dm$$

und es bedeuten hier M die Erd- und m die Mondmasse. Es ist ferner a. a. O. gezeigt worden, dass das doppelte Integral der vorstehenden Gleichung in zwei einfache zerlegt werden kann, von welchen das eine auf den Erdkörper und das andere auf den Mondkörper ausgedehnt werden muss. Es wird nach dieser Zerlegung

$$\begin{aligned} \delta\Omega &= \frac{3}{2Mr^3} \int \{x^2 X^2 + y^2 Y^2 + z^2 Z^2\} dM - \frac{1}{2Mr^3} \int \{X^2 + Y^2 + Z^2\} dM \\ &+ \frac{3}{2mr^3} \int \{x_1^2 \xi^2 + y_1^2 \eta^2 + z_1^2 \zeta^2\} dm - \frac{1}{2mr^3} \int \{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\} dm \end{aligned}$$

und es bedeuten hier r die Entfernung des Schwerpunkts der Erde von dem des Mondes, X, Y, Z die rechtwinklichen, den Hauptachsen der Erde parallelen, Coordinaten irgend eines Punkts der Erdmasse, ξ, η, ζ die rechtwinklichen, den Hauptachsen des Mondes parallelen, Coordinaten irgend eines Punkts der Mondmasse, x, y, z die bez. den X, Y, Z parallelen Coordinaten des Schwerpunkts des Mondes, die gleichwie X, Y, Z ihren Anfangspunkt im Schwerpunkt der Erde haben, und x_1, y_1, z_1 die bez. den ξ, η, ζ parallelen Coordinaten des Schwerpunkts der Erde, die gleichwie ξ, η, ζ ihren Anfangspunkt im Schwerpunkt des Mondes haben.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Wirkung der Figur der Erde, und setzen dem zufolge, während wir zugleich $M = 1$ machen,

$$\delta\Omega = \frac{3}{2r^2} \int \{x^2 \Xi^2 + y^2 \Upsilon^2 + z^2 Z^2\} dM - \frac{1}{2r^2} \int \{\Xi^2 + \Upsilon^2 + Z^2\} dM$$

Nehmen wir an, dass die Achse der Z mit der Rotationsachse der Erde zusammen fällt, und folglich die Achsen der Υ und Ξ im Aequator liegen. Seien die auf diese Achsen sich beziehenden Trägheitsmomente der Erde bez. C, B, A , dann wird

$$\int \Xi^2 dM = \frac{1}{2}(B+C-A); \quad \int \Upsilon^2 dM = \frac{1}{2}(C+A-B); \quad \int Z^2 dM = \frac{1}{2}(A+B-C)$$

und wenn wir ausserdem

$$B = C - II; \quad A = C - A$$

setzen.

$$\delta\Omega = \frac{3}{2r^2} (x^2 A + y^2 II) - \frac{1}{2r^2} (A + II)$$

und hängt also nur von den Unterschieden der Trägheitsmomente ab.

Sei δ die Declination des Mondes in Bezug auf die bewegliche Ebene des Erdäquators, und w der Winkel, den eine durch die Achse der Z und den Radius Vector r gelegte Ebene mit der Achse der Ξ macht, dann wird

$$x = r \cos \delta \cos w$$

$$y = r \cos \delta \sin w$$

und

$$\delta\Omega = \frac{3}{4r^2} (A + II) (\frac{1}{2} - \sin^2 \delta) + \frac{3}{4r^2} (A - II) \cos^2 \delta \cos 2w$$

Der Winkel w durchläuft den Umkreis in nahe 25^h Sternzeit, und schon aus diesem Grunde kann das zweite Glied dieses Ausdrucks von $\delta\Omega$ nichts Merkliches geben, es wird überdies aus dem Grunde sehr klein, dass wenn für die Erde A und II in der That von einander verschieden sein sollten, ihr Unterschied sehr klein sein muss. Wir dürfen daher hier $A = II$ setzen, welches darauf hinaus kommt, die Erde in allen ihren Schichten als ein Revolutionssphäroid zu betrachten. Hiemit wird schliesslich

$$\delta\Omega = \frac{3A}{2r^2} (\frac{1}{2} - \sin^2 \delta)$$

Da wir hier in diesen Grössen nur die erste Potenz der störenden Kraft der Sonne zu berücksichtigen brauchen, um in δP und δQ die grössten der vom Product dieser störenden Kraft mit der von der Figur der Erde bewirkten Kraft abhängigen Glieder zu bekommen, und mit blosser Rücksicht darauf der Ausdruck von α erhalten wird, wenn man den obigen Ausdruck von B_0 mit $2 \sin \frac{1}{2} J$ dividirt, so wird hier

$$\alpha = u^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{1}{2} J \right)$$

und hiemit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{dB_0}{dQ} \right) &= \alpha (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \\ \left(\frac{dC_0}{dP} \right) - F \left(\frac{dC_0}{dK} \right) &= -\alpha \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke sowohl wie die früher vorgekommenen

$$P = \delta P, \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + \delta Q$$

in die obigen Differentialgleichungen, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} &= 2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 + B_0 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cdot \alpha \delta Q \\ \frac{dQ}{ndt} &= C_0 \end{aligned}$$

bei deren Integration zum jetzt zu verfolgenden Zweck keine kleineren Divisoren vorkommen können, wie die, welche die Beschaffenheit der Aufgabe unausweichlich mit sich bringt.

Für B_0 und C_0 findet man durch die Relationen des § 4. leicht die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} B_0 &= -a \left(\frac{d\delta\Omega}{dJ} \right) \cos \frac{1}{2} J \\ C_0 &= a \left(\frac{d\delta\Omega}{dN} \right) \frac{\cos \frac{1}{2} J}{2 \sin \frac{1}{2} J} - \frac{1}{2} a \left(\frac{d\delta\Omega}{dK} \right) \sin \frac{1}{2} J \end{aligned}$$

die auch schon in den »*Fundamenta etc.*« vorkommen.

154.

Um die Differentiationen der Störungsfunction $\delta\Omega$ nach N und K ausführen zu können, muss Θ in Function von N und K dargestellt werden. Bezeichnen wir die allgemeine Präcession mit npt , so wird sogleich

$$\Theta = n (\alpha + \eta - p) t + N - K - \pi'$$

und hiemit ergibt sich durch die Differentiation des Ausdrucks von $\delta\Omega$ und die Substitution in die obigen Differentialgleichungen, wenn wir

von den Gliedern, die von f abhängen, nur das Glied niedrigster Ordnung aufnehmen,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} = & -2\alpha \sin \frac{1}{2}J + \frac{3A}{2a^2} \left\{ 2 \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 3 \sin^2 \frac{1}{2}J) \right. \\ & + \sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \Theta \\ & - \sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J \cos 2\Theta \\ & \left. - \sin \epsilon \cos \epsilon \cos (2g + 2\omega - \Theta) \right\} \\ & - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cdot \alpha \delta Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ndt} = & \frac{3A}{2a^2} \left\{ \sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \Theta \right. \\ & - \sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J \sin 2\Theta \\ & \left. - \sin \epsilon \cos \epsilon \sin (2g + 2\omega - \Theta) \right\} \end{aligned}$$

Strenge genommen müssten hier nicht nur die Excentricitäten sondern auch wenigstens die grössten in r und \bar{f} enthaltenen, von der störenden Kraft der Sonne herrührenden Glieder berücksichtigt werden. Allein diese Glieder, die viel kleiner sind wie die grössten der angenommenen, sollen in dieser vorläufigen Berechnung nicht mit aufgenommen, sondern erst in der nächsten Abhandlung berücksichtigt werden.

Aus dem vorstehenden Ausdruck für δP bekommen wir nun zuerst

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 3 \sin^2 \frac{1}{2}J) \\ \eta &= \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) \sin^2 \frac{1}{2}J \end{aligned}$$

als den Beitrag, den die Figur der Erde zur Bewegung der Mondknoten liefert, und hierauf durch die Integrationen, deren Ausführung keine Schwierigkeiten hat,

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{3A}{2a^2} \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J)}{\alpha + \eta - p} \sin \Theta \\ & - \frac{3A}{4a^2} \frac{\sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J}{\alpha + \eta - p} \sin 2\Theta \\ & - \frac{3A}{4a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin (2g + 2\omega - \Theta) \\ \delta Q &= - \frac{3A}{2a^2} \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J)}{\alpha + \eta - p} \cos \Theta \\ & + \frac{3A}{4a^2} \frac{\sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J}{\alpha + \eta - p} \cos 2\Theta \\ & + \frac{3A}{4a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \cos (2g + 2\omega - \Theta) \end{aligned}$$

Da ferner zufolge des Art. 135, wenn wieder mit s die Störungen des Sinus der Mondbreite bezeichnet werden, mit hier ausreichender Genauigkeit,

$$s = \delta Q (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (f + \omega) + \delta P (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos (f + \omega)$$

st, so ergibt sich durch die vorstehenden Werthe von δP und δQ ,

$$s = - \frac{3A}{4a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \frac{2 + (\alpha + \eta - p)}{\alpha + \eta - p} \sin (f + \omega - \Theta) \\ + \frac{3A}{4a^2} \frac{\sin^2 \varepsilon \sin \frac{1}{2} J}{\alpha + \eta - p} \sin (f + \omega - 2\Theta)$$

Ich bemerke hiezu, dass $f + \omega - \Theta$ die wahre tropische Länge des Mondes in seiner Bahn ist.

155.

Gehen wir jetzt zu den durch die Figur der Erde bewirkten Störungen der Länge und des Radius Vectors des Mondes über, und berücksichtigen hiebei auch nur die Glieder der niedrigsten Ordnung, mit dem Vorbehalt der Berechnung der kleineren Glieder in der nächsten Abhandlung. Wenden wir, um T_0 zu ermitteln, den Ausdruck an, der im Art. 28 diente um $T_0^{(3)}$ zu erhalten. Dieser wird hier

$$T_0 = aA \left(\frac{d\delta\Omega}{df} \right) + aBr \left(\frac{d\delta\Omega}{dr} \right)$$

und von A und B werden hier nur die Glieder

$$A = -3 + 4 \cos (g - \gamma) + 5e \cos (2g - \gamma) \\ B = 2 \sin (g - \gamma) + e \sin \gamma + 3e \sin (2g - \gamma)$$

gebraucht. Nehmen wir wieder von den Gliedern in $\delta\Omega$, die von f abhängen, nur das der niedrigsten Ordnung auf, so wird

$$a \left(\frac{d\delta\Omega}{df} \right) = - \frac{3A}{2a^2} \sin^2 \varepsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta)$$

Um die Bewegung des Perigäums zu erhalten, wird es nothwendig, in dem constanten Gliede des partiellen Differential's von $\delta\Omega$ nach r die Mondexcentricität zu berücksichtigen; substituieren wir daher

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{3e}{a^3} \cos g$$

in dieses Glied, so ergibt sich

$$ar \left(\frac{d\delta\Omega}{dr} \right) = - \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \\ - \frac{9Ae}{2a^3} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos g \\ + \frac{9A}{a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos \Theta \\ - \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \cos 2\Theta \\ - \frac{9A}{4a^2} \sin^2 \varepsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta)$$

und hiemit erhält man durch den oben angeführten Ausdruck für T ,

$$\begin{aligned}
 T_0 = & \frac{3Ae}{a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \gamma \\
 & + \frac{9A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (-\gamma + g + \theta) \\
 & - \frac{9A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (\gamma - g + \theta) \\
 & - \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (-\gamma + g + 2\theta) \\
 & + \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (\gamma - g + 2\theta) \\
 & + \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin (2g + 2\omega - 2\theta) \\
 & - \frac{31A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (-\gamma + 3g + 2\omega - 2\theta) \\
 & - \frac{3A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (\gamma + g + 2\omega - 2\theta)
 \end{aligned}$$

Um in diesen Coefficienten die Glieder niedrigster Ordnung vollständig zu erhalten, wird es wieder nothwendig ein Glied der zweiten mit hinzuzuziehen, und

$$T = T_0 + \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \delta Q$$

zu setzen. Es ist leicht zu finden, dass die übrigen Glieder des vollständigen Ausdrucks von T nur Glieder höherer Ordnung hervorbringen können.

Aus den Artt. 26 und 47 ergibt sich, dass mit Weglassung der Excentricitäten und der mit $\sin \frac{1}{2} J$ multiplicirten Glieder

$$\left(\frac{dT_0}{dQ}\right) = -u^2 (6 - 12 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J \sin (g - \gamma)$$

ist, und dieser Ausdruck geht in Folge des Ausdrucks von α des Art. 153 in den folgenden über,

$$\left(\frac{dT_0}{dQ}\right) = -8 \sin \frac{1}{2} J (\alpha + \eta) \sin (g - \gamma)$$

multiplicirt man diesen mit dem Ausdruck von δQ des Art. 154, so bekommt man

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \delta Q = & \frac{6A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (-\gamma + g + \theta) \\
 & - \frac{6A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (\gamma - g + \theta) \\
 & - \frac{3A}{a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (-\gamma + g + 2\theta) \\
 & + \frac{3A}{a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (\gamma - g + 2\theta)
 \end{aligned}$$

worauf der Ausdruck für T erhalten wird.

Aus dem Art. 87 ziehen wir

$$\frac{dW_0}{ndt} = T - 2ye \sin \gamma$$

indem die übrigen dort im Ausdruck für dW_0 enthaltenen mit y multiplicirten Glieder hier keinen wesentlichen Einfluss äussern. Durch die Entwicklungen des vor. Art. ergibt sich also

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{ndt} = & -2ye \sin \gamma + \frac{3A\epsilon}{a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \gamma \\ & + \frac{15A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (-\gamma + g + \Theta) \\ & - \frac{15A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (\gamma - g + \Theta) \\ & - \frac{15A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (-\gamma + g + 2\Theta) \\ & + \frac{15A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (\gamma - g + 2\Theta) \\ & + \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ & - \frac{21A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (-\gamma + 3g + 2\omega - 2\Theta) \\ & - \frac{3A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (\gamma + g + 2\omega + 2\Theta) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck giebt zuförderst

$$y = \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J)$$

als den Beitrag, den die Figur der Erde zur Bewegung des Perigäums des Mondes liefert. Wie man sieht ist derselbe sehr nahe der aus derselben Ursache entspringenden Knotenbewegung gleich.

Wenden wir uns hierauf zu den beiden folgenden Gliedern von dW_0 , so geben die Gleichungen (30) zu erkennen, dass für diese die Integrationsdivisoren

$$-(1 + \alpha + \eta - p + y) \text{ und } -(-1 + \alpha + \eta - p - y)$$

sind. Aber man findet leicht, dass die Berücksichtigung der kleineren Glieder dieser Divisoren hier im Endresultat nur Glieder höherer Ordnung hervorbringen können, die jetzt, wie im Art. 155 angekündigt

wurde, ausgeschlossen werden sollen, wir dürfen daher statt der stehenden Divisoren -1 und bez. $+1$ annehmen, und dürfen in übrigen Gliedern von dW_0 demgemäss verfahren. Hiemit ergibt sic

$$\begin{aligned} W_0 = & -\frac{15A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos (-\gamma + g + \Theta) \\ & -\frac{15A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos (\gamma - g + \Theta) \\ & +\frac{15A}{a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2}J \cos (-\gamma + g + 2\Theta) \\ & +\frac{15A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2}J \cos (\gamma - g + 2\Theta) \\ & -\frac{9A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ & +\frac{7A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \cos (-\gamma + 3g + 2\omega - 2\Theta) \\ & +\frac{3A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \cos (\gamma + g + 2\omega - 2\Theta) \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \overline{W}_0 = & -\frac{30A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \Theta \\ & +\frac{15A}{a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2}J \cos 2\Theta \\ & +\frac{A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ \left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right) = & \frac{A}{a^2} \sin^2 \epsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta) \end{aligned}$$

Da ferner hier

$$\begin{aligned} n\delta z &= n \int \overline{W}_0 dt \\ \nu &= -\frac{1}{2} n \int \left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right) dt \end{aligned}$$

gesetzt werden darf, so wird

$$\begin{aligned} n\delta z = & -\frac{30A}{a^2} \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J)}{\alpha + \eta - p} \sin \Theta \\ & +\frac{15A}{2a^2} \frac{\sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2}J}{\alpha + \eta - p} \sin 2\Theta \\ & +\frac{A}{8a^2} \sin^2 \epsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ \nu = & \frac{A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck von ν kommt weiter nicht in Betracht, da sein efficient so klein ist, dass er im Ausdruck der Mondparallaxe dur nichts Merkliches geben kann.

158.

Die Grösse, welche hier mit \mathcal{A} bezeichnet worden ist, und den Unterschied $C - A$ zwischen dem Trägheitsmoment der Erde in Bezug auf die Rotationsachse derselben und dem Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine im Aequator liegende Achse bedeutet, hat Laplace weiter entwickelt, und dafür den Ausdruck

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3} (\rho - \frac{1}{2} \varphi) D^2$$

gefunden, wo D der Halbmesser der Erde, ρ die Abplattung und φ das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwerkraft unter dem Aequator ist. Da bei der Anwendung dieses Ausdrucks nur die Abplattung substituirt werden kann, die die Oberfläche der Erde besitzt, und also eine etwaige Verschiedenheit derselben für die verschiedenen inneren Schichten der Erde unberücksichtigt gelassen werden muss, so erwächst daraus eine Unsicherheit in den Coefficienten, die Functionen von \mathcal{A} sind, die man nur dadurch vermeiden kann, dass man entweder den grössten Coefficienten von s , oder den grössten von $n dz$, oder beide unmittelbar durch die Mondbeobachtungen bestimmt. So habe ich es bei der Bearbeitung der Mondtafeln gemacht, und es lässt sich auch dieses Verfahren nicht als Empirismus bezeichnen, da es auf dem oben dargelegten wissenschaftlichen Grunde beruht.

Wenn man nun in Bezug auf die eben entwickelten Ungleichheiten

$$s = \lambda_1 \sin(f + \omega - \Theta) + \lambda_2 \sin(f + \omega - 2\Theta)$$

$$n dz = \pi_1 \sin \Theta + \pi_2 \sin 2\Theta + \pi_3 \sin(2g + 2\omega - 2\Theta)$$

bestimmt, und λ_1 als durch die Mondbeobachtungen gegeben betrachtet, so kommt man

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon \sin \frac{1}{2} J \cdot \lambda_1$$

$$\pi_1 = 20 \sin \frac{1}{2} J (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) (1 - \frac{1}{2} (\alpha + \eta - p)) \lambda_1$$

$$\pi_2 = -5 \operatorname{tg} \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \cdot \lambda_1$$

$$\pi_3 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon (\alpha + \eta - p) \lambda_1$$

ausserdem

$$y = -\frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} (1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} J) \frac{\alpha + \eta - p}{1 + \frac{1}{2} (\alpha + \eta - p)} \lambda_1$$

$$\alpha = -\frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} (1 + \sin^2 \frac{1}{2} J) \frac{\alpha + \eta - p}{1 + \frac{1}{2} (\alpha + \eta - p)} \lambda_1$$

$$\eta = \alpha \sin^2 \frac{1}{2} J$$

Die Mondbeobachtungen haben mir gegeben

$$\lambda_1 = - 8,382$$

$$\pi_1 = - 7,624$$

Diese Bestimmung von π_1 wäre theoretisch betrachtet überflüssig, da π_1 aus λ_1 folgt, allein ich habe der Controlle wegen diese zweite Bestimmung nicht unterlassen wollen, und im Grunde kann man auch die Bestimmung der übrigen Coefficienten mit demselben Recht auf π_1 gründen, wie auf λ_1 , da absolut betrachtet π_1 und λ_1 Grössen derselben Ordnung sind.*) Gehen wir nun von dem vorstehenden Werthe von λ_1 aus, so bekommen wir durch die Relationen des vor. Art.

$$\lambda_2 = + 0,082$$

$$\pi_1 = - 7,533$$

$$\pi_2 = + 0,037$$

$$\pi_3 = + 0,001$$

$$y = + 0,07045$$

$$a = + 0,07087$$

$$\eta = + 0,00014$$

und aus den drei letzten folgt

$$ny = + 5,87$$

$$na = + 5,90$$

$$n\eta = + 0,01$$

wo für n die jährliche mittlere Bewegung substituirt worden ist. Man sieht hieraus, dass der Einfluss der Figur der Erde auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes keinesweges unmerklich ist, wie Laplace und nach ihm Andere behauptet haben.

Der Unterschied zwischen dem eben berechneten Werthe von π_1 und dem aus den Beobachtungen gefundenen beträgt nur 0,091 und giebt eine schöne Bestätigung der Richtigkeit dieser Bestimmungen. Es ist indess hiebei zu bemerken, dass die definitive Festsetzung dieses Unterschiedes erst später erfolgen kann, wenn ich die Berechnung der

*) Algebraisch betrachtet ist freilich π_1 in Bezug auf λ_1 eine kleine Grösse erster Ordnung, allein man wird in der Mondtheorie oft auf sehr falsche Schlüsse über die numerische Grösse der Coefficienten hingeführt, wenn man diese nach der algebraischen Ordnung derselben schätzen will.

kleinen, hier weggelassenen, Glieder höherer Ordnung in den Coefficienten λ_1 und π_1 dargelegt haben werde.

Die kleinen mit λ_2 und π_3 multiplicirten Glieder habe ich in den Mondtafeln nicht aufgenommen, weil dafür besondere Tafeln hätten berechnet werden müssen, welches ich bei dem geringen Werthe dieser Coefficienten für eine unnöthige Complication hielt.

Benutzen wir noch die oben angeführte Laplace'sche Relation, um die Abplattung der Erde zu berechnen, die aus dem obigen Werthe von λ_1 folgt. Aus den Ausdrücken

$$\lambda_1 = -\frac{3A}{4a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 J) \frac{2 + (\alpha + \eta - p)}{\alpha + \eta - p}$$

$$A = \frac{1}{2} (\rho - \frac{1}{2} \varphi) D^2$$

folgt die Abplattung

$$\rho = \frac{1}{2} \varphi - 2 \left(\frac{a}{D} \right)^2 \frac{1 + \frac{1}{2} \sin^2 J}{\sin \epsilon \cos \epsilon} \cdot \frac{\alpha + \eta - p}{2 + (\alpha + \eta - p)} \lambda_1$$

und mit den Werthen

$$\varphi = \frac{1}{289}; \quad \frac{D}{a} = \sin (57' 0'')$$

so wie mit den übrigen eben angegebenen Zahlenwerthen bekomme ich hieraus

$$\rho = \frac{1}{296}$$

um sehr Weniges grösser, wie der durch die Gradmessungen erlangte Werth.

160.

Wenn man den obigen Werth von λ_1 mit dem auch durch Beobachtungen erlangten Werthe der Constante der Luni-Solarpräcession verbindet, so kann man noch ein sehr interessantes Resultat erhalten, nemlich die Bestimmung der numerischen Werthe der Trägheitsmomente der Erde. Nennen wir den Coefficienten der Luni-Solarpräcession ζ , so kann der bekannte Ausdruck von ζ auf die folgende Form gebracht werden,

$$\zeta = \frac{3(C-A)n'^2}{2Cn''} \left\{ 1 + \frac{m}{1+m} \frac{n^2}{n'^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 J) \right\} \cos \epsilon$$

wo n'' die in Bogensekunden auszudrückende Dauer des siderischen Tages bedeutet, und alle übrigen Bezeichnungen dieselben sind wie vorher. Da wir hier $n'' = n' \cdot 365,25$ setzen dürfen, so ergibt sich aus dem vorstehenden Ausdruck

$$\frac{C-A}{C} = \frac{732,5}{3n' \left\{ 1 + \frac{m}{1+m} \cdot \frac{n^2}{n'^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 J) \right\} \cos \epsilon} \zeta$$

und setzen wir nach Bessel

$$\zeta = 50,356$$

und nehmen die Werthe der übrigen Grössen so an. wie überhaupt in dieser Abhandlung geschehen ist, so erhalten wir

$$\frac{C-A}{C} = 0,003272$$

Andertheils ist mit hinreichender Genauigkeit

$$\lambda_1 = - \frac{3(C-A) \sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 J)}{2a^2 (\alpha + \eta - p)}$$

woraus, wenn wir die Erdmasse M , die oben = 1 gesetzt wurde, restituiren, und den Aequatoreal-Halbmesser der Erde D durch den Ausdruck

$$\frac{a}{D} = \sin (57' 0'')$$

einführen, der folgende Ausdruck hervorgeht,

$$C - A = - MD^2 \frac{1}{3} \lambda_1 \frac{\alpha + \eta - p}{\sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 (57' 0'')} (1 + \frac{1}{2} \sin^2 J)$$

der in Zahlen verwandelt

$$C - A = MD^2 0,001103$$

gibt. Aus dieser Gleichung, verbunden mit dem obigen Werthe

$$\frac{C-A}{C} = 0,003272$$

bekommt man

$$C = MD^2 0,3372$$

$$A = MD^2 0,3361$$

Diese aus den Beobachtungen abgeleiteten Werthe zeigen, dass nicht nur die Trägheitsmomente der Erde selbst, sondern auch ihr Unterschied beträchtlich kleiner sind, wie die eines homogenen Revolutionsellipsoids von derselben Abplattung. Denn in einem solchen Ellipsoid, dessen Excentricität der Meridiane mit e bezeichnet wird, ist

$$C = \frac{1}{3} MD^2$$

$$C - A = \frac{1}{3} MD^2 e^2$$

Substituirt man hierin für die Erde $\log e = 8,9111$, so wird

$$C - A = MD^2 0,001328$$

während der oben aus den Beobachtungen gefundene numerische Coef-

ent nur 0,004103 beträgt. Aehnlicher Weise ist der oben aus den Beobachtungen gefundene numerische Coefficient im Werthe von C nur $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$, während das homogene Revolutionsellipsoid denselben $\frac{1}{2}$ verlangt. Diese hier gefundenen Unterschiede in den Trägheitsmomenten und deren Unterschiede geben eine schöne Bestätigung des von Laplace aus ganz anderen Betrachtungen abgeleiteten Satzes, dass die Dichtigkeit der Erde nach ihrem Mittelpunkte zu wächst, und die Excentricitäten ihrer Schichten abnehmen. Denn ausserdem lassen sich die oben gefundenen Unterschiede nur auf zwei Arten erklären; es muss entweder die Figur des Erdkörpers von der eines Revolutionsellipsoids beträchtlich abweichen, oder die hier bei der Berechnung der Trägheitsmomente und ihres Unterschiedes zu Grunde gelegten, aus den Beobachtungen abgeleiteten zwei Coefficienten müssen wesentlich unrichtig sein. Der erste dieser beiden Einwürfe ist durch die Resultate der Messungen vollständig widerlegt, und um den andern zu unterwerfen, braucht man nur die Aenderungen zu bestimmen, die mit diesen beiden Coefficienten vorgenommen werden müssen, um die Trägheitsmomente so zu erhalten, wie das homogene Revolutionsellipsoid sie verlangt. Bezeichnet man die beiden Coefficienten, die dieser Hypothese entsprechen, mit ζ' und λ'_1 , so findet man leicht aus dem Vorhergehenden, dass

$$\zeta' = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,001328}{0,003272} \zeta$$

$$\lambda'_1 = \frac{0,001328}{0,004103} \lambda_1$$

wird, und hieraus findet man

$$\zeta' = 51,10; \quad \lambda'_1 = -10,09$$

während

$$\zeta = 50,36; \quad \lambda_1 = -8,38$$

4. Beide diese Unterschiede sind aber viel zu gross, als dass sie mit den Beobachtungen verträglich wären. Man kann noch die Frage aufwerfen, wie viel die Constante der Mondparallaxe, die den Mondtafeln zufolge oben = $57' 0''$ angenommen wurde, geändert werden müsste, um in Verbindung mit dem durch die Beobachtungen erhaltenen Werthe von λ_1 den Unterschied $C - A$ so zu erhalten, wie das homogene Revolutionsellipsoid ihn verlangt; bezeichnen wir die Constante der Mondparallaxe, die dieser Annahme entspricht, mit x , so ergibt sich leicht

$$\sin x = \sin (57' 0'') \sqrt{\frac{0,004103}{0,001328}}$$

woraus

$$x = 51' 57''$$

folgt und bedeutend vom wahren Werthe abweicht. Der oben genannte Laplace'sche Satz wird also durch diese Untersuchung bestätigt.

§ 12. Von den durch die Figur des Mondes in der Mondbewegung entstehenden Störungen.

Berechnung der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers.

161.

Es ist schon im vor. § gezeigt worden, dass die jetzt in Betracht zu ziehende Störungfunction der dort angewandten ganz analog ist, und wir können sie daher sogleich aufstellen.

$$\delta\Omega = \frac{3}{4mr^3}(A+II)\left(\frac{1}{2} - \sin^2\delta\right) + \frac{3}{4mr^3}(A-II)\cos^2\delta\cos 2w$$

wo ich die Zeichen, die jetzt eine andere Bedeutung bekommen, beibehalten habe, weil daraus keine Verwechslungen entstehen können. Wie früher ist hier r die Entfernung des Schwerpunkts des Mondes von dem der Erde, und m die Mondmasse, es ist ferner auch

$$A = C - A, \quad II = C - B$$

aber A, B, C sind jetzt die Trägheitsmomente des Mondkörpers, und zwar C das sich auf die Rotationsachse beziehende und von den im Mondäquator liegenden A und B , A dasjenige, welches sich auf die Hauptachse bezieht, die der Erde zugewandt ist. Es ist ferner jetzt δ die Declination des Schwerpunkts der Erde in Bezug auf den Mondäquator und w der Winkel, den die Hauptachse, auf welche sich A bezieht, mit einer durch den Radius r und die Rotationsachse des Mondes gelegten Ebene macht.

162.

Um die Ausdrücke für δ und w zu erhalten, ist zunächst auf den Satz Rücksicht zu nehmen, zufolge dessen der absteigende Knoten des Mondäquators auf der Ecliptik stets mit dem aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ecliptik zusammenfällt. In Folge dieses Satzes ist die Neigung der Mondbahn gegen den Mondäquator stets $= J+J'$, wenn man mit J' die Neigung des Mondäquators gegen die Ecliptik bezeich-

et. Da nun vom Monde aus gesehen das Argument der Breite der Erde $= 180^\circ + f + \omega$ ist, so wird

$$\sin \delta = - \sin (J + J') \sin (f + \omega)$$

und bezeichnen wir mit λ den Bogen des Mondäquators zwischen der Frühlingsnachtgleiche und der durch r und die Rotationsachse des Mondes gelegten Ebene, und wie früher das Supplement der tropischen Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ecliptik mit Θ , so wird sogleich

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin (\lambda + \Theta) &= - \cos (J + J') \sin (f + \omega) \\ \cos \delta \cos (\lambda + \Theta) &= - \cos (f + \omega) \end{aligned}$$

Es sind nemlich

$$180^\circ + f + \omega; \lambda + \Theta; \delta$$

die Seiten eines sphärischen Dreiecks, welchen die Winkel

$$90^\circ, -; J + J'$$

gegenüber liegen. Der zweite in der Bewegung des Mondkörpers statt findende Satz heisst: Dass dieser sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Zeitraum um seine Achse dreht, welcher genau der mittleren Umlaufzeit des Mondes um die Erde gleichkommt. Nennen wir daher die mittlere Mondlänge l , so hat der Bogen des Mondäquators, welcher sich von der Frühlingsnachtgleiche bis zu der der Erde zugekehrten Hauptachse erstreckt, $180^\circ + l$ zum Ausdruck, und es wird

$$w = \lambda - l + 180^\circ$$

Die vorstehenden Gleichungen geben hiemit

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin w &= \cos (J + J') \sin (f + \omega) \cos (l + \Theta) - \cos (f + \omega) \sin (l + \Theta) \\ \cos \delta \cos w &= \cos (J + J') \sin (f + \omega) \sin (l + \Theta) + \cos (f + \omega) \cos (l + \Theta) \end{aligned}$$

Sowohl die Störungen der Mondlänge wie die physische Libration des Mondes fügen dem Bogen l periodische Ungleichheiten hinzu, allein alle bis jetzt darüber angestellte Untersuchungen haben über die Mercklichkeit solcher Ungleichheiten nichts Entscheidendes hervorbringen können, und sie müssen daher sehr klein sein, weshalb wir hier darauf keine Rücksicht zu nehmen brauchen. Substituirt man daher die vorstehenden Ausdrücke in den obigen Ausdruck für $\delta\Omega$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\Omega = & \frac{3}{4mr^3} (A+H) \left\{ \frac{1}{3} [1 - \frac{2}{3} \sin^2(J+J')] + \frac{1}{3} \sin^2(J+J') \cos 2(f+l+\omega) \right. \\ & + \frac{3}{4mr^3} (A-H) \left\{ \cos^4 \frac{1}{2}(J+J') \cos 2(f-l+\omega-\Theta) \right. \\ & \quad + 2 \sin^2 \frac{1}{2}(J+J') \cos^2 \frac{1}{2}(J+J') \cos 2(l+\Theta) \\ & \quad \left. \left. + \sin^4 \frac{1}{2}(J+J') \cos 2(f+l+\omega+\Theta) \right\} \right\} \end{aligned}$$

163.

Die periodischen Glieder, die dieser Ausdruck enthält, können wir übergehen, da keins derselben, wenigstens in der niedrigsten Ordnung, bei den Integrationen einen kleinen Divisor bekommen kann. Wir haben also nur die Glieder zu betrachten, die zu den Bewegungen des Perigäums und der Knoten einen Beitrag liefern können, und diese sind das erste Glied in jedem der beiden Hauptglieder von $\delta\Omega$. Wenden wir uns wieder zuerst zu den Breitenstörungen, so finden wir durch bloße Berücksichtigung der beiden genannten Glieder, und indem wir nur die erste Potenz von $\sin \frac{1}{2}(J+J')$ berücksichtigen,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dJ} \right) = & - \frac{3}{2mr^3} (A+H) \sin \frac{1}{2}(J+J') \\ & - \frac{3}{2mr^3} (A-H) \sin \frac{1}{2}(J+J') \cos 2(f-l+\omega-\Theta) \end{aligned}$$

Es ist aber

$$l = g + \omega - \Theta$$

und hiemit wird

$$\cos 2(f-l+\omega-\Theta) = \cos 2(f-g) = 1$$

da hier die Excentricität der Mondbahn zu übergehen ist. Mit Rücksicht auf die Entwicklungen des vor. § erhält man daher

$$\frac{dP}{ndt} = -2\alpha \sin \frac{1}{2}J + \frac{3}{ma^2} A \sin \frac{1}{2}(J+J')$$

woraus

$$\alpha = \frac{3}{2ma^2} A \frac{\sin \frac{1}{2}(J+J')}{\sin \frac{1}{2}J} *$$

folgt.

* Dieser Ausdruck stimmt mit dem Ausdruck

$$\frac{3}{5} \frac{f_{od} \cdot a^3}{f_{od} \cdot a^3} \cdot \frac{v}{r^2} \frac{(\lambda+\gamma)}{\gamma} \cdot \frac{(C-A)}{C}$$

von Mec. vol. Tome III. p. 261 überein. Laplace giebt dort p. 262 noch ein zweites an, welches ich aber auf keine Weise habe finden können.

Gehen wir zu den Längstörungen über, und berücksichtigen wieder dieselben zwei Glieder von $\delta\Omega$, so ergibt sich zuerst, wenn wir die Neigungen ganz übergehen,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta\Omega}{dv}\right) &= -\frac{3}{2mr^3}(A-II) \sin 2(f-l+\omega-\Theta) \\ r \left(\frac{d\delta\Omega}{dr}\right) &= -\frac{3}{4mr^3}(A+II) \\ &\quad -\frac{9}{4mr^3}(A-II) \cos 2(f-l+\omega-\Theta) \end{aligned}$$

Da hier die erste Potenz der Excentricität berücksichtigt werden muss, so wird

$$\begin{aligned} \sin 2(f-l+\omega-\Theta) &= \sin 2(f-g) = 4e \sin g \\ \cos 2(f-l+\omega-\Theta) &= \cos 2(f-g) = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{3e}{a^3} \cos g$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta\Omega}{dv}\right) &= -\frac{6e}{ma^3}(A-II) \sin g \\ r \left(\frac{d\delta\Omega}{dr}\right) &= -\left\{\frac{3}{ma^3}A - \frac{3}{2ma^3}II\right\} \\ &\quad -\left\{\frac{9e}{ma^3}A - \frac{9e}{2ma^3}II\right\} \cos g \end{aligned}$$

Hieraus erhält man auf dieselbe Art wie im Art. 155

$$T_0 = \frac{3e}{ma^3}(3II - 2A) \sin \gamma$$

und

$$\frac{dW_0}{ndt} = -2ey \sin \gamma + \frac{3e}{ma^3}(3II - 2A) \sin \gamma$$

woraus

$$y = \frac{3}{2ma^3}(3II - 2A) *$$

sich ergibt.

Wenden wir diese Ausdrücke von y und α an, um zu untersuchen, welche Ausdrücke sich daraus für die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers ergeben. Führen wir zu dem Ende den mittleren Mondhalbmesser d ein, welcher mit a durch den Ausdruck

*) Diesen Theil der Bewegung des Perigäums hat Laplace, so viel mir bekannt ist, gar nicht entwickelt.

$$\frac{d}{a} = \sin(15' 33'')$$

verbunden ist. Es ergibt sich hiemit erstens

$$A = md^2 \frac{2 \sin \frac{1}{2} J}{9 \sin \frac{1}{2} (J+J')} \frac{\alpha}{\sin^2(15' 33'')} \\ 3II - 2A = md^2 \frac{\frac{1}{2} y}{\sin^2(15' 33'')}$$

und hieraus

$$II = md^2 \left\{ \frac{4 \sin \frac{1}{2} J}{9 \sin \frac{1}{2} (J+J')} \alpha + \frac{1}{2} y \right\} \frac{1}{\sin^2(15' 33'')}$$

166.

Im Art. 103 wurden die Unterschiede ermittelt, die zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes statt finden, nachdem auf die störende Kraft der Sonne, des Mondes, der Planeten und der Figur der Erde Rücksicht genommen worden ist. Diese Unterschiede müssen so lange, bis eine andere Ursache derselben annehmbar gemacht werden kann, der Wirkung der Figur des Mondes zugeschrieben werden, und es sollen hier die Werthe der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers berechnet werden, die daraus folgen. Schreiben wir hier y und α statt der dort eingeführten Zeichen y' und α' , so wurde in Theilen des Kreisradius gefunden,

$$y = + 0,0000000908$$

$$\alpha = + 0,0000001659$$

Setzt man ausserdem $J' = 1^{\circ} 32'$, und substituirt diese Werthe in die Ausdrücke des vor. Art., so erhält man

$$A = C - A = md^2 0,00416$$

$$II = C - B = md^2 0,00375$$

$$B - A = md^2 0,00041$$

Man erkennt sofort hieraus, dass die theoretische Bedingung

$$C > B > A$$

für das Stattfinden der beiden in Bezug auf die Rotationsbewegung des Mondes vorhandenen Sätze, die oben angeführt worden, sich in diesen numerischen Resultaten ausspricht, aber sie weichen nicht unbedeutend von den Werthen ab, die man aus den früher gefundenen Werthen der Verhältnisse $\frac{C-A}{B}$, $\frac{C-B}{A}$, $\frac{B-A}{C}$ folgern kann. Es muss je

werden, dass die Werthe dieser Verhältnisse, die jene Arten gefolgert worden sind, unter einander verschiedene zeigen. Es liegen namentlich drei Bestimmungen vor, die von Laplace aus der Annahme, dass der Mond ursprünglich flüssig gewesen ist, berechnete, und die von Wichmann gänzlich unabhängig von einander durch die Beobachtung der Libration des Mondes erhaltenen, die unter verschiedenen Umständen darbiehen. Ich führe hievon an, dass

$$\frac{C-B}{C-A} \text{ nahe } = 1$$

$$\frac{C-B}{C-A} = 0,056$$

$$\frac{C-B}{C-A} = 0,449$$

Das zweite ist, während oben dasselbe Verhältniss sich nahe 1 hat. Auch sind die hier gefundenen Werthe von $C-A$ grösser, als die, welche aus den Bestimmungen jener beiden, Nicollet und Wichmann, sprechen sich in Betreff der Libration des Mondes dahin aus, dass die erhaltenen, nicht befriedigend sind, und die obigen Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers entscheidend betrachtet werden. Es scheint in der Theorie der Libration des Mondes noch etwas verborgen zu liegen, worüber eine weitere Aufklärung erwartet werden muss.

Bestimmung des von der Mondmasse abhängigen Theils der Knotenbewegung des Mondes.

467.

Wir den im Art. 38 entwickelten Ausdruck von Pd vor, um den jetzigen Zweck wie folgt schreiben dürfen,

$$e \sin \frac{1}{2} J_0 - G \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \frac{1}{2} J \cos (g - g' + \omega - \omega' + \delta N) + G \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \frac{1}{2} J \cos (g + g' + \omega + \omega' + \delta N)$$

$$G = \frac{m}{1+m} \frac{a}{a'} \frac{1}{u}$$

ist. Da

$$P = 2 \sin \frac{1}{2} J \sin \delta N$$

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J \cos \delta N$$

ist, so kann der vorstehende Ausdruck in den folgenden umgeformt werden,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} = & -2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 - \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 Q \cos (g-g'+\omega-\omega') \\ & + \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 P \sin (g-g'+\omega-\omega') \\ & + \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 Q \cos (g+g'+\omega+\omega') \\ & - \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 P \sin (g+g'+\omega+\omega') \end{aligned}$$

168.

Berücksichtigen wir nun das Quadrat der störenden Kraft, w die kleine Aenderung δK übergangen werden kann, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} = & -2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 + \left\{ \begin{array}{l} G \sin \frac{1}{2} J_0 \sin (g-g'+\omega-\omega') \\ -G \sin \frac{1}{2} J_0 \sin (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} ndz \\ & + \left\{ \begin{array}{l} 2G \sin \frac{1}{2} J_0 \cos (g-g'+\omega-\omega') \\ -2G \sin \frac{1}{2} J_0 \cos (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} \nu \\ & + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} G \sin (g-g'+\omega-\omega') \\ -\frac{1}{2} G \sin (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} \delta P \\ & + \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} G \cos (g-g'+\omega-\omega') \\ +\frac{1}{2} G \cos (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} \delta Q \end{aligned}$$

Setzen wir ferner

$$\begin{aligned} ndz &= a \sin (g-g'+\omega-\omega') + a' \sin (g+g'+\omega+\omega') \\ \nu &= b \cos (g-g'+\omega-\omega') + b' \cos (g+g'+\omega+\omega') \\ \delta P &= k \sin (g-g'+\omega-\omega') + k' \sin (g+g'+\omega+\omega') \\ \delta Q &= l \cos (g-g'+\omega-\omega') + l' \cos (g+g'+\omega+\omega') \end{aligned}$$

substituieren diese, und nehmen bloß auf die daraus entstehenden constanten Glieder Rücksicht, so wird, weil die Summe dieser Glieder der vorstehenden Gleichung Null werden muss,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (a + 2b - a' - 2b') G \\ &+ \frac{1}{8 \sin \frac{1}{2} J_0} (k - k' - l + l') G \end{aligned}$$

Durch Hülfe der im Art. 52 gegebenen numerischen Werthe erhalten wir in Theilen des Kreisradius

$$G = 0,0004144$$

und aus dem Art. 66 ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= -121,368; & a' &= +0,760 \\ b &= +56,948; & b' &= -0,412 \\ k &= -3,078; & k' &= +2,881 \\ l &= -3,847; & l' &= -2,880 \end{aligned}$$

hiemit giebt der oben entwickelte Ausdruck

$$\alpha = -0,00653$$

und

$$n\alpha = -0,54$$

als den Beitrag, den die Mondmasse zu der Bewegung der Knoten liefert. Der hiemit in Verbindung stehende Werth von η ist zu klein, um Berücksichtigung zu verdienen.

§ 14. Von der Einwirkung der Planeten auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes, auf die Coefficienten der von der Figur der Erde bewirkten Ungleichheiten, so wie auf die Evectionen und die Variation.

Die hier in Betracht kommende Störungsfunction habe ich schon in meiner Abhandlung über die Ungleichheit langer Periode, die $g+16g'-18g''$ zum Argument hat,*) ausführlich und weit vollständiger entwickelt, wie bis dahin der Fall war; ich werde mich aus diesem Grunde hier bei der Entwicklung derselben kurz fassen dürfen. Sie nimmt zuerst die allgemeine Form an.

$$\Omega = \frac{m''}{1+m} \frac{1}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}} - \frac{m''}{1+m} \frac{Xx + Yy + Zz}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wo wie früher m, x, y, z die Masse und die Coordinaten des Mondes, und ausserdem m'', X, Y, Z die Masse und die rechtwinklichen Coordi-

*) *Memoirs of the Royal Astr. Society.* Vol. XVI.

naten eines Planeten in Bezug auf die Erde sind. Nennt man die Entfernung des Planeten von der Erde R , und löst die Wurzelgrösse des ersten Gliedes von Ω in eine unendliche Reihe auf, so erhält man mit Weglassung der Glieder, die nichts geben können,

$$\Omega = -\frac{1}{2} \frac{m''}{1+m} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{m''}{1+m} \frac{(Xx+Yy+Zz)^2}{R^2}$$

Bezeichnet man die rechtwinklichen Coordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne mit x'' , y'' , z'' , und die analogen der Erde mit x' , y' , z' , so bekommt man

$$\begin{aligned} x &= r \cos 2\frac{1}{2}J \cos (f+\omega+\theta) + r \sin 2\frac{1}{2}J \cos (f+\omega-\theta) \\ y &= r \cos 2\frac{1}{2}J \sin (f+\omega+\theta) - r \sin 2\frac{1}{2}J \sin (f+\omega-\theta) \\ z &= 2r \sin \frac{1}{2}J \cos \frac{1}{2}J \sin (f+\omega) \\ x' &= r' \cos (f'+\pi') \\ y' &= r' \sin (f'+\pi') \\ z' &= 0 \\ x'' &= r'' \cos 2\frac{1}{2}J'' \cos (f''+\omega''+\theta'') + r'' \sin 2\frac{1}{2}J'' \cos (f''+\omega''-\theta'') \\ y'' &= r'' \cos 2\frac{1}{2}J'' \sin (f''+\omega''+\theta'') - r'' \sin 2\frac{1}{2}J'' \sin (f''+\omega''-\theta'') \\ z'' &= 2r'' \sin \frac{1}{2}J'' \cos \frac{1}{2}J'' \sin (f''+\omega'') \end{aligned}$$

wo die Zeichen, die schon früher in dieser Abhandlung vorgekommen sind, dieselbe Bedeutung haben, mit der Ausnahme jedoch, dass hier θ nicht das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ecliptik, sondern diese Länge selbst bedeutet. Dem analog sind in Bezug auf den Planeten r'' , f'' , J'' , ω'' , θ'' , Radius Vector, wahre Anomalie, Neigung der Bahn gegen die Ecliptik, Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten, Länge des aufsteigenden Knotens. Da nun

$$Xx+Yy+Zz = x''x+y''y+z''z - (x'x+y'y+z'z)$$

und wenn man die Sonnenmasse zur Einheit macht,

$$\frac{1}{1+m} = u^2 \frac{a'^2}{a^2}$$

ist, so wird, wenn man die Glieder weglässt, die in Bezug auf die Neigungen von einer höheren Ordnung wie die zweite sind,

$$\begin{aligned} a\Omega &= \frac{1}{2}m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^3 (1-6 \sin 2\frac{1}{2}J) \\ &\quad - \frac{3}{2}m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin 2\frac{1}{2}J'' \cdot a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \{1 - \cos(2f''+2\omega'')\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \cos^4 \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{r'}{a}\right)^2 \cos [(2f+2\omega-2\omega')-2f'] \right. \\
- 2a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos^2 \frac{1}{2} J'' \cos [(2f+2\omega-2\omega')-f'-f''+\omega'-\omega''] \\
+ a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos^4 \frac{1}{2} J''' \cos [(2f+2\omega-2\omega')-2f'+2\omega'-2\omega''] \\
- 2a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \sin^2 \frac{1}{2} J'' \cos [(2f+2\omega-2\omega')-f'+f''+\omega'+\omega''] \\
\left. + 2a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} J''' \cos [(2f+2\omega-2\omega')+2\omega''] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin^2 \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{r'}{a}\right)^2 \cos (2f+2\omega) \right. \\
- a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega)-f'+f''-\omega'+\omega''] \\
- a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega)+f'-f''+\omega'-\omega''] \\
\left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (2f+2\omega) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} J'' \left\{ a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega-\omega')-f'-f''-\omega''] \right. \\
- a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos [(2f+2\omega-\omega')-2f''+\omega'-2\omega''] \\
- a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega-\omega')-f'+f''+\omega''] \\
\left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos [(2f+2\omega-\omega')+2\omega''] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin^2 \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{r'}{a}\right)^2 \cos (2\omega'+2f') \right. \\
- 2a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos (2\omega'+f'+f''-\omega'+\omega'') \\
\left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (2\omega'+2f''-2\omega'+2\omega'') \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} J'' \left\{ a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos (\omega'+f'+f''+\omega'') \right. \\
- a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (\omega'+2f''-\omega'+2\omega'') \\
- a \left(\frac{r'}{a}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos (\omega'+f'-f''-\omega'') \\
\left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (\omega'-\omega'') \right\}
\end{aligned}$$

•r den schon erklärten Zeichen, von welchen ich um mehrerer
ichkeit willen

$$u = \frac{n'}{n}, \quad \omega = \pi - \theta, \quad \omega' = \pi' - \theta, \quad \omega'' = \pi'' - \theta''$$

erhole, ist hier noch

$$a = \frac{a''}{a'}, \quad \omega' = \pi' - \theta''$$

st worden.

Zur Berechnung der Einwirkung der Planeten auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten braucht man nur die Glieder niedrigster Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und die Neigungen anzuwenden, denn ich habe mich durch die Rechnung davon überzeugt, dass die Glieder der höheren Ordnungen nichts Merkliches geben können. Nehmen wir zuerst nur Rücksicht auf die erste Potenz der störenden Kraft, so ist der Theil der Störungfunction, welcher hiebei in Anwendung kommt,

$$a\Omega = \frac{1}{2}m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^3 (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J)$$

und für die Bewegung des Perigäums kann das hier mit $\sin^2 \frac{1}{2}J$ multiplicirte Glied übergangen werden, während es bei der Bewegung der Knoten einzig in Betracht kommt. Von der Entwicklung von $\left(\frac{a'}{R}\right)^3$ brauchen wir nur das constante Glied, und setzt man daher allgemein

$$(1 - 2a \cos x + a^2)^{-\frac{3}{2}} = A_0^{(3)} + 2A_1^{(3)} \cos x + 2A_2^{(3)} \cos 2x + \dots$$

so wird hier

$$\left(\frac{a'}{R}\right)^3 = A_0^{(3)}$$

Substituirt man zugleich

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e \cos g$$

so wird zur Erlangung der Bewegung des Perigäums

$$\begin{aligned} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) &= 0 \\ r \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) &= \frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)} - em''u^2 A_0^{(3)} \cos g \end{aligned}$$

und hieraus auf dieselbe Art wie in den vor. §§

$$\frac{dW_0}{ndt} = -2ye \sin \gamma + \frac{1}{2}em''u^2 A_0^{(3)} \sin \gamma$$

woraus

$$y = \frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)}$$

folgt. Der obige Ausdruck von $a\Omega$ giebt ferner

$$\left(\frac{d\Omega}{dJ}\right) = -\frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)} \sin \frac{1}{2}J$$

woraus

$$\frac{dP}{ndt} = -2\alpha \sin \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)} \sin \frac{1}{2}J$$

und

www.libtool.com.cn $\alpha = \frac{1}{4} m'' u^2 A_0^{(5)}$
 also $\alpha = y$ folgt.

172.

In der Bewegung des Perigäums ist das Product der störenden Kraft der Sonne mit der störenden Kraft der Planeten nicht unmerklich, man braucht jedoch auch hier nur die grössten Glieder zu betrachten, und diese entstehen aus der Evection und der Variation. Der Theil des obigen Ausdrucks der störenden Kraft, welcher hiebei in Betracht kommt ist, wenn man für die wahren Anomalien der Planeten die mittleren substituirt, da die Excentricitäten derselben auch hier nicht in Betracht kommen,

$$a\Omega = \frac{1}{4} m'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \left\{ \begin{aligned} &\cos [(2f + 2\omega - 2\omega') - 2g'] \\ &- 2a \cos [(2f + 2\omega - 2\omega') - g' - g'' + \omega' - \omega''] \\ &+ a^2 \cos [(2f + 2\omega - 2\omega') - 2g'' + 2\omega' - 2\omega''] \end{aligned} \right\}$$

oder, da der im vor. Art. eingeführten Bezeichnung gemäss,

$$\left(\frac{a'}{R}\right)^5 = A_0^{(5)} + 2A_1^{(5)} \cos (g' - g'' + \omega' - \omega'') + 2A_2^{(5)} \cos 2(g' - g'' + \omega' - \omega'') + \dots$$

wird,

$$a\Omega = \frac{1}{4} u^2 K \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos (2f - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

wenn man den für jeden Planeten verschiedenen Theil mit K bezeichnet, das ist

$$K = m'' \{A_0^{(5)} - 2a A_1^{(5)} + a^2 A_2^{(5)}\}$$

setzt. Wir müssen nun von T_0 und G_0 die Glieder der zweiten Abtheilung haben, die mit den Argumenten $-1, 2, -2, 1, 1, -2, 1, 2, -2$ behaftet sind, und diese ergeben sich aus dem obigen Ausdruck von $a\Omega$, wenn man denselben mit den betreffenden Factoren der Artt. 26 und 33 multiplicirt, und von r und f absieht. Da wir nur bis zur ersten Potenz von e zu gehen brauchen, so giebt der Art. 26 für T_0

$$Q^{-1,2} = 6e; \quad Q^{1,1} = -6; \quad Q^{1,3} = -4e$$

und der Art. 33 für G_0

$$U^{-1,2} = 0; \quad U^{1,1} = -4; \quad U^{1,3} = -2e$$

und hiemit wird

$$\begin{aligned}
T_0 &= \frac{3}{2} eu^2 K \sin(-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - \frac{3}{2} u^2 K \sin(\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - 3 eu^2 K \sin(\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
G_0 &= -3 u^2 K \sin(\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - \frac{3}{2} eu^2 K \sin(\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
\end{aligned}$$

Da nun hier

$$r \left(\frac{dT_0}{dr} \right) = 2T_0 - G_0; \quad U_0 = T_0 - G_0$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dT_0}{dg} \right) &= 9 eu^2 K \cos(-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - \frac{3}{2} u^2 K \cos(\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - 6 eu^2 K \cos(\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
r \left(\frac{dT_0}{dr} \right) &= 9 eu^2 K \sin(-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - 6 u^2 K \sin(\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - \frac{3}{2} eu^2 K \sin(\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
U_0 &= \frac{3}{2} eu^2 K \sin(-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - \frac{3}{2} u^2 K \sin(\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&\quad - \frac{3}{2} eu^2 K \sin(\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
\end{aligned}$$

Da ferner

$$T = \left(\frac{dT_0}{dg} \right) ndz + r \left(\frac{dT_0}{dr} \right) \nu - 2 U_0 \delta \frac{h_0}{h}$$

ist, so müssen wir, um die Glieder zu erhalten die zur Bewegung des Perigäums beitragen,

$$\begin{aligned}
ndz &= k \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + l \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
\nu &= k' \cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + l' \cos(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
\delta \frac{h_0}{h} &= k'' \cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + l'' \cos(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
\end{aligned}$$

setzen, diese substituieren, und nur die in den Producten mit $\sin \gamma$ multiplicirten Glieder beibehalten. Es ergibt sich hiemit

$$T = \left\{ \left(\frac{3}{2} k - 3k' + \frac{3}{2} k'' \right) + \left(\frac{1}{2} l - \frac{2}{4} l' + 6 l'' \right) e \right\} u^2 K \sin \gamma$$

und hieraus auf dieselbe Art wie oben

$$y = \left(\frac{3}{2} k - \frac{3}{2} k' + \frac{3}{2} k'' \right) \frac{u^2 K}{\sigma} + \left(\frac{1}{4} l - \frac{2}{4} l' + 3 l'' \right) u^2 K$$

Das Product derselben störenden Kräfte hat auch eine kleine Wirkung auf die Bewegung der Knoten. Um diese zu ermitteln müssen wir die folgenden Glieder der Störungfunction des Art. 170 vornehmen.

$$a\Omega = \frac{1}{2} m' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2\frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \cos (2\omega' + 2f'') \right. \\ \left. - 2a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos (2\omega' + f' + f'' - \omega' + \omega'') \right. \\ \left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (2\omega' + 2f'' - 2\omega' + 2\omega'') \right\}$$

Machen wir hierin die Excentricitäten gleich Null, und substituiren den Ausdruck für $\left(\frac{a'}{R}\right)^5$ des vor. Art., so wird

$$a\Omega = \frac{1}{2} u^2 K \sin 2\frac{1}{2} J \cos (2g' + 2\omega')$$

wo K dieselbe Grösse ist wie oben. Durch Multiplication mit den Factoren des Art. 49 bekommen wir hieraus

$$R = \frac{1}{2} u^2 K \sin (2g' + 2\omega') \\ Y = -\frac{1}{2} u^2 K \cos (2g' + 2\omega')$$

und setzen wir ferner

$$\delta P = -p \sin (2g' + 2\omega'); \quad \delta Q = p \cos (2g' + 2\omega')$$

so wird

$$B = R\delta P + Y\delta Q = -\frac{1}{2} u^2 K p$$

und hieraus wie oben

$$\alpha = -\frac{3 u^2 K p}{8 \sin \frac{1}{2} J}$$

174.

Um die Zahlenwerthe der eben entwickelten Ausdrücke zu erhalten, habe ich die folgenden Werthe angewandt.

	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn
$m' =$	$\frac{1}{8000000}$	$\frac{1}{408134}$	$\frac{1}{3200900}$	$\frac{1}{1050}$	$\frac{1}{2500}$
$\log a =$	9.58782	9.8593375	0.18290	0.7162344	0.9794960
$A_0^{(3)} =$	1.4359	4.9960	0.9692	0.0077267	0.001481
$A_0^{(5)} =$	2.5658	42.885	2.3140	0.00033035	0.00001356
$A_1^{(5)} =$	1.9560	41.700	2.2042	0.00014856	0.000003483
$A_2^{(5)} =$	1.2086	38.797	1.9597	0.000048834	0.000000635

In Bezug auf diese A Coefficienten habe ich eine Bemerkung zu machen, da ich von der gewöhnlichen Art sie zu betrachten etwas abgewichen bin. Wenn man sie durch die bekannten, dafür vorhandenen unendlichen Reihen berechnen will, so muss $a < 1$ sein, aber die Werthe, die sie für $a > 1$ annehmen, stehen mit jenen in einfacher Beziehung. Denn es ist

$$\left(1 - 2a \cos x + a^2\right)^{-\frac{n}{2}} = a^{-n} \left(1 - \frac{2}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

bezeichnet man daher die Entwicklung der Wurzelgrösse rechter Hand dieser Gleichung, wo $a > 1$ anzunehmen ist, mit $\sum_{-\infty}^{+\infty} B_i^{(n)} \cos ix$, so ist offenbar

$$A_i^{(n)} = \frac{B_i^{(n)}}{a^n}$$

Bedient man sich hingegen zur Berechnung der A Coefficienten der endlichen Ausdrücke, die die Theorie der elliptischen Functionen darbietet, so lassen sich diese so stellen, dass sie sowohl für $a > 1$ wie für $a < 1$ angewandt werden können. Ferner, die bekannten endlichen Ausdrücke, die die Differentialquotienten der A Coefficienten nach a geben, lassen sich ohne Weiteres sowohl auf den Fall $a > 1$ wie auf $a < 1$ anwenden. Durch diese Bemerkung erspart man sich die Entwicklung von doppelten Ausdrücken der Störungen, von welchen die einen bloß für einen unteren, und die anderen bloß für einen oberen störenden Planeten Geltung haben, und kann ein und dasselbe System von Ausdrücken in beiden Fällen anwenden.

Substituirt man nun die obigen Zahlenwerthe in die Ausdrücke für y und α des Art. 171, so bekommt man

$$\begin{array}{r} + 0,00042 \text{ von Merkur} \\ 0,01078 \text{ „ Venus} \\ 0,00027 \text{ „ Mars} \\ 0,00648 \text{ „ Jupiter} \\ 0,00030 \text{ „ Saturn} \end{array}$$

$$y = \alpha = + 0,01825$$

und hieraus

$$ny = n\alpha = + 1,52$$

welches der Werth ist, den die erste Annäherung giebt.

Substituirt man ferner die obigen numerischen Werthe in den Ausdruck für K des vorvor. Art., so ergibt sich in Theilen des Kreisradius

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 489

+ 0,000000411	von Merkur
0,000007000	» Venus
0,000000047	» Mars
0,000000102	» Jupiter
0,000000000	» Saturn

$$K = + 0,000007560$$

Art. 66 und 69 geben

$$k = + 4467,0; \quad k' = - 2084,6; \quad k'' = - 329,1$$

$$l = + 2145,0; \quad l' = - 1521,8; \quad l'' = + 920,7$$

hieraus folgt

$$\frac{2}{3} k - \frac{1}{3} k' + \frac{1}{3} k'' = + 7905,5$$

$$\frac{15}{4} l - \frac{27}{8} l' + 3 l'' = + 15941,9$$

Der Ausdruck des vorvor. Art. für y giebt hiemit $y = + 0,00689$, und wenn man dieses dem Werthe von y der ersten Annäherung, nemlich $+ 0,01825$ hinzu, so bekommt man vollständig

$$y = + 0,02514$$

$$ny = + 2,10$$

Man sieht, dass die Glieder zweiter Ordnung hier mehr wie den dritten der Glieder erster Ordnung betragen.

Der Art. 66 giebt ferner

$$p = + 485''$$

Man substituirt man diesen Werth in den Ausdruck von α des vor. Art., so bekommt man $\alpha = - 0,00018$, und fügt man den Werth der ersten Annäherung, nemlich $\alpha = + 0,01825$, hinzu, so ergiebt sich vollständig

$$\alpha = + 0,01807$$

$$n\alpha = + 1,50$$

Die Werthe sind in Art. 103 angewandt worden.

175.

Wir kommen jetzt zu den von den Planeten bewirkten Gliedern, deren Argumente denen der von der Figur der Erde bewirkten analog

sind. Unter diesen sind diejenigen die grössten, die aus der Aenderung der Erdbahn im Raume entstehen. Sei

$$\frac{dp'}{\cos i' dt} = b + b't, \quad \frac{dq'}{\cos i' dt} = c + c't$$

wo die Einheit von t Ein Julianisches Jahr sein soll. Substituiren wir diese in die Ausdrücke des Art. 13, in welchen wir hier zufolge des § 11 die Glieder $n\alpha Q$ und $n\alpha P$ weglassen können, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= (b + b't) \cos \theta_1 + (c + c't) \sin \theta_1 \\ \frac{dQ}{dt} &= (b + b't) \sin \theta_1 - (c + c't) \cos \theta_1 \end{aligned}$$

wo θ_1 das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens bedeutet. Da

$$\theta_1 = n(\alpha + \eta)t + \text{const.}$$

so giebt die Integration

$$\begin{aligned} \delta P &= \left\{ \frac{b}{n(\alpha + \eta)} + \frac{c'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \sin \theta_1 - \left\{ \frac{c}{n(\alpha + \eta)} - \frac{b'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \cos \theta_1 \\ &\quad + \frac{b't}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta_1 - \frac{c't}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta_1 \\ \delta Q &= - \left\{ \frac{b}{n(\alpha + \eta)} + \frac{c'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \cos \theta_1 - \left\{ \frac{c}{n(\alpha + \eta)} - \frac{b'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \sin \theta_1 \\ &\quad - \frac{b't}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta_1 - \frac{c't}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta_1 \end{aligned}$$

und hiemit

$$\begin{aligned} s &= - \left\{ \frac{b}{n(\alpha + \eta)} + \frac{c'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \sin (f + \omega - \theta_1) - \left\{ \frac{c}{n(\alpha + \eta)} - \frac{b'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \cos (f + \omega - \theta_1) \\ &\quad - \frac{b't}{n(\alpha + \eta)} \sin (f + \omega - \theta_1) - \frac{c't}{n(\alpha + \eta)} \cos (f + \omega - \theta_1) \end{aligned}$$

Auf die Länge findet hier keine directe Wirkung statt, aber es wirkt eben so wie in § 11 die Function δQ ein, weshalb der Ausdruck

$$T = \left(\frac{dT_0}{dQ} \right) \delta Q$$

angewandt werden muss, in welchem zufolge des Art. 155

$$\left(\frac{dT_0}{dQ} \right) = - 8 \alpha \sin \frac{1}{2} J \sin (g - \gamma)$$

substituirt werden muss. Hiemit bekommen wir mit ausreichender Genauigkeit die Glieder

$$\begin{aligned}
 & 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n} + \frac{c'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \sin(-\gamma+g+\theta_1) - 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n} - \frac{b'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \cos(-\gamma+g+\theta_1) \\
 - & 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n} + \frac{c'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \sin(\gamma-g+\theta_1) + 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n} - \frac{b'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \cos(\gamma-g+\theta_1) \\
 + & 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n} \sin(-\gamma+g+\theta_1) - 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n} \cos(-\gamma+g+\theta_1) \\
 - & 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n} \sin(\gamma-g+\theta_1) + 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n} \cos(\gamma-g+\theta_1)
 \end{aligned}$$

und hieraus durch die erste Integration

$$\begin{aligned}
 \bar{W}_0 = & -8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n} + \frac{c'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \cos \theta_1 - 8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n} - \frac{b'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \sin \theta_1 \\
 & - 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n} \cos \theta_1 - 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n} \sin \theta_1
 \end{aligned}$$

und durch die zweite Integration

$$\begin{aligned}
 n\delta z = & -8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n(\alpha+\eta)} + \frac{2c'}{n^2(\alpha+\eta)^2} \right\} \sin \theta_1 + 8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n(\alpha+\eta)} - \frac{2b'}{n^2(\alpha+\eta)^2} \right\} \cos \theta_1 \\
 & - 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n(\alpha+\eta)} \sin \theta_1 + 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n(\alpha+\eta)} \cos \theta_1
 \end{aligned}$$

Auf die Glieder in ν brauchen wir hier wieder keine Rücksicht zu nehmen.

176.

Die Untersuchung der Sonnenbewegung hat mir für das Jahr 1800 gegeben,

$$\begin{aligned}
 b & = +0''057723, & c & = -0''46770 \\
 b' & = +0''00003774, & c' & = +0''00001125
 \end{aligned}$$

hiemit und da $n(\alpha+\eta) = 69680''$ ist, geben die vorstehenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 s & = -0''474 \sin(f+\omega-\theta_1) + 1''384 \cos(f+\omega-\theta_1) \\
 & - 0''0001117 t \sin(f+\omega-\theta_1) - 0''0000333 t \cos(f+\omega-\theta_1) \\
 n\delta z & = -0''064 \sin \theta_1 - 0''497 \cos \theta_1 \\
 & - 0''0000401 t \sin \theta_1 + 0''0000120 t \cos \theta_1
 \end{aligned}$$

Die hier mit t multiplicirten Glieder sind zu klein um Berücksichtigung zu verdienen, ich habe sie daher in den Mondtafeln weggelassen.

177.

Zu den eben berechneten Gliedern fügt die directe Wirkung der Planeten etwas hinzu. Um dieses zu entwickeln, entnehme ich der Störungsfunction des Art. 170 die folgenden Glieder,

$$a\Omega = -3m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^5 \sin \frac{1}{2}J \sin \frac{1}{2}J'' \cdot a \left\{ \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos(\omega' + f' - f'' - \omega'') \right. \\ \left. - a \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos(\omega' - \omega'') \right\}$$

Da wir hier wieder die Excentricitäten übergehen dürfen, so ist

$$\left(\frac{a'}{R}\right)^5 = A_0^{(5)} + 2A_1^{(5)} \cos(g' - g'' + \omega' - \omega'')$$

zu substituieren. Erwägen wir ferner, dass zufolge des Art. 170

$$\omega' = \pi' - \theta, \quad \omega'' = \pi'' - \theta''$$

wo θ die Länge des aufsteigenden Mondknotens selbst, und θ'' die des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der Ecliptik bedeuten, so wird

$$a\Omega = -3m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin \frac{1}{2}J \sin \frac{1}{2}J'' \cdot a \left\{ A_1^{(5)} - aA_0^{(5)} \right\} \cos(\theta - \theta'')$$

Da nun

$$\theta = -n(\alpha + \eta)t - N + K + \pi' *$$

ist, so ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{dP}{ndt} = \frac{1}{2}m''u^2 \sin \frac{1}{2}J'' \cdot a \left\{ A_1^{(5)} - aA_0^{(5)} \right\} \cos(\theta - \theta'')$$

$$\frac{dQ}{ndt} = -\frac{1}{2}m''u^2 \sin \frac{1}{2}J'' \cdot a \left\{ A_1^{(5)} - aA_0^{(5)} \right\} \sin(\theta - \theta'')$$

und hieraus durch die Integration und Substitution

$$\delta P = -\frac{1}{2}L \sin(\theta - \theta''), \quad \delta Q = -\frac{1}{2}L \cos(\theta - \theta'')$$

$$s = -\frac{1}{2}L \sin(f + \omega + \theta - \theta'')$$

wenn man zur Abkürzung

$$L = m''u^2 \sin \frac{1}{2}J'' \cdot a \frac{A_1^{(5)} - aA_0^{(5)}}{\alpha + \eta}$$

setzt. Da ferner hier

$$\left(\frac{da\Omega}{dv}\right) = 0, \quad r \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) = 2a\Omega$$

ist, so giebt der oft angewandte Ausdruck,

$$T_0 = -6(\alpha + \eta)L \sin \frac{1}{2}J \sin(-\gamma + g + \theta - \theta'') \\ + 6(\alpha + \eta)L \sin \frac{1}{2}J \sin(\gamma - g + \theta - \theta'')$$

*) Es ist eigentlich in diesem Ausdruck π' die Länge des Sonnenperigäums für die Zeitepoche, während sonst in diesem § π' die Länge des Perihels der Erde ist. Auf die hier entwickelten und noch zu entwickelnden Ausdrücke hat dieser Unterschied in der Bedeutung von π' keinen Einfluss.

nun hier
$$T = T_0 + \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \delta Q$$

gesetzt werden muss, und wie oben

$$\left(\frac{dT_0}{dQ}\right) = -8\alpha \sin \frac{1}{2}J \sin(g-\gamma)$$

so wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \delta Q = & +6\alpha L \sin \frac{1}{2}J \sin(-\gamma+g+\theta-\theta'') \\ & -6\alpha L \sin \frac{1}{2}J \sin(\gamma-g+\theta-\theta'') \end{aligned}$$

aus folgt bis auf unmerkliche Grössen

$$T = 0$$

folglich auch

$$n\delta z = 0$$

hier betrachteten Glieder haben also auf die Mondlänge keinen Einfluss, sondern dieser erstreckt sich bloss auf die Mondbreite.

178.

Ich füge den im Art. 174 aufgestellten Daten die folgenden hinzu,

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2}J'' = & 8.7858; \quad \theta'' = 46^\circ 33' \text{ für Merkur} \\ = & 8.4711; \quad = 74 \quad 52 \text{ » Venus} \\ = & 8.2084; \quad = 48 \quad 0 \text{ » Mars} \\ = & 8.0596; \quad = 98 \quad 26 \text{ » Jupiter} \\ = & 8.3376; \quad = 114 \quad 56 \text{ » Saturn} \end{aligned}$$

und somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L = & +0.003 \text{ von Merkur} \\ = & +0.243 \text{ » Venus} \\ = & -0.004 \text{ » Mars} \\ = & -0.039 \text{ » Jupiter} \\ = & -0.003 \text{ » Saturn} \end{aligned}$$

nun zufolge des vor. Art.

$$s = -\frac{1}{2}L \cos \theta'' \sin(f+\omega-\theta_1) + \frac{1}{2}L \sin \theta'' \cos(f+\omega-\theta_1)$$

θ_1 wieder das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens bedeutet, so wird im Ganzen

$$s = -0.069 \sin(f+\omega-\theta_1) + 0.193 \cos(f+\omega-\theta_1)$$

$$n\delta z = 0$$

addirt man hiez zu die im Art. 176 berechneten Glieder, so bekommt man

www.libtool.com.cn

$$ndz = -0,061 \sin \theta_1 - 0,497 \cos \theta_1$$

$$s = -0,240 \sin (f + \omega - \theta_1) + 1,577 \cos (f + \omega - \theta_1)$$

die den von der Figur der Erde bewirkten,

$$ndz = -7,624 \sin \Theta$$

$$s = -8,382 \sin (f + \omega - \Theta)$$

einzuverleiben sind. Zu dem Ende ist

$$\theta_1 = \Theta + 50,223 (t - 1800)$$

und da der Unterschied zwischen θ_1 und Θ so klein ist, so können wir ihn als eine Säcularänderung der Coefficienten betrachten, von welcher die bloße Berücksichtigung der ersten Potenz für Tausende von Jahren ausreicht.

Die eben gefundenen von den Planeten herrührenden Glieder werden hiemit

$$ndz = -0,061 \sin \Theta - 0,497 \cos \Theta$$

$$-0,000015 (t - 1800) \cos \Theta + 0,000121 (t - 1800) \sin \Theta$$

$$s = -0,240 \sin (f + \omega - \Theta) + 1,577 \cos (f + \omega - \Theta)$$

$$+ 0,000058 (t - 1800) \cos (f + \omega - \Theta) + 0,000384 (t - 1800) \sin (f + \omega - \Theta)$$

Fügt man diesen die von der Figur der Erde bewirkten, eben angegebenen, Glieder hinzu, und zieht zusammen, so wird

$$ndz = 7,701 \sin (\Theta + 183^\circ 42')$$

$$+ 0,00012 (t - 1800) \cos (\Theta + 263^\circ 0')$$

$$s = 8,784 \sin (f + \omega - \Theta + 169^\circ 38')$$

$$+ 0,000388 (t - 1800) \cos (f + \omega - \Theta + 278^\circ 39')$$

die in den Mondtafeln aufgenommen sind.

Das Vorhandensein der hier berechneten, von der Aenderung der Lage der Ecliptik im Raume abhängigen Glieder habe ich zuerst gefunden, und ihre analytischen Ausdrücke schon in den »*Fundamenta etc.*« entwickelt. Später hat Airy bei der Reduction der Greenwicher Beobachtungen von 1750 bis 1830 die Hauptglieder, nemlich das mit $\cos \Theta$ in der Länge und das mit $\cos (f + \omega - \Theta)$ in der Breite multiplicirte, aus den Beobachtungen mit Sicherheit erkannt.*) Er findet aus den Beobachtungen die Coefficienten um ein Weniges grösser, wie die

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. XXVII, Beilage zu No. 648.

eorie sie oben angegeben hat, und zwar $-49'$ statt $-44'$, und $2''17$ statt $+1''577$. Diese Unterschiede sind aber nicht größer als sie die unvermeidlichen Fehler der Berechnungen zugeordnet werden können.

172.

Um die Wirkung der Planeten auf die Erection und die Variation der Länge und des Radius Vectors zu erhalten, brauchen wir denselben Theil der Störungfunction, welcher im Art. 172 angewandt wurde. Dieser ist

$$a\Omega = \frac{1}{2}u^2K \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f - 2g + 2\omega - 2\omega'$$

wo K dieselbe Bedeutung hat wie a. a. O. Substituiert man hierin

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e \cos g, \quad f = g + 2e \sin g$$

bekommt man

$$a\Omega = -\frac{1}{2}u^2Ke \cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{1}{2}u^2K \cos (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

und hieraus

$$\left(\frac{da\Omega}{dv}\right) = +\frac{1}{2}u^2Ke \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{1}{2}u^2K \sin (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$r \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) = -\frac{1}{2}u^2Ke \cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{1}{2}u^2K \cos (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

und hiemit geben die Ausdrücke des Art. 28

$$T_0 = -\frac{1}{2}u^2eK \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{1}{2}u^2eK \sin (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{1}{2}u^2eK \sin \gamma \sin (-2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{1}{2}u^2K \sin (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{1}{2}u^2K \sin (-\gamma + 3g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{1}{2}u^2K \sin \gamma \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

wandelt man diesen Ausdruck durch Hülfe der oben gegebenen Reihe in Zahlen, so bekommt man

$$T_0 = T = -0,003 \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + 0,002 \sin (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + 0,0037 \sin (\gamma \sin (-2g' + 2\omega - 2\omega')) + 0,018 \sin (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - 0,006 \sin (-\gamma + 3g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - 0,018 \sin (\gamma \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega'))$$

und hieraus durch die erste Integration

$$\begin{aligned}
 W = & + 0,003 \cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & - 0,001 \cos(-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & \quad 0,000 \cos(-2\gamma + 3g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & + 0,026 \cos(\gamma - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & - 0,009 \cos(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & + 0,002 \cos(-\gamma + 3g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & + 0,018 \cos(\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
 \overline{W} = & + 0,028 \cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & + 0,011 \cos(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 \left(\frac{d\overline{W}}{d\gamma}\right) = & - 0,027 \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & - 0,016 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
 \end{aligned}$$

folgt. Die zweite Integration giebt daher

$$\begin{aligned}
 n\delta z = & + 0,028 \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & + 0,006 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 v = & - 0,014 \cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 & - 0,004 \cos(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
 \end{aligned}$$

Die obigen Glieder von T sind schon im § 6 bei der Integration Hauptgliedern hinzugefügt worden, wie auch dort angemerkt ist. habe die Entwicklung hier nur aus dem Grunde weiter ausgeführt den Einfluss derselben auf das Resultat zu zeigen.

Um die Wirkung der Planeten auf die Evection der Breite zu halten, müssen wir wieder die Glieder der Störungfunction vor men, die im Art. 173 entwickelt wurden. Diese gaben

$$a\Omega = \frac{1}{2} u^2 K \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2g' + 2\omega')$$

und hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{ndt} = & - \frac{1}{2} u^2 K \sin \frac{1}{2} J \cos(2g' + 2\omega') \\
 \frac{dQ}{ndt} = & - \frac{1}{2} u^2 K \sin \frac{1}{2} J \sin(2g' + 2\omega')
 \end{aligned}$$

nehmen

$$\frac{dP}{ndt} = - 0,00060 \cos(2g' + 2\omega')$$

$$\frac{dQ}{ndt} = - 0.00060 \sin(2g' + 2\omega')$$

Nach § 6 der Logarithmus des Integrationsfactors hier = 0.7990

ergibt

$$\delta P = - 0,003 \sin(2g' + 2\omega')$$

$$\delta Q = + 0.003 \cos(2g' + 2\omega')$$

Die Glieder sind im § 6 mit berücksichtigt worden.

Berichtigungen.

pag. 111, Zeile 4 v. o. lies $\alpha' = +$ statt $-$

2 v. o. » $y' = +$ » $-$

» 154 » 8 v. u. » $+\frac{1}{3}P^2Q^2 + \frac{1}{14}Q^4 = -\frac{1}{3}P^2Q^2 - \frac{1}{14}Q^4$

» 185 » 3 v. u. » $-0,02 = +$

» 440, 3te Col. Zeile 5 v. u. lies 9,10 statt 7,10.

ÜBER
DEN BAU VON ANGIOPTERIS
VON
G. METTENIUS.

2007年11月11日

2007年11月11日

Die ersten Andeutungen über die von dem Typus der Farne abweichende Structur der Knollstämme der Marattiaceae gaben Meyen¹⁾ und Brongniart²⁾ durch Darstellungen von Querschnitten, welche zerstreute oder in mehreren Kreisen unregelmässig angeordnete Gefässbündel zeigen; die ersten Versuche, diese Abweichungen aufzuklären, verdanken wir hingegen Karsten³⁾ und Harting⁴⁾.

Karsten widmete bei seinen vergleichenden Untersuchungen über die Structur und das Wachsthum der Stämme der verschiedenen Abtheilungen des Gewächsreichs überhaupt eine besondere Aufmerksamkeit denjenigen Farnstämmen, bei welchen er markständige Bündel antraf, als: *Dennstädtia rubiginosa* (*Dicksonia* Klf.), *Pteris* (*Litobrochia*) *Orizabae* und *gigantea*, *Saccoloma adiantoides* (*Dicksonia Lindeni* Hk.), den *Cyatheaceis* und scheint geneigt, die bei diesen gewonnenen Resultate auf die Marattiaceae zu übertragen, deren selbst er nur beiläufig gedenkt⁵⁾; von Harting hingegen wurden gerade die bei der Zergliederung eines lebenskräftigen Stammes von *Angiopteris Teysmaniana* gewonnenen Resultate ausführlich mitgetheilt.

Aus den Untersuchungen Karsten's geht zunächst eine gewisse Mannigfaltigkeit in dem Verhalten — dem Ursprung, der Zahl, Anordnung und dem Verlauf — der markständigen Gefässbündel bei den genannten Farnen hervor. Bei *Dennstädtia rubiginosa*⁶⁾ fand sich nur ein einziger markständiger Bündel, welcher von der inneren Fläche der geschlossenen Gefässbündelröhre des Stammes entsprang; bei *Pteris Orizabae* und *gigantea*⁷⁾ trat hingegen ein Gefässbündel unabhängig von

1) Harlemer Preisschrift. T. 11, A. 4; Phys. I, 417.

2) Archiv d. Museum. I, 457. T. 33. 4. 3) Vegetationsorgane der Palmen.

4) In de Vriese's Monog. d. Marattiaceae. 6 u. f. 5) l. c. 122.

6) l. c. 121. 7) l. c. 121.

der Gefässbündelröhre des Stammes, in dem von derselben umschlossenen Mark auf und erweiterte sich in dem Verlauf nach oben zu einer zweiten engeren Gefässbündelröhre. Bei den Cyatheaceis wies Karsten nach, dass die markständigen Bündel, deren Eintritt in die Blätter bereits von Mohl ¹⁾ erkannt hatte, einen doppelten Ursprung besäßen, indem dieselben entweder wie bei Dennstädtia von der inneren Seite der Gefässbündelröhre sich abzweigen oder wie bei Pteris in eine feine prosenchymatische Spitze auslaufend frei in dem Mark enden ²⁾; in dem Verlauf dieser markständigen Bündel findet Karsten ferner eine Uebereinstimmung mit denen der Gefässbündel monokotyledoner Gewächse ³⁾, indem dieselben von ihrer Ursprungsstelle nach innen und oben in dem Mark aufsteigen, um sich dann nach aussen zu wenden und mit ihrem oberen Ende in eine senkrecht über ihrer Ursprungsstelle stehende Blattbasis einzutreten ⁴⁾. Bei *Saccoloma adiantoides* ⁵⁾ endlich sind nach Karsten's Untersuchungen sämtliche Gefässbündel des Stammes zu drei Gefässbündelröhren vereinigt, von welchen nur die äusserste Abschnitte in die Blätter eintreten lässt, während von der mittleren entsprechende Abschnitte nach aussen biegen, um die in der äusseren Röhre oberhalb einer jeden Blattbasis befindliche Lücke auszufüllen und Abschnitte der innersten Schichte die Lücken der mittleren ergänzen.

Gaben diese Beobachtungen an *Saccoloma* auch bereits einen Anhaltspunkt, um sich eine Vorstellung von dem Verhalten der in den Knollstämmen der Marattiaceae gesteigerten Zahl der Gefässbündel oder Gefässbündelkreise zu machen, so erhielt eine solche durch die Untersuchungen Harting's nicht die erwartete Bestätigung; diese führten vielmehr zu dem Resultat, dass sämtliche Gefässbündel des Stammes von Angiopteris zu einem wirren Netz vereinigt seien, dessen Maschen nach allen Richtungen des Raumes das Stammparenchym durchzögen und dass von den der Rinde des Stammes zugekehrten Maschen die in die Blätter eintretenden Bündel in symmetrischer Anordnung ihren Ursprung nähmen. Nicht minder überraschend war das Resultat der Untersuchungen Harting's, dass einzelne Gefässbündel des Stammes sich continuirlich in den Adventivwurzeln fortsetzten und diesem Verhalten gemäss in der Structur der Gefässbündel des Stammes und des

1) De struct. caud. fil. arb. 41; Verm. Schrift. 443. 2) l. c. 423.
 3) l. c. 434. 4) l. c. 428. 5) l. c. 422. 462. Taf. 9, Fig. 5, 6.

Gefäßbündelsystems der Wurzeln im Wesentlichen ein Unterschied nicht bestehe¹⁾: Harting erörtert ferner das Wachsthum des Stammes von *Angiopteris*²⁾ und weist nach, dass derselbe die verkehrt-kegelförmige Gestalt, welche andere Farne in der ersten Entwicklungsperiode besitzen, bevor sie Cylinderform annehmen, behaupte und fortbilde, indem der Umfang eines jeden jüngeren Internodiums im ausgebildeten Zustand den des nächst älteren übertreffe, ferner, dass auf der den stärksten Theil des Stammes durchschneidenden Fläche sich die in der Ausbildung begriffenen Internodien erheben nebst dem Vegetationspunkt, in welchem sämmtliches Gewebe des Stammes angelegt werde. Im Uebrigen ist er geneigt, die netzartige Vereinigung der Gefäßbündel im Zusammenhang zu bringen mit der massenhaften Ausbildung des Stammparenchyms, die bei höher organisirten Pflanzen nur in Begleitung von gleichzeitig auftretenden Gefäßbündeln zu Stande kommen könne, (eine Annahme³⁾), die im Uebrigen auch bereits von Karsten⁴⁾ angedeutet wurde.

Endlich stellte Harting vielfache Untersuchungen über die Elementarorgane des Stammes der *Marattiaceae* an, in Betreff deren ich, da sie den folgenden Untersuchungen ferner liegen, auf seine Schrift, so wie auf eine die Gefäßzellen der Farne überhaupt betreffende Bemerkung⁵⁾ von mir verweise, welche nach den nun angestellten Untersuchungen für sämmtliche Gefäßbündel der *Marattiaceae* gültig ist; desgleichen verweise ich in Betreff der Beobachtungen Harting's über die Entwicklung des Blattes auf die Berichtigungen, welche dieselben durch Hofmeister⁶⁾ erfahren haben.

Das Material, welches den folgenden Untersuchungen zu Grunde lag, bestand in einem starken Stamm von *Angiopteris evecta* Hoffm., welcher nach langjähriger Cultur in dem hiesigen botanischen Garten abgestorben war. Derselbe hatte die von Harting beschriebene, eben erwähnte Gestalt; sein unterer grösserer verkehrt-kegelförmiger Theil war an seinem älteren schmälern Ende in Fäulniss übergegangen, in der grösseren Ausdehnung aber, wie in dem oberen Theil, noch frisch; dieser bildete eine annähernd halbkugelförmige Wölbung, deren Scheitel

1) l. c. 37, 40, 57. 2) l. c. 49. 3) l. c. 52. 4) l. c. 122.

5) *Abh. d. K. Gesellsch. d. Wissensch.* VII. 583.

6) *Abh. d. K. Gesellsch. d. Wissensch.* V. 655.

ein stumpf dreikantiger pyramidaler, ungefähr $\frac{2}{3}$ Zoll hoher, am Ende abgerundeter Fortsatz einnahm, welcher die Insertion der obersten Blätter überragte und auf der Oberfläche von einem Gewebe bedeckt war, welches in allen Eigenthümlichkeiten mit dem Ueberzug der persistirenden Blattbasen übereinstimmte. Weder in der Umgebung dieser scheitelständigen völlig ausgebildeten Gewebsmasse, noch am Scheitel oder im Innern derselben konnte ein in der Entwicklung befindliches Blatt oder ein in der Fortbildung des Stammes begriffener Vegetationspunkt nachgewiesen werden.

So weit meine Erfahrungen reichen, hatte dieser Stamm in dem Zeitraum von 1852—1859 alljährlich ein Blatt entwickelt¹⁾ und gewöhnlich kurze Zeit nach Entfaltung eines neuen das nächst ältere abgestossen. Im Durchschnitt erreichten die Blätter eine Länge von 8 bis 10 Ellen; eines der letzteren Jahre war von bedeutend geringeren Dimensionen, das eines früheren Jahres hingegen überschritt die mittlere Grösse und war von seiner Insertion auf dem Blattkissen an dichotom gespalten.

Seit 1859 schien der Stamm im Absterben begriffen zu sein, denn es hörte die Entwicklung neuer Blätter auf und entwickelten sich von nun an häufiger als in früheren Jahren, Knospen an den älteren Blattkissen; in dem Spätsommer des folgenden Jahres wurde durch ein unglückliches Ereigniss das letzte Blatt abgeschlagen; 15 Monate später, während welcher der Stamm kein weiteres Lebenszeichen von sich gegeben hatte, wurde zur anatomischen Untersuchung geschritten.

Nach Entfernung des in Fäulniss übergegangenen ältesten Theils hatte der Stamm mit Einschluss der persistirenden Blattbasen beiläufig die Höhe von 1 Fuss; sein stärkster Durchmesser betrug 10 Zoll; die Blattbasen, 30 an Zahl, von welchen 6 das kuppelförmige Ende des Stammes bedeckten, nahmen im Allgemeinen von dem umfangreichsten Theil des Stammes, wo sie bei einer Länge von 4 Zoll eine Breite von $3\frac{1}{2}$ und eine Höhe von $2\frac{1}{2}$ Zoll erreichten, an Stärke ab gegen die Basis, wie gegen die Spitze; doch war diese Abnahme keine schrittweise, sondern es fanden sich zwischen den kleineren einzelne, deren

1) Ein zweites ebenso starkes Exemplar von *Angiopteris evecta* entwickelt alljährlich 3 bis 5 Blätter, ein sehr starker Stamm von *Marattia cicutaefolia* 6 bis 20, *M. laxa* 3; nur *M. Kaulfussii* bringt alljährlich nur 1 einziges Blatt.

bedeutendere Dimensionen darauf hinwies, dass sie einem kräftigeren Blatt angehört hatten. Die kleinsten Blattbasen maassen in der Länge , in der Breite $1\frac{1}{2}$, in der Höhe 1 Zoll.

Die Versuche, die Blattstellung zu bestimmen, scheiterten, da es selbst nach Einschaltung verschiedener Correctionen, die in Anbetracht der Ungleichheit der Blattbasen zulässig schienen, nicht gelang, zwei kreuzrecht über einander stehende Blätter zu ermitteln; die Gesamtheit der Blätter dürfte also wohl einem Blattcyclus von mindestens 34 Blättern angehört haben.

Durch die seitliche und untere Fläche der Blattkissen und zwischen denselben unmittelbar aus dem Stamm traten ohne gesetzmässige Anordnung, bald einzeln, bald zu mehreren dicht beisammen oder in geringen Entfernungen voneinander, Adventivwurzeln hervor, die einer sehr verschiedenen Länge bei einer Stärke von $4-5\frac{3}{4}$ Mill. erreichten; dieselben waren nur spärlich mit schwächeren Seitenzweigen versehen und sämtlich von ihrer Spitze aus in geringerer oder bedeutenderer Ausdehnung abgestorben.

Bei der Betrachtung des Querschnittes durch den stärksten Theil des oben beschriebenen Stammes, mit dessen Anfertigung die Untersuchung begonnen wurde, befindet man sich, wie bei einem Blick auf die Abbildungen Meyen's und Brongniart's, im Zweifel, ob die Gefässbündel in mehreren concentrischen Kreisen oder in einer mehrere Windungen beschreibenden Spirale angeordnet seien, oder ob beide Anschauungsweisen zu verwerfen seien und die Anordnung der Gefässbündel als eine völlig regellose zu bezeichnen sei. Der grössere Theil der Gefässbündel (Taf. I, 4) erscheint nämlich auf diesem Querschnitt als mehrere concentrische Kreise geordnet, die um ungefähr gleiche radiale Abstände von einander entfernt sind, der geringere Theil derselben hingegen ist zwischen diese Kreise eingestreut und stellt Verbindungen zwischen denselben her, so dass man, diesen letzteren folgend, in den concentrischen Kreisen die Windungen einer Spirallinie zu erkennen vermeint, welche von den wenigen, dem Centrum des Stammes nahe liegenden Bündeln in mehreren Umläufen bis zu den äussersten an der Peripherie des Stammes verfolgt werden kann. Auch nach dieser Anschauungsweise tritt eine kleinere Zahl von Gefässbündeln entgegen, welche zwischen die Umläufe der Spirale fallen oder der ihrem Lauf entgegengesetzten Richtung ihre Windungen verbinden.

Die Stärke der einzelnen Bündel und die Figur ihres Querschnittes ist sehr bedeutenden Schwankungen unterworfen; im Allgemeinen liegen indess die stärkeren in einer mittleren Zone des Stammes und nehmen die kleineren in geringerer Zahl seine Längsachse, in grösserer seine Peripherie ein.

Auf einem zweiten Querschnitt, der in geringer Entfernung oberhalb des ersten genommen wurde, ist die Anordnung der Gefässbündel die gleiche, die Ausdehnung derselben ist theilweise in erwähnenswerther Weise modificirt. Auf die zahlreichen kleineren Gefässbündel, welche in der Nähe der Längsachse des Stammes liegen und die inneren Zonen bilden, folgen nämlich 2 bis 3 Zonen, deren Gefässbündel zu je 2 bis 4 plattenförmigen Strängen von bedeutender tangentialer Ausdehnung vereinigt sind; auch haben die zahlreichen äusseren der Peripherie des Stammes näher liegenden Bündel sämmtlich eine bedeutendere Breite als auf dem tieferen Querschnitt und sind mehrfach die zwischen die Zonen fallenden Stränge zu Platten vereinigt oder doch von bedeutenderer Breite. (Taf. I, Fig. 2.)

Auf einem dritten Querschnitt, der durch die Basis des kuppelförmigen Stammendes, wenige Linien oberhalb des zweiten geführt wurde, zeigen die inneren und mittleren Bündel das nämliche Verhalten wie auf diesem, die äusseren Gefässbündel aber sind zu einer geschlossenen oder fast geschlossenen ringförmigen Zone vereinigt.

Bedeutenderen Aufschluss über die Anordnung der Gefässbündel gewährt ein Längsschnitt durch die Achse des Stammes. Die von einem solchen getroffenen kleineren Gefässbündel werden wie auf dem Querschnitt durchschnitten oder nur in sehr geringer Ausdehnung ihres Verlaufs blosgelegt, die plattenförmigen Bündel hingegen treten als Streifen von zum Theil sehr bedeutender Ausdehnung zu Tage. Im Allgemeinen steht (Taf. II, Fig. 1) in der Nähe der Längsachse des Stammes in annähernd gleichen Höhenabständen eine geringe Zahl der ersteren und schliesst sich die Mehrzahl derselben in Reihen angeordnet an diese an. In dem unteren Theil des Stammes ziehen diese Reihen annähernd parallel unter einander in schräger Richtung nach oben und aussen hin und lassen sich bis zu den Blattkissen verfolgen; in dem oberen Theil des Stammes (Taf. II, Fig. 2) setzen sich diese Reihen in die Streifen fort, von welchen die äusseren in die das gewölbte Ende des Stammes bedeckenden Blattbasen (*a, b, c*) eintreten, die nächst inneren steiler

und um die Peripherie des scheidelständigen Fortsatzes zu-
 rigen (*d*), die innersten endlich fast perpendikular aufsteigen
 am Parenchym dieses Fortsatzes erlöschen (*e*). Getrübt er-
 dess auch diese Anordnung der Gefässbündel dadurch, dass
 1 zwischen zwei schrägen Reihen eine dritte auftritt, die durch
 einer der ersteren entstanden zu sein scheint, oder dadurch,
 in ihrer grösseren Ausdehnung von einander getrennte Reihen
 inzig sich vereinigen.

bei Vergleichung des Längs- und Querschnittes sich unmittel-
 nen lässt, dass die plattenförmigen Bündel des letzteren den
 migen des ersteren entsprechen, so lässt sich nach Entfernung
 chyms bis zu der Tiefe weniger Linien aus der Umgebung der
 Gefässbündel, der Zusammenhang derselben, sowohl derer,
 einer Zone des Querschnittes nebeneinander stehen, als auch
 lche in den schrägen Reihen des Längsschnittes nächst auf-
 öfolgen, darthun. Es sind also diese Gefässbündel in den an-
 Richtungen zu Netzschichten vereinigt und bildet demnach im
 n das Gefässbündelsystem des Stammes von Angiopteris
 n und über einander gestülpte trichterförmige Zonen, die mit
 eren Ende in der Längsachse des Stammes über einander
 h nach oben und aussen erweiternd die Peripherie des Stam-
 hen und in die Blätter eintreten; die untersten dieser Trichter-
 lem ältesten Theil des Stammes sind die kürzesten; die Aus-
 ler folgenden steigert sich bis zu dem stärksten Theil des
 dann findet eine Abnahme derselben statt und wird ihre Rich-
 steilere, bis endlich die obersten, die für Blätter bestimmt
 ren Ausbildung unterblieben war, eine fast perpendikuläre
 nnehmen; in dem unteren Theil des Stammes sind ferner
 izerzonen gitterartig durchbrochen und werden von zahl-
 eineren netzartig vereinigten Gefässbündeln zusammengesetzt,
 uren nimmt mit der Erweiterung und Vereinigung der Gefäss-
 Umfang der Maschen ihres Netzes ab und schwindet all-
 gitterförmig durchbrochenes Ansehen, bis sie endlich voll-
 schlossen erscheinen.

ämliche Anschauung von der Verbindung der Gefässbündel
 n nach Entfernung des Rindenparenchyms von den einander
 en Enden sämtlicher Schichten, sowie den in die Blätter

selbst eintretenden Abschnitten derselben. Von dem Grund bis gegen den stärksten Theil des Stammes bildet die oberflächliche Lage des Gefässbündelsystems (Taf. III, Fig. 1, 2) ein Netz und nehmen die Blätter gitterförmig durchbrochene Gefässbündelzonen auf, während an dem oberen Theil des Stammes eine domartig geschlossene Holzzone (Taf. IV, Fig. 2) sich erhebt und von dieser breite bandförmige Platten in die Blätter sich ablösen und zwar findet im Allgemeinen ein allmählicher Uebergang (Taf. IV, Fig. 1) von dem vielmaschigen Netz am Grunde des Stammes zu der geschlossenen Zone am Ende desselben statt, doch erfolgt derselbe nicht gleichmässig auf gleicher Höhe rings um den Stamm, vielmehr kommt die Vereinigung der Gefässbündel auf der einen Seite des Stammes früher, auf einer andern später zu Stande und ebenso findet zuweilen nach einer frühzeitigen Vereinigung mehrerer Gefässbündel eine neue Trennung derselben statt.

Eine Vereinigung benachbarter Gefässbündel zu Platten ist im Allgemeinen bei Baumfarnen, namentlich in dem Blattstiel derselben, wie Karsten¹⁾ dargethan hat, keine seltene Erscheinung und kehrt in minder augenfälligem Grad auch bei krautartigen Farnen wieder, ebenso weist die Thatsache, dass von nah verwandten Farnen der Stamm der einen eine geschlossene Gefässbündelröhre, der von andern zahlreiche zu einem gitterförmigen Netz vereinigte Gefässbündel enthält, darauf hin, dass dieses doppelte Verhalten des Gefässbündelsystems nur eine Modification der Farnstructur von untergeordneter Bedeutung sei; nichtsdestoweniger zieht bei dem Angiopteris dieses Verhältniss die Aufmerksamkeit an, weil die Extreme beider Modificationen am Grund und am Scheitel des Stammes ausschliesslich ausgebildet sind und der Uebergang zwischen beiden gerade an der Stelle wahrgenommen wird, an welcher das nachweisbar languescirende Wachstum des Stammes, das dem völligen Absterben voranging, anhub. Durch diesen letzteren Umstand gewinnt die Annahme Karsten's, dass diese Veränderung der Structur in Folge einer veränderten Ernährung eintrete, an Wahrscheinlichkeit; doch können nur zahlreiche Beobachtungen feststellen, ob bei dem Angiopteris diese Veränderung der Structur constant als ein Vorbote des nahenden Todes eintrete und ob der Stamm, so lang er in kräftigem Wachstum sich befindet, in seiner ganzen Ausdehnung gitterförmig durchbrochene

1) l. c. 123, 124.

Gefässbündelschichten bilde, wie es bei dem von Harting untersuchten noch lebenskräftigen Stamm der Fall gewesen sein dürfte.

Bei der Annahme, dass das Gefässbündelsystem von Angiopteris aus über einander gestülpten trichterförmigen Zonen bestehe, waren diejenigen Bündel, welche auf dem Längs- und Querschnitt zwischen diesen Zonen liegen, ausser Acht gelassen. Durch diese Bündel werden zwischen den auf einander folgenden Zonen Verbindungen hergestellt, die nach Entfernung des Stammparenchyms zu Tage treten. Zur genaueren Bestimmung dieser Verbindungen dürfte die Einsicht der in ein Blatt eintretenden Bündel, sowie der Ersatz derselben den sichersten Anhalt bieten und zwar sollen diese Verhältnisse zunächst an den den oberen Theil des Stammes bedeckenden Blättern erörtert werden.

Auf dem Querschnitt durch den Grund eines dieser Blätter (Taf. IV, Fig. 5, 44) bilden die Gefässbündel 1) einen continuirlichen oder fast continuirlichen, den Rücken und die Seiten desselben einnehmenden Bogen (a) und stehen einige weitere Gefässbündel 2) auf der vorderen Seite des Blattgrundes zwischen den Enden dieses Bogens (b, c, d, e) und 3) in der Nähe der Längsachse des Blattes (i, f, g, h) in dem von den unter 1) und 2) angeführten Gefässbündeln ungeschlossenen Parenchym.

An dem entrindeten Stamm erweist sich der den Rücken und die Seiten des Blattes einnehmende bogenförmige Bündel als ein Abschnitt der oberflächlichen Gefässbündelschichte des Stammes, die hier den letzteren verlässt (Taf. IV, Fig. 2). Sein Ersatz wird dadurch herbeigeführt, dass von der nächst inneren Gefässbündelzone des Stammes ein entsprechender Abschnitt (Taf. IV, Fig. 2 v; Fig. 3 v) sich sondert, nach oben und aussen durch das Stammparenchym in dem Grund der Blattachsel aufsteigt und auf der Höhe, wo jener in das Blatt ablenkt, in die oberflächliche Zone eintritt und die Stelle desselben einnimmt.

Diesem Verhalten entsprechend lässt sich der in ein Blatt eintretende Abschnitt selbst in der oberflächlichen Gefässbündelschichte des Stammes nur eine gewisse Strecke abwärts, nämlich bis zu den drei nächst unteren und seitlichen Blättern verfolgen und setzt sich durch deren Achseln in die Tiefe steigend in die zweite Gefässbündelzone des Stammes fort und zwar tritt der die Mitte des Blattrückens einnehmende grössere Theil dieses Abschnittes durch die Achsel des mittleren untersten dieser drei Blätter, und treten die die beiden Seiten des Blattes

einnehmenden Theile dieses Abschnittes durch die Achseln der beiden nächsten seitlichen unteren Blätter in die Tiefe, oder mit andern Worten, die oberflächliche Gefässbündelzone eines jeden Blattes wird von den durch die Achseln dreier unterer Blätter in die oberflächliche Gefässbündelschichte eingetretenen Abschnitten der nächst inneren Zone gebildet, oder ein jeder aus dem Grund einer Blattachsel hervortretende Abschnitt dieser Zone nimmt Theil an der Bildung dreier höheren Blätter, indem er zunächst nach seinem Eintritt in die oberflächliche Zone nach rechts und links an die Seiten der nächsten oberen seitlichen Blätter, dann mit seinem Ende in dem Rücken des zwischen diesen beiden Blättern höher am Stamm inserirten Blattes sich ausbreitet. Bei der Annahme, dass die Blattstellung des untersuchten Stammes nach der Divergenz $\frac{13}{31}$ geregelt war, tritt demnach der aus der Achsel des neunten Blattes in die oberflächliche Schichte eintretende Abschnitt der zweiten Gefässbündelschichte zunächst an den Seiten des elften und zwölften, dann in den Rücken des vierzehnten Blattes. Der in dem Rücken des neunten Blattes endende Abschnitt der oberflächlichen Gefässbündelzone kann abwärts bis zu der Achsel des vierten Blattes und die an den Seiten des neunten Blattes sich verbreitenden Abschnitte können bis zu den Achseln des sechsten und siebenten Blattes verfolgt werden.

Der aus der Tiefe einer Blattachsel hervortretende Abschnitt der zweiten Zone ist zu beiden Seiten von dieser durch eine Spalte getrennt (Taf. IV, Fig. 3 *ss*), fließt rechts und links von der Blattbasis mit den bereits in der oberflächlichen Zone liegenden, aus den Achseln der beiden nächst unteren seitlichen Blätter hervorgetretenen Abschnitten oberhalb der Stelle, an der diese einen Abschnitt (*tt*) an die Seite dieses Blattes abgegeben haben, zusammen und hierdurch findet rechts und links an der Seite einer jeden Blattbasis eine Vereinigung der beiden aufeinanderfolgenden Gefässbündelzonen statt und ist eine jede Blattbasis an ihrem tiefsten Grund zwischen diesen beiden Zonen eingeschlossen (Taf. III, Fig. 4).

Die Ergänzungen der Lücken der zweiten Zone, welche an der Basis eines jeden Blattes durch den Austritt eines Abschnittes derselben in die oberflächliche Zone entstehen, werden ausgefüllt durch Abschnitte der dritten Zone (Taf. IV, Fig. 3 *i, i*), die sich nach aussen wenden und mit der zweiten zusammenfließend, nach oben die Spalte schliessen

(Taf. IV, Fig. 3 *uu*), durch welche der aus dieser Schichte ausgetretene Abschnitt von derselben getrennt ist.

Diesen Verbindungen der auf einander folgenden Schichten verdankt ein Theil der auf Längs- und Querschnitten zwischen den Gefäßbündelzonen stehenden Stränge seinen Ursprung.

Eine weitere Verbindung tritt bei der näheren Untersuchung des Ursprungs der übrigen Gefäßbündel des Blattes nach völliger Entfernung des Parenchyms aus dem Grund der Blattachsel in zwei Strängen zu Tage, die von der inneren Fläche der Rückenplatte des Blattes in sanft aufsteigender Richtung, den nach Entfernung des Parenchyms zwischen ihr und der nächst inneren Schichte befindlichen Zwischenraum überbrückend (Taf. IV, Fig. 4 *m*), nach innen an den Rand des zum Eintritt in die oberflächliche Schichte bestimmten Abschnittes der letzteren herantreten (Taf. IV, Fig. 10, 13 *m*), eine geringe Strecke mit demselben verbunden bleiben (*n, n*), dann nach oben und aussen in das Blatt sich wenden (Taf. IV, Fig. 10 *b*, 13 *c*) und die beiden vorderen seitlichen Bündel (Taf. IV, Fig. 5, 11 *b c*) desselben bilden; in andern Fällen werden diese beiden Stränge vermisst und gehen dann unmittelbar von den Rändern des Ersatzabschnittes von der Stelle, wo im eben beschriebenen Fall dieselben sich ansetzten, zwei Zweige in das Blatt ab (Taf. IV, Fig. 12 *b*).

Die übrigen Gefäßbündel, die der Querschnitt durch die Blattbasis kennen lehrte, entspringen von der inneren Fläche der Dorsalplatte, gewöhnlich neben der Mitte derselben von zwei Stellen (Taf. IV, Fig. 12 *f*; 13 *g*), seltner von einer gemeinschaftlichen knotenförmigen Auftreibung (Taf. IV, Fig. 6, 7, 8 *k*) und verdanken zweien Zweigen ihren Ursprung, die alsbald in ihrem Verlauf weitere Theilungen erfahren und theilweise in der Längsachse des Blattes verbleiben (Taf. IV, Fig. 5, 7, 8 *g, f*), theilweise auf die vordere Seite desselben treten (*e, d*) und hier auch mit den beiden von der Ersatzschichte abstammenden Zweigen frühzeitig Verbindungen eingehen (Taf. IV, Fig. 6 *o*). Ausser diesen entspringt noch ein oder der andere Bündel von einer höheren Stelle auf der inneren Fläche der Dorsalplatte (Taf. IV, Fig. 5 *k, i*; 8 *h*; 9 *i*).

Nach diesem Verhalten bildet also nicht die oberflächliche Gefäßbündelzone des Stammes allein die Gefäßbündel des Blattes und existet nicht die nächst innere allein Ersatz für die in dem Blatt er-

stalt und Weite und ebenso ist die Zahl seiner Stränge, welche an der Basis der starken Stränge, die wir als die Anfänge der Ersatzschichten kennen gelernt haben, zusammenschliessen, vielfachen Schwankung unterworfen, so dass dasselbe auf dem Querschnitt bald von einer grösseren Zahl kleinerer Stränge, bald von einer geringeren Zahl grösser gebildet wird und eine Beziehung seiner Maschen zu den Blättern nicht erkannt werden kann. Eine solche Beziehung aber geht, mag nun auch dahin gestellt bleiben, ob diese Unregelmässigkeit in einer unwesentlichen Theilung der Gefässbündel oder in einem Schwanken der Zahl der Stränge, die sich zu einem Ersatzstrang vereinigen, begründet sei mit der grössten Wahrscheinlichkeit aus der Thatsache hervor, dass die Ersatzstränge durch die Mitte der Blattachseln in die oberflächliche Stammzone ansteigen, mithin eine der Blattstellung übereinstimmende Anordnung besitzen. Dieselben müssen demnach von dem die Längsachse des Stammes umstrickenden Netz unter der Divergenz, mit welcher die Blattspirale fortschreitet, entspringen, die Zonen der Stammgefässbündel aber, die ich in Kürze als Trichterzonen bezeichnet habe, kommen durch das Zusammentreten der in der Spirale benachbarten auf verschiedenen Höhen entspringenden Ersatzschichten zu Stande.

Aus der Thatsache, dass nicht nur die oberflächliche Stammzone sondern auch die Ersatzschichte Gefässbündel in jedes Blatt abgiebt, folgt ferner, dass letztere frühzeitig ausgebildet sein müsse, eine Folgerung, die durch die Untersuchung des blattlosen Stammendes ihre volle Bestätigung erhalten hat. In dem auf dem Scheitel des Stammes befindlichen, die oberen Blätter überragenden Fortsatz waren innerhalb des von der geschlossenen oberflächlichen Gefässbündelzone umschlossenen Marks zahlreiche Stränge vorgebildet, von welchen die äussersten an zwei Stellen mit dieser Verbindungen eingingen, die mit denjenigen übereinstimmten, die wir an der Ursprungsstelle eines Blattes zwischen den beiden äusseren Stammzonen kennen gelernt haben; von den inneren dieser Gefässbündel (Taf. II. Fig. 2 c, c, c'), die für Blätter bestimmt waren, deren Ausbildung gänzlich unterblieben oder doch auf einer so frühen Entwicklungsstufe gehehmt war, dass auch nicht eine Spur derselben sichtbar blieb, konnte nur nachgewiesen werden, dass sie nirgends frei in dem Parenchym auftraten, sondern dass die oberen jüngeren stets mit den unteren älteren in Verbindung standen und also ihre Verbindungen unter einander in der ersten Anlage begründet waren.

nach dass ihre Entwicklung, wie bei den Farnen überhaupt, von unten nach oben fortschreite.

Ob der Stamm von Angiopteris vor dem Absterben normal in einen solchen Fortsatz ende, muss der Beobachtung einer grösseren Zahl von Exemplaren überlassen werden und wenn auch unwahrscheinlich ist, dass das Wachstum eines Stammes nach einer so beträchtlichen Abnahme seines Umfanges eines neuen Aufschwunges fähig sei und durch unsere Untersuchungen das von Harting sorgfältig erörterte Wachstum des Stammes, in Folge dessen er die verkehrt-kegelförmige Form, die die Stämme anderer Farnen frühzeitig verlassen, um Cylinderform anzunehmen, fortbilde, die vollkommenste Bestätigung erhalten hat, so kann doch die Bemerkung nicht unterdrückt werden, dass keine That- sache in diesen Beobachtungen Harting's festgestellt ist, die unmöglich erscheinen lasse, dass der Stamm eines Angiopteris, etwa unter Umständen, die sein Wachstum beeinträchtigen, aber dasselbe nicht aufheben, Cylinderform annehme¹⁾, zumal da bei Farnen aus den verschiedensten Abtheilungen²⁾ Stämme vorkommen, die bauchige Erweiterungen besitzen oder selbst bei lebhaftem und raschem Wachstum den einmal erreichten Durchmesser verringern.

An andern Farnen, die aus unbekanntem innern Ursachen abgestorben waren und ebenso bei solchen, die häufig schon nach der ersten Vegetationsperiode zu Grunde gehen und desshalb als jährige Pflanzen bezeichnet werden, z. B. *Ceratopteris thalictroides*, *Gymnogramme chaerophylla*, suchte ich bisher vergeblich nach der Umbildung des Vegetationspunktes in einen die oberen Blätter überragenden Fortsatz; diese selbst nebst dem oberen Theil des Stammes waren vielmehr stets zunächst abgestorben³⁾. Eher dürften bei Farnen, deren Stamm bei normalem Wachstum der Entfaltung der Blätter vorausseilt, z. B. zahlreichen Arten von *Polypodium*, *Davallia*, *Dennstädtia*, *Microlepidia* u. a. analoge

1) Der von Meyen beobachtete Stamm hatte eine Höhe von 3 Fuss bei einem Durchmesser von 10 bis 12 Zoll; der verkehrt-kegelförmigen Gestalt desselben geschieht zum Mindesten keine Erwähnung.

2) Unger, Denksch. d. K. K. Akad. VI. 144, 145.

3) Untersuchungen über das Verhalten aus innern Ursachen abgestorbener oder im normalen Lauf der Vegetation erlöschender Achsen sind mir nicht bekannt; meine eigenen Beobachtungen sind noch nicht so weit vorgeschritten, dass ich sie hier anführen könnte.

Erscheinungen auftreten, da bei diesen häufig die Blätter, nachdem die Gefässbündel derselben in dem Stamm ihre volle Ausbildung erreicht haben, in den frühesten Entwicklungsperioden zu Grunde gehen; noch treffender dürfte *Oleandra neriiformis*¹⁾, an deren Stamm bei normalem Wuchs verkürzte Internodien mit fast wirtelartig zusammengedrängten Blättern mit längeren Stammstücken, an welchen jede Spur eines Blattes ausserlich vermisst wird, hier anzuführen sein, da die anatomische Untersuchung den Beweis liefert, dass an den blattlosen Stammstücken eine grössere Zahl von Blättern unterdrückt worden ist, indem die Gefässbündel dieser Stammstücke spiralig angeordnete Blattlücken umgrenzen, die nur durch ihre bedeutendere Dehnung von denjenigen der beblätterten Internodien abweichen und von den Rändern dieser Lücken Zweige abgehen, die in der Rinde ansteigen und in derselben an der Stelle erlöschen, an der die Ausbildung des Blattes unterblieben war²⁾ und nur durch bedeutendere Feinheit von denjenigen abweichen, welche von den verkürzten Internodien des Stammes in die Blätter eintreten.

Die Gefässbündel des Stammes von *Angiopteris*, so verschieden auch ihre Stärke ist, zeigen überall eine übereinstimmende Structur.

Von dem Parenchym des Stammes sind sie zunächst abgegrenzt durch eine einzige Lage weiter gestreckter Zellen, die auf den zum Mittelpunkt des Gefässbündels radialen Längswandungen mit breiten Quer- oder Netzfasern und etwas schmäleren mit diesen alternirenden spaltenförmigen Tüpfeln versehen sind. Die Peripherie des Bündels nehmen alsdann zartwandige langgestreckte Zellen, die eigenen Gefässe Mohl's ein, der centrale grössere Theil desselben besteht überwiegend aus treppenförmigen Zellen und einigen wenigen Spiralfaserzellen. Letztere sind gewöhnlich schwierig aufzufinden und liegen an den feineren Bündeln entweder auf der dem Centrum des Stammes zugekehrten Seite oder sind mehr dem Centrum des Bündels genähert; an den

1) In einer andern später erscheinenden Schrift habe ich das Wachstum der verschiedenen Arten von *Oleandra*, so wie die auf den ersten Blick ganz paradoxe Verzweigung der genannten Art nach Einsetzung der fehlgeschlagenen Blätter in ihre Stellen zu erklären gesucht.

2) Die Bezeichnung solcher Gefässbündel als stammeigene (Naegeli Beit. I. 35, 51) scheint mir im höchsten Grad unpassend.

rkeren Bündeln, wie an den plattenförmigen Strängen suchte ich die-
ben stets vergeblich. Von den treppenförmigen Zellen haben die-
jenigen, welche unmittelbar an die Spiralfaserzellen angrenzen, engere
minna und liegen dichter an einander, die entfernteren sind weiter,
ben eine lockere unregelmässigere, niemals eine gereichte, Anordnung
d sind durch zartwandige langgestreckte Zellen, die häufig in mehrere
er einander stehende kürzere abgetheilt sind, von einander getrennt.
der geschlossenen Gefässbündelzone des Stammendes beschreiben
nmtliche Zellen schlangenförmige Biegungen.

In den Gefässbündeln der Blattbasis nehmen die Spiralfaserzellen
tweeder die der Längsachse des Blattstieles zugekehrte Seite oder das
entrum derselben ein, ersteres in den peripherischen, letzteres in den
entralen und sind alsdann die treppenförmigen Zellen bald auf der äus-
ren, bald auf der inneren Seite reichlicher ausgebildet.

Dass die Wurzeln von Angiopteris nicht von der oberflächlichen
fässbündelschichte des Stammes, wie bei anderen Farnen, ihren Ur-
rung nehmen, sondern aus dem Innern desselben von den das Mark
rziehenden Gefässbündeln entspringen¹⁾, ist durch die Abbildungen
n Meyen und Brongniart hinlänglich bekannt; Brongniart hat
gleich hervorgehoben, dass die Gefässbündel des Stammes unmittel-
r von dem Markparenchym umgeben seien, die Wurzeln hingegen eine
gene Rinde besässen, durch welche ihr Gefässbündelsystem von die-
m geschieden sei²⁾. Auch auf dem von Harting dargestellten Längs-
chnitt³⁾ durch den Stamm ist dieser Unterschied hinlänglich hervor-
hoben, wenn auch die Zahl der Stammbündel im Vergleich mit dem
n mir untersuchten Stamm zu gering und ihre Stärke zu schwach
iedergegeben zu sein scheint. Umsomehr aber musste die Annahme
arting's, dass die Wurzeln unmittelbare Fortsetzungen der Stamm-
ndel seien, befremden.

1) In diesem Punkt weicht unter den fossilen Farnen die Gattung Psaronius,
ren Stammgefässbündel gewöhnlich bandförmig gedehnt sind, auffallend von den
rattiaceis der jetzigen Flora ab; ihre Wurzeln nehmen die Oberfläche des Stammes
und werden nicht zwischen den Stammbündeln wahrgenommen. Der baumartige
indrische Stamm der Psaronien, der wenigstens bei einigen Arten entfernt stehende
tter trug, macht ferner wahrscheinlich, dass die Verwandtschaft derselben mit den
rattiaceis keine allzu innige sei.

2) l. c. 467.

3) l. c. Taf. VI, f.

An dem untersuchten Stamm nahmen die an seinem unteren Theil hervortretenden Wurzeln von den Gefässbündeln der unteren Blätter ihren Ursprung und stiegen die aufwärts an diese sich anschliessenden successiv von den Gefässbündeln der oberen Blätter, die nach Maassgabe unserer Untersuchungen innerhalb und oberhalb der ersteren liegen, herab; an dem oberen Theil des Stammes nach der Vereinigung seiner Gefässbündel waren überhaupt nur sehr wenige Wurzeln entwickelt worden, ein Umstand, der mit dem Absterben des Stammes in einiger Beziehung gestanden haben dürfte.

Der Querschnitt einer stärkeren Wurzel zeigt innerhalb des Rindenparenchyms ein centrales Gefässbündelsystem, welches aus einem Ring von meist achtzehn radial gestellten plattenförmigen Streifen verholzter Zellen und ebenso vielen alternirenden Gitterzellbündelchen und einem zartwandigen parenchymatischen mässig gestreckten Gewebe besteht, welches beide verbindet. Das peripherische Ende der Platten nehmen wenige enge Spiral- und Netzfaser-Zellen ein, der grössere Theil derselben besteht aus Treppenzellen, deren Lumen mit ihrer Annäherung gegen das Centrum der Wurzel sich erweitert. In manchen Wurzeln schliessen diese Platten früher ihre Ausbildung ab und sind alsdann in ihrer ganzen Ausdehnung von einander getrennt, in anderen fliessen die benachbarten oder sämtliche Platten an ihrem innern Ende zusammen, wodurch das vielstrahlig sternförmige Ansehen des querdurchschnittenen Gefässbündelsystems der Wurzel zu Stande kommt, welches bereits Meyen¹⁾ dargestellt hat.

Mit dem äusseren Theil dieser Platten alterniren die Gitterzellbündel, die aus engen langgestreckten, bald mit horizontalen Wandungen über einander stehenden, bald mit zugespitzten Enden in einander greifenden Zellen bestehen. Von ihnen sind die das centrale Ende dieser Bündelchen einnehmenden mit einem weiteren Lumen und mit Tüpfeln versehen, die mit den von Mohl in den Wurzeln der Palmen²⁾ abgebildeten völlig übereinstimmen.

An der Grenze des Gefässbündelsystemes und der Rinde liegt eine Lage gestreckter weiter Zellen, die auf den radialen Längswandungen mit Querfasern und zwischen liegenden feinen spaltenförmigen Tüpfeln versehen sind.

1) Harl. Preisschr. T.VIII, F. 22; Phys. I, 418. 2) De structura Palm. T.VII, F. 6.

Die Rinde der Wurzel besteht aus zwei ohne scharfe Grenze in einander übergehenden Zonen parenchymatischen Gewebes, von welchen die innere aus längeren engeren festeren Zellen mit zwischen liegenden Intercellulargängen, die äussere aus kürzeren weiteren Zellen, deren Wandungen fast gallertartig zusammenfliessen, besteht.

In dem Verlauf durch das Stammparenchym bleibt die Structur der Wurzel durchaus unverändert und findet eine Verwachsung der Wurzelrinde mit demselben nicht statt; beide liegen nur innig an einander und ist ihre Grenze stets an den verdickten gelblichen Wandungen der Wurzelepidermis kenntlich.

An dem Ursprung der Wurzeln fliesst ohne sichtbare Grenze die Rinde derselben und das Parenchym des Stammes zusammen und tritt das Gefässbündelsystem der ersteren in Verbindung mit einem Gefässbündel des letzteren, der Art, dass die Treppenzellen beider mehr oder minder rechtwinklicht auf einander stehen. Die Ansatzstelle der Wurzel wird dann durch einige kürzere netzfaserige oder treppenförmige Zellen erweitert; nirgends aber tritt, so weit meine Untersuchungen reichen, eine treppenförmige Zelle eines Stammbündels unmittelbar in eine Wurzel ein und wenn ich auch die Möglichkeit nicht in Abrede stellen will, dass bei dem Angiopteris, wie bei anderen Farnen diejenigen Wurzeln, welche frühzeitig an bestimmten Stellen von den in die Blätter eintretenden Gefässbündeln gebildet werden, continuirlich mit den letzteren zusammenhängen, ein solcher Zusammenhang stattfinden könne, so ist doch die Structurverschiedenheit der Wurzel und der Gefässbündel des Stammes eine so bedeutende und auffallende, dass ich vermuthen möchte, die Annahmen Harting's seien einem Versehen entsprungen, indem dieser Forscher eine Wurzel aus dem Stamm an der Stelle eines Stammbündels untersuchte.

In dem Verlauf durch das Stammparenchym sind die Wurzeln stets unverzweigt, nach ihrem Eintritt in den Boden geben dieselben kleinere Seitenzweige ab, die an dem untersuchten Exemplar in nur sehr geringer Menge zur Ausbildung gekommen waren.

Vergleichen wir die Structur von Angiopteris mit denjenigen Farnen, bei welchen keine markständigen Gefässbündel vorkommen und zunächst solchen, deren Blätter eine mehrzeilige Anordnung besitzen, so finden wir bei diesen sämtliche Gefässbündel des Stammes zu einer Röhre vereinigt, die an der Insertion eines jeden Blattes von einer Lücke

durchbrochen ist und von der Umgrenzung dieser Lücken die für das Blatt bestimmten Gefässbündel abgiebt und beruhen sämtliche Modificationen der Structur dieser Farne 1) auf der Divergenz und Distanz der Blätter, der Breite und Höhe ihrer Insertionsflächen oder der Blattlücken in der Gefässbündelröhre und 2) auf der Zahl und Anordnung der in ein Blatt eintretenden Bündel.

Bei der Ausbildung längerer Internodien, deren Blätter am Stamm nicht herablaufen, zeigt der Querschnitt durch ein Internodium des letzteren einen geschlossenen Gefässbündelring, z. B. *Alsophila pruinata*, *Cibotium*, während derselbe bei gedrängterer Stellung der Blätter, z. B. *Aspidium filix mas*, oder bei entfernteren, aber am Stamm herablaufenden Blättern, z. B. *Polybotrya*, einen Kreis von kleineren Gefässbündeln enthält, deren Zahl der der durchschnittenen Blattlücken gleichkommt, Verschiedenheiten, die als unwesentliche erscheinen, da bei allen die räumliche Ausdehnung der Blattlücken und der Gefässbündel in umgekehrtem Verhältniss zu einander stehen und bei allen die Gefässbündelröhre, insofern ihre Unterbrechungen auf die Blattlücken beschränkt sind, in gleichem Grad geschlossen ist.

Die in die Blätter eintretenden Bündel sind entweder zu einer continuirlichen, der Convexität des Rückens und der Seiten des Blattstiels entsprechend gekrümmten Platte, z. B. bei *Alsophila pruinata*, *Cibotium*, zahlreichen Arten von *Pteris* vereinigt, oder sie sind auf einen schmalen vor der unteren Kante der Lücke entspringenden Bündel beschränkt, oder es treten zwei seitliche symmetrische Platten von dem Grund der Blattlücke aus in das Blatt ein und lösen sich zwischen diesen ein oder mehrere Bündel für Wurzeln los, z. B. zahlreiche Arten von *Asplenium*, *Pteris hirsuta*, oder es treten mehrere zu einem Bogen geordnete Bündel, von welchen die beiden vorderen die stärkeren sind, in ein Blatt ein, z. B. *Aspidium filix mas*.

Bleiben wir zu unserm Behuf bei diesem letzteren Beispiel stehen, so ergiebt sich, dass die Blattlücken seiner Gefässbündelröhre seitlich abgegrenzt werden von zwei Strängen, die vertical über der Mitte der beiden nächst unteren seitlichen Blätter stehen und nach oben und unten abgeschlossen werden durch je zwei Bündel, die von den oberen und unteren Enden dieser beiden seitlichen Stränge an das untere Ende des oberhalb ihrer Mitte stehenden verticalen Stranges und das obere des unter ihr stehenden hinziehen. Diese Bündel verfolgen, paarweise unter

einander parallel, eine schräge Richtung und sind gewöhnlich diejenigen beiden, welche in die Richtung des kürzeren Weges der Blattspirale fallen, die längeren, die beiden anderen, welche in der Richtung des längeren Weges der letzteren liegen, die kürzeren. Bei $\frac{5}{13}$ Stellung der Blätter, die dem genannten *Aspidium* häufig zukommt, wird z. B. die Lücke des vierzehnten Blattes seitlich abgegrenzt durch die in verticaler Richtung über der Mitte des sechsten und neunten Blattes stehenden Stränge und erhält ihren Abschluss durch vier Stränge, von welchen zwei an das obere, zwei an das untere Ende dieser Stränge sich ansetzen und von welchen die ersteren die Verbindung mit dem untern Ende des über der Mittellinie des vierzehnten, letztere mit dem oberen Ende des über dem ersten Blatt befindlichen verticalen Stranges herstellen.

Von den in die Blätter eintretenden Bündeln entspringen die beiden vorderen stärkeren von den verticalen seitlichen Strängen, zuweilen auch von den oberen schrägen Bündeln, die kleineren zu geringerem Theil von dem Grund der seitlichen Stränge, zum grösseren Theil von den beiden unteren schrägen Bündeln; bei der Vergleichung mit anderen Farnen erscheinen diese zahlreichen kleineren Bündel als die Ausbreitungen des oberen Endes des nächst unteren verticalen Stranges.

Es haben nach dieser Betrachtung also an der Bildung eines jeden Blattes drei über der Mitte unterer und seitlicher Blätter stehende verticale Stränge Antheil und giebt ein jeder derselben seitlich nach rechts und nach links Zweige in die beiden Blätter, deren Lücken er scheidet und endet alsdann in dem Rücken des nächst höheren Blattes. Und in dieser Beziehung findet eine unverkennbare Uebereinstimmung zwischen dem *Aspidium* und dem *Angiopteris* statt, bei dem die über der Mittellinie eines Blattes hervortretenden Ersatzabschnitte sich in die oberflächliche Gefässbündelschichte dreier Blätter ausbreiten.

Erwägt man weiter, dass die oberflächliche Schichte des Gefässbündelsystems von *Angiopteris* ein Netz bildet, das an dem oberen Theil des Stammes nur von Blattlücken durchbrochen ist, wie die Gefässbündelröhre von *Aspidium* — von dem Umstand, dass an dem Grund des Stammes von *Angiopteris* die die Blattlücken umgrenzenden Stränge in der unregelmässigsten Weise gitterartig durchbrochen sind, können wir hier absehen — so muss die Frage entstehen, ob, wie die oberflächliche Gefässbündelzone von *Angiopteris* von den oberen Enden der aus der

Stammtiefe durch die Mitte der Blattachsen hervortretenden Ersatzschichten zusammengesetzt werde, so bei dem *Aspidium* die über der Mitte der Blätter stehenden verticalen Stränge als Neubildungen auftreten und durch Vereinigung derselben mit den benachbarten Strängen der Gefässbündelröhre fortgebildet werde.

Der Erörterung dieser Frage dürfte die Bemerkung vorauszuschicken sein, dass über dieselbe zwei Ansichten einander gegenüber stehen, von welchen die eine durch von Mohl und Unger, die andere durch Naegeli und Karsten vertreten wird. Erstere nehmen an, dass die Gefässbündel im Stamm der Farne an ihrem oberen Ende continuirlich sich fortbildeten, durch Spaltung und Wiedervereinigung der benachbarten Zweige die Blattlücken umgrenzten und von den Rändern dieser die für die Blätter bestimmten Zweige abtreten liessen und schreiben wegen diesem Verhalten der Gefässbündel den Farnen eine *Vegetatio terminalis* zu; Naegeli und Karsten hingegen nehmen an, dass bei den Farnen, wie bei höher organisirten Gewächsen die Gefässbündel unabhängig von einander auftreten, mit ihrem oberen Ende in ein Blatt eintreten und mit ihrem unteren Ende aneinandertretend sich zu einem Netz vereinigen und Karsten¹⁾ erläutert seine Ansicht dahin näher, dass der oberhalb der Mitte einer Blattlücke liegende Bündel als eine Neubildung auftrete, dass seine in ein Blatt eintretenden Spiralgefässe nicht in Verbindung mit den Spiralgefässen anderer Blätter ständen, die Vereinigung dieser vielmehr durch später gebildete Holzgewebe vermittelt werde, das im Uebrigen sich ebenfalls in die Blätter fortbilde.

Unbeschadet der richtigen Annahme, dass die Gefässbündel auch bei den Farnen mit ihrem oberen Ende (oder dem oberen Ende ihrer Zweige) unmittelbar in die Blätter eintreten, muss ich dennoch der näheren Ausführung der Ansicht Karsten's entgegentreten, da bei den Farnen die ersten Anlagen der Gefässbündel zu dem Netz vereinigt sind, welches im ausgebildeten Zustand ohne Schwierigkeit nachgewiesen werden kann und überall die Verholzung ihrer Elementarorgane von unten nach oben fortschreitet. Ferner muss ich dieser Ausführung Karsten's einwerfen, dass an den Gefässbündeln der Farne eine Unterscheidung zweier Bestandtheile, von welchen der eine den

1) l. c. 134.

in die Blätter eintretenden Bündeln dikotyledoner Pflanzen, der andere dem Holzkörper derselben entspräche, unzulässig sei, da sämtliche Elementarorgane der Gefässbündel der Farne, wie Karsten selbst anführt, in die Blätter eintreten und dass meine Untersuchungen in Betreff des selbstständigen Auftretens der Spiralgefässe einmal zu dem bereits früher mitgetheilten Resultat¹⁾ geführt haben, dass bei den Farnen nirgends Spiralgefässe, sondern nur Spiralfaserzellen sich ausbilden, die zwar zu Reihen verbunden sind, wie diejenigen, welche bei anderen Pflanzen bestimmt sind, die Röhren der Spiralgefässe zu bilden, aber doch stets vollkommen geschlossen bleiben und dass diese Spiralfaserzellen stets in Berührung mit älteren bereits ausgebildeten, nirgends aber ausser Verbindung mit denselben ihre Verholzung beginnen.

Diesen Einwürfen gegenüber wird durch den Vergleich des Angiopteris mit dem Aspidium die Annahme Karsten's, dass die über der Mitte einer Blattlücke stehenden Stränge bei letzterem eine Neubildung seien, bestätigt und sehen wir, dass diese gerade wie bei den Ersatzschichten von Angiopteris unter Divergenzen auftreten, die mit denen der Blätter übereinstimmen. Wie aber bei dem Angiopteris die Anfänge der Ersatzschichten zu dem die Längsachse des Stammes umstrickenden Netz verbunden sind und durch das Auftreten neuer Ersatzstränge im Anschluss an die älteren dieses Netz fortgebildet wird, so nehmen bei dem Aspidium die Ersatzstränge die nächst älteren Gefässbündel zum Ausgangspunkt ihrer Entwicklung und ist eben, weil dieser Anschluss schon in der Anlage begründet ist, die Vereinigung derselben eine so innige, dass im ausgebildeten Zustand eine Grenze beider gar nicht bestimmt werden kann. Es bieten die Gefässbündel der Farnen demnach ein zweifaches Verhalten, insofern sie auf der einen Seite in ihren Beziehungen zu den Blättern unabhängig von einander sind, auf der andern Seite eben dadurch, dass die jüngeren ihre Entwicklung von den älteren aus beginnen, in Abhängigkeit von einander stehen. Diese Ansicht wird nicht nur durch die Untersuchung des Wachstums der ausgebildeten Farnpflanze, sondern leichter durch die ersten Entwicklungsstadien der Keimpflanze dargethan und hat letztere, da keiner ihrer zahlreichen Beobachter zu dem Resultate kam, dass die Gefässbündel des zweiten Blattes ein Zweig von dem des ersten Blattes sei oder erst

1) Diese Abhandl. VII, 583.

in einer späteren Periode seiner Entwicklung mit derselben sich vereinige, niemals zu den extremen Ansichten Anlass gegeben, die nach den Untersuchungen der ausgebildeten Pflanze aufgestellt wurden.

Von den Marattiaceis mit knollenförmigem Stamm sind keine Beispiele ausser der Gattung *Angiopteris* untersucht worden; von denen mit cylindrischem Stamm haben *Brongniart*¹⁾ und *Karsten*²⁾ Beobachtungen über die Gattung *Danaea* mitgetheilt, welchen einige an *D. elliptica* und einer andern unbestimmbaren Art angestellte hinzugefügt werden sollen.

Von letzterer liegt ein Stämmchen von der Länge eines Fusses bei kaum zwei Linien Durchmesser vor; seine Gefässbündel sind in drei Ringe geordnet, von welchen der innere und mittlere plattenförmige, der äussere zahlreiche fadenförmige Bündel enthält. Die Wurzeln nahmen von den innern Bündeln ihren Ursprung.

Von *Danaea elliptica* wurde ein Stammstück von ungefähr drei Linien Durchmesser untersucht; seine Gefässbündel waren ebenfalls in drei Ringe geordnet, von welchen der mittlere geschlossen oder nur an einer Stelle gespalten war, der innere aus wenigen, der äussere aus zahlreichen feinen Bündeln bestand. Die Blätter enthielten bei der letzteren Art zwei centrale und sieben peripherische Gefässbündel, von welchen drei der oberen, vier der unteren Seite des Blattes näher lagen.

Bei beiden konnte der Verlauf der Gefässbündel zu den Blättern nicht mit Sicherheit verfolgt werden, und nur mit Mühe wurde der Zusammenhang der Gefässbündel des innersten Ringes erkannt. Aus der in der ganzen Ausdehnung des Stammes im Wesentlichen gleich bleibenden Structur geht indess hervor, dass bei ihnen wie bei *Saccoloma* und andern Farnen mit cylindrischem Stamm Verlust und Ersatz der in die Blätter eintretenden Bündel sich überall das Gleichgewicht halte.

Beide Danaen lehren ferner, dass das Auftreten von in mehreren Kreisen angeordneten Gefässbündeln nicht durch ein massenhaft sich entwickelndes Stammparenchym bedingt werde, wie *Harting* bei *Angiopteris* annahm.

Eine zweite Abtheilung der Farne, bei welchen marktständige Gefässbündel eine weite Verbreitung besitzen, sind die *Cyatheaceae*³⁾.

1) l. c. Taf. 33, Fig. 2. 3. 2) l. c. 116. Taf. 9, Fig. 10.

3) So weit meine Beobachtungen reichen, fehlen marktständige Bündel unter den *Cyatheaceis* bei *Dicksonia* L'Herit. (*Balantium* Klf.) nach Untersuchungen an *D.*

Bei diesen bieten die markständigen Bündel zunächst ein zweisches Verhältniss zu dem prosenchymatischen Gewebe, welches hier als ein gewöhnlicher Begleiter der Gefässbündel auftritt, indem sie entweder in einer bedeutenden Strecke ihres Verlaufs durch das Mark vor ihrem Austritt in das Blatt ringsum von demselben umschieden werden, dann über diese Scheiden hinaus ihren Lauf durch das Mark fortsetzen z. B. *Hemitelia capensis*, *Cyathea arborea*, oder in ihrem Verlauf durch das letztere von zahlreichen feinen isolirten Bündelchen prosenchymatischer Zellen begleitet werden und erst unmittelbar vor ihrem Eintritt in das Blatt durch das Zusammentreten der letztern eine geschlossene Scheide erhalten¹⁾; z. B. *Alsophila microphylla villosa*.

In beiden Fällen anastomosiren diese Gefässbündel vielfach unter einander und bilden in dem Mark ein Netz, dessen Maschen in keinem einzigen Fall entwirrt werden konnten und ebenso anastomosiren die isolirten Prosenchymbündelchen vielfach unter einander. Indess wurde hier und da der Zusammenhang der letzteren mit der inneren Fläche der Gefässbündelröhre wahrgenommen, was bei den Gefässbündeln selbst niemals gelang.

Der Zahl nach treten diese Gefässbündel entweder in einem, zweien oder mehreren Paaren in symmetrischer, oder annähernd symmetrischer Anordnung in ein Blatt ein.

Der erste Fall, das Eintreten von einem Paar solcher markständiger Bündel in ein Blatt, hat eine weite Verbreitung und wird auch an Blättern jugendlicher Exemplare solcher Arten wahrgenommen, bei welchen die Blätter älterer Stämme eine grössere Zahl solcher Gefässbündel aufnehmen.

Genauer wurde dieser Fall bei *Hemitelia capensis* an einem Stamm von $\frac{1}{2}$ Fuss Höhe und einem Durchmesser von $2\frac{1}{2}$ Zoll untersucht.

Die stärksten Blattnarben dieses Stammes Taf. V, Fig. 14, waren schwach in die Breite gedehnt und enthielten neun, in einen der hinteren Convexität des Blattstiemes entsprechenden Bogen angeordnete Bündel, vier oder fünf andere auf der vorderen Seite des Blattstiemes, dann zwei der Mitte der Blattnarbe mehr genäherte. Die beiden in ein Blatt ein-

antarctica, *Karsteniana*: bei *Cibotium* nach Untersuchung von C. Schiede, *glaucescens* und einer dritten Art, bei *Plagiogygia* nach Untersuchung von P. biserrata, unter den Arten von *Alsophila* bei *A. blechnoides Metaxya*, und *A. pruriata (Lophocoma)*,

1) Vergl. von Mohl, Verm. Schrift. 113

retrenden markständigen Bündel waren von prosenchymatischem Gewebe umscheidet, standen vor ihrem Austritt durch einen Querstrang mit einander in Verbindung, bildeten die beiden mittleren vorderen Bündel der Blattnarbe (*m m*) und gingen constant sowohl mit dem nächst äusseren seitlichen Strang, der sich von dem Rand der Blattlücke der Gefässbündelröhre loslöste, als auch durch einen feinen Strang mit dem oberen Rand der letzteren eine Verbindung ein.

Ebenso werden an einem jungen Stämmchen von *Alsophila radens*, dessen Blattnarben (Taf. V, Fig. 15) nur sechs zu einem Kreis geordnete Gefässbündel enthielten, die beiden vorderen (*m*) von zwei markständigen Bündeln gebildet und diese gaben bei ihrem Austritt durch die Blattlücke wieder zwei feine Zweige an den oberen Rand derselben ab, wodurch zwischen der Gefässbündelröhre und den markständigen Bündeln Verbindungen hergestellt waren, deren frühere Forscher nicht gedenken, in neuerer Zeit Stenzel¹⁾ bei *Alsophila aculeata* Erwähnung thut.

Zwei Paar markständige Bündel traten bei *Cyathea arborea* nach der Untersuchung eines jungen Stammes von ungefähr 4 Zoll Höhe und 1 Zoll Durchmesser in ein Blatt ein. Der Querschnitt durch den Blattgrund (Taf. V, Fig. 16) zeigte einen Kreis von zwölf bis dreizehn peripherischen Gefässbündeln und vier centrale, welche den Kreis der ersteren in einen unteren grösseren und einen oberen kleineren Bogen theilten. Die beiden zunächst austretenden markständigen Bündel bildeten die beiden mittleren centralen Bündel (*n, n*) und vereinigten sich mit den seitlichen Rändern der Blattlücke, die beiden später austretenden bildeten die beiden vorderen mittleren peripherischen Stränge (*m, m*) und gingen, wie bei *Hemitelia capensis*, mit dem oberen Rand der Blattlücke eine Verbindung ein.

Bei der Mehrzahl der untersuchten Stämme trat mit der gesteigerten Zahl der Gefässbündel der Blattnarbe diejenige Anordnung hervor, die von Mohl²⁾ als die charakteristische der *Cyatheaceae* beschrieben hat.

An zwei Stämmen, die in einem zur Untersuchung der in Betracht kommenden Verhältnisse besonders geeigneten Zustand sich befanden,

1) Verjüngungersch. d. Farne, Bonn 1861. 18 Anmk.

2) Vermischte Schrift. 110.

iner unbenannten *Cyathea* (Taf. V, Fig. 1, 2) und einer *Alsophila* *haenkei* (Taf. V, Fig. 3—13) sind die Gefässbündel in zwei einander entgegengesetzte, die obere und untere Hälfte der Peripherie der Blattnarbe einnehmende Bogen geordnet, deren Enden von der Berührungsstelle nach innen und unten gegen die Blattmitte vorgezogen sind und ist eine kleine Zahl von Gefässbündeln in den oberen Bogen eingeschlossen.

Von diesen Gefässbündeln entspringen diejenigen, welche die Convexität des unteren peripherischen Bogens einnehmen (Taf. V, Fig. 1, 3 *aa*), von der unteren Hälfte der an dem Ursprung eines Blattes in der Gefässbündelröhre befindlichen Spalte, indem der nach aussen umgebogene Rand derselben sich in einzelne Bündel auflöst. Von diesen fließen die am Grund der Spalte entspringenden gewöhnlich in ihrem Aufsteigen zu mehreren zusammen und vereinigen sich die nächst höheren nicht selten paarweise, während nur selten ein oder das andere in seinem Verlauf zur Blattnarbe sich spaltet. Ein jedes dieser Bündel giebt ferner auf seiner äusseren Seite zahlreichen in zwei Zeilen angeordneten Wurzeln den Ursprung, die im Uebrigen nach ihrer frühzeitigen Anlage längere Zeit nur eine geringe Ausbildung erreichen und die auf dem Rücken der Blatkissen vorspringenden kleinen Höcker verursachen und erst in späteren Perioden ihr Wachsthum fortsetzen und alsdann die ganze Stammoberfläche verhüllen. Nach Abgabe der kürzesten oberen dieser Bündel biegt sich alsdann zwischen den Bündeln des oberen und unteren peripherischen Bogens der Rand der Spalte der Gefässbündelröhre nach innen gegen die Blattmitte, um sich dann von Neuem nach oben und aussen zu wenden. An der ersten Umbiegung bildet derselbe einen mehr oder minder nach oben vorspringenden Fortsatz, von dem zwei oder drei Stränge abgehen, die sich alsbald theilen und die auf der Blattnarbe die eingeschlagenen Enden des unteren Bogens einnehmenden Bündel (Taf. V, Fig. 1, 2 *c, d, d, e, e*) bilden; doch stammt nicht selten das unterste innerste dieser Bündel (*f*) von einem markständigen Bündel her, welches zuvor mit dem Rand der Blattlücke sich vereinigt hatte. Der nach innen gebogene Theil des Spaltenrandes nimmt ausser diesem an seinem unteren Ende verschiedene Stränge aus dem Geflechte der markständigen auf (Taf. V, Fig. 2 *r, r*) und giebt alsdann an seinem oberen diejenigen Stränge ab, welche auf der Blattnarbe den Einschlag des oberen peripherischen Bogens einnehmen (Taf. V, Fig. 2 *f, g, h*.)

Oberhalb des Ursprunges dieser Stränge biegt sich alsdann der Spaltenrand von Neuem nach aussen und löst sich in die Bündel des oberen peripherischen Bogens auf (*l, m, n*), die zum Theil ebenfalls wieder mit Strängen des markständigen Geflechts in Verbindung stehen. Die in dem oberen Bogen der Blattnarbe eingeschlossenen (*r, r*) verdanken letzteren allein ihren Ursprung.

Bei *Alsophila Haenkei* ist die seitliche Grenze des oberen und unteren peripherischen Bogens der Gefässbündel der Blattnarbe eine minder breite (Taf. V, Fig. 3 *c, l*) und sind die den Einschlag des letzteren einnehmenden (*d, e, f*) häufig einander mehr genähert, oder auch in Zahl vermindert (Taf. V, Fig. 6 *d, e*) und stehen zuweilen (Taf. V, Fig. 5 *d*, Fig. 7 *e, d*), wenn auch nicht immer (Taf. V, Fig. 6 *c, d, e*) mit einem markständigen Bündel in Zusammenhang, welches zugleich einem der benachbarten Stränge des unteren peripherischen Bogens (Taf. V, Fig. 7 *e*) einen Zweig zusendet. Zahlreiche markständige Bündel treten alsdann an das untere Ende des nach innen gegen die Blattmitte gebogenen Theiles des Spaltenrandes (Taf. V, Fig. 10 *r, r*) der Gefässbündelröhre und bilden vorwiegend einen oder zwei von denjenigen Strängen (*f, g*), die von dem oberen Rand desselben entspringen und den Einschlag des oberen Bogens der Blattnarbe einnehmen (Taf. V, Fig. 3, 6, 9, 10 *f, g, h, i, k*). Ebenso gehen einzelne der den obern peripherischen Bogen einnehmenden Stränge, die von dem wieder nach aussen gebogenen oberen Rand der Spalte entspringen (Taf. V, Fig. 3, 4, 6 *l, m*), mit einzelnen markständigen Bündeln in Verbindung (Taf. V, Fig. 11 *r*) und stammen nur die in diesem Bogen eingeschlossenen (Taf. V, Fig. 3 *r, r*) ausschliesslich von letzteren ab. Alle diese Verbindungen zwischen den vom Spaltenrand sich loslösenden und den markständigen Gefässbündeln sind indess, ebenso wie die Maschen des Geflechtes, zu welchem die letzteren vor ihrem Austritt in das Blatt verbunden sind (Taf. V, Fig. 13) vielfachen Schwankungen unterworfen.

Eine besondere, bei keinem andern Farn bekannte, Eigenthümlichkeit bieten bei der *Alsophila Haenkei* alsdann zwei Stränge, die von den äussersten seitlichen Bündeln des oberen peripherischen Bogens der Blattnarbe ausgehen (Taf. V, Fig. 3, 4 *q, q*) und gewöhnlich nach Aufnahme einer Verstärkung von den oberen seitlichen Bündeln des unteren Bogens (Taf. V, Fig. 3, 11 *s*; Fig. 12 *q, q*) neben der Blattnarbe in senkrechter Richtung in die Rinde herabsteigen, sich allmählig ver-

schmalend und in eine feine Spitze auslaufend oberhalb oder auf dem Grunde der Blattlücke in Berührung mit der äusseren Prosenchym-scheide der Gefässbündelröhre erlöschen. Die Prosenchym-scheide dieser beiden absteigenden Stränge ist niemals von Wurzeln durchbrochen, wie bei denjenigen Strängen, die von der unteren Hälfte der Blatt-lücken in das Blatt sich loslösen.

Konnte nun auch bei keiner Cyatheacea das Geflechte der markständigen Bündel entwirrt werden, so stimmen doch alle meine Beobachtungen darin überein, dass dieselben nicht nur, wie man bisher angenommen hatte, in die Blätter eintreten, sondern auch an die Ränder der Blattlücken der Gefässbündelröhre herantreten und demnach sowohl zur Bildung der von diesen sich loslösenden Blattstränge, als auch zur Fortbildung der Gefässbündelröhre selbst beitragen. Und in diesen Punkten findet eine auffallende Uebereinstimmung mit den Gefässbündeln von Angiopteris statt, die gegentüber der Verschiedenheit des Antheils, welchen die Stränge der Gefässbündelröhre und des markständigen Geflechtes an der Bildung eines Blattes und dem Ersatz der in ein Blatt ausgetretenen Stränge nehmen, insofern als bei den Cyatheaceis die markständigen Stränge in grösserer Zahl in ein Blatt eintreten und nur in geringerem Maasse sich an der Fortbildung der Gefässbündelröhre betheiligen, bei Angiopteris hingegen vorzugsweise an dem Abschluss der letzteren oberhalb einer jeden Blattbasis Antheil haben und nur in geringer Zahl in das Blatt selbst eintreten, in den Hintergrund treten. Wenn aber dieser Vergleich der markständigen Stränge von Angiopteris und den Cyatheaceis begründet ist, so kann es nicht befremden, dass bei den letzteren weder ein freies Ende dieser Stränge in dem Mark, noch ein Ursprung derselben auf der innern Seite der Gefässbündelröhre, noch ein Verlauf derselben, der mit dem der Gefässbündel monokotyledoner Gewächse verglichen werden könnte, beobachtet wurde.

Ich möchte die Cyatheaceae nicht verlassen, ohne die Thatsache zu berühren, die zuerst von Brongniart¹⁾ constatirt wurde, dass nämlich an den Stämmen dieser Gewächse häufig die unteren älteren Internodien eine bedeutendere Länge als die oberen besässen, ein Verhalten, aus welchem dieser Forscher den Schluss zog, dass die Inter-

1) Hist. d. veget. foss. I. 156. T. 40.

nodien des Farnstammes nach der Abstossung der Blätter eine Dehnung erfahren.

www.libtool.com.cn

Von der Richtigkeit dieser Thatsache kann man an den wurzelentkleideten Stämmen, namentlich solchen, die quirlständige Blätter besitzen, sich leicht überzeugen¹⁾, aber dennoch dürfte diese Erscheinung in einer anderen Thatsache, die die in unsern Gärten cultivirten Farnbäume nicht minder deutlich constatiren lassen, wenn auch directe Messungen des nämlichen Internodiums in verschiedenem Alter, theils wegen dem langen Persistiren der Blattstielreste, theils wegen der zahlreichen, den Stamm bedeckenden Wurzeln sich unausführbar erwiesen, ihre Erklärung finden.

Die Erfahrungen an den im hiesigen Garten cultivirten Farnbäumen haben nämlich ergeben, dass im Allgemeinen niedere Stämme in der Höhe von 4—3 Fuss einen kräftigeren und rascheren Wuchs besitzen und längere Internodien mit grösseren Blättern ausbilden, als ältere Stämme, die eine Höhe von 6—10 Fuss erreicht haben, so dass nahe liegt anzunehmen, dass das normale Wachsthum der Baumpflanzen in jüngeren Jahren mit grösserer Intensität erfolge, als in späteren und demnach die längeren Internodien des Stammgrundes sich gerade in der Periode des raschen Wachsthums ausbilden.

In inniger Beziehung zu den Cyatheaceis steht seiner Structur nach *Ceratopteris thalictroides* und bringt vielleicht der Mangel der prosenchymatischen Scheide seiner Gefässbündel, so wie das von leitenden Intercellularkanälen durchzogene Mark- und Rinden-Prosenchym auffallendere Unterschiede hervor, als dem Verlauf der Gefässbündel zu entnehmen sind. Letztere kommen nach Untersuchungen an einer kümmerlich entwickelten Pflanze an Stärke denen von *Aspidium filix mas* etwa gleich, sind zu einem Netz vereinigt, das von den Rändern der Blattlücken eine grössere Zahl von Strängen in ein Netz

1) An einem Stamm von *Alsophila Taenitis* (?) mit alternirenden fünfgliedrigen Blattquirlen beträgt die Höhe der Blattnarben an dem untern Theil des Stammes 11, an dem oberen 10 Linien; die Entfernung der übereinander stehenden Blätter, von dem oberen Rand der unteren Blattnarbe zu dem unteren der oberen gemessen, beträgt an dem Grund des Stammes $2\frac{1}{2}$, an dem oberen 4 Zoll. — Die mikrometrische Messung der die Gefässbündelscheide zusammensetzenden Prosenchymzellen an dem untern und oberen Ende des Stammes führte durchaus nicht zu dem Resultat, dass eine Dehnung derselben in ersterem stattgefunden habe.

abgibt. Die markständigen Bündel sind von ausnehmender Feinheit, anastomosiren vielfach unter einander und treten theilweise unmittelbar in die Blätter, theilweise an die die Blattlücken umgrenzenden Stränge der Gefässbündelröhre und nehmen also auch an der Fortbildung dieser letzteren Theil.

Eine auffallendere Abweichung von den Cyatheaceis bietet *Saccoloma adiantoides*, von welchem ein cylindrisches Stammstück von der Länge von 2 Fuss, bei einem Durchmesser von $4\frac{1}{2}$ Zoll, dessen Blattarben, abgesehen von einigen Anomalitäten, die Divergenz $\frac{2}{3}$ zeigten, untersucht wurde.

Sämmtliche Gefässbündel dieses Farns treten dadurch auffallend hervor, dass in geringer Entfernung von denselben, sowohl auf ihrer äusseren, wie ihrer inneren Seite ein Streifen farblosen Parenchyms sich findet, welches aus mässig gestreckten zartwandigen Zellen besteht, während das übrige Parenchym, sowohl dasjenige, welches den Gefässbündeln unmittelbar aufliegt und an Stärke diesen farblosen Streifen gleichkommt, als auch das ausserhalb der letzteren liegende, aus gestreckten Zellen besteht, deren derbere und getüpfelte Wandungen eine braune Farbe besitzen.

Auf dem Querschnitt durch den Stamm erscheinen die Gefässbündel in drei Ringe geordnet (Taf. VI, Fig. 1, 2, 3, 4). Der innerste derselben besteht nach der Vergleichung einer grösseren Zahl dicht über einander genommener Querschnitte gewöhnlich aus zwei nach aussen convex gekrümmten Platten (Taf. VI, Fig. 1, 3, 4) von ungleicher tangentialer Breite, seltner wird derselbe von drei bis fünf Bündeln zusammengesetzt (Taf. VI, Fig. 2), von welchen alsdann ein oder zwei eine geringere Stärke haben und der Längsachse des Stammes näher stehen.

Der mittlere Kreis dieser Gefässbündel ist in der grösseren Ausdehnung des Stammes ringförmig geschlossen und beschreibt auf derjenigen Seite, auf welcher zunächst ein Blatt auftritt, eine Ausbuchtung, die weiter oben, da wo dieses Blatt sich anschickt, den Stamm zu verlassen, sich sondert und dem äusseren Ring nähert. Nur selten finden sich auf gleicher Höhe in der Richtung zweier auf einander folgenden Blätter zwei solcher Unterbrechungen (Taf. VI, Fig. 1, 2) und erscheint der mittlere Ring aus zwei Paar Platten zusammengesetzt, von welchen je kleinere in der Richtung dieser beiden Blätter liegen.

Der äussere Gefässbündelring stellt überall eine geschlossene Zone dar, von der einzelne Abschnitte unmittelbar in die Blatkissen ausbiegen, deren jeder Querschnitt drei, seltner vier trifft und ist in seiner Gestalt durch dieses Verhältniss bedingt. Die in die Blätter ausbiegenden Bogen nehmen alsbald mit ihrem Eintritt in den Grund des Blatkissens eine bedeutende radiale Feinheit an und erhalten zahlreiche Längsfaltungen; die alternirenden, nach oben in dem Stamm ansteigenden Bogen besitzen hingegen eine bedeutendere Stärke, springen nach aussen nur in mässigen Convexitäten vor und sind oberhalb des Ursprunges eines Blattes auf gleicher Höhe mit der beschriebenen Unterbrechung des mittleren Ringes etwas nach innen gekrümmt.

Auf einem Längsschnitt durch die Achse des Stammes (Taf. VI. Fig. 5) traten die Beziehungen dieser drei Gefässbündelringe zu einander alsbald zu Tage. Der aus dem äussersten Ring in ein Blatt ablenkende Abschnitt (*a, a*) wird nämlich von dem mittleren Ring (*b, b*), der bis dahin parallel mit ihm aufstieg, ersetzt, indem ein Abschnitt von diesem nach aussen sich wendet, in den ersteren eintritt, denselben wiederum schliesst und alsdann in ihn seinen Weg fortsetzt, bis er selbst in ein höher an dem Stamm inserirtes Blatt austritt. Abschnitte des innersten Ringes (*c, c*) ergänzen zunächst die Lücken des mittleren. steigen in diesem auf, bis sie selbst bestimmt sind, in den äusseren Ring und von diesem zuletzt in ein Blatt auszutreten.

Es erstreckt sich demnach die Ausdehnung eines jeden Gefässbündels von seinem Ursprung in der Nähe der Längsachse des Stammes durch sämtliche Ringe bis zu einem Blatt und sind die unteren Abschnitte sämtlicher Gefässbündel zu dem innern Ring, die mittleren zu dem zweiten, die obersten zu dem äusseren vereinigt. Das Gefässbündelsystem aber wird dadurch fortgebildet, dass an der Stelle, wo ein Abschnitt des inneren Ringes in den mittleren ausbiegt (*d, d*), ein neuer Gefässbündel an die diesem inneren Ring verbleibenden Gefässbündel sich ansetzt und die unteren Enden dieser neu auftretenden Bündel verursachen die oben berührte Unregelmässigkeit des inneren Ringes. Die Feinheit ihres unteren Endes erschwert die Untersuchung ihrer Verbindung mit den nächst älteren Strängen, doch wurde dieselbe in einigen Fällen mit Gewissheit erkannt und möchte ich desshalb in andern Fällen, in welchen diese Verbindung nicht nachgewiesen werden konnte, eher eine misslungene Präparation annehmen, als zugeben, dass

selben unabhängig von andern Gefässbündeln frei in dem Parenchym der Längsachse des Stammes entstanden seien. Die Verluste des inneren Ringes werden demnach durch die für die oberen Blätter bestimmten Gefässbündel ersetzt, indem diese mit ihrem untern Ende von den nächsten älteren Gefässbündeln ihre Entwicklung beginnen und mit denselben zu einem Kreis sich vereinigend den inneren Ring fortbilden; ihre Lage und Anordnung muss nothwendig eine der Blattstellung entsprechende spiralige sein; ihre allmähliche Erweiterung in dem Ansteigen durch die verschiedenen Ringe, sowie die Verbindungen derselben untereinander erfolgen in der Weise, die wir bei Angiopteris beschrieben haben.

Die in ein Blatt eintretenden Gefässbündel bilden auf dem Querschnitt durch den Grund desselben (Taf. VI, Fig. 44) eine hintere (*b*) und zwei seitliche vordere bogenförmige Platten (*c*, *c*). Erstere entspricht der Convexität der untern Seite des Blattstieles und ist mit Ausnahme der Enden, die sich nach innen gegen die Blattmitte biegen, der Länge nach wellenförmig gebogen; die seitlichen Platten beschreiben zwei Seiten der Rinne auf der oberen Seite des Blattstieles liegende, symmetrisch gestaltete, nach innen convexe, mit beiden Enden nach aussen gekrümmte Bogen, deren hinteres Ende gewöhnlich von den eingeklemmten Enden des hintern Bogens umfasst wird (Taf. VI, Fig. 2 *f*, *b*, *e*) oder sich mit diesen vereinigt¹⁾. Wellenförmige Biegungen werden stets an diesen seitlichen Platten vermisst.

Der bei der Loslösung eines Blattes zunächst nach aussen biegende Querschnitt der äusseren Gefässbündelröhre bildet den hinteren Bogen, der bei seinem ersten Auftreten durch eine bedeutendere Feinheit und die erwähnten Längsfaltungen ausgezeichnet ist (Taf. VI, Fig. 6 *b*), erweitert sich dann alsdann eine der Zunahme des Blattrückens entsprechende Erweiterung (Taf. VI, Fig. 7, 8 *b*), bleibt im Uebrigen seitlich in continuirlichem Zusammenhang mit den stärkeren nächst anstossenden, ihren Verlauf weiter nach oben fortsetzenden Abschnitten des äusseren Ringes (*a*); dann treten die Enden dieser Abschnitte nach innen gegen die Blattmitte über die Ansatzpunkte dieses Bogens hervor (*c*) und bilden zunächst Anschwellungen, ziehen sich dann weiter oben in zwei plattenförmige Fortsätze gegen den Blattrücken zu aus (Taf. VI, Fig. 9, 10, 44 *c*)

¹⁾ Vergl. Reichardt, Denkschr. d. K. K. Akad. XVII. 41. T. III, P. 42, 43.

und bilden auf diese Weise die beiden seitlichen Gefässbündelplatte des Blattstieles. Zunächst sind letztere von dem hinteren Bogen umfasst, der nun allmählig aus dem Zusammenhang mit der äusseren Gefässbündelschichte des Stammes ausscheidet (Taf. VI, Fig. 9); ihr äusseres Ende biegt sich dann nach aussen und endlich löst sich ihr inneres Ende von der Gefässbündelschichte des Stammes los (Taf. VI, Fig. 11). Unmittelbar oberhalb dieser Stelle wird die Lücke der letzteren durch einen Abschnitt der mittleren Gefässbündelschichte ausgefüllt (Taf. VI, Fig. 2).

So erhält also das Blatt seine sämtlichen Gefässbündel von der äusseren Gefässbündelschichte des Stammes und zwar wird die hintere Platte desselben von dem oberen Ende eines Abschnittes der letzteren gebildet und verdanken die beiden vorderen Platten den seitlichen Ausbreitungen derjenigen Abschnitte ihren Ursprung, die rechts und links an den ersteren angrenzen. Die drei Abschnitte aber, welche in ein Blatt eintreten, steigen durch die Achseln dreier auf verschiedener Höhe am Stamm inserirten Blätter in die oberflächliche Schichte an und jeder derselben theilt nach dem Eintritt in diese seine Bestandtheile drei verschiedenen Blättern mit, indem er zunächst rechts und links eine der seitlichen Platten der beiden nächst höheren seitlichen Blätter, und mit seinem Ende die hintere Platte des zwischen diese beiden fallenden nächst höhern Blattes bildet.

Nach diesen Beobachtungen weicht *Saccoloma* von *Angiopteris* und den *Cyatheaceis* dadurch ab, dass sämtliche Gefässbündel der Blätter von der äusseren Gefässbündelschichte des Stammes allein abstammen, stimmt hingegen mit *Angiopteris* darin überein, dass der Abschluss der letzteren oberhalb eines Blattes durch die in dem Stamm vorgebildeten Ersatzschichten herbeigeführt wird, mit den *Cyatheaceis* ferner in der cylindrischen Gestalt des Stammes, während der Stamm von *Angiopteris* die verkehrtkegelförmige Gestalt besitzt. Diesem letzteren Unterschied gemäss enthält der Stamm von *Saccoloma* — von den *Cyatheaceis* kann nur das Gleiche vermuthet werden, so lange die Anordnung der markständigen Gefässbündel nicht näher erforscht ist — in seiner ganzen Ausdehnung die nämliche Zahl von Gefässbündelzonen und hält die Neubildung und der Austritt seiner Gefässbündel in die Blätter sich überall das Gleichgewicht, während die Gestalt des Stammes von *Angiopteris* eine Zunahme der Zahl und der Ausdehnung der Gefässbündel-

nen von dem Grunde bis zu der Stelle, an welcher der Stamm den bedeutendsten Durchmesser erreicht hat, bedingt.

Einfacher als *Saccoloma adiantoides* verhält sich, insofern nur ein einziger markständiger Gefässbündelring zur Ausbildung gelangt, *Saccoloma inaequale*, so weit ich nach dem Fragment eines bei einem Exemplar meines Herbariums erhaltenen Stammes urtheilen kann.

Mit diesem stimmte *Pteris elata* var. *Karsteniana* überein. An einem endlich kräftig entwickelten Stämmchen dieses Farns (Taf. VI, Fig. 12-16) befindet sich innerhalb der äusseren Gefässbündelröhre (a) eine weite engere (b), die eine geringe Menge Markes umschliesst und an manchen Stellen auf einer Seite (Fig. 13 b), an andern in zwei Hälften (Fig. 14 b) gespalten ist; Abschnitte der ersteren (Fig. 15, 16 a a) biegen mittelbar in die Blätter (f, f) aus; Abschnitte der letzteren (b, b) stehen, nach aussen sich wendend, in die Lücken der ersteren (c, c) ein, sammelfliessend mit der seitlich von der Blattbasis ansteigenden äusseren Gefässbündelröhre. Mit zweifelloser Gewissheit war hier der Zusammenhang sämtlicher die innere Gefässbündelröhre zusammensetzenden Stränge zu constatiren.

Die Zweige dieses Farns entstehen normal, wie bei *Cibotium* und *Sophila pruinata*, von der Rückenmitte des Blattgrundes und nehmen eine röhrenförmige Ausstülpung der Gefässbündelplatte des Blattstiemes an; dieselben waren an dem untersuchten Exemplar noch nicht bis zur Ausbildung eines Blattes vorgeschritten und entbehrten noch eines markständigen Bündels.

Mit der Structur dieser Art von *Pteris* stimmt *Pteris podophylla* Sw. in jeder Beziehung überein, während andere nah verwandte Arten keine markständigen Bündel besitzen.

Das letzte mir bekannt gewordene Beispiel unter Farnen mit mehrästigen Blättern und markständigen Bündeln bietet *Chrysodium vulgare* (Taf. VI, Fig. 17 1-1v).

In dem untern Theil eines schwachen Stämmchens, dessen stärkste Äste kaum die Länge von einem Fuss erreicht hatten, also um ein Mehrfaches hinter der normalen Grösse zurückgeblieben waren, (Taf. VI, Fig. 17 1. 1-5), enthielt die geschlossene Gefässbündelröhre ein einziges markständiges Bündel (1) und löste sich der für das Blatt bestimmte, eine Ausbuchtung beschreibende, Abschnitt derselben (2, 3, 4 f) erst in die Ergänzung der Blattlücke in die einzelnen Blattstränge (5 f)

auf. Die ergänzenden Stränge traten in unmittelbarer Verbindung mit der seitlichen Grenze dieser Ausbuchtung auf (2), führten rasch den Abschluss der Gefässbündelröhre herbei (3) und entwickelten gleichzeitig einen markwärts vorspringenden Fortsatz, dessen Ende sich in zwei kurze Schenkel theilte (4). Das einzige markständige Bündel löste sich in zwei kleinere auf (2, 3), von welchen das eine alsbald mit dem einen Schenkel dieses Fortsatzes sich vereinigte (4, 5), während das andere eine neue Theilung vollzog (4) und mit dem einen Zweiglein an den andern Schenkel dieses Fortsatzes, mit dem andern an die innere Fläche der Gefässbündelröhre herantrat (5), so dass nun sämtliche markständige Bündel mit der letzteren in Verbindung standen.

Es haben also an dem untern Theil des Stammes die markständigen Bündel weder an der Bildung des Blattes noch an der Ergänzung der Blattlücken Antheil, sie werden vielmehr zunächst noch vermehrt durch Zweige, die sich von der innern Fläche der Gefässbündelröhre lösen und erhalten Verstärkungen dadurch, dass die bereits losgelösten eine neue Verbindung mit denselben eingehen, zwei Vorgänge, von welchen der eine auf das erste Auftreten der markständigen Bündel überhaupt, der andere auf die Annahme, dass auch in dem älteren Stamm eine Loslösung derselben von der Gefässbündelröhre stattfindet, ein Licht wirft.

In dem oberen Theil des Stammes nehmen alsdann alle Blätter markständige Bündel auf, doch bietet die Ergänzung der Blattlücken zwei Abstufungen.

In einem der auf das bereits beschriebene nächst folgenden Internodien (Taf. VI, Fig. 47 II. 4—6) wurden vier markständige Bündel angetroffen, von welchen das eine in die für das nächste Blatt bestimmte Ausbuchtung der Gefässbündelröhre vorragte und sich in zwei Zweiglein spaltete (1), die sich bald von einander entfernten (2, 3, 4). Die Gefässbündelröhre entliess in den Grund des Blattes zunächst zwei Stränge (2), von welchen der eine alsbald eine weitere Theilung erfuhr, bald darauf zwei weitere Stränge, so dass nun fünf Bündelchen (3) den Rücken des Blattes einnahmen. Unmittelbar vor diesen lag das kleinere der beiden Zweiglein des markständigen Bündels, weiter markwärts das grössere (4). Bereits auf der nächsten Stufe war das erstere (5), bald darauf auch das letztere (6) erloschen. Inzwischen, bereits auf der Höhe von Fig. 4, begann die Gefässbündelröhre sich zu schliessen durch Stränge.

die sich an die seitlichen Ränder der Blattlücke ansetzten und die Ergänzung derselben vollendeten (5, 6), während die vorderen Bündel des Blattes sich sonderten.

Die Ergänzung der Blattlücke war also hier in der nämlichen Weise erfolgt, wie an dem unteren Internodium des Stammes, dagegen waren hier marktändige Bündel in das Blatt eingetreten, was bei jenem nicht der Fall war. In dem oberen Theil des Stammes nehmen alsdann die Blätter nicht nur marktändige Bündel auf, sondern es fällt diesen auch die Ergänzung der Blattlücken anheim, wobei wiederum einige, wenn auch unwesentliche Modificationen angetroffen werden.

In einem dieser höheren Internodien (Taf. VI, Fig. 17. III. 1—6) enthielt die Gefässbündelröhre zwei marktändige Bündel, von welchen der eine in der Theilung begriffen war (1, 2), ferner einen von ihrer inneren Fläche an dem Grund der Ausbuchtung gegen das nächste Blatt vorragenden Fortsatz (1, 2 m), der von einem marktändigen Bündel herrührte, das unterhalb dieser Stelle in Verbindung mit der Gefässbündelröhre getreten war (vgl. I. 5 m). Dieser Fortsatz trat bald deutlicher hervor (2), trennte sich, während in rascher Folge fünf die Convexität des Blattrückens einnehmende Bündelchen sich sonderten (3), von der inneren Fläche der Gefässbündelröhre, rückte vor den Bogen dieser fünf Bündelchen (3, 4) und löste sich selbst in vier feine Bündelchen auf (5), die bereits auf der nächsten Stufe erloschen waren. Inzwischen hatte das eine der marktändigen Bündel sich verlängert und war in die Blattlücke vorgedrungen (3), und hatte das andere seine Theilung vollendet und den einen seiner Zweige (4) dem verlängerten gehöhert, den andern einer neuen Spaltung unterworfen (4, 5, 6). Der verlängerte Bündel schloss alsdann die Blattlücke und ragte nach innen und aussen über der Gefässbündelröhre vor (5). Seine Vorrangung auf der äusseren Seite schwand allmählig unmerklich, die der inneren Seite löste sich los und spaltete sich in mehrere marktändige Bündel, die in das nächste Internodium anstiegen (6).

In einem andern der höheren Internodien (Taf. VI, Fig. 17; IV. 4-11) enthielt die Gefässbündelröhre drei marktändige Bündel (1), war gegen die Ursprungsstelle des nächsten Blattes ausgebuchtet und hied zwischen zwei Wurzeln einen kleinen bogenförmigen dem Grund des Blattrückens entsprechenden Bündel (1) aus; vor diesem lag ein neues marktändiges Bündelchen, welches sich von dem nächst inneren

(vergl. II, 12) abgezweigt hatte; dasselbe stieg noch eine geringe Strecke in dem Blattgrund an (2, 3, 4) und erlosch alsdann. Der den Rücken des Blattes einnehmende Bündel spaltete sich zunächst in zwei kleinere (2) und wurde überhaupt der für das Blatt bestimmte Abschnitt der Gefäßbündelröhre deutlicher abgegrenzt (3). Gleichzeitig trat das eine von den drei markständigen Bündeln nach aussen zwischen die für das Blatt bestimmten Stränge, das zweite näherte sich demselben, während das dritte sich theilte. Etwas oberhalb dieser Stelle schloss das zweite dieser Bündel die Blattlücke (4, 5) und deutete eine Einbuchtung der Gefäßbündelröhre die Stelle an, an der dieser Abschluss erfolgt war (6). Von den beiden Bündeln der Blattlücke spaltete sich zunächst das eine in zwei Stränge (4) und lösten sich allmählig die an der Blattlücke nach aussen vorgezogenen Ränder der Gefäßbündelröhre in mehrere Stränge auf und zwar wurden zunächst von derselben zwei Stränge von ungleicher Stärke getrennt, von welchen das eine in zwei, das andere in drei kleinere sich theilte (5); dann schritt die Ablösung neuer Stränge auf der linken Seite des Blattes rascher vorwärts und wurden hier vor dem Abschluss der Holzhöhre zwei weitere Bündel gesondert, während auf der rechten Seite diese Sonderung erst nach dem Abschluss der Gefäßbündelröhre vollendet wurde (6). Der in das Blatt ausgetretene markständige, der Einbuchtung der Gefäßbündelröhre zunächst liegende Strang (6) spaltete sich alsdann in drei feine Bündelchen, von welchen das eine nach innen, die beiden andern nach aussen gekehrt waren (7). Hierauf rückten diese drei Bündelchen in eine der Oberseite des Blattes parallele Fläche (8) und erloschen alsbald (9). Dann gehen die beiden mittleren Bündel von denjenigen beiden Paaren, die sich zuletzt von den Rändern der Blattlücke loslösten, unter einander eine Verbindung ein und bilden den centralen Bündel des Blattstieles (7—11), während die beiden seitlichen Bündel dieser Paare sich von Neuem theilen (8, 9) und nach Erlöschen der Zweiglein des markständigen Bündels zu zweien oder mehreren (10, 11) nach aussen und vorn, rechts und links von dem centralen Bündel liegen. Die die Convexität des Blattstieles einnehmenden Bündel theilen sich wiederholt, und sind in einen Bogen angeordnet, dessen Enden sich dem centralen Bündel nähern und durch diesen zu einem Kreis vereinigt werden, dessen vordere Hälfte abgeflacht oder selbst eingedrückt ist.

Ob bei dem Erstarren der Pflanze weitere Modificationen in dem Verhalten der markständigen Bündel eintreten oder ob dieselben auch dem Grund der Blätter einer kräftig entwickelten Pflanze so frühzeitig erlöschen, muss ich dahin gestellt sein lassen.

Weitere Beispiele von Farnen mit markständigen Bündeln dürften nur die mir unbekannt, irriger Weise als *Blechnum brasiliense* und *Blazium giganteum*¹⁾ bezeichneten Farne bieten, deren Blattstiele (nach *Stenzel*²⁾ und *Stenzel*³⁾ im Querschnitt darstellten. Bedenken trage ich gegen *Sadleria*, der nach den Darstellungen von *Meyen*⁴⁾ mehrfach markständige Bündel zugeschrieben worden sind, hier anzuführen, da diese Abbildungen nach meinem Ermessen eine solche Annahme nicht rechtfertigen, vielmehr an Farne erinnern, deren Blätter eine bedeutende Strecke an dem Stamm herablaufen und deren Gefässbündel eine beträchtliche Stärke erreichen, zu einem Kreis angeordnet sind, der auf der ablaufenden Basis der Blätter entsprechende langgestreckte enge Lücken umgrenzen, und bei welchen von den Rändern dieser Blattstücke zahlreichere feine Blattstränge entspringen, die auf dem Querschnitt des Stammes in Bogen von geringerer oder stärkerer Convexität, nachdem das Blattkissen, dem sie angehören, ferner oder näher der Ansatzstelle seines Blattes von dem Stamm durchschnitten wurde, die benachbarten Stammbündel verbinden, z. B. *Polybotrya canaliculata* und andere.

Gehen wir zu den Farnen mit zweizeiligen Blättern über, so dürfte zunächst die Gattung *Dennstädtia* zu erörtern sein, da bei ihr der Verlauf der Gefässbündel sich einfacher verhält als bei den andern hier zu nennenden Beispielen.

Der Stamm sämtlicher Arten von *Dennstädtia* enthält, so weit meine Untersuchungen reichen, eine Gefässbündelröhre, die nur oberhalb der in die Blätter ablenkenden Abschnitte von Lücken durchbrochen ist. Bei einem Theil der Arten sind die Internodien des Stammes langgedehnt und stehen die Blätter in zwei fast diametral einander

1) Unter den mit einem baumartigen Stamm versehenen Arten der Gattung *Asplenium*, *Woodwardia*, *Asplenium*, *Phegopteris*, *Aspidium* sind mir Beispiele markständiger Gefässbündel nicht vorgekommen.

2) Abhandl. d. Berl. Akad. 1835. Taf. I, Fig. 5.

3) Verjüngung der Farne. Taf. IV, Fig. 3.

4) Harlemer Preisschrift. T. II. A. 1—2.

gegenüber liegenden Zeilen, z. B. *D. punctilobula*, *davallioides*, *scandens*, *rubiginosa*, während bei einem andern Theil der Stamm eine bedeutendere Stärke erreicht, kürzere Internodien ausbildet und die beiden Blattzeilen der Mittellinie des Stammrückens auffallend sich nähern, z. B. *D. obtusifolia*, *cornuta*. Unter den ersteren treten bei *D. rubiginosa*, unter den letzteren bei beiden genannten Arten markständige Bündel auf.

Bei *D. rubiginosa* (Taf. VII, Fig. 1, 1—29) wird der Stamm in der grösseren Ausdehnung seiner Internodien von einem einzigen markständigen, der oberen Hälfte der Gefässbündelröhre genäherten Bündel durchzogen, das auf dem Querschnitt einen schmalen, nach unten convexen Bogen beschreibt (1). Gegen die Ursprungsstelle des nächsten Blattes nähert sich dieses Bündel mit dem diesem Blatt zugekehrten Rand auffallender der Gefässbündelröhre (2), tritt mit derselben in Verbindung und stellt nun einen Fortsatz derselben dar, der nach unten und aussen convex, dann hakenförmig gegen die dem Blatt abgewandte Seite gekrümmt ist. Allmählig erweitert sich alsdann die Vereinigungsstelle dieses Fortsatzes mit der Gefässbündelröhre, sein Umfang vergrößert sich und es treten zunächst auf seiner nach unten gekehrten Seite zwei Convexitäten auf (4), denen bald eine dritte sich hinzugesellt (5): Gleichzeitig mit dem Auftreten der letzteren findet in einer geringen Strecke seines Verlaufes eine Trennung von der Gefässbündelröhre statt (5), der bald eine neue Vereinigung, zunächst an einer (6), dann an einer zweiten Stelle (7) folgt, die nur durch eine, dem unbewaffneten Auge als ein dunkler Punkt erscheinende geringe Menge parenchymatischen Gewebes von der ersteren getrennt ist. Letztere Verbindung gewinnt alsdann an Ausdehnung (8) und von den drei Convexitäten, die auf der untern Seite des markständigen Bündels vorragen, überspannt die erstere allein die beiden Verbindungsstellen mit der Gefässbündelröhre, während die beiden andern tiefer in das Mark vorragen. Inzwischen wird an der Grenze der ersten Convexität von den folgenden eine Spaltung der Gefässbündelröhre vorbereitet (9, 10) und bald darauf mit der Loslösung des hinteren Blattrandes von dem Stamm vollendet (11). Bei dieser Spaltung bleibt die erste Convexität des markständigen Bündels mit dem Rand des zunächst in das Blatt ablenkenden Abschnittes der Gefässbündelröhre in Verbindung, eine kleine nach innen gekrümmte Anschwellung desselben verursachend, in welcher

er von den Parenchymzellen herrührende Punkt noch erkannt werden kann, während der grössere Theil des markständigen Bündels mit dem Spaltenrand der Gefässbündelröhre in Verbindung steht (10). Dann löst auch dieser Theil des markständigen Bündels sich los (11), dehnt sich in die Breite aus, scheidet auf der dem Blatt zugekehrten Seite einen kleinen Strang ab (12) und setzt seinen Lauf in das nächste Internodium fort (14—18). Der zuletzt ausgeschiedene Strang nähert sich der untern Hälfte der Gefässbündelröhre (13), vereinigt sich mit derselben (14) und stellt eine kleine knopfartige Anschwellung derselben dar, verliert indess bald seine scharfe Abgrenzung, ja wird völlig unkenntlich (16, 17). Inzwischen nähert sich die obere Hälfte der Gefässbündelröhre der untern (14, 15, 16) und findet alsdann zwischen beiden, in geringer Entfernung von dem Spaltenrand der ersteren und der Stelle der letzteren, an der die Anschwellung des markständigen Bündels kenntlich war (17), eine Vereinigung statt, durch welche sowohl die Gefässbündelröhre des Stammes wieder abgeschlossen, als auch der für den vorderen Rand des Stammes bestimmte Abschnitt derselben abgegrenzt wird (18).

Die weitere Verfolgung des Verlaufes der Gefässbündel in dem Internodium giebt Aufschluss über ihre Beziehungen zu den Seitensprossen¹⁾, von welchen an dem dem untersuchten Internodium angehörenden Internodium zwei zur Ausbildung gekommen waren, ein stärkerer oberer auf dem hinteren Rand des Blattstieles, ein schwächerer unterer auf dem vorderen Rand desselben.

Der in ein Blatt eintretende Abschnitt der Gefässbündelröhre stellt auf dem Querschnitt durch den Grund des Blattstieles einen hufeisenförmigen Bogen dar, dessen Convexität dem Rücken des Blattstieles gekehrt ist und dessen Schenkel symmetrisch sigmaförmig gekrümmt sind, der Art, dass sie einen hinteren kleineren nach innen, und einen vorderen grösseren nach aussen convexen Bogen beschreiben (19). Am Ende dieses letzteren ist auf der dem hintern Rand des Blattstieles zugekehrten Seite die von dem markständigen Bündel herrührende Anschwellung unverkennbar (19 rechts). Diese löst im weiteren Verlauf sich los, tritt alsdann mit ihrem bisher freien Ende mit der inneren

1) Hier und bei den folgenden Beispielen ist mein Aufsatz über die Seitensprosse *Farnen* in diesen Abhandlungen VII, 644 u. f. zu vergleichen.

Fläche des oberen seitlichen Bogens in geringer Entfernung von dessen Rand in Verbindung, dehnt nach abwärts gegen den Anfang dieses Bogens sich aus (20) und geht auch hier mit diesem eine Verbindung ein. In Folge dieses Verhaltens bildet nun der vordere seitliche Bogen innerhalb seines frei vorragenden Endes einen geschlossenen Ring (21, 22). Der den Abschluss dieses Ringes herbeiführende Strang bildet alsbald nach beiden Seiten eine Anschwellung (22), von welcher der dem Seitenspross abgewandte in Verbindung tritt mit der Basis dieses vorragenden Abschnittes des Bogens, während gleichzeitig seine Verbindung mit dem Anfang dieses Bogens wieder aufgehoben wird (23), und steht derselbe auf dieser Stufe an zwei dicht neben einander liegenden Punkten mit der inneren Fläche des vorderen Bogens in Verbindung. Diese beiden Verbindungspunkte fliessen alsbald in einer breiteren Stelle zusammen und ragen nun von dieser zwei Fortsätze vor (24, 25). Der eine von beiden setzt sich alsbald wieder mit dem Anfang des oberen seitlichen Bogens in Verbindung, schliesst dadurch die Gefässbündelröhre des Seitensprosses ab (26) und grenzt dieselbe von der dem Blattstiel verbleibenden Gefässbündelplatte ab (27), der andere bleibt zunächst mit der innern Fläche der Gefässbündelröhre des Seitensprosses in Verbindung, löst sich dann los und stellt das markständige Bündel derselben dar.

An dem vorderen Rand des Blattstieles war an dessen Grund das nach innen umgebogene Ende des vorderen seitlichen Bogens des hufeisenförmigen Gefässbündels abgetrennt (19 links); der an dasselbe angrenzende Theil des letzteren dehnte sich nach aussen (21, 22, 23), einen nach abwärts convexen Bogen beschreibend; mit dem Anfang des letzteren trat alsdann das äusserste losgelöste Ende (24) in Verbindung und stellte der für den Zweig bestimmte Bündel einen Anhang auf der äusseren Seite der dem Blatt verbleibenden Gefässbündelplatte dar. Allmählig löst sich dieser Anfang los (25), schliesst sich, wie an andern Sprossen verfolgt wurde, ringförmig, spaltet sich dann von Neuem auf seiner oberen Seite, zieht den einen Rand der Spalte nach innen vor und schliesst sich abermals, so dass der vorgezogene Spaltenrand einen markwärts vorspringenden Fortsatz bildet. Dieser löst sich alsdann in dem weiteren Verlauf los und wird zu dem markständigen Bündel des Seitensprosses.

Bei *Dennstädtia cornuta* besitzen die markständigen Bündel gewöhn-

lich eine **excentrische**, der Rückenmitte des Stammes genäherte Lage, und erreichen gewöhnlich eine bedeutendere Ausbildung als bei *D. rubiginosa*, indem sie eine zweite engere, an manchen Stellen geschlossene, eine geringe Menge Marks umschliessende, an andern von zwei bis drei Strängen zusammengesetzte Röhre darstellen; in der Nähe der Ursprungsstelle eines Blattes bilden dieselben eine gegen diese convex gekrümmte Platte, erfahren alsdann eine erste Theilung an der Stelle, wo der für den hinteren Rand bestimmte Abschnitt der äusseren Gefässbündelröhre sich löst, senden den einen ihrer beiden Zweige mit diesem in das Blatt, den andern an den Rand der Spalte der äusseren Gefässbündelröhre; letzterer wendet sich dann nach abwärts in das Mark, spaltet sich von Neuem in zwei Zweige, von welchen der eine mit dem in den vorderen Rand des Blattes eintretenden Abschnitt der äusseren Gefässbündelröhre sich vereinigt, der andere seinen Lauf in das nächste Internodium fortsetzt. Die in das Blatt eintretenden Zweige der marktändigen Bündel fliessen mit den von der äusseren Gefässbündelröhre abstammenden alsbald so innig zusammen, dass die Grenze beider völlig unkenntlich wird und erhält der Seitenspross, der bei dieser Art constant an dem Grund der Blattbasis, an deren hinterem Rand sich ausbildet, seine Gefässbündelröhre durch Ausbuchtung und Abschnürung eines Abschnittes der Gefässbündelplatte des Blattstieles und verhält sich im Uebrigen, wie es bei dem jüngeren Spross von *D. rubiginosa* beschrieben wurde.

Aus diesen Untersuchungen geht hervor, dass bei *Dennstädtia* an der Bildung der Blätter die äussere Gefässbündelröhre des Stammes und der marktändigen Gefässbündel Antheil haben, indem zwei Stränge der letzteren an bestimmten Stellen mit dem von der ersteren in das Blatt ablenkenden Abschnitt sich vereinigen, ferner, dass Zweige der marktändigen Bündel an der Ergänzung der Blattlücken Antheil nehmen, indem Zweige derselben an den Rand der letzteren herantreten, mithin der Verlauf und die Beziehungen der Gefässbündel zu einander im Stamm von *Dennstädtia* und den *Cyatheaceis* im Wesentlichen übereinstimmen; es lehren diese Untersuchungen endlich, dass die Seitensprosse des Blattes an denjenigen Stellen, an welchen die Vereinigung der äusseren Gefässbündelröhre mit den marktändigen Bündeln stattgefunden hat, ihren Ursprung nehmen.

Bevor wir zur Betrachtung der andern Farne mit zweizeiligen

Blättern und mehreren Gefässbündelkreisen übergehen, wird es vielleicht nicht unpassend sein, zunächst bei denjenigen zu verweilen, welche bei gleicher Blattstellung nur einen Kreis von Gefässbündeln besitzen.

Wie bereits erwähnt, finden sich nur bei einem kleinen Theil der Arten von *Dennstädtia* markständige Bündel, bei dem grösseren Theil derselben ist die äussere Gefässbündelröhre jener allein vorhanden und ist in ihrer ganzen Ausdehnung bis auf die Blattlücken geschlossen und bildet der in ein Blatt eintretende Abschnitt eine continuirliche Platte oder ist nur ausnahmsweise an seinem Grund in einer geringen Strecke seiner Ausdehnung in mehrere neben einander liegende Stränge gespalten. Hierher gehören *Dennstädtia tenera*, *scandens*, *davallioides*, *punctilobula*. Die gleiche Structur findet sich ferner bei sämtlichen Arten von *Microlepia* und *Hypolepis*, bei den dieser letzteren Gattung nahe stehenden Arten von *Phegopteris*, und bei den Arten von *Pteris* aus der Abtheilung von *Pt. Vespertilio*, *aurita*.

Nur in geringem Grad, nämlich insofern normal kleinere Zweige in die Blätter eintreten, weicht von diesen *Polypodium Wallichii* und *conjugatum* ab, auf deren geschlossene Gefässbündelröhre zuerst L. Brown¹⁾ aufmerksam machte.

Bei *Polypodium Wallichii* (Taf. VII, Fig. 3) erreicht die Gefässröhre annähernd den Durchmesser von 4 Linie, ist an der Insertion eines Blattes von einer engen verticalen, ungefähr 3 Linien langen Spalte durchbrochen und geht von den beiden Rändern der letzteren von dem untern Drittheil ihrer Längsausdehnung je ein Strang ab, der an seinem Ursprung gabelt, so dass vier Stränge, zwei vordere und zwei hintere, in ein Blatt eintreten.

Gegenüber diesen Beispielen, bei welchen allen die Ausdehnung der Gefässbündel die der Blattlücken überwiegt, tritt bei der Mehrzahl der hierher gehörenden Farne das entgegengesetzte Verhältniss ein, indem die Blattlücken an Umfang zunehmen und in dem nämlichen Maass die Gefässbündel sich auf feinere Stränge zusammenziehen.

Zwei Abtheilungen lassen sich wieder unter diesen Farnen unterscheiden. Bei der einen liegen die beiden Reihen der Blattlücken zwischen zwei stärkeren plattenförmigen über einander liegenden Bündeln.

1) In Horsfield pl. Jav. rar. 2.

von welchen das eine, das der Kürze halber als Oberstrang bezeichnet werden soll, unter der Mittellinie der Stammoberseite, das andere, welches diesem gegenüber als Unterstrang bezeichnet werde, über der Unterseite des Stammes hinzieht; bei der andern Abtheilung ist der Unterstrang gitterartig durchbrochen oder durch zwei oder zahlreichere zu einem Netz vereinigte feinere Bündel ersetzt und sind auf der Unterseite des Stammes die beiden Zeilen der Blattlücken durch die Maschen des Netzes des Unterstranges getrennt.

Beispiele der ersten Abtheilung bieten zahlreiche, vielleicht sämtliche Arten von *Davallia* (incl. *Humata*), zahlreiche Arten von *Acrostichum*, *Polypodium alte-scandens*, *tenellum*, *Nephrolepis ramosa*, *Aspidium albo-punctatum*, *coriaceum*, *Asplenium obtusifolium*, *resectum*; Beispiele der zweiten finden sich in vielfachen Abstufungen bei *Polypodium*, *Acrostichum* (*Leptochilus*) *axillare*, *Platyserium*.

So weit meine Erfahrungen reichen, weichen bei den Farnen der ersten Abtheilung der Ober- und Unterstrang durch ihre bandartige Ausdehnung von den in die Blätter eintretenden Strängen ab und übertrifft der letztere den ersteren stets an Breite, wodurch die erste Andeutung einer verschiedenen Structur der oberen und unteren Seite des Stammes hervorgebracht wird. Der Stamm selbst ist ferner häufig abgeflacht und erreicht das Rindenparenchym auf der oberen Seite eine bedeutendere Stärke als auf der entgegengesetzten, vielfach nähern sich Ober- und Unterstrang der Längsachse des Stammes und sind alsdann auf dem Querschnitt des letzteren die für die Blätter bestimmten Bündel zu beiden Seiten des Ober- und Unterstranges in einem Bogen angeordnet, dessen Convexität nach aussen vorspringt und in der Nähe der Blattinsertion oft einen so hohen Grad erreicht, dass die Gefässbündel des Stammes in zwei centrale und eine grössere Zahl peripherischer geschieden zu sein scheinen.

Die Modificationen der Structur der dieser ersten Abtheilung angehörenden Farne beruhen auf der Stärke und Richtung der die Blattlücken abgrenzenden, ferner auf dem Ursprung, der Zahl und den Verbindungen der in die Blätter und Seitensprosse eintretenden Gefässbündel.

Einige Beispiele, bei deren Aufzählung von den einfachsten Fällen zu den complicirteren fortgeschritten wird, sollen zur Erläuterung dieser Modificationen dienen.

Bei *Asplenium obtusifolium* (Taf. VII, v) treten die Stränge, welche die auf einander folgenden Blattlücken scheiden (Fig. 7 c), in schräg aufsteigender Richtung von dem Unterstrang an den Oberstrang, entwickeln in der Nähe ihres Ursprungs eine Wurzel (Fig. 7 r), deren sonst zahlreiche von dem Unterstrang entspringen und haben gewöhnlich nur eine geringe Stärke oder erreichen doch nur ausnahmsweise eine so bedeutende Breite (Fig. 7 v), dass der Querschnitt des Stammes eine geschlossene Gefäßbündelröhre (Fig. 2) zeigt. Jedes Blatt nimmt zwei Stränge auf, von welchen der eine von dem Ober- der andere von dem Unterstrang abstammt.

Asplenium resectum (Taf. VII, iv) stimmt in allen wesentlichen Punkten mit *A. obtusifolium* überein, doch vermisste ich die Wurzel an dem Grund der die Blattlücken scheidenden Stränge. — Das Verhalten der Seitensprosse konnte bei diesen beiden Arten nicht ermittelt werden.

Bei *Aspidium albo-punctatum* (Taf. VII, vi) werden die Blattlücken abgegrenzt durch stärkere Bündel, die von dem Ober- und Unterstrang entspringen, in der Mitte zwischen beiden sich vereinigen und von ihrer Vereinigungsstelle aus nach vorn ein rinnenförmig gebogenes, markwärts offenes Bündel bilden, das in den Seitenspross eintritt und alsbald ringförmig sich schliesst. Ungefähr in der Mitte der Längsausdehnung der Blattlücken geben der Ober- und Unterstrang je einen Zweig in die Blätter. Wurzeln entspringen gewöhnlich von dem Unterstrang allein, nur ausnahmsweise und einzeln auch an dem Oberstrang.

Polypodium alve-scandens, *tenellum* und *Nephrolepis ramosa* stimmen mit diesem *Aspidium* überein.

Bei *Acrostichum Lingua* (Taf. VII, vii) scheiden Gefäßbündel, die von dem Unterstrang in schräger Richtung ansteigen, nachdem sie zunächst einen Zweig an die Seitensprosse abgegeben, dann gewöhnlich auffallend verschmälert, ihren Lauf zu dem Oberstrang vollendet haben, die auf einander folgenden Blattlücken. Jedes Blatt nimmt drei Gefäßbündel auf, von welchen das hintere und vordere innere von dem Ober-, das vordere äussere von dem Unterstrang abstammt.

Bei *Acrostichum brevipes* (Taf. VIII, i) werden die auf einander folgenden Blattlücken abgegrenzt durch einen dünnen Gefäßbündel, der in geringer Entfernung von seinem Ursprung an dem Unterstrang einen Bündel für den Seitenspross abgiebt. Dieser schliesst sich alsbald röhren-

förmig, dringt in der Rinde vor, bis er die Basis des Seitensprosses, die oft bis auf den Grund des Kissens des nächst vorderen Blattes gerückt ist, erreicht. Die Blätter nehmen gewöhnlich fünf Stränge (Fig. 4) auf, von welchen der hintere von der Mitte des die Blattlücken scheidenden Stranges, die andern paarweise von dem Ober- und Unterstrang entspringen. Nicht selten fliessen zwei der hinteren Blattstränge zusammen (Fig. 5 links) oder spaltet sich einer derselben in seinem Verlauf (Fig. 3).

Bei beiden genannten Arten von *Acrostichum* entspringen sämtliche Wurzeln von dem Unterstrang.

Acrostichum simplex und *melanopus* stimmen in allen wesentlichen Punkten mit *A. brevipes* überein.

Bei *Aspidium coriaceum* (Taf. VIII, 1x) schliessen zwei Stränge von bedeutender Stärke die Blattlücken (Fig. 6) ab; der eine derselben stammt von dem Unterstrang, hat eine bedeutendere Länge und giebt ungefähr in der Mitte seiner Längsausdehnung nach vorn einen stärkeren Bündel in den Seitenspross und bald oberhalb, bald unterhalb von diesem einen schwächeren in das Blatt ab; der andere ist kürzer und stammt von dem Oberstrang. Beide vereinigen sich in der Nähe des letzteren unter einem nach vorn vorspringenden Winkel und senden hier einen zweiten Bündel in das Blatt. Die Blätter nehmen zwei vordere stärkere und eine grössere Zahl, fünf bis neun, kleinerer Bündel, welche zu einem der Convexität des Blattstiels entsprechenden Bogen geordnet sind, auf. Die beiden ersteren entspringen zuvörderst von dem Ober- und Unterstrang, die andern stammen theilweise von diesen, theilweise von den die Blattlücken trennenden Strängen an den bereits angeführten Stellen ab, gehen hier und da unter einander Verbindungen ein oder theilen sich vor ihrem Eintritt in das Blatt. Der dem Seitenspross bestimmte Bündel stellt zunächst eine markwärts offene Rinne dar (Fig. 4), schliesst sich dann röhrenförmig (Fig. 5) und erfährt stets unterhalb des ersten Blattes eine Theilung in mehrere Stränge, die eine den Gefässbündeln der Hauptachse entsprechende Anordnung besitzen. Sämmtliche Wurzeln entspringen von den Rändern und der untern Fläche des Unterstranges.

Unter den Arten von *Davallia* wird bei *D. parvula*, *pedata*, *heterophylla* die einfachste Anordnung der Gefässbündel angetroffen.

Bei der letzteren (Taf. VIII, 11, schliessen zwei feine, von dem Ober-

und Unterstrang ansteigende Stränge, unter einem spitzen Winkel sich vereinigend, die Blattlücken ab (Fig. 3 c, c). An ihrer Vereinigungsstelle entspringen zwei Zweige, von welchen der äussere in den Seitenspross eintritt, der innere parallel mit dem Ober- und Unterstrang verläuft, Zweige von diesen (d, d) aufnimmt, dann in zwei Bündel sich theilt, die in das Blatt eintreten. Der eine der letzteren steht gewöhnlich mit dem inneren der beiden die Blattlücke nach vorn abgrenzenden Stränge in Verbindung (m).

Abweichend von den bisher betrachteten Beispielen, deren Blattstränge von ihrem Ursprung an den Rändern der Blattlücken unmittelbar in das Blatt eintreten oder nur theilweise, wie bei *Acrostichum brevipes* und *Aspidium coriaceum* unter einander Verbindungen eingingen, fliessen diese Stränge, analog den bei den *Cyatheaceis* von dem unteren Rand der Blattlücken entspringenden, hier normal unter einander zusammen und bilden ein die Blattlücken überspannendes Netz, das eine bestimmte Zahl von Zweigen in das Blatt sendet.

Dieses über die Blattlücken ausgespannte Netz erhält nun bei der Mehrzahl der Arten von *Davallia* mit der Steigerung der Zahl der in ein Blatt eintretenden Stränge eine complicirtere Beschaffenheit.

Bei *Davallia bullata* (Taf. VIII, III) nimmt das Blatt ausser den beiden vorderen stärkeren Strängen entweder einen oder zwei hintere kleinere auf. In dem ersten Fall (Fig. 3 rechts) schliesst ihre Structur sich innig an die von *D. heterophylla* an und weicht nur dadurch ab, dass der eine, nämlich der vordere innere Blattstrang, unmittelbar von dem Oberstrang oder dem Grund des von diesem entspringenden, nach vorn die Blattlücke abschliessenden Bündels abgeht und nur die beiden anderen das über die Blattlücke ausgespannte Netz in das Blatt fortsetzen; in dem zweiten Fall, wenn zwei hintere kleinere Stränge in das Blatt eintreten (Fig. 3 links) steigert sich die Zahl der Maschen dieses Netzes, doch ist auch dann eine Annäherung an *D. heterophylla* unverkennbar, indem von den die Blattlücken scheidenden Strängen stets nur ein einziger Blattstrang entspringt und nur durch frühere Spaltung desselben in zwei Stränge und durch Vereinigung dieser mit den von dem Ober- und Unterstrang abgehenden Zweigen eine grössere Maschenzahl herbeigeführt wird.

Bei *Davallia dissecta* (Taf. VIII, v) gehen von den die Blattlücken scheidenden Gefässbündeln unterhalb ihrer Vereinigungsstelle, die das

efässbündel des Seitensprosses einnimmt, zwei Blattstränge ab, die unter einander und mit den von dem Ober- und Unterstrang entspringenden Strängen Verbindungen eingehen, in ihrem Verlauf hier und da eine Theilung erfahren und ein Netz bilden, dessen Maschen über dem Rand der Blattlücken eine annähernd gleichmässige Ausdehnung haben und in drei Reihen neben einander liegen, dann gegen die Ursprungsstelle des Blattes sich mehrten und unregelmässigere Gestalten annehmen.

Bei den genannten Arten von *Davallia*, ferner bei *D. elegans*, *pyxidata*, *canariensis*, die in allen wesentlichen Punkten mit *D. dissecta* übereinstimmen, entspringt von der Vereinigungsstelle der beiden, von dem Ober- und Unterstrang zum Behuf des Abschlusses der Blattlücken ausgesandten Stränge der in den Seitenspross eintretende Bündel; dieser weitert sich alsdann zu einer engen Röhre und spaltet sich stets unterhalb des ersten Blattes in zwei Stränge, von welchen der eine mit dem Ober-, der andere mit dem Unterstrang der Hauptachse in allen Eigenschaften übereinstimmt und findet in Folge dieses Verhaltens der Gefässbündel ein Zusammenhang des Markes der Haupt- und Seitentachse nicht statt. Bei andern Arten, z. B. *D. stenocarpa*, *divaricata* tritt diesem Verhalten eine Abweichung ein, indem die beiden die Blattlücken scheidenden Stränge sich nicht mit einander vereinigen, sondern unter der Basis des Seitensprosses einander nur sich nähern und unmittelbar in derselben ihren Lauf fortsetzend, den Ober- und Unterstrang desselben bilden und stets eine, wenn auch häufig nur geringe, Menge Markparenchyms umschliessen, das in continuirlichem Zusammenhang mit dem der Hauptachse steht.

Die nämliche Verschiedenheit in dem Verhalten der Gefässbündel bei der Insertion des Seitensprosses wurde bei andern Farnen von Stenzel beobachtet; so z. B. nehmen bei *Aspidium cristatum* und *sinulosum*¹⁾, ferner bei *Alsophila aculeata*²⁾ die Seitensprosse einen Gefässbündel auf, der von der Gefässbündelröhre der Hauptachse entspringt und sich allmählig zu einer Mark umschliessenden Röhre erweitert, während bei dem von Stenzel irriger Weise als *Diplazium giganteum* bezeichneten Farn³⁾ eine Ausstülpung der Gefässbündelröhre der Hauptachse in den Seitenspross eintritt und das Mark beider continuir-

1) Verjüngungserschein. bei Farnen 9. 2) l. c. 19. 3) l. c. 24.

lich zusammenhängt. Ebenso finden wir, dass die von dem Rücken der Blattbasen entspringenden Sprosse entweder, wie bei *Alsophila pruinata*, *Cibotium Schiedeii*, *Pteris elata* var. *Karsteniana* eine Ausstülpung der Gefässbündelplatte des Blattstieles aufnehmen und das Mark derselben mit dem von den Gefässbündeln des Blattstieles umschlossenen Parenchym in continuirlichem Zusammenhang steht, oder dass diese Sprosse nur einen einzigen, von einem Blattstrang entspringenden Bündel, der sich erst allmählig zu einer Mark umschliessenden Röhre erweitert, aufnehmen, wie es bei *Aspidium filix mas* gewöhnlich der Fall ist. Die zahlreichen Untersuchungen Stenzel's an diesem letzteren Farn¹⁾ haben ferner ergeben, dass seine Sprosse zuweilen mehrere Bündel oder ein röhrenförmiges Bündel aufnehmen und das Mark des letzteren mit dem des Blattes in Verbindung steht, so dass es keinem Zweifel unterliegen kann, dass dieses zwiefache Verhalten der Gefässbündel an der Insertion der Seitensprosse nur von einer untergeordneten Bedeutung sei, ja wahrscheinlich wird, dass dasselbe bei umfangreicheren Untersuchungen auch bei manchem derjenigen Farne, bei welchen bisher nur eine von beiden Insertionsweisen der Gefässbündel der Seitensprosse beobachtet wurde, constatirt werde, und dass dasselbe vielleicht überhaupt nur von einer früheren oder späteren Entwicklung der Seitensprosse abhängt.

Bei *Davallia stenocarpa* (Taf. VIII, iv) nähern sich die beiden die Blattlücken sonst abschliessenden Stränge auffallend unter der Basis der Seitensprosse und übertreffen die Blattstränge, die in ihrem Ursprung und Verlauf sich wie bei *D. dissecta* verhalten, an Stärke, sodass die Grenze der Blattlücken immerhin noch deutlich hervortritt; ebenso ist bei *D. divaricata* (Taf. VIII, vii), deren Blattstränge in einer höheren Zahl als bei *D. dissecta* auftreten, die Grenze der Blattlücken wegen der bedeutenden Stärke der zu dem Abschluss derselben bestimmten Stränge eine leicht kenntliche, obwohl diese letzteren nur in geringeren Grad als bei *D. stenocarpa* bei ihrem Eintritt in den Seitenspross einander sich nähern.

Bei *Davallia chaerophylla* (Taf. VIII, vi) hingegen übertreffen diese Stränge nicht oder doch nur an ihrem Ursprung die Blattstränge an Stärke und ist nicht nur die Grenze der Blattlücken eine verwischte,

1) l. c. 28.

sondern es bietet auch das Netz, welches Ober- und Unterstrang verbindet, ein so unregelmässiges Ansehen, dass es nur mit Hilfe der That- sachen, welche bei der Untersuchung der vorhergehenden Arten ge- wonnen wurden, entwirrt werden kann. Die die Blattlücken abgren- zenden Stränge beschreiben nämlich eine mehrfach gebrochene Linie und geben einer grösseren Zahl von Strängen den Ursprung. Einer von diesen, den ich der Kürze halber als Mittelstrang (Fig. 4 m) bezeichnen will, theilt die Blattlücke der Länge nach in zwei über einander liegende Hälften, eine obere, welche die Blattstränge enthält und eine untere, welche nach vorn durch den Seitenspross abgeschlossen wird. Jedes Blatt nimmt vier Stränge auf, zwei vordere stärkere und zwei hintere schwächere; von den ersteren entspringt der innere von dem Ober-, der äussere von dem Mittelstrang; von den beiden hinteren aber stammt entweder der eine von dem Oberstrang, der andere von dem von die- sem abgehenden Grenzstrang der Blattlücken ab oder es entspringen beide an letzterem, gehen in ihrem Verlauf sowohl unter einander, als mit andern von dem Ober- und Mittelstrang entspringenden Bündeln Verbindungen ein und bilden mit diesen bald gleichmässig, bald un- regelmässig gestaltete Maschen. Die Zweigmasche ist entweder in eine Reihe vor einander oder in zwei Reihen über einander liegender klei- nerer Maschen von ungleicher Weite, die auch hier und da zwischen die Blattmaschen vordringen, getheilt durch Stränge, die von dem Unter- und Mittelstrang ausgehen. In dem Seitenspross, der stets mit breiter Basis der Hauptachse aufsitzt, treten an der Stelle, wo z. B. bei *Aspidium coriaceum* der rinnenförmige Bündel des Seitensprosses von dem, von dem Unterstrang zum Behuf des Abschlusses der Blattlücken ab- gehenden Bündel entsprang, zwei Stränge ein, die zu dem Ober- und Unterstrang des Seitensprosses sich ausbilden, oder es gesellt sich die- sen beiden noch ein dritter (Fig. 3 g, g) hinzu, indem der Strang, der die beiden vordersten kleineren Maschen der Zweigmasche scheidet, diese nicht völlig abschliesst, sondern sich in den Seitenspross fortsetzt und zur Verstärkung des Unterstranges desselben beiträgt, während er in andern Fällen (Fig. 4) mit dem zu dem Unterstrang des Seitensprosses bestimmten Bündel sich früher vereinigt.

Bei allen Arten von *Davallia* entspringen die Wurzeln in schrägen Reihen zu mehreren beisammenstehend von den von dem Unterstrang zum Behuf des Abschlusses der Blattlücken abgesandten Bündel.

Es wurde bei den Beispielen der ersten Abtheilung der Farne mit zweizeiligen Blättern und vorherrschenden Blattlücken länger verweilt, um darzuthun, dass bei denselben, abgesehen von der Verschiedenheit, welche die obere und untere Stammseite durch die ungleiche Breite des Ober- und Unterstranges erhält, die nämliche Structur wiederkehrt, die wir bei Farnen mit mehrzeiligen Blättern antreffen und dass die Modificationen derselben auf Verhältnissen beruhen, die auch bei diesen ihre Analoga finden, dann aber auch, um die Untersuchung der zweiten Abtheilung dieser Farne vorzubereiten.

Bei diesen¹⁾ wird eine auffallendere Verschiedenheit der Structur der oberen und unteren Stammseite herbeigeführt durch eine Spaltung des Unterstranges in zwei oder mehrere zu einem Netz vereinigte Stränge, dessen Maschen in keiner Beziehung zu den Blättern und Seitensprossen stehen, vielmehr nur, wie der Unterstrang bei der ersten Abtheilung, den Wurzeln den Ursprung geben und die beiden Zeilen der Blattlücken auf der unteren Seite des Stammes von einander scheiden.

Die Modificationen der Structur der dieser zweiten Abtheilung angehörenden Farne beruhen auf der Zahl und Stärke der Unterstränge, dem Umfang des von denselben gebildeten Maschennetzes und der Blattlücken, dem Ursprung, der Zahl und den Anastomosen der in die Blätter und Seitensprosse eintretenden Stränge, der verschiedenen Stärke des Oberstranges und endlich auf dem Verhalten der Blattkissen zu dem Stamm.

In dem einfachsten Fall, der bei *Polypodium aurisetum*, *piloselloides*, *cayennense* (Taf. IX, 1) angetroffen wird, ist der Unterstrang in zwei Stränge gespalten, die nur in grösseren Entfernungen mit einander anastomosiren. Der Oberstrang übertrifft die beiden Unterstränge an Stärke und giebt nach rechts und links Bündel ab, von welchen die einen sich in zwei kleinere Bündel theilen und in ein Blatt eintreten, die andern mit einem entsprechenden Bündel der beiden Unterstränge

1) Auch in der Insertion der Seitensprosse findet im Allgemeinen zwischen diesen beiden Abtheilungen der Farne eine Verschiedenheit statt, insofern diese bei der ersten, z. B. den Arten von *Davallia*, bei *Acrostichum brevipes*, *Aspidium coriaceum* vor der Insertionsstelle des Blattes, bei der zweiten, wie z. B. die Mehrzahl der *Polypodien*, hinter derselben hervortreten; doch ist diese Verschiedenheit keine durchgreifende und einige Arten einer jeden Abtheilung verhalten sich abweichend.

sich verbinden, die Blattlücken abgrenzen und an ihrer Vereinigungsstelle einen Strang für einen Seitenspross abgeben.

Diese Arten von *Polypodium* verhalten sich, insofern ihre Blattstränge ausschliesslich von dem Oberstrang abstammen, einfacher als die Beispiele, die wir aus der ersten Abtheilung untersucht haben und weichen ferner dadurch ab, dass der breitere Unterstrang dieser hier durch zwei feine in grösseren Entfernungen unter einander anastomosirende Stränge ersetzt ist, stimmen hingegen, sobald man erkannt hat, dass diese beiden Unterstränge den seitlichen Rändern des breiten Unterstranges jener entsprechen, in dem Verhalten der die Blattlücken abschliessenden Stränge und dem Ursprung des in den Seitenspross eintretenden Bündels mit zahlreichen Beispielen der ersten Abtheilung überein.

Ein in mehrfacher Beziehung complicirtes Beispiel bietet *Polypodium squamulosum* (Taf. IX, 11). Die beiden Unterstränge des Stammes (Fig. 9 i, i) gehen durch zahlreichere Queräste als bei *P. cayennense* unter einander Anastomosen ein und schliessen Maschen ab, die selbst wieder zuweilen durch einen Längsstrang in zwei neben einander liegende kleinere Maschen getheilt werden (v, v) und geben zahlreichen Wurzeln den Ursprung, von welchen gewöhnlich nur ein kleiner Theil die Rinde durchbricht. Nach oben und vorn ansteigende Zweige beider Unterstränge vereinigen sich dann mit entsprechenden Zweigen des Oberstranges (c, c) an der Insertion der Seitensprosse und schliessen die Blattlücken ab; eine jede von diesen wird durch einen Mittelstrang (m) in zwei der Länge nach neben einander liegende Maschen getheilt, eine äussere, an deren vorderem Ende der Seitenspross sich befindet, und eine innere, die selbst wieder in eine hintere kleinere und eine vordere grössere Masche zerfällt. Letztere umfasst die beiden in ein Blatt eintretenden Stränge, von welchen der äussere von dem Mittelstrang, der innere entweder von dem Oberstrang oder gewöhnlich von dem vorderen Bogen der hinteren kleineren Masche abstammt. Der Seitenspross nimmt an seinem Grunde (Fig. 3) ein rinnenförmig gebogenes Bündel auf und erhält unterhalb seines ersten Blattes nach wiederholten Theilungen dieses Bündels und Anastomosen seiner Zweige (Fig. 4—7) die Structur der Hauptachse.

Bei einigen andern Arten von *Polypodium*, deren langgedehnte Internodien nur eine geringe Stärke erreichen, z. B. *P. caespitosum*

(Taf. IX, iv) ist der Oberstrang (Fig. 5) nur in geringem Grad an Stärke den Untersträngen überlegen; letztere schwanken an Zahl zwischen zwei und drei, liegen stets dicht gedrängt neben einander und schliessen unter spitzen Winkeln zusammenfließend, enge lang gestreckte Maschen ab. Ebenso laufen die Blattlücken in eine lange nach vorn ausgezogene Spitze aus, und erfolgt ihr Abschluss durch einen Zweig des nächst äusseren Unterstranges, der allmählig in seinem Verlauf nach vorn dem Oberstrang sich nähert und mit demselben vereinigt (c). Die Blätter nehmen vier Stränge auf, von welchen der innere vordere und die beiden hinteren von dem Oberstrang, der äussere vordere von dem die Blattlücke abgrenzenden Zweig des Unterstranges abstammen. Die Seitensprosse nehmen zwei Bündel auf, die von einem Bogen entspringen, der durch Vereinigung eines Zweiges des äusseren hinteren Blattstranges und des nächsten Unterstranges zu Stande kommt.

Bei *Acrostichum (Leptochilus) axillare* (Taf. IX, iii), dessen Stamm in der Länge und Stärke seiner Internodien mit *Polypodium caespitosum* übereinstimmt, steigert sich die Zahl der Unterstränge auf vier, während die der Blattstränge auf zwei herabsinkt. Die Unterstränge liegen dicht neben einander und sind zu engen langgedehnten Maschen verbunden (Fig. 7); Zweige der beiden seitlichen Unterstränge schliessen mit entsprechenden Zweigen des Oberstranges die nach vorn in eine lange Spitze ausgezogenen Blattlücken ab. Die von dem Oberstrang abstammenden Zweige geben in der Mitte ihrer Längsausdehnung einem Strang den Ursprung, der als Mittelstrang die Blattlücke bis zu dem Insertionspunkt des Blattes in zwei nebeneinander liegende Maschen theilt, dann mit dem nächsten Unterstrang sich vereinigt und dadurch die äussere dieser beiden Maschen schliesst, dann mit seinem Ende in das Blatt eintritt und den äusseren der beiden Blattstränge bildet, während der innere der letzteren von dem Oberstrang abstammt. Die Seitensprossen stehen ungefähr in der Mitte der äusseren Masche der Blattlücke und erhalten von dem Unter- und Mittelstrang je einen ihrer beiden Bündel.

Complicirter sowohl durch die grössere Zahl der Unterstränge, als die Anastomosen der in die Blätter eintretenden Stränge ist die Structur von *Polypodium fraxinifolium* (Taf. IX, v). An dem entblössten Gefässbündelsystem (Fig. 4) tritt zunächst der Oberstrang, sanfte Biegungen zwischen den beiden Blattzeilen beschreibend, durch seine bedeutendere Stärke hervor, ebenso ist der die Blattlücken scheidende Bogen

an den Blattbasen durch seine bedeutendere Stärke leicht von den übrigen Gefäßbündeln zu unterscheiden. Dieser Bogen giebt zwei oder drei Strängen den Ursprung, die mit den von dem Oberstrang und an seitlichen Untersträngen ausgehenden Strängen zu einem Netz verflochten, die Blattlücken überspannen. In dem Netz dieser Stränge vermischt man eine schärfere Grenzlinie zweier Regionen, die in andern Blättern durch den Mittelstrang geschieden waren; immerhin aber ist unverkennbar, dass das Gepräge der Maschen auf der hinteren und vorderen Hälfte Verschiedenheiten bietet. Auf der ersteren werden im allgemeinen weitere Maschen in geringerer Zahl angetroffen und treten zu drei oder vier Zweige in die Basis der Seitensprossen ein, auf der letzteren treten häufiger Spaltungen der Blattstränge ein und wird durch häufigere Anastomosen derselben ein Netz engerer Maschen gebildet, das sich in den Blattstiel fortsetzt. Letzterer nimmt ausser diesen zwei Strängen vorerst an den Rändern der Blattlücken entspringende stärkere Stränge auf. Die Zahl der Unterstränge beträgt gewöhnlich acht, ihre Maschen sind von bedeutenderer Länge als die der Blattlücken.

Von *Polypodium fraxinifolium* weicht *P. latipes* (Taf. IX, vi) fast durch die abweichende Gestalt der Gefäßbündelmaschen, ganz insbesondere durch eine bedeutendere Breite und geringere Länge der Maschen des Unterstranges ab.

Bei *Polypodium Paradiseae* (Taf. IX, vii) sind die Biegungen des Oberstranges (Fig. 5) zwischen den beiden Blattzeilen auffallender als bei *P. fraxinifolium*; dieselbe übertrifft an Stärke die übrigen Gefäßbündel; die Blattlücken werden eine nicht unbedeutende Strecke vor dem Insertionspunkt des Blattes abgeschlossen, verschmälern sich nach dem Insertionspunkt auffallend und scheinen hier die Maschen der Unterstränge zwischen den beiden Zeilen einzugreifen. Die in die Blätter eintretenden Stränge bilden ein engmaschiges Netz; die Seitensprossen entspringen an dem Grund der Blattkissen auf der äusseren Seite und nehmen vier Stränge auf.

Bei *Polypodium vulgare* var. *cambricum* (Taf. IX, viii) beschreibt der stärkere Oberstrang (Fig. 3) eine zickzackförmig gebogene Linie und durchschneidet die Blattlücken beider Zeilen in einander und haben im Vergleich mit den übrigen Strängen ihrer Länge eine bedeutendere Breite als bei den bisher betrachteten Blättern. Jede Blattlücke zerfällt in eine vordere innere grössere und eine hintere untere kleinere Hälfte; erstere wird von dem Netz der

Blattstränge überspannt; letztere nimmt die für den Zweig bestimmten Stränge auf. Die Maschen des Unterstranges sind durch ihre bedeutendere Weite leicht zu unterscheiden.

Deutlicher als bei dem *Polypodium vulgare* var. *cambricum* treten die Blattlücken bei *Platyserium alcicorne* (Taf. VIII, vm) ¹⁾ hervor, indem sowohl der Oberstrang, als auch die die Blattlücken scheidenden Bogen eine bedeutende Breite erreichen. Letztere geben vier Strängen den Ursprung, von welchen drei (Fig. 1) in einer Ebene liegen, untereinander und mit drei von dem Ober- und Unterstrang abstammenden Zweigen ein über die Oberfläche der Blattlücke ausgespanntes Netz bilden, von dem vier Stränge in den Rücken des Blattstieles eintreten, während der vierte Strang unter diesen hinzieht, mit den beiden zuvörderst von dem Ober- und Unterstrang abgehenden Zweigen sich verbindet (Fig. 2, 3) und mit diesen die beiden vorderen Stränge des Blattstieles (Fig. 4) bildet²⁾.

Ueber das Verhalten der Seitensprosse gab das untersuchte Stämmchen keinen Aufschluss, doch dürfte die Vermuthung gerechtfertigt sein, dass die kleinere hintere aussere Masche (Fig. 1 g) in dem oberflächlichen Netz der Blattstränge die Basis derselben umfasse. Nicht selten beobachtete ich hingegen die Entstehung eines Laubsprosses an einer Wurzel, indem das Ende derselben sich zu einem kleinen von Spreuschuppen bedeckten Knötchen ausgebildet hatte, an dessen Grunde die Wurzelmitze noch kenntlich war.

Die die Unterseite des Stammes einnehmenden Stränge, der Zahl nach sieben bis neun, erreichen eine so bedeutende Stärke und schliessen so enge Maschen ab, dass man dieselben zusammen vielleicht geeigneter als einen von feinen Spalten durchbrochenen Unterstrang bezeichnet (Fig. 1).

Während in diesem letzten Beispiel die Grenzen der Blattlücken scharf umschrieben waren und die Maschen der in die Blätter eintretenden Stränge auffallend von den Maschen der Unterstränge abwichen, nehmen bei den Arten von *Polypodium* mit stärkerem Stamm, z. B. *P. aureum*, *areolatum*, *sporadocarpum*, *neriifolium*, *leiorhizum*, *decurrens* sämtliche Maschen des Gefässbündelsystems eine gleichmässige

1) Vergl. Hofmeister, Abh. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. V, 654.

2) Vergl. Link, Abh. d. Berl. Akad. 1835. 82. Taf. 1, Fig. 4.

Configuration an oder es behaupten doch nur die Maschen in der nächsten Umgebung der Insertionspunkte der Blätter und Seitensprosse ein eigenthümliches Ansehen und ist nur die vordere innere Grenze der Blattlücken deutlich wahrnehmbar, die seitliche Grenze derselben von den Maschen der Unterstränge hingegen mehr oder weniger verwischt.

So z. B. ist an dem entblössten Gefässbündelsystem von *Polypodium sporadocarpum* (Taf. X, Fig. 3) die Grenze der Blattlücken von der Insertion des Blattes durch den von dem Oberstrang ausgehenden Bogen deutlich gezogen und sind in dem die Blattlücken überspannenden Netze die für die Blätter und Seitensprosse bestimmten Stränge schärfer von einander geschieden, als es bei *P. fraxinifolium* der Fall war und enthält die dem Oberstrang angedrückte innere Region der Blattlücke namentlich nach vorn gegen den Insertionspunkt des Blattes zahlreichere, zu kürzeren engeren Maschen verbundene Stränge, als die äussere vorn durch den Seitenspross abgeschlossene Region; hingegen sind die Maschen der Unterstränge kaum oder doch nur in so geringem Grade von denjenigen Maschen der Blattlücken, welche vor und hinter der Insertion der Seitensprosse und an ihrem hinteren innern Theil vor der Insertion des nächsten hinteren Blattes liegen, verschieden, dass eine Grenze derselben nicht kenntlich hervortritt, vielmehr die Maschen der Unterstränge zwischen die Blattlücken bis zu dem Oberstrang einzugreifen, und die Blattlücken selbst auf die Maschen in der nächsten Nähe von den Blattbasen beschränkt zu sein scheinen.

Ebenso ist bei *Polypodium aureum* (Taf. X, 11) die Grenze der Blattlücken nur vor der Insertion des Blattes deutlich ausgesprochen (Fig. 3) und ist die die Basis des Seitensprosses umschliessende Masche von allen andern leicht zu unterscheiden, während die am Grund der Blattlücken befindlichen Maschen kaum von denen der Unterstränge verschieden sind.

Die in die Blätter eintretenden Stränge verhalten sich hier entweder wie bei *P. sporadocarpum*, oder es bieten die beiden vorderen stärkeren Stränge derselben eine Abweichung dar. Diese entspringen nämlich zuweilen von dem die Blattlücken nach vorn abschliessenden Bogen (Fig. 3 rechts, Fig. 4) und bilden mit den zahlreichen vom Ober- und Mittelstrang abstammenden Blattsträngen ein röhrenförmiges Gefässbündelnetz am Grund des Blattkissens, so dass auf dem Querschnitt des

letzteren die gewöhnliche Anordnung der Gefässbündel (Fig. 2) durch eine kreisförmige ersetzt ist.

Dieser Ursprung der vorderen Blattstränge wird alsdann bei *Polypodium decurrens* (Taf. X, i) zur Regel, indem normal von der Mitte des die Blattlücke nach vorn abschliessenden Bogens ein starker Strang (Fig. 6 a) nach hinten und oben ansteigt, die übrigen Blattstränge zu einem Kreis vereinigt (Fig. 3), dann sich spaltet (Fig. 4 a) und die beiden vorderen stärkeren Stränge des Blattstieles bildet (Fig. 2). Auf der Basis des Blattkissens, das oft in der Höhe von $\frac{1}{2}$ Zoll über die Oberfläche des Stammes vorragt, bilden sämtliche Blattstränge ein engmaschiges Netz (Fig. 4, 5), gehen dann gegen den Anfang des Blattstieles spärlichere Anastomosen ein und schliessen hier alsdann langgedehnte enge Maschen ab.

Die Maschen der in die Blätter eintretenden Stränge sammt der die Basis der Seitensprosse umgebenden Masche auf der oberen Hälfte der Blattlücke weichen wiederum auffallender von den Maschen des Unterstranges ab, die die untere Hälfte der Blattlücken bedeckenden sind hingegen kaum von den letzteren verschieden.

Während bei sämtlichen Arten von *Polypodium*, die wir beobachteten, die Blattkissen mehr oder minder über die Oberfläche des Stammes vorragten, ist bei *P. Heracleum* (Taf. X, iv) und *P. quercifolium* das Blatt in eine seichte Grube eingesenkt, aus der es nur an kräftig vegetirenden Pflanzen sich gelenkartig löst und auf der an schwächeren Exemplaren noch lange Zeit nach dem Absterben des Blattes die Reste seiner Basis persistiren. Die Untersuchung der Anordnung der Gefässbündel thut hier dar, dass die Blattkissen ein vielmaschiges Netz, wie bei *P. decurrens* aufnehmen, aber in das Rindenparenchym des Stammes eingesenkt sind und demgemäss die Gefässbündel des letzteren zu einer Röhre angeordnet sind, die auf ihrer oberen Seite mit einer tiefen und breiten Furche versehen ist, aus deren Grunde sich die für die Blätter bestimmten Stränge erheben. Doch reichte das bisher erübrigte Material nicht aus, um den Ursprung und den Verlauf der letzteren genauer zu verfolgen, wesshalb ich mich auf diese Andeutungen und die Darstellung zweier Stammdurchschnitte (Fig. 1, 2), die zweien aufeinanderfolgenden Knoten entnommen sind, beschränke.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zurück zu den Farnen, deren Gefässbündel bei zweizeiliger Anordnung der Blätter in mehrere Kreise

angeordnet sind, so sind wir nun vielleicht vorbereitet, um die Beispiele, die noch zu erörtern sind, nämlich *Polybotrya Meyeriana* und *Pteris aquilina* in naturgemässer Weise aufzufassen.

Bei der genannten *Polybotrya* (Taf. VII, n) enthalten Haupt- und Seitenachsen, ebenso die Blattstiele, zweierlei Gefässbündel, innere oder centrale und äussere oder peripherische. Erstere treten stets in geringerer Zahl auf als die letzteren und übertreffen dieselben an Stärke um ein Bedeutendes.

In der Hauptachse bilden die centralen Gefässbündel (Fig. 4—4), der Zahl nach drei bis sieben, einen inneren Kreis und sind die peripherischen in dem Rindenparenchym, entweder, wie in seltneren Fällen, in einem äusseren Kreis (Fig. 3) angeordnet oder, wie gewöhnlich, in einer unregelmässigeren Weise vertheilt und liegen auf der oberen Seite des Stammes in zwei oder drei Reihen übereinander (Fig. 2, 4) während die der unteren Stammseite in einem Bogen angeordnet sind. Ihre Zahl schwankt zwischen funfzehn und ungefähr funfzig.

Die Seitensprosse (Fig. 5, 6), die stets aus der Hauptachse vor und ausserhalb der Insertionsstelle eines Blattes hervortreten, nehmen an ihrem Grund drei centrale und neun bis zwölf peripherische, in einen Kreis geordnete, Gefässbündel auf.

In dem Blattstiel werden vier bis acht stärkere centrale Bündel von einem Kreis feinerer peripherischer, die an Zahl von neun bis vierundzwanzig variiren, umschlossen (Fig. 7, 8).

Auf einigen Längsschnitten durch den Stamm erkennt man alsbald, dass die peripherischen Bündel von den centralen ihren Ursprung nehmen und dass Stränge von beiden jedem Blatt und jedem Seitenspross zugeführt werden.

Die centralen Stränge liegen dicht nebeneinander, spalten sich in ihrem Verlauf, schliessen allmählig sich vereinigend langgedehnte Maschen ab und sind zu einem die Längsachse des Stammes umschliessenden Netz verbunden. Bei genauerer Betrachtung des isolirten Netzes dieser Stränge (Fig. 16) ergibt sich ferner, dass einer derselben (*s*) unter der Mittellinie der Oberseite des Stammes hinzieht, vor der Insertion eines Blattes (*f*) mit seinem nächst äusseren Nachbar sich vereinigend, eine Blattmasche abschliesst, dann in bedeutenderer Stärke seinen Lauf fortsetzt bis zu dem diesem Blatt angehörenden Seitenspross, wo er alsdann eine Abnahme erfährt durch die Abgabe von Zweigen, von

welchen der hintere oder die hinteren entweder unmittelbar oder nach einer Vereinigung mit Zweigen des nächst äusseren Stranges in den Seitenspross eintreten, der vordere aber durch seine Vereinigung mit einem Zweig des nämlichen Stranges den Abschluss einer Masche vor der Insertionsstelle des Seitensprosses (*g*) herbeiführt. Die die Blattmaschen abschliessenden Stränge geben vor ihrer Vereinigung zwei oder mehrere Stränge ab, die in der Längsachse des Blattstieles ansteigen und die centralen Bündel desselben darstellen und sämtliche die Basis der Seitensprosse umgebende Gefässbündel (Fig. 47) setzen sich in das centrale Gefässbündelsystem von diesen fort.

Es verhält sich demnach bei dieser Polybotrya das centrale Gefässbündelsystem der Stränge in der nämlichen Weise wie das einzige Gefässbündelsystem der zuletzt betrachteten Farne und entspricht der mittleren oberen Strang des ersteren genau dem Oberstrang der letzteren und ist ein Theil seiner Maschen zu beiden Seiten dieses oberen Stranges durch die Insertionspunkte der Blätter und Zweige geregelt, ein anderer Theil vielfachen Schwankungen unterworfen; es stimmen ferner die centralen Stränge der Blätter und Seitensprosse von Polybotrya in Ursprung und Anordnung überein mit den Strängen, die bei diesen Farne von dem einzigen Gefässbündelsystem in die Blätter und Seitensprosse eintreten. Es entsprechen dann aber auch die Stränge des centralen Gefässbündelsystems der Polybotrya der äusseren Gefässbündelröhre derjenigen Farne, bei welchen wir mehrere Gefässbündelkreise angetroffen hatten und nicht die markständigen Stränge derselben und bieten die peripherischen Gefässbündel der Polybotrya eine Erscheinung dar, die bei keinem von diesen uns begegnete.

Diese peripherischen Stränge verdanken zahlreichen Zweigen, die von den centralen Strängen nach vorn und aussen ansteigen, ihren Ursprung, bilden untereinander ein röhrenförmiges Netz (Fig. 48), das auf der oberen Seite des Stammes gewöhnlich in zwei übereinander liegende Schichten zerfällt, und setzen sich in das peripherische Netz der Blattstiele und Seitensprosse fort und nehmen hier Zweige auf, die von den centralen Strängen dieser entspringen.

Weder in den Maschen dieses peripherischen Netzes, noch in dem Ursprung und der Zahl der von den centralen Strängen abgehenden Zweige, durch deren Vereinigung dasselbe zu Stande kommt und fortgebildet wird, lässt sich eine Regelmässigkeit erkennen oder es bieten

dieselben der Schwankungen so viele, dass mir eine solche entgangen ist. So z. B. entspringt an einer Blattbasis von einem centralen Bündel des Stammes unmittelbar vor dem Ursprung eines der centralen Blattstränge (Fig. 9, 10) ein Zweig, der sich alsbald spaltet und sich in das peripherische Netz der Hauptachse und des Blattes fortsetzt oder es entspringt von einem centralen Strang des Blattstieles selbst ein Zweig, der sich in zwei oder drei kleinere auflöst und mit einem seiner Zweiglein in das peripherische Netz des Blattes, mit den beiden anderen (Fig. 11) in das der Hauptachse eintritt. Ebenso fliessen auf der hinteren Seite der Blattbasis einzelne der innern peripherischen Stamm-bündel (Fig. 10) mit den hinteren centralen Bündeln des Blattstieles zusammen, während andere unmittelbar in denselben eintreten (Fig. 11). In der nämlichen Weise lehren Schnitte durch den Stamm an der Insertion der Seitensprosse, dass sowohl die centralen Bündel der letzteren (Fig. 12, 15), als auch die der Hauptachse selbst (Fig. 13, 14) Zweigen den Ursprung geben, die in das peripherische Netz beider eintreten und dass andere peripherische Stränge sich continüirlich von der Hauptachse auf den Seitenspross fortsetzen.

Sämmtliche Wurzeln nehmen von diesen peripherischen Bündeln ihren Ursprung (Fig. 14 c).

Das zweite hierher gehörige Beispiel, *Pteris aquilina*, berühre ich schliesslich, da es in jüngster Zeit mehrfach untersucht wurde¹⁾, nur mit wenigen Worten.

Die centralen Gefässbündel dieses Farns stellen zwei plattenförmige Stränge dar, einen schmäleren Ober- und einen breiteren Unterstrang; beide geben von ihren Rändern und ihrer äusseren Fläche Zweigen den Ursprung, die zu dem Netz der peripherischen Stränge zusammentreten und dasselbe fortbilden. Unter diesen peripherischen Strängen ist der obere mittlere durch seine bedeutende Breite ausgezeichnet.

Zweige der centralen und peripherischen Gefässbündel treten in die Blätter und Seitensprosse ein. In den Fällen, in welchen der Seitenspross an dem Grund des hinteren Randes des Blattstieles in einer späteren Periode sich entwickelt, sind die Gefässbündel beider völlig oder

1) Vergl. Hofmeister, l. c. V. 620. und Stenzel, l. c. 37.

fast völlig geschieden¹⁾, in den Fällen hingegen, in welchen der Seitenspross der Entwicklung des Blattes vorausseilt und höher an dem Blattstiel hervortritt, erhält die Strecke, in der beide mit einander verschmolzen sind, eine Structur, die mit der der Hauptachse übereinstimmt.

1) Vergl. Stenzel, l. c. Taf. IV, Fig. 13. 14.

Erklärung der Abbildungen.

iopteris evecta Hoffm. T. I—IV. (Sämmtl. Figuren in natürl. Grösse.)

Taf. I.

1. Querschnitt durch den Stamm an der Stelle seines grössten Umfangs bis zu dem Anfang der Blattkissen; *r* Wurzeln, die von den inneren Gefässbündeln entspringen.
2. Querschnitt des Stammes an einer höheren Stelle bis zu dem äussersten Gefässbündelkreis.

Taf. II.

1. Längsschnitt durch die untere grössere Hälfte des Stammes, mit der Ansicht auf den Querschnitt derselben; bei *f* sind die in ein Blatt eintretenden Gefässbündel umgrenzt; auf der Fläche des Längsschnittes sind die Gefässbündel in der Richtung, in welcher sie zu Netzschichten zusammenhängen, durch Punkte verbunden.
2. Längsschnitt durch die obere Hälfte des Stammes; *a, b, c* durchschnittene Blattbasen; *d d* Gefässbündel die am Ende des Stammes die oberflächliche Gefässbündelzone bilden; *e e e* Gefässbündel, die in dem von diesem umschlossenen Parenchym erlöschen.

Taf. III.

1. Ein Abschnitt der oberflächlichen netzförmig durchbrochenen Gefässbündelschicht von dem unteren Theil des Stammes: *I, II* die Insertionsstellen zweier Blätter; *a, b* der untere Theil ihrer seitlichen Grenzstränge; *c, d* die durch Theilung dieser entstandenen Stränge; *e* Stränge, die in die oberflächliche Zone des Blattrückens eintreten, *i* solche, die der Längsachse des Blatts näher treten; *r* Querschnitte von Wurzeln, die durch den Grund der Blattbasis hervorbrechen. Diese letzteren sind nur an einem kleinen Theil der Figur wiedergegeben.
2. Die oberflächliche Gefässbündelschicht des Stammes aus der Umgebung der Fig. 1 dargestellten Parthie, nach Entfernung des in das Blatt *I* abtretenden Abschnittes; *III, IV, VI*, drei Blätter; *a, b, c, d, e, i* wie in Fig. 1: *f* der Anfang des Ersatzstranges, der von den Strängen des

die Längsachse des Stammes umstrickenden Netzes, *g*, ausgeht, durch den Grund der Blattachsel von *I* ansteigt, sich ausbreitend in dem III., IV. u. VI. Blatt endet.

- Fig. 3. Querschnitt durch ein Blatt von dem Grund des Stammes; *eee* die den Rücken desselben einnehmenden Gefässbündel; *c, d* die durch Theilung der seitlichen Grenzstränge entstandenen Gefässbündel; *k, k*, die beiden von den Ersatzschichten herrührenden Stränge; *iii* die inneren Stränge des Blattes, die sich von den äusseren, *ee*, abzweigen.

Taf. IV.

- Fig. 1. Ein Abschnitt der oberflächlichen Gefässbündelschicht von der Region des Stammes, der an der Mitte zwischen der auf Taf. III. und der auf Taf. IV. Fig. 2 dargestellten sich befindet.
- Fig. 2. Die oberflächliche Gefässbündelschichte von dem obersten Theil des Stammes; *I, II, III, IV* durchschnittenen Blattbasen; *V* die Gefässbündelschichte am Ende des Stammes.
- Fig. 3. Das Gefässbündelsystem des Stammendes nach Entfernung des in das Blatt *I* von Fig. 2 eintretenden Abschnittes; *i* der durch die Achsel dieses Blattes ansteigende Abschnitt der zweiten Schichte, welche die oberflächliche Gefässbündelschichte des Stammendes bei *V* bildet; *mm* die Stellen, an welchen dieser Abschnitt zwei Stränge in das Blatt *I* absendet; *III, IV* entsprechen den in Fig. 2 mit den nämlichen Zahlen versehenen Blattbasen; bei *tt* findet der Zusammenhang der in ihrem Rücken erlöschenden Gefässbündelabschnitte mit dem durch die Achsel von *I* ansteigenden Abschnitt der zweiten Gefässbündelschichte statt. Unter diesen ist die dritte Schichte *ii* durch Punkte angedeutet. Ein Abschnitt von diesen tritt bei *uu* in Verbindung mit denjenigen Abschnitten der zweiten Schichte, *kk*, die neben dem in die oberflächliche Schichte *i* ausgetretenen Abschnitt ansteigen.
- Fig. 4. Querschnitt durch den Grund einer Blattbasis; *a* oberflächliche Gefässbündelzone; *b* Ersatzschichte; *mm* Stränge, die von der ersteren an letztere treten.
- Fig. 5. Querschnitt durch die Basis eines der oberen Blätter; *a* der den Rücken und die Seiten des Blattes einnehmende Abschnitt der oberflächlichen Gefässbündelschichte; *b, c* die beiden von der Ersatzschichte abstammenden Stränge; *d, e* zwei vordere Stränge, die von der oberflächlichen Schichte abstammen; *i, f, g, h* centrale Bündel.
- Zur Erläuterung des Ursprunges dieser Gefässbündel dienen Fig. 6, 7, 8, 9, in welchen die entsprechenden Bündel mit den Buchstaben von Fig. 5 bezeichnet sind.
- Fig. 6. Die Gefässbündel dieses Blattes von der vorderen Seite aus dargestellt; *h* die Stelle, an welcher von dem dorsalen Abschnitt des Blattes der vordere und ein Theil der inneren Gefässbündel entspringt; *o* ein Anastomose eines vorderen Gefässbündels mit einem der von der Ersatzschichte abstammenden.

7. 8. 9. Zur Stammmitte radiale Schnitte durch die in Fig. 5 dargestellte Blattbasis.
10. Die Seite einer Blattbasis; *aaa*, von der oberflächlichen Gefässbündelschichte des Stammes abstammende Stränge; *m*, ein Strang, der von der innern Fläche derselben nach der Ersatzschichte *ll*, läuft, bei *n* in Verbindung mit derselben tritt, dann in das Blatt zurückbiegt und den Strang, *b*, auf der vorderen Seite desselben bildet.
11. Querschnitt durch eine andere Blattbasis; die Buchstaben von der nämlichen Bedeutung wie die der Fig. 5.
12. 13. Radiale Längsschnitte durch die in Fig. 11 dargestellte Blattbasis; *ll* Ersatzschichte; *m* in Fig. 13 ein Strang, der von der oberflächlichen Schichte zur Ersatzschichte hinzieht, dann in das Blatt eintritt, und den Strang *c* auf derselben Seite desselben bildet.

Taf. V.

1. Blattnarbe von einer unbestimmten *Cyathea* nebst den von dem untern Rand der Blattlücke entspringenden Strängen, nach Entfernung der Rinde von diesen letztern; *aaa* die Gefässbündel des untern peripherischen Bogens; *c* die vordersten seitlichen derselben; *ddee* die den Einschlag dieses Bogens einnehmenden Bündel; *f, g, h, i, k* die den Einschlag des oberen peripherischen Bogens einnehmenden Stränge; *l, m, m* die Stränge des oberen peripherischen Bogens; *p, p, p, p* die von dem letzteren umschlossenen markständigen Bündel. In natürlicher Grösse.
2. Blattnarbe von dem nämlichen Stamm nach Entfernung der von dem untern Rand der Blattlücke abstammenden Strängen, den Ursprung der den Einschlag des untern und oberen Bogens einnehmenden Stränge, so wie den Zusammenhang der markständigen Bündel *r, r, r* mit diesem und dem nach innen gebogenen Spaltenrand der Blattlücke darstellend.

Alsophila Haenkei Pr. Fig. 3—13. (Nat. Gr.)

3. Blattnarbe, wie Fig. 1. mit den bei dieser Figur erläuterten Buchstaben; *q, q* die beiden seitlichen von den Blattsträngen ausgehenden in der Rinde absteigenden Strängen.
4. Die obere Hälfte der Blattnarbe, losgelöst von der Gefässbündelröhre, von innen dargestellt; *rr* markständige Bündel, die mit dem nach innen gebogenen Theil des Spaltenrandes der Blattlücke in Verbindung stehen.
5. Ein Theil der Gefässbündel der Blattnarbe, bezeichnet wie in Fig. 1, zur Erläuterung ihres Zusammenhanges mit den markständigen Bündeln.
6. 7. 8. 9. Desgleichen, von vorn dargestellt.
10. 11. Desgleichen, von innen dargestellt.
13. Ein Theil des Geflechtes der markständigen Bündel, auf einem radialen Längsschnitt dargestellt.

- Fig. 14. *Hemitelia capensis* R. Br. Durchschnitt durch die Blattbasis eines jungen Stammes. (N. Gr.) *m, m*, die beiden von den markständigen Gefässbündeln herrührenden Stränge.
- Fig. 15. *Alsophila radens* Klf. (N. Gr.) Desgl.
- Fig. 16. *Cyathea arborea* Sm. Desgl. *m, m, n, n* die von den Gefässbündeln herrührenden Stränge.

Taf. VI.

Saccoloma adiantoides M. Fig. 1—11. (Nat. Gr.)

- Fig. 1—4. Querschnitte durch den Stamm.
- Fig. 5. Längsschnitt durch denselben.
- Fig. 6—11. Querschnitte zur Erläuterung des Ursprungs der in die Blätter eintretenden Gefässbündel.

Pteris elata var. *Karsteniana* Kz. Fig. 12—14. (Nat. Gr.)

- Fig. 12—14. Querschnitte durch das Gefässbündelsystem des Stammes.
- Fig. 15. 16. Längsschnitte durch dasselbe; *a*, die äussere Gefässbündelröhre; *b, e* die innere; *c* die Eintrittsstelle der letzteren in die erstere; *f*, Blatt.

Chrysodium vulgare M. (Nat. Gr.)

- Fig. 17. I, 1—5; II, 1—6; III, 1—6; IV, 1—7. Querschnitte durch die Gefässbündel des Stammes, die Rinde desselben nur bei I, 1, 2 wiedergegeben; IV, 8—11, Querschnitte durch die Blattbasis.

Taf. VII.

I. *Dennstädtia rufescens* Moore. (Nat. Gr.)

- Fig. 1—18. Querschnitte durch den Stamm zur Erläuterung des Verhaltens des markständigen Bündels zu den Blättern.
- Fig. 19—27. Querschnitte durch die Blattbasis zur Erläuterung des Ursprungs der Seitensprosse.
- Fig. 28. Querschnitt durch den Blattstiel oberhalb der Insertion der Seitensprosse.
- Fig. 29. Längsschnitt durch das Gefässbündelsystem des Stammes; *ee*, äussere Gefässbündelröhre; *i* das markständige Bündel; *cc* Zweige der letzteren, die in das Blatt eintreten; *ff*, Durchschnitt durch die Abschnitte, die von der Gefässbündelröhre in das Blatt eintreten.

II. *Polybotrya Meyeriana* M.

- Fig. 1—4. Querschnitte verschiedener Stämme, schwach vergrössert.
- Fig. 5—6. Desgl. von Seitensprossen.
- Fig. 7. 8. 8 b. Desgl. durch den Grund des Blattstiels.
- Fig. 9—11. Die Gefässbündel auf Längsschnitten durch den Stamm an der Ursprungsstelle eines Blattes; *c* centrale, *p* periphere Gefässbündel.

- 2—15. Desgl. auf Längsschnitten durch den Stamm an der Ursprungsstelle von Seitensprossen; *c, p*, wie in Fig. 9; *r* in Wurzeln eintretende Gefässbündel.
5. Das centrale Gefässbündelsystem, ausgebreitet; vergrössert; *s* der Oberstrang desselben; *ff* die Insertionsstellen von Blättern, *g, g* von Seitensprossen.
7. Dasselbe an der Ursprungsstelle eines Seitensprosses mit den in denselben eintretenden Strängen.
3. Ein kleiner Abschnitt des Netzes der peripherischen Gefässbündel, vergrössert; *f* die Ursprungsstelle eines Blattes, *g*, eines Seitensprosses.

III. Polypodium Wallichii Br.

Der eine Blattlücke umgebende Theil der Gefässbündelröhre.

IV—VII; Taf. VIII, IX, X; *f* die Ursprungsstelle eines Blattes, *g* die Ursprungsstelle eines Seitensprosses; *s* der Oberstrang, *i* der Unterstrang, *c* die die Blattlücken abgrenzenden Stränge; *r* Wurzeln.

IV. Asplenium resectum Sm.

- 9. Querschnitt durch den Stamm. (Nat. Gr.)
. Das Gefässbündelsystem ausgebreitet. (Vergrössert.)

V. Asplenium obtusifolium L.

- 6. Querschnitte durch den Stamm. (Nat. Gr.)
. Das Gefässbündelsystem ausgebreitet. (Vergr.)

VI. Aspidium albopunctatum W. (Vergr.)

- 4. Querschnitte durch den Stamm.
. Das Gefässbündelsystem ausgebreitet.

VII. Acrostichum Lingua Rdd.

- . Querschnitt durch die Basis eines Blattkissens. (Nat. Gr.)
—6. Querschnitte durch den Stamm. (Nat. Gr.)
. Das Gefässbündelsystem ausgebreitet. (Vergr.)

Taf. VIII.

I. Acrostichum brevipes Kz. (Vergr.)

- . 2. Querschnitte durch den Stamm.
. 4. Querschnitte durch ein Blattkissen.
. Das Gefässbündelsystem ausgebreitet.

II. Davallia heterophylla Sm. (Vergr.)

2. Querschnitte durch den Stamm.
Das Gefässbündelsystem ausgebreitet.

III. *Davallia bullata* Wall. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt durch den Stamm.
- Fig. 2. Querschnitt durch die Basis eines Blattes.
- Fig. 3. Gefäßbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

IV. *Davallia stenocarpa* Kl. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt durch den Stamm.
- Fig. 2. Desgl. durch die Basis eines Blatkissens.
- Fig. 3. Das Gefäßbündelsystem eines Stammes ausgebreitet.

V. *Davallia dissecta* P. Sm. (Vergr.)

- Fig. 1. 2. Querschnitte durch den Stamm.
- Fig. 3. 4. Desgl. durch die Basis eines Seitensprosses.
- Fig. 5. 6. Desgl. durch die Basis eines Blattes.
- Fig. 7. Gefäßbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

VI. *Davallia chaerophylla* Wall. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt durch den Stamm.
- Fig. 2. Desgl. einer Blatthasis.
- Fig. 3. Das Gefäßbündelsystem des Stammes ausgebreitet.
- Fig. 4. Desgl. von der linken Seite des Stammes.

VII. *Davallia divaricata* Bl. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. einer Blatthasis.
- Fig. 3. Desgl. eines Seitensprosses.
- Fig. 4. Das Gefäßbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

VIII. *Platycterium alcorni* Dsv. (Vergr.)

- Fig. 1. Das Gefäßbündelsystem von der linken Stammhälfte ausgebreitet.
- Fig. 2. 3. Eine Blattmasche von der linken Seite des Stammes.
- Fig. 4. Querschnitt durch den Grund einer Blatthasis.

IX. *Aspidium coriaceum* Sw. (Vergr.)

- Fig. 1. 2. Querschnitte des Stammes.
- Fig. 3. Desgl. der Basis eines Blattstiels.
- Fig. 4. 5. Desgl. der Basis eines Seitensprosses.
- Fig. 6. Das Gefäßbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

Taf. IX.

I. *Polypodium cayennense* Dsv. (Vergr.)

- Fig. 1. Das Gefäßbündelsystem des Stammes ausgebreitet.
- Fig. 2. Querschnitt eines Blatkissens.
- Fig. 3—5. Desgl. des Stammes.

II. *Polypodium squamulosum* Klf. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. des Blattkissens.
- Fig. 3—8. Desgl. eines Seitensprosses.
- Fig. 9. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

III. *Acrostichum axillare* Cav. (Vergr.)

- Fig. 1—4. Querschnitte des Stammes.
- Fig. 5. Desgl. eines Blattkissens.
- Fig. 6. Desgl. durch die Basis eines Seitensprosses.
- Fig. 7. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet. (Der seitliche Abstand der Gefässbündel stärker vergrössert, die Länge der Internodien annähernd in natürlicher Grösse.)

IV. *Polypodium caespitosum* Lk. (Vergr.)

- Fig. 1—3. Querschnitte des Stammes.
- Fig. 4. Desgl. von der Basis eines Blattes.
- Fig. 5. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet. (In der nämlichen Weise, wie III, 7 gezeichnet.)

V. *Polypodium fraxinifolium* Jacq. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. eines Seitensprosses.
- Fig. 3. Desgl. einer Blattbasis.
- Fig. 4. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

VI. *Polypodium latipes* F. L. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. eines Blattkissens.
- Fig. 3. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet. Nur ein Theil der Maschen des Unterstranges ist wiedergegeben.

VII. *Polypodium Paradiseae* F. L. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. eines Blattkissens.
- Fig. 3. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

VIII. *Polypodium vulgare* L. var. *cambricum*. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. eines Blattkissens.
- Fig. 3. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet.

Taf. X.

I. Polypodium decurrens Rdd. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. durch den Grund des Blattstiels.
- Fig. 3. Desgl. durch den Grund des Blattkissens.
- Fig. 4. Die Anordnung der Gefässbündel auf der vorderen Seite des Blattkissens.
- Fig. 5. Desgl. auf einer der seitlichen Flächen des Blattkissens.
- Fig. 6. Das Gefässbündelsystem der linken Hälfte des Stammes ausgebreitet; nur der kleinere Theil der Maschen des Unterstrangs ist wiedergegeben.

II. Polypodium aureum L. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. durch die Basis eines Blattes.
- Fig. 3. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet, in der linken Hälfte vollständig wiedergegeben, auf der rechten Hälfte auf die Blattmaschen beschränkt.
- Fig. 4. Eine Blattmasche von dem Gefässbündelsystem des Stammes, und zwar von seiner rechten Hälfte.

III. Polypodium sporadocarpum Lk. (Vergr.)

- Fig. 1. Querschnitt des Stammes.
- Fig. 2. Desgl. des Blattkissens.
- Fig. 3. Das Gefässbündelsystem des Stammes ausgebreitet, auf der linken Hälfte unvollständig.

IV. Polypodium Heracleum Kz.

- Fig. 1. 2. Querschnitte des Stammes an der Ursprungsstelle zweier aufeinanderfolgenden Blätter, in natürlicher Grösse.

Fig. 1.

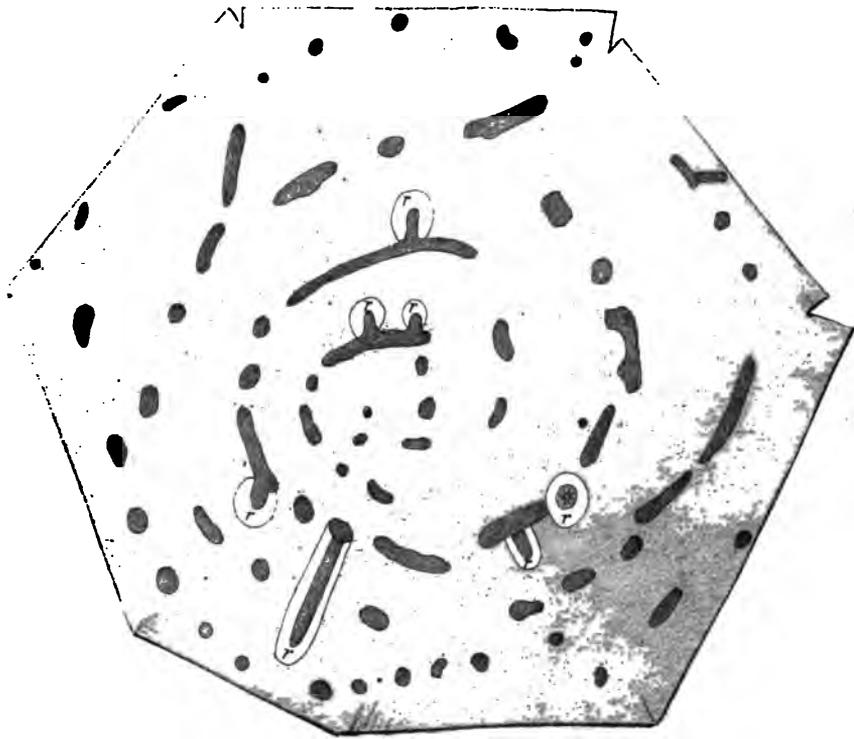


Fig. 2.

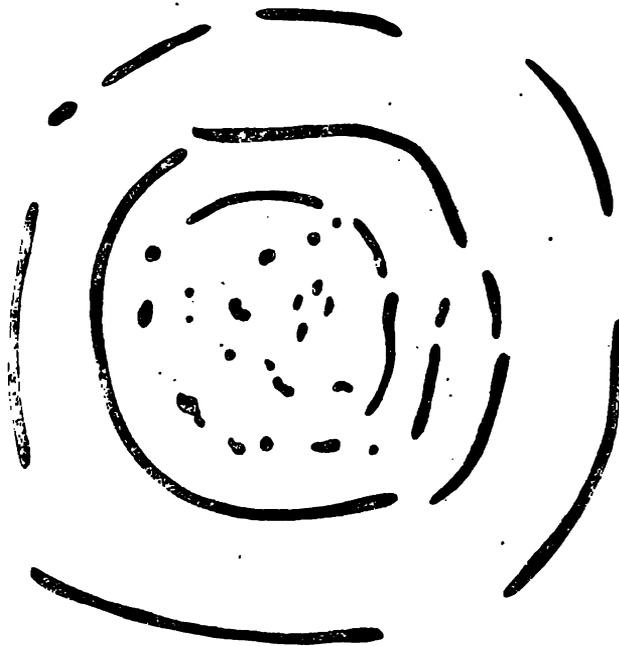


Fig. 2.

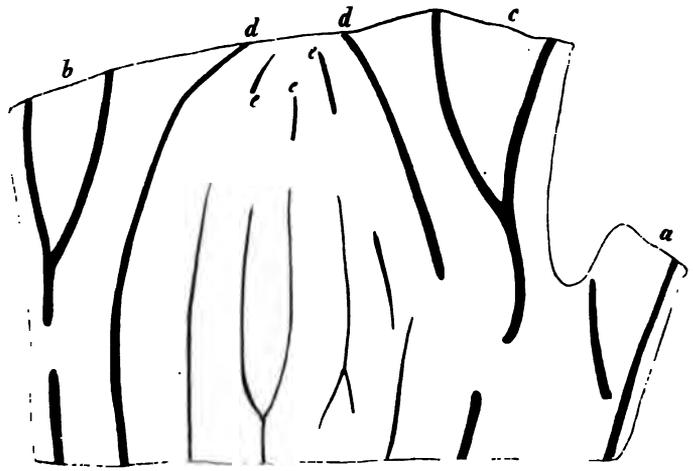


Fig. 1.

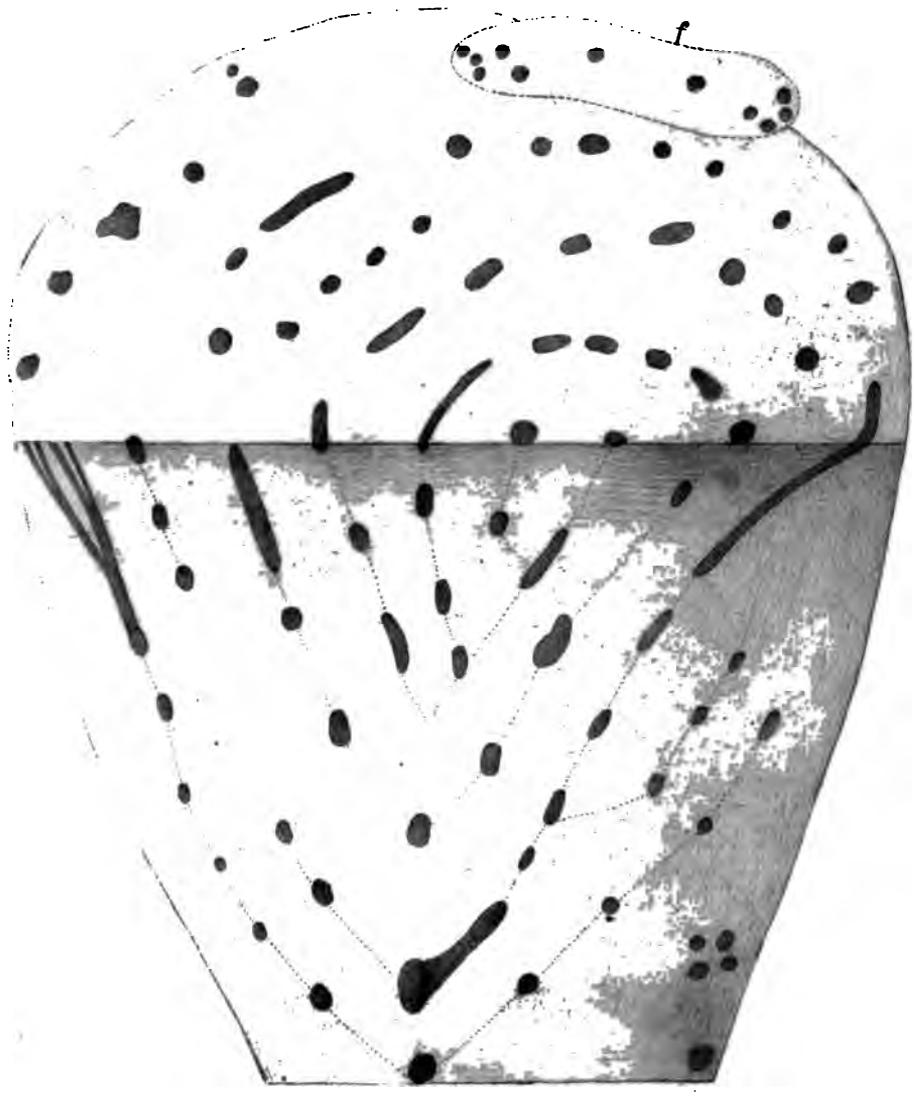


Fig. 1.

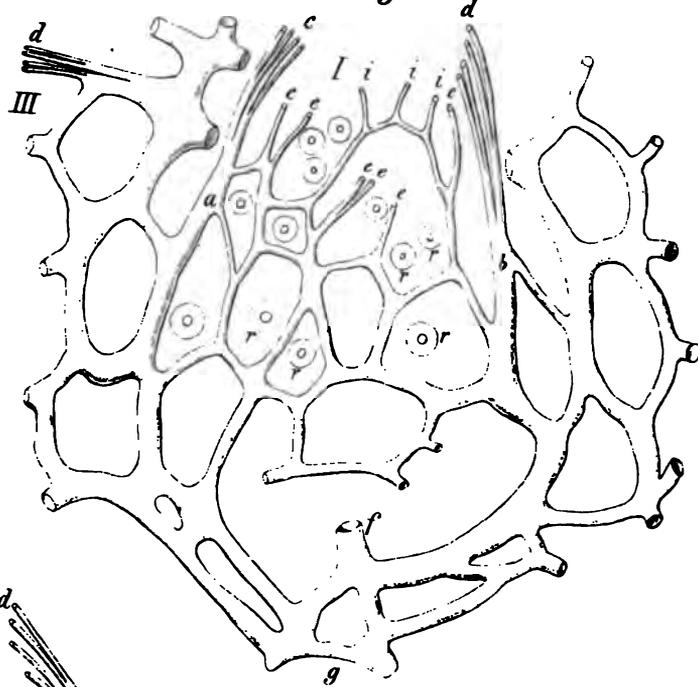


Fig. 2.

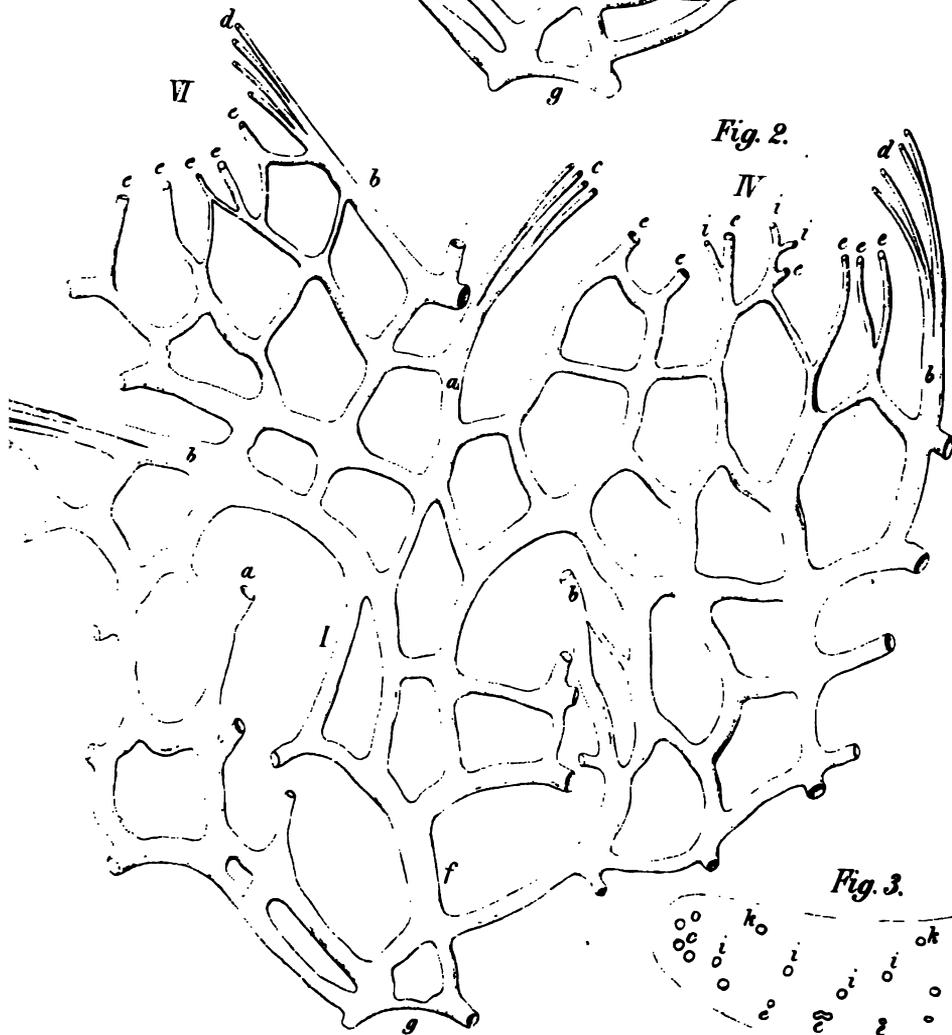
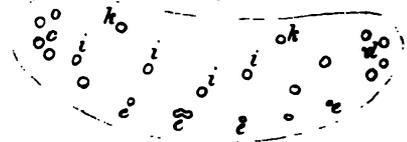
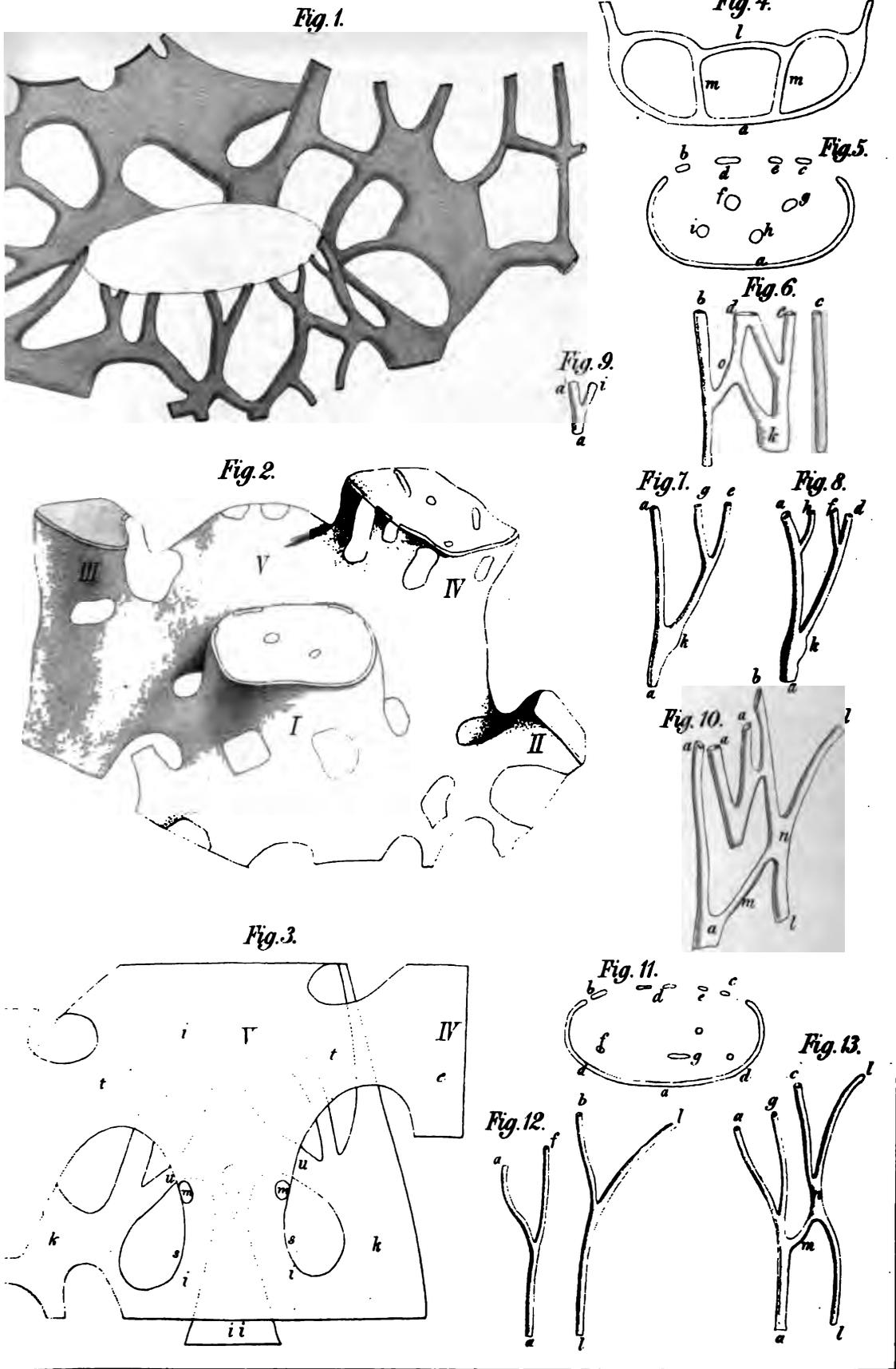


Fig. 3.

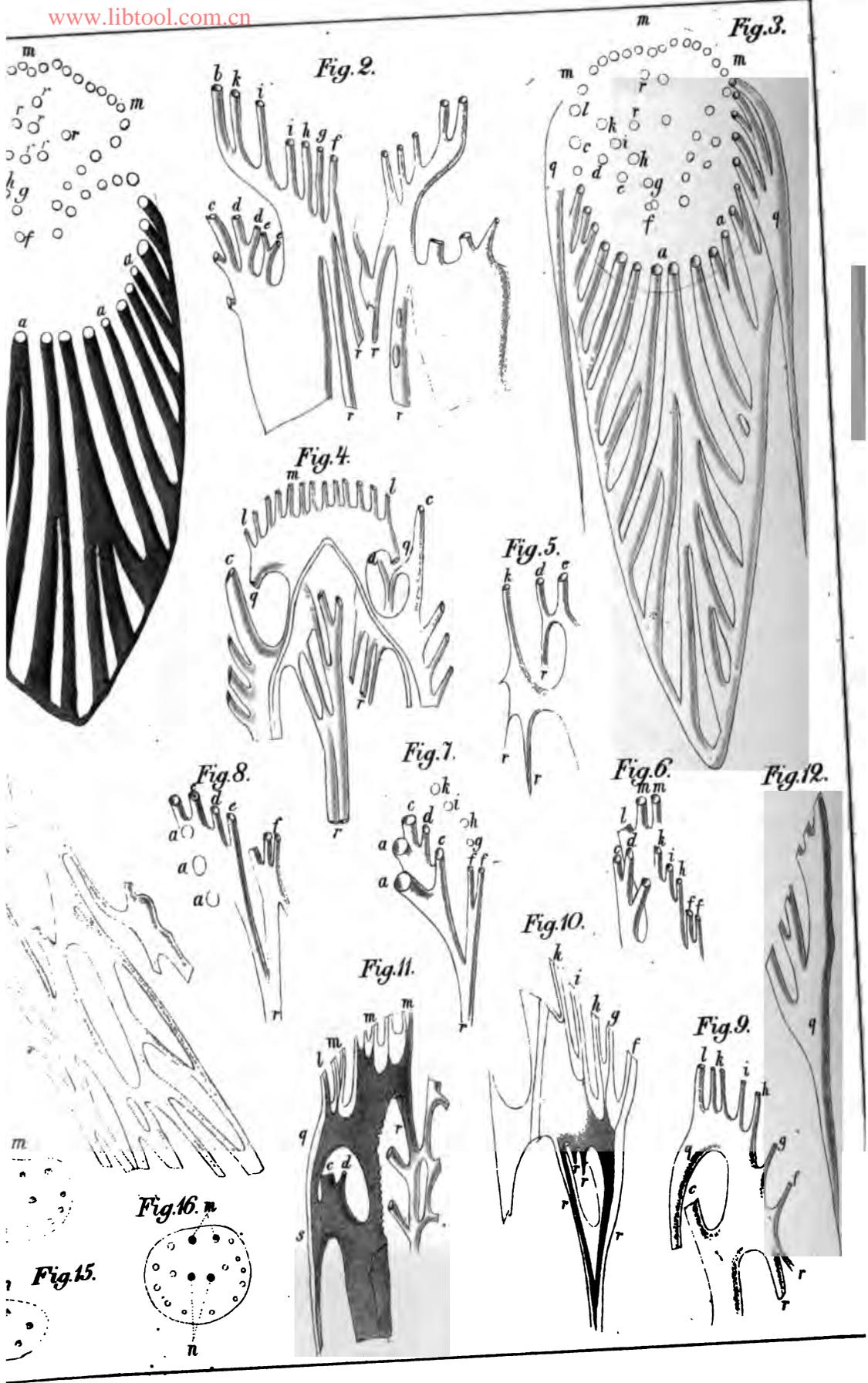


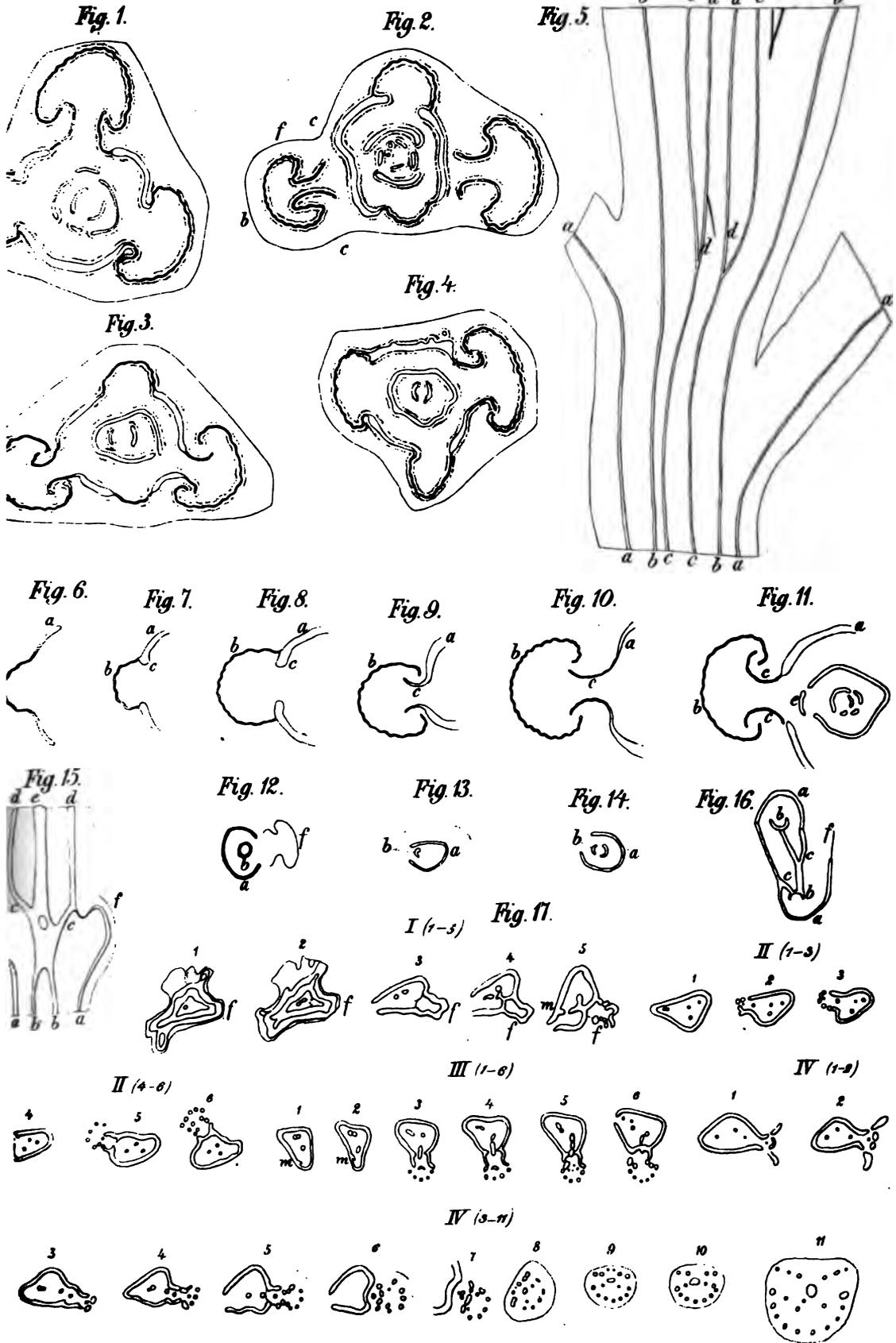
www.libtool.com.cn



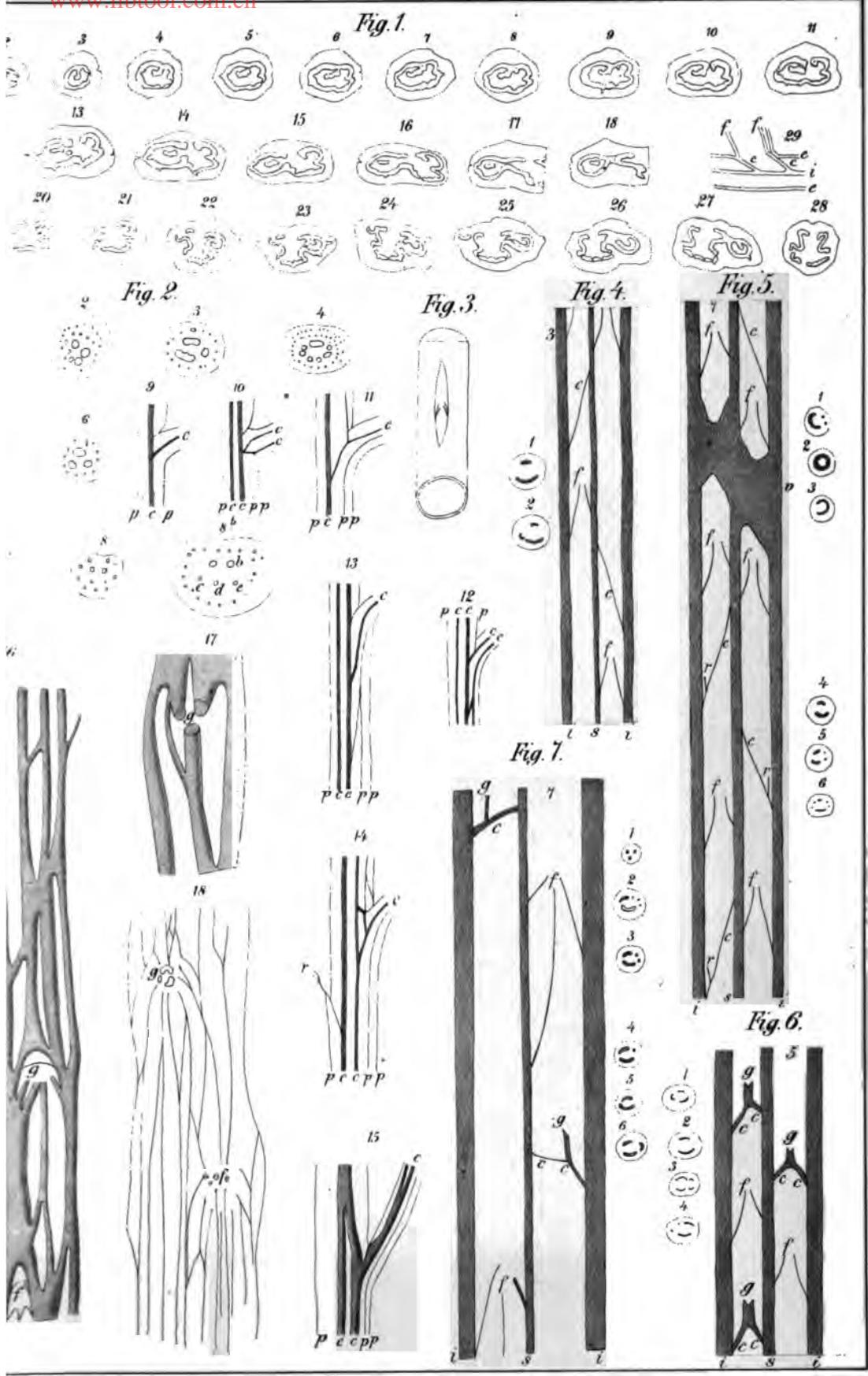
www.libtool.com.cn

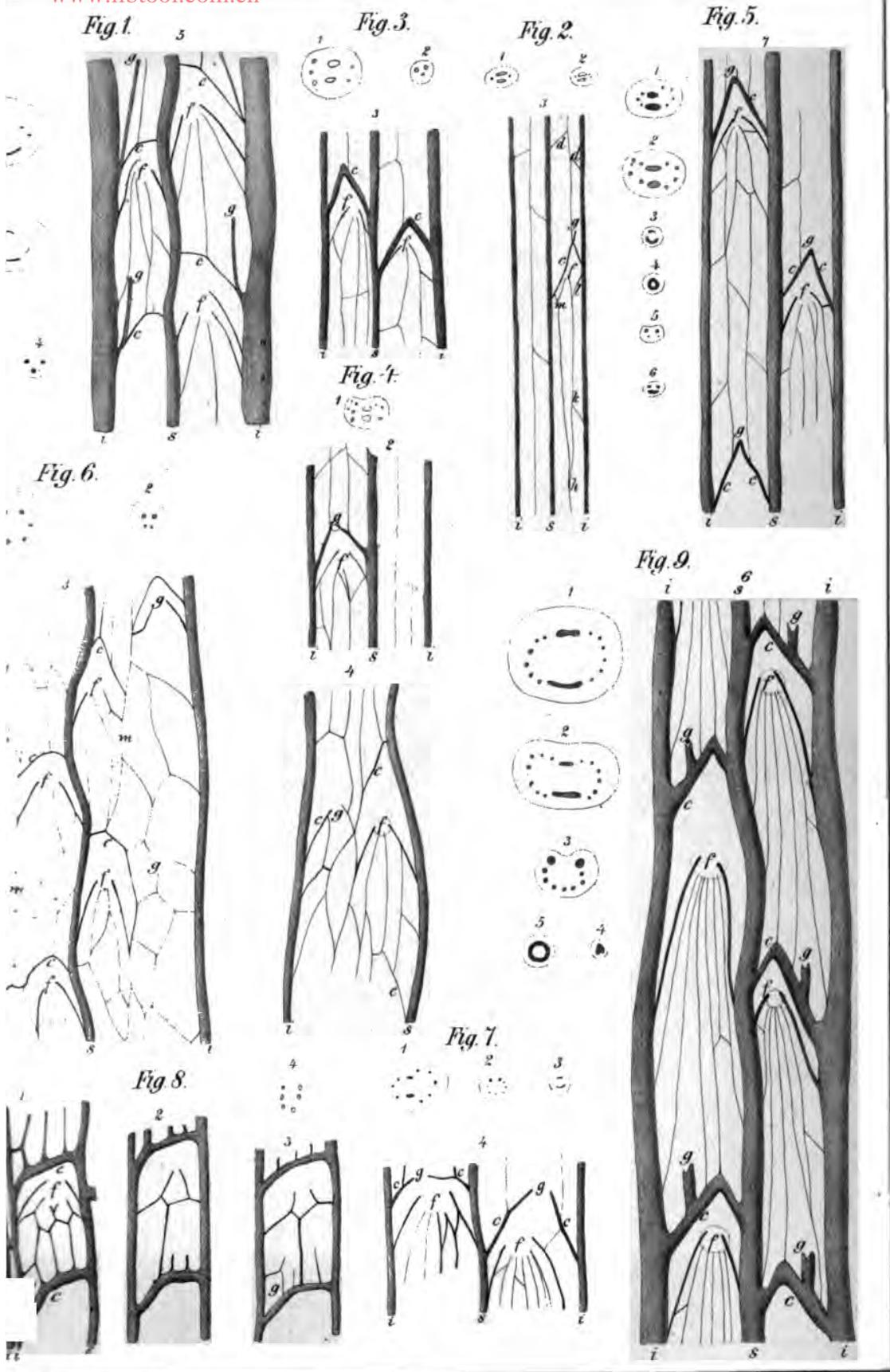






www.libtool.com.cn





www.libtool.com.cn



Fig. 5.

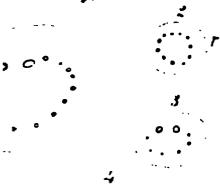


Fig. 2.

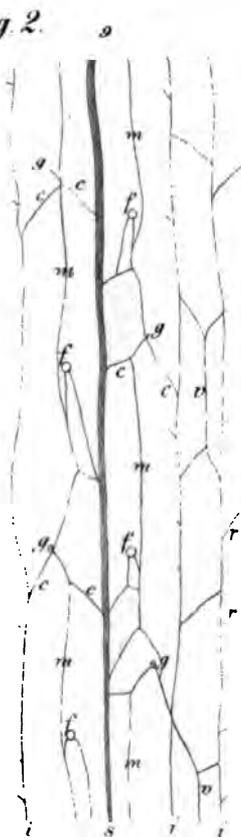


Fig. 6.

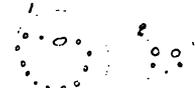


Fig. 3.

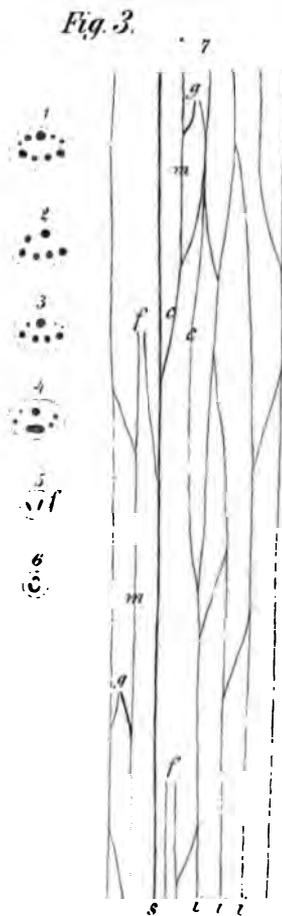


Fig. 7.



Fig. 4.

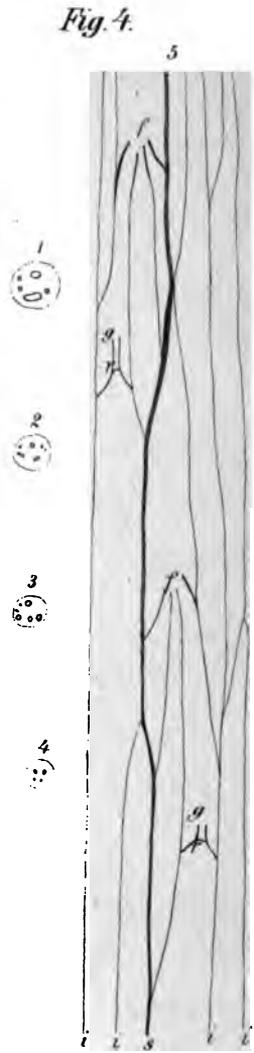
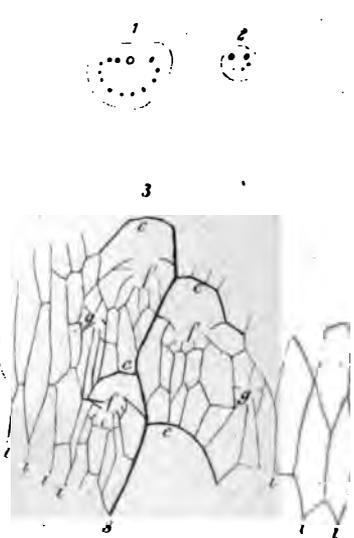
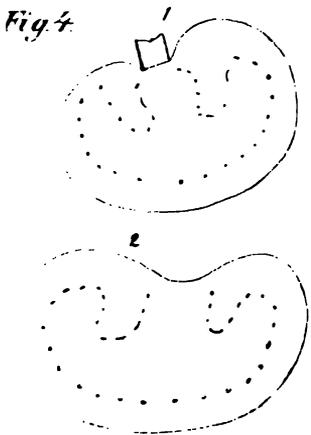
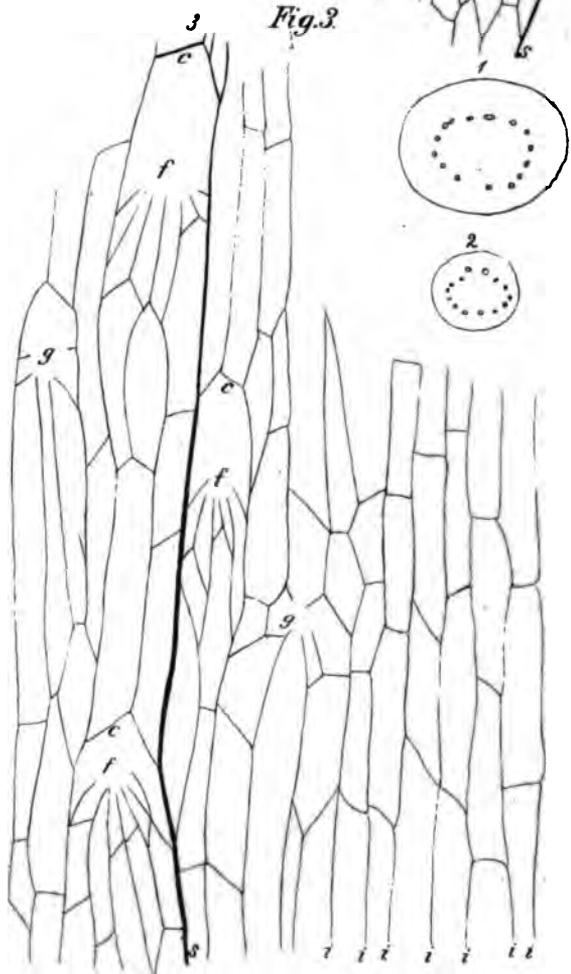
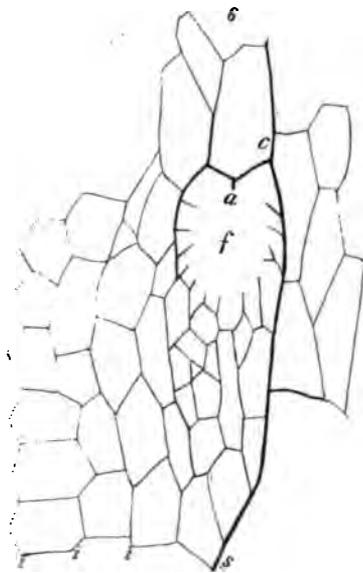
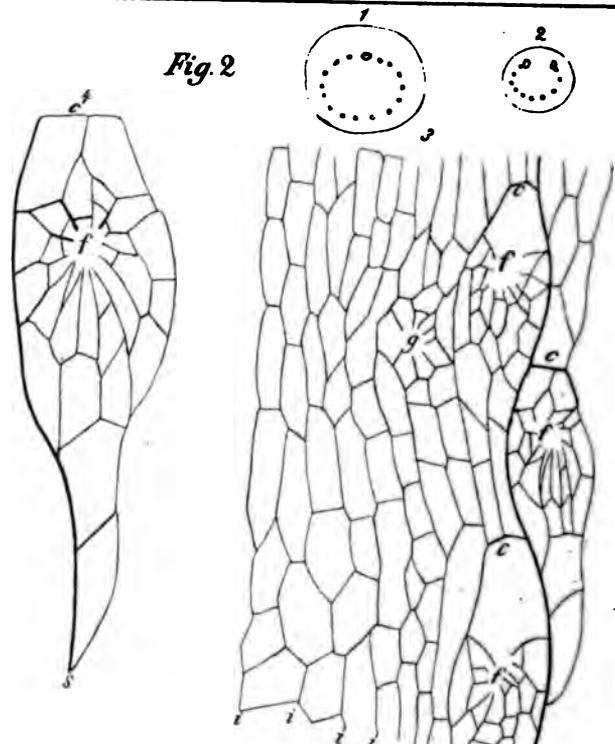
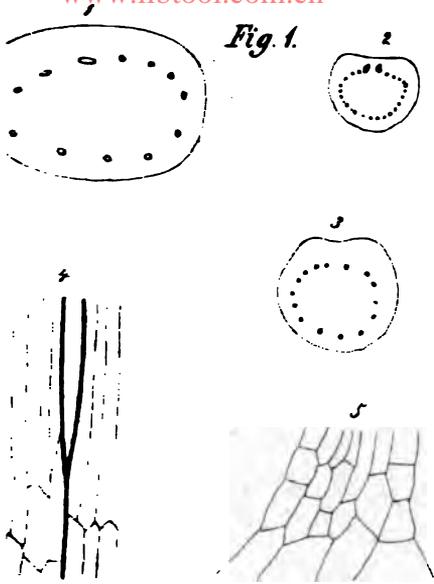


Fig. 8.



www.libtool.com.cn



www.libtool.com.cn

**ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN**

INSBESONDRE

ÜBER

ELEKTRISCHE SCHWINGUNGEN

VON

WILHELM WEBER.

Die verschiedenen Kräfte, welche von elektrischen Massen ausgeübt werden, oder welche auf sie wirken, nach Maass und Gesetz genau und vollständig zu bestimmen, ist die *erste* Aufgabe gewesen, welche in diesen Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen erörtert worden ist. Es ist ein *Grundgesetz* aufgestellt worden, aus welchem *erstens* die Kräfte der elektrostatischen Wechselwirkung und deren von Coulomb entdeckte Gesetze, *zweitens* die Kräfte der elektrodynamischen Wechselwirkung der Stromelemente unter einander und deren von Ampère entdeckte Gesetze, *drittens* die Kräfte der von Faraday entdeckten elektrodynamischen Induction (der Volta-Induction) — sowohl der durch Bewegung des Stromes mit seinem Träger, als auch der durch Stromänderung im unbewegten Träger, als auch der von Neumann zuerst entdeckten und beobachteten, durch den Durchgang eines Stroms durch einen Gleitpunkt seines Leiters, — und deren Gesetze, abgeleitet und bestimmt worden sind.

Ausser diesen verschiedenen Kräften der *rein* elektrischen Wechselwirkung sind auch die Kräfte betrachtet worden, welche vom *Magnetismus* auf die Elektrizität ausgeübt werden, nämlich die *elektromagnetischen* Kräfte und die der *magnetelektrischen Induction* des gegen elektrische Massen bewegten Magnetismus — sowohl wenn der Magnetismus mit seinem Träger, als auch wenn er bloss in seinem Träger bewegt wird. — Auch für diese Kräfte konnten die Gesetze aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze abgeleitet werden, wenn man nämlich nach Ampère für Molecularmagnete elektrische Molecularströme substituirt. Dasselbe galt auch von den *elektrodiamagnetischen* Kräften.

Endlich sind auch diejenigen Kräfte betrachtet worden, welche von den *ponderablen Körpern*, worin die elektrischen Massen sich bewegen, auf diese letzteren ausgeübt und die galvanischen Widerstandskräfte der

ponderablen Körper genannt werden. Auch zur Bestimmung dieser Kräfte ist nach dem Leitfaden des für beharrliche Ströme bewiesenen Ohm'schen Gesetzes ein allgemeineres Grundgesetz aufzustellen versucht worden.

An diese Erforschung der *Kräfte* knüpft sich nun eine *zweite* Aufgabe der Elektrodynamik, nämlich die Erforschung der *Bewegungen*, welche die elektrischen Massen, getrieben von allen diesen Kräften, machen, und die Erforschung der Gesetze dieser Bewegungen in ihrer Abhängigkeit von jenen Kräften, eng an. Denn um diese Bewegungen zu bestimmen ist eine genaue und vollständige Kenntniss aller jener Kräfte unentbehrlich und es kann daher die Erforschung jener Kräfte als das Mittel, die Erforschung dieser Bewegungen als der Zweck, welcher dadurch erreicht werden soll, betrachtet werden.

Diese zweite viel umfassende Aufgabe der Elektrodynamik hat noch wenig Bearbeitung gefunden und es lässt sich mit Recht fragen, woher es komme, dass auf der durch die Kenntniss der Kräfte gegebenen Grundlage in dieser Richtung weiter zu bauen so wenig geschehen ist? Offenbar hat man Anstand genommen, jene Grundlage schon als ganz sicher und fertig zu betrachten. Es konnte in Zweifel gezogen werden, ob alle auf elektrische Massen wirkenden Kräfte schon bekannt wären, namentlich ob ausser den bekannten, in allen Entfernungen wirkenden, rein elektrischen Kräften nicht noch irgend welche unbekannte, auf unmessbar kleine Wirkungssphären beschränkte, *elektrische Molecularkräfte* mitwirkten, die vorher erforscht werden müssten, ehe man die davon abhängigen Bewegungsgesetze elektrischer Massen zu entwickeln versuchte. Auch die Zulässigkeit des Widerstandsgesetzes der *ponderablen Leiter* konnte für die Entwicklung der Gesetze *schnell wechselnder* elektrischer Bewegungen in Zweifel gezogen werden, da dieses Gesetz von Ohm nur für *beharrliche* Ströme bewiesen, der allgemeinere auf alle Verhältnisse anwendbare Ausspruch dieses Gesetzes aber bloss versuchsweise aufgestellt worden ist. — Endlich kommt hinzu, dass die Kenntniss der *Kräfte* doch nicht die einzige für Lösung der zweiten Aufgabe erforderliche Grundlage ist, sondern dass ausserdem dazu auch noch eine genauere Kenntniss der zu bewegenden *Massen*, nebst anderen noch nicht hinreichend bekannten Verhältnissen, nöthig erscheint.

Dennoch ist ein Versuch zur Lösung dieser zweiten Aufgabe und zwar in so umfassender Weise, als die Umstände es gestatteten, von

Kirchhoff gemacht und in Poggendorffs Annalen 1857 Bd. 100 und 102 mitgetheilt worden. Dieser erste Versuch hat, obiger Bedenken ungeachtet, mit Recht grosses Interesse erweckt; denn es leuchtet ein, dass eine Entscheidung, ob und in wie weit obige Bedenken begründet seien, schwerlich auf anderem Wege als auf dem des Versuchs gewonnen werden kann. — Kirchhoff hat nämlich versucht, *eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektrizität in einem unendlich dünnen Drahte* aufzustellen, wobei er jedoch, wie er selbst angiebt, gewisse Thatsachen, welche bei constanten elektrischen Strömen, oder solchen deren Intensität sich nur langsam ändert, statt finden, als allgemein geltend angenommen hat. Der Gang seiner Entwicklung soll im folgenden Artikel näher betrachtet werden.

I.

BEWEGUNGSGESETZE.

1.

Kirchhoff, über die Bewegung der Elektrizität in Leitern.

Es sollen x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines Punkts des Leiters bezeichnen, ferner u, v, w die *Stromdichtigkeiten* des nach den drei Coordinatenachsen zerlegten elektrischen Stroms, welcher zur Zeit t in jenem Punkte des Leiters vorhanden ist. — Unter *Stromdichtigkeit* wird hier verstanden das Product der Geschwindigkeit der strömenden Elektrizität in die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektrizität. Nach dem Ohm'schen Widerstandsgesetze, wenn ihm allgemeinere Geltung beigelegt wird, bedeutet dieses so viel als das Product der im betrachteten Punkte (x, y, z) wirkenden *elektromotorischen Kraft* in das *specifische Leitungsvermögen* des Leitermetalls. Hienach ist also, wenn A die elektromotorische Kraft im Punkte (x, y, z) — d. i. den Unterschied der auf die Maasseinheit positiver und negativer Elektrizität im Punkte (x, y, z) wirkenden Kräfte — bezeichnet, und α, β, γ die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den Richtungen der drei Coordinatenachsen bildet, und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls,

$$u = A \cos \alpha . k , \quad v = A \cos \beta . k , \quad w = A \cos \gamma . k ,$$

wobei für Kräfte und Leitungsvermögen die *mechanischen Maasse* angenommen werden sollen, deren sich Kirchhoff stets bedient*). —

Die elektromotorische Kraft A rührt nun aber zum Theil von der in der ganzen Kette vertheilten *freien Elektrizität* her, zum Theil von der *Induction*, die in Folge der Aenderung der Stromstärke in allen Theilen der Leitungskette wirkt. Von allen *äusseren* elektromotorischen Kräften, z. B. von magnetelektrischen Inductionskräften, die von aussen her auf die Leitungskette wirken können, soll vor der Hand ganz abgesehen werden. Alle übrigen bekannten Kräfte, welche auf elektrische Massen

*) Bezeichnet ξ, η, ζ die Verschiebung eines elektrischen Theilchens im Punkte (x, y, z) nach der Zeit t in der Richtung der drei Coordinaten, also $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ die Geschwindigkeit der strömenden Elektrizität, nach der Richtung der drei Coordinatenachsen zerlegt, so ist, wenn \mathfrak{E} die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektrizität bezeichnet, der ersten Bestimmung gemäss,

$$u = \mathfrak{E} \frac{d\xi}{dt}, \quad v = \mathfrak{E} \frac{d\eta}{dt}, \quad w = \mathfrak{E} \frac{d\zeta}{dt}.$$

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist aber die Stromintensität i in einem linearen Leiter, wenn sie beharrlich ist, dem Quotienten der Summe aller nach der Richtung des Leiters in der Länge der ganzen geschlossenen Kette l wirkenden elektromotorischen Kräfte, d. i. $\int A dl$, dividirt durch den Widerstand der ganzen Kette, d. i. $\int \frac{dl}{ks}$, wenn s den Querschnitt des Leiters und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls bezeichnet, proportional oder, nach mechanischen Maassen, gleich, folglich ist $i = \frac{\int A dl}{\int \frac{dl}{ks}}$. In diesem Ausspruch des Ohm'schen Gesetzes wird aber unter der Strom-

intensität i das Product der Geschwindigkeit der strömenden Elektrizität, d. i. $\frac{d\sigma}{dt}$, wenn $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cos \alpha$, $\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cos \delta$, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cos \gamma$ gesetzt wird, in den Querschnitt des Leitungsdrahtes s und in die Menge \mathfrak{E} der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektrizität verstanden, folglich ist

$$\frac{\int A dl}{\int \frac{dl}{ks}} = \mathfrak{E} s \frac{d\sigma}{dt}.$$

Wird nun dem Ohm'schen Gesetze allgemeinere Geltung, für jedes einzelne Längenelement der Kette, zugeschrieben, so erhält man

$$\frac{A dl}{ks} = A k s = \mathfrak{E} s \frac{d\sigma}{dt},$$

oder $A k = \mathfrak{E} \frac{d\sigma}{dt}$, und hieraus, durch Zerlegung nach den Coordinatenachsen,

$$A \cos \alpha \cdot k = \mathfrak{E} \frac{d\xi}{dt} = u, \quad A \cos \delta \cdot k = \mathfrak{E} \frac{d\eta}{dt} = v, \quad A \cos \gamma \cdot k = \mathfrak{E} \frac{d\zeta}{dt} = w.$$

irken, tragen zur *elektromotorischen Kraft* (wenn die Widerstandskräfte, dazu gerechnet werden könnten, davon ausgeschlossen bleiben) stets bei, z. B. die von Ampère entdeckten, aus der Wechselwirkung der Stromelemente unter einander resultirenden, elektrodynamischen Kräfte, von denen bekannt ist, dass der Unterschied der auf die positive Elektricität und der auf die negative Elektricität wirkenden Kräfte stets Null ist, woraus also keine *elektromotorische Kraft* resultirt.

Die Componenten des *ersten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der in der Kette vertheilten *freien Elektricität* herrührt, werden, wenn Ω den Werth der *Potentialfunction der freien Elektricität* an einem Punkte (x, y, z) bezeichnet, durch die *verdoppelten*, negativ genommenen Werthe der partiellen Differentialquotienten von Ω nach den drei Coordinatenachsen, d. i. durch

$$- 2 \frac{d\Omega}{dx}, \quad - 2 \frac{d\Omega}{dy}, \quad - 2 \frac{d\Omega}{dz}$$

ausgedrückt, wie man leicht ersieht, wenn man beachtet, dass die elektromotorische Kraft, d. i. der Unterschied der auf die Einheit positiver und negativer Elektricität wirkenden Kräfte, *doppelt* so gross ist als die auf die Einheit *positiver* Elektricität wirkende Kraft.

Um die Componenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft anzugeben, welcher von der *Induction* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt, bezeichne x', y', z' die Coordinaten eines zweiten Punkts der Leitungskette,erner u', v', w' die Werthe von u, v, w für diesen Punkt, und r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z') von einander.

Aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ergiebt sich dann die elektromotorische Kraft, welche das Element $dx' dy' dz'$, in welchem die Elektricität *nach der Richtung der x-Axe* mit der Geschwindigkeit $\frac{du'}{dt}$ sich bewegt, wo also, nach der vorhergehenden Note, $u' = \mathfrak{G} \frac{du'}{dt}$ ist, an einem Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der x-Axe* ausübt, nach *mechanischem Maasse* ausgedrückt,

$$= - \frac{8}{cc} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r^3} \cdot (x - x')^2 \cdot \frac{du'}{dt}.$$

Es ist nämlich (siehe Elektrodynamische Maassbestimmungen im 5. Bande dieser Abhandlungen, S. 268 Nr. 4) die elektromotorische Kraft, welche an einem Stromelement von der Länge α , dessen Stromintensität in der Zeit t gleichförmig wächst, auf einen Punkt in der Entfernung r nach

einer Richtung, welche mit der verlängerten r den Winkel θ macht, ausübt, wenn α mit r selbst den Winkel θ bildet,

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{i}{t} \cdot \cos \theta \cos \theta'.$$

Hierin ist aber die Stromintensität i nach absolutem *magnetischem* Maasse, wie sie durch Galvanometer bestimmt zu werden pflegt, auszudrücken, wofür der nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Werth, mit Hinzufügung des Faktors $\frac{2\sqrt{2}}{c}$, gesetzt werden kann. Die nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Stromintensität in obigem Falle ist aber $= u' dy' dz'$. Setzt man also $i = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot u' dy' dz'$, folglich $\frac{i}{t} = \frac{dt}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy' dz'$, und beachtet, dass in obigem Falle $\cos \theta = \cos \theta' = \frac{x-x'}{r}$ und $\alpha = dx'$ ist, so findet man die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{dx'}{r} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy' dz' \cdot \frac{(x-x')^2}{rr},$$

was dem oben angegebenen Werthe gleich ist.

Betrachtet man die Bewegung der Elektrizität im Elemente $dx' dy' dz'$ nach der y - oder z -Axe statt nach der x -Axe, so tritt, als Werth von $\cos \theta$, $\frac{y-y'}{r}$ oder $\frac{z-z'}{r}$ an die Stelle von $\frac{x-x'}{r}$, und $\frac{dv'}{dt}$ oder $\frac{dw'}{dt}$ an die Stelle von $\frac{du'}{dt}$, woraus folgt, dass die ganze vom Elemente $dx' dy' dz'$ im Punkte (x, y, z) nach der Richtung der x -Axe ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r^3} (x-x') \left(\frac{du'}{dt} (x-x') + \frac{dv'}{dt} (y-y') + \frac{dw'}{dt} (z-z') \right).$$

Ebenso findet man für die ganze vom Elemente $dx' dy' dz'$ im Punkte (x, y, z) nach der Richtung der y - oder z -Axe ausgeübte elektromotorische Kraft, indem man, als Werth von $\cos \theta$, $\frac{y-y'}{r}$ oder $\frac{z-z'}{r}$ statt $\frac{x-x'}{r}$ setzt,

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r^3} \cdot (y-y') \left(\frac{du'}{dt} (x-x') + \frac{dv'}{dt} (y-y') + \frac{dw'}{dt} (z-z') \right)$$

oder

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r^3} \cdot (z-z') \left(\frac{du'}{dt} (x-x') + \frac{dv'}{dt} (y-y') + \frac{dw'}{dt} (z-z') \right).$$

Setzt man nun Kürze halber

$$U = \iiint \frac{dx' dy' dz'}{r^3} (x-x') (u' (x-x') + v' (y-y') + w' (z-z')) \quad (1)$$

$$V = \iiint \frac{dx' dy' dz'}{r^3} (y-y') (u' (x-x') + v' (y-y') + w' (z-z')) \quad (2)$$

$$W = \iiint \frac{dx' dy' dz'}{r^3} (z-z') (u' (x-x') + v' (y-y') + w' (z-z')) \quad (3)$$

so erhält man hienach die Componenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der *Induction* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt,

$$= -\frac{s}{cc} \cdot \frac{dU}{dt}, \quad = -\frac{s}{cc} \cdot \frac{dV}{dt}, \quad = -\frac{s}{cc} \cdot \frac{dW}{dt}.$$

Die Componenten der *ganzen* elektromotorischen Kraft waren aber oben mit

$$A \cos \alpha, \quad A \cos \beta, \quad A \cos \gamma$$

bezeichnet worden, wonach also

$$A \cos \alpha = -2 \left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{k}{cc} \cdot \frac{dU}{dt} \right)$$

$$A \cos \beta = -2 \left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{k}{cc} \cdot \frac{dV}{dt} \right)$$

$$A \cos \gamma = -2 \left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{k}{cc} \cdot \frac{dW}{dt} \right)$$

erhalten wird. Setzt man endlich diese Werthe in die oben angeführten Gleichungen der Stromdichtigkeiten u, v, w im Punkte (x, y, z) ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$u = -2k \left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{k}{cc} \cdot \frac{dU}{dt} \right) \quad (4)$$

$$v = -2k \left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{k}{cc} \cdot \frac{dV}{dt} \right) \quad (5)$$

$$w = -2k \left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{k}{cc} \cdot \frac{dW}{dt} \right). \quad (6)$$

Für die Bestimmung des Werthes Ω der *Potentialfunction* der in der ganzen Kette vertheilten *freien* Elektricität im Punkte (x, y, z) kommt nun noch besonders in Betracht, dass die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Innern eines Leiters, in welchem Strombewegungen statt finden, nicht wie bei einem Leiter, in welchem die Elektricität sich in Ruhe befindet, $= 0$ gesetzt werden darf. Bezeichnet daher ϵ' die von Null verschiedene Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Punkte (x', y', z') , wenn derselbe im Innern des Leiters liegt, ϵ' dagegen, wenn dieser Punkt im Oberflächenelemente dS' liegt, bezeichnet also e' die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Oberflächenelemente dS' , so erhält man folgende Bestimmung des Werthes von Ω , nämlich

$$\Omega = \iiint \frac{dx' dy' dz'}{r} \cdot \epsilon' + \iint \frac{dS'}{r} \cdot e'. \quad (7)$$

Hiezu kommt nun noch, dass die Vertheilung der *freien* Elektricität sowohl im Innern als auch an der Oberfläche der ganzen Leitungskette,

welche durch die Werthe von ε' und e' bestimmt wird, zwar mit der Zeit sich ändern kann, dass aber diese Änderungen von der *Bewegung* der Elektrizität in der Kette abhängen, wonach es zwei Gleichungen geben muss, welche die *partiellen Differentialquotienten* von ε' und e' in Beziehung auf die Zeit in ihrer Abhängigkeit von der *Bewegung* der Elektrizität darstellen.

Der Unterschied der in dem Zeitelemente dt in der Richtung der x -, y - und z -Axe aus dem Elemente $dx'dy'dz'$ austretenden positiven Elektrizität von der darin eintretenden ist

$$dx'dy'dz' \cdot \frac{du'}{dx'} dt, \quad dx'dy'dz' \cdot \frac{dv'}{dy'} dt, \quad dx'dy'dz' \cdot \frac{dw'}{dz'} dt.$$

Die *Summe* dieser Unterschiede giebt die *Verminderung* der im Elemente $dx'dy'dz'$ enthaltenen freien Elektrizität $dx'dy'dz' \cdot \varepsilon'$ im Zeitelemente dt , welche von der Bewegung der *positiven* Elektrizität hervorgebracht wird. Aus der *entgegengesetzt gleichen Bewegung der negativen Elektrizität* ergibt sich aber nochmals eine ebenso grosse Verminderung für dasselbe Zeitelement dt ; folglich ist jene Summe *die Hälfte der ganzen Verminderung* der im Elemente $dx'dy'dz'$ enthaltenen freien Elektrizität im Zeitelemente dt , d. i. die *Hälfte* von $= - dx'dy'dz' \cdot \frac{d\varepsilon'}{dt} dt$, also ist

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = - \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon'}{dt}. \quad (8)$$

Bezeichnet man endlich die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelemente dS' mit der Richtung der x -, y - und z -Axe bildet, mit (N', x') , (N', y') , (N', z') , so ist die Menge der *positiven* Elektrizität, welche in dem Zeitelemente dt von dem Oberflächenelemente dS' ins Innere zurückströmt,

$$= (u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z')) dS' \cdot dt,$$

und da eine gleiche Menge *negativer* Elektrizität in derselben Zeit aus dem Innern zu dem Oberflächenelemente dS' hinströmt, so ergibt sich, dass jene Menge die *Hälfte der ganzen Verminderung der freien Elektrizität $e'dS'$* in dem Oberflächenelemente dS' in dem Zeitelemente dt ist, d. i. $= - \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon'}{dt} \cdot dS' dt$, also ist

$$u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z') = - \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon'}{dt}. \quad (9)$$

So allgemein nun diese von Kirchhoff gegebene Entwicklung der Bewegungsgleichungen der Elektrizität in einem beliebigen Leiter sonst auch ist, so liegen ihr doch folgende drei beschränkende *Annah-*

zu Grunde, nämlich 1) die Annahme, wonach der Werth der elektromotorischen Kraft in einem Punkte, wie oben geschehen, bloss durch *Doppelung der auf die positive Elektricität wirkenden Kraft* bestimmt werden durfte, dass nämlich in allen Theilen des Leiters stets gleiche Mengen von positiver und negativer Elektricität enthalten wären, oder *neutraler*, da dies streng genommen so viel heissen würde als dass die *Wichtigkeit* der freien Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Leiters ϵ' und e' überall stets Null sein sollte, was nicht der Fall ist, dass wenigstens die vorhandene *freie* Elektricität gegen die Menge des an derselben Stelle vorhandenen *neutralen Gemisches* beider Elektricitäten stets als verschwindend klein betrachtet werden dürfe; 2) die Annahme, dass durch jeden Querschnitt gleichzeitig immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzter Richtung durchgehen, was nur dann anzunehmen gestattet ist, wenn man überall eine *gleichartige* Bewegung des neutralen Fluidums hinzugefügt denken darf, was dem Grunde nämlich, weil eine solche hinzugefügte Bewegung des neutralen Fluidums, wenn sie wirklich vorhanden wäre, gar keinen Einfluss auf die *Beobachtungen* haben würde; 3) die Annahme einer allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes, welche, wie später gezeigt werden soll, auf die Annahme zurückgeführt werden kann, dass die *Wichtigkeit* des elektrischen Fluidums gegen die *Masse* seines ponderablen Trägers überall völlig verschwinde, was allerdings allgemein angenommen zu werden pflegt.

2.

Entwicklung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird.

Zur näheren Bestimmung der elektromotorischen Kraft, welche in irgend einem Punkte des Leitungsdrahtes wirkt, ist es zweckmässig, dieselbe in zwei Theile zu scheiden, nämlich in den Theil, welcher von dem Elemente des Leitungsdrahts herrührt, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, und in den Theil, welcher von allen übrigen Elementen herrührt, die in grösseren, messbaren Entfernungen von dem betrachteten Punkte liegen.

Das Element des Leitungsdrahts, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, sei ein Cylinder, dessen Halbmesser im Vergleich mit seiner Länge sehr klein ist. Die Vertheilung der freien Elektricität sowohl der elektrischen Bewegungen in diesem Cylinder wird hierbei Kirchhoff als *symmetrisch gegen die Cylinderaxe* angenommen.

In Beziehung auf die Coordinaten falle die x -Axe mit der Cylinderaxe zusammen und man setze

$$\begin{aligned} y &= \rho \cos \varphi & y' &= \rho' \cos \varphi' \\ z &= \rho \sin \varphi & z' &= \rho' \sin \varphi' . \end{aligned}$$

Unterscheidet man ferner die Stromdichtigkeit in der Richtung der Cylinderaxe und senkrecht gegen die Cylinderaxe, so ist letztere, bei angenommenen Symmetrie der Bewegungen, überall *radial*, d. i. die Richtung fällt in jedem Punkte mit dem durch diesen Punkt gezogenen Cylinderradius zusammen. Hieraus folgt, wenn σ diese *radiale Stromdichtigkeit* im Punkte (x, y, z) , σ' im Punkte (x', y', z') bezeichnet, d

$$\begin{aligned} v &= \sigma \cos \varphi & v' &= \sigma' \cos \varphi' \\ w &= \sigma \sin \varphi & w' &= \sigma' \sin \varphi' , \end{aligned}$$

worin σ und σ' von φ und φ' unabhängige Werthe haben.

Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdrücken von Ω und U im vorhergehenden Artikel erhält man, wenn α den Cylinderhalbmesser bezeichnet,

$$\begin{aligned} \Omega &= \iiint \frac{dx' \cdot \rho' d\varphi' d\varphi'}{r} \cdot \varepsilon' + \alpha \iint \frac{dx' d\varphi'}{r} \cdot e' \\ U &= \iiint \frac{dx' \cdot \rho' d\varphi' d\varphi'}{r^3} (x-x') (v'(x-x') + \sigma'(\rho \cos(\varphi-\varphi') - \rho')) . \end{aligned}$$

Man erhält ferner durch diese Substitution

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d(\sigma' \cos \varphi')}{d\varphi'} ,$$

worin σ' für einen gegebenen Werth von x' bloss von der Variablen φ' abhängt. Setzt man daher $\sigma' = f(\rho') = f(\sqrt{y'y' + z'z'})$, so findet

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d}{d\varphi'} \cdot \left(\frac{y'f(\sqrt{y'y' + z'z'})}{\sqrt{y'y' + z'z'}} \right) = \frac{y'y'}{\rho' \rho'} \cdot \frac{d\sigma'}{d\rho'} + \frac{\rho' \rho' - y'y'}{\rho'^3} \cdot \sigma' ,$$

Ebenso findet man

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{z'z'}{\rho' \rho'} \cdot \frac{d\sigma'}{d\rho'} + \frac{\rho' \rho' - z'z'}{\rho'^3} \cdot \sigma'$$

folglich

$$\frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = \frac{d\sigma'}{d\rho'} + \frac{\sigma'}{\rho'} = \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{d(\rho' \sigma')}{d\rho'} .$$

Man noch $\frac{dw'}{dx}$ hinzu und substituirt für die Summe $\frac{dw'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz}$ dafür erhaltenen Werth, in Gleichung (8) des vorhergehenden Artikels, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{dw'}{dx} + \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{d \cdot \rho' \sigma'}{d\varphi'} = -\frac{1}{2} \frac{d\epsilon'}{dt}. \quad (3)$$

Endlich findet man für die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelements dS' mit der Richtung der drei Coordinatenachsen bildet, folgende Werthe:

$$(N', x') = \frac{\pi}{2}, \quad (N', y') = \varphi' + \pi, \quad (N', z') = \varphi' + \frac{\pi}{2};$$

Es ist

$$v' \cos(N', y') = -\sigma' \cos \varphi'^2, \quad w' \cos(N', z') = -\sigma' \sin \varphi'^2.$$

Nach Substitution dieser Werthe in Gleichung (9) des vorhergehenden Artikels ergibt sich dann

$$\sigma' = \frac{1}{2} \frac{d\epsilon'}{dt}. \quad (4)$$

Setzt man nun Kürze halber

$$x' - x = \lambda, \quad \text{also } dx' = d\lambda$$

$$\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') = \sigma^2, \quad \text{also } r^2 = \sigma^2 + \lambda^2,$$

wo l die Länge des Cylinders bezeichnet und der Punkt (x, y, z) in dem diese Länge halbirenden Querschnitt liegt, nach Gleichung (1)

(2)

$$\begin{aligned} &= \iint \rho' d\rho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\epsilon' d\lambda}{\sqrt{(\sigma^2 + \lambda^2)}} + \alpha \int d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\sigma' d\lambda}{\sqrt{(\sigma^2 + \lambda^2)}} \\ &= \iint \rho' d\rho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\epsilon' \lambda^2 d\lambda}{(\sigma^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \iint \rho'^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho'} \cos(\varphi - \varphi')\right) d\varphi' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\sigma' \lambda d\lambda}{(\sigma^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

wickelt man nun in der erstern Gleichung ϵ' und e' nach Potenzen λ , nämlich

$$\epsilon' = e + \frac{de}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 e}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots$$

$$\epsilon' = \epsilon_0 + \frac{d\epsilon_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 \epsilon_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots$$

wo ϵ_0 abgesehen von der Zeit, bloss von der Variablen ρ' abhängt; dann für sehr kleine Werthe von $\frac{\sigma^2}{l^2}$, welche, da σ^2 nie grösser als $\frac{\sigma^2}{4}$ sein kann, aus kleinen Werthen von $\frac{\sigma}{l}$ nothwendig folgen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{dl}{\sqrt{(\sigma^2+l^2)}} = 2 \log \frac{l}{\sigma}, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{l dl}{\sqrt{(\sigma^2+l^2)}} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{l^2 dl}{\sqrt{(\sigma^2+l^2)}} = \frac{1}{2} l^2$$

gesetzt werden, woraus für kleine Werthe von l folgt

$$\Omega = \iint \rho' d\rho' d\varphi' \left(2\varepsilon'_0 \log \frac{l}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} l^2 \right) + \alpha \int d\varphi' \left(2e \log \frac{l}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{d^2 e}{dx^2} l^2 \right)$$

Die Integration ist von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ und von $\rho' = 0$ bis $\rho' = \alpha$ erstrecken, wonach sich also ergibt

$$\begin{aligned} \Omega &= 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} l^2 \right) + 2\pi\alpha \left(2e \log l + \frac{1}{2} \frac{d^2 e}{dx^2} l^2 \right) \\ &\quad - 2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \sigma - 2\alpha e \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \sigma \end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass $\int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi'))$ entweder $= 2\pi \log \rho'$ ist, wenn $\rho' > \rho$, oder $= 2\pi \log \rho$ ist, wenn $\rho > \rho'$, so erhält man den auf die *Oberfläche* bezüglichen Theil, für welchen $\rho' = \alpha$ ist,

$$- 2\alpha e \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \sigma = - 4\pi\alpha e \log \alpha.$$

Der auf das *Innere* sich beziehende Theil zerfällt in zwei Stücke, nämlich

$$- 2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \sigma = - 4\pi \log \rho \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 - 4\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \log \rho'.$$

reducirt sich also in dem einen Grenzfall, nämlich wenn $\rho = \alpha$ ist, auf

$$- 4\pi \log \alpha \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0,$$

in dem andern Grenzfall, nämlich wenn $\rho = 0$ ist, auf

$$- 4\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \log \rho',$$

die beide desto weniger von einander verschieden sind, je kleiner α^2 ,

*) ε'_0 nähert sich bei der angenommenen symmetrischen Vertheilung der freien Elektrizität im Drahte mit abnehmenden Werthen von ρ' der *Constante*. Ist es hienat

so dass man mit hinreichender Genauigkeit für sehr kleine Werthe von α den auf das Innere sich beziehenden Theil

$$2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \rho = - 4\pi \log \alpha \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0$$

setzen kann; folglich

$$\begin{aligned} \Omega = 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \frac{1}{3} \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} l^2 \right) + 2\pi \alpha \left(2\varepsilon \log l + \frac{1}{3} \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} l^2 \right) \\ - 4\pi \log \alpha \cdot \left(\alpha \varepsilon + \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \right) \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\Omega = 4\pi \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\alpha \varepsilon + \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \right) + \frac{1}{3} \pi l^2 \cdot \left(\alpha \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} + \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} \right).$$

Setzt man endlich hierin

$$2\pi \alpha \varepsilon + 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 = E,$$

das heisst, bezeichnet man mit $E dx$ die Menge der freien Electricität, die in dem Leiterelemente dx , theils an seiner Oberfläche theils im Innern, enthalten ist, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi \alpha \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} + 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} = \frac{d^2 E}{dx^2},$$

folglich

$$\Omega = 2E \log \frac{l}{\alpha} + \frac{1}{3} \frac{d^2 E}{dx^2} \cdot l^2. \quad (5)$$

Ebenso können nun auch in der oben gefundenen Gleichung für U die Werthe von u' und σ' nach Potenzen von λ entwickelt werden, nämlich

für kleine Werthe von α gestattet, ε'_0 für alle Werthe von $\rho' < \alpha$ constant zu setzen, so geht der für den erstern Grenzfall gefundene Werth über in

$$- 4\pi \varepsilon'_0 \log \alpha \int_0^\alpha \rho' d\rho' = - 2\pi \alpha \varepsilon'_0 \log \alpha$$

der für den letzteren Grenzfall in

$$- 4\pi \varepsilon'_0 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \log \rho' = - 2\pi \alpha \varepsilon'_0 \cdot (\log \alpha - \frac{1}{2})$$

die sich von einander desto weniger unterscheiden, je kleiner α ist.

$$u' = u'_0 + \frac{du'_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2u'_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots$$

$$\sigma' = \sigma'_0 + \frac{d\sigma'_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2\sigma'_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots$$

wo u'_0 und σ'_0 für einen gegebenen Werth von x' , abgesehen von der Zeit, bloss von der Variablen ρ' abhängen.

Nun kann für sehr kleine Werthe von $\frac{\sigma'^2}{l^2}$, wie sie sehr kleinen Werthen von $\frac{\alpha^2}{l^2}$ entsprechen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda d\lambda}{(\sigma'^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(\sigma'^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \left(\log \frac{l}{\sigma'} - 1 \right) = 2 \log \frac{l}{\sigma'}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^3 d\lambda}{(\sigma'^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(\sigma'^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} l^2$$

gesetzt werden, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Hienach ergibt sich folgende Gleichung für U :

$$U = \iint \rho' d\rho' d\varphi' \cdot \left(2u'_0 \log \frac{l}{\sigma'} + \frac{1}{2} \frac{d^2u'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right) + \iint \rho'^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho'} \cos(\varphi - \varphi') \right) d\rho' d\varphi' \cdot \left(2 \frac{d\sigma'_0}{dx} \log \frac{l}{\sigma'} + \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right)$$

Der letztere Theil dieses Werthes von U kann, wenn α sehr klein ist, da die Integration nach ρ' von $\rho' = 0$ bis $\rho' = \alpha$ zu erstrecken ist, als verschwindend betrachtet werden, folglich

$$U = \iint \rho' d\rho' d\varphi' \cdot \left(2u'_0 \log \frac{l}{\sigma'} + \frac{1}{2} \frac{d^2u'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right),$$

wo die Integration von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ und von $\rho' = 0$ bis $\rho' = \alpha$ zu erstrecken ist, also

$$U = 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \left(2u'_0 \log \frac{l}{\sigma'} + \frac{1}{2} \frac{d^2u'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right) - 2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \log \rho.$$

Da nun $\int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi'))$ entweder $= 2\pi \log \rho'$ ist, wenn $\rho' > \rho$, oder $= 2\pi \log \rho$ ist, wenn $\rho > \rho'$, so ergibt sich

$$U = 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \left(2u'_0 \log \frac{l}{\sigma'} + \frac{1}{2} \frac{d^2u'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right) - 4\pi \log \rho \int_0^\rho \rho' d\rho' \cdot u'_0 - 4\pi \int_\rho^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 \log \rho',$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$3 \frac{l}{e\alpha} \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 + \frac{1}{4} \pi l^2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2} + 4\pi \log \frac{\alpha}{\rho} \cdot \int_0^\rho \rho' d\rho' \cdot u'_0 + 4\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 \log \frac{\alpha}{\rho}.$$

nun aber, wenn α sehr klein ist, die beiden letzten Theile dieses Werthes von U gegen den ersten Theil als verschwindend betrachtet werden dürfen, so kann

$$U = 4\pi \log \frac{l}{e\alpha} \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 + \frac{1}{4} \pi l^2 \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2}$$

gesetzt werden.

Setzt man endlich hierin

$$2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 = i,$$

was heisst, bezeichnet man mit $i dt$ die Menge der positiven Elektrizität, welche in dem Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leitungsdrabts fliesst, wo also i die Stromintensität nach mechanischem Maasse ausgedrückt, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2} = \frac{d^2 i}{dx^2},$$

folglich

$$U = 2i \log \frac{l}{e\alpha} + \frac{1}{4} \frac{d^2 i}{dx^2} \cdot l^2.$$

Hienach wird nun die elektromotorische Kraft, welche von der freien Elektrizität in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrabts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird, näher bestimmt, nämlich aus dem Werthe von Ω ,

$$- 2 \frac{d\Omega}{dx} = - 4 \frac{dE}{dx} \cdot \log \frac{l}{\alpha} - \frac{1}{4} \frac{d^3 E}{dx^3} \cdot l^2$$

und ebenso die elektromotorische Kraft, welche durch Induction von den elektrischen Bewegungen in demselben Stücke auf denselben Punkt ausgeübt wird, nämlich aus dem Werthe von U ,

$$- \frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = - \frac{16}{cc} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{cc} \cdot \frac{d^3 i}{dx^3 dt} \cdot l^2.$$

Endlich kann, wenn man mit Kirchhoff für den Werth von $\log \frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl annimmt,

$$- 2 \frac{d\Omega}{dx} = - 4 \frac{dE}{dx} \cdot \log \frac{l}{a}$$

$$- \frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = - \frac{16}{cc} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{a}$$

oder auch, wenn 1 gegen $\log \frac{l}{a}$ ganz verschwindet,

$$- \frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = - \frac{16}{cc} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{a}$$

gesetzt werden.

3.

Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen.

Nach näherer Bestimmung der auf einen Punkt (x, y, z) des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche theils von der freien Electricität theils von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stücke des Leitungsdrahts, zu welchem jener Punkt selbst gehört, herrühren, hat Kirchhoff die Art. 1 aufgestellten allgemeinen Gleichungen unter folgenden Voraussetzungen zu vereinfachen gesucht, nämlich

- 1) dass der Halbmesser des Leitungsdrahts a im Vergleich mit der Länge seiner als cylindrisch zu betrachtenden Elemente l so klein sei, dass $\log \frac{l}{a}$ eine sehr grosse Zahl darstelle, was schon im vorhergehenden Artikel zur Vereinfachung des Ausdrucks der elektromotorischen Kräfte angenommen wurde;
- 2) dass in einem solchen dünnen Leitungsdrahte die auf einen Punkt (x, y, z) wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Electricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des einzigen kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stückes, dessen mittelstem Querschnitt der Punkt (x, y, z) angehört, herrühren, verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Electricität und von den elektrischen Bewegungen in dem eben bezeichneten kleinen Stücke selbst herrühren. — Hiezu kommt noch die auch der Entwicklung der allgemeinen Gleichungen Art. 1 schon zum Grunde gelegte Voraussetzung,
- 3) dass das Ohm'sche Gesetz für alle Stromelemente einzeln gelte, auch wenn die Stromintensitäten in denselben sehr verschieden sind und schnell wechseln.

Ist nun nach der *ersten* Voraussetzung $\log \frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl, und kommen nach der *zweiten* Voraussetzung die im vorigen Artikel näher bestimmten elektromotorischen Kräfte, gegen welche die übrigen von den ferner liegenden Stücken des Leitungsdrahts herrührenden verschwindend klein sind, allein in Betracht; so findet man nach dem Schlusse des vorigen Artikels den *vollständigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft* nach der Richtung der Axe des Leitungsdrahts

$$- 2 \left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{cc} \frac{dU}{dt} \right) = - 4 \log \frac{l}{\alpha} \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{cc} \frac{di}{dt} \right).$$

Ist dieses nun der Ausdruck der ganzen elektromotorischen Kraft, so giebt derselbe nach Art. 1 mit dem specifischen Leitungsvermögen k multiplicirt, der *dritten* Voraussetzung gemäss, die Stromdichtigkeit u nach der Richtung des Leitungsdrahts in dem betrachteten Punkte (x, y, z) , nämlich

$$u = - 4k \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{cc} \frac{di}{dt} \right).$$

Beachtet man endlich, dass die Stromdichtigkeit im Punkte (x, y, z) hienach von ρ unabhängig, folglich für alle Punkte desselben Drahtquerschnitts gleich ist, und daher mit dem Drahtquerschnitt $\pi\alpha\alpha$ multiplicirt die Stromintensität i giebt; so erhält man durch Multiplication der vorhergehenden Gleichung mit $\pi\alpha\alpha$ folgende aus den sieben ersten Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen abgeleitete Gleichung:

$$i = - 4\pi\alpha\alpha k \log \frac{l}{\alpha} \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{cc} \frac{di}{dt} \right).$$

Es bleiben also nur noch die beiden letzten von den Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen übrig, welche Art. 2 reducirt worden sind auf

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d \cdot \rho \sigma}{d\rho} &= - \frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{dt} \\ \sigma &= \frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{dt}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erstere mit $\rho d\rho d\varphi$ und integrirt sodann über den ganzen Querschnitt des Leitungsdrahts, und zieht endlich die mit $2\pi\alpha$ multiplicirte zweite Gleichung ab, so erhält man

$$\pi\alpha\alpha \cdot \frac{du}{dx} = - \pi\alpha \cdot \frac{d\epsilon}{dt} - \pi \int_0^\alpha \rho d\rho \cdot \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Da nun aber, nach Art. 2 für $\rho' = \rho$,

$$2\pi a \epsilon + 2\pi \int_0^a \rho d\rho \cdot \epsilon = E,$$

woraus

$$2\pi a \cdot \frac{d\epsilon}{dt} + 2\pi \int_0^a \rho d\rho \cdot \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dE}{dt},$$

so ergibt sich, da $\pi a a i = i$ war, woraus $\pi a a \cdot \frac{du}{dx} = \frac{di}{dx}$ folgt, aus den beiden letzten Art. 1 entwickelten Gleichungen folgende:

$$\frac{di}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}.$$

Nach dieser Reduction der neun allgemeinen Gleichungen auf zwei, nämlich

$$i = -4\pi a a k \log \frac{l}{a} \cdot \left(\frac{dE}{dx} + \frac{1}{cc} \frac{di}{dt} \right)$$

$$\frac{di}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}$$

kann endlich, durch Elimination von i , das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Vertheilung der freien Elektrizität in der Kette E sich für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2 E}{dt^2} - \frac{cc}{2} \frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{cc}{4\pi a a k \log \frac{l}{a}} \cdot \frac{dE}{dt} = 0,$$

oder es kann, durch Elimination von E , das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Stromintensität i sich für jeden Punkt der Kette und für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{cc}{2} \frac{d^2 i}{dx^2} + \frac{cc}{4\pi a a k \log \frac{l}{a}} \cdot \frac{di}{dt} = 0.$$

Die Vertheilung der freien Elektrizität, sowie die Stromintensitäten in allen Theilen des Leitungsdrahts würden sich aber, wie man leicht sieht, auch aus den *Bewegungen* aller elektrischen Theilchen im Leitungsdraht von selbst ergeben haben, wenn das Gesetz der letzteren bekannt wäre. Umgekehrt lässt sich nun dieses letztere Gesetz aus dem gefundenen Gesetz der Vertheilung und der Stromintensitäten leicht ableiten, wobei es genügt, dasselbe für die Bewegungen aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte aufzustellen, weil die entgegengesetzt gleichen Bewegungen aller *negativ* elektrischen Theilchen sich daraus von selbst ergeben.

Bezeichnet s irgend einen Punkt des Leitungsdrahts und $\mathcal{E}ds$ die ganze Menge positiver Elektricität, welche in dem Längenelement des Leitungsdrahts ds enthalten ist, bezeichnet ferner σ die Verschiebung eines Theilchens dieser positiven Elektricität nach der Zeit t von der Stelle seines ursprünglichen Gleichgewichts, also $\frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich dieses Theilchen im Leitungsdrahte bewegt, und $\frac{\sigma^2}{2}$ die Verdünnung der positiven Elektricität im Punkte s des Leitungsdrahts am Ende der Zeit t , der eine ebenso grosse Verdichtung der negativen Elektricität immer entspricht; so ist die Stromintensität i im Punkte des Leitungsdrahts s am Ende der Zeit t dem Producte $\mathcal{E} \frac{d\sigma}{dt}$ gleich, und die Dichtigkeit E der *freien Elektricität*, d. i. des Ueberschusses der positiven Elektricität über die negative im Elemente ds , am Ende der Zeit t , ist dem doppelten Producte $\mathcal{E} \frac{d\sigma}{ds}$ negativ genommen gleich, also

$$i = \mathcal{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt}, \quad E = - 2\mathcal{E} \cdot \frac{d\sigma}{ds}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die vorhergehenden Gleichungen erhält man aber die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2} \frac{d^2\sigma}{ds^2 dt} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\sigma}{ds dt^2} - \frac{cc}{2} \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds dt} = 0$$

daraus mit Rücksicht darauf, dass während des ursprünglichen Gleichgewichts der Elektricität σ im ganzen Leitungsdraht überall $= 0$ war, das Gesetz der Bewegung aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdraht folgt, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2} \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

4.

Prüfung der im vorigen Artikel gemachten Voraussetzungen.

Im Anfang des vorigen Artikels sind die zur Vereinfachung der Gleichungen gemachten Voraussetzungen zusammengestellt worden, von denen die eine schon der Art. 1 gegebenen Entwicklung zum Grunde liegt war. Was zunächst nun die erste der Vereinfachung halber neu

hinzugekommene Annahme betrifft, nämlich die Annahme eines sehr feinen Leitungsdrahts, so scheint dieselbe so nahe zu liegen, dass sie kaum einer näheren Prüfung bedürfe, sondern, wenn es sich um Vereinfachung handelt, sich von selbst verstehe; doch näher betrachtet sieht man leicht, dass diese Feinheit des Leitungsdrahts hiebei in solchem Grade in Anspruch genommen wird und werden muss, wie sie wirklich nie statt findet, so dass dadurch alle praktische Anwendbarkeit der daraus abgeleiteten Folgerungen zweifelhaft wird. Es kommt aber dazu noch das besondere Bedenken, ob nicht ausserdem diese Voraussetzung mit der der Entwicklung Art. 1 zum Grunde gelegten, das Ohm'sche Gesetz betreffenden, Voraussetzung in Widerspruch gerathe, weil letztere auf weniger feine Leitungsdrähte beschränkt werden zu müssen scheint.

Findet es nämlich bei linearen Leitern auch kein Bedenken, die Dicke des Leitungsdrahts gegen seine ganze Länge als verschwindend zu betrachten, so sagt es doch schon weit mehr, diese Dicke gegen die Länge eines einzelnen noch als geradlinig zu betrachtenden Elements des Leitungsdrahts als verschwindend zu betrachten, und noch weit mehr heisst es, den Logarithmus des Verhältnisses der Länge eines so kleinen Elements zu jener Dicke als eine grosse Zahl anzunehmen, gegen welche die Einheit als verschwindend zu betrachten sei, wie es in jener Voraussetzung geschieht. Denn nähme man auch z. B. nur die Zahl 20 als eine solche Zahl an, so würde schon ein Draht verlangt werden, dessen kleinstes noch als geradlinig zu betrachtende Stück über 200 Millionen Mal länger als dick sein müsste, was nicht vorkommt.

Noch wichtiger aber ist das andere Bedenken, ob nicht die Annahme eines so feinen Leitungsdrahts, wenn er existirte, mit der das Ohm'sche Gesetz betreffenden Voraussetzung in Widerspruch gerathe würde. Es muss jedenfalls wenigstens als zweifelhaft betrachtet werden, ob diese letztere Voraussetzung *allgemein und streng gültig*, oder ob sie nur *für weniger feine Drähte näherungsweise zulässig ist*, und dieser Zweifel kann, wie man leicht einsieht, nur durch eine von dieser Voraussetzung selbst unabhängige Entwicklung der elektrischen Bewegungsgesetze gehoben werden. Es soll daher eine solche Entwicklung zu geben versucht werden, wenigstens in so weit als es zur Prüfung des angeführten Bedenkens nöthig erscheint, unter vorläufiger Beibehaltung der ersteren Voraussetzung, nämlich eines so feinen Leitungs-

ahnts, dass der Logarithmus des Verhältnisses der Länge der noch als radlinig zu betrachtenden Elemente zu ihrer Dicke so gross sei, dass die Einheit dagegen vernachlässigt werden könne. Diese Entwicklung ruht auf folgender Betrachtung.

Wenn alle Kräfte wirklich bekannt wären, welche auf die elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte wirken, und diese Kräfte sämmtlich nach bekannten mechanischen Maassen genau ausgedrückt wären, so würde die Möglichkeit einer von der Voraussetzung des Ohm'schen Gesetzes ganz unabhängigen Entwicklung der Bewegungsgesetze dieser elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte von selbst einleuchten; denn die Resultante aller auf irgend ein Theilchen wirkenden Kräfte dividirt durch die Beschleunigung des Theilchens in der Richtung der Resultante muss, wie bei allen Körpern, einen stets gleichen Quotienten geben, welcher in der allgemeinen Mechanik als *Masse des Theilchens* bezeichnet wird.

5.

Von der Voraussetzung des Ohm'schen Gesetzes unabhängige Herleitung der Bewegungsgleichung.

Hienach suchen wir also zunächst alle auf ein elektrisches Theilchen im Leitungsdraht wirkenden Kräfte aufzuzählen und nach mechanischem Maasse auszudrücken, nämlich

1) die aus der Nähe wirkenden, schon von Kirchhoff bestimmten elektrischen Kräfte, aus denen, unter der von der Feinheit des Leitungsdrahts gemachten Voraussetzung, für einen Punkt s des Leitungsdrahts die elektromotorische Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= - 4 \log \frac{l}{a} \cdot \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{cc} \frac{di}{dt} \right)$$

resultirte. Diese elektromotorische Kraft ist die Differenz der beiden Kräfte, welche auf die positive und auf die negative elektrische Maasseinheit (wie sie in der Elektrostatik definiert wird) wirken würden, wenn sie sich in diesem Punkte befänden. Da diese beiden Kräfte, abgesehen davon dass sie entgegengesetzte Richtung haben, gleich sind, so ergibt sich dass die Hälfte jener elektromotorischen Kraft, nämlich

$$= - 2 \log \frac{l}{a} \cdot \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{cc} \frac{di}{dt} \right)$$

die Kraft ist, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s

wirkt. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente des Leitungsdrahts ds enthalten ist, ist aber früher, im dritten Artikel, mit $\mathcal{E}ds$ bezeichnet worden, wobei zugleich bemerkt worden, dass $\mathcal{E}\frac{d\sigma}{dt} = i$ und $-2\mathcal{E}\frac{d\sigma}{ds} = E$ ist. Multiplicirt man daher obige Kraft mit der Zahl $\mathcal{E}ds$ und substituirt die eben angegebenen Werthe, so erhält man die auf die positive Elektrizität im Elemente ds wirkende Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= 4\mathcal{E}\mathcal{E} \log \frac{l}{a} \cdot \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{cc} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right) \cdot ds .$$

Zu diesen schon vorher bestimmten Kräften müssen aber ferner noch

2) die von den ponderablen Leitertheilchen auf die positive Elektrizität im Elemente ds ausgeübten Kräfte hinzugefügt werden, welche wir auf folgende Weise zu bestimmen suchen.

Nach dem Ohm'schen, für *beharrliche* Ströme bewiesenen, Gesetze ist, wie Art. 1 in der Note gezeigt worden, die von den ponderablen Theilchen des Leitungsdrahtes unabhängige elektromotorische Kraft in einem Punkte der Kette $= \frac{u}{k}$, oder, da nach Art. 3 $\pi\alpha\alpha u = i$ ist, $= \frac{i}{\pi\alpha\alpha k}$. Die *Beharrlichkeit* des Stromes, d. i. die gleichbleibende Geschwindigkeit der elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte, beweist aber, dass ausser dieser von den ponderablen Theilchen unabhängigen elektromotorischen Kraft noch eine zweite an Grösse gleiche, an Richtung entgegengesetzte elektromotorische Kraft vorhanden sein müsse, welche offenbar von der Wirkung der ponderablen Leitertheilchen auf die Elektrizität im Leiter herrühren muss, welche dadurch also

$$= - \frac{i}{\pi\alpha\alpha k}$$

gegeben ist. Die Hälfte dieser elektromotorischen Kraft, nämlich

$$= - \frac{i}{2\pi\alpha\alpha k}$$

ist dann, wie aus dem vorher Gesagten einleuchtet, die Kraft, welche von den ponderablen Leitertheilchen auf jede positiv elektrische Maasseinheit in dem betrachteten Punkte s ausgeübt wird. Multiplicirt man daher diese Kraft mit der Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten $\mathcal{E}ds$, die im Elemente ds enthalten sind, so findet man die von den ponderablen Leitertheilchen auf die im Elemente ds enthaltene positive Elektrizität ausgeübte Kraft, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, nämlich, wenn man auch hier, wie vorher, $\mathcal{E}\frac{d\sigma}{dt}$ für i substituirt,

$$= - \frac{1}{2\pi aak} \cdot \mathcal{E}\mathcal{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot ds .$$

Beachtet man endlich, dass die Fälle *nicht beharrlicher* Ströme von denen *beharrlicher* Ströme sich nur in solchen Beziehungen unterscheiden, die ihren Grund in Verschiedenheiten der Wechselwirkung *der elektrischen Theilchen unter einander* haben, wovon die aus der Wechselwirkung *der ponderabelen Leitertheilchen auf die elektrischen* herrührenden Kräfte in keiner unmittelbaren Abhängigkeit stehen, so scheint man berechtigt, das angegebene Gesetz zur Bestimmung dieser letzteren Kräfte, wenn es in allen Fällen *beharrlicher* Ströme gilt, als allgemein gültig, auch in den Fällen *nicht beharrlicher* Ströme anzunehmen.

Um alle Kräfte in Rechnung zu bringen, welche auf das betrachtete elektrische Theilchen im Leitungsdrahte wirken, fassen wir endlich

3) alle aus der Ferne wirkenden Kräfte, woher sie rühren mögen, zusammen, und begreifen darunter namentlich auch alle Kräfte, welche von der Wechselwirkung der Elektrizität mit Ausnahme der in dem Elemente *ds* selbst enthaltenen, in welchem der betrachtete Punkt liegt, auf die Elektrizität in dem betrachteten Punkte herrühren, welche von Kirchhoff als verschwindend klein angenommen worden sind. Die daraus entspringende elektromotorische Kraft im Punkte *s* bezeichnen wir, nach mechanischem Maasse, mit *S*, deren Hälfte dann mit $\mathcal{E}ds$ multiplicirt die auf die positive Elektrizität im Elemente *ds* ausgeübte Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= \frac{1}{2} \mathcal{E}Sds$$

gibt.

Da alle diese Kräfte nach mechanischem Maasse, das heisst in Theilen derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderabelen Masseneinheit (der Masse eines Milligramms) in der Zeiteinheit (in der Zeit einer Secunde) die Einheit der Geschwindigkeit (ein Millimeter in einer Secunde) ertheilt; so folgt daraus, nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe aller *dieser* gleichgerichteten Kräfte dividirt durch die Beschleunigung, d. i. durch die Geschwindigkeit, welche diese Summe von Kräften der positiven Elektrizität im Elemente *ds*, auf welche sie wirkt, während der Zeiteinheit ertheilen würde, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} ,$$

die Definition der *Masse* der im Elemente *ds* enthaltenen positiven Electricität, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, giebt.

Es ist bemerkenswerth, dass man hiedurch auf eine neue Art *absoluter Bestimmung einer Elektricitätsmenge* geführt wird, worüber folgende Bemerkung, zur Vergleichung dieser neuen Art *absoluter Bestimmung* mit den schon bekannten hier der Anwendung auf vorliegende Betrachtung wegen Platz finden möge.

Ordnet man nämlich die verschiedenen Arten *absoluter Bestimmungen* einer Elektricitätsmenge nach der Genauigkeit, welche sie in der Ausführung gestatten, so sind ohne Zweifel die *absoluten Bestimmungen auf galvanometrischem Wege* obenan zu stellen, durch welche eine als Bestandtheil des *neutralen Fluidums* vorhandene Elektricitätsmenge, die aus einem Raume in einen andern übergegangen ist, in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche bei der *galvanometrisch bestimmten Einheit der Stromintensität* während der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters geht. — Sodann folgen die *absoluten Bestimmungen auf dem Wege der elektrostatischen Messung*, durch welche eine vorhandene Menge *freier* Elektricität in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche auf eine gleiche Menge in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt. Diese Bestimmung findet nur auf *kleine* Elektricitätsmengen welche *frei* vorkommen, im Vergleich mit den galvanometrisch bestimmten grossen im neutralen Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen, Anwendung. — Besonders wichtig ist die Kenntniss des Verhältnisses der diesen beiden Bestimmungsweisen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, welche durch doppelte Messung einer und derselben Elektricitätsmenge sowohl auf galvanometrischem als auch auf elektrostatischem Wege gewonnen worden, nämlich des Verhältnisses $155370 \cdot 10^6 : 1$ (siehe die vorhergehende Abhandlung Bd. V. S. 261). — Diesen beiden *absoluten Bestimmungsweisen* kann man nun noch als *dritte* diejenige hinzufügen, nach welcher eine vorhandene Elektricitätsmenge durch ihre *Masse* in Theilen des für alle Körper festgestellten Massenmaasses (Milligramm) ausgedrückt werden soll; wobei jedoch zu bemerken ist, dass bisher auf diese Weise noch keine vorhandene Elektricitätsmenge hat ausgedrückt werden können, weil noch kein Weg der Messung entdeckt worden ist, welcher auch nur näherungsweise zu

einer solchen Kenntniss führte. In Folge davon mangelt auch noch gänzlich die Kenntniss des *Verhältnisses* der dieser Bestimmungsweise und den vorigen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, weil keine doppelte Messung einer und derselben Elektrizitätsmenge auf diese verschiedenen Weisen ausgeführt werden konnte. Wäre dieses *Verhältniss* = $r:1$ bekannt, so würde aus der Zahl $\mathcal{E}ds$ der elektrostatischen Maasseinheiten positiver Elektrizität, die im Leiterelemente ds enthalten sind, die *Masse* dieser Elektrizitätsmenge in *Milligrammen* ausgedrückt = $\frac{1}{r} \cdot \mathcal{E}ds$ erhalten werden.

Durch Einführung dieses Ausdrucks der *Masse* und Gleichsetzung derselben mit dem oben angegebenen *Quotienten* erhält man dann folgende Gleichung:

$$\frac{1}{d^2\sigma} \cdot \left(4\mathcal{E}\mathcal{E} \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{cc} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right) ds - \frac{1}{2\pi\alpha\alpha k} \cdot \mathcal{E}\mathcal{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} ds + \frac{1}{2} \mathcal{E}S ds \right) = \frac{1}{r} \mathcal{E}ds,$$

oder, geordnet und $\frac{cc}{8 \log \frac{l}{\alpha} \cdot r\mathcal{E}} = \lambda$ gesetzt,

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k \log \frac{l}{\alpha} \cdot (1+\lambda)} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{cc}{16\mathcal{E} \log \frac{l}{\alpha} \cdot (1+\lambda)} \cdot S.$$

6.

Vergleichung der Resultate.

In dieser allgemeineren Gleichung, sieht man, ist die Kirchhoff'sche oben entwickelte Gleichung mit enthalten, nämlich unter den beiden Voraussetzungen, dass $S = 0$ und $\lambda = 0$ sei; denn es ist alsdann

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

ganz in Uebereinstimmung mit der am Schlusse des dritten Artikels entwickelten Gleichung.

Es darf hiebei bemerkt werden, dass auf diese eben entwickelte allgemeinere Gleichung und deren Uebereinstimmung mit der Kirchhoff'schen, unter den angegebenen Voraussetzungen, sich die von Pogendorff zu Kirchhoffs Abhandlung in den *Annalen* 1857. Bd. 100. S. 354 hinzugefügte Note bezieht.

Die Voraussetzung, dass $S = 0$ sei, enthält nun aber nicht bloss im Allgemeinen die von Kirchhoff vorausgeschickte Annahme, dass

keine elektromotorische Kraft von Aussen her auf die Elektrizität im Leitungsdrahte wirken soll, sondern insbesondere auch die zweite von den im Anfang des dritten Artikels erwähnten Annahmen, dass nämlich alle von der freien Elektrizität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des kleinen als Cylinder betrachteten Stücks, in dessen Mitte der betrachtete Punkt liegt, herrührenden elektromotorischen Kräfte verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektrizität und von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen cylindrischen Stücke selbst herrühren.

Die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, kommt dagegen mit der von Kirchhoff angenommenen allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes überein. Zwar könnte es scheinen; dass $\lambda = \frac{cc}{8 \log \frac{l}{\alpha} \cdot r\mathfrak{G}}$ für

$\log \frac{l}{\alpha} = \infty$ verschwinde, und dass also die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, näherungsweise schon durch die Kirchhoff'sche Annahme, dass α gegen l verschwinde, erfüllt werde; es ist dies aber nicht der Fall, sondern es wird $\lambda = \infty$ wenn α verschwindet, wie man leicht daraus ersieht, dass die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthalten ist, $= \mathfrak{G}$, dem Quadrat des Halbmessers α proportional ist und, wenn man die constante Zahl der positiv elektrischen Masseneinheiten, welche in der *Volumeneinheit des Leitungsdrahts* enthalten ist, mit \mathfrak{G}_0 bezeichnet, durch

$$\mathfrak{G} = \pi\alpha\alpha \cdot \mathfrak{G}_0$$

dargestellt wird, woraus folgt, dass das Product $\mathfrak{G} \log \frac{l}{\alpha} = \pi\mathfrak{G}_0 \cdot \alpha\alpha \log \frac{l}{\alpha}$ mit α verschwindet und also $\lambda = \frac{cc}{8r \cdot \mathfrak{G} \log \frac{l}{\alpha}}$ unendlich wird.

Es geht daraus hervor, dass das Ohm'sche Gesetz zwar näherungsweise bei *stärkeren* Leitungsdrähten, für welche α grössere Werthe hat, die von Kirchhoff angenommene allgemeinere Geltung haben könne, nämlich bei einem sehr kleinen Werthe des constanten Quotienten $\frac{cc}{r\mathfrak{G}_0}$; dass dagegen bei *feineren* Leitungsdrähten, zumal wenn diese Verfeinerung so weit getrieben werden soll, dass $\log \frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl werde, das Ohm'sche Gesetz diese allgemeinere Geltung verlieren müsse, wonach also das oben ausgesprochene Bedenken über die Unvereinbarkeit der beiden im Anfang des dritten Artikels unter (1) und (3) angeführten Annahmen wohl begründet erscheint.

Es leuchtet dagegen umgekehrt ein, dass wenn auf dem Wege der Beobachtung Fälle von feineren Leitungsdrähten nachgewiesen werden könnten, wo dem Ohm'schen Gesetz diese allgemeinere Geltung nicht zukäme, sondern messbare Abweichungen hervorträten, aus denen λ bestimmbar würde, so würde dadurch eine Kenntniss des constanten Quotienten $\frac{cc}{r\mathfrak{G}_0} = 8\pi\alpha\alpha \log \frac{l}{a} \cdot \lambda$ gewonnen, und die Kenntniss des Verhältnisses $r:1$, d. i. der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten welche auf 1 Milligramm gehen, würde bloss noch von der Erforschung der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten \mathfrak{G}_0 abhängen, welche in 1 Cubikmillimeter des Leiters enthalten sind.

7.

Entwicklung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche auf einen Punkt eines geschlossenen linearen Leiters von der freien Elektrizität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leiter, mit Ausnahme desjenigen Elements, in welchem der betrachtete Punkt liegt, ausgeübt wird.

Wenn man die auf einen Punkt s des Leitungsdrahts aus der Ferne wirkenden Kräfte, welche sich nicht bestimmen liessen, sowohl diejenigen welche von entfernteren Theilen des Leitungsdrahts selbst, als auch diejenigen welche von Aussen her wirken, $= 0$ setzte, so ergab sich nach den Entwicklungen der vorhergehenden Artikel übereinstimmend folgende partielle Differentialgleichung für die Verschiebung σ des positiv elektrischen Theilchens im Punkte s :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - a \frac{d^2\sigma}{ds^2} + b \frac{d\sigma}{dt} = 0,$$

wobei nur der Unterschied statt fand, dass die Bedeutung der constanten Coefficienten a und b in dieser Gleichung nach Art. 3 von der nach Art. 6 ihnen zukommenden etwas verschieden war, ein Unterschied, der möglicher Weise aber gar nicht in Betracht kommt, wenn nämlich die Erfahrung ergeben sollte, dass der im vorigen Artikel mit $\frac{cc}{r\mathfrak{G}_0}$ bezeichnete Quotient für alle Arten von Leitern einen verschwindend kleinen Werth hätte.

Diese Uebereinstimmung macht aber obige Gleichung noch keineswegs geeignet, die Bewegungen der Elektrizität in einem Leitungsdrahte wirklich zu bestimmen; denn wenn es auch Fälle geben kann, wo keine elektromotorischen Kräfte von Aussen her auf die Elek-

tricität im Leitungsdrahte wirken, so kann es doch keinen Fall geben, wo auch keine elektromotorischen Kräfte von den ferner liegenden Theilen des Leitungsdrahts selbst ausgeübt würden, wenn darin irgend eine Störung des Gleichgewichts der Elektrizität statt gefunden hat. Um daher zu einer Gleichung zu gelangen die zur Bestimmung der Bewegungen der Elektrizität in einem Leitungsdrahte wirklich dienen kann, reicht die Art. 2 gegebene Entwicklung der elektromotorischen Kräfte, welche auf einen Punkt s des Leitungsdrahts von der freien Elektrizität und von den elektrischen Bewegungen des einzigen Elements ds , zu welchem der Punkt s gehört, ausgeübt werden, nicht hin, sondern es müssen auch diejenigen elektromotorischen Kräfte noch entwickelt werden, welche auf den Punkt s von der freien Elektrizität und von den elektrischen Bewegungen in allen übrigen Theilen des Leitungsdrahts ausgeübt werden. Es bedürfen daher die aus obiger Gleichung von Kirchhoff abgeleiteten Folgerungen noch einer Prüfung in Beziehung auf den Einfluss dieser letzteren Kräfte.

Für die Entwicklung dieser Kräfte genügt es nun zwar, da es sich um Elemente ds , ds' des Leitungsdrahts handelt, deren Dimensionen gegen ihre Entfernung verschwindet, die Dichtigkeiten der freien Elektrizität und die Stromintensitäten in denselben bloss nach ihren Gesamtwerten für den ganzen Querschnitt E , E' , i , i' zu betrachten, die bloss Functionen von s und t oder von s' und t sind. Es lassen sich diese Functionen aber in Beziehung auf s oder s' , wie von selbst einleuchtet, nicht wie die in Art. 2, nach dem Taylor'schen Lehrsätze in Reihen entwickeln, da dieselben im ersten Augenblick $t = 0$ ganz willkürlich gegeben sein können, sondern man muss dieselben in Sinus- und Cosinusreihen darzustellen suchen.

Setzt man also für einen geschlossenen Leitungsdraht von der Länge $2\pi a$

$$E' = \sum \left(a_n \sin \frac{ns'}{a} + b_n \cos \frac{ns'}{a} \right)$$

$$i' = \sum \left(c_n \sin \frac{ns'}{a} + d_n \cos \frac{ns'}{a} \right)$$

worin für n der Reihe nach alle ganzen Zahlen zu setzen sind, so ergibt sich nach Art. 1, wenn man die Entfernung der Punkte s und s' von einander mit r bezeichnet, und die Winkel, welche ds und ds' mit der Richtung von r bilden, mit θ und θ' ,

$$\Omega = \int \frac{K ds'}{r} = \int \frac{ds'}{r} \sum (a_n \sin \frac{ns'}{a} + b_n \cos \frac{ns'}{a})$$

$$U = \int \frac{ds'}{r} \cos \theta \cos \theta' \cdot i' = \int \frac{ds'}{r} \cos \theta \cos \theta' \cdot \sum (c_n \sin \frac{ns'}{a} + d_n \cos \frac{ns'}{a}).$$

Ausserdem hat man noch die Art. 3 gefundene Gleichung

$$\frac{ds'}{ds'} = -\frac{1}{2} \frac{dK}{dt},$$

oder, durch Sinus- und Cosinusreihen ausgedrückt,

$$\frac{1}{a} \sum (c_n \cos \frac{ns'}{a} - d_n \sin \frac{ns'}{a}) = -\frac{1}{2} \sum \left(\frac{da_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns'}{a} + \frac{db_n}{dt} \cos \frac{ns'}{a} \right).$$

Es folgt hieraus, da diese Gleichung für alle Werthe von s' gelten soll,

$$c_n = -\frac{a}{2n} \cdot \frac{db_n}{dt}, \quad d_n = +\frac{a}{2n} \cdot \frac{da_n}{dt}.$$

Soll nun aus den gefundenen Ausdrücken für Ω und U die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche auf den Punkt s des geschlossenen Leitungsdrahts wirkt, so setze man $s' - s = \sigma$, und substituire $s + \sigma$ für s' und $d\sigma$ für ds' in den Ausdrücken von Ω und U . Man erhält alsdann

$$\Omega = \sum \int \frac{d\sigma}{r} \left(a_n \sin \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) + b_n \cos \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) \right)$$

$$U = \sum \int \frac{d\sigma}{r} \cos \theta \cos \theta' \cdot \left(c_n \sin \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) + d_n \cos \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) \right).$$

Entwickelt man hierin den Sinus und Cosinus der Summe, so erhält man

$$\sum \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} \cdot d\sigma}{r} + \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} \cdot d\sigma}{r}$$

$$\sum \left(c_n \cos \frac{ns}{a} - d_n \sin \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\cos \theta \cos \theta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} + \sum \left(c_n \sin \frac{ns}{a} + d_n \cos \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\cos \theta \cos \theta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}.$$

Hierin sind r , $\cos \theta$ und $\cos \theta'$ Functionen von σ , welche sich aus der Gleichung der Curve des Leitungsdrahts ergeben. Es folgt daraus, dass für jede Stellenzahl n die vier zwischen den Grenzen von $\sigma = \frac{1}{2}l$ bis $\sigma = 2\pi a - \frac{1}{2}l$ (wenn l die Länge desselben Stücks des Leitungsdrahts wie Art. 2 bezeichnet) zu nehmenden Integrale

$$\int \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos \theta \cos \theta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos \theta \cos \theta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}$$

durch die Gestalt der Leitercurve gegeben und bestimmt sind, deren Werthe daher kurz mit

$$N, N', M, M'$$

bezeichnet werden sollen. Man hat alsdann

$$\Omega = \sum (a_n N' - b_n N) \sin \frac{ns}{a} + (a_n N + b_n N') \cos \frac{ns}{a}$$

$$U = \sum (c_n M' - \partial_n M) \sin \frac{ns}{a} + (c_n M + \partial_n M') \cos \frac{ns}{a},$$

woraus nun die elektromotorischen Kräfte bestimmt werden können, nämlich

$$- 2 \frac{d\Omega}{ds} = - \frac{2}{a} \sum n \left((a_n N' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N') \sin \frac{ns}{a} \right)$$

$$- \frac{8}{cc} \cdot \frac{dU}{dt} = - \frac{8}{cc} \sum \left(\left(\frac{dc_n}{dt} \cdot M' - \frac{d\partial_n}{dt} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{dc_n}{dt} \cdot M + \frac{d\partial_n}{dt} \cdot M' \right) \cos \frac{ns}{a} \right)$$

oder, wenn in der letzteren Gleichung die oben gefundenen Werthe von c_n und ∂_n substituirt werden,

$$- \frac{8}{cc} \cdot \frac{dU}{dt} = + \frac{4a}{cc} \sum \frac{1}{n} \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M' \right) \cos \frac{ns}{a} \right).$$

8.

Bewegungsgleichung der Elektrizität in einem geschlossenen Leiter.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung der Elektrizität in einem geschlossenen Leiter auf dem Art. 4—5 bezeichneten Wege sind zunächst alle Kräfte aufzuzählen, welche auf die positive Elektrizität in einem Elemente ds des Leitungsdrahts wirken und die Grösse dieser Kräfte nach mechanischem Maasse auszudrücken.

1) Die *aus der Nähe* auf den Punkt s des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse von Art. 2 gefunden worden:

$$- 2 \frac{d\Omega}{ds} = - 4 \frac{dE}{ds} \cdot \log \frac{l}{a} - 4 \frac{d^2 E}{ds^2} \cdot l^2$$

$$- \frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = - \frac{46}{cc} \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{a} - \frac{4}{cc} \frac{d^2 i}{ds^2 dt} \cdot l^2.$$

Hierin kann nun aber nach dem vorhergehenden Artikel

$$E = \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right)$$

$$i = - \frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right)$$

substituirt werden, folglich

$$- 2 \frac{d\Omega}{ds} = - \frac{4}{a} \sum \left(n \log \frac{l}{a} - \frac{4}{16} \frac{n^2 l^2}{a^2} \right) \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a} \right)$$

$$- \frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = \frac{8}{cc} \sum \left(\frac{a}{n} \log \frac{l}{a} - \frac{4}{16} \frac{n l^2}{a} \right) \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right).$$

2) Die aus der Ferne auf den Punkt s des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse des vorhergehenden Artikels gefunden worden:

$$-2 \frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a} \sum n \left((a_n N' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N') \sin \frac{ns}{a} \right) \\ -\frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc} \sum_n^4 \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M' \right) \cos \frac{ns}{a} \right).$$

Aus der Nähe und aus der Ferne zusammen genommen sind also die elektromotorischen Kräfte, wenn

$$N' + 2 \log \frac{l}{a} - \frac{1}{8} \frac{n^2 l^2}{a^2} = N'' \\ M' + 2 \log \frac{l}{aa} - \frac{1}{8} \frac{n^2 l^2}{a^2} = M''$$

gesetzt wird,

$$-2 \frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a} \sum n \left((a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a} \right) \\ -\frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc} \sum_n^4 \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right).$$

Diese elektromotorischen Kräfte sind nun die Differenzen derjenigen Kräfte, welche auf die positive und negative elektrische Maasseinheit in dem Punkte s wirken. Da aber die auf die positive Maasseinheit wirkende Kraft der auf die negative Maasseinheit wirkenden, abgesehen von ihrer entgegengesetzten Richtung, gleich ist, so folgt hieraus, dass die Hälfte jener elektromotorischen Kräfte diejenigen Kräfte sind, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s wirken. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente ds des Leitungsdrahts enthalten sind, ist aber Art. 3 mit $\mathcal{E}ds$ bezeichnet worden; multiplicirt man daher die Hälfte der obigen elektromotorischen Kräfte mit $\mathcal{E}ds$, so findet man die Kräfte, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirken, nach mechanischem Maasse ausgedrückt,

$$= -\frac{\mathcal{E}ds}{a} \sum n \left((a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a} \right) \\ + \frac{2a \mathcal{E}ds}{cc} \sum_n^4 \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right).$$

3) Die von den ponderablen Leitertheilchen herrührende Widerstandskraft, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkt, war Art. 5 nach mechanischem Maasse ausgedrückt gefunden worden

$$= -\frac{1}{2\pi a \alpha k} \cdot \mathcal{E} \mathcal{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} ds,$$

worin

$$\frac{\mathcal{G}ds}{dt} = i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right),$$

wonach diese Kraft erhalten wird:

$$= + \frac{a\mathcal{G}ds}{4\pi aak} \cdot \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right).$$

Hiezu kommt endlich

4 die von Aussen her auf die positive Elektrizität im Element wirkende Kraft, welche nach Art. 5 (3);

$$= + \frac{1}{2} \mathcal{G}Sds$$

erhalten wird, wenn S hierin nur die von Aussen auf den Punkt s geübte elektromotorische Kraft bezeichnet. Wird nun S in Sinus-Cosinusreihen entwickelt

$$S = \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right)$$

so wird diese Kraft dargestellt

$$= + \frac{1}{2} \mathcal{G}ds \cdot \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right).$$

Da nun alle diese Kräfte nach *mechanischem Maasse*, d. h. in The derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderablen Masseinheit (Milligramm) in der Zeiteinheit (Secunde) die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt, so folgt daraus nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe dieser Kräfte dividirt durch die von ihnen der positiven Elektrizität Elemente ds , auf die sie wirken, ertheilte Beschleunigung, = $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$. Definition der *Masse* dieser Elektrizitätsmenge, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, ist, welche durch $\frac{1}{r} \mathcal{G}ds$ Milligramm bezeichnet worden. Multiplicirt man die erhaltene Gleichung mit $\frac{1}{\mathcal{G}ds} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2}$ und setzt

$$\left(\mathcal{G} \frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{di}{dt} = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) \right)$$

so erhält man die gesuchte Bewegungsgleichung der Elektrizität in einem geschlossenen Leitungsdrahte in folgender Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{a} \sum n \left((a_n N'' - b_n N') \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a} \right) \\ & + \frac{2a}{cc} \sum \frac{1}{n} \left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \cdot M'' + \frac{d^2a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2a_n}{dt^2} \cdot M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right) \\ & + \frac{a}{4\pi aak} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \end{aligned} \right\} = -\frac{a}{2r\mathcal{G}} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} \right)$$

Da N , N' , M , M' bloss von der Gleichung der Leitercurve abhängen, so können sie als Functionen von s dargestellt werden. In dem einzigen Falle, wenn jene Curve ein *Kreis* ist, hat jede von diesen Grössen einen für alle Punkte s gleichen Werth und es lässt sich dann die obige Gleichung in die folgenden beiden einfacheren Gleichungen auflösen, nämlich, wenn $\frac{cc}{4M'r^2} = \lambda$ gesetzt wird,

$$\frac{cc}{4\pi k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2\pi a M''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4\pi a M''(1+\lambda)} \cdot g_n = \frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{n^2 c^2 N}{2\pi a M''(1+\lambda)} \cdot b_n$$

$$\frac{cc}{4\pi k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2\pi a M''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4\pi a M''(1+\lambda)} \cdot f_n = -\frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2} - \frac{n^2 c^2 N}{2\pi a M''(1+\lambda)} \cdot a_n$$

Es wird hiedurch die Betrachtung des Falls einer *kreisförmigen Leitercurve* sehr vereinfacht und verdient deshalb besondere Berücksichtigung. In allen andern Fällen würden, bei weiterer Entwicklung, N , N' , M , M'' als Functionen von s ebenfalls in Sinus- und Cosinusreihen dargestellt werden müssen, wodurch die Gleichungen sehr an Einfachheit verlören.

9.

Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern von beliebiger Gestalt.

Es kommen häufig Betrachtungen und Anwendungen geschlossener Ketten vor, für welche die Kenntniss der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in einzelnen Punkten der Kette nicht erfordert wird, sondern die Kenntniss ihres *Mittelwerths* für die ganze Länge des Leitungsdrahts genügt. Bevor daher auf eine speciellere Entwicklung der Bewegungsgesetze der Elektrizität in einem *kreisförmigen* Leitungsdrahte eingegangen wird, sollen die eben gefundenen angewendet werden, um die Gleichung für die *Mittelwerthe* der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern *von beliebiger Gestalt* daraus abzuleiten.

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man die Glieder der im vorigen Artikel gefundenen allgemeinen Gleichung mit ds multiplicirt und sie sodann von $s = 0$ bis $s = 2\pi a$ integrirt. Sie vereinfacht sich aber wesentlich dadurch, dass *erstens* der Integralwerth der elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektrizität im Leitungsdrahte herrühren, nach einem bekannten Theoreme stets Null ist, und dass *zweitens* der Integralwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte

in der Regel als gegeben betrachtet werden darf. Man erhält hiennach *erstens*

$$\int_0^{2\pi a} \frac{ds}{a} \sum_n \left((a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a} \right) = 0$$

zweitens, wenn der gegebene Integralwerth der von Aussen herrührender elektromotorischen Kräfte mit S bezeichnet wird,

$$\int_0^{2\pi a} ds \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) = S . .$$

Da nun ferner, wenn

$$i_n = -\frac{a}{2n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right)$$

gesetzt wird, $i = \sum i_n$ war; so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int ds \cdot \frac{2a}{cc} \sum \frac{1}{n} \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right) \\ = -\frac{4}{cc} \int ds \sum M'' \frac{di_n}{dt} - \frac{4a}{cc} \sum \frac{1}{n} \int \frac{d^2 i_n}{ds dt} M ds . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int \frac{d^2 i_n}{ds dt} M ds = M \frac{di_n}{dt} - \int \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds ;$$

folglich

$$\int_0^{2\pi a} \frac{d^2 i_n}{ds dt} M ds = - \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds$$

wonach also

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi a} ds \cdot \frac{2a}{cc} \sum \frac{1}{n} \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right) \\ = -\frac{4}{cc} \int_0^{2\pi a} ds \sum M'' \frac{di_n}{dt} + \frac{4a}{cc} \sum \frac{1}{n} \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds . \end{aligned}$$

Fügt man endlich hinzu, dass

$$\begin{aligned} \int \frac{ads}{4\pi aak} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = -\frac{4}{2\pi aak} \int ids \\ \int \frac{ads}{2r\epsilon} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) = -\frac{4}{r\epsilon} \int \frac{di}{dt} ds , \end{aligned}$$

so erhält man folgende Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten $\frac{4}{2\pi a} \cdot S$ und $\frac{4}{2\pi a} \cdot \int_0^{2\pi a} ids$:

$$S = \frac{1}{\pi a k} \int_0^{2\pi a} i ds + \frac{8}{cc} \int_0^{2\pi a} ds \sum M'' \frac{di_n}{dt} - \frac{8a}{cc} \sum \frac{1}{n} \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds + \frac{2}{r\mathcal{E}} \int_0^{2\pi a} \frac{di}{dt} ds .$$

Diese Mittelwerthe kommen nun offenbar dann vorzüglich in Betracht, wenn in den verschiedenen Elementen des Leitungsdrahts entweder gar keine Verschiedenheit der elektrischen Bewegung statt findet, oder eine so geringe, dass sie ganz vernachlässigt werden kann. In allen diesen Fällen sind also i und $\frac{di}{dt}$ von s unabhängige Grössen, und es kann $i = i_0$, $\frac{di}{dt} = \frac{di_0}{dt}$, folglich, für $n > 0$, $\frac{di_n}{dt} = 0$ gesetzt werden, wonach

$$S = \frac{2\pi a}{\pi a k} i_0 + \left(\frac{8}{cc} \int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r\mathcal{E}} \right) \frac{di_0}{dt} ,$$

wo $\frac{2\pi a}{\pi a k} = w$ der Widerstand der ganzen Kette ist. Setzt man hierin

$$\frac{8}{cc} \int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r\mathcal{E}} = p$$

und schreibt i für i_0 , so erhält man

$$S = wi + p \frac{di}{dt} ,$$

worin S , i und $\frac{di}{dt}$ bloss Functionen der Zeit t sind. Durch Integration erhält man daraus

$$i = \frac{1}{p} e^{-\frac{w}{p}t} \int e^{\frac{w}{p}t} S dt .$$

10.

Bewegungsgesetze der Elektrizität in einem kreisförmigen Leitungsdrahte.

Wenn die Form eines geschlossenen Leiters gegeben ist, so lassen sich die Werthe von N , N' , M , M' , d. h. die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_{\frac{1}{2}l}^{\frac{3}{2}l} \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \int_{\frac{1}{2}l}^{\frac{3}{2}l} \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \int_{\frac{1}{2}l}^{\frac{3}{2}l} \frac{\cos \theta \cos \theta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \int_{\frac{1}{2}l}^{\frac{3}{2}l} \frac{\cos \theta \cos \theta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} ,$$

für jeden Punkt s des Leiters bestimmen. Zum Beispiel diene nun ein Leiter von der Form eines Kreises, dessen Halbmesser = a ist.

Bei dieser Kreisform ist der Abstand r zweier Punkte s u
gleich der Sehne des Bogens $\frac{s'-s}{a} = \frac{\sigma}{a}$; es ist also

$$r = 2a \sin \frac{\sigma}{2a}.$$

Ferner ist der Winkel θ , welchen das Element ds mit r bildet, dem
kel θ' gleich, welchen das Element ds' mit r bildet, und beide sind
Winkel gleich, welchen die Tangente des Kreises im Punkte s m
Sehne des Bogens $\frac{\sigma}{a}$ bildet, d. i.

$$\theta = \theta' = \frac{\sigma}{2a}.$$

Hieraus ergibt sich also

$$N = \frac{1}{2a} \int_{\frac{l}{2}}^{2\pi a - \frac{l}{2}} \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\sin \frac{\sigma}{2a}}, \quad N' = \frac{1}{2a} \int_{\frac{l}{2}}^{2\pi a - \frac{l}{2}} \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\sin \frac{\sigma}{2a}},$$

$$M = \frac{1}{2a} \int_{\frac{l}{2}}^{2\pi a - \frac{l}{2}} \frac{\left(\cos \frac{\sigma}{2a}\right)^2 \cdot \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\sin \frac{\sigma}{2a}} = N - \frac{1}{2a} \int_{\frac{l}{2}}^{2\pi a - \frac{l}{2}} \sin \frac{n\sigma}{a} \sin \frac{\sigma}{2a} d\sigma$$

$$M' = \frac{1}{2a} \int_{\frac{l}{2}}^{2\pi a - \frac{l}{2}} \frac{\left(\cos \frac{\sigma}{2a}\right)^2 \cdot \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\sin \frac{\sigma}{2a}} = N' - \frac{1}{2a} \int_{\frac{l}{2}}^{2\pi a - \frac{l}{2}} \cos \frac{n\sigma}{a} \sin \frac{\sigma}{2a} d\sigma.$$

Setzt man nun $\frac{\sigma}{2a} = z$, also

$$N = \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \frac{\sin 2nz \cdot dz}{\sin z}, \quad N' = \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \frac{\cos 2nz \cdot dz}{\sin z}, \quad M = N - \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \sin 2nz \cdot \sin z dz, \quad M' = N' - \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \cos$$

und beachtet dabei, dass

$$\int \frac{\sin 2nz \cdot dz}{\sin z} = 2 \int \cos (2n-1) z \cdot dz + 2 \int \cos (2n-3) z \cdot dz + \dots + 2 \int \cos$$

$$\int \frac{\cos 2nz \cdot dz}{\sin z} = -2 \int \sin (2n-1) z \cdot dz - 2 \int \sin (2n-3) z \cdot dz - \dots - 2 \int \sin$$

ist, so findet man, wenn man alle Integrale zwischen den Grenzen

$z = \frac{l}{4a}$ bis $z = \pi - \frac{l}{4a}$ nimmt,

$$N = 0$$

$$N' = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{l}{4a} + \frac{1}{2} \cos \frac{2l}{4a} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{(2n-1)l}{4a} \right) - 2 \log \tan \frac{l}{8a}.$$

Ferner findet man, da

$$\int \sin 2nz \cdot \sin z dz = \frac{1}{2} \frac{1}{2n-1} \sin (2n-1)z - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \sin (2n+1)z$$

$$\int \cos 2nz \cdot \sin z dz = \frac{1}{2} \frac{1}{2n-1} \cos (2n-1)z - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \cos (2n+1)z,$$

wenn auch diese Integrale zwischen den Grenzen von $z = \frac{l}{4a}$ bis $z = \pi - \frac{l}{4a}$ genommen werden,

$$M = 0$$

$$M' = N' + \frac{1}{2n+1} \cos (2n+1) \frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1} \cos (2n-1) \frac{l}{4a}.$$

Hieraus folgt endlich nach Art. 8

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{l}{4a} + \frac{1}{2} \cos \frac{2l}{4a} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos (2n-1) \frac{l}{4a} \right) - 2 \log \tan \frac{l}{8a} + 2 \log \frac{l}{a} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \\ & -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{l}{4a} + \frac{1}{2} \cos \frac{2l}{4a} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos (2n-1) \frac{l}{4a} \right) - 2 \log \tan \frac{l}{8a} + 2 \log \frac{l}{ca} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \\ & + \frac{1}{2n+1} \cos (2n+1) \frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1} \cos (2n-1) \frac{l}{4a}. \end{aligned}$$

Es bezeichnet aber hierin l die Länge des als geradlinig betrachteten Leiterelements ds , in dessen Mitte der betrachtete Punkt s liegt. Diese Länge ist innerhalb gewisser Grenzen willkürlich, nur ist die Wahl derselben dadurch beschränkt, dass sowohl $\frac{a}{l}$ als auch $\frac{l}{a}$ als verschwindend kleine Brüche müssen betrachtet werden können, was der Fall sein muss, wenn der Leiter als ein *linearer* betrachtet werden soll. Die Verschiedenheit der Werthe von l , die innerhalb dieser Grenzen möglich sind, haben auf die Werthe von N' und M' keinen merklichen Einfluss. Es kann daher

$$l = \sqrt{aa}$$

gesetzt werden, da dieser Werth bei jedem als *linear* zu betrachtenden Leiter innerhalb der angegebenen Grenzen liegen muss. Zugleich leuchtet ein, dass alsdann auch $\frac{l}{8a}$ für $\tan \frac{l}{8a}$ gesetzt werden kann. Setzt man noch Kürze halber

$$\frac{\pi^2 n^2}{8a} = 2 \log \nu$$

$$\frac{\pi^2 n^2}{8a} + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} - \frac{1}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} = 2 \log \mu$$

so ergibt sich

$$N' = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} + \frac{1}{2} \cos \frac{2}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} \right) + 2 \log \frac{8a}{\mu \nu}$$

$$M' = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} + \frac{1}{2} \cos \frac{2}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{a}{a}} \right) + 2 \log \frac{8a}{\mu \nu c a}.$$

Substituirt man nun die hier für einen kreisförmigen Leiter gefundenen Werthe von N , N'' , M , M'' in die Gleichungen am Schlusse des 8ten Artikels, so erhält man für die Bewegungen der Elektrizität in einem kreisförmigen Leiter folgende beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4\alpha M''(1+\lambda)} \cdot g_n = 0$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4\alpha M''(1+\lambda)} \cdot f_n = 0$$

worin N'' und M'' die eben angegebenen Werthe haben.

11.

Gleichgewicht der Elektrizität in einem kreisförmigen Leiter.

Für den Fall des Gleichgewichts der Elektrizität hat man in allen Theilen des Leiters

$$i = 0 \quad \text{und} \quad \frac{di}{dt} = 0.$$

Setzt man für i seinen Werth aus Art. 8 (3), so erhält man

$$-\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0$$

$$-\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0$$

woraus folgt

$$\frac{da_n}{dt} = 0, \quad \frac{db_n}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 b_n}{dt^2} = 0,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} = \frac{1}{n} \frac{d^2 a_n}{dt^2} = 0$ sein müsse auch für $n = 0$.

Die am Schlusse des vorhergehenden Artikels aufgestellten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende *Gleichgewichtsgleichungen* über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{nN''}{a} \cdot a_n - \frac{1}{2} g_n = 0$$

$$\frac{nN''}{a} \cdot b_n + \frac{1}{2} f_n = 0$$

wozu noch $g_n = 0$ hinzukommt. Es folgt hieraus als Bedingung des Gleichgewichts der Elektrizität, dass die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte, nämlich

$$S = \int ds \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) = 0$$

sein müsse, ganz in Uebereinstimmung mit dem bekannten Ohm'schen Gesetze, wonach die Stromintensität der Summe dieser Kräfte proportional ist und daher nur zugleich mit dieser Summe Null werden kann.

12.

Beharrliche Strömungen der Elektrizität in einem kreisförmigen Leiter.

Eine *beharrliche* Strömung wird die Bewegung der Elektrizität in einem Leiter genannt, wenn sie in jedem Punkte des Leiters immer gleich bleibt. Sie ist nur in einem geschlossenen Leiter möglich. Findet also eine solche *beharrliche* Strömung statt, so hat man für alle Punkte des geschlossenen Leiters

$$i = \text{Const},$$

folglich

$$\frac{di}{dt} = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 b_n}{dt^2} = 0,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $\frac{1}{n} \frac{d^2 a_n}{dt^2} = 0$, auch für $n = 0$, sein müsse.

Die am Schlusse von Art. 10 angeführten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende Bedingungsgleichungen für *beharrliche* Strömungen über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{1}{4\pi a a k} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 N''}{aa} \cdot a_n - \frac{n}{2a} g_n = 0$$

$$\frac{1}{4\pi a a k} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 N''}{aa} \cdot b_n + \frac{n}{2a} f_n = 0$$

wozu noch $\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} = \text{Const}$ für $n = 0$, folglich $a_0 = \text{Const}$ hinzukommt.

Hieraus folgt, dass bei *beharrlicher* Strömung die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte

$$S = \int ds \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) = \frac{2}{a} \int ds \sum n N'' \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a} \right) \\ - \frac{a}{2\pi a a k} \int ds \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right)$$

sein soll; folglich, da

$$-\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = i$$

und da

$$\int ds \sum n N'' \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a} \right) = 0$$

ist, wie man leicht sieht wenn man beachtet, dass a_0 einen constanten Werth hat und folglich $na_n = 0$ ist für $n = 0$,

$$S = \frac{1}{\pi a k} \cdot \int i ds .$$

Nun ist aber $\frac{1}{2\pi a} \cdot \int i ds = J$ der *Mittelwerth der Stromintensität im ganzen Leiter*, und $\frac{2\pi a}{\pi a k} = w$ ist der *Widerstand des ganzen Leiters*; folglich $S = Jw$, d. i. die Summe der äusseren elektromotorischen Kräfte im ganzen Leiter soll dem Producte des Widerstands in die mittlere Stromintensität des ganzen Leiters gleich sein, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze, dass das Product des Widerstands in die Stromstärke die elektromotorische Kraft der Kette giebt, was mit obigem Resultate identisch ist, wenn man dabei voraussetzt, dass gar keine Verschiedenheiten der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten des Leiters statt finden. Dies braucht nun zwar nach obiger Theorie nicht nothwendig der Fall zu sein; soll aber eine Verschiedenheit der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten mit der Beharrlichkeit des Stroms in jedem einzelnen Punkte bestehen, so müssen nach obiger Theorie die von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte *mit der Zeit proportional* sich ändern, ein Fall der in der Wirklichkeit nicht vorkommt und daher bei dem auf die Erfahrung begründeten Ohm'schen Gesetze ausser Betracht geblieben ist. Es leuchtet nämlich ein, dass wenn

$$i = - \frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right)$$

in verschiedenen Punkten des Leiters verschiedene Werthe haben soll, wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von n entweder $\frac{da_n}{dt}$ oder $\frac{db_n}{dt}$ einen von Null verschiedenen Werth $= A$ haben müsste, woraus entweder $a_n = At + B$ oder $b_n = At + B$ folgte. Substituirt man nun im einen Falle $At + B$ für a_n in der ersten von den beiden oben gefundenen Bedingungsgleichungen beharrlicher Strömung, so erhält man

$$\frac{1}{4\pi a k} \cdot A + \frac{n^2 N''}{a a} (At + B) - \frac{n}{2a} g_n = 0 ,$$

woraus folgt, dass g_n mit der Zeit *proportional* sich ändert. Substituirt man im andern Falle $At + B$ für b_n in der zweiten Bedingungsgleichung,

so folgt auf gleiche Weise, dass f_n mit der Zeit *proportional* sich ändert. In beiden Fällen würde also auch die von Aussen wirkende elektromotorische Kraft

$$S_n = f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}$$

mit der Zeit *proportional* sich ändern.

13.

Bewegungsgesetze der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektrizität in einem kreisförmigen Leiter.

Die Theorie der Bewegung der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektrizität in einem Leiter umfasst die wichtige Lehre von der *Fortpflanzung*, insbesondere die Fragen, ob die Bewegungsfortpflanzung durch die Elektrizität in Leitern, ebenso wie die durch den Lichtäther oder durch die Luft, von *Wellen* vermittelt werde, ferner welche *Geschwindigkeit* diese Wellen besitzen, und endlich überhaupt welche *Gesetze* von dieser Wellenverbreitung gelten. Die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts kann nämlich auf einen kleinen Theil des Leiters beschränkt sein, und wenn darauf, ohne äussere Einwirkung, *ähnliche* Störungen des Gleichgewichts *successiv* in allen übrigen Theilen des Leiters von selbst eintreten, so bezeichnet man diese Uebertragung mit dem Namen *Fortpflanzung*, und das Fortgepflanzte mit dem Namen *Welle*.

Soll die Elektrizität im Leiter sich selbst überlassen bleiben, so sind *alle von Aussen her stammenden Kräfte*, welche auf die Elektrizität im Leiter wirken würden, = 0 zu setzen. Man erhält daher die Bewegungsgleichungen für diesen Fall, wenn man in den Gleichungen am Schlusse von Art. 10

$$f_n = 0 \quad \text{und} \quad g_n = 0$$

setzt, nämlich folgende:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} \cdot a_n = 0$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} \cdot b_n = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nun durch Integration, wenn

$$\frac{c}{16\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} = \varepsilon$$

$$\frac{n^2 c^2 N''}{2\alpha M''(1+\lambda)} = m^2 + \varepsilon^2$$

gesetzt wird,

$$a_n = A e^{-\varepsilon t} \cdot \sin m(t - A')$$

$$b_n = B e^{-\varepsilon t} \cdot \sin m(t - B'),$$

wo A, A', B, B' die Integrationsconstanten sind, welche aus der gegebenen ursprünglichen Störung des Gleichgewichts zu bestimmen sind.

Ist nämlich die ursprüngliche Vertheilung der freien Elektrizität im Leiter durch folgende Gleichung gegeben, wenn E_0 den Werth der Dichtigkeit E für $t = 0$ bezeichnet,

$$E_0 = \sum \left(a_n^0 \sin \frac{ns}{a} + b_n^0 \cos \frac{ns}{a} \right)$$

und die ursprünglichen Strömungen in allen Theilen des Leiters durch folgende Gleichung, wenn i_0 den Werth der Stromintensität i für $t = 0$ bezeichnet,

$$i_0 = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{da_n^0}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{db_n^0}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right),$$

worin $a_n^0, b_n^0, \frac{da_n^0}{dt}, \frac{db_n^0}{dt}$ bekannte Werthe haben, so erhält man durch Einsetzen dieser Werthe in obige Gleichung für $t = 0$

$$a_n^0 = -A \sin mA'$$

$$b_n^0 = -B \sin mB'$$

und, nachdem man obige Gleichungen differentiirt hat,

$$\frac{da_n^0}{dt} = mA \cos mA' - \varepsilon a_n^0$$

$$\frac{db_n^0}{dt} = mB \cos mB' - \varepsilon b_n^0.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich folgende Werthe der Integrationsconstanten:

$$A = \sqrt{\left(a_n^0 \right)^2 + \frac{1}{m^2} \left(\varepsilon a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right)^2}$$

$$B = \sqrt{\left(b_n^0 \right)^2 + \frac{1}{m^2} \left(\varepsilon b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right)^2}$$

$$A' = -\frac{1}{m} \arcsin \frac{a_n^0}{A}$$

$$B' = -\frac{1}{m} \arcsin \frac{b_n^0}{B}.$$

Setzt man die beiden letzteren Werthe in die obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$a_n = Ae^{-\epsilon t} \sin \left(mt + \arcsin \frac{a_n^0}{A} \right)$$

$$b_n = Be^{-\epsilon t} \sin \left(mt + \arcsin \frac{b_n^0}{B} \right)$$

und hiemit das Gesetz der *Vertheilung der freien Elektrizität* im Leiter:

$$E = \Sigma e^{-\epsilon t} \cdot \left(A \sin \frac{ns}{a} \sin \left(mt + \arcsin \frac{a_n^0}{A} \right) + B \cos \frac{ns}{a} \sin \left(mt + \arcsin \frac{b_n^0}{B} \right) \right),$$

oder, wenn der Sinus der Summe zweier Bögen entwickelt wird,

$$= e^{-\epsilon t} \cdot \left(a_n^0 \sin \frac{ns}{a} \cos mt + \sqrt{(B^2 - b_n^0{}^2)} \cos \frac{ns}{a} \sin mt + b_n^0 \cos \frac{ns}{a} \cos mt + \sqrt{(A^2 - a_n^0{}^2)} \sin \frac{ns}{a} \sin mt \right).$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} a_n^0 &= p + q & b_n^0 &= p' + q' \\ \sqrt{(B^2 - b_n^0{}^2)} &= p - q & \sqrt{(A^2 - a_n^0{}^2)} &= p' - q' \end{aligned}$$

wodurch p, q, p', q' bestimmt werden, nämlich

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left(a_n^0 + \frac{1}{m} \left(\epsilon b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \right) \\ q &= \frac{1}{2} \left(a_n^0 - \frac{1}{m} \left(\epsilon b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \right) \\ p' &= \frac{1}{2} \left(b_n^0 + \frac{1}{m} \left(\epsilon a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \right) \\ q' &= \frac{1}{2} \left(b_n^0 - \frac{1}{m} \left(\epsilon a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \right), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\Sigma e^{-\epsilon t} \cdot \left(q \sin \left(\frac{ns}{a} - mt \right) + p' \cos \left(\frac{ns}{a} - mt \right) \right) + \Sigma e^{-\epsilon t} \cdot \left(p \sin \left(\frac{ns}{a} + mt \right) + q' \cos \left(\frac{ns}{a} + mt \right) \right),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$\Sigma \sqrt{(p'p + qq)} \cdot e^{-\epsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} - mt + \arcsin \frac{p'}{q} \right) + \Sigma \sqrt{(pp + q'q')} \cdot e^{-\epsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} + mt + \arcsin \frac{q'}{p} \right).$$

Auf gleiche Weise findet man das Gesetz der *Strömung der Elektrizität* im Leiter, nämlich:

$$\Sigma \sqrt{(PP + QQ)} \cdot e^{-\epsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} - mt + \arcsin \frac{P'}{Q} \right) + \Sigma \sqrt{(PP + Q'Q')} \cdot e^{-\epsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} + mt + \arcsin \frac{Q'}{P} \right)$$

worin P, Q, P', Q' folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{a}{4n} \left(\frac{db_n^0}{dt} + \frac{1}{m} \left((m^2 + \epsilon^2) a_n^0 + \epsilon \frac{da_n^0}{dt} \right) \right) \\ Q &= -\frac{a}{4n} \left(\frac{db_n^0}{dt} - \frac{1}{m} \left((m^2 + \epsilon^2) a_n^0 + \epsilon \frac{da_n^0}{dt} \right) \right) \\ P' &= +\frac{a}{4n} \left(\frac{da_n^0}{dt} + \frac{1}{m} \left((m^2 + \epsilon^2) b_n^0 + \epsilon \frac{db_n^0}{dt} \right) \right) \\ Q' &= +\frac{a}{4n} \left(\frac{da_n^0}{dt} - \frac{1}{m} \left((m^2 + \epsilon^2) b_n^0 + \epsilon \frac{db_n^0}{dt} \right) \right). \end{aligned}$$

Vergleichung mit dem Ohm'schen Gesetze.

Es ist schon Art. 6 erörtert worden, wovon es abhängt, ob das von Ohm für *beharrliche* Ströme aufgestellte Gesetz auch auf *veränderliche* Ströme angewendet werden dürfe. Es hing dies von der Grösse $\lambda = \frac{cc}{8 \log \frac{l}{a} \cdot r\mathcal{E}}$ ab; überall wo diese Grösse in Betracht kommt und ihr

Werth nicht verschwindet, findet das Ohm'sche Gesetz entweder gar keine oder nur eine approximative Anwendung. Diese Grösse λ ist Art. 8, mit Rücksicht auf den Art. 6 noch nicht berücksichtigten Einfluss, welchen entferntere Theile der Kette darauf haben, genauer bestimmt worden, nämlich $\lambda = \frac{cc}{4M''r\mathcal{E}}$, wo der für $2 \log \frac{l}{a}$ in Art. 6 gesetzte Werth M'' genau definiert und Art. 10 für einen kreisförmigen Leiter bestimmt worden ist. Diese Grösse λ , oder, da der Werth des Factors $\frac{cc}{4M''}$ als bekannt betrachtet werden darf, die Grösse des Products $r\mathcal{E}$, erlangt dadurch, dass sie über die Anwendbarkeit des Ohm'schen Gesetzes entscheidet, in der Lehre von der Bewegung der Elektrizität in Leitern eine besondere Wichtigkeit, deren Grund sich aus der *physischen Bedeutung* des Products $r\mathcal{E}$ leicht erkennen lässt.

Die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektrizitätsmenge ist nämlich, in der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit ausgedrückt, mit \mathcal{E} bezeichnet und ihre *Masse in Milligrammen* $= \frac{1}{r} \mathcal{E}$ gesetzt worden. Aus der Definition der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit (wonach nämlich diejenige Elektrizitätsmenge zur Maasseinheit genommen wird, welche auf eine gleiche in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt, d. i. eine Kraft, welche der Masse eines Milligramms in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt) geht aber hervor, dass $r\mathcal{E}$ die Kraft ist, welche *ein Milligramm* positiver oder negativer Elektrizität auf ein gleiches Milligramm Elektrizität in der Einheit der Entfernung ausübt. Hieraus folgt, dass das Product $r\mathcal{E}$ die Kraft bedeutet, welche *die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektrizität*, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, auf *ein Milligramm* positiver Elektrizität in der Einheit der Entfernung ausüben würde.

Durch die Art. 8 ff. gegebene Entwicklung der Bewegungsgesetze der Elektrizität in einem geschlossenen Leiter wird nun der Einfluss dieser Grösse λ oder des Products $r\mathcal{E}$ näher bestimmt. Aus Art. 11 und 12 geht zunächst hervor, dass die Gesetze des *Gleichgewichts* und der *beharrlichen Ströme* der Elektrizität in Leitern ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze sind, weil die Grösse λ oder $r\mathcal{E}$ dabei gar nicht in Betracht kommt, während aus Art. 13 hervorgeht, dass die Gesetze der *Fortpflanzung*, oder im Allgemeinen die Gesetze aller nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen*, zunächst von den Werthen m und ϵ und dadurch mittelbar von λ oder $r\mathcal{E}$ wesentlich abhängig sind. Es folgt daraus, dass von der Grösse λ oder dem Producte $r\mathcal{E}$ (und dadurch also mittelbar, wenn die in der Längeneinheit eines Leiters enthaltene Elektrizitätsmenge nach *elektrostatischer Maasseinheit* bekannt wäre, von der ganzen *Masse* der im Leiter vorhandenen Elektrizität in Milligrammen) nur aus solchen Beobachtungen Kenntniss erlangt werden kann, welche bestimmte *Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze* in den nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen* der Elektrizität in Leitern nachweisen.

Es leuchtet ein, welche Wichtigkeit *genaue Beobachtungen über Bewegungsänderungen oder über Bewegungsfortpflanzungen durch die Elektrizität in Leitern* hiedurch gewinnen; denn gelänge es aus solchen Beobachtungen irgend eine *Abweichung vom Ohm'schen Gesetze* wirklich nachzuweisen, so würde dieses Resultat zur Kenntniss des Werths des Products $r\mathcal{E}$ führen, das heisst zur Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf *ein Milligramm* Elektrizität gehen, wenn die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene Zahl *elektrostatischer Maasseinheiten* bekannt ist.

Es sollen zunächst die Gesetze *elektrischer Wellenbewegungen* in kreisförmigen Leitern nach Art. 13 näher entwickelt werden, um zu prüfen, ob daraus ein bestimmter Leitfadern für die *Ausführung solcher Beobachtungen* entnommen werden könne; sodann, wenn dies nicht der Fall wäre, soll geprüft werden, worin der Grund davon liege, und ob es andere elektrische Bewegungen in kreisförmigen Leitern gebe, die sich besser als die *Wellenbewegung* dazu eignen.

Erregungen in einem kreisförmigen Leiter.

aus den besetzten Gesetzen ergibt sich, dass alle Bewegungen in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen, wenn man eine beliebige Störung des Gleichgewichts zu einer Zeit $t = 0$ an einer Reihe *rückwärts* schreitender Wellenzüge Q und Q' an der *ersten* Wellenzug jeder der beiden Reihen Q und Q' ansetzt, nämlich aus einer positiven und aus einer negativen Welle zusammen die ganze Kreisperipherie einnehmen; der Wellenzug jeder Reihe besteht aus vier abwechselnd positiven und negativen Wellen, die zusammen den ganzen Kreis einnehmen; der Wellenzug Q besteht aus sechs Wellen u. s. w.

Wenn man die Summen, durch welche Art. 13 die Dichtigkeit der Elektricität E und die Stromintensität i dargestellt worden sind, in ihre Glieder auf und bezeichnet diese Glieder nach ihrer Ordnung mit E_n und i_n , so ist

$$E_n = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \arctan \frac{p'}{q}\right) + \sqrt{pp + q'q'} \cdot e^{-\epsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \arctan \frac{p}{q}\right)$$

$$Q_n = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \arctan \frac{p'}{q}\right) + \sqrt{PP + Q'Q'} \cdot e^{-\epsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \arctan \frac{p}{q}\right)$$

Die ersten Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit mt proportional ändert enthalten, den *ersten vorwärts* schreitenden Wellenzug, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit mt proportional ändert enthalten, den *ersten rückwärts* schreitenden Wellenzug darstellen. Der erste vorwärts schreitende Wellenzug besteht aber aus einer *positiven Welle*, welche im Augenblicke $t = -\frac{1}{m} \arctan \frac{p}{q}$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier positiver Elektricität hervorbringt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier negativer Elektricität hervorbringt. Beide Wellen zusammen nehmen aber die ganze Kreisperipherie ein. Dasselbe gilt von dem ersten rückwärts schreitenden Wellenzuge, welcher aus einer *positiven Welle* besteht, welche im Augenblicke $t = -\frac{1}{m} \arctan \frac{q'}{p}$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt.

Ferner ist

$$\begin{aligned} & p'p' + qq) \cdot e^{-\epsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} - mt + \text{arc tg} \frac{p'}{q}\right) + \sqrt{(pp + q'q')} \cdot e^{-\epsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} + mt + \text{arc tg} \frac{q}{p}\right) \\ & (PP + QQ) \cdot e^{-\epsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} - mt + \text{arc tg} \frac{P'}{Q}\right) + \sqrt{(PP + Q'Q')} \cdot e^{-\epsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} + mt + \text{arc tg} \frac{Q}{P}\right). \end{aligned}$$

wovon die ersteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s - \frac{1}{2}amt)$ proportional ändert enthalten, den *zweiten vorwärts* schreitenden Wellenzug, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s + \frac{1}{2}amt)$ proportional ändert enthalten, den *zweiten rückwärts* schreitenden Wellenzug darstellen. Jener vorwärts schreitende Wellenzug besteht aus 4 Wellen, von denen im Augenblicke $t = \frac{1}{m} \text{arc tang} \frac{p'}{q}$ die erste positive von $s = 0$ bis $s = \frac{1}{2}\pi a$, die zweite negative von $s = \frac{1}{2}\pi a$ bis $s = \pi a$, die dritte positive von $s = \pi a$ bis $s = \frac{3}{2}\pi a$, die vierte negative von $s = \frac{3}{2}\pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt. Dasselbe gilt von den 4 Wellen des rückwärts schreitenden Wellenzugs im Augenblicke $t = -\frac{1}{m} \text{arc tang} \frac{q'}{p}$.

Auf gleiche Weise ergeben sich die dritten Wellenzüge beider Reihen aus E_3 und i_3 u. s. f.

Die *Intensitäten* dieser verschiedenen Wellenzüge, welche nach den Regeln der Wellenlehre proportional mit $\frac{1}{r}$ zu setzen sind, nehmen während der Fortpflanzung ab und zwar jeder Wellenzug in der Zeit t im Verhältniss

$$1 : e^{-2\epsilon t}.$$

Diese Abnahme ist nach der Stellenzahl n der Wellenzüge verschieden, weil der Werth von ϵ mit dem Werthe von n sich ändert; denn es war

$$\epsilon = \frac{cc}{46\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)}$$

$$\lambda = \frac{cc}{4M''r\mathcal{G}}$$

und hierin war nach Art. 10

$$\begin{aligned} M'' = & -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{2} \cos \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right) + 2 \log \frac{8a}{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{nn\alpha}{a} \\ & + \frac{1}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} - \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{a}}, \end{aligned}$$

woraus, wenn $\frac{\alpha}{a}$ sehr klein ist,

$$\text{für } n = 1, \quad M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 6,666 \dots$$

$$\text{für } n = 2, \quad M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 7,466 \dots$$

u. s. w. folgt. Bezeichnet w' den Widerstand der Längeneinheit des Leiters $= \frac{1}{\pi a k}$, und wird $\lambda = 0$ gesetzt, d. h. beschränkt man sich auf diejenigen Fälle, wo das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet, so ergibt sich in der Zeiteinheit eine Intensitätsabnahme in einem Verhältnisse, welches für die ersten Wellenzüge, für welche $n = 1$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'cc}{46 \log \frac{8a}{\alpha} - 58,38 \dots}}$$

für die zweiten Wellenzüge, für welche $n = 2$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'cc}{46 \log \frac{8a}{\alpha} - 59,788 \dots}}$$

ist, u. s. w. Man sieht hieraus, dass eine desto schnellere Abnahme statt findet, je grösser der Widerstand der Längeneinheit des Leiters, je dicker der Leiter im Vergleich zu seiner Länge und je grösser die Stellenzahl n des Wellenzugs ist, das heisst, je kleiner die Wellen sind.

16.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenzüge in einem kreisförmigen Leiter.

Es ergibt sich, wie oben gezeigt, aus Art. 13, dass die Bewegungen der Elektrizität in einem kreisförmigen Leiter nach jeder Störung des Gleichgewichts sich in Wellenzüge, deren Fortpflanzung durch einfache Gesetze bestimmt ist, auflösen lassen, ebenso, wie dies bei vielen andern Körpern der Fall ist. Bei manchen Körpern, wie z. B. bei der Luft in einer kreisförmigen Röhre, kommt aber noch hinzu, dass diese Wellenzüge durch die Fortpflanzung gar nicht verändert werden, dass namentlich keine Intensitätsabnahme statt findet, und dass ausserdem sämtliche Wellenzüge *mit gleicher Geschwindigkeit* fortgepflanzt werden, woraus folgt, dass sämtliche vorwärts schreitende, oder sämtliche rückwärts schreitende Wellenzüge sich zu einem einzigen Wellenzug *zusammensetzen*, der ebenfalls unverändert und mit der nämlichen Geschwindigkeit, wie die einzelnen Wellenzüge aus denen er besteht, fortgepflanzt wird. Ein solcher zusammengesetzter Wellenzug besteht aber aus *zusammengesetzten Wellen*, die an Grösse, Form und Intensität von einander sehr verschieden sein können. Solche *zusammengesetzte Wellen*, welche in Folge gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller ihrer Bestandtheile immer auf gleiche Weise zusammengesetzt bleiben, haben

Beobachtungsobject eine besondere physische Bedeutung und werden *im engeren Sinne* genannt.

In diesem *engeren Sinne* würden also elektrische Wellen in einem eisförmigen Leiter, in welchem das elektrische Gleichgewicht *gestört* worden ist, schon wegen der verschiedenen Intensitätsabnahme der verschiedenen elementaren Wellenzüge nicht statt finden, noch weniger, wenn den verschiedenen elementaren Wellenzügen auch noch *verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* zukommen.

Da die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, wo Wellen im *engeren Sinne* stattfinden, für die Kenntniss des *Fortpflanzungsmediums* von grösster Wichtigkeit ist, hat die Frage danach in Betreff der *Elektricität* besonderes Interesse erweckt, und es sollen daher die aus Art. 13 sich dar- ergebenden Resultate näher betrachtet werden.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* der verschiedenen elementaren Wellenzüge werden aus den Art. 13 entwickelten Formeln gleich der *Abnahme* oder *Abnahme* gefunden, welche *s* erhalten muss, wenn in *1* Werthen von E_n und i_n beim Wachsthum der Zeit *t* um *1* die Bogen- rthe unter dem Sinuszeichen unverändert bleiben sollen, d. i.

$$= \frac{m a}{n} .$$

er, wenn man für *m* seinen Werth aus Art. 13

$$m = \sqrt{\left(\frac{n^2 c^2 N''}{16 \pi a^2 M''^2 (1+\lambda)} - \left(\frac{c c}{16 \pi a^2 M''^2 (1+\lambda)} \right)^2 \right)}$$

zt,

$$= \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{N''}{M''^2 (1+\lambda)} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} \right)}$$

in, wie oben, $w' = \frac{1}{\pi a a k}$ gesetzt ist. Beschränkt man sich auf die *lle*, wo $\lambda = 0$ gesetzt werden kann, das heisst wo das Ohm'sche *setz* Anwendung findet, so reducirt sich der Ausdruck dieser *Fort- pflanzungsgeschwindigkeit* auf

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{N''}{M''^2} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2} \right)}$$

in die Werthe von N'' und M'' auf folgende Weise bestimmt werden:

$$= 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 4 \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right) - \frac{n^2 \alpha}{8a}$$

$$= 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 4 \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right) - \frac{n^2 \alpha}{8a}$$

$$- 2 - \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} .$$

Hieraus ergibt sich also, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die verschiedenen Wellenzüge nach Verschiedenheit ihrer Stellenzahl n verschieden ist, und es würde nur noch die Frage sein, ob die Differenzen dieser verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht unter gewissen Verhältnissen so klein wären, dass sie näherungsweise als verschwindend betrachtet werden dürften, und welches der Grenzwert sei, dem sich dann alle diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten näherten.

Aus den angeführten Werthen ergibt sich nun wirklich, dass so lange die Stellenzahl n nicht über diejenigen Werthe hinausgeht, für welche $\frac{mnc}{a}$ gegen 1 als verschwindend betrachtet werden kann,

$$\frac{N''}{M''} = 1 + \frac{8nn}{(4nn-1)M''}$$

gesetzt werden darf. Für grosse Werthe von M'' , für welche der Bruch $\frac{8nn}{(4nn-1)M''}$ gegen 1 verschwindet, und für kleine Werthe des Widerstands des ganzen Leiters, für welche der Bruch $\frac{a^2c^2w'^2}{48n^2M''^2}$ gegen 1 verschwindet*), ist daher $\frac{c}{\sqrt{2}}$ der gesuchte Grenzwert, dem sich alle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nähern, und dieser Grenzwert ist, für den gegebenen Werth $c = 439450 \cdot 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$,

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310740 \cdot 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$

d. i. eine Geschwindigkeit von 41950 Meilen in der Secunde.

Diese Geschwindigkeit hat schon Kirchhoff für die Fortpflanzung elektrischer Wellen gefunden und bemerkt: »dass sie sowohl unabhängig von dem Querschnitt, als auch von der Leitungsfähigkeit des Drahts, als auch endlich von der Dichtigkeit der Elektrizität wäre; auch dass ihr Werth von 41950 Meilen in einer Secunde sehr nahe dem der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume gleichkommt.« Könnte diese nahe Uebereinstimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen mit der des Lichtes als eine Andeutung eines inneren Zusammenhangs beider Lehren angesehen werden, so würde sie bei der

*) Der Bruch $\frac{a^2c^2w'^2}{48n^2M''^2}$ kann gegen 1 als verschwindend betrachtet werden, wenn für grosse Werthe von M'' diejenige Geschwindigkeit, welche nach *absoludem magnetischen Widerstandsmaasse* den Widerstand des ganzen Leiters ausdrückt, d. i. $\frac{\pi c}{4} acc'$, im Verhältniss zur Geschwindigkeit c sehr klein ist.

grossen Wichtigkeit, welche die Erforschung eines solchen Zusammenhangs hat, das grösste Interesse in Anspruch nehmen. Es leuchtet aber ein, dass dabei vor Allem die wahre Bedeutung, die in Beziehung auf die Elektrizität jener Geschwindigkeit zukommt, in Betracht gezogen werden muss, welche nicht der Art zu sein scheint, dass sich grosse Erwartungen daran knüpfen liessen.

Denn die Annäherung der wahren Fortpflanzungsgeschwindigkeit an jenen Grenzwert, der mit der Geschwindigkeit des Lichts übereinstimmt, setzt, wie eben gezeigt worden, nicht bloss einen im Vergleich zu seiner Länge sehr dünnen Leitungsdraht voraus, sondern auch, dass dieser lange und dünne Leitungsdraht einen sehr kleinen Widerstand besitze. Es leuchtet hieraus ein, dass grössere Annäherung an jenen Grenzwert nur selten, grössere Abweichungen davon sehr häufig vorkommen werden. Hierüber lässt sich am leichtesten eine Uebersicht durch Beispiele gewinnen.

Wir wählen zu Beispielen drei kreisförmige Kupferdrähte, deren Kreishalbmesser der Reihe nach

$$a = 1000, \quad 1000000, \quad 1000000 \text{ Millimeter}$$

und deren Querschnitt der Reihe nach

$$\pi a a = 1, \quad 1, \quad \frac{1}{10^6} \text{ Quadratmillimeter}$$

gross sei. Der Widerstand dieser Drähte, wie er durch Messung nach absolutem magnetischen Widerstandsmaasse gefunden wird, kann (siehe Abhandlungen d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Bd. 5 Art. 9) in runder Zahl $W = \frac{2\pi a}{\pi a a} \cdot 2 \cdot 10^6$ gesetzt werden. Nach bekannter Relation zwischen magnetischem und mechanischem Widerstandsmaasse ist aber $V = \frac{1}{2} \pi c c a w'$, oder $\frac{1}{128} a^2 c^2 w'^2 = \frac{W^2}{8\pi^2 c^2}$, wonach

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2}\right)} = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}\right)} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Hienach ist folgende Tafel berechnet.

n	1. Draht	2. Draht.	3. Draht.
	$a = 1000$ $\pi a a = 1$ $W = 4 \cdot 10^9 \cdot \pi$	$a = 1000000$ $\pi a a = 1$ $W = 4 \cdot 10^{12} \cdot \pi$	$a = 1000000$ $\pi a a = \frac{1}{4}$ $W = 4 \cdot 10^{12} \cdot \pi$
1	$N'' = 15,119$ $M'' = 12,452$ $\frac{N''}{M''} = 1,214$ $W^2 = \frac{1}{11970000}$ $\frac{c'c'}{cc} = 1,214$	$= 28,935$ $= 25,268$ $= 1,145$ $= 0,0166$ $= 1,128$	$= 31,605$ $= 28,938$ $= 1,092$ $= 1,2364$ $= -0,0443$
2	$N'' = 13,786$ $M'' = 11,652$ $\frac{N''}{M''} = 1,183$ $W^2 = \frac{1}{52450000}$ $\frac{c'c'}{cc} = 1,183$	$= 27,601$ $= 25,468$ $= 1,084$ $= 0,00408$ $= 1,080$	$= 31,062$ $= 28,928$ $= 1,074$ $= 0,3093$ $= 0,7644$
3	$N'' = 12,986$ $M'' = 10,929$ $\frac{N''}{M''} = 1,188$ $W^2 = \frac{1}{108800000}$ $\frac{c'c'}{cc} = 1,188$	$= 26,801$ $= 24,747$ $= 1,083$ $= 0,00192$ $= 1,081$	$= 30,262$ $= 28,205$ $= 1,073$ $= 0,1446$ $= 0,9283$
4	$N'' = 12,414$ $M'' = 10,383$ $\frac{N''}{M''} = 1,196$ $W^2 = \frac{1}{166200000}$ $\frac{c'c'}{cc} = 1,197$	$= 26,230$ $= 24,198$ $= 1,084$ $= 0,00113$ $= 1,083$	$= 29,690$ $= 27,659$ $= 1,073$ $= 0,0846$ $= 0,9889$
5	$N'' = 11,970$ $M'' = 9,950$ $\frac{N''}{M''} = 1,203$ $W^2 = \frac{1}{239000000}$ $\frac{c'c'}{cc} = 1,203$	$= 25,785$ $= 23,765$ $= 1,085$ $= 0,00075$ $= 1,084$	$= 29,246$ $= 27,226$ $= 1,074$ $= 0,0559$ $= 1,0183$

Aus den Werthen von $\frac{c'c'}{cc}$ in dieser Tafel, welche die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\frac{c'}{\sqrt{2}}$ in Theilen des Quadrats des Grenzwerts $\frac{c}{\sqrt{2}}$ angeben, stellen sich beträchtliche Verschiedenheiten schon bei den ersten 5 Wellenzügen, auf welche die Tafel beschränkt ist, ein; bei dem dritten Draht hat $\frac{c'c'}{cc}$ für $n = 1$ sogar einen *negativen* Werth, so wird hier also der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ersten Wellenzugs *imaginär* und es lassen sich daher die Gesetze der Bewegungsänderungen in diesem Drahte nach einer Störung des Gleichgewichts gar nicht in Form fortgeplanter Wellenzüge auffassen, sondern bedürfen einer andern Form, welche die Bewegungsänderungen als eine blosse Annäherung an den Gleichgewichtszustand darstellt, die mit dem Namen *Absorption* bezeichnet werden kann, und da sie für lange und dünne Leitungsdrähte von grossem Widerstande, namentlich also für Telegraphendrähte, von besonderer Wichtigkeit ist, nähere Betrachtung verdient.

17.

Absorption elektrischer Bewegungen in einem kreisförmigen Leiter.

Bei der Art. 13 gegebenen Integration der beiden partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung der in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen Elektrizität, nämlich der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + 2\epsilon \frac{da_n}{dt} + (m^2 + \epsilon^2) a_n &= 0 \\ \frac{d^2 b_n}{dt^2} + 2\epsilon \frac{db_n}{dt} + (m^2 + \epsilon^2) b_n &= 0, \end{aligned}$$

ist in den für a_n und b_n aufgestellten Ausdrücken

$$\begin{aligned} a_n &= Ae^{-\epsilon t} \sin m(t - A') \\ b_n &= Be^{-\epsilon t} \sin m(t - B') \end{aligned}$$

vorausgesetzt worden, dass m einen reellen Werth erhalte, was aber nicht immer der Fall ist. Es lässt sich nämlich diese Voraussetzung, da $\frac{1}{\sqrt{2}ak} = w'$ gesetzt,

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{428n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} \right)}$$

so, auch so aussprechen, dass

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{428n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} < \frac{N''}{M''(1+\lambda)}$$

sein solle, oder wenn $\lambda = 0$.

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{438 n^2 M'^2} < \frac{N''}{M''}.$$

Das Beispiel des dritten Drahts im vorigen Artikel zeigt dagegen bei langen und dünnen Leitungsdrähten auch der Fall vorkommen dass

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{438 n^2 M'^2} > \frac{N''}{M''}.$$

ist, woraus einleuchtet, dass alsdann die Integration obiger Differentialgleichungen unter der angeführten Form illusorisch wird und daher einer andern Form gesucht werden muss.

Setzt man alsdann zu diesem Zwecke

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a^2 c^2 w'^2}{438 n^2 M'^2 (1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M'' (1+\lambda)} \right)},$$

so erhalten die beiden Differentialgleichungen folgende Form, näml

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{da_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2) a_n = 0$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{db_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2) b_n = 0,$$

aus denen durch Integration

$$a_n = A e^{-\varepsilon t} \cdot (e^{m(t-A')} - e^{-m(t-A')})$$

$$b_n = B e^{-\varepsilon t} \cdot (e^{m(t-B')} - e^{-m(t-B')})$$

hervorgeht. Die Integrationsconstanten A, A', B, B' werden hier gleiche Weise, wie es Art. 13 geschehen, aus den für $t = 0$ gegebenen Werthen von $a_n^0, b_n^0, \frac{da_n^0}{dt}, \frac{db_n^0}{dt}$, durch welche die ursprüngliche theilung der freien Electricität im Leiter und die ursprünglichen mungen ausgedrückt werden, gefunden. Man erhält auf diese We

$$A e^{-m A'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right)$$

$$A e^{+m A'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon - m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right)$$

$$B e^{-m B'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right)$$

$$B e^{+m B'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon - m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right).$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man folgende beiden chungen:

$$a_n = \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon - m)t} - \left((\varepsilon - m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon + m)t} \right]$$

$$b_n = \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon - m)t} - \left((\varepsilon - m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon + m)t} \right].$$

Setzt man endlich diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$E = \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right)$$

$$i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right)$$

so findet man die Gesetze der Vertheilung der freien Elektrizität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter für die hier betrachteten Fälle.

Ein solcher Fall kommt nun bei jedem kreisförmigen Leiter vor, wenn nämlich die gegebene ursprüngliche Vertheilung der freien Elektrizität und der Strömungen darin so beschaffen ist, dass der Werth von b_n^0 oder $\frac{1}{n} \frac{da_n^0}{dt}$ für $n = 0$ nicht Null ist, und es ist daher dieser Fall von der Betrachtung Art. 15 ausgeschlossen worden, wo nur diejenigen Werthe von E_n und i_n erörtert wurden, welche für $n = 1, 2, 3 \dots$ gelten. Ist nämlich $n = 0$, so leuchtet von selbst ein, dass

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^3 M''^2 (1 + \lambda)^2} > \frac{N''}{M'' (1 + \lambda)}$$

ist und dass alsdann

$$m = \frac{1}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 M''^2 (1 + \lambda)^2}}$$

zu setzen ist. Nun war aber

$$\varepsilon = \frac{ccw'}{16 M'' (1 + \lambda)},$$

woraus folgt, dass für $n = 0$

$$m = \varepsilon$$

zu setzen ist.

Substituirt man nun diesen Werth von m in den oben angeführten Werthen von a_n und b_n , so erhält man

$$a_0 = a_0^0 + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{da_0^0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{da_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t}$$

$$b_0 = b_0^0 + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{db_0^0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{db_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t}$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{da_0}{dt} = \frac{da_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t}$$

$$\frac{db_0}{dt} = \frac{db_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t}.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen

$$E_n = a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a}$$

$$i_n = -\frac{a}{2n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right)$$

für $n = 0$, ein, so findet man

$$E_0 = b_0 + \frac{1}{2\epsilon} \frac{db_0}{dt} (1 - e^{-2\epsilon t})$$

$$i_0 = -\frac{s}{2} \frac{db_0}{dt} e^{-2\epsilon t} + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0$$

wo $\left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0$ den Werth von $\left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)$ für $n = 0$ bezeichnet; folglich, da $\left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0 = \left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0 \cdot e^{-2\epsilon t}$ ist, und da in der Gleichung

$$i_n = -\frac{a}{2n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right)$$

die Coefficienten von $\sin \frac{ns}{a}$ und $\cos \frac{ns}{a}$ stets endliche Werthe haben sollen, wonach für $n = 0$

$$\frac{da_0}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{db_0}{dt} = 0$$

sein müsse,

$$E_0 = b_0$$

$$i_0 = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0 \cdot e^{-2\epsilon t}.$$

Hieraus ergibt sich also, dass, wenn ein kreisförmiger Leiter ursprünglich seiner ganzen Länge nach gleichförmig mit freier Elektrizität geladen ist, so dass jede Längeneinheit dieselbe Menge freier Elektrizität = b , enthält, diese Ladung mit der Zeit t keine Aenderung erleidet, was auch von selbst unmittelbar einleuchtet. Ausserdem ergibt sich aber, dass, wenn in demselben Leiter eine in allen Theilen gleiche Strömung ursprünglich vorhanden ist, diese vorhandene Strömung in dem Augenblicke, von dem an die Elektrizität im Leiter sich selbst überlassen bleibt, nicht verschwindet, sondern mit arithmetisch wachsender Zeit t nach dem Gesetz einer geometrischen Reihe allmählig abnimmt. Leuchtet auch die Nothwendigkeit des allmählichen Verschwindens hiebei a priori ein, so liess sich doch a priori nicht übersehen, wie schnell es erfolgen müsse und welche Verschiedenheiten in dieser Schnelligkeit zwischen verschiedenen Leitern statt finden.

Es ist für manche praktische Fragen von Interesse, zu bestimmen. — wenn ein Strom von bestimmter Intensität i in einem geschlossenen Leiter in demjenigen Augenblicke vorhanden ist, von dem an die Elek-

ität im Leiter sich ganz selbst überlassen bleibt, weil von Aussen keine elektromotorische Kraft darauf wirkt, wie es z. B. der Fall ist, wenn ein gegen den Leiter bewegter inducirender Magnet durch Anhalten in seiner Bewegung plötzlich gehemmt wird, — wie gross die positive oder negative Elektrizitätsmenge sei, welche von dem angegebenen Augenblicke an durch jeden Querschnitt des Leiters noch hindurchgeht; so wie ferner zu bestimmen, wie lang die Zeit ist, welche von demselben Augenblicke an verfließen muss, bis die Stromintensität zum Werthe i bis $\frac{1}{2}i$ abgenommen habe.

Ist $i = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{da^n}{dt} \right)_0$ für jenen Augenblick $t = 0$ gegeben, so ist die Stromintensität nach Verlauf der Zeit t

$$= i \cdot e^{-2\epsilon t},$$

was, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, die Menge der positiven Elektrizität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehen würde. Die Menge der positiven Elektrizität, welche im Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leiters geht, ist hienach

$$= i \cdot e^{-2\epsilon t} dt,$$

und der von $t = 0$ bis $t = \infty$ hievon genommene Integralwerth giebt die ganze positive Elektrizitätsmenge, welche von dem betrachteten Augenblicke an überhaupt noch durch jeden Querschnitt des Leiters hindurchgeht, nämlich

$$i \int_0^{\infty} e^{-2\epsilon t} dt = \frac{1}{2\epsilon} \cdot i.$$

Die in entgegengesetzter Richtung durch den Querschnitt gehende negative Elektrizität ist eben so gross.

Ferner ergibt sich zur Bestimmung der Zeit t , in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werths herabsinkt, folgende Gleichung:

$$e^{-2\epsilon t} = \frac{1}{2},$$

folglich $t = \frac{1}{2\epsilon} \log \text{nat } 2$.

Nun war $\epsilon = \frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)}$, worin, für $n = 0$, $M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha}$ zu setzen ist; folglich ist, $\lambda = 0$ gesetzt, jene durch den Querschnitt des Leiters gehende Elektrizitätsmenge

$$\frac{1}{2\epsilon} \cdot i = \frac{16}{ccw'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i = \frac{2}{W'} \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i ,$$

wenn $W' = \frac{cc}{8} w'$ den Widerstand der Längeneinheit des Leiters nach magnetischem Maasse bezeichnet.

Die Zeit, in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werthes herabsinkt, ist dann, in Secunden ausgedrückt,

$$\frac{1}{2\epsilon} \cdot \log 2 = \frac{16}{ccw'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2 = \frac{2}{W'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2 .$$

Für die Art. 16 als Beispiele angeführten Drähte ergeben sich hienach folgende Werthe:

	1. Draht	2. Draht	3. Draht
$\frac{1}{2\epsilon}$	$\frac{1}{104607}$	$\frac{1}{60726}$	$\frac{1}{567581}$
$\frac{\log 2}{2\epsilon}$	$\frac{1}{150946}$	$\frac{1}{87609}$	$\frac{1}{818846}$

So klein hienach auch der Bruchtheil $\frac{1}{2\epsilon}$ ist, den die von dem verschwindenden Strome durch den Querschnitt des Leiters geführte positive Elektricitätsmenge von derjenigen bildet, welche bei der ursprünglichen Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehen würde, so könnte doch jene Elektricitätsmenge eine sehr starke *Ladung* des Leiters hervorbringen, wenn sie dazu verwendet würde. Denn wäre z. B. die ursprünglich vorhandene Stromintensität gleich der *magnetischen Maasseinheit* (bei welcher 1 Milligramm Wasser in 106½ Secunde zersetzt wird), so würde die bei diesem Strome in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehende positive Elektricitätsmenge 155370. 10⁶ *elektrostatische Maasseinheiten* betragen, und es würden, während der Strom im 1. Drahte verschwände, noch $\frac{155370}{104607} \cdot 10^6$ d. i. fast 1½ Million *elektrostatischer Maasseinheiten* positiver Elektricität durch jeden Querschnitt des Leiters geführt werden. d. i. etwa der 24. Theil der schwächsten, oder der 33. Theil der stärksten Ladung der kleinen *Leidener Flasche*, welche zu dem in der vorigen Abhandlung. im 5. Bande, beschriebenen Versuche gebraucht worden, wo jene Ladungen S. 254 näher bestimmt sind.

Man sieht leicht ein, dass ein ähnliches Verschwinden des in einem geschlossenen Leiter vorhandenen Stromes in dem Augenblicke entritt, wo die Kette eines galvanischen Stroms gelöst wird, und dass dann die von dem verschwindenden Strome durch den mittelsten Querschnitt der

ders geführte positive Elektrizitätsmenge wirklich zur *Ladung* der einen Hälfte des Leiters, sowie die in entgegengesetzter Richtung durch denselben Querschnitt geführte negative Elektrizitätsmenge zur Ladung der andern Hälfte des Leiters verwendet wird, und dass durch diese entgegengesetzten Ladungen an der Stelle, wo die Kette durchbrochen wurde, der *Lösungsfunke* hervorgebracht wird, wo es von Interesse ist, die durch den *Lösungsfunken* entladenen *Elektrizitätsmengen* kennen zu lernen.

Ebenso leuchtet die Wichtigkeit einer weiter auszuführenden Entwicklung der Gesetze des Stromverschwindens für die Bestimmung der dadurch auf andere Leiter ausgeübten Inductionskräfte ein, zumal die Theorie der darauf gebauten *Ruhmkorff'schen* und anderer ähnlichen *Inductions-Maschinen*, für welche hiedurch eine Grundlage gegeben ist.

18.

Beziehung zur Wärmeleitung.

Die beiden im vorhergehenden Artikel für a_n und b_n gefundenen Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon - m)t} - \left((\varepsilon - m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon + m)t} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon - m)t} - \left((\varepsilon - m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon + m)t} \right] \end{aligned}$$

wenn für wachsende Werthe von t , wo endlich e^{-2mt} gegen 1 verschwindet, in die einfacheren Gleichungen über:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon - m)t} \\ b_n &= \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon - m)t} , \end{aligned}$$

und setzt man diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$\begin{aligned} E &= \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right) \\ i &= -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) \end{aligned}$$

, so ergeben sich folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektrizität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \sum \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \sin \frac{ns}{a} + \left((\varepsilon + m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \cos \frac{ns}{a} \right] e^{-\frac{m}{n}s}$$

$$i = \frac{a}{4} \sum \frac{\varepsilon - m}{mn} \left[\left((\varepsilon + m) b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \sin \frac{ns}{a} - \left((\varepsilon + m) a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \cos \frac{ns}{a} \right] e^{-\frac{m}{n}s}$$

Man erkennt hieraus leicht, dass in denjenigen Fällen, wo $\frac{\varepsilon - m}{nn} = \delta$ ein von n unabhängiger Coefficient ist,

$$i = - \frac{aab}{2} \cdot \frac{dE}{ds}$$

$$\frac{di}{ds} = - \frac{1}{2} \frac{dE}{dt}$$

erhalten wird, woraus durch Elimination von i

$$\frac{dE}{dt} = aab \frac{d^2E}{ds^2}$$

folgt, eine Gleichung von der nämlichen Form wie die Gleichung für die Wärmeleitung in festen Körpern.

Nun war aber im vorigen Artikel

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M'' (1+\lambda)} \right)}$$

gesetzt worden, worin $\frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)} = \varepsilon$ war, wonach also

$$m = \varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{128 N'' M'' (1+\lambda)}{a^2 c^2 w'^2} \cdot nn \right)}.$$

In allen Fällen nun, wo die Werthe von $\frac{nn}{a^2 c^2 w'^2}$ und von $\frac{\alpha}{a}$ sehr klein sind, kann hiefür gesetzt werden

$$m = \varepsilon \left(1 - \frac{256 \left(\log \frac{8a}{\alpha} \right)^2 \cdot (1+\lambda)}{a^2 c^2 w'^2} \cdot nn \right)$$

woraus $\varepsilon - m = \frac{8}{aaw'} \log \frac{8a}{\alpha} \cdot nn$, folglich

$$\delta = \frac{8}{aaw'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha}$$

ein von n unabhängiger Coefficient ist.

Es ergeben sich hienach also für die Ladungsänderungen der Electricität in den eben bezeichneten Fällen ähnliche Gesetze wie für die Wärmeleitung in festen Körpern, was schon von Thomson und Kirchhoff nachgewiesen worden ist. Es verdient jedoch dabei besonders hervorgehoben zu werden, dass, wenn auch der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die grösseren Wellenzüge, d. i. für kleinere Werthe von n , imaginär wird, und daher für diesen Theil der Bewegung andere Gesetze eintreten, die sich mehr oder weniger den

esetzen der Wärmeleitung in festen Körpern nähern, doch ein anderer Theil der Bewegung stets übrig bleibt, welcher kleinere Wellenzüge giebt, für welche grössere Werthe von n gelten, für die der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit reell bleibt und also die Art. 43 entwickelten Gesetze Gültigkeit behalten. Es finden also in einem solchen Leiter nach Störung des Gleichgewichts immer *Wellenzüge* statt, die mit bestimmten *Geschwindigkeiten* fortgepflanzt werden, aber es ist keine *reine Wellenbewegung* vorhanden, sondern sie ist mit andern Bewegungen vermischt, welche den der geleiteten Wärme ähnlichen Gesetzen unterworfen sind.

Beachtet man nun alle Verhältnisse, welche aus einer solchen Vermischung von Bewegungen hervorgehen, die ganz verschiedenen Gesetzen unterworfen sind, so leuchtet von selbst ein, dass die von Wheatstone beobachtete *Ungleichzeitigkeit der Funken* an zwei von einander sehr entfernten Unterbrechungsstellen eines solchen langen Leitungsdrahts durchaus keinen Schluss auf eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit gestattet, dass überhaupt die Wheatstone'sche Beobachtungsmethode, so sinnreich sie auch ist, und so werthvoll die damit erhaltenen Resultate in andern Beziehungen sein würden, wenn sie wirklich genau verbürgt werden könnten, doch unmittelbar zu dem vorliegenden Zwecke gar nicht geeignet ist, wie es überhaupt in keiner Weise gelingen wird, solche Beobachtungsmethoden ausfindig zu machen, mit denen die Gesetze aller Bewegungsänderungen der Elektrizität in einem Leiter nach gestörtem Gleichgewichte *rein erfahrungsmässig* begründet werden könnten. Der Zweck der *Beobachtungen* wird daher hier darauf zu beschränken sein, die aus unserer bisherigen Kenntniss von der Elektrizität abgeleiteten Gesetze zu *prüfen*. Deshalb war es nöthig, wie es in den vorhergehenden Artikeln versucht worden ist, diese Ableitung der Gesetze den zu ihrer Prüfung auszuführenden Beobachtungen vorzuschicken, um so mehr, als die so aufgestellten Gesetze selbst *als Leitfaden* beim Suchen der zu ihrer Prüfung anzuwendenden *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* benutzt werden müssen.

Schwingungen der Elektrizität in einem kreisförmigen Leiter.

Was nun die *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* zur Prüfung der elektrischen Bewegungsgesetze betrifft, so leuchtet aus den bisher entwickelten Gesetzen zunächst von selbst ein, dass bei der ausserordentlich grossen *Geschwindigkeit*, mit der sich nach diesen Gesetzen die meisten *elektrischen Wellenzüge* in guten Leitern fortpflanzen sollen, und bei der aus denselben Gesetzen sich ergebenden schnellen *Dämpfung* dieser Wellenzüge genaue *Beobachtungen und Messungen zu directer Prüfung dieser Gesetze* auszuführen bei den durch die Sinneswerkzeuge allen Beobachtungen gesetzten Schranken kaum möglich sein dürfte. Eine genaue Ausführung von Messungen nimmt immer eine gewisse Zeit in Anspruch, die bei so flüchtigen Erscheinungen nicht dazu gestattet ist. Beachtet man daher, dass die feinsten Messungen in der Physik diejenigen sind, welche entweder *Gleichgewichtserscheinungen*, oder *beharrliche Bewegungen*, oder *periodisch regelmässig wiederkehrende Erscheinungen*, wie z. B. die Pendelschwingungen sind, betreffen; so liegt es sehr nahe, auch zur Prüfung der Gesetze der Bewegung der Elektrizität in Leitern, abgesehen von *constanten Strömen*, eine Prüfungsmethode dieser Gesetze auf Beobachtungen *periodisch regelmässig wiederkehrender Bewegungen der Elektrizität in Leitern* zu begründen, vorausgesetzt, dass sich Mittel zu feiner Ausführung solcher Beobachtungen finden lassen.

Periodisch regelmässig wiederkehrende Bewegungen der Elektrizität können aber in einem Leiter nicht von selbst, sondern nur unter fortgesetzter Anregung äusserer elektromotorischer Kräfte, bestehen, und es bietet sich zu ihrer Hervorbringung die einfachste und für feinere Beobachtungen und Messungen zweckmässigste Methode in der schnellen Umdrehung eines kleinen Magnets um eine gegen seine magnetische Axe rechtwinkelige Drehungsaxe dar. Um aber einen Leitfaden zu zweckmässigen Einrichtungen für genaue Beobachtungen der so hervorbrachten periodisch wiederkehrenden Bewegungen oder *Schwingungen* der Elektrizität in einem Leiter zu gewinnen, soll zuvor versucht werden, die Gesetze solcher elektrischen Schwingungen in einem kreisförmigen Leiter aus den Art. 10 aufgestellten partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln.

20.

Schwingungen durch Induction eines rotirenden Magnets.

Die elektromotorische Kraft, welche durch schnelle Umdrehung eines kleinen Magnets in der Nähe des kreisförmigen Leiters auf irgend einem Punkt des Leiters s in einem bestimmten Augenblicke ausgeübt wird, wenn a den Halbmesser bezeichnet, dargestellt werden durch

$$\sum' \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right),$$

wo f_n und g_n nur von der Stellenzahl n abhängig sind. Alle diese auf verschiedene Punkte des Leiters s wirkenden Kräfte sind aber bei gleichförmiger Drehung des Magnets einem gleichen periodischen Wechsel unterworfen, und zwar sind sie bei zweckmässiger Anordnung dem Sinus eines mit der Zeit gleichförmig wachsenden Winkels proportional. Diese Kräfte können für einen beliebigen Augenblick, am Ende der Zeit t , dargestellt werden durch

$$\sin \mu t \cdot \sum' \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right).$$

Demnach erhält man, wenn man in den beiden partiellen Differentialgleichungen am Schlusse von Art. 10 für f_n und g_n , welche dort beliebige Functionen der Zeit bezeichneten, $f_n \sin \mu t$ und $g_n \sin \mu t$, worin f_n und g_n bestimmte von der Zeit unabhängige Werthe haben, einsetzt, die obigen beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} + \frac{cc}{8\pi a a k M'' (1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2 a a M'' (1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4 a M'' (1+\lambda)} \cdot g_n \sin \mu t = 0$$

$$\frac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} + \frac{cc}{8\pi a a k M'' (1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2 a a M'' (1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4 a M'' (1+\lambda)} \cdot f_n \sin \mu t = 0.$$

Man sieht man leicht, dass wenn

$$a_n = p \sin (\mu t + \varphi)$$

$$b_n = q \sin (\mu t + \varphi)$$

gesetzt wird, p , q , φ sich so bestimmen lassen, dass die damit erhaltenen Werthe von a_n und b_n den beiden partiellen Differentialgleichungen genügen. Setzt man nämlich die obigen Werthe von a_n und b_n und die daraus abgeleiteten Werthe

$$\frac{da_n}{dt} = p\mu \cos(\mu t + \rho)$$

$$\frac{db_n}{dt} = q\mu \cos(\mu t + \rho)$$

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} = -p\mu\mu \sin(\mu t + \rho)$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} = -q\mu\mu \sin(\mu t + \rho)$$

in die angeführten Gleichungen ein, so erhält man, wenn man Kürze halber $\frac{1}{\pi a a k} = w'$ und entweder, nach dem Ohm'schen Gesetze, $\lambda = 0$ setzt, oder M'' für $M''(1 + \lambda)$ schreibt,

$$-p\mu\mu \sin(\mu t + \rho) + \frac{p\mu c c w'}{8M''} \cos(\mu t + \rho) + \frac{p n^2 c^2 N''}{2a a M''} \cdot \sin(\mu t + \rho) - \frac{c c n}{4a M''} \cdot g_n \sin \mu t$$

$$-q\mu\mu \sin(\mu t + \rho) + \frac{q\mu c c w'}{8M''} \cos(\mu t + \rho) + \frac{q n^2 c^2 N''}{2a a M''} \cdot \sin(\mu t + \rho) + \frac{c c n}{4a M''} \cdot f_n \sin \mu t$$

Entwickelt man hierin Sinus und Cosinus der Summe nach Sinus und Cosinus der Theile, so erhält man

$$\left(\frac{\mu c c w'}{8M''} \cdot p \sin \rho + \left(\mu\mu - \frac{n^2 c^2 N''}{2a a M''} \right) \cdot p \cos \rho + \frac{c c n}{4a M''} \cdot g_n \right) \sin \mu t$$

$$+ \left(\left(\mu\mu - \frac{n^2 c^2 N''}{2a a M''} \right) \cdot p \sin \rho - \frac{\mu c c w'}{8M''} \cdot p \cos \rho \right) \cos \mu t = 0$$

$$\left(\frac{\mu c c w'}{8M''} \cdot q \sin \rho + \left(\mu\mu - \frac{n^2 c^2 N''}{2a a M''} \right) \cdot q \cos \rho - \frac{c c n}{4a M''} \cdot f_n \right) \sin \mu t$$

$$+ \left(\left(\mu\mu - \frac{n^2 c^2 N''}{2a a M''} \right) \cdot q \sin \rho - \frac{\mu c c w'}{8M''} \cdot q \cos \rho \right) \cos \mu t = 0.$$

Sollen nun diese beiden Gleichungen für jeden Werth von t gelten, so erhält man für $\cos \mu t = 0$ die beiden Gleichungen

$$\frac{\mu c c w'}{8M''} \cdot p \sin \rho + \left(\mu\mu - \frac{n^2 c^2 N''}{2a a M''} \right) \cdot p \cos \rho + \frac{c c n}{4a M''} \cdot g_n = 0$$

$$\frac{\mu c c w'}{8M''} \cdot q \sin \rho + \left(\mu\mu - \frac{n^2 c^2 N''}{2a a M''} \right) \cdot q \cos \rho - \frac{c c n}{4a M''} \cdot f_n = 0$$

und für $\sin \mu t = 0$ noch die dritte Gleichung, nämlich

$$\left(\mu\mu - \frac{n^2 c^2 N''}{2a a M''} \right) \sin \rho - \frac{\mu c c w'}{8M''} \cdot \cos \rho = 0,$$

aus denen p , q , ρ so bestimmt werden, dass den beiden partiellen Differentialgleichungen durch die darnach bestimmten Werthe von a_n und b_n genügt wird. Man erhält nämlich

$$\rho = \text{arc tang } \frac{\mu a^2 c^2 w'}{4(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')}$$

$$p = - \frac{\text{accn}}{2(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')} \cdot g_n \cos \rho = - \frac{2\text{accn}}{\sqrt{(16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^2 c^4 w'^2)}} \cdot g_n$$

$$q = + \frac{\text{accn}}{2(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')} \cdot f_n \cos \rho = + \frac{2\text{accn}}{\sqrt{(16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^2 c^4 w'^2)}} \cdot f_n$$

Fügt man zu den hiedurch bestimmten particularen Werthen von a_n und b_n , welche den partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten, noch die Art. 13 für a_n und b_n , für den Fall wo $f_n = 0$ und $g_n = 0$ war, gefundenen Werthe hinzu, so geben die beiden Summen die vollständigen Integralwerthe von a_n und b_n , nämlich

$$a_n = p \sin(\mu t + \varphi) + Ae^{-\epsilon t} \cdot \sin\left(mt + \arcsin \frac{a_n^0}{A}\right)$$

$$b_n = q \sin(\mu t + \varphi) + Be^{-\epsilon t} \cdot \sin\left(mt + \arcsin \frac{b_n^0}{B}\right)$$

worin A und B sowie ϵ und m die Art. 13 angegebene Bedeutung haben. Wenn m einen imaginären Werth hat, treten für die hinzugefügten Glieder die Art. 17 entwickelten Werthe von a_n und b_n ein. Es leuchtet aber ein, dass für wachsende Werthe von t die hinzugefügten Glieder abnehmen, und dass sie, wie Art. 17 gezeigt worden, schon nach Verlauf eines sehr kleinen Bruchtheils einer Secunde als verschwindend betrachtet werden können, von wo an also die Bewegung der Elektrizität im kreisförmigen Leiter eine gleichförmige periodisch wiederkehrende wird, deren Hervorbringung der Zweck der beschriebenen Methode mit dem rotirenden Magnete war.

Setzt man diese Werthe von a_n und b_n , mit Weglassung der mit der Zeit verschwindenden Glieder in die Gleichungen

$$E = \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right)$$

$$i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right)$$

ein, so ergeben sich für die regelmässig fortdauernde elektrische Schwingung folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektrizität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \sum \sin(\mu t + \varphi) \left(p \sin \frac{ns}{a} + q \cos \frac{ns}{a} \right)$$

$$i = -\frac{a\mu}{2} \sum \frac{1}{n} \cos(\mu t + \varphi) \left(q \sin \frac{ns}{a} - p \cos \frac{ns}{a} \right)$$

worin p , q , φ die oben angeführten Werthe haben. Nun ergibt sich aber aus jenen Werthen

$$p = -\frac{2n}{\mu a w} \sin \varphi \cdot g_n$$

$$q = +\frac{2n}{\mu a w} \sin \varphi \cdot f_n$$

Werden diese Werthe von p und q in beiden Gleichungen substituirt, so wird

$$E = \frac{2}{\mu a w} \sum n \sin \varrho \sin (\mu t + \varrho) \left(f_n \cos \frac{n s}{a} - g_n \sin \frac{n s}{a} \right)$$

$$i = - \frac{1}{w} \sum' \sin \varrho \cos (\mu t + \varrho) \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right)$$

oder, wenn $\sin (\mu t + \varrho)$ und $\cos (\mu t + \varrho)$ entwickelt werden,

$$E = \frac{2}{\mu a w} \sin \mu t \cdot \sum n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{n s}{a} - g_n \sin \frac{n s}{a} \right) \\ + \frac{2}{\mu a w} \cos \mu t \cdot \sum n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{n s}{a} - g_n \sin \frac{n s}{a} \right)$$

$$i = \frac{1}{w} \sin \mu t \cdot \sum \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right) \\ - \frac{1}{w} \cos \mu t \cdot \sum' \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right)$$

Wenn man hierin endlich

$$\frac{\sum \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right)}{\sum \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right)} = \tan \gamma$$

$$\frac{\sum n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{n s}{a} - g_n \sin \frac{n s}{a} \right)}{\sum n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{n s}{a} - g_n \sin \frac{n s}{a} \right)} = \tan \gamma'$$

$$\left(\sum \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right) \right)^2 + \left(\sum \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right) \right)^2 \\ \left(\sum n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{n s}{a} - g_n \sin \frac{n s}{a} \right) \right)^2 + \left(\sum n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{n s}{a} - g_n \sin \frac{n s}{a} \right) \right)^2$$

setzt, so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu a w} \cdot k' \sin (\mu t + \gamma')$$

$$i = - \frac{1}{w} \cdot k \cos (\mu t + \gamma).$$

Setzt man aber

$$\sum \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right) = f$$

$$\sum \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{n s}{a} + g_n \cos \frac{n s}{a} \right) = g$$

$$\frac{df}{ds} = f' \quad , \quad \frac{dg}{ds} = g'$$

so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu w} \sqrt{(f'f + g'g)} \cdot \sin \left(\mu t + \arctan \frac{f'}{g'} \right)$$

$$i = - \frac{1}{w} \sqrt{(ff + gg)} \cdot \cos \left(\mu t + \arctan \frac{f}{g} \right)$$

woraus die Gleichung $\frac{di}{ds} = - \frac{1}{2} \frac{dE}{dt}$ leicht abgeleitet werden kann.

21.

Gleichheit der Phasen und Amplituden elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern.

Beachtet man, dass die von dem rotirenden Magnet auf den ganzen Leitungsdraht ausgeübte elektromotorische Kraft durch

$$\sin \mu t \cdot \int ds \cdot \sum (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a})$$

dargestellt wird, und dass, wenn diese ganze Kraft nicht = 0 sein soll, g_0 einen bestimmten endlichen Werth haben müsse; so lässt sich der gefundene Werth von i übersichtlicher darstellen, wenn man in den angegebenen Werthen von $\tan \gamma$ und kk die ersten Glieder der als Summen dargestellten Reihen, nämlich die Glieder welche der Stellenzahl $n = 0$ entsprechen, auf folgende Weise absondert, indem man mit φ_0 den Werth von φ für $n = 0$ bezeichnet:

$$\tan \gamma = \frac{g_0 \sin \varphi_0 + \sum_1^{\infty} \sin \varphi^2 (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a})}{g_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \sum_1^{\infty} \sin \varphi \cos \varphi (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a})}$$

$$\begin{aligned} kk &= g_0 g_0 \sin \varphi_0^2 + 2g_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \cdot \sum_1^{\infty} \sin \varphi \cos \varphi (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}) \\ &+ 2g_0 \sin \varphi_0^2 \cdot \sum_1^{\infty} \sin \varphi^2 (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}) \\ &+ \left(\sum_1^{\infty} \sin \varphi \cos \varphi (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}) \right)^2 \\ &+ \left(\sum_1^{\infty} \sin \varphi^2 (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}) \right)^2. \end{aligned}$$

Da nun hierin

$$\sin \varphi = \frac{\mu a^2 c^2 w'}{\sqrt{(16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^2 c^2 w'^2)}}$$

$$\cos \varphi = \frac{4(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')}{\sqrt{(16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^2 c^2 w'^2)}}$$

var, so ergeben sich die Werthe von $\sin \varphi_0$ und $\cos \varphi_0$, wenn der Werth von M'' für $n = 0$ mit M_0'' bezeichnet wird,

$$\sin \varphi_0 = \frac{c w'}{\sqrt{(64\mu^2 M_0'' M_0'' + c^2 w'^2)}}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{8\mu M_0''}{\sqrt{(64\mu^2 M_0'' M_0'' + c^2 w'^2)}}.$$

Bedenkt man ausserdem, dass auch für sehr lange und dünne Leiter und für die grössten darstellbaren Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets die Quotienten $\frac{\mu a c w'}{N''}$ und $\frac{\mu a}{c}$ sehr kleine Brüche sind, so sucht ein, dass mit hinreichender Näherung für alle Werthe von $n > 0$

$$\sin \varrho = \frac{\mu a a w'}{4 n^2 N''} , \quad \cos \varrho = 1$$

gesetzt werden kann. Hieraus leuchtet ein, dass, da schon $\frac{\mu a a w'}{N''}$ ein sehr kleiner Bruch ist, $\sin \varrho = \frac{\mu a a w'}{4 n^2 N''}$ um so mehr als verschwindend betrachtet werden darf, je grösser die Stellenzahl n ist. Es wird daher meist auch für sehr lange und dünne Leiter und bei sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets näherungsweise

$$\gamma = \varrho_0 \quad \text{und} \quad k = g_0 \sin \varrho_0$$

angenommen werden können, wonach

$$i = - \frac{g_0}{w} \sin \varrho_0 \cos (\mu t + \varrho_0)$$

gefunden wird.

Da $\frac{g_0}{w}$ und ϱ_0 von s unabhängige constante Werthe haben, so geht daraus hervor, dass die elektrischen Schwingungen in allen Theilen eines kreisförmigen Leiters gleichzeitig gleiche Phase und gleiche Amplitude haben, auch wenn die von dem rotirenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kräfte auf die verschiedenen Theile des Leiters sehr ungleich vertheilt sind.

Aus dieser Gleichheit der Schwingungsphasen und Schwingungsamplituden in allen Theilen des kreisförmigen Leiters geht hervor, dass die Stromintensität in irgend einem Punkte stets der mittleren Stromintensität im ganzen Leiter gleich ist. Das Gesetz für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte ist aber schon Art. 9 entwickelt worden, wo sich ergab, wenn der Mittelwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte mit $\frac{1}{2\pi a} \cdot S$ bezeichnet und

$$\frac{8}{cc} \int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r\mathcal{E}} = p , \quad \frac{2\pi a}{\pi a a k} = w = 2\pi a w'$$

gesetzt wird, dass

$$i = \frac{1}{p} e^{-\frac{wt}{p}} \int e^{\frac{wt}{p}} \cdot S dt$$

ist. Wendet man nun dieses Gesetz auf unsern Fall an, wo in einem Leiter elektrische Schwingungen von einem rotirenden Magnet hervorgerufen werden, und wo der Mittelwerth der vom rotirenden Magnet auf den Leiter ausgeübten elektromotorischen Kräfte

$$\frac{1}{2\pi a} \cdot S = g_0 \sin \mu t$$

war, so erhält man

$$i = \frac{2\pi a g_0}{p} e^{-\frac{pt}{w}} \int e^{\frac{pt}{w}} \cdot \sin \mu t \cdot dt = \frac{2\pi a g_0}{p} \cdot \frac{w \sin \mu t - \mu \cos \mu t}{\frac{ww}{pp} + \mu\mu}$$

$$= - \frac{2\pi a g_0}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} \cdot \cos \left(\mu t + \arctan \frac{w}{\mu p} \right).$$

Da nun $p = \frac{8}{cc} \int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{C}} = \frac{8}{cc} \int M_0'' (1 + \lambda) ds$, und $w = 2\pi a w'$ ist, so erhält man, wenn auch hier wie Art. 20 zur Vereinfachung M_0'' statt $M_0'' (1 + \lambda)$ geschrieben wird,

$$\frac{r}{\mu p} = \frac{\pi a c w'}{4\mu \int M_0'' ds} = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad \frac{w}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} = \frac{2\pi a w'}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} = \sin \varphi_0,$$

folglich übereinstimmend mit dem oben für *kreisförmige* Leiter gefundenen Resultate,

$$i = - \frac{g_0 \sin \varphi_0}{w} \cdot \cos (\mu t + \varphi_0).$$

Da nun aber das obige Gesetz, für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte, Art. 9 nicht bloss auf *kreisförmige* Leiter beschränkt, sondern unabhängig von der Betrachtung der Gestalt des geschlossenen Leiters gefunden worden war, so ergibt sich daraus, dass das daraus für den Fall, wo die von einem rotirenden Magnet herrührenden elektromotorischen Kräfte gegeben sind, abgeleitete Gesetz ebenfalls für geschlossene Leiter von beliebiger Gestalt gilt.

Das angeführte Resultat, dass *Phasen* und *Amplituden* elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern überall gleich seien, beruht auf der Voraussetzung, dass die Quotienten $\frac{\mu a a w'}{N r}$ und $\frac{\mu a}{c}$ sehr kleine Brüche sind. Da nun diese Quotienten mit der Länge und Feinheit des Leiters und mit der Rotationsgeschwindigkeit des kleinen Magnets wachsen, ist es von Interesse die Werthe derselben für einige Beispiele von langen und feinen Leitern bei grossen Rotationsgeschwindigkeiten des einen Magnets wirklich zu berechnen. Werden dazu die drei schon Art. 16 als Beispiele gebrauchten Leitungsdrähte gewählt, so ergeben sich die in folgender Tafel berechneten Werthe.

	1. Draht	2. Draht	3. Draht
a	1000	1000000	1000000
w'	$\frac{1}{120697 \cdot 10^{12}}$	$\frac{1}{120697 \cdot 10^{12}}$	$\frac{1}{12070 \cdot 10^{12}}$
N'' (für $n = 1$)	15,419	28,935	31,237
$100 \frac{aaw'}{N''}$	$\frac{1}{18248 \cdot 10^6}$	$\frac{1}{34989}$	$\frac{1}{3770}$
$100 \frac{a}{c}$	$\frac{1}{4894500}$	$\frac{1}{4894}$	$\frac{1}{4894}$

Die beiden letzten Reihen dieser Tafel enthalten die Werthe der beiden Quotienten für die drei zum Beispiel genommenen Drähte, wenn $\mu = 100$, d. i. bei 15,965 Umdrehungen des Magnets in 1 Secunde. Man sieht, dass in allen diesen Fällen die Werthe dieser beiden Quotienten sehr kleine Brüche sind, indessen erkennt man daraus auch, dass diese Werthe bei 159,65 Umdrehungen in 1 Secunde 10 Mal grösser, bei 1596,5 Umdrehungen in 1 Secunde 100 Mal grösser sein würden, dass doch wirklich Fälle vorkommen können, wo jene Quotienten Brüche von erheblicher Grösse werden, und wo also das Gesetz der Gleichheit der *Phasen* und *Amplituden* in allen Theilen des kreisförmigen Leiters nicht mehr gelten würde.

22.

Vertheilung der freien Elektrizität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter.

Das Gesetz der Vertheilung der freien Elektrizität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter ist in dem Art. 20 gefundenen Ausdruck für die Dichtigkeit E enthalten, nämlich

$$E = \frac{a}{\mu a w'} \cdot k' \sin(\mu t + \gamma')$$

worin der Coefficient k' durch die Gleichung

$$k'k' = \left(\sum n \sin \rho^2 \left(f_n \cos \frac{n\pi}{a} - g_n \sin \frac{n\pi}{a} \right) \right)^2 + \left(\sum n \sin \rho \cos \rho \left(f_n \cos \frac{n\pi}{a} - g_n \sin \frac{n\pi}{a} \right) \right)^2$$

bestimmt war.

Man sieht hieraus, dass auch die Stärke der Ladung mit freier Elektrizität in jedem Punkte des kreisförmigen Leiters proportional dem Sinus

eines mit t proportional wachsenden Bogens wechselt, dass aber das Ladungsmaximum $= \frac{2k'}{\mu a w'}$, welches für den Sinus $= 1$ statt findet, in verschiedenen Punkten des Leiters verschieden ist, und zwar dass näherungsweise in denjenigen Punkten die Aenderung von Element zu Element am grössten ist, wo die von dem rotirenden Magnet ausgeübte elektromotorische Kraft von ihrem Mittelwerthe am meisten abweicht; wo diese elektromotorische Kraft ihrem Mittelwerthe gleich ist, ist näherungsweise auch die Ladung gleich, und zwar $= 0$. Es würde also in dem ganzen kreisförmigen Leiter nirgends freie Elektrizität vorhanden sein, wenn der rotirende Magnet auf alle Punkte desselben gleich wirkte, wobei vorausgesetzt ist, dass der kreisförmige Leiter, unabhängig vom rotirenden Magnet, keine Ladung von freier Elektrizität besitze.

Da nämlich nach dem vorhergehenden Artikel $\sin \varrho$ und $\cos \varrho$ für $n = 0$ endliche Werthe behalten, so leuchtet ein, dass für obigen Werth von kk' geschrieben werden kann

$$kk' = \left(\sum_1^{\infty} n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2 + \left(\sum_1^{\infty} n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2.$$

Ferner kann, unter den im vorigen Artikel angeführten Voraussetzungen,

$$\sin \varrho = \frac{\mu a w'}{4 n^2 N''}, \quad \cos \varrho = 1$$

gesetzt, und, wenn $\sin \varrho$ einen sehr kleinen Werth hat, der erste Theil von kk' , welcher unter dem Summenzeichen den Faktor $\sin \varrho^2$ enthält, gegen den zweiten vernachlässigt werden, wonach also

$$k' = \frac{\mu a w'}{4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n N''} \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right)$$

erhalten wird. Hieraus ergibt sich nun

$$\frac{dk'}{ds} = - \frac{\mu a w'}{4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{N''} \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right).$$

Ist endlich $\log \frac{8a}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl und convergirt ferner die Reihe $\sum (f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a})$ so rasch, dass alle Glieder der Reihe für $n > \nu$ vernachlässigt werden können, während $2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{\nu-1}} \right) + \frac{\nu^2 \alpha}{8a}$ gegen $\log \frac{8a}{\alpha}$ verschwindet, so darf $N'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha}$ und

$$\frac{dk'}{ds} = - \frac{\mu a w'}{8 \log \frac{8a}{\alpha}} \left(\sum_0^{\nu} \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) - g_0 \right)$$

gesetzt werden.

Nun ist aber der Faktor

$$\sum_0^v \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) - g_0$$

die Differenz der im Punkte s von dem rotirenden Magnet ausgeübter elektromotorischen Kraft von ihrem Mittelwerthe in der ganzen Länge des Leiters; also ist $\frac{dk'}{ds}$, oder die Aenderung von k' im Verhältniss zur Aenderung von s , jener Differenz proportional.

Von der Stärke dieser Ladungen hängt, wie man leicht sieht, das Ueberspringen elektrischer Funken und der Grad der nothwendigen *Isolirung* des Leiters ab, wenn solches Ueberspringen vermieden werden soll, ein Gegenstand, der einer ausführlicheren Erörterung bedarf, aber erst dann, wenn es sich um Leiter handelt, die nicht bloss einen einfachen Kreis, sondern ein System sehr nahe aneinander liegender Spiralwindungen bilden, ein Fall, der von der Betrachtung hier ausgeschlossen worden ist.

23.

Leitfaden für die Beobachtungen.

Es bleibt noch übrig, die Resultate der vorhergehenden Entwicklung als Leitfaden zu den *Beobachtungen* zu benutzen, durch welche jene Resultate an der Erfahrung geprüft werden sollen. Eines solchen Leitfadens bedarf es besonders, wenn keine Analogien mit andern Bewegungserscheinungen vorliegen, welche dazu benutzt werden können, und es geht aus dem Vorhergehenden hervor, dass solche Analogien in vielen Beziehungen hier fehlen.

Es kommt nämlich bei mangelnden Analogien mit andern schon bekannten und erforschten Bewegungserscheinungen vor Allem auf Bestimmung von *Beobachtungsobjecten* an, die besonders wichtig und *genauerer Bestimmung durch Beobachtungen* fähig sind. Ferner kommt es auf die nähere Kenntniss der *Verhältnisse* an, unter welchen über diese Beobachtungsobjecte die genauesten Bestimmungen zu erlangen sind. Es leuchtet nun ein, dass die genauere Erörterung dieser *Verhältnisse* am zweckmässigsten mit der Erörterung der *Hilfsmittel* zu ihrer wirklichen Darstellung und mit der *Ausführung der Beobachtungen* selbst verbunden wird, was zusammen den Gegenstand des folgenden Abschnitts dieser Abhandlung bilden wird. Am Schlusse dieses Abschnitts sollen

hier nur kurz diejenigen *Beobachtungsobjecte* bezeichnet werden, die sich der vorhergehenden Entwicklung als besonders *wichtig und einer genaueren Bestimmung durch Beobachtungen fähig* erscheinen.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, die bei andern Bewegungserscheinungen von so grosser Wichtigkeit ist, scheint nach dem, was schon Art. 18 darüber bemerkt worden, hier nicht dazu gerechnet werden zu können, es bieten sich dafür aber verschiedene andere Gegenstände der Beobachtung dar.

Es sind hauptsächlich *drei* Gegenstände, welche sich nach den entwickelten Gesetzen als besonders zur Prüfung der aufgestellten Gesetze geeignete Beobachtungsgegenstände herausstellen, nämlich *erstens* die Vergleichung der Schwingungsphasen und der Schwingungsamplituden der Elektricität an verschiedenen Stellen eines langen geschlossenen Leiters, auf welchen ein rotirender Magnet inducirend wirkt; *zweitens* das Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets; *drittens* endlich bietet sich noch ein richtiger Gegenstand für Beobachtungen in der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude* der durch einen rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leitungsdraht hervorgebrachten elektrischen Schwingungen von der diesem Leitungsdrahte gegebenen *Gestalt* dar.

Die *Gleichheit der Schwingungsphase und der Schwingungsamplitude*, welche nach den entwickelten Gesetzen auch in sehr langer geschlossener Kette und bei grosser Rotationsgeschwindigkeit in allen Theilen stattfinden soll, ist ein Gegenstand, der zur Prüfung an der Erfahrung sich um so mehr eignet, je unerwarteter dieses Resultat erscheint. Denn ohne genauere Entwicklung der Verhältnisse würde wohl bei einer sehr langen Kette, wo alle Bewegungen von einer Stelle ausgehen und bei ihrer Verbreitung einer sehr starken Dämpfung oder Absorption unterworfen sind, erwartet werden, dass auch bei fortgesetzter Erregung von Schwingungen alle Bewegungen immer nur sehr geschwächt zu den entferntesten Theilen der Kette gelangten. Da ferner die Verbreitung von der Erregungsstelle nach beiden Seiten geschieht, dürfte man erwarten, dass bei dem Wechsel positiver und negativer Schwingungen durch das Zusammentreffen von entgegengesetzten Seiten an einigen Stellen *Verstärkung* an anderen *Aufhebung* statt finden werde, wie bei Interferenzerscheinungen. Endlich, wenn auch in Folge solcher Begünstigung Schwingungen, die in allen Theilen der Kette vollkommen

synchron sind, *möglich* wären, so dürfte man doch erwarten, dass dieser *mögliche* Fall an besondere Bedingungen z. B. an bestimmte Rotationsgeschwindigkeiten geknüpft wäre, nicht aber, dass in allen Theilen der Kette solche synchronische Schwingungen stets, *bei jeder Rotationsgeschwindigkeit*, sich bildeten. Das angeführte Resultat ist daher nach allen Analogien, welche die Verbreitung von Bewegung in anderen bekannten Fällen bietet, höchst unerwartet, und eignet sich daher besonders zur Prüfung der Resultate der auf unsere bisherige Kenntniss von der Elektrizität gebaueten Theorie an der Erfahrung.

Die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit* des Magnets eignet sich ferner von einer andern Seite dazu, nämlich von Seiten der *quantitativen Prüfung* des entwickelten Gesetzes, durch Beobachtungen und Messungen, die nach wachsender Rotationsgeschwindigkeit in Reihen geordnet werden.

Endlich, wenn es auch noch gelänge, über die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* feinere Bestimmungen durch genaue Beobachtungen und Messungen zu gewinnen, so würde dadurch nicht bloss eine neue Prüfung der entwickelten Gesetze, sondern auch eine wesentliche Ergänzung unserer bisherigen Kenntniss von der Elektrizität selbst, aus der diese Gesetze abgeleitet worden, erlangt werden. Nach unserer bisherigen Kenntniss muss zwar der Elektrizität als einem Körper eine *Masse* zugeschrieben werden, und diese *Masse* übt auf eine andere ähnliche *Masse* eine *Kraft* aus; es fehlt aber noch an der Kenntniss des *Verhältnisses* jener *Masse* zu dieser *Kraft*. Die Kenntniss dieses *Verhältnisses* war nun auch nicht nöthig, so lange es sich um *Gleichgewichtserscheinungen* oder um *beharrliche Bewegungen* handelte, wo die Kenntniss der *Kräfte* genügte; die verschiedenen Elektrizitätsmengen konnten dabei, statt nach ihren Massen, nach der Grösse der *Kräfte* unterschieden werden, die sie auf eine und dieselbe Elektrizitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübten, und diese letztere Elektrizitätsmenge konnte durch die *Kraft* bestimmt werden, die sie auf eine *gleiche* Elektrizitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübte. Eine so bestimmte Elektrizitätsmenge war nun wirklich die sogenannte *elektrostatische Maasseinheit*. Handelt es sich aber nicht um blosses *Gleichgewicht* oder um blosser *Erhaltung einer schon vorhandenen Bewegung*, sondern soll einer Elektrizitätsmenge *neue Bewegung* ertheilt werden, welche sie vorher nicht besass, so reicht die blosser Kenntniss der *Kräfte*

ht aus, sondern es bedarf auch der Kenntniss der *Masse* der in Bewegung zu setzenden Elektricität, oder des *Verhältnisses* dieser Masse der von ihr auf die elektrostatische Maasseinheit in der Einheit der Entfernung ausgeübten Kraft, d. i. der Kenntniss der *Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf die Masseneinheit (Milligramm) Elektricität gehen*. Diese Zahl ist oben mit r bezeichnet worden und die *Masse* jeder in *elektrostatischen Maasseinheiten* bestimmten Elektricitätsmenge \mathcal{E} wird damit $= \frac{1}{r} \mathcal{E}$ gefunden. Es leuchtet ein, dass wenn nun diese *Masse* irgend eine *Kraft* f wirkt, der *Quotient* dieser Kraft durch die *Masse* $\frac{1}{r} \mathcal{E}$, auf welche sie wirkt, die *Geschwindigkeit* der von der Kraft der Masse in der Zeiteinheit ertheilten Bewegung $= \frac{fr}{\mathcal{E}}$ giebt.

Unsere Kenntniss vorhandener Elektricitätsmengen nach *elektrostatischen Maasseinheiten* ist nun aber in der That durch die Beobachtungen auf die in den Körpern vertheilten *freien* Elektricitätsmengen beschränkt und erstreckt sich nicht auf die im *neutralen* Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen. Ebenso ist unsere Kenntniss der Kräfte f auf welche beschränkt, welche auf *freie* Elektricitätsmengen wirken, während diejenigen Kräfte, welche auf das *neutrale* Fluidum wirken, durch die Beobachtungen nur die Kenntniss des mit dem Namen *elektromotorischer Kraft* bezeichneten Coefficienten f' erlangt wird, welcher mit der bekannten *Zahl der im neutralen Fluidum enthaltenen elektrostatischen Maasseinheiten* \mathcal{E} multiplicirt werden muss, um f zu erhalten, also $= f' \cdot \mathcal{E}$. Dagegen brauchen wir auch in der ganzen Elektrodynamik nicht die *Geschwindigkeit* selbst, sondern nur die *Stromdichtigkeit* und deren Aenderungen zu erforschen, d. i. das Product der in der strömenden Elektricität enthaltenen *Zahl elektrostatischer Maasseinheiten* \mathcal{E} in jene *Geschwindigkeit* $\frac{rf}{\mathcal{E}}$, d. i. $rf = f' \cdot r\mathcal{E}$, wo die *elektromotorische Kraft* f' schon bekannt, also bloss das Product $r\mathcal{E}$ zu bestimmen ist.

Ist hienach, in Uebereinstimmung mit der vorhergegangenen Entwicklung zur Bestimmung der *Stromdichtigkeiten*, und deren Aenderungen, nicht die Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten welche auf die Masseneinheit (Milligramme) gehen, selbst nöthig, sondern bloss die Kenntniss des Products $r\mathcal{E}$, so leuchtet ein, dass umgekehrt aus *Beobachtungen der Stromdichtigkeiten*, und deren Aenderungen, auch nur die Kenntniss dieses Products $r\mathcal{E}$ erworben werden kann; es leuchtet aber zugleich auch die Wichtigkeit von der Kenntniss dieses

Products $r\mathcal{E}$ ein, deren Erwerbung, nach dem durch die entwickelten Gesetze gegebenen Leitfadens, durch feine und genaue Beobachtungen über die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* zu versuchen, sich als das Zweckmässigste herausstellt.

Hiezu ist aber die genaueste Kenntniss der *Verhältnisse*, unter welchen über diese Abhängigkeit sichere Bestimmungen zu erlangen sind, nothwendig, deren Erörterung, wie schon bemerkt, im folgenden Abschnitte dieser Abhandlung mit der Erörterung der Mittel zur wirklichen Darstellung verbunden werden soll.

II.

SCHWINGUNGSBEOBACHTUNGEN.

24.

Methode der Beobachtung.

Nach dem im vorigen Abschnitte für die Beobachtungen gegebenen Leitfadens sollen hauptsächlich die *Amplituden-* und *Phasendifferenzen elektrischer Schwingungen* in geschlossenen Leitern beobachtet und gemessen werden. Zu diesen Beobachtungen und Messungen lassen sich nun aber keine *Galvanometer*, wie zur Beobachtung und Messung der *Intensitäten beharrlicher Ströme* gebrauchen. Denn ist im Multiplicator eines Galvanometers eine *elektrische Schwingung*, statt eines beharrlichen Stromes, vorhanden, so kann die Galvanometernadel nicht in Ruhe und Gleichgewicht bleiben, sondern muss gleichfalls Schwingungen machen, die desto kleiner werden, je kleiner der Bruchtheil ist, welchen die elektrische Schwingungsdauer von der Schwingungsdauer der Magnetometernadel bildet; würden nun aber diese Schwingungen verschwindend klein, so würde sich die Galvanometernadel ganz ebenso verhalten, wie wenn gar keine elektrische Schwingung im Multiplicator vorhanden wäre, sie würde ohne irgend eine Ablenkung in derselben Gleichgewichtslage verharren, so dass aus der Beobachtung des Galvanometers über das Vorhandensein einer elektrischen Schwingung im Multiplicator gar nichts bestimmt werden könnte. Die Beobachtung *elektrischer Schwingungen*, und namentlich die Messung ihrer *Amplituden-* und *Phasendifferenzen*, fordert daher, dass der geschlossene Leiter, in welchem die

Schwingungen statt finden, nicht bloss einen *Multiplicator*, wie zu einem *Galvanometer*, sondern auch ein als Drehwage aufgehängenes *Solenoid* bildet, welches zusammen mit dem *Multiplicator* ein *Elektrodynamometer* darstellt, dessen Construction schon in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen (Abh. bei Begründung der K. S. Ges. d. Wiss. Leipzig 1846) beschrieben, und dessen Gebrauch zur Beobachtung *elektrischer Schwingungen* daselbst im Allgemeinen erörtert und an einem Beispiele erläutert worden ist.

Es soll nun hier im Besondern die Methode, aus Dynamometerbeobachtungen *Amplituden-* und *Phasendifferenzen elektrischer Schwingungen* in geschlossenen Leitern zu bestimmen, näher betrachtet werden, wobei zur Vereinfachung der Betrachtung vorausgesetzt werden möge, dass der vom Leiter, in welchem die Elektrizität schwingt, gebildete *Multiplicator*, gleich dem Multiplicator einer Tangentenboussole, einen verticalen Ring von grösserem Halbmesser bilde, in dessen Mittelpunkte das in einem möglichst kleinen Raume concentrirte, von demselben Leiter gebildete, *Solenoid*, welches an die Stelle der drehbaren *Nadel* im Galvanometer tritt, aufgehängt sei.

Zwischen dieser *Nadel* und jenem vom Leiter, in welchem die elektrische Schwingung statt findet, gebildeten *Solenoid* findet nun aber der wesentliche Unterschied statt, dass die *Nadel* ein *constantes magnetisches Moment* besitzt, auf welches der beharrliche Strom im Multiplicator wirkt, während das *Solenoid* ein *galvanisches Moment* besitzt, was zwar nach dem Ampère'schen Gesetze, bei gleicher Grösse, dem magnetischen Nadelmomente ganz *äquivalent* sein würde, das aber bei einer *elektrischen Schwingung* im Solenoid nicht constant, sondern mit der Phase der elektrischen Schwingung *variabel* ist. Auf dieses *variable galvanische Moment* des Solenoids wirkt nun ferner vom Multiplicator aus kein beharrlicher Strom, sondern die im Multiplicator vorhandene *elektrische Schwingung*, deren Einwirkung auf das Solenoid ebenfalls mit der Schwingungsphase *variabel* ist.

Bezeichnet man mit a und n den mittleren Halbmesser und die Zahl der Umwindungen des *Multiplicators*, und ebenso mit a' und n' die des *Solenoids*, ferner mit i und i' die Strömungsintensitäten im Multiplicator und Solenoid, nach dem in der Galvanometrie gebrauchten *absoluten magnetischen Maasse* ausgedrückt, wonach $\frac{c}{\sqrt{8}} i dt$ und $\frac{c}{\sqrt{8}} i' dt$ die Menge positiver Elektrizität ist, welche während des Zeitelements dt durch den

Querschnitt des Leiters geht; so sind $n\pi a a i$ und $n'\pi a' a' i'$ die *galvanischen Momente* des Multiplicators und Solenoids. Das doppelte Product dieser beiden galvanischen Momente dividirt durch den Cubus des Abstands des im Mittelpunkte concentrirten Solenoids vom Multiplicatorringe c giebt die vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte *Directionskraft*, welche mit dem Sinus des Winkels, den die Solenoidaxe mit der Multiplicatoraxe bildet, multiplicirt, oder, was dasselbe ist, mit dem Cosinus des Ablenkungswinkels φ multiplicirt, den die Solenoidaxe mit der Ringebene des Multiplicators bildet, das vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte *Drehungsmoment* darstellt, nämlich

$$= 2 \frac{n\pi a a i \cdot n'\pi a' a' i'}{c^3} \cdot \cos \varphi .$$

Bei der vollkommenen Analogie, die hierin zwischen der Theorie des *Elektrodynamometers* mit der des *Galvanometers* statt findet, bedarf es keiner weiteren Erörterung hierüber, sondern wir können sogleich, bei Betrachtung des Gebrauchs des Instruments, auf den Fall übergehen, wenn in dem Leitungsdrahte, zu dem auch der Multiplicator und das Solenoid gehören, *elektrische Schwingungen* vorhanden sind, wo also die *Strömungsintensitäten* i und i' mit dem Sinus eines mit der Zeit t proportional wachsenden Winkels wechseln.

Bezeichnen in diesem Falle i und i' die grössten Strömungsintensitäten, welche den grössten Sinuswerthen entsprechen, so können die Strömungsintensitäten für irgend einen Augenblick am Ende der Zeit t durch $i \sin (\mu t + \gamma)$ und $i' \sin (\mu t + \gamma')$ dargestellt werden. Die Entfernung eines schwingenden Theilchens im Multiplicator oder Solenoid von seiner Gleichgewichtslage während dieser Schwingung wird hienach für denselben Augenblick, wenn \mathcal{E} die Menge positiver Elektrizität, welche in der Längeneinheit des Leiters enthalten ist, bezeichnet, durch $\frac{i}{\mu \mathcal{E}} \cos (\mu t + \gamma)$ und $\frac{i'}{\mu \mathcal{E}} \cos (\mu t + \gamma')$ dargestellt, worin $\frac{i}{\mu \mathcal{E}}$ und $\frac{i'}{\mu \mathcal{E}}$ die *Schwingungsamplitude* ist, um deren Bestimmung es sich handelt. — Doch wie man bei Strömen auf Kenntniss der Stromgeschwindigkeit selbst verzichtet und sich mit dem Product derselben in den unbekanntem Faktor \mathcal{E} begnügt, ebenso begnügt man sich hier mit der Bestimmung des Products dieser Schwingungsamplitude in denselben Faktor \mathcal{E} , weil die Beobachtungen uns nur gestatten, dieses Product in *absoluten Maassen* auszudrücken.

Mit diesen neuen Bezeichnungen der Strömungsintensitäten, für diesen Fall, erhält man nun das vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte Drehungsmoment

$$= 2 \frac{\pi \pi a a i \cdot n' \pi a' a' i'}{a^2} \sin(\mu t + \gamma) \sin(\mu t + \gamma') \cdot \cos \varphi$$

worin i und i' von der Zeit t unabhängige constante Werthe haben.

Es leuchtet ein, dass das bewegliche Solenoid, unter der Einwirkung dieses Drehungsmoments, dessen Grösse sich mit der Zeit t fortwährend ändert, gar nicht zur Ruhe gelangen kann; es fragt sich daher, welche *Beobachtungen* lassen sich bei dieser fortwährenden Bewegung des Solenoids machen, und was lässt sich aus diesen Beobachtungen bestimmen. Zur Beantwortung dieser Frage müssen die *Bewegungsgesetze des unter Einwirkung eines solchen veränderlichen Drehungsmoments stehenden Solenoids entwickelt werden.*

Zur Vereinfachung dieser Entwicklung kann man sich zunächst an den Fall halten, wo die *Strömungsintensitäten im Multiplicator und im Solenoid immer gleich* sind, wo also

$$i = i' \text{ und } \gamma = \gamma' = 0$$

gesetzt werden kann. Für diesen Fall ergibt sich das variable Drehungsmoment, welches auf das Solenoid wirkt,

$$= 2 \frac{\pi \pi n n' a' a'}{a} \cdot i^2 (\sin \mu t)^2 \cos \varphi .$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$= \frac{\pi \pi n n' a' a'}{a} \cdot i^2 (1 - \cos 2\mu t) \cos \varphi .$$

Aus der Construction des *Elektrodynamometers* ist aber bekannt, dass das Solenoid *bifilar* aufgehängt ist, woraus sich bei der gegebenen Länge nebst Abstände der beiden Aufhängungsdrähte und bei dem von ihnen getragenen Solenoidgewichte eine *statische Directionskraft* für das Solenoid ergibt, die leicht bestimmt werden kann, und mit S bezeichnet werden soll. Ist nun diese bifilare Suspension des Solenoids *in normaler Weise* so regulirt, dass das aus der *statischen Directionskraft* resultirende Drehungsmoment $= 0$ ist, wenn die Solenoidaxe der Ringebene des Multiplicators parallel, oder wenn der *Ablenkungswinkel* $\varphi = 0$ ist, so ergibt sich für jeden beliebigen Werth von φ das auf das Solenoid wirkende *statische Drehungsmoment*

$$= - S \sin \varphi .$$

Fügt man dieses *statische* Drehungsmoment obigem *elektrodynamischen* hinzu, so giebt die Summe beider auf das Solenoid wirkenden Drehungsmomente, dividirt durch das Trägheitsmoment des Solenoids K , die Drehungsbeschleunigung des Solenoids $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ im Augenblicke am Ende der Zeit t , woraus die *Bewegungsgleichung des Solenoids* folgt, nämlich

$$\frac{\pi\pi n n' a a'}{a} \cdot i^2 (1 - \cos 2\mu t) \cos \varphi - S \sin \varphi = K \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Setzt man hierin

$$\varphi = v + \alpha,$$

indem man für v den durch folgende Gleichung bestimmten *constanten* Werth annimmt:

$$\text{tang } v = \frac{\pi\pi n n' a a'}{aS} \cdot i^2,$$

folglich $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$; so erhält man

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K} (1 + (1 - \cos 2\mu t) \text{tang } v^2) \cos v \sin \alpha + \cos 2\mu t \cdot \sin v \cos \alpha = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass v und α kleine Werthe haben (welche in der Regel zulässig ist, weil das mit Spiegel versehene Solenoid ebenso wie eine Magnetometernadel beobachtet werden soll, wobei die Ablenkung des Solenoids stets innerhalb enger durch die Skalenlänge gegebener Grenzen bleiben muss), kann geschrieben werden

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K} (\alpha \sec v + \cos 2\mu t \cdot \sin v) = 0,$$

woraus durch Integration erhalten wird:

$$\alpha = \frac{\sin v}{\frac{K}{\mu\mu} - \sec v} \cdot \cos 2\mu t + A \sin (t - B) \sqrt{\frac{S \sec v}{K}},$$

wo A und B die beiden Integrationsconstanten sind. Bezeichnet man nun mit τ und θ die Schwingungsdauer des Solenoids, welche der statischen Directionskraft S und dem Trägheitsmomente K entspricht, und die Schwingungsdauer der Elektrizität im Leitungsdrabte, so ist

$$\frac{K}{S} = \frac{\tau\tau}{\pi\pi} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\pi}{\theta};$$

folglich ist

$$\alpha = \frac{\sin v}{\frac{\tau\tau}{\theta\theta} - \sec v} \cdot \cos \frac{2\pi}{\theta} t + A \sin \frac{\pi}{\tau} (t - B) \sqrt{\sec v},$$

oder, für den angenommenen kleinen Werth von v , und $A = 0$ gesetzt (das heisst abgesehen von derjenigen Schwingung, welche das Solenoid

chen würde, wenn es bloss unter der Einwirkung der statischen Reactionskraft S und der elektrodynamischen $\frac{nn'a^2i^2}{a}$ stände, da diese Abweichung durch bekannte Beruhigungsmittel bei den Beobachtungen (nicht zu dämpfen ist),

$$\alpha = \frac{\theta\theta}{4\pi r - \theta\theta} \cdot v \cos \frac{2\pi}{\theta} t .$$

Als Beispiel diene der Fall, der in den folgenden Beobachtungen vorkommen wird, wo in Secunden ausgedrückt

$$\tau = 15 , \quad \theta = \frac{1}{320}$$

var, und wo sich also

$$\alpha = \frac{1}{243 \cdot 10^6} \cdot v \cos \frac{2\pi}{\theta} t$$

ergibt, das heisst, wo α gegen v ganz verschwindet. Dasselbe findet sich bei allen Beobachtungen, welche hier betrachtet werden sollen, statt.

Wenn α verschwindet kann nun die *constante Ablenkung des Solenoids* v mit grösster Genauigkeit unmittelbar beobachtet werden, und man findet daraus

$$i = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}}$$

wodurch, wenn aus Zählung der Umdrehungen des rotirenden Magnets die Schwingungsdauer θ bekannt ist, die elektrische Schwingung im geschlossenen Leiter vollständig bestimmt wird, nämlich

$$i \sin \frac{\pi}{\theta} t = \frac{\sin \frac{\pi}{\theta} t}{\pi a} \cdot \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}}$$

Wäre im geschlossenen Leiter, statt der elektrischen Schwingung, ein *constanter Strom* von der Intensität $i \sqrt{\frac{1}{2}}$ vorhanden, so würde das vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{2\pi nn'a^2}{a} i^2 \cos \varphi$$

sein, und dieses Drehungsmoment mit dem statischen Drehungsmoment $-S \sin \varphi$ zusammen müsste beim Gleichgewichte $= 0$ sein, woraus die *Ablenkung des Solenoids φ beim Gleichgewichte*

$$\varphi = v$$

folgen würde. Hiernach lässt sich das Resultat obiger Betrachtung so aussprechen: *Wenn die Schwingungsdauer der Elektrizität im geschlossenen Leiter ein sehr kleiner Bruchtheil von der statischen Schwingungsdauer des Solenoids ist, verhält sich das Solenoid gerade so, wie wenn im Leiter ein*

constanter Strom vorhanden wäre, dessen Intensität zum Intensitäts-Maximum i der bei der elektrischen Schwingung statt findenden Strömungen sich verhält wie $1 : \sqrt{2}$.

Es findet alsdann eine Ablenkung des Solenoids statt, die sich ebenso beobachten lässt, wie wenn ein *constanter Strom* im geschlossenen Leiter vorhanden wäre, und wird aus dieser beobachteten Ablenkung (nach demselben Gesetz wie bei Galvanometern) die Intensität des *constanten Stroms* berechnet, von welcher sie hervorgebracht werden würde, so braucht diese Intensität nur mit $\sqrt{2}$ multiplicirt zu werden, um das *Intensitäts-Maximum i* der bei der elektrischen Schwingung statt findenden Strömungen, oder mit $\frac{c}{2\mu\mathcal{G}}$ multiplicirt zu werden, um die *Amplitude* der elektrischen Schwingung im geschlossenen Leiter zu erhalten, wobei jedoch, wie schon bemerkt, \mathcal{G} als unbekannter Coefficient unbestimmt gelassen werden muss und nur $\frac{ci}{2\mu}$ nach *absoluten Maassen* ausgedrückt werden kann. Es ist hiedurch die Aufgabe gelöst, *die durch einen mit bekannter Geschwindigkeit rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachte elektrische Schwingung mit dem Elektrodynamometer zu beobachten und zu bestimmen.*

Die Lösung dieser Aufgabe ist jedoch hiebei auf den Fall beschränkt geblieben, wo Multiplicator und Solenoid benachbarten Theilen des geschlossenen Leiters angehören, in welchen kein merklicher Unterschied der Schwingungsamplitude und der Schwingungsphase der Elektrizität statt findet. Gehörten nun aber Multiplicator und Solenoid zwei Theilen des geschlossenen Leiters an, in welchen die Schwingungsdauer der Elektrizität zwar dieselbe wäre, aber die Strömungsmaxima i, i' sowohl wie die Schwingungsphasen λ, λ' unterschieden werden müssten; so lässt sich der Anfangspunkt der Zeit t doch immer so wählen, dass das arithmetische Mittel beider Schwingungsphasen $\frac{\lambda + \lambda'}{2} = 0$ ist. Es lassen sich dann die mit der elektrischen Schwingung verbundenen Strömungsintensitäten in diesen beiden Theilen des geschlossenen Leiters durch

$$i \sin \frac{\pi}{\theta} (t + \lambda) \quad \text{und} \quad i' \sin \frac{\pi}{\theta} (t - \lambda)$$

darstellen.

Man beobachtet alsdann *erstens* die Ablenkung des Solenoids r , wenn Multiplicator und Solenoid beide dem ersten Theile des geschlos-

den Leiters angehören. Aus dieser Beobachtung lässt sich nach den gefundenen Regeln das Intensitäts-Maximum i der Strömungen bei der elektrischen Schwingung in diesem Theile bestimmen, nämlich

$$i = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}}.$$

Zweitens beobachtet man die Ablenkung des Solenoids v' , wenn der Multiplicator und Solenoid beide dem andern Theile des geschlossenen Leiters angehören, und findet das Intensitäts-Maximum i' der Strömungen bei der in diesem Theile vorhandenen elektrischen Schwingung

$$i' = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{aS \tan v'}{nn'}}.$$

Drittens endlich beobachtet man die Ablenkung des Solenoids v'' , wenn der Multiplicator dem ersteren, das Solenoid dem letzteren Theile des geschlossenen Leiters angehört. Aus dieser dritten Beobachtung lässt sich dann auch noch der *Unterschied der Schwingungsphasen* 2λ in den beiden Theilen des geschlossenen Leiters bestimmen. Es ist nämlich alsdann die *Bewegungsgleichung des Solenoids* nach den vorausgegangenen Angaben folgende:

$$2 \frac{\pi \pi n n' a a'}{a} \cdot i i' \sin(\mu t + \lambda) \sin(\mu t - \lambda) \cdot \cos \varphi - S \sin \varphi = K \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$
 wofür, da $\sin(\mu t + \lambda) \sin(\mu t - \lambda) = \sin \mu t^2 - \sin \lambda^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\mu t - 2 \sin \lambda^2)$ ist, geschrieben werden kann:

$$\frac{\pi \pi n n' a a'}{a} \cdot i i' (1 - \cos 2\mu t - 2 \sin \lambda^2) \cos \varphi - S \sin \varphi = K \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Man setze hierin

$$\varphi = u + \alpha,$$

worin

$$\tan u = \frac{\pi \pi n n' a a'}{aS} \cdot i i'$$

genommen wird. Da hienach $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ ist, so erhält man

$$\left((1 + (1 - \cos 2\mu t - 2 \sin \lambda^2) \tan^2 u) \cos u \sin \alpha + (\cos 2\mu t + 2 \sin \lambda^2) \sin u \cos \alpha \right) = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass u und α kleine Werthe haben, wird

$$\frac{r^2 \alpha}{dt^2} + \frac{S}{K} \left((1 - 2 \sin \lambda^2 \sin^2 u) \frac{\alpha}{\cos u} + (\cos 2\mu t + 2 \sin \lambda^2) \sin u \right) = 0$$

oder, wenn $\delta = (1 - 2 \sin \lambda^2 \sin^2 u) \alpha$, $S' = (1 - 2 \sin \lambda^2 \sin^2 u) S$,

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{S'}{K} (\sec u \cdot \delta + (\cos 2\mu t + 2 \sin \lambda^2) \sin u) = 0.$$

Hieraus wird durch Integration

$$\eta = \frac{\sin u}{i u u \frac{K}{S} - \sec u} \cdot \cos 2ut - \sin 2u \sin \lambda^2 + A \sin t - B \sqrt{\frac{S \sec u}{K}}$$

$$\alpha = \frac{S \sin u}{i u u K - S \sec u} \cdot \cos 2ut - \frac{\sin 2u \cdot \sin \lambda^2}{1 - 2 \sin u^2 \sin \lambda^2} + A' \sin t - B' \sqrt{\frac{S \sec u}{K}}$$

erhalten. Verschwindet nun bei schnellen Schwingungen der Electricität und nach Beruhigung des Solenoids, ebenso wie in dem vorübergehenden Falle, der erste und letzte Theil von α , so erhält man den mit r' bezeichneten constanten Werth der Ablenkung φ , nämlich

$$r' = u - \frac{\sin 2u \cdot \sin \lambda^2}{1 - 2 \sin u^2 \sin \lambda^2}$$

woraus

$$\sin \lambda = \frac{u - r'}{2 \sin u (\cos u + u - r' \sin u)}$$

sich ergibt. Hiernach wird also, da u aus den durch die vorübergehenden Beobachtungen bestimmten Werthen von i und i' mittelst der Gleichung $\tan u = \frac{\pi \pi m a a'}{u}$, u schon bekannt ist, die Aufgabe gelöst, aus der beobachteten Ablenkung r' den mit 2λ bezeichneten Phasenunterschied der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen der geschlossenen Kette zu bestimmen.

25.

Die Commutatoren.

Die Ausführung der angeführten Beobachtungen nach der im vorhergehenden Artikel beschriebenen Methode würde, um den Zweck einer genauen Vergleichung der *Schwingungsamplituden* und *Schwingungsphasen* an zwei Stellen eines geschlossenen Leiters zu erfüllen, bei geringen Verschiedenheiten derselben eine sehr grosse Feinheit und Genauigkeit verlangen, wie kaum zu erreichen sein würde, wenn sie *einzelnen* und *unabhängig von einander* ausgeführt werden müssten. Die Erreichung dieses Zweckes kann aber dadurch ausserordentlich erleichtert werden, dass diese Beobachtungen *paarweise* mit einander verbunden, an demselben geschlossenen Leiter, bei derselben Rotation des Magnets, *gleichzeitig* gemacht werden. Es sind dazu *zwei möglichst gleichförmig construirte Elektrodynamometer* erforderlich, deren Multiplicatoren und Solenoide Theile derselben geschlossenen Kette bilden. Die wesentlichste Bedin-

gung, welche bei zwei solchen derselben Kette angehörigen *Elektrodynamometern* erfüllt werden muss, wenn ein System genau correspondirender Beobachtungen mit ihnen ausgeführt werden soll, besteht darin, dass die *Schwingungsdauer* der bifilar aufgehängenen Solenoide der beiden Elektrodynamometer genau übereinstimme, was sich am leichtesten erreichen lässt, wenn in der Construction der Elektrodynamometer das Mittel gegeben ist, den Abstand der Aufhängungsdrähte bei dem einen oder bei beiden Solenoiden beliebig zu reguliren, wodurch die *Schwingungsdauer* des einen Solenoids mit der des andern in genaue Uebereinstimmung gebracht werden kann. Befinden sich dann vor Beginn einer Beobachtungsreihe beide Solenoide *in vollkommener Ruhe*, so lässt sich eine längere Beobachtungsreihe in solcher Weise ausführen, dass alle beobachteten *Elongationen* der beiden durch elektrische Schwingungen in der Kette in Bewegung gesetzten Solenoide paarweise genau für gleiche Zeiten gelten.

Weit weniger als in der *Schwingungsdauer* kommt die vollkommene Uebereinstimmung beider Elektrodynamometer in andern Beziehungen in Betracht. Denn man sieht leicht ein, dass, wenn beide Elektrodynamometer in der geschlossenen Kette dicht hinter einander gestellt werden, so dass beide einem Theile der Kette angehören, in welchem keine merklichen Unterschiede der *Schwingungsamplituden* und *Schwingungsphasen* statt finden, durch gleichzeitige correspondirende Beobachtungen an beiden Instrumenten, die sich bei gleicher *Schwingungsdauer* der Solenoide längere Zeit fortsetzen lassen, eine sehr genaue Vergleichung beider Instrumente gewonnen werden kann, wonach alle mit dem einen Instrumente gemachten Beobachtungen genau so reducirt werden können, dass sie dieselben Resultate geben, die man bei vollkommener Gleichheit dieses Instruments mit dem andern erhalten haben würde.

Diess vorausgesetzt, können die beiden genau mit einander verglichenen Elektrodynamometer an zwei verschiedenen weit von einander entfernten Stellen eines und desselben geschlossenen Leiters eingeschaltet werden, und es kann dann bei einer elektrischen Schwingung im Leiter durch gleichzeitige Beobachtungen beider Instrumente eine viel feinere Vergleichung der *Schwingungsamplituden* an beiden Stellen der Kette gewonnen werden, als es möglich sein würde, wenn ein und dasselbe Elektrodynamometer an den beiden Stellen zu verschiedenen

Zeiten eingeschaltet und beobachtet werden sollte, wobei vorausgesetzt werden müsste, dass die Rotation des Magnets zu beiden Zeiten vollkommen gleich wäre, eine Voraussetzung der wirklich nie ganz gestiftet werden kann, und die durch jene gleichzeitig gemachten correspondirenden Beobachtungen ganz erspart wird.

Die beiden Elektrodynamometer können ferner auch dazu dienen, dass, nach genauer Vergleichung derselben unter einander, das *Solenoid* des einen Elektrodynamometers in einen andern entfernten Theil des geschlossenen Leiters versetzt wird, während der *Multiplicator* desselben Instruments an seiner früheren Stelle bleibt, und es können alsdann gleichzeitige correspondirende Beobachtungen mit diesem und mit dem andern, unverrückt an seiner Stelle gebliebenen, Elektrodynamometer gemacht werden, aus denen sich dann mit grösster Feinheit jeder noch so geringe *Phasenunterschied* der elektrischen Schwingung an den beiden von einander weit entfernten Stellen des geschlossenen Leiters erkennen lässt, ohne dass es nöthig ist, eine vollkommen gleiche Rotation des Magnets zu zwei verschiedenen Zeiten vorauszusetzen.

Endlich ist es nun für die Genauigkeit und Sicherheit der aus diesen Beobachtungen abzuleitenden Resultate von grosser Wichtigkeit, dass die verschiedenen Beobachtungsreihen, nämlich *erstens* die zur Vergleichung der beiden Instrumente und *zweitens* die zur Vergleichung der Schwingungsamplituden oder Schwingungsphasen an zwei verschiedenen Stellen des geschlossenen Leiters, während möglichst gleichförmig fortgesetzter Drehung des Magnets unmittelbar nach einander abwechselnd ausgeführt und wiederholt werden, wozu erforderlich ist, dass ohne Störung der Beobachtungen die Versetzung entweder eines ganzen Elektrodynamometers oder des einen Bestandtheils, z. B. des Solenoids, zwischen zwei Beobachtungen *momentan* ausgeführt werden könne, was sich mit Hülfe zweckmässig eingerichteter *Commutatoren* leicht erreichen lässt.

Diese *Commutatoren*, wie sie zu den folgenden Versuchen gebraucht wurden, bestehen in einer Anzahl von Doppelzellen, d. i. paarweise leitend verbundener Zellen, zu denen die Enden der verschiedenen mit einander zu verbindenden Theile des Leitungsdrahts geführt sind. Diese Doppelzellen können dann unter einander wieder paarweise verbunden werden, und zwar auf zwei verschiedene Weisen mit einander combinirt, indem nämlich bei jeder Doppelzelle die vordere Zelle von der hin-

ren unterschieden wird. Die eine Art paarweiser Verbindung der Doppelzellen unter einander kann nämlich durch ein festes System von Verbindungsdrähten geschehen, die gleichzeitig in alle Vorderzellen eingetaucht werden; die andere Art paarweiser Verbindung der Doppelzellen unter einander kann durch ein anderes festes System von Verbindungsdrähten geschehen, die gleichzeitig in alle Hinterzellen eingetaucht werden. Und diese beiden verschiedenen Systeme von Verbindungsdrähten können sich wie zwei Arme eines Hebels verhalten, so dass wenn das eine System eintaucht, das andere heraustaucht, und umgekehrt. Es taucht leicht ein, dass durch einen solchen Commutator mit 6 Doppelzellen ein Theil des Leitungsdrahts aus seiner bisherigen Verbindung mit zwei andern Theilen des Leitungsdrahts herausgenommen, die beiden letzteren Theile dabei unter sich verbunden, und endlich zwei bisher verbundene Theile des Leitungsdrahts getrennt und zwischen ihnen jener herausgenommene Theil eingesetzt werden kann. Dies Alles geschieht durch einen momentan auszuführenden Wechsel, nämlich durch Drehung eines Hebels, wodurch das eine System von Verbindungsdrähten in die Vorderzellen getaucht wird, während das andere System aus den Hinterzellen herausgezogen wird, oder umgekehrt. — Ausserdem werden Commutatoren mit 4 Doppelzellen gebraucht, zwar nicht während der Beobachtungen, aber vorher. Vor Beginn der Beobachtungen sollen nämlich die Solenoide der beiden Elektrodynamometer beruhigt werden, wozu *erstens* ein Strom nöthig ist, welcher durch den Multiplicator und durch das Solenoid des zu beruhigenden Dynamometers geht, *zweitens* ein Commutator mit 4 Doppelzellen, von denen zwei mit den Enden des Multiplicatordrahts, die beiden andern mit den Enden des Solenoiddrahts verbunden sind. Durch diesen Commutator kann der Multiplicator mit dem Solenoid nach Belieben bald *parallel* bald *kreuzweis* verbunden werden. Bei der einen Verbindungsweise übt der Strom im Multiplicator auf das von demselben Strome durchströmte Solenoid ein *positives*, bei der andern ein *negatives* Drehungsmoment aus, und das Solenoid wird beruhigt, wenn die erstere Verbindungsweise während der *Rückschwingung*, die letztere während der *Hinschwingung* hergestellt wird. Da diese Wirkung eines im Multiplicator und Solenoid gleichzeitig vorhandenen Stroms ganz unabhängig von der *Richtung* des Stroms ist, so kann dazu, statt eines beharrlichen Stroms, die vom rotirenden Magnet in der Kette inducirte wechselnde Strömung gebraucht werden, wodurch es möglich

wird, diese Beruhigung der Dynamometer, nachdem die Rotation des Magnets begonnen, *den Beobachtungen unmittelbar vorausgehen zu lassen.*

Sollen nun aber alle diese Operationen, nämlich die Beruhigung der beiden Dynamometer und sodann alle zur Vergleichung der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen an zwei verschiedenen Stellen der Kette erforderlichen Beobachtungen, während fortgesetzter Drehung des Magnets, nach einander ohne Unterbrechung ausgeführt werden, so sind dazu im Ganzen 5 Commutatoren erforderlich, mit denen die verschiedenen Theile der Kette auf eine näher zu erörternde Weise planmässig verbunden werden müssen.

Zur leichteren Uebersicht sollen *erstens* die 5 Commutatoren, *zweitens* die verschiedenen Theile der Kette, welche mit den Commutatoren zu verbinden sind, genau bezeichnet und unterschieden werden. Fig. 4 wird sodann zur Uebersicht der ganzen Anordnung und aller Verbindungen im Einzelnen dienen.

Der *erste* mit *A* bezeichnete Commutator ist erforderlich, entweder um das eine *Elektrodynamometer* (Multiplicator und Solenoid zusammen genommen) abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts zu versetzen, oder um das *Solenoid* dieses Elektrodynamometers abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts zu versetzen, während der zugehörige Multiplicator an seiner Stelle bleibt. Es ist dazu ein Commutator mit 6 Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des zu versetzenden Elektrodynamometers oder Solenoids, zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der einen Einschaltungsstelle, und endlich zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der andern Einschaltungsstelle nöthig sind.

Der *zweite* mit *B* bezeichnete Commutator ist erforderlich als *Halbcommutator*, durch dessen Einstellung bestimmt wird, ob *Multiplicator sammt Solenoid* oder ob das *Solenoid* des einen Elektrodynamometers allein durch Wechsel des Commutators *A* abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts versetzt werde, wozu ebenfalls ein Commutator mit 6 Doppelzellen nöthig ist.

Der *dritte* und *vierte* Commutator, nämlich *C* und *C'*, werden beide zur Beruhigung der Solenoide vor Beginn der Beobachtungen gebraucht. Es sind dazu Commutatoren mit 4 Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des Solenoiddrahts und zwei für die des zugehörigen Multiplicators nebst dem übrigen Leitungsdraht, von welchem

jedoch der zum andern Elektrodynamometer gehörige Theil auszuschliessen ist, damit während der Beruhigung des einen Solenoids die Ruhe des andern nicht gestört werde.

Der *fünfte* mit *D* bezeichnete Commutator ist endlich erforderlich, um die Verbindung der Dynamometer mit den Commutatoren *C* und *C'* bald für die Beruhigung des einen Solenoids bald für die des andern einzurichten. Es ist dazu ein Commutator mit 4 Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der Einschaltungsstelle des Commutators, die beiden andern für zwei Verbindungsdrähte, durch welche der Strom zum Leitungsdraht mit Umgehung des einen oder andern Elektrodynamometers geführt werden kann.

Beim *geschlossenen Leitungsdrahte* sind folgende Theile zu unterscheiden, welche durch die Commutatoren auf verschiedene Weise verbunden werden können.

Der *erste* mit *a* bezeichnete Draht ist der *Multiplicatordraht des ersten Dynamometers*, dessen Enden zu zwei Doppelzellen des Commutators *C* führen, nebst *zwei kurzen Verbindungsdrähten* der beiden andern Doppelzellen dieses Commutators mit zwei Doppelzellen des Commutators *B*. Diese verschiedenen Bestandtheile des Drahts *a*, die während der Beobachtungen immer auf gleiche Weise verbunden bleiben, sollen durch Ziffern, *a'*, *a''*, *a'''* unterschieden werden.

Der *zweite* mit *b* bezeichnete Draht ist der *Solenoiddraht des ersten Dynamometers*, dessen Enden mit einer Doppelzelle des Commutators *B* und mit einer Doppelzelle des Commutators *A* verbunden sind.

Der *dritte* und *vierte* mit *c* und *d* bezeichnete Draht sind zwei *kurze Verbindungsdrähte* zweier Doppelzellen des Commutators *B* mit zwei Doppelzellen des Commutators *A*, deren Widerstand als verschwindend klein betrachtet werden darf.

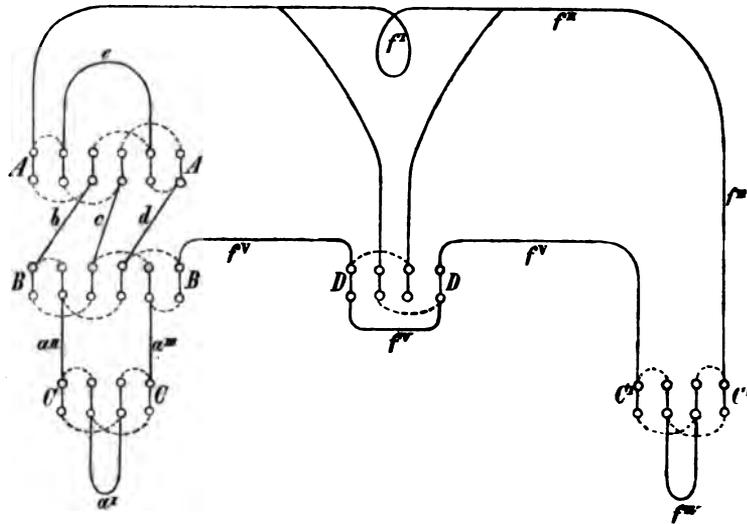
Der *fünfte* mit *e* bezeichnete Draht ist *eins von den beiden sehr langen Drahtstücken*, welche bei den Beobachtungen gebraucht werden, um entweder die beiden Dynamometer von einander zu entfernen oder um das Solenoid des ersten Dynamometers von seinem Multiplicator zu entfernen, indem von beiden Verbindungen zwischen den beiden Drahtenden des einen Dynamometers mit denen des andern, oder zwischen den beiden Drahtenden des Multiplicators und den beiden Drahtenden des Solenoids, jede durch ein solches langes Drahtstück vermittelt

wird. Die beiden Enden des langen Drahtstücks e sind mit zwei Doppelzellen des Commutators A verbunden.

Der *sechste* mit f bezeichnete Draht ist die ganze übrige Leitungskette, und besteht aus dem *Inductorringe* des rotirenden Magnets, ferner aus dem *zweiten der beiden eben erwähnten langen Drahtstücke*, sodann aus dem *Drahte des zweiten Dynamometers*, des Solenoids sowohl als des Multiplicators, und endlich aus *einem zum ersten Drahte zurückführenden Verbindungsdraht*. Diese verschiedenen Bestandtheile des Drahts f , die während der Beobachtungen immer auf gleiche Weise verbunden bleiben, sollen durch Ziffern, f^I , f^{II} , f^{III} , f^{IV} , f^V , unterschieden werden. Zwischen dem Solenoiddraht f^{III} und dem Multiplicatordraht f^{IV} des zweiten Dynamometers ist der Commutator C' eingeschaltet, der aber während der Beobachtungen nicht gebraucht wird. Ebenso ist im Verbindungsdraht f^V eine Einschaltungsstelle für den Commutator D , die aber geschlossen bleibt, weil auch dieser Commutator während der Beobachtungen nicht gebraucht wird.

Hienach ist nun zu besserer Veranschaulichung Fig. 4 gezeichnet worden, wo die einzelnen Doppelzellen der Commutatoren A , B , C , C' , D

Fig. 4.



durch das Zeichen $\textcircled{\circ}$ bezeichnet und die eine von den beiden Verbindungsweisen durch punktirte Bögen auf der obern Seite, die andere durch punktirte Bögen auf der untern Seite angedeutet sind.

Zur *Versetzung des ersten Dynamometers*, welches aus dem Multipliator a' und dem Solenoid b besteht, von der einen Einschaltungsstelle a andern während der Beobachtungen, werden die Commutatoren C , D , welche die *obere* Einstellung behalten, und B , welcher durch einen Draht, der eine erste und letzte Zelle verbindenden Draht, nach der Beruhigung der Solenoide, ganz von der Kette ausgeschlossen wird, nicht gebraucht, sondern die *Versetzung* wird, nachdem durch den Commutator B die durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Verbindungen hergestellt sind, bloss durch Wechsel der Einstellung des Commutators A bewerkstelligt. Denn bei der durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators A wird bei der angegebenen Einstellung des Commutators B eine geschlossene Kette gebildet, wo die bezeichneten Drähte in folgender Ordnung auf einander folgen :

abefdc ;

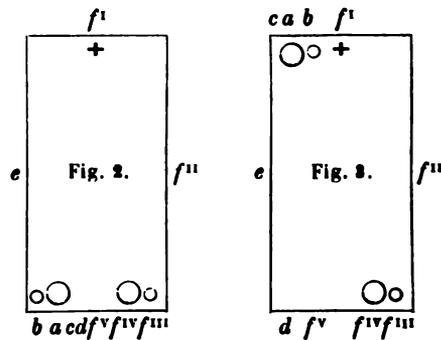
bei der durch punktirte Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators A wird eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

abfdeca .

Löst man f in seine Theile $f^I, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, f^V$ auf, und stellt die ganze geschlossene Kette durch die 4 Seiten eines Rechtecks dar, wo die beiden langen, mit e und f^{II} bezeichneten Seiten die langen Verbindungsdrähte bedeuten, so stellt

Fig. 2 den *ersten*, Fig. 3 den *letzteren* Fall dar. Die Stelle des Inductors f^I , mit dem rotirenden Magnet, ist noch besonders mit einem $+$ bezeichnet worden, die beiden Stellen der Multiplicatoren a und f^{IV} durch grössere \circ , die

beiden Stellen der Solenoide b und f^{III} durch kleinere \circ . Der Inductor f^I mit dem rotirenden Magnet befindet sich stets in der oberen Rechteckseite, das Dynamometer $f^{III} f^{IV}$ befindet sich stets in der gegenüberliegenden untern Rechteckseite. Die Stelle des andern Dynamometers $a b$ dagegen wird gewechselt und befindet sich im *ersten* Falle in der *unteren* Rechteckseite neben dem ersten Dynamometer $f^{III} f^{IV}$, dem Inductor f^I gegenüber, im *letzteren* Falle in der *oberen* Rechteckseite,



neben dem Inductor f^i , dem Dynamometer $f^{iii} f^{iv}$ gegenüber. Das Dynamometer ab wird also durch den Wechsel des Commutators A bald an einer vom Inductor f^i sehr entfernten Stelle der Kette, bald an einer ihm sehr nahen Stelle eingeschaltet, wie es für die *erste Beobachtungsreihe* verlangt wurde.

Zur Versetzung *des Solenoids b* des ersten Dynamometers von einer Einschaltungsstelle zur andern während der Beobachtungen werden gleichfalls die Commutatoren C, C' und D nicht gebraucht, sondern die Versetzung wird, nachdem durch den Commutator B die durch punktirt Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Verbindungen hergestellt sind, bloss durch Wechsel der Einstellung des Commutators A bewerkstelligt. Denn bei der durch punktirt Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators A wird alsdann eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

adcbefa ;

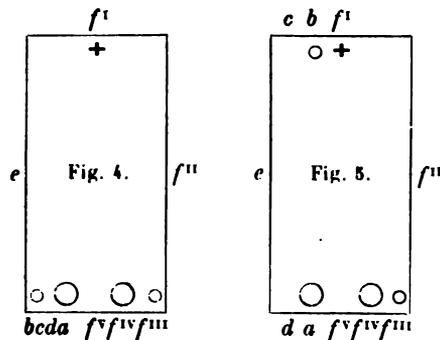
bei der durch punktirt Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators A wird eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

adecbfa .

Der *erstere* Fall wird durch Fig. 4, der *letzte* durch Fig. 5 dargestellt. Man sieht, dass dabei die Stelle des Inductors f^i , die des Dynamometers $f^{iii} f^{iv}$ und auch die des Multipliers a immer unverändert bleiben, und dass bloss die Stelle des Solenoids b gewechselt wird, welche im *ersten* Falle in der unteren Rechteckseite, neben dem Multiplier a , dem Inductor f^i gegenüber, im *letzten* Falle in der oberen Rechteckseite, neben dem Inductor f^i , dem Multiplier

a gegenüber sich befindet. Das Solenoid b wird also durch den Wechsel des Commutators A bald an einer vom Multiplier a sehr entfernten Stelle der Kette, bald an einer ihm sehr nahen Stelle eingeschaltet, wie es für die *zweite Beobachtungsreihe* verlangt wurde.

Zur Beruhigung der Solenoide vor Beginn der Beobachtungen wird das die erste und vierte Doppelzelle des Commutators D verbindende



des Drahts f^v herausgenommen. Zur Beruhigung des Solenoids *des* Dynamometers b erhält sodann der Commutator D die *obere* einen punktirten Bogen *angedeutete* Einstellung, wodurch der f^{iv} nebst dem zweiten Dynamometer $f^{iii} f^{iv}$ ausgeschlossen wird, nach der Einstellung des Commutators C eine geschlossene Kette *gender* Drahtordnung gebildet wird:

bei der *oberen* Einstellung von C : $a^i a^{ii} b e f^i f^v a^{iii} a^i$

bei der *unteren* Einstellung von C : $a^i a^{iii} c d f^v f^i e b a^{ii} a^i$,

für die Commutatoren A und B die *oberen* Einstellungen *ange-* *geben* sind. Man sieht daraus, dass bei gegebener Stromrichtung im *Indicator* a^i die Stromrichtung im Solenoide b , bei der *oberen* Einstellung C , $a^{ii} b e$, bei der *unteren* Einstellung, $e b a^{ii}$, also entgegengesetzt *nach* also in diesen beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Drehmomente auf das Solenoid b ausgeübt werden, von denen das eine zur *Dämpfung* der Solenoidbewegung benutzt werden kann.

Zur Beruhigung des Solenoids des *zweiten* Dynamometers f^{iii} erhält der Commutator D die *untere* durch einen punktirten Bogen *angedeutete* Einstellung, wodurch die Drähte $e b a^{ii} a^i a^{iii}$, zu denen das erste Dynamometer mit gehört, ausgeschlossen werden, und je nach der Einstellung des Commutators C^i eine geschlossene Kette mit folgender Drahtordnung gebildet wird:

bei der *oberen* Einstellung von C^i : $f^{iv} f^v f^i f^{ii} f^{iii} f^i$

bei der *unteren* Einstellung von C^i : $f^{iv} f^{iii} f^{ii} f^i f^v f^{iv}$.

Man sieht, dass bei gegebener Stromrichtung im Multiplicator f^v die Stromrichtung im Solenoide f^{iii} bei der *oberen* Einstellung von C^i , $f^{iv} f^{iii} f^{ii}$, bei der *unteren* Einstellung $f^{iv} f^{iii} f^{ii}$, also entgegengesetzt ist, *nach* also in diesen beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Drehmomente auf das Solenoid f^{iii} ausgeübt werden, von denen das eine zur *Dämpfung* der Solenoidbewegung benutzt werden kann.

Nach hergestellter Beruhigung beider Solenoide wird der Commutator D geöffnet und zur Verbindung seiner ersten und letzten Zelle das herausgenommene Drahtstück f^v wieder eingesetzt.

Die langen Leitungsdrähte.

Bei Versetzung *des Solenoids* eines Elektrodynamometers, oder bei Versetzung *des ganzen Elektrodynamometers* (Solenoids und Multiplimators) von einer Einschaltungsstelle der geschlossenen Kette zur andern ist es von wesentlicher Bedeutung für die Beobachtungen, dass die beiden Leitungsdrähte, welche die beiden Einschaltungsstellen mit einander verbinden, von nahe gleicher und sehr grosser Länge sind. Es sind daher schon im vorigen Artikel zwei Theile der geschlossenen Kette, nämlich die Drähte *e* und *f*¹¹, als sehr lange Drähte besonders angeführt worden, welche zu diesem Zwecke dienen. Bei der zu den folgenden Versuchen gebrauchten Kette hatte jeder von diesen beiden Drähten eine Länge von 36600 Metern oder fast 5 Meilen.

Bei der grossen Länge der ganzen Kette, welche diese beiden langen Drähte enthält, leuchtet von selbst ein, dass es praktisch unausführbar ist, dem geschlossenen Leiter eine genaue Kreisform zu geben, wie bei der Entwicklung der Gesetze im vorigen Abschnitte der Einfachheit wegen angenommen wurde. Aber auch abgesehen von dieser grossen Länge, welche der geschlossene Leiter besitzen soll, würde die einfache Kreisform keine Anwendung finden können bei einer Kette, die zum Zweck der Beobachtungen einen *Inductorring* für den rotirenden Magnet und zwei *Dynamometer* enthalten muss, wozu Stücke des Leitungsdrabts verwendet werden, deren Gestalt und Lage durch die für die Construction dieser Instrumente geltenden Regeln gegeben ist.

Offenbar hat diese in der Wirklichkeit unvermeidliche Abweichung des geschlossenen Leiters in seiner Gestalt von der Kreisform Einfluss auf die im Leiter vom rotirenden Magnet hervorgebrachten elektrischen Schwingungen, und das Gesetz, wonach die Amplitude der elektrischen Schwingungen von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets abhängt, wird dadurch wesentlich verändert. Handelt es sich aber nicht um Beobachtungen, durch welche die Amplitude genau bestimmt und gemessen, sondern nur um solche, durch welche die Amplituden an zwei verschiedenen Stellen des geschlossenen Leiters verglichen werden sollen (oder durch welche bloss die Phasendifferenz an beiden Stellen bestimmt werden soll), so scheint eine Abweichung von der Kreisform von geringer

Bedeutung. Denn wenn, den im vorigen Abschnitte entwickelten Gesetzen gemäss, an zwei von einander weit entfernten Stellen *eines kreisförmigen Leiters* auch bei sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten wirklich kein merklicher Unterschied in Schwingungsamplitude und Schwingungsphase statt fände, so scheint kein Grund vorhanden zu sein, anzunehmen, dass ein solcher Unterschied durch eine blosser Abweichung des Leiters von der Kreisform hervorgebracht würde; noch mehr dürfte es aber umgekehrt gestattet sein, wenn die Beobachtungen lehren sollten, dass in einem geschlossenen Leiter, der *eine beliebige von der Kreisform ganz verschiedene Gestalt* besitzt, keine merklichen Unterschiede der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen statt finden, dieses Resultat als ein allgemeines zu betrachten, auch dafür, dass die Unterschiede von Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen bei vollkommener Kreisform unmerklich seien.

Es kommt aber bei diesen beiden 5 Meilen langen Drähten, welche zum geschlossenen Leiter gehören sollen, noch besonders in Betracht, dass, wenn keine Telegraphendrähte dazu benutzt werden, sondern wenn jene langen Drähte sich in dem geschlossenen Raume befinden sollen, wo die Beobachtungen gemacht werden, wie es nöthig ist, um alle für die Beobachtungen wesentlichen äusseren Umstände vollkommen zu beherrschen, jene langen Drähte der Raumerparniss wegen nothwendig auf *Rollen* aufgewickelt werden müssen. Nun leuchtet aber ein, dass bei bald plötzlich entstehenden bald wieder plötzlich verschwindenden elektrischen Strömungen, wie bei den durch schnelle Rotation eines Magnets hervorgebrachten elektrischen Schwingungen statt finden, alle Windungen des auf einer Rolle aufgewickelten Leitungsdrahts nach den Gesetzen der *Volta-Induction* elektromotorische Kräfte wechselseitig auf einander ausüben müssen, die sich zu einer starken *Dämpfungskraft* summieren, wodurch die Amplitude der elektrischen Schwingungen sehr verkleinert wird, so dass dieselbe bei grösseren Rotationsgeschwindigkeiten des Magnets auch mit den feinsten Dynamometern nicht mehr würde beobachtet werden können. Für die Ausführung der Beobachtungen ist daher die Auffindung einer Methode von grösster Wichtigkeit, die langen Drähte so auf *Rollen* zu wickeln, dass eine solche *wechselseitige Induction der Drahtwindungen auf einander* vermieden wird.

Dieser Zweck kann nun, wenn die Drähte gut umspinnen sind, auf die einfachste und vollkommenste Weise dadurch erreicht werden,

dass die beiden *Hälften* eines jeden auf *eine Rolle* zu wickelnden Stücks vorher *zusammengelegt* und zu einem *Doppeldraht* vereint werden. Diese Vereinigung geschieht am besten dadurch, dass beide Hälften, von denen jede schon umspunnen ist und die durch diese doppelte Umspinnung von einander isolirt gehalten werden, *nochmals zusammen mit Seide oder Baumwolle umspunnen werden*. Verbindet man sodann die beiden Hälften *am einen Ende* mit einander, so wird von ihnen ein Leiter gebildet, durch welchen ein vom anderen offenen Ende eintretender und durch die eine Drahhälfte hingehender Strom *fast auf demselben Wege*, durch die andere Drahhälfte, zu dem offenen Ende zurückgeführt wird. Das Ende, an welchem die beiden Drahhälften mit einander verbunden sind, wird sodann an der zur Aufwicklung bestimmten Rolle befestigt und sodann *der ganze Doppeldraht auf diese Rolle aufgewunden*, so dass das Ende, an welchem die beiden Drahhälften unverbunden geblieben sind, frei oben auf zu liegen kommt, und der ganze Doppeldraht mit diesen unverbundenen Enden der beiden Drahhälften in die übrige Kette eingeschaltet werden kann.

Auf diese Weise werden alle einem solchen Doppeldrahte angehörigen Stromelemente *paarweise* so geordnet, dass, wenn keine merklichen Unterschiede in Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen vorkommen, lauter gleiche und entgegengesetzt gerichtete Stromelemente dicht neben einander liegen. Es leuchtet aber ein, dass von solchen Paaren von Stromelementen, auch bei schnellstem Wechsel der Intensität, keine elektromotorische Kraft auf irgend ein anderes entfernteres Leiterelement ausgeübt werden kann, und dass daher dieser Doppeldraht, wie er auch beim Aufwickeln auf die Rolle gewunden worden sein möge, in Folge dieser Windungen keine Dämpfungskraft erhalten hat, durch welche die vom rotirenden Magnet hervorgebrachten elektrischen Schwingungen geschwächt würden, wie es der Fall gewesen sein würde, wenn der Draht einfach und seiner ganzen Länge nach auf gleiche Weise aufgewunden worden wäre.

Ohne die eben beschriebene Methode würden schnelle elektrische Schwingungen in einer so langen Leitungskette, zwar nicht in Folge des grossen Widerstands der Kette, sondern in Folge der wechselseitigen Induction aller Windungen auf einander, in welchen die elektrischen Strömungen so rasch entstehen und verschwinden, ganz *verschwindend klein* und ihre Beobachtung daher *unausführbar* werden.

s bedarf hiebei kaum der Bemerkung, dass dieselbe Methode auch in andern Fällen nützliche Anwendung finden kann, wo ähnliche Verhältnisse vorhanden sind, unter welchen dieselbe Methode Ähnliches leisten wird.

Es gilt dies namentlich für *elektrische Telegraphen* von grosser Ausdehnung, wo ebenfalls zum Zweck der Telegraphenzeichen elektrische Strömungen in sehr langer Kette sehr schnell entstehen und verschwinden sollen. Es ist auch wirklich schon bemerkt worden, dass durch die Dämpfungskräfte, welche die Elektrizität in den einzelnen Drahtelementen dabei ausübt und, besonders unter dem Einfluss eines umschliessenden Conductors, erleidet, grosse Hindernisse durch Verzögerungen für die Zeichengebung hervorgebracht werden, von denen man fürchtet, dass sie die weitere Ausdehnung besonders der unterseeischen Telegraphenlinien, z. B. von Europa nach Amerika, ganz abgesehen von den mit Legung und Erhaltung derselben verbundenen technischen Schwierigkeiten, vereiteln könnten. Es kommen dabei nicht bloss die Kräfte, welche die Elektrizitäten in den verschiedenen Drahtelementen wechselseitig auf einander ausüben, in Betracht, sondern auch diejenigen Kräfte, welche die Elektrizität jedes Drahtelements auf die *benachbarten Leiter* ausübt und von ihnen erleidet, und selbst diejenigen Kräfte, welche vom *Erdmagnetismus*, bei seiner Veränderlichkeit, auf die Elektrizität der einzelnen Drahtelemente ausgeübt werden. Alle hieraus für schnelle Zeichengebung bei sehr grosser Ausdehnung der Kette erwachsenden Hindernisse können durch Anwendung der obigen Methode ganz oder fast ganz beseitigt werden, wonach immer zwei Drahtelemente dicht neben einander zu liegen kommen, in denen die elektrische Strömung und Ladung nahe *gleich aber entgegengesetzt* sind. Es leuchtet daraus von selbst die Regel ein, dass bei weiterer Ausdehnung der Telegraphenlinie ein Kabel anzufertigen ist, in welchem dicht neben dem Drahte, welcher den Strom hinführt, ein zweiter Draht, der ihn zurückführt, sich befindet, wonach also auf die Zurückführung des Stroms durch die Erde verzichtet werden muss. Dass die Isolirung dieser im Kabel dicht neben einander liegenden Drähte von einander keine Schwierigkeit findet, scheint das Beispiel unserer Kette zu beweisen, wo die beiden durch eine gemeinschaftliche Umspinnung fest zusammengedrückten Drähte nur dadurch von einander isolirt wurden, dass jeder für sich, vor der Zusammenlegung, mit Seide umspunnen war. Die Dicke der

isolirenden Schicht betrug hiebei noch nicht $\frac{1}{8}$ Millimeter und doch war die Isolirung für Ströme, die so stark waren, dass die Länge der Skalen für die Beobachtung der von ihnen hervorgebrachten Dynamometerablenkungen kaum hinreichte, als vollkommen zu betrachten, wie aus den damit gemachten, später zu beschreibenden, Beobachtungen sich ergeben wird.

27.

Beobachtungen zur Vergleichung der Amplitude der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette.

Nach der in den vorhergehenden Artikeln erörterten Anordnung sind nun vier Beobachtungsreihen, sämmtlich an einem Tage, am 28. September 1860, gemacht worden, *abwechselnd* zur Vergleichung der *Amplitude* und zur Bestimmung des *Phasenunterschiedes* an zwei weit von einander entfernten Stellen der oben beschriebenen langen geschlossenen Kette, während durch einen schnell rotirenden Magnet elektrische Schwingungen darin erregt wurden. Die beiden zur Vergleichung der *Amplitude* gemachten Beobachtungsreihen sollen jedoch, wenn sie auch nicht unmittelbar nach einander gemacht worden sind, in diesem Artikel *beide zusammen* betrachtet werden, ebenso wie im folgenden Artikel die *beiden* zur Bestimmung des *Phasenunterschiedes* gemachten Beobachtungsreihen.

Die correspondirenden Beobachtungen an den beiden Elektrodynamometern wurden von Herrn Schering und von mir gemacht, während die Herren Klinkerfues und H. Weber die gleichförmige Drehung des Magnets in der Inductorrolle ausführten und deren Geschwindigkeit bestimmten. Es wurde diese Geschwindigkeit möglichst nahe auf 260 Umdrehungen in 1 Secunde erhalten, wovon nur geringe Abweichungen vorkamen, die sich in kleinen Schwankungen der Solenoid-Ablenkungen beider Dynamometer zu erkennen gaben.

Die *Schwingungsdauer der Solenoide* beider Dynamometer war so regulirt, dass sie gleich gross war und fast genau 15 Secunden betrug. Dabei war aber die Empfindlichkeit der beiden Instrumente doch sehr verschieden, was daher rührte, dass zu den beiden Solenoiden zwar gleich grosse Rollen, aber von verschiedener Drahtstärke und daher von verschiedener Zahl von Umwindungen, genommen worden waren. Das

~~empfindlichere~~ Dynamometer, dessen Solenoid eine grössere Zahl von Umwindungen hatte, wurde zu denjenigen Beobachtungen gebraucht, durch die abwechselnd die Schwingungsamplitude an zwei verschiedenen Stellen der Leitungskette bestimmt werden sollte, während das ~~weniger empfindliche~~ Dynamometer zu den correspondirenden Beobachtungen diente, um den Einfluss kleiner Schwankungen in der Rotationsgeschwindigkeit in Rechnung zu bringen, wozu dasselbe an einer bestimmten Stelle des Leitungsdrahts immer unverrückt bleiben musste.

Erste Reihe.

Die erste Beobachtungsreihe wurde nach der Art. 24 vorgeschriebenen Anordnung zum Zweck der Vergleichung der *Intensität* oder Schwingungsamplitude der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen der langen geschlossenen Kette gemacht.

Alle *Beobachtungen* sind in Theilen einer Millimeter-skale ausgedrückt, deren Bild in einem 2100 Skalentheile von ihr entfernten, am Solenoid befestigten, Planspiegel auf die bei Magnetometern gewöhnliche Weise mit einem Fernrohre beobachtet wurde. Um bei den Beobachtungen die ganze Ausdehnung der Skale benutzen zu können, da das Solenoid von seiner Ruhelage stets nur nach einer und derselben Seite abgelenkt wurde, waren die Ablesungsfernrohre nebst ihren Skalen vor den Spiegeln so aufgestellt worden, dass die Ruhelage der Solenoide bei ruhendem Magnet oder bei gelöster Kette nicht, wie gewöhnlich, dem über dem Fernrohr gelegenen Mittelpunkte der Skale, sondern einem Punkte nahe am Anfang der Skale entsprach.

Während der ganzen Beobachtungsreihe wurde *die Drehung des Magnets* gleichmässig fortgesetzt. Zwischen den einzelnen durch Nummern unterschiedenen Beobachtungssätzen wurde der Art. 25 beschriebene *Commutator A* commutirt, nämlich das erste Mal, wo er vorher offen gewesen war, wurde er geschlossen, nachher wurde *obere* und *untere* Einstellung bloss vertauscht. Der *Commutator B* befand sich dabei in der *oberen Einstellung* fortwährend geschlossen, ebenso wie die beiden 4zelligigen *Commutatoren C* und *C'*, die vor dem Beginn der Beobachtungen zur Beruhigung der Solenoide gebraucht worden waren, während der 4zellige *Commutator D* geöffnet und durch Wiedereinsetzen des die erste und vierte Zelle verbindenden Drahtstücks, welches wäh-

rend der Beruhigung der beiden Solenoide herausgenommen worden war, aus der Kette ganz ausgeschlossen wurde.

Vor dem Beginn der Beobachtungen waren die Solenoide der beiden Dynamometer, wie Art. 25 auseinander gesetzt worden, möglichst beruhigt worden. — Da die Einstellung der drei Commutatoren *B, C* während der ganzen Beobachtungsreihe unverändert blieb, so ist in den Ueberschriften der einzelnen Sätze dieser Beobachtungsreihe nur bemerkt, ob die Kette geöffnet oder geschlossen war und in letzterem Falle, ob die *obere* oder *untere Einstellung des Commutators A* nach dem Schema Art. 25 statt fand. — Bei *geschlossener Kette*, wo die Solenoide in grösserer Bewegung waren, sind aus den nach einander beobachteten Elongationen *die zweiten Mittel* zur Bestimmung des *Ruhestands* genommen worden.

Obere Einstellung des Commutators *B*.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
52,9		+ 11,4	
16,2	34,55	— 12,0	— 0,30
52,6	34,40	+ 11,2	— 0,40
16,6	34,60	— 11,9	— 0,35
52,5	34,55	+ 11,0	— 0,45
16,9	34,70	— 11,4	— 0,20
Mittel 34,56		Mittel — 0,34	
Satz 2. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators <i>A</i> .			
901,7		638,2	
854,7	876,55	606,8	621,38
895,1	877,93	633,7	622,35
866,8	880,82	615,2	624,52
894,6	882,70	634,0	625,83
874,8		620,1	
Mittel 879,50		Mittel 623,52	

Satz 3. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
843,1		596,2	
908,8	872,35	644,9	617,95
828,7	870,45	585,8	616,60
915,6	873,72	649,9	619,10
835,0	879,35	590,8	623,20
931,8		661,3	
Mittel 873,97		Mittel 619,21	
Satz 4. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
811,4		574,2	
941,8	880,90	668,5	624,65
828,6	890,82	587,4	631,87
964,3	887,95	684,2	629,68
794,6	872,93	562,9	619,13
938,2		666,5	
Mittel 883,15		Mittel 626,33	
Satz 5. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
796,7		564,7	
978,0	885,60	694,1	628,20
789,7	887,47	559,9	629,45
992,5	884,35	704,1	627,15
762,7	876,35	540,5	621,37
987,5		700,4	
Mittel 883,44		Mittel 626,55	

Satz 6. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
748,3		531,5	
1007,5	877,80	714,5	622,93
747,9	879,30	531,2	623,97
1013,9	880,67	719,0	624,97
747,0	876,65	530,7	622,13
998,7		708,1	
Mittel 878,61		Mittel 623,50	
Satz 7. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
742,8		527,6	
1011,1	880,28	716,2	624,38
756,1	883,47	537,5	626,77
1010,6	882,45	715,9	626,00
752,5	879,43	534,7	623,80
1002,1		709,9	
Mittel 881,41		Mittel 625,24	

Vergleicht man die correspondirenden Ablenkungen der bei gleichzeitig beobachteten Dynamometer, welche man erhält, wenn man den bei *geöffneter* Kette (Satz 4) beobachteten Ruhestand von dem *geschlossener* Kette beobachteten abzieht, und beschränkt sich dabei nächst auf diejenigen Fälle (Satz 2. 4. 6), wo beide Dynamometer Stelle in der Kette symmetrisch dicht neben einander, von beiden Seiten durch die beiden langen Leitungsdrähte vom Inductor des rotirenden Magnets geschieden, erhalten hatten, wo also immer gleiche Schwingungsamplitude und Schwingungsphase in beiden Dynamometern zu statt finden musste; so giebt das Verhältniss der beobachteten Ablenkungen beider Dynamometer zu einander *das Verhältniss ihrer Emf*

~~Lichtw.~~ Hiernach erhält man die Empfindlichkeit des *ersten* Dynamometers in Theilen der des *zweiten* ausgedrückt:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{844,94}{623,86} = 1,3544$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{848,59}{626,67} = 1,3541$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{844,05}{623,84} = 1,3530$$

im Mittel also das *Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten* wie

$$1,3538 : 1 .$$

Nach dieser Vergleichung der Empfindlichkeit beider Dynamometer unter einander können die beobachteten Ablenkungen des einen abwechselnd an zwei verschiedenen Stellen der Kette eingeschalteten Dynamometers, mit Hilfe der beobachteten Ablenkungen des andern immer an derselben Stelle der Kette gebliebenen Dynamometers, so reducirt werden, wie wenn die Ablenkungen an den beiden Stellen der Kette *gleichzeitig mit ganz gleichen Dynamometern* beobachtet worden wären. Es kann nämlich aus den correspondirenden Ablenkungen des Hülsdynamometers nun immer die Ablenkung des Hauptdynamometers berechnet werden, wie sie beobachtet worden sein würde, wenn das Hauptdynamometer an seiner ursprünglichen Stelle, für welche die Vergleichung seiner Empfindlichkeit mit der des andern Dynamometers gilt, geblieben wäre, und diese für die *erste Stellung* des Hauptdynamometers in der Kette *berechnete Ablenkung* lässt sich dann mit der in der *zweiten Stellung* des Hauptdynamometers wirklich *beobachteten Ablenkung* vergleichen.

Multiplircirt man nämlich mit der gefundenen Verhältnisszahl 1,3538 die beobachteten Ablenkungen des Hülsdynamometers im 3^{ten}, 5^{ten} und 7^{ten} Satze, nämlich, nach Abzug des Satz 1 gefundenen Ruhestands,

$$619,55 ; 626,89 ; 625,58 ;$$

so erhält man die Ablenkungen, welche am Hauptdynamometer beobachtet worden sein würden, wenn letzteres seine Stellung in der Kette, so wie sie beim 2^{ten}, 4^{ten} und 6^{ten} Satze gewesen war, behalten hätte.

In der folgenden Tafel sind die Werthe dieser *berechneten Ablenkungen* in der *zweiten* Columne enthalten; in der *dritten* Columne sind die zu der Zeit, für welche diese *berechneten Ablenkungen des Hauptdynamometers an Stelle I* galten, wirklich *beobachteten Ablenkungen des*

Hauptdynamometers an Stelle II angegeben; in der *vierten* Columne endlich sind die Unterschiede zwischen beiden bemerkt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I	Beobachtete Ablenkung für Stelle II	Unterschied
3.	838,75	839,41	+ 0,66
5.	848,69	848,88	+ 0,19
7.	846,92	846,85	- 0,07
Mittel	844,78	845,05	+ 0,26

Diese in Skalentheilen beobachteten Ablenkungen, mit dem 2100 Skalentheile betragenden Abstände des Spiegels von der Skale dividirt, geben nun aber die Tangenten der doppelten Winkel, welche Art. 24 mit v , v' bezeichnet worden sind. Es ist also

$$\text{für Stelle I: } \tan v = \tan \frac{1}{2} \text{ arc tang } \frac{844,78}{2100} = 0,193604$$

$$\text{für Stelle II: } \tan v' = \tan \frac{1}{2} \text{ arc tang } \frac{845,05}{2100} = 0,193656 .$$

Nun verhalten sich aber nach Art. 24 die Quadrate der Intensitäten i , i' , oder die Quadrate der Amplituden der elektrischen Schwingungen an den beiden verglichenen Stellen I und II, wohin das Hauptdynamometer durch die obere und untere Einstellung des Commutators A versetzt wurde, wie

$$i : i' = \tan v : \tan v' ;$$

folglich erhält man hieraus

$$i' = 1,000142 . i .$$

Die Stelle I befindet sich aber in der Kette fast 5 Meilen weit von dem Inductor, in welchem der rotirende Magnet sich befindet, entfernt, während die Stelle II sehr nahe beim Inductor liegt. Es scheint sich also hieraus zwar zu ergeben, dass die Amplitude der durch den rotirenden Magnet in der ganzen Kette hervorgebrachten elektrischen Schwingungen in grosser Entfernung von dem Inductor, von wo die Erregung ausging, nämlich an der mit I bezeichneten Stelle, etwas kleiner sei als ganz in der Nähe des Inductors, an der Stelle II; doch ist der gefundene Unterschied so ausserordentlich gering, dass er auch bei grösster Genauigkeit der Beobachtungen sich nicht mehr sicher verbürgen lässt, er beträgt nämlich kaum $\frac{1}{7000}$ von der ganzen Schwingungs-

amplitude, ~~ibwelchen~~ ~~den~~ ganzen Dynamometer-Ablenkung entspricht. In der That ergeben also diese Beobachtungen, dass an zwei fast 5 Meilen von einander entfernten Stellen der Kette auch durch die genauesten Beobachtungen gar kein Unterschied in der Amplitude der elektrischen Schwingungen mit Sicherheit nachgewiesen werden kann.

Was die Genauigkeit der Beobachtungen betrifft, so leuchtet zwar ein, dass eine nähere Bestimmung derselben aus so wenigen Wiederholungen, wie diese erste Beobachtungsreihe enthält, noch nicht gewonnen werden kann; indess darf man, da keine Abweichung vom Mittelwerthe 0,40 Skalentheil übersteigt, diesen Mittelwerth aus allen 3 Beobachtungen bis auf 1 Skalentheil wohl als zuverlässig betrachten, was dem 845^{ten} Theile der ganzen Schwingungsamplitude entspricht. — Eine solche Genauigkeit der Intensitätsmessungen *elektrischer Schwingungen* übertrifft die Genauigkeit welche bisher in den Intensitätsmessungen fast aller anderer Schwingungen hat erreicht werden können. In der *Akustik* und *Optik* hängt von der Schwingungsamplitude die Intensität des Schalles und Lichtes ab, und es ist bekannt, wie weit die Intensitätsmessungen des Schalles und Lichtes hinter jener Genauigkeit zurückbleiben. Nur die nach der Gaussischen Methode gemachten Beobachtungen der Schwingungsamplitude einer Magnethadel oder überhaupt einer unifilar oder bifilar aufgehängenen Drehwage gewähren gleiche und unter günstigen Verhältnissen eine noch etwas grössere Genauigkeit. — Es verdient dabei bemerkt zu werden, dass dieselbe Genauigkeit mit demselben Inductor und mit denselben Dynamometern, welche zur Hervorbringung und zur Beobachtung der elektrischen Schwingungen, von denen 520 in jeder Secunde statt fanden, in einer fast 40 Meilen langen Kette, dienten, ebenso gut erreichbar gewesen wäre, auch wenn die Zahl der elektrischen Schwingungen über 1000 in 1 Secunde, und die Länge der Kette über 30 Meilen gestiegen wäre, ohne dass es dabei einer Verstärkung des Drahts der verlängerten Kette bedurft hätte; denn es war bei den beschriebenen Versuchen die elektrische Schwingung und deren Wirkung absichtlich verkleinert worden, nämlich *erstens* durch Ausschluss der einen Hälfte des Inductors, auf welche der rotierende Magnet wirkte, *zweitens* durch Verstärkung der statischen Directionskraft der Solenoide beider Dynamometer; die Länge der Skale würde sonst für die Beobachtungen nicht ausgereicht haben. Beim Gebrauch des ganzen Inductors und durch Verminderung der statischen Directions-

kraft der Solenoide, wodurch ihre Schwingungsdauer leicht von 15 auf 20 Secunden vergrössert werden konnte, würden die beobachteten Wirkungen bei einer viel längern Kette noch ebenso gross gewesen sein.

Um jeden Zweifel zu beseitigen, dass diese Genauigkeit nur scheinbar sei und die Uebereinstimmung der in obiger Beobachtungsreihe mit 3 Mal wiederholten Beobachtungen nur zufällig sei, ist endlich noch eine zweite Beobachtungsreihe, ganz nach derselben Anordnung und an denselben Tagen ausgeführt worden, deren Resultate zur Vergleichung mit der vorhergehenden in der folgenden Tafel auf dieselbe Weise zusammengestellt worden sind.

Zweite Reihe.

Die der ersten Reihe vorausgeschickten Bemerkungen gelten auch für die zweite Reihe.

Obere Einstellung des Commutators B.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
30,3		− 8,5	
34,4	32,35	+ 5,2	− 4,65
30,3	32,35	− 8,3	− 4,55
34,1	32,20	+ 5,0	− 4,65
30,3	32,20	− 8,0	− 4,50
34,2	32,25	+ 4,9	− 4,55
Mittel 32,27		Mittel − 4,58	
Satz 2. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
858,7		615,7	
904,2	879,00	636,1	623,83
848,9	879,68	607,4	624,47
916,7	880,52	647,0	625,15
839,8	876,00	599,2	621,90
907,7		642,2	
Mittel 878,80		Mittel 623,84	

Satz 3. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
837,0		596,0	
918,8	880,60	649,0	624,70
847,8	885,58	604,8	628,67
927,9	881,70	656,1	625,75
823,2	880,00	586,0	624,38
945,7		669,4	
Mittel 881,97		Mittel 625,87	
Satz 4. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
792,5		554,0	
964,0	881,38	683,1	623,30
805,0	884,72	573,0	628,07
964,9	880,70	683,2	625,22
788,0	879,35	561,5	624,25
976,5		690,8	
Mittel 881,54		Mittel 625,21	
Satz 5. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
794,0		566,4	
962,4	875,90	678,5	621,10
784,8	876,73	561,0	621,93
974,9	879,92	687,2	623,95
785,1	874,35	560,4	620,02
952,3		672,1	
Mittel 876,73		Mittel 621,75	

Satz 6. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
783,2		559,9	
961,1	877,62	679,0	623,15
805,1	875,53	574,7	621,42
930,8	869,10	657,3	617,10
809,7	872,52	579,1	619,68
939,9		663,2	
Mittel 873,69		Mittel 620,34	
Satz 7. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
783,5		560,8	
969,6	878,25	682,9	623,13
790,3	881,72	565,9	625,67
976,7	882,28	688,0	626,08
785,4	882,12	562,4	625,95
981,0		691,0	
Mittel 881,09		Mittel 625,21	

Für das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers in Theilen der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser zweiten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{846,53}{625,42} = 1,3535$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{849,27}{636,79} = 1,3549$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{841,42}{621,92} = 1,3529$$

im Mittel also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten wie

$$1,3538 : 1 .$$

cirt man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3538 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3. 5. 7 ergeben:

627,45; 623,33; 626,79

in die Producte

849,45; 843,86; 848,55

die Masse der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn es seine Stelle in der Kette, die es während der Beobachtungen in Satz 4. 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, wäre die Ruhelage aus den Ruheständen in Satz 3. 5. 7 entnommenen Ablenkungen bei veränderter Stellung des Dynamometers in der Kette entsprechen. Die folgenden Tafel sind die der ursprünglichen Stellung mit denen bei veränderter Stellung des ersten Dynamometers in der Kette entnommenen Ablenkungen zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I	Beobachtete Ablenkung für Stelle II	Unterschied
3.	849,45	849,70	+ 0,25
5.	843,86	844,46	+ 0,60
7.	848,55	848,82	+ 0,27
Mittel	847,29	847,66	+ 0,37

ergibt sich ebenso, wie bei der vorigen Beobachtungsreihe, die Gleichung der Schwingungsamplitude oder der Strömungsintensität an der Stelle I und II,

$$\text{an der Stelle I: } \tan v = \tan \frac{1}{2} \arctan \frac{847,29}{2100} = 0,194134$$

$$\text{an der Stelle II: } \tan v' = \tan \frac{1}{2} \arctan \frac{847,66}{2100} = 0,194212$$

da nach Art. 24

$$i : i' = \tan v : \tan v'$$

erhält sich hieraus

$$i' = 1,000201 \cdot i.$$

Der Unterschied der Schwingungsamplitude beträgt also zwischen den beiden Stellen, von denen die eine fast 5 Meilen vom Inductor des rotirenden Magnets entfernt war, während die andere dicht beim Inductor sich befand, kaum $\frac{1}{5000}$ von der ganzen Schwingungsamplitude, welche der ganzen Dynamometerablenkung entspricht. Es leuchtet ein, dass auch dieser Unterschied zu gering ist, um auch bei grösster Genauigkeit der Beobachtungen verbürgt werden zu können, und es wird daher auch durch diese zweite Beobachtungsreihe die Bestätigung erhalten, dass *an zwei fast 5 Meilen von einander entfernten Stellen der Kette gar kein Unterschied in der Amplitude der elektrischen Schwingungen mit Sicherheit nachgewiesen werden kann.*

28.

Beobachtungen zur Bestimmung des Unterschieds der Phase der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette.

Bei gleicher Anordnung, wie die für die beiden vorhergehenden Beobachtungsreihen beschriebene, wurde eine *dritte* Beobachtungsreihe, aber nicht zur Vergleichung der Schwingungsamplituden, sondern zur Bestimmung des *Phasenunterschieds* der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen Kette ausgeführt. Es wurde zu diesem Zwecke, ebenso wie bei den vorhergehenden Beobachtungsreihen, zwischen den einzelnen durch Nummern unterschiedenen Beobachtungssätzen der Art. 25 beschriebene *Commutator A*, wenn er vorher geöffnet gewesen war, geschlossen, oder, wenn er geschlossen gewesen war, commutirt, das heisst, es wurden *obere* und *untere* Einstellung mit einander vertauscht. Dagegen wurde dabei *Commutator B* zwar fortwährend geschlossen erhalten, aber in der *unteren* (statt früher in der oberen) *Einstellung*. Die beiden 4zelligen *Commutatoren C* und *C'* endlich, die vor dem Beginn der Beobachtungen zur Beruhigung der Solenoide gebraucht worden waren, wurden während der Beobachtungen wieder gerade ebenso geschlossen und eingestellt erhalten wie früher. Der *Commutator D* wurde, nach Beruhigung der Solenoide, vor dem Beginn der Beobachtungen geöffnet und durch einen seine erste und letzte Zelle verbindenden Draht ganz aus der Kette ausgeschlossen,

Dritte Reihe.

Untere Einstellung des Commutators *B*.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
33,9		— 3,5	
38,0	35,95	— 3,9	— 3,70
33,9	35,95	— 3,4	— 3,65
38,0	35,95	— 3,0	— 3,20
33,9	35,95	— 3,8	— 3,40
38,1	36,00	— 3,1	— 3,45
Mittel 35,96		Mittel — 3,48	
Satz 2. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators <i>A</i> .			
849,5		995,0	
917,7	883,25	263,1	626,67
848,1	889,37	985,5	630,87
943,6	889,15	289,4	629,60
821,3	875,85	954,1	619,50
917,2		280,4	
Mittel 884,44		Mittel 626,66	
Satz 3. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators <i>A</i> .			
812,8		940,0	
956,7	882,55	317,6	625,27
804,0	876,10	925,9	620,57
939,7	873,35	312,9	618,70
810,0	878,10	923,1	622,32
952,7		330,2	
Mittel 877,52		Mittel 621,72	

Satz 4. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
943,2		363,1	
809,5	875,45	873,8	619,30
939,6	873,17	366,5	617,70
804,0	875,20	864,0	618,62
953,2	880,35	380,0	622,13
811,0		864,5	
Mittel 876,04		Mittel 619,44	
Satz 5. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
925,7		366,2	
836,3	884,82	879,8	625,35
929,0	877,45	375,6	622,35
815,5	875,10	858,4	618,15
940,4	879,10	380,2	621,40
820,1		866,8	
Mittel 878,37		Mittel 621,81	
Satz 6. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
919,8		369,0	
845,1	886,12	881,2	627,52
934,5	885,68	378,7	627,53
828,6	880,35	871,5	624,62
929,7	878,32	376,8	622,53
825,3		865,0	
Mittel 882,62		Mittel 625,55	

Satz 7. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators A.

Dynamometer 4.		Dynamometer 3.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
898,0		367,5	
850,5	875,77	870,9	619,52
904,1	872,63	368,8	619,13
831,8	870,10	868,0	618,45
912,7	868,52	369,0	615,77
816,9		857,1	
Mittel 871,76		Mittel 618,22	

Das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachter dritten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{848,45}{630,14} = 1,3464$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{840,08}{622,92} = 1,3486$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{846,66}{629,03} = 1,3460$$

Iso das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu dem des zweiten wie

$$1,3470 : 1 .$$

man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3470 die beobachteten Elongationen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der dritten Reihe allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablesungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3. 5. 7 ergeben:

$$625,20 ; 625,29 ; 621,70$$

die Producte

$$842,15 ; 842,26 ; 837,44$$

der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn das zweite an derjenigen Stelle, die es während der Beobachtungen in Satz 2. 4. 6 gehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den

Ruheständen Satz 3. 5. 7 entnommenen Ablenkungen der veränderten Stellung des Solenoids in der Kette entsprechen. In der folgenden Tafel sind die der ursprünglichen mit denen der veränderten Stellung des Solenoids entsprechenden Ablenkungen des ersten Dynamometers zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I des Solenoids	Beobachtete Ablenkung für Stelle II des Solenoids	Unterschied
3.	842,15	841,56	- 0,59
5.	842,26	842,41	+ 0,15
7.	837,44	835,80	- 1,64
Mittel	840,62	839,92	- 0,70

Auch diese Beobachtungsreihe ist nochmals wiederholt worden, die diesen Beobachtungen zuzuschreibende Genauigkeit daran zu proben, und wir wollen diese vierte Beobachtungsreihe sogleich folgen lassen.

Vierte Reihe.

Untere Einstellung des Commutators B.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
44,8	36,50	+ 4,3	- 1,25
28,2		- 6,8	- 1,25
44,5	36,35	+ 4,3	- 1,15
27,9	36,20	- 6,6	- 1,20
44,6	36,25	+ 4,2	- 1,30
28,1	36,35	- 6,8	
Mittel	36,33	Mittel	- 1,23

Satz 2. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
840,9		592,2	
917,6	879,82	650,3	621,70
843,2	880,80	594,0	622,37
919,2	882,23	651,2	623,40
847,3	884,05	597,2	624,70
922,4		653,2	
Mittel 881,72		Mittel 623,04	
Satz 3. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
794,5		559,9	
970,1	882,67	687,4	623,90
796,0	882,95	560,9	624,00
969,7	885,48	686,8	625,82
806,5	887,97	568,8	627,70
969,2		686,4	
Mittel 884,77		Mittel 625,36	
Satz 4. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
772,9		543,9	
1005,7	886,77	712,1	626,20
762,8	883,15	536,7	623,57
1001,3	882,50	708,8	623,15
764,6	882,25	538,3	623,00
998,5		706,6	
Mittel 883,67		Mittel 623,98	

Satz 5. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
744,1		524,2	
4023,3	883,92	724,3	624,45
745,0	883,75	525,0	624,32
4021,7	885,80	723,0	625,80
754,8	883,37	532,2	624,15
4002,2	879,68	709,2	621,60
759,5		535,8	
Mittel 883,30		Mittel 624,06	
Satz 6. Kette geschlossen.			
Obere Einstellung des Commutators A.			
988,3		698,9	
779,0	883,07	550,1	623,95
986,0	879,20	696,7	621,00
765,8	878,93	540,5	620,75
998,1	884,37	705,3	624,72
775,5		547,8	
Mittel 881,39		Mittel 622,61	
Satz 7. Kette geschlossen.			
Untere Einstellung des Commutators A.			
960,0		678,2	
805,4	884,25	570,5	625,37
966,2	882,20	682,3	623,75
791,0	876,15	559,9	619,38
956,4	875,35	675,4	618,87
797,6		564,8	
Mittel 879,49		Mittel 621,84	

Das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, wenn die Ablenkung des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser vierten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{845,89}{624,27} = 1,3542$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{847,84}{625,21} = 1,3553$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{845,06}{623,84} = 1,3546$$

Man erhält also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten wie

$$1,3547 : 1 .$$

Man nimmt nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3547 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3. 5. 7 ergeben:

$$626,59 ; 625,29 ; 623,07$$

Man erhält die Producte

$$848,84 ; 847,10 ; 844,10$$

Man vergleicht die Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn es die Stelle in der Kette, die es während der Beobachtungen 4. 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den Ruheständen Satz 3. 5. 7 entnommenen Ablenkungen die ursprüngliche Stellung des Solenoids des ersten Dynamometers in der Kette entsprechen. In der folgenden Tafel sind die der ursprünglichen und der veränderten Stellung des Solenoids in der Kette entsprechenden Ablenkungen zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I des Solenoids	Beobachtete Ablenkung für Stelle II des Solenoids	Unterschied
3.	848,84	848,44	— 0,40
5.	847,10	846,97	— 0,13
7.	844,10	843,16	— 0,94
Mittel	846,68	846,19	— 0,49

Vergleicht man mit diesen aus der *vierten* Beobachtungsreihe gegebenen Mittelwerthen die aus der *dritten* Beobachtungsreihe erhaltenen, so ergibt sich das Verhältniss der Ablenkungen an beiden Stellen übereinstimmend, dass es für alle weiteren Betrachtungen offenbar genügt, die Mittel aus beiden Reihen in Rechnung zu bringen, nämlich die Ablenkung des Solenoids

an Stelle I 843,65

an Stelle II 843,055 .

Hieraus ergeben sich nun zur Bestimmung des Unterschieds der Schwingungsphasen an Stelle I und II nach Art. 24 die Werthe

$$u = \frac{1}{2} \text{arc tang } \frac{843,65}{2100} = 10^\circ 56' 37''$$

$$v'' = \frac{1}{2} \text{arc tang } \frac{843,055}{2100} = 10^\circ 56' 11''$$

Die letztere Angabe würde noch einer kleinen Correction bedürftig sein, wenn man nach dem Ergebniss des vorhergehenden Artikels nicht die Schwingungsamplitude an den beiden Stellen I und II als gleich betrachtet, sondern den kleinen Unterschied der sich ergeben, ungeachtet er in keiner Weise verbürgt werden kann, in Rechnung bringen würde. Es würde dann $v'' = 10^\circ 56' 13''$ zu setzen sein. Indess werden wir uns hier an die erstere Angabe halten, weil gar kein Grund vorliegt, eine solche Ungleichheit der Schwingungsamplitude, da sie ebenungsmässig gar nicht sicher festgestellt werden kann, anzunehmen.

Hienach ergibt sich endlich zur Bestimmung des Phasenunterschieds 2λ an den beiden Stellen I und II nach Art. 24

$$\sin \lambda^2 = \frac{u - v''}{2 \sin u (\cos u + (u - v'') \sin u)} = 0,000329$$

folglich

$$2\lambda = 2^\circ 4' 43'' ,$$

was etwa dem 87^{sten} Theile der Schwingungsdauer entspricht.

Auch diese Bestimmung des *Phasenunterschieds* beruht auf einer kleinen Differenz in den beobachteten Ablenkungen, welche nur theilweise betrügt, dass sie *ebenso wenig als erfahrungsmässig sicher festgestellt betrachtet werden kann, wie die geringe Verschiedenheit der Schwingungsamplitude im vorhergehenden Artikel.*

29.

Resultat der Prüfung.

Die Art. 27. 28 beschriebenen Beobachtungen dienen den im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Gesetzen in Beziehung auf das Verhalten der *Schwingungsamplituden* und *Schwingungsphasen* an verschiedenen Stellen eines geschlossenen Leiters zur Prüfung, und es ist dadurch die Gleichheit von Amplituden und Phasen noch für sehr schnelle Schwingungen in einem sehr langen geschlossenen Leitungsdrahte bestätigt gefunden worden. Die zu diesen Beobachtungen gebrauchte Methode gleichzeitiger correspondirender Beobachtungen an zwei in ihrer Schwingungsdauer genau übereinstimmenden Dynamometern gestattete dabei eine sehr grosse Genauigkeit, und es würde sich damit diese Prüfung noch viel weiter erstrecken lassen, wenn die Mittel zu noch schnellerer Rotation des Magnets und zur Herstellung noch längerer Leitungsketten vorhanden wären. Eine solche weitere Ausdehnung dieser Prüfung würde aber, wie es scheint, die darauf zu verwendende Mühe und den Aufwand nicht hinreichend lohnen, und es dürfte deren Ausdehnung bis zu 520 Schwingungen in 1 Secunde und bis 10 Meilen Länge der Kette bei den beschriebenen Beobachtungen schon genügen. Zwar leuchtet ein, dass auch dann, wenn Amplituden und Phasen elektrischer Schwingungen in geschlossenen Ketten im Allgemeinen nicht überall gleich wären, doch ihre Verschiedenheiten desto kleiner werden müssten, je grösser die von der Rotationsgeschwindigkeit abhängige *Schwingungsdauer* und je kürzer der *Leitungsdraht* wäre, so dass diese Unterschiede bei immer wachsender Schwingungsdauer und abnehmender Länge des Leitungsdrahts endlich unmerklich werden müssten. Es kann daher die beabsichtigte Prüfung ihren Zweck nur dann erreichen, wenn sie sich beträchtlich über die Grenzen hinaus erstreckt, innerhalb deren eine solche Ausgleichung in jedem Falle stattfinden müsste, und es fragt sich also, ob eine Leiterlänge von 10 Meilen und eine Schwingungsdauer von $\frac{1}{317}$ Secunde dazu genüge.

Man denke sich von einem Punkte der Kette einen *einfachen Wellenzug* ausgehend und betrachte denselben während des *ersten Umlaufs*. Die Wellendauer betrage $\frac{1}{317}$ Secunde und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei die normale $c\sqrt{\frac{1}{4}} = 41950$ Meilen. In diesem Falle würde,

von er sich darstellen liesse, eine *Abnahme der Amplitude* der von dem Wellenzuge hervorgebrachten elektrischen Schwingung mit der Entfernung von der Stelle, von welcher der Wellenzug ausgeht, und für jeden Augenblick ein mit derselben Entfernung wachsender *Phasenunterschied* statt finden, die sich beide leicht bestimmen liessen.

Für einen solchen *einfachen Wellenzug* kann nämlich die Verschiebung eines elektrischen Theilchens σ durch folgende Gleichung dargestellt werden :

$$\sigma = Ae^{-\epsilon t} \cdot \sin 520 \pi \left(t - \frac{s}{c} \sqrt{2} \right),$$

worin nach Art. 45 $\epsilon = \frac{c}{46\pi\alpha\alpha k M''}$, und $M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha}$ näherungsweise gesetzt werden darf. Da nun ferner nach Art. 46 $\frac{1}{\pi\alpha\alpha k} = w' = \frac{16 \cdot 10^4}{\pi\alpha\alpha \cdot \alpha}$, folglich $\epsilon = \frac{10^4}{2\pi\alpha\alpha \log \frac{8a}{\alpha}}$, und für unsere Kette $2\pi\alpha = 76 \cdot 10^6$ Millimeter und $\alpha = \frac{1}{4}$ Millimeter betrug, so erhält man

$$\epsilon = 477000.$$

Einer Entfernung $s = 38 \cdot 10^6$ Millimeter (etwa 5 Meilen) entspricht nun bei der Fortpflanzung der Zeitraum $t = \frac{s}{c} \sqrt{2} = \frac{1}{8177}$ Secunde, folglich das Verhältniss der Amplituden am Ausgangspunkte und in 5 Meilen Entfernung davon :

$$1 : e^{-\epsilon t} = 1 : e^{-54,7} = 573 \cdot 10^{21} : 1,$$

wonach also die *Amplitude* in 5 Meilen Entfernung so klein geworden ist, dass sie gegen die am Ausgangspunkte des Wellenzugs ganz verschwindet.

Der *Phasenunterschied* für einen gegebenen Augenblick am Ausgangspunkte des Wellenzugs und in der Entfernung $= s$ davon wird durch $520 \frac{\pi s}{c} \sqrt{2}$ dargestellt, also, für $s = 38 \cdot 10^6$, durch $0,0636 \cdot \pi = 10^\circ 27'$, ein Phasenunterschied, der bei der Genauigkeit, welche die Beobachtungen nach dem vorhergehenden Artikel gestatten, keineswegs als unmerklich betrachtet werden kann.

Nach diesem aus der Betrachtung der Elementarwellen entnommenen Ueberschlage dürfen die in den vorhergehenden Artikeln beschriebenen Versuche als hinreichend zur Prüfung der im vorigen Abschnitte in Beziehung auf die Verhältnisse der Amplituden und der Phasen elektrischer Schwingungen in geschlossenen Leitern aufgestellten Gesetze betrachtet werden.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die gefundene Gleichheit der Schwingungsamplitude an verschiedenen weit von einander entfernten Stellen des geschlossenen Leitungsdrahts zugleich auch als Beweis dienen kann, dass dieser mit Seide umspinnene Draht für elektrische Strömungen, wie sie durch den rotirenden Magnet hervorgebracht wurden, als hinreichend isolirt zu betrachten ist; denn bei unvollkommener Isolation hätten die Strömungen in den vom Inductor entfernten Theilen der Kette schwächer als in den dem Inductor näher liegenden sein müssen.

30.

Beobachtungen über die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets.

Nachdem die Gleichheit der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen für die längste Kette und für die grösste Rotationsgeschwindigkeit des Magnets, welche sich mit den gegebenen Mitteln darstellen liessen, bestätigt worden ist, woraus von selbst einleuchtet, dass diese Gleichheit um so mehr bei kürzeren Ketten und kleineren Rotationsgeschwindigkeiten statt finde; so bleibt für die *quantitative Prüfung* der in vorhergehenden Abschnitte entwickelten Gesetze hauptsächlich nur noch die Prüfung des Gesetzes der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets*, für die nämliche Kette, übrig.

Aus der Gleichheit der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen in allen Theilen eines geschlossenen Leiters geht von selbst hervor, dass die Intensität der Strömung in irgend einem Punkte stets der mittleren Strömungsintensität im ganzen Leiter gleich ist. Das Gesetz für die *Mittelwerthe der Strömungsintensitäten* in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den *Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte* ist nun Art. 9, unabhängig von der Betrachtung der Gestalt des geschlossenen Leiters, entwickelt worden, und es ist daraus Art. 24 das Gesetz dieser Abhängigkeit für den Fall näher bestimmt worden, wo dieser *Mittelwerth der elektromotorischen Kräfte* sich proportional dem Sinus eines mit der Zeit proportional wachsenden Bogens ändert, was statt findet, wenn die elektromotorischen Kräfte durch *Rotation eines kleinen Magnets* hervorgebracht werden. Wurde nämlich hiemach die *mittlere*

elektromotorische Kraft $= g_0 \sin \mu t$ gesetzt, so ergab sich für die *mittlere Stromintensität* das Gesetz

$$i = - \frac{g_0}{w'} \cdot \sin \varphi_0 \cos (\mu t + \varphi_0),$$

worin w' den Widerstand der Längeneinheit des Leiters bezeichnet, und $\tan \varphi_0 = \frac{\pi a c c w'}{4 \mu \int M''_0 ds}$ war. Nach diesem Gesetze hängt aber die *Strömungsintensität* i bei einer gegebenen Kette und bei gegebener *Stärke* und *Lage* des Magnets, für die der Widerstand w' und der von der *Gestalt* der Kette abhängige Coefficient $\int M''_0 ds$, so wie auch der von der *Stärke* des Magnets und seiner *Lage* zur geschlossenen Kette abhängige Factor g_0 bestimmte Werthe haben, bloss noch von der durch μ zu bestimmenden grösseren oder kleineren *Rotationsgeschwindigkeit* ab, indem $\frac{\mu}{2\pi}$ die Zahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit bezeichnet.

Ausser dem Gesetze der *Abhängigkeit der Strömungsintensität von der Rotationsgeschwindigkeit* des Magnets könnte zwar ferner auch noch der *absolute Werth der Strömungsintensität* i in seiner *Abhängigkeit* von den *absoluten Werthen der Constanten* w' , $\int M''_0 ds$, und g_0 einer Prüfung unterworfen werden; doch was die *Abhängigkeit* von w' und g_0 betrifft, so ist dieselbe für verschwindende Werthe von μ schon geprüft, wo $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ und folglich

$$i = \frac{g_0}{w'}$$

erhalten wird, was das bekannte und durch die Erfahrung fest begründete Ohm'sche Gesetz ist; was aber die *Abhängigkeit* von $\int M''_0 ds$ betrifft, so würde diese Prüfung leicht zu machen sein, sobald nur analytische Methoden vorhanden wären, den Werth der Constanten $\int M''_0 ds$ aus der *Gestalt* des geschlossenen Leiters leicht zu bestimmen. Die *Kenntniss* dieses Werths für einen *kreisförmigen* Leiter genügt nicht, weil die *Beobachtungen*, zu denen ein *Inductor* und zwei *Dynamometer* nothwendig sind, mit einem *kreisförmigen* Leiter nicht ausgeführt werden können.

Die Ausführung der verlangten *quantitativen Prüfung* fordert aber eine genaue *Kenntniss* der Instrumente, mit welchen die *Beobachtungen* gemacht werden, insbesondere eine genaue *Kenntniss* von den gebrauchten *Dynamometern*. Eine zweckmässige *Einrichtung* zur *Regulirung* der gegenseitigen *Lage* des *Multiplicators* und *Solenoids* jedes *Dynamometers*, sowie zur *Regulirung* der *Schwingungsdauer* des *Solenoids* vorausgesetzt,

weckmässige *Aufstellung* und so-
 an. Die *Aufstellung* des Dynamo-
 die *Solenoidaxe horizontal und dem mag-*
 die *Axe des das Solenoid umschliessenden*
horizontal sein, und mit der Solenoidaxe einen
 der Mittelpunkt des Multiplicators soll mit dem
 Solenoids zusammenfallen. Ist dies näherungsweise
 gemacht, so bleibt zu erörtern übrig, wie
Abweichungen, die mit dem Instrumente selbst gemacht wer-
 könne, ob die angeführten Bedingungen genau erfüllt sind,
 gross die noch vorhandenen *Abweichungen* sind, sowie, welche
 re nöthig sind, auch diejenigen *Elemente des Instruments* zu be-
 , deren Kenntniss nöthig ist, wenn aus den damit gemachten
 stungen *genaue quantitative Bestimmungen* abgeleitet werden

31.

Prüfung des Dynamometers.

Der Zweck einer solchen Prüfung des Dynamometers lässt man
 von einer *constanten Säule*, welcher zugleich durch den Multipli-
 ner *Tangentenboussole* geführt wird, die zur Bestimmung der
Intensität dient, durch das *Solenoid*, bald *vorwärts*, bald *rückwärts*,
 durch den *Multiplicator* gehen, während derselbe mit dem Solenoide
parallel, bald *kreuzweise* verbunden ist, was durch einen *Commu-*
 dessen Doppelzellen die Enden des Solenoid- und Multiplicator-
 geführt sind, leicht bewerkstelligt wird. In allen diesen 4 Fällen
Ablenkung des Solenoids von der ursprünglichen Gleichgewichts-
 bekannte Weise beobachtet. Aus diesen 4 Beobachtungen wer-
 die Abweichung der Solenoidaxe von dem magnetischen Meri-
 der ursprünglichen Gleichgewichtslage = μ , 2) die Abweichung
 der Solenoidaxe und von der Multiplicatoraxe gebildeten Win-
 einem rechten Winkel = δ , 3) das Verhältniss der vom Erd-
 mus auf das Solenoid, bei gegebener Stromintensität in dem-
 ausgeübten Directionskraft zu der statischen Directionskraft des
 s = ϵ , 4) das Verhältniss der vom Multiplicator auf das Sole-

noid, bei gegebener Stromintensität in beiden, ausgeübten Directions-
kraft zu der statischen Directionskraft des Solenoids $= x$ bestimmt.

Die Beobachtung giebt die *Ablenkung* des Solenoids von der ur-
sprünglichen Gleichgewichtslage in Skalentheilen und wird die Zahl
dieser Skalentheile mit dem doppelten Abstand des Spiegels von der
Skale, $= R$ Skalentheilen, dividirt, so erhält man für kleinere Ablen-
kungen dieselben im *Bogenwerth* ausgedrückt, welcher in den angegebe-
nen 4 Fällen mit a, b, c, d bezeichnet werden möge. Es ergibt sich
dann

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(\frac{c+b}{c-b} + \frac{d+a}{d-a} \right) \\ \varepsilon &= \frac{da - cb - (db - ca) x}{d + c - b - a} \\ \delta &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{c+b}{c-b} - \frac{d+a}{d-a} \right) \\ \mu &= \frac{1}{x} (\varepsilon - (1 + x - \delta\varepsilon) a) . \end{aligned}$$

Zum Beweise braucht man nur nach bekannten Gesetzen das *statische*,
erdmagnetische und *elektrodynamische* Drehungsmoment, welche auf das
Solenoid wirken, zu bestimmen, deren Summe für das bei der beobach-
teten Ablenkung statt findende Gleichgewicht $= 0$ zu setzen ist.

Bezeichnet s die *statische* Directionskraft, so ist bei einer Ablenkung
 $= \varphi$ von der *statischen* Gleichgewichtslage, welche statt gefunden hatte,
ehe ein Strom durch die Kette ging, das *statische* Drehungsmoment
 $= - s \sin \varphi$.

Bezeichnet ferner i die *Stromintensität*, positiv wenn das durch-
strömte Solenoid einem mit seinem Nordpol nach Norden gerichteten
Magnete äquivalent ist, bezeichnet mi die *erdmagnetische* Directionskraft,
wonach m das Product des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in
die vom Solenoiddrahte umwundene Fläche ist; bezeichnet endlich μ ,
wie schon bemerkt, den Winkel, den die Solenoidaxe beim *statischen*
Gleichgewichte mit dem magnetischen Meridiane macht; so ist das *erd-*
magnetische Drehungsmoment

$$= - mi \sin (\varphi + \mu) ,$$

oder, wenn μ sehr klein ist,

$$= - mi (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) .$$

Bezeichnet endlich $\left(\frac{\pi}{2} + \delta \right)$ den Winkel, welchen die nach Osten
gerichtete Multiplicatoraxe mit der nach Norden gerichteten Solenoidax

ldet; bezeichnet ferner eii die vom Multiplicator auf das Solenoid ausübte elektrodynamische Directionskraft, e positiv wenn Multiplicator und Solenoid so mit einander verbunden sind, dass der Multiplicator bei positivem i in seinen Fernwirkungen einem mit seinem Südpole nach Osten gerichteten Magnet äquivalent ist; so ist das *elektrodynamische Drehungsmoment*

$$= eii \cos(\varphi - \delta),$$

oder, wenn δ sehr klein ist,

$$= eii (\cos \varphi + \delta \sin \varphi).$$

Die Bedingung des Gleichgewichts des Solenoids bei der beobachteten Ablenkung φ besteht nun darin, dass die Summe dieser drei Momente = 0 ist, d. i.

$$-s \sin \varphi - mi (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) + eii (\cos \varphi + \delta \sin \varphi) = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $-s \cos \varphi$ und beachtet, dass für $\tan \varphi$ der *Bogenwerth der beobachteten Ablenkung*, d. i. a im *ersten* der betrachteten Fälle, gesetzt werden kann, so erhält man folgende Gleichung

$$a + \frac{mi}{s} (a + \mu) - \frac{eii}{s} (1 + \delta a) = 0.$$

In diesem *ersten* Falle ging der Strom durch den Solenoiddraht *vorwärts* und das Solenoid war mit dem Multiplicator *parallel* verbunden. In dem *zweiten* Falle, wo der Strom durch den Solenoiddraht ebenfalls *vorwärts* ging, aber das Solenoid mit dem Multiplicator *kreuzweise* verbunden war, bleibt die Stromintensität i positiv, aber e wechselt das Vorzeichen, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung b für $\tan \varphi$ zu setzen ist, wonach

$$b + \frac{mi}{s} (b + \mu) + \frac{eii}{s} (1 + \delta b) = 0.$$

Im *dritten* Falle, wo der Strom durch den Solenoiddraht *rückwärts* ging, das Solenoid mit dem Multiplicator aber, wie im ersten Falle, *parallel* verbunden war, wechselt i das Vorzeichen und e ist positiv wie im ersten Falle, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung c für $\tan \varphi$ zu setzen ist, wonach

$$c - \frac{mi}{s} (c + \mu) - \frac{eii}{s} (1 + \delta c) = 0.$$

Im *vierten* Falle endlich, wo der Strom durch den Solenoiddraht *rückwärts* ging, wie im dritten Falle, und das Solenoid mit dem Multiplicator *kreuzweise* verbunden war, wie im zweiten Falle, ist i negativ wie im

dritten und ϵ negativ wie im zweiten Falle, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung d für $\tan \varphi$ zu setzen ist, wonach

$$d - \frac{mi}{s} (d + \mu) + \frac{cii}{s} (1 + \delta d) = 0 .$$

Aus diesen 4 Gleichungen ergeben sich die angegebenen Werthe von κ , ϵ , δ , μ , wenn man κ für $\frac{mi}{s}$ und ϵ für $\frac{cii}{s}$ schreibt.

Als Beispiel diene das zu den folgenden Versuchen gebrauchte Dynamometer, für welches die Beobachtungen nach Skalentheilen ergeben hatten:

$$2Ra = + 440,01$$

$$2Rb = - 443,81$$

$$2Rc = + 448,26$$

$$2Rd = - 450,68 .$$

Es war dabei $2R = 5075$ Skalentheile. Hieraus folgt nun

$$\kappa = 0,008484$$

$$\epsilon = 0,0880$$

$$\delta = - 0,0397$$

$$\mu = + 0,0323 .$$

Die Werthe von κ und ϵ , die sich leicht, wenn die Stromintensität i mit Hilfe einer Tangentenboussole gemessen worden ist, auf die für die Einheit der Stromintensität geltenden Normalwerthe zurückführen lassen, geben die *Elemente für die Stärke des Solenoids und für die Empfindlichkeit des Dynamometers*. Die beiden andern Werthe δ und μ beziehen sich dagegen auf die *Aufstellung* und geben die *Abweichungen* dieser Aufstellung von den für sie vorgeschriebenen Bedingungen. Es ergibt sich nämlich daraus, dass die Solenoidaxe mit der Multiplicatoraxe, statt eines rechten Winkels, den Winkel

$$\frac{\pi}{2} + \delta = 87^\circ 43' 31''$$

bildet, und dass die Solenoidaxe, statt beim *statischen* Gleichgewicht mit dem magnetischen Meridiane zusammen zu fallen, davon um den Winkel

$$\mu = 1^\circ 51'$$

nach Osten abweicht. Man sieht hieraus, dass, wenn das Instrument auf feinen Gradtheilungen versehen ist, die Fehler der Aufstellung sich hin nach sehr leicht genau berichtigen lassen. — Bleiben aber auch diese

kleinen Fehler der Aufstellung unverbessert, so kann man doch die mit dem Instrumente gemachten Beobachtungen verbessern und diejenigen Werthe berechnen, die man bei genauer Aufstellung erhalten haben würde.

Für den Zweck der folgenden Schwingungsversuche kommt wegen des dabei statt findenden schnellen Wechsels des Vorzeichens von i die letztere mit μ bezeichnete Abweichung nicht in Betracht, sondern nur die mit δ bezeichnete Abweichung, und es ergibt sich leicht für eine in Skalentheilen beobachtete Ablenkung x' der verbesserte Werth x

$$x = x' - \frac{\delta x' x'}{2R} = x' + \frac{x' x'}{127780} .$$

Die in den folgenden Artikeln enthaltenen Beobachtungen waren der Anfang einer von mir und R. Kohlrausch gemeinschaftlich unternommenen Arbeit, welche durch die Krankheit und den Tod meines theuren Freundes unterbrochen worden ist. Die dabei gebrauchten Vorrichtungen zur gleichförmig schnellen Drehung des Magnets und zur Messung dieser Geschwindigkeit sind nebst den darauf sich beziehenden Beobachtungen von ihm ausgeführt worden.

32.

Erste Reihe.

Die folgende Beobachtungsreihe ist von R. Kohlrausch und mir gemeinschaftlich am 12. April 1857 ausgeführt worden. Sie betrifft die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets*, und wurde mit vier verschiedenen Ketten gemacht, zu denen aber immer das nämliche *Dynamometer* und die nämliche *Inductorrolle* gehörten, die aus einem Stücke eines sehr feinen Kupferdrahts von ungefähr 1500 Meter Länge, mit einem Widerstande nach absolutem Maasse = $23 \cdot 10^{12}$, welches der constante Theil der 4 Ketten war, gebildet waren. Hiezu kam

bei der ersten Kette	A	ein 2800 Meter langes Stück,	dessen Widerstand =	$8,79 \cdot 10^{12}$
» » zweiten »	B	» 5600 » » » »	» =	$18 \cdot 10^{12}$
» » dritten »	C	» 8000 » » » »	» =	$27 \cdot 10^{12}$
» » vierten »	D	» 10800 » » » »	» =	$35 \cdot 10^{12}$.

Die Skale war in einer Entfernung von 2537,5 Skalentheilen von dem in Solenoid befestigten kleinen Planspiegel fest aufgestellt, unter rechtem Winkel mit der Spiegelnormale beim statischen Gleichgewicht des Sole-

noids, und wurde von der Verticalebene der Spiegelnormale im 800^{sten} Skalentheile geschnitten. Das hinter der Skale aufgestellte Fernrohr konnte so verrückt werden, dass beim statischen Gleichgewicht des Solenoids bald der 800^{ste} Skalentheile, bald ein höherer oder niederer Skalentheile am Fadenkreuz beobachtet wurde, um damit die Ablenkung des Solenoids, auch wenn sie über die halbe Skalenlänge hinausging, beobachten zu können.

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
A.	288,80	361,69	1475,85	+1114,16	+1114,84	+1121,51
	217,80	362,52	1242,34	+ 879,82	+ 879,80	+ 885,86
	144,77	363,13	892,45	+ 529,32	+ 526,91	+ 529,08
	106,46	363,13	710,41	+ 347,28	+ 343,61	+ 344,53
	289,88	363,13	1480,61	+1117,48	+1115,01	+1124,74
	107,26	1210,44	857,52	— 352,92	— 349,96	— 349,00
	140,46	1210,44	681,63	— 528,81	— 527,08	— 524,90
	215,10	1210,44	328,91	— 881,53	— 881,42	— 875,34
	281,68	1210,44	97,05	—1113,39	—1109,88	—1100,24
B.	106,76	800,15	630,73	— 169,42	— 169,23	— 169,01
	142,74	800,15	561,78	— 238,37	— 237,84	— 237,40
	216,80	800,15	463,11	— 337,04	— 335,55	— 334,67
	290,26	800,15	410,90	— 389,25	— 386,95	— 385,78
	106,84	800,24	969,02	+ 168,78	+ 168,59	+ 168,81
	144,15	800,24	1040,27	+ 240,03	+ 239,49	+ 239,94
	217,90	800,24	1136,55	+ 336,31	+ 334,84	+ 335,72
	288,04	800,24	1185,91	+ 385,67	+ 383,44	+ 384,59
C.	107,12	800,24	897,67	+ 97,43	+ 97,39	+ 97,46
	144,32	800,24	931,32	+ 131,08	+ 131,00	+ 131,13
	214,80	800,24	971,13	+ 170,89	+ 170,69	+ 170,92
	289,62	800,24	988,77	+ 188,53	+ 188,26	+ 188,54
	108,60	800,24	701,11	— 99,13	— 99,09	— 99,01
	143,68	800,24	669,66	— 130,58	— 130,50	— 130,37
	219,78	800,24	628,57	— 171,67	— 171,47	— 171,24
	286,90	800,24	611,76	— 188,48	— 188,21	— 187,94

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
D.	108,42	800,58	731,93	- 68,65	- 68,63	- 68,59
	144,44	800,58	711,98	- 88,60	- 88,57	- 88,51
	217,68	800,58	689,18	-111,40	-111,35	-111,25
	289,56	800,58	679,54	-121,04	-120,97	-120,86
	430,80	800,58	675,17	-125,41	-125,33	-125,21
	433,06	801,30	926,27	+124,97	+124,89	+125,01
	109,06	801,30	869,69	+ 68,39	+ 68,37	+ 68,41
	143,50	801,30	888,91	+ 87,61	+ 87,58	+ 87,64
	217,12	801,30	912,31	+111,01	+110,96	+111,06
	286,92	801,30	922,00	+120,70	+120,63	+120,74

Die Werthe von x' in der vorletzten Columne sind aus den in der vorhergehenden Columne angegebenen Ablenkungen y nach der Formel $= y - \frac{y^2}{5075^2}$ berechnet, wodurch man mit hinreichender Genauigkeit $= 2R \tan \varphi$ erhält, wenn die beobachtete Ablenkung $y = R \tan 2\varphi$ ist. Nur bei den Beobachtungen mit der Kette A, wobei das Fernrohr erschoben war, geben die in der drittletzten Columne angeführten Ablenkungen nicht unmittelbar die Werthe von $R \tan 2\varphi$, sondern dieselben müssen daraus auf folgende Weise berechnet werden. Theilt man den in dieser Columne angegebenen Werth der Ablenkung y' in zwei Theile, nämlich in den Theil y'' , welcher von dem beim statischen Gleichgewichte beobachteten Skalentheil bis zum 800^{sten} Skalentheil reicht, und in den Theil y''' , welcher vom 800^{sten} Skalentheil bis zu dem bei der Ablenkung beobachteten Skalentheil reicht, so erhält man

$$y = R \tan 2\varphi = \frac{y'}{1 - \frac{y'' y'''}{RR}}$$

woraus für $R = 2537,5$ der Werth von $x' = 2R \tan \varphi$ leicht berechnet werden kann.

An den so berechneten Werthen von x' war nun endlich noch die im Schlusse des vorigen Artikels angegebene Correction anzubringen, wonach die in der letzten Columne angegebenen Werthe von $x = x' + \frac{x x'}{137780}$ berechnet sind.

$$\pm x = \frac{\pi^2 a a' a'' n n' c^2 g'_0 g''_0 \text{ mm}}{16 (\int M''_0 ds)^2 \cdot \text{mm} + a^2 c^2 w^2} \cdot \frac{2R}{S},$$

ann

$$C = \frac{\pi^2 a a' a'' n n' g'_0 g''_0}{a w' w''} \cdot \frac{2R}{S}, \quad P = \frac{16 (\int M''_0 ds)^2}{a^2 c^2 w^2}$$

wird,

$$C - Px - \frac{x}{\text{mm}} = 0,$$

und P constante Werthe für alle Beobachtungen sind, welche elben Kette, mit demselben rotirenden Magnet und mit dem dynamometer gemacht worden. Der Werth von x , von dessen en abgesehen wird, ist hiebei immer *positiv* zu nehmen.

nach ergeben sich aus den in der Tafel des vorigen Artikels en Beobachtungen folgende Gleichungen zur Bestimmung der en C und P für die Kette A :

$$C - 1121,51 P - \frac{1121,51}{288,80^2} = 0$$

$$C - 885,86 P - \frac{885,86}{217,80^2} = 0$$

$$C - 529,08 P - \frac{529,08}{141,77^2} = 0$$

$$C - 344,53 P - \frac{344,53}{106,46^2} = 0$$

$$C - 1124,74 P - \frac{1124,74}{289,88^2} = 0$$

$$C - 349,00 P - \frac{349,00}{107,26^2} = 0$$

$$C - 524,90 P - \frac{524,90}{140,46^2} = 0$$

$$C - 875,34 P - \frac{875,34}{215,10^2} = 0$$

$$C - 1100,24 P - \frac{1100,24}{281,68^2} = 0$$

die wahrscheinlichsten Werthe von C und P erhalten werden,

$$C = 0,037978, \quad P = 0,000021865.$$

et man auf gleiche Weise die Werthe von C und P für die Ketten d D , so erhält man die in folgender Tafel zusammengestellten

Kette	<i>C</i>	<i>P</i>
<i>A</i>	0,037978	0,000021865
<i>B</i>	0,022795	0,000047050
<i>C</i>	0,015174	0,000068093
<i>D</i>	0,011869	0,000087274

Berechnet man hiemit endlich die Werthe von x aus den gegebenen Werthen von m , so erhält man, nach den Werthen von m geordnet, folgende Vergleichung der berechneten Werthe von x mit den aus den Beobachtungen gefundenen.

<i>A.</i>				<i>B.</i>			
m	Beobachter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied	m	Beobachter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied
106,46	344,53	344,96	-0,43	106,76	169,01	169,12	-0,11
107,26	349,00	349,11	-0,11	106,84	168,81	169,28	-0,47
140,46	524,91	523,48	+1,43	142,74	237,40	237,13	+0,27
144,77	529,08	530,29	-1,21	144,15	239,94	239,51	+0,43
215,10	875,34	873,50	+1,84	216,80	334,67	333,63	+1,04
217,80	885,86	884,34	+1,52	217,90	335,72	334,68	+1,04
281,68	1100,24	1101,83	-1,59	288,04	384,59	385,69	-1,10
288,80	1121,51	1121,81	-0,30	290,26	385,78	386,89	-1,11
289,88	1124,74	1124,77	-0,03				
<i>C.</i>				<i>D.</i>			
107,12	97,46	97,74	-0,28	108,42	68,59	68,87	-0,28
108,60	99,01	99,25	-0,24	109,06	68,41	69,27	-0,86
143,68	130,37	130,21	+0,16	143,50	87,64	87,38	+0,26
144,32	131,13	130,69	+0,44	144,44	88,51	87,79	+0,72
214,80	170,92	169,04	+1,88	217,12	111,06	109,41	+1,65
219,78	171,24	170,89	+0,35	217,68	111,25	109,52	+1,73
286,90	187,94	189,10	-1,16	286,92	120,74	119,38	+1,36
289,62	188,54	189,64	-1,10	289,56	120,86	119,69	+1,17
				430,80	125,21	128,09	-2,88
				433,06	125,01	128,17	-3,16

Mit dieser ersten Prüfung lässt sich nun noch eine zweite verbinden. Nach dem aufgestellten Gesetze sollen nämlich die beiden Constanten C und P dem Quadrate des mittleren Widerstands der Längeneinheit des Leitungsdrahts w' umgekehrt proportional sein; doch sind die übrigen Grössen, von denen die Werthe dieser Constanten nach den angeführten Formeln:

$$C = \frac{\pi^2 a' a' n n' g'_0 g'_0}{a w' w'} \cdot \frac{2R}{S}, \quad P = \frac{16 (\int M''_0 ds)^2}{a^2 c^2 w'^2}$$

abhängen, nicht für alle 4 Ketten, auf welche sich die im vorigen Artikel beschriebenen Beobachtungen beziehen, gleich, sondern die Grösse g'_0 , von der die Constante C abhängt, und die Grösse $\int M''_0 ds$, von der die Constante P abhängt, haben für jede Kette einen besondern Werth. Bezeichnet man nun aber mit l die Länge des ganzen Leitungsdrahts, welche ebenfalls für die 4 Ketten verschiedene Werthe hat, und beachtet, dass $g'_0 \sin \mu t$ für die Zeit t die vom rotirenden Magnet bei derjenigen Geschwindigkeit, für die $m = 1$ ist, im Mittel auf jede Längeneinheit des ganzen Leitungsdrahts ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet; so ergibt sich, dass $l g'_0 \sin \mu t$ für die Zeit t die vom rotirenden Magnet bei derjenigen Geschwindigkeit, für die $m = 1$ ist, auf den ganzen Leitungsdraht ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet. Da aber der rotirende Magnet bloss auf den allen 4 Ketten gemeinsamen Inductor-draht inducirend wirkte, so ergibt sich hieraus, dass $l g'_0$ für alle 4 Ketten gleichen Werth hat; folglich ergibt sich aus der Formel

$$C = \frac{\pi^2 a' a' n n' g'_0 g'_0}{a w' w'} \cdot \frac{2R}{S} = \frac{\pi^2 a' a' n n' (l g'_0)^2}{a} \cdot \frac{2R}{S} \cdot \frac{1}{(lw')^2},$$

dass die Werthe der Constanten C für diese 4 Ketten den Quadraten der Widerstände dieser 4 Ketten umgekehrt proportional sein sollen: denn lw' bezeichnet den Widerstand der ganzen Kette, da w' der mittlere Widerstand der Längeneinheit war.

Um das aufgestellte Gesetz auch in dieser Beziehung zu prüfen, müssen zu den betrachteten Beobachtungen die im Anfange des vorigen Artikels angeführten Werthe der Widerstände jener 4 Ketten hinzugezogen werden, von denen jedoch zu bemerken, dass ihre Bestimmung nicht als Hauptzweck der damaligen Beobachtungen betrachtet wurde, sondern ohne Anspruch auf besondere Genauigkeit (sie beruhete zum Theil auf blosser Vergleichung nach Drahtlängen) nur als kurze Beschreibung zur Unterscheidung der 4 Ketten von einander dienen sollte.

Wir benutzen jedoch auch diese Bestimmungen zur Prüfung des aufgestellten Gesetzes, weil sie, wie alle andern angeführten Beobachtungen, schon vor mehreren Jahren, ohne alle Rücksicht auf die hier entwickelten Gesetze, gemacht worden sind.

Es verhalten sich aber, wie im Anfang des vorigen Artikels angegeben worden ist, die Widerstände der 4 Ketten, jener Bestimmung gemäss, ungefähr wie

$$31,79 : 41 : 50 : 58 ,$$

während dieselben Verhältnisse, dem aufgestellten Gesetze gemäss, durch Division der Zahl 6,2158 durch \sqrt{C} , wie

$$31,89 : 41,17 : 50,46 : 57,06$$

erhalten werden, was mit den obigen Beobachtungs-Resultaten, wie man sieht, ganz wohl übereinstimmt.

34.

Zweite Reihe.

Die folgende von Kohlrausch und mir gleichfalls gemeinschaftlich am 18. und 22. April 1857 ausgeführte Beobachtungsreihe ist im Wesentlichen eine Wiederholung der vorhergehenden, jedoch mit dem Unterschiede, dass bei der vorigen Reihe stets der ganze Leitungsdraht aus einfach aufgewickelten Drahtrollen bestand, während bei der folgenden zwar für die Kette A dasselbe galt, eine andere Kette aber durch Einschaltung eines *Doppeldrahts E* in die Kette A gebildet wurde. Dieser *Doppeldraht E* war aus zwei sehr feinen mit Seide überspinnenen und dadurch von einander isolirten Kupferdrähten zusammengesetzt, die aber durch eine nochmalige gemeinschaftliche Ueberspinnung fest zusammengehalten wurden, in Uebereinstimmung mit der Art. 26 zur Verminderung der von wechselseitiger Induction herrührenden Dämpfung elektrischer Schwingungen gegebenen Vorschrift, welche dadurch erprobt werden sollte. — Zur Verminderung dieser Dämpfung trug ausserdem noch der Umstand etwas bei, dass der Doppeldraht *E*, statt auf einer Rolle aufgewickelt zu werden, auf einem besonderen Statife so aufgespannt wurde, dass alle Windungen wenigstens 20 Millimeter weit von einander abstanden.

Nach Art. 32 hatte die Kette A eine Länge von etwa 4300 Meter mit einem Widerstande nach absolutem Maasse = $3179 \cdot 10^{10}$. Der

draht E hatte 1442 Meter Länge (die Länge des einfachen Drahts so 2824 Meter) mit einem Widerstande = $4292 \cdot 10^{10}$.

on der Aufstellung der Skale und des Ablesungsfernrohrs galt dasselbe, was Art. 32 für die vorhergehende Beobachtungsreihe t worden. — Für jede Kette sind zwei Beobachtungsreihen, die m 18., die zweite am 22. April gemacht worden

\circ	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalenteilen ν	x'	x
E	107,22	801,98	728,42	— 73,56	— 73,54	— 73,50
	139,66	801,98	681,37	— 120,61	— 120,54	— 120,40
	214,10	801,98	542,95	— 259,03	— 258,36	— 257,84
	279,44	801,98	402,21	— 399,77	— 397,29	— 396,06
	108,02	801,98	876,36	+ 74,38	+ 74,36	+ 74,40
	141,82	801,98	926,06	+ 124,08	+ 124,01	+ 124,13
	213,76	801,98	1059,59	+ 257,61	+ 256,95	+ 257,47
	282,80	801,98	1206,57	+ 404,59	+ 402,03	+ 403,29
	280,58	389,64	1468,13	+1078,49	+1075,80	+1084,86
	214,12	425,42	1281,09	+ 855,67	+ 855,32	+ 861,05
	142,58	425,42	954,80	+ 529,38	+ 528,38	+ 530,56
	141,66	425,42	948,80	+ 523,38	+ 522,36	+ 524,50
	103,36	425,42	762,90	+ 337,48	+ 335,26	+ 336,14
	283,60	1193,13	86,44	—1106,69	—1102,50	—1092,99
	215,16	1193,13	323,28	— 869,85	— 869,06	— 863,15
	139,82	1193,13	676,38	— 516,75	— 515,29	— 513,21
110,53	1193,13	827,49	— 365,64	— 363,10	— 362,07	
E	106,10	801,52	730,24	— 71,28	— 71,26	— 71,22
	142,88	801,52	676,72	— 124,80	— 124,73	— 124,61
	214,80	801,52	543,31	— 258,21	— 257,55	— 257,03
	279,92	801,52	404,02	— 397,50	— 395,05	— 393,83
	107,43	801,43	873,91	+ 72,48	+ 72,46	+ 72,50
	141,94	801,43	924,38	+ 122,95	+ 122,88	+ 123,00
	215,64	801,43	1060,12	+ 258,69	+ 258,03	+ 258,55
	279,30	801,43	1194,00	+ 392,57	+ 390,22	+ 391,41

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalenteilen y	x'	x
A	282,02	384,83	1465,47	+1080,64	+1077,20	+1086,28
	217,17	385,13	1249,53	+ 864,40	+ 864,44	+ 869,98
	139,59	385,13	893,92	+ 508,79	+ 506,73	+ 508,74
	107,15	385,13	728,92	+ 343,79	+ 340,65	+ 341,56
	281,96	1202,32	106,96	-1095,36	-1090,85	-1081,54
	217,14	1202,30	329,47	- 872,83	- 872,43	- 866,48
	144,32	1202,30	664,30	- 538,00	- 536,49	- 534,24
	139,56	1202,30	690,03	- 512,27	- 510,54	- 508,50
	106,64	1202,30	860,67	- 344,63	- 340,30	- 339,39

Von der Berechnung der Werthe von x in dieser Tafel gilt dasselbe, was zur vorhergehenden Tafel darüber gesagt ist.

Aus den zusammengehörigen Werthen von m und x in dieser Tafel lassen sich nun die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten C und P für die Ketten A und $A+E$ ebenso berechnen, wie Art. 33 aus den Werthen Art. 32 für die Ketten A, B, C, D . Auf diese Weise sind die in folgender Tafel enthaltenen Resultate erhalten worden.

Kette	C	P
$A+E$	0,006672	0,000004041
A	0,03763	0,00002196
$A+E$	0,006610	0,000004083
A	0,03714	0,00002163

Berechnet man hiemit endlich die Werthe von x aus den gegebenen Werthen von m , so erhält man, nach den Werthen von m geordnet, folgende Vergleichung der berechneten Werthe von x mit den aus den Beobachtungen gefundenen.

A + E.				A.			
	Beobachter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied	m	Beobachter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied
0,22	73,50	73,29	+0,21	103,36	336,14	335,82	+0,32
0,02	74,40	74,34	+0,06	110,53	362,07	362,41	-0,34
0,66	120,40	120,63	-0,23	139,82	513,21	514,68	-1,47
0,82	124,13	124,10	+0,03	141,66	524,50	524,09	+0,41
0,76	257,47	257,34	+0,13	142,58	530,56	528,81	+1,75
0,10	257,84	258,04	-0,20	214,12	861,05	859,37	+1,68
0,44	396,06	396,02	+0,04	215,16	863,15	863,68	-0,53
0,80	403,29	402,55	+0,74	280,58	1084,86	1085,42	-0,56
				283,60	1092,99	1093,70	-0,71
A + E.				A.			
0,10	72,22	71,14	+0,08	106,64	339,39	338,98	+0,41
0,43	72,50	72,85	-0,35	107,15	341,56	341,58	-0,02
0,94	123,00	123,04	-0,04	139,56	508,50	508,97	-0,47
0,88	124,61	124,56	+0,05	139,59	508,74	509,12	-0,38
0,80	257,03	256,62	+0,41	144,32	534,24	533,30	+0,94
0,64	258,55	258,32	+0,23	217,14	866,48	866,96	-0,48
0,30	391,41	391,07	+0,34	217,17	869,98	867,08	+2,90
0,92	393,83	392,37	+1,46	281,96	1081,54	1085,70	-4,16
				282,02	1086,28	1085,85	+0,43

Es verhalten sich endlich, wie im Anfang dieses Artikels angegeben, die Widerstände der beiden Ketten $A + E$ und A zu einander, beobachtung nach, ungefähr wie

$$7471 : 3179 ,$$

und dieses Verhältniss, dem im vorigen Artikel angegebenen Gesetze, welches hier auf gleiche Weise Anwendung findet, dass nämlich die Werthe der Constanten C für die beiden Ketten den Quadraten der Widerstände dieser Ketten umgekehrt proportional sein sollen, durch Division der Zahl 611,75 durch \sqrt{C} , wie

$$7507 : 3164$$

festgestellt wird, was mit dem aus den Beobachtungen gefundenen Verhältnisse so weit übereinstimmt, als die geringe Genauigkeit der Widerstandsmessung zu erwarten berechtigt.

35.

Verhältniss der elektrostatischen Kraft zweier gleichen Elektrizitätsmengen zu ihrer Masse.

Es bleibt endlich noch der dritte nach Art. 23 für genauere Beobachtungen geeignete Gegenstand zu betrachten übrig, nämlich *die Abhängigkeit der Amplituden der von einem rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts*. Genaue Beobachtungen hierüber können nicht bloss zur Prüfung der aufgestellten Gesetze dienen, sondern können, wie Art. 23 schon angeführt worden, ausserdem noch zu einer wesentlichen Erweiterung unserer Kenntniss von der Elektrizität benutzt werden, nämlich zur Bestimmung des noch unbekanntes *Verhältnisses der aus elektrostatischer Wechselwirkung gleicher Elektrizitätsmengen herrührenden Kraft zu deren Masse*.

Bezeichnet man die in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthaltene positive Elektrizitätsmenge nach elektrostatischem Maasse mit \mathcal{E} , so ist die von ihr auf eine gleiche Elektrizitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausgeübte elektrostatische Kraft $= \mathcal{E}\mathcal{E}$, während ihre Masse durch $\frac{1}{r}\mathcal{E}$ ausgedrückt worden ist, woraus das unbekanntes Verhältniss jener Kraft zu dieser Masse $\mathcal{E}\mathcal{E} : \frac{1}{r}\mathcal{E} = r\mathcal{E} : 1$ folgt. Hat nun überhaupt dieses Verhältniss, oder die unbekanntes Grösse $r\mathcal{E}$, einen mit andern bestimmten Grössen vergleichbaren Werth, so lässt sich leicht zeigen, dass dieser Werth aus Beobachtungen der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* am genauesten bestimmt werden könne.

Aus den Art. 8 und 10 aufgestellten Differentialgleichungen elektrischer Bewegung in geschlossenen Leitern ersieht man, dass darin die Grösse $r\mathcal{E}$ nur im Ausdrücke $\frac{4M''(1+\lambda)}{c} = \frac{4M''}{c} + \frac{1}{r\mathcal{E}}$ enthalten ist. Es hängen aber von diesem in den Differentialgleichungen enthaltenen Ausdrücke keinesweges alle aus den Differentialgleichungen bestimmbareren Wirkungen ab; denn zur Bestimmung mancher Wirkungen lassen sich die Differentialgleichungen so vereinfachen, dass jener Ausdruck ganz daraus verschwindet. Es gilt dies, wie Artt. 11, 12 gezeigt worden. von allen Wirkungen beim Gleichgewicht oder bei Erhaltung schon vorhandener Bewegungen, woraus umgekehrt folgt, dass Beobachtun-

gen von Gleichgewichtswirkungen oder von Wirkungen beharrlicher Ströme in keiner Weise zur Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{E}$ dienen können.

Zu den anderen Wirkungen dagegen, bei deren Bestimmung jener die Grösse $r\mathfrak{E}$ enthaltende Ausdruck aus den Differentialgleichungen nicht verschwindet, gehören die durch Induction eines rotirenden Magnets in einem geschlossenen Leitungsdrahte hervorgebrachten *elektrischen Schwingungen*, deren Gesetze Art. 20 aus jenen Differentialgleichungen entwickelt worden sind, wonach nämlich die Strömungsintensität bei einer solchen Schwingung im Leitungsdrahte

$$i = -\frac{1}{w} \sqrt{(ff + gg)} \cdot \cos\left(\mu t + \arctan \frac{f}{g}\right)$$

erhalten wurde, wenn

$$f = \sum \sin \varphi^2 \left(f_n \sin \frac{n\pi}{a} + g_n \cos \frac{n\pi}{a} \right)$$

$$g = \sum \sin \varphi \cos \varphi \left(f_n \sin \frac{n\pi}{a} + g_n \cos \frac{n\pi}{a} \right)$$

$$\tan \varphi = \frac{\mu a^2 c^2 w'}{4(2\mu^2 a^2 M''(1+\lambda) - (n^2 c^2 N''))} = \frac{\mu a^2 w'}{2\mu^2 a^2 \left(\frac{4M''}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right) - 4n^2 N''}$$

war. Nach Art. 21 vereinfacht sich diese Bestimmung für die Strömungsintensität i in den meisten Fällen, nämlich in allen denjenigen Fällen, in welchen alle übrigen Glieder als verschwindend betrachtet werden dürfen gegen dasjenige, welches der Stellenzahl $n = 0$ entspricht. Man erhält nämlich für diese Fälle

$$i = -\frac{g_0}{\sqrt{w'w + 4\mu^2 \left(\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right)^2}} \cdot \cos\left(\mu t + \arctan \frac{w'}{2\mu \left(\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right)}\right),$$

worin nach Art. 10 $M''_0 = 2 \log \frac{8a}{\alpha}$ zu setzen ist. Es geht hieraus hervor, dass die Grösse $r\mathfrak{E}$ durch Messung der Strömungsintensität i bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit des Magnets, nämlich von $\frac{\mu}{2\pi}$ Umdrehungen in der Secunde, und bei gegebener Länge $= 2\pi a$, Dicke $= 2\alpha$ und bei gegebenem Widerstande $= 2\pi a w'$ des Leitungsdrahts, da nach der der Rotationsgeschwindigkeit proportionale Inductionscoefficient g_0 aus der Stärke des inducirenden Magnets und aus seiner Entfernung und Lage zum inducirten Leitungsdrahte bestimmt werden kann, sich ermitteln lassen würde.

Hienach würde es also möglich sein, *ohne die Abhängigkeit der Amplitude elektrischer Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts in*

Betracht zu ziehen, die Grösse $r\mathcal{E}$ *direct* zu bestimmen; jedoch sieht man leicht, dass dieser *directe* Weg praktisch zu keinem *genauen* Resultate führen kann, wenn die Grösse $\frac{1}{r\mathcal{E}}$ ein sehr kleiner Bruch von der Grösse $\frac{M''}{cc}$ ist, zumal wenn man beachtet, dass M''_0 und c in ihrer Bestimmung keiner sehr grossen Genauigkeit fähig sind. Zieht man dagegen die Abhängigkeit der Amplitude der elektrischen Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts mit in Betracht, so lässt sich die Grösse $r\mathcal{E}$ auf folgendem *indirecten* Wege viel genauer bestimmen.

Um die Beobachtung der Abhängigkeit der Amplitude elektrischer Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts zu einer genaueren Bestimmung der Grösse $r\mathcal{E}$ zu benutzen, kommt es wesentlich darauf an, eine Methode zu finden, einem geschlossenen Leitungsdrahte *zwei verschiedene Gestalten* zu geben, für welche entweder die beiden Werthe von M''_0 selbst, oder doch ihr Verhältniss $\nu:1$ einer *genauen* Bestimmung fähig wäre.

Es kommt dabei in Betracht, dass die Entwicklung der Bewegungsgesetze der Elektrizität im ersten Theile dieser Abhandlung *auf kreisförmige Leiter* hat beschränkt werden müssen, für welche eine *wesentliche Vereinfachung* dadurch gewonnen wurde, dass die Werthe der mit M, N, M'', N'' bezeichneten bestimmten Integrale für alle Punkte der Leitercurve gleich waren. Letzteres gilt nun aber auch für ein System von zwei gleichen und parallelen Kreisen, was nur darum, weil es zwei getrennte Leitercurven bildet, nicht in Betracht gezogen werden konnte. Für praktische Zwecke bei der Ausführung der Beobachtungen aber lässt sich ein solches System für einen geschlossenen Leiter von zwei Umwindungen fast in allen Betrachtungen substituieren, und es lassen sich daher die Werthe der bestimmten Integrale M, N, M'', N'' für einen geschlossenen Leiter, welcher zwei gleiche, sehr *nahe* kreisförmige, Umwindungen bildet, dieser Substitution gemäss, für alle Punkte des Leiters gleich setzen, wodurch es möglich wird, die zunächst nur für einen kreisförmigen Leiter aufgestellten Bewegungsgesetze der Elektrizität auf einen geschlossenen Leiter, welcher zwei gleiche, sehr *nahe* kreisförmige Umwindungen bildet, auszudehnen.

Es ergibt sich aber für einen solchen Leiter, wie man leicht sieht, eine sehr *wesentliche Alternative* nach Verschiedenheit der Verbindung seiner beiden Umwindungen mit einander, die *entweder* so beschaffen

1 kann, dass beide Umwindungen von demselben Strome nach einander in gleichem Sinne durchlaufen werden, *oder* so, dass die zweite Windung im entgegengesetzten Sinne wie die erste durchlaufen wird. In diesen beiden Fällen entsprechen ganz verschiedene Werthe von M , N , N' , deren Verhältniss zu einander genau bestimmt werden kann. Gilt dies namentlich auch von dem mit M''_0 bezeichneten Werthe der Masse M'' , wenn $n = 0$ ist, und das Verhältniss der beiden Werthe von M'' in den beiden angegebenen Fällen werde $= \nu : 1$ gesetzt.

Wird nun die grösste Strömungsintensität bei einer elektrischen Erregung in diesem Leiter im *ersten* Falle mit A , im *zweiten* mit B bezeichnet, so ist nach Art. 23

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{\left(w'w' + 4\mu\mu \left(\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathcal{E}} \right)^2 \right)}}$$

$$B = \frac{g_0}{\sqrt{\left(w'w' + \mu\mu \left(\frac{4M''_0}{\nu cc} + \frac{1}{r\mathcal{E}} \right)^2 \right)}}$$

Die beiden Werthe A und B können durch Messung bestimmt werden; doch hiebei vorausgesetzt, dass die Induction des rotirenden Magnets sich nicht auf beide Umwindungen des geschlossenen Leiters erstreckt, sondern dass dieselbe auf eine von den beiden Umwindungen, oder nur auf ein Element derselben, beschränkt sei. In der Wirklichkeit tritt an die Stelle dieses Elements der kleine den rotirenden Magnet umschliessende Inductor.

Diese Werthe von A und B können nun aber durch Messung für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten, d. i. für verschiedene Werthe von μ , bestimmt werden, und es leuchtet ein, dass ihr Unterschied bei zunehmenden Werthen von μ bald ganz verschwinden muss. Es bezeichne nun μ_0 einen bestimmten kleinen Werth von μ , für welchen der Unterschied ganz unmerklich sei. Werden nun die alsdann als betrachtenden Werthe von A und B mit C bezeichnet; so ergibt man, da der mit g_0 bezeichnete Inductionscoefficient der Rotationsgeschwindigkeit proportional ist,

$$C = \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \frac{g_0}{w'}$$

so dieser dritte Werth C kann durch Messung bestimmt werden.

Wird nun aus den drei gefundenen Gleichungen, in denen A , B , C durch Messung bekannt sind, g_0 eliminirt, so erhält man folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{w'}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)}$$

$$\frac{4M'_0}{vcc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{w'}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{4M''_0}{cc} = \frac{v}{v-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)} - \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)} \right\}$$

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{1}{v-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ v \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)} - \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)} \right\}.$$

Die *erste* von diesen beiden Gleichungen, in welcher alle Grössen bekannt sind, kann zur Prüfung entweder der Theorie oder der Beobachtungen dienen, während aus der *zweiten* Gleichung die unbekannt Grösse $r\mathfrak{E}$ gefunden wird, wozu es nicht einmal einer genaueren Bestimmung der Grössen M''_0 , g_0 und c , sondern nur des Verhältnisses $v:1$ bedarf.

Die letztere von den beiden gefundenen Gleichungen lässt sich endlich noch in eine etwas einfachere Form bringen, wenn man beachtet, dass der Widerstand der Längeneinheit des Leitungsdrahtes $w' = \frac{1}{\pi a \alpha x}$ ist, wo a der Halbmesser des Drahts und x das spezifische Leitungsvermögen des Metalls ist, und dass ferner die in elektrostatischen Maasseinheiten ausgedrückte positive Elektrizitätsmenge in der Längeneinheit des Leitungsdrahts $\mathfrak{E} = \pi a \alpha \cdot \mathfrak{E}_0$ ist, wo \mathfrak{E}_0 die in elektrostatischen Maasseinheiten ausgedrückte positive Elektrizitätsmenge, welche in der Volumeneinheit des Leitungsdrahts enthalten ist, bezeichnet. Substituirt man diese Werthe, so erhält man:

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{2(v-1)\mu x} \cdot \left\{ v \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)} - \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)} \right\}.$$

Es bleibt hienach nur noch zu betrachten übrig, wie das durch $v:1$ bezeichnete Verhältniss bestimmt werden könne.

Bezeichnet wie bisher $2\pi a$ die Länge des ganzen geschlossenen Leitungsdrahts, von welcher jede der beiden Hälften $= \pi a$ eine Umwindung bildet, und betrachtet man nun diese beiden Umwindungen wie zwei parallele Kreise, deren Mittelpunkte von einander, perpendicular gegen die Kreisebene, in der Entfernung $= \delta$ liegen; so lässt sich der Werth von M''_0 in irgend einem Punkte jenes ganzen Leitungsdrahts in zwei Theile zerlegen, nämlich in denjenigen Theil, welcher von dem Kreise herrührt, dem der betrachtete Punkt selbst angehört, und in denjenigen, welcher von dem andern Kreise herrührt, dessen Abstand von

ersterem $= \delta$ ist. Der *erstere* Theil wird unmittelbar dem Werthe von M''_0 für einen Kreis vom Halbmesser $= \frac{1}{2}a$ gleich gefunden, nämlich nach Art. 16 gleich dem doppelten Logarithmus des Verhältnisses des 8fachen Kreishalbmessers zum Drahhalbmesser, $= 2 \log \frac{4a}{\alpha}$. Der *letztere* Theil wird aus dem ersteren, wie leicht nachzuweisen, erhalten, durch blosse Substitution des Abstands der beiden Kreise δ für den Halbmesser α , nämlich $= 2 \log \frac{4a}{\delta}$. — Sind nun die beiden Umwindungen so mit einander verbunden, dass sie vom Strome in gleichem Sinne durchlaufen werden, so ist der Werth von M''_0 des ganzen geschlossenen Leiters in irgend einem Punkte seiner ersten oder zweiten Umwindung gleich der *Summe* dieser beiden Theile, $= 2 \log \frac{4a}{\alpha} + 2 \log \frac{4a}{\delta}$; sind dagegen die beiden Umwindungen so verbunden, dass die zweite in entgegengesetztem Sinne wie die erste durchlaufen wird, so ist der Werth von M''_0 gleich der *Differenz* der beiden Theile, $= 2 \log \frac{4a}{\alpha} - 2 \log \frac{4a}{\delta}$. Hieraus ergibt sich das gesuchte Verhältniss

$$r:1 = \left(2 \log \frac{4a}{\alpha} + 2 \log \frac{4a}{\delta}\right) : \left(2 \log \frac{4a}{\alpha} - 2 \log \frac{4a}{\delta}\right) = \left(\frac{2 \log \frac{4a}{\alpha}}{\log \frac{4a}{\delta}} - 1\right) : 1.$$

36.

Schluss.

Die im vorigen Artikel enthaltenen Erörterungen über die Bestimmung der Grösse $r\mathcal{E}$ dienen vorzüglich dazu, um an einem speciellen Beispiele zu erläutern, dass *die Abhängigkeit der Amplitude der von einem rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts*, wie Art. 23 angeführt worden, einen dritten für genauere Beobachtung wichtigen und besonders geeigneten Gegenstand bietet, welcher wegen seines vielseitigen Interesses eine sorgfältigere und umfassendere Bearbeitung verdient. Soll die Ausführung *genauer Beobachtungen* über diesen Gegenstand von echtem Nutzen sein, so leuchtet ein, dass damit *erstens* eine umfassendere Erörterung über die Abhängigkeit der Werthe der Art. 8 mit N , r , M , M'' bezeichneten bestimmten Integrale von der Gestalt des Leitungsdrahts, welche in dieser Abhandlung, Art. 10, auf den einzelnen all. wo der Leitungsdraht ein Kreis war, beschränkt geblieben, *zwei-*

	Seite.
Art. 28. Beobachtungen zur Bestimmung des Unterschieds der Phase der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette.	682
„ 29. Resultat der Prüfung	691
„ 30. Beobachtungen über die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets	693
„ 31. Prüfung des Dynamometers	695
„ 32. Erste Reihe	699
„ 33. Berechnung der Beobachtungen.	702
„ 34. Zweite Reihe	706
„ 35. Verhältniss der elektrostatischen Kraft zweier gleichen Elektrizitätsmengen zu ihrer Masse	710
„ 36. Schluss	715

Verbesserungen.

- Seite 601 am Ende der Zeile 10 v. u. lies: $\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma$ statt: $\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma$.
- » 603 Zeile 44 v. u. lies: Hälften statt: Hälfte.
 - » 609 » 42 v. u. lies: hat statt: haben.
 - » 614 » 2 v. o. lies: $2\alpha M''(1+\lambda)$ statt: $2\alpha M''(1-\lambda)$.
 - » 656 » 10 v. o. lies: $\sin \lambda^2$ statt: $\sin \lambda$.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

www.libtool.com.cn

UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD

UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD

LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

www.libtool.com.cn

506
5127
V. 6
1864

**Stanford University Libraries
Stanford, California**

Return this book on or before date due.

--	--	--

www.libtool.com.cn