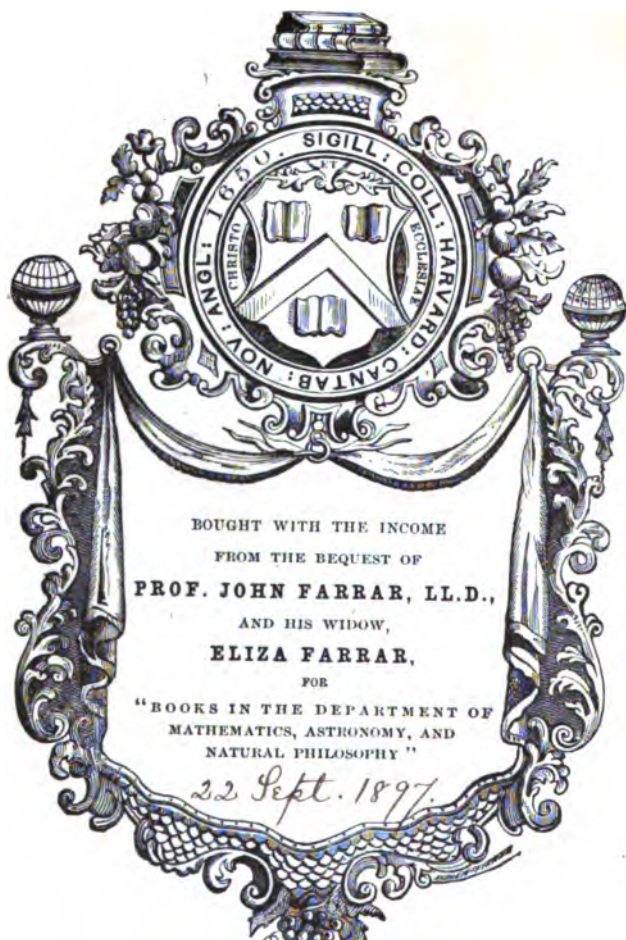


www.libtool.com.cn

Math 3008.91



SCIENCE CENTER LIBRARY

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Padova, Tip. del Seminario.

FRANCESCO D'ARCAIS

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PADOVA

CORSO

DI

CALCOLO INFINITESIMALE

VOLUME II

(CALCOLO INTEGRALE)



PADOVA

ANGELO DRAGHI

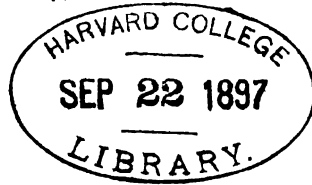
Libraio-Editore

1894

~~VI. 955.2~~

Math 3008.11

www.indoor.com.cn



Farrar fund.

ERRORI

CORREZIONI

Pag. Lin.

1 ultima $f(x)$

$F(x)$

3. La dimostrazione del teorema n. 3 va modificata nel modo seguente:

Poichè $f(x)$ è continua in (a, b) , dato σ , esisteranno infiniti intorno (a, a') , alla destra di a , per tutti i punti x dei quali sarà

$|f(x) - f(a)| < \frac{\sigma}{4}$. Sia a_1 il limite superiore dei valori a' , cosichè sia

$|f(x) - f(a)| < \frac{\sigma}{4}$ per tutti i punti x dell'intorno (a, a_1) , escluso

al più il punto a_1 . Indicando con (a_1, a_2) il limite superiore degli

intorni alla destra di a_1 nei quali è $|f(x) - f(a_1)| < \frac{\sigma}{4}$, sarà

$|f(x) - f(a_1)| < \frac{\sigma}{4}$ per tutti i punti x dell'intorno (a_1, a_2) , escluso al

più il punto a_2 . E così di seguito, otterremo una successione completamente determinata di numeri crescenti $a, a_1, a_2, a_3, \dots$. Sia c il

loro limite superiore. Per la continuità di $f(x)$, esiste un intorno $(c - \alpha, c)$, alla sinistra di c , per tutti i punti x del quale è

$|f(x) - f(c)| < \frac{\sigma}{8}$, ed in questo intorno cadranno tutti i punti a_i ,

$a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$ a cominciare da a_i , i essendo numero finito; avremo

quindi $|f(a_i) - f(c)| < \frac{\sigma}{8}$, ed in conseguenza per tutti i punti x

dell'intervallo (a_i, c) sarà $|f(x) - f(a_i)| < \frac{\sigma}{4}$. Quindi è $a_{i+1} = c$.

D'altra parte dev'essere $c = b$, perchè se fosse $c < b$, i numeri $a_{i+2}, a_{i+3}, \dots$ supererebbero il loro limite superiore c . Dunque, dato

σ , possiamo dividere l'intervallo (a, b) in un numero *finito* di intervalli parziali (a_s, a_{s+1}) , in ogni punto x dei quali, escluso al

più l'estremo superiore a_{s+1} , è $|f(x) - f(a_s)| < \frac{\sigma}{4}$.

Sia δ l'ampiezza del più piccolo di questi intervalli. Siano x', x'' due punti qualunque di (a, b) tali che $|x' - x''| \leq \delta$. O essi appar-

tengono ad un intervallo (a_{s-1}, a_s) ed allora è $|f(x') - f(a_{s-1})| < \frac{\sigma}{4}$

$|f(x'') - f(a_{s-1})| < \frac{\sigma}{4}$ e quindi ancora $|f(x') - f(x'')| < \frac{\sigma}{2} < \sigma$; oppure non potranno appartenere che a due intervalli consecutivi, poniamo x' ad (a_{s-1}, a_s) ed x'' ad (a_s, a_{s+1}) , ed allora abbiamo $|f(x') - f(a_{s-1})| < \frac{\sigma}{4}$, $|f(x'') - f(a_s)| < \frac{\sigma}{4}$. Prendiamo un punto a' in (a_{s-1}, a_s) tale che sia $|f(a') - f(a_s)| < \frac{\sigma}{4}$; abbiamo inoltre $|f(a') - f(a_{s-1})| < \frac{\sigma}{4}$. Dalle quattro precedenti disuguaglianze ricaviamo $|f(x') - f(x'')| < \sigma$.

15	26,28	$\frac{\sigma}{2(b-a)}$	$\frac{\sigma}{3(b-a)}$
16	1	$\frac{\sigma}{2(b-a)}$	$\frac{\sigma}{3(b-a)}$
17	28	con	un
18	20	punto c .	punto del gruppo
22	5	$>$	$>$
23	6	$(m=1,2,\dots)$	$(m=2,3,\dots)$
26	3	$\leq$	$\geq$
49	5	$\arctg \frac{x}{a}$,	$x \arctg \frac{x}{a}$
57	20	B_2	B_1
80	12	$(x-\alpha)^n$	$(x-\alpha)^{n-1}$
»	14	$x-\alpha$	$(x-\alpha)^n$
84	16	$c < 0$	$c > 0$
85	11	$(cx+b)$	$(cx+b)$
92	ultima	$\frac{1}{3} \int \frac{dy}{y^2(y^3-1)}$	$\frac{5}{9} \int \frac{y^2 dy}{y^5-1}$
93	2,3,4,5	$\int x^{-1} (1+bx^9)^{-\frac{3}{5}} dx = \dots$	$\int x^{-1} (1+bx^9)^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{9} \int \frac{y dy}{y^5-1}$ $= \frac{1}{9} \left\{ \log(y-1) \right.$ $- \cos \frac{\pi}{5} \log(y^2 - 2y \cos \frac{2\pi}{5} + 1)$ $+ \cos \frac{2\pi}{5} \log(y^2 + 2y \cos \frac{\pi}{5} + 1)$ $- 2 \sin \frac{\pi}{5} \arctg \frac{y - \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}}$ $\left. + 2 \sin \frac{2\pi}{5} \arctg \frac{y + \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} \right\}$

Pag.	Lin.		
97	7	4	2
98	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$
100	1	$\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}}{1-x^2}$	$\log \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2}$
101	6	$-\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}}$	$-\frac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3}$
		$+\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$	$+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$
102	2	dy	$\frac{dy}{y}$
114	9	$\text{sen } bx \, x dx$	$\text{sen } bx \, dx$
128	11	$a > b$	$a < b$
»	12	$a < b$	$a > b$
»	15	$a > b$	$a < b$
»	17	$a < b$	$a > b$
138	16	$1+t^2$	$1+tg^2 t$
153	11	k^2	k^2
»	12	x^2	x^2
174	ultima	$\int_a^b F(a) \dots$	$\int_a^b F(x) \dots$
175	11	$\sqrt{1-x^3}$	$\sqrt{1-x^2}$
204	4	$\int_0^1$	$\int_0^1$
»	6	qualunque	se $y > 0$ e qualunque
»	7	$\text{arc sen } a$	$\text{arc tg } a$
278	23	$L'\gamma = L\beta$	$L'\gamma \geq L\beta$
»	24	zero	zero o negativi
»	25	$k_\alpha L\beta - L'\gamma $	$k_\alpha (L\beta - L'\gamma)$
»	26	$ \sum_1^n h_s L_s - \sum_1^{n'} h'_s L'_s $	$\sum_1^n h_s L_s - \sum_1^{n'} h'_s L'_s < -S + n' \delta 2M$
»	26	, ed in conseguenza	, dove S indica la somma dei precedenti termini negativi, ed in conseguenza

Alla dimostrazione data nel n. 97 a pag. 279* si aggiungano le seguenti considerazioni:

Per $\int_{\phi(y)} f(x, y) dx$ intendiamo una qualunque delle infinite funzioni che per ogni valore di y tra α e β hanno un valore compreso tra $\lambda(y)$ e $\Delta(y)$; le quali, come si è detto, almeno per un punto y' in ogni tratto p_r coincidono con $\lambda(y') = \Delta(y')$; dimodochè

VIII

Pag. Lin.

chiamando genericamente $\chi(y)$ una qualunque di queste funzioni, che hanno tutte lo stesso integrale tra α e β , si può porre $\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dC$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \chi(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\phi(y)}^{\phi(y)} f(x, y) dx.$$

$$303 \quad 27 \quad \sqrt{1+x^2+y^2} \quad \sqrt{(1+x^2+y^2)^3}.$$

$$314 \quad 5 \quad n^2_{n-1} \quad x^2_{n-1}$$

$$» \quad 16 \quad -x^2_n \quad -x^2_{n-1}$$

$$354 \quad 13 \quad \int^{\frac{\pi}{2}} \quad \int^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\quad \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{4}$$

$$399 \quad 18 \quad Y \quad y$$

$$401 \quad 10 \quad b \quad 6$$

$$421 \quad 4 \quad x^3 \quad c_1^3$$

$$422 \quad 1 \quad \cos \quad \text{sen}$$

$$424 \quad 2 \quad f'(a) f(a) \quad f'(a)$$

$$424 \quad 14 \quad \text{sen } a \quad \text{sen } \alpha$$

$$443 \quad 10 \quad \text{si aggiunga: dove } \omega \text{ è una radice primitiva } n^{\text{esima}} \text{ dell'unità.}$$

$$488 \quad 14 \quad \text{e la (1)} \quad \text{e la } \varphi=0$$

$$493 \quad \text{ultima funzioni} \quad \text{frazioni}$$

$$527 \quad 18 \quad z^{\frac{3}{2}} \quad z^{\frac{5}{2}}$$

$$594 \quad 5 \quad +P \frac{\partial R}{\partial y} \quad +P \frac{\partial R}{\partial y} \}$$

$$» \quad 6 \quad -R \quad -\frac{R}{Q}$$

$$» \quad 8 \quad \frac{\mu R}{2} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \dots \right\} \quad \frac{R}{Q} \left\{ \mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \dots \right\}$$

$$» \quad 9 \quad \frac{\mu R}{Q} \quad \frac{R}{Q}$$

$$598 \quad 8 \quad x \quad z$$

$$602 \quad 16 \quad f \quad F$$

$$» \quad 17 \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$» \quad 18 \quad f \quad F$$

$$625 \quad 8 \quad xC_1 \quad 2C_1$$

$$653 \quad 6 \quad 1 + \left(x_2 - \frac{2a_2}{x_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + x_2 - \frac{2a_2}{x_1} = 0$$

$$1 + \left(x_3 - \frac{2a_3}{x_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + x_3 - \frac{2a_3}{x_1} = 0$$

NEL PRIMO VOLUME

www.libtool.com.cn

ERRORI		CORREZIONI
Pag.	Lin.	
41	21	per x per y
55	13	a sarà solamente a solamente
89	9	$v'(u)$ $v'(y)$
114	1	$c = \frac{b-a}{2}$ $c = a + \frac{b-a}{2}$
145	6	ad x ad y
148	8	83. Esaminando Esaminando
149	14	$\frac{\partial u}{\partial u_1}$ $\frac{\partial u}{\partial x_1}$
151	10	$\frac{\partial u}{\partial x_2}$ $\frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$
152	5	$\frac{1}{1+v^2} du$ $\frac{1}{1+v^2} dv$
»	15	$\frac{\partial u}{\partial x_2}$ $\frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2$
245	1	si tolgano le parole «una delle quali... alla x »
290	8	la formola va segnata col numero (10)
296	5	la formola va segnata col numero (9)
»	19	1 -1
298	7	8 24
327	16	n^2 x^2
371	10	$-1 < 1 < 1$ $-1 < x < 1$
383	11	$\frac{1.3.5}{2.4.5} \frac{x^7}{7}$ $\frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7}$
411	4	$a+b-x$ $a+b+x$
435	12	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{d^2 f}{dx^2}$
444	15	F ϕ
490	12	CD PB
520	18	u u
551	9	$a^2 - b^2, b^2 - a^2$ $(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}, (b^2 - a^2)^{\frac{1}{3}}$
597	8	c^3 c^2
600	6	$A(Y-x)$ $A(X-x)$

www.libtool.com.cn

INDICE

Numeri

Pagine

I. — Integrali indefiniti.

1-14.	Calcolo integrale. — Condizioni di integrabilità di una funzione in un dato intervallo	»	1
	ESERCIZI	»	29
15-22.	Integrali indefiniti. — Metodi di integrazione	»	31
	ESERCIZI	»	47
23-32.	Integrazione delle funzioni razionali	»	52
	ESERCIZI	»	68
33-40.	Integrazione di alcune funzioni irrazionali	»	74
	ESERCIZI	»	96
41-48.	Integrazione di alcune funzioni trascendenti	»	101
	ESERCIZI	»	117

II. — Integrali definiti.

49-57.	Alcuni teoremi sugli integrali definiti	»	122
	ESERCIZI	»	144
58-67.	Integrali definiti pei quali la funzione integranda non si mantiene finita nell'intervallo di integrazione, e integrali definiti con limiti infiniti	»	145
	ESERCIZI	»	178
68-72.	Integrazione per serie	»	180
	ESERCIZI	»	201
73-76.	Teoremi sulle funzioni a due o più variabili indipendenti	»	205
77-88.	Continuità, derivazione e integrazione degli integrali definiti rispetto ad un parametro	»	211
	ESERCIZI	»	248
89-92.	Calcolo di alcuni integrali definiti. — Proprietà fondamentali degli integrali Euleriani	»	252
	ESERCIZI	»	267
93-100.	Integrali doppi definiti estesi ai punti di un campo	»	272
101-103.	Integrali doppi definiti pei quali la funzione integranda non si mantiene finita nel campo di integrazione e integrali doppi estesi ad un campo infinito	»	294

XII

Numeri		Pagine
	ESERCIZI	» 305
104	Integrali multipli	» 310
	ESERCIZI	» 321

III. — Applicazioni degli integrali definiti.

105-106.	Rettificazione delle curve	» 325
107-109.	Quadratura delle curve piane	» 335
	ESERCIZI	» 341
110-113.	Spianamento delle superficie	» 346
114	Cubatura dei solidi	» 356
	ESERCIZI	» 360

IV. — Elementi della teoria delle funzioni di variabili complesse.

115-118.	Serie a termini complessi	» 366
119-123.	Le funzioni esponenziali, circolari ecc. ad argomento complesso	» 374
124-129.	Funzioni di variabili complesse. — Derivata	» 382
130-135.	Integrali delle funzioni di variabili complesse	» 391
136-139.	Teoremi di CAUCHY	» 402
140-145.	Serie del TAYLOR e del LAURENT	» 408
146.	Residui. — Calcolo di alcuni integrali	» 418
	ESERCIZI	» 428

V. — Equazioni differenziali,

147-149.	Integrazione delle espressioni differenziali con due o più variabili	» 433
	ESERCIZI	» 441
150-152.	Equazioni differenziali. — Equazioni differenziali ordinarie di primo ordine	» 444
153	Dimostrazione dell'esistenza dell'integrale generale per le equazioni differenziali di primo ordine	» 447
154-159.	Integrazione delle equazioni differenziali di primo ordine risolte rapporto alla derivata	» 452
160-163.	Del fattore integrante o moltiplicatore delle equazioni differenziali $Mdx + Ndy = 0$	» 463
	ESERCIZI	» 469
164-167.	Equazioni differenziali di primo ordine non risolte rapporto alla derivata	» 475
	ESERCIZI	» 486
168	Equazioni differenziali d'ordine superiore al primo	» 488
169-171.	Aleune operazioni coi simboli D e $x D$	» 490
172-174.	Equazioni differenziali lineari d'ordine n	» 496
175-177.	Equazioni differenziali d'ordine n a coefficienti costanti o a coefficienti funzioni speciali di x	» 504
	ESERCIZI	» 518

Numeri		XNI Pagine
178-185.	Integrazione di alcune equazioni differenziali d'ordine superiore al primo	» 522
	ESERCIZI	» 543
186.	Integrazione per serie delle equazioni differenziali . . .	» 546
	ESERCIZI	» 560
187.	Integrazione di alcune equazioni differenziali mediante integrali definiti	» 563
	ESERCIZI	» 567
188-189.	Applicazioni geometriche	» 569
	ESERCIZI	» 579
190.	Soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine	» 585
	ESERCIZI	» 590
191-193.	Equazioni a differenziali totali	» 591
	ESERCIZI	» 600
194-195.	Sistemi di equazioni differenziali simultanee	» 601
	ESERCIZI	» 611
196-198.	Equazioni a derivate parziali che contengono le derivate rapporto ad una sola delle variabili indipendenti, ed equazioni a derivate parziali lineari con tre o più variabili . .	» 615
	ESERCIZI	» 626
199-200.	Equazioni a derivate parziali di primo ordine non lineari fra tre o più variabili. — Integrale completo, singolare, generale	» 628
201-202.	Integrazione delle equazioni a derivate parziali di primo ordine fra tre variabili. Metodo di LAGRANGE-CHARPIT. — Integrazione di alcune equazioni a derivate parziali di primo ordine fra quante si vogliono variabili	» 636
	ESERCIZI	» 651

VI. — Elementi del Calcolo delle Variazioni.

203-204.	Variazioni. — Variazione prima di un integrale semplice . .	» 655
205-208.	Problemi di massimo e di minimo relativi al calcolo delle variazioni	» 660
209.	Problemi di massimi e minimi relativi nel calcolo delle variazioni	» 679
210.	Variazione di un integrale multiplo col campo di integrazione fisso e con valori dati delle funzioni sul contorno del campo stesso, e quando sotto il segno integrale compariscono le sole derivate prime. — Relativi problemi di massimo e minimo	» 685
	ESERCIZI	» 691



www.libtool.com.cn

Oltre alle opere già citate nella prefazione del primo e di quelle citate nel testo di questo secondo volume, servirono utilmente nella compilazione del presente volume le opere seguenti:

PEANO — *Sulla integrabilità delle funzioni* (Atti della R. Accademia di Torino vol. XVIII).

FORSYTH — *Treatise on differential equations.*

BOOLE. — *A treatise on differential equations.*

LAURENT — *Traité d'analyse.*

SOHNCKE — *Sammlung von Aufgaben aus der Diff.- und Integral-rechnung.*

TOMASELLI — *Esercizi sulle equazioni differenziali.*

MEYER — *Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale.*



www.libtool.com.cn

I. Integrali indefiniti.

Calcolo integrale. — Condizioni di integrabilità di una funzione in un dato intervallo.

1. Il calcolo integrale è un metodo per trovare, da una data relazione tra i differenziali (o le derivate) di date quantità, la relazione tra le quantità stesse; e l'operazione, colla quale ciò viene effettuato, suole chiamarsi *integrazione* (EULERO).

Il primo problema che si presenta nel calcolo integrale, e che ora ci proponiamo di risolvere, è il seguente: Dato $dy=f(x)dx$ trovare y , ossia, più esattamente: *Data una funzione $f(x)$ univalente finita in un intervallo (a, b) , determinare una funzione $\varphi(x)$ tale che in tutti i punti dell'intervallo sia $\varphi'(x)=f(x)$* ¹⁾.

Il quale problema è l'inverso di quello che risolve il calcolo differenziale determinando la derivata di una funzione data in un intervallo.

La funzione $\varphi(x)$ chiamasi funzione *primitiva* o *integrale* della $f(x)$ nell'intervallo (a, b) . Così ad es: la funzione $\cos x$ è l'integrale della funzione $-\sin x$ per tutti i valori finiti di x .

Si scorge subito che, se esiste una primitiva, ne esiste un numero infinito, perchè se tale è $\varphi(x)$, lo è ancora la $\varphi(x)+C$, dove C indica una costante qualunque. La funzione $f(x)=\varphi(x)+C$

¹⁾ Ricordiamo che per derivata nell'estremo superiore (inferiore) dell'intervallo intendiamo la derivata a sinistra (a destra).

chiamasi ancora *integrale generale*, e *integrali particolari* chiamansi quelli che da esso si ottengono attribuendo alla costante particolari valori.

2. Per tracciare la via, che conduca alla primitiva di una data funzione $f(x)$, giova esaminare prima ciò che avviene se si suppone esista questa primitiva $\varphi(x)$, cioè se $\varphi'(x) = f(x)$ per tutti i punti x dell'intervallo, e se inoltre la $f(x)$ è continua in tutto l'intervallo (a, b) , dove supponiamo ora e nel seguito $a < b$.

Sia x un punto qualunque di esso. Dividiamo l'intervallo (a, x) in intervalli parziali, le cui ampiezze indichiamo con $h_1, h_2, \dots, h_n$, mediante i punti corrispondenti ai numeri $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$, cosicchè sia

$$h_1 = x_1 - a, \dots, h_r = x_r - x_{r-1}, \dots, h_n = x - x_{n-1}.$$

Abbiamo allora

$$\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1}) = h_r \varphi'(x_{r-1} + \theta_r h_r) = h_r f(x_{r-1} + \theta_r h_r),$$

dove $0 < \theta_r < 1$, e quindi, per $r = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(a) = h_1 f(a + \theta_1 h_1)$$

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = h_2 f(x_1 + \theta_2 h_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_{n-1}) = h_n f(x_{n-1} + \theta_n h_n),$$

le quali, sommate, danno

$$(1) \quad \varphi(x) - \varphi(a) = \sum_{s=1}^{s=n} h_s f(x_{s-1} + \theta_s h_s),$$

formola che ha luogo qualunque sia, e comunque grande, il numero n degli intervalli parziali nei quali abbiamo diviso l'intervallo (a, x) , e comunque piccole siano le loro ampiezze h_s .

Sia $S = \sum_{s=1}^{s=n} h_s y_s$, dove y_s indica un valore qualunque compreso tra il massimo e il minimo (questi inclusi) dei valori che

la $f(x)$ assume nell'intervallo h_s ¹⁾. Noi diciamo che, col diminuire indefinitamente di tutte le h_s , S ha un limite L , quando, ad ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ corrisponde un numero positivo δ tale che, per qualunque divisione dell'intervallo, per la quale siano tutte le $h_s < \delta$, e qualunque sia la scelta delle quantità y_s , è $|S - L| < \sigma$, e scriviamo $\lim S = L$.

La stessa definizione, sopprimendo le parole «e qualunque sia la scelta delle quantità y_s », poniamo relativamente alla quantità $\sum h_s f(x_{s-1} + \vartheta_s h_s)$, e la formola (1) ci dice quindi che $\lim_{s=n} \sum_{s=1} h_s f(x_{s-1} + \vartheta_s h_s) = \varphi(x) - \varphi(a)$, e perciò

$$\frac{d}{dx} \left\{ \lim_{s=n} \sum_{s=1} h_s f(x_{s-1} + \vartheta_s h_s) \right\} = \varphi'(x) = f(x)$$

per tutti i punti x dell'intervallo (a, b) .

Vogliamo ora dimostrare che

$$(2) \quad \lim \left\{ \sum h_s y_s - \sum h_s f(x_{s-1} + \vartheta_s h_s) \right\} = 0,$$

cioè

$$(3) \quad \lim \sum h_s y_s = \lim \sum h_s f(x_{s-1} + \vartheta_s h_s) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

3. A questo scopo premettiamo il seguente teorema:

Se $f(x)$ è funzione continua nell'intervallo (a, b) , dato σ , esiste un corrispondente numero δ positivo tale che è

$$|f(x') - f(x'')| < \sigma,$$

essendo x', x'' due punti qualunque dell'intervallo per quali sia $|x' - x''| \leq \delta$.

Infatti, poichè la $f(x)$ è continua in (a, b) , dato σ , potremo determinare h_1 in guisa che per i punti x dell'intervallo (a, a_1) , dove $a_1 = a + h_1$, sia $|f(x) - f(a)| < \frac{\sigma}{3}$; poi h_2 in guisa che

¹⁾ Per brevità scriviamo intervallo h_s in luogo di intervallo (x_{s-1}, x_s) .

pei punti x dell'intervallo (a_1, a_2) , dove $a_2 = a_1 + h_2$, sia $|f(x) - f(a_2)| < \frac{\sigma}{3}$, e così proseguendo otterremo una serie $a, a_1, a_2, a_3, \dots$ di quantità crescenti, le quali, dico, cresceranno in modo da raggiungere l'estremo b dell'intervallo (a, b) . Invero, se ciò non fosse, esse, mantenendosi sempre minori di b e crescenti, avrebbero un limite $c \leq b$. Essendo la $f(x)$ continua in c , esiste un intorno $(c - \varepsilon, c)$ di c per tutti i punti x del quale è $|f(x) - f(c)| < \frac{\sigma}{6}$, ed in questo intorno cadranno tutti i punti $a_i, a_{i+1}, \dots$ a partire da un certo punto a_i , dove i è finito. Avremo quindi $|f(a_i) - f(c)| < \frac{\sigma}{6}$, e se x indica un punto qualunque dell'intervallo (a_i, c) , che appartiene a $(c - \varepsilon, c)$, è $|f(x) - f(c)| < \frac{\sigma}{6}$ e quindi ancora $|f(x) - f(a_i)| < \frac{\sigma}{3}$. Quindi potremo prendere $a_{i+1} = c$, cosichè, il valore c può essere raggiunto e poi superato dalla serie di quantità $a, a_1, a_2, \dots$, le quali perciò raggiungeranno il valore b . Dunque, dato σ , possiamo dividere l'intervallo (a, b) in un numero *finito* di intervalli parziali, mediante i punti $a_1, a_2, \dots$ in modo che, in ciascun intervallo (a_s, a_{s+1}) , sia $|f(x) - f(a_s)| < \frac{\sigma}{3}$.

Sia δ l'ampiezza del più piccolo di questi intervalli.

Siano x', x'' due punti qualunque di (a, b) tali che $|x' - x''| \leq \delta$. O essi appartengono ad un intervallo (a_{s-1}, a_s) , ed allora è $|f(x') - f(a_{s-1})| < \frac{\sigma}{3}$, $|f(x'') - f(a_{s-1})| < \frac{\sigma}{3}$, e quindi ancora $|f(x') - f(x'')| < \frac{2\sigma}{3} < \sigma$; oppure non potranno appartenere che a due intervalli consecutivi, poniamo x' ad (a_{s-1}, a_s) ed x'' ad (a_s, a_{s+1}) , ed allora essendo $|f(x') - f(a_{s-1})| < \frac{\sigma}{3}$, $|f(a_s) - f(a_{s+1})| < \frac{\sigma}{3}$, $|f(a_s) - f(x'')| < \frac{\sigma}{3}$, è ancora $|f(x') - f(x'')| < \sigma$.

4. Ritornando ora alla nostra principale ricerca, dato σ , fis-

siamo δ in modo che, nei punti x', x'' pei quali è $|x' - x''| \leq \delta$, e quindi anche nei punti x', x'' di qualunque degli intervalli parziali di ampiezza minore di δ , nei quali si possa scomporre

l'intervallo (a, x) , sia $|f(x') - f(x'')| < \frac{\sigma}{x-a}$.

Avremo allora

$$|\Sigma h_s y_s - \Sigma h_s f(x_{s-1} + \zeta_s h_s)| = |\Sigma h_s (y_s - f(x_{s-1} + \zeta_s h_s))|$$

$$\leq \Sigma h_s |y_s - f(x_{s-1} + \zeta_s h_s)| < \frac{\sigma}{x-a} \Sigma h_s = \sigma,$$

cioè hanno luogo le formole (2), (3) del n. 2.

Noi vediamo adunque come, se la $f(x)$ è funzione continua nell'intervallo (a, b) ed ammette in esso una funzione primitiva $\varphi(x)$, allora, formata per la funzione $f(x)$ la somma $\Sigma h_s y_s$ dei prodotti delle ampiezze h_s degli intervalli, nei quali si divide l'intervallo (a, x) , per uno qualunque dei valori y_s che la $f(x)$ assume nell'intervallo h_s , cioè per uno qualunque dei valori compresi tra il massimo e il minimo (questi inclusi) dei valori che essa assume nell'intervallo h_s , questa somma ha limite determinato, quando tutte le h diminuiscono indefinitamente, e questo limite è una funzione di x per la quale è

$$\frac{d}{dx} [\lim \Sigma h_s y_s] = f(x).$$

5. Data ora una funzione finita $f(x)$ nell'intervallo (a, b) , è naturale di formare per essa una somma analoga alla precedente, e vedere se e quando essa gode delle stesse proprietà.

Dividasi, adunque, l'intervallo (a, x) in parti h_s ed indichi ora y_s un valore qualunque compreso tra il limite inferiore ed il limite superiore (questi limiti inclusi) dei valori che la $f(x)$ prende nell'intervallo h_s , e si formi la somma $S = \Sigma h_s y_s$.

Essendo, qualunque siano le h_s , $(x-a)m \leq S \leq (x-a)M$, dove m ed M indicano il limite inferiore e superiore di $f(x)$

in (a, x) , si scorge che se esiste il limite di S , quando tutte le h_s decrescono, questo limite è finito.

Ora, ammesso che questo limite esista per tutti i valori di x dell'intervallo (a, b) , esso è una funzione di x che chiameremo $\varphi(x)$; dico che $\varphi(x) = \lim S$ è funzione continua di x in tutto l'intervallo e che nei punti x , ove $f(x)$ è continua, la $\varphi(x)$ ammette derivata ed è $\varphi'(x) = f(x)$.

Infatti abbiamo

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \lim \Sigma h_s y_s,$$

la somma del secondo membro essendo estesa ai termini $h_s y_s$ che corrispondono agli intervalli h_s nei quali è diviso l'intervallo $(x, x+h)$. Ma poichè è $lh \leq \Sigma h_s y_s \leq Lh$, qualunque siano gli intervalli h_s , essendo l, L il limite inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo $(x, x+h)$, e quindi ancora

$$lh \leq \lim \Sigma h_s y_s \leq Lh, \quad \lim \Sigma h_s y_s = \lambda h$$

dove $l \leq \lambda \leq L$, si ha

$$(1) \quad \varphi(x+h) - \varphi(x) = \lambda h;$$

ed analogamente la formola

$$\varphi(x-h) - \varphi(x) = -\{\varphi(x) - \varphi(x-h)\} = -\lim \Sigma h_s y_s,$$

dove la somma è estesa agli intervalli h_s nei quali è diviso l'intervallo $(x-h, x)$, ci dà

$$(2) \quad \varphi(x-h) - \varphi(x) = -\lambda_1 h$$

essendo $l_1 \leq \lambda_1 \leq L_1$, dove l_1 e L_1 sono i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo $(x-h, x)$. Cosichè si ha $|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq M_1 h$, $|\varphi(x-h) - \varphi(x)| \leq M_1 h$ dove M_1 è il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ in (a, b) , e quindi la $\varphi(x)$ è continua nel punto qualunque x dell'intervallo (a, b) .

Supponiamo ora $f(x)$ continua alla destra del punto x , cosichè, per h positivo, sia $\lim_{h=0} \varphi(x+h) = f(x)$.

Dato σ , potremo determinare h in modo che per $h' \leq h$ sia $|f(x+h') - f(x)| < \frac{\sigma}{3}$, e quindi anche $|f(x+h') - f(x+h'')| < \frac{2\sigma}{3}$ per $h' \leq h, h'' \leq h$.

La *oscillazione* di una funzione in un intervallo, ossia la differenza tra il limite superiore ed il limite inferiore dei valori della funzione nell'intervallo, stesso, è sempre maggiore o uguale al valore assoluto della differenza tra due valori qualunque della funzione nell'intervallo o, più generalmente, tra due numeri qualunque compresi tra il limite superiore e l'inferiore; cosicchè avremo, nell'intervallo $(x, x+h)$,

$$|f(x+h') - \lambda| \leq D,$$

dove $D = L - l$ e $h' \leq h$.

D'altra parte vi sono sempre due punti $x+h_1, x+h_2$ dell'intervallo $(x, x+h)$ nei quali

$$f(x+h_1) > L - \delta, \quad f(x+h_2) < l + \delta,$$

e quindi $f(x+h_1) - f(x+h_2) > D - 2\delta$, essendo δ un numero prefissato positivo arbitrariamente piccolo; ma

$$f(x+h_1) - f(x+h_2) < \frac{2\sigma}{3},$$

quindi $D < \frac{2\sigma}{3} + 2\delta$ e perciò ancora ¹⁾ $D \leq \frac{2\sigma}{3}$.

In conseguenza per $h' \leq h$ è $|f(x+h') - \lambda| \leq \frac{2\sigma}{3}$, ed essendo ancora $|f(x+h') - f(x)| < \frac{\sigma}{3}$, è $|f(x) - \lambda| < \sigma$ cioè

1) Se è $A < B + \delta$, dove δ è piccolo a piacere, deve essere $A \leq B$; perchè se potesse essere $A > B$, prendendo $\delta < A - B$, sarebbe ancora $A > B + \delta$, il che non può essere.

$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda = f(x)$, e la formola (1) ci dà

www.libtool.com.cn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = f(x).$$

In modo analogo si vedrebbe che, supposta la continuità della $f(x)$ nel punto x a sinistra, sarebbe, dalla (2),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h} = f(x).$$

Cosichè se nel punto x la $f(x)$ è continua alla destra o alla sinistra, la $\varphi(x)$ ammette derivata a destra o a sinistra e questa derivata è $f(x)$; e perciò se la $f(x)$ è continua nel punto x , la $\varphi(x)$ ammette ivi derivata, e questa è uguale a $f(x)$, cioè si ha, nel punto x , $\varphi'(x) = f(x)$.

La funzione $\varphi(x)$ è quindi il richiesto integrale o primitiva della $f(x)$ nell'intervallo (a, b) , quando la $f(x)$ è continua in tutto l'intervallo.

Il limite della somma $S = \Sigma h_s y_s$, estesa agli intervalli h_s nei quali si divide l'intervallo (a, b) si chiama l'*integrale definito* della $f(x)$ nell'intervallo (a, b) e si indica colla notazione

$$\int_a^b f(x) dx$$

che si legge *integrale definito* (o semplicemente *integrale*) da a a b di $f(x) dx$; a e b sono i *limiti* dell'integrale, (a, b) l'*intervallo di integrazione*. Quando per la $f(x)$ esiste il limite di S , all'impiccolire indefinitamente di tutte le h_s , la $f(x)$ si dice *atta alla integrazione definita* o, semplicemente, *alla integrazione*, o che è *integrabile* nell'intervallo (a, b) .

La notazione precedente ha avuto origine nel seguente modo. Se esiste il limite di S , potremo supporre tutte le h_s uguali tra loro ed uguali a Δx , e potremo prendere $y_s = f(x_{s-1})$, cosichè allora è $S = \Sigma f(x_{s-1}) \Delta x$, e l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ è il li

mite della somma degli *elementi* $f(x)\Delta x$ ossia $f(x)dx$ corrispondenti ai valori $a, x, x, \dots, x_{n-1}$ di x ; il segno $\int$ è l'iniziale della parola somma.

È quasi superfluo notare che il valore dell'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ dipende dalla natura della funzione $f(x)$ e dai limiti a, b , non dalla variabile x , che comparisce come *una variabile corrente di integrazione*, cosicchè è

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz = \dots$$

E quando l'intervallo di integrazione sia (a, ∞) si suole scrivere $\int_a^\infty f(x)dx$, (anzichè $\int_a^\infty f(y)dy$ o simile), indicando colla stessa lettera tanto il limite dell'integrale, quanto la variabile corrente di integrazione.

6. Il problema che avevamo in vista di risolvere nel n. 2, e che è risoluto per le funzioni continue in (a, b) , quando per ogni punto x di (a, b) esista (il che per esse avviene, come ora vedremo) il limite della somma S relativa all'intervallo (a, x) , ci ha condotto allo studio delle somme S , ed al concetto di integrale definito. Vediamo ora quale sia la condizione necessaria e sufficiente affinchè per la funzione finita $f(x)$ nell'intervallo (a, b) , esista il limite, preso come è stato detto, della somma S , relativa all'intervallo (a, b) , cioè affinchè la $f(x)$ sia atta alla integrazione nell'intervallo (a, b) .

Indichiamo con m, M il limite inferiore e superiore di $f(x)$ in (a, b) , con l_s, L_s i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ in un intervallo h_s appartenente ad (a, b) , con l_r', L_r' gli stessi elementi relativi ad un intervallo h_r' , ecc.

Eseguiamo una divisione qualunque di (a, b) in intervalli h_s e consideriamo le somme

$$L = \sum_1^n h_s L_s, \quad l = \sum_1^n h_s l_s,$$

che sono il massimo ed il minimo dei valori di S relativi a questa divisione. Variando la divisione di (a, b) in intervalli parziali, variano L ed l , ma in modo che qualunque L è maggiore di qualunque l .

Invero, consideriamo un'altra divisione qualunque di (a, b) in n' intervalli h'_s e paragoniamo tra loro le quantità

$$L = \sum_1^n h_s L_s, \quad l' = \sum_1^{n'} h'_s l'_s.$$

Indichiamo con $k_1, k_2, \dots, k_m$ gli intervalli nei quali è diviso (a, b) dalle due precedenti divisioni, considerate come formanti una unica divisione dell'intervallo (a, b) . Ogni intervallo k_α sarà contenuto in un certo intervallo h_β della prima ed in un certo intervallo h'_γ della seconda divisione, cosicchè potremo scrivere

$$L = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} k_\alpha L_\beta, \quad l' = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} k_\alpha l'_\gamma, \quad L - l' = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} k_\alpha (L_\beta - l'_\gamma).$$

Ma se L_α, l_α indicano i limiti superiore ed inferiore di $f(x)$ in k_α , osservando che k_α appartiene a h_β e h'_γ , è $L_\beta \geq L_\alpha$, $l_\alpha \geq l'_\gamma$; e, poichè $L_\alpha > l_\alpha$, è ancora $L_\beta > l'_\gamma$, cosicchè $L > l'$, come avevamo asserito.

Da ciò ricaviamo che le quantità l , che variano al variare delle divisioni di (a, b) mantenendosi sempre minori di una qualunque delle L , devono ammettere un limite superiore λ , e che le L devono ammettere, per ragione analoga, un limite inferiore Λ ; e le quantità variabili L, l e le fisse λ, Λ stanno tra loro nella relazione

$$(1) \quad L \geq \Lambda \geq \lambda \geq l.$$

Ciò posto, la condizione necessaria e sufficiente affinché la $f(x)$ sia atta alla integrazione nell'intervallo (a, b) è che sia $\Lambda = \lambda$; ed allora il valore comune di queste quantità

è il limite di S , quando tutte le h_s impiccoliscono indefinitamente, cioè è $I = \int_a^b f(x) dx$.

La condizione è necessaria. Invero, sia $\lim S = I = \int_a^b f(x) dx$. Dato σ , esiste un δ tale che, qualunque siano le $h_s < \delta$, è $|S - I| < \sigma$, ossia $I - \sigma < S < I + \sigma$. In particolare, quindi, è

$$I - \sigma < l < I + \sigma, \quad I - \sigma < L < I + \sigma,$$

intendendo con l il minimo dei valori di S relativi ad una qualunque delle divisioni di (a, b) per le quali le h_s sono $< \delta$, e con L il massimo relativo ad un'altra qualunque (in particolare anche alla stessa) di tali divisioni di (a, b) .

Avuto riguardo alle relazioni (1) è quindi

$$I - \sigma < l \leq \lambda \leq \Lambda \leq L < I + \sigma,$$

cioè

$$I - \sigma < \lambda \leq \Lambda < I + \sigma;$$

ma I, λ, Λ sono quantità fisse, e σ è piccola ad arbitrio; deve dunque essere

$$\lambda = \Lambda = I.$$

La condizione è sufficiente. Sia, per ipotesi, $\lambda = \Lambda$. Designato con I_1 questo comune valore di λ e Λ , poichè I_1 è il limite inferiore dei valori di L , dato σ_1 , esisterà una divisione $h'_1, h'_2, \dots, h'_n$ di (a, b) per la quale $L' - I_1 < \sigma_1$, essendo $L' = \sum_1^n h'_s L'_s$. Eseguiamo ora una scomposizione qualunque di (a, b) in intervalli $h_1, h_2, \dots, h_n$, le cui ampiezze h_s siano tutte minori di un dato numero δ , e consideriamo la relativa somma S , $S = \sum_1^n h_s y_s$. Indicando con $k_1, k_2, \dots, k_m$ gli intervalli provenienti dalla sovrapposizione delle due precedenti divisioni, avremo,

come precedentemente

www.libtool.com.cn

$$L' = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} k_{\alpha} L'_{\gamma}, \quad S = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} k_{\alpha} y_{\beta}, \quad L' - S = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} k_{\alpha} (L'_{\gamma} - y_{\beta}).$$

Ora per gli intervalli h_{β} , che sono contenuti in qualche intervallo h'_{γ} , è $L'_{\gamma} \geq y_{\beta}$ ed i corrispondenti termini $k_{\alpha} (L'_{\gamma} - y_{\beta})$ di $L' - S$ sono positivi o nulli; gli altri intervalli h_{β} conterranno uno o più punti della prima divisione $h'_1, h'_2, \dots$; questi intervalli h_{β} non possono essere in numero maggiore di $n' - 1$, ed essendo tutte le h di ampiezza minore di δ , la somma delle ampiezze di tali intervalli h_{β} è $< n'\delta$. I corrispondenti termini $k_{\alpha} (L'_{\gamma} - y_{\beta})$ potranno essere negativi; ma $L'_{\gamma} - y_{\beta} \leq M - m$, quindi il valore assoluto della somma di questi termini negativi è $< n'\delta(M - m)$, e quindi

$$L' - S > -n'\delta(M - m),$$

e poichè $L' - I_1 < \sigma_1$, ossia $I_1 > L' - \sigma_1$, è ancora:

$$(2) \quad I_1 + \sigma_1 + n'\delta(M - m) > S.$$

D'altra parte I_1 essendo il limite superiore dei valori di l esisterà una divisione $h''_1, h''_2, \dots, h''_{n''}$ di (a, b) per la quale sarà $I - l'' < \sigma_1$, essendo $l'' = \sum_1^n h'', l''_s$. Ragionando come precedentemente in relazione a questa divisione ed alla $h_1, h_2, \dots, h_n$, si troverà

$$(3) \quad S > I_1 - \sigma_1 - n''\delta(M - m).$$

Sia ora assegnato un qualunque numero σ , positivo e comunque piccolo; nel procedimento precedente prendiamo $\sigma_1 < \frac{\sigma}{2}$, poi δ minore della più piccola delle due quantità

$$\frac{\sigma}{2n'(M - m)}, \quad \frac{\sigma}{2n''(M - m)},$$

per cui $n'\delta(M-m) < \frac{\sigma}{2}$, $n''\delta(M-m) < \frac{\sigma}{2}$, e le formole (2),
 (3) ci danno

$$I_1 - \tau < S < I_1 + \tau, \text{ ossia } |I_1 - S| < \tau.$$

In conseguenza, dato σ , possiamo fissare δ in modo che, per tutte le divisioni di (a, b) , per le quali le ampiezze degli intervalli parziali sono minori di δ , è $|I_1 - S| < \tau$, cioè $\lim S = I_1$.

La $f(x)$ è quindi atta alla integrazione nell'intervallo (a, b) ed è

$$\Lambda = \lambda = I_1 = \int_a^b f(x) dx,$$

come volevasi dimostrare.

7. La precedente condizione di integrabilità può trasformarsi nelle seguenti:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(x)$ sia atta alla integrazione in un intervallo (a, b) è che, dato σ , possa scomporsi (a, b) in due sistemi speciali d'intervalli (che potranno anche essere uguali) tali che sia $|I_1 - L_1| < \sigma$ essendo I_1 il valore di I corrispondente ad uno, L_1 il valore di L corrispondente all'altro di tali sistemi. Il valore dell'integrale è compreso tra I_1 ed L_1 .

Si vede subito che la condizione è necessaria, perchè, ammesso che $\lim S = I$, dato σ , per tutte le h_s minori di un corrispondente δ è $|S - I| < \frac{\sigma}{2}$, e quindi, dalle due $|I - I| < \frac{\sigma}{2}$,

$|L - I| < \frac{\sigma}{2}$, risulta $|I - L| < \sigma$, non solo per due speciali sistemi d'intervalli, ma per tutti quelli le cui ampiezze sono minori di δ .

La condizione è sufficiente, perchè, ammesso $|I_1 - L_1| < \sigma$, sarà ancora $|\lambda - \Lambda| < \sigma$, e quindi $\lambda = \Lambda$, cioè pel teorema al n. 6 la $f(x)$ è integrabile.

Poniamo $D = \sum h_s L_s - \sum h_s l_s = \sum h_s (L_s - l_s) = \sum h_s D_s$, essendo

così L_s ed l_s il limite superiore e l'inferiore e D_s l'oscillazione dei valori di $f(x)$ nell'intervallo h_s . Allora, se nel teorema precedente facciamo l'ipotesi che le due speciali divisioni dell'intervallo (a, b) siano una stessa, abbiamo il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia integrabile in (a, b) è che, per ogni numero positivo σ , esista un sistema speciale d'intervalli $h_1, h_2, \dots, h_n$, tali, che per essi sia $D = \sum h_s D_s < \sigma$, od in altre parole, è che il limite inferiore dei valori di D sia zero.

Osservando poi che, se è $\lim S = I$, è $\lim D = 0$ al diminuire di tutte le h , e che la condizione, che il limite inferiore dei valori di D sia zero, è contenuta nella condizione $\lim D = 0$, abbiamo ancora:

La condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia integrabile in (a, b) è che sia $\lim D = 0$, al diminuire indefinitamente di tutte le h .

8. Da quanto precede ricaviamo subito che: *se una funzione è integrabile in un intervallo (a, b) , lo è pure in qualunque parte (a', b') dell'intervallo (a, b) .*

Infatti, dato σ , dividiamo l'intervallo (a, b) in intervalli h , tali che $D < \sigma$. Se due punti di divisione coincidono uno con a' e l'altro con b' , indicando con D' la parte di D che corrisponde ad (a', b') , è $D' < D$ e quindi $D' < \sigma$. Se poi il punto a' cade nell'intervallo h_i e b' nell'intervallo h_m , allora, chiamando con k e p le parti di h_i e di h_m che appartengono ad (a', b') , poniamo

$$D' = k(L_k - l_k) + \sum_{s=i+1}^{s=m-1} h_s(L_s - l_s) + p(L_p - l_p);$$

e poichè

$$h_i(L_i - l_i) > k(L_k - l_k), \quad h_m(L_m - l_m) > p(L_p - l_p)$$

e

$$D = \sum_{s=1}^{s=n} h_s(L_s - l_s) = \sum_{s=1}^{s=i-1} h_s(L_s - l_s) + h_i(L_i - l_i) + \sum_{s=i+1}^{s=m-1} h_s(L_s - l_s) + h_m(L_m - l_m) + \sum_{s=m+1}^{s=n} h_s(L_s - l_s),$$

è ancora $D' < D < \sigma$.

Lo stesso si proverebbe, se uno dei punti a', b' coincide con uno dei punti di divisione dell'intervallo (a, b) e l'altro cade in un intervallo h .

Perciò, dato σ , esiste una divisione dell'intervallo (a', b') , per la quale il corrispondente valore di D è minore di σ , e la funzione è integrabile in (a', b') .

9. Finora abbiamo supposto $a < b$; se fosse $a > b$, dividendo l'intervallo (a, b) mediante i punti $x_1, x_2, \dots$ in intervalli parziali, $h_s = x_s - x_{s-1}$ sarebbe negativa, e si avrebbe subito $S = \sum h_s y_s = - \sum (x_{s-1} - x_s) y_s = -S_1$, essendo S_1 la somma S relativa all'intervallo (b, a) , dove $b < a$, scomposto dai punti $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_s, x_{s-1}, \dots, x_2, x_1$ negli intervalli $h_n, \dots, h_s, \dots, h_2, h_1$.

Se esiste il limite di S_1 , quando tutte le h convergono a zero, esiste anche quello di S ed inversamente, e si ha

$$\lim S = - \lim S_1, \quad \lim S_1 = \int_b^a f(x) dx, \quad \lim S = \int_a^b f(x) dx$$

e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

la quale ci mostra inoltre come in un integrale definito si possano invertire i limiti dell'integrale purchè si cambi il segno all'integrale stesso.

10. *Ogni funzione continua in un intervallo (a, b) è atta alla integrazione in questo intervallo, e quindi anche in ogni parte di esso.*

Infatti pel teorema al n. 3., dato σ , possiamo dividere l'intervallo (a, b) in intervalli h_s , di ampiezza minore di un certo numero δ , in modo che $|f(x') - f(x'')| < \frac{\sigma}{2(b-a)}$, essendo x', x'' due punti qualunque di h_s ; ossia, poichè vi saranno sempre in h_s dei punti x_1, x_2 pei quali è $L_s - f(x_1) < \frac{\sigma}{2(b-a)}$,

$f(x_i) - l_i < \frac{\sigma}{2(b-a)}$, in modo che $L_i - l_i < \frac{\sigma}{b-a}$, ed allora è

$$D = \sum h_i (L_i - l_i) < \frac{\sigma}{b-a} \sum h_i = \sigma;$$

ossia $\lim D = 0$, e la funzione è integrabile.

Da questo teorema risulta subito che: *una funzione continua in un intervallo è sempre la derivata di una funzione continua nell'intervallo stesso.*

E risulta ancora subito la esistenza del limite, che avevamo ammessa, al n. 182 del primo volume di quest'opera, e che tal limite, cioè l'arco di curva piana, di cui ivi si

tratta, è $\int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$; e che esiste pure il limite, relativo alle curve gobbe, al n. 200, e che esso, cioè l'arco di curva gobba, è $\int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx$.

II. Ogni funzione finita e discontinua in un numero finito di punti in (a, b) , è integrabile nell'intervallo (a, b) .

Sia la $f(x)$ discontinua nei punti $c_1, c_2, \dots, c_n$, e siano M, m i suoi limiti superiore ed inferiore in (a, b) .

Assegnato il numero σ , formiamo degli intornoi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ di $c_1, c_2, \dots, c_n$ tali che $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n < \frac{\sigma}{(n+2)(M-m)}$.

Tolti questi intornoi da (a, b) , negli $n+1$ intervalli rimanenti la $f(x)$ è continua e potremo dividere ciascuno di questi in parti tali che il D corrispondente a ciascun intervallo risulti minore di $\frac{\sigma}{n+2}$; cosicchè se consideriamo la quantità D relativa agli intervalli nei quali viene scomposto (a, b) da questa divisione e dagli intornoi ε , è

$$D < (n+1) \frac{\sigma}{n+2} + \frac{\sigma}{(n+2)(M-m)} (M-m) = \sigma,$$

e perciò la funzione è integrabile.

Sono ovvie le modificazioni da introdursi in questa dimostrazione se il punto c_1 coincide con a , o il punto c_n con b , o c_1 con a e c_n con b .

In modo analogo si dimostra che: *ogni funzione finita e discontinua in un numero infinito di punti di (a, b) , che costituiscono un gruppo di punti avente un numero finito di punti limiti, è integrabile in (a, b) .*

Infatti, dato σ , si formino degli intorno $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ dei punti limiti $c_1, c_2, \dots, c_n$ del gruppo dei punti, nei quali $f(x)$ è discontinua, in modo che sia $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n < \frac{\sigma}{2(M-m)}$. Tolti questi intorno da (a, b) , negli intervalli restanti cade un numero finito di punti del gruppo ¹⁾, cioè di punti nei quali $f(x)$ è discontinua. Potremo allora dividere ciascun intervallo in parti tali che la somma delle corrispondenti quantità D sia minore di $\frac{\sigma}{2}$, ed allora la quantità D , corrispondente agli intervalli nei quali viene scomposto (a, b) da queste divisioni e dagli intorno ϵ , risulterà minore di $\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2(M-m)}(M-m)$ cioè minore di σ , e la funzione $f(x)$ sarà perciò integrabile in (a, b) .

12. *Se la $f(x)$ è finita e atta alla integrazione in (a, b) , cambiando il suo valore in un numero finito di punti di (a, b) , o anche in un numero infinito di punti costituenti*

1) Ciò risulta dal fatto che, se in un intervallo (c, d) cadono infiniti punti di un gruppo, vi deve essere in (c, d) almeno un punto limite del gruppo; il che si vede subito dividendo l'intervallo successivamente in $2, 2^2, 2^3, \dots$ parti uguali e prendendo a considerare quella parte, o una di quelle parti, nelle quali deve necessariamente cadere un numero infinito di punti del gruppo; i numeri corrispondenti agli estremi di questi intervalli definiscono con numero, cui corrisponde un punto limite.

In conseguenza, dopo aver tolto cogli intorno ϵ i punti c da (a, b) , se negli intervalli restanti cadesse ancora un numero infinito di punti del gruppo, dovrebbe in questi intervalli esservi qualche punto limite, il che non è.

un gruppo con un numero finito di punti limiti, indicata con $f_1(x)$ la funzione che così si ottiene, è $f_1(x)$ integrabile in (a, b) e si ha $\int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, o, più generalmente,

$$\int_{a'}^{b'} f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f_1(x) dx, \text{ essendo } a', b' \text{ due punti qualunque di } (a, b).$$

Siano $c_1, c_2, \dots, c_m$ i punti limiti del gruppo di punti di (a, b) , nei quali viene cambiato il valore della $f(x)$. Sarà $f_1(x) = f(x)$ per tutto in (a, b) fuori che nei punti del gruppo.

Assegnato un numero σ , formiamo degli intorno ε dei punti c , in guisa che sia $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m < \frac{\sigma}{6L}$, dove con L intendiamo il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ e di $f_1(x)$ in (a, b) , e sia p il numero dei punti d del gruppo che ancora appartengono ad (a, b) , dopo averne tolti questi intorno. Essendo $f(x)$ integrabile in (a, b) , esiste un numero δ , che possiamo supporre minore di $\frac{\sigma}{12(m+p)L}$, tale che, per tutte le $h_s < \delta$, sia

$$(1) \quad \left| \sum h_s y_s - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\sigma}{3}.$$

Sia ora $\sum h_s y'_s$ la somma S relativa alla funzione $f_1(x)$, dove prenderemo $y'_s = y_s$, fuori che negli intervalli h_s cui appartiene qualche punto c . Indichiamo con $h_{r_1}, h_{r_2}, \dots, h_{r_n}$ quelli tra gli intervalli h che sono completamente contenuti nell'intorno ε_r di c_r , con h_{k_r} l'intervallo che precede h_{r_1} , con h_{k_r} l'intervallo che segue h_{r_n} , i quali potranno in parte appartenere a ε_r , e con h_a gli intervalli cui appartiene qualche punto d , i quali intervalli potranno essere al più $2p$, e saranno $2p$ nel solo caso che ogni punto d sia estremo di qualche intervallo h_s . Allora le due somme $\sum h_s y'_s$, $\sum h_s y_s$ potranno differire

al più per la quantità

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{s=n_1} h_{1s}(y'_{1s} - y_{1s}) + \sum_{s=1}^{s=n_2} h_{2s}(y'_{2s} - y_{2s}) + \dots + \sum_{s=1}^{s=n_m} h_{ms}(y'_{ms} - y_{ms}) \\ & + h_{\kappa_1}(y'_{\kappa_1} - y_{\kappa_1}) + h_{\kappa'_1}(y'_{\kappa'_1} - y_{\kappa'_1}) + \dots + \Sigma h_{\alpha}(y'_{\alpha} - y_{\alpha}). \end{aligned}$$

Ma il valore assoluto di questa quantità è minore di

$$(\epsilon_1 + \epsilon_s + \dots + \epsilon_m)2L + 2m\delta 2L + 2p\delta 2L < \frac{\sigma}{3} + \frac{\sigma}{3},$$

cosicchè

$$|\Sigma h_s y'_s - \Sigma h_s y_s| < \frac{2\sigma}{3}$$

e quindi ancora, per la (1),

$$\left| \Sigma h_s y'_s - \int_a^b f(x) dx \right| < \sigma.$$

Dunque, poichè, dato σ , possiamo determinare un numero δ tale che, qualunque siano le h_s minori di δ , sia verificata la precedente disuguaglianza, è

$$\lim \Sigma h_s y'_s = \int_a^b f(x) dx,$$

cioè la $f_1(x)$ è integrabile in (a, b) ; e poichè, d'altra parte,

$\lim \Sigma h_s y'_s$, quando esiste, è $\int_a^b f_1(x) dx$, così è ancora

$$\int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

La medesima dimostrazione vale evidentemente per l'intervallo (a', b') .

13. Dalla precedente proprietà ricaviamo subito che: *Se la $f(x)$ ha una discontinuità di prima specie da una parte di un punto x di (a, b) , poniamo alla destra, la funzione*

$\varphi(x) = \int_a^x f(x) dx$ ammette derivata a destra nel punto x , e questa è $f(x+0)$, intendendo con $f(x+0)$ il $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$, $h > 0$.

Per provare ciò, basta semplicemente assumere $f(x+0)$ in luogo di $f(x)$ come valore di $f(x)$ nel punto x (il che non cambia il valore di $\int_a^x f(x) dx$) nel procedimento, tenuto al n. 5, per dimostrare che, se nel punto x la $f(x)$ è continua alla destra, la $\varphi(x)$ ammette derivata a destra uguale a $f(x)$.

14. Illustriamo ora la teoria con alcuni

ESEMPI

1) La funzione $f(x) = x$ è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito (a, α) . Quando una funzione $f(x)$ è integrabile, poichè il limite di $S = \sum h_s y_s$ è indipendente dal modo col quale viene scomposto l'intervallo (a, α) in intervalli parziali h_s , dal modo col quale questi intervalli convergono a zero e dal valore y_s che si sceglie in ogni intervallo h_s , si potrà usare quella scomposizione e quella scelta dei valori y_s , che più facilmente permettano di calcolare il limite della somma S .

Nel caso attuale, $f(x) = x$, giova scomporre l'intervallo (a, α) in n intervalli uguali tra loro, $h = \frac{x-a}{n}$, e poi far crescere n indefinitamente per numeri interi positivi, e prendere $y_s = f(a + (s-1)h) = a + (s-1)h$. Avremo allora

$$\begin{aligned} \int_a^x x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-a}{n} [a + (a+h) + (a+2h) + \dots + (a+(n-1)h)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-a}{n} \left(na + h \frac{n(n-1)}{2} \right) = (x-a)a + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-a)^2}{n} \frac{(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-a)a + \frac{(x-a)^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &= (x-a)a + \frac{(x-a)^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

2) Sia $f(x) = x^k$. Per calcolare l' $\int_a^x x^k dx$ giova assumere in progressione geometrica i numeri $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ interpolati tra a e x , cosicchè, posto $\rho = \sqrt[n]{\frac{x}{a}}$, sia $x_s = a\rho^s$, $h_s = a\rho^{s-1}(\rho - 1)$, $x = a\rho^n$.

Allora, preso $y_s = f(x_{s-1})$, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \int_a^x x^k dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{s=n} a^{k+1} \rho^{(s-1)(k+1)} (\rho - 1) \\
 (1) \quad &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{k+1} (\rho - 1) \{1 + \rho^{k+1} + \rho^{2(k+1)} + \dots + \rho^{(n-1)(k+1)}\}.
 \end{aligned}$$

Se k è diverso da -1 , è

$$\begin{aligned}
 \int_a^x x^k dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{k+1} (\rho - 1) \frac{\rho^{n(k+1)} - 1}{\rho^{k+1} - 1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho - 1}{\rho^{k+1} - 1} [(a\rho^n)^{k+1} - a^{k+1}] = (x^{k+1} - a^{k+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho - 1}{\rho^{k+1} - 1};
 \end{aligned}$$

ma $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho = 1$, perchè $\log \rho = \frac{1}{n} \log \frac{x}{a}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \rho = 0$. Applicando poi la regola di l'Hospital, si ha il limite di $\frac{\rho - 1}{\rho^{k+1} - 1}$ quando n cresce indefinitamente comunque, e quindi anche quando cresce per interi positivi, che è il caso nostro; così fa-

cendo otteniamo

www.libtool.com.cn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho - 1}{\rho^{\frac{1}{n+1}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d\rho}{dn}}{(k+1)\rho^k \frac{d\rho}{dn}} = \frac{1}{k+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^k} = \frac{1}{k+1}.$$

Cosichè

$$\int_a^x x^k dx = \frac{x^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

formola che vale qualunque siano a ed x se $k > 0$; ma se k è negativo, dovremo supporre a e x diversi da zero e dello stesso segno, affinchè il punto zero non appartenga all'intervallo (a, x) , poichè, ove ciò fosse, la funzione da integrarsi, qualunque valore le venisse pure assegnato nel punto zero ove x^k non avrebbe più significato, non sarebbe finita nell'intervallo stesso.

Se poi è $k = -1$, allora la (1) ci dà

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{dx}{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(\rho - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d\rho}{dn}}{-\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} \rho \log \frac{x}{a}}{-\frac{1}{n^2}} = \log \frac{x}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho = \log \frac{x}{a}, \end{aligned}$$

dove si suppongono a e x diversi da zero e dello stesso segno.

Qui poi si verifica subito che le funzioni $\frac{x^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$, $\log \frac{x}{a}$ hanno rispettivamente per derivata x^k , $\frac{1}{x}$.

3) La funzione $f(x)$ sia data nell'intervallo $(0, 1)$ nel modo seguente: sia $f(x) = \frac{1}{3}$ pei valori di x da zero a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

escluso, sia $f(x) = \frac{1}{4}$ per i valori di x da $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ escluso, etc. cioè sia

$$f(x) = \frac{1}{m+2} \text{ per } \frac{m-1}{m} \leq x < \frac{m}{m+1}, (m=1, 2, 3, \dots)$$

e sia $f(1)=0$. La $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $(0, 1)$ perchè finita, e continua fuori che nei punti del gruppo $\frac{m-1}{m}$, ($m=1, 2, \dots$), che ha il solo punto limite 1.

Sia x un punto dell'intervallo $\left(\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m+1}\right)$ dove intendiamo ora con m un intero positivo fisso qualunque. Dividiamo comunque l'intervallo (a, x) in parti h_s in modo che, anche quando faremo impiccolire tutte le h_s , i punti $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ siano sempre punti di divisione. Allora è

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= \frac{1}{3} \lim \Sigma_1 h_s + \frac{1}{4} \lim \Sigma_2 h_s + \frac{1}{5} \lim \Sigma_3 h_s + \dots \\ &+ \frac{1}{m+1} \lim \Sigma_{m-1} h_s + \frac{1}{m+2} \lim \Sigma_m h_s, \end{aligned}$$

dove intendiamo che la somma Σ_1 corrisponda all'intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, la Σ_2 a $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, ..., la Σ_{m-1} a $\left(\frac{m-2}{m-1}, \frac{m-1}{m}\right)$ e la Σ_m a $\left(\frac{m-1}{m}, x\right)$; cosicchè, osservando che ciascuna di quelle somme è uguale all'ampiezza dell'intervallo corrispondente, è

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots \\ &+ \frac{1}{(m-1)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} \left(x - \frac{m-1}{m}\right), \end{aligned}$$

www.libtool.com.in

$$\frac{1}{(r-1)r(r+1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(r-1)r} - \frac{1}{r(r+1)} \right\},$$

quindi

$$\begin{aligned} & \int_0^x f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(m-1)m} - \frac{1}{m(m+1)} \right\} \\ (2) \quad & + \frac{1}{m+2} \left(x - \frac{m-1}{m} \right) = \frac{x}{m+2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2m(m+1)} \\ & - \frac{m-1}{m(m+2)} = \frac{x}{m+2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(m+1)} - \frac{3}{2(m+2)}, \end{aligned}$$

che vale per $\frac{m-1}{m} \leq x \leq \frac{m}{m+1}$.

Chiamando $\varphi(x)$ l' $\int_0^x f(x) dx$, cioè quella funzione che per $\frac{m-1}{m} \leq x \leq \frac{m}{m+1}$ ha il valore

$$\frac{x}{m+2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(m+1)} - \frac{3}{2(m+2)},$$

possiamo verificare subito che la $\varphi(x)$ è continua anche nei punti $\frac{m-1}{m}$; basta osservare che, se si fa $x = \frac{m-1}{m}$ nella precedente espressione, o, ciò che è lo stesso, nel penultimo membro della (1), si ottiene $\frac{1}{4} - \frac{1}{2m(m+1)}$, il quale valore

otteniamo pure facendo $x = \frac{m-1}{m}$ nella espressione

$$\frac{x}{m+1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2m} - \frac{3}{2(m+1)},$$

che da i valori di $\varphi(x)$ nell'intervallo $\left(\frac{m-2}{m-1}, \frac{m-1}{m}\right)$;

ed è $f\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2m(m+1)}.$

Si vede subito che nei punti interni all'intervallo

$$\left(\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m+1}\right) \text{ è } \varphi'(x) = \frac{1}{m+2} = f(x),$$

e che nel punto $\frac{m-1}{m}$ la derivata di $\varphi(x)$, a destra, è $\frac{1}{m+2}$

cioè $f\left(\frac{m-1}{m}\right)$, e la derivata a sinistra è $\frac{1}{m+1}$ cioè

$$f\left(\frac{m-1}{m} - 0\right).$$

Poichè $\lim_{m \rightarrow \infty} x = 1$, la formola (2) ci dà ancora

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x}{m+2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(m+1)} - \frac{3}{2(m+2)} \right\} = \frac{1}{4},$$

cioè $\varphi(1) = \frac{1}{4}.$

Osserviamo poi che, se $\frac{1}{m} \geq h \geq \frac{1}{m+1}$, sarà $\frac{m-1}{m} \leq 1-h$

$$\leq \frac{m}{m+1} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(1-h) - \varphi(1)}{-h} &= -\frac{1}{h} \left\{ \frac{1-h}{m+2} + \frac{1}{2(m+1)} - \frac{3}{2(m+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{m+2} - \frac{1}{2h(m+1)(m+2)}, \end{aligned}$$

e, poichè $h(m+1) \leq 1$, sarà ancora

$$\left| \frac{\varphi(1-h) - \varphi(1)}{-h} \right| \leq \frac{1}{m+2} + \frac{1}{2(m+2)} = \frac{3}{2(m+2)}.$$

Facendo diminuire h , m cresce indefinitamente, e quindi abbiamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(1-h) - \varphi(1)}{-h} = 0 = f(1-0).$$

4) Procedendo in modo analogo per la funzione $f(x)$, che è uguale a $\frac{1}{m+1}$ per $\frac{1}{m} \leq x < \frac{1}{m-1}$ ($m=2, 3, 4, \dots$), ed è $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(0) = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} f(x) dx &= \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} + \dots \\ &+ \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1}{m(m+1)(m+2)} + \frac{1}{m+1} \left(x - \frac{1}{m} \right) \end{aligned}$$

essendo n intero positivo e $> m$, e $\frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{m-1}$; ossia

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} f(x) dx = \frac{x}{m+1} - \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m(m+1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right\},$$

ed al limite, per n crescente indefinitamente,

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{x}{m+1} - \frac{1}{2m(m+1)},$$

che vale per $\frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{m-1}$.

Facendo $m=2$, $x=1$, ricaviamo

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}.$$

5) Come vedremo ancora altrove, avviene che riesca agevole il calcolo dell'integrale definito di una funzione, cioè il limite della somma S , non per qualunque intervallo nel quale la $f(x)$ sia integrabile, ma solo in speciali intervalli. Sia, ad esempio, la funzione di x , $\log(1 - 2x \cos x + x^2)$.

Se α è diverso da ± 1 , la quantità sotto il segno logaritmo è sempre positiva qualunque sia x , e la funzione è perciò finita, continua, e quindi integrabile, in qualunque intervallo finito. Ma non sappiamo calcolare facilmente che l'integrale esteso ad alcuni intervalli, come ad es. all'intervallo $(0, \pi)$. Per questo, dividendolo in n parti uguali a $\frac{\pi}{n}$, abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \log(1 - 2x \cos x + x^2) dx = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left\{ \log(1 - 2x + x^2) + \log\left(1 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + x^2\right) \right. \\ & + \log\left(1 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + x^2\right) + \dots + \log\left(1 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + x^2\right) \Big\} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log(1 - x)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log \left\{ \left(1 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + x^2\right) \right. \\ & \left. \left(1 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + x^2\right) \dots \left(1 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + x^2\right) \right\}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che le radici della equazione in α , $\alpha^{2n} - 1 = 0$, si ottengono dalla espressione

$$\cos \frac{2k\pi}{2n} + i \sin \frac{2k\pi}{2n} = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

attribuendo a k i valori $0, 1, 2, \dots, 2n-1$, ovvero esse sono $+1$, -1 e i valori che si ottengono dalle due espressioni

$$\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}, \quad \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n},$$

attribuendo in esse a k i valori $1, 2, \dots, n-1$; e, poichè

$$\begin{aligned} & \left(\alpha - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \right) \left(\alpha - \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= \left(\alpha - \cos \frac{k\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{k\pi}{n} = 1 - 2\alpha \cos \frac{k\pi}{n} + \alpha^2, \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned} \alpha^{2n} - 1 &= (\alpha - 1)(\alpha + 1) \left(1 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{n} + \alpha^2 \right) \\ & \left(1 - 2\alpha \cos \frac{2\pi}{n} + \alpha^2 \right) \dots \left(1 - 2\alpha \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \alpha^2 \right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2) d\omega &= \log(1 - \alpha^2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}, \end{aligned}$$

Se $|\alpha| < 1$, è $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{1 - \alpha^2}$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = 0;$$

se $\alpha > 1$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{2n} = \infty$, e la regola di l'Hospital ci dà

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} &= 2 \log \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{2n}}{\alpha^{2n} - 1} = \log \alpha^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha^{2n}}} \\ &= \log \alpha^2, \end{aligned}$$

e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \log \alpha^2$; cosicchè abbiamo

$$\int_0^\pi \log(1 - 2x \cos x + \alpha^2) dx = 0 \quad \text{se } |\alpha| < 1,$$

$$\int_0^\pi \log(1 - 2x \cos x + \alpha^2) dx = \pi \log \alpha^2 \quad \text{se } |\alpha| > 1.$$

ESERCIZI

1. Sia $f(x) = (m+1)(m+2)$ per $\frac{m}{m+1} \leq x < \frac{m+1}{m+2}$, dove m prende i valori $0, 1, 2, 3, \dots$

Allora se $x < 1$ e $\frac{m}{m+1} \leq x \leq \frac{m+1}{m+2}$ è

$$\int_0^x f(x) dx = (m+1)[(m+2)x - m].$$

2. Sia $f(x) = \frac{1}{2^m}$ per $\frac{1}{2^{m+1}} \leq x < \frac{1}{2^m}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) e

$f(1) = 1$; è

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{x}{2^m} - \frac{1}{3 \cdot 4^m} \quad \text{per } \frac{1}{2^{m+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^m}, \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

3. Sia $f(x) = -x$ se $\frac{1}{2^{2m+2}} \leq x < \frac{1}{2^{2m+1}}$,
www.libtool.com.cn
 $f(x) = 0$ se $\frac{1}{2^{2m+1}} \leq x < \frac{1}{2^{2m}}$,

dove $m=0, 1, 2, 3, \dots$, e $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Allora è

$$\int_0^x f(x) dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \frac{1}{4^{2m+1}} \quad \text{se} \quad \frac{1}{2^{2m+2}} \leq x \leq \frac{1}{2^{2m+1}},$$

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5} \frac{1}{4^{2m}} \quad \text{se} \quad \frac{1}{2^{2m+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^{2m}},$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{10}.$$

4. Sia $f(x)$ uguale alla differenza tra x ed il numero intero più vicino ad x , quando x non è della forma $m + \frac{1}{2}$, dove m è intero, zero compreso, e sia $f\left(m + \frac{1}{2}\right) = 0$; allora è

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{(x-m)^2}{2} \quad \text{se} \quad (m-1) + \frac{1}{2} \leq x \leq m + \frac{1}{2},$$

qualunque sia l'intero m , anche zero.

$$5. \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(1 - 2x \sin x + x^2) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } |\alpha| < 1, \\ \pi \log \alpha^2 & \text{se } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

Per provarlo si osservi che le radici complesse della equazione $\alpha^{4m} - 1 = 0$ si ottengono dalle espressioni

$$\sin \frac{k\pi}{2m} + i \cos \frac{k\pi}{2m}, \quad \sin \frac{k\pi}{2m} - i \cos \frac{k\pi}{2m}$$

facendo $k = -(m-1), -(m-2), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, m-1$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} (1 - \log \pi),$

dove per $x=0$ si intende attribuito a $\frac{\sin x}{x}$ il suo valore limite *uno*.

Si faccia uso della formola

$$\sqrt{2\pi} e^{-n} n^n \sqrt{n} < 1.2.3 \dots n < \sqrt{2\pi} e^{-n + \frac{1}{12n}} n^n \sqrt{n},$$

valevole per quanto grande sia l'intero positivo n (Vedi SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, Sezione 3^a, cap. 4^o).

Integrali indefiniti. — Metodi di integrazione.

15. Sia $f(x)$ funzione finita e continua in un certo intervallo, a un punto fisso qualunque e x un punto generico di esso. La funzione

$$\int_a^x f(x) dx + C \quad (C \text{ costante})$$

è l'integrale *generale* o *completo* di $f(x)$, ossia quella funzione, la cui derivata è $f(x)$; la si indica col simbolo $\int f(x) dx$, preponendo il segno $\int$ al differenziale $f(x) dx$, cioè

$$(1) \quad \int f(x) dx = \int_a^x f(x) dx + C$$

e si chiama anche *integrale indefinito* o semplicemente *integrale* della funzione $f(x)$ o del differenziale $f(x) dx$.

Da questa posizione risulta subito che

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \quad \int \psi'(x) dx = \int d\psi(x) = \psi(x).$$

La formola (1) ci dà l'integrale indefinito mediante un integrale definito. Notiamo subito che se si trova in un modo qualunque l'integrale indefinito $\int f(x)dx = \varphi(x) + C$, per quanto vedemmo al n. 2, è

$$\int_a^x f(x)dx = [\varphi(x) + C] - [\varphi(a) + C] = \varphi(x) - \varphi(a),$$

formola che ci insegna a calcolare l'integrale definito mediante l'indefinito.

16. Noi diciamo che l' $\int f(x)dx$ è espresso in termini finiti, quando si riesca ad esprimere con un numero finito di operazioni analitiche, sopra le funzioni elementari, quella funzione, la cui derivata è $f(x)$ nell'intervallo che si considera. Ora la formola (1) del n. precedente ci indica, che la via diretta per conseguire l'integrale, in termini finiti, sarebbe il calcolo, in termini finiti, dell' $\int_a^x f(x)dx$, cioè del limite della somma S relativa ad $f(x)$ ed all'intervallo generico (a, x) : ma tale calcolo riesce solo in pochissimi casi. È perciò che la via diretta non viene quasi mai battuta pel conseguimento della integrazione, e si cerca invece, data la funzione $f(x)$, di arrivare indirettamente a scoprire una funzione $\varphi(x)$, espressa in termini finiti, che derivata riproduca $f(x)$, ed allora è $\int f(x)dx = \varphi(x) + C$.

Se riconosciamo, senz'altro, in una funzione $f(x)$ la derivata di un'altra funzione $\varphi(x)$, la integrazione di $f(x)$ è *immediata*; così abbiamo immediatamente le seguenti formole fondamentali:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad (m \geq -1),$$

$$[\text{ad es.: } \int x dx = \frac{x^2}{2}, \quad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4},$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{8} x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8} x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x^3},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = 4\sqrt[4]{x}, \quad \int x^{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{x^{\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{3}},$$

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}, (m \geq 1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x,$$

$$\int e^x dx = e^x,$$

$$\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m},$$

$$\int \cos x dx = \text{sen } x,$$

$$\int \cos mx dx = \frac{\text{sen } mx}{m},$$

$$\int \text{sen } x dx = -\cos x,$$

$$\int \text{sen } mx dx = -\frac{\cos mx}{m},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \text{tg}^2 x) dx = \text{tg } x, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 mx} = \frac{\text{tg } mx}{m},$$

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = -\cot x,$$

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 mx} = -\frac{\cot mx}{m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sen } \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x,$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg } \frac{x}{a},$$

nelle quali formole abbiamo ommesso, per brevità, di aggiungere in ciascuna la costante C.

17. Per conseguire un integrale in termini finiti non possediamo una via sicura, tranne quella del calcolo del limite della somma S, che in pratica non riesce; vi sono però degli

speciali artifizii e dei *metodi di integrazione*, che abilmente adoperati, conducono spesso allo scopo.

Osserviamo primieramente che una costante a può portarsi fuori del segno $\int$, cioè

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

a meno di una costante addittiva C , giacchè le due funzioni $\int a f(x) dx$, $a \int f(x) dx$ hanno la stessa derivata $a f(x)$.

Inoltre l'*integrale della somma di un numero finito di funzioni è uguale alla somma degli integrali delle funzioni*, cioè

$$\begin{aligned} & \int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx \\ &= \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx \end{aligned}$$

a meno d'una costante addittiva, giacchè la funzione nel primo membro e quella nel secondo hanno la stessa derivata $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)$.

18. Ciò premesso, i metodi soliti a usarsi per la integrazione di un differenziale sono i seguenti.

Integrazione per decomposizione. — Consiste nel decomporre il differenziale integrando in altri il cui integrale sia noto, o facilmente determinabile.

ESEMPI

1) Si voglia integrare il differenziale $\frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; osservando che $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$, applicando il pre-

cedente teorema e rammentando le formole fondamentali testè determinate, è www.libtool.com.cn

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x + C, (C \text{ costante}).$$

$$2) \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C,$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C,$$

$$3) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a} \left\{ \int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x} \right\}$$

$$= \frac{1}{2a} \left\{ - \int d \log(a-x) + \int d \log(a+x) \right\}$$

$$= \frac{1}{2a} \left\{ - \log(a-x) + \log(a+x) \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C,$$

dove si suppone $\frac{a+x}{a-x} > 0$, ed eseguendo il calcolo si suppone pure $a+x > 0$, $a-x > 0$. Se fosse $a+x > 0$, $a-x < 0$, osservando che

$$\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{-dx}{x-a} = - \int d \log(x-a) = - \log(x-a),$$

si troverebbe

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C.$$

Procedendo in modo analogo se $a+x < 0$, $a-x > 0$, oppure se $a+x < 0$, $a-x < 0$, si conclude

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C, & \text{se } \frac{a+x}{a-x} > 0 \\ \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{x-a} + C, & \text{se } \frac{a+x}{a-x} < 0, \end{cases}$$

ossia $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$, che noi, seguendo l'uso comune, scriveremo semplicemente $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$, colla convenzione che della quantità sotto il segno logaritmo si intenda preso il valore assoluto.

$$\begin{aligned} 4) \int dx \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \int dx \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x - \int d\sqrt{1-x^2} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

19. Integrazione per sostituzione. — Avendosi da calcolare l'integrale $\int f(x) dx$, si ponga $x = \varphi(y)$, essendo $\varphi(y)$ funzione univalente continua insieme alla sua derivata $\varphi'(y)$, e si consideri l'integrale $\int f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy$ ottenuto da $\int f(x) dx$ ponendo $\varphi(y)$ in luogo di x in $f(x)$ e $\varphi'(y) dy$ in luogo di dx . Sia

$$\int f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy = \psi(y), \quad \text{cosichè} \quad \psi'(y) = f[\varphi(y)] \varphi'(y).$$

Dalla eguaglianza $x = \varphi(y)$ supponiamo ricavato y per x , cosichè siano $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, ... i diversi rami univalenti

della funzione y di x definita dalla $x = \varphi(y)$, essendo così $\varphi[\varphi_1(x)] = x$, $\varphi_1[\varphi(y)] = y$. Tra essi prendiamo quello, poniamo sia $y = \varphi_1(x)$, che si suppone considerato nelle formole precedenti, cosicchè sia $\varphi'(y) \frac{dy}{dx} = \varphi'(y) \varphi'_1(x) = 1$, dovendo perciò supporre $\varphi'_1(x)$ sempre diversa da zero. Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi[\varphi_1(x)]}{dx} &= \frac{d\psi(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \psi'(y) \varphi'_1(x) \\ &= f[\varphi(y)] \varphi'(y) \varphi'_1(x) = f[\varphi(y)] = f[\varphi_1(x)] = f(x), \end{aligned}$$

e quindi $\psi[\varphi_1(x)]$ e $\int f(x)dx$ non potranno differire altro che per una costante, sicchè

$$\int f(x)dx = \psi[\varphi_1(x)] + C.$$

Da quanto precede si scorge che, l'integrazione del differenziale $f(x)dx$ è ridotta a quella del differenziale $f[\varphi(y)] \varphi'(y)dy$, il quale, presa convenientemente la funzione $x = \varphi(y)$, o la $y = \varphi_1(x)$, potrà riuscire più agevolmente integrabile del differenziale $f(x)dx$. Non vi sono regole che indichino in ogni caso la scelta di tali opportune funzioni, e solo la pratica e l'abilità potranno guidare l'accorto analista. Intanto abbiamo la regola seguente:

Siano $x = \varphi(y)$, $y = \varphi_1(x)$ funzioni univalenti continue insieme alle loro derivate e sia $\varphi[\varphi_1(x)] = x$, $\varphi'(y) \varphi'_1(x) = 1$; allora, trasformato il differenziale $f(x)dx$ in $f(\varphi(y)) \varphi'(y)dy$ mediante le posizioni precedenti, se si trova

$$\int f[\varphi(y)] \varphi'(y)dy = \psi(y),$$

e

$$\int f(x)dx = \psi[\varphi_1(x)] + C,$$

e scriveremo

www.libtool.com.cn

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy = \psi(y) + C = \psi[\varphi_1(x)] + C.$$

ESEMPLI.

1) Sia da calcolare l' $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; poniamo $x = \log y$, $e^x = y$, da cui $dx = \frac{dy}{y}$; avremo

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dy}{y(y + \frac{1}{y})} = \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \arctg y + C = \arctg e^x + C.$$

2) Sia l' $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; dobbiamo supporre x appartenente all'intervallo $(-1, +1)$, gli estremi esclusi. Poniamo $x = \sin y$, e supponiamo y compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$; allora è $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \arcsin x$, e $dx = \cos y dy$, cosicchè

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \sin^2 y dy = \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} + C \\ &= \frac{y}{2} - \frac{\sin y \cos y}{2} + C = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Se prendessimo y compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, sarebbe $\cos y = -\sqrt{1-x^2}$, $y = \pi - \arcsin x$, indicando con $\arcsin x$ il più piccolo arco il cui seno è x , essendo così anche adesso $\varphi'(y) \varphi'(x) = 1$, e si avrebbe lo stesso risultato

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int \sin^2 y dy = -\frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C_1$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

3) Posto $y = \varphi(x)$ abbiamo

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) = \int f(y) dy,$$

e se è $\int f(y) dy = \psi(y)$, si ricava

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \psi[\varphi(x)] + C.$$

Questa formola, che può riuscire spesso utile, serve subito a generalizzare gli integrali semplici immediatamente ottenuti al n. 16.

Così è

$$\int \overline{f(x)}^m f'(x) dx = \frac{1}{m+1} \overline{f(x)}^{m+1} + C \quad (m \geq -1),$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \log f(x) + C,$$

nella quale formola intendiamo preso, sotto il segno logaritmo, il valore assoluto di $f(x)$; giacchè se fosse $f(x) < 0$, osservando che

$$d \log [-f(x)] = \frac{-df(x)}{-f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)},$$

sarebbe

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \log [-f(x)] + C.$$

Questa convenzione vale adunque per tutti i logaritmi che

provengono da qualche integrazione, e noi non staremo più a ripeterla generalmente.

$$\int \frac{df(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} = \text{arc sen } f(x) + C,$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{a^2+f(x)^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg } \frac{f(x)}{a} + C, \text{ etc.}$$

Ad es.:

$$\int \frac{(3a^2x^2 + b)dx}{a^2x^3 + bx + c} = \log(a^2x^3 + bx + c) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^4} \text{arc tg } \frac{x^2}{a^2} + C,$$

$$\int \text{sen}^3 x \cos x dx = \int \text{sen}^2 x d\text{sen } x = \frac{1}{4} \text{sen}^4 x + C,$$

$$\int \sqrt{1+x} dx = \int \sqrt{1+x} d(1+x) = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

20. Integrazione per parti. Siano u, v funzioni univalenti continue e che ammettano derivata; allora dalla formola

$$d(uv) = u dv + v du$$

abbiamo

$$uv = \int u dv + \int v du$$

ossia

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

che riduce la integrazione di $u dv$ a quella di $v du$, ed osservando che $v = \int dv$, possiamo enunciare la regola:

L'integrale del prodotto di un fattor finito u per un fattore differenziale dv è uguale al fattor finito per l'in-

tegrale del fattor differenziale, meno l'integrale dell'integrale trovato pel differenziale del fattor finito.

Per applicare questo metodo, detto di *integrazione per parti*, si decomponga il differenziale integrando nel prodotto di un fattore finito per un fattore differenziale, il che può farsi in infiniti modi, e si scelgano in modo che del fattore differenziale si conosca, o si calcoli facilmente, l'integrale, e che il nuovo integrale, che ancora rimane da calcolare, sia più facilmente integrabile del proposto. Sta all'abilità del calcolatore il trovare convenientemente questi due fattori.

ESEMPLI.

1) Prendendo $\log x$ per fattore finito e dx per fattore differenziale abbiamo, integrando per parti,

$$\int \log x dx = x \log x - \int dx = x(\log x - 1) + C.$$

2) Così pure abbiamo, se $m \geq -1$,

$$\begin{aligned} \int x^m \log x dx &= \int \log x d \frac{x^{m+1}}{m+1} = \\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{1}{m+1} \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[\log x - \frac{1}{m+1} \right] + C; \end{aligned}$$

se $m = -1$, abbiamo, senz'altro,

$$\int \log x \frac{dx}{x} = \int \log x d \log x = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C.$$

$$3) \int \cos(\log x) dx = \int x \cos(\log x) \frac{dx}{x} = \int x d \sin(\log x)$$

$$(1) \quad = x \sin(\log x) - \int \sin(\log x) dx,$$

e, analogamente,

www.libtool.com.cn

$$(2) \quad \int \operatorname{sen}(\log x) dx = - \int x d \cos(\log x) = -x \cos(\log x) + \int \cos(\log x) dx,$$

cosicchè la (1) diviene

$$\int \cos(\log x) dx = x [\operatorname{sen}(\log x) + \cos(\log x)] - \int \cos(\log x) dx$$

da cui

$$\int \cos(\log x) dx = \frac{1}{2} x [\operatorname{sen}(\log x) + \cos(\log x)] + C;$$

e dalla (2), in virtù della (1), ricaviamo

$$\int \operatorname{sen}(\log x) dx = \frac{1}{2} x [\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)] + C.$$

21. Una formola, che contiene come caso particolare quella della integrazione per parti, e che può riuscire utile, si ottiene nel modo seguente.

Indicando con $u', v', u'', v'', \dots$ le derivate di u, v , abbiamo

$$\int uv^{(n)} dx = \int u d(v^{(n-1)}) = uv^{(n-1)} - \int u' v^{(n-1)} dx;$$

applicando l'integrazione per parti all'integrale dell'ultimo membro abbiamo ancora

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)} dx,$$

e, integrando per parti l'integrale del secondo membro,

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \int u'''v^{(n-3)} dx,$$

e, così di seguito, otteniamo la formola

$$\int u v^{(n)} dx = u v^{(n-1)} - u' v^{(n-2)} + u'' v^{(n-3)} - \dots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v dx.$$

Così, ad esempio, se $u = f(x)$, $v = \frac{e^{ax}}{a^n}$, dove $f(x)$ è un polinomio razionale intero in x di grado $(n-1)$, essendo allora $u^{(n)} = f^{(n)}(x) = 0$, $v^{(r)} = \frac{e^{ax}}{a^{n-r}}$, abbiamo

$$\int e^{ax} f(x) dx = \frac{e^{ax}}{a} \left[f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(x)}{a^{n-1}} \right] + C;$$

in particolare

$$\int e^{ax} x^m dx = \frac{e^{ax}}{a} \left[x^m - \frac{m}{a} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^2} x^{m-2} - \dots + (-1)^m \frac{m(m-1) \dots 2 \cdot 1}{a^m} \right] + C.$$

22. È quasi superfluo avvertire come i metodi suesposti possano venire successivamente e ripetutamente usati pel calcolo di un integrale, e come spesso giovi ricorrere a speciali trasformazioni ed artifizii.

ESEMPLI.

1). Per calcolare $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx$, possiamo osservare prima che $\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} = \arctg \sqrt{\frac{x}{a}}$, cosichè abbiamo, in-

tegrando per parti,

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx &= \int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \\ &= x \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}} \int \frac{\sqrt{x} dx}{a+x}.\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale dell'ultimo membro poniamo $x = y^2$, ed allora

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x} dx}{a+x} &= 2 \int \frac{y^2 dy}{a+y^2} = 2 \int \frac{a+y^2-a}{a+y^2} dy = 2y - 2a \int \frac{dy}{a+y^2} \\ &= 2y - 2\sqrt{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{a}},\end{aligned}$$

e quindi

$$\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = (x+a) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + C,$$

$$\text{od anche } = (x+a) \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x}{a+x}} - \sqrt{ax} + C.$$

2) Volendosi l'integrale

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

si osservi che $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$,
cosicchè

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

Se $4ac - b^2 > 0$, poichè $dx = d\left(x + \frac{b}{2a}\right)$, l'integrale del secondo membro è della forma $\int \frac{dy}{y^2 + A^2}$ e quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}. \end{aligned}$$

Se $4ac - b^2 < 0$, l'integrale è della forma $\int \frac{dy}{y^2 - A^2}$, e quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \frac{1}{2\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}} \log \frac{x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}{x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \end{aligned}$$

Se $4ac - b^2 = 0$, è

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = -\frac{1}{a} \frac{1}{x + \frac{b}{2a}} = -\frac{2}{2ax + b}.$$

Cosichè, riassumendo,

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C & \text{se } 4ac - b^2 > 0 \\ -\frac{2}{2ax + b} + C & \text{» } 4ac - b^2 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C & \text{» } 4ac - b^2 < 0. \end{cases}$$

In particolare, se $a = 1$, $c = 1$, $a = 2 \cos \varphi$, $4ac - b^2 = 4 \sin^2 \varphi$, abbiamo la formola alcune volte utile

$$\int \frac{dx}{1 + 2x \cos \varphi + x^2} = \frac{1}{\sin \varphi} \arctg \frac{x + \cos \varphi}{\sin \varphi} + C.$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx &= M \int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} + N \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \\ &= \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b - b}{ax^2 + bx + c} dx + N \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \\ &= \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(N - \frac{bM}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \\ &= \frac{M}{2a} \log(ax^2 + bx + c) + \left(N - \frac{bM}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \int \frac{dx}{(a + bx^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{dx}{x^2(ax^{-2} + b)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a} \int \frac{d(ax^{-2})}{(ax^{-2} + b)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2a} \frac{(ax^{-2} + b)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{x}{a\sqrt{a + bx^2}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} &= \int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x} dx \\ &= \int \frac{1+x}{x} \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \int \frac{1-x}{x} \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}, \end{aligned}$$

dove supponiamo x diverso da zero e $|x| < 1$.

$$\text{Osservando che } \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} = d\sqrt{1+x}, \text{ e } \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} =$$

$-d\sqrt{1-x}$, siamo indotti a provare le sostituzioni $\sqrt{1+x}=y$ nel primo, $\sqrt{1-x}=z$ nel secondo integrale dell'ultimo membro della formola precedente. Ciò facendo, il primo integrale diviene

$$\int \frac{y^2 dy}{y^2-1} = \int \frac{y^2-1+1}{y^2-1} dy = y + \frac{1}{2} \log \frac{y-1}{y+1},$$

ed il secondo

$$\int \frac{z^2 dz}{z^2-1} = z + \frac{1}{2} \log \frac{z-1}{z+1},$$

e perciò

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} &= \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \frac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}-1)}{(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1-x}+1)} + C \\ &= \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \log \left| \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}-1)}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

ESERCIZI

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \frac{2}{3(a-b)} [(x+a)^{\frac{3}{2}} - (x+b)^{\frac{3}{2}}] \quad (1).$$

$$2. \int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx = \log(x+\cos x).$$

$$3. \int \sqrt{2-3x+7x^3} (7x^3-1) dx = \frac{2}{9} (2-3x+7x^3)^{\frac{3}{2}}.$$

$$4. \int \frac{1-6x^3+15x^5}{7-2x+3x^4-5x^6} dx = \log \frac{1}{\sqrt{7-2x+3x^4-5x^6}}.$$

(1) Tralasciemo, per brevità, di aggiungere la costante arbitraria, tranne in qualche caso speciale ove ciò sia opportuno, come si intenderà subito eseguendo il calcolo.

$$5. \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

www.libtool.com.cn

$$6. \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^a x \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{a \operatorname{sen}^a x}.$$

$$7. \int e^{x^3-3x^2+2} (2x-x^3) dx = -\frac{1}{3} e^{x^3-3x^2+2}.$$

$$8. \int \frac{a+b\sqrt[3]{\log x}}{x} dx = \frac{1}{4} [4a+3b\sqrt[3]{\log x}] \log x.$$

$$9. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x^2}{a^2}.$$

$$10. \int \frac{x dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2} \log \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

$$11. \int e^x \log(1+e^x) dx = (1+e^x) \log(1+e^x) - e^x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{1+e^x} = x - \log(1+e^x).$$

$$13. \int \frac{x^4 dx}{x^2+a^2} = a^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3} - a^2 x.$$

$$14. \int \frac{x^4 dx}{x^2-a^2} = \frac{a^2}{2} \log \frac{x-a}{x+a} + \frac{x^3}{3} + a^2 x.$$

$$15. \int \frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x} dx = x \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

$$16. \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx = \left[x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right] \operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1+x^2}.$$

$$17. \int \frac{x e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}.$$

18. $\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{x}{a(a+bx^n)^{\frac{1}{n}}} \quad (n \text{ qualunque diverso da zero}).$

19. $\int \arcsen \frac{x}{a} dx = x \arcsen \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$

20. $\int x \arcsen \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4} \left[(2x^2 - a^2) \arcsen \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right].$

21. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \arcsen \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \log(a^2 + x^2).$

22. $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} \left[(x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - ax \right].$

23. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsen \frac{a}{x} + C = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \frac{a}{x} + C_1$
 $= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C_2.$

24. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + a \arcsen \frac{a}{x}.$

25. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}.$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 2 \arcsen \sqrt{\frac{x}{a}}.$

27. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a}.$

$$28. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{8} \left[a^4 \arcsen \frac{x}{a} + x(2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} \right].$$

$$29. \int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2}{4} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} \right].$$

$$30. \int \frac{x^n dx}{(a+bx)^{n+2}} = \frac{1}{(n+1)a} \left(\frac{x}{a+bx} \right)^{n+1} \text{ per } n \text{ qualunque diverso da } -1; \text{ se } n = -1 \text{ è } \int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a} \log \frac{x}{a+bx}.$$

$$31. \int (\operatorname{tg}^n x + \operatorname{tg}^{n+2} x) dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1} \text{ per } n \text{ qualunque diverso da } -1; \text{ se } n = -1 \text{ è } \int \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x \right) dx = \log \operatorname{tg} x.$$

32. Se n è intero positivo si ha

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \frac{\operatorname{tg}^{n-3} x}{n-3} + \frac{\operatorname{tg}^{n-5} x}{n-5} - \dots$$

$$+ \begin{cases} \pm \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} \mp (\operatorname{tg} x - x) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pm \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \pm \log \cos x & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

33. Se $f(x)$ è funzione razionale intera, abbiamo

$$\int f(x) \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} \left[f(x) - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^4} - \frac{f'''(x)}{a^6} + \dots \right]$$

$$+ \frac{\cos ax}{a} \left[f'(x) - \frac{f''(x)}{a^3} + \frac{f'''(x)}{a^5} - \dots \right],$$

$$\int f(x) \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} \left[f(x) - \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{IV}(x)}{a^4} - \dots \right] \\ + \frac{\operatorname{sen} ax}{a} \left[f'(x) - \frac{f'''(x)}{a^3} + \frac{f^V(x)}{a^5} - \dots \right].$$

34. Se $f(x)$ è funzione razionale intera di grado $n-1$, abbiamo

$$\int \frac{f(x)}{(1-x)^{n+1}} dx = \frac{1}{n} \frac{1}{1-x} \left[\frac{|n-1}{(1-x)^{n-1}} f(x) - \frac{|n-2}{(1-x)^{n-2}} f'(x) \right. \\ \left. + \frac{|n-3}{(1-x)^{n-3}} f''(x) - \dots + (-1)^{n-2} \frac{1}{1-x} f^{(n-2)}(x) + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x) \right].$$

$$35. \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \frac{1}{2} (x^2 - a^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} \\ - \frac{\sqrt{ax}}{2} \left[\frac{1}{3} x - a \right],$$

$$\int x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \frac{1}{3} (x^3 + a^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} \\ - \frac{\sqrt{ax}}{3} \left[\frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{3} ax + a^2 \right],$$

$$\int x^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1} + (-1)^n a^{n+1} \right] \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} \\ - \frac{\sqrt{ax}}{n+1} \left[\frac{1}{2n+1} x^n - \frac{1}{2n-1} ax^{n-1} + \frac{1}{2n-3} a^2 x^{n-2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2n-5} a^3 x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3} a^{n-1} x + (-1)^n a^n \right].$$

23. Si posseggono metodi certi per la integrazione di alcune classi di funzioni; tra esse si presentano prime le funzioni razionali.

Le funzioni razionali intere si integrano senz'altro, giacchè

$$\begin{aligned} & \int (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m) dx \\ &= \frac{a_0 x^{m+1}}{m+1} + \frac{a_1 x^m}{m} + \dots + \frac{a_{m-1} x^2}{2} + a_m x + C. \end{aligned}$$

24. Passando alle funzioni razionali fatte $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, dove F e φ sono funzioni intere, se il grado di $F(x)$ supera o uguaglia quello di $\varphi(x)$ è opportuno (ma anche per le considerazioni che seguiranno non necessario) eseguire la divisione di $F(x)$ per $\varphi(x)$, ottenendo così

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = Q(x) + \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

dove $Q(x)$ è funzione intera ed il grado di $f(x)$ è minore di quello di $\varphi(x)$; allora, poichè

$$\int \frac{F(x)}{\varphi(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx,$$

il problema è ridotto alla integrazione della frazione più semplice $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, che possiamo supporre inoltre irriducibile.

La integrazione di questa si opera integrando altre frazioni più semplici, corrispondenti alle radici della equazione $\varphi(x)=0$, nella cui somma si decompone la $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Se a è radice della equazione $\varphi(x) = 0$, α il suo grado di molteplicità, cosicchè sia $\varphi(x) = (x-a)^\alpha \varphi_1(x)$, allora esistono delle costanti $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \dots, A_1$ tali che

$$(1) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}$$

dove $f_\alpha(x)$ indica funzione razionale intera.

Cominciamo dal provare che si può determinare A_α in guisa che risulti

$$(2) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} \varphi_1(x)}$$

dove $f_1(x)$ è funzione intera.

Invero, abbiamo identicamente

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)} - \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ &\quad + \frac{f(x) - A_\alpha \varphi_1(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)}, \end{aligned}$$

che diviene la (2) se assumiamo $A_\alpha = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$, dove $f(a)$ e $\varphi_1(a)$ sono certamente entrambe diverse da zero per le ipotesi fatte, poichè allora $f(x) - A_\alpha \varphi_1(x)$ risulta divisibile per $x-a$, e possiamo porre

$$\frac{f(x) - A_\alpha \varphi_1(x)}{x-a} = \frac{f(x) - \frac{f(a)}{\varphi_1(a)} \varphi_1(x)}{x-a} = f_1(x),$$

essendo così $f_1(x)$ funzione intera.

Applicando lo stesso procedimento alla frazione $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} \varphi_1(x)}$,

La determinazione effettiva delle costanti A è riassunta nelle formole seguenti:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} A_\alpha = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}, \quad f_1(x) = \frac{f(x) - A_\alpha \varphi_1(x)}{x-a}, \\ A_{\alpha-1} = \frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x) - A_{\alpha-1} \varphi_1(x)}{x-a}, \\ A_{\alpha-2} = \frac{f_2(a)}{\varphi_1(a)}, \quad f_3(x) = \frac{f_2(x) - A_{\alpha-2} \varphi_1(x)}{x-a}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_1 = \frac{f_{\alpha-1}(a)}{\varphi_1(a)}, \quad f_\alpha(x) = \frac{f_{\alpha-1}(x) - A_1 \varphi_1(x)}{x-a}, \end{array} \right.$$

Osserviamo ancora che, se $\varphi_1(x)$ fosse una costante, sarebbe allora $f(x)$ di grado al più $\alpha-1$, la $f_1(x)$ di grado al più $\alpha-2$, ecc. cosichè, la $f_{\alpha-1}(x)$ riducendosi ad una costante, la $f_{\alpha}(x)$ sarebbe zero.

Se poi $b, \dots, c$ sono le altre radici della equazione $\varphi(x)=0$, $\beta, \dots, \gamma$ i loro gradi di molteplicità, poichè esse sono radici, collo stesso grado di molteplicità, della $\varphi_1(x)=0$, si vede che, applicando alla $\frac{f_a(x)}{\varphi_1(x)}$ lo stesso procedimento, e tenendo pre-

Prendendo x convenientemente vicino ad a possiamo rendere il secondo membro minore di qualunque quantità prefissata positiva τ , e quindi la costante A_α deve essere zero; e così pure si vedrebbe che devono essere zero le costanti $A_{\alpha-1}, A_{\alpha-2}, \dots, A_{\alpha'+1}$.

Dimostrato così che $\alpha = \alpha'$, la formola

$$(1) \quad \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots = \frac{A'_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots$$

ci dà

$$\frac{A_\alpha - A'_\alpha}{(x-a)^\alpha} = \frac{\psi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-1} \psi_3(x)},$$

dove $\psi_3(x)$ non è annullata da $x=a$, da cui

$$|A_\alpha - A'_\alpha| = |x-a| \left| \frac{\psi_2(x)}{\psi_3(x)} \right|,$$

e qui pure si vedrebbe, come precedentemente, che $A_\alpha - A'_\alpha = 0$, ossia $A_\alpha = A'_\alpha$.

Sopprimendo allora dalla (1) i due termini uguali nei due membri, si dimostra, nello stesso modo, che $A_{\alpha-1} = A'_{\alpha-1}$ etc.; e poi che $\beta' = \beta$, $B_\beta = B'_\beta$, $B_{\beta-1} = B'_{\beta-1}$, etc.

26. Decomposta la frazione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in frazioni semplici, la integrazione del differenziale $\frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$ è immediatamente eseguita, giacchè abbiamo, supposte reali le $a, b, \dots$,

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{-A_\alpha}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{A_{\alpha-1}}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} - \dots - \frac{A_2}{x-a} + A_1 \log(x-a)$$

$$(1) \quad - \frac{B_\beta}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \frac{B_{\beta-1}}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}} - \dots - \frac{B_2}{x-b} + B_1 \log(x-b)$$

—

Se a è radice semplice la parte di integrale che da essa proviene è semplicemente $A_1 \log(x-a)$, dove $A_1 = \frac{f'(a)}{\varphi_1'(a)}$.

Osservando che dalla eguaglianza $\varphi(x) = (x-a)\varphi_1(x)$ si ricava $\varphi'(x) = \varphi_1(x) + (x-a)\varphi_1'(x)$ e quindi $\varphi'(a) = \varphi_1'(a)$, abbiamo ancora $A_1 = \frac{f'(a)}{\varphi_1'(a)}$; e così pure se b fosse radice semplice si

avrebbe $B_1 = \frac{f'(b)}{\varphi_1'(b)}$ ecc. Se le radici della $\varphi(x) = 0$ sono tutte semplici, gioverà, per determinare i coefficienti corrispondenti $A_1, B_1, \dots$, far uso di queste formole.

27. La decomposizione precedente in frazioni semplici vale in ogni caso, anche se la $\varphi(x) = 0$ ha delle radici complesse.

Ma noi, almeno per ora, cioè fino a che non siano trattate convenientemente le funzioni di variabili complesse, non possiamo eseguire la integrazione, a meno che non si possa liberare dagli immaginari il secondo membro dello sviluppo di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Ciò riesce facilmente se i coefficienti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono reali. Allora le radici di $\varphi(x) = 0$, ove siano complesse, sono coniugate.

Supponendo a e b radici semplici complesse coniugate, $a = \mu + i\nu$, $b = \mu - i\nu$ ($i = \sqrt{-1}$), abbiamo $A_1 = \frac{f'(\mu + i\nu)}{\varphi'(\mu + i\nu)} = G + iH$, $B_1 = \frac{f'(\mu - i\nu)}{\varphi'(\mu - i\nu)} = G - iH$, e la parte $\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b}$ dello sviluppo di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, che da esse proviene, riducesi a

$$\frac{G + iH}{x - \mu - i\nu} + \frac{G - iH}{x - \mu + i\nu} = \frac{2G(x - \mu) - 2H\nu}{(x - \mu)^2 + \nu^2},$$

che è scevra da immaginari; e la corrispondente parte di in-

tegrale di $\frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$ è

www.libtool.com.cn

$$\int \frac{2G(x-\mu) - 2H\nu}{(x-\mu)^2 + \nu^2} dx = G \int \frac{2(x-\mu)}{(x-\mu)^2 + \nu^2} dx - 2H\nu \int \frac{dx}{(x-\mu)^2 + \nu^2}$$

$$= G \log[(x-\mu)^2 + \nu^2] - 2H \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{\nu}.$$

28. Supponiamo ora $a = \mu + i\nu$, $b = \mu - i\nu$ radici coniugate, il cui grado di molteplicità sia α , cosicchè $\varphi(x) = \rho^\alpha \varphi_1(x)$, avendo posto, per brevità, $\rho = (x-\mu)^2 + \nu^2$. Dico che allora *esistono delle costanti reali* $P_\alpha, Q_\alpha, P_{\alpha-1}, Q_{\alpha-1}, \dots$ *talì che*

$$(1) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{\rho^\alpha} + \frac{P_{\alpha-1} x + Q_{\alpha-1}}{\rho^{\alpha-1}} + \dots + \frac{P_1 x + Q_1}{\rho} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

dove $f_\alpha(x)$ è funzione intera.

Infatti, avremo

$$(2) \quad \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{f(x)}{\rho^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{\rho^\alpha} + \frac{f_1(x)}{\rho^{\alpha-1} \varphi_1(x)},$$

dove $f_1(x)$ è funzione intera, poichè, se nella identità

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{\rho^\alpha} + \frac{f(x)}{\rho^\alpha \varphi_1(x)} - \frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{\rho^\alpha} = \frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{\rho^\alpha}$$

$$+ \frac{f(x) - (P_\alpha x + Q_\alpha) \varphi_1(x)}{\rho^\alpha \varphi_1(x)}$$

determiniamo P_α e Q_α dalla equazione

$$(3) \quad f(\mu + i\nu) - [P_\alpha(\mu + i\nu) + Q_\alpha] \varphi_1(\mu + i\nu) = 0,$$

risulterà $f(x) - (P_\alpha x + Q_\alpha)$ divisibile per $x - \mu - i\nu$ e per $x - \mu + i\nu$, e quindi per ρ , ed essa diviene appunto la (2). Dalla (3) si possono effettivamente determinare le quantità reali P_α e Q_α , giacchè la (3) è della forma

$$P_\alpha(\mu + i\nu) + Q_\alpha = \frac{f(\mu + i\nu)}{\varphi_1(\mu + i\nu)} = G_\alpha + iH_\alpha,$$

Anche qui può essere opportuno, per eseguire le divisioni per ρ , cioè per dividere successivamente per $x - \mu - i\nu$ e per $x - \mu + i\nu$, di far uso della tavola di *Ruffini*; e si osservi anche qui che, ove $\varphi_1(x)$ fosse una costante, $f_\alpha(x)$ risulterebbe zero.

29. La funzione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ non può decomporci che in un sol modo in frazioni semplici della forma $\frac{A}{(x-b)\beta}, \frac{Px+Q}{\rho^\alpha}$.

Infatti se

$$(1) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{B\beta}{(x-b)\beta} + \dots + \frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{\rho^\alpha} + \dots = \frac{B'\beta}{(x-b)\beta} + \dots + \frac{P'_{\alpha'} x + Q_{\alpha'}}{\rho^{\alpha'}} + \dots,$$

si dimostrerebbe, come al n. 25, l'identità delle parti dei due membri che contengono frazioni della forma $\frac{B}{(x-b)\beta}$. Per dimostrare ancora l'identità delle parti restanti, cominciamo dal provare che $\alpha = \alpha'$. Invero, se fosse $\alpha > \alpha'$, ricaveremmo dalla formola precedente,

$$\frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{\rho^\alpha} = \frac{\psi_1(x)}{\rho^{\alpha-1}\psi(x)} \quad \text{ossia} \quad P_\alpha x + Q_\alpha = \rho \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)},$$

dove $\psi(x)$ non si annulla per $x = \mu \pm i\nu$. L'ultima formola vale per valori di x diversi, ma vicini quanto si vuole a $\mu \pm i\nu$, cosichè potremo dire che $\lim_{x \rightarrow \mu \pm i\nu} (P_\alpha x + Q_\alpha) = \lim_{x \rightarrow \mu \pm i\nu} \rho \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} = 0$ ¹⁾

ossia $P_\alpha(\mu + i\nu) + Q_\alpha = 0$, da cui $P_\alpha \mu + Q_\alpha = 0$, $P_\alpha \nu = 0$, e, poichè ν è diverso da zero, avremo $P_\alpha = 0$ e quindi anche $Q_\alpha = 0$. Allo stesso modo si dimostrerebbe che $P_{\alpha-1} = 0$, $Q_{\alpha-1} = 0$, ..., $P_{\alpha'-1} = 0$, $Q_{\alpha'-1} = 0$, e perciò $\alpha = \alpha'$. Ciò posto, dalla (1) ri-

¹⁾ Verrà in seguito esattamente definito il limite nel caso di variabili complesse.

caviamo

www.libtool.com.cn

$$\frac{(P_\alpha - P'_\alpha)x + Q_\alpha - Q'_\alpha}{\rho^\alpha} = \frac{\psi_2(x)}{\rho^{\alpha-1}\psi_3(x)} \text{ da cui } (P_\alpha - P'_\alpha)x + Q_\alpha - Q'_\alpha = \rho \frac{\psi_2(x)}{\psi_3(x)},$$

e da questa, come precedentemente, $P_\alpha - P'_\alpha = 0$, $Q_\alpha - Q'_\alpha = 0$.

Tolti dalla (1) i termini uguali, si dimostra, al modo stesso, che $P_{\alpha-1} = P'_{\alpha-1}$, $Q_{\alpha-1} = Q'_{\alpha-1}$, e poi che $P_{\alpha-2} = P'_{\alpha-2}$, ecc.

30. La parte dell'integrale di $\frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$ che proviene dalle radici $\mu \pm i\nu$, il cui grado di molteplicità è α , è composta, in seguito alla (1) n. 28, di integrali della forma $\int \frac{Px + Q}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^m} dx$, dove m è intero positivo, il cui calcolo si effettua nel modo seguente.

Se $m=1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{Px + Q}{(x-\mu)^2 + \nu^2} dx &= \frac{P}{2} \int \frac{2(x-\mu) dx}{(x-\mu)^2 + \nu^2} + (Q + P\mu) \int \frac{dx}{(x-\mu)^2 + \nu^2} \\ &= \frac{P}{2} \log [(x-\mu)^2 + \nu^2] + (Q + P\mu) \frac{1}{\nu} \arctg \frac{x-\mu}{\nu}. \end{aligned}$$

Se m è diverso dall'unità, abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{Px + Q}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^m} dx &= \frac{P}{2} \int \frac{2(x-\mu) dx}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^m} + (Q + P\mu) \int \frac{dx}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^m} \\ &= -\frac{P}{2(m-1)} \frac{1}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^{m-1}} + (Q + P\mu) \int \frac{dx}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^m}, \end{aligned}$$

e rimane così da calcolare l'ultimo integrale $I = \int \frac{dx}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^m}$.

A tale scopo, pongasi $x - \mu = \nu y$ ed allora

$$I = \frac{1}{\nu^{2m-1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^m};$$

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^m} = \int \frac{1+y^2-y^2}{(1+y^2)^m} dy$$

(1)

$$= \int \frac{dy}{(1+y^2)^{m-1}} - \int \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^m},$$

e

$$\int \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^m} = \int y d\left(\frac{-1}{2(m-1)(1+y^2)^{m-1}}\right),$$

da cui, integrando per parti,

$$\int \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^m} = -\frac{y}{2(m-1)(1+y^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{m-1}},$$

e la (1) diviene

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^m} = \frac{1}{2m-2} \frac{y}{(1+y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{m-1}},$$

formola di riduzione, colla quale il calcolo di $\int \frac{dy}{(1+y^2)^m}$ èridotto a quello di $\int \frac{dy}{(1+y^2)^{m-1}}$. Applicando la stessa formola,il calcolo di questo si riduce a quello di $\int \frac{dy}{(1+y^2)^{m-2}}$ ecosì di seguito, finchè si giunge a $\int \frac{dy}{1+y^2} = \text{arc tg } y$.

Così si verificherà subito che

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{y}{1+y^2} + \frac{1}{2} \text{arc tg } y,$$

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^3} = \frac{1}{4} \frac{y}{(1+y^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{y}{1+y^2} + \frac{3}{8} \text{arc tg } y,$$

e in generale

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(1+y^2)^m} &= \frac{1}{2m-2} \frac{y}{(1+y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{(2m-2)(2m-4)} \frac{y}{(1+y^2)^{m-2}} \\ &+ \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)(2m-6)} \frac{y}{(1+y^2)^{m-3}} + \dots \\ &+ \frac{(2m-3)(2m-5)\dots 3 \cdot 1}{(2m-2)(2m-4)\dots 4 \cdot 2} \left(\frac{y}{1+y^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \right). \end{aligned}$$

Per tal modo si riesce a calcolare l'integrale $\int \frac{dy}{(1+y^2)^m}$,

e quindi l'integrale I.

Trascriviamo qui, per comodo del lettore, le parti di $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$ che nascono dalle radici $\mu \pm i\nu$, quando il grado di molteplicità sia 2 o 3. Nel primo caso esse danno origine alla espressione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\nu^2} \frac{(Q_2 + P_2\mu)(x-\mu) - P_2\nu^2}{(x-\mu)^2 + \nu^2} + \frac{P_1}{2} \log[(x-\mu)^2 + \nu^2] \\ + \frac{1}{\nu} [(Q_1 + P_1\mu) + \frac{1}{2\nu^2} (Q_2 + P_2\mu)] \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-\mu}{\nu}, \end{aligned}$$

e nel secondo a questa stessa espressione cui si aggiunga la

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\nu^3} \frac{(Q_3 + P_3\mu)(x-\mu) - P_3\nu^2}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^2} \\ + \frac{3}{8\nu^3} (Q_2 + P_2\mu) \left[\frac{\nu(x-\mu)}{(x-\mu)^2 + \nu^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-\mu}{\nu} \right], \end{aligned}$$

nelle quali i valori delle P e Q sono quelli che competono a ciascun caso, e che abbiamo imparato a determinare.

31. Da tutti gli sviluppi fatti fin qui si raccoglie infine che:
L'integrale d'un differenziale razionale è esprimibile in termini finiti mediante funzioni algebriche, circolari e logaritmiche.

32. Diamo ora alcuni

ESEMPLI.

1) Sia da calcolare $I = \int \frac{2x+1}{x^3-6x+11x-6} dx$.

Abbiamo $f(x)=2x+1$, $\varphi(x)=x^3-6x+11x-6$.

Si riconosce subito che 1 è radice della $\varphi(x)=0$, e quindi le altre due radici sono quelle della $x^2-5x+6=0$, cioè 2 e 3; perciò

$$\varphi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\varphi'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2).$$

Cosichè avremo (caso delle radici della $\varphi(x)=0$ semplici)

$$I = A \log(x-1) + B \log(x-2) + C \log(x-3) + \cos t,$$

dove

$$A = \frac{f(1)}{\varphi'(1)} = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{f(2)}{\varphi'(2)} = -5, \quad C = \frac{7}{2}$$

e perciò

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^3-6x+11x-6} dx &= \frac{3}{2} \log(x-1) - 5 \log(x-2) \\ &+ \frac{7}{2} \log(x-3) + C = \frac{1}{2} \log \frac{(x-1)^3 (x-3)^7}{(x-2)^{10}} + C. \end{aligned}$$

2)
$$I = \int \frac{3x+2}{x^3-x^2+x-1} dx,$$

$$f(x) = 3x + 2, \quad \varphi(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x-i)(x+i) \\ = (x-1)(x^2+1), \quad \varphi'(x) = x^2 + 1 + 2x(x-1),$$

per cui

$$I = A \log(x-1) + G \log(x^2+1) - 2H \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

dove

$$A = \frac{f(1)}{\varphi'(1)} = \frac{5}{3}, \quad G + iH = \frac{f(i)}{\varphi'(i)} = \frac{3i+2}{2i(i-1)} = \frac{2+3i}{-2-2i} \\ = \frac{(2+3i)(-2+2i)}{8} = -\frac{5}{4} - \frac{1}{4}i,$$

e perciò

$$I = \frac{5}{2} \log(x-1) - \frac{5}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \\ = \frac{5}{2} \log \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

Si giunge allo stesso risultato, forse più presto, osservando che (vedi n. 24) $\varphi_1(x) = x^2 + 1$, e quindi $f_1(x) = \frac{-5x+1}{2}$, e perciò

$$I = \frac{5}{2} \log(x-1) + \frac{1}{2} \int \frac{-5x+1}{x^2+1} dx = \frac{5}{2} \log(x-1) \\ - \frac{5}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

$$3) \quad I = \int \frac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)} dx.$$

Essendo $\varphi(x) = (x-1)^3(x+2)$, abbiamo la radice 1, il cui grado di molteplicità è 3. Ponendo, nelle formole (3) del n. 24,

$\alpha=3, a=1, \varphi_1(x)=x^2+1, f(x)=x^3-5x^2+x-1$, otteniamo successivamente:

$$A_3=-2, f_1(x)=x^2-2x-1, A_2=-1, f_2(x)=2x,$$

$$A_1=1, f_3(x)=-x+1,$$

e quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \log(x-1) + \int \frac{-x+1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \arctg x + C \\ &= \frac{x}{(x-1)^2} + \log \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + \arctg x + C. \end{aligned}$$

$$4) \quad I = \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2-2x+2)^2} dx.$$

Abbiamo una radice, 1, e due radici, $1 \pm i$, complesse coniugate il cui grado di molteplicità è 3 per tutte.

Ponendo

$$\mu=1, \nu=1, \alpha=3, f(x)=x+1, \varphi_1(x)=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$$

nelle formole (4) del n. 28, otteniamo successivamente

$$G_3=-1, H_3=2, P_3=2, Q_3=-3, f_1(x)=-2x^2+5x-1,$$

$$G_2=-1, H_2=4, P_2=4, Q_2=-5, f_2(x)=-4x^2+9x-3,$$

$$G_1=-1, H_1=6, P_1=6, Q_1=-7, f_3(x)=-6x^2+13x-5,$$

ed allora rimane da integrare l'integrale $\int \frac{-6x^2+13x-5}{(x-1)^3} dx$,

pel calcolo del quale, ponendo $a=1$, $x=3$, $\varphi_1(x)=1$, $f(x)=-6x^2+13x-5$ nelle formole (3) del n. 24, otteniamo successivamente

$$A_2=2, f_1(x)=-6x+7, A_3=1, f_2(x)=-6, A_4=-6,$$

$$f_3(x)=0;$$

per cui sostituendo questi valori delle A nella formola (1) del n. 26, e i precedenti valori delle P e delle Q nelle formole trovate in fine del n. 30, abbiamo:

$$\begin{aligned} I = & -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - 6 \log(x-1) + \frac{1}{2} \frac{-(x-1)-4}{x^2-2x+2} \\ & + 3 \log(x^2-2x+2) - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(x-1) \\ & + \frac{1}{4} \frac{-(x-1)-2}{(x^2-2x+2)^2} - \frac{3}{8} \left[\frac{x-1}{x^2-2x+2} + \operatorname{arctg}(x-1) \right] + C \\ = & -\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2} - \frac{7x+9}{x^2-2x+2} \\ & + 3 \log \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} - \frac{15}{8} \operatorname{arctg}(x-1) + C. \end{aligned}$$

5) Trattandosi di integrali semplici, si può alcune volte procedere per mezzo di speciali ripieghi, suggeriti dalla pratica. Così, volendosi calcolare $\int \frac{dx}{x^3-1}$, si osservi che

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

e poi mediante semplicissimi tentativi si trova

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \right),$$

per cui

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3} \log(x-1) - \frac{1}{3} \int \frac{(x+2)dx}{x^3+x+1},$$

e ricorrendo alla formola dell'esempio 3) al n. 22, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \log(x-1) - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Così pure si vede subito che

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4-1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4} \log \frac{x-1}{x+1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

ESERCIZI.

1. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2} \log \frac{x^2-a^2}{x^2}.$
2. $\int \frac{dx}{x(x^2-2x+2)} = \frac{1}{4} \log \frac{x^2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x-1).$
3. $\int \frac{dx}{(x-b)^2(x+c)} = -\frac{1}{(b+c)(x-b)} + \frac{1}{(b+c)^2} \log \frac{x+c}{x-b}.$
4. $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \frac{4-5x}{2(x-1)^2} + \frac{3}{4} \log \frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$
5. $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x+2)^2} = \frac{1}{2} \log \frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2} + \frac{2x^2-4x+5}{4(x^2-2x+2)^2}$

$$6. \int \frac{x^2+1}{(x-1)^4(x^2+1)} dx = \frac{3x^2-3x-4}{12(x-1)^3} + \frac{5}{8} \log(x-1) \\ + \frac{1}{24} \log(x+1) - \frac{1}{3} \log(x^2-x+1).$$

$$7. \int \frac{(2x^2+3x)dx}{x^3+11x^2+38x+40} = \frac{1}{3} \log(x+2) - 10 \log(x+4) \\ + \frac{35}{3} \log(x+5).$$

$$8. \int \frac{x^4 dx}{x^3+bx^2-ax-b} = \frac{x^2}{2} - bx - \frac{b^4}{a^2-b^2} \log(x+b) \\ + \frac{a^4}{2a(a-b)} \log(x+a) + \frac{a^4}{2a(a+b)} \log(x-a).$$

$$9. \int \frac{(4x^3-63x^2+338x-619)dx}{(x-7)(x-5)^3} = \frac{3x-16}{(x-5)^2} + 4 \log(x-7).$$

$$10. \int \frac{dx}{x^5+x^2-x^4-x^3} = \frac{-5x^2-2x+2}{4x^2(x+1)} + \log \frac{x+1}{x} \\ + \frac{1}{8} \log \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$11. \int \frac{(3x^4+10x^3+9x^2+3x+4)dx}{(1-x-x^2-2x^3)^2} = \int \frac{(3x^4+10x^3+9x^2+3x+4)dx}{(1-2x)^2(1+x+x^2)^2} \\ = \frac{3}{2(1-2x)} + \frac{x-1}{3(1+x+x^2)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+2x}{\sqrt{3}}.$$

12. Se m è intero positivo o lo zero, n è intero positivo ed è $m < n$, posto

$$B_k = \cos \frac{2k(m+1)\pi}{n} \log \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right)$$

$$- 2 \operatorname{sen} \frac{2k(m+1)\pi}{n} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}},$$

è

$$\int \frac{x^m dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \log(x-1) + \frac{(-1)^{m+1}}{n} \log(x+1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} B_k$$

se n è pari,

$$\int \frac{x^m dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \log(x-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} B_k \text{ se } n \text{ è dispari};$$

e, posto

$$D_k = - \cos \frac{(2k+1)(m+1)\pi}{n} \log \left[x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + 1 \right]$$

$$+ 2 \operatorname{sen} \frac{(2k+1)(m+1)\pi}{n} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{n}},$$

è

$$\int \frac{x^m dx}{x^n + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}} D_k \text{ se } n \text{ è pari},$$

$$\int \frac{x^m dx}{x^n + 1} = \frac{(-1)^m}{n} \log(x+1) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} D_k \text{ se } n \text{ è dispari}.$$

13. Se n è intero positivo, m intero positivo diverso da uno, che potremo porre sotto la forma $m = rn + s$, dove r avrà uno dei valori $0, 1, 2, 3, \dots$ ed s uno dei valori $1, 2, \dots, n$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^m(x^n - 1)} &= \frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{(m-n-1)x^{m-n-1}} \\ &+ \frac{1}{(m-2n-1)x^{m-2n-1}} + \dots + \frac{1}{(m-rn-1)x^{m-rn-1}} + \int \frac{x^{n-s}dx}{x^n-1}, \\ \int \frac{dx}{x^m(x^n + 1)} &= -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{(m-n-1)x^{m-n-1}} \\ &- \frac{1}{(m-2n-1)x^{m-2n-1}} + \dots + (-1)^{r+1} \frac{1}{(m-rn-1)x^{m-rn-1}} \\ &+ (-1)^{r+1} \int \frac{x^{n-s}dx}{x^n+1}; \end{aligned}$$

$$\text{se } m=1, \int \frac{dx}{x(x^n-1)} = -\log x + \int \frac{x^{n-1}}{x^n-1} dx,$$

$$\int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \log x - \int \frac{x^{n-1}}{x^n+1} dx.$$

$$\begin{aligned} 14. \int \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

$$15. \int \frac{x^2 dx}{x^4-1} = \frac{1}{4} \log \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$16. \int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{12} \log \left[\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} \right] \\ - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

17. Se $f(x)$ è funzione razionale intera di x , di grado minore di n , è

$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n} dx = - \frac{f(a)}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{f'(a)}{(n-2)(x-a)^{n-2}} \\ - \frac{f''(a)}{(n-3)2(x-a)^{n-3}} - \dots - \frac{f^{(r)}(a)}{(n-r-1)r(x-a)^{n-r-1}} \\ - \dots - \frac{f^{(n-2)}(a)}{[n-2](x-a)} + \frac{f^{(n-1)}(a)}{[n-1]} \log(x-a).$$

$$18. \int \frac{x^2 dx}{x^3+x^2-2} = \frac{1}{12} \log \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

(giova porre $x^2=y$).

$$19. \int \frac{(5x^3-2x)dx}{x^4+6x^2+13} = \frac{5}{4} \log(x^2+6x^2+13) - \frac{17}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2+3}{2}.$$

$$20. \int \frac{5x^5+x^2}{x^6+x^3-2} dx = \frac{2}{3} \log(x^3-1) + \log(x^3+2).$$

$$21. \int \frac{x^{3m-1} dx}{(a^m+x^m)^3} = \frac{1}{m} \log(a^m+x^m) + \frac{a^m(3a^m+4x^m)}{2m(a^m+x^m)^2} + C \\ = \frac{1}{m} \log(a^m+x^m) - x^m \frac{3a^m+2a^m}{2m(a^m+x^m)^2} + C_1.$$

22. Se m è intero positivo, abbiamo

$$\int x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{m+1} \left[\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m-2}}{m-2} + \frac{x^{m-4}}{m-4} - \dots \right. \\ \left. + \begin{cases} \pm \frac{x^2}{2} \mp \frac{1}{2} \log(1+x^2) \end{cases} \text{ se } m \text{ è pari} \right. \\ \left. \pm x \mp \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right] \text{ se } m \text{ è dispari,}$$

23. Si dimostrino le formole

$$\int \frac{dx}{(a+bx^m)^n} = \frac{1}{m(n-1)a} \left\{ \frac{x}{(a+bx^m)^{n-1}} \right. \\ \left. + [m(n-1)-1] \int \frac{dx}{(a+bx^m)^{n-1}} \right\}, \\ \int \frac{x^p dx}{(a+bx^m)^n} = \frac{1}{m(n-1)a} \left\{ \frac{x^{p+1}}{(a+bx^m)^{n-1}} \right. \\ \left. + [m(n-1)-p-1] \int \frac{x^p dx}{(a+bx^m)^{n-1}} \right\},$$

nelle quali supponiamo n diverso da uno. Se n è intero positivo, la prima riduce il calcolo di $\int \frac{dx}{(a+bx^m)^n}$ a quello di

$\int \frac{dx}{a+bx^m}$, che si ricava facilmente dalle formole dell'esercizio 12, se m è intero positivo; la seconda riduce il calcolo di $\int \frac{x^p dx}{(a+bx^m)^n}$ a quello di $\int \frac{x^p dx}{a+bx^m}$, che si ricava dalle formole degli esercizi 12 e 13, se, essendo m intero positivo e p intero, è $p < m$.

33. I differenziali irrazionali della forma

$$f\left[x, \left(\frac{a+bx}{c+gx}\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{a+bx}{c+gx}\right)^{\frac{1}{m}}, \dots\right] dx,$$

dove f è simbolo di funzione razionale ed $n, m, \dots$ sono numeri interi, si riducono razionali, e quindi si sanno integrare, mediante la sostituzione $\frac{a+bx}{c+gx} = y^k$, dove k indica il minimo multiplo comune ai numeri $m, n, \dots$, giacchè, essendo

$$x = \frac{cy^k - a}{b - gy^k}, \quad dx = \frac{k(cb - ag)y^{k-1}dy}{(b - gy^k)^2},$$

il differenziale proposto diviene

$$k(cb - ag)f\left(\frac{cy^k - a}{b - gy^k}, y^{m'}, y^{n'}, \dots\right) \frac{y^{k-1}dy}{(b - gy^k)^2},$$

dove $m', n', \dots$ sono numeri interi.

Si noti che il caso $cb - ag = 0$ non può presentarsi, perchè allora $\frac{a+bx}{c+gx}$ sarebbe una costante.

ESEMPLI.

$$1) \quad I = \int \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

Posto $x = y^4$, abbiamo

$$I = 4 \int \frac{1-y}{1+y^2} y^3 dy = 4 \int \left(-y^2 + y + 1 - \frac{1+y}{1+y^2}\right) dy$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y - \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \log(1+y^2) \right] + C \\
&= -\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} - 2 \log(1+\sqrt{x}) + C.
\end{aligned}$$

$$2) \quad I = \int \frac{[(2+3x)^{\frac{4}{3}} - x] dx}{(\sqrt[3]{2+3x} - 2\sqrt[3]{2+3x} - \sqrt[6]{2+3x} + 2)(3x+2)}.$$

Posto $2+3x=y^3$, abbiamo

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3y^3 - y^3 + 2}{y(y^3 - 2y^3 - y + 2)} dy = \int \left[\frac{3y^4 + 6y^3 + 14y^2 + 28y + 58}{y(y^3 - 2y^3 - y + 2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{116y^3 + 2y^2 - 116y + 2}{y(y^3 - 2y^3 - y + 2)} \right] dy = \frac{3}{5} y^5 + \frac{3}{2} y^4 + \frac{14}{3} y^3 + 14y^2 + 58y \\
&\quad + \log y - 2 \log(y-1) - \frac{2}{3} \log(y+1) + \frac{353}{3} \log(y-2) + C,
\end{aligned}$$

ed otteniamo il valore di I espresso per x , ponendo, nell'ultimo membro, $y = \sqrt[6]{2+3x}$.

$$3) \quad I = \int \sqrt[4]{\frac{a+x}{c+x}} dx.$$

Posto $\frac{a+x}{c+x} = y^4$, abbiamo

$$\begin{aligned}
I &= 4(c-a) \int \frac{y^4 dy}{(1-y^4)^2} = (c-a) \left[\int \frac{y^3 dy}{(1-y^2)^2} - \int \frac{y^3 dy}{(1+y^2)^2} \right] \\
&= (c-a) \left[\frac{1}{2} \log \frac{1-y}{1+y} + \int \frac{dy}{(1-y^2)^2} - \operatorname{arctg} y + \int \frac{dy}{(1+y^2)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (c-a) \left[\frac{1}{2} \log \frac{1-y}{1+y} + \frac{1}{2} \frac{y}{1-y^2} + \frac{1}{4} \log \frac{1+y}{1-y} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{y}{1+y^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \right] + C \\
 &= \frac{c-a}{2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{1-y}{1+y} + \frac{2y}{1-y^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \right] + C,
 \end{aligned}$$

che esprimeremo per x ponendo $y = \sqrt{\frac{a+x}{c+x}}$.

34. Consideriamo ora i differenziali della forma $f(x, \sqrt{R}) dx$, dove $R(x) = R = a + 2bx + cx^2$, e dove f è simbolo di funzione razionale.

1) Se $c > 0$ poniamo

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = z - x\sqrt{c},$$

da cui

$$x = \frac{z^2 - a}{2(z\sqrt{c} + b)},$$

$$dx = \frac{(z^2 + a)\sqrt{c} + 2bz}{2(z\sqrt{c} + b)^2} dz, \quad \sqrt{R} = \frac{(z^2 + a)\sqrt{c} + 2bz}{2(z\sqrt{c} + b)},$$

e il differenziale $f(x, \sqrt{R}) dx$ diviene razionale in z .

2) Se $c < 0$, $a > 0$, poniamo

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = \sqrt{a} + zx,$$

da cui

$$x = \frac{2(z\sqrt{a} - b)}{c - z^2},$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{a}(c + z^2) - 2bz}{(c - z^2)^2} dz, \quad \sqrt{R} = \frac{\sqrt{a}(c + z^2) - 2bz}{c - z^2},$$

ed otteniamo lo stesso scopo.

Questa trasformazione vale anche se $c > 0$, $a > 0$.

3) Se $c < 0$, $a < 0$, e le radici α, β della equazione $a + 2bx + cx^2 = 0$ sono complesse, allora il trinomio $a + 2bx + cx^2$ è sempre negativo per qualunque valore di x ; in tal caso è inevitabile la considerazione di quantità immaginarie; ma posto $\sqrt{R} = i\sqrt{-R}$ ricadiamo nel primo caso.

Supponendo dunque α, β reali, poniamo

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = \sqrt{c(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)z,$$

da cui

$$x = \frac{c\beta - \alpha z^2}{c - z^2}, \quad dx = \frac{2c(\beta - \alpha)z dz}{(c - z^2)^2}, \quad \sqrt{R} = \frac{c(\beta - \alpha)z}{c - z^2}.$$

Notiamo che questa trasformazione, quando α, β sono reali, può adoperarsi per rendere razionale in z il differenziale $f(x, \sqrt{R})dx$, qualunque siano a e c .

35. Per integrare il differenziale $f(x, \sqrt{R})dx$ è quasi sempre praticamente più utile, ed anche teoricamente più opportuno come primo passo a ulteriori ricerche, procedere nel modo seguente.

Si osservi che alla funzione $f(x, \sqrt{R})$, razionale in x e $\sqrt{R}$, si può dare la forma

$$\frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\sqrt{R}}{\varphi_3(x) + \varphi_4(x)\sqrt{R}},$$

dove le φ indicano funzioni razionali intere, che, moltiplicando numeratore e denominatore per $\varphi_3(x) - \varphi_4(x)\sqrt{R}$, può scriversi

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R}}{\varphi_3(x) - \varphi_4(x)\sqrt{R}},$$

dove $\varphi(x), \psi(x)$ sono razionali in x ; e quindi

$$\int f(x, \sqrt{R})dx = \int \varphi(x)dx + \int \psi(x)\sqrt{R}dx,$$

e la questione è ridotta a calcolare

$\int \psi(x) \sqrt{R} dx = \int \frac{\psi(x)R}{\sqrt{R}} dx$, il cui calcolo, dopo aver decomposto la funzione razionale $\psi(x)R$ nella sua parte intera ed in frazioni semplici, è ridotto a quello di integrali della forma

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}}, \int \frac{Ax+B}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^n \sqrt{R}} dx,$$

dove n è intero positivo, o zero.

Il primo integrale $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{R}}$ si riduce a una parte finita e all'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$; invero abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{c} \int x^{n-1} \frac{cx+b-b}{\sqrt{R}} dx = -\frac{b}{c} \int x^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{R}} \\ &+ \frac{1}{c} \int x^{n-1} d\sqrt{R} = -\frac{b}{c} \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}} dx + \frac{1}{c} x^{n-1} \sqrt{R} \\ &- \frac{n-1}{c} \int x^{n-2} \sqrt{R} dx = -\frac{b}{c} \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}} dx + \frac{1}{c} x^{n-1} \sqrt{R} \\ &- \frac{n-1}{c} \int \frac{x^{n-2}(a+2bx+c\alpha^2)}{\sqrt{R}} dx, \end{aligned}$$

da cui si trae la formola di riduzione

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{nc} \left[x^{n-1} \sqrt{R} - (2n-1)b \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{R}} \right. \\ &\left. - (n-1)a \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{R}} \right], \end{aligned}$$

dalla quale, ponendo $n=1, 2, 3, \dots$, si ha successivamente:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{2c} \left[\sqrt{R} - b \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \right], \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{2c} \left[x\sqrt{R} - 3b \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} - a \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \right] \\ &= \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{2c^2} \right) \sqrt{R} + \left(\frac{3b^2}{2c^3} - \frac{a}{2c} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \\ \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{3c} \left[x^2 \sqrt{R} - 5b \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - 2a \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} \right] \\ &= \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5b}{6c^2} x + \frac{15b^2 - 4ac}{6c^3} \right) \sqrt{R} \\ &\quad - \left(\frac{5b^3}{2c^3} - \frac{3ab}{2c^2} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

L'integrazione di $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}$ si riduce a quella di

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}.$$

Infatti, partiamoci della formola

$$\begin{aligned} d \left[\frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)^{n-1}} \right] &= - \frac{(n-1)\sqrt{R}}{(x-\alpha)^n} dx + \frac{cx+b}{(x-\alpha)^{n-1}\sqrt{R}} dx \\ &= - \frac{(n-1)(a+2bx+cx^2)}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}} dx + \frac{cx+b}{(x-\alpha)^{n-1}\sqrt{R}} dx, \end{aligned}$$

la quale, osservando che

$$a+2bx+cx^2 = R(x) = R(x) + R'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{R''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2,$$

$$cx+b = \frac{R'(\alpha)}{2} = \frac{R'(\alpha)}{2} + \frac{R''(\alpha)}{2}(x-\alpha),$$

può scriversi così:

www.libtool.com.cn

$$(2) \quad d \left[\frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)^{n-1}} \right] = - \frac{(n-1) R(x) dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}} - \frac{(2n-3) R'(x) dx}{2(x-\alpha)^{n-1} \sqrt{R}} - \frac{(n-2) R''(x) dx}{2(x-\alpha)^{n-2} \sqrt{R}},$$

dalla quale, se $R(\alpha)$ è diverso da zero, otteniamo, integrando,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}} = - \frac{1}{(n-1) R(\alpha)} \frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)^{n-1}} - \frac{(2n-3) R'(\alpha)}{2(n-1) R(\alpha)} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{n-1} \sqrt{R}} - \frac{(n-2) R''(\alpha)}{2(n-1) R(\alpha)} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{n-2} \sqrt{R}},$$

e, poichè da questa, facendo $n=2$, ricaviamo $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2 \sqrt{R}}$

espresso mediante $\int \frac{dx}{(x-\alpha) \sqrt{R}}$, potremo ottenere, usandola

ripetutamente, $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}}$ espresso mediante $\int \frac{dx}{(x-\alpha) \sqrt{R}}$

Se poi $R(\alpha)=0$, cioè se α è radice della $a+2bx+cx^2=0$, allora la (2) diviene

$$d \left[\frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)^n} \right] = - \frac{(2n-3) R'(x) dx}{2(x-\alpha)^{n-1} \sqrt{R}} - \frac{(n-2) R''(x) dx}{2(x-\alpha)^{n-2} \sqrt{R}},$$

da cui, cambiando n in $n+1$ ed integrando, otteniamo

$$(3) \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}} = - \frac{2}{(2n-1) R'(\alpha)} \frac{\sqrt{R}}{(x-\alpha)} - \frac{(n-1) R''(\alpha)}{(2n-1) R'(\alpha)} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{n-1} \sqrt{R}},$$

dalla quale, poichè facendo $n=1$ ricaviamo $\int \frac{dx}{(x-\alpha) \sqrt{R}}$ in

termini finiti, possiamo, adoperandola ripetutamente, ottenere il valore di $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}}$ in termini finiti.

In quanto agli integrali

$$\int \frac{x dx}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^n \sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]^n \sqrt{R}},$$

che provengono dal supporre che il denominatore di $\psi(x)R$, uguagliato a zero, abbia delle radici complesse, essi si riducono

agli integrali $\int \frac{x dx}{\rho \sqrt{R}}, \int \frac{dx}{\rho \sqrt{R}}, \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, avendo posto

$\rho = (x-\mu)^2 + \nu^2$. Le formole che servono a tale riduzione sono piuttosto complicate, e in pratica, supposti noti gli elementi delle funzioni di variabili complesse, non sarebbe opportuno servirsi di esse poichè si potrà allora supporre α numero complesso nell'integrale $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{R}}$.

Accennerò dunque solamente al modo con cui si giunge ad eseguire la detta riduzione, lasciando al lettore la cura di esercitarsi ad effettuarla.

Si calcoli il differenziale $d\left(\frac{\sqrt{R}}{\rho^{n-1}}\right)$, procedendo come precedentemente e poi si integri; si troverà così una formola che esprime una certa somma $M \int \frac{x dx}{\rho^n \sqrt{R}} + N \int \frac{dx}{\rho^n \sqrt{R}}$ mediante $\int \frac{x dx}{\rho^{n-1} \sqrt{R}}$ e $\int \frac{dx}{\rho^{n-1} \sqrt{R}}$; si calcoli il differenziale $d\left(\frac{(x-\mu)\sqrt{R}}{\rho^{n-1}}\right)$ e poi si integri, e si avrà una formola che esprime una altra somma $M_1 \int \frac{x dx}{\rho^n \sqrt{R}} + N_1 \int \frac{dx}{\rho^n \sqrt{R}}$ mediante $\int \frac{x dx}{\rho^{n-1} \sqrt{R}}, \int \frac{dx}{\rho^{n-1} \sqrt{R}}, \int \frac{dx}{\rho^{n-2} \sqrt{R}}$; da queste due for-

mole si ricavano i valori di $\int \frac{x dx}{\rho^n \sqrt{R}}$, $\int \frac{dx}{\rho^n \sqrt{R}}$, ciascuno
www.libtool.com.cn
 espresso mediante $\int \frac{x dx}{\rho^{n-1} \sqrt{R}}$, $\int \frac{dx}{\rho^{n-1} \sqrt{R}}$, $\int \frac{dx}{\rho^{n-2} \sqrt{R}}$, e poi
 chè in queste formole così ottenute si può fare $n=2$, si
 vede come in ultimo quei valori possano esprimersi solo per
 mezzo di $\int \frac{x dx}{\rho \sqrt{R}}$, $\int \frac{dx}{\rho \sqrt{R}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$.

Cosichè, da quanto abbiamo esposto, si vede come l'integrazione del differenziale $f(x, \sqrt{R})dx$ sia ridotta al calcolo degli integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}, \int \frac{x dx}{\rho \sqrt{R}}, \int \frac{dx}{\rho \sqrt{R}},$$

dei quali, per le ragioni precedentemente accennate, i più importanti, e da considerarsi veramente come tipici, sono i due primi.

36. Diamo ora alcuni

ESEMPLI.

Cominceremo dal calcolare i due integrali tipici trovati nel numero precedente.

$$1) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}.$$

Se $c > 0$ facendo uso delle formole 1) del n. 34 abbiamo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dz}{z\sqrt{c}+b} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log(b+z\sqrt{c}) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \log(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}) + C. \end{aligned}$$

In particolare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log(x+\sqrt{a+x^2}) + C.$$

Se $c < 0$, $a > 0$, usando le formole 2) n. 34, abbiamo

www.libtool.com.cn

$$I = 2 \int \frac{dz}{c - z^2} = -2 \int \frac{dz}{(\sqrt{-c})^2 + z^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{-c}} + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2} - \sqrt{a}}{x\sqrt{-c}} + C.$$

Se $c < 0$, $a < 0$ e le radici α, β della $a+2bx+cx^2=0$ sono reali, usando le formole 3) del n. 34, otteniamo

$$I = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(\alpha - x)\sqrt{-c}} + C.$$

Però, quando $c < 0$, giova calcolare il nostro integrale senza far uso delle formole precedenti, ma semplicemente osservando che

$$I = \frac{1}{\sqrt{-c}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x + \frac{b}{c}\right)^2 + \frac{b^2 - ac}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x + \frac{b}{c}}{\sqrt{\frac{b^2 - ac}{c^2}}} + C,$$

dove è $b^2 - ac > 0$, altrimenti le radici α, β essendo complesse, si avrebbe da integrare $\frac{1}{i} \int \frac{dx}{\sqrt{-R}}$, che appartiene al primo caso in cui è $c > 0$.

$$2) \quad I = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}.$$

Per integrare giova scrivere così:

www.libtool.com.cn

$$I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R(x) + R'(x)(x-\alpha) + c(x-\alpha)^2}},$$

cosichè, posto $x - \alpha = y$, è

$$I = \int \frac{dy}{y\sqrt{R(x) + R'(x)y + cy^2}}.$$

Se $c > 0$, la sostituzione 1) n. 34 ci dà

$$I = 2 \int \frac{dz}{z^2 - R(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{R(x)}} \log \frac{z - \sqrt{R(x)}}{z + \sqrt{R(x)}} & \text{se } R(x) > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-R(x)}} \operatorname{arc tg} \frac{z}{\sqrt{-R(x)}} & \text{se } R(x) < 0, \end{cases}$$

e perciò

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{R(x)}} \log \frac{(x-\alpha)\sqrt{c} + \sqrt{R} - \sqrt{R(x)}}{(x-\alpha)\sqrt{c} + \sqrt{R} + \sqrt{R(x)}} + C & \text{se } R(x) > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-R(x)}} \operatorname{arc tg} \frac{(x-\alpha)\sqrt{c} + \sqrt{R}}{\sqrt{-R(x)}} + C & \text{se } R(x) < 0. \end{cases}$$

Se $c < 0$, $R(x) > 0$, la sostituzione 2) n. 34 ci dà, in modo analogo,

$$I = \frac{1}{\sqrt{R(x)}} \log \frac{\sqrt{R(x)}\sqrt{R} - R(x) - \frac{R'(x)}{2}(x-\alpha)}{x-\alpha} + C,$$

che vale anche se $c < 0$.

Se $c < 0$, $R(x) < 0$, indicando con γ, δ le radici reali della $R(x) + R'(x)y + cy^2 = 0$, ricordando che $y = x - \alpha$ e quindi

$I = \int \frac{dy}{y\sqrt{R(x) + R'(x)y + cy^2}}$, la sostituzione 3) n. 34 ci dà

$$I = 2 \int \frac{dz}{c\delta - \gamma z^2} = -\frac{2}{\gamma} \int \frac{dz}{-\frac{c\delta}{\gamma} + z^2},$$

e poichè γ e δ devono avere lo stesso segno e $c < 0$, avremo

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{\sqrt{-c\gamma\delta}} \operatorname{arc\,tg} z \sqrt{\frac{\gamma}{-c\delta}} + C \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-c\gamma\delta}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{-c\delta}} \frac{\sqrt{R}}{x - \gamma - \alpha} \right) + C. \end{aligned}$$

Se, infine, $R(x) = 0$, la formola (3) n. 35, posto $n = 1$, ci dà

$$I = -\frac{2\sqrt{R}}{R'(x)(x - \alpha)} + C.$$

$$3) \quad I = \int \sqrt{a + 2bx + cx^2} \, dx;$$

osservando che $I = \int \frac{a + 2bx + cx^2}{\sqrt{R}} \, dx$, e adoperando le formole

(1) del n. 35, abbiamo subito:

$$I = \frac{1}{2c} (x + b) \sqrt{R} + \frac{1}{2c} (ac - b^2) \int \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

$$4) \quad I = \int \frac{(3x^3 - x^2 - 9x + 6) \, dx}{(x^4 - 3x^3 + 2x^2) \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Giova adoperare il metodo indicato al n. 35. Ciò facendo avremo, posto $R = x^2 + 2x + 2$,

$$(1) \quad I = 3 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{R}} + \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{R}} + 2 \int \frac{dx}{(x-2) \sqrt{R}}.$$

La formola che segue alla (2) n. 35, facendo in essa $x=0$, $n=2$, $R=x^2+2x+2$, dà

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{R}} = -\frac{\sqrt{R}}{2x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{R}},$$

che in virtù delle formole dell'esercizio 2) diviene:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{R}} = -\frac{\sqrt{R}}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{x + \sqrt{R} - \sqrt{2}}{x + \sqrt{R} + \sqrt{2}};$$

ed abbiamo analogamente, osservando che $R(1)=5$, $R(2)=10$,

$$\int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{x + \sqrt{R} - \sqrt{5}}{x + \sqrt{R} + \sqrt{5}},$$

$$\int \frac{dx}{(x-2) \sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \log \frac{x + \sqrt{R} - \sqrt{10}}{x + \sqrt{R} + \sqrt{10}};$$

sostituendo i valori di questi integrali nella (1) otteniamo il valore di I .

37. Dopo avere studiato gli integrali $\int f(x, \sqrt{R}) dx$, dove R è un polinomio di secondo grado ed f è simbolo di funzione razionale, si presentano naturalmente gli integrali della stessa forma, dove R è un polinomio di grado qualunque. Senza entrare in proposito in particolari, accenneremo solo che quelli fra essi, pei quali R è di terzo o quarto grado diconsi *integrali ellittici*, e *integrali iperellittici di $p-1$ ordine* quelli nei

quali R è di grado $2p+1$ o $2p+2$. In particolare gli integrali ellittici, pei quali R è di quarto grado, si riducono a quelli in cui R è di terzo grado, e questi, procedendo in modo completamente analogo a quello sviluppato nel n. 35, si riducono a funzioni algebriche e logaritmiche, ed ai tre integrali fondamentali o tipici

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} \quad , \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} \quad , \quad \int \frac{dx}{(x-z)\sqrt{R}} ,$$

che diconsi *integrali ellittici di prima, seconda e terza specie*; e, quantunque questi integrali non si sappiano conseguire in termini finiti, poichè altri integrali, cui essi si riducono, e che si considerano come *normali*, sono stati considerati come nuove trascendenti e largamente studiati, un problema suole considerarsi come risoluto, allorchè è ridotto agli integrali ellittici.

Qualunque integrale a differenziale algebrico è poi compreso come caso particolare nell'integrale $\int f(x,y)dx$, dove y è funzione algebrica di x definita dalla equazione $F(x,y)=0$, essendo f simbolo di funzione razionale e F di funzione razionale intera. Così, ad esempio, gli integrali $\int f(x, \sqrt{R})dx$, sono della forma $\int f(x,y)dx$, dove la $F(x,y)=0$ è la $y^2 - R = 0$.

Questi ultimi integrali generali chiamausi anche *integrali Abeliani*, dal nome del sommo geometra norvegiano Abel (nato nel 1802, morto nel 1829) che arricchì la loro teoria delle più importanti scoperte.

38. Proseguendo lo studio di alcuni integrali a differenziale irrazionale ci occuperemo ora dei *differenziali binomi*, che sono della forma

$$dI = x^m(a + bx^n)^p dx,$$

dove uno almeno dei numeri m, n, p è a suporsi frazionario, altrimenti esso apparterebbe ai differenziali razionali.

Il numero n può suporsi positivo, giacche possiamo scri-

vere, ove n fosse negativo,

$$\text{www.libtool.com.cn } dI = x^{m+n} (b + ax^{-n})^p dx,$$

che è della stessa forma e l'esponente di x entro la parentesi è positivo.

Gli esponenti m ed n possono anche suporsi interi, poichè se fosse

$$dI = x^{\frac{m'}{m''}} (a + bx^{\frac{n'}{n''}})^p dx,$$

basterebbe porre $x = z^{m''n''}$ per ottenere

$$dI = m''n'' z^{m'n'' + m''n'' - 1} (a + bz^{n'm''})^p dz,$$

che è pure un differenziale binomio, ma nel quale gli esponenti di z fuori e dentro la parentesi sono numeri interi.

Posto $p = \frac{q}{r}$ (il caso di p intero rientra in quello studiato al n. 33), per integrare il differenziale

$$dI = x^m (a + bx^n)^{\frac{q}{r}} dx,$$

cominciamo dal tentare la sostituzione

$$a + bx^n = y^r,$$

la quale, dandoci

$$dI = \frac{r}{nb^{\frac{m+1}{n}}} y^{q+r-1} (y^r - a)^{\frac{m+1}{n} - 1} dy,$$

riesce a rendere dI razionale in y nel caso che i numeri m ed n siano tali che $\frac{m+1}{n}$ risulti un numero intero.

È questo il primo caso di riducibilità a forma razionale.

Se $\frac{m+1}{n}$ non è numero intero, si provi la sostituzione

$$ax^{-n} + b = y^r \quad \text{ossia} \quad a + bx^n = x^n y^r,$$

la quale, dandoci

$$dI = - \frac{ra^{\frac{m+1}{n} + \frac{q}{r}}}{n} \frac{y^{q+r-1}}{(y^r - b)^{\frac{m+1}{n} + \frac{q}{r} + 1}} dy,$$

riesce a rendere dI razionale in y , se $\frac{m+1}{n} + \frac{q}{r}$ è un numero intero. È questo il secondo caso di riducibilità a forma razionale, che può presentarsi se non è verificato il primo.

39. Diamo ora delle formole di riduzione, che servono a ridurre la integrazione d'un differenziale binomio alla integrazione di tipi più semplici, che potremo ottenere in termini finiti, colle indicate sostituzioni, quando il primitivo differenziale binomio soddisfaccia ad una delle condizioni di riducibilità a forma razionale.

Posto nuovamente $\frac{q}{r} = p$, abbiamo, integrando per parti,

$$\begin{aligned} (1) \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int x^{m-n+1} x^{n-1} (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} - \frac{m-n+1}{(p+1)nb} \int x^{m-n} (a + bx^n)^{p+1} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{pnb}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx, \end{aligned}$$

le quali formole, vevolei sempre, eccetto il caso $m = -1$ per la seconda, opereranno una utile riduzione se nella prima è $|m-n| < |m|$, $|p+1| < |p|$, o nella seconda $|m+n| < |m|$, $|p-1| < |p|$.

Ma si ottengono formole giovevoli in ogni caso nel seguente modo.

Nel secondo membro della (1) poniamo

$$a \int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx + b \int x^m(a+bx^n)^p dx$$

in luogo di $\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} dx$, e nel secondo membro della (2)

$$\frac{1}{b} \int x^m(a+bx^n)^p dx - \frac{a}{b} \int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx$$

in luogo di $\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1} dx$, e, fatto ciò, risolviamo le (1), (2) rapporto a $\int x^m(a+bx^n)^p$; otteniamo

$$(3) \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx \\ = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1+np)b} - \frac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b} \int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx,$$

$$(4) \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx \\ = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np} \int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx.$$

Cambiando poi m in $m+n$ nella (3), e p in $p+1$ nella (4), abbiamo

$$(5) \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx \\ = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(m+1+n+np)b}{(m+1)a} \int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx,$$

$$(6) \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx \\ = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+n+np}{n(p+1)a} \int x^m(a+bx^n)^{p+1} dx.$$

Queste formole valgono in ogni caso, solamente le (3) e (4) non valgono quando $m+1+np=0$ ossia $\frac{m+1}{n}+p=0$, ma allora siamo nel secondo caso di riducibilità a forma razionale, e la (5) non vale quando $m+1=0$, ma allora siamo nel primo caso di riducibilità a forma razionale.

Ora ecco come queste formole possono utilmente servire.

1) Sia $\frac{m+1}{n}=h$, h numero intero e sia $m>0$; allora è anche h positivo, qualora n si supponga positivo. La formola (3) applicata successivamente riduce il nostro integrale ad altri della stessa forma, nei quali l'esponente di x fuori della parentesi è successivamente $m-n$, $m-2n$, $m-3n$, ..., $m-(h-1)n$, l'ultimo dei quali, ponendo nella (3) $m-(h-1)n$ in luogo di m ed osservando che $m+1-nh=0$, è

$$\int x^{m-(h-1)n}(a+bx^n)^p dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)},$$

ed otteniamo così il nostro integrale in termini finiti algebrici.

ESEMPIO. — $\int x^{14}(a+bx^5)^p dx$; qui abbiamo $m=14$, $n=5$, $h=3$, per cui applicando la (3) otteniamo

$$\begin{aligned} \int x^{14}(a+bx^5)^p dx &= \frac{x^{10}(a+bx^5)^{p+1}}{5(3+p)b} - \frac{2a}{(3+p)b} \int x^5(a+bx^5)^p dx \\ &= \frac{x^{10}(a+bx^5)^{p+1}}{5(3+p)b} - \frac{2ax^5(a+bx^5)^{p+1}}{5(3+p)(2+p)b^2} + \frac{2a^2}{(3+p)(2+p)b^2} \int x^0(a+bx^5)^p dx \\ &= \frac{x^{10}(a+bx^5)^{p+1}}{5(3+p)b} - \frac{2ax^5(a+bx^5)^{p+1}}{5(3+p)(2+p)b^2} + \frac{2a^2(a+bx^5)^{p+1}}{5(3+p)(2+p)(1+p)b^3} + C. \end{aligned}$$

2) Sia $m < 0$, ed $\frac{m+1}{n} = -h$, h intero positivo; la for-

mola (5) ripetutamente adoperata riduce il calcolo dell'integrale proposto successivamente a quello di integrali della stessa forma, nei quali l'esponente di x fuori della parentesi è successivamente $m+n$, $m+2n$, ... $m+nh$; però all'ultimo non possiamo più applicare la formola (5), perchè $m+nh+1=0$, e lo si dovrà perciò integrare mediante la sostituzione relativa al primo caso di riducibilità a forma razionale.

$$\begin{aligned}
 \text{ESEMPIO. — } & \int x^{-28} (1+bx^9)^{-\frac{3}{5}} dx \\
 = & -\frac{x^{-27} (1+bx^9)^{\frac{2}{5}}}{27} - \frac{13b}{15} \int x^{-19} (1+bx^9)^{-\frac{3}{5}} dx \\
 = & -\frac{x^{-27} (1+bx^9)^{\frac{2}{5}}}{27} + \frac{13bx^{-18} (1+bx^9)^{-\frac{2}{5}}}{270} + \frac{52b^2}{75} \int x^{-10} (1+bx^9)^{\frac{2}{5}} dx \\
 = & -\frac{x^{-27} (1+bx^9)^{\frac{2}{5}}}{27} + \frac{13bx^{-18} (1+bx^9)^{\frac{2}{5}}}{270} - \frac{52b^2 x^{-9} (1+bx^9)^{\frac{2}{5}}}{675} \\
 & - \frac{52b^3}{125} \int x^{-1} (1+bx^9)^{-\frac{3}{5}} dx.
 \end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale poniamo $m=-1$, $n=9$, $a=1$, $\frac{m+1}{n}=0$, $q=3$, $r=-5$, $1+bx^9=y^3$ nelle formole di sostituzione relative al primo caso di riducibilità a forma razionale ed avremo

$$\int x^{-1} (1+bx^9)^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y^3(y^3-1)};$$

oppure poniamo $q = -3$, $r = 5$, $1 + bx^2 = y^5$ ed avremo

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned} \int x^{-1} (1 + bx^2)^{-\frac{3}{5}} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{y^4 dy}{y^5 - 1} = \frac{y^2}{6} + \frac{1}{3} \int \frac{y dy}{y^5 - 1} \\ &= \frac{y^2}{6} + \frac{1}{9} \int \frac{dy}{y - 1} - \frac{1}{9} \int \frac{y - 1}{y^2 + y + 1} dy \\ &= \frac{y^2}{6} + \frac{1}{9} \log(y - 1) - \frac{1}{18} \log(y^2 + y + 1) \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y + 1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

che si esprime per x ponendo $y = (1 + bx^2)^{\frac{1}{5}}$.

3) Se $\frac{m+1}{n} + p = -h$, h intero positivo, ossia $m+1+np+n h=0$, la formola (5) successivamente adoperata riduce il calcolo del nostro integrale successivamente a quello di integrali della stessa forma, e nei quali gli esponenti di x fuori della parentesi sono $m+n$, $m+2n$, ... $m+(h-1)n$, l'ultimo dei quali, in virtù della stessa (5), diviene

$$\int x^{m+(h-1)n} (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m+(h-1)n+1} (a + bx^n)^p}{(m+(h-1)n+1)a} + C;$$

cosicchè otteniamo il nostro integrale in termini finiti ed algebricamente per x .

ESEMPIO.

$$\int x(a + bx^2)^{-\frac{10}{3}} dx, \text{ pel quale è } m=1, n=6, p=-\frac{10}{3},$$

$$\frac{m+1}{n} + p = -3; \text{ avremo}$$

$$\begin{aligned}
 \int x(a+bx^6)^{-\frac{10}{3}} dx &= \frac{x^2(a+bx^6)^{-\frac{7}{3}}}{2a} + \frac{6b}{a} \int x^7(a+bx^6)^{-\frac{10}{3}} dx \\
 &= \frac{x^2(a+bx^6)^{-\frac{7}{3}}}{2a} + \frac{3bx^2(a+bx^6)^{-\frac{7}{3}}}{4a^2} + \frac{9b^2}{2a^2} \int x^{13}(a+bx^6)^{-\frac{10}{3}} dx \\
 &= \frac{x^2(a+bx^6)^{-\frac{7}{3}}}{2a} + \frac{3bx^2(a+bx^6)^{-\frac{7}{3}}}{4a^2} + \frac{9b^2x^{14}(a+bx^6)^{-\frac{7}{3}}}{28a^3} + C \\
 &= \frac{x^2(a+bx^6)^{-\frac{7}{3}}}{2a} \left[1 + \frac{3bx^6}{2a} + \frac{9b^2x^{12}}{14a^2} \right] + C.
 \end{aligned}$$

4) Se $\frac{m+1}{n} + p = h$, h intero positivo, la formola (3) riduce l'integrale proposto al calcolo di integrali della stessa forma, nei quali l'esponente di x fuori della parentesi è successivamente $m-n$, $m-2n$, ... $m-hn$, ma all'ultimo di questi non è più applicabile la formola (3), perchè $m-hn+1+np=0$, e bisogna integrarlo colle formole del secondo caso di riducibilità a forma razionale.

ESEMPIO.

$$\begin{aligned}
 &\int x^4(a-x^3)^{\frac{1}{3}} dx \\
 &= \frac{x^2(a-x^3)^{\frac{4}{3}}}{6} + \frac{a}{3} \int x(a-x^3)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^2(a-x^3)^{\frac{4}{3}}}{6} - \frac{a(a-x^3)^{\frac{4}{3}}}{9x} \\
 &\quad - \frac{a^2}{9} \int x^{-2}(a-x^3)^{\frac{1}{3}} dx,
 \end{aligned}$$

e per calcolare l'ultimo integrale usiamo le formole del secondo caso di riducibilità a forma razionale, le quali, ponendo in esse

$$m = -2, \quad n = 3, \quad q = 1, \quad r = 3, \quad b = -1, \quad \frac{m+1}{n} + \frac{q}{r} = 0,$$

$$\frac{a-x^3}{x^3} = y^3, \text{ ci danno}$$

$$\begin{aligned} \int x^{-2}(a-x^3)^{\frac{1}{3}} dx &= - \int \frac{y^3 dy}{y^3+1} = -y + \int \frac{dy}{y^3+1} \\ &= -y + \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y+1} - \frac{1}{3} \int \frac{(y-2)dy}{y^3-y+1} \\ &= -y + \frac{1}{3} \log(y+1) - \frac{1}{6} \log(y^3-y+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2y-1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

che otteniamo espresso per x ponendo $y = \frac{(a-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x}$.

4) In ultimo, se non è verificata alcuna delle condizioni di riducibilità a forma razionale, le formole (3) o (4) adoperate h volte di seguito riducono l'integrale proposto ad un altro nel quale l'esponente di x entro la parentesi è $m - hn$, o $m + hn$, cosicchè, se $|m| > n$, potremo prendere h in guisa che risulti $|m \pm hn| < n$. Fatto ciò, le formole (4) o (6) adoperate h' volte di seguito riducono l'integrale ad un altro nel quale l'esponente della parentesi è $p - h'$ oppure $p + h'$ e quindi potremo prendere h' in modo che risulti $|p \pm h'| < 1$. Avremo così ridotto l'integrale proposto ad un altro della stessa forma, ma più semplice, che però, generalmente, non sapremo conseguire in termini finiti.

Ad esempio, colla formola (3) riduciamo la integrazione di $\int x^{17}(a+bx^3)^{\frac{7}{3}} dx$ a quella di $\int x^2(a+bx^3)^{\frac{7}{3}} dx$, e colla formola (4) quella di questo alla integrazione di $\int x^2(a+bx^3)^{\frac{1}{3}} dx$.

Così ancora colle formole (5), (6) il calcolo dell'integrale $\int x^{-14}(a+bx^3)^{-\frac{4}{3}} dx$ si riduce a quello di $\int \frac{dx}{(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}}$.

40. Il differenziale

www.libtool.com.cn

$$x^m(ax^n + bx^{n-1})^p dx,$$

scritto nella forma $x^{m+sp}(a + bx^{n-s})^p dx$, diventa un differenziale binomio, e si integra coi metodi precedenti.

ESERCIZI.

$$1. \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1-x}} = -\frac{3}{40} (5x^2 + 6x + 9)(1-x)^{\frac{2}{3}}.$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}(b\sqrt{1+x^2} - \sqrt{a^2+b^2}) + a(a+bx)}{b(a+bx)}$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{(a+b)(1+x)}{(a-b)(1-x)}} & \text{se } |b| < |a| \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{\sqrt{b^2-a^2}(b\sqrt{1-x^2} - \sqrt{b^2-a^2}) - a(a+bx)}{a(a+bx)} & \text{se } |b| > |a| \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & \text{se } a = b \\ \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & \text{se } a = -b. \end{cases}$$

$$4. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1+a^2}}$$

(Giovà eseguire una prima sostituzione $x^2 = y$).

$$5. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{a^2-1}} \log \frac{x^2+a^2+x\sqrt{1+x^2}-a\sqrt{a^2-1}}{x^2+a^2+x\sqrt{1+x^2}+a\sqrt{a^2-1}} & \text{se } a > 1 \\ \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2+a^2+x\sqrt{1+x^2}}{a\sqrt{1-a^2}} & \text{se } a < 1. \end{cases}$$

6: Posto $R = a + 2bx + cx^2$ è

$$\int x\sqrt{R} dx = \frac{2ac - 3b^2 + bcx + 2c^2x^2}{6c^2} \sqrt{R} - \frac{b(ac - b^2)}{4c^2} \int \frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$\int x^2\sqrt{R} dx = \frac{b(15b^2 - 13ac) + (3ac - 5b^2)cx + 2bc^2x^2 + 6c^3x^3}{24c^3} \sqrt{R}$$

$$- \frac{(ac - b^2)(ac - 5b^2)}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$\int \frac{\sqrt{R} dx}{x^3} = -\frac{a+bx}{2ax^2} \sqrt{R} + \frac{ac-b^2}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{R}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R^3}} = \frac{b+cx}{(ac-b^2)\sqrt{R}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^3}} = \frac{ab + (2b^2 - ac)x}{(ac - b^2)c\sqrt{R}} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^3}} = \frac{1}{3c(ac-b^2)\sqrt{R}} \left[\frac{(ac+b^2)(b+cx)}{ac-b^2} + \frac{ab+(2b^2-ac)x}{R} \right].$$

$$7. \quad \int \frac{x^2 dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^3}{3a(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{4+3x^n}} = \frac{1}{n} \log \frac{\sqrt{4+3x^n}-2}{\sqrt{3x^n}}.$$

$$9. \quad \int \frac{\sqrt{x+a}}{x\sqrt{x-a}} dx = \log(x+\sqrt{x^2-a^2}) - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{a}{x}.$$

$$10. \quad \int \sqrt[3]{x(a+b\sqrt{x})}^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a+b\sqrt{x}}}{b} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{5a}{3b} \right)$$

$$+ \frac{10a^2}{9b^{\frac{2}{3}}} \left\{ \frac{1}{2} \log \left[\frac{\sqrt[3]{(a+b\sqrt{x})^2}}{x} + \sqrt[3]{b} \frac{\sqrt[3]{a+b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{b^2} \right] \right. \\ \left. - \log \left(\frac{\sqrt[3]{a+b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{b} \right) + \sqrt[3]{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \frac{\sqrt[3]{a+b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{b}} \right\}.$$

11. Se m è intero positivo abbiamo

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx^2}}{mb} \left[x^{m-1} - \frac{(m-1)}{(m-2)} \frac{a}{b} x^{m-3} \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)} \frac{a^2}{b^2} x^{m-5} - \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{(m-2)(m-4)(m-6)} \frac{a^3}{b^3} x^{m-7} + \dots \right]$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} & \pm \frac{(m-1)(m-3)\dots 5.3}{(m-2)(m-4)\dots 4.2} \frac{a^{\frac{m-1}{2}}}{b^{\frac{m-1}{2}}} x \Big] \pm \frac{(m-1)(m-3)\dots 3.1}{m(m-2)\dots \dots 2} \frac{a^{\frac{m}{2}}}{b^{\frac{m}{2}}} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \\ & \pm \frac{(m-1)(m-3)\dots 4.2}{(m-2)(m-4)\dots 5.3} \frac{a^{\frac{m-1}{2}}}{b^{\frac{m-1}{2}}} \Big] \end{aligned} \right. \begin{aligned} & \text{se } m \text{ è pari} \\ & \text{se } m \text{ è dispari;} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{(m-1)a} \left[\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{m-2}{m-3} \frac{b}{a} \frac{1}{x^{m-3}} \right. \\ \left. + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)} \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{x^{m-5}} - \dots \right]$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} & \pm \frac{(m-2)(m-4)\dots 2}{(m-3)(m-5)\dots 3.1} \frac{b^{\frac{m-1}{2}}}{a^{\frac{m-1}{2}}} \frac{1}{x} \Big] \quad \text{se } m \text{ è pari} \\ & \pm \frac{(m-2)(m-4)\dots 3}{(m-3)(m-5)\dots 2} \frac{b^{\frac{m-1}{2}}}{a^{\frac{m-1}{2}}} \frac{1}{x^2} \Big] \\ & \pm \frac{(m-2)(m-4)\dots 3.1}{(m-1)(m-3)\dots 4.2} \frac{b^{\frac{m-1}{2}}}{a^{\frac{m-1}{2}}} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx^2}} \quad \text{se } m \text{ è dispari;} \end{aligned} \right.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \log (bx + \sqrt{b} \sqrt{a+bx^2}) & \text{se } b > 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{-b}} \arctg \frac{\sqrt{a+bx^2} - \sqrt{a}}{x \sqrt{-b}} & \text{se } b < 0, a > 0; \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a} \sqrt{a+bx^2} - a}{x} & \text{se } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctg \frac{\sqrt{a+bx^2} + x \sqrt{b}}{\sqrt{-a}} & \text{se } a < 0, b > 0. \end{cases}$$

$$12. \int \frac{(1+x^2)dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+x^4} + \sqrt{2}}{1-x^2}$$

$$\left(\text{si ponga } \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} = y \right).$$

$$13. \int \frac{(1-x^2)dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsen \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}.$$

14. Il differenziale $f(x, \sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{m}{n}} dx$, dove m, n sono interi e f è simbolo di funzione razionale, si riduce razionale in z colla sostituzione $x + \sqrt{1+x^2} = z^n$.

$$\text{Es.: } \int \frac{x^2(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{m}{n}}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{n}{4} (x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{m}{n}}$$

$$\left[\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2}{m+2n} + \frac{1}{(m-2n)(x+\sqrt{1+x^2})^2} - \frac{2}{m} \right]$$

15. Sia il differenziale $f(x, y)dx$, dove f è simbolo di funzione razionale e la y è definita come funzione di x da una equazione della forma

$$\begin{aligned} & a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + a_2 y^{m-2} x^2 + \dots + a_{m-1} y x^{m-1} + a_m x^m \\ & = b_0 y^{m-1} + b_1 y^{m-2} x + \dots + b_{m-2} y x^{m-2} + b_{m-1} x^{m-1}; \end{aligned}$$

allora, posto $y = z$, si trova

$$x = \frac{b_0 z^{m-1} + b_1 z^{m-2} + \dots + b_{m-2} z + b_{m-1}}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m}.$$

$$y = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-2} z^2 + b_{m-1} z}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m},$$

e, preso z per variabile, il differenziale proposto diviene razionale in z .

Così abbiamo, essendo $y^3 - 2x^3 + 3xy = 0$,

$$\int y dx = \int \left(\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3 + x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3 + x^6}} \right) dx = 3 \frac{2z^3 - 1}{(z^3 - 2)^2}$$

$$\text{dove } z = \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt{x} + \sqrt{1+x^3} + \sqrt[3]{x} \sqrt{x} - \sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x}}.$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x+x\sqrt{1+x^2}}}{x^3} dx = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}} + \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Integrazione di alcune funzioni trascendenti.

41. È quasi superfluo notare che i differenziali trascendenti della forma $f[u(x)] u'(x) dx$, ove $u(x)$ indica una qualunque funzione trascendente e f è simbolo di funzione razionale, si rendono razionali ponendo $u = u(x)$ e prendendo u per variabile. La stessa sostituzione riesce poi utile sempre trasformando il differenziale integrando in $f(u) du$. Così abbiamo immediatamente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (\text{arc sen } x - a)} = \log (\text{arc sen } x - a) + C,$$

$$\int \frac{dx (\text{arc tg } x)^m}{(1+x^2)} = \frac{(\text{arc tg } x)^{m+1}}{m+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1+(\log x)^2}} = \log [\log x + \sqrt{1+(\log x)^2}] + C.$$

42. I differenziali della forma $f(e^{ax}) dx$, dove f è simbolo di funzione razionale, si rendono razionali in y ponendo

$e^{ax} = y$, giacchè allora

www.libtool.com.cn $f(e^{ax})dx = \frac{1}{a} f(y)dy.$

ESEMPIO.
$$\int \frac{e^{ax} dx}{e^{3ax} - 1} = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^3 - 1}$$

$$= \frac{1}{3a} \log(e^{ax} - 1) - \frac{1}{6a} \log(e^{2ax} + e^{ax} + 1) - \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^{ax} + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

43. Sia da calcolare l'integrale $I = \int u^n P dx$, dove u è una funzione trascendente e P è una funzione qualunque di x . Fatte le posizioni

$$(1) \int P dx = P_1, \int P_1 \frac{du}{dx} dx = P_2, \int P_2 \frac{du}{dx} dx = P_3, \dots$$

si ottiene, integrando per parti,

$$I = \int u^n P dx = u^n P_1 - n \int u^{n-1} P_1 \frac{du}{dx} dx,$$

$$\int u^{n-1} P_1 \frac{du}{dx} dx = u^{n-1} P_2 - (n-1) \int u^{n-2} P_2 \frac{du}{dx} dx,$$

$$\int u^{n-2} P_2 \frac{du}{dx} dx = u^{n-2} P_3 - (n-2) \int u^{n-3} P_3 \frac{du}{dx} dx,$$

.

cosichè, se n è intero e positivo, ricaviamo

$$I = u^n P_1 - n u^{n-1} P_2 + n(n-1) u^{n-2} P_3 - n(n-1)(n-2) u^{n-3} P_4 + \dots$$

$$+ (-1)^n n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 P_{n+1} + C,$$

e la questione è ridotta al calcolo degli integrali (1).

ESEMPL.
www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned}
 1) \quad I &= \int (\arcsin x)^n dx. \text{ Abbiamo } u = \arcsin x, \quad P = 1, \\
 P_1 &= \int P dx = x, \quad P_2 = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}, \\
 P_3 &= -\int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x, \quad P_4 = \int \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}, \\
 P_5 &= \int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x,
 \end{aligned}$$

e in seguito le P si riproducono periodicamente; in conseguenza

$$\begin{aligned}
 I &= x[(\arcsin x)^n - n(n-1)(\arcsin x)^{n-2} \\
 &\quad + n(n-1)(n-2)(n-3)(\arcsin x)^{n-4} - \dots] \\
 &\quad + \sqrt{1-x^2}[n(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\arcsin x)^{n-3} \\
 &\quad + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\arcsin x)^{n-5} - \dots] + C.
 \end{aligned}$$

Questo risultato si può anche ottenere ponendo $\arcsin x = y$ e poi usando la formola dell'esercizio 33 a pag. 50.

$$\begin{aligned}
 2) \quad &\int x(\arcsin x)^4 dx; \\
 P &= x, \quad P_1 = \frac{x^2}{2}, \quad P_2 = \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2}, \\
 P_3 &= \frac{1}{4} \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4} \int x dx \\
 &= \frac{1}{4 \cdot 2} (\arcsin x)^2 - \frac{1}{4 \cdot 2} x^2, \\
 P_4 &= \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 3} (\arcsin x)^3 - \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 2} \arcsin x + \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 2} x\sqrt{1-x^2},
 \end{aligned}$$

$$P_5 = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^3 - \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^2 + \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} x^2,$$

www.libtool.com.cn

per cui

$$\begin{aligned} \int x (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^4 dx &= \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{5}{2} \right) (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^4 \\ &+ x \sqrt{1-x^2} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^3 + \frac{3}{2} \left(-x^2 + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^2 \\ &- \frac{3}{2} x \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \frac{3}{4} x^2 + C. \end{aligned}$$

Si vede da questo procedimento come si possa anche determinare $\int x (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^n dx$ quando n è intero positivo.

44. I differenziali della forma $f(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$, ove f è simbolo di funzione razionale, si riducono razionali in y mediante la posizione $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = y$, poichè, avendosi

$$dx = \frac{2dy}{1+y^2}, \quad \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{2y}{1+y^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

il proposto differenziale diventa

$$f\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) \frac{2dy}{1+y^2}.$$

ESEMPI

$$1) \int \frac{dx}{a+b \cos x} = 2 \int \frac{dy}{a+b+(a-b)y^2} = \frac{2}{a-b} \int \frac{dy}{\frac{a+b}{a-b}+y^2}$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) + C & \text{se } |a| > |b| \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}} + C & \text{se } |a| < |b| \\ \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C & \text{se } a = b \\ -\frac{1}{a} \cot \frac{1}{2} x + C & \text{se } a = -b \end{cases}$$

$$2) I = \int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c} = 2 \int \frac{dy}{(c-b)y^2 + 2ay + c+b},$$

e quindi

$$I = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(c-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + a}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}} + C & \text{se } c^2 > a^2 + b^2 \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log \frac{(c-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}} + C & \text{se } c^2 < a^2 + b^2 \\ -\frac{2}{(c-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + a} + C & \text{se } c^2 = a^2 + b^2 \text{ (escluso } a=0, c=b). \end{cases}$$

Se $c=0$, abbiamo

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{a-b \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{a^2+b^2}}{a-b \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{a^2+b^2}} + C.$$

Questo integrale possiamo anche ottenerlo direttamente, senza usare la sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, nel seguente modo.

Posto $a = \rho \cos k$, $b = \rho \sin k$, da cui $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $k = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\rho} \int \frac{dx}{\sin(x+k)} \\ &= \frac{1}{\rho} \int \frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x+k}{2} \cos \frac{x+k}{2}} = \frac{1}{\rho} \int \frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x+k}{2} \operatorname{tg} \frac{x+k}{2}} \\ &= \frac{1}{\rho} \log \operatorname{tg} \frac{x+k}{2} + C = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} \right) + C. \end{aligned}$$

Se il differenziale fosse della forma $f(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$, basterebbe porre $\operatorname{tg} x = y$, poichè

$$dx = \frac{dy}{1+y^2}, \quad \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{ESEMPIO.} \quad & \int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int \frac{y^2 + 1}{y^4 + 1} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y\sqrt{2}}{1-y^2} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

45. La integrazione dei differenziali della forma Pdx , dove

P indica un prodotto di seni o coseni di funzioni lineari di x , si effettua facilmente nel modo seguente.

Supponiamo primieramente sia $P = \cos(ax + b) \cos(a'x + b')$; poichè, come è noto, si può scrivere

$$P = \frac{1}{2} \cos[(a + a')x + b + b'] + \frac{1}{2} \cos[(a - a')x + b - b'],$$

abbiamo

$$\int P dx = \frac{\text{sen}[(a + a')x + b + b']}{2(a + a')} + \frac{\text{sen}[(a - a')x + b - b']}{2(a - a')} + C,$$

che vale se $a + a'$, $a - a'$ sono diversi da zero.

Se $a - a' = 0$, oppure $a + a' = 0$, è

$$\int P dx = \frac{\text{sen}(2ax + b + b')}{4a} + x \frac{\cos(b - b')}{2} + C,$$

$$\int P dx = x \frac{\cos(b + b')}{2} + \frac{\text{sen}(2ax + b - b')}{4a} + C.$$

Se P ha la forma generale di un prodotto di n fattori

$$P = \cos(ax + b) \cos(a'x + b') \cos(a''x + b'') \dots,$$

si intende come possa ridursi alla somma di 2^{n-1} termini,

il cui tipo generale sarà $\frac{1}{2^{n-1}} \cos(x\alpha + \beta)$, e quindi si calcola immediatamente $\int P dx$.

Il caso in cui i fattori di P siano tutti seni o in parte seni e in parte coseni si riduce subito al precedente, osservando che

$$\text{sen}(ax + b) = \cos\left(ax + b - \frac{\pi}{2}\right).$$

ESEMPIO. — Volendosi $\int \cos^n x dx$, dove n è intero positivo, rammentiamo le formole $\left(n_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}\right)$

$$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \dots$$

www.libtool.com.cn

$$+ \begin{cases} n_{\frac{n}{2}-1} \cos 2x + \frac{1}{2} n_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ n_{\frac{n-3}{2}} \cos 3x + n_{\frac{n-1}{2}} \cos x & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

ed abbiamo

$$2^{n-1} \int \cos^n x dx = \frac{\sin nx}{n} + n_1 \frac{\sin(n-2)x}{n-2} + n_2 \frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \dots$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{2} n_{\frac{n}{2}} x + C & \text{se } n \text{ è pari} \\ n_{\frac{n-1}{2}} \sin x + C & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Il valore di $\int \sin^n x dx$ si ricava da questa stessa formola sostituendovi $\frac{\pi}{2} - x$ in luogo di x .

Troveremo ora altre formole che ci danno gli stessi integrali.

46. I differenziali della forma

$$\sin^m x \cos^n x dx$$

si riducono a differenziali binomi mediante la sostituzione

$$(1) \sin x = y, \cos x = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}}, \cos x dx = dy, dx = \frac{dy}{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

giacchè otteniamo

$$\sin^m x \cos^n x dx = y^m (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy.$$

Le formole (3), (4), (5), (6) del n. 39, ove in esse si faccia $n=2$, $a=1$, $b=-1$, e si sostituisca y in luogo di x , $\frac{n-1}{2}$

in luogo di p , e poi si ripassi alla variabile x mediante le (1), ci danno le seguenti formole di riduzione:

$$(2) \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \\ = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x \, dx,$$

$$(3) \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \\ = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx,$$

$$(4) \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \\ = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^n x \, dx,$$

$$(5) \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \\ = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x \, dx,$$

delle quali le due prime valgono sempre, eccetto quando $m+n=0$, che è un caso di riducibilità a forma razionale pel precedente differenziale binomio, la terza vale sempre, eccetto quando $m+1=0$, che è pure un altro caso di riducibilità a forma razionale pel differenziale binomio, e l'ultima vale sempre, eccetto se $n=-1$, nel qual caso il differenziale binomio è razionale.

Notiamo che nel caso $m+n=0$ si ha la formola di riduzione www.ziyouz.com.cn

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int \operatorname{tg}^m x \, dx &= \int \operatorname{tg}^{m-2} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx - \int \operatorname{tg}^{m-2} x \, dx \\
 &= \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x \, dx.
 \end{aligned}$$

Le precedenti formole di riduzione si adoperano in modo analogo a quello per gli integrali a differenziale binomio, e permettono in ogni caso di ridurre l'integrale $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ ad un altro in cui gli esponenti m ed n siano numeri i cui valori assoluti siano compresi tra 0 e 1.

Nel caso speciale di m e n numeri interi (caso che è compreso in quello trattato al n. 44, ma che giova meglio considerare in questo modo, e cui corrispondono casi di riducibilità a forma razionale pel corrispondente differenziale binomio) le formole precedenti permettono di ridurre il nostro integrale ai seguenti, che otteniamo in termini finiti:

$$\int dx = x, \quad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x,$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_1 = \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C_2,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\log \cos x, \quad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \log \operatorname{sen} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \log \operatorname{tg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

È a notare che alcune volte la integrazione può compirsi senza ridurla agli integrali precedenti; così se si arriva a un integrale $\int \sin^m x \cos x dx$, possiamo sostituirlo subito col suo valore $\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$.

ESEMPLI.

1) Ponendo $n=0$ nelle formole (2), (4) e cambiando m in $-m$ nella (4), supponendo poi m intero positivo, ed applicando ripetutamente tali formole, si ottengono le seguenti, che potrebbero anche ottenersi dalle formole dell'esercizio 11 a pag. 98, ponendo in esse $a=1$, $b=-1$, y in luogo di x e poi $y=\sin x$,

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\cos x}{m} \left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} x \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)} \sin^{m-5} x + \dots \right]$$

$$+ \begin{cases} \left[\frac{(m-1)(m-3)\dots 3}{(m-2)(m-4)\dots 2} \sin x \right] + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3 \cdot 1}{m(m-2)(m-4)\dots 4 \cdot 2} x + C & \text{se } m \text{ è pari} \\ \left[\frac{(m-1)(m-3)\dots 2}{(m-2)(m-4)\dots 3 \cdot 1} \right] + C & \text{se } m \text{ è dispari,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^m x} &= -\frac{\cos x}{m-1} \left[\frac{1}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-3} \frac{1}{\sin^{m-3} x} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)} \frac{1}{\sin^{m-5} x} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m-2)(m-4)\dots 2}{(m-3)(m-5)\dots 3} \frac{1}{\sin x} \right] + C \quad \text{se } m \text{ è pari} \\
 &+ \left\{ \frac{(m-2)(m-4)\dots 3}{(m-3)(m-5)\dots 2} \frac{1}{\sin^2 x} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m-2)(m-4)\dots 3 \cdot 1}{(m-1)(m-3)\dots 2} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C \right. \quad \text{se } m \text{ è dispari.}
 \end{aligned}$$

Cambiando in queste formole x in $\frac{\pi}{2} + x$ otteniamo

$$\int \cos^m x dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^m x}.$$

$$2) I = \int \sin^4 x \cos^6 x dx.$$

Applicando la formola (2) abbiamo

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{\sin^3 x \cos^7 x}{10} + \frac{3}{10} \int \sin^2 x \cos^6 x dx = -\frac{\sin^3 x \cos^7 x}{10} \\
 &\quad - \frac{3}{80} \sin x \cos^7 x + \frac{3}{80} \int \cos^6 x dx,
 \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo per $\int \cos^6 x dx$ il suo valore,

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{\sin^3 x \cos^7 x}{10} - \frac{3}{80} \sin x \cos^7 x \\
 &+ \frac{3}{80} \frac{\sin x}{6} \left[\cos^5 x + \frac{5}{4} \cos^3 x + \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} \cos x \right] + \frac{3}{80} \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} x + C.
 \end{aligned}$$

$$3) I = \int \sqrt{\sin x} \cos^{\frac{3}{2}} x dx.$$

Applicando la formola (3) abbiamo

$$I = \frac{\frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x}{2}}{2} + \frac{1}{4} \int \sqrt{\sin x} \cos^{-\frac{1}{2}} x dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale lo trasformeremo nel corrispondente integrale a differenziale binomio col porre $y = \sin x$, cosichè

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^{-\frac{1}{2}} x dx = \int y^{\frac{1}{2}} (1-y)^{-\frac{3}{4}} dy.$$

Poniamo $\frac{1-y^2}{y^2} = z^4$ (abbiamo il secondo caso di riducibilità a forma razionale, $\frac{m+1}{n} + \frac{q}{r} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$) ed avremo

$$\begin{aligned} \int y^{\frac{1}{2}} (1-y^2)^{-\frac{3}{4}} dy &= -2 \int \frac{dz}{z^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1-z\sqrt{2}+z^2}{1+z\sqrt{2}+z^2} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}, \end{aligned}$$

ed in conseguenza, poichè

$$z = \sqrt[4]{\frac{1-y^2}{y^2}} = \sqrt[4]{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{\cot x},$$

abbiamo in ultimo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cos^{\frac{3}{2}} x dx &= \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x}{2} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \log \frac{1-\sqrt{2}\sqrt{\cot x} + \cot x}{1+\sqrt{2}\sqrt{\cot x} + \cot x} \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\cot x}}{1-\cot x} + C. \end{aligned}$$

$$4) I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^3 x \, dx;$$

applicando la formola (3) abbiamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^2 x}{m+3} + \frac{2}{m+3} \int \operatorname{sen}^m x \cos x \, dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^2 x}{m+3} + \frac{2 \operatorname{sen}^{m+1} x}{(m+3)(m+1)} + C. \end{aligned}$$

47. Speciali artifici, e specialmente la integrazione per parti, permettono di integrare alcuni differenziali trascendenti.

1) Integrando per parti, prendendo una volta e^{ax} e l'altra $\cos bx$ come fattore finito, otteniamo

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx,$$

dalle quali due formole, eliminando prima l'integrale dei secondi membri, e poi quello dei primi, ricaviamo rispettivamente

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{b \operatorname{sen} bx + a \cos bx}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = e^{ax} \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}.$$

2) Si ottengono pure in termini finiti gli integrali

$$\int x^n e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \int x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx,$$

quando n è intero positivo, giacchè, integrando per parti, abbiamo

$$\begin{aligned}\int x^n e^{ax} \cos bx \, dx &= x^n e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} \\ &- \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, dx - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, dx, \\ \int x^n e^{ax} \sin bx \, dx &= x^n e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \\ &- \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, dx + \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, dx,\end{aligned}$$

formole di riduzione, che ripetutamente usate riducono i nostri integrali agli integrali precedentemente considerati. Così, ad esempio, abbiamo

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} \cos bx \, dx &= x e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} \\ &- \frac{b}{a^2 + b^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx - \frac{a}{a^2 + b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left[x(b \sin bx + a \cos bx) + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \cos bx - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \sin bx \right] + C.\end{aligned}$$

3) L'integrale $\int x^a (\log x)^n dx$, posto $x = e^y$, si riduce a $\int y^n e^{(a+1)y} dy$, che sappiamo conseguire in termini finiti se n è intero positivo (Vedi n. 21), e si ottiene

$$\int x^a (\log x)^n dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \left[(\log x)^n - \frac{n}{a+1} (\log x)^{n-1} \right]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(a+1)^2} (\log x)^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\dots 2}{(a+1)^{n-1}} \log x \\ + (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{(a+1)^n} \Big] + C,$$

che vale per a qualunque diverso da -1 , e per $a = -1$ abbiamo

$$\int \frac{(\log x)^n}{x} dx = \frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

4) Integrando per parti, prendendo e^{ax} per fattore finito, abbiamo

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = - \frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx,$$

la qual formola, quando n è intero positivo diverso dall'unità, ripetutamente adoperata, riduce il calcolo del nostro integrale a quello di $\int \frac{e^{ax}}{x}$, che però non sappiamo conseguire in termini finiti.

Posto $e^{ax} = y$, quest'ultimo integrale diviene $\int \frac{dy}{\log y}$, che suole considerarsi come una nuova trascendente, cui è stato dato il nome di *logaritmo integrale* o *iperlogaritmo*.

48. Abbiamo calcolato al n. 21 l'integrale $\int e^{ax} f(x) dx$, ove $f(x)$ è funzione razionale intera. Se $f(x)$ è funzione razionale, scomponendola nella sua parte intera e in frazioni semplici, avremo da calcolare integrali della forma $\int x^m e^{ax} dx$, che conosciamo, e della forma $\int \frac{e^{ax} dx}{(x-\alpha)^n}$, i quali, posto $x-\alpha = y$, si riducono a $e^{a\alpha} \int \frac{e^{ay} dy}{y^n}$, che abbiamo precedentemente considerati.

Sappiamo pure conseguire in termini finiti gli integrali della forma www.libtool.com.cn

$$\int f(x, e^{ax}, e^{bx}, \dots, e^{cx}) dx,$$

dove f è simbolo di funzione razionale intera, giacchè questo integrale verrà a essere composto dalla somma di integrali della forma

$$A \int x^n e^{max} e^{kbx} \dots e^{lcx} dx = A \int x^n e^{hx} dx,$$

dove A indica una certa costante ed è $h = ma + kb + \dots + lc$.

Notiamo infine che, se negli integrali considerati comparissero delle esponenziali a^x , essi si ridurrebbero ai precedenti osservando che $a^x = e^{x \log a}$.

ESERCIZI

$$1. \int \frac{\log(\log x) dx}{x} = [\log(\log x) - 1] \log x.$$

$$2. \int \frac{dx}{(a + be^{ax})^2} = \frac{1}{a^2} \left[ax + \frac{a}{a + be^{ax}} - \log(a + be^{ax}) \right].$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{a + be^{ax}}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a + be^{ax}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^{ax}} + \sqrt{a}} & \text{se } a > 0 \\ \frac{2}{a\sqrt{-a}} \arctg \frac{\sqrt{a + be^{ax}}}{\sqrt{-a}} & \text{se } a < 0 \\ -\frac{2}{a\sqrt{be^{ax}}} & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

$$4. \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \cos^2 x} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

5. $\int \frac{\sin^2 x dx}{a+b \cos^2 x} = \begin{cases} -\frac{x}{b} + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a+b}{a}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{a+b}} \tan x \right) & \text{se } \frac{a+b}{a} > 0 \\ -\frac{x}{b} & \text{se } \frac{a+b}{a} = 0 \\ -\frac{x}{b} - \frac{1}{2b} \sqrt{-\frac{a+b}{a}} \log \frac{\tan x - \sqrt{-\frac{a+b}{a}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{a+b}{a}}} & \text{se } \frac{a+b}{a} < 0; \end{cases}$

$\int \frac{\cos^2 x dx}{a+b \cos^2 x} = \begin{cases} \frac{x}{b} - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a}{a+b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{a+b}} \tan x \right) & \text{se } \frac{a+b}{a} > 0 \\ \frac{x}{b} + \frac{1}{b \tan x} & \text{se } \frac{a+b}{a} = 0 \\ \frac{x}{b} - \frac{1}{2b} \sqrt{-\frac{a}{a+b}} \log \frac{\tan x - \sqrt{-\frac{a}{a+b}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{a}{a+b}}} & \text{se } \frac{a+b}{a} < 0; \end{cases}$

mediante questi integrali si calcolano subito gli integrali

$$\int \frac{dx}{a+b \cos^2 x} \left(\text{e quindi anche } \int \frac{dx}{a+b \sin^2 x} \right), \int \frac{\sin^2 x dx}{a+b \sin^2 x},$$

$$\int \frac{\cos^2 x dx}{a+b \sin^2 x}.$$

$$6. \int \frac{\cos x dx}{a+b \cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+b \cos x}.$$

7. Si provi che si possono determinare, quando $|a|$ è diverso da $|b|$, le costanti A, B, C in guisa che risulti identi-

camente

$$\int \frac{(h+g \cos x) dx}{(a+b \cos x)^{n+1}} = \frac{A \sin x}{(a+b \cos x)^n} + \int \frac{(B+C \cos x) dx}{(a+b \cos x)^n}.$$

$$\text{Si trova } A = \frac{ag-bh}{n(a^2-b^2)}, \quad B = \frac{ah-bg}{a^2-b^2}, \quad C = \frac{(n-1)(ag-bh)}{n(a^2-b^2)},$$

e quindi la formola di riduzione

$$\begin{aligned} \int \frac{(h+g \cos x) dx}{(a+b \cos x)^{n+1}} &= \frac{ag-bh}{n(a^2-b^2)} \frac{\sin x}{(a+b \cos x)^n} \\ &+ \frac{1}{n(a^2-b^2)} \int \frac{n(ah-bg) + (n-1)(ag-bh) \cos x}{(a+b \cos x)^n} dx, \end{aligned}$$

che riduce infine il nostro integrale a una parte finita e all'

integrale noto $\int \frac{dx}{a+b \cos x}$ (EULERO).

Così ad es. è

$$\int \frac{\cos x dx}{(a+b \cos x)^2} = \frac{1}{a^2-b^2} \left[\frac{a \sin x}{a+b \cos x} - b \int \frac{dx}{a+b \cos x} \right].$$

Se $|a|=|b|$ avremo da calcolare $\int \frac{h+g \cos x}{(1+\cos x)^{n+1}} dx$, o

$\int \frac{h+g \cos x}{(1-\cos x)^{n+1}} dx$ i quali, osservando che $1+\cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x$,

$1-\cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$, $\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x$, si riducono alla forma di quelli considerati al n. 46. Così ad es.: è

$$\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}.$$

$$8 \int \sin(x+1) \sin(x-1) dx = \frac{x \cos 2}{2} - \frac{\sin 2x}{4}.$$

$$9. \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{1}{8} \left[\frac{\cos 6x}{3} - \frac{\cos 4x}{2} - \cos 2x \right].$$

$$10. \int e^{ax} \sin bx \sin cx dx = \frac{1}{2} e^{ax} \frac{(b-c) \sin(b-c)x + a \cos(b-c)x}{a^2 + (b-c)^2} - \frac{1}{2} e^{ax} \frac{(b+c) \sin(b+c)x + a \cos(b+c)x}{a^2 + (b+c)^2}.$$

$$11. \int e^{ax} \cos(bx+c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos(bx+c) + b \sin(bx+c)].$$

12. Si dimostrino le formole di riduzione

$$\int e^{ax} \cos^n bx dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} bx (a \cos bx + nb \sin bx)}{a^2 + n^2 b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx dx,$$

$$\int e^{ax} \sin^n bx dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} bx (a \sin bx - nb \cos bx)}{a^2 + n^2 b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx dx,$$

utili se n è intero positivo.

13. Si provi che, se n è intero diverso da -1 , si possono conseguire in termini finiti gli integrali $\int x^n \arcsin x dx$, $\int x^n \arctg x dx$; così ad es.: è

$$\int x^3 \arcsin x dx = \frac{1}{9} [3x^3 \arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}],$$

$$\int \frac{\arcsin x dx}{x^2} = \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{\arcsin x}{x},$$

$$\int \frac{\arctg x dx}{x^2} = \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\arctg x}{x}.$$

$$14. \int \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2x} + x}{1 - \sqrt{2x} + x} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x}}{1 - x}.$$

$$15. \int \frac{\log x \, dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{x \log x}{a + bx} - \frac{\log(a + bx)}{b} \right).$$

$$16. \int \frac{\log(1 - x) \, dx}{x\sqrt{x}} = 2 \log \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \log(1 - x).$$

$$17. \int (1 + \operatorname{tg} x) \sqrt{1 - \operatorname{tg} x} \, dx = 2\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{\sqrt{2} - 1} \log \frac{\sqrt{2} + 1 - \operatorname{tg} x + \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)(1 - \operatorname{tg} x)}}{\sqrt{2} + 1 - \operatorname{tg} x - \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)(1 - \operatorname{tg} x)}} - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)(1 - \operatorname{tg} x)}}{\sqrt{2} - 1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$18. \int \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}}} \, dx = -2 \log(\sqrt{\sin x} + \sqrt{1 + \sin x}) - \sqrt{2} \log \frac{\sqrt{2(1 + \sin x)} - \sqrt{\sin x} - 1}{\sqrt{\sin x} - 1}.$$

$$19. \int \frac{x^3 dx}{2^x} = -\frac{x^3(\log 2)^3 + 3x^2(\log 2)^2 + 6x \log 2 + 6}{2^x(\log 2)^4}.$$

$$20. \int (1 - x^2) 3^{1-x} \, dx = \frac{3^{1-x}}{(\log 3)^3} [(\log 3)^2 (x^2 - 1) + 2x \log 3 + 2].$$

II. Integrali definiti

Alcuni teoremi sugli integrali definiti.

49. Riprendiamo ora lo studio degli integrali definiti, che abbiamo cominciato nei n.ⁱ 1 a 14, mantenendo le stesse notazioni allora adoperate.

Dalla definizione stessa di integrale definito si ricava, senz'altro,

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx,$$

dove C è una costante.

Se c indica un numero compreso tra a e b abbiamo

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

giacchè la divisione dell'intervallo (a, b) in parti può farsi in guisa che un punto di divisione coincida sempre con c .

Dalla formola precedente si ha

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

e, poichè il punto b è fuori dell'intervallo (a, c) , possiamo asserire che la formola (1) vale ancora se il punto c è fuori dell'intervallo (a, b) , supponendo però che la $f(x)$ sia data e sia integrabile anche nell'intervallo che dobbiamo considerare fuori di (a, b) .

Si ha poi evidentemente ancora, sotto analoghe condizioni se i punti $c_1, c_2, \dots, c_n$ alcuni o tutti, escono dell'intervallo (a, b) ,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx.$$

50. *La somma algebrica di un numero finito di funzioni integrabili in un certo intervallo è pure integrabile, e l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni.*

Infatti, se

$$\varphi(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x),$$

e indichiamo con S_0 la somma S relativa alla funzione $\varphi(x)$, con S_r quella relativa alla funzione $f_r(x)$, la formola

$$S_0 = S_1 \pm S_2 \pm \dots \pm S_n$$

dimostra il teorema.

51. *Il prodotto di un numero finito di fattori integrabili è integrabile.*

Cominciamo dal dimostrare il teorema pel prodotto $\varphi(x) = f_1(x) f_2(x)$ di due fattori. Formiamo per la funzione $\varphi(x)$ la somma $D = \sum h_s D_s$, e indichiamo con L'_s, L''_s i limiti superiori, con l'_s, l''_s i limiti inferiori e con D'_s, D''_s le oscillazioni delle funzioni $f_1(x), f_2(x)$ nell'intervallo h_s e poniamo $D' = \sum h_s D'_s$, $D'' = \sum h_s D''_s$.

Se si suppongono le $f_1(x), f_2(x)$ sempre positive in tutto l'intervallo d'integrazione, avremo

$$D_s \leq L'_s L''_s - l'_s l''_s \text{ ossia } D_s \leq L'_s (L''_s - l''_s) + l''_s (L'_s - l'_s),$$

$$D_s \leq L'_s D''_s + l''_s D'_s,$$

e quindi ancora, indicando con K un numero maggiore dei li-

miti superiori di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in tutto l'intervallo d'integrazione.

$$D_s < K(D''_s + D'_s),$$

da cui ricaviamo

$$D < K(D'' + D'),$$

la quale, ricordando che per ipotesi D' , D'' hanno per limite zero al decrescere delle h_s , dimostra il teorema.

Se le $f_1(x)$, $f_2(x)$ non sono sempre positive nell'intervallo di integrazione, prendiamo due costanti C_1 , C_2 , tali che le somme $C_1 + f_1(x)$, $C_2 + f_2(x)$ siano sempre positive in detto intervallo. Allora il prodotto $[C_1 + f_1(x)] [C_2 + f_2(x)]$ è integrabile, e la formula

$$\varphi(x) = [C_1 + f_1(x)] [C_2 + f_2(x)] - C_1 f_2(x) - C_2 f_1(x) - C_1 C_2,$$

nella quale i termini del secondo membro sono tutti integrabili, dimostra che è integrabile la funzione $\varphi(x)$.

Dimostrato così il teorema pel prodotto di due fattori, si estende, senz'altro, al prodotto di un numero finito di fattori.

52. *Se la funzione $f(x)$ è integrabile e si mantiene in tutto l'intervallo di integrazione numericamente discosta da zero più di una certa quantità assegnabile, la sua inversa $\frac{1}{f(x)}$ è pure integrabile.*

Supponiamo primieramente la $f(x)$ sempre positiva nell'intervallo di integrazione. Allora se L_s , l_s sono i limiti superiore e inferiore di $f(x)$ in h_s , si riconosce facilmente che $\frac{1}{l_s}$, $\frac{1}{L_s}$ sono i limiti superiore e inferiore di $\frac{1}{f(x)}$ in h_s , cosichè avremo

$$D'_s = \frac{1}{l_s} - \frac{1}{L_s} = \frac{L_s - l_s}{l_s L_s} = \frac{D_s}{l_s L_s} < \frac{D_s}{K^2},$$

indicando con K un numero minore del limite inferiore di $f(x)$ nell'intervallo di integrazione, dei quali numeri, per le ipotesi dell'enunciato del teorema, ve ne è una infinità.

Dall'ultima formola si ricava

$$\sum h_s D'_s < \frac{1}{K^2} \sum h_s D_s,$$

che dimostra il teorema.

Se poi $f(x)$ fosse negativa o cambiasse segno nell'intervallo di integrazione (ciò che può avvenire senza che la funzione passi per lo zero, giacchè può essere discontinua) allora si osservi che

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{f(x)+1}{f(x)^2} - \frac{1}{f(x)^2},$$

e, poichè $\frac{1}{f(x)^2}$ è integrabile e così pure il prodotto $[f(x)+1] \frac{1}{f(x)^2}$, vediamo che è pure integrabile $\frac{1}{f(x)}$.

Da questo teorema e da quello al n. 51, osservando che $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \frac{1}{f_2(x)}$, ricaviamo subito che

Se le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono integrabili, e la seconda si mantiene nell'intervallo di integrazione numericamente discosta da zero più di una certa quantità assegnabile, il quoziente $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ è pure integrabile.

53. Data la funzione $f(x)$ finita e integrabile in (a, b) consideriamo le somme $\sum_1^n h_s y_s$, $\sum_1^{n'} h'_s y'_s$ relative alla divisione dell'intervallo (a, b) in n parti h_s , in n' parti h'_s e ai valori y_s , y'_s compresi tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) di $f(x)$ rispettivamente in h_s , h'_s , e siano D_s , D'_s le oscillazioni di $f(x)$ in h_s , h'_s . Indichiamo con k_s le parti nelle quali (a, b) è diviso dalle due scomposizioni precedenti, p il

loro numero, y'' , un valore qualunque compreso tra il limite superiore e l'inferiore (questi inclusi) di $f'(x)$ in k_s , e D'' , la oscillazione di $f(x)$ in k_s . Avremo

$$h_s = k_{\alpha+1} + k_{\alpha+2} + \dots + k_{\alpha+\beta}$$

e potremo scrivere

$$\begin{aligned} h_s y_s &= k_{\alpha+1} y''_{\alpha+1} + k_{\alpha+2} y''_{\alpha+2} + \dots + k_{\alpha+\beta} y''_{\alpha+\beta} \\ &+ k_{\alpha+1}(y_s - y''_{\alpha+1}) + k_{\alpha+2}(y_s - y''_{\alpha+2}) + \dots + k_{\alpha+\beta}(y_s - y''_{\alpha+\beta}), \end{aligned}$$

ed in conseguenza

$$\sum_1^n h_s y_s = \sum_1^p k_s y''_s + A,$$

dove A è la somma di tutte le somme

$$k_{\alpha+1}(y_s - y''_{\alpha+1}) + \dots + k_{\alpha+\beta}(y_s - y''_{\alpha+\beta})$$

relative agli intervalli h_s , e poichè queste non possono numericamente superare

$$|k_{\alpha+1} D_s + k_{\alpha+2} D_s + \dots + k_{\alpha+\beta} D_s| \quad \text{cioè} \quad |h_s D_s|,$$

risulterà $|A| \leq \left| \sum_1^n h_s D_s \right|.$

In modo analogo avremo

$$\sum_1^{n'} h'_s y'_s = \sum_1^p k'_s y''_s + B \quad \text{dove} \quad |B| \leq \left| \sum_1^{n'} h'_s D'_s \right|,$$

e quindi

$$(1) \quad \left| \sum_1^n h_s y_s - \sum_1^{n'} h'_s y'_s \right| = |A - B| \leq \left| \sum_1^n h_s D_s \right| + \left| \sum_1^{n'} h'_s D'_s \right|.$$

Osserviamo ora che

$$|h_s D_s| \geq |k_{\alpha+1} D''_{\alpha+1} + k_{\alpha+2} D''_{\alpha+2} + \dots + k_{\alpha+\beta} D''_{\alpha+\beta}|,$$

cosicchè

$$|\sum_1^n h_s D_s| \geq |\sum_1^p h_s D''_s|.$$

Inoltre, poichè i termini della somma $\sum_1^{n'} h'_s D'_s$, che non compariscono in $\sum_1^p h_s D''_s$, sono quelli soli che corrispondono a intervalli h'_s , nei quali cade qualche punto della divisione di (a, b) nelle parti h_s , e questi termini sono al più in numero di n , e ciascuno di essi non supera $d' D_0$, dove d' è il massimo dei numeri $|h'_s|$, e D_0 è la oscillazione di $f(x)$ in tutto (a, b) , avremo $|\sum_1^{n'} h'_s D'_s| \leq |\sum_1^p h_s D''_s| + n d' D_0$, e quindi ancora

$$|\sum_1^{n'} h'_s D'_s| \leq |\sum_1^n h_s D_s| + n d' D_0,$$

in virtù della quale la (1) diviene

$$|\sum_1^n h_s y_s - \sum_1^{n'} h'_s y'_s| \leq 2 |\sum_1^n h_s D_s| + n d' D_0.$$

Supponiamo ora la scomposizione di (a, b) nelle parti h'_s tale che risulti

$$\left| \sum_1^{n'} h'_s y'_s - \int_a^b f(x) dx \right| < \sigma,$$

essendo σ un numero positivo prefissato comunque piccolo; avremo allora

$$\left| \sum_1^n h_s y_s - \int_a^b f(x) dx \right| < 2 \left| \sum_1^n h_s D_s \right| + n d' D_0 + \sigma,$$

e, poichè possiamo prendere d' e σ piccoli come si vuole, dovrà essere

$$\left| \sum_1^n h_s y_s - \int_a^b f(x) dx \right| \leq 2 \left| \sum_1^n h_s D_s \right|,$$

la qual formola ci dice che, la somma $\sum_1^n h_s y_s$ è un valore ap-

prossimato dell'integrale $\int_a^b f(x) dx$, con un errore per eccesso o per difetto non superiore al doppio della somma $\left| \sum_1^n h_s D_s \right|$

Applicando l'ultima formola alla parte $(a, a+h_1+h_2+\dots+h_l)$ di intervallo (a, b) si ha la formola

$$(2) \quad \left| \sum_1^l h_s y_s - \int_a^{a+\sum_1^l h_s} f(x) dx \right| \leq 2 \left| \sum_1^l h_s D_s \right|.$$

54. Se la funzione $f(x)$ integrabile in (a, b) , ove non è zero, ha sempre lo stesso segno, cioè $f(x) \geq 0$, oppure $f(x) \leq 0$, è chiaro, in seguito alla definizione stessa di integrale definito, che sarà

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{oppure} \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad \text{se } a > b,$$

e

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad \text{oppure} \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{se } a < b.$$

Se, quindi, $f(x)$, $\varphi(x)$ sono integrabili ed è $f(x) \geq \varphi(x)$, avremo

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$$

cioè

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{se } a > b,$$

e

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{se } a < b.$$

Se $\varphi(x)$, ove è diversa da zero, ha sempre lo stesso segno e m, M sono il limite inferiore e superiore di $f(x)$ in (a, b) , il prodotto $f(x) \varphi(x)$ sarà sempre compreso tra le quantità

$m\varphi(x), M\varphi(x)$ o sarà uguale ad una di esse, cosicchè $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx$

sarà sempre compreso tra le quantità $m \int_a^b \varphi(x) dx, M \int_a^b \varphi(x) dx$ o uguale ad una di esse, e perciò avremo

$$(1) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = k \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{dove } m \leq k \leq M.$$

In particolare se $\varphi(x) = 1$,

$$\int_a^b f(x) dx = k(b-a) \quad \text{dove } m \leq k \leq M.$$

Se $f(x)$ è continua in (a, b) possiamo scrivere

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(a + \zeta(b-a)) \int_a^b \varphi(x) dx, \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

$$\int_a^b f(x) dx = f[a + \zeta(b-a)](b-a), \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

La formola (1) costituisce un teorema che suole chiamarsi *primo teorema della media*; e si intende, senz'altro, la ragione di questa denominazione.

55. Se le $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono quantità tali che le somme

$$s_1 = v_1, s_2 = v_1 + v_2, \dots, s_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

siano tutte comprese tra due quantità a, A , dove $a < A$, e

se le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sono quantità positive ed è $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \geq \dots \geq \varepsilon_n$,
avremo

$$(1) \quad \varepsilon_1 A < \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \dots + \varepsilon_n v_n < \varepsilon_1 A.$$

Infatti, poichè

$$v_1 = s_1, \quad v_2 = s_2 - s_1, \quad v_3 = s_3 - s_2, \dots, v_n = s_n - s_{n-1},$$

è

$$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \dots + \varepsilon_n v_n = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) s_{n-1} + \varepsilon_n s_n,$$

e da questa, sostituendo in luogo delle s una volta a , e un'altra A , abbiamo la (1).

Ciò premesso, siano $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni finite integrabili in (a, b) , e sia $\varphi(x)$ mai negativa e mai crescente quando la variabile x passa da a a b .

Dividiamo l'intervallo (a, b) in parti h_s tali che risulti $|\sum_1^n h_s D_s| < \sigma$, essendo σ un numero positivo comunque piccolo e D_s l'oscillazione di $f(x)$ in h_s ; indichiamo con y_s e z_s i soliti valori di $f(x)$, $\varphi(x)$ compresi tra il loro limite superiore e inferiore (questi inclusi) in h_s , prendendo $z_1 = \varphi(a)$.

Per la formola (2) n. 53 abbiamo

$$\left| \int_a^{a+\sum_1^i h_s} f(x) dx - \sum_1^i h_s y_s \right| < \sigma, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

ossia

$$\int_a^{a+\sum_1^i h_s} f(x) dx - \sigma < \sum_1^i h_s y_s < \int_a^{a+\sum_1^i h_s} f(x) dx + \sigma, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

cosichè, indicati con m , M il minimo e massimo valore di $\int_a^x f(x) dx$, quando x , limite superiore dell'integrale, assume i

valori da a a b , avremo ancora

www.libtqol.com.cn

$$m - \sigma < \sum_1^n h_i y_i < M + \sigma, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ma le $\varphi(a), z_1, \dots, z_n$ sono quantità positive non crescenti, e perciò, applicando al caso nostro la formola (1), abbiamo

$$\varphi(a)(m - \sigma) < \sum_1^n h_i y_i z_i < \varphi(a)(M + \sigma).$$

Supponiamo ora la divisione di (a, b) nelle parti h_i anche tale che sia

$$\left| \int_a^b f(x) \varphi(x) dx - \sum_1^n h_i y_i z_i \right| < \varphi(a) \sigma,$$

ossia

$$- \varphi(a) \sigma < \int_a^b f(x) \varphi(x) dx - \sum_1^n h_i y_i z_i < \varphi(a) \sigma;$$

allora avremo

$$\varphi(a)(m - 2\sigma) < \int_a^b f(x) \varphi(x) dx < \varphi(a)(M + 2\sigma),$$

e, poichè σ è arbitrariamente piccolo,

$$(2) \quad \varphi(a)m \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq \varphi(a)M,$$

ossia

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = k \varphi(a) \quad , \quad m \leq k \leq M,$$

ovvero ancora, ricordando che un integrale definito $\int_a^x \psi(u) du$ è funzione continua di x , abbiamo la formola notevole

$$(3) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Notiamo che, se nel punto a la $\varphi(x)$ è discontinua, deve esistere il limite per h convergente a zero di $\varphi(a+h)$ se $a < b$ o il limite di $\varphi(a-h)$ se $a > b$, perchè, per le ipotesi fatte sopra la $\varphi(x)$, in virtù del teorema al n. 17 del primo volume di quest'opera, la discontinuità non può essere che di prima specie; perciò le quantità $\varphi(a+0)$, oppure $\varphi(a-0)$ hanno certamente significato. Ora nella (3) possiamo in luogo di $\varphi(a)$ porre $\varphi(a+0)$ o $\varphi(a-0)$, giacchè se assumiamo $\varphi(a+0)$, o $\varphi(a-0)$, per valore di $\varphi(x)$ nel punto a , il valore dell'integrale $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx$ non cambia (Vedi n. 12); cosicchè avremo

$$(4) \quad \begin{cases} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx, & 0 \leq \theta \leq 1, \text{ se } a < b, \\ \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a-0) \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx, & 0 \leq \theta \leq 1, \text{ se } a > b, \end{cases}$$

le quali, osservando che se in a vi è continuità per la $\varphi(x)$ è $\varphi(a+0) = \varphi(a)$ o $\varphi(a-0) = \varphi(a)$, comprendono la (3).

Se la $\varphi(x)$ è anche negativa nell'intervallo (a, b) , ma però non mai crescente quando x varia da a a b , allora possiamo applicare alla funzione $\varphi(x) - \varphi(b)$, mai negativa e non crescente, la formola (4) avendosi così

$$\int_a^b f(x) [\varphi(x) - \varphi(b)] dx = [\varphi(a \pm 0) - \varphi(b)] \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx$$

ossia

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \varphi(b) \int_a^b f(x) dx - \varphi(b) \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx + \varphi(a \pm 0) \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx \\ &= \varphi(a \pm 0) \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx + \varphi(b) \int_{a+\theta(b-a)}^b f(x) dx, \end{aligned}$$

od anche

$$(5) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a \pm 0) \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx + \varphi(b \mp 0) \int_{a+\theta(b-a)}^b f(x) dx, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

nella quale dobbiamo prendere i segni superiori se $a < b$, gli inferiori se $a > b$.

Se la funzione $\varphi(x)$ è mai decrescente, applichiamo alla funzione $\varphi(b \mp 0) - \varphi(x)$, non crescente, la formola (5), ed avremo

$$\int_a^b f(x) [\varphi(b \mp 0) - \varphi(x)] dx = [\varphi(b \mp 0) - \varphi(a \pm 0)] \int_a^{a+\theta(b-a)} f(x) dx,$$

che, come si riconosce facilmente sviluppando, si riduce alla (5).

Cosichè abbiamo il teorema, conosciuto col nome di *secondo teorema della media*¹⁾:

Se $f(x)$, $\varphi(x)$ sono finite e integrabili in (a, b) , e $\varphi(x)$ è mai crescente, o è mai decrescente, quando x varia da a a b , ha luogo la formola (5).

56. Sia $\psi(x)$ finita in (a, b) ed ammetta derivata continua

¹⁾ La formola (2) fu notata dal BONNET nel vol. 14 del giornale di *Liouville* nella nota «Remarques sur quelques intégrales définies». La formola (5) è stata pubblicata nel vol. 69 del giornale di *Crelle-Borchardt* dal DU BOIS-REYMOND, cui la aveva verbalmente comunicata il WEIERSTRASS, che la aveva trovata e se ne era servito nelle sue lezioni senza pubblicarla.

$\psi'(x)$; allora, se $x, x+h$ sono punti di (a, b) , avremo

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h\psi'(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

e, posto

$$\psi'(x+\theta h) = \psi'(x) + \varepsilon,$$

abbiamo ancora

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \psi'(x) = \varepsilon;$$

d'altra parte, poichè la $\psi'(x)$ è continua, in virtù del teorema al n. 3, dato σ , esiste un numero positivo δ tale che, qualunque sia x appartenente ad (a, b) e per $|h| < \delta$, e in modo che $x+h$ appartenga ad (a, b) , è $|\varepsilon| = |\psi'(x+\theta h) - \psi'(x)| < \frac{\sigma}{2}$; cosicchè avremo ancora, qualunque sia x e per quei valori di h ,

$$\left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \psi'(x) \right| < \frac{\sigma}{2};$$

e poichè è anche

$$|\psi'(x) - \psi'(x_0)| < \frac{\sigma}{2},$$

indicando x_0 un punto qualunque dell'intervallo $(x, x+h)$, avremo

$$\left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \psi'(x_0) \right| < \sigma.$$

Ciò premesso, abbiamo, relativamente al cambiamento di variabile di integrazione in un integrale definito, il seguente teorema:

Posto $x = x(t)$, sia $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, e sia $x(t)$ una funzione univalente sempre crescente o sempre decrescente, e che ammette derivata continua $x'(t)$, così che mentre t

sempre crescendo o sempre decrescendo passa dal valore α al valore β , x sempre crescendo o sempre decrescendo passi da a a b una sola volta; allora, se $f(x)$ è finita e integrabile in (a, b) , è $f[x]x'(t)$ finita e integrabile in (α, β) e si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)] x'(t) dt.$$

Invero, assegnato il numero positivo σ_1 , interpoliamo tra α e β i numeri

$$t_0 = \alpha, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$$

in modo che le ampiezze k delle parti, nelle quali si scompone (α, β) , siano minori del numero δ , pel quale, prendendo $|k| < \delta$ e qualunque sia t appartenente ad (α, β) e qualunque sia t' appartenente a $(t, t+k)$, è

$$\left| \frac{x(t+k) - x(t)}{k} - x'(t') \right| < \sigma_1,$$

ovvero

$$\frac{x(t+k) - x(t)}{k} - \sigma_1 < x'(t') < \frac{x(t+k) - x(t)}{k} + \sigma_1.$$

Allora abbiamo le disuguaglianze

$$\frac{x(t_s) - x(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} - \sigma_1 < x'(t'_{s-1}) < \frac{x(t_s) - x(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} + \sigma_1, \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

dove t'_{s-1} indica un qualunque valore di t appartenente a (t_{s-1}, t_s) , disuguaglianze che valgono qualunque sia la scomposizione di (α, β) in parti, le cui ampiezze siano $< \delta$.

Consideriamo ora la somma

$$S = \sum_1^n y_s x'(t'_{s-1}) (t_s - t_{s-1}),$$

dove y_s indica un valore qualunque compreso tra il limite inferiore e superiore (questi inclusi) dei valori di $f[x(t)]$ nell'intervallo (t_{s-1}, t_s) , o, ciò che è lo stesso, un valore compreso tra il limite inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo $h_s = x(t_s) - x(t_{s-1})$, corrispondente all'intervallo (t_{s-1}, t_s) ; e $y_s x'(t_{s-1})$ è ancora un valore qualunque compreso tra il limite inferiore e il superiore dei valori del prodotto $f[x(t)] x'(t)$ in (t_{s-1}, t_s) .

Le differenze $t_s - t_{s-1}$ hanno tutte il segno di $\beta - \alpha$ per ipotesi; per fissare le idee, supponiamole positive. Allora se y_s è positivo oppure negativo, aumentiamo il valore dei termini della somma S se in luogo di $x'(t_{s-1})$ poniamo $\frac{x(t_s) - x(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} + \sigma_1$ cioè $\frac{h_s}{t_s - t_{s-1}} + \sigma_1$, oppure $\frac{x(t_s) - x(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} - \sigma_1$ cioè $\frac{h_s}{t_s - t_{s-1}} - \sigma_1$, cosicchè avremo

$$S < \sum_1^n y_s h_s + \sigma_1 \sum_1^n [\pm y_s (t_s - t_{s-1})],$$

ovvero, ponendo in luogo di $\pm y_s$ un numero positivo A maggiore dei valori assoluti di $f[x(t)]$ nell'intervallo (α, β) , ossia di $f(x)$ in (a, b) ,

$$S < \sum_1^n h_s y_s + \sigma_1 A (\beta - \alpha);$$

ed in modo analogo si avrebbe

$$S > \sum_1^n h_s y_s - \sigma_1 A (\beta - \alpha),$$

cosicchè

$$|S - \sum_1^n h_s y_s| < \sigma_1 A (\beta - \alpha);$$

ed in ogni caso, cioè sia $\alpha > \beta$ o sia $\alpha < \beta$, si arriverebbe alla formula

$$|S - \sum_1^n h_s y_s| < \sigma_1 A |\beta - \alpha|.$$

Dato ora σ , prendiamo nelle formole precedenti $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2A|\beta-\alpha|}$
 così chè

$$|S - \sum_1^n h_s y_s| < \frac{\sigma}{2},$$

e supponiamo δ anche tale che per $|t_s - t_{s-1}| < \delta$ i corrispondenti h_s risultino così, che sia

$$\left| \sum_1^n h_s y_s - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\sigma}{2};$$

allora per tutte le scomposizioni dell'intervallo (α, β) in parti di ampiezza $< \delta$ è

$$\left| S - \int_a^b f(x) dx \right| < \sigma,$$

cioè $\lim S = \int_a^b f(x) dx$; e, poichè il limite di S è $\int_a^\beta f[x(t)] x'(t) dt$,
 abbiamo in ultimo

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f[x(t)] x'(t) dt,$$

come volevamo dimostrare.

Questa formola vale anche se la funzione $x(t)$ ha nell'intervallo α, β un numero finito di massimi e di minimi. Invero, questi massimi o minimi corrispondano ai valori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ di t , dove, supposto p. e.: $\alpha < \beta$, è $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < \beta$, così chè negli intervalli $(\alpha, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots$ la $x(t)$ è sempre crescente o decrescente; indicati allora con $a_1, a_2, \dots, a_m$ i valori

di x corrispondenti a quei valori di t , avremo, applicando la (1),

www.libtool.com.cn

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{a_1} f(x) dx = \int_a^{a_1} f[x(t)] x'(t) dt, \\ \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = \int_{a_1}^{a_2} f[x(t)] x'(t) dt, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \int_{a_m}^b f(x) dx = \int_{a_m}^b f[x(t)] x'(t) dt, \end{array} \right.$$

le quali sommate danno appunto la (1), dove è a notare che alcuni o tutti i numeri $a_1, a_2, \dots, a_m$ potranno essere fuori dell'intervallo (a, b) ; solo dobbiamo supporre allora la $f(x)$ data e finita e integrabile per i valori di x che occorre considerare fuori dell'intervallo (a, b) .

Il cambiamento di variabile in un integrale definito giova spesso per l'effettivo calcolo dell'integrale stesso.

ESEMPIO. — Sia $I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$; poniamo $x = \operatorname{tg} t$, co-

sichè variando t da 0 a $\frac{\pi}{4}$, la x varia da 0 ad 1; abbiamo allora

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\operatorname{tg} t)}{1+t^2} (1+t^2) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tg} t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\operatorname{sen} t + \cos t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t dt; \end{aligned}$$

osservando che

$$\operatorname{sen} t + \cos t = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \left[\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right] dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t \, dt \\ &= \log \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t \, dt. \end{aligned}$$

Poniamo nel secondo integrale dell'ultimo membro

$$t = \frac{\pi}{4} - t_1, \text{ e allora}$$

$$\begin{aligned} I &= \log \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \log \cos t_1 \, dt_1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t \, dt = \frac{\pi}{4} \log \sqrt{2} \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t_1 \, dt_1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t \, dt = \frac{\pi}{4} \log \sqrt{2} = \frac{\pi}{8} \log 2. \end{aligned}$$

Il teorema precedente, che suppone univalente la funzione trasformatrice $x = x(t)$, sussiste ancora, come è naturale, se per $x(t)$ si prende un ramo univalente di una funzione a più valori, purchè tutte le condizioni dell'enunciato del teorema siano soddisfatte. Ove ciò non avvenisse in tutto l'intervallo (a, b) , se questo potrà spezzarsi in un numero finito di parti in ciascuna delle quali tutte quelle condizioni siano soddisfatte, si potrà applicare il teorema a ciascun integrale relativo a ciascuna di queste parti, integrali la cui somma uguaglia $\int_a^b f(x) dx$:

otterremo così delle formole analoghe alle (2), ma da esse non sempre potremo passare alla formola (1). Supponiamo ad es. $a < b$, e $x_1(t), x_2(t)$ due rami univalenti di una funzione plurivalente, e sia $x_1(\alpha) = a, x_1(\beta) = b, x_2(\beta) = b, x_2(\gamma) = c, a < b_1 < c < b, \alpha < \beta < \gamma$. Assumiamo per funzione trasformatrice $x = x(t)$ la funzione continua costituita da $x_1(t)$ pei valori di t da α a γ e dalla $x_2(t)$ pei valori di t da γ a β ; e questi rami siano tali che, mentre la t sempre crescendo prende i valori $\alpha \dots \beta \dots \gamma$, la x sempre crescendo prenda i valori $a \dots b_1 \dots c$, e mentre t sempre decrescendo prende i valori da γ a β , la x sempre crescendo prenda i valori da c a b . Allora abbiamo

$$\int_a^c f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f[x_1(t)] x'_1(t) dt, \quad \int_c^b f(x) dx = \int_{\gamma}^{\beta} f[x_2(t)] x'_2(t) dt,$$

e quindi ancora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f[x_1(t)] x'_1(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} f[x_2(t)] x'_2(t) dt,$$

e, quantunque si soglia anche scrivere

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f[x(t)] x'(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} f[x(t)] x'(t) dt,$$

è chiaro che si commetterebbe errore scrivendo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t)] x'(t) dt.$$

ESEMPIO. — Sia $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$, e si ponga $x = \arcsen t$, prendendo così $x(t) = \arcsen t$. Ora, per potersi servire di que-

sta posizione per trasformare l'integrale I in altri colla variabile corrente di integrazione t , bisogna non limitarsi a considerare i valori di $\arcsen t$ compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, come si è fatto nel Vol. I n. 23, ma bisognerà considerare i valori di $\arcsen t$ compresi tra 0 e π , cosichè indicando con $\text{Arc sen } t$ il più piccolo arco il cui seno è t , noi considereremo della funzione $\arcsen t$ i due rami $x_1(t) = \text{Arc sen } t$, $x_2(t) = \pi - \text{Arc sen } t$, e poichè abbiamo $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = x_2(1) = \frac{\pi}{2}$, $x_2(0) = \pi$, e tutte le condizioni richieste sono soddisfatte, avremo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(\text{Arc sen } t) dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_1^0 \frac{f(\pi - \text{Arc sen } t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{f(\text{Arc sen } t) dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{f(\pi - \text{Arc sen } t) dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

57. Facciamo ora alcune osservazioni degne di nota.

Ricordiamo che l'integrale $\varphi(x) = \int_a^x f(y) dy$, essendo x un punto qualunque dell'intervallo (a, b) , ove la $f(y)$ si suppone finita e integrabile, è una funzione continua di x in (a, b) , la quale, nei punti x ove $f(y)$ è continua ammette derivata $\varphi'(x) = f(x)$, e nei punti x , ove $f(y)$ ha una discontinuità di prima specie, non ammette derivata ordinaria ma ammette la derivata a destra e quella a sinistra, che indicheremo con $\varphi'_d(x)$, $\varphi'_s(x)$, ed è $\varphi'_d(x) = f(x+0)$, $\varphi'_s(x) = f(x-0)$; nei punti x ove la $f(y)$ ha una discontinuità di seconda specie non possiamo più asserire subito se la $\varphi(x)$ ammetta o no derivata, ma si conoscono dei casi nei quali si trova che la ammette, come ora vedremo.

Supponiamo ora che la $f(y)$ non abbia discontinuità di seconda specie, e sia $F(x)$ una funzione che nei punti x ove $f(y)$

è continua ha la sua derivata uguale a $f'(x)$, e nei punti x ove $f(y)$ ha una discontinuità non ammetta derivata ordinaria ma ammetta derivata a destra e a sinistra e sia $F'_a(x) = f'(x+0)$, $F'_s(x) = f'(x-0)$. Allora la differenza $F(x) - \int_a^x f(y) dy$ ammette derivata ordinaria in ogni punto di (a, b) e questa è sempre zero, cosicchè

$$F(x) - \int_a^x f(y) dy = C \quad (C \text{ costante}),$$

dalla quale, per $x=a$, si ha $F(a)=C$, e quindi

$$(1) \quad \int_a^x f(y) dy = F(x) - F(a).$$

Così chè, se la funzione $f(y)$ è integrabile e non ha discontinuità di seconda specie, e si trovasse una funzione $F(x)$ soddisfacente alle precedenti condizioni, la formola (1) ci permetterebbe di calcolare subito il valore dell'integrale definito $\int_a^x f(y) dy$. Così se $f(y)$ è funzione continua, e coi metodi dati nei capitoli precedenti si riesce a trovare l'integrale indefinito $\int f(x) dx = \varphi(x)$, la formola (1) ci darebbe subito il valore dell'integrale definito, o, come suol dirsi, servirebbe al passaggio dall'integrale indefinito al definito. Ad esempio, poichè $\int \sin x dx = -\cos x$

si ricava subito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$; poichè è

$\int \frac{dx}{x} = \log x$ per x diverso da zero, e $\frac{1}{x}$ è continua nell'intervallo $(1, 2)$, si ha

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

Se una funzione $\varphi(x)$ ammette derivata continua $\varphi'(x)$ in tutto l'intervallo (a, b) , questa sarà integrabile ed avremo

$$(2) \quad \varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \varphi'(y) dy.$$

Ma se supponiamo che la $\varphi'(x)$ presenti delle discontinuità, allora non sappiamo se abbia luogo la formola (2), anzi si presentano spontaneamente queste due domande: Sarà ancora la $\varphi'(x)$ integrabile in (a, b) , e se lo è, avrà luogo ancora la formola (2)? Senza entrare in proposito in particolari, che non possono trovare luogo in un libro elementare, mi limiterò ad accennare che alla prima domanda è stato risposto negativamente, cioè *vi sono delle funzioni le cui derivate non sono integrabili*, ed il prof. VOLTERRA ha dato esempi di tali funzioni ¹⁾. Per queste funzioni sarebbe sempre vero che $\int \varphi'(x) dx = \varphi(x) + C$, ove si intenda con $\int f(x) dx$ quella funzione che derivata dà $f(x)$, ma non avrebbe significato l'integrale $\int_a^x \varphi'(y) dy$, definito come limite della solita somma S. Alla seconda domanda rispose affermativamente il prof. DINI ²⁾, cioè *se la $\varphi'(x)$ è integrabile ha luogo sempre la formola (2)*, dalla quale risulta così che l'integrale $\int_a^x \varphi'(y) dy$ ammette sempre derivata e questa è $\varphi'(x)$ anche nei punti ove $\varphi'(x)$ è discontinua, notando che le discontinuità della $\varphi'(x)$ non possono essere altro che di seconda specie (Vedi Vol. I, esercizio 4, a pag. 131); ciò prova quanto avevamo più sopra asserito.

¹⁾ «Sui principi del calcolo integrale», Vol. 19° del Giornale di matematiche diretto dal prof. G. BATTAGLINI.

²⁾ «Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali», pag. 280, numero 199.

1. Si dimostri che se $f(x)$ è finita e integrabile in (a, b) lo è pure $|f(x)|$.

$$2. \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{3} [1 + \theta(e-1)], \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \int_{\theta_1}^1 e^{x^2} dx, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1.$$

3. Osservando che la derivata, rapporto a t , della funzione

$$-f(x+h-t) - tf'(x+h-t) - \frac{t^2}{1 \cdot 2} f''(x+h-t) - \dots$$

$$- \frac{t^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x+h-t)$$

è $\frac{t^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x+h-t)$, si provi che il resto dello sviluppo del Taylor per la funzione $f(x+h)$ è uguale a

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_0^h t^{n-1} f^{(n)}(x+h-t) dt,$$

e si ricavi da questa forma del resto quella di LAGRANGE

$\frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x+\theta h)$ dove $0 < \theta < 1$ ¹⁾ ammesso che $f^{(n)}(x+h-t)$ sia continua pei valori di t da 0 ad h .

¹⁾ Arrivando in questo modo alla forma del resto di LAGRANGE si trova propriamente $0 \leq \theta \leq 1$, ma noi sappiamo, d'altra parte, che θ è una vera e propria frazione.

$$4. \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4} \text{ (si scriva } \int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{ e nell'ul-}$$

timo integrale si ponga $x = \pi - y$).

$$5. \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} = \frac{\pi}{3} \log(1 + \sqrt{2}).$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} 2x) \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \cos x \, dx, \text{ dove } f(\operatorname{sen} 2x)$$

indica una funzione qualunque di $\operatorname{sen} 2x$ integrabile in $(0, \frac{\pi}{2})$
(si cominci col dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} 2x) \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{sen} 2x) (\operatorname{sen} x + \cos x) dx).$$

$$\text{Ad es. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{sen} 2x} \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{1 + x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2} - 1) \right].$$

Integrali definiti per i quali la funzione integranda non si mantiene finita nell'intervallo di integrazione, e integrali definiti con limiti infiniti.

58. Nella definizione che abbiamo data di integrale definito, e nelle successive considerazioni intorno ai medesimi, abbiamo supposto che i valori della funzione integranda $f(x)$ fossero

compresi, nell'intervallo (a, b) di integrazione, tra due numeri finiti m, M , cioè che essa si mantenesse finita. Supponiamo ora che ciò non avvenga, e non avvenga perchè esistano nell'intervallo (a, b) dei punti x (che possano anche coincidere cogli estremi dell'intervallo) in numero finito, tali che, dato un numero comunque grande e positivo A , esista un corrispondente intorno di x (alla destra o alla sinistra o alle due parti) per tutti i punti x del quale (x escluso) sia $|f(x)| > A$ (infinito propriamente detto), od anche perchè in tali intorni senza essere sempre $|f(x)| > A$, vi siano dei punti x pei quali sia $|f(x)| > A$. Supponiamo inoltre che nelle parti di (a, b) , cui non appartengono, come punti interni o come estremi, dei punti x , la $f(x)$ sia integrabile.

Allora se $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, indicano i punti α , che si incontrano procedendo da a verso b , ha un significato completamente determinato la somma

$$(1) \int_a^{\alpha_1 - \varepsilon_1} f(x) dx + \int_{\alpha_1 + \varepsilon'_1}^{\alpha_2 - \varepsilon_2} f(x) dx + \int_{\alpha_2 + \varepsilon'_2}^{\alpha_3 - \varepsilon_3} f(x) dx + \dots + \int_{\alpha_n + \varepsilon'_n}^b f(x) dx,$$

dove le $\varepsilon, \varepsilon'$ si suppongono tutte positive o tutte negative secondo che $a < b$, oppure $a > b$, e tali che negli intervalli di integrazione relativi ai singoli termini non cada alcun punto α , e detta somma mantiene un significato per quanto piccole si fissino le $\varepsilon, \varepsilon'$; e notiamo ancora, quantunque sia superfluo, che se il punto α_1 coincide con a , o il punto α_n con b , mancheranno il primo, o l'ultimo integrale nella somma (1).

Ora se la somma (1) ha un limite determinato e finito quando tutte le $\varepsilon, \varepsilon'$, indipendentemente tra loro, convergono a zero, questo limite si definisce come $\int_a^b f(x) dx$, e si dice allora che la $f(x)$ è *integrabile* in (a, b) . Ed affinchè questo succeda basta che ciascun termine della (1) abbia limite determinato e finito, e, poichè le $\varepsilon, \varepsilon'$ devono farsi convergere a zero indipendentemente tra loro, ciò è anche necessario.

Sia, per fissare le idee, $a < b$; e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ dei punti compresi ~~rispettivamente tra~~ α_1 e α_2 , tra α_2 e $\alpha_3, \dots$ tra α_{n-1} e α_n . La somma (1) può scriversi così

$$\int_a^{\alpha_1 - \delta_1} f(x) dx + \int_{\alpha_1 + \delta'_1}^{\alpha_1} f(x) dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2 - \delta_2} f(x) dx + \dots + \int_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s - \delta_s} f(x) dx$$

$$+ \int_{\alpha_s + \delta'_s}^{\alpha_s} f(x) dx + \dots + \int_{\alpha_n + \delta'_n}^b f(x) dx,$$

ed affinchè essa abbia limite finito, quando le ε convergono a

zero, bisogna che lo abbiano i suoi termini $\int_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s - \delta_s} f(x) dx, \int_{\alpha_s + \delta'_s}^{\alpha_s} f(x) dx$.

Ora affinchè per ε_s convergente a zero il primo di questi integrali abbia limite finito, fa bisogno e basta (Vedi Vol. I, n. 20) che, dato σ , esista un intorno di α_s , alla sinistra, per tutti i punti $\alpha_s - \delta_s, \alpha_s - \delta'_s$ del quale (α_s escluso) sia

$$\left| \int_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s - \delta_s} f(x) dx - \int_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s - \delta'_s} f(x) dx \right| < \sigma,$$

ovvero, supposto $\delta_s < \delta'_s$ e poichè allora

$$\int_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s - \delta_s} f(x) dx - \int_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s - \delta'_s} f(x) dx = \int_{\alpha_s - \delta'_s}^{\alpha_s - \delta_s} f(x) dx,$$

$$\left| \int_{\alpha_s - \delta'_s}^{\alpha_s - \delta_s} f(x) dx \right| < \sigma, \quad \text{cioè} \quad \lim_{\delta'_s \rightarrow 0} \int_{\alpha_s - \delta'_s}^{\alpha_s - \delta_s} f(x) dx = 0.$$

Analogamente si proverebbe che, affinché $\int_{\alpha_s + \delta_s}^{\alpha_s} f(x) dx$ abbia limite finito per ε_s , convergente a zero, fa bisogno e basta che

$\lim_{\delta'_s \rightarrow 0} \int_{\alpha_s + \delta_s}^{\alpha_s} f(x) dx = 0$. Così ch , chiamando *integrali singolari definiti*, relativi al punto di infinito α_s , gli integrali $\int_{\alpha_s + \delta'_s}^{\alpha_s + \delta_s} f(x) dx$, dove δ_s, δ'_s sono positivi e $\delta_s < \delta'_s$, notando che se

α_s   uno degli estremi a, b dell'intervallo si ha per esso uno solo di questi integrali singolari, si conchiude che: *la condizione necessaria e sufficiente affinch  la $f(x)$ sia integrabile in (a, b)   che gli integrali singolari relativi ai punti di infinito α_s abbiano per limite zero al diminuire di δ'_s .*

ESEMPI

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim [\arcsen(1-\varepsilon) - \arcsen 0] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim \left(\frac{3}{2} \varepsilon^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \right) \\ &\quad + \lim \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ Poich\`e } \lim_{\varepsilon=0} \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{d(-x)}{-x} = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{\varepsilon} \frac{dx}{x} \\
 &= \lim_{\varepsilon=0} (\log \varepsilon - \log a) = -\infty, \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x} = \infty
 \end{aligned}$$

e, dietro la definizione, sarebbe

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x},$$

si vede che la funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile in qualunque intervallo cui appartenga il punto zero.

$$\begin{aligned}
 4) \int_0^x \log x \, dx &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^x \log x \, dx = \lim_{\varepsilon=0} \{x(\log x - 1) - \varepsilon(\log \varepsilon - 1)\} \\
 &= x(\log x - 1).
 \end{aligned}$$

5) La funzione $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, coll'avvicinarsi di x a zero,

senza che abbia per limite l'infinito, prende anche valori numericamente maggiori di qualunque numero positivo assegnato. Quindi il punto zero è per la nostra funzione un punto d'infinito, nel senso che noi gli abbiamo attribuito. Ora i due integrali singolari relativi a questo punto hanno per limite zero, perchè abbiamo

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-\delta}^{-\delta'} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \, dx \right| &< \int_{-\delta}^{-\delta'} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \, dx < \int_{-\delta}^{-\delta'} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx = 3(\sqrt[3]{\delta'} - \sqrt[3]{\delta}), \\
 \left| \int_{\delta}^{\delta'} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \, dx \right| &< 3(\sqrt[3]{\delta'} - \sqrt[3]{\delta}),
 \end{aligned}$$

e perciò la funzione $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ è integrabile anche in intervalli cui appartenga il punto zero.

59. Il teorema seguente permette spesso di decidere se una funzione, che diviene infinita in un numero finito di punti di un intervallo, sia integrabile o no, senza aver bisogno di calcolare i limiti che compariscono nella formola di definizione per l'integrale definito o di ricorrere agli integrali definiti singolari:

Se la funzione $f(x)$ diviene infinita per $x=b$, ed è finita e integrabile nell'intervallo $(a, b-\varepsilon)$ per quanto piccolo sia ε , e dove $a < b$, essa sarà integrabile in (a, b) se esisterà un intorno di b alla sinistra, per tutti i punti x del quale (b escluso) uno dei prodotti

$$f(x)(b-x)^\mu, \quad f(x)(b-x) [\log(b-x)]^{1+\mu},$$

$$f(x)(b-x) \log(b-x) [\log |\log(b-x)|]^{1+\mu}, \dots,$$

dove μ è un numero positivo qualunque e nel primo prodotto minore dell'unità, si mantenga numericamente minore di un certo numero positivo k (in particolare se $f(x)$ nel punto b diviene infinita di ordine uguale o minore a quello di una delle funzioni

$$\frac{1}{(b-x)^\mu}, \quad \frac{1}{(b-x) [\log(b-x)]^{1+\mu}}, \quad \frac{1}{(b-x) \log(b-x) [\log |\log(b-x)|]^{1+\mu}}, \dots$$

quando x converge a b ¹⁾); e la $f(x)$ non sarà integrabile

¹⁾ Vedi Vol. I, n. 41. 42.

Colla regola di l'Hospital ripetutamente adoperata, oppure osservando che

$$\frac{(\log x)^{n_1}}{x^n} = \frac{(\log x)^{n_1}}{e^{n \log x}} = \frac{(\log x)^{n_1}}{1 + n \log x + \frac{n^2 (\log x)^2}{2} + \frac{n^3 (\log x)^3}{2 \cdot 3} + \dots}$$

in (a, b) , perchè $\int_a^b f(x) dx$ avrebbe un valore infinito, se in detto intorno la $f(x)$ mantiene lo stesso segno, ed uno dei prodotti

$$f(x)(b-x), f(x)(b-x)\log(b-x), f(x)(b-x)\log(b-x)\log|\log(b-x)|, \dots$$

$$= \frac{1}{(\log x)^{n_1} + n(\log x)^{1-n_1} + \frac{n^2(\log x)^{2-n_1}}{2} + \frac{n^3(\log x)^{3-n_1}}{2 \cdot 3} + \dots},$$

si vede che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^{n_1}}{x^n} = 0$, se n_1, n sono numeri positivi. Da ciò apparisce che, se $n_1, n_2 \dots$ sono positivi, sarà ancora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log \log x)^{n_2}}{(\log x)^{n_1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log \log \log x)^{n_3}}{(\log \log x)^{n_2}} = 0 \dots \dots$$

cosicchè avremo, quando i fattori nel numeratore sono in numero finito,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^{n_1} (\log \log x)^{n_2} (\log \log \log x)^{n_3} \dots}{x^n} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(\log x)^{n_1+1}}{x^n} \cdot \frac{(\log \log x)^{n_2+1}}{\log x} \cdot \frac{(\log \log \log x)^{n_3+1}}{\log \log x} \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Ponendo poi $y = \frac{1}{x}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} y^n (\log y)^{n_1} (\log |\log y|)^{n_2} (\log \log |\log y|)^{n_3} \dots \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^{n_1} \frac{(\log x)^{n_1} (\log \log x)^{n_2} (\log \log \log x)^{n_3} \dots}{x^n} = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^n [\log(b-x)]^{n_1} [\log |\log(b-x)|]^{n_2} \dots = 0,$$

cosicchè le funzioni

$$\frac{1}{(b-x)^n [\log(b-x)]^{n_1} [\log |\log(b-x)|]^{n_2} \dots}$$

divengono infinite nel punto b .

si mantiene numericamente maggiore di un certo numero positivo k (in particolare se la $f(x)$ diviene in b infinita di ordine uguale o superiore a quello di una delle funzioni

$$\frac{1}{b-x}, \frac{1}{(b-x) \log(b-x)}, \frac{1}{(b-x) \log(b-x) \log |\log(b-x)|}, \dots)$$

La prima parte del teorema si dimostra subito osservando che, per le ipotesi fatte, l'integrale definito singolare $\int_{b-\delta}^{b-\delta} f(x) dx$ è numericamente minore di uno degli integrali

$$k \int_{b-\delta}^{b-\delta} \frac{dx}{(b-x)^\mu}, \quad k \int_{b-\delta}^{b-\delta} \frac{dx}{(b-x) [\log(b-x)]^{1+\mu}},$$

$$k \int_{b-\delta}^{b-\delta} \frac{dx}{(b-x) \log(b-x) [\log |\log(b-x)|]^{1+\mu}}, \dots$$

i quali sono rispettivamente uguali a $\frac{k}{1-\mu} (\delta^{1-\mu} - \delta'^{1-\mu})$, $\frac{k}{\mu} [(\log \delta)^{-\mu} - (\log \delta')^{-\mu}]$, $\frac{k}{\mu} [(\log |\log \delta|)^{-\mu} - (\log |\log \delta'|)^{-\mu}]$, ... e quindi $\lim_{\delta' \rightarrow 0} \int_{b-\delta}^{b-\delta} f(x) dx = 0$, e la $f(x)$ è integrabile.

La seconda parte del teorema si dimostra osservando che

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

dove c indica un punto appartenente all'intorno di b , di cui è parola nell'enunciato del teorema, e che $\int_c^{b-\varepsilon} f(x) dx$ è numeri-

camente maggiore di uno degli integrali

$$k \int_c^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x}, \quad k \int_c^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x) \log(b-x)}, \quad k \int_c^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x) \log(b-x) \log |\log(b-x)|}, \dots$$

i quali sono rispettivamente uguali a

$$k[\log(b-c) - \log \varepsilon], \quad k[\log \log(b-c) - \log \log \varepsilon], \dots$$

e quindi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x) dx = \pm \infty$, ed essendo perciò ancora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \pm \infty,$$

la $f(x)$ non è integrabile nell'intervallo (a, b) .

ESEMPI

1) La funzione $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ diviene infinita di ordine $\frac{1}{2}$ nei punti $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$, perchè

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 \mp x} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1}{k} \mp x} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{k}{2(k^2-1)}}$$

e quindi è integrabile in intervalli cui appartengono anche i punti $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$. Così pure è integrabile in qualun-

que intervallo, cui appartengono i punti $a, b, c, \dots$, la funzione

www.libtool.com.cn

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)} \dots},$$

sottointendendo, per funzioni come queste, di considerare valori di x per i quali esse sono reali

2) La funzione $\log \sin x$ diviene infinita nel punto zero, e l'ordine del suo infinito è minore di qualunque numero positivo ¹⁾, giacchè, se $\mu > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\mu \log \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x^\mu \left(\log \frac{\sin x}{x} + \log x \right) = 0,$$

e noi possiamo supporre anche $\mu < 1$. Quindi essa è integrabile in ogni intervallo cui appartenga anche il punto zero, ed ha perciò significato l'integrale $\int_0^x \log \sin x \, dx$.

3) Non sono integrabili, in un intervallo cui appartenga il punto a , le funzioni $\frac{e^{x-a}}{x-a}$, $\frac{1}{\sin(x-a)}$ perchè esistono intorno alla destra e alla sinistra del punto a nei quali esse mantengono lo stesso segno, e divengono in a infinite di primo ordine.

4) La funzione $\frac{1}{\sin x (\log x)^n}$, dove supporremo $n > 1$, diviene infinita nel punto *uno*, come è chiaro, e nel punto *zero* perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sin x (\log x)^n] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} x (\log x)^n \right] = 0.$$

Ma pel punto *zero* abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\log x)^{1+\mu}}{\sin x (\log x)^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \frac{1}{(\log x)^{n-1-\mu}} \right] = 0,$$

¹⁾ L'ordine di infinito delle funzioni $\log x$, $\log \sin x$, $\log \tan x, \dots$ e simili, per x convergente a zero, è minore di qualunque numero positivo, senza essere zero; quindi è una grandezza non rappresentabile nel comune campo dei numeri.

prendendo μ positivo e $< n-1$; e pel punto 1, abbiamo

www.libtool.com.cn

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\log x)^n} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{n(\log x)^{n-1}} = \infty;$$

quindi la nostra funzione è integrabile in qualunque intervallo cui appartenga anche il punto *zero*, ma non il punto *uno*.

5) Non possiamo applicare alle funzioni $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$, $\cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, che divengono infinite nel punto zero, il nostro teorema, perchè la prima parte di esso non ci dà alcuna indicazione circa alla loro integrabilità, e la seconda non può applicarsi perchè negli intorno del punto zero esse subiscono continui cangiamenti di segno. Però, osservando che la prima funzione è la derivata di $\cos \frac{1}{x}$, la seconda di $x \cos \frac{1}{x}$, per x diverso da zero, abbiamo

$$\int_0^x \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\cos \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

e, poichè il limite non esiste, la funzione $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ non è integrabile in un intervallo cui appartenga il punto zero; invece la seconda funzione è integrabile perchè

$$\int_0^x \left(\cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{1}{x} - \varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} \right) = x \cos \frac{1}{x}.$$

60. Vediamo ora se e come vengano modificati i principali teoremi, che abbiamo precedentemente dimostrati nell'ipotesi che la funzione integranda $f(x)$ fosse finita, quando questa mantenendosi integrabile divenga infinita in un numero finito di

punti dell'intervallo di integrazione (a, b) , supponendo per fissare le idee $a < b$.

Posto $\varphi(r) = \int_a^r f(x) dx$, è facile vedere che la $\varphi(x)$ è anche continua nei punti di infinito della $f(x)$. Sia x un tal punto, e c indichi un punto qualunque tra a e x tale che tra c e x non vi sia alcun infinito di $f(x)$. Allora, posto $\int_c^x f(x) dx = \psi(y)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^x f(x) dx = \varphi(c) + \lim_{h=0} \int_c^{x-h} f(x) dx = \varphi(c) + \lim_{h=0} \psi(x-h) \\ &= \lim_{h=0} [\varphi(c) + \psi(x-h)] = \lim_{h=0} \varphi(x-h),\end{aligned}$$

la quale ci dice che la $\varphi(x)$ è continua nel punto x a sinistra. Inoltre abbiamo

$$\varphi(x+h) = \lim_{h'=0} \int_a^{x-h'} f(x) dx + \lim_{h'=0} \int_{x+h'}^{x+h} f(x) dx = \varphi(x) + \lim_{h'=0} \int_{x+h'}^{x+h} f(x) dx,$$

dove è supposto $h' < h$, e, poichè, essendo per ipotesi la $f(x)$ integrabile in (a, b) , è $\lim_{h=0} (\lim_{h'=0} \int_{x+h'}^{x+h} f(x) dx) = 0$, abbiamo ancora

$$\lim_{h=0} \varphi(x+h) = \varphi(x),$$

cioè la $\varphi(x)$ è continua anche alla destra del punto x .

Riguardo alla derivata, la funzione $\varphi(x)$ si comporta come abbiamo visto nei n. 5 e 13, se nel punto x la $f(x)$ è finita.

Se poi nel punto x la funzione diviene infinita, ma esiste un suo intorno nel quale (il punto x escluso) la $f(x)$ si mantiene continua, abbiamo la formola nota

$$(1) \quad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x+\theta h) = f(x+\theta h),$$

cosicchè se il punto x è un vero e proprio infinito della $f(x)$ cioè se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty$ allora nel punto x la $\varphi(x)$ ha una derivata infinita; ma se il punto x non è un vero e proprio infinito della $f(x)$, cioè se avvicinandoci al punto x la $f(x)$ prende *anche* valori numericamente maggiori di qualunque numero positivo prefissato, rimarrà dubbio su ciò che avvenga della $\varphi(x)$ relativamente alla sua derivata in x .

Così ad es: l'integrale

$$\varphi(x) = \int_{-a}^x \left(\cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) dx = x \cos \frac{1}{x} + a \cos \frac{1}{a}$$

non ammette derivata nel punto zero, perchè non esiste il limite per $h=0$ di $\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = \cos \frac{1}{h}$, mentre che l'integrale

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{-a}^x \left[2x \cos \left(e^{\frac{1}{x}} \right) + e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) \right] dx \\ &= x^2 \cos \left(e^{\frac{1}{x}} \right) - a^2 \cos \left(e^{-\frac{1}{a}} \right) \end{aligned}$$

ammette derivata nel punto zero, perchè

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos \left(e^{\frac{1}{h}} \right) = 0.$$

Lo stesso dubbio avrà luogo se non esiste un intorno del punto x nel quale la $f(x)$ si mantiene continua (come ad es: se il punto x fosse punto limite di un gruppo di punti in cui $f(x)$ è discontinua) perchè allora la $\varphi(x)$ non ammettendo, o non potendo noi asserire che in quell'intorno ammetta sempre derivata, non potremo stabilire la formola (1).

Supponiamo ora che la $f(x)$ non abbia discontinuità di seconda specie in (a, b) , e che esista una funzione $F(x)$ finita e

continua tale, che nei punti x ove $f(x)$ è continua sia $F'(x) = f(x)$ e nei punti x ove è discontinua sia $F'_a(x) = f(x+0)$, $F'_s(x) = f(x-0)$; allora avrà luogo la formola

$$(2) \quad F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx.$$

Invero, se $a_1, a_2, \dots, a_n$ indicano gli infiniti di $f(x)$ tra a e x avremo:

$$(3) \quad F(a_1 - \varepsilon) - F(a) = \int_a^{a_1 - \varepsilon} f(x) dx, \quad F(a_2 - \varepsilon) - F(a_1 + \varepsilon) = \int_{a_1 + \varepsilon}^{a_2 - \varepsilon} f(x) dx, \dots$$

$$F(x) - F(a_m + \varepsilon) = \int_{a_m + \varepsilon}^x f(x) dx,$$

e sommando e passando al limite per ε convergente a zero, osservando che la $F(x)$ è funzione continua in (a, b) si ha appunto la (1).

Sono ovvie le modificazioni da introdursi nella dimostrazione se il punto a , o il punto x , o tutti e due fossero punti di infinito di $f(x)$.

Notiamo poi che se la $f(x)$ non ha discontinuità di seconda specie, ma nulla si sa sulla sua integrabilità in quanto ha nell'intervallo (a, b) degli infiniti, ma solo si sa che è integrabile in qualunque parte dell'intervallo che non ne contenga, la esistenza della $F(x)$ porta per conseguenza la integrabilità della $f(x)$, giacchè allora gli integrali (3) hanno limite determinato finito per ε convergente a zero.

In particolare, se $f(x)$ avendo un numero finito d'infiniti in (a, b) è del resto sempre continua e $F(x)$ è una funzione finita e continua, per la quale nei punti ove $f(x)$ è finita è $F'(x) = f(x)$, cioè se $\int f(x) dx = F(x)$ per tutti i punti x ove $f(x)$ è finita, allora la $f(x)$ sarà integrabile in (a, b) ed avremo

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx.$$

Così ad esempio, poichè $\frac{d}{dx} (3\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ pei valori di

x diversi da zero, si può subito asserire che $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ è integrabile in qualunque intervallo, cui appartenga anche il punto zero, e scrivere ad es: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6$.

La funzione $\frac{-1}{x}$ ha per derivata $\frac{1}{x^2}$ per x diverso da zero, ma non è finita nel punto zero; non potremo quindi, applicando le precedenti considerazioni, concluderne che $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in un intervallo cui appartiene il punto zero; e riconosciamo invece, o col calcolo diretto dell'integrale, o applicando il teorema n. 59, che non lo è.

61. *Se le funzioni $f(x)$, $F(x)$ sono integrabili in (a, b) , e sono pure integrabili $|f(x)|$, $|F(x)|$, e alcun punto di infinito di $f(x)$ non coincide con alcun punto di infinito di $F(x)$, allora il prodotto $f(x) \cdot F(x)$ è pure integrabile in (a, b) .*

Invero sia a_1 un infinito, poniamo, di $f(x)$; per uno dei relativi integrali singolari $\int_{a_1-\delta'}^{a_1-\delta} f(x) F(x) dx$ abbiamo

$$\left| \int_{a_1-\delta'}^{a_1-\delta} f(x) F(x) dx \right| < M \int_{a_1-\delta'}^{a_1-\delta} |f(x)| dx,$$

dove M indica un numero maggiore dei valori di $|F(x)|$ nell'intervallo $(a_1 - \delta', a_1 - \delta)$, e, poichè l'integrale del secondo membro ha, per ipotesi, zero per limite al diminuire di δ' , anche il nostro integrale singolare avrà per limite zero. Lo stesso si dimostra per l'altro integrale singolare.

Notiamo che il teorema potrebbe non sussistere se qualche

infinito di $f(x)$ coincidesse con qualche infinito di $f(x)$. Così ad esempio è integrabile in un intervallo cui appartiene il

punto *uno* la funzione $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ma non la funzione

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

62. Il primo teorema della media (Vedi n. 54) si mantiene ancora valido se la funzione $f(x)$ che è positiva in (a, b) ha un numero finito d'infiniti in (a, b) ed è integrabile. Infatti, supponendo per semplicità che vi sia un solo infinito c in (a, b) , avremo, indicato con m, M il limite inferiore e superiore dei valori di $\varphi(x)$ in (a, b) ,

$$m \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx \leq \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx,$$

$$m \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \leq \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

le quali, essendo valide per quanto piccolo sia ε , danno al limite

$$m \int_a^c f(x) dx \leq \int_a^c f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^c f(x) dx$$

$$m \int_c^b f(x) dx \leq \int_c^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_c^b f(x) dx,$$

e quindi

$$m \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b f(x) dx.$$

Si intende come questa dimostrazione si estenda subito al caso di più infiniti, in numero finito, di $f(x)$ in (a, b) .

Il secondo teorema della media (vedi n. 55) vale ancora se la funzione $f(x)$ diventa infinita in (a, b) , purchè $f(x)$ e $f(x)\varphi(x)$ siano integrabili in (a, b) .

Invero, ricordando che questo teorema si deduce dalla formula

$$m\varphi(a) \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq M\varphi(a),$$

dove m , M indicano il minimo e massimo dei valori di $\int_a^x f(x) dx$ per i valori di x da a a b , dimostriamo che essa ha ancora luogo. Ciò si vede subito, osservando che, ove c sia un punto di infinito di $f(x)$ in (a, b) , avremo

$$m\varphi(a) \leq \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\varphi(x) dx \leq M\varphi(a) \quad , \quad m\varphi(a) \leq \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\varphi(x) dx \leq M\varphi(a).$$

63. Il cambiamento di variabile in un integrale $\int_a^b f(x) dx$, nel quale la funzione $f(x)$ diviene infinita in (a, b) ed è integrabile, si opera nello stesso modo come se la $f(x)$ fosse finita, purchè valgano le relative formole di trasformazione nelle parti di (a, b) che non contengono infiniti di $f(x)$; poichè se c è un punto d'infinito, avremo

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^{\gamma-\delta} f[x(t)] x'(t) dt,$$

essendo $a = x(\alpha)$, $c = x(\gamma)$, e δ quantità che converge a zero

con ε ; quindi al limite, per ε convergente a zero,

www.libtool.com.cn

$$\int_a^c f(x) dx = \int_\alpha^\gamma f[x(t)] x'(t) dt,$$

ed analogamente

$$\int_c^b f(x) dx = \int_\gamma^\beta f[x(t)] x'(t) dt,$$

e perciò

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)] x'(t) dt.$$

Notiamo che la funzione $f[x(t)] x'(t)$ mentre non può acquistare nuovi infiniti, potrà perderne, cioè potrà avvenire che in punti di (x, β) , corrispondenti a punti di infinito di $f(x)$ in (a, b) , essa si mantenga finita. Così ad esempio, posto $x = \sin t$, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

e la funzione $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ si mantiene finita per $t = \frac{\pi}{2}$.

Per dare un esempio dell'utilità del cambiamento di variabile pel calcolo effettivo degli integrali, si voglia, osservando che la funzione integranda è integrabile, calcolare

$$I = \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Poniamo $x = \sin t$, ed avremo

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt \\
 &= \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} \, dt,
 \end{aligned}$$

e ponendo nell'ultimo integrale $t = \pi - t_1$, o, come suol dirsi, cambiando t in $\pi - t$, è

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} \, dt - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} \, dt \\
 &= \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\pi} \log \sin \frac{t}{2} \, dt;
 \end{aligned}$$

ed infine, cambiando t in $2t$ nell'ultimo integrale, è

$$I = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2I,$$

da cui

$$\int_0^1 \frac{\log x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

64. In tutti gli integrali definiti finora considerati si è supposto sempre finito l'intervallo di integrazione (a, b) ; passiamo ora a considerare gli integrali, nei quali la variabile corrente di integrazione possa assumere valori numericamente maggiori

di qualunque numero positivo prefissato, o, come suol dirsi, gli integrali definiti con limiti infiniti.

Supposto che la $f(x)$ sia integrabile (finita o no) in qualunque intervallo (a, b) per quanto grande si fissi il numero positivo b (condizione che, senza più esprimerla, supporremo sempre verificata per le funzioni che ora tratteremo) noi poniamo la definizione

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

e diciamo che la $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, ∞) se detto limite esiste ed è finito; non integrabile negli altri casi.

Analogamente poniamo

$$\int_a^{-\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_a^{-b} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x) dx,$$

e, come è chiaro, possiamo limitarci a considerare, per semplicità, i soli integrali $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè esista e sia finito il $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ è che, dato τ , esista un numero c positivo, tale che per tutti i valori di γ, γ' maggiori di c sia $|\int_a^{\gamma'} f(x) dx - \int_a^{\gamma} f(x) dx| < \tau$, ossia tale che, per $\gamma > c$ e per qualunque numero positivo ε , sia

$$\left| \int_a^{\gamma+\varepsilon} f(x) dx - \int_a^{\gamma} f(x) dx \right| = \left| \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} f(x) dx \right| < \tau;$$

cosichè, chiamando *integrali definiti singolari* gli integrali $\int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} f(x) dx$, dove γ è comunque grande e positivo ed ε è numero

positivo qualunque, vediamo che: *la condizione necessaria e sufficiente affinché la $f(x)$ sia integrabile nell'intervallo (a, ∞) è che l'integrale singolare $\int_a^{a+\varepsilon} f(x) dx$, abbia per limite zero al crescere di γ , qualunque sia ε positivo.*

ESEMPI

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2) \int_0^{\infty} e^{-a^2 x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-a^2 x} dx = \lim \left[-\frac{1}{a^2} e^{-a^2 b} + \frac{1}{a^2} \right] = \frac{1}{a^2}.$$

3) La funzione $e^{a^2 x}$ non è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$, in quanto il limite per $b \rightarrow \infty$ di $\int_0^b e^{a^2 x} dx$ è l'infinito, poichè

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{a^2 x} dx = \lim \left[\frac{1}{a^2} e^{a^2 b} - \frac{1}{a^2} \right] = \infty.$$

4) Le funzioni $\sin x$, $\cos x$ non sono integrabili nell'intervallo (a, ∞) perchè non esistono i limiti di $\int_a^b \sin x dx = -\cos b + \cos a$, e di $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$, per b crescente indefinitamente.

5) L'integrale singolare relativo alla funzione $\log(3 - \sin x)$ è

$$\int_a^{a+\varepsilon} \log(3 - \sin x) dx > \log 2 \int_a^{a+\varepsilon} dx = \varepsilon \log 2,$$

e quindi, non potendo avere zero per limite al crescere di γ qualunque sia ε , la funzione $\log(3 - \sin x)$ non è integrabile nell'intervallo (a, ∞) .

6) Per la funzione e^{-x^2} , poichè $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = 0$, avremo
www.libtool.com.cn

$$\int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} e^{-x^2} dx = \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} x^2 e^{-x^2} \frac{dx}{x^2} < c \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = c \left[\frac{-1}{\gamma+\varepsilon} + \frac{1}{\gamma} \right],$$

dove c è un certo numero positivo, e perciò, essendo zero il limite dell'integrale singolare, essa è integrabile nell'intervallo (a, ∞) .

65. Il teorema seguente serve spesso per decidere della integrabilità di una funzione in un intervallo (a, ∞) :

La funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, ∞) se esiste un numero positivo γ tale che, per tutti gli $x \geq \gamma$, uno dei prodotti

$$x^{1+\mu} f(x), x(\log x)^{1+\mu} f(x), x \log x \log \log x^{1+\mu} f(x), \dots,$$

dove μ è numero positivo, si mantenga minore numericamente di un certo numero positivo k (in particolare se la $f(x)$ al crescere indefinitamente di x diviene infinitesima di ordine uguale o superiore a quello di

$$\frac{1}{x^{1+\mu}}, \frac{1}{x(\log x)^{1+\mu}}, \frac{1}{x \log x (\log \log x)^{1+\mu}}, \dots, \Big);$$

e la $f(x)$ non è integrabile in (a, ∞) , perchè $\int_a^x f(x) dx$ avrebbe un valore infinito, se per $x \geq \gamma$ la $f(x)$ mantiene sempre lo stesso segno ed uno dei prodotti

$$x f(x), x \log x f(x), x \log x \log \log x f(x), \dots$$

si mantiene sempre numericamente maggiore di un certo numero positivo k (in particolare se la $f(x)$ al crescere indefinitamente di x si mantiene discosta da zero più di una certa quantità, o, se diviene infinitesima, lo diviene di or-

dine uguale o inferiore a quello di

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x \log x}, \frac{1}{x \log x \log \log x}, \dots).$$

La dimostrazione di questo teorema è completamente analoga a quella del teorema al n. 59, talchè possiamo lasciare al lettore la cura di esercitarsi ad effettuarla.

ESEMPI

1) È integrabile la funzione $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ nell'intervallo (a, ∞) perchè, al crescere di x indefinitamente, diviene infinitesima di ordine secondo, avendosi

$$\lim_{x=\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^4} + 1}} = 1;$$

e non è integrabile la funzione $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, perchè, al crescere di x , si mantiene sempre positiva, e diviene infinitesima di ordine $\frac{2}{3}$, avendosi $\lim_{x=\infty} x^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + 1}} = 1$.

2) Sono integrabili nell'intervallo (a, ∞) le funzioni $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{(\log x)^2}$ sen $\frac{1}{x}$, perchè $\lim_{x=\infty} x^2 \text{ sen } \frac{1}{x^2} = \lim_{x=\infty} \frac{\text{sen } \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$;

$\lim_{x=\infty} x (\log x)^2 \frac{1}{(\log x)^2} \text{ sen } \frac{1}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{\text{sen } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$; e non sono in-

tegrabili le funzioni

www.libt3ol.com.cn

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{\sin x}, \frac{\log x}{1+x(\log x)^2}, \frac{(\log x)^2}{(\log x)^3 + x \log \log x}$$

perchè al crescere di x si mantengono tutte positive, e la prima è sempre $\geq \frac{1}{2}$, e per le altre due abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log x \frac{\log x}{1+x(\log x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x(\log x)^2} + 1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log x \log \log x \frac{(\log x)^2}{(\log x)^3 + x \log \log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x \log \log x} + \frac{1}{(\log x)^3}} = \infty.$$

3) Le funzioni $\frac{\sin x}{x^2}$, $\frac{\cos x}{x^2}$ sono integrabili in (a, ∞) , perchè

$$x^2 \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq 1, \quad x^2 \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq 1.$$

4) La prima parte del teorema non ci dà nessuna indicazione intorno alla integrabilità della funzione $\frac{1}{x} \sin x$, e la seconda non può venire applicata perchè la funzione ha continui cangiamenti di segno al crescere di x . Lo stesso dicasi per le funzioni $\sin(x^2)$, $\cos(x^2)$; ma vedremo tra breve che tutte sono integrabili.

66. La trasformazione degli integrali con limiti infiniti si opera come quella per gli integrali con limiti finiti, purchè le formole di trasformazione valgano per quanto grande si fissi l'intervallo di integrazione. Invero, abbia significato l' $\int_a^\infty f(x) dx$, e posto $x = x(t)$ sia valida la formola

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_\alpha^t f[x(t)] x'(t) dt$$

per quanto grande si fissi il limite superiore x dell'integrale. Allora se $\lim_{t \rightarrow \gamma} x(t) = \infty$, cioè se al crescere indefinito di x la t converge ad un limite finito γ , avremo

$$(1) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \gamma} \int_a^t f[x(t)] x'(t) dt = \int_a^{\gamma} f[x(t)] x'(t) dt,$$

come volevasi provare; oppure avverrà che $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ ed allora

$$(2) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f[x(t)] x'(t) dt = \int_a^{\infty} f[x(t)] x'(t) dt,$$

come volevasi provare.

Supponiamo ora integrabile in (a, b) la $f(x)$, e sia $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = b$; avremo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f[x(t)] x'(t) dt = \int_a^{\infty} f[x(t)] x'(t) dt,$$

che serve a passare da un integrale con limiti finiti ad un altro con uno dei limiti infinito.

Notiamo poi che le formole (1), (2), qualora non si sappia se la $f(x)$ sia integrabile in (a, ∞) restando però ferme le altre condizioni solite, ma si trovi che è integrabile $f[x(t)] x'(t) dt$ nell'intervallo (x, γ) o nell'intervallo (x, ∞) , servono a mostrarci la integrabilità di $f(x)$ nell'intervallo (a, ∞) .

1) $I = \int_0^{\infty} \log\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2}$; poniamo $x = \operatorname{tg} t$ ed avremo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\operatorname{tg} t + \frac{1}{\operatorname{tg} t}\right) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t \cos t) dt$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos t dt,$$

e, cambiando nell'ultimo integrale t in $\frac{\pi}{2} - t$,

$$I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log \sin t dt = - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t dt = \pi \log 2.$$

(v. n. 63).

2) Si voglia calcolare $I = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1} dy}{1+y}$ dove a è una frazione propria positiva.

Posto $a = \frac{m}{n}$, m, n interi positivi e $m \leq n-1$, e $y = x^n$, abbiamo $I = n \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{x^n + 1}$. Ora quando $m \leq n-1$ la funzione $\frac{x^{m-1}}{x^n + 1}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$, perchè

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m+1} \frac{x^{m-1}}{x^n + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^n + 1} = 1, \quad \text{e} \quad n-m+1 \geq 2.$$

Il lettore può esercitarsi a calcolare $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{x^n + 1}$. A tale scopo si usino le formole dell'esercizio 12° a pagina 69, osservando che

$$\log\left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{n} \pi + 1\right) = 2 \log x + \log\left(1 - \frac{2}{x} \cos \frac{2k+1}{n} \pi + \frac{1}{x^2}\right)$$

ed usando le formole note

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z + \operatorname{sen}(z+h) + \operatorname{sen}(z+2h) + \dots + \operatorname{sen}(z+sh) \\ = \frac{\operatorname{sen} \frac{(s+1)h}{2} \operatorname{sen}\left(z + \frac{sh}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos z + \cos(z+h) + \cos(z+2h) + \dots + \cos(z+sh) \\ = \frac{\operatorname{sen} \frac{(s+1)h}{2} \cos\left(z + \frac{sh}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{h}{2}} \end{aligned}$$

e quella che si ottiene da quest'ultima derivandola rapporto ad h , cioè

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}(z+h) - 2 \operatorname{sen}(z+2h) - \dots - s \operatorname{sen}(z+sh) \\ = \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}} \left\{ s \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos \left[z + \left(s + \frac{1}{2}\right) h \right] - \cos\left(z + \frac{sh}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{sh}{2} \right\}; \end{aligned}$$

si trova così, quando m, n sono interi positivi e $m \leq n-1$,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{x^n + 1} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}},$$

e quindi rimane dimostrata la formola

www.libtool.com.cn

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{a-1} dy}{1+y} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi},$$

se a è razionale e $0 < a < 1$, e vedremo in seguito che vale ancora se a è irrazionale e compreso tra 0 e 1.

Dall'ultima formola ricaviamo

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1} dy}{1+y} + \int_1^{\infty} \frac{y^{a-1} dy}{1+y} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi},$$

e cambiando y in $\frac{1}{y}$ nel secondo integrale,

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1} dy}{1+y} - \int_1^0 \frac{y^{-a} dy}{1+y} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$$

cioè

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1} + y^{-a}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

3) La funzione $\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$ (m, n interi positivi) non è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$ perchè nel punto *uno* diviene infinita di primo ordine, ma è integrabile la funzione $\frac{x^{m'-1} - x^{m-1}}{x^n-1}$, dove m e m' sono minori di n , perchè il fattore $x-1$ sparisce nel numeratore e denominatore talchè ha un valore finito nel punto *uno*. Supposto $m' = n - m - 1$, si calcola facilmente l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-m-1} - x^{m-1}}{x^n-1} dx \text{ calcolando prima l'integrale indefinito}$$

$\int \frac{x^{n-m-1} - x^{m-1}}{x^n - 1} dx$ mediante le formole dell'esercizio 12° a pag. 69, e poi passando all'integrale definito come si è indicato precedentemente. Si trova così

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-m-1} - x^{m-1}}{x^n - 1} dx = \frac{2\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{n}, \quad 0 < m \leq n-1.$$

Se in questo integrale poniamo $x^n = y$, ricaviamo

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{m}{n}-1} - y^{-\frac{m}{n}}}{1-y} dy = 2\pi \cot \frac{m\pi}{n},$$

e, posto $\frac{m}{n} = a$ cosicchè a sia una frazione positiva, abbiamo

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{a-1} - y^{-a}}{1-y} dy = 2\pi \cot a\pi;$$

spezzando l'integrale in due, il primo coi limiti 0, 1, il secondo coi limiti 1, ∞ e cambiando in quest'ultimo y in $\frac{1}{y}$, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1} - y^{-a}}{1-y} dy = \pi \cot a\pi,$$

formola che rimane così dimostrata per valori razionali di a compresi tra 0 ed 1, ma che, come vedremo, vale anche qualunque sia a tale che $0 < a < 1$.

4) Si voglia calcolare $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^b x \, dx$, dove $-1 < b < 1$. Po-

nendo $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y$ abbiamo $I = \int_0^{\infty} \frac{y^b dy}{1+y^2}$, e ponendo ancora $y = \sqrt{z}$,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{b}{2} - \frac{1}{2}} dz}{1+z} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{b+1}{2} - 1} dz}{1+z},$$

e, poichè $0 < \frac{b+1}{2} < 1$, avremo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^b x \, dx = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \frac{b+1}{2} \pi}, \quad -1 < b < 1.$$

Ad esempio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} \, dx = \pi.$$

67. Se per i valori di x dell'intervallo (a, b) si ha la formola

$$\int f(x) dx = \varphi(x) + \int \psi(x) dx$$

e quindi

$$\int [f(x) - \psi(x)] dx = \varphi(x),$$

avremo

$$(1) \quad \int_a^b [f(x) - \psi(x)] dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ossia

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a) + \int_a^b \psi(x) dx;$$

cosichè, in particolare, dalla formola della integrazione per parti

$$\int f(x) F'(x) dx = f(x) F(x) - \int F(x) f'(x) dx,$$

che supponiamo abbia luogo nell'intervallo (a, b) , si ricava

$$(2) \quad \int_a^b f(x) F'(x) dx = f(b) F(b) - f(a) F(a) - \int_a^b F(x) f'(x) dx.$$

Se poi le formole (1), o (2) valgono per quanto grande sia b , avremo www.libtool.com.cn

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \varphi(b) - \varphi(a) + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(x) dx,$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) F'(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} f(b) F(b) - f(a) F(a) - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) f'(x) dx,$$

delle quali risulta che, se sono determinati e finiti due dei limiti in una di queste formole, lo è pure il terzo e si ha allora

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \varphi(b) - \varphi(a) + \int_a^\infty \psi(x) dx,$$

$$\int_a^\infty f(x) F'(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} f(b) F(b) - f(a) F(a) - \int_a^\infty F(x) f'(x) dx.$$

ESEMPI

1) Abbiamo la formola (Vedi formola (3) pag. 90)

$$\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m \sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dalla quale, supposto m positivo e quindi $\frac{x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^2}}$ integrabili nell'intervallo $(0,1)$, ricaviamo

$$\int_0^1 \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{m+1} \int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Integrando per parti abbiamo

$$\int \frac{2x \cos x}{1-2x \cos x + x^2} dx = x \log(1-2x \cos x + x^2) - \int \log(1-2x \cos x + x^2) dx$$

o perciò, ricordando i risultati dell'esempio 5° a pag. 27,

www.libtool.com.cn

$$\int_0^{\pi} \frac{2x \operatorname{sen} x}{1 - 2x \cos x + x^2} dx$$

$$= \pi \log(1+x)^2 - \int_0^{\pi} \log(1 - 2x \cos x + x^2) dx = \begin{cases} \pi \log(1+x)^2 & \text{se } |x| < 1 \\ \pi \log\left(\frac{1+x}{\alpha}\right)^2 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

(Vedi nel seguente esercizio 3° i casi $x=1$, $x=-1$).

3) Proviamo ora che sono integrabili nell'intervallo $(0, \infty)$ le funzioni $\operatorname{sen}(x^2)$, $\cos(x^2)$.

Abbiamo, per valori di x finiti e diversi da zero,

$$\int \cos(x^2) dx = \int 2x \cos(x^2) \frac{dx}{2x} = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x} + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} dx,$$

dalla quale

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} dx,$$

cioè, prendendo l'unità come valore di $\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$ nel punto zero,

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} dx,$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \cos(x^2) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} dx,$$

e, poichè $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0$ e $\frac{\sin x^2}{x^2}$ è integrabile in $(0, \infty)$ essendo $x^2 \frac{|\sin x^2|}{x^2} \leq 1$, abbiamo

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx.$$

Per riconoscere che anche $\sin(x^2)$ è integrabile nello stesso intervallo osserviamo che si ha

$$\int \sin(x^2) dx = -\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx,$$

per valori finiti di x e diversi da zero; ma qui non possiamo procedere come nel caso precedente, perchè $\frac{\cos(x^2)}{x^2}$ non è integrabile in un intervallo cui appartenga il punto zero, e $\frac{\cos(x^2)}{x}$ ha per limite l'infinito al diminuire di x . Ma ci serviremo di questa formola per provare che l'integrale singolare per la funzione $\sin(x^2)$ ha per limite zero.

Invero abbiamo

$$\int_{\gamma}^{\gamma+\epsilon} \sin(x^2) dx = -\frac{\cos[(\gamma+\epsilon)^2]}{2(\gamma+\epsilon)} + \frac{\cos(\gamma^2)}{2\gamma} - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\gamma+\epsilon} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx$$

e quindi

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\gamma}^{\gamma+\epsilon} \sin(x^2) dx = 0,$$

qualunque sia ϵ , e la funzione $\sin(x^2)$ è integrabile nell'intervallo (a, ∞) , ed in particolare nell'intervallo $(0, \infty)$.

1. Se m è intero maggiore dell'unità, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m} \frac{\pi}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots m} & \text{se } m \text{ è dispari.} \end{cases}$$

2. Posto $I_m = \int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ed osservando che

$$\frac{\pi}{2} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1))^2} \frac{1}{2n+1},$$

si dimostri la formola di Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{(3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1))^2} \frac{1}{2n+1} \right\}.$$

3. Conosciamo già il valore di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1-2x \cos \alpha + x^2) dx$ per α diverso da ± 1 ; si studino questi casi $\alpha=1$, $\alpha=-1$, e si troverà zero per valore dell'integrale.

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx = \frac{\pi}{2} \log 2.$$

$$5. \text{Studio dell'integrale } I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Se $4ac - b^2 > 0$ è $I = \frac{\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}$ se $a > 0$, $I = \frac{-\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}$ se $a < 0$. Se $4ac - b^2 = 0$ è $I = \frac{2}{b}$ se a, b hanno lo stesso segno, e se hanno segno diverso $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ non è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$.

Se $4ac - b^2 < 0$, ed a, b, c hanno lo stesso segno è

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

e, se a, b, c non hanno tutte lo stesso segno, la funzione $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ non è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$.

6. Se $f(x)$ è finita e integrabile in (a, b) comunque grande sia b e $\varphi(x)$ è integrabile in (a, ∞) e non cambia segno da un certo valore di x in poi, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è integrabile in (a, ∞) .

7. Per le precedenti funzioni $f(x), \varphi(x)$ si ha $\int_a^\infty f(x)\varphi(x) dx = k \int_a^\infty \tilde{\varphi}(x) dx$, $m \leq k \leq M$, essendo m, M i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo (a, ∞) (primo teorema della media).

8. Se la funzione $f(x, y)$ è simmetrica rispetto ad x, y , e la $f\left(x, \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}$ è integrabile nell'intervallo $(0, 1)$, si ha

$$\int_0^\infty f\left(x, \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = 2 \int_0^1 f\left(x, \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

9. Se $f\left(ax + \frac{b}{x}\right)$, dove a, b sono positivi, è integrabile in $(0, \infty)$, si ha

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2a} \int_{\sqrt[2]{ab}}^{\sqrt[2]{ab}} f(y) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right] dy + \frac{1}{2a} \int_{\sqrt[2]{ab}}^{\infty} f(y) \left[1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right] dy \\
 &= \frac{1}{a} \int_{\sqrt[2]{ab}}^{\infty} f(x) \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4ab}} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx;
 \end{aligned}$$

e se $f\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)$ è integrabile in $(0, \infty)$,

$$\int_0^{\infty} f\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(x^2 + 2ab) dx.$$

10. Dalla formola $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}$, dove m, n sono

interi positivi e $m \leq n-1$, si ricavi

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{(1-x)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}.$$

Integrazione per serie

68. Se i termini u_n d'una serie $\sum_1^{\infty} u_n$ sono funzioni finite di x ed integrabili in un intervallo (a, b) , e in tutto questo intervallo la serie è uniformemente convergente, la sua somma $f(x)$ è integrabile in (a, b) , e la serie degli integrali $\sum_1^{\infty} \int_a^b u_n dx$

è convergente ed ha per somma l'integrale della serie,
 $\int_a^b f(x) dx$, cioè www.libtool.com.cn

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_1^{\infty} u_n \right) dx = \sum_1^{\infty} \int_a^b u_n dx;$$

ossia, come suol dirsi, alla nostra serie è applicabile l'integrazione termine a termine o alla funzione $f(x)$, il cui sviluppo in serie è $\sum_1^{\infty} u_n$, la integrazione per serie.

Invero, assegnato il numero positivo σ_1 , scriviamo

$$(1) \quad f(x) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + R_n(x),$$

dove $n \leq m$, essendo m quel numero tale che, per $n \geq m$ e per tutti i valori di x dell'intervallo (a, b) , inclusi gli estremi, è $|R_n(x)| < \sigma_1$.

Scomponiamo l'intervallo (a, b) , ($a < b$), in parti $h_1, h_2, \dots, h_p$ ed indicate con $D_{1s}, D_{2s}, \dots, D_{ns}, D_{ps}, D_{ps}$ le oscillazioni di $u_1, u_2, \dots, u_n, f(x), R(x)$ in h_s , avremo

$$D_{ps} \leq D_{1s} + D_{2s} + \dots + D_{ns} + D_{ns}, \quad (s = 1, 2, \dots, p),$$

dalle quali, osservando che $D_{ns} < 2\sigma_1$ perchè in tutto (a, b) è $|R_n(x)| < \sigma_1$, abbiamo

$$\sum_1^p h_s D_{ps} \leq \sum_1^p h_s D_{1s} + \sum_1^p h_s D_{2s} + \dots + \sum_1^p h_s D_{ns} + (b-a) 2\sigma_1;$$

e, giacchè possiamo supporre la decomposizione di (a, b) nelle parti h_s tale che ciascuna delle somme del secondo membro risulti minore di $\frac{\sigma_1}{n}$ essendo le $u_1, u_2, \dots$ integrabili in (a, b) , avremo ancora

$$\sum_1^p h_s D_{ps} < \sigma_1 [1 + 2(b-a)].$$

In conseguenza, assegnato σ , e preso nelle formole prece-

denti $\sigma_1 = \frac{\sigma}{1+2(b-a)}$, risulta esistere una scomposizione di (a, b) in parti h_s , per la quale è $\sum_1^p h_s D_{f,s} < \sigma$, e quindi la $f(x)$ è integrabile in (a, b) , e rimane così dimostrata una parte del teorema.

Ciò dimostrato, siamo autorizzati a ricavare dalla (1) la formola

$$\int_a^b R_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \sum_{r=1}^{r=n} \int_a^b u_r dx.$$

Ma, essendo $|R_n(x)| < \sigma_1$ per $n \geq m$ e per tutti i punti x di (a, b) , è ancora

$$\left| \int_a^b R_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_n(x)| dx < \sigma_1 \int_a^b dx = \sigma_1(b-a),$$

cosicchè

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{r=1}^{r=n} \int_a^b u_r dx \right| < \sigma_1(b-a),$$

e quindi, dato σ e posto $\sigma_1 = \frac{\sigma}{b-a}$, esiste un numero m tale che per $n \geq m$ è

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{r=1}^{r=n} \int_a^b u_r dx \right| < \sigma,$$

la quale ci dice che $\int_a^b f(x) dx$ è il limite, per n crescente indefinitamente, della somma dei primi n termini della serie $\sum_1^{\infty} \int_a^b u_r dx$, e rimane così dimostrato completamente il teorema.

69. Se sono soddisfatte le condizioni dell'enunciato del teorema ora dimostrato, avremo ancora

www.libtool.com.cn

$$\int_a^x f(x) dx = \sum_1^{\infty} \int_a^x u_n dx,$$

ove x è un punto qualunque dell'intervallo (a, b) , giacchè basta ripetere per l'intervallo (a, x) la dimostrazione precedente relativa all'intervallo (a, b) .

Di più osserviamo che, qualunque sia il punto x appartenente ad (a, b) , arriveremo sempre mediante il precedente procedimento alla formola

$$\left| \int_a^x f(y) dy - \sum_{r=1}^n \int_a^x u_r dy \right| < \sigma,$$

valevole qualunque sia x appartenente all'intervallo (a, b) e per $n \geq m$, dalla quale formola, osservando che la differenza nel primo membro è il resto della serie $\sum_1^{\infty} \int_a^x u_r dy$, ricaviamo che *questa serie è uniformemente convergente nell'intervallo (a, b) .*

70. In seguito al teorema ora dimostrato, possiamo applicare ad una serie, che soddisfaccia in un intervallo (a, b) alle condizioni contenute nel suo enunciato, l'integrazione definita termine a termine tra limiti appartenenti al detto intervallo. Quando essa non soddisfaccia a tali condizioni, potrebbe anche essere che la integrazione termine a termine sia per essa effettuabile, ma noi non siamo autorizzati senz'altro ad eseguirla; occorrerebbe allora riconoscerne in qualche altro modo la legittimità.

ESEMPIO. Consideriamo la serie

$$\sum_1^{\infty} [nxe^{-nx^2} - (n+1)xe^{-(n+1)x^2}],$$

convergente per qualunque valore finito di x , avendo essa per

somma xe^{-x^2} . Essa è inoltre uniformemente convergente in qualunque intervallo cui non appartenga il punto zero, perchè esisteranno allora due numeri a, A tali che per gli x dell'intervallo sia $a < |x| < A$, ed essendo $\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x^2}}$ il resto della serie e

$$\left| \frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x^2}} \right| < \frac{(n+1)A}{e^{(n+1)a^2}} < \frac{(n+1)A}{(n+1)a^2 + \frac{(n+1)^2}{2}a^4} = \frac{2A}{2a^2 + (n+1)a^4}$$

basterà prendere m in modo che sia $\frac{2A}{2a^2 + (m+1)a^4} < \sigma$, af-

finchè risulti $\left| \frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x^2}} \right| < \sigma$ per $n \geq m$ e qualunque sia il valore di x appartenente all'intervallo. Ma se il punto zero appartiene all'intervallo non esiste un numero a pel quale sia $a < |x|$, ma invece potremo prendere $x = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$, per quanto grande sia n , e per questo valore di x il resto diviene uguale a $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$.

Potremo quindi applicare alla nostra serie l'integrazione termine a termine in qualunque intervallo cui non appartenga il punto zero, ed abbiamo infatti, supposto $a > 0$ e $x > a$,

$$\begin{aligned} \int_a^x xe^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-a^2} = \sum_1^\infty \left[\int_a^x nxe^{-nx^2} dx - \int_a^x (n+1)xe^{-(n+1)x^2} dx \right] \\ &= \sum_1^\infty \left[-\frac{1}{2} e^{-nx^2} + \frac{1}{2} e^{-na^2} + \frac{1}{2} e^{-(n+1)x^2} - \frac{1}{2} e^{-(n+1)a^2} \right]. \end{aligned}$$

In un intervallo cui appartenga il punto zero non possiamo senz'altra ricerca applicare l'integrazione termine a termine.

Noi riscontriamo qui che in un intervallo $(0, x)$ tale procedimento non è lecito, perchè l'integrale della serie è

$$\int_0^x x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2},$$

mentre che la serie degli integrali dei termini è

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-nx^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(n+1)x^2} - \frac{1}{2} \right] \\ = \sum_1^{\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-nx^2} + \frac{1}{2} e^{-(n+1)x^2} \right] = -\frac{1}{2} e^{-x^2}; \end{aligned}$$

invece è lecito in un intervallo $(-a, x > 0)$, perchè

$$\int_{-a}^x x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-a^2},$$

che è uguale alla serie degli integrali dei termini,

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-nx^2} + \frac{1}{2} e^{-na^2} + \frac{1}{2} e^{-(n+1)x^2} - \frac{1}{2} e^{-(n+1)a^2} \right] \\ = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-a^2}. \end{aligned}$$

71. Se ad una serie $\sum_1^{\infty} u_n$ si può applicare l'integrazione termine a termine in un intervallo $(a, b - \varepsilon)$, dove $a < b$ e ε positivo e comunque piccolo, si potrà anche applicare tale integrazione nell'intervallo (a, b) , avendosi così

$$(1) \quad \int_a^b \left(\sum_1^{\infty} u_n \right) dx = \sum_1^{\infty} \int_a^b u_n dx,$$

quando la serie $\sum_1^{\infty} \int_a^x u_n dx$, mantenendosi convergente per $x = b$,

sia una funzione $\varphi(x)$ continua anche per $x=b$. Ciò accadrà, in particolare, quando detta serie risulti uniformemente convergente in un intorno del punto b (Vedi I. n. 139, pag. 337).

Invero, avremo

$$\begin{aligned}\int_a^{b-\varepsilon} (\sum_1^{\infty} u_n) dx &= \sum_1^{\infty} \int_a^{b-\varepsilon} u_n dx = \sum_1^{\infty} \int_a^b u_n dx - \left(\sum_1^{\infty} \int_a^b u_n dx - \sum_1^{\infty} \int_a^{b-\varepsilon} u_n dx \right) \\ &= \sum_1^{\infty} \int_a^b u_n dx - [\varphi(b) - \varphi(b-\varepsilon)],\end{aligned}$$

dalla quale, passando al limite per ε convergente a zero, abbiamo la (1).

E si intende subito come la formola (1) valga ancora se nell'intervallo (a, b) vi sieno dei punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, in numero finito, tali che negli intervalli $(\alpha_s + \varepsilon_s, \alpha_s)$, $(\alpha_s, \alpha_{s+1} - \varepsilon_{s+1})$, dove α_s indica un punto qualunque tra α_s e α_{s+1} , sussistono le stesse condizioni che abbiamo poste per il precedente intervallo $(a, b - \varepsilon)$.

In modo analogo si prova che, se alla serie $\sum_1^{\infty} u_n$ può applicarsi l'integrazione termine a termine in un intervallo (a, b) comunque grande si fissi b , ad essa potremo applicare la stessa integrazione nell'intervallo (a, ∞) , avendo così

$$(2) \quad \int_a^{\infty} (\sum_1^{\infty} u_n) dx = \sum_1^{\infty} \int_a^{\infty} u_n dx,$$

quando, posto $\psi(x) = \sum_1^{\infty} \int_a^x u_n dv$, sia $\sum_1^{\infty} \int_a^{\infty} u_n dx = A$, dove $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x)$ è quantità finita determinata.

Invero, passando al limite per x crescente indefinitamente nella formola

$$\begin{aligned}
 \int_a^{\infty} \left(\sum_1^{\infty} u_n \right) dx &= \sum_1^{\infty} \int_a^{\infty} u_n dx = \sum_1^{\infty} \int_a^{\infty} u_n dx - \left(\sum_1^{\infty} \int_a^{\infty} u_n dx - \sum_1^{\infty} \int_a^{\infty} u_n dx \right) \\
 &= \sum_1^{\infty} \int_a^{\infty} u_n dx - (A - \psi(x)),
 \end{aligned}$$

ricaviamo la (2).

72. La integrazione per serie è un mezzo utilissimo tanto pel calcolo degli integrali definiti e indefiniti, come anche per calcolare la somma di certe serie. Diamone alcuni

ESEMPI

1) Per $|x| < 1$ abbiamo (Vol. I, pag. 380)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x dx \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^8 + \dots \right)$$

e poichè la serie tra parentesi è uniformemente convergente nell'intervallo $(0, x)$ (I, n. 137, pag. 330), possiamo eseguire la integrazione termine a termine ed otterremo così

$$(1) \quad \text{arc sen } x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots, (|x| < 1)$$

(I, pag. 383). Ora possiamo affermare di più che questo sviluppo vale anche per $|x| = 1$. Invero la serie

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{1}{7} + \dots$$

è convergente, perchè i suoi termini sono minori dei corrispondenti della serie convergente

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \dots,$$

che ricaviamo dall'ultima serie della pag. 380 del volume I, facendo in essa $x = -1$. In conseguenza la serie (1) è uniformemente convergente nell'intervallo $(-1, +1)$, e quindi lo sviluppo (1) vale anche per $x = \pm 1$. Ponendo $x = 1$, abbiamo

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{1}{7} + \dots$$

2) Per $|x| < 1$ abbiamo

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^x dx \left(1 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1.3}{2.4} x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^{12} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} x^{4n} + \dots \right),$$

e, poichè possiamo integrare termine a termine, abbiamo

$$(3) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \dots$$

se $|x| < 1$. Ma la serie del secondo membro è convergente anche per $|x| = 1$, perchè, facendovi $x = 1$, otteniamo una serie i cui termini sono minori dei corrispondenti della serie convergente (2); quindi vediamo anche qui che il precedente sviluppo vale anche per $|x| = 1$.

In quanto all'integrale indefinito, lo si ottiene dal secondo membro della (3) aggiungendovi una costante, cosichè si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^9}{9} + \dots + C,$$

valevole nell'intervallo $(-1, +1)$ di x .

3) Supposto $0 < a < 1$, $0 < x < 1$, abbiamo

$$(4) \quad \int_0^x \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx = \int_0^x dx (x^{a-1} - x^{-a}) (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

$$= \frac{x^a}{a} - \frac{x^{-a+1}}{-a+1} + \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{x^{-a+2}}{-a+2} + \frac{x^{a+2}}{a+2} - \frac{x^{-a+3}}{-a+3} \\ + \frac{x^{a+3}}{a+3} - \dots$$

Ora quest'ultima serie è non solo convergente anche per $x=1$, ma è anche uniformemente convergente nell'intervallo $(0, 1)$. Invero, se $a < \frac{1}{2}$, poichè allora

$$a < 1-a < 1+a < 2-a < 2+a < 3-a < \dots,$$

i suoi termini sono alternativamente positivi e negativi e indefinitamente decrescenti, anche per $x=1$, ciò che prova che la serie è convergente anche per $x=1$. Inoltre, indicato con R_m il resto della serie troncata al termine m^{esimo} , abbiamo

$$R_{2n} = \left(\frac{x^{n+a}}{n+a} - \frac{x^{n+1-a}}{n+1-a} \right) + \left(\frac{x^{n+1+a}}{n+1+a} - \frac{x^{n+2-a}}{n+2-a} \right) + \dots \\ = \frac{x^{n+a}}{n+a} - \left(\frac{x^{n+1-a}}{n+1-a} - \frac{x^{n+1+a}}{n+1+a} \right) - \dots, \\ -R_{2n-1} = \left(\frac{x^{n-a}}{n-a} - \frac{x^{n+a}}{n+a} \right) + \left(\frac{x^{n+1-a}}{n+1-a} - \frac{x^{n+1+a}}{n+1+a} \right) + \dots \\ = \frac{x^{n-a}}{n-a} - \left(\frac{x^{n+a}}{n+a} - \frac{x^{n+1-a}}{n+1-a} \right) - \left(\frac{x^{n+1+a}}{n+1+a} - \frac{x^{n+2-a}}{n+2-a} \right) - \dots,$$

cosichè $0 < R_{2n} < \frac{x^{n+a}}{n+a} < \frac{1}{n+a}$, $0 < -R_{2n-1} < \frac{x^{n-a}}{n-a} < \frac{1}{n-a}$, e tanto R_{2n} come $|R_{2n-1}|$ sono minori di $\frac{1}{n-a}$; perciò, dato σ , basterà prendere $m > \frac{1}{\sigma} + a$, affinchè, per $n \geq m$ e per tutti i

valori di x dell'intervallo $(0, 1)$, inclusi gli estremi, R_{2n} e $|R_{2n-1}|$ risultino minori di σ , e la serie è quindi uniformemente convergente nell'intervallo $(0, 1)$.

Se $a = \frac{1}{2}$ la nostra serie è uguale a zero.

Se $a > \frac{1}{2}$, allora è

$$1-a < a < 2-a < 1+a < 3-a < 2+a < 4-a < \dots;$$

ma la nostra serie possiamo anche scriverla così

$$-\frac{x^{1-a}}{1-a} + \frac{x^a}{a} - \frac{x^{2-a}}{2-a} + \frac{x^{1+a}}{1+a} - \frac{x^{3-a}}{3-a} + \frac{x^{2+a}}{2+a} - \dots,$$

perchè essa non viene con ciò a cambiare di natura e di valore, poichè le somme di uno stesso numero pari di termini a cominciare dal primo sono le stesse nelle due serie, e le somme di uno stesso numero dispari n di termini differiscono tra loro per la somma di due termini che hanno ciascuno per limite zero al crescere indefinitamente di n . Ora nella serie così scritta i termini sono alternativamente positivi e negativi e indefinitamente decrescenti, cosichè, con ragionamento analogo al precedente, giungeremo alla stessa conclusione.

La nostra serie, essendo dunque uniformemente convergente nell'intervallo $(0, 1)$, passando al limite per $x=1$ nella formula (4), possiamo prendere la serie dei limiti dei termini in luogo del limite della serie ed abbiamo così

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a} - \dots, 0 < a < 1.$$

Ma, d'altra parte, l'integrale del primo membro essendo uguale a $\pi \cot a\pi$ (n. 66,3)), otteniamo la formola notevole

$$\cot a\pi = \frac{1}{a\pi} - \frac{1}{\pi - a\pi} + \frac{1}{\pi + a\pi} - \frac{1}{2\pi - a\pi} + \frac{1}{2\pi + a\pi} - \dots, 0 < a < 1,$$

ossia, ponendo $a\pi = x$,

$$(5) \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{3\pi - x} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{2^2\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{3^2\pi^2 - x^2} + \dots,$$

che noi abbiamo così dimostrata per $0 < x < \pi$. Ma è facile riconoscere che vale per qualunque valore di x che non sia multiplo di π . Invero tanto il primo membro che il secondo hanno π per periodo, giacchè, se in luogo di x poniamo $x + \pi$, il primo membro non cambia, e neppure il secondo, perchè otteniamo una serie dalla quale, aggruppando i termini a due a due e permutandoli in ciascun gruppo e nella serie così ottenuta aggruppando i termini a due a due a partire dal secondo e permutandoli in ciascun gruppo, si ritorna alla serie primitiva. Cambiando x in $x - \pi$ non cambia il primo membro e la serie del secondo membro diviene una serie, dalla quale, operando nel modo precedente a partire dal secondo termine e nella serie ottenuta operando allo stesso modo a partire dal primo, si ritorna alla serie primitiva.

Se nella (5) cambiamo x in $\frac{\pi}{2} - x$ otteniamo

$$(6) \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + x}$$

$$+ \frac{1}{5\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{5\frac{\pi}{2} + x} + \dots$$

che vale per tutti i valori di x non multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$.

Osservando che $\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$ ed applican-

do le formole (5), (6), otteniamo

www.libtool.com.cn

$$(7) \quad \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} \\ + \frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x} - \frac{1}{4\pi - x} + \dots \\ = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n\pi - x} - \frac{1}{n\pi + x} \right),$$

valevole per tutti i valori di x non multipli di π ; e cambiando in essa x in $\frac{\pi}{2} - x$ si ottiene

$$(8) \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} + x} \right]$$

valevole pei valori di x non multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$.

Dalla formola (5) ricaviamo

$$\int_0^x \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^x dx \left(-\frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \dots \right)$$

essendo $x < \pi$. Nel secondo membro possiamo integrare termine a termine, perchè la serie

$$-\frac{1}{\pi - y} + \frac{1}{\pi + y} - \frac{1}{2\pi - y} + \frac{1}{2\pi + y} - \dots$$

è uniformemente convergente nell'intervallo $(0, x)$, giacchè lo è nei due intervalli $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, c\right)$, essendo $c < \pi$. In-

vero nel primo intervallo troviamo, con ragionamento analogo a quello sopra tenuto,

$$0 < R_{2n-1} < \frac{1}{n\pi + y} < \frac{1}{n\pi}, \quad 0 < -R_{2n-2} < \frac{1}{n\pi - y} < \frac{1}{(n-1)\pi},$$

e nel secondo intervallo, partendoci dalla serie che otteniamo dalla proposta lasciando fermo il primo termine e aggruppando i seguenti a due a due e permutandoli in ciascun gruppo, troviamo

$$0 < R_{2n} < \frac{1}{n\pi + y} < \frac{1}{n\pi}, \quad 0 < -R_{2n-1} < \frac{1}{(n+1)\pi - y} < \frac{1}{n\pi},$$

quindi etc.

Avremo adunque

$$\begin{aligned} (9) \quad \log \frac{\sin x}{x} &= \log \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} + \log \frac{2^2 \pi^2 - x^2}{2^2 \pi^2} + \log \frac{3^2 \pi^2 - x^2}{3^2 \pi^2} + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} \cdot \frac{2^2 \pi^2 - x^2}{2^2 \pi^2} \cdot \frac{3^2 \pi^2 - x^2}{3^2 \pi^2} \dots \frac{n^2 \pi^2 - x^2}{n^2 \pi^2} \right\} \\ &= \log \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} \cdot \frac{2^2 \pi^2 - x^2}{2^2 \pi^2} \cdot \frac{3^2 \pi^2 - x^2}{3^2 \pi^2} \dots \frac{n^2 \pi^2 - x^2}{n^2 \pi^2} \right\}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ x \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} \frac{2^2 \pi^2 - x^2}{2^2 \pi^2} \dots \frac{n^2 \pi^2 - x^2}{n^2 \pi^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2} \right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

o, come suole scriversi, in forma di *prodotto infinito*,

$$(10) \quad \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4^2 \pi^2} \right) \dots$$

formola che rimane così dimostrata per $0 < x < \pi$, ma che si

vede vale per $x=0$ e $x=\pi$. E vale anche per qualunque altro valore di x ; basterebbe, per dimostrare ad esempio che vale anche nell'intervallo $(0, c)$, $c < 2\pi$, partirci dalla formola

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} = \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \dots,$$

che si ricava dalla (5), e, osservando che il primo membro è integrabile nell'intervallo $(0, c)$, integrare tra 0 e $x < \pi$. Si giungerebbe così alla formola (9), da cui si è ricavata la (10), che possiamo così ritenere dimostrata per qualunque valore finito di x .

Operando in modo analogo sulla formola (6) troviamo

$$(11) \quad \cos x = \left(1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 x^2}{3^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 x^2}{5^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 x^2}{7^2 \pi^2}\right) \dots$$

valevole per qualunque valore finito di x .

Ponendo mente alle identità

$$\begin{aligned} u_0 u_1 &= u_0 + u_0(u_1 - 1), \quad u_0 u_1 u_2 = u_0 + u_0(u_1 - 1) + u_0 u_1(u_2 - 1), \dots \\ u_0 u_1 u_2 \dots u_n &= u_0 + u_0(u_1 - 1) + u_0 u_1(u_2 - 1) + u_0 u_1 u_2(u_3 - 1) + \dots \\ &\quad + u_0 u_1 \dots u_{n-1}(u_n - 1), \end{aligned}$$

abbiamo dalla (11), posto $u_0 = 1$, $u_k = 1 - \frac{2^2 x^2}{(2k-1)^2 \pi^2}$,

$$\begin{aligned} \cos x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 x^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{2^2 x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2} - \frac{2^2 x^2 (\pi^2 - 2^2 x^2)}{\pi^2 \cdot 3^2 \pi^2} - \frac{2^2 x^2 (\pi^2 - 2^2 x^2) (3^2 \pi^2 - 2^2 x^2)}{\pi^2 \cdot 3^2 \pi^2 \cdot 5^2 \pi^2} \right. \\ &\quad \left. - \dots - \frac{2^2 x^2 (\pi^2 - 2^2 x^2) (3^2 \pi^2 - 2^2 x^2) \dots [(2n-3)^2 \pi^2 - 2^2 x^2]}{\pi^2 \cdot 3^2 \pi^2 \cdot 5^2 \pi^2 \dots (2n-1)^2 \pi^2} \right\} \end{aligned}$$

ossia

$$\cos x = 1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^2 x^2 (\pi^2 - 2^2 x^2) (3^2 \pi^2 - 2^2 x^2) \dots [(2n-3)^2 \pi^2 - 2^2 x^2]}{\pi^2 \cdot 3^2 \pi^2 \cdot 5^2 \pi^2 \dots (2n-1)^2 \pi^2}$$

valevole per qualunque valore finito di x ; ponendo $x = \frac{\pi y}{2}$

e per $\cos \frac{\pi y}{2}$ l'espressione $1 - 2 \left(\sin \frac{\pi y}{4} \right)^2$, abbiamo ancora

$$2 \left(\sin \frac{\pi y}{4} \right)^2 = y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^2 (1^2 - y^2) (3^2 - y^2) \dots [(2n-3)^2 - y^2]}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2}$$

da cui

$$2 \left(\frac{\sin \frac{\pi y}{4}}{y} \right)^2 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1^2 - y^2) (3^2 - y^2) \dots [(2n-3)^2 - y^2]}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}.$$

La serie del secondo membro è uniformemente convergente in un intorno del punto $y=0$, perchè i suoi termini sono ivi positivi e minori dei corrispondenti della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, che è convergente perchè i suoi termini sono minori dei corrispondenti della serie convergente

$$\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

Passando al limite per $y=0$ nella formola precedente possiamo dunque prendere, in luogo del limite della serie, la serie dei limiti dei termini, ed otteniamo così la formola notevole

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

4) Se $0 < x < 1$ abbiamo

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{1-x^2} = \int_0^{\infty} \log x dx (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots),$$

e, poichè $\int_0^x x^n \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$

otteniamo

$$\int_0^x \frac{\log x dx}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \log x - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right].$$

Ora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ è convergente se $|x| < 1$ ed è uguale a $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ (I, pag 371), e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ è pure convergente per $|x| \leq 1$, perchè per $|x| < 1$ il rapporto d'un termine al precedente ha per limite x^2 al crescere di n , e per $|x| = 1$ si riduce alla serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, e vediamo anche così che, per essere i termini di questa maggiori dei corrispondenti della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ per $|x| < 1$, questa ultima è uniformemente convergente nell'intervallo $(0, 1)$. Potremo adunque, non solo scrivere

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\log x dx}{1-x^2} &= \log x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \log x \log \frac{1+x}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

ma, passando al limite per x convergente all'unità, ottenere

$$\int_0^1 \frac{\log x dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\log x \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)} \right] - \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} [\log x \log(1-x)] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

5) Volendosi calcolare $\int_0^y \frac{x^m dx}{e^x - 1}$, dove m è intero positivo

(riconosciamo subito che $\frac{x^m}{e^x - 1}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$), osserviamo che si ha

$$\int_x^y \frac{x^m dx}{e^x - 1} = \int_x^y \frac{e^{-x} x^m dx}{1 - e^{-x}} = \int_x^y x^m (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) dx$$

$$= \int_x^y \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^m e^{-nx} \right) dx$$

se $x > 0$ e $y > x$, e, poichè possiamo integrare termine a termine e ricordando la formola dimostrata nel n. 21 a pag. 43, abbiamo

$$\int_x^y \frac{x^m dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-ny}}{-n} \left[y^m + \frac{m}{n} y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2} y^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1) \dots 2 \cdot 1}{n^m} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-nx}}{n} \left[x^m + \frac{m}{n} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2} x^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1) \dots 2 \cdot 1}{n^m} \right] \right\}$$

che possiamo anche, giacchè le singole serie sono convergenti, scrivere così

$$(12) \int_x^y \frac{x^m dx}{e^x - 1} = -y^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n} - m y^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n^2} - \dots - m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n^{m+1}}$$

$$+ x^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} + m x^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2} + \dots + m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^{m+1}}.$$

Osserviamo ora che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n}$ è uniformemente convergente nell'intervallo (a, ∞) , $a > 0$, perchè è convergente la serie a termini non minori $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-na}}{n}$; che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, ... sono convergenti, e quindi uniformemente convergenti nell'intervallo $(0, \infty)$ le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^3}$, ...; che $\lim_{y \rightarrow \infty} y^p e^{-ny} = 0$; che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = -\log(1 - e^{-x})$ per $x > 0$, e che $\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \log(1 - e^{-x}) = 0$. Per queste osservazioni si vedrà subito come, passando al limite nella (12) per y crescente indefinitamente e poi passando ancora al limite per x convergente a zero, potremo sempre prendere la serie dei limiti dei termini in luogo del limite di ogni serie ed ottenere così

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m dx}{e^x - 1} = 1.2 \dots m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m+1}}.$$

6) Pel calcolo di alcuni integrali con limite infinito giova alcuna volta procedere in modo analogo al seguente:

Si voglia conoscere se $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile nell'intervallo

$(0, \infty)$, e, ove lo sia, calcolare $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Abbiamo

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{n\pi}^{n\pi+\alpha} \frac{\sin x}{x} dx,$$

dove $b = n\pi + \alpha$, $\alpha < \pi$.

Si riconosce subito che il primo termine del secondo membro è positivo e gli altri alternativamente negativi e positivi e

decrecenti continuamente e indefinitamente in valore assoluto, perchè, posto $x = y + \pi$, abbiamo

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen}(y+\pi)}{y+\pi} dy = - \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{y+\pi} dy,$$

e quindi

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| < \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy \right|;$$

ed inoltre, essendo

$$\left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| < \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{dx}{x} = \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right),$$

$$\left| \int_{n\pi}^{n\pi+\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| < \log \left(1 + \frac{\alpha}{n\pi} \right),$$

$$\text{è ancora } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n\pi}^{n\pi+\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = 0.$$

Cosichè la serie $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots$ essendo convergente perchè i suoi termini sono di segno alternato etc, la somma dei suoi primi n termini ha un limite finito e determinato, ed avremo

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right\},$$

e riconosciamo così la integrabilità di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ nell'intervallo $(0, \infty)$.

Per calcolare il valore $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, scriviamo così:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} + \dots + \int_{(m-1)\frac{\pi}{2}}^{\frac{m\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \right\}$$

ed osserviamo che, posto $x = k\pi - y$, è

$$\int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{2k\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^{k+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{k\pi - y} dy;$$

e, posto $x = k\pi + y$, è $\int_{2k\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{k\pi + y} dy$, così che

avremo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{\pi - y} dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{\pi + y} dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{2\pi - y} dy + \dots \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{\pi - y} - \frac{1}{\pi + y} - \frac{1}{2\pi - y} + \dots \right] dy \right\}; \end{aligned}$$

ma il limite della quantità tra parentesi sotto il segno integrale è $\frac{1}{\sin y}$ (Vedi formola (7)), quindi, potendosi prendere l'integrale del limite in luogo del limite dell'integrale giacché la serie $\frac{1}{y} + \frac{1}{\pi - y} - \dots$ è uniformemente convergente nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avremo in ultimo

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{\sin y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Da questa formola ricaviamo il valore di $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } ax}{x} dx$.

Posto $ax = y$, se $a > 0$, abbiamo $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } ax}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$;

e se $a < 0$, $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } ax}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } y}{y} dy = - \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } y_1}{y_1} dy_1 = -\frac{\pi}{2}$;

cosichè

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{, } a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{, } a < 0, \end{cases}$$

Questo integrale ci dà un esempio di una funzione della quantità a , che per a positivo ha un valore costante, per a negativo un altro valore costante ed ha così una discontinuità di prima specie per $a=0$, dove prende il valore medio dei valori che assume per a positivo e per a negativo.

ESERCIZI

$$1. \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \text{ se } 0 < x < 1,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{1}{4n+1},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{x}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{1}{(4n+1)x^{4n+1}} \text{ se } x > 1.$$

$$2. \int_0^1 \log \left(\frac{1+x}{x} \right) dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{1+k \operatorname{sen} x}{1-k \operatorname{sen} x} \right) \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \pi \operatorname{arc} \operatorname{sen} k, \quad |k| \leq 1.$$

$$4. \int_0^{\pi} \log (1+k \cos x) \frac{dx}{\cos x} = \pi \operatorname{arc} \operatorname{sen} k, \quad |k| \leq 1.$$

$$5. \text{Posto } I = \int_0^1 \frac{x \log x \, dx}{1-x^2} \text{ si trovi la relazione } -\frac{\pi^2}{8} + I = 4I,$$

da cui $I = -\frac{\pi^2}{24}$, e se ne ricavi

$$\int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1-x} = -\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1+x} = -\frac{\pi^2}{12}$$

e le formole

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

$$6. \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{1+\cos^2 x} = \pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$7. \int_0^1 \frac{x^{a-1} dx}{1+x^b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b} - \dots,$$

$$a > 0, b > 0, a \leq b;$$

ad esempio si ha

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+3n}, \quad \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2+3n},$$

$$\frac{\pi + \log(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+4n}, \quad \frac{\pi - \log(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3+4n}.$$

$$8. \int_0^{\pi} e^{\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi) d\varphi = \pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \frac{\rho^{2n+1}}{2n+1}$$

(Vol. I, pag. 382).

9. Se n è intero positivo, si ha

$$\int_0^{\pi} e^{\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

$$\int_0^{\pi} e^{\rho \cos \varphi} \sin(\rho \sin \varphi) \sin n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^n}{1 \cdot 2 \dots n}$$

(Dimostrare e servirsi delle formole $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0,$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \text{ se } m, n \text{ interi positivi sono diversi;}$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \text{ anche se } m = n, \text{ e}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 mx dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$10. \int_0^1 \frac{\sin(a \log x)}{\log x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{a^{2n+1}}{2n+1} - \frac{a^{2n+1}}{2n+1} y [(\log y)^{2n} - 2n(\log y)^{2n-1} + 2n(2n-1)(\log y)^{2n-2} - \dots + 2n(2n-1) \dots 2.1] \right\}$$

qualunque sia a ; e, se $-1 \leq a \leq 1$,

$$\int_0^1 \frac{\sin(a \log x)}{\log x} dx = \arcsin a.$$

$$11. \int_0^1 \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\log x} dx = \log \frac{1+\alpha}{1+\beta}, \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1.$$

12. Posto $S_n = 1 + \alpha \cos x + \alpha^2 \cos 2x + \alpha^3 \cos 3x + \dots + \alpha^{n-1} \cos(n-1)x$ e avuto riguardo alla formola $2 \cos kx \cos x = \cos(k-1)x + \cos(k+1)x$, si trova $(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) S_n = 1 - \alpha \cos x - \alpha^n \cos nx + \alpha^{n+1} \cos(n-1)x$ dalla quale, se $|\alpha| < 1$, si ricava, qualunque sia x ,

$$\frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = 1 + \alpha \cos x + \alpha^2 \cos 2x + \alpha^3 \cos 3x + \dots + \alpha^n \cos nx + \dots,$$

e da questa

$$\frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = 1 + 2(\alpha \cos x + \alpha^2 \cos 2x + \alpha^3 \cos 3x + \dots).$$

In conseguenza, si provi che $\int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin mx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx = \frac{\pi}{2} \alpha^{m-1}$,
se m è intero positivo e $|\alpha| < 1$.

$$13. \int_0^{\pi} \cos mx \log(1-2x \cos x + x^2) dx = -\frac{\pi x^m}{m}, \quad m \text{ int. pos.,}$$

$|x| < 1$. (Si dimostri la formola

$$\frac{x \sin x}{1-2x \cos x + x^2} = x \sin x + x^2 \sin 2x + x^3 \sin 3x + x^4 \sin 4x + \dots,$$

e da questa si ricavi

$$\log(1-2x \cos x + x^2) = -2 \left(x \cos x + \frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x^3 \cos 3x}{3} + \frac{x^4 \cos 4x}{4} + \dots \right)$$

Teoremi sulle funzioni a due o più variabili indipendenti.

73. Per l'ulteriore studio degli integrali definiti ci occorre ora dimostrare alcune proprietà delle funzioni a due o più variabili indipendenti, che sono la generalizzazione delle analoghe per le funzioni di una variabile indipendente, svolte nel Vol. I a pag. 113 e seguenti.

Sia C un campo di valori per le variabili $x_1, x_2 \dots x_n$, e siano (a) un punto di coordinate $(a_1, a_2 \dots a_n)$, (b) un altro punto del campo, di coordinate $(b_1, b_2 \dots b_n)$. Siano $x_r = x_r(t)$ funzioni continue di t pei valori di t da t_0 a t_1 ove è $a_r = x_r(t_0)$, $b_r = x_r(t_1)$; a questi valori di t corrisponderanno dei punti che costituiranno una successione continua o linea o cammino, che se è tutta nel campo C , diremo che è una linea del campo che unisce i punti (a) e (b) .

Il campo C dicesi *connesso*, se due suoi punti qualunque possono unirsi mediante una linea tutta appartenente a C . Ove non si avverta il contrario, dicendo campo C , intenderemo campo connesso e finito.

Potremo, per semplicità, limitarci a considerare le funzioni $u(x, y)$ di due variabili indipendenti x, y ; le dimostrazioni che daremo si estendono con tutta facilità al caso di funzioni di più variabili.

Sia $u(x, y)$ funzione finita dei punti di un campo C . Ab-

biamo già notato (I, n. 91, pag. 176) che, se in un punto (x_0, y_0) la u è continua ed è diversa da zero, esiste un intorno del punto (x_0, y_0) per tutti i punti del quale la u mantiene lo stesso segno di $u(x_0, y_0)$.

74. Se $u(x, y)$ è continua in tutto il campo C ¹⁾, esiste almeno un punto di C nel quale la u prende un qualunque valore compreso tra $u(x_0, y_0)$ e $u(x_1, y_1)$ essendo (x_0, y_0) e (x_1, y_1) due punti qualunque di C (Conf. I, n. 65).

Infatti, uniamo (x_0, y_0) , (x_1, y_1) con una linea L contenuta in C , le cui equazioni siano $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x(t)$, $y(t)$ essendo funzioni continue di t , e tali che $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$. La funzione continua di t , $F(t) = u[x(t), y(t)]$, prenderà per qualche valore di t compreso tra t_0 e t_1 un qualunque valore compreso tra $F(t_0) = u(x_0, y_0)$ e $F(t_1) = u(x_1, y_1)$, e a quel valore di t corrisponde un punto di C appartenente alla linea L , e rimane così dimostrato il teorema.

75. Sia $u(x, y)$ funzione finita nel campo C ed l il limite superiore (od inferiore) di u nel campo stesso. Allora esiste in C almeno un punto (x', y') , che può anche essere sul contorno di C , tale che in ogni suo intorno il limite superiore (od inferiore) dei valori di u è ancora l ; tale cioè che in ogni suo intorno nessuno dei valori che prende u supera (o è superato da) l , ma, dato $l - \sigma$ (o $l + \sigma$), vi è sempre in quell'intorno qualche punto (x_1, y_1) pel quale $u(x_1, y_1) > l - \sigma$ (o $u(x_1, y_1) < l + \sigma$), ossia $|u(x_1, y_1) - l| < \sigma$. (I, n. 68).

Infatti, supposto l limite superiore, ed a, b il minimo e massimo valore di x , e c, d il minimo e massimo valore di y per tutti i punti di C , consideriamo le rette $x = a + \frac{b-a}{2}$, $y = c + \frac{d-c}{2}$, le quali dividono il campo C in regioni, in una delle quali almeno il limite superiore dei valori di u è ancora l ; prendiamo a considerare quella, o una di quelle, ove ciò

¹⁾ Dicendo campo C intendiamo sempre « campo finito C , incluso il contorno ».

succede, ed indichiamo con a_1, b_1 il minimo e massimo valore di x , con c_1, d_1 il minimo e massimo valore di y per tutti i punti di questo nuovo campo C_1 , contenuto completamente nel primitivo C , ed osserviamo che $a \leq a_1, b \geq b_1, c \leq c_1, d \geq d_1$. Ripetiamo lo stesso procedimento relativamente al campo C_1 e a quelli che mano a mano in questo modo si presentano, ciascuno dei quali sarà sempre contenuto nei precedenti. Nascono così le due serie di numeri.

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots,$$

$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots,$$

che definiscono un numero x' , e le altre due serie di numeri

$$c \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq \dots,$$

$$d \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq \dots,$$

che definiscono un numero y' ; il punto (x', y') appartiene a tutti i campi $C, C_1, C_2, \dots$, nei quali il limite superiore dei valori di u è ancora l .

Ora, qualunque e comunque piccolo sia un intorno c di (x', y') , potremo sempre prendere n così grande che il rettangolo determinato dalle rette $x = a_n, x = b_n, y = c_n, y = d_n$, o il pezzo di esso che appartiene a C , sia contenuto in c ; quindi anche in c il limite superiore dei valori di u è l .

Da questo teorema si ricava subito, con dimostrazione perfettamente analoga a quella del n. 69 vol. I, il seguente:

Una funzione $u(x, y)$ continua in tutto il campo C e non costante prende sempre nello stesso campo il valore massimo e il valore minimo, cioè, se l è il limite superiore (inferiore) di u , esiste sempre in C almeno un punto (x', y') , che può anche essere sul contorno, tale che $u(x', y') = l$.

Notiamo poi che se la $u(x, y)$ è data solo pei punti d'una linea L o si vuole considerare per soli questi punti, si ha che:

Se l è il limite superiore (inferiore) di $u(x, y)$ nella linea L , esiste su questa linea almeno un punto (x', y') , tale che

in ogni suo intorno appartenente ad L il limite superiore (inferiore) dei valori di u è ancora l .

Invero, supponiamo che le coordinate x, y dei punti di L si ottengano dalle due funzioni continue $x = x(t)$, $y = y(t)$ attribuendo a t i valori da t_0 a t_1 , cosicchè la u divenga una funzione di t nell'intervallo (t_0, t_1) . Allora al punto t' , in ogni intorno del quale il limite superiore (inferiore) dei valori di u è ancora l , e a questi intorni, corrispondono sulla linea L un punto (x', y') e degli intorni nei quali il limite superiore di u è l .

76. *Se $u(x, y)$ è funzione continua nel campo C , assegnato un numero positivo τ , esiste un corrispondente numero positivo δ tale che, per tutti i punti (x, y) del campo, è*

$$|u(x, y) - u(x_1, y_1)| < \tau,$$

essendo (x_1, y_1) un punto qualunque di un circolo con centro in (x, y) e di raggio δ , o un punto qualunque di quella parte di questo circolo, che, contenendo il punto (x, y) , appartiene al campo C .

Invero, assegnato τ , esiste per ogni punto (x, y) di C un intorno di (x, y) , per tutti i punti (x_1, y_1) del quale è $|u(x, y) - u(x_1, y_1)| < \tau$.

Ora si può e giova prendere come intorni del punto (x, y) dei circoli col centro in questo punto, o la parte di essi che, contenendo il punto (x, y) , appartengono al campo C , così chè potremo dire che, per ogni punto (x, y) di C , esiste un numero positivo ε tale, che per tutti i punti (x_1, y_1) del circolo di raggio ε col centro in (x, y) , o per tutti i punti (x_1, y_1) di quella parte di esso che contiene (x, y) e che appartiene a C , è $|u(x, y) - u(x_1, y_1)| < \tau$. Di questi numeri ε ne esiste un numero infinito per ogni punto del campo, giacchè, esistendone uno, tutti i numeri positivi minori godono della stessa proprietà. Noi considereremo ora per ogni punto (x, y) il limite superiore di questi numeri ε , che indicheremo con $\varepsilon(\tau, x, y)$, e questo limite superiore è una funzione dei punti (x, y) del campo C . Indichia-

mo con δ il limite inferiore di questa funzione $\varepsilon(\tau, x, y)$; è chiaro allora che risulterà dimostrato il teorema se proveremo che δ non è zero.

È ciò che effettivamente ha luogo. Infatti, sia (x', y') quel punto di C in ogni intorno del quale il limite inferiore dei valori di $\varepsilon(\tau, x, y)$ è ancora δ ; e sia r il raggio del circolo (r) col centro in (x', y') tale che per tutti i suoi punti (x_1, y_1) , o per i punti di quella sua parte $(r)_1$ che contiene (x', y') e che appartiene a C , è $|u(x', y') - u(x_1, y_1)| < \frac{\tau}{2}$. Descriviamo ora col

centro in (x', y') e con raggio $\frac{r}{2}$ un circolo, e consideriamo tutti i suoi punti (x_2, y_2) , o tutti i suoi punti che appartengono a $(r)_1$. Qualunque sia il punto (x_2, y_2) , il circolo $\left(\frac{r}{2}\right)$ di centro (x_2, y_2) e di raggio $\frac{r}{2}$ è contenuto in (r) e contiene (x', y') , cosicchè, se (x_3, y_3) è un punto qualunque di $\left(\frac{r}{2}\right)$ o di quella sua parte che è contenuta in $(r)_1$, avremo

$$|u(x', y') - u(x_2, y_2)| < \frac{\sigma}{2}, \quad |u(x', y') - u(x_3, y_3)| < \frac{\sigma}{2}$$

e da queste

$$|u(x_2, y_2) - u(x_3, y_3)| < \sigma;$$

dalla qual formola risulta che per tutti i punti (x_2, y_2) la funzione $\varepsilon(\tau, x_2, y_2)$, e quindi anche il suo limite inferiore, non può essere minore di $\frac{\tau}{2}$. Ma per tutti i punti (x_2, y_2) il limite inferiore di $\varepsilon(\tau, x_2, y_2)$ è ancora il limite inferiore δ di $\varepsilon(\tau, x, y)$ per tutti i punti del campo C ; dunque δ non può essere minore di $\frac{\tau}{2}$, e quindi è diverso da zero, come volevamo dimostrare.

Questo teorema dimostra per le funzioni continue una proprietà che esprimeremo dicendo che esse sono *uniformemente continue* per tutti i punti del campo C , o nel campo C . La stessa dimostrazione, applicata alle funzioni di una variabile continue in un intervallo, ci proverrebbe che esse sono ivi *uniformemente continue*, il che già risultava dal teorema dimostrato al n. 3. Dal teorema ora dimostrato si ricava, senz'altro, il teorema analogo a quello del n. 3 per le funzioni di due variabili cioè:

Se $u(x, y)$ è funzione continua nel campo C , assegnato un numero positivo τ , esiste un corrispondente numero positivo δ tale che è

$$|u(x', y') - u(x'', y'')| < \tau,$$

essendo (x', y') , (x'', y'') due punti qualunque del campo appartenenti ad un circolo di raggio δ e col centro in un punto qualunque (x, y) del campo, o due punti qualunque di una parte di un circolo di raggio δ , che ha il centro in un punto qualunque (x, y) e che, contenendo questo punto, appartiene al campo.

Notiamo anche qui che, se la funzione $u(x, y)$ data e finita nel campo C è continua rispetto alle due variabili x, y per tutti i punti d'una linea L , essa è su questa linea *uniformemente continua*, cioè:

Dato τ , esiste un corrispondente numero positivo δ tale che, per tutti i punti (x, y) di L , è

$$|u(x, y) - u(x_1, y_1)| < \tau,$$

dove (x_1, y_1) è un punto qualunque di un circolo col centro in (x, y) e di raggio δ , o un punto qualunque di quella parte di questo circolo che, contenendo il punto (x, y) , appartiene al campo C .

La dimostrazione, con modificazioni lievissime ed evidenti, è la stessa del precedente teorema; così, cominceremo col dire che, assegnato τ , esiste per ogni punto (x, y) di L un in-

torno di (x, y) appartenente a C per tutti i punti (x_1, y_1) del quale etc. www.libtool.com.cn

**Continuità, derivazione e integrazione
degli integrali definiti rispetto ad un parametro.**

77. Consideriamo un integrale $\int_a^b f(x, y) dx$, dove $b > a$ e $f(x, y)$ è funzione finita di x, y pei valori del campo rettangolare limitato dalle rette $x=a, x=b, y=\alpha, y=\beta$, ed integrabile rispetto alla x nell'intervallo (a, b) , qualunque sia il valore di y dell'intervallo (α, β) ; esso è funzione della variabile o parametro y , e lo indicheremo con $\varphi(y)$.

Siano y_0 ed $y_0 + k$ valori di y dell'intervallo (α, β) ; abbiamo

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| = \left| \int_a^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right|,$$

così che è condizione *necessaria* e *sufficiente* affinché $\varphi(y)$ sia continua per $y=y_0$ che, dato σ , esista un valore k_0 positivo tale che per $|k| \leq k_0$ il secondo membrò della precedente formula sia minore di σ . Ora ciascuna delle seguenti è da se sola condizione *sufficiente* affinché ciò avvenga:

1) Che la $f(x, y)$ sia sempre finita, e sia per $y=y_0$ uniformemente continua ¹⁾ rispetto alla y nell'intervallo (a, b) di x , cioè pei punti dell'intervallo (a, b) sulla retta $y=y_0$; perchè allora esiste un k_0 tale che per $|k| \leq k_0$ è

$$|f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)| < \frac{\sigma}{b-a}$$

per tutti i punti di quell'intervallo, e quindi

$$\int_a^b |f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)| dx < \sigma,$$

¹⁾ Vedi Vol. I, pag. 136.

ed *a fortiori*

www.libtool.com.cn

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| < \sigma.$$

2) Che la $f(x, y)$ sia sempre finita e sia per tutti i punti dell'intervallo (a, b) su $y = y_0$ continua rispetto alle due variabili (x, y) ; perchè allora, in virtù del teorema alla fine del n. 76, esisterà un k_0 tale che ecc.

3) Che la $f(x, y)$ sia sempre finita, e, ove non siano soddisfatte le due precedenti condizioni, ciò dipenda dall'esservi nell'intervallo (a, b) su $y = y_0$ dei punti, in numero finito, la cui presenza faccia cessare la continuità uniforme di $f(x, y)$ rispetto alla y , o nei quali la $f(x, y)$ non sia continua rispetto alle x, y , ma, tolti i quali con intorno comunque piccoli, negli intervalli restanti la $f(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto alla y , o continua rispetto ad x, y .

Invero, se c è un tal punto, osserviamo che

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| = \left| \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right|.$$

dove ε indica un numero positivo. Se A è il limite superiore dei valori di $|f(x, y)|$ nel campo di valori che consideriamo, o un numero qualunque maggiore di questo limite, abbiamo

$$\left| \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x, y_0 + k) dx \right| < A2\varepsilon, \quad \left| \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x, y_0) dx \right| < A2\varepsilon,$$

e quindi

$$\left| \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| < 4A\varepsilon;$$

così chè, assegnato σ , potremo fissare ε in guisa che risulti $4A\varepsilon < \frac{\sigma}{3}$, e poi determinare k_0 in guisa che, nei punti degli

intervalli $(a, c - \varepsilon)$, $(c + \varepsilon, b)$ su $y = y_0$, e per $|k| \leq k_0$, sia

$$\left| \int_a^{c-\varepsilon} [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)] dx \right| < \frac{\sigma}{3}, \quad \left| \int_{c+\varepsilon}^b [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)] dx \right| < \frac{\sigma}{3},$$

ed allora per quei valori di k avremo $|\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)| < \sigma$.

Si intende subito come la dimostrazione si estenda al caso di un numero finito di punti come c .

4) Che, mantenendosi la $f(x, y)$ sempre integrabile rispetto alla x pei valori di x, y da considerarsi, se in (a, b) vi sono dei valori $x = c$, in numero finito, tali che $f(c, y)$ sia infinita per $y = y_0$, o sia infinita per tutti i punti d'un intorno, sulla retta $x = c$, del punto (c, y_0) , si possano però per ogni punto c trovare due numeri positivi k_0, ε tali che, per $|k| \leq k_0$ e qualunque sia ε_1 positivo e $< \varepsilon$, i due integrali

$$(1) \int_{c-\varepsilon_1}^{c-\varepsilon} [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)] dx, \quad \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)] dx$$

siano numericamente minori di un numero prefissato σ ; e che la $f(x, y)$, tolti i punti c con intorni comunque piccoli, negli intervalli restanti sia tale, che il corrispondente integrale sia funzione continua di y per $y = y_0$.

Infatti, supposto che vi sia uno solo di tali punti c , avremo

$$\begin{aligned} \varphi(y_0+k) - \varphi(y_0) &= \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)] dx \\ &= \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b + \lim_{\varepsilon_1=0} \int_{c-\varepsilon_1}^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon_1=0} \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)] dx; \end{aligned}$$

ma, per la ipotesi ammessa, dato σ , potremo fissare ε e k_0 in guisa che, per $|k| \leq k_0$, i due ultimi termini del secondo mem-

bro risultino ciascuno numericamente minore di $\frac{\sigma}{4}$; e poi $k_1 \leq k_2$ in guisa che i due primi termini siano, ciascuno, minori numericamente di $\frac{\sigma}{4}$, così ch  per $|k| \leq k_1$ si avr  $|\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)| < \tau$.

Se c   uno degli estremi dell'intervallo (a, b) , si intende che si avr  da considerare uno solo degli integrali (1).

ESEMPLI

1) Nell'integrale

$$\varphi(y) = \int_0^{\pi} \log(1 - 2y \cos x + y^2) dx,$$

la funzione integranda diviene infinita nel punto $x=0$ per $y=1$, mantenendosi integrabile. Ora

$$\varphi(1+k) - \varphi(1) = \int_0^{\pi} \{\log[2(1+k)(1-\cos x) + k^2] - \log 2(1-\cos x)\} dx + \int_{\pi}^{\pi}.$$

ovvero, osservando che

$$\log[2(1+k)(1-\cos x) + k^2] = \log 2(1+k) + \log\left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)}\right),$$

$$\begin{aligned} \varphi(1+k) - \varphi(1) &= \int_0^{\pi} \left[\log\left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)}\right) - \log 2(1-\cos x) \right] dx \\ &\quad + \epsilon \log 2(1+k) + \int_{\pi}^{\pi}. \end{aligned}$$

Se si comincia a supporre ϵ sufficientemente piccolo, mettiamo $\epsilon < \frac{\pi}{3}$, sar , pei valori di x da considerarsi nel primo

integrale, $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \cos x$, e preso $|k| \leq k_0 < \frac{1}{2}$ sarà
 $\frac{k^2}{2(1+k)} < k^2 < \frac{1}{4} < \cos x$, e quindi $1 > 1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)} > 1 - \cos x$,
 e perciò

$$\left| \log \left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)} \right) \right| \leq |\log(1 - \cos x)|;$$

e, poichè per μ numero positivo qualunque, che a noi giova ora prendere minore dell'unità, è $\lim_{x \rightarrow 0} x^\mu \log(1 - \cos x) = 0$, come facilmente si verifica, possiamo ora asserire che, per $x < \varepsilon < \frac{\pi}{3}$ e per $|k| \leq k_0 < \frac{1}{2}$, le espressioni

$$x^\mu \log \left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)} \right), \quad x^\mu \log(1 - \cos x)$$

saranno numericamente minori di un certo numero positivo A , e quindi

$$\left| \int_0^\varepsilon \left[\log \left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)} \right) - \log(1 - \cos x) \right] dx \right| < \frac{A \varepsilon^{1-\mu}}{1-\mu};$$

cosicchè osservando ancora che, per quei valori di k , è $\varepsilon \log 2(1+k) < \varepsilon \log 3$, potremo fissare ε in guisa che, per quei valori di k , sia

$$\left| \varepsilon \log 2(1+k) + \int_0^\varepsilon \left[\log \left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)} \right) - \log 2(1 - \cos x) \right] dx \right| < \frac{\sigma}{2},$$

essendo σ un numero dato positivo e comunque piccolo. Poi prenderemo $k_1 \leq k_0$ in modo che per $|k| \leq k_1$ sia

$$\left| \int_0^\pi \left[\log[2(1+k)(1 - \cos x) + k^2] - \log 2(1 - \cos x) \right] dx \right| < \frac{\sigma}{2},$$

cosicchè, per quei valori di k , è

$$\text{www.libtool.com.cn} \quad |\varphi(1+k) - \varphi(1)| < \sigma$$

e la $\varphi(y)$ è continua anche per $y=1$.

In modo analogo si proverebbe che $\varphi(y)$ è continua anche per $y=-1$, nel qual caso la funzione integranda diviene infinita per $x=\pi$.

Verifichiamo poi che questo ha realmente luogo, perchè è $\varphi(y) = \pi \log y^2$ per $|y| > 1$ e $\varphi(y) = 0$ per $-1 \leq y \leq 1$ (n. 14, 5) ed esercizio 3° a pag. 178).

2) Sia $\varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}^y x \, dx$ dove supponiamo sia $-1 < y < 1$.

(La funzione $\text{tg}^y x$ è allora integrabile nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$,

perchè se y è positivo diviene infinita di ordine y per $x = \frac{\pi}{2}$,

e se y è negativa diviene infinita pure di ordine y nel punto $x=0$, perchè $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \text{tg} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{tg} x} = 1$, e se $y=0$

si mantiene sempre finita).

Ora, quantunque la funzione integranda per $x=0$ (o per $x = \frac{\pi}{2}$) diventi infinita qualunque sia y negativo (o positivo), la $\varphi(y)$ è continua per qualunque dei valori di y che consideriamo.

Invero, supposto $y > 0$, avremo

$$\varphi(y+k) - \varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (\text{tg}^{y+k} x - \text{tg}^y x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\text{tg}^{y+k} x - \text{tg}^y x) \, dx;$$

ma, se μ indica un numero qualunque positivo < 1 e $> y$, e si prenda k_0 tale che sia $y+k_0 < \mu$, cosicchè per $|k| \leq k_0$ sia

anche $y+k < \mu$, avremo, per $|k| \leq k_0$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^\mu (tg^{y+k} x - tg^y x) = 0,$$

dalla quale risulta subito l'esistenza di un intorno $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} \right)$,

dove potremo già supporre $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$, per tutti i punti x del qua-

le, $\frac{\pi}{2}$ escluso, $\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^\mu (tg^{y+k} x - tg^y x)$ risulterà minore di una certa quantità positiva A , e quindi anche per $|k| \leq k_0$ e pei punti dello stesso intorno risulterà anche

$$\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^\mu (tg^{y+k} x - tg^y x) < A$$

perchè $tg^{y+k} x < tg^{y+k_0} x$. Cosichè $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (tg^{y+k} x - tg^y x) dx < \frac{A\varepsilon^{1-\mu}}{1-\mu}$,

e ragionando come nell'esempio precedente si prova che $\varphi(y)$ è continua pel valore y che consideriamo.

In modo analogo si proverebbe che $\varphi(y)$ è continua se $y < 0$, e se $y = 0$.

Il che si può verificare perchè sappiamo che è (N. 66 esempio 4))

$$\varphi(y) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \frac{y+1}{2} \pi}, \quad \text{se } -1 < y < 1.$$

78. Supponiamo ora che i limiti a, b dell'integrale sieno funzioni di y , $a = a(y)$, $b = b(y)$, continue per $y = y_0$ e la $f(x, y)$ sia finita e tale che $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y) dx$ sia funzione continua di y per

$y = y_0$. Allora la funzione di y ,

www.libtool.com.cn

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

è continua per $y = y_0$

Invero

$$\begin{aligned} |\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| &= \left| \int_{a(y_0 + k)}^{b(y_0 + k)} f(x, y_0 + k) dx - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0) dx \right| \\ &= \left| \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx + \int_{a(y_0 + k)}^{a(y_0)} f(x, y_0 + k) dx + \int_{b(y_0)}^{b(y_0 + k)} f(x, y_0 + k) dx \right|; \end{aligned}$$

ma, se A indica un numero positivo maggiore del limite superiore di $|f(x, y)|$ per tutti i valori di x, y che si considerano, è

$$\left| \int_{a(y_0 + k)}^{a(y_0)} f(x, y_0 + k) dx \right| < A |a(y_0 + k) - a(y_0)|,$$

$$\left| \int_{b(y_0)}^{b(y_0 + k)} f(x, y_0 + k) dx \right| < A |b(y_0 + k) - b(y_0)|,$$

cosicchè, dato σ , poichè $a(y)$, $b(y)$ sono continue per $y = y_0$ e per la proprietà supposta di $f(x, y)$, esiste un numero k_0 tale che per $|k| \leq k_0$ è

$$A |a(y_0 + k) - a(y_0)| < \frac{\sigma}{3}, \quad A |b(y_0 + k) - b(y_0)| < \frac{\sigma}{3},$$

$$\left| \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| < \frac{\sigma}{3},$$

e quindi, per tali valori di h ,

$$|\varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0)| < \sigma.$$

Notiamo poi che $\varphi(y)$ potrà essere continua anche se la $f(x, y)$ non si mantenga sempre finita.

79. Consideriamo ora l'integrale

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx,$$

ammessa integrabile la $f(x, y)$ nell'intervallo (a, ∞) per tutti i valori di y di un intervallo (α, β) e tale che $\int_a^\gamma f(x, y) dx$ risulti funzione continua di y per quanto grande si fissi γ .

Supporremo inoltre che, assegnato σ , esista un numero γ tale che, per tutti gli y di un certo intorno $(y_0 - k_0, y_0 + k_0)$ di y_0 , sia $|\int_a^b f(x, y) dx| < \sigma$, qualunque sia $b > \gamma$, ciò che esprimeremo dicendo che l'integrale $\int_a^\infty f(x, y) dx$ è *uniformemente convergente in modo semplice* ¹⁾ nell'intorno $(y_0 - k_0, y_0 + k_0)$ di y_0 .

Dico allora che l'integrale $\varphi(y)$ è funzione continua di y per $y = y_0$.

Infatti, dato σ , fissiamo γ in modo che risulti

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx \right| < \frac{\sigma}{3} \text{ pei punti } y \text{ di } (y_0 - k_0, y_0 + k_0) \text{ e qualun-}$$

¹⁾ Un integrale $\int_a^\infty f(x, y) dx$ dicesi *uniformemente convergente* in un intervallo (α, β) di y se, dato σ , esiste un numero c tale che, per tutti i punti y di (α, β) , è $|\int_a^b f(x, y) dx| < \sigma$, qualunque sia $\gamma \geq c$ e qualunque sia $b > \gamma$.

que sia $b > \gamma$, cosichè sia

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| \\ &= \left| \int_a^{\gamma} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx + \int_{\gamma}^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| \\ &< \left| \int_a^{\gamma} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| + \frac{\sigma}{3} + \frac{\sigma}{3} \end{aligned}$$

per $|k| \leq k_0$ e qualunque sia $b > \gamma$. Al limite, per b crescente indefinitamente, avremo perciò

$$\left| \int_a^{\infty} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| \leq \left| \int_a^{\gamma} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| + \frac{2\sigma}{3};$$

ma possiamo determinare $k_1 \leq k_0$ in modo che l'integrale del secondo membro risulti minore di $\frac{\sigma}{3}$ per $|k| \leq k_1$, cosichè, per $|k| \leq k_1$, sarà

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| < \sigma,$$

che dimostra il teorema.

Relativamente a tutte le precedenti considerazioni faremo infine notare che le condizioni imposte alla $f(x, y)$ sono condizioni sufficienti affinchè l'integrale $\varphi(y)$ che in esse si considera sia funzione continua di y , così chè, ove non siano soddisfatte, potrebbe ciò non ostante essere $\varphi(y)$ funzione continua; ma ciò allora non potrebbe senz'altro asserirsi ed occorrerebbero perciò speciali ricerche.

1) Dimostriamo che l'integrale

$$\varphi(a) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x}$$

è funzione continua di a per i valori di a dell'intervallo $(0, 1)$, esclusi gli estremi.

Questo integrale venne considerato al n. 66, esempio 2), e si dimostrò essere uguale a $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ per valori razionali di a compresi tra 0 e 1.

La funzione integranda è, per valori di x, a che consideriamo, sempre continua rispetto ad x, a ; inoltre, poichè il valore a_0 che considereremo è compreso tra 0 e 1, vi sarà un intorno (α, β) di a_0 tale che $0 < \alpha < \beta < 1$, e per punti a di questo intorno, se si suppone $x > 1$, sarà

$$\frac{x^{a-1}}{x+1} = \frac{1}{x^{1-a}(x+1)} \leq \frac{1}{x^{1-\beta}(x+1)} < \frac{1}{x^{1-\beta}},$$

e quindi, supposto $\gamma > 1$ e $b > \gamma$,

$$\int_{\gamma}^b \frac{x^{a-1} dx}{1+x} < \int_{\gamma}^b \frac{dx}{x^{1-\beta}} = \frac{1}{\beta-1} \left(\frac{1}{b^{1-\beta}} - \frac{1}{\gamma^{1-\beta}} \right),$$

cosichè, qualunque sia il numero positivo σ assegnato, potremo sempre determinare γ in modo che, qualunque sia $b > \gamma$, e per

i valori a dell'intorno (α, β) , risulti $\int_{\gamma}^b \frac{x^{a-1} dx}{1+x} < \sigma$, ed il no-

stro integrale $\varphi(a)$, essendo perciò convergente in modo uniforme semplice nell'intorno (α, β) di a_0 , è continuo per $a = a_0$, essendo a_0 un valore qualunque compreso tra 0 e 1.

Ora possiamo provare che la formola $\varphi(a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$, dimostrata al n. 66 per a razionale e compreso tra 0 e 1 ed ivi ammessa per tutti i valori di a dell'intervallo $(0, 1)$, esclusi gli estremi, vale effettivamente per tutti questi valori.

Invero se a_0 è un numero irrazionale qualunque maggiore di 0 e minore di 1, sia esso il limite di una successione $a_1, a_2, a_3, \dots$ di numeri razionali interni all'intervallo $(0, 1)$. Vale allora la formola

$$\varphi(a_n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_n \pi}, \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

e passando al limite quando a_n assume successivamente i valori $a_1, a_2, a_3, \dots$, poichè è $\lim \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_n \pi} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_0 \pi}$ ed abbiamo ora dimostrato che $\lim \varphi(a_n) = \varphi(a_0)$, abbiamo

$$\varphi(a_0) = \int_0^{x_0-1} \frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_0 \pi}.$$

2) Se la funzione $f(x, y)$ è integrabile nell'intervallo (a, ∞) perchè, per tutti i valori y di un certo intorno di y_0 , soddisfa alla condizione dell'enunciato del teorema al n. 65, restando ferma l'altra condizione che $\int_a^{\gamma} f(x, y) dx$ sia funzione continua di y per $y = y_0$ per quanto grande si fissi γ , l'integrale $\varphi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ è funzione continua di y per $y = y_0$.

Proviamolo nel caso che il prodotto $|x^{1+\mu} f(x, y)|$, dove $\mu > 0$, qualunque sia y appartenente ad un certo intorno di y_0 , risulti minore di un certo numero h positivo. Allora avremo

$$\left| \int_{\gamma}^b f(x, y) dx \right| = \left| \int_{\gamma}^b x^{1+\mu} \frac{f(x, y) dx}{x^{1+\mu}} \right| < h \int_{\gamma}^b \frac{dx}{x^{1+\mu}} = \frac{h}{\mu} \left(\frac{1}{\gamma^{\mu}} - \frac{1}{b^{\mu}} \right).$$

e, poichè μ è positivo, potremo, dato τ , fissare γ in modo che etc.

Così, ad esempio, possiamo subito asserire che l'integrale

$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(xy)}{x^{1+\mu}} dx$, dove $0 < \mu < 1$ (cosicchè la funzione $\frac{\text{sen}(xy)}{x^{1+\mu}}$ è in-

tegrabile in un intervallo cui appartiene il punto $x=0$ qualunque sia y), è funzione continua di y per qualunque valore di y , perchè abbiamo sempre $x^{1+\mu} \frac{|\text{sen}(xy)|}{x^{1+\mu}} \leq 1$, qualunque sia y .

Se $\mu=0$, cioè se si considera l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(xy)}{x} dx$,

occorrerebbe istituire speciale ricerca, e si vedrebbe facilmente, usando la formola

$$\int \frac{\text{sen}(xy)}{x} dx = -\frac{\cos(xy)}{xy} - \frac{1}{y} \int \frac{\cos(xy)}{x^2} dx$$

dalla quale si trae

$$\int_{\gamma}^b \frac{\text{sen}(xy)}{x} dx = -\frac{\cos(by)}{by} + \frac{\cos(\gamma y)}{\gamma y} - \frac{1}{y} \int_{\gamma}^b \frac{\cos(xy)}{x^2} dx,$$

che esso è funzione continua di y , se y è diverso da zero; ma lo stesso procedimento non serve a indicarci se esso sia continuo, oppure no, per $y=0$.

Riconosciamo però, d'altra parte, che non lo è, perchè

$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(xy)}{x} dx$ è uguale a $\frac{\pi}{2}$ per $y > 0$, eguale a $-\frac{\pi}{2}$ per $y < 0$, ed eguale a zero per $y=0$ (n. 72, es. 6).

80. Proponiamoci ora di calcolare la derivata rapporto ad y della funzione $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, per $y=y_0$. Dovremo cal-

colare perciò il limite, per k convergente a zero, di
www.libtool.com.cn

$$\frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k} dx,$$

nello stabilire la qual formola si presuppone che $f(x, y)$ sia integrabile nell'intervallo (a, b) quando per y si prendano i valori di un certo intorno del punto y_0 , i punti y_0+k del quale vengono in essa considerati. Supposta inoltre la $f(x, y)$ continua rispetto alla y pei punti di detto intorno e per qualunque valore di x di (a, b) , e che ammetta per questi valori di x, y la derivata rapporto ad y , avremo

$$f(x, y_0+k) - f(x, y_0) = k f'_y(x, y_0 + \theta_x k)$$

essendo $0 < \theta_x < 1$; e quindi ancora

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} &= \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta_x k) dx \\ &= \int_a^b f'_y(x, y_0) dx + \int_a^b [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)] dx, \end{aligned}$$

dalla quale

$$(1) \left| \frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx \right| = \left| \int_a^b [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)] dx \right|.$$

Ora se, dato σ , esiste un numero k_0 positivo tale che per $|k| \leq k_0$ risulti

$$(2) \quad \left| \int_a^b [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)] dx \right| < \sigma,$$

dalla formola (1) si ricava

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \varphi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx.$$

Si scorge subito che: *è condizione sufficiente per stabilire la formola (2) che la $f_y(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto alla y nell'intervallo (a, b) sulla retta $y = y_0$, oppure che in questo intervallo essa sia continua rispetto alle due variabili x, y .*

Notiamo di più che alla stessa formola (2) si giunge ancora se, la $f'_y(x, y)$ mantenendosi sempre finita pei valori delle variabili che si devono considerare, vi sono nell'intervallo (a, b) su $y = y_0$ dei punti c , in numero finito, la cui presenza fa cessare la continuità uniforme della $f'_y(x, y)$ rispetto alla y , o nei quali la $f'_y(x, y)$ non è continua rapporto ad x, y , ma tolti i quali, con intorni comunque piccoli, negli intervalli restanti la $f'_y(x, y)$ soddisfa alle precedenti condizioni. Ciò vedrebbe allo stesso modo come nel caso analogo al n. 77, 3).

Come pure potrà avvenire che la $f(x, y)$ o la $f'_y(x, y)$ siano infinite in qualche punto dell'intervallo di integrazione, ed essere ancora valida la (3), come or ora vedremo.

La formola (3) ci dice che la derivata di un integrale definito, rapporto ad un parametro y di cui è funzione la funzione integranda, si ottiene senza aver bisogno di eseguire il calcolo dell'integrale, ma semplicemente derivando rapporto ad y la funzione integranda; si ha così la regola conosciuta col nome di *regola di derivazione sotto il segno integrale*, utilissima, come vedremo, per l'effettivo calcolo degli integrali definiti, e che noi potremo senz'altro adoperare quando si trovino verificate per la $f(x, y)$ le condizioni sufficienti, precedentemente stabilite, affinché abbia luogo la (3).

81. Sia ora

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

dove supponiamo che la $f(x, y)$ sia tale che permetta la derivazione sotto il segno integrale; avremo

$$\frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx - \frac{1}{k} \int_{a(y_0)}^{a(y_0 + k)} f(x, y_0 + k) dx \\ + \frac{1}{k} \int_{b(y_0)}^{b(y_0 + k)} f(x, y_0 + k) dx.$$

Supposta la $f(x, y)$ continua nel punto $x = a(y_0)$, $y = y_0$ e nel punto $x = b(y_0)$, $y = y_0$ possiamo porre, nel secondo integrale, $f(x, y_0 + k) = f[a(y_0), y_0] + \varepsilon_1$, e nel terzo $f(x, y_0 + k) = f[b(y_0), y_0] + \varepsilon_2$ dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ indicano quantità che possono numericamente rendersi minori di qualunque quantità positiva prefissata col prendere le k sufficientemente piccole in valore assoluto, e in luogo di questi integrali potremo scrivere

$$- \frac{a(y_0 + k) - a(y_0)}{k} f[a(y_0), y_0] - \frac{1}{k} \int_{a(y_0)}^{a(y_0 + k)} \varepsilon_1 dx, \\ \frac{b(y_0 + k) - b(y_0)}{k} f[b(y_0), y_0] + \frac{1}{k} \int_{b(y_0)}^{b(y_0 + k)} \varepsilon_2 dx;$$

cosicchè, ammessa la esistenza delle derivate $a'(y_0)$, $b'(y_0)$ e posto $\frac{a(y_0 + k) - a(y_0)}{k} = a'(y_0) + \delta_1$, $\frac{b(y_0 + k) - b(y_0)}{k} = b'(y_0) + \delta_2$, dove δ_1, δ_2 convergono a zero con k , e preso k_0 in guisa che per $|k| \leq k_0$ sia $|\varepsilon_1| < \tau_1$, $|\varepsilon_2| < \tau_1$, e quindi

$$\left| \frac{1}{k} \int_{a(y_0)}^{a(y_0 + k)} \varepsilon_1 dx \right| < \tau_1 |a'(y_0) + \delta_1|, \quad \left| \frac{1}{k} \int_{b(y_0)}^{b(y_0 + k)} \varepsilon_2 dx \right| < \tau_1 |b'(y_0) + \delta_2|,$$

ed osservando ancora che

$$\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_x(x, y_0) dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)] dx,$$

avremo

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_x(x, y_0) dx + f[a(y_0), y_0] a'(y_0) - f[b(y_0), y_0] b'(y_0) \right| \\ & < \left| \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)] dx \right| + |\delta_1' f[a(y_0), y_0]| + \tau_1 |a'(y_0) + \delta_1| \\ & \quad + |\delta_2' f[b(y_0), y_0]| + \tau_1 |b'(y_0) + \delta_2|; \end{aligned}$$

e, poichè τ_1 si può prendere piccolo come si vuole e col prendere k sufficientemente piccolo in valore assoluto ciò avviene pure per δ_1, δ_2 e per il primo termine del secondo membro, si vede subito come, assegnato τ , possa prendersi k_1 in guisa che per $|k| \leq k_1$ il secondo membro risulti minore di τ , e quindi avremo

$$\varphi'(y_0) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_x(x, y_0) dx - a'(y_0) f[a(y_0), y_0] + b'(y_0) f[b(y_0), y_0],$$

formola che contiene come caso particolare la (3) n. 80, se si suppongono i limiti $a(y)$, $b(y)$ costanti, e la formola

$$\varphi'(y_0) = -a'(y_0) F[a(y_0)] + b'(y_0) F[b(y_0)]$$

se si suppone la $f(x, y)$ sia una funzione $F(x)$ indipendente da y , cioè se

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} F(x) dx.$$

82. Supponiamo che la $f(x, y)$ e la $f'_y(x, y)$ o entrambe divengano infinite per $x=c$ e per $y=y_0$, od anche per $x=c$ e per tutti i punti d'un intorno del punto (c, y_0) sulla retta $x=c$, intendendo con ciò che non vi è alcun intorno di questo punto, per tutti i punti del quale $f(x, y)$ si mantiene finita o per tutti i punti del quale si mantiene finita la $f'_y(x, y)$, ed intendendo di considerare questa derivata per tutti i punti nei quali la $f(x, y)$ è finita; e supponiamo che queste funzioni si mantengano però sempre integrabili rispetto alla x . Nel caso che la $f'_y(x, y)$ sola o insieme alla $f(x, y)$ divenga infinita supponiamo inoltre che, assegnato il solito numero τ , esistano i numeri positivi ε_0, k_0 tali che per $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $\varepsilon_1 < \varepsilon$, e per $|k| \leq k_0$, dove k possa anche variare con ω , sia

$$(1) \quad \left| \int_{c-\varepsilon_1}^{c-\varepsilon} f'_y(x, y_0 + k) dx \right| < \tau, \quad \left| \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} f'_y(x, y_0 + k) dx \right| < \tau;$$

in particolare se la $f'_y(x, y)$ soddisfa per tutti i valori y di un intorno di (c, y_0) alla condizione dell'enunciato della prima parte del teorema al n. 59 (cioè se qualunque sia l' y di tale intorno è $|f(x, y)(c-x)^\mu| < h$ per $|c-x| \leq \varepsilon_0$, c escluso etc.)

Allora, se si ammette che negli intervalli di (a, b) , cui non appartiene il punto c , sia applicabile la derivazione sotto il segno all'integrale

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

dico che avremo

$$(2) \quad \varphi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx.$$

Invero, fissiamo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ in guisa che siano soddisfatte le condizioni (1) per $\varepsilon_1 < \varepsilon$, e per $|k| \leq k_0$ se $f'_y(x, y)$ non si mantiene

finita, o semplicemente in modo che sia $A \varepsilon < \tau$, dove $A > |f'_y(x, y)|$ per tutti i valori di x, y da considerarsi, se $f'_y(x, y)$ si mantiene finita; ed in guisa che nelle formole

$$\int_a^{c-\varepsilon} f'_y(x, y_0) dx = \int_a^c f'_y(x, y_0) dx + \delta_1, \quad \int_c^{c+\varepsilon} f'_y(x, y_0) dx = \int_c^b f'_y(x, y_0) dx + \delta_2,$$

$|\delta_1|, |\delta_2|$ risultino minori di τ . Allora, poichè negli integrali del secondo membro della formola

$$\frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx$$

possiamo porre

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \varepsilon_x k),$$

ed osservando che esiste un numero positivo $k_1 \leq k_0$ tale che per $|k| \leq k_1$ è $|\delta_3| < \tau$, $|\delta_4| < \tau$ dove le δ_3, δ_4 soddisfanno alle eguaglianze

$$\int_a^{c-\varepsilon} f'_y(x, y_0 + \varepsilon_x k) dx = \int_a^{c-\varepsilon} f'_y(x, y_0) dx + \delta_3, \quad \int_{c+\varepsilon}^b f'_y(x, y_0 + \varepsilon_x k) dx = \int_{c+\varepsilon}^b f'_y(x, y_0) dx + \delta_4$$

avremo ancora

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} &= \int_a^b f'_y(x, y_0) dx + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \\ &\quad + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} f'_y(x, y_0 + \varepsilon_x k) dx + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} \end{aligned}$$

da cui

www.libtool.com.cn

$$\left| \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx \right| \leq |\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + |\delta_4| + 2\sigma < 6\sigma$$

per $|k| \leq k_1$, e rimane così dimostrata la (2).

Si intende poi come questa formola valga ancora se vi è un numero finito di punti come c .

83. Consideriamo ora l'integrale

$$\varphi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

e supponiamo che, per quanto grande si fissi γ , all'integrale

$\int_a^{\gamma} f(x, y) dx$ si possa applicare la derivazione sotto il segno integrale, e che, dato σ , esistano due numeri positivi γ e k_0 tali che per $|k| \leq k_0$, potendo k variare con x , e qualunque sia $b > \gamma$, risulti $|\int_{\gamma}^b f'_y(x, y_0 + k) dx| < \sigma$, [in particolare se la funzione costituita dai limiti superiori dei valori assoluti che prende la funzione $f'_y(x, y_0 + k)$ per uno stesso valore di x e per $|k| \leq k_0$ è integrabile tra un certo numero e l'infinito; allora avremo

$$(1) \quad \varphi'(y_0) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y_0) dx.$$

Invero, fissato γ e k_0 nel modo ora detto, ed osservando che per valori di x comunque grandi si ha sempre

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta_x k),$$

avremo

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} &= \int_a^{\gamma} \frac{f'(x, y_0+k) - f'(x, y_0)}{k} dx + \int_{\gamma}^{\infty} f''_y(x_0, y_0 + \xi_x k) dx \\ &= \int_a^{\gamma} f'_y(x, y_0) dx + \delta + \int_{\gamma}^{\infty} f'_y(x, y_0) dx + \int_{\gamma}^{\infty} [f'_y(x, y_0 + \xi_x k) - f'_y(x, y_0)] dx \\ &= \int_a^{\infty} f'_y(x, y_0) dx + \delta + \int_{\gamma}^{\infty} [f'_y(x, y_0 + \xi_x k) - f'_y(x, y_0)] dx, \end{aligned}$$

dove sarà $|\delta| < \tau$ per $|k| \leq k_1 \leq k_0$, cosicchè, per questi valori di k ,

$$\left| \frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} - \int_a^{\infty} f'_y(x, y_0) dx \right| < 3\tau,$$

e quindi la (1).

84. Applichiamo le regole esposte ad alcuni

ESEMPI

1) Sia $\varphi(y) = \int_0^{\pi} \log(1 - 2y \cos x + y^2) dx$; si riconosce subito che, se $|y|$ è diverso da uno, è

$$\varphi'(y) = \int_0^{\pi} \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y \cos x + y^2} dx.$$

Se $|y|=1$, poniamo sia $y=1$, la funzione sotto il segno integrale di $\varphi(y)$ diviene infinita per $x=0$; per x diverso da zero è $f'_y(x, 1)=1$, ma la $f'_y(x, y)=2 \frac{y - \cos x}{1 - 2y \cos x + y^2}$ non si mantiene finita in un intorno del punto $(0, 1)$, il che si riconosce subito se, facendo $y=1+x$, si fa convergere x a zero,

e non potremo neanche asserire che, dato ε , esista un numero ε_1 tale che per $\varepsilon_1 < \varepsilon$ e per $|k| \leq k_0$, essendo k dipendente da x , risulti

$$\left| \int_{\varepsilon_1}^1 f'_y(x, 1+k) dx \right| = \left| \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{1+k - \cos x}{1 - 2(1+k)\cos x + (1+k)^2} dx \right| < \varepsilon,$$

perchè se si fa variare k con x , ponendo $k=x$, la funzione integranda non è neanche integrabile in un intorno del punto $x=0$, come si può verificare. Cosichè per $y=1$, non possiamo asserire che alla $\varphi(y)$ sia applicabile la derivazione sotto il segno integrale; riconosciamo anzi che non la è, perchè sapendo che è $\varphi(y) = \pi \log y^2$ per $|y| > 1$ e $\varphi(y) = 0$ per $|y| \leq 1$, si vede che per $y=1$ la $\varphi(y)$ non ammette derivata, avendo la derivata a sinistra uguale a zero e quella a destra uguale a π , mentre abbiamo $\int_0^\pi f'_y(x, 1) dx = \int_0^\pi dx = \pi$.

Cosichè avremo

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \left\{ \int_0^\pi \log(1 - 2y \cos x + y^2) dx \right\} \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{y - \cos x}{1 - 2y \cos x + y^2} dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{y} & \text{per } |y| > 1 \\ 0 & \text{per } |y| < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

e per $|y|=1$ non esiste la derivata indicata nel primo membro, mentre il secondo è uguale a $\pm \pi$.

2) Sia $\varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2y}} \log \operatorname{sen}(xy) dx$, dove supponiamo y diverso da zero. La funzione integranda diviene infinita per $x=0$, e la sua derivata rapporto ad y , per x diverso da zero,

$x \frac{\cos(xy)}{\sin(xy)} = x \cot(xy)$ è sempre finita; e, poichè le altre condizioni richieste sono anche soddisfatte, possiamo derivare sotto il segno integrale, ed otteniamo

$$\varphi'(y) = -\frac{\pi}{2y^2} \log \sin\left(y \frac{\pi}{2y}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2y}} x \cot(xy) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2y}} x \cot(xy) dx;$$

cosichè, osservando che, posto $xy = z$, è

$$\varphi(y) = \frac{1}{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin z dz = -\frac{\pi \log 2}{2y},$$

abbiamo

$$\varphi'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2y}} x \cot(xy) dx = -\frac{\pi \log 2}{2y^2},$$

ciò che può anche ottenersi dalla formola $\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cot z dz = \frac{\pi \log 2}{2}$

ponendo $z = xy$ (Vedi esercizio 4° a pag. 178).

3) La derivata rapporto ad y , $\frac{x^{v-1} \log x}{1+x}$, della funzione sotto il segno integrale in

$$\varphi(y) = \int_0^{\infty} \frac{x^{v-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi y}, \quad 0 < y < 1,$$

(Vedi N. 66) non si mantiene finita in un intorno del punto ($x=0, y$), ma è tale però che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(\log x)^{1+\mu} \frac{x^{v-1} \log x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^v (\log x)^{1+\mu}}{1+x} = 0,$$

dove μ si suppone positivo, e perciò per $|k| \leq k_0$ risulterà
www.libtool.com.cn

$$\left| \frac{x^{v+k}(\log x)^{s+\mu}}{1+x} \right| \leq \left| \frac{x^{v-k_0}(\log x)^{s+\mu}}{1+x} \right|$$

minore di una certa quantità positiva, e nel nostro caso anche piccola a piacere e prefissata; quindi potremo intanto applli-

care all'integrale $\int_0^{\gamma} \frac{x^{v-1} dx}{1+x}$ la derivazione sotto il segno, e ciò

anche per quanto grande si fissi γ .

Inoltre, poichè

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{v-1} \log x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{1-v}(1+x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-y)(1+x(x^{1-v} + x^{1+1-v}))},$$

si vede che questa derivata diviene all'infinito infinitesima di ordine superiore al primo, $1+1-y$, e si riconosce che è in-

tegrabile in un intervallo (γ, ∞) la funzione $\frac{x^{v-1+k_0} \log x}{1+x}$ dei

massimi valori che $\frac{x^{v-1+k} \log x}{1+x}$ prende, corrispondentemente

ad ogni valore di x , quando y varia tra $y - k_0$ e $y + k_0$; co-
sichè potremo applicare la derivazione sotto il segno integrale
ed avremo così

$$\varphi'(y) = \int_0^{\infty} \frac{x^{v-1} \log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2 \cos \pi y}{\sin^2 \pi y}, \quad 0 < y < 1.$$

$$\text{In particolare } \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 0.$$

85. Sia $f(x, y)$ funzione continua in un campo finito che
contenga internamente il rettangolo limitato dalle rette $x=a$,

$x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$; allora la funzione di y , $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, essendo continua per i valori di y dell'intervallo (α, β) è integrabile, così ch  avremo

$$u = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy,$$

che scriveremo semplicemente

$$u = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

La espressione nel secondo membro chiamasi *integrale doppio* ¹⁾, ed esprime che dobbiamo prima integrare la funzione di x , $f(x, y)$, tra a e b , e dell'integrale cos  ottenuto $\varphi(y)$ dobbiamo prendere l'integrale rispetto ad y tra α e β .

Analogamente, posto $\psi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy$, abbiamo

$$v = \int_a^b dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy;$$

dico che $u=v$.

Invero, poich  $f(b, y)$, che   la derivata di $\int_a^b f(x, y) dx$ rapporto a b ,   funzione continua di b, y , potremo per calcolare $\frac{\partial u}{\partial b}$ derivare sotto il segno integrale $\int_a^{\beta}$ ed avremo cos 

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \int_{\alpha}^{\beta} f(b, y) dy;$$

¹⁾ La teoria degli integrali doppi sar  svolta in seguito; qui ne diamo quel tanto che occorre per non privarci ora di un mezzo potente per l'effettivo calcolo degli integrali definiti.

e, poichè $\frac{\partial v}{\partial b} = \int_a^\beta f(b, y) dy$, è $\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial v}{\partial b}$. Analogamente si

provverebbe che le derivate di u, v rapporto ad a, α, β sono uguali; cosichè $u = v + \text{costante}$. Ma per $a = b$ è $u = 0, v = 0$, quindi la costante è zero, cioè $u = v$, come volevamo dimostrare, ossia

$$\int_a^\beta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_a^\beta f(x, y) dy,$$

che ci dice che in un integrale doppio, nella ipotesi fatta che $f(x, y)$ sia continua e i limiti dell'integrale siano costanti e finiti, le integrazioni possono invertirsi, od anche ci dà la regola di *integrazione sotto il segno integrale*, in virtù della quale per calcolare l'integrale definito rapporto ad y tra α e β di $\int_a^b f(x, y) dx$ si può integrare la funzione sotto il segno integrale $\int_a^b$.

86. Supponendo che abbia valore determinato finito

$$\int_a^\beta dy \int_a^\infty f(x, y) dx, \text{ e, per quanto grande si fissi } \gamma, \text{ sia sempre}$$

$$\int_a^\beta dy \int_a^\gamma f(x, y) dx = \int_a^\gamma dx \int_a^\beta f(x, y) dy,$$

e che $\int_a^\infty f(x, y) dx$ sia uniformemente convergente nell'intervallo (α, β) di y (vedi nota a pag. 219), dico che avrà valore

determinato finito anche $\int_a^{\beta} dx \int_a^{\gamma} f(x, y) dy$ e che avremo

$$(1) \quad \int_a^{\beta} dy \int_a^{\gamma} f(x, y) dx = \int_a^{\gamma} dx \int_a^{\beta} f(x, y) dy.$$

Invero, dato σ , sia c tale che per $\gamma \geq c$ e per $b > \gamma$ e qualunque sia l' y di (x, β) è $|\int_{\gamma}^b f(x, y) dx| < \frac{\sigma_1}{\beta - x}$ essendo $\sigma_1 < \sigma$,

e quindi $\left| \int_{\gamma}^{\beta} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\sigma_1}{\beta - \alpha} < \frac{\sigma}{\beta - \alpha}$; scriviamo

$$\begin{aligned} \int_a^{\beta} dy \int_a^{\gamma} f(x, y) dx &= \int_a^{\beta} dy \int_a^{\gamma} f(x, y) dx + \int_a^{\beta} dy \int_{\gamma}^{\beta} f(x, y) dx \\ &= \int_a^{\gamma} dx \int_a^{\beta} f(x, y) dy + \int_a^{\beta} dy \int_{\gamma}^{\beta} f(x, y) dx, \end{aligned}$$

da cui riconosciamo che per $\gamma \geq c$ è

$$\left| \int_a^{\beta} dy \int_a^{\gamma} f(x, y) dx - \int_a^{\gamma} dx \int_a^{\beta} f(x, y) dy \right| < \sigma,$$

cioè

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_a^{\gamma} dx \int_a^{\beta} f(x, y) dy = \int_a^{\beta} dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx,$$

ossia la (1).

Se ha valore determinato finito $\int_a^{\beta} dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ e, per

quanto grande sia γ , è

www.libtool.com.cn

$$\int_a^\infty dy \int_a^\gamma f(x, y) dx = \int_a^\gamma dx \int_a^\infty f(x, y) dy$$

(e perciò è sufficiente, come abbiamo visto or ora, che sia determinato finito $\int_a^\gamma dx \int_a^\infty f(x, y) dy$ e che

$$\int_a^\beta dy \int_a^\gamma f(x, y) dx = \int_a^\gamma dx \int_a^\beta f(x, y) dy$$

per quanto grande è β e che $\int_a^\infty f(x, y) dy$ sia convergente uniformemente nell'intervallo (a, ∞) di x), e se, dato σ , per $\gamma \geq c$ è $|\int_a^\gamma dy \int_a^\infty f'(x, y) dx| < \sigma$, avrà valore determinato finito anche $\int_a^\infty dx \int_a^\infty f(x, y) dy$ ed avremo

$$\int_a^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_a^\infty f(x, y) dy.$$

Ciò ricavasi subito dalla formola

$$\int_a^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dy \int_a^\gamma f(x, y) dx + \int_a^\infty dy \int_\gamma^\infty f(x, y) dx,$$

da cui

$$\left| \int_a^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^\gamma dx \int_a^\infty f(x, y) dy \right| = \left| \int_a^\infty dy \int_\gamma^\infty f(x, y) dx \right|.$$

87. Se $f(x, y)$ diviene infinita per $x=c$, essendo c un punto dell'intervallo (a, b) , ma ha valore determinato finito l'integrale $\int_a^b dy \int_a^b f(x, y) dx$ ed è lecito invertire le integrazioni in $\int_a^b dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$ ove (a_1, b_1) non contenga c , e se gli integrali singolari di $f(x, y)$ relativi al punto c convergono in (x, β) uniformemente a zero, cioè se, dato σ , esiste ϵ_0 tale che per $\epsilon < \epsilon_0$, $\epsilon_1 < \epsilon$, $\epsilon_2 < \epsilon_0$, $\epsilon_3 < \epsilon_2$ e qualunque sia l' y di (x, β) è $|\int_{c-\epsilon_1}^{c-\epsilon_2} f(x, y) dx| < \sigma$, $|\int_{c+\epsilon_3}^{c+\epsilon_2} f(x, y) dx| < \sigma$, allora ha valore determinato finito anche $\int_a^b dx \int_a^b f(x, y) dy$ e si ha

$$(1) \quad \int_a^b dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_a^b f(x, y) dy.$$

Infatti, dalla formola

$$\begin{aligned} \int_a^b dy \int_a^b f(x, y) dx &= \int_a^b dy \int_a^{c-\epsilon} f(x, y) dx + \int_a^b \left[\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{c-\epsilon_1}^{c-\epsilon_2} f(x, y) dx \right] dy \\ &\quad + \int_a^b \left[\lim_{\epsilon_3 \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon_3}^{c+\epsilon_2} f(x, y) dx \right] dy + \int_a^b dy \int_{c+\epsilon_2}^b f(x, y) dx \end{aligned}$$

si ricava

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b dy \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b dx \int_a^b f(x, y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \left[\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{c-\epsilon_1}^{c-\epsilon_2} f(x, y) dx \right] dy \right| + \left| \int_a^b \left[\lim_{\epsilon_3 \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon_3}^{c+\epsilon_2} f(x, y) dx \right] dy \right|, \end{aligned}$$

e, poichè il secondo membro per $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ è $\leq \frac{2\varepsilon}{\beta - \alpha}$ avremo che, comunque convergano a zero ε , ε_2 , il limite di

$$\int_a^{c-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x, y) dy + \int_{c+\varepsilon_2}^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y) dy \text{ è } \int_a^\beta dy \int_\alpha^b f(x, y) dx, \text{ cioè si ha la (1).}$$

Il teorema vale ancora se dei punti come c ve ne è un numero finito in (a, b) .

88. La derivazione e la integrazione sotto il segno sono mezzi potenti pel calcolo effettivo degli integrali definiti. Diamo alcuni

ESEMPI

1) Dalla formula

$$\int \frac{dx}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1-y^2} [x - y \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y \operatorname{tg} x)] + C$$

si ricava

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2(1+y)};$$

moltiplicando per dy e integrando tra 0 e y , dove y è diverso da -1 , abbiamo

$$\int_0^y dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2} \int_0^y \frac{dy}{1+y} = \frac{\pi}{2} \log(1+y),$$

e, poichè, come si vede subito, possiamo invertire le integrazioni, abbiamo ancora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^y \frac{dy}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2} \log(1+y),$$

ossia, eseguendo l'integrazione interna,

www.libtool.com.cn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctg(y \operatorname{tg} x) \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} \log(1+y).$$

In particolare, per $y=1$,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} \log 2.$$

2) Abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} = \frac{1}{2ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a + b \operatorname{sen} y}{a - b \operatorname{sen} y} \frac{dy}{\operatorname{sen} y},$$

e, poichè possiamo invertire le integrazioni ed osservando che per $|a| > |b|$ e se $0 \leq x^2 \leq 1$ è

$$\int \frac{dy}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} \arctg \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2} \operatorname{tg} y}{a} \right) + C,$$

ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} = \frac{\pi}{2a} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} \\ &= \frac{\pi}{2ab} \arcsen \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

e troviamo così

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a + b \operatorname{sen} y}{a - b \operatorname{sen} y} \frac{dy}{\operatorname{sen} y} = \pi \arcsen \frac{b}{a}, \quad |a| > |b|,$$

(Vedi Esercizio 3 a pag 202).

3) La funzione $\frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$ per qualunque valore di a , perchè per $a=0$ è zero, e per a diverso da zero abbiamo (n. 65 e nota a pag. 151)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} x(\log x)^{1+\mu} \frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} x(\log x)^{1+\mu} \frac{2\log a + \log\left(1 + \frac{1}{a^2x^2}\right) + 2\log x}{y^2+x^2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^2}{y^2+x^2} \frac{(\log x)^{1+\mu}}{x} \left[2\log a + \log\left(1 + \frac{1}{a^2x^2}\right) \right] \right\} + 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^2}{y^2+x^2} \frac{(\log x)^{1+\mu}}{x} \right\} = 0,$$

e riconosciamo anche così che all'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2} dx$$

può applicarsi la derivazione sotto il segno integrale rapporto ad a , per a diverso da zero, ottenendo

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^{\infty} \frac{2ax^2 dx}{(1+a^2x^2)(y^2+x^2)} = \int_0^{\infty} \frac{2a}{1-a^2y^2} \left(\frac{1}{1+a^2x^2} - \frac{y^2}{y^2+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{1+ay}.$$

dalla quale, integrando rapporto ad a tra due limiti α, a che non contengano tra loro nè coincidano col punto $a=0$, si ha

$$(1) \quad I = \frac{\pi}{y} \log \frac{1+ay}{1+xy} + C.$$

Se ora si osserva che I è continua rapporto ad a , anche per $a=0$. perchè, dato σ , per $0 < a < 1$ e per $y \geq c$, è

$$\int_{\gamma}^{\infty} \frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2} dx \leq \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{y^2+x^2} dx < \sigma,$$

perchè $\frac{\log(1+x^2)}{y^2+x^2}$ è integrabile in $(0, \infty)$, potremo nella (1), passando al limite per $a=0$, porre $\lim I=0$, ed ottenere così $C=\frac{\pi}{y} \log(1+zy)$ ed in conseguenza

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2} dx = \frac{\pi}{y} \log(1+ay).$$

Cambiando in questo integrale x in $\frac{1}{x}$ e facendo $a=1$, abbiamo

$$\int_0^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{1+y^2x^2} = \frac{\pi}{y} \log(1+y);$$

moltiplicando per ydy e integrando tra 0 e β si ha

$$\int_0^{\beta} y dy \int_0^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{1+y^2x^2} = \pi \int_0^{\beta} \log(1+y) dy = \pi(1+\beta) \log(1+\beta) - \pi\beta.$$

Ora possiamo invertire le integrazioni, perchè, oltre ad essere $\int_0^{\beta} dy \int_0^{\gamma} dx \dots = \int_0^{\gamma} dx \int_0^{\beta} dy \dots$, per quanto grande sia γ , è anche per tutti i valori y di $(0, \beta)$

$$\int_{\gamma}^{\infty} y \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{1+x^2y^2} < \beta \int_{\gamma}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx < \tau$$

per tutti i valori di γ maggiori di un certo numero c , giacchè $\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ è integrabile in un intervallo (b, ∞) .

Invertendo le integrazioni abbiamo
www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned}\pi(1+\beta)\log(1+\beta) - \pi\beta &= \int_0^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \int_0^{\beta} \frac{y dy}{1+x^2 y^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \log(1+\beta^2 x^2) \frac{dx}{x^2},\end{aligned}$$

da cui ancora, posto $x = \frac{z}{c}$, $\beta = \frac{c}{g}$,

$$\int_0^{\infty} \log\left(1 + \frac{c^2}{z^2}\right) \log\left(1 + \frac{z^2}{g^2}\right) \frac{dz}{z^2} = 2\pi\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{g}\right) \log\left(1 + \frac{c}{g}\right) - \frac{2\pi}{g}.$$

In particolare

$$\int_0^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \log(1+z^2) \frac{dz}{z^2} = 2\pi(2\log 2 - 1).$$

$$4) \text{ Abbiamo } \int_0^1 dy \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2} dy = \frac{\pi}{2} \text{ perchè}$$

$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x}$ vale $\frac{\pi}{2}$ se y è positivo, e vale zero se y è zero, ma

nel calcolo del nostro integrale possiamo porre $\frac{\pi}{2}$ in luogo di zero per $y=0$, perchè con ciò non cambia il valore dell'integrale stesso. Abbiamo perciò altresì

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \int_0^1 dy \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx + \int_1^1 dy \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_1^1 dy \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx.\end{aligned}$$

Nell'integrale doppio possiamo invertire le integrazioni per-
 chè $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx$ è uniformemente convergente nell'intervallo
 $(\varepsilon, 1)$ di y se ε è positivo e diverso da zero, essendo

$$\int_{\gamma}^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\text{sen } z}{z} dz,$$

e, dato τ , esiste un numero c tale che per $\gamma \geq c$ è $\left| \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\text{sen } z}{z} dz \right| < \tau$;

cosicchè, per tutti i valori di $\gamma \geq \frac{c}{\varepsilon}$ e per tutti i valori di y
 dell'intervallo $(\varepsilon, 1)$ essendo $\gamma y \geq \gamma \varepsilon \geq c$, sarà $\left| \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx \right| < \tau$.

Avremo in conseguenza

$$\frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_{\varepsilon}^1 \text{sen}(yx) dy = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{\cos \varepsilon x - \cos x}{x},$$

ossia, osservando che hanno valore determinato finito gli in-
 tegrali $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1 - \cos x)$, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1 - \cos \varepsilon x)$, abbiamo ancora

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1 - \cos x) - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1 - \cos \varepsilon x) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1 - \cos x) - \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2} (1 - \cos z) = (1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1 - \cos x), \end{aligned}$$

e quindi

www.libtool.com.cn

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1 - \cos x) = \frac{\pi}{2}, \text{ ossia } 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

da cui, cambiando $\frac{x}{2}$ in x ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5) Osservando che si ha $e^{-x^2} = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{1 \cdot 2} + \dots}$,

si riconosce subito che l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

ha valore determinato finito, che ci proponiamo calcolare.

Posto $z = x\sqrt{y}$, $y > 0$, e presa x come nuova variabile di integrazione, abbiamo

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2 y} \sqrt{y} dx, \text{ da cui } I \frac{1}{\sqrt{y}} = \int_0^{\infty} e^{-x^2 y} dx;$$

moltiplicando per $e^{-y} dy$ e integrando tra $\varepsilon > 0$ e ∞ , ciò che può farsi perchè $\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$ è integrabile in questo intervallo, otteniamo

$$(2) \quad I \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y}} = \int_{\varepsilon}^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-y(1+x^2)} dx,$$

Ora dico che possiamo invertire le integrazioni nel secondo membro. Infatti, per quanto grande si prenda γ è determinato

$$\int_0^{\gamma} dx \int_0^{\infty} e^{-\gamma(1+x^2)} dy = \int_0^{\gamma} dx \frac{e^{-\gamma(1+x^2)}}{1+x^2}$$

e per quanto grandi siano γ e β è

$$\int_0^{\gamma} dx \int_0^{\beta} e^{-\gamma(1+x^2)} dy = \int_0^{\beta} dy \int_0^{\gamma} e^{-\gamma(1+x^2)} dx,$$

perchè $e^{-\gamma(1+x^2)}$ è sempre continua e $\int_0^{\infty} e^{-\gamma(1+x^2)} dy$ è uniformemente convergente nell'intervallo $(0, \infty)$ di x , la qual cosa si riconosce subito osservando che

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma(1+x^2)} dy = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{e^{\gamma(1+x^2)}} < \frac{1}{e^{\gamma}}.$$

Rimane quindi solo a dimostrare che, dato τ , esiste un numero c tale che per $\gamma \geq c$ è $\int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-\gamma(1+x^2)} dx < \tau$. A tale scopo

$$\text{osservando che } e^{-\gamma(1+x^2)} = \frac{1}{1 + \gamma(1+x^2) + \frac{\gamma^2(1+x^2)^2}{1 \cdot 2} + \dots},$$

quindi

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma(1+x^2)} dx < \frac{2}{\gamma^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{\gamma^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1+\gamma^2} - \frac{1}{2} \arctg \gamma \right),$$

$$\int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-\gamma(1+x^2)} dx < \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{1+\gamma^2} - \arctg \gamma \right) \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \gamma \right) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\gamma}{1 + \gamma^2},$$

www.libtool.com.cn

si scorge la esistenza d'un numero c tale che per $\gamma \geq c$ risulti

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} dy \int_{\gamma}^{\infty} e^{-y(1+x^2)} dx < \tau.$$

Provata così la invertibilità delle integrazioni nella formola (2), abbiamo subito

$$I \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{\infty} dx \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-y(1+x^2)} dy = \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-\varepsilon(1+x^2)}}{1+x^2},$$

e, poichè l'ultimo integrale è finito e continuo, a destra, per $\varepsilon=0$, avremo, al limite per $\varepsilon=0$,

$$I \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

ovvero, posto $\sqrt{y} = u$ nell'integrale del primo membro, $I = \frac{\pi}{2}$, dalla quale

$$I = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ESERCIZI.

1. Dalla formola $\int_0^{\infty} \log(1+k \cos x) \frac{dx}{\cos x} = \pi \operatorname{arc} \operatorname{sen} k,$

$|k| \leq 1$, (Eser. 4.º pag. 202) si ricavi $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+k \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}},$

$|k| < 1.$

2. Dalla formula $\int_0^{\pi} \cos mx \log(1-2x \cos x + x^2) dx = -\frac{\pi x^m}{m}$,

m intero positivo, $|x| < 1$, se ne ricavi un'altra, che combinata con quella dell'esercizio 12° a pag. 204 permette di trovare

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx}{1-2x \cos x + x^2} dx = \frac{\pi x^m}{1-x^2}, \quad |x| < 1, \quad m \text{ int. pos.}$$

3. Dalla formula $\int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin mx}{1-2x \cos x + x^2} dx = \frac{\pi}{2} x^{m-1}$, $|x| < 1$, m

int. pos. (Es. 12° a pag. 204) si ricavi

$$\int_0^{\pi} \sin mx \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a \sin x}{1-a \cos x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{a^m}{m}, \quad |a| < 1, \quad m \text{ int. pos.}$$

Si dimostri che questa formula vale anche per $|a| = 1$.

4. Posto $I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(xy)}{x(1+x^2)} dx$, osservando che

$$\frac{dI}{dy} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}, \text{ si provi che } I = \frac{\pi}{2} \log(1+y).$$

(Questo integrale è lo stesso dell'esempio 1. a pag. 240).

$$5. \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin ax \, dx \, dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{» } a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{» } a < 0. \end{cases}$$

6. Dalla formula $\int_0^1 x^{y-1} dx = \frac{1}{y}$, $y > 0$, si ricavino, dimo-

strandole rigorosamente, le formole

www.libtool.com.cn

$$\int_0^1 x^{y-1} (\log x)^n dx = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \dots n}{y^{n+1}}, \quad n \text{ int. pos.},$$

$$\int_0^1 \frac{x\beta^{-1} - x^{\alpha-1}}{\log x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \text{ e da queste le altre}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-yx} x^n dx = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{y^{n+1}}, \quad y > 0, n \text{ int. pos.},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

7. Dalle formole

$$(A) \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0.$$

si ricavino le

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x \sin bx dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} x \cos bx dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad a > 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx dx &= \frac{1}{2} \log \frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 + b^2}, \\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx dx &= \arctg \frac{\beta}{b} - \arctg \frac{\alpha}{b} \end{aligned} \right\} \alpha > 0, \beta > 0.$$

Si provi che l'ultimo integrale è continuo rapporto ad α (o a β) anche per $\alpha = 0$, (o per $\beta = 0$), cosicchè

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \sin bx dx = \arctg \frac{\beta}{b}.$$

Si provi che

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \sin bx \, dx = \int_0^{\infty} \left[\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \sin bx \right] dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx,$$

e si ritrova così $\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2}$, come già si vide in modo

affatto differente a pag. 198 e seg.

8. Dalle (A) si ricavi ancora, se $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin \beta x - \sin \alpha x}{x} dx = \arctan \frac{\beta}{a} - \arctan \frac{\alpha}{a},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^2 + a^2}{\alpha^2 + a^2},$$

Si provi che, l'ultimo integrale essendo continuo rapporto ad a anche per $a=0$, si ha $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}$.

Si noti che $\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = -\frac{1}{\alpha}$, mentre che non è lecito derivare sotto il segno integrale.

9. Se $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{a^2}{x^2} dx$, si trovi la relazione $\frac{dI}{da} = -2I$ ossia $\frac{dI}{I} = -2da$, da cui si ricavi $I = e^{-2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

10. $\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}$ (Si derivi rapporto a b e si operi come nell'esercizio precedente).

11. Sia la funzione $f(x, y)$ che per x, y entrambi diversi da zero è

www.libtool.com.cn

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \left(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) - \frac{4xy}{x^2 + y^2} \cos \left(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right)$$

e che è $f(x, y) = 0$, se una o tutte e due le variabili sono zero. Sia inoltre la funzione $\psi(x, y)$ che per x, y entrambe diverse da zero è $\psi(x, y) = x \operatorname{sen} \left(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right)$ e che è $\psi(x, y) = 0$ se una o tutte e due le variabili sono zero.

Si verifichi che, essendo allora $\psi'_x(x, y) = f(x, y)$ per tutti i valori di x, y , abbiamo

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dx = \psi(x, y).$$

Per y diverso da zero vale la derivazione sotto il segno integrale rapporto ad y ; si spieghi come avvenga che non vale per $y = 0$, avendosi

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 4, \quad \int_0^{\infty} f'_y(x, 0) dx = 0.$$

12. Si spieghi perchè $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}$, mentre

$$\text{che } \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}.$$

Calcolo di alcuni integrali definiti.

Proprietà fondamentali degli integrali Euleriani.

89. Applichiamo al calcolo di alcuni integrali definiti tutti i mezzi che ci porgono le teorie sin qui svolte.

Riconoscendosi facilmente la integrabilità della funzione $\frac{\cos ax}{1+x^2}$ nell'intervallo $(0, \infty)$ ci proponiamo ora di calcolare

$$(1) \quad I = I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

Possiamo derivare $I(a)$ rapporto ad a , derivando sotto il segno integrale, per $a=r>0$ ottenendo così

$$(2) \quad I'(r) = - \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx.$$

Invero, se si osserva che, integrando per parti, è

$$\int_0^b \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx = - \frac{b \cos rb}{r(1+b^2)} + \frac{1}{r} \int_0^b \cos rx \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

da cui

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \cos rx \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx,$$

od anche osservando che $\frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \frac{\operatorname{sen} rx}{x}$, si riconosce la integrabilità di $\frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}$ nell'intervallo $(0, \infty)$. Inoltre, poichè

$$\int_{\gamma}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx = \frac{\gamma \cos r\gamma}{r(1+\gamma^2)} + \frac{1}{r} \int_{\gamma}^{\infty} \cos rx \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

e preso $0 < r_0 < r$ è quindi

$$\left| \int_{\gamma}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{1}{r_0} \frac{\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{1}{r_0} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} dx,$$

si vede che, dato σ , si potrà prendere c tale che per $\gamma \geq c$ e qualunque ϵ siam in di un intorno (r_0, r_1) di r risulti

$$\left| \int_{\gamma}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx \right| < \sigma.$$

Possiamo poi integrare rispetto ad a tra 0 e r i due membri della (1), integrando nel secondo membro sotto il segno integrale, ottenendo così

$$(2) \quad \int_0^r I(a) da = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^r \cos ax da = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \frac{\operatorname{sen} rx}{x},$$

giacchè la integrazione sotto il segno integrale è lecita, essendo $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ uniformemente convergente nell'intervallo $(0, r)$ di a , come subito si riconosce dalla formola

$$\left| \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \right| \leq \int_{\gamma}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Dalla (3) sottraendo la (2) abbiamo

$$(4) \quad \int_0^r I(a) da - I'(r) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} rx}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

che vale per r positivo. Moltiplicando questa eguaglianza per e^{-r} , e prendendo gli integrali indefiniti dei due membri rispetto ad r , ciò che può farsi, perchè $I'(r)$ è funzione continua di r , come si può verificare, abbiamo

$$\int e^{-r} \left[\int_0^r I(a) da \right] dr - \int I'(r) e^{-r} dr - \frac{\pi}{2} \int e^{-r} dr = C:$$

e quindi, giacchè integrando per parti è

www.libtool.com.cn

$$\int e^{-r} \left[\int_0^r l(a) da \right] dr = -e^{-r} \int_0^r l(a) da + \int e^{-r} l(r) dr$$

$$\int l(r) e^{-r} dr = e^{-r} l(r) + \int e^{-r} l(r) dr,$$

si ha

$$e^{-r} \left[- \int_0^r l(a) da - l(r) + \frac{\pi}{2} \right] = C.$$

Facendo convergere r a zero ed osservando che $l(r)$ è continua per $r=0$ e che $l(0) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, si trova $C=0$, e in conseguenza

$$(5) \quad \int_0^r l(a) da + l(r) - \frac{\pi}{2} = 0,$$

da cui, in virtù della (4), $l'(r) + l(r) = 0$, ossia

$$\frac{dl(r)}{dr} = -l(r), \quad \frac{dl(r)}{l(r)} = -dr, \quad d \log l(r) = -dr,$$

dalla quale si vede che le funzioni $\log l(r)$ e $-r$ per qualunque valore positivo di r non possono differire che per una costante, che indicheremo con $\log C$, così chè $\log l(r) = -r + \log C$, ossia $\log \frac{l(r)}{C} = -r$. $l(r) = Ce^{-r}$.

Sostituito questo valore di l nella (5), essa ci dà

$$C \int_0^r e^{-a} da + Ce^{-r} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{ossia} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

ed in conseguenza $I(r) = \frac{\pi}{2} e^{-r}$, formola dimostrata così per www.libtool.com.cn r positivo, ma che vale anche, come si vede, per $r=0$. Cosichè

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Cambiando in questa formola a in ac e x in $\frac{x}{c}$, otteniamo, più generalmente,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{c^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2c} e^{-ac}.$$

Osservando che cambiando a in $-a$ non cambia il primo membro, possiamo scrivere

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{c^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2c} e^{-|a|c},$$

valevole qualunque sia a , oppure $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{c^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2c} e^{\mp ac}$, dove si prenda il segno $-$ se $a > 0$, il segno $+$ se $a < 0$.

Per a diverso da zero, si può derivare rapporto ad a sotto il segno integrale, cosichè

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{c^2+x^2} dx = \pm \frac{\pi}{2c} e^{\mp ac}, \left(\begin{array}{l} \text{segno superiore se } a > 0 \\ \text{segno inferiore se } a < 0 \end{array} \right).$$

Questa formola non vale, come si vede, per $a=0$.

90. Se nella formola $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ cambiamo x in $x\sqrt{y}$ otteniamo

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2 y} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}, \quad (y > 0).$$

Sommando questa formola con quella che da essa ricaviamo cambiando x in $-x$, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 y} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{y}}, \quad (y > 0).$$

Se in questo integrale facciamo $y=1$ e poi cambiamo x in $x \pm z$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 \mp 2ax} dx = e^{a^2} \sqrt{\pi},$$

dalla quale, cambiando x in $x\sqrt{a}$ e ponendo $2x\sqrt{a}=b$, ricaviamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 \mp bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad (a > 0).$$

Della formola (1), che ci ha ora fornito queste formole notevoli, ci serviremo ancora per ricavare il valore di $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy$, che ha valore determinato, perchè se in $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(z^2) dz$, che sappiamo avere valore determinato (N. 67, es. 3), poniamo $z^2=y$ abbiamo

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(z^2) dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy.$$

Ponendo per $\frac{1}{\sqrt{y}}$ il valore tratto dalla (1) abbiamo

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin y dy \int_0^{\infty} e^{-x^2 y} dx.$$

Ora nel secondo integrale dell'ultimo membro possiamo invertire le integrazioni. Invero ha valore determinato l'integrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2 y} \sin y dy &= \int_0^{\infty} dx \left[\frac{e^{-x^2 y} (-x^2 \sin y - \cos y)}{1 + x^4} \right]_0^{\infty} \\ &= \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x^2 \epsilon} (x^2 \sin \epsilon + \cos \epsilon)}{1 + x^4} \end{aligned}$$

(N. 47), notando che, per $x=0$, in luogo dell'integrale interno che allora non ha più significato, si intende sostituito un qualunque valore finito, il che non altera il valore dell'integrale rispetto alla x . È uniformemente convergente nell'intervallo (ϵ, ∞) per y l'integrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2 y} \sin y dx$, come ricavasi dalla formola

$$\left| \int_{\gamma}^{\infty} e^{-x^2 y} \sin y dy \right| \leq \int_{\gamma}^{\infty} e^{-x^2 y} dx.$$

Inoltre essendo

$$\int_0^{\infty} dx \int_{\gamma}^{\infty} e^{-x^2 y} \sin y dy = \int_0^{\delta} dx \int_{\gamma}^{\infty} e^{-x^2 y} \sin y dy + \int_{\delta}^{\infty} dx \int_{\gamma}^{\infty} e^{-x^2 y} \sin y dy$$

potremo cominciare dal fissare δ in guisa che il primo integrale del secondo membro risulti minore numericamente di qualunque numero positivo prefissato, perchè

$$\left| \int_0^\delta dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy \right| = \left| \int_0^\delta dx \frac{e^{-x^2 \gamma} (x^2 \operatorname{sen} \gamma + \cos \gamma)}{1+x^4} \right| < \int_0^\delta dx (1+x^2);$$

cosicchè, osservando che allora è

$$\left| \int_0^\infty dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy \right| < e^{-\delta^2 \gamma} \int_0^\infty dx \frac{1+x^2}{1+x^4},$$

si vede come, dato σ , esista un numero c tale che per $\gamma \geq c$ risulti $\left| \int_0^\infty dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy \right| < \sigma$.

Avremo dunque

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy = \int_0^\infty \operatorname{sen} y dy \int_0^\infty e^{-x^2 y} dx,$$

e la (2) ci dà

$$\left| \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2 \varepsilon} (x^2 \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \varepsilon)}{1+x^4} \right| = \left| \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy \right| \leq \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{\varepsilon},$$

dalla quale

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2 \varepsilon} (x^2 \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \varepsilon)}{1+x^4},$$

ossia, per essere

www.libtool.com.cn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x^2\varepsilon}(x^2 \sin \varepsilon + \cos \varepsilon)}{1+x^4} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

perchè l'integrale del primo membro è continuo, come si riconosce facilmente, anche per $\varepsilon=0$, dove prende il valore

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \text{ e poichè, come è agevole ricavare, } \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(Vedi esercizio 12 a pag. 69), abbiamo in ultimo

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^{\infty} \sin(z^2) dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

In modo analogo si trova

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^{\infty} \cos(z^2) dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

91. La funzione $x^{z-1} e^{-x}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$ se $z > 0$, non integrabile se $z \leq 0$ perchè, essendo sempre positiva, diviene allora infinita di ordine superiore o uguale al primo nel punto $x=0$. L'integrale $\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ si chiama *integrale Euleriano di seconda specie* o anche *funzione gamma*, perchè è una funzione di z che si indica colla notazione $\Gamma(z)$, cioè

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad z > 0.$$

Da questa formola, cambiandovi la variabile di integrazione

x successivamente in $x^{\frac{1}{z}}$, $\log \frac{1}{x}$, kx ($k > 0$), si ottiene

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{\frac{1}{z}}} dx = z\Gamma(z), \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx = \Gamma(z), \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-kx} dx = \frac{\Gamma(z)}{k^z} (k > 0).$$

Osservando che

$$d(e^{-x} x^z) = z x^{z-1} e^{-x} dx - x^z e^{-x} dx,$$

e integrando tra 0 e ∞ i due membri di questa uguaglianza, abbiamo

$$0 = z\Gamma(z) - \Gamma(z+1), \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Da questa formola fondamentale si ricava in particolare

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1, \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2, \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6, \dots$$

$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = 1 \cdot 2 \dots (n-1)$ (n intero positivo), come già vedemmo al n. 88 es. 1). Ricaviamo ancora, se n è intero positivo,

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1) \Gamma(z+n-1),$$

e da questa, ponendovi successivamente $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 in luogo di n e moltiplicando membro a membro tutte le formole ottenute,

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \dots (z+1)z\Gamma(z),$$

dalla quale si scorge come, per avere i valori di $\Gamma(z)$ per qualunque valore positivo di z , basterà aver calcolato i valori di $\Gamma(z)$ per z compreso tra 0 e 1. Così è

$$\Gamma\left(5 + \frac{1}{3}\right) = \left(4 + \frac{1}{3}\right) \left(3 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nella formola $\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-kx} dx = \frac{\Gamma(z)}{k^z}$ poniamo $k=c+y$ dove si suppone $c > 0, y > 0$; allora

$$\int_0^{\infty} e^{-(c+y)x} x^{z-1} dx = \frac{\Gamma(z)}{(c+y)^z},$$

la quale, moltiplicata per $e^{-hy} y^{z_1-1} dy$ essendo $h > 0, z_1 > 0$, ed integrata rispetto ad y tra 0 e ∞ , ciò che è lecito fare come subito si vede, dà

$$\int_0^{\infty} e^{-hy} y^{z_1-1} dy \int_0^{\infty} e^{-(c+y)x} x^{z-1} dx = \Gamma(z) \int_0^{\infty} \frac{e^{-hy} y^{z_1-1}}{(c+y)^z} dy.$$

È agevole riconoscere che si possono invertire le integrazioni nel primo membro, il quale, così facendo, diviene

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} x^{z-1} dx \int_0^{\infty} e^{-(h+x)y} y^{z_1-1} dy = \Gamma(z_1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} x^{z-1}}{(h+x)^z} dx,$$

così chè avremo

$$\Gamma(z) \int_0^{\infty} \frac{e^{-hy} y^{z_1-1}}{(c+y)^z} dy = \Gamma(z_1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} x^{z-1}}{(h+x)^z} dx,$$

dove z, z_1, h, c sono positivi.

Se $z_1 > z$, si vede che gli integrali dei due membri hanno valore determinato anche per $c=0$, e che sono continui nel punto $c=0$, di guisa che potremo passare al limite, per $c=0$, nella formola precedente e sostituire al limite degli integrali gli integrali del limite. Ciò facendo, dopo aver posto $h=1$, otteniamo

$$\Gamma(z) \Gamma(z_1 - z) = \Gamma(z_1) \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{(1+x)^{z_1}} dx, \int_0^{\infty} \frac{x^{z_1-1}}{(1+x)^{z_1}} dx = \frac{\Gamma(z) \Gamma(z_1 - z)}{\Gamma(z_1)}, \quad z_1 > z > 0,$$

dalla quale, posto $z=u$, $z_1-z=v$, abbiamo

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} dx = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}, \quad (u > 0, v > 0).$$

L'integrale del primo membro, che è un integrale a differenziale binomio se u e v sono razionali, chiamasi *integrale Euleriano di prima specie* e si indica con $B(u, v)$.

Posto $x = \frac{y}{1-y}$ abbiamo ancora

$$(1) \quad B(u, v) = \int_0^1 y^{u-1} (1-y)^{v-1} dy.$$

La formula

$$(2) \quad B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

ci fa vedere che $B(u, v) = B(v, u)$ il che potrebbe anche riconoscersi direttamente dalla (1) ponendo $y = 1 - x$.

Ponendo nella (2) $u+v=1$ e quindi supponendo u, v entrambi frazioni proprie, si ha

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{u-1}}{1+x} dx = \Gamma(u) \Gamma(1-u),$$

ossia (vedi n. 66, 2))

$$\Gamma(u) \Gamma(1-u) = \frac{\pi}{\sin u\pi}, \quad 0 < u < 1,$$

la qual formola riduce il calcolo delle funzioni gamma coll'argomento compreso tra $\frac{1}{2}$ e 1 al calcolo di $\Gamma(z)$ dove $0 < z \leq \frac{1}{2}$

In particolare, per $u = \frac{1}{2}$,
www.libtool.com.cn

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}.$$

Posto $x = y^2$, abbiamo $\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, come vedemmo in al-

tro modo al n. 88.

Partendoci dalla formola

$$\Gamma(z) = k^z \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{z-1} dx, \quad (k > 0)$$

ed osservando che $e^x > 1+x$, $e^{kx} > (1+x)^k$ e quindi $e^{-kx} < \frac{1}{(1+x)^k}$,
 si vede che

$$\Gamma(z) < k^z \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)^k} = k^z B(z, k-z),$$

dove si suppone $k > z$, altrimenti $\frac{x^{z-1}}{(1+x)^k}$ diventerebbe all'infinito infinitesima d'ordine inferiore al primo. Cambiando k in $k+z+1$ è

$$\Gamma(z) < (k+z+1)^z B(z, k+1) = k^z \left(1 + \frac{z+1}{k}\right)^z B(z, k+1).$$

Inoltre, essendo

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{z-1} dx > \int_0^1 e^{-kx} x^{z-1} dx,$$

e, poichè dalla formola $e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \dots$ si vede che per $0 < x < 1$ è $e^{-x} > 1 - x$, $e^{-kx} > (1 - x)^k$, abbiamo

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{z-1} dx > \int_0^1 (1-x)^k x^{z-1} dx \text{ ossia } \Gamma(z) > k^z B(z, k+1).$$

Quindi

$$\Gamma(z) = k^z B(z, k+1) \left[1 - \theta + \left(1 + \frac{z+1}{k}\right)^n \right], \quad 0 < \theta < 1,$$

dalla quale, al limite per k crescente indefinitamente,

$$\Gamma(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^z B(z, k+1).$$

Se assumiamo k intero positivo, è

$$B(z, k+1) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(k+1)}{\Gamma(z+k+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{(z+k)(z+k-1) \dots (z+1)z}$$

e quindi

$$\Gamma(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^z \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{z(z+1)(z+2) \dots (z+k)},$$

che potrebbe servire al calcolo approssimato di $\Gamma(z)$.

92. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx,$$

dove p, q, n sono numeri positivi qualunque, e che venne da EULERO indicato col simbolo $\left(\frac{p}{q}\right)$, si riduce subito, ponendo

$x^n = y$, alle funzioni gamma, perchè abbiamo così

www.libtqol.com.cn

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1} (1-y)^{\frac{q}{n}-1} dy = \frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)},$$

da cui si vede che $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

In particolare, se $p+q=n$,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{n}}} = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{n} \pi}, \quad n > p > 0.$$

Se nell'integrale $\int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(a+bx^n)^{p+q}}$, dove $a > 0, b > 0, p > 0,$

$q > 0, p+q > \frac{p}{n}$ si pone $bx^n = ay$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{(a+bx^n)^{p+q}} &= \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}} a^{p+q-\frac{p}{n}}} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{p}{n}-1} dy}{(1+y)^{p+q}} \\ &= \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}} a^{p+q-\frac{p}{n}}} B\left(\frac{p}{n}, p+q-\frac{p}{n}\right), \end{aligned}$$

dalla quale, posto $x = \frac{1-y}{y}$ nell'integrale del primo membro, ricaviamo

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{p-1} y^{nq+(n-1)p-1}}{[ay^n + b(1-y)^n]^{p+q}} dy = \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}} a^{p+q-\frac{p}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma\left(p+q-\frac{p}{n}\right)}{\Gamma(p+q)}.$$

In particolare, per $n=1$ e posto $a=b=c$,

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{p-1} y^{q-1}}{(b+cy)^{p+q}} dy = \frac{1}{b^p(b+c)^q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p>0, q>0.$$

ESERCIZI.

$$1. \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a > b \geq 0 \\ 0 & \text{» } 0 \leq a < b \\ \frac{\pi}{4} & \text{» } a = b > 0. \end{cases}$$

$$2. \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(c^2+x^2)} dx = \pm \frac{\pi}{2c^2} (1 - e^{\mp ac}), \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(c^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4c^2} \left(\frac{1}{c} \pm a \right) e^{\mp ac},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(c^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi a}{4c} e^{\mp ac}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 \cos ax}{(c^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{c} \mp a \right) e^{\mp ac},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \sin ax}{(c^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4} (\pm 2 - ac) e^{\mp ac}, \quad \text{nelle quali formole si deve prendere il segno superiore se } a > 0, \text{ l'inferiore se } a < 0.$$

$$3. \int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{a+bx^n} = \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}} a^{1-\frac{p}{n}}} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{n}\pi}, \quad n > p > 0, a > 0, b > 0.$$

$$\text{Ad es: } \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2p}, \quad p > 0.$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{1-x^{2m}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^{2m}}} = \frac{\pi}{2mp}, \quad m > 0, \quad p > 0. \quad (\text{EULERO}).$$

$$5. \quad \int_0^1 \frac{x^{mn+r} dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} =$$

$$\frac{(r+1)(r+1+n)(r+1+2n)\dots[r+1+(m-1)n]}{r(r+n)(r+2n)\dots(r+mn)} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{n}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{mn} dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{(1+n)(1+2n)\dots[1+(m-1)n]}{n \cdot 2n \cdot 3n \dots mn} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{mn-1} dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{n \cdot 2n \cdot 3n \dots (m-1)n}{(n-1)(2n-1)\dots(mn-1)},$$

nelle quali m è intero positivo, $n > 0$, $r > 0$.

6. Si dimostrino le formole $\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q} \left(\frac{p}{q}\right)$ cioè

$$\int_0^1 x^{p+n-1} (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx = \frac{p}{p+q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx,$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) \left(\frac{q+r}{p}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p+r}{q}\right),$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

$$8. \int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^m dx = \sqrt[n]{m} \frac{\Gamma(m+1) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(m+1 + \frac{1}{n}\right)}, \quad m > 0, \quad n > 0;$$

se m è intero positivo

$$\int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^m dx = \sqrt[n]{m} \frac{n}{n+1} \frac{2n}{2n+1} \frac{3n}{3n+1} \cdots \frac{mn}{mn+1}. \quad (\text{STURM}).$$

$$9. \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx = (b-a) \sqrt{\pi}.$$

(Si ponga $I_1 = \int_0^{\gamma} e^{-\frac{a^2}{x^2}} dx$, $I_2 = \int_0^{\gamma} e^{-\frac{b^2}{x^2}} dx$, e si calcoli il

$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (I_1 - I_2)$, dopo avere convenientemente trasformato I_1 e I_2).

$$10. \int_0^{\infty} \log(1 - 2a \cos bx + a^2) \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \pi \log(1 - ae^{-b}) & \text{se } |a| < 1 \\ \pi \log(a - e^{-b}) & \text{se } |a| > 1. \end{cases}$$

(Si sviluppi in serie il logaritmo (esercizio 13 a pag. 205)).

$$11. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1-2a \cos bx + a^2)} = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1-a^2)} \frac{1+ae^{-b}}{1-ae^{-b}} & \text{se } |a| < 1 \\ \frac{\pi}{2(a^2-1)} \frac{a+e^{-b}}{a-e^{-b}} & \text{se } |a| > 1; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} bx \, dx}{(1+x^2)(1-2a \cos bx + a^2)} = \begin{cases} \frac{\pi}{2(e^b - a)} & \text{se } |a| < 1 \\ \frac{\pi}{2a(ae^b - 1)} & \text{se } |a| > 1. \end{cases}$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \log \cos x \, dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{4n}, \quad n \text{ intero positivo}$$

(si potrà usare la formola $\frac{\cos mx}{\cos x} = 2 \cos(m-1)x - \frac{\cos(m-2)x}{\cos x}$ dopo avere trasformato convenientemente l'integrale).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \log \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi}{4n}, \quad n \text{ intero positivo.}$$

$$13. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x\sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{\pi}{2} \log(a + \sqrt{1+a^2}) \quad (\text{si derivi rapporto ad } a \text{ etc.}).$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n} \, dx = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}, \quad n > m > 0.$$

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1+x^n} \frac{dx}{\log x} = \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{2n}, \quad n > m > 0.$$

$$\text{Ad es. } \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \frac{dx}{\log x} = -\frac{1}{2} \log 3, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+x^2} \frac{dx}{\log x} = \frac{1}{2} \log 3.$$

$$15. \int_0^{\pi} x \log \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi^2}{2} \log 2$$

(Si cambi x in $\pi - y$ nell'integrale $\int_0^\pi x^2 \log \sin x \, dx$ etc.).
www.libtool.com.cn

$$16. I = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x} + (\beta - \alpha)x e^{-\alpha x}}{x^2} dx = \alpha - \beta + \beta \log \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$(Si \text{ osservi che } I = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_s^\infty \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}}{x^2} dx + \int_s^\infty \frac{(\beta - \alpha)e^{-\alpha x}}{x} dx \right] \text{ etc.})$$

Integrali doppi definiti estesi ai punti di un campo.

93. Sia $z = f(x, y)$ funzione univalente finita dei punti (x, y) di un campo finito C , limitato da una o più curve che ammettano generalmente tangente determinata ed i cui archi siano di lunghezza finita. Decomponiamo C in n parti od elementi, le cui aree¹⁾, diverse da zero, indicheremo con $h_1, h_2, \dots, h_n$, notando che chiameremo, per brevità, questi elementi, gli elementi $h_1, h_2, \dots, h_n$. Questi elementi siano racchiusi da curve di lunghezza determinata finita.

Formiamo la somma $S = \sum z_s h_s$, ove z_s indica un valore qualunque compreso tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) dei valori che $f(x, y)$ prende nell'elemento h_s ; questa somma S è l'analoga a quella per le funzioni ad una variabile di cui si tratta nel n. 5.

Noi diremo che, col diminuire indefinitamente di tutti gli elementi h_s , S ha un limite L , quando, ad ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ corrisponde un numero positivo δ tale che, per qualunque scomposizione del campo C , per

¹⁾ Abbiamo riunito in seguito tutte le applicazioni geometriche degli integrali definiti, dove verrà esattamente definito il concetto di area di una parte di piano racchiusa da una curva. Ci serviamo qui di questo concetto, ma il lettore potrà leggere prima quel poco che occorre nelle prime pagine delle dette applicazioni.

la quale gli elementi h_s siano ciascuno rinchiudibile in un circolo di raggio δ e qualunque sia la scelta delle quantità z_s , risulti $|S - L| < \sigma$, e scriviamo $\lim S = L$.

Indicata con A l'area del campo C , con m, M il limite inferiore e superiore dei valori di $f(x, y)$ in C , si ha, qualunque siano gli elementi h_s , $Am \leq S \leq AM$, e si vede così che, se il limite di S esiste, esso è finito.

Questo limite si indica coi simboli $\int_C f(x, y) dC$, $\iint_C f(x, y) dC$, $\int_C f(x, y) dC$, $\iint f(x, y) dC$ e si legge, *integrale doppio*, o *integrale, di $f(x, y)$ esteso al campo C* ; e la funzione $f(x, y)$ dicesi integrabile o atta alla integrazione nel campo C , quando tal limite esiste.

Ora si leggano i paragrafi 6 e 7 a cominciare dalle parole « Vediamo ora quale sia la condizione necessaria e sufficiente ecc. », avendo l'avvertenza di sostituire alle parole « $y_s, f(x)$, intervallo (a, b) , intervallo h_s , intervalli le cui ampiezze sono minori di un dato numero δ » le altre « $z_s, f(x, y)$, campo C , elemento h_s , elementi rinchiudibili entro un cerchio di raggio δ ». Si faccia inoltre questa semplice modificazione: nella pagina 12 in luogo di dire « gli altri intervalli h_β conterranno uno o più punti della prima divisione etc. » si dica: « gli altri elementi h_β conterranno una o più delle linee che formano il contorno degli elementi della prima divisione, ma, se indichiamo con T la somma delle lunghezze di tutti questi contorni, essendo così T quantità finita determinata, la somma delle aree h_β è certamente minore di $4\delta T$, perchè se si immagina un cerchio di raggio 4δ , che scorra col centro lungo tutti questi contorni, tutti questi h_β cadono dentro all'area generata dal cerchio, e questa non supera $4T\delta$. I corrispondenti termini $k_\alpha(L'_\gamma - z_\beta)$ potranno etc. ». Si sostituisca poi nel seguito $4T$ ad n' , e $4T_1$ ad n'' , dove T_1 indica la quantità analoga a T per la scomposizione di C negli elementi $h''_1, h''_2, \dots, h''_{n''}$.

In questo modo si provano i seguenti teoremi:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la $f(x, y)$ sia integrabile nel campo C è che sia $A = \lambda$; ed allora il

valore comune di questa quantità è il limite di S , quando tutti gli h_i impiccoliscono indefinitamente, cioè è $\int_C f(x, y) dC$;

od anche è

che, dato σ , possa decomporci C in due sistemi speciali di elementi (che potranno anche coincidere) tali che sia $|l_1 - L_1| < \sigma$, essendo l_1 il valore di l corrispondente ad uno, L_1 il valore di L corrispondente all'altro di tali sistemi. Il valore dell'integrale è compreso tra l_1 e L_1 ;

od anche è

che, per ogni numero positivo σ , esista un sistema speciale di elementi $h_1, h_2, \dots, h_n$ tali che per essi sia $D = \sum h_i < \sigma$, od in altre parole, che il limite inferiore dei valori di D sia zero; od infine è

che sia $\lim D = 0$, al diminuire indefinitamente di tutti gli h_i .

Analogamente si proverebbe che se una funzione è integrabile in un campo C lo è pure in qualunque campo C' appartenente a C , come pure si proverebbero i teoremi analoghi a quelli dimostrati ai n. 50, 51, 52 per le funzioni di una variabile.

94. Ogni funzione continua in un campo è ivi integrabile.

Invero, pel teorema al n. 76 pag. 210, dato σ , possiamo decomporre il campo C in elementi h_i relativi, nel modo indicato, ad un corrispondente numero α_i tali che

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\sigma}{3A}, \text{ essendo } A \text{ l'area di } C \text{ e } (x', y'), (x'', y'')$$

due punti qualunque di h_i ; ossia, poichè vi saranno sempre in h_i

$$\text{dei punti } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ pei quali è } L_i - f(x_1, y_1) < \frac{\sigma}{3A},$$

$$f(x_2, y_2) - l_i < \frac{\sigma}{3A}, \text{ in modo che sia } L_i - l_i < \frac{\sigma}{A} \text{ ed allora è}$$

$$D = \sum h_i (L_i - l_i) < \frac{\sigma}{A} \sum h_i = \sigma,$$

ossia $\lim D = 0$, e la funzione è integrabile.

95. Ogni funzione finita e discontinua in punti e lungo linee, in numero finito, di un campo è integrabile nel campo stesso ¹⁾.

Sia la $f(x, y)$ discontinua nei punti $c_1, c_2 \dots c_n$ e in tutti i punti delle linee $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_r$ di C e siano M, m i suoi limiti superiore ed inferiore in C . Assegnato il numero σ , togliamo dal campo C i punti c e le linee γ mediante intornoi le cui aree ε, α siano tali che

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r < \frac{\sigma}{2(M-m)}.$$

Nel rimanente campo C_1 la $f(x, y)$ è continua e potremo scomporre C_1 in elementi h_i tali che risulti $D_1 = \sum h_i (L_i - l_i) < \frac{\sigma}{2}$; cosicchè se consideriamo la quantità D relativa alla scomposizione di C negli elementi h_i, ε, α , è

$$D < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2(M-m)} (M-m) = \sigma,$$

e perciò, giacchè dato σ possiamo scomporre C in elementi tali che risulti $D < \sigma$, la funzione è integrabile in C .

Si intende anche come la funzione sia integrabile se è discontinua in numero infinito di punti riunibili tra loro mediante un numero finito di linee di lunghezza finita.

96. Se $f(x, y)$ è integrabile nel campo C , cambiando il suo valore in punti e linee di C , in numero finito, indicata con $f_1(x, y)$ la funzione che così si ottiene, è $f_1(x, y)$ integrabile in C e si ha $\int_C f(x, y) dC = \int_C f_1(x, y) dC$, o, più generalmente, $\int_{C_1} f(x, y) dC_1 = \int_{C_1} f_1(x, y) dC_1$, essendo C_1 una parte qualunque di C .

Siano $c_1, c_2 \dots c_n$ i punti, $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_r$ le linee ove si cambia il valore di $f(x, y)$, e sia B il limite superiore della differenza

¹⁾ Si intende linee di lunghezza finita determinata.

numerica tra $f(x, y)$ e $f_1(x, y)$ nel campo C , T la lunghezza di tutte le linee γ .

Si decomponga il campo in elementi h_s , e nella somma $\Sigma h_s z'_s$, indichi z'_s un valore arbitrario di $f_1(x, y)$ compreso tra il limite inferiore e superiore (questi inclusi) dei valori di f_1 in h_s , e si prenda $z_s = z'_s$ se l'elemento h_s non contiene alcun punto c o alcuna parte di alcuna linea γ , e ove ciò avvenga sia z_s un valore qualunque tra il limite inferiore e superiore (questi inclusi) dei valori di $f(x, y)$ in h_s .

Assegnato σ prendiamo $\delta < \frac{\sigma}{2(n+4T)B}$ e tale che per gli h_s rinchiudibili in circoli di raggio δ sia

$$|\Sigma h_s z_s - \int_C f(x, y) dC| < \frac{\sigma}{2},$$

ciò che ha luogo per la ipotesi sulla integrabilità di $f(x, y)$. Inoltre

$$|\Sigma h_s z'_s - \Sigma h_s z_s| = |\Sigma h_s (z'_s - z_s)| < (n\delta + 4\delta T)B < \frac{\sigma}{2},$$

e quindi

$$|\Sigma h_s z'_s - \int_C f(x, y) dC| < \sigma$$

per qualunque decomposizione di C in elementi h_s soddisfacenti alla precedente condizione e qualunque sia la scelta di z'_s , e questa formola dice perciò che $f_1(x, y)$ è integrabile in C ed è $\int_C f_1(x, y) dC = \int_C f(x, y) dC$.

97. Vediamo ora come possa ottenersi il valore dell'integrale, esteso ad un campo, mediante due successive integrazioni semplici, ciascuna rispetto ad una variabile.

Si supponga x, y siano coordinate cartesiane ortogonali, a, b le ascisse estreme, α, β le ordinate estreme del campo C , ove si suppone integrabile la $f(x, y)$. Si divida l'intervallo (a, b) , sull'asse dell'ascisse, in parti $k_1, k_2 \dots k_n$ mediante i punti $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$, dai quali si condurranno delle parallele all'asse

delle ordinate, e l'intervallo (α, β) , sull'asse delle ordinate, in parti $p_1, p_2, \dots, p_m$, mediante i punti $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$, dai quali si condurranno delle parallele all'asse delle ascisse. Il campo C sarà così decomposto in elementi rettangolari h_{sr} di area $k_s p_r$, o che sono parte di elementi rettangolari, e per questi ultimi l'area h_{sr} non sarà uguale a $k_s p_r$. Le due somme $\Sigma h_{sr} z_{sr}$, $\Sigma k_s p_r z_{sr}$, ove z_{sr} indica il solito valore di $f(x, y)$ relativo all'elemento h_{sr} , differiranno tra loro solamente per i termini che corrispondono ad elementi h attraversati dal contorno di C, ed il valore assoluto della somma di tali termini è minore di $8\delta TM$, se gli elementi h sono rinchiudibili in cerchi di raggio δ e T indica la lunghezza del contorno di C ed M il limite superiore dei valori assoluti di $f(x, y)$ in C; quindi le due somme precedenti differiscono per una quantità che può rendersi numericamente minore di qualunque numero prefissato, cosicchè la seconda somma avrà lo stesso limite della prima, cioè avremo

$$(1) \quad \int_C f(x, y) dC = \lim \Sigma k_s p_r z_{sr}.$$

Sia y_0 un valore dell'intervallo (α, β) ; consideriamo la somma $\Sigma' k_s L_s(y_0)$, dove la somma Σ' è estesa a tutte le k_s cui corrispondono le parti della retta $y = y_0$ appartenenti a C e $L_s(y_0)$ è il limite superiore dei valori di $f(y_0, x)$ nell'intervallo k_s , sulla retta $y = y_0$, o nella parte di esso intervallo che appartiene al campo C. Al diminuire dei k_s tal somma ha un limite $\lambda(y_0)$, che è il limite inferiore dei suoi valori ¹⁾, cosicchè $\lambda(y_0) = \lim \Sigma' k_s L_s(y_0)$.

¹⁾ Questa somma è analoga alla $L = \Sigma h_s L_s$ della pagina 9, per la quale si vide che esisteva un limite inferiore λ . Si prova subito che $\lim L = \lambda$ con dimostrazione del tutto simile a quella della pag. 12. Invero poichè λ è il limite inferiore di L, dato σ , esisterà una divisione di (a, b) in n' parti h'_s tali che $\Sigma_1^{n'} h'_s L'_s - \lambda < \frac{\sigma}{2}$.

Si scomponga ora (a, b) in parti h_s minori di $\delta < \frac{\sigma}{4n'M}$ ove M in-

Analogamente $\Lambda(y_0) = \lim \Sigma' k_s l_s(y_0)$, dove $l_s(y_0)$ è il limite inferiore etc.

Ciò posto, poichè gli elementi $k_s p_r$ possono farsi impiccioline comunque, e poichè è arbitraria la scelta dei z_r , potremo scrivere la formola (1) così:

$$\int_C f(x, y) dC = \lim \sum_1^m p_r \left\{ \lim \Sigma' k_s l_s(y) \right\} = \lim \sum_1^m p_r \left\{ \lim \Sigma' k_s l_s(y) \right\}$$

dove y indica un valore qualunque dell'intervallo $(y_r, \dots, y_r)$, ovvero

$$(2) \quad \int_C f(x, y) dC = \lim \sum_1^m p_r \lambda(y) = \lim \sum_1^m p_r \Lambda(y).$$

Questa ultima formola dice che le funzioni di y , $\lambda(y)$, $\Lambda(y)$, sono integrabili nell'intervallo (α, β) e che la differenza $\lambda(y) - \Lambda(y)$ è pure integrabile ed il valore dell'integrale è zero. Ciò avviene non solo nell'intervallo (α, β) ma in qualunque porzione comunque piccola di esso, giacchè varrà una formola analoga alla (2) in qualunque parte C' del campo C , essendo anche in C' integrabile la $f(x, y)$.

Ora, poichè l'integrale di $\lambda(y) - \Lambda(y)$ esteso a qualunque parte di (α, β) è zero ed è $\lambda(y) \leq \Lambda(y)$, si vede che in qualunque tratto di (α, β) vi devono essere punti y' pei quali $\lambda(y') = \Lambda(y')$ perchè, se ciò non fosse, detto integrale, i cui elementi hanno

dica il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ in (a, b) . Avremo

$$\sum_1^n h_s L_s = \sum_1^m k_\alpha L_\beta, \quad \sum_1^{n'} h'_s L'_s = \sum_1^m k_\alpha L'_\gamma, \quad \sum_1^n h_s L_s - \sum_1^{n'} h'_s L'_s = \sum_1^m k_\alpha (L_\beta - L'_\gamma).$$

Per gli h_β che sono contenuti in qualche h'_γ è $L'_\gamma = L_\beta$ ed i corrispondenti termini della somma precedente sono zero; gli altri h_β sono al più $n' - 1$ e pel corrispondente termine è $k_\alpha |L_\beta - L'_\gamma| < k_\alpha 2M$ e quindi $|\sum_1^n h_s L_s - \sum_1^{n'} h'_s L'_s| < n' 2M < \frac{\sigma}{2}$, ed in conseguenza ancora

$$\sum_1^n h_s L_s - \lambda < \sigma.$$

sempre lo stesso segno, ove non siano nulli, non potrebbe essere zero. Ma $\lambda(y') = \Lambda(y')$ è la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista l'integrale $\int f(x, y') dx$ esteso a tutte le parti di retta $y = y'$ contenute nel campo C, parti di retta che indicheremo col simbolo $\varphi(y')$, e tale integrale, che indicheremo con $\int_{\varphi(y')} f(x, y') dx$, è uguale a $\lambda(y') = \Lambda(y')$.

In conseguenza in ogni intervallo p_r esisterà almeno un punto y' ove sarà

$$\lambda(y') = \Lambda(y') = \int_{\varphi(y')} f(x, y') dx,$$

cosichè, supponendo di prendere $y = y'$ nella formola (2), avremo

$$\int_C f(x, y) dC = \lim \sum_1^m p_r \int_{\varphi(y')} f(x, y') dx.$$

Ma questo limite non è altro che l'integrale esteso ad (α, β) della funzione di y , $\int_{\varphi(y)} f(x, y) dy$, e quindi in ultimo

$$\int_C f(x, y) dC = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\varphi(y)} f(x, y) dx.$$

In modo completamente analogo si troverebbe

$$\int_C f(x, y) dC = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\varphi(x)} f(x, y) dy$$

dove $\varphi(x)$ indica il tratto o i tratti di retta, la cui ascissa è x , appartenenti al campo C. ¹⁾

¹⁾ Le considerazioni del presente numero sono tolte da una recente e pregevole nota del prof. C. ARZELA *Sugli integrali doppi* letta all'Accademia delle Scienze di Bologna il 13 dicembre 1891.

1) Il campo C sia il rettangolo formato dalle rette $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$; allora abbiamo

$$\int_C f(x, y) dC = \int_a^b dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

In virtù di questa formola viene tolta la condizione della continuità imposta alla funzione $f(x, y)$ nel n. 85, per dimostrare la invertibilità delle integrazioni con limiti costanti; basta, come si vede, che la funzione sia finita e integrabile nel campo rettangolare C .

2) Il campo C sia costituito dai punti le cui coordinate x, y soddisfanno alla relazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, cioè dalla parte del piano limitata dalla ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, che costituisce il contorno del campo. Allora abbiamo

$$\int_C f(x, y) dC = \int_{-\frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}}^{\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}} f(x, y) dy dx = \int_{-\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}}^{\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}} \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dx dy.$$

Sia ad es.: $f(x, y) = x^2$. Se si osserva che la nostra funzione ha lo stesso valore in punti situati simmetricamente rispetto all'origine delle coordinate, si potrà scrivere

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dC &= 4 \int_{C_1} x^2 dC_1 = 4 \int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy = 4 \int_0^a dy \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} x^2 dx \\ &= 4 \frac{b}{a} \int_0^a x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4a^3}{3b^2} \int_0^b (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy, \end{aligned}$$

dove C_1 indica il quadrante dell'ellisse compreso tra le parti positive degli assi delle coordinate. Eseguite le integrazioni

(Vedi esercizi 28, 29 a pag. 50), si trova $\int_C x^2 dC = \frac{a^3 b \pi}{4}$.

3) Il campo C sia la mezza corona circolare determinata dai cerchi $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ ($a > b$), e dall'asse delle x .

Allora abbiamo

$$\int_C f(x, y) dC = \int_{-a}^{-b} dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy + \int_{-b}^b dx \int_{\sqrt{b^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy + \int_b^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy$$

od anche

$$\int_C f(x, y) dC = \int_0^b dy \left[\int_{-\sqrt{b^2 - y^2}}^{\sqrt{b^2 - y^2}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{b^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx \right] + \int_b^a dy \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx.$$

Sia ad es.: $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, funzione finita continua e perciò integrabile nel nostro campo C . Se indichiamo con C_1 la parte di esso compresa tra le parti positive degli assi coordinati, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dC &= 2 \int_{C_1} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dC_1 = 2 \int_0^b x^2 dx \int_{\sqrt{b^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{y dy}{x^2 + y^2} + 2 \int_b^a x^2 dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{y dy}{x^2 + y^2} \\ &= 2 \int_0^b y dy \int_{\sqrt{b^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{x^2 dx}{x^2 + y^2} + 2 \int_b^a y dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{x^2 dx}{x^2 + y^2} = \frac{2}{9} (a^3 - b^3). \end{aligned}$$

Si troverà che eseguendo le integrazioni del terzo membro si arriva più facilmente al risultato che non eseguendo quelle del quarto, per eseguire le quali ci possiamo servire della for-

mola $\arctg \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} = \arccos m$. In casi analoghi gioverà cercare di intuire prima quali delle due vie sia la migliore per arrivare, o per arrivare più presto, al risultato, quando quest'ultimo possa conseguirsi.

4) Il campo C sia il triangolo rettangolo isoscele limitato dalle rette $y=x$, $y=a$, $x=b$. Allora abbiamo

$$(3) \int_c^b \int_a^x f(x, y) dC = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

Ad es.: se $f(x, y) = x^2 y$ è

$$\int_c^b x^2 y dC = \frac{a^5}{15} + \frac{b^5}{10} - \frac{a^2 b^3}{6}.$$

Questa formola permette di stabilirne un'altra relativa agli integrali semplici definiti, e che contiene come caso particolare quella della integrazione per parti.

Siano $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni finite e integrabili nell'intervallo (a, b) e per la $\varphi(x)$ valga la formola

$$\int_c^x \varphi'(y) dy = \varphi(x) - \varphi(c)$$

qualunque siano i punti c, x di (a, b) . Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \int_a^b f(x) \left[\int_c^x \varphi'(y) dy + \varphi(c) \right] dx \\ &= \varphi(c) \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \int_c^x \varphi'(y) dy \end{aligned}$$

e da questa, facendovi $c=a$ e poi $c=b$,

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \varphi(a) \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \int_a^x \varphi'(y)dy \\ &= \varphi(b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \int_x^b \varphi'(y)dy,\end{aligned}$$

ossia, in virtù della (3), che può qui venire applicata,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \varphi(a) \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi'(y)dy \int_y^b f(x)dx \\ &= \varphi(b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi'(y)dy \int_a^y f(x)dx,\end{aligned}$$

la quale, ove si conosca $\int f(x)dx$ essere $\psi(x)$, si riduce alla solita formola di integrazione per parti, come può senz'altro verificarsi.

98. Si dimostra facilmente che ha luogo per gli integrali doppi estesi ad un campo C il primo teorema della media. Invero, se $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ sono integrabili in C e la $\varphi(x, y)$, ove è diversa da zero, ha sempre lo stesso segno, e m, M sono il limite inferiore e superiore dei valori di $f(x, y)$ in C , il prodotto $f(x, y) \varphi(x, y)$ sarà, per tutti i punti del campo, compreso tra le quantità $m\varphi(x, y)$, $M\varphi(x, y)$ e l'integrale $\int_C f(x, y) \varphi(x, y) dC$ tra le quantità $m \int_C \varphi(x, y) dC$, $M \int_C \varphi(x, y) dC$ o sarà uguale ad una di esse, cosichè

$$\int_C f(x, y) \varphi(x, y) dC = k \int_C \varphi(x, y) dC, \quad m \leq k \leq M.$$

Se la $f(x, y)$ è continua in C , sarà

www.libtool.com.cn

$$\int_C f(x, y) \varphi(x, y) dC = f(x_1, y_1) \int_C \varphi(x, y) dC,$$

dove x_1, y_1 indica un certo punto di C , che potrà anche essere sul contorno di C . ¹⁾

99. Come abbiamo visto, l'integrale $\int_C f(x, y) dC$, o, come anche suole scriversi, $\int f(x, y) dx dy$ si può ridurre ad uno o più integrali della forma $I = \int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy$, dove $b > a$, $y_1 > y_0$ e dx, dy sono positivi. Introduciamo ora in luogo delle variabili x, y , le variabili u, v legate alle prime dalle equazioni

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v),$$

dove le φ, ψ sono funzioni che ammettono derivata integrabile e sono tali che mentre x varia crescendo da a a b , u varia crescendo o decrescendo da u_0 a u_1 , e mentre y varia crescendo da y_0 a y_1 , v varia crescendo o decrescendo da v_0 a v_1 . Avremo allora

$$(1) \quad I = \int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, \psi) \frac{d\psi}{dv} dv = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\varphi}{du} du \int_{v_0}^{v_1} f(\varphi, \psi) \frac{d\psi}{dv} dv.$$

Se $u_0 < u_1, v_0 < v_1$, l'ultimo membro è l' $\int \int f(\varphi, \psi) \frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{dv} du dv$ esteso a quella parte del campo C , cui è esteso l'integrale I , calcolato mediante le nuove variabili u, v ²⁾. Se invece suppo-

¹⁾ Il secondo teorema della media è stato esteso dal prof. ARZELÀ, nella citata memoria, agli integrali doppi.

²⁾ Ossia, se si considerano u, v come coordinate cartesiane ortogonali dei punti di un piano, a questa parte di C corrisponderà in questo piano un campo C_1 ; il terzo membro della (1) è l'integrale della funzione $f(\varphi, \psi) \frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{dv}$ esteso a C_1 .

niamo sia $v_0 > v_1$, allora il dv nell' integrale interno del secondo e terzo membro della (1) è negativo, la $\frac{d\psi}{dv}$ è pure negativa sempre quando v varia da v_0 a v_1 perchè la $y = \psi(v)$ è funzione crescente quando v varia decrescendo da v_0 a v_1 ; ma possiamo scrivere

$$I = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\varphi}{du} du \int_{v_1}^{v_0} f(\varphi, \psi) \left(-\frac{d\psi}{dv} \right) dv = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\varphi}{du} du \int_{v_1}^{v_0} f(\varphi, \psi) \left| \frac{d\psi}{dv} \right| dv,$$

dove $u_0 < u_1, v_1 < v_0$ e du, dv sono positivi, e questo è allora $\int \int f(\varphi, \psi) \frac{d\varphi}{du} \left| \frac{d\psi}{dv} \right| du dv$ esteso a quella parte di C cui è esteso I .

Si ragionerebbe in modo analogo se fosse $u_0 > u_1, v_0 < v_1$ oppure $u_0 > u_1, v_0 > v_1$ e si troverebbe così che è, in ogni caso,

$$I = \iint f(\varphi, \psi) \left| \frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{dv} \right| du dv,$$

l'integrale doppio, colle variabili correnti di integrazione u, v , essendo esteso a quella parte del campo C cui è esteso I .

Cosicchè se le funzioni φ, ψ soddisfanno alle condizioni, già poste, relativamente a tutti gli integrali analoghi ad I nei quali si decompone il nostro integrale, avremo

$$\int_C f(x, y) dx dy = \int_C f[\varphi(u), \psi(u)] \left| \frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{du} \right| du dv.$$

Supponiamo ora che le nuove variabili u', v siano legate alle x, y dalle relazioni $x = \Phi(u'), y = \Psi(u', v)$, cosicchè eliminando u' sia $y = F(x, v)$, e queste funzioni siano tali che, mentre x varia crescendo da a a b , u' vari crescendo o decrescendo da u'_0 a u'_1 e che la $F(x, v)$, per ogni valore di x che si fissa tra a e b , mentre v varia da v_0 a v_1 sempre cre-

scendo o decrescendo, dia per y valori che variano sempre crescendo da y_0 a y_1 .

Abbiamo allora

$$I = \int_a^b dx \int_{v_0}^{v_1} f[x, F(x, v)] \frac{\partial F}{\partial v} dv,$$

e passando quindi dalla variabile x alla u' ed osservando che $F(x, v)$ diviene $\Psi(u', v)$ e che $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial v}$, otteniamo

$$I = \int_{u'_0}^{u'_1} \frac{d\Phi}{du'} du' \int_{v_0}^{v_1} f[\Phi, \Psi] \frac{\partial \Psi}{\partial v} dv,$$

da cui, ragionando come nel caso precedente, si vede che

$$I = \int \int f[\Phi(u'), \Psi(u', v)] \left| \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right| du' dv,$$

l'integrale doppio essendo esteso a quella parte di C , cui è esteso I ; e quindi ancora, se si suppongono ferme le condizioni per le funzioni trasformatrici relativamente agli altri integrali estesi alle altre parti di C , è

$$\int_C f(x, y) dx dy = \int_C f[\Phi(u'), \Psi(u', v)] \left| \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right| du' dv.$$

Sia in ultimo il caso generale

$$(2) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

dove le φ, ψ ammettono derivate parziali finite integrabili.

Potremo sempre scegliere delle funzioni $F(u, v)$, Φ, Ψ in guisa che risulti

$$x = \varphi(u, v) = \Phi[F(u, v)], \quad y = \psi(u, v) = \Psi[F(u, v), v],$$

cosichè sarà lo stesso passare dalle variabili x, y alle u, v mediante le (2), oppure passare prima dalle variabili x, y alle u', v mediante le formole

$$x = \Phi(u') , \quad y = \Psi(u', v)$$

e poi dalle u', v alle u, v mediante le formole

$$u' = F(u, v) , \quad v = v.$$

In seguito alle precedenti considerazioni, il primo passaggio dalle variabili x, y alle u', v ci dà

$$\int_C f(x, y) dx dy = \int_C f[\Phi(u'), \Psi(u', v)] \left| \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right| du' dv.$$

Per eseguire il secondo passaggio dalle variabili u', v alle u, v , dovremo sostituire, nell'integrale del secondo membro, $\left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| du dv$ in luogo di $du' dv$ ed introdurre nella funzione integranda le nuove variabili u, v in luogo delle u', v . Ma si osservi che allora le $\Phi(u')$, $\Psi(u', v)$ diventano $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, e che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial F}{\partial u} , \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \Psi}{\partial u'} \frac{\partial F}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial F}{\partial v} , \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial u'} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial v}$$

dalle quali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \Psi}{\partial u'} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

cosichè avremo

$$\int_C f(x, y) dx dy = \int_C f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv.$$

Abbiamo così la regola: per trasformare l'integrale $\int_C f(x, y) dx dy$ quando alle variabili x, y si sostituiscono le u, v mediante le formole $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, si trasformi la funzione integranda nelle nuove variabili e in luogo di $dx dy$ si sostituisca $du dv$ moltiplicato pel valore assoluto del determinante Jacobiano delle x, y rispetto alle u, v e si estenda l'integrale al campo C .

ESEMPI.

1) Il campo C sia costituito da tutti i punti le cui coordinate x, y soddisfanno alla relazione $x^2 + y^2 \leq a^2$, cioè sia la parte del piano limitata dal circolo $x^2 + y^2 = a^2$, e si voglia calcolare l'integrale $\int_C e^{x^2+y^2} dx dy$.

Colle coordinate cartesiane x, y non si riesce ad eseguire la integrazione, che riesce invece subito colle coordinate polari, ponendo $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

Si trova così

$$\int_C e^{x^2+y^2} dx dy = \int_C e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho e^{\rho^2} d\rho = \pi(e^{a^2} - 1).$$

2) Le due ellissi omofocali

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_1^2 - b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\lambda_2^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2 - b^2} = 1, \quad \lambda_2 > \lambda_1 > b,$$

e le due iperboli omofocali tra loro, e colle ellissi,

$$\frac{x^2}{\mu_1^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu_1^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\mu_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu_2^2} = 1, \quad b > \mu_2 > \mu_1,$$

determinano quattro campi, dei quali prenderemo a considerare quello, C , che è nella parte del piano limitata dalle parti positive degli assi.

Vogliamo calcolare $\int y dC$.

Qui e in casi simili sarà conveniente passare dal sistema di coordinate cartesiane ad un sistema di coordinate curvilinee u, v tali che, ove ciò sia possibile, le linee che limitano il campo C corrispondano a certi valori di u e v ; nel nostro caso ai valori di $u, v, u = \lambda_1, u = \lambda_2, v = \mu_1, v = \mu_2$. Il nostro integrale verrà così a ridursi alla integrazione di due integrali con limiti costanti. Questo può farsi, nel nostro caso, prendendo per u, v il sistema di *coordinate ellittiche*, le cui linee coordinate sono le ellissi omofocali che si ottengono da

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - b^2} = 1$$

facendo variare u^2 da b^2 a ∞ , e le iperboli omofocali che si ottengono da

$$\frac{x^2}{v^2} - \frac{y^2}{b^2 - v^2} = 1$$

facendo variare v da 0 a b^2 .

Per avere le formole che servono al passaggio dalle coordinate x, y alle u, v , si risolvono le precedenti equazioni rapporto ad x, y ottenendo così $x = \frac{uv}{b}, y = \frac{1}{b} \sqrt{(u^2 - b^2)(b^2 - v^2)}$.

Il valore assoluto del determinante Jacobiano delle x, y rispetto alle u, v è $\frac{u^2 - v^2}{\sqrt{(u^2 - b^2)(b^2 - v^2)}}$ e quindi avremo

$$\begin{aligned} \int_C y dC &= \frac{1}{b} \int_C (u^2 - v^2) du dv = \frac{1}{b} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} du \int_{\mu_1}^{\mu_2} (u^2 - v^2) dv \\ &= \frac{1}{b} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u^2 du \int_{\mu_1}^{\mu_2} dv - \frac{1}{b} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} du \int_{\mu_1}^{\mu_2} v^2 dv \\ &= \frac{1}{3b} \{ (\mu_2 - \mu_1) (\lambda_2^3 - \lambda_1^3) - (\lambda_2 - \lambda_1) (\mu_2^3 - \mu_1^3) \}. \end{aligned}$$

3) Il campo C sia il parallelogrammo determinato dalle
rette

$$ax + by - c = 0, \quad a'x + b'y - c' = 0,$$

$$ax + by - c_1 = 0, \quad a'x + b'y - c'_1 = 0,$$

e si voglia calcolare

$$I = \int_C (ax + by) \operatorname{sen} [(ax + by)(a'x + b'y)] dC.$$

Poniamo $ax + by = u$, $a'x + b'y = v$, da cui $x = \frac{b'u - bv}{ab' - a'b}$,

$y = \frac{-a'u + av}{ab' - a'b}$; avremo, supposto $c_1 > c$, $c'_1 > c'$,

$$\begin{aligned} I &= \left| \frac{1}{ab' - a'b} \right| \int_c^{c_1} u du \int_{c'}^{c'_1} \operatorname{sen}(uv) dv = \left| \frac{1}{ab' - a'b} \right| \int_c^{c_1} [\cos(c'u) - \cos(c'_1 u)] du \\ &= \left| \frac{1}{ab' - a'b} \right| \left\{ \frac{\operatorname{sen}(c'c_1) - \operatorname{sen}(c'c)}{c'} - \frac{\operatorname{sen}(c'_1 c_1) - \operatorname{sen}(c'_1 c)}{c'_1} \right\}. \end{aligned}$$

4). Il campo C sia racchiuso dal circolo $x^2 + y^2 = r^2$, e si voglia calcolare $I = \int_C f(ax + by) dx dy$.

Passando alle coordinate polari ρ, ϑ e posto $a = k \cos \vartheta_1$, $b = k \sin \vartheta_1$ e perciò $k = \sqrt{a^2 + b^2}$, è

$$I = \int_C [k \rho \cos(\vartheta - \vartheta_1)] \rho d\rho d\vartheta.$$

Passando ora dalle coordinate ρ, ϑ alle x_1, y_1 mediante le formole $\rho \cos(\vartheta - \vartheta_1) = x_1$, $\rho \sin(\vartheta - \vartheta_1) = y_1$, che danno $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

$\vartheta = \vartheta_1 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_1}{x_1}$, avremo

$$I = \int_C f(kx_1) dx_1 dy_1,$$

cosichè, se si osserva che la condizione $x^2 + y^2 \leq r^2$ diventa prima $\rho^2 \leq r^2$ e poi $x_1^2 + y_1^2 \leq r^2$, si ha

$$I = \int_{-r}^r f(kx_1) dx_1 \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} dy_1 = 2 \int_{-r}^r f(kx_1) \sqrt{r^2 - x_1^2} dx_1,$$

ed il problema è ridotto al calcolo di un solo integrale definito.

100. Sia AMB un ramo di curva, $a, b (a < b)$ le ascisse dei suoi estremi e sia tale che ogni retta parallela all'asse delle y e la cui ascissa appartenga all'intervallo (a, b) lo incontri in un solo punto, cosichè, se $y = y(x)$ è l'equazione della curva, sia $y(x)$ funzione finita univalente di x e che ammette generalmente derivata nell'intervallo (a, b) . Per $\int_a^b f(x, y) dx$ o

$\int_{AMB} f(x, y) dx$ esteso al ramo di curva AMB nel verso AMB intendiamo il limite della somma $\sum h_s f_s(x, y)$, quando gli intervalli h_s nei quali supponiamo aver scomposto l'intervallo (a, b) convergono a zero e dove $f_s(x, y)$ indica un qualunque valore compreso tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) dei valori che la $f(x, y)$ prende, quando per le x, y si poggiano le coordinate dei punti del tratto di curva determinato dalle parallele all'asse delle y condotte dagli estremi del tratto h_s .

Detto integrale è quindi $\int_a^b f(x, y(x)) dx$, cosichè la nostra funzione $f(x, y)$ sarà certamente integrabile lungo la curva AMB se pei punti di essa è finita e continua rispetto alle due variabili x, y .

Se $a < b$ gli h_s sono positivi, o come suol dirsi è positivo il dx nell'integrale $\int_{AMB} f(x, y) dx$. Se fosse $a > b$, sarebbero negativi gli h_s e si avrebbe, come subito si riconosce,

$$\int_{AMB} f(x, y) dx = - \int_{BMA} f(x, y) dx.$$

Se la linea di integrazione è una parallela all'asse delle y

si deve considerare come nullo l'integrale di $f(x, y) dx$ esteso
www.adilessa.com.cn

Analoghe definizioni valgano per $\int_{AMB} f(x, y) dy$, ove si suppone che ogni parallela all'asse delle x incontri la AMB al più in un punto.

Sia una linea s che cominci e termini in uno stesso punto. Potremo sempre supporre la linea decomposta in parti AMB, BNC, ... KLA che soddisfanno alle precedenti condizioni. Allora per $\int f(x, y) dx$ nel verso AIBNC... intendiamo le somme degli integrali $\int_{AMB} + \int_{BNC} + \dots$; e per $\int f(x, y) dx$ nel verso ALK...BMA intendiamo la somma degli integrali $\int_{BMA} + \int_{CNB} + \dots$.

I due integrali estesi ad s nei due versi opposti sono uguali e di segno contrario. Quando una linea chiusa appartiene al contorno di un campo, si suole assumere come verso positivo di integrazione quello nel quale dovrebbe muoversi una persona sul contorno per avere il campo a sinistra.

Sia ora una curva chiusa s , a, b le sue ascisse estreme e sia $a < b$, e ogni parallela all'asse delle y condotta per un punto dell'intervallo (a, b) incontri la linea s in due punti (esclusi gli estremi). Indichiamo con y_m l'ordinata minore, con y_m' l'ordinata maggiore corrispondente all'ascissa x .

Sia C il campo limitato da s , e sia $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ continua in C , e $f(x, y)$ integrabile rispetto ad x sul contorno. Avremo

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dC &= \int_a^b dx \int_{y_m}^{y_m'} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b [f(x, y_m') - f(x, y_m)] dx \\ &= - \int_a^b f(x, y_m) dx - \int_b^a f(x, y_m') dx = - \int_{s_1} f(x, y) dx, \end{aligned}$$

l'integrale lungo s_1 essendo preso nel verso positivo.

In modo analogo, se si suppone che le parallele all'asse delle

x condotte dai punti dell'intervallo (α, β) sull'asse delle y , ove α, β indicano le ordinate estreme di s_2 , incontrino s_2 in due punti (esclusi gli estremi α, β) si avrà

$$\int_{c_1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dC_1 = \int_{s_2} f(x, y) dy,$$

l'integrazione lungo s_2 essendo condotta nel verso positivo.

Consideriamo ora un campo C il cui contorno sia formato anche da più linee. Si supponga $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ continua in C e $f(x, y)$ integrabile rispetto ad x lungo il contorno s di C . Possiamo sempre decomporre il campo C , mediante parallele all'asse delle y , in campi parziali, i cui contorni siano formati da linee chiuse come la s_1 . Allora, poichè l'integrale esteso a C si compone della somma degli integrali estesi a questi campi, e poichè gli integrali estesi a rette parallele all'asse delle y sono zero, avremo

$$\int_C \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dC = - \int_s f(x, y) dx.$$

Sotto analoghe condizioni

$$\int_C \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dC = \int_s f(x, y) dy,$$

l'integrazione lungo il contorno s essendo condotta nel verso positivo, ed intendendo che i secondi membri sono la somma degli integrali estesi alle varie parti del contorno di C nel verso positivo.

Le due ultime formole (conosciute anche sotto il nome di teorema di GREEN nel piano) sono le corrispondenti alla for-

mola $\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a)$, perchè, come questa esprime

l'integrale di $\frac{df(x)}{dx}$ esteso ad un intervallo mediante i valori di $f(x)$ negli estremi, così quelle esprimono gli integrali di $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ mediante i valori di $f(x, y)$ sul contorno del campo.

Integrali doppi definiti pel quali la funzione integranda non si mantiene finita nel campo di integrazione e integrali doppi estesi ad un campo infinito.

101. Supponiamo che la funzione $f(x, y)$ diventi infinita in un punto (a, b) del campo C , intendendo con questo che, assegnato un numero positivo comunque grande B , esiste un intorno di (a, b) per tutti i punti del quale è $|f(x, y)| > B$, oppure che, comunque piccolo si prenda un intorno di (a, b) , vi è sempre in esso qualche punto ove risulti $|f(x, y)| > B$.

Circondiamo il punto (a, b) con una linea priva di nodi, appartenente a C , e chiusa se il punto è nell'interno di C , ed indichiamo con C_1 il campo C da cui venga tolta la parte di campo limitata da s , o da s e da una certa parte del contorno di C se (a, b) è sul contorno di C . In C_1 la $f(x, y)$ è integrabile qualunque sia la linea s e comunque essa venga a serrarsi al punto (a, b) .

Diremo che $\int_{C_1} f(x, y) dC_1$ ha un limite L quando la linea s si serra comunque indefinitamente al punto (a, b) o per C_1 convergente comunque a C , se, dato τ , esiste un corrispondente numero positivo δ tale che, qualunque sia la linea s appartenente al circolo di raggio δ col centro in (a, b) o a quella parte di questo circolo che appartiene a C , è $|\int_{C_1} f(x, y) dC_1 - L| < \tau$, ed allora scriveremo $\lim_{C_1 \rightarrow C} \int_{C_1} f(x, y) dC_1 = L$. Ora, se esiste L , poniamo la definizione

$$\int_C f(x, y) dC = \lim_{C_1 \rightarrow C} \int_{C_1} f(x, y) dC_1$$

e diciamo che $f(x, y)$ è integrabile in C .

Indicate con C', C'' le parti di C che rimangono togliendone le parti limitate, nel modo detto, dalle linee s', s'' e con τ la parte di C limitata da s', s'' (con qualche parte del contorno di C se il punto (a, b) è sul contorno), si vede che la condizione necessaria e sufficiente alla esistenza del limite L è che, per ogni numero positivo σ , esista un numero positivo δ tale che, qualunque siano le solite linee s', s'' appartenenti al circolo di raggio δ col centro in (a, b) o a quella parte di esso che appartiene a C , sia

$$\left| \int_{C'} f(x, y) dC' - \int_{C''} f(x, y) dC'' \right| = \left| \int_{\tau} f(x, y) d\tau \right| < \sigma.$$

Questi ultimi integrali sono analoghi agli integrali singolari per le funzioni di una variabile.

Si intende ora, senz'altro, come si procederebbe se la $f(x, y)$ divenisse infinita in altri punti di C , in numero finito.

Passiamo dalle coordinate cartesiane x, y alle polari ρ, θ col polo nel punto (a, b) mediante le formole

$$x = a + \rho \cos \theta, \quad y = b + \rho \sin \theta,$$

cosicchè sia

$$\int_{c_1} f(x, y) dC_1 = \int_{c_1} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

Se la $f(x, y)$ è tale che per tutti ¹⁾ i punti di un certo circolo di raggio r col centro in (a, b) , escluso (a, b) , cioè per $0 < \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sia

$$|f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta)| \rho^\mu < A,$$

¹⁾ Per semplicità supponiamo il punto (a, b) interno al campo. Sono semplici le modificazioni da introdursi se (a, b) fosse sul contorno di C .

dove A è un certo numero positivo e μ è positivo e < 2 , la funzione $f(x, y)$ è integrabile in C .

Invero, se indichiamo con τ_1 la corona circolare di raggi δ', δ , col centro in (a, b) e dove $\delta' < \delta \leq r$, abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_1} f(x, y) d\tau_1 \right| &\leq \int_{\tau_1} |f(a + \rho \cos \vartheta, b + \rho \sin \vartheta)| \rho d\rho d\vartheta < A \int_{\tau_1} \rho^{1-\mu} d\rho d\vartheta \\ &= A \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\delta'}^{\delta} \rho^{1-\mu} d\rho = \frac{2\pi A}{2-\mu} (\delta^{2-\mu} - \delta'^{2-\mu}), \end{aligned}$$

quantità che può rendersi minore di qualunque quantità prefissata prendendo δ sufficientemente piccolo, e qualunque sia δ' , ove $0 < \delta' < \delta$. Ma qualunque siano le linee s', s'' nel circolo di raggio δ , potremo sempre prendere δ' così piccolo che sia $\tau < \tau_1$ e quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau} f(x, y) d\tau \right| &\leq \int_{\tau} |f(a + \rho \cos \vartheta, b + \rho \sin \vartheta)| \rho d\rho d\vartheta \\ &< A \int_{\tau} \rho^{1-\mu} d\rho d\vartheta < A \int_{\tau_1} \rho^{1-\mu} d\rho d\vartheta. \end{aligned}$$

Se invece per tutti i punti del circolo di raggio r la funzione $f(x, y)$ non cambia segno ed è

$$|f(a + \rho \cos \vartheta, b + \rho \sin \vartheta)| \rho^{\mu} > A,$$

dove $\mu \geq 2$, la $f(x, y)$ non è integrabile in C .

Invero nel campo τ_1 avremo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_1} f(x, y) d\tau_1 \right| &> \frac{2\pi A}{2-\mu} (\delta^{2-\mu} - \delta'^{2-\mu}) \text{ se } \mu > 2 \text{ e} \\ \left| \int_{\tau_1} f(x, y) d\tau_1 \right| &> 2\pi A (\log \delta - \log \delta') \text{ se } \mu = 2, \end{aligned}$$

quantità che crescono indefinitamente al diminuire di δ , comunque si fissi δ .

www.libtool.com.cn

ESEMPLI.

1) Per valori positivi o nulli di y la funzione $\frac{1}{x^2+y}$ diventa infinita solo per $x=0$, $y=0$. Essa è, ciò non ostante, integrabile in qualunque campo situato al disopra dell'asse delle x , e di cui faccia pur parte il punto $(0,0)$. Invero, presi a, b positivi e $a < b$, abbiamo

$$\int_{-b}^{-a} dx \int_0^b \frac{dy}{x^2+y} + \int_{-a}^a dx \int_a^b \frac{dy}{x^2+y} + \int_a^b dx \int_0^b \frac{dy}{x^2+y} = 2b \log(b+1)$$

$$-2b \log b - 2a \log(a+1) + 2a \log a + 4\sqrt{b} \arctg \sqrt{b} - \sqrt{a} \arctg \sqrt{a}$$

e si vede come si possa fissare b in guisa che qualunque sia a diverso da zero e $< b$ questa espressione risulti minore di qualunque numero prefissato. Se poi si osserva che $\frac{1}{x^2+y}$ è sempre positiva pei valori di x, y che consideriamo, si vedrà facilmente come l'integrale singolare relativo al punto $(0,0)$ abbia per limite zero, e quindi la funzione è integrabile.

2) Non è integrabile la funzione $\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$ in qualunque campo cui appartenga il punto $(0,0)$. Invero, sia questo punto interno al campo C ; indichiamo con C_2 il campo rettangolare determinato dalle rette $x=a', x=-a', y=b', y=-b'$, avendo preso a', b' in modo che questo rettangolo appartenga a C , e C_3 il campo C da cui si tolga C_2 ; avremo $\int_C = \int_{C_2} + \int_{C_3}$. Affinchè esista $\int_{C_2}$ occorre che esista il $\lim_{c_1=c_2} \int_{c_1} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} dC_1$, essendo C_1 il campo che si ottiene da C_2 togliendone la parte racchiusa

da una linea s qualunque che gli appartiene e che racchiuda il punto $(0,0)$. Per linea s prendiamo il contorno del rettangolo determinato dalle rette $x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$, dove $a < a'$, $b < b'$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dC &= 4 \int_0^a dx \int_0^{b'} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy + 4 \int_a^{a'} dx \int_0^{b'} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy \\ &= 4 \int_0^a dx \left(\frac{-y}{y^2 + x^2} \right)_0^{b'} + 4 \int_a^{a'} dx \left(\frac{-y}{y^2 + x^2} \right)_0^{b'} = 4 \int_0^a dx \left(\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b'}{b'^2 + x^2} \right) \\ &\quad + 4 \int_a^{a'} dx \frac{-b'}{b'^2 + x^2} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a'}{b'}. \end{aligned}$$

quantità che non ha limite determinato quando a, b convergono comunque a zero. Non esiste quindi il limite dell'integrale esteso a C_1 quando la linea qualunque s si serra comunque al punto $(0,0)$.

Questo esempio ci fa vedere come possa esistere il limite per speciali linee s serrantesi al punto di infinito; se supponiamo qui $a=b$, il limite esiste ed è $\pi - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a'}{b'}$.

Notiamo ancora che, la funzione non essendo integrabile in un campo, possono però esistere gli integrali $\int dx \int f(x, y) dy$, $\int dy \int f(x, y) dx$ estesi al campo stesso. Nel nostro caso non ha significato $\int_C \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dC$, essendo C il rettangolo delle rette $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$, ma abbiamo

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4},$$

(Vedi esercizio 12 a pag. 252).

3) Si riconosce subito la integrabilità della funzione

$f(x, y) = \frac{\text{www.libtool.com.cn}}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^n}$ in un campo cui appartenga il punto $x=a, y=b$, se $n < 1$, perchè, posto $x=a+\rho \cos \vartheta, y=b+\rho \sin \vartheta$ è sempre

$$\rho^{2n} f(a+\rho \cos \vartheta, b+\rho \sin \vartheta) = 1 \text{ e } 2n < 2,$$

e la non integrabilità se $n \geq 1$.

Così pure si riconosce la integrabilità della funzione $[\log(x^2 + y^2)]^n, n > 0$, in qualunque campo cui appartenga il punto $(0, 0)$.

102. Supponiamo ora che la $f(x, y)$ divenga infinita in tutti i punti d'una linea s appartenente a C . Circondiamo la linea s con una linea s_1 , ed indichiamo con C_1 il campo C da cui venga tolta la parte limitata da s_1 sola, o insieme a pezzi di contorno di C se la s ha qualche punto in comune col contorno o forma parte od è tutto il contorno di C . La $f(x, y)$ è integrabile in C_1 ; e diremo che $\int_{C_1} f(x, y) dC_1$ ha un limite L

quando la linea s_1 si serra comunque alla s , se, dato τ , esiste un numero δ tale che, qualunque sia la linea s_1 appartenente a quella parte T del piano determinata da un circolo di raggio δ che scorre col centro sulla s , o a quella parte di T che appartiene a C , risulti $|\int_{C_1} f(x, y) dC_1 - L| < \tau$, e scriviamo

$$L = \lim_{C_1 \rightarrow C} \int_{C_1} f(x, y) dC_1.$$

Quando esiste L diciamo che la $f(x, y)$ è integrabile in C , e poniamo la definizione

$$\int_C f(x, y) dC = \lim_{C_1 \rightarrow C} \int_{C_1} f(x, y) dC_1.$$

Anche qui si vede che la condizione necessaria e sufficiente alla esistenza del limite L , e quindi alla integrabilità di $f(x, y)$ in C , è che, dato σ , esista un δ tale che per due linee qualunque s_1, s_2 appartenenti alla corrispondente parte del piano

T, o a quella parte di T che appartiene a C, sia

$$\left| \int_{c_1} f(x, y) dC_1 - \int_{c_2} f(x, y) dC_2 \right| = \left| \int_{\tau} f(x, y) d\tau \right| < \sigma,$$

indicando con τ la parte di C limitata da s_1, s_2 sole o con qualche pezzo di contorno di C.

Passiamo dal sistema di coordinate x, y ad un sistema di coordinate curvilinee u, v tale che la linea s_1 sia una linea $u = u_0$ del sistema, e così, se le formole di trasformazione sono $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, avremo

$$\int_{c_1} f(x, y) dC_1 = \int_{c_1} F(u, v) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| du dv.$$

Allora se esiste un intorno della linea s , cioè della linea $u = u_0$, tale che per tutti i punti di esso esclusa la linea s , sia

$$\left| F(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) (u - u_0)^\mu \right| < A,$$

dove $0 < \mu < 1$, la funzione è integrabile in C.

Invero se indichiamo con τ_1 la parte di C limitata dalle curve $u = u_1$, $u = u_2$, tali che comprendano tra loro la curva $u = u_0$, avremo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_1} f(x, y) d\tau_1 \right| &\leq \int_{\tau_1} \left| F(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right| du dv < A \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(u - u_0)^\mu} \\ &= \frac{(v_2 - v_1)A}{1 - \mu} [(u_2 - u_0)^{1-\mu} - (u_1 - u_0)^{1-\mu}], \end{aligned}$$

- quantità che può rendersi minore di qualunque quantità positiva prefissata fissando u_2 sufficientemente vicino a u_0 e per tutti i valori di u_1 compresi tra u_0 e u_2 . Da ciò si riconoscerà, in modo analogo a quello tenuto nel numero precedente, la integrabilità di $f(x, y)$ in C.

Se poi $F(u, v)$ non cambia segno in un intorno della linea s , e risulta in www.libtool.com.cn

$$\left| F(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) (u - u_0)^\mu \right| > A,$$

dove $\mu \geq 1$, si vedrà in modo analogo, che la $f(x, y)$ non è integrabile in C .

ESEMPLI.

1) La funzione $\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$ è integrabile nel circolo col centro nell'origine delle coordinate e di raggio r , quantunque diventi infinita sul contorno del campo di integrazione. Invero, passando dalle coordinate cartesiane alle polari ρ, ϑ la linea s nella quale diviene infinita la funzione integranda è la linea $\rho = r$, ed abbiamo per $\rho \leq r$,

$$\rho \sqrt{r - \rho} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho + r}} < \sqrt{r}.$$

Si vede poi subito che

$$\int_C \frac{dC}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 2\pi r.$$

La funzione $\frac{1}{r^2 - x^2 - y^2}$ non è integrabile in qualunque campo cui appartenga totalmente o in parte il circolo $x^2 + y^2 = r^2$, perchè se $x^2 + y^2 \leq r^2$ la nostra funzione è sempre positiva, e sempre negativa se $x^2 + y^2 > r^2$, e

$$\rho(r - \rho) \frac{1}{r^2 - \rho^2} = \frac{\rho}{\rho + r} > \begin{cases} \frac{\rho_0}{2r} & \text{se } \rho_0 < \rho < r \\ -\frac{\rho_0}{2\rho_1} & \text{se } \rho_0 < r < \rho < \rho_1. \end{cases}$$

2) La funzione $\frac{1}{(y^2 - 2px)^\mu}$ è o non è integrabile in un campo cui appartenga una parte della parabola $y^2 = 2px$, secondochè $\mu < 1$, o $\mu \geq 1$.

Ponendo $x = v$, $y^2 = 2uv$, si passa dal sistema cartesiano al sistema u, v , pel quale le linee $v = \text{cost}$ sono rette parallele all'asse delle y , e le linee $u = \text{cost}$ sono parabole di cui fa parte la parabola $y^2 = 2px$, corrispondendo questa a $u = p$. Osservando che ora è

$$\begin{aligned} \left| F(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) (u - p)^\mu \right| &= \left| \frac{1}{(2uv - 2pv)^\mu} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{v}{u}} \right) (u - p)^\mu \right| \\ &= \frac{1}{2^\mu \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{u} v^{\mu - \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

si riconoscerà facilmente quanto abbiamo asserito.

Così ad esempio se il campo C è la parte di piano al disopra dell'asse delle x compresa tra la parabola $y^2 = 2px$, l'asse delle x e la retta $x = a$, dove supponiamo $p > 0$, $a > 0$, è

$$\int_C \frac{dC}{\sqrt{2px - y^2}} = \frac{a\pi}{2}.$$

103. Relativamente agli integrali doppi in un campo che si estende all'infinito, o campo infinito, faremo queste poche considerazioni.

Intendiamo per campo infinito un campo tale che descritto col centro in un suo punto un circolo di raggio comunque grande, vi è sempre qualche punto del campo fuori del circolo.

Il campo infinito C lo assumeremo come limite di un campo finito C_1 che secondo una certa legge varia in guisa da tendere a divenire il campo C , ciò che potrà realizzarsi, supposte le linee del contorno di C_1 determinate da uno o più parametri, facendo crescere indefinitamente alcuni o tutti i parametri o facendoli avvicinare a certi determinati valori. Così

ad es.: tutto il piano potremo concepirlo come limite di un rettangolo i cui lati crescono indefinitamente comunque oppure con una certa legge, od anche come il limite di un circolo di raggio indefinitamente crescente e di centro fisso, e ciò a seconda del problema che si tratta.

Allora, supposto che esista l'integrale $\int_{C_1} f(x, y) dC_1$, per quanto grande diventi C_1 secondo la legge stabilita e che esista il limite di questo integrale, quando i parametri che fissano il contorno di C_1 variano nel modo sopra indicato, poniamo per definizione

$$\int_C f(x, y) dC = \lim_{C_1} \int_{C_1} f(x, y) dC_1.$$

Se poi, per la natura del problema, il campo C dovesse considerarsi come limite di un campo finito qualunque C_1 comunque tendente a divenire C , ed esistesse $\int_{C_1} f(x, y) dC_1$ qualunque sia C_1 e comunque grande, ed esistesse un unico limite di questo integrale per qualunque C_1 comunque tendente a C , questo limite lo assumeremo come $\int_C f(x, y) dC$. Notiamo che propriamente questa sarebbe la definizione di integrale doppio esteso ad un campo infinito, che corrisponderebbe a quella data per gli integrali di una funzione ad una variabile estesi ad un intervallo infinito.

ESEMPI

1) Il campo infinito C sia la parte del piano limitata delle parti positive degli assi delle ascisse e delle ordinate considerato come limite del rettangolo limitato dalle rette $x=0$, $y=0$, $x=a$, $y=b$, quando a, b crescono comunque. Avremo allora

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dC}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} &= \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_0^a dx \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{b dx}{(1+x^2)\sqrt{1+a^2+b^2}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{ab}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La stessa parte del piano possiamo considerarla come limite di un quarto di circolo di raggio r col centro nell'origine delle coordinate, quando r cresce indefinitamente. Chiamandola allora C' avremo, usando le coordinate polari,

$$\int_C \frac{dC}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^r \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}$$

2) Consideriamo ancora il campo precedente C . Avremo

$$\begin{aligned} \int_C \sin(x^2+y^2) dC &= \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_0^a dx \int_0^b \sin(x^2+y^2) dy \\ &= \lim \left[\int_0^a \sin(x^2) dx \int_0^b \cos(y^2) dy + \int_0^a \cos(x^2) dx \int_0^b \sin(y^2) dy \right] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(vedi n. 90).

Si consideri invece la stessa parte del piano come limite di un quarto C_1 di circolo di raggio r col centro nell'origine, quando r cresce indefinitamente, cioè sia il precedente campo infinito C' . Allora la stessa funzione $\sin(x^2+y^2)$ non è integrabile in C' , perchè, usando le coordinate polari, è

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \sin(x^2+y^2) dC_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^r \rho \sin(\rho^2) d\rho = -\frac{\pi}{2} \int_0^r \rho \sin(\rho^2) d\rho \\ &= \frac{\pi}{4} [1 - \cos(r^2)], \end{aligned}$$

che non ha limite determinato per r crescente indefinitamente.

3) Il campo infinito C sia la parte del piano al disopra dell'asse delle x limitata dall'asse delle x e dalla parabola $y^2=2px$, considerato come limite del campo C_1 compreso tra

il ramo superiore della parabola l'asse delle x e la retta $x=a$,
quando a cresce indefinitamente.

Avremo

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{y dC}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha \int_0^{\sqrt{2p\alpha}} \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{dx}{x^2+2px+1} \right] = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{dx}{x^2+2px+1} \end{aligned}$$

e perciò (Vedi es.: 2 a pag. 44)

$$\int_0^a \frac{y dC}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-p^2}} \left[\frac{\pi}{2} (\sqrt{1-p^2}-1) + \arcsen p \right] & \text{se } p < 1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) & \text{» } p = 1 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \log(p - \sqrt{p^2-1}) \right] & \text{» } p > 1. \end{cases}$$

ESERCIZI

1. Il campo C sia costituito dai valori di x, y pei quali è
 $x^2 + y^2 \leq r^2$; allora è

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{y dC}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dC = \pi r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

2. Campo C : valori positivi o nulli di x, y pei quali
 $x^2 + y^2 \leq b^2$, $x^2 + y^2 \geq a^2$, $a < b$. Se n è intero positivo abbiamo

$$\int_C x^n \log(x^2 + y^2) dC = \begin{cases} \frac{1.3.5 \dots (n-1)}{2.4.6 \dots (n+2)} \pi \left(\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{n+2} + b^{n+2} \log b - a^{n+2} \log a \right) & \text{per } n \text{ pari} \\ 2 \frac{2.4.6 \dots (n-1)}{3.5 \dots (n+2)} \left(\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{n+2} + b^{n+2} \log b - a^{n+2} \log a \right) & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

3. Il campo C sia la parte del piano compresa tra le due parabole $y^2 = 2px$, $x^2 = 2px$;

$$\int_C xy dC = \frac{5}{16} p^4.$$

4. Campo C sia la parte del piano limitata dalle curve $y^2 = 2px$, $x^2 + y^2 - 4px = 0$, $x^2 + y^2 - 4px + 3p^2 = 0$;

$$\int_C x dC = 2p^3 \left(\frac{88}{15} + \pi \right).$$

5. Campo C parte del piano tra rette $x=0$, $y=x$, $x+y=1$.

$$\int_C y \sqrt{(x+y)^4 + y^2} dC = \frac{1}{6720} (225\sqrt{5} - 319)$$

(si ponga $x+y=u$, $y=uv$).

6. Si provi che

$$\int_0^a dx \int_0^b f(x, y) dy = \int_0^{\arctg \frac{b}{a}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\arctg \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{b}{\sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

7. Il campo C sia il rettangolo formato dagli assi e dalle rette $x=a$, $y=b$, da cui si tolga il rettangolo formato dagli

assi e dalle rette $x = \frac{r a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$ ($m > 1$).

$$\int_c \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dC = \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(a^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} - b^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \right).$$

8. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

$$\int_c xyz \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dC = \frac{ab}{15c(a^2 - b^2)} \left[\frac{a^3(c^5 - b^5)}{c^3 - b^3} - \frac{b^3(c^5 - a^5)}{c^3 - a^3} \right],$$

essendo z data dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(si ponga $x = a \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $y = b \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ e si prendano θ, φ per nuove variabili).

9. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali $x + y \leq k$, $k > 0$.

$$\int_c f(x+y) x^{m-1} y^{n-1} dC = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^k f(z) z^{m+n-1} dz, \quad m > 0, n > 0.$$

Ad es.:

$$\int_c x^{m-1} y^{n-1} dC = k^{m+n} \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}.$$

10. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali è $\left(\frac{x}{a} \right)^p + \left(\frac{y}{b} \right)^q \leq k$, $p > 0$, $q > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$.

$$\int_c f \left[\left(\frac{x}{a} \right)^p + \left(\frac{y}{b} \right)^q \right] x^{m-1} y^{n-1} dC$$

$$= \frac{a^m b^n}{pq} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q}\right)} \int_0^1 f(x) x^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q} - 1} dx, \quad m > 0, n > 0.$$

Ad es: se il campo C è la parte del piano limitata dalla ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ed m, n sono interi positivi è

$$\int_C x^{m-1} y^{n-1} dC = \frac{a^m b^n}{4} \frac{1.2..(m-1) 1.2..(n-1)}{1.2..(m+n)}.$$

11. Campo C limitato dal circolo $x^2 + y^2 = r^2$.

$$\int_0^r f(ax + by) \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dC = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r f(x_1 \sqrt{a^2 + b^2}) (r^2 - x_1^2) dx_1.$$

12. Campo C : valori positivi o nulli di x, y pei quali $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\int_C \arcsin \frac{x+y}{\sqrt{2}} dC = \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{4} \pi - 1 \right).$$

13. Sia la $f(x, y)$ finita e integrabile in un campo C . Il rettangolo determinato dalle rette $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$ sia interno al campo. Si dimostri che l'integrale

$$\int_a^b dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy$$

considerato come una funzione $\varphi(b, \beta)$ dei limiti superiori b, β è funzione continua delle variabili b, β . Inoltre, se $f(x, y)$ è continua in C , è

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial \beta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial b} = f(b, \beta).$$

14. Se la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, b) , la $\varphi(x)$ nell'intervallo (α, β) , il prodotto dei due integrali $\int_a^b f(x) dx$, $\int_\alpha^\beta \varphi(x) dx$ si può trasformare nell'integrale doppio della funzione $f(x) \varphi(y)$ esteso al campo rettangolare C , determinato dalle rette $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$ cioè

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_\alpha^\beta \varphi(x) dx \right) = \int_C f(x) \varphi(y) dC.$$

15. Il campo C sia costituito dai valori di x, y , pei quali $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Si consideri $\int_C \frac{dC}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Si ponga

$$x = \sin \varphi \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}, \quad y = \cos \varphi \cos \theta,$$

e si provi così che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}} d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

dove $m^2 + n^2 = 1$.

16. Posto

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta,$$

dove $k^2 \leq 1$, si provi che

$$F(k) E(k') + F(k') E(k) - F(k) F(k') = \frac{\pi}{2},$$

dove $k^2 + k'^2 = 1$. (LEGENDRE).

17. Sia il campo infinito C limitato dal ramo superiore della iperbole $xy=k$ (k positivo), considerato come limite del campo compreso tra il detto ramo di iperbole e le rette $x=a$, $y=b$, quando a, b crescono indefinitamente comunque. Allora

$$\int_0^{\infty} \frac{dC}{y^2(1+\omega^2)} = \frac{1}{2k}.$$

Integrali multipli.

104. Dopo quanto abbiamo detto relativamente agli integrali doppi estesi ai punti d'un campo, crediamo inutile dilungarci a definire gli integrali *triplici* estesi ai punti di un campo limitato da una o più superficie nello spazio. Ognuno intenderà senz'altro che cosa debba intendersi per $\int_T f(x, y, z) dT$, o $\iiint f(x, y, z) dT$, $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$ esteso ai punti (x, y, z) del campo T . Come pure si intenderà subito il significato di integrale multiplo (n^{uplo}) della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ esteso ai punti di un campo T ad n dimensioni, determinato da certe condizioni che limitano l'arbitrarietà delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, integrale che indicheremo con

$$\int_T f(x_1, x_2, \dots, x_n) dT$$

o con

$$\int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Valgono teoremi analoghi a quelli dimostrati per gli integrali doppi, come si può facilmente verificare. Ogni integrale multiplo (n^{plo}) può ridursi al calcolo successivo di n integrali semplici.

Così pure il cambiamento di variabili in un integrale multiplo si effettua come in un integrale doppio. Cioè, se le formule che esprimono le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ colle nuove variabili $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono le

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

indicato con Δ il determinante Jacobiano delle x rispetto alle y , cioè posto www.libtool.com.cn

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

avremo

$$\int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) |\Delta| dy_1 dy_2 \dots dy_n,$$

gli integrali dei due membri essendo estesi al campo T .

Quanto abbiamo ora compendiosamente accennato verrà meglio dichiarato coi seguenti

ESEMPI

1) Essendo x, y, z coordinate cartesiane ortogonali, il campo T sia il parallelepipedo determinato dai piani $x=0, y=0, z=0, x=a, y=b, z=c$.

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \int_T f(x, y, z) dT &= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c f(x, y, z) dz = \int_0^a dx \int_0^c dz \int_0^b f(x, y, z) dy \\ &= \int_0^b dy \int_0^a dx \int_0^c f(x, y, z) dz = \dots \end{aligned}$$

2) Il campo T sia costituito dei punti le cui coordinate x, y, z soddisfanno alla relazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Allora

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned}
 \int_T f(x, y, z) dT &= \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \\
 &= \int_{-c}^c dz \int_{-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}} dx \int_{-\frac{b}{c}\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}}}^{\frac{b}{c}\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}}} dy = \dots
 \end{aligned}$$

Ad es.: se $f(x, y, z) = x^2$, è

$$\begin{aligned}
 \int_T x^2 dT &= 8 \int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \\
 &= 8c \int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dy = \frac{8cb\pi}{4a^2} \int_0^a x^2 (a^2 - x^2) dx = \frac{4a^3bc\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

3) Il campo T sia la parte di spazio limitata dal piano $z = h$ e dalla parte di superficie conica $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2$, che è al di sopra del piano delle x, y . Vogliamo calcolare $\int_T (x^2 + y^2) dT$.

Passiamo dalle coordinate x, y, z alle ρ, ϑ, z colle formole

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = z$$

(coordinate cilindriche). Allora

$$\int_T (x^2 + y^2) dT = \int_T \rho^2 d\rho d\vartheta dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h dz \int_0^{\frac{r}{h}z} \rho^2 d\rho = \frac{r^4 h \pi}{10}.$$

4) Si voglia calcolare $I = \iiint e^{x^2+y^2+z^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e-

steso al campo limitato della sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$. La funzione integranda è integrabile, quantunque diventi infinita nel centro della sfera. Passiamo dalle coordinate cartesiane alle polari ρ, ϑ, φ mediante le formole

$$z = \rho \cos \vartheta, \quad x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$$

(vedi n. 200, vol. 1°). Osservando che $\Delta = \rho^2 \sin \vartheta$, abbiamo

$$I = \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r e^{\rho^2} \rho d\rho = 2\pi (e^{r^2} - 1).$$

5) Si voglia calcolare

$$I = \int \dots \int e^{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

esteso ai valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfacenti la relazione

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2.$$

Passiamo dal sistema di variabili o coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ ad un sistema analogo al polare (coordinate polari nello spazio ad n dimensioni) mediante le formole

$$x_1 = \rho \cos \vartheta_1$$

$$x_2 = \rho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2$$

$$x_3 = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-2} = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \dots \sin \vartheta_{n-3} \cos \vartheta_{n-2}$$

$$x_{n-1} = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \dots \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2} \cos \vartheta_{n-1}$$

$$x_n = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \dots \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2} \sin \vartheta_{n-1};$$

si otterranno tutti i punti dello spazio ad n dimensioni, cioè tutti i valori delle x , facendo variare ρ da 0 a ∞ , $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2}$ da 0 a π e ϑ_{n-1} da 0 a 2π .

Per calcolare il determinante Iacobiano Δ osserviamo che

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 = \rho^2,$$

da cui

$$x_n = \sqrt{\rho^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2};$$

formiamo Δ scrivendo nella prima linea le derivate di x_n rapporto a $\rho, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}$ che sono

$$\frac{1}{x_n} \left(\rho - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho} - \dots - x_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \rho} \right), \frac{-1}{x_n} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta_1} + \dots \right), \dots$$

Le altre linee seguenti sono

$$\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1}, 0, 0, \dots, 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Moltiplicando gli elementi della seconda linea per $\frac{x_1}{x_n}$,

quelli della terza per $\frac{x_2}{x_n}$, .. quelli dell'ultima per $\frac{x_{n-1}}{x_n}$ e

sommando agli elementi della prima linea i corrispondenti delle altre linee, cosichè il valore del determinante è rimasto inalterato, si ottiene un determinante in cui sono nulli tutti gli elementi da una stessa parte della diagonale, ed abbiamo così:

$$\Delta = \frac{\rho}{x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta_2} \dots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \vartheta_{n-1}} = (-1)^{n-1} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \vartheta_1 \sin^{n-3} \vartheta_2 \dots \sin^2 \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}$$

Cosichè avremo

$$I = \int \int \dots \int e^{\rho^n} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \vartheta_1 \sin^{n-3} \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} d\rho d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{n-1}$$

esteso al nostro campo di valori, ossia

$$I = \int_0^{\pi} d\vartheta_{n-1} \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \vartheta_1 d\vartheta_1 \int_0^{\pi} \sin^{n-3} \vartheta_2 d\vartheta_2 \dots \int_0^{\pi} \sin \vartheta_{n-2} d\vartheta_{n-2} \int_0^r e^{\rho^m} \rho^{n-1} d\rho,$$

e quindi, osservando che $\int_0^{\pi} \sin^m \vartheta d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \vartheta d\vartheta$, e che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \vartheta d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{2(m+1)} \quad (m \text{ int. pos.}), \text{ troviamo}$$

$$I = \begin{cases} \frac{8(e^r - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-2)n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{8(e^r - 1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-2)n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

6) Si voglia calcolare l'integrale

$$= \int \int \dots \int f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \dots x_n^{m_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

dove $m_1, m_2, \dots, m_n$ sono numeri positivi, esteso ai valori positivi o nulli di $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfacenti la relazione

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k, \quad (k > 0).$$

È facile trovare i limiti degli integrali rispetto a ciascuna variabile, perchè, se supponiamo fissati $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ allora x_n potrà variare da 0 a $k - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$; se si suppongono fissati $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$, allora x_{n-1} potrà variare da 0 a $k - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-2}$, e così via, cosicchè avremo

$$= \int_0^1 x_1^{m_1-1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{m_2-1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} x_3^{m_3-1} dx_3 \dots \int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}} x_n^{m_n-1} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_n.$$

Se fosse $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1$, servendoci della formola

www.libtool.com.cn

$$\int_0^a x^{l-1} (a-x)^{m-1} dx = a^{l+m-1} \int_0^1 y^{l-1} (1-y)^{m-1} dy = a^{l+m-1} \frac{\Gamma(l) \Gamma(m)}{\Gamma(l+m)},$$

si arriverebbe facilmente ad esprimere l'integrale mediante le funzioni *gamma*.

Nel nostro caso giova fare il seguente cambiamento di variabili

$$x_1 = u_1 u_2$$

$$x_2 = u_1 u_3 (1 - u_2)$$

$$x_3 = u_1 u_4 (1 - u_2) (1 - u_3)$$

$$x_4 = u_1 u_5 (1 - u_2) (1 - u_3) (1 - u_4)$$

$$\dots$$

$$x_{n-1} = u_1 u_n (1 - u_2) (1 - u_3) (1 - u_4) \dots (1 - u_{n-1})$$

$$x_n = u_1 (1 - u_2) (1 - u_3) (1 - u_4) \dots (1 - u_{n-1}) (1 - u_n),$$

(la nota trasformazione $y = uv$, $x = u(1-v)$, adoperata nell'esercizio 5° a pag. 306 è caso particolare di questa), dalle quali formole ricaviamo

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = u_1,$$

$$u_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n}, \quad u_{n-1} = \frac{x_{n-2}}{x_{n-2} + x_{n-1} + x_n}, \dots, u_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n},$$

e vediamo così che esauriremo tutto il nostro campo di valori delle x attribuendo alla u_1 i valori da 0 a k e a ciascuna delle altre variabili u i valori da 0 ad uno.

Indicata con $x_{r,s}$ la derivata di α_r rapporto ad u_s , abbiamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-11} & x_{n-12} & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{n-1n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{nn} \end{vmatrix};$$

ma la relazione $x_1 + x_2 + \dots + x_n = u_1$ ci dà

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + \dots + x_{n1} = 1,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + \dots + x_{n2} = 0,$$

$$x_{23} + x_{33} + \dots + x_{n3} = 0,$$

$$x_{34} + \dots + x_{nn} = 0,$$

$$\dots$$

$$x_{n-1n} + x_{nn} = 0,$$

cosicchè se agli elementi della prima linea nel determinante Δ sommiamo i corrispondenti delle altre linee, poi nel determinante così ottenuto agli elementi della seconda linea quelli delle linee terza, quarta etc. e nel nuovo determinante agli elementi della terza linea quelli della quarta etc. e così via, trasformeremo Δ in un determinante avente nulli gli elementi da una parte della diagonale, gli elementi della quale risultano

$$1, -x_{12}, -x_{23}, \dots, -x_{n-2,n-1}, x_{nn},$$

cosicchè

$$|\Delta| = u_1^{n-1} (1 - u_2)^{n-2} (1 - u_3)^{n-3} \dots (1 - u_{n-2})^2 (1 - u_{n-1}).$$

Si troverà quindi facilmente

$$I = \int_0^1 f(u_1) u_1^{m_1+m_2+\dots+m_n-1} du_1 \int_0^1 u_2^{m_1-1} (1 - u_2)^{m_2+m_3+\dots+m_n-1} du_2 \\ \int_0^1 u_3^{m_2-1} (1 - u_3)^{m_3+\dots+m_n-1} du_3 \dots \int_0^1 u_n^{m_{n-1}-1} (1 - u_n)^{m_n-1} du_n$$

e perciò

www.libtool.com.cn

$$I = \frac{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1 + m_2 + \dots + m_n)} \int_0^k f(u_1) u_1^{m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1} du_1,$$

formola di *Liouville*, generalizzazione di un'altra ottenuta prima dal *Dirichlet*, corrispondente al caso $k=1$, $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1$, cioè

$$I = \frac{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1 + m_2 + \dots + m_n + 1)}.$$

7) Si può ancora ridurre alle funzioni *gamma* e ad un integrale semplice l'integrale

$$I = \iiint \frac{x^{m-1} y^{p-1} z^{q-1} f(x+y+z)}{(1+ax+by+cz)^{m+p+q}} dx dy dz,$$

dove m, p, q, a, b, c sono quantità positive, esteso ai valori positivi o nulli di x, y, z pei quali $x+y+z \leq k$, k positivo.

Posto

$$f(\rho) = \int_0^\rho dx \int_0^{\rho-x} dy \int_0^{\rho-x-y} dz \frac{x^{m-1} y^{p-1} z^{q-1} f(x+y+z)}{(1+ax+by+cz)^{m+p+q}},$$

è $I = f(k)$.

Poniamo inoltre

$$\int_0^{\rho-x-y} f(x+y+z) \frac{x^{m-1} y^{p-1} z^{q-1} dz}{(1+ax+by+cz)^{m+p+q}} = \varphi(\rho-x-y), \quad \int_0^{\rho-x} \varphi(\rho-x-y) dy = \psi(\rho-x),$$

ed avremo

$$f(\rho) = \int_0^\rho \psi(\rho-x) dx.$$

Derivando rapporto a ρ , ed osservando che possiamo derivare sotto il segno integrale, otteniamo

$$\frac{df(\rho)}{d\rho} = \psi(0) + \int_0^{\rho} \frac{\partial \psi(\rho-x)}{\partial \rho} dx = \int_0^{\rho} \frac{\partial \psi(\rho-x)}{\partial \rho} dx;$$

ma

$$\frac{\partial \psi(\rho-x)}{\partial \rho} = \varphi(0) + \int_0^{\rho-x} \frac{\partial \varphi(\rho-x-y)}{\partial \rho} dy = \int_0^{\rho} \frac{\partial \varphi(\rho-x-y)}{\partial \rho} dy,$$

$$\frac{\partial \varphi(\rho-x-y)}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi(\rho-x-y)}{\partial (\rho-x-y)} = f(\rho) \frac{x^{m-1} y^{p-1} (\rho-x-y)^{q-1}}{[1+ax+by+c(\rho-x-y)]^{m+p+q}}$$

e perciò

$$\frac{df(\rho)}{d\rho} = f(\rho) \int_0^{\rho} dx \int_0^{\rho-x} \frac{x^{m-1} y^{p-1} (\rho-x-y)^{q-1} dy}{[1+ax+by+c(\rho-x-y)]^{m+p+q}}.$$

Poniamo nell'integrale interno $y = (\rho-x)y_1$, e poi $x = \rho x_1$, o, ciò che è lo stesso, cambiamo nell'integrale doppio, che è esteso ai valori positivi o nulli di x, y pei quali $x+y \leq \rho$, le variabili x, y nelle x_1, y_1 colle formole $x = \rho x_1, y = \rho(1-x_1)y_1$; otteniamo così

$$\begin{aligned} \frac{df(\rho)}{d\rho} &= f(\rho) \rho^{m+p+q-1} \int_0^1 dx_1 x_1^{m-1} (1-x_1)^{p+q-1} \\ &\quad \int_0^1 dy_1 \frac{y_1^{p-1} (1-y_1)^{q-1}}{[1+\rho c + (a-c)\rho x_1 + \rho(b-c)y_1(1-x_1)]^{m+p+q}} \end{aligned}$$

$$= f(\rho) \rho^{m+p+q-1} \int_0^1 dy_1 y_1^{p-1} (1-y_1)^{q-1} \\ \int_0^1 dx_1 \frac{x_1^{m-1} (1-x_1)^{p+q-1}}{[1+\rho c+(a-c)\rho x_1+\rho(b-c)y_1(1-x_1)]^{m+p+q}}.$$

Nella ultima formola del n. 92 pag. 267 poniamo $b=\lambda+\mu$, $c=\nu-\lambda$, abbiamo

$$(x) \int_0^1 \frac{(1-y)^{p-1} y^{q-1} dy}{[\mu+\nu y+\lambda(1-y)]^{p+q}} = \frac{1}{(\lambda+\mu)^p (\mu+\nu)^q} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

usando queste formole si ottiene

$$\frac{df(\rho)}{d\rho} = f(\rho) \rho^{m+p+q-1} \frac{\Gamma(m) \Gamma(p+q)}{\Gamma(m+p+q)} \frac{1}{(1+\rho a)^m} \int_0^1 dy_1 \frac{y_1^{p-1} (1-y_1)^{q-1}}{(1+\rho c+\rho(b-c)y_1)^{p+q}} \\ = \frac{\Gamma(m) \Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(m+p+q)} \frac{f(\rho) \rho^{m+p+q-1}}{(1+\rho a)^m (1+\rho b)^p (1+\rho c)^q},$$

dalla quale, integrando rispetto a ρ tra i limiti 0 e k ed osservando che $f(0)=0$, risulta

$$f(k) = I = \frac{\Gamma(m) \Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(m+p+q)} \int_0^k \frac{f(\rho) \rho^{m+p+q-1} d\rho}{(1+\rho a)^m (1+\rho b)^p (1+\rho c)^q}.$$

In modo analogo si giungerebbe alla formola generale

$$\int \int \dots \int f(x_1+x_2+\dots+x_n) \frac{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \dots x_n^{m_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{(1+a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^{m_1+m_2+\dots+m_n}} \\ = \frac{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\dots+m_n)} \int_0^k \frac{f(\rho) \rho^{m_1+m_2+\dots+m_n-1} d\rho}{(1+\rho a_1)^{m_1} (1+\rho a_2)^{m_2} \dots (1+\rho a_n)^{m_n}}$$

dove $m_1 \dots m_n$, $a_1 \dots a_n$ sono positivi, e il campo di integrazione è costituito dai valori positivi o nulli di $x_1, x_2 \dots x_n$ pei quali $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k, k > 0$ (SCHLÖMILCH).

ESERCIZI

$$1. \iiint \frac{dx dy dz \cos \psi}{x^2 + y^2 + (z-a)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi r^2}{a^2}, \quad a > r, \text{ l'integrale es-}$$

sendo esteso ai punti x, y, z pei quali $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, avendo indicato con ψ l'angolo che fa coll'asse delle z la retta che unisce i punti $(0, 0, a), (x, y, z)$. (L'integrale rappresenta l'attrazione, secondo la legge di NEWTON, esercitata da una materia omogenea di densità *uno*, che riempia una sfera, sopra un punto materiale di massa *uno* esterno alla sfera).

2. Campo T costituito dai punti x, y, z pei quali $|z| \leq h$, $x^2 + y^2 \leq r^2$:

$$\int_T \frac{(a-z) dT}{[x^2 + y^2 + (a-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = 2\pi [\sqrt{r^2 + (a-h)^2} - \sqrt{r^2 + (a+h)^2} + 2h], \quad a > h,$$

(attrazione di un cilindro retto a base circolare di raggio r omogeneo di densità *uno* e di altezza $2h$, sopra un punto materiale di massa *uno* esterno e situato sull'asse del cilindro).

3. Sia il cono che ha per vertice l'origine delle coordinate e per direttrice la ellisse, sul piano $z=c > 0$, la cui proiezione sul piano $z=0$ ha per equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Il campo T sia la parte di spazio al disopra del piano $z=0$ compresa tra il cono e i piani $x=0, y=0, z=c$.

Abbiamo

$$\int_T \frac{xy}{\sqrt{z}} dT = \frac{a^2 b^2 \sqrt{c}}{36}.$$

4. $\iiint \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{4\pi a^2}{3}$, l'integrale essendo esteso ai punti (x, y, z) pei quali $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2$ (Giova usare le coordinate polari).

$$5. \iiint \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{\varepsilon^3} - 1\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

le integrazioni essendo estese al campo determinato dalle due relazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq \varepsilon^2, \quad \varepsilon < 1.$$

$$6. \int \int \dots \int f\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n} \left[x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \dots x_n^{m_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n \right]$$

$$= \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n}}{p_1 p_2 \dots p_n} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}\right) \Gamma\left(\frac{m_2}{p_2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} + \dots + \frac{m_n}{p_n}\right)} \int_0^1 f(u) u^{\frac{m_1}{p_1} + \dots + \frac{m_n}{p_n} - 1} du,$$

l'integrazione essendo estesa ai valori positivi o nulli di $x_1, x_2, \dots, x_n$ pei quali

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{p_2} + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n} \leq k,$$

essendo $k, a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_n, m_1, \dots, m_n$ numeri positivi (LIOUVILLE).

7. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di $x_1, x_2, \dots, x_n$ pei quali $x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + \dots + x_n^{p_n} \leq 1$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ positivi.

$$\int \int \dots \int \sqrt[1-x_1^{p_1}-x_2^{p_2}-\dots-x_n^{p_n}}{x_1^{m_1-1} \dots x_n^{m_n-1} dx_1 \dots dx_n}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m p_1 p_2 \dots p_n} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m_1}{p_1} + \dots + \frac{m_n}{p_n}\right)},$$

$$\int \int \dots \int \frac{x_1^{m_1-1} \dots x_n^{m_n-1}}{\sqrt[1-x_1^{p_1}-\dots-x_n^{p_n}]} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m_n}{p_n}\right)}{p_1 p_2 \dots p_n \Gamma\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{m_1}{p_1} + \dots + \frac{m_n}{p_n}\right)},$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$ positivi e $m > 0$ nella prima, $m > 1$ nella seconda formola.

8. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di $x_1, x_2, \dots, x_n$ pei quali $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$.

$$\int \int \dots \int \sqrt{\frac{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + 1\right)} \right\}.$$

Si vede così che se n è della forma 4μ o $4\mu + 2$, l'integrale è esprimibile mediante π , se n è della forma $4\mu + 1$ o $4\mu + 3$, mediante π e $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

$$9. \int_0^k x^{m-1} \int_0^{k-x} f''(x+y) \frac{dy}{y^m} = \frac{\pi}{\sin m\pi} [f(k) - f(0)], \quad m > 0, k > 0.$$

10. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di $x_1, x_2, \dots, x_n$ pei quali $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$, $k > 0$.

$$\int \int \dots \int f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \frac{x_1^{m_1-1} \dots x_n^{m_n-1} dx_1 \dots dx_n}{(h + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)^{m_1 + \dots + m_n + 1}}$$

$$= \frac{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)}{\Gamma(1 + m_1 + m_2 + \dots + m_n)} \int_0^k \frac{d_\rho f(\rho) \rho^{m_1 + \dots + m_n - 1}}{(h + \rho a_1)^{m_1} \dots (h + \rho a_n)^{m_n}} \left[\frac{m_1}{h + \rho a_1} + \dots + \frac{m_n}{h + \rho a_n} \right],$$

dove $m_1, m_2, \dots, a_1, a_2, \dots, h$ sono quantità positive.

11. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di x, y, z per i quali $x + y + z \leq k$, $k > 0$.

$$\iiint f\left(\frac{k-x-y-z}{1+ax+by+cz}\right) x^{m-1} y^{p-1} z^{q-1} dx dy dz$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(m+p+q+1)} \int_0^k \frac{(k-u)^{m+p+q-1} f(u) du}{(1+au)^m (1+bu)^p (1+cu)^q} \left[m \frac{1+ak}{1+au} + p \frac{1+bk}{1+bu} + q \frac{1+ck}{1+cu} \right]$$

dove m, p, q, a, b, c sono positivi.

Vale pure la formola analoga pel caso di n variabili (SCHLÖMILCH).

(Si ponga l'integrale triplo, corrispondente a $k = \rho$, uguale a $\varphi(\rho)$ e si operi come nell'esempio 7 n. 104; ma si cominci poi coll'integrare rispetto a ρ tra 0 e k , ponendo a tale scopo $\frac{k-\rho}{1+\sigma\rho} = u$, dove

$$\sigma = ax_1 + b(1-y_1)x_1 + c(1-x_1)(1-y_1),$$

e si usi la formola

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{p-1} y^{q-1} dy}{[\mu + \nu y + \lambda(1-y)]^{p+q+1}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \frac{1}{(\lambda+\mu)^p (\mu+\nu)^q} \left[\frac{p}{\lambda+\mu} + \frac{q}{\mu+\nu} \right].$$

ottenuta dalla (x) n. 104 derivandola rispetto a μ .

III. Applicazioni degli integrali definiti.

Rettificazione delle curve.

105. Sia $y=y(x)$ funzione univalente di x , che ammetta derivata $y'(x)$ integrabile nell'intervallo (x_0, ω) , $x_0 < x$, così che sia

$$(1) \quad \int_{x_0}^{\omega} \sqrt{1+y'(x)^2} dx = \lim \sum \Delta x_r \sqrt{1+y_r'^2},$$

dove x_r indicano i punti di divisione dell'intervallo (x_0, x) nelle parti Δx_r , e y_r' un qualunque valore compreso tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) dei valori di $y'(x)$ nell'intervallo (x_{r+1}, x_r) .

Poiché

$$\frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = y'(x_r + \xi_r \Delta x_r), \quad 0 < \xi_r < 1,$$

e possiamo nella (1) prendere $y_r' = y'(x_r + \xi_r \Delta x_r)$, avremo

$$\int_{x_0}^{\omega} \sqrt{1+y'(x)^2} dx = \lim \sum \sqrt{\Delta x_r^2 + \Delta y_r^2},$$

cioè, indicando con s l'arco della curva piana $y=y(x)$, supponendo x, y siano coordinate cartesiane ortogonali, le cui ascisse estreme sono x_0, x , risulta (Vedi volume I, n. 182)

$$s = \int_{x_0}^{\omega} \sqrt{1+y'(x)^2} dx.$$

È facile riconoscere che questa formola sussiste ancora se la $y'(x)$ diviene infinita, mantenendosi integrabile, in punti in numero finito dell'intervallo (x_0, x) .

Se $x = x(y)$ è la equazione data della curva, o quella che si ricava da $y = y(x)$, e la $x(y)$ ammette derivata integrabile nell'intervallo (y_0, y) . $y_0 < y$, dove y_0, y , indicano le ordinate degli estremi dell'arco s , avremo parimenti

$$s = \int_{y_0}^y \sqrt{1 + x'(y)^2} dy.$$

Se le coordinate dei punti della curva sono date dalle formole

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

dove le φ, ψ sono funzioni univalenti e che ammettono derivate integrabili nell'intervallo t_0, t , ($t_0 < t$), si vedrebbe facilmente che

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt,$$

essendo s l'arco di curva i cui punti si ottengono facendo variare la variabile t da t_0 a t .

Ricordando che l'elemento ds di curva in coordinate polari ρ, ϑ è $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$, si vede che l'arco s compreso tra due punti di coordinate $(\rho_0, \vartheta_0), (\rho, \vartheta)$ è

$$s = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \rho \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2 + \rho^2}, \text{ oppure } s = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\rho}\right)^2},$$

oppure, se si suppongono le coordinate ρ, ϑ espresse per un parametro t ,

$$s = \int_{t_0}^t dt \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \vartheta'(t)^2}.$$

www.libtool.com **ESEMPI**

1) Si voglia determinare la lunghezza dell'arco s compreso tra il punto in cui la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Vedi vol. I° esercizio 1 pag. 527 e a pag. 508) incontra l'asse positivo delle y e il punto di coordinate (x, y) , essendo x, y positivi. Dalla equazione della curva ricaviamo $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$,
 $y' = - (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}$, $1 + y'^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$, e quindi

$$s = a^{\frac{1}{3}} \int_0^x \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Facendo $x=a$ si ottiene tutto l'arco compreso tra i punti in cui la curva incontra le parti positive degli assi, che è $\frac{3}{2} a$; la lunghezza di tutta la curva, che è simmetrica rispetto agli assi, è perciò uguale a $6a$.

2) *Parabola* — La lunghezza d'arco s di parabola $y^2 = 2px$ compreso tra il vertice e un punto di coordinate (x, y) è

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + p^2} dy = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

3) *Ellisse*. Per la ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b$), abbiamo
 $ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$, ossia, osservando che dall'equazione della curva si ricava $a^4 y^2 = a^2 b^2 (a^2 - x^2)$ e posto $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$,
 $ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$; l'arco s compreso tra i punti $(0, b)$, (x, y) è perciò

$$s = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}};$$

L'integrazione non si può effettuare in termini finiti, e l'integrale del secondo membro è un integrale ellittico di 2^a specie (Vedi n. 37); gli integrali ellittici furono appunto così chiamati perchè uno di essi serve alla rettificazione dell'arco di ellisse.

Posto $x = a \operatorname{sen} \varphi$ abbiamo

$$s = a \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Studiando la rettificazione delle curve, si giunse a trovare delle relazioni semplici tra archi di curve, che presi isolatamente non sono rettificabili in termini finiti. Le prime ricerche di questo genere sono dovute a *Fagnano* (n. a Sinigaglia nel 1682, m. nel 1766) e sono molto importanti per loro stesse e perchè furono il punto di partenza di ulteriori studi dovuti ad *Eulero*. Egli osserva che dalla relazione

$$hfx^2z^2 + fl(x^2 + z^2) + gl = 0$$

da cui

$$z = \sqrt{\frac{-l(g + fx^2)}{f(l + hx^2)}}, \quad x = \sqrt{\frac{-l(g + fz^2)}{f(l + hz^2)}},$$

si ricava, differenziando e dividendo per $2fzx$,

$$h(zdx + xdz) + l\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right) = 0$$

ossia

$$-\frac{h}{l}xz = dx \sqrt{-\frac{f}{l}} \sqrt{\frac{l + hx^2}{g + fx^2}} + dz \sqrt{-\frac{f}{l}} \sqrt{\frac{l + hz^2}{g + fz^2}},$$

da cui

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{l + hx^2}{g + fx^2}} + \int_0^z dz \sqrt{\frac{l + hz^2}{g + fz^2}} = -\frac{h}{\sqrt{-fl}} xz + C;$$

ponendo $x=0$, ed osservando che allora $z = \sqrt{-\frac{g}{f}}$, si trova

$$C = \int_0^{\sqrt{-\frac{g}{f}}} dz \sqrt{\frac{l + hz^2}{g + fz^2}} \text{ e quindi}$$

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{l + hx^2}{g + fx^2}} + \int_{\sqrt{-\frac{g}{f}}}^z dz \sqrt{\frac{l + hz^2}{g + fz^2}} = -\frac{h}{\sqrt{-f}} xz.$$

Ponendo ora $g=l=a^2$, $h=-e^2$, $f=-1$, abbiamo

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} + \int_a^z dz \sqrt{\frac{a^2 - e^2 z^2}{a^2 - z^2}} = \frac{e^2}{a} xz,$$

dove $z = a \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2 x^2}}$.

Indicando con M il punto della ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situato sul quadrante determinato dalle parti positive degli assi, la cui ascissa è x , con N il punto dello stesso quadrante la cui ascissa è z , con A, B i punti in cui le parti positive degli assi delle y e delle x incontrano l'ellisse, la formola precedente ci dice che

$$\text{arco AM} - \text{arco NB} = \frac{e^2}{a} xz = e^2 x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2 x^2}}.$$

4) *Cicloide*. Dalle equazioni $x=a(t - \sin t)$, $y=a(1 - \cos t)$ ricaviamo $dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos t)dt^2$ e quindi, indicando con s l'arco di cicloide tra il punto $t=0$, ove essa incontra la base, e il punto $t=t$, è

$$s = a\sqrt{2} \int_0^t dt \sqrt{1 - \cos t} = 2a \int_0^t \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right).$$

Per $t=2\pi$ questa formola ci dà la lunghezza di un intero ramo di cicloide, che è uguale a $8a$, cioè otto volte il raggio del circolo generatore.

5) *Lemniscata* — Dalla equazione della lemniscata in coordinate polari

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\vartheta$$

ricaviamo

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 = 2a^2 \frac{d\vartheta^2}{\cos 2\vartheta}, \quad s = a\sqrt{2} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}},$$

essendo s l'arco di curva compreso tra i punti A, M di coordinate $(a\sqrt{2}, 0)$, (ρ, ϑ) , che chiameremo *arco* AM.

Il quarto del perimetro della intera curva è quindi

$$a\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}, \quad \text{ossia, posto } 2\vartheta = x, \quad \frac{a\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} \quad \text{od anche}$$

(Vedi Es. 7 a pag. 270)

$$\begin{aligned} \frac{a\sqrt{2}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} &= \frac{a\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{a}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

e l'intero perimetro è $a \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}$; cosichè il perimetro della lemniscata può servire a rappresentare la trascendente numerica $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

Fagnano ha fatto relativamente alla lemniscata delle ricerche analoghe a quelle per l'ellisse, giungendo ad importantissimi risultati, tra i quali il seguente.

Posto

$$(2) \quad \cos 2\vartheta = \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} \text{ da cui } \cos 2\varphi = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{1 + \cos 2\vartheta}$$

si ha

$$a\sqrt{2} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = a\sqrt{2} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

ma il secondo membro esprime l'arco di lemniscata compreso tra il centro O della curva, che corrisponde a $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, e il punto M_1 il cui angolo polare è $\varphi = \arccos \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{1 + \cos 2\vartheta}$, arco che chiameremo *arco* OM_1 .

Quindi *arco* $OM_1 = \text{arco } AM$ quando tra gli angoli polari ϑ, φ dei punti M, M_1 passa la relazione (2) cioè la relazione $\cos 2\vartheta = \operatorname{tg}^2 \varphi$ ossia $\cos \vartheta \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se poniamo $\vartheta = \varphi = \vartheta_1$ ab-

biamo $\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e perciò il punto N che corrisponde al-

l'angolo polare $\vartheta_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ divide per metà il quadrante OMA di lemniscata, e tale punto N può costruirsi colla riga

e col compasso.

106. Sia la curva gobba le cui equazioni sono

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

oppure le coordinate dei punti della quale sono

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t);$$

indicato con s la lunghezza dell'arco di questa curva, le cui estremità hanno per coordinate $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z)$ o che corrispondono ai valori t_0 e t del parametro t , abbiamo

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \int_{y_0}^y dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \\ &= \int_{z_0}^z dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}. \end{aligned}$$

oppure

$$s = \int_{t_0}^t dt \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Se si usassero le coordinate polari ρ, ϑ, φ , ricordando che $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$, si avrebbe

$$s = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2} = \dots$$

dove $(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0), (\rho, \vartheta, \varphi)$ indicano le coordinate degli estremi dell'arco s .

ESEMPI

1) L'arco s di curva, le cui equazioni sono $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$, contato a partire dall'origine delle coordinate e che termina al punto (x, y, z) è

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^4}} = \int_0^x dx \left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) = x + \frac{x^3}{6a^2} = x + z.$$

2) Si voglia l'arco s compreso tra l'origine delle coordinate e il punto (x, y, z) della curva intersezione del cilindro parabolico $(y+z)^2 = 4ax$ col cono ellittico $\frac{4}{3}x^2 + y^2 = z^2$. Osservando che l'ultima equazione può scriversi $(z-y)(z+y) = \frac{4}{3}x^2$, ricaviamo dalle equazioni della curva:

$$z = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^3}{a}} + \sqrt{ax}, \quad y = \sqrt{ax} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

e da queste $1 + y'^2 + z'^2 = \frac{(a+x)^2}{2ax}$, cosicchè

$$s = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_0^x \frac{(a+x) dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \left(a\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} \right) = z\sqrt{2}.$$

3) *Elica conica*. — Le coordinate dei punti della curva siano

$$(1) \quad x = ct \operatorname{tg} \gamma \cos t, \quad y = ct \operatorname{tg} \gamma \sin t, \quad z = ct.$$

L'arco s compreso tra l'origine delle coordinate ($t=0$), e il punto $t=t$ è

$$\begin{aligned} s &= \frac{c}{\cos \gamma} \int_0^t d\eta \sqrt{1 + t^2 \operatorname{sen}^2 \gamma} \\ &= \frac{c}{2 \cos \gamma} \left[t \sqrt{1 + t^2 \operatorname{sen}^2 \gamma} + \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma} \log (t \operatorname{sen} \gamma + \sqrt{1 + t^2 \operatorname{sen}^2 \gamma}) \right], \end{aligned}$$

che, espresso per z e posto $\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = k$, diviene

$$s = \frac{1}{2 \cos \gamma} \left[\frac{z \sqrt{k^2 + z^2}}{k} + k \log \frac{z + \sqrt{k^2 + z^2}}{k} \right].$$

La nostra curva è, come si vede eliminando t dalle (1), l'intersezione del cono $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \gamma$ coll'elicoide gobbo a piano direttore $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ e chiamasi elica conica.

4) *Lossodromica*. — È la curva situata sulla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

e sul cilindro

$$\sqrt{x^2 + y^2} (e^{k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} + e^{-k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}) = 2a$$

(essa fa un angolo costante $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$ coi cerchi massimi della sfera, che passano pei punti $(0, 0, a)$ $(0, 0, -a)$).

Usando le coordinate polari

$$x = \rho \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \rho \cos \vartheta,$$

le sue equazioni divengono

$$\rho^2 = a^2, \quad \operatorname{sen} \vartheta (e^{k\varphi} + e^{-k\varphi}) = 2,$$

e quindi $d\rho = 0$, $ds^2 = a^2 d\vartheta^2 \left[1 + \operatorname{sen}^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta} \right)^2 \right]$. Ma

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = - \frac{\cos \vartheta (e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})}{k \operatorname{sen} \vartheta (e^{k\varphi} - e^{-k\varphi})},$$

ossia, osservando che

$$\cos^2 \vartheta = 1 - \frac{4}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \frac{(e^{k\varphi} - e^{-k\varphi})^2}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2}, \quad \text{è } \frac{d\varphi}{d\vartheta} = - \frac{1}{k \operatorname{sen} \vartheta}.$$

Quindi abbiamo

$$s = a \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = a \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} (\vartheta - \vartheta_0),$$

e, posto $k = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, è $s = \frac{a(\vartheta - \vartheta_0)}{\cos \alpha}$.

Quadratura delle curve piane.

107. Consideriamo una curva rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dalla equazione $y=f(x)$, dove $f(x)$ è funzione univalente continua. Sia $y \geq 0$ pei valori di un certo intervallo cui appartengono i punti x_0, x , $x_0 < x$. Dividiamo comunque l'intervallo (x_0, x) in parti h_s e consideriamo la somma $\sum h_s y_s$, dove y_s indica il valore dell'ordinata corrispondente ad un punto qualunque dell'intervallo h_s , cioè consideriamo la somma dei rettangoli che hanno h_s per base e per altezza y_s . Il limite della somma di questi rettangoli, quando le h_s impiccoliscono indefinitamente, definiamo come l'area A compresa tra la curva l'asse delle x e le ordinate corrispondenti alle ascisse x_0, x ed abbiamo così

$$A = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Se la y fosse sempre negativa, basterebbe nella definizione precedente prendere per y_s il valore assoluto dell'ordinata: cosichè A risulterebbe uguale al valore assoluto del precedente integrale.

Si intende senz'altro come si definisca in modo analogo l'area compresa tra la curva data, l'asse delle y e due ascisse corrispondenti a due ordinate y_0, y .

Calcolare l'area A dicesi anche *quadrare* la curva corrispondente, e ciò si ottiene mediante una integrazione. Perciò quando un problema è ridotto al calcolo di integrali suole dirsi che è ridotto alle *quadrature*.

L'area della parte del piano compresa tra due curve $y=f(x)$, $y_1=f_1(x)$ e le due rette $x=x_0$, $x=x$, se $y \geq y_1 \geq 0$ nell'intervallo (x_0, x) , si definisce come la differenza tra l'area A della prima e l'area A_1 seconda curva, cioè è $\int_{x_0}^x [f(x) - f_1(x)] dx$. Se fosse $y \geq 0$, $y_1 \leq 0$ nell'intervallo (x_0, x) tale area sarebbe la

somma delle due aree $\int_{x_0}^x \{f(x) + |f_1(x)|\} dx$, cioè ancora $\int_{x_0}^x [f(x) - f_1(x)] dx$. Si procede in modo analogo negli altri casi.

La parte del piano limitata da curve o porzioni di curve qualunque definite analiticamente può decomporci in parti comprese ciascuna tra due curve $y=f(x)$, $y=f_1(x)$, dove le $f(x)$, $f_1(x)$ sono univalenti, e le due ordinate corrispondenti a certe ascisse x_0, x_1 ; chiamiamo area limitata dalle curve o porzioni delle curve date la somma delle aree di queste parti.

108. Sia la curva $\rho=f(\vartheta)$ in coordinate polari ρ, ϑ e sia $f(\vartheta)$ funzione univalente continua in un certo intervallo di ampiezza minore o uguale a 2π per ϑ , cui appartengono i valori ϑ_0, ϑ .

Diviso l'intervallo (ϑ_0, ϑ) in parti h_s , consideriamo la somma $\frac{1}{2} \sum h_s \rho_s^2$ essendo ρ_s il valore di $f(\vartheta)$ corrispondente ad un qualunque valore di ϑ dell'intervallo h_s ; $\frac{1}{2} h_s \rho_s^2$ è l'area del settore del circolo di raggio ρ_s il cui angolo al centro è misurato da h_s . Il limite della somma $\frac{1}{2} \sum h_s \rho_s^2$, quando le h_s impiccoliscono indefinitamente, definiamo come l'area del settore compreso tra la nostra curva e i due raggi vettori corrispondenti ai valori ϑ_0, ϑ dell'angolo polare. Tale area è quindi

$$\frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \rho^2 d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f(\vartheta)^2 d\vartheta.$$

109. Della quadratura delle curve diamo ora alcuni

ESEMPI

1) *Ellisse*. — L'area A , compresa tra l'asse delle x , l'asse delle y , la ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, e la ordinata y corrispondente

all'ascissa x , è

$$A = \frac{b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{2a} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a} \right];$$

l'area di un quarto dell'ellisse si ottiene da questa formola ponendovi $x=a$, ed è quindi $\frac{ab}{4} \pi$, e perciò l'area racchiusa da tutta la curva è πab . Se $a=b$ abbiamo gli stessi elementi relativi al circolo di raggio a , $x^2 + y^2 = a^2$.

2) *Iperbole*. — L'area A compresa tra l'asse delle x , la iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e la ordinata y corrispondente all'ascissa x , è

$$A = \frac{b}{a} \int_a^x dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{2a} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right].$$

3) *Parabola*. L'area A compresa tra l'asse delle y la parabola $y^2 = 2px$ e la ascissa corrispondente all'ordinata y è

$$A = \frac{1}{2p} \int_0^y y^2 dy = \frac{y^3}{6p} = \frac{xy}{3},$$

cioè è uguale al terzo del rettangolo costruito colle coordinate del punto che si considera sulla parabola.

4) *Cicloide*. — Le sue coordinate sono $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, quindi l'area A compresa tra l'asse delle x , base della cicloide, la curva e la ordinata y , corrispondente a $t=t$, è

$$A = \int_0^x y dx = a^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \left[\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right].$$

Facendo $t=2\pi$ si ottiene l'area compresa fra tutto un ra-

mo di cicloide e la base, cioè $3\pi x^2$, ossia è tre volte l'area del circolo generatore della cicloide, come pel primo trovò GALILEO.

5) Sia la curva $x = t + t^2$, $y = t^2 + t^3$. (vedi esem. 6 a pag. 505 del Vol. I). Ricordando le proprietà della curva stessa, si vede che l'area A del cappio della curva è

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} (t^2 + t^3)(1 + 2t)dt - \int_{-\frac{1}{2}}^0 (t^2 + t^3)(1 + 2t)dt \\ &= \int_0^{-1} (t^2 + t^3)(1 + 2t)dt = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

6) *Lemniscata*. — L'area A del settore di lemniscata $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\vartheta$ compreso tra l'asse polare, la curva ed il punto

di coordinate (ρ, ϑ) è $A = a^2 \int_0^{\vartheta} \cos 2\vartheta d\vartheta = \frac{a^2}{2} \sin 2\vartheta$; facendo

$\vartheta = \frac{\pi}{4}$ abbiamo l'area della metà di una delle ovali di cui si

compone la curva, cioè $\frac{a^2}{2}$, e l'area dell'intera ovale è a^2 , ossia è il quadrato formato sopra la semidistanza dei due fuochi della curva.

7) *Folium di Descartes*. — Si voglia determinare l'area del cappio della curva

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(vedi vol. I esempio 3 pag. 519, ed eserc. 7 pag. 529).

Passando dalle coordinate cartesiane alle polari nel solito modo la equazione della curva diviene

$$\rho = \frac{3a \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta + \cos^3 \vartheta},$$

e quindi

www.libtool.com.cn

$$A = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi = \frac{3a^2}{2}$$

(vedi eserc. 4 a pag. 117).

Questa curva ha l'asintoto $x + y + a = 0$, ossia, in coordinate polari, $\rho = \frac{-a}{\sin \varphi + \cos \varphi}$. L'area A_1 , compresa tra i due raggi vettori corrispondenti a $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ il relativo ramo di curva e l'asintoto, si ottiene sottraendo l'area compresa tra i due raggi vettori ed il ramo di curva dall'area compresa tra i due raggi vettori e l'asintoto, cioè

$$A_1 = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2} - \frac{9a^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi,$$

ossia, poichè

$$\int \frac{d\varphi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2} = \int \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi},$$

$$\text{è } A_1 = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_0} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1} - \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^3 \varphi_0} + \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^3 \varphi_1} \right]$$

od anche, osservando che

$$1 + \operatorname{tg}^3 \varphi = (1 + \operatorname{tg} \varphi)(1 - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi),$$

$$A_1 = \frac{a^2}{2} \left[\frac{2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} - \frac{2 - \operatorname{tg} \varphi_0}{1 - \operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0} \right].$$

L'area della parte indefinita di piano compresa tra la parte negativa dell'asse delle x , l'asintoto e la curva, si ottiene da

questa espressione facendovi $\zeta_0 = 3 \frac{\pi}{4}$, $\zeta_1 = \pi$, cioè è $\frac{a^2}{2}$. e l'area della parte indefinita di piano compresa tra la parte negativa dell'asse delle y l'asintoto e la curva si ottiene facendo $\zeta_0 = 3 \frac{\pi}{2}$, $\zeta_1 = 7 \frac{\pi}{4}$, cioè è ancora $\frac{a^2}{2}$, come potevasi asserire senz'altro per la forma della curva. L'area del triangolo compreso tra gli assi o l'asintoto essendo ancora $\frac{a^2}{2}$, si vede che l'area compresa tra la curva e l'asintoto è $\frac{3a^2}{2}$, cioè è uguale all'area del cappio.

8) Indicato con C il campo limitato da una o più linee si intende subito che l'area A del campo C è $\int_C \int dx dy$; cosicchè gioverà qualche volta servirsi di questa formola per calcolare l'area A . Ad esempio, si voglia l'area A della parte di piano al disopra dell'asse delle x , compresa tra i circoli $x^2 + y^2 = bx$, $x^2 + y^2 = ax$, e la retta $y = c$, dove $a < b$, $0 < c < \frac{a}{2}$.

Avremo $A = \int_C \int dx dy$; passando dalle coordinate cartesiane alle polari colle formole $x = \rho \cos \zeta$, $y = \rho \sin \zeta$, avremo, come facilmente si riconosce,

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\frac{c}{\sin \theta}}^{\frac{b \cos \theta}{\sin \theta}} \rho d\rho + \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\frac{c}{\sin \theta}}^{\frac{b \cos \theta}{\sin \theta}} \rho d\rho + \int_{\theta_2}^{\theta_3} d\theta \int_{\frac{c}{\sin \theta}}^{\frac{a \cos \theta}{\sin \theta}} \rho d\rho,$$

dove θ_0, θ_3 indicano gli angoli polari dei punti in cui la retta $y = c$ incontra il circolo di raggio $\frac{b}{2}$, θ_1, θ_2 gli angoli polari dei punti in cui incontra il circolo di raggio $\frac{a}{2}$, essendo così

$$\begin{aligned} \sin 2\theta_0 &= \sin 2\theta_3 = \frac{2c}{b}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2c}{b}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2} - \theta_0, \\ \sin 2\theta_1 &= \sin 2\theta_2 = \frac{2c}{a}, \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2c}{a}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1; \end{aligned}$$

cosichè

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(b^2 \cos^2 \theta - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \right) d\theta + \frac{b^2 - a^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\theta_2}^{\theta_3} \left(b^2 \cos^2 \theta - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \right) d\theta \\
 &= \frac{b^2}{4} (\theta_1 - \theta_0 + \theta_2 - \theta_3) + \frac{b^2 - a^2}{4} (\theta_3 - \theta_1) + \frac{c^2}{2} (\cot \theta_1 - \cot \theta_0 + \cot \theta_2 - \cot \theta_3) \\
 &= \frac{b^2 - a^2}{8} \pi - \frac{b^2}{4} \arcsin \frac{2c}{b} + \frac{a^2}{4} \arcsin \frac{2c}{a} + \frac{c}{2} (\sqrt{a^2 - 4c^2} - \sqrt{b^2 - 4c^2}).
 \end{aligned}$$

ESERCIZI

1. *Cissoide*. — $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (Vol. I, es. 13 pag. 531 ed es. 3 pag. 569). Abbiamo ¹⁾

$$\begin{aligned}
 s(0, x) &= 2a \sqrt{\frac{3x - 8a}{x - 2a}} - 4a + a \sqrt{3} \log \frac{3x - 7a + \sqrt{3} \sqrt{(x - 2a)(3x - 8a)}}{(4\sqrt{3} - 7)a} \\
 &= 2a \sqrt{\frac{3x - 8a}{x - 2a}} - 4a + 2a \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{8a - 3x} - \sqrt{6a - 3x}}{\sqrt{8a} - \sqrt{6a}}; \\
 A(0, x) &= \frac{1}{2} (3a - x) \sqrt{x(2a - x)} + \frac{3a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x - a}{a} + \frac{\pi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

¹⁾ Indichiamo con $s(a, b)$ l'arco di curva compreso tra i punti le cui coordinate dello stesso nome sono a e b ; con $A(a, b)$ l'area compresa tra la curva, l'asse della x (o delle y) e le ordinate (o ascisse) corrispondenti alle ascisse (o ordinate) a, b ; con $\text{sett}(a, b)$ il settore compreso tra la curva e i due raggi vettori corrispondenti ai due angoli polari a, b , o tra i raggi vettori di lunghezza a, b .

L'area tra la curva e l'asintoto è $3\pi a^4$.

2. *Trattrice*. $x = \frac{h}{2} \log \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{h - \sqrt{h^2 - y^2}} - \sqrt{h^2 - y^2}$.

(Vol. I, es. 8 pag. 570)

$$s(y, h) = h \log \frac{h}{y}; \quad \Lambda(h, x) = \frac{h^2 \pi}{4} - \frac{1}{2} y \sqrt{h^2 - y^2} - \frac{h^2}{2} \arcsen \frac{y}{h}.$$

Area tra curva e asse delle x è $\frac{h^2 \pi}{2}$. (Si osservi che $y dx = -\sqrt{h^2 - y^2} dy$).

3. *Versiera*. (vol. I, es. 13 pag. 531) $xy^2 - a^2(a - x) = 0$.

$$\Lambda(x, a) = a^2 \arctg \sqrt{\frac{a - x}{x}} - a \sqrt{x(a - x)};$$

area tra curva ed asse delle y è πa^2 .

4. *Lumaca di Pascal* (vol I, es. 1 pag. 516) $\rho = b \cos \varphi + a$.

Se $b < a$ l'area racchiusa dalla intera curva è uguale a $\frac{\pi}{2} (2a^2 + b^2)$, se $b = a$ (*cardioid*) è $\frac{3\pi a^2}{2}$. Se $b > a$ l'area racchiusa dalla parte esterna della curva è uguale a $\frac{1}{2} (2a^2 + b^2) x + \frac{3a}{2} \sqrt{b^2 - a^2}$, dove $x = \arccos \left(-\frac{a}{b} \right)$, e l'area del cappio è $\frac{1}{2} (2a^2 + b^2) (\pi - x) - \frac{3a}{2} \sqrt{b^2 - a^2}$.

5. Curva $x^4 + y^4 - ax^2 y = 0$. È tutta al disopra dell'asse delle x e si compone di due cappi od ovali simmetricamente situati rispetto all'asse delle y . L'area di una delle ovali è uguale a $\frac{\pi a^2}{16 \sqrt{2}}$. (Giovà usare coord. polari).

6. Curva $x^4 + y^4 - a^2 xy = 0$. Area di una delle ovali è $\frac{\pi a^2}{8}$.

7. *Strofoide*. $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$. Area cappio è $2a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$.

L'area tra la curva e l'asintoto è $2a^2 \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$, e quindi area totale $4a^2$.

8. L'area compresa tra le curve $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ è uguale a $\frac{4}{3}p^2$.

9. Curva $y = \pm \left(\frac{a}{2} + x\right) \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. Area cappio = $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$, area tra curva ed asintoto = $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$.

10. Curva $y^2 = x^2(1-x^2)$ (Vol I, pag. 509). A(0, x) = $\frac{1}{3} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)$. Area racchiusa da tutta la curva = $\frac{4}{3}$.

11. Curva: $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$. La curva ha un cappio, le coordinate dei punti del cui contorno si ottengono facendo variare x da 0 a 3. Area del cappio = $\frac{8}{5}\sqrt{3}$. Perimetro del cappio = $4\sqrt{3}$.

12. *Sviluppante di circolo*. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$. Passando alle coordinate polari si trova $\rho^2 = a^2(1+t^2)$, $\varphi = t - \arctg t$.

$$\text{Sett}(0, \varphi) = \text{Sett}(0, t) = \frac{a^2 t^3}{6}.$$

13. *Spirale d'Archimede* $\rho = a\varphi$;

$$\text{sett}(0, \rho) = \text{sett}(0, \varphi) = \frac{\rho^3}{6a},$$

$$s(0, \varphi) = \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{1+\varphi^2} + \log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})].$$

Spirale iperbolica $\rho\varphi = a$;

$$\text{sett}(1, \varphi) = \text{sett}(a, \rho) = \frac{a(a-\rho)}{2},$$

$$\text{sett}(1, \infty) = \text{sett}(a, 0) = \frac{a^4}{2},$$

www.libtool.com.cn

$$s(a, \rho) = a\sqrt{2} - \sqrt{a^2 + \rho^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + \rho^2}}{\rho(1 + \sqrt{2})}$$

$$= s(1, \rho) = a \left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{\theta} + \log \frac{\theta + \sqrt{1 + \theta^2}}{1 + \sqrt{2}} \right].$$

Spirale logaritmica $\rho = ae^{m\theta}$;

$$\text{sett}(0, \theta) = \frac{a^2(e^{2m\theta} - 1)}{4m} = \text{sett}(a, \rho) = \frac{\rho^2 - a^2}{4m},$$

$$s(0, \theta) = \frac{a\sqrt{1 + m^2}}{m} (e^{m\theta} - 1) = s(a, \rho) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} (\rho - a),$$

$$s(0, -\infty) = \frac{a\sqrt{1 + m^2}}{m}.$$

Lituus $\rho^2 \theta = a^2$;

$$\text{sett}(1, \theta) = \text{sett}(a, \rho) = \frac{a^2}{2} \log \theta = a^2 \log \frac{a}{\rho}.$$

Spirale parabolica $\rho^2 = a^2 \theta$;

$$\text{sett}(0, \theta) = \text{sett}(0, \rho) = \frac{a^2 \theta^2}{4} = \frac{\rho^4}{4a^2}.$$

14. Curva $x^4 = (x^2 - y^2)y$. Area di un cappio $= \frac{4}{105}$. (Si ponga $y = tx$, da cui $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$; vedi es: 15 a pag. 100).

15. Curva $(9x^2 - 12y + 1)^2 = (1 + 4y)^3$.

$$s(0, y) = \frac{1}{8} \sqrt[4]{1 + 4y} \sqrt{(1 + 4y)^{\frac{3}{2}} + 12y - 1} \frac{3 + 2\sqrt{1 + 4y}}{2 + \sqrt{1 + 4y}}$$

$$+ \frac{3}{8} \log \left[\sqrt[4]{1 + 4y} + \frac{\sqrt{(1 + 4y)^{\frac{3}{2}} + 12y - 1}}{2 + \sqrt{1 + 4y}} \right].$$

(Si ponga $4y = t^2(2 + t^2)$ etc).

16. Curva gobba $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\dot{x} = \frac{a}{2} (e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}})$.

$$s(a, x) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

17. Curva $x^2 = a^2(y + z)$, $z^2 = \frac{1}{3} x^2 + y^2$, (intersezione cilindro di terzo ordine con cono ellittico); $s(0, y) = y\sqrt{2}$.

(Si noti che la retta $x=0$, $y+z=0$ fa parte della curva).

18. Curva $x^2 + y^2 = cz$, $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ (intersezione paraboi-
de di rotazione con elicoide gobbo a piano direttore; la curva
chiamasi *elica paraboloidica*); $s(0, z) = \sqrt{cz} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{z^3}{c}}$.

(Giovà porre $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, coord. cilindriche).

19. Curva $cx = z(b + z)$, $c^2(x^2 + y^2) = b^2z$, (intersezione di un
cilindro parabolico con cono di rotazione). La curva si proietta
sul piano x, y sulla cardiode $\left(x^2 + y^2 - \frac{b^2}{c}x\right)^2 = \frac{b^4}{c^3}(x^2 + y^2)$.

Usando coordinate cilindriche è

$$s(0, \theta) = \frac{2b}{c} \left\{ \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{b^2}{c} \log \frac{c \sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{b} \right\}.$$

Il perimetro di tutta la curva è

$$= \frac{4b}{c} \left\{ \sqrt{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c} \log \frac{c + \sqrt{b^2 + c^2}}{b} \right\}.$$

110. Sia una superficie rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dalla equazione $z = z(x, y)$, dove $z(x, y)$ è funzione univalente con derivate parziali continue $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ per tutti i punti di un campo C_1 sul piano delle (x, y) . Consideriamo sulla superficie una parte S limitata da una o più linee senza nodi tracciate sulla superficie stessa. Questa parte S si proietti sul piano delle x, y sopra un campo C appartenente a C_1 . Scomponiamo comunque C in parti h_i e prendiamo in h_i un punto qualunque m_i , cui corrisponderanno per x, p, q valori che indicheremo con x_i, p_i, q_i . La perpendicolare al piano delle x, y innalzata da m_i incontrerà la superficie in un punto n_i , nel quale condurremo il piano tangente alla superficie. Il cilindro, che ha per base il contorno di h_i e per generatrici rette parallele all'asse delle z , taglia da questo piano tangente una parte k_i che si proietta su h_i . Fatta questa operazione per tutti gli elementi h_i del campo C consideriamo la somma Σk_i . Ora se una quantità A finita gode della proprietà che, dato σ , esiste un numero δ tale che, per qualunque scomposizione del campo C in parti h_i rinchiudibili in un circolo di raggio δ , e qualunque sia la scelta del punto m_i in h_i , risulti $|A - \Sigma k_i| < \sigma$, diremo che A è il limite di Σk_i , quando le h_i e quindi le k_i impiccoliscono indefinitamente; e poniamo per definizione che si intende per *area* della parte S di superficie questo limite A . Calcolare il limite di Σk_i dicesi *spianare* o *quadrare* la parte S di superficie.

Ma questo limite effettivamente esiste. Invero è $h_i = k_i \cos \gamma_i$, indicando con γ_i l'angolo che la normale alla superficie nel punto n_i fa coll'asse delle z , cioè è $k_i = h_i \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}$, cosicchè $\Sigma k_i = \Sigma h_i \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}$ ed il limite del secondo membro è

l' $\int_C dC \sqrt{1+p^2+q^2}$, e quindi
www.libtool.com.cn

$$A = \int_C dC \sqrt{1+p^2+q^2},$$

la quale formola ci insegna così a calcolare l'area A della parte S di superficie, che si proietta sul campo C . Se si volesse spianare una parte S di superficie per la quale la z non fosse funzione univalente di x, y , si spezzerebbe questa parte in porzioni $S_1, S_2, \dots$ per le quali si avesse $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y), \dots$ dove le $z_1(x, y), z_2(x, y)$ fossero funzioni univalenti, ed allora, indicate con $A_1, A_2, \dots$ le aree di $S_1, S_2, \dots$ si avrebbe $A = A_1 + A_2 + \dots$

III. Usando, per integrare, le coordinate cartesiane ortogonali x, y , abbiamo

$$A = \int_C \int dx dy \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Passando dalle variabili x, y ad un altro sistema di variabili u, v colle formole $x = x(u, v), y = y(u, v)$, avremo

$$A = \int \int du dv \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \sqrt{1+p^2+q^2},$$

dove i valori di p, q si ricavano dalle formole

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v},$$

dalle quali

$$p \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right),$$

$$q \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

ed in conseguenza

www.libtool.com.cn

(1)

$A =$

$$\iint du dv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}.$$

Ad esempio se u, v sono le coordinate polari ρ, θ nel piano delle x, y , cosicchè sia $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, avremo

$$(2) \quad A = \iint d\rho d\theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2},$$

dove i valori $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ sono ricavati dalla $z = z(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

Supponiamo che si prendano per variabili u, v le θ, φ del sistema di coordinate polari ρ, θ, φ nello spazio tali che

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta;$$

allora nel calcolare le derivate di x, y, z rapporto a θ, φ da sostituirsi nella (1) dovremo considerare ρ come funzione di θ, φ definita dalla equazione della superficie in coordinate polari, cosicchè

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \rho \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \rho \cos \theta \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \rho \sin \theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi},$$

e da questo

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \sin \theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \sin \theta + \rho \cos \theta \right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \cos \theta - \rho \sin \theta \right) + \rho \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \sin \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \cos \theta - \rho \sin \theta \right) - \rho \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \varphi},$$

ed in conseguenza

$$(3) \quad \Lambda = \iint \rho d\theta d\varphi \sqrt{\left[\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 \right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2},$$

l'integrazione essendo estesa in modo da esaurire la parte S di superficie che si vuole spianare.

In modo analogo si procederebbe se si scegliessero per variabili ρ, θ , oppure ρ, φ .

112. Affinchè la definizione di area di una parte di superficie data al n. 110, e dovuta ad HERMITE, riesca completamente soddisfacente bisogna far vedere che il valore di A si mantiene sempre lo stesso qualunque sia la posizione del piano delle x, y , sul quale si proietta la parte di superficie che si vuole spianare. Ora questo si vede facilmente nel modo seguente.

Riferiamo la nostra superficie ad un nuovo sistema di assi ortogonali colla stessa origine dei primitivi; indicate con x', y', z' le nuove coordinate abbiamo

$$x = ax' + a'y' + a''z',$$

$$y = bx' + b'y' + b''z',$$

$$z = cx' + c'y' + c''z',$$

dove a, b, c sono i coseni degli angoli che l'asse Ox fa cogli assi Ox', Oy', Oz ; a', b', c' e a'', b'', c'' sono le quantità analoghe relative agli assi Oy', Oz', Ox' .

Siano $S_1, S_2, \dots$ le parti di S che si proiettano sopra i campi $C_1, C_2, \dots$ sul piano delle x', y' , e sui campi $C_1, C_2, \dots$ sul piano delle x, y , in modo che la corrispondente ordinata riesca funzione univalente delle x', y' o delle x, y .

Abbiamo (n. 111)

$$\iint_{C_1} dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \iint_{C_1} dx' dy' \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial y'} - \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial y'} - \frac{\partial z}{\partial y'} \frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2}.$$

Osservando che nel calcolare le derivate di x, y, z rapporto ad x', y' dobbiamo considerare z' come funzione di x', y' data dall'equazione della superficie nel nuovo sistema di assi, abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = a + a''p', \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = b + b''p', \quad \frac{\partial z}{\partial x'} = c + c''p',$$

$$\frac{\partial x}{\partial y'} = a' + a''q', \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = b' + b''q', \quad \frac{\partial z}{\partial y'} = c' + c''q'$$

dove p', q' indicano le derivate di z' rapporto ad x' e ad y' .

Perciò

$$\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} = (ab' - a'b) + (a''b' - a'b'')p' + (ab'' - a''b)q',$$

ovvero, avuto riguardo alle relazioni note tra le quantità $a, b, c, a', b', \dots$,

$$\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} = c'' - cp' - c'q';$$

ed analogamente

$$\frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial y'} - \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial x'} = a'' - ap' - a'q', \quad \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial y'} - \frac{\partial z}{\partial y'} \frac{\partial x}{\partial x'} = b'' - bp' - b'q',$$

ed in conseguenza, avuto riguardo alle menzionate relazioni,

$$\iint_{c_1} dx dy \sqrt{1+p^2+q^2} = \iint_{c_1'} dx' dy' \sqrt{1+p'^2+q'^2}.$$

In modo analogo si prova che

$$\iint_{c_2} dx dy \sqrt{1+p^2+q^2} = \iint_{c_2'} dx' dy' \sqrt{1+p'^2+q'^2}, \dots,$$

cosicchè

$$A = \iint_{c_1'} dx' dy' \sqrt{1+p'^2+q'^2} + \iint_{c_2'} dx' dy' \sqrt{1+p'^2+q'^2} + \dots,$$

come volevasi dimostrare.

Si intende poi, senz'altro, come uno spostamento del piano delle x', y' parallelamente a se stesso, non alteri la formola precedente.

113. Applichiamo ad alcuni

ESEMPI

1) Si voglia l'area A della parte di sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

staccata dal cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^2} = 1, \quad b > 1.$$

Abbiamo $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, dove prenderemo pel radicale il segno +, $p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, e quindi, come si vede facil-

mente,

www.libtool.com.cn

$$A = 8a \int_0^a dx \int_0^{\frac{1}{b} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{b} \int_0^a dx = 8a^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{b}.$$

2) Si voglia calcolare l'area A della parte di cilindro

$$z^2 + (x \cos z + y \operatorname{sen} z)^2 - a^2 = 0, \quad 0 < z < \frac{\pi}{2},$$

compresa nel primo ottante dei piani coordinati.

L'asse del cilindro è la retta $x \cos z + y \operatorname{sen} z = 0$, $z = 0$,
ed il cilindro taglia il piano $z = 0$ lungo le due rette

$$x \cos z + y \operatorname{sen} z = \pm a;$$

cosichè nel calcolo dell'integrale doppio, che esprime l'area richiesta, i limiti rispetto ad x saranno 0 e $\frac{a}{\cos z}$ e rispetto ad y , 0 e $\frac{a - x \cos z}{\operatorname{sen} z}$; cosichè, osservando che

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x \cos z + y \operatorname{sen} z)^2}},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} A &= a \int_0^{\frac{a}{\cos z}} dx \int_0^{\frac{a - x \cos z}{\operatorname{sen} z}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - (x \cos z + y \operatorname{sen} z)^2}} \\ &= \frac{a}{\operatorname{sen} z} \int_0^{\frac{a}{\cos z}} dx \left[\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x \cos z + y \operatorname{sen} z}{a} \right]_0^{\frac{a - x \cos z}{\operatorname{sen} z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} dx \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{x \cos \alpha}{a} \right] \\
&= \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \left[\frac{\pi x}{2} - x \operatorname{arcsen} \frac{x \cos \alpha}{a} - \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{a^2 - x^2 \cos^2 \alpha} \right]_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} \\
&= \frac{a^2}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}.
\end{aligned}$$

3) *Problema del VIVIANI.* — Si voglia spianare la parte di superficie della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

staccata dal cilindro $x^2 + y^2 = ax$. Usando le coordinate polari $x = \rho \cos \zeta$, $y = \rho \operatorname{sen} \zeta$ o servendoci della formola (2) al n. 111, osservando che $z = \sqrt{a^2 - \rho^2}$, abbiamo

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\zeta \int_0^{a \cos \zeta} d\rho \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \frac{\rho^2}{a^2 - \rho^2}} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\zeta \int_0^{a \cos \zeta} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Considerando l'emisfera penetrata dal cilindro, l'area della parte che rimane è $2\pi a^2 - 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 4a^2$.

Questa formola risolve il problema, proposto dal VIVIANI nel 1692, di aprire quattro finestre uguali in una volta emisferica in guisa che la parte rimanente della volta fosse perfettamente quadrabile.

4) Si voglia spianare la parte contenuta al disopra del piano $z=0$ e a destra del piano $x=0$ della superficie

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Questa superficie è tagliata dal piano $z=0$ lungo la lemni-

scata $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Unito un punto M della lemniscata coll'origine O e fatto passare per OM e per l'asse delle z un piano, su questo si descriva un circolo sul diametro OM; la nostra superficie è il luogo geometrico di questi circoli.

Per spianare la nostra parte di superficie giova usare le coordinate polari nello spazio

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \vartheta,$$

cosicchè l'equazione della superficie diviene

$$\rho = a\sqrt{2 \sin \vartheta \sqrt{\cos 2\varphi}},$$

per cui

$$\sqrt{\left[\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta}\right)^2\right] \sin^2 \vartheta + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{\sqrt{2} a \sin \vartheta}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

ed in conseguenza (Formola (3) n. 111)

$$A = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{a^2 \pi^2}{4}.$$

5) Si voglia spianare la zona compresa tra due piani $x = a$, $x = b$ della superficie di rotazione generata dalla curva $Y = f(X)$; ruotante intorno all'asse delle x . Osservando che l'equazione della superficie è $z^2 = f(x)^2 - y^2$, e quindi

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}},$$

abbiamo subito

$$A = 4 \int_a^b dx f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \int_0^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

ed il problema generale è ridotto ad una sola quadratura. Si può osservare che $dx\sqrt{1+f'(x)^2}$ è il differenziale ds di arco di curva meridiana $y=f(x)$, cosicchè la formola precedente può anche compendiarsi nella $A=2\pi\int_a^b y ds$.

Ad esempio, consideriamo l'ellissoide di rotazione generato, nel modo predetto, dalla ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Posto $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e$, abbiamo $ds = \frac{b\sqrt{a^2-e^2x^2}}{ay} dx$ e quindi per l'area A della zona compresa tra i due piani $x=0, x=x$,

$$A = \frac{2\pi b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2-e^2x^2} = \frac{\pi b}{a} \left[x\sqrt{a^2-e^2x^2} + \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{ex}{a} \right].$$

Facendo $x=a$ abbiamo l'area della mezza ellissoide, cioè $\pi ab \left(\sqrt{1-e^2} + \frac{1}{e} \arcsin e \right)$.

Se $a < b$, posto $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = e$ è $ds = dx \frac{b}{a^2 y} \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}$, e quindi

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2} \\ &= \frac{2\pi b}{a^2} \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2} + \frac{a^4}{be} \log(b^2 e^2 x + be\sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}) \right]_0^x \\ &= \frac{\pi b}{a^2} \left[x\sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2} + \frac{a^4}{be} \log \frac{be x + \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}}{a^2} \right]. \end{aligned}$$

Per $x=a$, si ha l'area della semiellissoide, cioè

$$\pi \left[b^2 + \frac{a^2}{e} \log \frac{b(1+e)}{a} \right].$$

Cubatura dei solidi.

114. Sia $z=z(x, y)$ l'equazione di una superficie, dove $z(x, y)$ è funzione univalente continua di x, y nei punti d'un campo C_1 . Sia C un campo appartenente a C_1 ; scomponiamo C in parti h_i e preso in h_i un punto qualunque m_i sia z_i il valore di z nel punto m_i . Consideriamo la somma $\sum z_i h_i$; il limite di questa somma, all'impiccolire indefinitamente delle h_i , cioè $\int_C z dC$, definiamo come il volume del solido o corpo compreso tra la superficie $z=z(x, y)$, il piano $z=0$ ed il cilindro colle generatrici parallele all'asse delle z avente per base il contorno del campo C ; calcolare tale integrale dicesi *cubare* il solido.

È evidente l'analogia tra questa definizione di volume e quella di area compresa tra una curva piana, l'asse delle x e due ordinate corrispondenti a due ascisse.

E si vede subito, ragionando in modo analogo, come debbasi definire il volume del solido determinato da una o più superficie.

Definito così esattamente il concetto di volume, di cui abbiamo fatto uso al n. 104 trattando degli integrali tripli, si intende poi senz'altro come il volume di un corpo k limitato da una o più superficie sia $\int_k dk$; e, usando coordinate cartesiane ortogonali, $\iiint dx dy dz$ esteso al corpo, o, usando coordinate polari,

$$\iiint \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi,$$

notando che una integrazione si eseguisce sempre subito, ed il calcolo si riduce a quello di integrali doppi.

1) Si voglia il volume V del solido, al di sopra del piano $z=0$ e a destra del piano $x=0$, compreso tra il piano $y=c$ e i due cilindri $y^2=ax$, $y^2+z^2=a^2$, dove $a \geq c$. Avremo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^c dy \int_0^{\frac{y^2}{a}} dx \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz = \int_0^c dy y \sqrt{a^2-y^2} \int_0^{\frac{y^2}{a}} dx = \frac{1}{a} \int_0^c dy y^2 \sqrt{a^2-y^2} \\ &= \frac{1}{8a} \left[a^4 \arcsin \frac{y}{a} + y(2y^2 - a^2) \sqrt{a^2-y^2} \right]_0^c \\ &= \frac{1}{8a} \left(a^4 \arcsin \frac{c}{a} + c(2c^2 - a^2) \sqrt{a^2-c^2} \right); \end{aligned}$$

per $c=a$, $V = \frac{a^3\pi}{16}$.

2) *Volume del solido del VIVIANI.* — Determiniamo il volume del solido che il cilindro $x^2 + y^2 = ax$ stacca dalla solidità della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Usando le coordinate cilindriche $z=z$, $x=\rho \cos \vartheta$, $y=\rho \sin \vartheta$, abbiamo subito

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{a \cos \vartheta} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{a \cos \vartheta} \rho \sqrt{a^2-\rho^2} d\rho \\ &= -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left[(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a \cos \vartheta} = \frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 + \frac{8}{3} a^3 \left(\cos \vartheta - \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{16}{9} a^3. \end{aligned}$$

Il volume della parte di sfera che rimane dopo averne tolta la parte staccata dal cilindro è perciò $\frac{16}{9} a^3$.

3) *Volume dei solidi di rotazione.* — Si voglia calcolare il volume V del solido compreso tra i piani $x=a$, $x=b$ e tra la superficie generata dalla rotazione, intorno all'asse delle x , della curva $y=f(x)$.

Osservando che l'equazione della superficie è $z^2 = f(x)^2 - y^2$, abbiamo subito

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy \int_0^{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} dz = 4 \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy \sqrt{f(x)^2 - y^2} \\ &= 2 \int_a^b dx \left[y \sqrt{f(x)^2 - y^2} + f(x)^2 \arcsin \frac{y}{f(x)} \right]_0^{f(x)} = \pi \int_a^b f(x)^3 dx, \end{aligned}$$

ed il problema è in ogni caso ridotto ad una quadratura.

Ad esempio, si voglia il volume generato dalla rotazione intorno all'asse delle x dell'area compresa tra l'asse delle x , la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

e la ordinata y che corrisponde all'ascissa x e quindi al valore $t=t$; avremo

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \pi a^3 \left[t - 3 \sin t + \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right); \end{aligned}$$

il volume totale del solido generato da un intero ramo di cicloide corrisponde a $t=2\pi$, ed è $V=5\pi^2 a^3$.

4) Si voglia il volume V del solido limitato dalla superficie

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Osservando che la superficie è incontrata dal piano $z=0$ lungo la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, avremo $V = 8 \int_C \int z \, dx \, dy$ dove C indica il campo determinato dei valori positivi o nulli di x, y pei quali $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1$.

Per integrare introduciamo le variabili u, v mediante le relazioni

$$x = a \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \quad y = b \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^3 v,$$

per cui $z = c \cos^3 u$. Osservando che

$$y = \frac{b}{a} x \operatorname{tg}^3 v, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \operatorname{sen}^2 u,$$

dalle quali risulta che le linee $v=\text{costante}$ sono rette uscenti dall'origine e le linee $u=\text{costante}$ sono linee analoghe alla $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, vediamo che i limiti delle integrazioni rispetto ad u e a v sono 0 e $\frac{\pi}{2}$; cosichè, essendo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a \cos^3 v \operatorname{sen}^2 u \cos u & 3b \operatorname{sen}^3 v \operatorname{sen}^2 u \cos u \\ -3a \cos^2 v \operatorname{sen} v \operatorname{sen}^3 u & 3b \operatorname{sen}^2 v \cos v \operatorname{sen}^3 u \end{vmatrix} \\ = 9ab \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v \operatorname{sen}^5 u \cos u,$$

$$V = 8.9abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \cos^2 v dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u \cos^4 u du.$$

Ma (vedi eserc. 1 a pag. 178)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u \cos^4 u du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u (1 - \sin^2 u)^2 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u (1 - 2\sin^2 u + \sin^4 u) du \\ &= \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} - 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{8}{5 \cdot 7 \cdot 9}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \cos^2 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v (1 - \sin^2 v) dv = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16},$$

e quindi $V = \frac{4}{35} \pi abc$.

ESERCIZI

1. Paraboloide di rotazione generato dalla parabola $y^2 = 2px$ ruotante intorno all'asse delle x . Volume compreso tra il paraboloide e i piani $x=0$, $x=x$ è $\pi p x^2$, area della zona tra gli stessi piani è

$$\frac{2}{3} \pi \sqrt{p} [(2x+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}] = \frac{2}{3} \pi [(2x+p)\sqrt{y^2+p^2} - p^2].$$

2. Sia la iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Per l'iperboloide di rotazione a due falde, generato dalla iperbole, il volume V è

l'area A della zona tra i piani $x=a$, $x=x$, sono

$$V = \frac{\pi b^2}{3a^2} (x^3 - 3a^2x + 2a^3),$$

$$A = \pi \frac{b}{a} \left[x \sqrt{e^2 x^2 - a^2} - ab - \frac{a^2}{e} \log \frac{ex + \sqrt{e^2 x^2 - a^2}}{ae + b} \right], \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Per l'iperboloide di rotazione ad una falda, generato dalla stessa iperbole, abbiamo, per gli stessi elementi tra i piani $y=0$, $y=y$,

$$V = \frac{\pi a^2 y}{3b^2} (y^2 + 3b^2),$$

$$A = \pi \frac{a}{b} \left[y \sqrt{\varepsilon^2 y^2 + b^2} + \frac{b^2}{\varepsilon} \log \frac{\varepsilon y + \sqrt{\varepsilon^2 y^2 + b^2}}{b} \right], \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

3. La catenaria $y = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right)$ ruota intorno all'asse delle x . Abbiamo pel volume etc. e per la zona etc., tra i piani $x=0$, $x=x$,

$$V = \frac{\pi h^2}{8} \left[h \left(e^{\frac{2x}{h}} - e^{-\frac{2x}{h}} \right) + 4x \right], \quad A = \frac{\pi h}{4} \left[h \left(e^{\frac{2x}{h}} - e^{-\frac{2x}{h}} \right) + 4x \right].$$

Se la catenaria ruota intorno all'asse delle y , abbiamo, per le stesse quantità tra i piani $y=h$, $y=y$,

$$V = h\pi \left[\left(\frac{x^2}{2} + h^2 \right) \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) - hx \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right) \right],$$

$$A = \pi h \left[x \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) - h \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right) + 2h \right].$$

4. Volume del solido limitato dalla superficie generata dalla lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ruotante intorno all'asse

delle x è

www.libtool.com.cn

$$\pi a^3 \left[\log(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3} \right].$$

5. La curva $y^2 = x^2 - x^4$ ruota attorno all'asse delle x ; l'area della superficie così generata è

$$\frac{\pi}{8} \left[3 + 5\sqrt{2} + \frac{7}{4} \log(5 + 4\sqrt{2}) \right],$$

ed il volume del solido da essa limitato è uguale a $\frac{4}{15} \pi$.

6. Area A della parte di cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ staccata dal cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$A = 4b \left[c + \frac{a}{e} \arcsen e \right], \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \quad \text{se } a > c$$

$$A = 4b \left[c + \frac{a}{e} \log \left(e + \frac{c}{a} \right) \right], \quad e = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} \quad \text{se } a < c,$$

$$A = 8bc \quad \text{se } a = c, \quad A = 8a^2 \quad \text{se } a = b = c.$$

(In questo ultimo caso si ha il doppio dell'area di una volta a conca su base quadrata).

Il volume V del solido limitato dai due cilindri è

$$V = \frac{16}{3} abc.$$

7. Dai due cilindri $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ togliamo la parte di un cilindro contenuta nell'altro, e consideriamo delle superficie che così rimangono la parte, al disopra del piano $z=0$, limitata dai piani $x=a$, $x=-a$, $y=a$, $y=-a$. L'area di

questa parte, che forma una volta a crociera su base quadrata, è $4a^2(\pi - 2)$. www.libtool.com.cn

8. Area A della parte di cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ limitata dai piani $y=0$, $y=bx$;

$$A = a^2 b \left[2 + \frac{1-e^2}{e} \log \frac{1+e}{1-e} \right], \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad a > c,$$

$$A = 2a^2 b \left[1 + \frac{1+e^2}{e} \arctg e \right], \quad e = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}, \quad a > c,$$

$$A = 4a^2 b, \quad a = c.$$

9. Volume V del solido, al disopra del piano $z=0$, compreso tra il piano $z=0$ il paraboloide $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ed il cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$, $m^2 \leq 1$.

$$V = \pi abc m^2 \left(1 - \frac{m^2}{2} \right) \text{ se } m^2 < 1, \quad V = \frac{\pi abc}{2} \text{ se } m^2 = 1.$$

10. Volume V della parte di solidità della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ staccata dal cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^2} = 1$, $b > 1$.

$$V = \frac{8}{3} \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{b^2} + \arcsen \frac{1}{b} \right) a^3.$$

11. Volume V del solido compreso tra il piano $z=0$, il paraboloide $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$ ed il cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$V = \frac{\pi abc}{8p^2 q^2} (a^2 q^2 + b^2 p^2).$$

12. Volume V del solido compreso tra l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ e i piani } x=0, y=0, z=0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$V = \frac{abc\pi}{24} (5\sqrt{2} - 4).$$

13. Volume della parte di solidità della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ staccata dal cilindro $x^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

$$V = \frac{2}{3} a^3 (\pi - 2 + 2 \log 2)$$

(Giovà usare coordinate cilindriche).

14. Essendo Ox, Oy, Oz tre assi ortogonali tra loro, consideriamo la superficie rigata generata nel modo seguente: mentre il piano zOA ruota intorno all'asse Oz , la generatrice della superficie situata su questo piano, facendo sempre un angolo costante con Oz la cui tangente indichiamo con λ , intercetta su Oz un segmento $OC = \lambda a^2$, dove a indica una costante e λ l'angolo dei piani zOx, zOA . Si vuole il volume V del solido limitato dalla superficie rigata così generata e dai piani xOy, zOx, zOA , essendo $\zeta_1 < 2\pi$ l'angolo di questi due ultimi piani; e l'area A della parte di superficie limitata dagli stessi piani.

$$V = \frac{\lambda^3 \zeta_1^3 a^3}{24},$$

$$A = \frac{\lambda^3 a^2}{6} \left\{ \frac{3\zeta_1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \log(\zeta_1 \sqrt{1+\lambda^2} + \sqrt{1+(1+\lambda^2)\zeta_1^2}) + \frac{2}{1+\lambda^2} + \left(\zeta_1^2 - \frac{2}{1+\lambda^2} \right) \sqrt{1+(1+\lambda^2)\zeta_1^2} \right\}.$$

(Usare coordinate cilindriche ρ, φ, z , osservando che l'equazione della superficie è allora $z = \lambda a^2 - \frac{\rho}{\lambda}$. Per calcolare A giovà

integrare prima rispetto a φ e poi rispetto a ρ , osservando che i limiti dell'integrazione relativa a φ sono $\frac{\rho}{h^2 a}$ e φ_1).

15. Sopra un paraboloide ellittico $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ si considerino le curve definite dalla condizione che, per ciascuna, le normali alla superficie nei suoi punti facciano un angolo costante φ coll'asse delle z . Si calcoli l'area A della callotta del paraboloide limitata da quella curva per la quale $\varphi = \varphi_1$.

$$A = \frac{2}{3} \pi ab \left(\frac{1}{\cos^3 \varphi_1} - 1 \right).$$

(Giova assumere per linee coordinate sul piano $z=0$ le proiezioni, su questo piano, delle linee che si considerano sul paraboloide, e rette uscenti dall'origine delle coordinate).

16. Area A della parte di superficie $z = \arcsin \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)$ compresa tra i piani $x = x_0$, $x = x_1$ essendo x_0, x_1 dello stesso segno e $x_0 < x_1$.

$$A = \pi \log \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_0} - e^{-x_0}}.$$

(Giova prendere per variabili, nell'integrare, le u, v definite dalle $u = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $v = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ dalle quali $\sqrt{1+u^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, etc., osservando poi che nei punti della superficie è sempre $-1 \leq uv \leq 1$).

IV. Elementi della teoria delle funzioni di variabili complesse.

Serie a termini complessi.

115. Qui si suppongono conosciute le nozioni fondamentali intorno ai numeri complessi e la loro rappresentazione geometrica mediante i punti di un piano.

Sia $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, dove x, y indicano variabili reali, una variabile complessa; indicheremo con z anche il punto che corrisponde al numero complesso z . Denoteremo con $|z|$ il modulo di $z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ cioè $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sia w una quantità che varia al variare di z ; diremo che $L = M + iN$ è il limite di w per $\alpha = a + ib$, se, dato il solito numero σ , esiste un intorno del punto α , per tutti i punti z del quale, z al più escluso, è $|w - L| < \sigma$, e scriviamo $\lim_{z \rightarrow \alpha} w = L$.

Se è $w = u + iv$, con u, v quantità reali, si riconosce subito che è condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\lim_{z \rightarrow \alpha} w = L$,

che $\lim u = M$, $\lim v = N$ quando x, y convergono comunque verso a, b . La condizione è necessaria perchè dall'essere, per punti dell'intorno predetto, $|w - L| < \sigma$, ossia $\sqrt{(u - M)^2 + (v - N)^2} < \sigma$, risulta $|u - M| < \sigma$, $|v - N| < \sigma$. La condizione è sufficiente perchè, se esiste un intorno del punto α , per i punti x, y del quale sia $|u - M| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|v - N| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, avremo

$$(u - M)^2 + (v - N)^2 < \sigma^2, \text{ e quindi } \sqrt{(u - M)^2 + (v - N)^2} < \sigma.$$

Ciascuno poi intenderà da se come si estendano le definizioni di limite agli altri casi che possano presentarsi, cioè quando la z vari in modo che $|z|$ vada crescendo indefinitamente, etc.

116. Sia una serie $\sum u_n = \sum (x_n + i\beta_n)$ a termini complessi.

Fatta la somma S_n dei suoi primi n termini, la convergenza e divergenza della serie stessa viene definita precisamente come per le serie a termini reali. Risulta subito da ciò che, condizione necessaria e sufficiente alla convergenza della serie $\sum (x_n + i\beta_n)$ è che siano convergenti le due serie reali $\sum x_n, \sum \beta_n$ formate colle parti reali e coi coefficienti dell'immaginario i di ciascun termine della serie complessa. Invero, la condizione è necessaria perchè, dall'essere per ipotesi

$$(1) \quad \lim(x_1 + i\beta_1 + x_2 + i\beta_2 + \dots + x_n + i\beta_n) = A + iB$$

quando n cresce indefinitamente per numeri interi e positivi, risulta (n. 115)

$$\lim(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = A, \quad \lim(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) = B.$$

La condizione è sufficiente perchè, supposte verificate queste due ultime uguaglianze, abbiamo come conseguenza la (1).

Si riconosce poi subito ancora che, condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie complessa sia convergente, è che il resto della serie converga a zero al crescere indefinito di n .

Una serie complessa a termini variabili $\sum u_n$, dove u_n dipendono dalla variabile complessa z , è uniformemente convergente in un campo C , se, dato τ , esiste un numero m tale che per $n \geq m$ e per *tutti* i punti z di C , è $|R_n| < \tau$, essendo R_n il resto della serie.

117. Poichè la natura ed il valore di una serie dipendono dal limite della somma dei suoi primi n termini al crescere di n , non parrà strano che, in certe serie, disponendo diversamente i loro termini, esse mutino valore o natura; cosichè ad es., se in una serie convergente si dispongono i termini in ordine differente possa accadere che la nuova serie, i cui termini sono gli stessi della prima disposti diversamente, abbia un valore diverso dalla prima oppure non sia più convergente. Ed invero sia una serie convergente $\sum u_n$, $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

la somma dei suoi primi n termini, e si consideri una seconda serie ottenuta dalla prima disponendone i termini con una legge diversa; sia m il numero dei termini che occorrerà prendere in questa seconda serie affinché nella somma S'_m dei suoi primi m termini compariscano tutti i termini contenuti in S_n . Avremo

$$\lim (S'_m - S_n) = \lim (u_p + u_q + u_r + \dots)$$

dove gli indici $p, q, r, \dots$ superano tutti n , e crescono indefinitamente con n .

Ora possono presentarsi i casi: $\lim (u_p + u_q + \dots) = 0$, oppure che questo limite sia finito e diverso da zero, o che sia infinito, o che non esista; ed allora nel primo caso la seconda serie sarà convergente ed avrà lo stesso valore della prima. nel secondo sarà convergente ma avrà un valore diverso dalla prima, nel terzo sarà divergente e nel quarto indeterminata.

Ad esempio: Sia la serie convergente

$$(1) \quad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Scriviamola così

$$- \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots$$

Avremo

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n}$$

ed S'_m è uguale ad S_n se n è pari, o ne differisce per $-\frac{1}{n+1}$ se n è dispari, cosichè avremo sempre $\lim S_n = \lim S'_m$ e la seconda serie ha lo stesso valore della prima.

Scriviamo ora la serie (1) così;

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$+ \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

Allora, posto

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

$$S'_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n},$$

abbiamo

$$S'_n - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}$$

Ora dagli sviluppi

$$\log(1+x) = x - \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{3}\right) - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) - \dots,$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

valevoli per $-1 < x < 1$, ricaviamo, per $0 < x < 1$,

$$\log(1+x) < x < \log \frac{1}{1-x}.$$

Ponendo in questa formola successivamente

$$x = \frac{2}{2n+1}, \frac{2}{2n+3}, \dots, \frac{2}{4n-1}$$

e poi sommando, abbiamo

$$\frac{1}{2} \log \frac{4n+1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1} < \frac{1}{2} \log \frac{4n-1}{2n-1}$$

dalla quale ricaviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S'_{3n} - S_{2n}) = \lim \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1} \right) = \frac{1}{2} \log 2,$$

e da questa

$$\lim S'_{3n} = \lim S_{2n} + \frac{1}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \log 2.$$

La seconda serie è quindi convergente, ma ha un valore diverso della (1).

La serie

$$1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dots$$

è convergente, perchè i suoi termini sono di segno alternato e continuamente e indefinitamente decrescenti. Ma la serie stessa scritta così:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{7}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dots$$

è divergente. Invero

$$S'_{3n} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{4n-1}} > \frac{n}{\sqrt[3]{4n-1}} > \frac{\sqrt[3]{n}}{2},$$

e quindi, poichè S_{2n} ha un limite finito al crescere di n e $\frac{\sqrt[3]{n}}{2}$ cresce indefinitamente con n , è $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_{3n} = \infty$.

In seguito alle precedenti considerazioni le serie convergenti, che non mutano valore comunque vengano disposti i loro

termini, si chiamano serie *convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini o assolutamente o incondizionatamente convergenti*. Le serie non assolutamente convergenti vengono da taluni chiamate serie *semi-convergenti*.

Abbiamo ora il seguente teorema importante dovuto a DIRICHLET nel 1837:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie sia assolutamente convergente è che sia convergente la serie formata coi moduli dei suoi termini.

La condizione è necessaria. Invero dall'essere assolutamente convergente la serie $\Sigma u_n = \Sigma(x_n + i\beta_n)$ risulta che sono pur tali le serie $\Sigma x_n, \Sigma \beta_n$; talchè al crescere di n , non solo i resti di queste due serie convergeranno a zero, ma ancora le somme composte di termini comunque scelti a partire dall' n^{esimo} , e perciò dovranno convergere a zero la somma di tutti i termini positivi e quella di tutti i negativi dopo l' n^{esimo} , e quindi la somma dei valori assoluti dei termini, cosichè avremo ancora

$$\lim_{n=\infty} \{(|x_n| + |\beta_n|) + (|x_{n+1}| + |\beta_{n+1}|) + \dots\} = 0,$$

e quindi, osservando che

$$|u_n| = \sqrt{x_n^2 + \beta_n^2} < |x_n| + |\beta_n|,$$

sarà $\lim_{n=\infty} (|u_n| + |u_{n+1}| + \dots) = 0$, e la serie dei moduli $\Sigma |u_n|$ è perciò convergente.

La condizione è sufficiente. Per una serie Σu_n , a termini reali, ciò vedesi subito, perchè, se è convergente la serie $\Sigma |u_n|$, risulta $\lim_{n=\infty} (u_p + u_q + u_r + \dots) = 0$ dall'essere

$$|u_p + u_q + u_r + \dots| \leq |u_p| + |u_q| + |u_r| + \dots < |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots$$

Se la serie è complessa ed è convergente la serie $\Sigma |u_n| = \Sigma \sqrt{x_n^2 + \beta_n^2}$, risultano convergenti le serie $\Sigma |x_n|, \Sigma |\beta_n|$, i cui termini sono minori di quelli della serie dei moduli e quindi

Ora, posto

$$U'_n = |u_0| + |u_1| + \dots + |u_n|, \quad V'_n = |v_0| + |v_1| + \dots + |v_n|,$$

ed indicati con U' , V' i limiti, per n infinito, di U'_n , V'_n , che per ipotesi esistono essendo le serie $\sum u_n$, $\sum v_n$ assolutamente convergenti, abbiamo $U'_n < U'$, $V'_n < V'$ e

$$\begin{aligned} |u_{2n}V_0 + u_{2n-1}V_1 + \dots + u_{n+1}V_{n-1}| &\leq |u_{2n}| |V_0| + |u_{2n-1}| |V_1| + \dots + |u_{n+1}| |V_{n-1}| \\ &\leq |u_{2n}| V'_0 + |u_{2n-1}| V'_1 + \dots + |u_{n+1}| V'_{n-1} \\ &< V'(|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{2n}|); \end{aligned}$$

ma, poichè la serie $\sum |u_n|$ è per ipotesi convergente, dato τ , esisterà un numero m tale che, per $n \geq m$, sarà

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{2n}| < \frac{\tau}{V'}.$$

e quindi

$$|u_{2n}V_0 + \dots + u_{n+1}V_{n-1}| < \tau,$$

cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{2n}V_0 + \dots + u_{n+1}V_{n-1}) = 0$.

In modo analogo si prova che $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_{2n}U_0 + \dots + v_{n+1}U_{n-1}) = 0$, cosicchè avremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n V_n) = UV.$$

Osservando poi che

$$\begin{aligned} W_{2n-1} &= U_n V_n - u_n v_n + u_{2n-1} V_0 + \dots + u_{n+1} V_{n-2} \\ &\quad + v_{2n-1} U_0 + \dots + v_{n+1} U_{n-2}. \end{aligned}$$

si vede che anche $\lim_{n \rightarrow \infty} W_{2n-1} = UV$. La serie $\sum w_n$ è quindi convergente ed ha per valore $U.V$.

Ma essa è anche assolutamente convergente. Ciò rilevasi subito osservando che
www.libtool.com.cn

$$|w_n| = |u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \dots + u_0 v_n| \leq |u_n| |v_0| + \dots + |u_0| |v_n|,$$

e che in modo completamente analogo a quello precedente, dall'essere convergenti le serie $\sum |u_n|$, $\sum |v_n|$, si vedrebbe la convergenza della serie il cui termine generale è $|u_n| |v_0| + \dots + |u_0| |v_n|$ e quindi è anche convergente la serie $\sum |w_n|$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Le funzioni esponenziali, circolari, etc. ad argomento complesso.

119. La serie

$$(1) \quad 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots,$$

dove $z = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, è assolutamente convergente per qualunque valore di z , perchè è convergente la serie dei moduli. Se z è numero reale essa ha per valore e^z , cioè è la potenza z del numero $e = 2,718\dots$, e può servire al calcolo effettivo di tale potenza. Indicheremo col simbolo e^z la somma della serie (1) anche quando z è complesso, cosicchè la funzione esponenziale e^z viene definita come somma della serie (1).

La definizione ora data di funzione esponenziale quando l'esponente non è reale, oltre che essere giustificata dal fatto, che per z reale corrisponde alla potenza z del numero e , lo è ancora dall'altro che, quantunque nella definizione di e^z per z non reale sparisca affatto il concetto di potenza, però la funzione e^z gode di tutte le proprietà di una potenza con esponente reale. Basterà perciò provare che la formola fondamentale $e^z e^{z_1} = e^{z+z_1}$, che ha luogo quando gli esponenti sono reali, sussiste ancora quando essi sono numeri qualunque. Ed invero,

abbiamo

www.libtool.com.cn

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots$$

$$e^{z_1} = 1 + z_1 + \frac{z_1^2}{1.2} + \frac{z_1^3}{1.2.3} + \frac{z_1^4}{1.2.3.4} + \dots$$

e da queste (n. 118)

$$e^z \cdot e^{z_1} = 1 + (z + z_1) + \left(\frac{z^2}{1.2} + zz_1 + \frac{z_1^2}{1.2} \right) + \dots$$

$$= 1 + (z + z_1) + \frac{(z + z_1)^2}{1.2} + \frac{(z + z_1)^3}{1.2.3} + \dots = e^{z+z_1}.$$

120. Le serie

$$(1) \quad 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots, \quad z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

sono assolutamente convergenti per qualunque valore di z , essendo convergenti le corrispondenti serie dei moduli dei loro termini, e sono uguali, quando z è reale, la prima a $\cos z$, la seconda a $\sin z$. Designeremo ancora col simbolo $\cos z$ la prima e con $\sin z$ la seconda quando z è qualunque, e rimangono così definite, come somme di quelle serie, le due funzioni elementari $\cos z$, $\sin z$ per z complesso.

Si vede subito che

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - i \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + i \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \right) \end{aligned}$$

e quindi

www.libtool.com.cn

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

da questa

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

cosicchè ancora

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

formole dovute ad EULERO, valedoli qualunque sia z , e che legano tra loro le funzioni circolari ed esponenziali di una variabile qualunque.

Si ha così un modo compendiato di esprimere un numero complesso:

$$x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Dalla formula

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

ove x, y sono reali, si vede che $e^x \cos y$ è la parte reale, $ie^x \sin y$ la parte puramente immaginaria del valore di e^{x+iy} .

Quantunque per le funzioni $\sin z$, $\cos z$, quando z è complesso, sparisca affatto l'idea di linea relativa al circolo di raggio unità, che si ha per z reale, però esse godono di tutte le proprietà delle funzioni circolari seno e coseno di argomento reale, e ciò giustifica maggiormente le denominazioni di $\cos z$ e $\sin z$ attribuite alle serie (1).

Intanto dalle

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

abbiamo subito $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Basterà poi provare ancora che hanno luogo per esse le formole di addizione, dalle quali le altre tutte procedono. Ora abbiamo

$$\begin{aligned}
 e^{iz} e^{iz_1} &= (\cos z + i \sin z) (\cos z_1 + i \sin z_1) \\
 &= (\cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1) + i(\sin z \cos z_1 + \sin z_1 \cos z) \\
 &= e^{i(z+z_1)} = \cos(z+z_1) + i \sin(z+z_1),
 \end{aligned}$$

dalla quale, cambiando z e z_1 in $-z$ e $-z_1$,

$$\begin{aligned}
 (\cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1) - i(\sin z \cos z_1 + \sin z_1 \cos z) \\
 = \cos(z+z_1) - i \sin(z+z_1),
 \end{aligned}$$

le quali sommate e sottratte danno,

$$\begin{aligned}
 \cos(z+z_1) &= \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1 \\
 \sin(z+z_1) &= \sin z \cos z_1 + \sin z_1 \cos z,
 \end{aligned}$$

Da queste formole riconosciamo subito anche la periodicità delle funzioni $\sin z$, $\cos z$, giacchè per esse è

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \quad \sin(z+2\pi) = \sin z.$$

La funzione esponenziale e^z è essa pure periodica col periodo $2\pi i$, giacchè

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Dalla formole di EULERO ricaviamo

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad \sin iy = -i \frac{e^{-y} - e^y}{2},$$

cosichè, se y è reale, vediamo che il coseno di un numero puramente immaginario è reale ed il seno è puramente immaginario.

Inoltre, per le formole di addizione ora dimostrate,

$$\begin{aligned}
 \cos(x+iy) &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy, \\
 \sin(x+iy) &= \sin x \cos iy + \sin iy \cos x,
 \end{aligned}$$

e, se x, y sono reali, i secondi membri sono scomposti nella parte reale e nella parte puramente immaginaria di $\cos(x+iy)$, $\sin(x+iy)$.

Le altre funzioni circolari $\operatorname{tg} z, \dots$ si definiscono:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \text{etc.}$$

121. Se w è reale $e^w = z$ è un numero positivo e w è il logaritmo neperiano di z , $w = \log z$. Poniamo la stessa definizione nel caso di $w = u + iv$, con u, v reali; allora, essendo e^{u+iv} un numero della forma $x + iy$ con x, y reali, $e^{u+iv} = x + iy$, chiamiamo $u + iv$ il logaritmo neperiano di $x + iy$, $u + iv = \log(x + iy)$.

Vediamo ora di ridurre $\log(x + iy)$ alla forma $\alpha + i\beta$ con α, β reali. Abbiamo

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = x + iy,$$

quindi

$$x = e^u \cos v, \quad y = e^u \operatorname{sen} v,$$

dalle quali

$$e^{2u} = x^2 + y^2, \quad e^u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

il radicale essendo preso col segno +, perchè e^u è sempre positivo, e da questa $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$; e $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v$, dalla quale,

indicando con $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ il più piccolo arco avente $\frac{y}{x}$ per tangente, $v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + 2k\pi i$, cosicchè

$$\log(x + iy) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + 2k\pi \right).$$

dove k è un intero qualunque e il logaritmo nel secondo membro è il solito logaritmo aritmetico del numero $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Posto

$$x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

è

$$\log[\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] = \log \rho + i(\vartheta + 2k\pi).$$

Vediamo così che ogni numero $x + iy$ ha un numero infinito di logaritmi che corrispondono ai diversi valori di k . Quello che corrisponde a $k = 0$ suole anche chiamarsi il *logaritmo principale*.

In particolare, per ogni numero reale positivo, degli infiniti logaritmi il principale è reale ed è il solito logaritmo aritmetico del numero stesso, e tutti gli altri sono complessi, e per ogni numero reale negativo, $-\rho = \rho(\cos \pi + i \sin \pi)$, tutti gli infiniti logaritmi sono complessi.

Si riconoscerà subito facilmente che il logaritmo di un numero complesso, così definito, gode delle stesse proprietà dei logaritmi dei numeri reali e positivi. Dimostreremo la formola $\log z + \log z_1 = \log(z z_1)$, la quale, poichè ogni logaritmo ha una infinità di valori, va intesa nel senso, come del resto ora la dimostremo, che la somma di due valori qualunque di $\log z$ e $\log z_1$ è uno dei valori di $\log(z z_1)$, e che vi è sempre un valore di $\log z$ che sommato con un valore di $\log z_1$ ci dà un valore qualunque prefissato di $\log(z z_1)$.

Invero

$$\log z = \log[\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] = \log \rho + i(\vartheta + 2k\pi)$$

$$\log z_1 = \log[\rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)] = \log \rho_1 + i(\vartheta_1 + 2k_1\pi)$$

$$\log(z z_1) = \log[\rho \rho_1(\cos(\vartheta + \vartheta_1) + i \sin(\vartheta + \vartheta_1))]$$

$$= \log(\rho \rho_1) + i(\vartheta + \vartheta_1 + 2k'\pi) = \log \rho + \log \rho_1 + i(\vartheta + \vartheta_1 + 2k'\pi)$$

e, posto $k' = k + k_1$,

$$\log(z z_1) = \log z + \log z_1.$$

122. Definiamo z^{z_1} come $e^{z_1 \log z}$, che ha significato conosciuto, estendendo al caso di z, z_1 numeri qualunque l'identità $z^{z_1} = e^{z_1 \log z}$ nota se z, z_1 sono reali e z è positivo. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}(x + iy)^{\alpha_1 + i\beta_1} &= e^{(\alpha_1 + i\beta_1) \log(x + iy)} = e^{(\alpha_1 + i\beta_1) (\log \sqrt{x^2 + y^2} + i(\arctg \frac{y}{x} + 2k\pi))} \\ &= e^{\alpha_1 \log \sqrt{x^2 + y^2} - \beta_1 (\arctg \frac{y}{x} + 2k\pi)} e^{i(\beta_1 \log \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha_1 (\arctg \frac{y}{x} + 2k\pi))}\end{aligned}$$

e si ha così, generalmente, un numero infinito di valori per z^{z_1} .

Abbiamo ancora, dalla formola precedente,

$$\begin{aligned}& [\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^{z_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)} \\ &= e^{-i 2k\pi \sin \theta_1} e^{z_1(\cos \theta_1 \log \rho - \theta \sin \theta_1)} \{ \cos [\rho_1(\sin \vartheta_1 \log \rho + (\vartheta + 2k\pi) \cos \vartheta_1)] \\ &\quad + i \sin [\rho_1(\sin \vartheta_1 \log \rho + (\vartheta + 2k\pi) \cos \vartheta_1)] \}.\end{aligned}$$

Si riconoscerà subito che questa formola contiene come caso particolare la

$$[\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left[\cos \frac{m}{n} (\vartheta + 2k\pi) + i \sin \frac{m}{n} (\vartheta + 2k\pi) \right],$$

e che ha luogo la formola $z^{z_1+z_2} = z^{z_1} z^{z_2}$.

Come curiosità possiamo notare che $i^i = e^{-\pi(2k + \frac{1}{2})}$ ha tutti i suoi infiniti valori reali, che $1^i = e^{-2k\pi}$.

Notiamo infine che vi è un caso di eccezione per la formola $z^{z_1} = e^{z_1 \log z}$, quello di $z = e$, sia che, per essere z_1 complesso, si intenda con e^{z_1} la somma della serie esponenziale, sia che, per essere z_1 reale, si intenda con e^{z_1} anche la potenza z_1 del numero 2,718..., perchè tanto nell'uno come nell'altro caso e^{z_1} ha un unico valore, mentre che la $e^{z_1} = e^{z_1 \log e}$ darebbe più valori per e^{z_1} , stante la molteplicità dei valori del $\log e$ che comparisce nel secondo membro come esponente. Così chè, nel caso di $z = e$, converremo di considerare in quella formola per $\log e$ il solo valore reale *uno*.

123. Se è $\operatorname{sen} w = z = x + iy$, diremo che

$$w = \operatorname{arc} \operatorname{sen} z = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (x + iy).$$

Ora dalla

$$e^{iw} = \cos w + i \operatorname{sen} w = \sqrt{1 - z^2} + iz,$$

ricaviamo

$$w = \frac{1}{i} \log (\sqrt{1 - z^2} + iz),$$

cioè

$$\operatorname{arcsen} z = \frac{1}{i} \log (\sqrt{1 - z^2} + iz), \operatorname{arc} \operatorname{sen} (x + iy) = \frac{1}{i} \log [\sqrt{1 - (x + iy)^2} + i(x + iy)].$$

In modo analogo

$$\operatorname{arc} \cos z = \frac{1}{i} \log (z + i\sqrt{1 - z^2}), \operatorname{arc} \cos (x + iy) = \frac{1}{i} \log [x + iy + i\sqrt{1 - (x + iy)^2}].$$

E qui pure si riconoscerebbe facilmente che hanno luogo per queste funzioni tutte le proprietà delle funzioni circolari inverse $\operatorname{arcsen} z$, $\operatorname{arc} \cos z$ quando z è reale e $|z| \leq 1$.

Se è $\operatorname{tg} w = z$ diremo $w = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$. Dalle formole

$$e^{iw} = \cos w + i \operatorname{sen} w$$

$$e^{-iw} = \cos w - i \operatorname{sen} w$$

abbiamo

$$e^{iw} = \frac{\cos w + i \operatorname{sen} w}{\cos w - i \operatorname{sen} w} = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

e da questa

$$w = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

124. Una funzione $f(x, y)$ di due variabili reali x, y può considerarsi come funzione della sola variabile complessa $z = x + iy$, giacchè ad un valore di z corrisponde un unico valore per x e per y , ed a questi il valore di $f(x, y)$. La cosa non è più così se x, y non sono variabili reali, perchè allora ad un valore di z non corrisponde più un unico valore per x e y ; così, indicando h una quantità arbitraria qualunque è $z = x + iy = x + h + i(y + ih)$.

Ora vediamo quale è la condizione, cui deve soddisfare la $f(x, y)$, affinchè essa possa, qualunque sia la variabilità di x, y , considerarsi come funzione dell' unico ente $z = x + iy$.

Supponiamo che la $f(x, y)$ dipenda dalle quantità x, y in modo da ammettere derivate parziali rispetto ad x e ad y , cosicchè, indicati con dx e dy gli aumenti che si suppongono dati ad esse, sia

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{dx - idy}{2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{dx + idy}{2}. \end{aligned}$$

Ora se si vuole che la $f(x, y)$ dipenda dall' unico ente $x + iy$, dovrà df essere zero se $dx + idy = 0$, ed affinchè ciò sia, la formola precedente ci mostra che è condizione necessaria e sufficiente che la $f(x, y)$ soddisfaccia alla relazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ciò posto, poniamo la definizione:

Se x, y sono variabili reali, diremo che $f(x, y)$ è funzione di $x + iy$, se essa si conserva ancora tale, attribuendo alle x, y la variabilità complessa.

Ovvero, più esplicitamente;

Se x, y sono variabili reali, diremo che $f(x, y)$ è funzione di $x + iy$ in un campo se in ogni suo punto, fatta astrazione da un numero finito di punti o di linee, soddisfa alla relazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Questa definizione è dovuta al RIEMANN. Il CAUCHY chiamava funzioni *monogene* di $x + iy$ queste che noi qui chiamiamo semplicemente funzioni di $x + iy$.

Notiamo subito come le funzioni elementari definite nel n. 119 e seguenti siano effettivamente funzioni di $x + iy$ nel senso Riemanniano; e difatti ad es.: per

$$f(x, y) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(-\sin y + i \cos y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0:$$

per

$$f(x, y) = \log(x + iy) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + 2k\pi \right), \text{ è}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{ix}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \text{ etc.}$$

125. Sia $f(x + iy)$ una funzione di $x + iy$; se si può ridurre $f(x + iy)$ alla forma $u + iv$, dove $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ siano funzioni delle due variabili reali x, y , la equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

ci da

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

cosicchè se una funzione di $x + iy$ si può ridurre alla forma $u + iv$, la parte reale u , ed il coefficiente dell'immaginario v , soddisfanno alle due equazioni (1).

Inversamente, se le due funzioni u, v di x, y soddisfanno alle (1), la $u + iv$ è funzione di $x + iy$, poichè dalle (1) ricaviamo

$$\frac{\partial(u + iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} = 0.$$

Notiamo ancora che, supposto le u, v ammettano derivate seconde rispetto ad x, y e le derivazioni siano invertibili, le (1), derivate rapporto ad x e ad y , danno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Una funzione $f(z) = u + iv$ dicesi continua in z_0 dove ha il valore $f(z_0)$ se, dato σ , esiste un intorno di z_0 per tutti i punti z del quale è $|f(z) - f(z_0)| < \sigma$.

126. Sia $f(z) = f(x + iy)$ funzione della variabile z ; diamo a z l'aumento $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$; se pel rapporto

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{f(x + iy + \Delta x + i\Delta y) - f(x + iy)}{\Delta x + i\Delta y}$$

esiste un unico limite determinato quando Δz converge a zero, cioè quando $\Delta x, \Delta y$ comunque convergono a zero, questo limite definiamo come la derivata di $f(z)$ rapporto a z , che indichiamo con

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{df(x + iy)}{d(x + iy)} = f'(x + iy).$$

Le funzioni di una variabile reale possono ammettere de-

rivata a destra e a sinistra diverse da loro, dipendentemente dal segno dell'aumento attribuito alla variabile indipendente. Ora, mentre che l'aumento di una variabile reale può convergere a zero solamente in due direzioni diverse, l'aumento Δz può convergere a zero in un numero infinito di diverse direzioni corrispondenti al diverso modo di variare del rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx e Δy convergono a zero, e corrispondentemente a questi diversi modi di variare di Δz potremo avere diversi limiti pel rapporto (1), o aver limiti per alcuni e per altri no. Ora, se la $f(z)$ è funzione di z nel senso Riemanniano ed ammessa la continuità di una delle derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, esiste un unico limite del rapporto (1). Invero abbiamo

$$\frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y} = \frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy+i\Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} + \frac{f(x+iy+i\Delta y)-f(x+iy)}{i\Delta y} \frac{i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y};$$

ma, ($0 < \vartheta < 1$),

$$\begin{aligned} \frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy+i\Delta y)}{\Delta x} &= \frac{\partial f(x+iy+i\Delta y+\vartheta\Delta x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} + \vartheta = \frac{1}{i} \frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} + \vartheta, \end{aligned}$$

dove ϑ converge a zero con Δx , Δy , e

$$\frac{f(x+iy+i\Delta y)-f(x+iy)}{i\Delta y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} + \vartheta_1,$$

dove ϑ_1 converge a zero con Δy ; quindi

$$\frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} + \frac{\partial \Delta x}{\Delta x+i\Delta y} + \frac{\vartheta_1 i \Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

25

e, poichè i moduli delle quantità moltiplicate per ∂ e ∂_1 non crescono indefinitamente quando Δx , Δy convergono comunque a zero, avremo

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} = \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x}$$

cioè

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(z)}{\partial y}.$$

Si intende ora senz'altro come per le funzioni di variabili complesse valgano le stesse regole di derivazione, relativamente alla somma, al prodotto etc. di più funzioni, alle funzioni di funzioni etc. dimostrate per le funzioni di variabili reali.

127. Calcoliamo ora le derivate delle funzioni semplici.

$$1) \quad f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

La derivata è la stessa come se z fosse variabile reale. Vedremo che questo succede sempre.

$$2) \quad \cos z = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \sin x \frac{e^{-y} - e^y}{2},$$

$$\sin z = \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \cos x \frac{e^{-y} - e^y}{2};$$

$$\frac{d \cos z}{dz} = \frac{\partial \cos z}{\partial x} = -\sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^{-y} - e^y}{2} = -\sin z.$$

$$\text{Analogamente } \frac{d \sin z}{dz} = \cos z.$$

$$3) \log z = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \left(\operatorname{arc tg} \frac{y}{x} + 2k\pi \right),$$

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{\partial \log z}{\partial x} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}.$$

$$4) z^{z_1} = e^{z_1 \log z}$$

$$\frac{dz^{z_1}}{dz} = e^{z_1 \log z} z_1 \frac{1}{z} = z_1 \frac{z^{z_1}}{z} = z_1 z^{z_1-1},$$

$$\frac{dz^{z_1}}{dz_1} = e^{z_1 \log z} \log z = z^{z_1} \log z.$$

$$5) \operatorname{arc sen} z = \frac{1}{i} \log (\sqrt{1-z^2} + iz)$$

$$\frac{d \operatorname{arc sen} z}{dz} = \frac{1}{i} \frac{1}{\sqrt{1-z^2} + iz} \left(\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

$$\operatorname{arc tg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\frac{d \operatorname{arc tg} z}{dz} = \frac{1}{2i} \left(\frac{i}{1+iz} + \frac{i}{1-iz} \right) = \frac{1}{1+z^2}.$$

128. Una variabile complessa z può per infinite successioni di valori e con continuità passare da un valore z_0 ad un altro qualunque valore z ; basta osservare che i due punti z_0 e z possono venire congiunti tra loro mediante infinite linee continue.

Sia data la $f(z)$ pei punti d'un campo C , e sia z_0 un punto fisso qualunque e z un altro punto qualunque di C , f_0 uno dei valori che la $f(z)$ assume in z_0 . Se, qualunque sia la linea appartenente a C , che la variabile z percorre per andare da z_0 in z , il valore che si trova avere assunto la $f(z)$ nel punto z è sempre lo stesso, avendo sempre preso per valore iniziale il valore f_0 , la funzione $f(z)$ dicesi *monodroma* nel campo C . Se

invece ciò non avviene dicesi *polidroma*. È evidente che una funzione univalente, come e^z , $\cos z$ e simili, è necessariamente monodroma. Si riconosce subito che, affinché una funzione sia monodroma in C fa bisogno e basta che, se z_0 è un punto qualunque del campo ed f_0 il valore della funzione che assumiamo in z_0 , facendo percorrere alla variabile una linea l qualunque di C , che cominci e termini in z_0 , il valore che si trova avere la funzione quando la variabile ritorna in z_0 , sia ancora f_0 . Infatti se la funzione è monodroma, e z è un punto qualunque di l , indichiamo con $z_0 m z$ una parte e con $z n z_0$ l'altra parte di l . Percorrendo $z_0 m z$ e $z_0 n z$ arriviamo in z collo stesso valore della funzione, che indicheremo con f ; cosichè, se dopo aver percorso la linea $z_0 m z$ ci partiamo da z col valore f e percorriamo la linea $z m z_0$, la funzione riprenderà i valori già presi, in senso inverso, e arriveremo in z_0 col valore f_0 . Quindi percorrendo la linea $z_0 n z m z_0$, cioè l , ritroviamo alla fine per la nostra funzione il valore f_0 . Inversamente, se questo avviene, e se alla fine del movimento ci partiamo da z_0 col valore f_0 percorrendo la linea $z_0 m z$, arriveremo in z col valore f col quale siamo giunti percorrendo la linea $z_0 n z$.

Una stessa funzione può essere monodroma in alcune parti del piano ed in altre no. Prendiamo l'esempio più semplice $f(z) = \sqrt{z}$. Posto $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, la $f(z)$ ha in ogni punto del piano i due valori $\sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\vartheta + 2k\pi}{2} \right)$, ($k=0,1$), cioè, esplicitamente,

$$\sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right),$$

$$-\sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right) = \sqrt{\rho} \left(\cos \left(\frac{\vartheta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta}{2} + \pi \right) \right).$$

Consideriamo un campo tale che una linea qualunque di esso, che principia e termina in uno stesso punto, non possa circondare il punto $z=0$, come ad esempio un campo il cui contorno sia di un sol pezzo e non contenga nell'interno

il punto $z=0$. In questo campo la funzione $\sqrt{z}$ è monodroma, perchè partendoci da z_0 con uno dei suoi valori, mettiamo $\sqrt{\rho_0} \left(\cos \frac{\theta_0}{2} + i \sin \frac{\theta_0}{2} \right)$ e percorrendo una linea qualunque di C , ritorniamo in z_0 collo stesso valore, giacchè ρ ripiglia il valore ρ_0 e θ il valore θ_0 . La funzione invece non è monodroma in un campo che non goda della detta proprietà, perchè, partendoci da z_0 col valore precedente e facendo percorrere alla variabile una linea chiusa che circondi il punto $z=0$, θ varia da θ_0 a $\theta_0+2\pi$ e quindi l'argomento o angolo polare di $\sqrt{z}$ varia da $\frac{\theta_0}{2}$ a $\frac{\theta_0+2\pi}{2} = \frac{\theta_0}{2} + \pi$ ed arriviamo in z_0 col valore

$$\sqrt{\rho_0} \left[\cos \left(\frac{\theta_0}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta_0}{2} + \pi \right) \right] = -\sqrt{\rho_0} \left(\cos \frac{\theta_0}{2} + i \sin \frac{\theta_0}{2} \right)$$

cioè coll'altro dei due valori che $\sqrt{z}$ possiede in z_0 .

129. I termini $w_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$ d'una serie $\Sigma w_n(z)$ siano funzioni monodrome finite della variabile complessa z ed ammettano derivata $w'_n(z)$ per tutti i punti d'un intorno c del punto z e sia $w'_n(z)$ continua in z ; le serie $\Sigma w_n(z)$, $\Sigma w'_n(z)$ siano uniformemente convergenti in c . Allora la serie proposta $w = \Sigma w_n$ soddisfa in z alla equazione

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

è continua in z , ed ammette derivata $w'(z)$ data dalla serie delle derivate dei termini, $\Sigma w'_n(z)$.

Infatti, poichè le $w_n = u_n + iv_n$ sono continue nel punto z , le u_n e v_n sono funzioni di x, y continue nel punto (x, y) . Le serie $\Sigma u_n, \Sigma v_n$ sono uniformemente convergenti in c , poichè è tale la Σw_n . Quindi le serie $\Sigma u_n, \Sigma v_n$ sono due funzioni u, v di x, y continue nel punto (x, y) , e perciò ancora la $w = u + iv$ è funzione di x, y continua nel punto (x, y) .

Inoltre, osserviamo che dalle formole

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned} w'_n(z) &= \frac{\partial w_n}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial x} + i \frac{\partial v_n}{\partial x} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial w_n}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{i}{i} \frac{\partial v_n}{\partial y} \end{aligned}$$

ricaviamo che la serie $\sum \frac{\partial w_n}{\partial x}$ e quindi anche $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\sum \frac{\partial v_n}{\partial x}$, e la serie $\sum \frac{\partial w_n}{\partial y}$ e quindi anche $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}$, $\sum \frac{\partial v_n}{\partial y}$ sono uniformemente convergenti in c , perchè tale è la $\sum w'_n(z)$. Quindi le serie $\sum u_n$, $\sum v_n$ sono derivabili termine a termine rapporto ad x e ad y nel punto (x, y) , ed avremo perciò

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \sum \frac{\partial u_n}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x} = \sum \frac{\partial v_n}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} = \sum \frac{\partial v_n}{\partial y},$$

e da queste

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \sum \frac{\partial u_n}{\partial x} + i \sum \frac{\partial v_n}{\partial x} = \sum \frac{\partial (u_n + i v_n)}{\partial x} = \sum \frac{\partial w_n}{\partial x} = \sum w'_n(z);$$

ed analogamente

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum \frac{\partial w_n}{\partial y} = i \sum w'_n(z),$$

e quindi

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x}.$$

E con questa formola rimanendo ora dimostrato che

$$w'(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = i \frac{\partial w}{\partial y}, \text{ abbiamo ancora } w'(z) = \sum w'_n(z).$$

Il teorema è così completamente dimostrato; dal quale ricaviamo, come immediata conseguenza, l'altro:

Se in un campo C (il contorno incluso o no) le $w_n(z)$, $w'_n(z)$ sono *monodrome e continue* e se per ogni punto interno a C esiste un intorno per tutti i punti del quale le serie Σw_n , $\Sigma w'_n$, sono uniformemente convergenti, allora la serie Σw_n per tutti i punti di C (escluso al più il contorno) è una funzione della variabile complessa z , monodroma e continua, e che ammette derivata, data dalla serie $\Sigma w'_n$.

Integrali delle funzioni di variabili complesse.

130. CAUCHY fu il primo, nel 1825, a stabilire il significato preciso, dandone una chiara definizione, del simbolo $\int_{\alpha+ib}^{\alpha'+ib'} f(z) dz$, dove $f(z)$ è funzione della variabile complessa z , riducibile per ogni sistema di valori di x, y alla forma $u(x, y) + iv(x, y)$, essendo u, v funzioni reali di x, y .

Sia l una linea appartenente ad un campo dove la $f(z)$ è monodroma e finita, e che unisce tra loro i punti $\alpha = a + ib$, $\beta = a' + ib'$. Siano $z_0 = \alpha, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \beta$ punti qualunque appartenenti ad l e succedentisi andando da α verso β ; consideriamo la somma $S = \Sigma w_{s-1}(z_s - z_{s-1})$, dove w_{s-1} indica un valore qualunque di $f(z)$ lungo il tratto di linea l compreso tra i punti z_{s-1} e z_s . Ora una quantità L dicesi limite di S al crescere di n , se, dato σ , esiste un corrispondente numero positivo δ tale che, per $|z_s - z_{s-1}| < \delta$ e qualunque sia la scelta dei valori w_s , sia sempre $|S - L| < \sigma$, ed L chiamasi l'*integrale definito della funzione $f(z)$ preso tra α e β lungo la linea l , che dicesi linea o cammino di integrazione*, e scriviamo $L = \int f(z) dz$ lungo l , e la $f(z)$ sarà allora *integrabile* da α a β lungo la linea l .

Supponiamo che le coordinate dei punti della linea l vengano espresse per un parametro t , mediante le formole

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

(in particolare potrà essere $t = x$ o $t = y$) e che si ottengano

tutti i punti di l da α a β facendo variare t da t_0 a t_1 sempre crescendo o sempre decrescendo, e che $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ammettano derivate continue pei valori di t da t_0 a t_1 . Posto

$$w = f(z) = u[\varphi(t), \psi(t)] + iv[\varphi(t), \psi(t)] = u(t) + iv(t) = u + iv,$$

$$w_s = f(z_s) = u[\varphi(t_s), \psi(t_s)] + iv[\varphi(t_s), \psi(t_s)] = u_s + iv_s,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} S = \sum_1^n w_s (z_s - z_{s-1}) &= \sum_1^n (u_s + iv_s) [\varphi(t_s) + i\psi(t_s) - \varphi(t_{s-1}) - i\psi(t_{s-1})] \\ &= \sum_1^n u_s [\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})] - \sum_1^n v_s [\psi(t_s) - \psi(t_{s-1})] + \\ &\quad + i \left\{ \sum_1^n v_s [\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})] + \sum u_s [\psi(t_s) - \psi(t_{s-1})] \right\}. \end{aligned}$$

Alla prima somma del secondo membro (ed in modo analogo per le altre) possiamo dare la forma

$$\sum_1^n u_s \frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} (t_s - t_{s-1});$$

ma

$$\frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} = \varphi'[t_{s-1} + \theta(t_s - t_{s-1})] = \varphi'(t_{s-1}) + \delta_s,$$

dove, essendo la $\varphi'(t)$ continua nell'intervallo (t_0, t_1) , le δ_s sono quantità che possono *tutte* ridursi minori numericamente di qualunque quantità positiva assegnata prendendo gli intervalli $t_s - t_{s-1}$ sufficientemente piccoli.

Avremo quindi

$$\sum_1^n u_s \frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} (t_s - t_{s-1}) = \sum_1^n u_s \varphi(t_{s-1}) (t_s - t_{s-1}) + \sum_1^n \delta_s u_s (t_s - t_{s-1}).$$

Supponiamo la funzione u di t integrabile nell'intervallo

(t_0, t_1) ; allora è anche integrabile la $u\varphi'(t)$ e perciò, essendo

www.libtool.com.cn

$$\lim \sum_1^n u_s(t_s - t_{s-1}) = \int_{t_0}^{t_1} u dt$$

e quindi $\lim \sum_1^n \delta_s u_s(t_s - t_{s-1}) = 0$, avremo

$$\lim \sum_1^n u_s \frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} (t_s - t_{s-1}) = \lim \sum_1^n u_s \varphi'(t_{s-1}) (t_s - t_{s-1}) = \int_{t_0}^{t_1} u \varphi'(t) dt.$$

Ammissa poi ancora la integrabilità di v nell'intervallo (t_0, t_1) , abbiamo in ultimo, procedendo in modo analogo colle altre somme suddette,

$$\begin{aligned} \lim S &= \int_{t_0}^{t_1} u \varphi'(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} v \psi'(t) dt + i \left\{ \int_{t_0}^{t_1} v \varphi'(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} u \psi'(t) dt \right\} \\ (1) \quad &= \int_{t_0}^{t_1} (u + iv) [\varphi'(t) + i \psi'(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz, \end{aligned}$$

la quale formola non solo ci prova l'esistenza dell'integrale della $f(z)$ lungo la linea l , ma ancora ci indica il modo di calcolarne il valore.

Per esempio, per calcolare l'integrale lungo la retta che unisce i punti α, β , basta porre

$$x = \varphi(t) = a + (a' - a)t, \quad y = \psi(t) = b + (b' - b)t$$

ed allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = [a' - a + i(b' - b)] \int_0^1 f[a + (a' - a)t + ib + i(b' - b)t] dt;$$

per calcolare quello da α a β lungo un semicircolo che passa per α e β , basta porre

$$x = \frac{1}{2} [a + a' + \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} \cos t],$$

$$y = \frac{1}{2} (b + b' + \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} \operatorname{sen} t),$$

www.libtool.com.cn

ed allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \frac{1}{2} \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}.$$

$$\int_{t_0}^{\pi + t_0} f \left[\frac{a + a'}{2} + i \frac{b + b'}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} (\cos t + i \operatorname{sen} t) \right] (-\operatorname{sen} t + i \cos t) dt,$$

dove

$$t_0 = \arccos \frac{a - a'}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}} = \arcsen \frac{b - b'}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}}.$$

La formola (1) mostra poi, senz'altro, che

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = - \int_{\beta}^{\alpha} f(z) dz,$$

il cammino di integrazione essendo lo stesso per i due integrali; e che, se γ è un punto di l ,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma}^{\beta} f(z) dz,$$

la qual formola vale anche se il punto γ è fuori della linea l , purchè, indicando con l_1 la linea di integrazione dell'ultimo integrale del secondo membro, la $f(z)$ sia integrabile su l_1 , e la linea di integrazione del primo integrale del secondo membro si componga delle linee l ed l_1 .

131. Abbiamo anche qui un teorema analogo al primo della media.

Invero, essendo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} u[\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt + i \int_{t_0}^{t_1} v[\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt,$$

e poichè, applicando il primo noto teorema della media, è

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} u[\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt &= m_1(\beta - \alpha) + im_2(b' - b) \\ &= m_1(\beta - \alpha) + i(m_2 - m_1)(b' - b), \\ \int_{t_0}^{t_1} v[\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt &= n_1(\beta - \alpha) + i(n_2 - n_1)(b' - b),\end{aligned}$$

dove m_1, m_2 sono valori compresi tra il limite superiore e l'inferiore di u nell'intervallo (t_0, t_1) e analogamente n_1, n_2 per v , abbiamo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = (m_1 + in_1)(\beta - \alpha) + i(b' - b)[m_2 - m_1 + n_2 - n_1],$$

e, se la $f(z)$ è continua lungo la linea l ,

$$\begin{aligned}(1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz &= \{u[t_0 + \zeta(t_1 - t_0)] + iv[t_0 + \zeta'(t_1 - t_0)]\}(\beta - \alpha) \\ &\quad + i(b' - b)[m_2 - m_1 + n_2 - n_1],\end{aligned}$$

dove $0 \leq \zeta \leq 1$, $0 \leq \zeta' \leq 1$.

Queste formole corrispondono a quella del primo teorema sulla media per gli integrali di funzioni reali; ma vi è un'altra formola (HERMITE, *Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris, litografia*) che è più semplice e di cui quella della media è caso particolare, e che perciò pare più opportuna per costituire il primo teorema della media per i nostri integrali.

Scriviamo

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} (u + iv) \frac{dx + idy}{dt} dt,$$

ed avremo

$$|I| \leq \int_{t_0}^{t_1} |u + iv| \left| \frac{dx + idy}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} |u + iv| \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} dt,$$

cosichè, indicando ζ un certo numero compreso tra 0 e 1,

www.libtool.com.cn

$$|I| = \zeta \int_{t_0}^{t_1} |u + iv| \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} dt,$$

ed applicando il noto teorema della media

$$|I| = \zeta M \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} dt = \zeta M \text{ arco } l,$$

dove M è un numero compreso tra il limite superiore e l'inferiore di $|u + iv|$ nell'intervallo (t_0, t_1) e arco l indica la lunghezza della linea l . Se la $f(z)$ è continua lungo l ,

$$|I| = \zeta |u(t') + iv(t')| \text{ arco } l = \zeta |f(z')| \text{ arco } l,$$

dove $t_0 \leq t' \leq t_1$ e z' indica quel punto della linea l , che corrisponde a $t = t'$.

Ma, indicando con φ l'argomento di I , con α l'argomento di $f(z')$, è $I = |I| e^{i\varphi}$, $f(z') = |f(z')| e^{i\alpha}$, ed avremo

$$I = \zeta |f(z')| e^{i\varphi} \text{ arco } l = \zeta e^{i(\varphi - \alpha)} f(z') \text{ arco } l,$$

ed in conseguenza, indicando con λ una quantità il cui modulo non supera l'unità, abbiamo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \lambda \text{ arco } l f(z'),$$

che è la formola che corrisponde a quella del primo teorema della media.

132. Proviamo ora che in ogni punto z della linea di integrazione l'integrale di $f(z)$ è funzione di z . Poniamo

$$I(z) = \int_{\alpha}^z f(z) dz;$$

allora

$$I'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\alpha}^{z+h} f(z) dz - \int_{\alpha}^z f(z) dz \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz,$$

dove $h = \Delta z = \Delta x + i\Delta y$ indica un aumento qualunque attribuito a z , e l'integrale da z a $z+h$ è condotto lungo una linea qualunque che unisca i punti z e $z+h$, le coordinate dei punti della quale supporremo espresse mediante t e in modo che z corrisponda al valore t e $z+h$ al valore $t+k$ di t , essendo k quantità che converge a zero con h . Ma per la formola (1) n. 131 abbiamo

$$\frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz = u(t+k) + iv(t+k) + \frac{i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} [m_2 - m_1 + n_2 - n_1],$$

e poichè $\lim_{h \rightarrow 0} (m_2 - m_1) = \lim_{h \rightarrow 0} (n_2 - n_1) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} u(t+k) = u(t)$, $\lim_{h \rightarrow 0} v(t+k) = v(t)$, sarà

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz = u(t) + iv(t) = f(z);$$

quindi

$$I'(z) = \frac{d}{dz} \int_{\alpha}^z f(z) dz = f(z),$$

e da questa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\alpha}^z f(z) dz \right) = f(z), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{\alpha}^z f(z) dz \right) = if(z),$$

le quali provano che $\int_{\alpha}^z f(z) dz$ è funzione del limite superiore z , pei punti z della linea di integrazione, e che ha per derivata $f(z)$.

Se $F(z)$ è funzione di z , che, lungo la linea di integrazio-

ne abbia per derivata $f'(z)$, avremo

www.libtool.com.cn

$$\int_{\alpha}^z f'(z) dz = F(z) - F(\alpha).$$

Invero, posto $z = \varphi(t) + i\psi(t)$, in modo che ai valori di t da t_0 a t corrispondano i punti della linea di integrazione da α a z , e posto $F(z) = U(t) + iV(t)$, avremo

$$F'(z) = f'(z) = [U'(t) + iV'(t)] \frac{dt}{dz} = [u(t) + iv(t)],$$

e quindi

$$f'(z) dz = [u(t) + iv(t)] [\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt = [U'(t) + iV'(t)] dt,$$

e da questa

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^z f'(z) dz &= \int_{t_0}^t [u(t) + iv(t)] [\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt = \int_{t_0}^t [U'(t) + iV'(t)] dt \\ &= U(t) + iV(t) - [U(t_0) + iV(t_0)] = F(z) - F(\alpha). \end{aligned}$$

Così ad esempio, qualunque sia la linea di integrazione, è

$$\int_{\alpha}^z \cos z dz = \sin z - \sin \alpha, \quad \int_{\alpha}^z \sin z dz = \cos \alpha - \cos z, \quad \int_{\alpha}^z e^z dz = e^z - e^{\alpha}.$$

133. Se la $f'(z)$ diviene infinita in un punto c della linea di integrazione, perchè esiste un intorno del punto c per tutti i punti del quale $|f'(z)|$ si mantiene maggiore di qualunque numero prefissato, o perchè ciò avviene per tutti i punti di un intorno sulla linea di integrazione, o perchè comunque piccolo si prenda un intorno di c su detta linea vi siano sempre in esso dei punti nei quali $|f'(z)|$ è maggiore di qualunque numero prefissato, allora poniamo la definizione

$$\int_{\alpha}^c f'(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{c-\delta} f'(z) dz,$$

restando il punto $c-\delta$ sempre sulla linea di integrazione.

E se la linea di integrazione si estende all'infinito, poniamo la definizione www.libtool.com.cn

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(z) dz = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz,$$

quando il punto z si allontana indefinitamente sulla linea di integrazione.

134. Il cambiamento di variabile negli integrali di funzioni di variabile complessa si opera precisamente come negli integrali di funzioni di variabile reale. Sia $\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz$ preso lungo la linea l e si ponga $z = z(z_1)$, dove $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z(z_1)$ è funzione di z_1 che ammette derivata, e sia $\alpha = z(\alpha_1)$, $\beta = z(\beta_1)$, essendo $\alpha = a + ib$, $\beta = a' + ib'$, $\alpha_1 = a_1 + ib_1$, $\beta_1 = a'_1 + ib'_1$; dico che avremo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f[z(z_1)] z'(z_1) dz_1,$$

l'integrale del secondo membro essendo preso lungo quella linea l_1 che corrisponde alla linea l , linea le cui coordinate x_1, y_1 vengono date dalle $x_1 = f_1(x, y)$, $y_1 = f_2(x, y)$, dove questi valori di x_1, y_1 sono quelli che si ricavano dalle

$$x = F_1(x_1, y_1), \quad y = F_2(x_1, y_1),$$

supposto che sia

$$z = x + iy = z(z_1) = F_1(x_1, y_1) + iF_2(x_1, y_1).$$

Ora, se si pone $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ cosicchè sia

$$F_1(x_1, y_1) = \varphi(t), \quad F_2(x_1, y_1) = \psi(t),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} [u(t) + iv(t)] [\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt,$$

avremo

$$x_1 = f_1(x, y) = f_1[\varphi(t), \psi(t)] = f_1(t), \quad y_1 = f_2(x, y) = f_2[\varphi(t), \psi(t)] = f_2(t),$$

$$a_1 = f_1(a, b) = f_1[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = f_1(t_0), \quad b_1 = f_2(a, b) = f_2[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = f_2(t_0),$$

ed analogamente $a'_1 = f_1(t_1)$, $b'_1 = f_2(t_1)$,

$$f[z(z_1)] = f[F_1(x_1, y_1) + iF_2(x_1, y_1)] = f[\varphi(t) + i\psi(t)] = u(t) + iv(t),$$

$$z'(z_1) = [\varphi'(t) + i\psi'(t)] \frac{dt}{dz_1},$$

cosicchè

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f[z(z_1)] z'(z_1) dz_1 = \int_{t_0}^{t_1} [u(t) + iv(t)] [\varphi'(t) + i\psi'(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz.$$

135. In seguito alle considerazioni fatte finora possiamo riunire in una sola formola alcuni dei risultati di integrazioni di funzioni di variabili reali, che si presentarono sotto aspetto diverso a seconda dei valori o del segno di certe quantità: come pure si potrà con semplicità ricavare il valore di un integrale da un altro già conosciuto; il che verrà dichiarato con i seguenti semplici esempi.

Possiamo dire sempre che, supposte x, a, b, c reali, è, se $4ac - b^2$ è diverso da zero,

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc tg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

(vedi pag. 45); invero se $4ac - b^2 < 0$ il secondo membro diviene $\frac{2}{i\sqrt{b^2 - 4ac}} \operatorname{arc tg} \frac{2ax + b}{i\sqrt{b^2 - 4ac}}$, cioè

$$\begin{aligned} & \frac{2}{i\sqrt{b^2 - 4ac}} \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \frac{2ax + b}{i\sqrt{b^2 - 4ac}}}{1 - i \frac{2ax + b}{i\sqrt{b^2 - 4ac}}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac} - (2ax + b)} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - (2ax + b)}{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ax + b}, \end{aligned}$$

che non differisce che pel segno della quantità sotto il loga-

ritmo (ciò che non importa, perchè di essa dobbiamo prendere il valore assoluto) dalla formola trovata a pag. 45 quando $4ac - b^2 < 0$.

Così ancora per avere $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ da $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a}$, basta porre in quest'ultimo $x = ix_1$ ed allora

$$\begin{aligned} \int \frac{dx_1}{\sqrt{a^2 + x_1^2}} &= \frac{1}{i} \arcsen \frac{ix_1}{a} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i} \log \left(\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{a^2}} - \frac{x_1}{a} \right) \\ &= -\log \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - x_1}{a} = \log \frac{a}{\sqrt{a^2 + x_1^2} - x_1} \\ &= \log \frac{a(\sqrt{a^2 + x_1^2} + x_1)}{a^2} = \log (\sqrt{a^2 + x_1^2} + x_1) + C. \end{aligned}$$

Così ancora, conoscendo

$$\int \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 - 2} = \frac{1}{b} \log \frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}},$$

troviamo subito $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 - 2}$, giacchè, cambiando x in ix nel primo integrale, abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 - 2} &= -\frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{6} \log \frac{ix-1}{ix+1} + \frac{\sqrt{2}}{3} \arctg \frac{ix}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= -\frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{i} \arctg x + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \arctg x + \frac{1}{3\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}. \end{aligned}$$

136. Se $f(z) = u + iv$ è monodroma finita e continua in tutto un campo C , il cui contorno sia s , e le derivate di u e v rispetto ad x, y sono integrabili in C , l'integrale di $f(z)dz$ esteso al contorno di C è uguale a zero, cioè $\int_C f(z)dz = 0$.

Infatti

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx);$$

ma, poichè u, v sono funzioni univalenti continue di x, y in C e le loro derivate sono ivi integrabili, abbiamo, in virtù della formola di GREEN al n. 100,

$$\int_C (u dx - v dy) = - \int_C \int_C \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$\int_C (u dy + v dx) = \int_C \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

e gli integrali nei secondi membri sono zero perchè, essendo $f(z)$ funzione di z in C , è ivi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

in conseguenza $\int_C f(z) dz = 0$.

137. Dal precedente teorema fondamentale di CAUCHY risulta subito che il valore dell'integrale $\int_{x_0}^{x_1} f(z) dz$, quando si integri per due linee differenti che uniscono i punti x_0 e x_1 , ma tali che nella parte del piano da esse limitata, incluse le linee stesse, la $f(z)$ sia monodroma finita e continua, è lo stesso; ossia, il valore dell'integrale non cambia quando, rimanendo fissi gli estremi, la linea di integrazione si deforma senza spezzarsi e rimanendo sempre in un campo ove la $f(z)$ sia mono-

droma finita e continua, cosichè allora la linea di integrazione non ha influenza sul valore dell'integrale. Così ad es.: qualunque sia la linea di integrazione è sempre

$$\int_{z_0}^{z_1} \cos z \, dz = \operatorname{sen} z_1 - \operatorname{sen} z_0.$$

Altra conseguenza del teorema di CAUCHY è che gli integrali di $f(z) \, dz$ estesi, nello stesso verso, lungo due curve chiuse, l'una interna all'altra e tali che nell'area da esse racchiusa, incluse le linee stesse, la $f(z)$ è monodroma finita e continua, sono uguali.

Come esempio calcoliamo l'integrale $\int_s \frac{dz}{z-a}$ esteso ad una curva chiusa s che racchiude nel suo interno il punto a , ove la funzione integranda $\frac{1}{z-a}$ diviene infinita. Descriviamo col centro in a un circolo di raggio R tutto contenuto nell'area determinata da s ; nel campo limitato da s e da σ la funzione $\frac{1}{z-a}$ si mantiene monodroma finita e continua, cosichè

$$\int_s \frac{dz}{z-a} = \int_\sigma \frac{dz}{z-a}.$$

Per calcolare il secondo integrale poniamo $z-a = Re^{i\theta}$, di guisa che, essendo R costante pei punti z di σ , sarà $dz = iRe^{i\theta} d\theta$,

ed in conseguenza $\int_\sigma \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$, per cui

$$\int_s \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Calcoliamo ancora $\int_s (z-a)^n \, dz$, ove n è numero intero qualunque. Se n è positivo, pel teorema di CAUCHY, il valore del-

l'integrale è zero. Sia n negativo, cioè consideriamo l'integrale

$\int_s \frac{dz}{(z-a)^n}$, n intero positivo. Descritto il circolo σ , come

precedentemente, e posto $z-a = Re^{i\theta}$ abbiamo

$$\int_s \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_\sigma \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{1}{(1-n)R^{n-1}} [e^{i(1-n)\theta}]_0^{2\pi} = 0,$$

valevole se n è diverso dall'unità. Cosichè vediamo che $\int_s (z-a)^n dz = 0$ se n è un intero diverso da -1 , e per $n = -1$, il valore dell'integrale è $2\pi i$.

138. Se $f(z) = u + iv$ è monodroma finita e continua in un campo C , il contorno s di C incluso, ed u, v hanno le derivate integrabili in C , e z' indica un punto interno a C , abbiamo

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{z-z'} dz.$$

Invero, la funzione di z , $\frac{f(z)}{z-z'}$ è in C dappertutto monodroma finita e continua, escluso il punto $z=z'$ in cui diviene infinita. Ove si circonda questo punto z' con un circolo σ tutto contenuto in C , descritto col centro in z' e di raggio R , che potremo assumere piccolo quanto si vuole, la funzione $\frac{f(z)}{z-z'}$ è monodroma finita e continua in tutto il campo limitato dalle linee s e da σ ; cosichè avremo

$$\int_s \frac{f(z)}{z-z'} dz - \int_\sigma \frac{f(z)}{z-z'} dz = 0,$$

dove l'integrazione lungo σ si intenderà condotta lasciando a sinistra l'area racchiusa da σ , se l'integrazione lungo s è condotta lasciando a sinistra il campo C .

Posto $z - z' = Re^{\theta i}$, è

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z) dz}{z - z'} = i \int_0^{2\pi} f(z' + Re^{\theta i}) d\theta = i \int_0^{2\pi} [f(z' + Re^{\theta i}) - f(z')] d\theta - 2\pi i f(z')$$

e quindi

$$\int_s \frac{f(z) dz}{z - z'} - 2\pi i f(z') = i \int_0^{2\pi} [f(z' + Re^{\theta i}) - f(z')] d\theta;$$

essendo $f(z)$ continua in z' , dato δ , esiste un numero R_1 tale che per $R \leq R_1$ e qualunque sia δ è $|f(z' + Re^{\theta i}) - f(z')| < \frac{\delta}{2\pi}$, cosicchè allora

$$\left| \int_s \frac{f(z) dz}{z - z'} - 2\pi i f(z') \right| < \delta.$$

Ma, la quantità di cui si prende il modulo nel primo membro essendo indipendente da R , dovremo avere

$$\int_s \frac{f(z) dz}{z - z'} - 2\pi i f(z') = 0,$$

cioè $f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z) dz}{z - z'}$, come volevasi dimostrare.

Questa formola è notevole ed importante. Essa dà il valore che la $f(z)$ ha in un punto z' , interno al campo, mediante i valori che essa ha sul contorno s di esso, così che i valori sul contorno, quando la funzione debba essere monodroma finita e continua in tutto il campo, la determinano completamente in guisa che non vi possa essere che una sola funzione, monodroma finita e continua, avente quei valori sul contorno. Osserviamo però che questa formola non va intesa nel senso

che si possano assegnare arbitrariamente sul contorno i valori di una funzione, che nel campo debba essere monodroma finita e continua, poichè potrebbe avvenire che non esistesse una tale funzione, avente quei valori prefissati sul contorno.

139. Una funzione monodroma finita e continua $f(z)=u+iv$ in tutto un campo C , e tale che le derivate di u, v sieno in esso integrabili, ammette tutte le derivate $f'(z'), f''(z'), \dots$ finite e continue in tutti i punti z' interni al campo.

Invero, abbiamo $f'(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{z-z'} dz$, e da questa

$$\begin{aligned} \frac{f(z'+\Delta z') - f(z')}{\Delta z'} &= \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{\Delta z'} \left(\frac{1}{z-z'-\Delta z'} - \frac{1}{z-z'} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_s f(z) \frac{dz}{(z-z'-\Delta z')(z-z')} \end{aligned}$$

dove $\Delta z'$ è tale che i punti $z' + \Delta z'$ appartengano a C ; e, poichè il primo membro è funzione continua di $\Delta z'$ e quindi anche il terzo, passando al limite per $\Delta z'$ convergente a zero, sarà nell'ultimo membro il limite dell'integrale uguale all'integrale del limite, e quindi

$$f'(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z) dz}{(z-z')^2}.$$

Dalla quale riconosciamo anche che $f'(z')$ è continua in z' , perchè

$$f'(z'+\Delta z') - f'(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s f(z) dz \frac{2(z-z') - \Delta z'}{(z-z'-\Delta z')^2 (z-z')^2} \Delta z',$$

e l'integrale del secondo membro si compone di termini costituiti da integrali estesi alle parti s_1 del contorno, il cui complesso costituisce s , ciascuno dei quali, pel teorema della

media, è uguale a

$$\frac{\lambda}{2\pi} \arcsin f(z_1) \frac{2(z_1 - z') - \Delta z'}{(z_1 - z' - \Delta z')^2 (z_1 - z')^2} \Delta z',$$

dove λ è una quantità il cui modulo non supera l'unità e z_1 è un punto di s ; e poichè il modulo della quantità che moltiplica $\Delta z'$ si mantiene sempre finito, comunque varii $\Delta z'$, così vediamo che il modulo dell'ultima espressione potrà rendersi minore di qualunque numero positivo prefissato col prendere $|\Delta z'|$ sufficientemente piccolo; risulta da ciò che $|f'(z' + \Delta z') - f'(z')|$ può rendersi minore di qualunque numero prefissato positivo, e quindi $f'(z')$ è continua in z' .

Analogamente,

$$\frac{f'(z' + \Delta z') - f'(z')}{\Delta z'} = \frac{1}{2\pi i} \int_s f(z) \frac{2(z - z') - \Delta z'}{(z - z' - \Delta z')^2 (z - z')^2} dz,$$

e, poichè il primo membro è funzione continua di $\Delta z'$, avremo anche qui, passando al limite per $\Delta z' = 0$,

$$f''(z') = \frac{2}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{(z - z')^3} dz,$$

e si vedrebbe qui pure, come precedentemente, che $f''(z')$ è continua in z' .

Proseguendo così, in modo analogo, si troverebbe

$$f'''(z') = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{(z - z')^4} dz,$$

ed in generale

$$f^{(n)}(z') = \frac{2 \cdot 3 \dots n}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{(z - z')^{n+1}} dz,$$

da cui risulta anche la continuità di $f^{(n)}(z')$ in z' .

140. Premettiamo poche considerazioni sulle *serie di potenze*, cioè sulle serie della forma $\sum_0 c_n (z' - a)^n$, che, posto $z' - a = z$, si riducono alla forma $\sum_0 c_n z^n$.

Se esiste un numero positivo α tale che, per tutti i valori di n a partire da un certo indice, le quantità $|c_n| z^n$ si mantengano minori di un certo numero positivo g , la serie $\sum c_n z^n$ sarà assolutamente convergente per tutti i valori di z il cui modulo è minore di α , cioè per tutti i punti z interni al cerchio di raggio α col centro nel punto $z=0$, che chiamasi un cerchio di convergenza della serie data.

Senza ledere la generalità, possiamo supporre $|c_n| z^n < g$ a partire dall'indice $n=0$. Consideriamo un valore qualunque $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, dove $\rho < \alpha$; dalla $|c_n| z^n < g$ ricaviamo $|c_n| z^n \rho^n < g \rho^n$ ossia $|c_n| \rho^n < g \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^n$, cosicchè i termini della serie $\sum |c_n| \rho^n$, che è la serie dei moduli dei termini della serie $\sum c_n z^n$, sono minori dei corrispondenti della serie $g \sum \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^n$, che è convergente perchè $\frac{\rho}{\alpha} < 1$. In conseguenza la serie $\sum c_n z^n$ è assolutamente convergente se $|z| = \rho < \alpha$.

Da questo teorema si ricava subito l'altro:

La serie $\sum c_n z^n$ è uniformemente convergente in qualunque parte del piano interna a un suo circolo di convergenza.

Sia C una tale parte del piano, ed α il raggio del circolo di convergenza. Descriviamo un circolo di raggio $R < \alpha$, col centro nel punto $z=0$, e che contenga C nel suo interno. La serie $\sum |c_n| R^n$ è convergente ed i suoi termini sono maggiori dei corrispondenti della serie

$$\sum |c_n| |z|^n = \sum |c_n| \rho^n \text{ dove } |z| < R.$$

Quest'ultima serie è quindi uniformemente convergente nell'intervallo $(0, R)$ per ρ , e perciò anche, come si riconosce subito, la serie $\sum c_n z^n$ è uniformemente convergente entro il circolo di raggio R col centro nel punto $z=0$, e quindi anche nella parte C del piano.

Le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$, ordinate secondo le potenze negative

di $z-a$, si riducono alle precedenti ponendo $z-a = \frac{1}{z_1}$.

141. Supposta $f(z)$ monodroma finita e continua in un campo C , incluso il contorno s , e z' un punto interno, riprendiamo la formola

$$(1) \quad f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{z'-z} dz.$$

Ora dalla formola

$$(2) \quad 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^n}{1-\alpha},$$

ponendovi $\alpha = \frac{z'-a}{z-a}$, ricaviamo

$$\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z-a} + \frac{z'-a}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(z'-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{(z'-a)^n}{(z-a)^n(z-z')}.$$

Supposto a non sia un punto di s , sostituendo questo valore di $\frac{1}{z-z'}$ nella (1), abbiamo

$$f(z') = I_0 + (z'-a)I_1 + (z'-a)^2I_2 + \dots + (z'-a)^{n-1}I_{n-1} + R_n,$$

dove abbiamo posto

$$I_r = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z) dz}{(z-a)^{r+1}}, \quad R_n = \frac{(z'-a)^n}{2\pi i} \int_s \frac{f(z) dz}{(z-a)^n(z-z')}.$$

La quantità R_n , ove il contorno s non sia di un sol pezzo, si comporrà di un numero finito di termini della forma

$$\frac{(z'-a)^n}{2\pi i} \int_{s_r} \frac{f(z) dz}{(z-a)^n (z-z')},$$

che, in virtù del teorema della

media, saranno uguali a $\frac{\lambda_r \arccos s_r}{2\pi} \frac{f(\xi_r)}{\xi_r - z'} \left(\frac{z'-a}{\xi_r - a} \right)^n$, dove λ_r è quantità il cui modulo non supera l'unità e ξ_r è un certo punto sopra s_r .

Se ora supponiamo a sia un punto interno al campo C , e tale che il cerchio descritto col centro in a e con raggio $|z'-a|$ sia tutto interno al campo, sarà sempre $\left| \frac{z'-a}{\xi_r - a} \right| < 1$, e quindi, al crescere indefinito di n , è $\lim \left\{ \frac{\lambda_r \arccos s_r}{2\pi} \frac{f(\xi_r)}{(\xi_r - z')} \left(\frac{z'-a}{\xi_r - a} \right)^n \right\} = 0$, e quindi ancora $\lim R_n = 0$; così che allora varrà lo sviluppo in serie

$$f(z') = I_0 + (z'-a)I_1 + (z'-a)^2 I_2 + \dots + (z'-a)^n I_n + \dots,$$

e la serie del secondo membro è quella del TAYLOR, perchè (n. 139) è

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(a).$$

Da quanto precede risulta che una funzione $f(z)$ è sviluppabile colla serie del TAYLOR, ordinata secondo le potenze di $z-a$, in tutti i punti z interni ad un cerchio col centro in a nel quale la $f(z)$ si mantiene monodroma finita e continua, avvertendo che lo sviluppo medesimo è valido pei punti interni, anche quando sulla circonferenza la funzione cessa di essere finita o continua, perchè, qualunque sia il punto z interno al cerchio, possiamo tra esso e la circonferenza far passare un secondo cerchio concentrico e sul quale la $f(z)$ è finita e continua, ed assumendo questo secondo cerchio come il contorno s

della precedente ricerca, si giunge alla serie del Taylor. Possiamo dunque enunciare il seguente importante e fondamentale teorema dovuto a CAUCHY:

I valori di una funzione monodroma finita e continua in un cerchio di centro a , il contorno incluso oppure no, possono, per ogni punto z interno al cerchio, esprimersi mediante la serie del Taylor relativa al punto a .

Se $a=0$ si ha la serie del MAC-LAURIN.

Questo teorema ci risparmia lo studio del resto della serie, come avevamo dovuto fare nel calcolo differenziale, e la sola ispezione della funzione basta ad accertarci della sua sviluppabilità o no, secondo la serie del Taylor. Così ad es.: poichè

la funzione $\frac{1}{1+z}$ diviene infinita nel punto $z=-1$, e dappertutto altrove è monodroma finita e continua, essa è sviluppabile colla serie del Mac-Laurin in tutti i punti z interni ad un circolo col centro nel punto $z=0$ e di raggio uno, ed è sviluppabile colla serie del TAYLOR, secondo le potenze di $z-a$, in tutti i punti z interni ad un circolo col centro nel punto a e di raggio $|a-1|$.

142. Dimostriamo ora che se una funzione monodroma finita e continua è sviluppabile nei punti z interni ad un circolo col centro in a in una serie ordinata secondo le potenze di $z-a$, questa serie è quella del Taylor.

Sia infatti

$$(1) \quad f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots + A_n(z-a)^n + \dots;$$

moltiplichiamo i due membri per $\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}$, ed integriamo lungo una linea chiusa σ racchiudente il punto a e tutta interna al circolo. Poichè possiamo applicare alle serie di potenze l'integrazione termine a termine (n. 140), avrem o

$$\int_{\sigma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = A_0 \int_{\sigma} \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} + A_1 \int_{\sigma} \frac{dz}{(z-a)^n} + \dots + A_n \int_{\sigma} \frac{dz}{z-a} + A_{n+1} \int_{\sigma} dz + \dots$$

ma tutti gli integrali nel secondo membro sono zero, fuori che

$$\int_{\sigma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad (\text{n. } 137), \text{ quindi}$$

$$\int_{\sigma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = A_n 2\pi i,$$

ossia, poichè $f(a) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}$, sarà $A_n = \frac{f(a)}{1 \cdot 2 \dots n}$, il

che mostra appunto che lo sviluppo (1) è quello del Taylor.

143. Sia $f(z)$ monodroma finita e continua in tutti i punti di una corona circolare di centro a e di raggi $R, R_1, (R > R_1)$, il contorno incluso. Indicando con s, s_1 le circonferenze dei cerchi di raggi R, R_1 e z' un punto qualunque interno alla corona avremo

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{z-z'} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1} \frac{f(z)}{z-z'} dz,$$

intendendo l'integrazione lungo i cerchi condotta in modo da lasciare a sinistra la relativa area circolare.

Il primo termine del secondo membro si trasforma, analogamente a quanto si fece al n. 141, nella serie

$$I_0 + I_1(z'-a) + I_2(z'-a)^2 + \dots + I_n(z'-a)^n + \dots$$

dove

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Per trasformare il secondo termine poniamo $z = \frac{z-a}{z'-a}$ nella formola (2) del n. 141; avremo

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-a} + \frac{z-a}{(z'-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(z'-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(z'-a)^n(z'-z)},$$

per cui

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{s_1} \frac{f(z)}{z'-z} dz = \frac{A_0}{z'-a} + \frac{A_1}{(z'-a)^2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(z'-a)^n} + R_n$$

dove

$$A_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1} f(z) (z-a)^r dz$$

e

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z'-a)^n} \int_{s_1} \frac{f(z)(z-a)^n}{z'-z} dz = \lambda R_1 \frac{f(\xi)}{z'-\xi} \left(\frac{\xi-a}{z'-a} \right)^n,$$

dove λ è il solito numero il cui modulo non supera l'unità e ξ è un qualche punto della circonferenza s_1 ; e, poichè $\left| \frac{\xi-a}{z'-a} \right| < 1$, è $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, cosichè si avrà lo sviluppo in serie

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{z'-z} dz = \frac{A_0}{z'-a} + \frac{A_1}{(z'-a)^2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(z'-a)^n} + \dots$$

Sostituendo nel secondo membro della (1), ed osservando che gli integrali I_n ed A_n non cambiano valore se la integrazione è condotta lungo una curva chiusa appartenente alla corona circolare e racchiudente il punto a , poniamo lungo un circolo di centro a o di raggio R_2 , dove $R > R_2 > R_1$, e di circonferenza s_2 , possiamo scrivere:

$$f(z') = I_0 + I_1(z'-a) + I_2(z'-a)^2 + \dots + I_n(z'-a)^n + \dots \\ + \frac{I_{-1}}{z'-a} + \frac{I_{-2}}{(z'-a)^2} + \dots + \frac{I_{-n}}{(z'-a)^n} + \dots$$

dove $I_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_2} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{r+1}}$

Analogamente a quanto notammo al n. 141, si riconosce

che questo sviluppo è valido anche se sui cerchi di raggio R_1, R_2 la funzione cessa di essere finita o continua.

Abbiamo quindi il seguente teorema, dovuto a P. A. LAURENT nel 1843:

Una funzione monodroma finita e continua entro una corona circolare di centro a , può nei punti interni z di essa, rappresentarsi mediante una serie che procede secondo le potenze intere, positive e negative, di $z - a$.

In modo completamente analogo a quello tenuto al n. 142 si dimostrerebbe che una tale funzione può svilupparsi in un sol modo, secondo le potenze positive e negative di $z - a$, cioè collo sviluppo del LAURENT.

Supponiamo che dentro al cerchio di raggio R_1 vi sia il solo centro a , nel quale la funzione divenga infinita o discontinua. Allora lo sviluppo del LAURENT varrà per quanto il punto z sia prossimo al centro a , giacchè potremo sempre descrivere col centro in a un cerchio di raggio R_2 che escluda il punto z , ed allora nella corona circolare coi raggi R_1, R_2 la $f(z)$ è monodroma finita e continua. In conseguenza: se a è un punto nel quale la $f(z)$ è infinita o discontinua e b è il punto più vicino ad a nel quale la $f(z)$ è pure infinita o discontinua, pei punti z interni al cerchio di centro a e di raggio $|a - b|$, escluso il centro a , la $f(z)$ è sviluppabile in un sol modo in serie ordinata secondo le potenze intere, positive e negative, di $z - a$.

144. Supponiamo il punto a sia un punto singolare (di infinito o di discontinuità) per la $f(z)$; varrà in un intorno del punto a (un cerchio col centro in a e di raggio $|b - a|$ se b è il punto singolare il più vicino ad a) lo sviluppo del LAURENT. Ora se la parte ordinata per le potenze negative di $z - a$ è un polinomio di grado n , la funzione ha nel punto a un infinito d'ordine n (vedi vol. I; pag. 71), e si dice allora che il punto a è un polo o un infinito o una singolarità polare della funzione. Invero, essendo allora nell'intorno di a

$$(1) \quad f(z) = \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(z-a)^n} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots$$

dove B_n è certamente diversa da zero, abbiamo

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z) = B_n,$$

che dice appunto che a è un punto ove la $f(z)$ diviene infinita di ordine n .

Dalla (1) scritta così

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \{B_n + B_{n-1}(z-a) + \dots + B_1(z-a)^{n-1} + A_0(z-a)^n + A_1(z-a)^{n+1} + \dots\}$$

si ricava

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^n}{B_n + B_{n-1}(z-a) + \dots + B_1(z-a)^{n-1} + A_0(z-a)^n + \dots},$$

dalla quale si riconosce che la inversa $\frac{1}{f(z)}$ è finita nel punto a , e propriamente nel punto a diviene infinitesima o zero di ordine n , giacchè $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z-a)^n} = \frac{1}{B_n}$.

Inversamente, se è verificata la (2), nello sviluppo di $f(z)$ nell'intorno di a la parte ordinata per le potenze negative di $z-a$ è un polinomio di grado n in $\frac{1}{z-a}$. Infatti, per la (2) si vede che in un certo intorno di a avremo

$$(z-a)^n f(z) = B_n + \varphi(z),$$

dove $\varphi(z)$ è funzione monodroma finita e continua, che si annulla per $z=a$, ed avrà quindi la forma

$$\varphi(z) = A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots + A_n(z-a)^n + \dots$$

cosicchè

$$f(z) = \frac{B_n}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + A_n + A_{n+1}(z-a) + \dots$$

Così pure si riconosce, senz'altro, che, se la inversa di $f(z)$

è finita nel punto a , la $f(z)$ è pure finita in a se $\frac{1}{f(z)}$ è diversa da zero in a , oppure è infinita di ordine n se la $\frac{1}{f(z)}$ ha in a uno zero d'ordine n .

145. Supponiamo ora che nello sviluppo di $f(z)$ nell'intorno del punto singolare a la parte ordinata per le potenze negative di $z-a$ sia una serie, di guisa che non valgano più le precedenti considerazioni. Cominciamo allora dal provare che in qualunque intorno comunque piccolo di a vi sono sempre dei punti nei quali $|f(z)|$ supera un qualunque numero positivo B prefissato comunque grande. Invero, z' indicando un punto di un intorno di a , consideriamo l'integrale $\int_s \frac{f(z) dz}{z-z'}$, dove s

indica una curva chiusa qualunque lungo la quale $|z-a| < |z'-a|$, poniamo un circolo di centro a di raggio R comunque piccolo, ed il cui sviluppo dà luogo alla serie colle potenze negative di $z'-a$. Abbiamo

$$\int_s \frac{f(z) dz}{z-z'} = \lambda 2\pi R \frac{f(\xi)}{\xi-z'},$$

dove λ è il solito numero il cui modulo non supera l'unità e ξ è un qualche punto della circonferenza s di raggio R col centro in a . Ora se $|f(z)|$ si mantenesse sempre minore di una certa quantità, e quindi anche $|f(\xi)|$, comunque impiccolisca R , potremmo sempre prendere R così piccolo che risultasse

$$\left| \int_s \frac{f(z) dz}{z-z'} \right| < \sigma, \text{ essendo } \sigma \text{ comunque piccolo e prefissato, così}$$

chè, essendo il nostro integrale indipendente da R , dovrebbe essere $\int_s \frac{f(z) dz}{z-z'} = 0$, ed allora la funzione $f(z)$ non avrebbe

alcuna singolarità in a , ma nell'intorno di a sarebbe monodroma finita e continua, contro il supposto.

Ciò premesso, osserviamo che anche $\frac{1}{f(z)}$ deve avere nel punto a una singolarità della stessa natura della $f(z)$, altrimenti questa in a sarebbe finita; e che anche $f(z) - A$, dove A è un numero qualunque, ha nel punto a una singolarità come la $f(z)$, cosicchè ciò avviene anche per la funzione

$\frac{1}{f(z) - A}$. Dato quindi un numero positivo comunque grande

$B = \frac{1}{\sigma}$, vi sono sempre dei punti, in un intorno comunque

piccolo di a , nei quali $\left| \frac{1}{f(z) - A} \right| > \frac{1}{\sigma}$, cioè nei quali

$$|f(z) - A| < \sigma;$$

cioè, assegnato un numero qualunque A , e preso un numero qualunque positivo arbitrariamente piccolo, in qualunque intorno del punto a vi sono sempre punti nei quali il modulo della differenza tra il valore che la $f(z)$ prende in essi ed il valore A è sempre minore di σ ; e si potrebbe anche dimostrare, ciò che qui ommettiamo, che la $f(z)$ prende in essi effettivamente il valore A , per modo che i punti nei quali la $f(z)$ prende un qualunque valore A si condensano nel punto a , cioè costituiscono un gruppo di punti di cui a è un punto limite.

I punti a , della natura ora studiata, vennero chiamati dal Weierstrass punti *singolari essenziali* della funzione. Essi erano già stati studiati dal Prof. CASORATI nella sua opera « *Teorica delle Funzioni di variabili complesse* » pubblicata nel 1868, pag. 430 e seguenti. Il CASORATI chiamava questi punti, punti di discontinuità; le precedenti considerazioni intorno ad essi sono analoghe a quelle da lui svolte nella citata opera.

Come esempio semplice consideriamo la funzione

$$e^{\frac{1}{z-a}} = 1 + \frac{1}{z-a} + \frac{1}{1.2(z-a)^2} + \frac{1}{1.2.3(z-a)^3} + \dots$$

che ha una singolarità essenziale nel punto a . Vediamo in quali

punti del piano questa funzione prende un valore qualunque $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, cioè in quali punti z è

www.libtool.com.cn

$$e^{\frac{1}{z-a}} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Posto $z = x + iy$, $a = \alpha + i\beta$, avremo

$$\frac{1}{z-a} = \frac{x-\alpha-i(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \log r + i(\varphi - 2k\pi),$$

(k intero qualunque), da cui

$$\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \log r, \quad \frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = -\varphi + 2k\pi,$$

dalle quali ricaviamo

$$(1) \quad x = \alpha + \frac{\log r}{(\log r)^2 + (2k\pi - \varphi)^2}, \quad y = \beta + \frac{2k\pi - \varphi}{(\log r)^2 + (2k\pi - \varphi)^2}.$$

ed avremo tutti i punti $z = x + iy$ nei quali $e^{\frac{1}{z-a}}$ assume il valore $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ attribuendo nelle (1) a k tutti i valori interi; e si vede che, al crescere di k , questi punti si avvicinano indefinitamente al punto $a = \alpha + i\beta$.

Residui. — Calcolo di alcuni integrali.

146. La $f(z)$, funzione monodroma in un campo C di cui sia il contorno, abbia dentro ad esso le singolarità polari o essenziali $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Descritti col centro in questi punti dei circoli $s_1, s_2, \dots, s_n$ interni al campo e racchiudenti ciascuno la sola singolarità che è nel centro, avremo

$$(1) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{s_1} f(z) dz + \int_{s_2} f(z) dz + \dots + \int_{s_n} f(z) dz.$$

Calcoliamo uno degli integrali del secondo membro, il pri-

mo $\int_{\gamma_1} f(z) dz$. In un intorno di a_1 abbiamo lo sviluppo

www.libtool.com.cn

$$f(z) = A_0 + A_1(z - a_1) + \dots + \frac{B_1}{z - a_1} + \frac{B_2}{(z - a_1)^2} + \dots$$

ed in conseguenza

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = B_1 \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - a_1} = 2\pi i B_1,$$

ed analogamente per gli altri.

CAUCHY chiamava *residuo* della $f(z)$ relativo al punto singolare a_1 il coefficiente di $\frac{1}{z - a_1}$ nello sviluppo di $f(z)$ nell'intorno del punto singolare a_1 , e vediamo così che il residuo relativo ad a_1 è uguale all'integrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - a_1}$ essendo σ

una curva chiusa qualunque appartenente all'intorno di a_1 e racchiudente a_1 ; e vediamo ancora che questo integrale è nullo se manca il termine in $\frac{1}{z - a_1}$ in detto sviluppo. La formola

(1) ci mostra che $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$ è uguale alla somma dei resi-

dui di $f(z)$ relativi ai punti singolari, in numero finito, che la $f(z)$ ha dentro al campo il cui contorno è γ .

I teoremi di CAUCHY sugli integrali e sui residui sono spesso utili pel calcolo effettivo di alcuni integrali definiti e per quello della somma di alcune serie. Diamone alcuni

ESEMPI

1) Si voglia calcolare il valore di $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{c^2 + x^2} dx$, dove x è variabile reale, a e c sono reali e $a > 0$.

Consideriamo la funzione
www.libtool.com.cn

$$f(z) = \frac{\cos(az) + i \operatorname{sen}(az)}{c^4 + z^4} = \frac{e^{iaz}}{c^4 + z^4},$$

dove $z = x + iy$. La $f(z)$ diviene infinita nei quattro punti $z = ce^{\frac{i\pi}{4}k+1}$ ($k=0, 1, 2, 3$).

Consideriamo il campo limitato dall'asse delle x e da un semicircolo s , al disopra di questo asse, di centro zero e di raggio b , che è destinato a crescere indefinitamente.

Dentro a questo campo la $f(z)$ ha i due punti di infinito $c_1 = ce^{\frac{i\pi}{4}}$, $c_2 = ce^{\frac{3\pi}{4}}$, cosichè avremo

$$(2) \quad \int_{-b}^b \frac{e^{iaz} dz}{c^4 + z^4} + \int_s \frac{e^{iaz} dz}{c^4 + z^4} = 2\pi i(\mu_1 + \mu_2),$$

dove μ_1, μ_2 sono i residui di $f(z)$ relativi ai punti c_1, c_2 ; e questa formola sussiste per quanto grande sia b . Ma al limite, per b crescente indefinitamente, il secondo integrale del primo membro è zero. Invero, posto $z = be^{i\theta}$, è

$$\int_s \frac{e^{iaz} dz}{c^4 + z^4} = i \int_0^\pi \frac{be^{i\theta} e^{iab(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} d\zeta}{c^4 + b^4 e^{4i\theta}} = i \int_0^\pi \frac{be^{-ab\operatorname{sen}\theta} e^{i(ab\cos\theta + \theta)} d\zeta}{c^4 + b^4(\cos 4\zeta + i\operatorname{sen} 4\zeta)},$$

ed il modulo della quantità sotto il segno integrale è

$$\frac{be^{-ab\operatorname{sen}\theta}}{|c^4 + b^4(\cos 4\zeta + i\operatorname{sen} 4\zeta)|} = \frac{b}{e^{ab\operatorname{sen}\theta} \sqrt{c^8 + b^8 + 2c^4 b^4 \cos 4\zeta}} < \frac{b}{e^{ab\operatorname{sen}\theta} b^2 \sqrt{b^4 - 2c^4}} < \frac{1}{b\sqrt{b^4 - 2c^4}},$$

quantità che può rendersi piccola come si vuole prendendo b sufficientemente grande; cosichè il limite dell'integrale è zero.

Calcoliamo adesso i residui μ_1 e μ_2 . Osserviamo che

$$e^{iax} = e^{ia(z-c_1)} e^{iac_1} = e^{iac_1} \left\{ 1 + ia(z-c_1) - \frac{a^2(z-c_1)^2}{1 \cdot 2} + \dots \right\}$$

e che sviluppando $\frac{1}{c^4 + z^4}$ in frazioni semplici è

$$\frac{1}{c^4 + z^4} = \frac{1}{4c^3} \frac{1}{z - c_1} + \psi(z)$$

dove $\psi(z)$ non contiene potenze negative di $z - c_1$, cosicchè il coefficiente di $\frac{1}{z - c_1}$ nell'intorno di c_1 , cioè μ_1 , è $\frac{e^{iac_1}}{4c_1^3}$, ossia

$$\mu_1 = \frac{e^{iac} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{4c^3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} = \frac{e^{\frac{iac}{\sqrt{2}}(1+i)}}{4c^3 (\sqrt{2}(i-1))}$$

Analogamente si trova

$$\mu_2 = \frac{e^{\frac{iac}{\sqrt{2}}(-1+i)}}{4c^3 (\sqrt{2}(1+i))}$$

e quindi

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{\sqrt{2}}{4c^3} e^{-\frac{ac}{\sqrt{2}}} \left(e^{\frac{iac}{\sqrt{2}}} \frac{1}{i-1} + e^{\frac{-iac}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+i} \right) = -\frac{i\sqrt{2}}{4c^3} e^{-\frac{ac}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{ac}{\sqrt{2}} + \sin \frac{ac}{\sqrt{2}} \right)$$

Passando al limite nella (2) per b infinito, ed osservando che nel primo integrale la z è la variabile reale x , si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{c^4 + x^4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) + i \sin(ax)}{c^4 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\frac{ac}{\sqrt{2}}}}{c^3} \left(\cos \frac{ac}{\sqrt{2}} + \sin \frac{ac}{\sqrt{2}} \right)$$

da cui $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{c^4 + x^4} dx = 0$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{c^4 + x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{-ac}{\sqrt{2}}}}{c^3} \left(\cos \frac{ac}{\sqrt{2}} + \sin \frac{ac}{\sqrt{2}} \right).$$

Osservando che $\int_{-\infty}^0 \frac{\cos(ax) dx}{c^4 + x^4} = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{c^4 + x^4}$ abbiamo

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{c^4 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{-ac}{\sqrt{2}}}}{c^3} \left(\cos \frac{ac}{\sqrt{2}} + \sin \frac{ac}{\sqrt{2}} \right).$$

2) Gli infiniti della funzione monodroma $\frac{1}{\sin^2 z}$ sono nei punti $z = k\pi$, dove k è un intero qualunque. Per determinarne i residui osserviamo che, dall'essere $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$, abbiamo, in un intorno di $z = 0$, $\frac{z}{\sin z} = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$, e poichè $\frac{z}{\sin z}$ non cambia valore cambiando z in $-z$, dovrà essere $A_1 = 0$, $A_3 = 0, \dots$, cosichè

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + A_2 z + A_4 z^3 + \dots$$

e da questa

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + 2A_2 + 2A_4 z^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{\sin^2(z - k\pi)} = \frac{1}{(z - k\pi)^2} + 2A^2 + 2A_4(z - k\pi)^2 + \dots;$$

mancando il termine in $\frac{1}{z - k\pi}$ nello sviluppo di $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$ nello intorno di $z = k\pi$, il residuo di $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$ relativo ai suoi punti di infinito è zero. In conseguenza, se s indica una curva chiusa qualunque, che non passi per alcun punto di infinito, è

$$\int_s \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z} = 0.$$

Si ricava da ciò che $\int_{z_0}^z \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z}$ è funzione monodroma di z , perchè qualunque sia la linea di integrazione da z_0 a z il valore dell'integrale è sempre lo stesso, cioè

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z} = \cot z_0 - \cot z.$$

3) Si voglia il valore dell'integrale

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)(z' - a)^m}{(z - z')(z - a)^m} dz, \quad (m \text{ intero positivo}),$$

esteso alla curva chiusa s , sulla quale e nel cui interno la $f(z)$ è monodroma finita e continua, e che racchiude i punti z' ed a .

Osservando che la funzione sotto l'integrale diviene infinita nei punti z' ed a , avremo $I = \mu_{z'} + \mu_a$, dove $\mu_{z'}$ e μ_a indicano i residui di detta funzione relativi a z' e ad a . Calcoliamo questi residui.

Nell'intorno di z' è

$$f(z) = f(z') + (z - z')f'(z') + \dots,$$

$$\frac{f(z)}{z - z'} = \frac{f(z')}{z - z'} + f'(z') + \frac{(z - z')}{1 \cdot 2} f''(z') + \dots,$$

$$\frac{(z' - a)^m}{(z - a)^m} = 1 - (z - z') \frac{1}{m(z' - a)} + \dots,$$

quindi $\mu_{z'} = f'(z')$.

Nell'intorno di a abbiamo

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(m-1)}(a) + \dots$$

$$\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z'-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{z'-a}} = \frac{1}{z'-a} \left\{ 1 + \frac{z-a}{z'-a} + \left(\frac{z-a}{z'-a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{z'-a} \right)^m + \dots \right\};$$

quindi il coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ nello sviluppo di $\frac{f(z)(z'-a)^m}{(z-z')(z-a)^m}$ ossia μ_a , è uguale a

$$-\left\{ f(a) + (z'-a)f'(a) + \frac{(z'-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(z'-a)^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(m-1)}(a) \right\}.$$

In conseguenza

$$I = f(z') - f(a) - (z'-a)f'(a) - \frac{(z'-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) - \dots - \frac{(z'-a)^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(m-1)}(a).$$

dalla qual formola si riconosce anche che I è il resto della serie del TAYLOR, secondo le potenze di $z'-a$, troncata al termine m^{esimo} , relativa alla funzione $f(z')$.

4) Si voglia la somma della serie

$$\frac{\sin a}{1^2 + \lambda^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 + \lambda^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 + \lambda^2} - \frac{4 \sin 4x}{4^2 + \lambda^2} + \dots$$

A tale scopo cercheremo una funzione che diventi infinita in infiniti punti coi residui uguali ai termini della serie, ed allora il limite dell'integrale di questa funzione esteso ad un contorno che ingrandendosi continuamente finisca per racchiudere tutti quei punti, moltiplicato per $\frac{1}{2\pi i}$, sarà uguale alla somma della serie. Nel nostro caso si trova facilmente questa

funzione di z ; essa è la funzione $\frac{\pi z \operatorname{sen}(xz)}{(z^2 + \lambda^2) \operatorname{sen}(\pi z)}$ che diviene infinita nei punti $z = 1, 2, 3, 4 \dots$ coi residui uguali e di segno contrario ai termini della serie, ed inoltre diviene infinita nei punti $i\lambda$ e $-i\lambda$. Prenderemo come linea di integrazione un contorno s formato da due rette parallele all'asse delle x condotte pei punti $y = h$, $y = -h$, dove h è numero reale positivo qualunque, da una retta parallela all'asse delle y condotta pel punto $x = h$ (e gioverà assumere allora $h = n + \frac{1}{2}$, n intero positivo), da due semicircoli descritti con centro nei punti $y = \lambda$, $y = -\lambda$ e di raggio ε , e dalle tre porzioni di asse delle y comprese tra questi due semicircoli e tra essi e le rette parallele all'asse delle x .

Integrando lungo questo contorno, lasciando l'area da esso racchiusa a sinistra, e facendo crescere indefinitamente h (facendo crescere n), l'integrale moltiplicato per $\frac{1}{2\pi i}$ è uguale a meno la somma della nostra serie.

Ora la parte di integrale, che si riferisce alle parti rettilinee di contorno sull'asse delle y , è zero, perchè esso è, posto $z = iy$,

$$-\int_h^{\lambda+\varepsilon} \frac{y \operatorname{sen}(xiy) dy}{(-y^2 + \lambda^2) \operatorname{sen}(\pi iy)} - \int_{\lambda-\varepsilon}^0 - \int_0^{-\lambda+\varepsilon} - \int_{-\lambda-\varepsilon}^{-h},$$

somma che riconosciamo subito essere zero cambiando y in $-y$ nei due ultimi integrali.

Supponendo x compreso tra $-\pi$ e π (esclusi $\pm\pi$) si vede anche che sono zero gli integrali estesi alle rette parallele all'asse delle x , quando si faccia crescere h indefinitamente. Poniamo $z = x + ih$ e dimostriamolo per l'integrale

$$1 = \int_h^0 \frac{(x + ih) \operatorname{sen}[x(x + ih)] dx}{[(x + ih)^2 + \lambda^2] \operatorname{sen}[\pi(x + ih)]} = - \int_0^h \frac{x + ih}{[(x + ih)^2 + \lambda^2]} \frac{e^{ixx} e^{-\alpha h} - e^{-ixx} e^{\alpha h}}{e^{ix\pi} e^{-\pi h} - e^{-ix\pi} e^{\pi h}} dx.$$

che è zero se $\alpha = 0$. Se α è diverso da zero, osserviamo che

www.libtool.com.cn

$$\left| \frac{x+ih}{(x+ih)^2 + \lambda^2} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{\sqrt{(x^2 - h^2 + \lambda^2)^2 + 4h^2x^2}} < \frac{h\sqrt{2}}{h^2 - \lambda^2}$$

$$\left| \frac{e^{ix\alpha} e^{-\alpha h} - e^{-ix\alpha} e^{\alpha h}}{e^{ix\pi} e^{-\pi h} - e^{-ix\pi} e^{\pi h}} \right| = \sqrt{\frac{e^{-2\alpha h} + e^{2\pi h} - 2 \cos 2\pi x}{e^{-2\pi h} + e^{2\pi h} - 2 \cos 2\pi x}}$$

$$< \sqrt{\frac{e^{-2\alpha h} + e^{2\pi h} + 2}{e^{-2\pi h} + e^{2\pi h} - 2}} = \frac{e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}}{e^{\pi h} - e^{-\pi h}} = \frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}} \frac{1 + e^{-2\alpha h}}{1 - e^{-2\pi h}},$$

cosicchè

$$|I| < \frac{h\sqrt{2}}{h^2 - \lambda^2} \frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}} \frac{1 + e^{-2\alpha h}}{1 - e^{-2\pi h}} \int_0^h dx = \frac{h^2\sqrt{2}}{h^2 - \lambda^2} \frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}} \frac{1 + e^{-2\alpha h}}{1 - e^{-2\pi h}}.$$

Al crescere di h l'ultimo termine ha per limite l'unità, se $\alpha > 0$, il termine $\frac{h^2\sqrt{2}}{h^2 - \lambda^2}$ ha per limite $\sqrt{2}$ e il termine $\frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}}$ ha per limite zero se $\alpha < \pi$. Ed allora $\lim_{h \rightarrow \infty} I = 0$. Lo stesso si proverebbe, in modo analogo, se $\alpha < 0$ e $|x| < \pi$.

Ed analogamente ancora si proverebbe che è zero l'integrale esteso da 0 a $-h$, quando h cresce indefinitamente.

Consideriamo ora, posto $z = h + iy$, l'integrale

$$I_1 = i \int_{-h}^h \frac{(h+iy) \operatorname{sen}[(h+iy)x]}{[(h+iy)^2 + \lambda^2] \operatorname{sen}[\pi(h+iy)]} dy,$$

dove $h = n + \frac{1}{2}$, e facciamo poi crescere h indefinitamente.

Osservando che $\operatorname{sen} \pi(h+iy) = (-1)^n \cos(\pi iy)$ e che

$$\left| \frac{h+iy}{(h+iy)^2 + \lambda^2} \right| < \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{(h^2 - y^2 + \lambda^2)^2 + 4h^2y^2}} < \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{(h^2 - y^2)^2 + 4h^2y^2}} < \frac{\sqrt{2}}{h},$$

abbiamo

$$|I_1| < \frac{1/2}{h} \int_{-h}^h \frac{\sqrt{e^{2\nu x} + e^{-2\nu x} - 2 \cos 2h x}}{e^{\pi \nu} + e^{-\pi \nu}} dy = \frac{2/2}{h} \int_0^h \frac{\sqrt{e^{2\nu x} + e^{-2\nu x} - 2 \cos 2h x}}{e^{\pi \nu} + e^{-\pi \nu}} dy$$

$$< \frac{2/2}{h} \int_0^h \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu x}}{e^{\pi \nu} + e^{-\pi \nu}} dy,$$

e poichè, come facilmente si riconosce, ha valore finito l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu x}}{e^{\pi \nu} + e^{-\pi \nu}} dy$ se x è compreso tra $-\pi$ e π , si vede

che si potrà rendere $|I_1|$ minore di qualunque numero positivo prefissato prendendo h sufficientemente grande, cosichè $\lim_{h \rightarrow \infty} I_1 = 0$.

Rimangono perciò solo i due integrali relativi ai due semicerchi; posto $z = i\lambda + \varepsilon e^{i\theta}$ l'uno di essi è

$$(3) \quad i\varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta}) \operatorname{sen} [x(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta})]}{[(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta})^2 + \lambda^2] \operatorname{sen} [\pi(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta})]} e^{i\theta} d\theta,$$

e l'altro si ricava da questo ponendovi $-i\lambda$ in luogo di $i\lambda$, nel quale ultimo integrale, cambiando in esso θ in $\theta + \pi$, i limiti si cangiano in $-\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{3\pi}{2}$ e la quantità sotto il segno diviene quella dell'integrale (3), cosichè la somma dei due integrali risulta

$$i\varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \frac{(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta}) \operatorname{sen} [x(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta})]}{[(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta})^2 + \lambda^2] \operatorname{sen} [\pi(i\lambda + \varepsilon e^{i\theta})]} e^{i\theta} d\theta,$$

che è uguale a $-2\pi i$ moltiplicato pel residuo della funzione $\frac{z \operatorname{sen}(xz)}{(z^2 + \lambda^2) \operatorname{sen}(\pi z)}$ relativo al punto $z = i\lambda$, cioè è uguale a

— $2\pi i \frac{\operatorname{sen}(ai\lambda)}{2\operatorname{sen}(\pi i\lambda)}$. Avremo dunque infine

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\pi z \operatorname{sen}(\alpha z)}{(z^2 + \lambda^2) \operatorname{sen}(\pi z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left\{ -2\pi i \frac{\operatorname{sen}(\alpha i\lambda)}{2\operatorname{sen}(\pi i\lambda)} \right\} = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{-\alpha\lambda} - e^{\alpha\lambda}}{e^{-\pi\lambda} - e^{\pi\lambda}}$$

e quindi otteniamo la somma della nostra serie, cioè

$$\frac{\pi}{2} \frac{e^{-\alpha\lambda} - e^{\alpha\lambda}}{e^{-\pi\lambda} - e^{\pi\lambda}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1^2 + \lambda^2} - \frac{2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2^2 + \lambda^2} + \frac{3 \operatorname{sen} 3\alpha}{3^2 + \lambda^2} - \frac{4 \operatorname{sen} 4\alpha}{4^2 + \lambda^2} + \dots,$$

valevole se $-\pi < \alpha < \pi$ e qualunque sia il numero reale λ .

ESERCIZI

1. Se $f(z)$ è funzione monodroma finita e continua in un circolo di raggio R e di centro z_0 , il contorno incluso, ed M è il massimo di $|f(z)|$ lungo la circonferenza del circolo, allora è $|f^n(z_0)| < \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot M}{R^n}$, dove, se $n=0$, cioè per la $f(z_0)$, si intende che $1 \cdot 2 \dots n$ si riduce ad *uno*.

2. Se $f(z, u)$ è funzione ad un sol valore finita e continua delle due variabili complesse z, u pei valori di z appartenenti ad un circolo di raggio R e di centro z_0 , e pei valori di u di un circolo di raggio R_1 e di centro u_0 , i contorni inclusi, ed M è il massimo di $|f(z, u)|$ per qualunque coppia di valori di z e u delle circonferenze di quei circoli, allora è

$$\left| \frac{\partial^{n+m} f(z_0, u_0)}{\partial z^n \partial u^m} \right| < (1 \cdot 2 \dots n)(1 \cdot 2 \dots m) \frac{M}{R^n R_1^m}.$$

3. Si provi, facendo uso del metodo ora seguito al n. 146, che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{a+b}, \text{ dove } x, a, b \text{ sono quantità reali. (In}$$

questo esercizio e nei seguenti $a, b, c, \dots$ indicheranno quantità reali, x, y variabili reali, z variabile complessa).

4. L'integrale $\int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ esteso alla circonferenza del
 circolo $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ è uguale a $-\frac{\pi i}{2}$.

5. Si ritrovi il valore di $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x} dx$ (Vedi pag. 201). Per-
 ciò si integri la funzione $\frac{e^{axi}}{z}$ lungo il contorno della mezza
 corona circolare, al disopra dell'asse delle x , limitata dai cir-
 coli $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, facendo crescere R indefinitamente
 e convergere r a zero.

6. $\int_0^{2\pi} e^{-\rho \operatorname{sen} \theta} \cos(\rho \cos \theta) d\theta = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} e^{-\rho \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen}(\rho \cos \theta) d\theta = 0$.
 (Si integri la funzione $\frac{e^{iz}}{z}$ lungo il cerchio di raggio $|\rho|$ col
 centro nell'origine).

In modo analogo si trova

$$\int_0^{2\pi} e^{-\rho \cos \theta} \cos(\rho \operatorname{sen} \theta) d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} e^{-\rho \cos \theta} \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen} \theta) d\theta = 0;$$

e generalmente, se n è numero intero,

$$\int_0^{2\pi} e^{-\rho \cos \theta} \cos(\rho \operatorname{sen} \theta + n\theta) d\theta = \begin{cases} (-1)^n \frac{2\pi \rho^n}{1 \cdot 2 \dots n} & \text{se } n \geq 0, \\ 0 & \text{se } n < 0, \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} e^{-\rho \cos \theta} \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen} \theta + n\theta) d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho \operatorname{sen} \theta} \cos(\rho \cos \theta + n\theta) d\theta = \begin{cases} (-1)^m \frac{2\pi \rho^n}{1 \cdot 2 \dots n} & \text{se } n=2m, \\ 0 & \text{» } n=2m+1, \\ 0 & \text{» } n < 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen}(\rho \cos \theta + n\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } n=2m \\ (-1)^m \frac{2\pi \rho^n}{1 \cdot 2 \dots n} & \text{» } n=2m+1 \\ 0 & \text{» } n < 0. \end{cases}$$

7. Se $f(z)$ è funzione monodroma finita e continua nel circolo di raggio uno col centro nell'origine, si ha, essendo a quantità anche complessa,

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - ae^{i\theta}} d\theta = \begin{cases} 2\pi f(0) & \text{se } |a| < 1 \\ 2\pi \left[f(0) - f\left(\frac{1}{a}\right) \right] & \text{» } |a| > 1. \end{cases}$$

In particolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - ae^{i\theta}} = \begin{cases} 2\pi & \text{se } |a| < 1 \\ 0 & \text{» } |a| > 1. \end{cases}$$

Si ricavi, se a è reale,

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - a \cos \theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } |a| < 1, \\ 0 & \text{» } |a| > 1, \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = 0.$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{ia - x} = \begin{cases} -2\pi i e^{-a} & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{» } a < 0, \end{cases} \quad \text{da cui si ricavano le}$$

formole altrove dimostrate (Vedi pag. 256)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

(Si integri la funzione $\frac{e^{iz}}{ia - z}$ lungo l'asse delle x da $-R$ a $+R$ e lungo il semicircolo di raggio R col centro in $z=0$ e si faccia crescere R indefinitamente; l'integrale lungo il semicircolo è zero, e per provare ciò lo si riduca ad un integrale in θ esteso da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e poi questo si spezzi in due uno da 0 a ε e l'altro da ε a $\frac{\pi}{2}$).

$$9. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}{c^2 \cos^2 x + d^2 \sin^2 x} dx = \pi \frac{a^2 d + b^2 c}{cd(c+d)}.$$

(Si integri la funzione $\frac{a^2 \cos^2 z + b^2 \sin^2 z}{c^2 \cos^2 z + d^2 \sin^2 z}$ lungo il contorno del rettangolo i cui lati sono $y=0$, $y=h$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, si osservi che sui lati $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ la funzione integranda prende gli stessi valori, e si faccia crescere h indefinitamente).

10. $\int_0^{\infty} e^{-(a+ib)x} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{(a+ib)^n}$, $n > 0$, $a > 0$, che comprende come caso particolare la nota formola

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n}$$

(Vedi pag. 261).

(La funzione $e^{-z} z^{n-1}$ è monodroma finita e continua nel campo limitato dalle rette $y=0$, $y=\frac{b}{a}x$ e dai circoli $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$, e situato nel primo quadrante degli assi. Si integri lungo il contorno, facendo crescere R e decrescere r , indefinitamente).

Si ricavino le formole

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \cos bx dx = \frac{\Gamma(n) \cos\left(n \arctg \frac{b}{a}\right)}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \sin bx dx = \frac{\Gamma(n) \sin\left(n \arctg \frac{b}{a}\right)}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ovvero

www.libtool.cn.

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho x \cos \theta} \cos(\rho x \sin \theta) x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n) \cos n\theta}{\rho^n},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho x \cos \theta} \sin(\rho x \sin \theta) x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n) \sin n\theta}{\rho^n},$$

dove $\rho > 0$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$11. \int_0^{\infty} e^{-(a+ib)^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2(a+ib)}, \quad a > 0, \quad |b| < a,$$

da cui

$$\int_0^{\infty} e^{-(a^2-b^2)x^2} \cos(2abx^2) dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{2(a^2+b^2)}, \quad \int_0^{\infty} e^{-(a^2-b^2)x^2} \sin(2abx^2) dx = \frac{b\sqrt{\pi}}{2(a^2+b^2)}.$$

$$12. \int_{i \log a}^{i \log a + 2\pi} \frac{dz}{2 - \cos z} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \quad \text{l'integrazione essendo eseguita lungo la retta } y = \log a, \text{ e dove } 1 < a < 2 + \sqrt{3}.$$

13. La somma della serie

$$\frac{\sin x}{1^2 - \lambda^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - \lambda^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - \lambda^2} - \frac{4 \sin 4x}{4^2 - \lambda^2} + \dots,$$

dove λ è numero reale qualunque non intero positivo e $-\pi < x < \pi$, è $\frac{\pi}{2} \frac{\sin(x\lambda)}{\sin(\pi\lambda)}$.

$$14. \frac{1}{2} x = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

dove $-\pi < x < \pi$.

15. Seguendo il metodo tenuto alla fine del n. 146 si provi che

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

V. — Equazioni differenziali.

Integrazione delle espressioni differenziali con due o più variabili.

147. Consideriamo la espressione differenziale con due variabili indipendenti x, y

$$(1) \quad Mdx + Ndy,$$

dove $M = M(x, y)$, $N = N(x, y)$ sono funzioni continue di x, y , insieme alle loro derivate prime, in un campo C . Se esiste una funzione $u(x, y)$ il cui differenziale totale du eguagli nel campo C la espressione (1), si dice che la (1) è un *differenziale esatto* o che è *integrabile*; la u più una costante arbitraria ne è allora l'*integrale generale* o *completo*, o la *primitiva generale* o *completa*; ed integrare la (1) significa appunto determinare la funzione u tale che sia $du = Mdx + Ndy$.

Ma non sempre esiste l'integrale della (1), ossia non sempre la (1) è un differenziale esatto. Affinchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che le funzioni M, N soddisfacciano in C alla relazione

$$(2) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Invero, la condizione è necessaria, perchè, ammessa l'esistenza della u tale che

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = Mdx + Ndy,$$

cioè tale che $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, abbiamo, da queste due ul-

time eguaglianze, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$; ma i secondi membri sono funzioni continue di x, y , per ipotesi, quindi le derivate nei primi membri sono uguali in C , e perciò $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

La condizione è sufficiente, cioè, supposto verificata la (2), vedremo ora che esiste una funzione u di x, y tale che

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Infatti, costruiamo la funzione di x, y

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y),$$

dove i punti (x, y) appartengono a C ed x_0 è tale che i punti (x_0, y) che vengono considerati appartengano pure a C . Questa funzione, qualunque sia la funzione $\varphi(y)$ di y , soddisfa, come si vede, alla prima delle (3). Ma potremo determinare $\varphi(y)$ in guisa che essa soddisfaccia pure alla seconda delle (3), giacchè, essendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y),$$

ossia, per la (2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y), \end{aligned}$$

basterà assumere $\varphi(y)$ tale che sia

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

cioè

$$\varphi(y) = \int N(x_0, y) dy.$$

Perciò la funzione

$$(4) \quad u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int N(x_0, y) dy + \text{costante}$$

od anche

$$(4') \quad u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

soddisfa le (3), cioè la (1) è un differenziale esatto e la (4) o (4') ne è l'integrale generale.

Si intende poi senz'altro come, se ci partissimo dalla funzione

$$u = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \psi(x),$$

che soddisfa alla seconda delle (3) qualunque sia $\psi(x)$, si potrebbe, procedendo analogamente, determinare la $\psi(x)$ in guisa che essa soddisfaccia anche alla prima delle (3), ottenendo così l'integrale sotto l'aspetto

$$(5) \quad u = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \int M(x, y_0) dx + \text{costante},$$

od anche

$$(5') \quad u = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx.$$

È quasi superfluo notare che due integrali qualunque della (1) non possono differire tra loro che per una costante, giacchè hanno lo stesso differenziale totale $Mdx + Ndy$.

Notiamo ancora che se $(x_0, y_0), (x, y)$ sono le coordinate di due punti qualunque m_0, m di C , ed s_1, s_2 due linee di C che uniscono questi due punti e tali che nella parte di piano C_1 da esse limitata non vi sia alcuna parte del contorno di C , allora, indicando con $(s) \int_{m_0}^m$ l'integrale da m_0 ad m lungo la linea s ,

in virtù del teorema di GREEN dimostrato al n. 100, è

www.libtool.com.cn

$$(s_1) \int_{m_0}^m (Mdx + Ndy) + (s_2) \int_m^{m_0} (Mdx + Ndy) = - \int_{c_1} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dC_1 = 0$$

e quindi

$$(s_1) \int_{m_0}^m (Mdx + Ndy) = (s_2) \int_{m_0}^m (Mdx + Ndy).$$

In conseguenza, se si suppone il contorno del campo C sia di un sol pezzo, per modo che tra due linee qualunque di C che uniscono due punti qualunque di C non vi possa essere alcuna parte del contorno, il valore dell'integrale $\int_{m_0}^m (Mdx + Ndy)$, se $Mdx + Ndy$ è un differenziale esatto, è indipendente dalla linea di integrazione, ed è quindi una funzione monodroma di x, y nel campo C. Essa coincide colla funzione u data dalle formole (4)', (5)', perchè, prendendo per linea di integrazione la linea formata dalle rette $Y = y_0$, $X = x$, ed essendo sulla prima $dy = 0$, sulla seconda $dx = 0$, si ha

$$\int_{m_0}^m (Mdx + Ndy) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy;$$

ed integrando lungo le rette $X = x_0$, $Y = y$, si ha

$$\int_{m_0}^m (Mdx + Ndy) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y) dx.$$

i cui secondi membri coincidono con quelli delle formole (5)', (4)'.

Riassumendo abbiamo:

Se M, N sono funzioni continue insieme alle loro derivate prime in un campo C, la condizione necessaria e sufficiente affinchè $Mdx + Ndy$ sia un differenziale esatto è $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; e quando questa è soddisfatta l'integrale della precedente espressione differenziale è, se il contorno del cam-

po è di un sol pezzo, la funzione di x, y

www.libtool.com.cn

$$u = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (M dx + N dy),$$

l'integrazione tra i punti (x_0, y_0) e (x, y) di C essendo condotta lungo una linea qualunque di C . In particolare si ha l'integrale sotto uno degli aspetti (4), (4)', (5), (5)'.

Si intende poi che gioverà scegliere i valori x_0, y_0 in modo che le quantità integrande da essi dipendenti riescano le più semplici possibili, e delle precedenti forme di integrali quella più facilmente calcolabile nel caso che si considera.

ESEMPI

1) Sia la espressione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy;$$

cosicchè $M = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $N = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; il campo in cui si considera è una parte qualunque del piano cui non appartenga la retta $y=0$.

Usando la formola (4) e prendendo $x_0=0$, abbiamo l'integrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \int \frac{dy}{y} + C_1 = \log(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + C_1 = \log C(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

2) La espressione

$$\frac{y^2 dx}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y dy}{x \sqrt{x^2 + y^2}}$$

è un differenziale esatto, ed il suo integrale, usando la formo-

la (5) ponendo $y_0 = 0$, si trova essere

www.libtool.com.cn

$$u = -\frac{1}{x} \int_0^y \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C_1 = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + C,$$

per tutti i punti del piano esclusa la retta $x = 0$.

3) Sia il differenziale esatto

$$\frac{2x^2 + y^2 + xy(2y + x) + y}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 1)} dx + \frac{2y^2 - x^2 + xy(2x - y) - x}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 1)} dy;$$

per averne l'integrale calcoliamo l'integrale $\int_{(x_0, 0)}^{(x, y)} (M dx + N dy)$ lungo l'asse delle x e lungo il circolo che passa pel punto (x, y) col centro nell'origine.

Perciò poniamo $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, ed osserviamo che l'integrale lungo l'asse delle x , per essere allora $x = \rho$, $dx = d\rho$, $y = 0$, $dy = 0$ si riduce a

$$\int_{x_0}^{\rho} \frac{2\rho^2}{\rho^2(\rho^2 + 1)} d\rho = \log(\rho^2 + 1) - \log(x_0^2 + 1),$$

e l'integrale lungo l'arco di circolo, osservando che su esso è $dx = -\rho \sin \theta d\theta$, $dy = \rho \cos \theta d\theta$ si riduce, dopo facili riduzioni a $-\int_0^{\theta} d\theta = -\theta$; cosicchè l'integrale generale della nostra espressione differenziale è

$$u = \log(\rho^2 + 1) - \log(x_0^2 + 1) - \theta = \log(x^2 + y^2 + 1) - \arctg \frac{y}{x} + C.$$

148. Consideriamo ora una espressione differenziale con tre variabili

$$M dx + N dy + P dz,$$

dove $M = M(x, y, z)$, $N = N(x, y, z)$, $P = P(x, y, z)$ sono fun-

zioni continue insieme alle loro derivate prime in un certo campo.

www.libtool.com.cn

La condizione necessaria e sufficiente affinché la precedente espressione sia un differenziale esatto, cioè affinché esista una funzione u il cui differenziale totale la eguagli, è che siano verificate le tre equazioni

$$(1) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

La condizione è sufficiente, perchè se esiste una funzione u tale che

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = P,$$

derivando la prima delle (2) rapporto ad y e a z , la seconda rapporto a x e a y , la terza rapporto a x e a y si ottengono sei equazioni dalle quali si hanno subito le (1).

La condizione è sufficiente. Invero, partiamoci della funzione

$$u = \int_{x_0}^x M dx + \varphi(y, z),$$

la quale, qualunque sia la funzione φ , soddisfa alla prima delle (2). Proviamo che si può determinare φ in guisa che soddisfaccia anche alla seconda e terza delle (2).

Abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial z} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ossia, per le (2),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x, y, z) - N(x_0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = P(x, y, z) - P(x_0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

e queste coincideranno colla seconda e terza delle (2) se si potrà determinare φ in guisa che sia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x_0, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = P(x_0, y, z).$$

Ora questo si può, perchè, per la terza delle (1),

$$N(x_0, y, z) dy + P(x_0, y, z) dz$$

è un differenziale esatto, il cui integrale è

$$\varphi = \int_{y_0}^y N(x_0, y, z) dy + \int P(x_0, y_0, z) dz.$$

Vediamo quindi che la data espressione è un differenziale esatto e che il suo integrale generale è

$$u = \int_{x_0}^x M dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y, z) dy + \int P(x_0, y_0, z) dz + C;$$

e si intende, senz'altro, come esso si possa anche avere sotto gli aspetti

$$u = \int_{x_0}^x M dx + \int_{x_0}^x P(x_0, y, z) dz + \int N(x_0, y, z_0) dy + C,$$

$$u = \int_{y_0}^y N dy + \int_{x_0}^x M(x, y_0, z) dz + \int P(x_0, y_0, z) dz + C, \text{ etc.}$$

ESEMPIO. $\frac{y}{y+z} dx + \frac{xz}{(y+z)^2} dy - \frac{xy}{(y+z)^2} dz$. Riconosciuto che sono verificate le condizioni di integrabilità, se si prende $x_0 = 0$ nella prima forma dell'integrale si ha subito

$$u = \int_0^x \frac{y}{y+z} dx + C = \frac{xy}{y+z} + C.$$

149. In modo completamente analogo si proverebbe che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la espressione differenziale

$$M_1 dx + M_2 dx_1 + \dots + M_n dx_n,$$

dove le M sono funzioni continue, colle derivate prime, delle variabili x in un certo campo, sia un differenziale esatto è che siano verificate le $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2} = \frac{\partial M_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_3} = \frac{\partial M_3}{\partial x_1}, \dots, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_3} = \frac{\partial M_3}{\partial x_2}, \dots, \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_2}$$

.

$$\frac{\partial M_{n-1}}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_{n-1}};$$

e l'integrale generale è dato da

$$u = \int_{x_1^0}^{x_1^1} M_1 dx_1 + \int_{x_2^0}^{x_2^1} M_2(x_1^0, x_2, \dots, x_n) dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3^1} M_3(x_1^0, x_2^0, x_3, \dots, x_n) dx_3 + \dots$$

$$+ \int M_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n) dx_n + C,$$

o da formole analoghe facilmente riconoscibili.

ESERCIZI

1. Se nel differenziale esatto $Mdx + Ndy$ si cambiano le variabili x, y in u, v colle formole $x = x(u, v), y = y(u, v)$, dove le x, y ammettono derivate seconde, la nuova espressione differenziale in u, v è pure un differenziale esatto.

$$2. du = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right), \quad u = \log \frac{x}{y} + \arctg \frac{x}{y} + C;$$

$$du = \frac{(x-2y)dx + ydy}{(y-x)^2}, \quad u = \log(x-y) + \frac{y}{x-y} + C;$$

$$du = \left(\operatorname{tg} y - \frac{y}{\cos^2 x} \right) dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} - \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} y \right) dy,$$

$$u = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x - \cos y + C;$$

$$du = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} + \frac{2y}{\operatorname{sen}(2xy)} \right) dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{2x}{\operatorname{sen}(2xy)} + \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} \right) dy,$$

$$u = \frac{x}{y} + \log \operatorname{tg}(xy) - e^{\frac{y}{x}} + C;$$

$$du = \frac{y^2 dx - xy dy}{(x+y)^2 \sqrt{y^2 + 2xy}}, u = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{x+y} + \frac{\sqrt{y^2 + 2xy}}{x+y} + C.$$

$$3. du = \frac{a}{y} dx - \frac{ax + bz}{y^2} dy + \frac{b}{y} dz, u = \frac{ax + bz}{y} + C;$$

$$du = \left[\frac{\sqrt{z+y}}{(x+z)\sqrt{2x-y+z}} - \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x^2} \right] dx + \left[\frac{y}{x\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z+y}\sqrt{2x-y+z}} \right] dy \\ + \left[\frac{z}{x\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{x-y}{x+z} \frac{1}{\sqrt{z+y}\sqrt{2x-y+z}} \right] dz, \\ u = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x-y}{x+z} + \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} + C.$$

4. Se z è funzione di x, y definita dalla equazione

$$z = x\varphi(z) + y\psi(z),$$

l'espressione

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \frac{\partial z}{\partial x} [\varphi(z) dx + \psi(z) dy]$$

è un differenziale esatto il cui integrale è $u = \int f(z) dz + C$.

5. Se X_0, X_1, X_2 sono funzioni razionali di x_0, x_1, x_2 e si pone

$$x_0 = (x_0 + z_1 + z_2)^3, x_1 = (x_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2)^3, x_2 = (x_0 + \omega^2 z_1 + \omega z_2)^3,$$

dove ω è una radice primitiva terza dell'unità, la espressione

differenziale

$$X_0 dx_0 + X_1 dx_1 + X_2 dx_2$$

si trasforma nella espressione

$$\varphi(z_0, z_1, z_2) dz_0 + \varphi(z_1, z_2, z_0) dz_1 + \varphi(z_2, z_0, z_1) dz_2,$$

dove φ è simbolo di una certa funzione razionale, e la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia un differenziale esatto

$$\text{è la sola equazione } \frac{\partial \varphi(z_0, z_1, z_2)}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi(z_1, z_2, z_0)}{\partial z_0}.$$

In generale: Se $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ sono funzioni razionali di $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, e si pone

$$x_k = (z_0 + \omega^k z_1 + \omega^{2k} z_2 + \dots + \omega^{(n-1)k} z_{n-1})^n, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

la espressione differenziale

$$X_0 dx_0 + X_1 dx_1 + \dots + X_{n-1} dx_{n-1}$$

si trasforma nella espressione

$$\varphi(z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) dz_0 + \sum_{m=1}^{m=n-1} \varphi(z_m, z_{m+1}, \dots, z_{n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) dz_m,$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia un differenziale esatto è che siano verificate le $\frac{n}{2}$ (se n è pari), o le

$\frac{n-1}{2}$ (se n è dispari) equazioni

$$\frac{\partial \varphi(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial z_s} = \frac{\partial \varphi(z_s, z_{s+1}, \dots, z_{n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{s-1})}{\partial z_0},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \text{ se } n \text{ è pari} \\ s = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ se } n \text{ è dispari.} \end{array} \right.$$

150. *Equazione differenziale è una relazione tra una o più variabili, una o più funzioni incognite di queste variabili, e le derivate di queste funzioni.*

Distinguiamo due specie di equazione differenziali.

1. *Equazioni differenziali ordinarie*, o semplicemente *equazioni differenziali*; sono quelle che legano una o più funzioni di una sola variabile indipendente e le loro derivate; una equazione differenziale dicesi d'ordine n se contiene derivate d'ordine n , senza contenere delle derivate d'ordine superiore ad n .

2. *Equazioni a derivate parziali*; sono quelle che legano tra loro una o più funzioni di due o più variabili indipendenti e le loro derivate parziali; una equazione a derivate parziali dicesi d'ordine n se contiene derivate parziali d'ordine n , senza contenere delle derivate parziali d'ordine superiore ad n .

È quasi superfluo notare che una equazione differenziale potrà non contenere esplicitamente alcune o tutte le funzioni, alcune o tutte le variabili indipendenti, ma deve contenere esplicitamente una derivata almeno.

Ad esempio $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$, che scriveremo anche così: $y'' + 3xy' + y^2 = 0$, e $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + xy = 0$ sono equazioni differenziali di secondo e primo ordine; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + u = 0$ sono equazioni a derivate parziali di secondo e terzo ordine.

151. Occupiamoci delle equazioni differenziali ordinarie, cominciando da quelle di primo ordine tra due variabili x, y il cui tipo generale è

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \text{ o } f(x, y, y') = 0.$$

Vediamo primieramente come possano aver origine equazioni di questa forma. Sia $\varphi(x, y, c) = 0$ una equazione, dove c indica una costante alla quale si possa attribuire qualunque valore, o almeno qualunque valore appartenente ad un certo campo di valori, e sia φ tale che $\varphi = 0$, per ognuno di quei valori di c , definisca la y come funzione di x , in un certo intervallo, che ammetta derivata y' , la quale sarà data dalla

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0. \text{ E propriamente, se } x_0, y_0, c_0 \text{ sono valori di}$$

x, y, c pei quali sia $\varphi(x_0, y_0, c_0) = 0$, noi supponiamo che in un certo campo C di valori di x, c , cui appartenga (x_0, c_0) come punto interno, la $\varphi = 0$ definisca y come funzione continua e che ammette derivata rapporto ad $x, y = y(x, c)$, di x, c che in (x_0, c_0) prenda il valore y_0 ; e supponiamo inoltre che in un certo campo C_1 per x, y , cui appartenga x_0, y_0 come punto interno, la $\varphi = 0$ definisca anche c come funzione $c = \psi(x, y)$ continua di x e y che in (x_0, y_0) prenda il valore c_0 . Ora si riconosce subito, stante la continuità delle funzioni $y = y(x, c)$, $c = \psi(x, y)$, che, restringendo ove occorra il campo C_1 , i campi C e C_1 sono legati tra loro in guisa che ad un punto (x_1, y_1) di C_1 corrisponde un punto (x_1, c_1) di C , essendo $c_1 = \psi(x_1, y_1)$ e dove $y_1 = y(x_1, c_1)$.

Noi abbiamo scelto arbitrariamente i valori x_1, y_1 nel campo C_1 , cosicchè, ove siano per la φ soddisfatte le condizioni ora poste, l'arbitrarietà della c porta per conseguenza che si possa scegliere arbitrariamente il valore y_1 della funzione y , definita dalla $\varphi = 0$, che debba corrispondere al valore x_1 di x , ossia, che si possa determinare il valore di c in modo che per $x = x_1$ la y assuma il valore prefissato y_1 , entro certi intervalli per x , per y e per c .

Ora se dalle due equazioni

$$\varphi(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

noi eliminiamo la costante c otterremo una equazione della forma $f(x, y, y') = 0$, tale che la y definita dalla $\varphi = 0$, e qua-

lunque sia c , renderà identicamente zero la $f(x, y, y')$ sostituendo in questa per y e y' quella funzione e la sua derivata.

152. Data una equazione differenziale $f(x, y, y')=0$, *integrarla* o *risolverla* significa trovare la forma che bisogna attribuire alla funzione y di x , affinchè questa equazione si riduca ad una identità; ma, più generalmente ed ordinariamente, integrare o risolvere una equazione differenziale significa trovare una relazione $\varphi(x, y, c)=0$ tra x, y ed una costante c , tale che, soddisfacendo la $\varphi(x, y, c)$ alle condizioni precedentemente po-

sta per la φ , eliminando c tra la $\varphi=0$ e la $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ si ottenga la equazione proposta $f(x, y, y')=0$, o una equazione il cui primo membro sia il prodotto di $f(x, y, y')$ per un fattore che non contenga y' , e tale che la funzione y di x e c , che viene definita dalla $\varphi=0$, soddisfaccia alla $f=0$ qualunque sia c , e si possa determinare c in modo che per un valore arbitrario $x=x_1$ la y assuma un valore prefissato y_1 , intendendo sempre che, secondo la natura della equazione differenziale che si considera, la variabilità di x, y, c potrà essere illimitata o limitata a certi campi. Ed allora la equazione $\varphi(x, y, c)=0$ chiamasi la *equazione integrale generale* o *completa*, o la *equazione primitiva generale* o *completa*, o la *soluzione generale* della equazione differenziale proposta, e la funzione y che viene definita dalla $\varphi(x, y, c)=0$, che in certi casi potrà essere già risolta rapporto ad y cioè avere la forma $y=\psi(x, c)$, chiamasi l'*integrale generale* o *completo*, o la *primitiva generale* o *completa* o la *soluzione generale* della equazione differenziale proposta; notando che spesso chiamasi semplicemente integrale generale la equazione integrale generale $\varphi(x, y, c)=0$. E notiamo ancora che una equazione differenziale si ritiene come integrata o risolta, quando il problema è ridotto alle quadrature, quando, cioè, la funzione $\varphi(x, y, c)$ o la espressione di y per x contenga degli integrali di differenziali in y o in x , anche se le integrazioni non si sappiano eseguire in termini finiti.

Attribuendo alla costante c valori particolari si hanno

degli *integrali particolari* della equazione differenziale proposta. www.libtool.com.cn

ESEMPIO. Mediante la derivazione, dall'equazione $C^2 + Cy^2 - x^2 = 0$ otteniamo $Cyy' = x$, ed eliminando C , si ha la equazione differenziale $\frac{x^2}{y^2 y'^2} - \frac{y^2}{yy'} - x^2 = 0$ ossia $xy^2 y'^2 - y^2 y' - x = 0$.

La equazione $C^2 + Cy^2 - x^2 = 0$ ne è la equazione integrale o integrale generale, e i rami della y , $y = \pm \frac{\sqrt{x^2 - C^2}}{\sqrt{C}}$, definiti da essa costituiscono ciascuno l'integrale generale. Notiamo che la equazione differenziale può ridursi alla forma

$$(2xyy' - y^2 - \sqrt{y^4 + 4x^2})(2xyy' - y^2 + \sqrt{y^4 + 4x^2}) = 0$$

e che $y = \frac{\sqrt{x^2 - C^2}}{\sqrt{C}}$ soddisfa alla equazione

$$2xyy' - y^2 - \sqrt{y^4 + 4x^2} = 0,$$

$y = -\frac{\sqrt{x^2 - C^2}}{\sqrt{C}}$ alla $2xyy' - y^2 + \sqrt{y^4 + 4x^2} = 0$.

Dimostrazione dell'esistenza dell'integrale generale per le equazioni differenziali di primo ordine.

153. Se la equazione differenziale di primo ordine che si considera non è già della forma $y' = \varphi(x, y)$, ma bensì del tipo generale $f(x, y, y') = 0$, supponiamo che la equazione $f = 0$ definisca uno o più rami y' come funzioni di x, y , in guisa che si possa considerare f come il prodotto di più fattori della forma $y' - \varphi(x, y)$.

Per dimostrare quindi che ogni equazione differenziale di primo ordine ammette, sotto certe condizioni, l'integrale generale, basterà provarlo per le equazioni della forma $y' - \varphi(x, y) = 0$.

Supponiamo anche che le variabili x, y siano complesse; abbiamo allora il seguente teorema dovuto a CAUCHY:

Siano x_0, y_0 due costanti qualunque, e sia $\varphi(x, y)$ funzione univalente continua con derivate parziali finite

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ per tutti i valori di x, y tali che $|x - x_0| < R, |y - y_0| < R_1$; allora esiste una unica funzione y di x monodroma e continua entro un certo circolo col centro in x_0 , che soddisfa ivi alla equazione differenziale $y' = \varphi(x, y)$, e che per $x = x_0$ assume il valore y_0 .

Infatti, le derivate successive di una funzione $y = y(x)$ che per $x = x_0$ assume il valore $y_0 = y(x_0)$ e che in un intorno di x_0 soddisfa alla equazione $y' = \varphi(x, y)$, si ottengono dalle formole

$$(1) \quad \begin{cases} y' = \varphi(x, y) \\ y'' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' \\ y''' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'' \\ \dots \end{cases}$$

ponendo in esse $x = x_0, y = y_0$; indichiamole con $y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0), \dots$. Se questa funzione è monodroma continua in quell'intorno essa non potrà essere che l'unica funzione

$$(2) \quad y = y(x_0) + (x - x_0) y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{2 \cdot 3} y'''(x_0) + \dots$$

Il teorema rimarrà perciò completamente dimostrato se proveremo che la serie, nel secondo membro della (1), ora costruita, è convergente per tutti i punti x interni ad un certo circolo di raggio r col centro in x_0 , e che la funzione y data dalla (2) soddisfa alla equazione $y' = \varphi(x, y)$.

Ora, indicato con M il massimo di $|\varphi(x, y)|$ pei punti x del circolo di raggio R col centro in x_0 e pei punti y del circolo

di raggio R_1 col centro in y_0 , costruiamo la funzione

www.libtool.com.cn

$$(3) \quad \psi(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) \left(1 - \frac{Y - y_0}{R_1}\right)}$$

e consideriamo la equazione differenziale

$$(4) \quad Y' = \psi(x, Y),$$

che possiamo anche scrivere così:

$$\left(1 - \frac{Y - y_0}{R_1}\right) Y' - \frac{M}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0,$$

in modo che si vede come la si ottenga colla derivazione rispetto ad x dalla equazione

$$(Y - y_0) - \frac{1}{2R_1} (Y - y_0)^2 + MR \log \left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) = C,$$

che ne è così la equazione integrale generale. Ponendo $C = 0$, uno dei due valori di Y che essa definisce, cioè

$$(5) \quad Y = y_0 + R_1 - \sqrt{R_1} \sqrt{R_1 + 2MR \log \left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)},$$

assume per $x = x_0$ il valore $Y = y_0$, ed è funzione *monodroma* e continua di x per tutti i punti x interni ad un circolo col centro in x_0 , che non contenga nell'interno alcun punto nel quale la quantità sotto il radicale si annulli, cioè il punto valore $x = x_0 + R \left(1 - e^{-\frac{R_1}{2MR}}\right)$. Cosichè pei punti interni al circolo di raggio $r = R \left(1 - e^{-\frac{R_1}{2MR}}\right)$ col centro in x_0 , la (5) è una funzione monodroma e continua, che soddisfa alla (4), che per $x = x_0$ assume il valore $Y = y_0$ che avrà in questo cir-

$$(6) \quad Y = y_0 + (x - x_0) Y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} Y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{2 \cdot 3} Y'''(x_0) + \dots$$

dove i coefficienti $Y'(x_0)$, $Y''(x_0)$,... si ricavano dalle equazioni

$$(7) \quad \begin{cases} Y'(x) = \psi(x, Y) \\ Y''(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} Y' \\ Y'''(x) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial Y} Y' + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} Y'^2 + \frac{\partial \psi}{\partial Y} Y'' \\ \dots \end{cases}$$

ponendovi $x = x_0$, $Y = y_0$.

Osservando che dalla (3) si ha

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial Y^m} = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{R^n} \frac{1 \cdot 2 \dots m}{R_1^m} \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{Y - y_0}{R_1}\right)^{m+1}}$$

nella quale ove n o m sia zero si intenderà sostituita l'unità in luogo del prodotto $1 \cdot 2 \dots n$, o $1 \cdot 2 \dots m$, abbiamo

$$\frac{\partial^{n+m} \psi(x_0, y_0)}{\partial x^n \partial Y^m} = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{R^n} \frac{1 \cdot 2 \dots m}{R_1^m} M;$$

d'altra parte è (Esercizio 2 a pag. 428)

$$\left| \frac{\partial^{n+m} \psi(x_0, y_0)}{\partial x^n \partial y^m} \right| < \frac{1 \cdot 2 \dots n}{R^n} \frac{1 \cdot 2 \dots m}{R_1^m} M,$$

quindi

$$(8) \quad \left| \frac{\partial^{n+m} \varphi(x_0, y_0)}{\partial x^n \partial y^m} \right| < \frac{\partial^{n+m} \psi(x_0, y_0)}{\partial x^n \partial Y^m}.$$

Ora dalla prima delle (1) ricaviamo $|y'(x_0)| = |\varphi(x_0, y_0)| < M$, e dalla prima delle (7) $Y'(x_0) = M$, cosicchè $|y'(x_0)| < Y'(x_0)$; dalla seconda delle (1)

$$|y''(x_0)| \leq \left| \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \right| |y'(x_0)|$$

e dalla seconda delle (7)

$$Y''(x_0) = \frac{\partial^2 \varphi(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} Y'(x_0),$$

e perciò, in virtù della (8) e poichè $|y'(x_0)| < Y'(x_0)$, risulta $|y''(x_0)| < Y''(x_0)$; e così, analogamente, dalla terza delle (1) e dalle (7) risulterebbe $|y'''(x_0)| < Y'''(x_0)$ ed in generale

$$|y^{(n)}(x_0)| < Y^{(n)}(x_0).$$

Perciò, i moduli dei termini della serie (2) essendo, a partire dal secondo, minori dei moduli dei termini della (6), la quale è convergente finchè $|x - x_0| < r$, risulta che la (2) è assolutamente convergente finchè $|x - x_0| < r$.

Rimane ora solo da provare che la funzione y di x , definita dalla (2), soddisfa alla equazione differenziale $y' = \varphi(x, y)$.

Ora, poichè possiamo derivare termine a termine la (2), è

$$(9) \quad y' = y'(x_0) + (x - x_0) y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} y'''(x_0) + \dots$$

Sostituiamo poi il valore (2) di y nella $\varphi(x, y)$; osserviamo che $r < R$, e che, se, per qualunque valore di x tale che $|x - x_0| < r$ pel valore di y dato dalla (2) non fosse sempre $|y - y_0| < R_1$, esisterà però, essendo la y continua, un valore $r_1 < r$ tale che per $|x - x_0| < r_1$ sarà sempre $|y - y_0| < R_1$; in conseguenza, finchè $|x - x_0| < r_1$, la $\varphi(x, y)$ è funzione monodroma e continua di x e sviluppabile perciò colla serie del TAYLOR, cioè

$$(10) \quad \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0, y_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

dove, avendo posto

www.libtool.com.cn

$$\varphi'(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y',$$

$$\varphi''(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y''$$

.

$$\text{è } \varphi(x_0, y_0) = y'(x_0), \varphi'(x_0, y_0) = y''(x_0), \varphi''(x_0, y_0) = y'''(x_0), \dots$$

In conseguenza il secondo membro della (10) coincide con quello della (9) e, finchè $|x - x_0| < r_1$, è $y' = \varphi'(x, y)$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Integrazione delle equazioni differenziali di primo ordine risolte rapporto alla derivata.

154. Non sappiamo integrare una equazione differenziale di primo ordine nella sua forma generale $f(x, y, y') = 0$, ma solo equazioni di tipi speciali.

Cominciamo dalle equazioni risolte rapporto alla derivata, cioè da quelle che possono ridursi alla forma $y' = \varphi(x, y)$, o

$$y' = - \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \text{ o } Mdx + Ndy = 0.$$

Separazione delle variabili. Se M è funzione della sola x , N funzione della sola y si ha subito l'integrale generale della equazione $Mdx + Ndy = 0$, cioè $\int Mdx + \int Ndy = C$ od anche $\int_{x_0}^x Mdx + \int_{y_0}^y Ndy = C_1$. Si dice allora che nella equazione le variabili sono separate.

Se è $M = XY$, $N = X_1 Y_1$ dove X, X_1 sono funzioni della sola x ; Y, Y_1 della sola y , allora dalla equazione $XYdx + X_1 Y_1 dy = 0$, nella quale le variabili non sono ancora separate,

ricaviamo $\frac{X}{X_1} dx + \frac{Y_1}{Y} dy = 0$, nella quale esse lo sono, e si ha l'integrale generale $\int \frac{X}{X_1} dx + \int \frac{Y_1}{Y} dy = C$.

ESEMPI

1) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$,

ossia

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0;$$

l'integrale è

$$\int \frac{1+x}{x} dx + \int \frac{1-y}{y} dy = C_1, \text{ cioè } \log(xy) + x - y = C_1$$

od anche, posto $C_1 = \log C$,

$$xy = Ce^{y-x}.$$

2) Nella equazione $(x+y^2)dx + 2xydy = 0$ le variabili non si possono separare, ma, posto $y^2 = u$, essa diviene $x dx + u dx + x du = 0$, ossia $x dx + d(ux) = 0$, nella quale le variabili sono separate (si consideri ux come una nuova variabile) e questa dà l'integrale $\frac{x^2}{2} + ux = C_1$, ossia $x^2 + 2ux = C$, e quindi si ha l'integrale generale della proposta, $x^2 + 2y^2x = C$.

3) Dalla equazione

$$(1) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

ricaviamo subito

$$(2) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

$$\text{www.libtool.com.cn} \quad \text{arc sen } x + \text{arc sen } y = C;$$

ma l'integrale generale può trovarsi anche sotto forma algebrica. Invero, dalla equazione differenziale proposta scritta così:

$$dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0$$

ricaviamo, integrando per parti ciascun termine del primo membro,

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy \left(\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = C_1,$$

ossia, per la (1),

$$(3) \quad x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C_1,$$

che è l'integrale in forma algebrica.

Esso esprime la stessa relazione tra x e y che la (2).

Possiamo ricavare dal confronto dell'integrale nelle due forme (2), (3) la nota formola di addizione per la funzione circolare *seno*. Infatti, posto $\text{arc sen } x = u$, $\text{arc sen } y = v$, da cui $x = \text{sen } u$, $y = \text{sen } v$, $\sqrt{1-x^2} = \cos u$, $\sqrt{1-y^2} = \cos v$, le (2), (3) divengono

$$(4) \quad u + v = C, \quad \text{sen } u \cos v + \text{sen } v \cos u = C_1;$$

indicando con w il valore di y che corrisponde ad $x = 0$, si ha dalla (2) $\text{arc sen } w = C$, da cui $w = \text{sen } C = \text{sen } (u + v)$, e dalla (3) $w = C_1 = \text{sen } (u + v)$, e la seconda delle (4) diviene perciò

$$\text{sen } (u + v) = \text{sen } u \cos v + \text{sen } v \cos u.$$

4) Anche la equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0,$$

della quale si ha subito l'integrale in forma trascendente!

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = C,$$

dove le integrazioni non si fanno eseguire in termini finiti, possiede pure l'integrale in forma algebrica.

Per trovarlo poniamo $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = dz$ ed in conseguenza, per la (5), $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = -dz$, da cui, indicate con apici le derivazioni rapporto a z , abbiamo

$$x' = \sqrt{1-x^4}, \quad y' = -\sqrt{1-y^4},$$

e da queste

$$x'' = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}} x' = -2x^3, \quad y'' = -2y^3, \quad yx'' - xy'' = 2xy(y^2 - x^2),$$

$$y^2 x'^2 - x^2 y'^2 = (1 + x^2 y^2)(y^2 - x^2), \quad \frac{yx'' - xy''}{y^2 x'^2 - x^2 y'^2} = \frac{2xy}{1 + x^2 y^2},$$

dalla quale ultima, scritta nella forma:

$$\frac{yx'' - xy''}{yx' - xy'} = \frac{2xy(yx' + xy')}{1 + x^2 y^2},$$

si ricava

$$\frac{d}{dz} \log(yx' - xy') = \frac{d}{dz} (1 + x^2 y^2),$$

e da questa, integrando,

$$\log(yx' - xy') = \log(1 + x^2 y^2) + \log C_1, \quad \text{ossia} \quad \frac{yx' - xy'}{1 + x^2 y^2} = C_1.$$

$$(7) \quad \frac{y\sqrt{1-x^4} + x\sqrt{1-y^4}}{1+x^2y^2} = C_1,$$

che è il cercato integrale in forma algebrica.

Poniamo ora $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = u$, e consideriamo il limite su-

periore x dell'integrale come funzione dell'integrale stesso, cioè facciamo, come si dice, l'inversione dell'integrale, ed indichiamo con $\varphi(u)$ la funzione x di u , $x = \varphi(u)$; noi veniamo così a definire una nuova trascendente $\varphi(u)$: il confronto dell'integrale nelle due forme (6), (7) ci permette di trovare la formola di addizione relativa a questa nuova trascendente, cioè la formola che esprime $\varphi(u+v)$ mediante $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$. In-

fatti posto $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = v$ da cui $y = \varphi(v)$, le (6), (7) divengono

$$(8) \quad u+v=C, \quad \frac{\varphi(u)\sqrt{1-\varphi(v)^4} + \varphi(v)\sqrt{1-\varphi(u)^4}}{1+\varphi(u)^2\varphi(v)^2} = C_1;$$

indicando con w il valore di y che corrisponde ad $x=0$, la

(6) ci dà $\int_0^w \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = C$, da cui $w = \varphi(C) = \varphi(u+v)$, e la (7)

$w = C_1 = \varphi(u+v)$, ed in conseguenza la seconda della (8) diviene

$$\varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\sqrt{1-\varphi(v)^4} + \varphi(v)\sqrt{1-\varphi(u)^4}}{1+\varphi(u)^2\varphi(v)^2}$$

che è la formola d'addizione richiesta.

155. Equazioni omogenee. — Sono quelle della forma $Mdx + Ndy = 0$ ossia $M + Ny' = 0$, dove M , N sono funzioni

omogenee di x, y dello stesso grado r ; cosichè essendo $M = x^r \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $N = x^r \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, si potrà scrivere la proposta equazione così:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Poniamo ora $\frac{y}{x} = z$, da cui $y = zx$, $dy = xdz + zdx$, ed avremo

$$[\varphi(z) + z\psi(z)] dx + x\psi(z) dz = 0;$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$(1) \quad \log x + \int \frac{\psi(z) dz}{\varphi(z) + z\psi(z)} = C,$$

la quale, ove si eseguisca in termini finiti la integrazione e si sostituisca per x il suo valore $\frac{y}{z}$, ci dà l'integrale generale della proposta equazione espresso in x, y .

ESEMPI

1) La equazione $2xy + y^2 y' = x^2 y'$, che possiamo scrivere: $(y^2 - x^2) dy + 2xy dx = 0$, è omogenea. Essendo $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 2\frac{y}{x}$, $\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1$, la (1) diviene: $\log x + \int \frac{z^2 - 1}{z^3 - z + 2z} dz = C_1$, ossia $\log x + \int \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 1)} dz = C_1$, $\log x + \int \left(\frac{2z}{z^2 + 1} - \frac{1}{z}\right) dz = C_1$, da cui, posto $\log C = C_1$, si ha $\frac{x(z^2 + 1)}{z} = C$; e da questa, ponendovi $z = \frac{y}{x}$, otteniamo l'integrale generale della proposta equazione, cioè $x^2 + y^2 = Cy$.

2) L'equazione non omogenea

$$(ax + by + c) dx + (a'x + b'y + c') dy = 0$$

si trasforma in una omogenea nelle variabili x', y' ponendo $x = x_0 + x', y = y_0 + y'$ e poi determinando convenientemente le costanti x_0, y_0 . La equazione proposta diviene

$$(ax' + by' + ax_0 + by_0 + c) dx' + (a'x' + b'y' + a'x_0 + b'y_0 + c') dy' = 0,$$

che si riduce alla equazione omogenea

$$(ax' + by') dx' + (a'x' + b'y') dy' = 0$$

ove si determinino le costanti x_0, y_0 dalle equazioni $ax_0 + by_0 + c = 0$, $a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$, il che potrà sempre farsi ove non sia $ab' - a'b = 0$.

Se poi è $ab' - a'b = 0$ cioè $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, ed è $\frac{c}{c'}$ diverso da queste due frazioni, posto $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = m$, la equazione proposta si può scrivere

$$(a'x + b'y + c') dy + m(a'x + b'y) dx + c dx = 0,$$

che, posto $a'x + b'y = z$, diviene

$$(z + c') dz + [(mz + c)b' - (z + c')a'] dx = 0$$

nella quale si separano subito le variabili.

Se, in ultimo, è $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = m$, la equazione proposta si riduce alla $dy + m dx = 0$, il cui integrale è $y + mx = C$.

3) La equazione precedente è caso particolare della

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

per integrare la quale porremo $ax + by + c = u$, $a'x + b'y + c' = v$, da cui $adx + bdy = du$, $a'dx + b'dy = dv$, e se, come supponiamo, è $ab' - a'b$ diverso da zero, $dx = \frac{b'du - b'dv}{ab' - a'b}$, $dy = \frac{adv - a'du}{ab' - a'b}$, cosichè la equazione proposta diviene:

$$a - a' \frac{du}{dv} = f\left(\frac{u}{v}\right) \left(b' \frac{du}{dv} - b\right),$$

che si integra, separando le variabili, col porre $\frac{u}{v} = z$.

156. Equazioni lineari. Sono quelle di primo grado in y e y' , cioè quelle della forma

$$y' + Py = Q$$

dove P, Q sono funzioni della sola x .

Per integrarla moltiplichiamone i due membri per $e^{\int P dx}$, cosichè essa diviene

$$y'e^{\int P dx} + yPe^{\int P dx} = Qe^{\int P dx}, \quad \text{ossia} \quad \frac{d}{dx}(ye^{\int P dx}) = Qe^{\int P dx},$$

da cui, integrando,

$$ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + C, \quad \text{ossia} \quad y = e^{-\int P dx} [\int Qe^{\int P dx} dx + C],$$

che è appunto l'integrale generale della proposta equazione.

ESEMPI

1) $y'\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-x^2} = (x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}$; abbiamo

$$P = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad Q = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

per cui
www.libtool.com.cn

$$y = e^{\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}} \left[\int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}} dx + C \right]$$

$$= e^{\log(x + \sqrt{1+x^2})} \left[\int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\log(x + \sqrt{1+x^2})} dx + C \right] = (x + \sqrt{1+x^2}) [\operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C].$$

$$2) \quad y' + y\varphi'(x) = \varphi(x)\varphi'(x),$$

$$y = e^{-\int \varphi'(x) dx} \left[\int \varphi(x)\varphi'(x) e^{\int \varphi'(x) dx} dx + C \right] = e^{-\varphi(x)} \left[\int \varphi'(x) e^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx + C \right]$$

$$= e^{-\varphi(x)} [e^{\varphi(x)} \{\varphi(x) - 1\} + C] = \varphi(x) - 1 + Ce^{-\varphi(x)};$$

così ad es.: l'integrale generale della

$$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{è} \quad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

157. Equazioni di Bernoulli. Le equazioni della forma

$$\varphi'(y) y' + \varphi(y) P = Q,$$

dove P, Q indicano funzioni della sola x , si riducono al tipo lineare ponendo $\varphi(y) = z$, giacchè otteniamo così la equazione trasformata $z' + Pz = Q$, che è lineare rapporto a z .

Caso particolare ed importante della precedente è la equazione di **BERNOULLI**

$$y' + Py = Qy^n, \quad \text{ossia} \quad y^{-n}y' + Py^{1-n} = Q,$$

che si scorge essere della forma precedente scrivendola così:

$$y^{-n}y' + (1-n)P \frac{y^{1-n}}{1-n} = Q.$$

Posto quindi $\frac{y^{1-n}}{1-n} = z$ essa diviene $z' + (1-n)Pz = Q$, il

cui integrale generale è $z = e^{(n-1)\int P dx} [\int Q e^{(1-n)\int P dx} dx + C_1]$, da cui l'integrale generale della proposta:

$$y^{1-n} = e^{(n-1)\int P dx} [(1-n)\int Q e^{(1-n)\int P dx} dx + C].$$

Qui si è supposto n diverso dall'unità; se fosse $n=1$, nell'equazione proposta $dy + Py dx = Qy dx$ si separano subito le variabili riducendola alla $\frac{dy}{y} + (P-Q) dx = 0$, da cui

$$\log y + \int (P-Q) dx = C.$$

ESEMPI

1) $y' + y = x\sqrt{y}$; è $P=1$, $Q=x$, $n=\frac{1}{2}$, quindi

$$\sqrt{y} = e^{-\frac{1}{2}\int dx} \left[\frac{1}{2} \int x e^{\frac{1}{2}\int dx} dx + C \right] \text{ ossia } \sqrt{y} = x - 2 + C e^{-\frac{x}{2}}.$$

2) $y' \cos y - a \sin y \cos x = b \sin 2x$; posto $\sin y = z$ abbiamo

$$z' - az \cos x = b \sin 2x,$$

il cui integrale è $z = C e^{a \sin x} - \frac{2b}{a} \left(\sin x + \frac{1}{a} \right)$, e quindi l'integrale generale delle proposte è

$$\sin y = C e^{a \sin x} - \frac{2b}{a} \left(\sin x + \frac{1}{a} \right).$$

158. Per integrare le equazioni della forma

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) y' = ax^m(xy' - y)$$

ossia

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = ax^m(xy - ydx)$$

si pone $\frac{y}{x} = z$; essa si trasforma allora nella

$$\varphi(z) dx + \psi(z)(x dz + z dx) = ax^{m+1} dz$$

ossia

$$\frac{dx}{dz} + \frac{\psi(z)}{\varphi(z) + z\psi(z)} x = \frac{ax^{m+1}}{\varphi(z) + z\psi(z)},$$

che è lineare in x se $m = -2$, o nella quale si separano senz'altro le variabili se $m = -1$, e che è una equazione di Bernoulli se m è diverso da -2 e da -1 .

ESEMPIO. — $y^2 dx + x^2 dy = x^2(x dy - y dx)$.

ossia

$$\frac{y^2}{x^2} dx + dy = (x dy - y dx).$$

È $\varphi(z) = z^2$, $\psi(z) = 1$, $m = 0$, quindi la equazione in x e z è $\frac{dx}{dz} + \frac{1}{z^2 + z} x = \frac{x^2}{z^2 + z}$, il cui integrale è

$$\frac{1}{x} = e^{\int \frac{dz}{z^2 + z}} \left[- \int \frac{e^{-\int \frac{dz}{z^2 + z}}}{z^2 + z} dz + C \right] = \frac{z}{1+z} \left(\frac{1}{z} + C \right);$$

l'integrale generale della proposta equazione è perciò

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x+y} + \frac{Cy}{x+y} \quad \text{ossia} \quad y = \frac{x(x-1)}{1-Cx}.$$

159. Della equazione

$$(1) \quad y' + Ly^2 + My + N = 0,$$

dove L, M, N indicano funzioni della sola x , si trova colle quadrature l'integrale generale, quando se ne conosca un integrale particolare $y = u(x)$, cioè quando si conosca la funzione

$u(x)$ tale che

www.libtool.com.cn

$$(2) \quad u' + Lu^2 + Mu + N = 0.$$

Infatti, posto $y = u + z$, in virtù della (2) la (1) diviene

$$\frac{dz}{dx} + (2Lu + M)z = -Lx^2,$$

che è del tipo della equazione di Bernoulli e che ci dà, integrandola,

$$\frac{1}{z} = e^{\int (2Lu + M) dx} \left[\int L e^{-\int (2Lu + M) dx} dx + C \right],$$

per cui

$$y = u + \frac{e^{-\int (2Lu + M) dx}}{C + \int L e^{-\int (2Lu + M) dx} dx}.$$

ESEMPIO. — Con semplicissimi tentativi si trova che $y = x$ è integrale particolare della equazione

$$y' - xy^2 + 2x^2y - x^3 - 1 = 0;$$

quindi l'integrale generale è

$$y = x + \frac{e^{-\int (-x^2 + 2x^2) dx}}{C_1 - \int dx \, x e^{-\int (2x^2 - 2x^2) dx}} = x + \frac{1}{C_1 - \frac{x^2}{2}},$$

$$\text{od anche } y = x + \frac{2}{x^2 + C}.$$

Del fattore integrante o moltiplicatore delle equazioni differenziali $Mdx + Ndy = 0$.

160. La equazione $Mdx + Ndy = 0$ dicesi equazione differenziale *esatta* se il primo membro è un differenziale esatto. Allora, se u è l'integrale della espressione $Mdx + Ndy$, $u = C$ è l'integrale generale della equazione proposta. Così ad es.: si

www.libtool.com.cn riconosce subito che l'equazione $xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$ è una equazione esatta, il cui integrale generale è

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C.$$

La equazione $XYdx + X_1Y_1dy = 0$, dove X, X_1 sono funzioni della sola x ; Y, Y_1 della sola y , non è esatta, ma lo diviene se la si moltiplica pel fattore $\frac{1}{X_1Y}$, poichè diviene $\frac{X}{X_1}dx + \frac{Y_1}{Y}dy = 0$, il cui integrale generale è

$$\int \frac{X}{X_1} dx + \int \frac{Y_1}{Y} dy = C.$$

Ciò che avviene per questa equazione particolare, avviene in generale, cioè:

Esistono sempre dei fattori μ , detti moltiplicatori o fattori integranti, tali che moltiplicando per uno di essi la equazione differenziale $Mdx + Ndy = 0$, questa si riduce ad una equazione esatta

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0.$$

Infatti, sia $f(x, y, C) = 0$ l'integrale generale della

$$(1) \quad Mdx + Ndy = 0;$$

risolvendo rispetto a C l'equazione $f = 0$, si ottenga $u(x, y) = C$;

differenziando allora quest'ultima si ricava $\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$,

il cui primo membro non può differire da quello della (1) che per un fattore μ funzione di x, y e indipendente da y' , così-

chè sarà $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M, \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$, e l'espressione $\mu(Mdx + Ndy)$ è

perciò un differenziale esatto. Rimane così dimostrata l'esistenza di un fattore integrante μ , che sarebbe subito conosciuto ove si conoscesse l'integrale generale $u = C$ della (1).

Di questi fattori ne esiste un numero infinito, poichè ogni altro fattore della forma $\mu\varphi(u)$, dove φ è una funzione arbitraria, è pure un moltiplicatore della (1), giacchè

$$\mu\varphi(u)[Mdx + Ndy] = \varphi(u)du.$$

161. Sia μ un moltiplicatore della $Mdx + Ndy = 0$. Allora avremo $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, ossia

$$(1) \quad N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right],$$

e questa è una equazione a derivate parziali di primo ordine cui deve soddisfare la funzione μ ; ma il determinare la funzione μ , od anche soltanto una funzione μ speciale che la soddisfaccia, costituisce in generale un problema più difficile della integrazione della equazione differenziale proposta, che noi volevamo risolvere servendoci del fattore integrante. Cosichè è solo in alcuni casi particolari che è utile servirci del metodo del fattore integrante, in quelli cioè nei quali sia facile riconoscere una funzione μ che soddisfaccia alla (1).

Due casi notevoli sono i seguenti:

1) Sia $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ funzione della sola x , $f(x)$; allora la

(1) si riduce alla $\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{N} \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu f(x)$, alla quale si soddisfa

supponendo μ indipendente da y , cosichè $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, e prendendo

per μ quella funzione di x per la quale è $\frac{d\mu}{dx} = \mu f(x)$; cosichè

$\mu = e^{\int f(x) dx}$ soddisfa la (1) ed è perciò un moltiplicatore.

In modo analogo si riconosce che se $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \varphi(y)$

$\mu = e^{\int \varphi(y) dy}$ è un moltiplicatore.

2) Se $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\varphi(x) - M\psi(y)$, essendo $\varphi(x)$, $\psi(y)$ due

certe funzioni di x e di y , la (1) diviene
www.libtool.com.cn

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu [N\varphi(x) - M\psi(y)],$$

la quale viene soddisfatta se si prende μ in guisa che sia

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\varphi(x), \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\psi(y);$$

e μ risulterà appunto tale, se, posto $\mu = XY$, dove X, Y debbano essere funzioni della sola x e della sola y , si determineranno X, Y dalle equazioni $\frac{dX}{dx} = X\varphi(x)$, $\frac{dY}{dy} = Y\psi(y)$ cioè

se $X = e^{\int \varphi(x) dx}$, $Y = e^{\int \psi(y) dy}$. Cosichè il fattore integrante sarà nel nostro caso

$$\mu = e^{\int \varphi(x) dx + \int \psi(y) dy}.$$

ESEMPI

$$1) (1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0; \quad \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x},$$

cosichè $\mu = e^{-2 \int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$. La equazione proposta si riduce alla equazione esatta

$$\left(\frac{1}{x^2} - y \right) dx + (y - x) dy = 0,$$

il cui integrale generale è

$$y^2x - 2x^2y - 2 = Cx.$$

$$2) y^2dx + (xy - 1)dy = 0;$$

$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = -\frac{1}{y}$, $\mu = \frac{1}{y}$, e l'integrale generale è
 $xy - \log y = C$.

$$3) (x^2y^2 + y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0; \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -N \frac{2}{x} + M \frac{2}{y},$$

$$\varphi(x) = -\frac{2}{x}, \psi(y) = -\frac{2}{y}, \mu = \frac{1}{x^2y^2}, \text{ e l'integrale generale è }$$

$$xy(x+y) - 1 = Cxy.$$

162. In alcuni casi si riesce con speciali ripieghi a trovare il fattore integrante. Così, ad esempio, cerchiamo se si possano determinare le costanti m, n in guisa che $x^m y^n$ risulti moltiplicatore della equazione

$$(2ay + 3bxy^2)dx + (3ax + 4bx^2y)dy = 0.$$

Dovremo avere

$$x^m [2a(n+1)y^n + 3b(n+2)xy^{n+1}] = y^n [3a(m+1)x^m + 4b(m+2)x^{m+1}y],$$

e quindi $2(n+1) = 3(m+1)$, $3(n+2) = 4(m+2)$ da cui $m=1$, $n=2$; cosichè $\mu = xy^2$ è fattore integrante, e l'integrale generale è $ax^2y^3 + bx^3y^4 = C$.

163. Se nella equazione

$$(1) \quad Mdx + Ndy = 0$$

poniamo $x + \varepsilon X$ in luogo di x , $y + \varepsilon Y$ in luogo di y , dove X e Y indicano funzioni di x, y ed ε è una costante della quale vogliamo trascurare le potenze superiori alla prima, essa si riduce alla

$$\left(M + \varepsilon X \frac{\partial M}{\partial x} + \varepsilon Y \frac{\partial M}{\partial y} \right) \left(dx + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial x} dx + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial y} dy \right) + \left(N + \varepsilon Y \frac{\partial N}{\partial x} + \varepsilon Y \frac{\partial N}{\partial y} \right) \left(dy + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) = 0$$

ossia, per la (1),

$$(2) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial x} X + \frac{\partial M}{\partial y} Y \right) dx + M \left(\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy \right) + \left(\frac{\partial N}{\partial x} X + \frac{\partial N}{\partial y} Y \right) dy + N \left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) = 0.$$

Se il primo membro di questa equazione è uguale al primo membro della (1) moltiplicato per un fattore indipendente da dx, dy , si dice che la (1) ammette la trasformazione infinitesimale X, Y . La condizione necessaria e sufficiente affinché ciò sia si ottiene eliminando dx, dy tra le (1), (2); essa è perciò espressa dalla equazione

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} X + \frac{\partial M}{\partial y} Y\right) N + M \left(\frac{\partial X}{\partial x} N - \frac{\partial X}{\partial y} M\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial x} X + \frac{\partial N}{\partial y} Y\right) M + N \left(\frac{\partial Y}{\partial x} N - \frac{\partial Y}{\partial y} M\right) = 0,$$

ossia dalla

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M}{MX + NY} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N}{MX + NY} \right) = 0,$$

la quale mostra che $\frac{1}{MX + NY}$ è un moltiplicatore della (1).

E si riconosce subito che, inversamente, se μ è un fattore integrante della (1) e X, Y sono funzioni di x, y tali che $\mu = \frac{1}{MX + NY}$, la (1) ammette la trasformazione infinitesimale X, Y .

Si ha così un mezzo per determinare il fattore integrante di certe equazioni, quantunque esso sia di non grande pratica utilità.

ESEMPI

1) Se la equazione $Mdx + Ndy = 0$ è omogenea, essa ammette la trasformazione infinitesimale x, y , cosicchè $\frac{1}{Mx + Ny}$ ne è un fattore integrante.

2) Come facilmente può verificarsi, la equazione

$$(x^2 y^2 - a) dx + x^2 dy = 0$$

ammette la trasformazione infinitesimale $x^4, 1-2xy$, cosichè

$$u = \frac{\text{www.libtoql.com.cn}}{(x^4 y^2 - a)x^2 + x^4(1-2xy)} = \frac{1}{x^4(1-xy)^2 - ax^2}$$

ne è un fattore integrante. Si troverà allora che l'integrale generale è

$$\log \frac{\sqrt{a+x(1-xy)}}{\sqrt{a-x(1-xy)}} = \frac{2\sqrt{a}}{x} + C \quad \text{se } a > 0,$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{-a}}{x^2} \operatorname{tg} \left(C - \frac{\sqrt{-a}}{x} \right) \quad \text{se } a < 0.$$

Se $a=0$, l'equazione proposta si riduce a $y^2 dx + dy = 0$,
il cui integrale è $x - \frac{1}{y} = C$.

ESERCIZI

1. Equazione differenziale $y' + ay - b = 0$, integrale generale $y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$.

2. $(2x+1)(y^2+y-1)y' + y(2x-1) = 0$,
 $y^2 + 2y + 2x = 2 \log [Cy(2x+1)]$.

3. $x\sqrt{1+y^2} + y'y^2\sqrt{1+x^2} = 0$, $3\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{1+y^2} = C$.

4. $(1 - \sin x)(a^4 - y^4) + y(x + \cos x)y' = 0$,
 $(x + \cos x)^{4a^2}(a^2 + y^2) = C(a^2 - y^2)$.

5. $(x+y)^2 dy - a dx = 0$, $x+y = a \operatorname{tg} \left(\frac{y}{a} + C \right)$.

6. $a(xy' - y) = (x + yy')\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$,
 $a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} + a \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C$ (si ponga
 $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$).

7. $x + yy' - y'\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = 0$, $y = \frac{x^2 - a^2 - C^2}{2C}$.

8. Determinare la funzione y di x tale che sia

$$\int xy dx = \frac{x}{n} \int y dx; \quad y = Cx^{\frac{2-n}{1-n}}.$$

9. Integrare algebricamente l'equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

Posto $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ e chiamata con $\lambda(u)$ la

funzione x di u , e posto inoltre $\mu(u) = \sqrt{1 - \lambda(u)^2}$,

$\nu(u) = \sqrt{1 - k^2 \lambda(u)^2}$ ($\lambda(u)$, $\mu(u)$, $\nu(u)$ sono le funzioni ellittiche di JACOBI e ABEL), si trovi la formola d'addizione per la funzione $\lambda(u)$.

L'integrale algebrico è

$$x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = C(1 - k^2x^2y^2),$$

e la formola d'addizione è

$$\lambda(u+v) = \frac{\lambda(u)\mu(v)\nu(v) + \lambda(v)\mu(u)\nu(u)}{1 - k^2\lambda(u)^2\lambda(v)^2}.$$

$$10. \quad xdx + ydy = xdy - ydx, \quad \log \sqrt{x^2 + y^2} - \arctg \frac{y}{x} = C.$$

$$11. \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = xy', \quad x^2 = 2Cy + C^2.$$

$$12. \quad \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0, \quad x = Ce^{-\cos \frac{y}{x}}.$$

$$13. \quad xy' - y = y(\log y - \log x), \quad y = xe^{cx}.$$

$$14. \quad xdx + ydy = mydx,$$

$$\sqrt{y^2 - mxy + x^2} \left(\frac{2y - mx - x\sqrt{m^2 - 4}}{2y - mx + x\sqrt{m^2 - 4}} \right)^{\frac{m}{m^2 - 4}} = C \text{ se } |m| > 2,$$

$$\log \sqrt{y^2 - mxy + x^2} + \frac{m}{\sqrt{4-m^2}} \operatorname{arctg} \frac{2y - mx}{x\sqrt{4-m^2}} = C \quad \text{se } |m| < 2,$$

$$\log(y-x) - \frac{x}{y-x} = C \quad \text{» } m=2,$$

$$\log(y+x) + \frac{x}{y+x} = C \quad \text{» } m=-2.$$

$$15. (1-x^2)dy + xydx = adx, \quad y = ax + C\sqrt{1-x^2}.$$

$$16. dy + ydx = ax^n dx,$$

$$y = Ce^{-x} + a[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots]$$

se n è intero positivo.

$$17. 2x(1+x^2)y' + 2x^2y = 1, \quad 2y\sqrt{1+x^2} = \log \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C.$$

$$18. (x+1)dy - nydx - e^x(x+1)^{n+1}dx = 0, \quad y = (x+1)^n(e^x + C).$$

$$19. ydy - (1+y^2)dx = \sqrt{1+y^2} \cos ax dx,$$

$$\sqrt{1+y^2} \frac{a \sin ax - \cos ax}{1+a^2} + Ce^x.$$

$$20. y' \cos y + \sin y = x, \quad \sin y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

$$21. y' + \frac{ny}{\sqrt{1+x^2}} = a,$$

$$y = C[\sqrt{1+x^2} - x]^n + \frac{na}{n^2-1} \sqrt{1+x^2} - \frac{ax}{n^2-1} \quad \text{se } n \text{ è diverso da } \pm 1,$$

$$y = C[\sqrt{1+x^2} - x] + \frac{ax}{2} + \frac{a}{2}(\sqrt{1+x^2} - x) \log(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \text{se } n=1,$$

$$y = C[\sqrt{1+x^2} + x] + \frac{ax}{2} + \frac{a}{2}(\sqrt{1+x^2} + x) \log(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \text{se } n=-1.$$

$$22. xy' + y - y^2 \log x = 0, \quad y = \frac{1}{1+Cx + \log x}.$$

$$23. dy + y(\cos x - y^{n-1} \sin 2x) dx = 0,$$

$$y^{1-n} = 2 \sin x + Ce^{(n-1) \sin x} + \frac{2}{n-1}.$$

24. $\frac{dy}{dx} (x^2 y^3 + xy) = 1, \quad \frac{1}{x} = 2 - y^3 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$

25. Si riduca alle quadrature l'integrazione della equazione $(P + Qx)y' = R + Qy$, ossia $Pdy - Rdx + Q(xdy - ydx) = 0$, dove P, Q, R sono funzioni omogenee di x, y , e P, R dello stesso grado.

26. Equazione di JACOBI:

$$(a + a'x + a''y)(xdy - ydx) - (b + b'x + b''y)dy + (c + c'x + c''y)dx = 0,$$

cui si può dare anche la forma

$$(Ax^2 + Bxy + \alpha x + \beta y + \gamma) dy = (Axy + By^2 + \alpha'x + \beta'y + \gamma') dx.$$

Si ponga $x = u + \alpha, y = v + \beta$ e si determinino α, β in guisa da ridurla alla forma di quella dell'esercizio precedente. Si troverà che i valori di α, β si ricavano da due delle equazioni

$$a - \lambda + a'\alpha + a''\beta = 0,$$

$$b + (b' - \lambda)x + b''\beta = 0,$$

$$c + c'\alpha + (c'' - \lambda)\beta = 0,$$

dove λ è una qualunque delle radici della equazione di terzo grado

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & a' & a'' \\ b & b' - \lambda & b'' \\ c & c' & c'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Come esempio si troverà che l'integrale della equazione

$$(-2 + 2x + y)(xdy - ydx) - (-2 + 2x + y)dy + (-4 + 2x + 3y)dx = 0$$

è $(x - 1)(y - 1) = C(y - 2x)^2.$

27. Ridurre alle quadrature l'integrazione delle equazioni

$$y' + Py = P\alpha + Qy^2 + 1 - Qx^2, \quad y + Py = Qy^2 + Pf'(x) + f''(x) - Qf'(x),$$

dove P, Q sono funzioni della sola x .

28. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$, moltiplicatore $\mu = e^x$, integrale $(x^2 + y^2)e^x = C$.

29. $y(3x^2 - ay)dx - x(3x^2 - 2ay)dy = 0$, $\mu = \frac{1}{y^4}$, $x^3 + Cy^3 - axy = 0$.

30. Un moltiplicatore per la equazione di BERNOULLI $(Py - y^n Q)dx + dy = 0$ è $\mu = \frac{e^{(1-n)\int P dx}}{y^n}$. Si trovi tal moltiplicatore.

31. Un moltiplicatore della equazione $dy + y^2 dx = \left(\frac{dP}{dx} + P^2\right)dx$, dove P è funzione della sola x , è $\mu = \frac{e^{-2\int P dx}}{(y - P)^2}$. Si trovi tal moltiplicatore.

32. Data l'equazione $Mdx + Ndy = 0$, se $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \psi(x + y)$

è $\mu = e^{\int \psi(z) dz}$ dove $z = x + y$; se $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \psi(xy)$ è $\mu = e^{\int \psi(z) dz}$ dove $z = xy$. Così ad es.:

$$(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)dx + (y^2 + y^2x + 2xy - x^2 - x^3)dy = 0,$$

$$\mu = \frac{1}{(x + y)^2(x + y + 2)}, \quad x + xy + y = C(x + y)(x + y + 2);$$

$$(2x^2y^2 - 1)dx + (2x^2y^2 - x)dy = 0, \quad \mu = \frac{1}{x^2y^2}, \quad xy(x^2 + y^2) + 1 + Cxy = 0.$$

33. Data $Mdx + Ndy = 0$, si cerchi il moltiplicatore μ supponendolo funzione simmetrica di x, y . Se $M_1dx + N_1dy = 0$ è la equazione che si ricava dalla proposta scambiando x, y tra loro, μ è pure moltiplicatore di questa equazione. Dalle due

equazioni cui deve soddisfare μ si ricavano i valori di $\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x}$, $\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y}$; chiamate α, β queste funzioni, dovrà essere $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$ (altrimenti la supposizione fatta non è ammissibile ed è inutile tentare la ricerca di μ in questo modo). Potremo allora determinare μ . Così, ad es.:

$$(1 - xy)dx + (x^2 - y)dy = 0, \quad \mu = \frac{1}{x^3 + y^3 - 3xy + 1}.$$

$$\log \frac{x + y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 - xy - x - y + 1}} + \sqrt[3]{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x - y - 1}{\sqrt[3]{3}(1 - y)} = C.$$

34. La condizione affinchè la equazione $dy + \left(\frac{P}{y} - Q\right)dx = 0$, dove P, Q sono funzioni della sola x , ammetta un moltiplicatore $\mu = \frac{y}{[y + f(x)]^n}$ è che sia $Q = -\frac{n^2}{1-n} \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{Q}\right)$, ed allora è $f(x) = -n \frac{P}{Q}$.

35. Data la equazione $(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$ si determino m, n, m', n' in modo che essa ammetta la trasformazione infinitesimale $mx + n, m'y + n'$. Si avrà quindi

$$\mu = \frac{1}{(ax + by + c)[(ab' - a'b)x + (bc' - b'c)] + (a'x + b'y + c')[(ab' - a'b)y + (a'c - ac')]}.$$

36. Data la equazione $ydx - xdy + ax^ny(x^n + b)^{\frac{1}{n}}dy = 0$, la si scriva così: $\frac{ydx - xdy}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} + ax^nydy = 0$ e si ponga

$\frac{x}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} = vy$. Si trova immediatamente il moltiplicatore della equazione trasformata in v, y , dal quale si ottiene il moltiplicatore della equazione proposta,

$$\mu = \frac{y^{n-1}}{x^{n+1} + abx^ny(x^n + b)^{\frac{1}{n}}}.$$

37. Il primo membro della equazione

$$x^\alpha y^\beta (x^\gamma y^\delta) (y dx + x dy) = x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy)$$

ha un moltiplicatore della forma $\frac{\varphi(x^\alpha y^\beta)}{xy}$, il secondo uno della forma $\frac{\psi(x^\gamma y^\delta)}{x^{m+1} y^{n+1}}$, dove φ, ψ sono funzioni qualunque. Si determinino in modo che quei moltiplicatori diventino uguali. Si ottiene così un moltiplicatore della proposta. Si trova

$$\mu = x^{\lambda\alpha-1} y^{\lambda\beta-1} = x^{\gamma-m-1} y^{\delta-n-1}, \text{ dove } \lambda = \frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \delta = \frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

**Equazioni differenziali di primo ordine non risolte
rapporto alla derivata.**

164. Studiamo alcuni tipi di tali equazioni.

Equazioni differenziali di primo ordine e di grado n.

Sono quelle della forma

$$(1) \quad P_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^n + P_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^{n-1} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n = 0,$$

dove le P indicano funzioni univalenti di x, y .

In particolare, si dicono equazioni *algebrico-differenziali* se le P sono funzioni razionali intere di x, y .

Supponiamo di saper risolvere la proposta equazione rapporto a y' , cosicchè essa assuma la forma, omissa il fattore P_0 ,

$$(2) \quad (y' - p_1)(y' - p_2) \dots (y' - p_n) = 0,$$

dove le p sono funzioni di x, y , che potranno anche a gruppi o tutte essere uguali tra loro.

Siano

$$F_1(x, y, c_1) = 0, \quad F_2(x, y, c_2) = 0, \dots, F_n(x, y, c_n) = 0$$

gli integrali generali delle equazioni

$$(3) \quad y' - p_1 = 0, \quad y' - p_2 = 0, \dots, y' - p_n = 0;$$

dico che

$$(4) \quad F_1(x, y, c) F_2(x, y, c) \dots F_n(x, y, c) = 0$$

è l'equazione integrale generale della (1), cioè che derivando rapporto ad x la (4) ed eliminando c tra la equazione che così si ricava e la (4), si ottiene la (2) o ciò che è lo stesso la (1), a meno di un fattore indipendente da y' .

Facciamo, per amore di brevità, la dimostrazione nel caso di $n=3$. Per eliminare c tra la equazione

$$F_1(x, y, c) F_2(x, y, c) F_3(x, y, c) = 0$$

e la

$$(5) \quad \frac{dF_1}{dx} F_2 F_3 + \frac{dF_2}{dx} F_1 F_3 + \frac{dF_3}{dx} F_1 F_2 = 0,$$

dove $\frac{dF_1}{dx} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y'$,... eliminiamo c tra la $F_1(x, y, c) = 0$ e la (5), cosicchè, osservando che la eliminazione di c tra $F_1(x, y, c) = 0$, $\frac{dF_1}{dx} = 0$ dà per risultato $\mu_1(y' - p_1) = 0$, dove μ_1 è funzione di x, y , ed indicando con $\psi_1 = 0$ il risultato della eliminazione di c tra $F_1 = 0$ e $F_2 F_3 = 0$, otteniamo

$$\mu_1 \psi_1(y' - p_1) = 0.$$

Analogamente, eliminando c tra $F_2 = 0$ e la (5), tra $F_3 = 0$ e la (5), avremo equazioni della forma

$$\mu_2 \psi_2(y' - p_2) = 0, \quad \mu_3 \psi_3(y' - p_3) = 0,$$

di guisa che il risultato della eliminazione di c tra la $F_1 F_2 F_3 = 0$ e la (5) sarà

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \psi_1 \psi_2 \psi_3 (y' - p_1)(y' - p_2)(y' - p_3) = 0,$$

ciò è la (2), pel caso $n=3$, fatta astrazione dal fattore $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \psi_1 \psi_2 \psi_3$ che non contiene y' .

Supponiamo $p_1, p_2, \dots, p_n$ costanti, il che avverrà certamente se $P_0, P_1, \dots, P_n$ sono costanti. Gli integrali delle (3) sono allora

$$y - p_1 x + c_1 = 0, \quad y - p_2 x + c_2 = 0, \dots, y - p_n x + c_n = 0,$$

e quindi l'integrale della (2) è

$$\begin{aligned} & x^n \left(\frac{y+c}{x} - p_1 \right) \left(\frac{y+c}{x} - p_2 \right) \dots \left(\frac{y+c}{x} - p_n \right) \\ &= \frac{x^n}{P_0} \left[P_0 \left(\frac{y+c}{x} \right)^n + P_1 \left(\frac{y+c}{x} \right)^{n-1} + \dots + P_n \right] = 0, \end{aligned}$$

cosicchè si ottiene l'integrale generale della proposta equazione sostituendovi $\frac{y+c}{x}$ in luogo di y' .

Così l'integrale di $y'^4 + 3y'^3 + 2 = 0$ è

$$\left(\frac{y+c}{x} \right)^4 + 3 \left(\frac{y+c}{x} \right)^3 + 2 = 0.$$

Ciò vale anche, come si può facilmente riconoscere, per qualunque equazione differenziale di primo ordine che non contenga esplicitamente x, y . Così l'integrale generale della equazione $e^{y'} + 3y'^3 + 1 = 0$ è $e^{\frac{y+c}{x}} + 3 \left(\frac{y+c}{x} \right)^3 + 1 = 0$.

2) Si riconosce facilmente, considerando y' come incognita, che $y' = y$ è radice della equazione

$$y^3 - (\sin x + \cos x + y)y'^3 + (\sin x \cos x + y \sin x + y \cos x)y' - y \sin x \cos x = 0,$$

cosicchè questa si riduce facilmente alla

$$(y - \sin x)(y' - \cos x)(y' - y) = 0$$

e si ha allora subito l'integrale generale

$$(y + \cos x + c)(y - \sin x + c)(y - ce^x) = 0,$$

3) Le $P_0, P_1, \dots, P_n$ della equazione (1) siano funzioni omogenee dello stesso grado di x, y , cosicchè la (1) possa ridursi alla forma

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x}\right) y'^n + \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) y'^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) y' + \varphi_n\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Posto $\frac{y}{x} = z$, da cui $y' = xz' + z$, e sviluppando le potenze di $xz' + z$ ed ordinando rispetto a xz' , essa diviene della forma

$$\psi_0(z)x^n z'^n + \psi_1(z)x^{n-1} z'^{n-1} + \dots + \psi_{n-1}(z)xz' + \psi_n(z) = 0,$$

ossia della forma

$$\psi_0(z)\{[xz' - p_1(z)][xz' - p_2(z)] \dots [xz' - p_n(z)]\} = 0,$$

il cui integrale generale è

$$\left[\log cx - \int \frac{dz}{p_1(z)}\right] \left[\log cx - \int \frac{dz}{p_2(z)}\right] \dots \left[\log cx - \int \frac{dz}{p_n(z)}\right] = 0,$$

che è quello della proposta tenendo conto della posizione fatta $z = \frac{y}{x}$.

Sia ad es.: l'equazione

$$y^2 y'^3 - y^2 y'^2 - x^2 y' + x^2 = 0.$$

Posto $z = \frac{y}{x}$ diviene

$$z^2(xz' + z)^3 - z^2(xz' + z)^2 - (xz' + z) + 1 = 0,$$

che, riconoscendosi subito che il primo membro ha per fattore $xz' + z - 1$, si riduce alla forma

$$(xz' + z - 1) \left(xz' + z - \frac{1}{z}\right) \left(xz' + z + \frac{1}{z}\right) = 0,$$

e si ha l'integrale generale di questa equazione

$$[x(z-1)+c] [x^2(z^2-1)+c] [x^2(z^2+1)+c]=0,$$

www.libtool.com.cn

e quindi l'integrale generale della proposta

$$(y-x+c)(y^2-x^2+c)(y^2+x^2+c)=0,$$

od anche

$$(y-x+c)[(y^2+c)^2-x^4]=0.$$

165. Equazioni differenziali di primo ordine risolte rapporto ad una delle variabili. Le equazioni della forma

$x=\varphi(y')$ si integrano ponendo $y'=\frac{dy}{dx}=p$; allora abbiamo

$$(1) \quad x=\varphi(p),$$

da cui $dx=\frac{dy}{p}=\varphi'(p)$ e da questa

$$(2) \quad y=\int \varphi'(p) p dp + C = p\varphi(p) - \int \varphi(p) dp + C.$$

Eliminando p tra le (1), (2) si ottiene una relazione della forma $f(x, y, C)=0$ che è l'integrale generale richiesto.

Se l'eliminazione di p non si può o non si vuole fare, si ritiene che le equazioni (1), (2) costituiscano l'integrale generale della proposta equazione, come quelle che esprimono x, y mediante un parametro p in guisa che i valori di x, y che corrispondono a qualunque valore di p (o a qualunque valore di p un certo intervallo) sono tali da soddisfare alla data equazione differenziale.

Le equazioni della forma

$$x=\varphi(y, y')$$

si integrano in modo analogo; posto $y'=p$ si ha

$$(3) \quad x=\varphi(y, p)$$

e da questa

$$dx=\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial p} dp = 0.$$

Supponendo di integrare questa equazione che è della forma $Mdy + Ndp = 0$, si ottiene una equazione della forma

$$(4) \quad \psi(y, p, C) = 0.$$

Eliminando p tra le (3), (4) si ha l'integrale generale $f(x, y, C) = 0$ della proposta equazione; oppure si ritiene che le (3), (4), considerato p come un parametro variabile, costituiscano l'integrale generale.

In modo analogo si vedrebbe che le due equazioni

$$y = \varphi(p), \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C$$

costituiscono l'integrale della equazione $y = \varphi(y')$; e che le

$$y = \varphi(x, p), \quad \psi(x, p, C) = 0,$$

dove la $\psi = 0$ è l'integrale della equazione

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp = 0,$$

costituiscono l'integrale generale della equazione $y = \varphi(x, y')$.

ESEMPI

$$1) \quad x = e^{y'} + y'.$$

Le (1), (2) diventano qui

$$x = e^p + p, \quad y = p(e^p + p) - \int (e^p + p) dp + C_1 = p(e^p + p) - e^p - \frac{p^2}{2} + C_1.$$

Volendo tra queste eliminare p , servendosi della prima di esse la seconda diviene $y = px - (x - p) - \frac{p^2}{2} + C_1$ dalla qua-

le $p = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C}$, avendo posto $C = 1 - 2C_1$. La prima diviene quindi

$$x = e^{x+1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C}} + x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C},$$

ossia

$$e^{x+1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C}} = \mp \sqrt{x^2 - 2y + C} - 1,$$

che è l'integrale generale. Notiamo che, non volendo introdurre quantità complesse e poichè il valore d'una esponenziale è sempre allora positivo, dovremo dei due segni prendere l'inferiore.

2) $y = yy'' + 2y'x$. Risolvendo rispetto ad x e ponendo $y' = p$ è $x = \frac{y(1-p^2)}{2p}$, da cui, differenziando ed osservando che

$dx = \frac{dy}{p}$, si ottiene $\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p}$, che, integrata, dà $py = C$.

Eliminando p tra questa equazione e la proposta $y = p^2y + 2px$, si ottiene l'integrale generale $y^2 = C^2 + 2Cx$.

3) $y = a\sqrt{1+y^2}$. Posto $y' = p$, è

$$y = a\sqrt{1+p^2}, \quad x = a \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + C = a \log(p + \sqrt{1+p^2}) + C.$$

Volendo eliminare p , osserviamo che l'ultima può scriversi così: $p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x-C}{a}}$, dalla quale

$$\frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}} = -(p - \sqrt{1+p^2}) = e^{-\frac{x-C}{a}}$$

e quindi $p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x-C}{a}} - e^{-\frac{x-C}{a}} \right)$; in conseguenza abbiamo

$$y = a\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x-C}{a}} + e^{-\frac{x-C}{a}} - 2 \right)} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-C}{a}} + e^{-\frac{x-C}{a}} \right).$$

4) $y = x\psi(y') + \varphi(y')$, ovvero, posto al solito $y' = p$,

www.libtool.com.cn

$$y = x\psi(p) + \varphi(p),$$

dalla quale

$$pdx = dx\psi(p) + [\omega\psi'(p) + \varphi'(p)]dp,$$

ossia

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\psi'(p)}{\psi(p) - p} x = -\frac{\varphi'(p)}{\psi(p) - p},$$

che, essendo lineare in x , dà, integrata,

$$x = e^{-\int \frac{\psi'(p)dp}{\psi(p)-p}} \left[-\int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)-p} e^{\int \frac{\psi'(p)dp}{\psi(p)-p}} dp + C \right].$$

Eliminando p tra questa e la proposta equazione ne otteniamo l'integrale generale.

Così ad es.: l'integrale generale della equazione $y = y'^2 + y^3$ si ottiene eliminando p tra la equazione $y = p^2x + p^3$ e la

$$x = e^{-\int \frac{2pdp}{p^2-p}} \left[-\int \frac{3p^2dp}{p^2-p} e^{\int \frac{2pdp}{p^2-p}} + C \right] = \frac{1}{(p-1)^2} \left[-p^3 + \frac{3p^2}{2} + C \right].$$

Ponendo in questa per p^3 il suo valore $y - p^2x$, e poi risolvendolo rispetto a p , si ottiene

$$p = \frac{1}{3} (-2x + \sqrt{4x^2 - 3(2C - 2x - 2y)}),$$

e l'integrale generale è $y = p^2x + p^3$, dove p ha questo valore.

166. Equazione di CLAIRAUT. Nell'esempio precedente bisogna supporre $\psi(y')$ diverso da y' ; se è $\psi(y') = y'$ si ha la equazione

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

che chiamasi equazione di CLAIRAUT, e che è meritevole di speciale considerazione.

Posto $y' = p$, abbiamo

$$(1) \quad y = px + \varphi(p)$$

da cui

$$pdx = p dx + x dp + \varphi'(p) dp \quad \text{ossia} \quad dp[x + \varphi'(p)] = 0.$$

Possiamo soddisfare a questa equazione assumendo $dp = 0$, da cui $p = C$ e quindi si ottiene l'integrale generale

$$(2) \quad y = Cx + \varphi(C)$$

della equazione di Clairaut.

Ma possiamo pure soddisfare alla stessa equazione assumendo

$$x + \varphi'(p) = 0,$$

ed allora eliminando p tra questa equazione e la (1) abbiamo pure un integrale, che non contiene costante arbitraria e non può neanche ottenersi dall'integrale generale (2) attribuendo alla C un particolare valore costante, poichè si vede che si ottiene dall'integrale generale eliminando C tra la (2) e la equazione $x + \varphi'(C) = 0$, cioè assumendo nella (2) per C il valore, funzione di x , che ricaviamo dalla $x + \varphi'(C) = 0$.

Questo integrale chiamasi un *integrale singolare*, o *soluzione singolare* della proposta equazione.

ESEMPIO. — $y = px + p^2$. L'integrale generale è $y = Cx + C^2$ e l'integrale singolare si ottiene eliminando p tra la precedente equazione e la $x + 2p = 0$, cioè è $y = -\frac{x^2}{4}$.

167. Se una equazione differenziale non appartiene ad alcuno dei tipi finora considerati si cerca allora di integrarla con speciali artifici e trasformazioni.

Se il primo membro della equazione proposta può scindersi nel prodotto di più funzioni $f_1(x, y, y') \cdot f_2(x, y, y') \dots = 0$, e $\varphi_1(x, y, c) = 0$, $\varphi_2(x, y, c) = 0, \dots$ sono gli integrali generali delle equazioni $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \dots$, allora $\varphi_1(x, y, c) \varphi_2(x, y, c) \dots = 0$ sarà l'integrale generale della proposta.

1) L'equazione

$$(1+x^2)y'^2 - 2xyy' + y^2 - 1 = 0$$

può scriversi così:

$$(y - xy')^2 - (1 - y'^2) = (y - xy' - \sqrt{1 - y'^2})(y - xy' + \sqrt{1 - y'^2}) = 0.$$

Gli integrali generali delle due equazioni (di CLAIRAUT)

$$y - xy' - \sqrt{1 - y'^2} = 0, \quad y - xy' + \sqrt{1 - y'^2} = 0$$

essendo

$$y - C_1x - \sqrt{1 - C_1^2} = 0, \quad y - C_2x + \sqrt{1 - C_2^2} = 0,$$

ed avendo esse l'integrale singolare comune $y = \sqrt{x^2 + 1}$, la equazione proposta ha l'integrale generale

$$(y - Cx - \sqrt{1 - C^2})(y - Cx + \sqrt{1 - C^2}) = (y - Cx)^2 - (1 - C^2) = 0,$$

e l'integrale singolare $y^2 - x^2 = 1$.

$$2) \quad y' + f(x)\sin y + \varphi(x)\cos y + \psi(x) = 0.$$

Poniamo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} y = z$, ed allora la equazione (Vedi n. 44) si trasforma nella

$$z' + f(x)z + \frac{\varphi(x)}{2}(1 - z^2) + \frac{\psi(x)}{2}(1 + z^2) = 0$$

ossia nella

$$z' + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{2} z^2 + f(x)z + \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2} = 0,$$

che appartiene a quelle equazioni delle quali si determina colle quadrature l'integrale generale, quando se ne conosca uno particolare.

Così ad es.: se $\psi(x) = -f(x)$, $z=1$ è integrale particolare della corrispondente equazione in z , e l'integrale generale si trova essere

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} y [\int f(x) e^{\int \psi(x) dx} dx + C] - e^{\int \psi(x) dx} = 1.$$

3) La equazione

$$axy y'' + (x^2 - ay^2 - b)y' - xy = 0,$$

posto $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$ da cui $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\eta}} \frac{d\eta}{d\xi}$, si trasforma nella

$$a\xi \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + (\xi - a\eta - b) \frac{d\eta}{d\xi} - \eta = 0,$$

$$\eta \left(a \frac{d\eta}{d\xi} + 1 \right) = \xi \frac{d\eta}{d\xi} \left(a \frac{d\eta}{d\xi} + 1 \right) - b \frac{d\eta}{d\xi},$$

$$\eta = \xi \frac{d\eta}{d\xi} - b \frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{a \frac{d\eta}{d\xi} + 1},$$

che è una equazione di CLAIRAUT il cui integrale generale è $\eta = C\xi - \frac{bC}{aC+1}$, e l'integrale singolare è $a\eta + (\sqrt{b} - \sqrt{\xi})^2 = 0$, cosicchè l'equazione proposta ha l'integrale generale

$$y^2 = Cx^2 - \frac{bC}{aC+1}$$

ed ammette ancora l'integrale singolare $ay^2 + (\sqrt{b} - x)^2 = 0$.

1. $y^3 - (x^2 + xy + y^2) y' + (x^2 y + x^2 y^2 + xy^3) y' - x^2 y^3 = 0$, l'integrale generale è

$$(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}) \left(y - \frac{1}{C - x} \right) \left(y - \frac{x^3}{3} - C \right) = 0.$$

2. $(a^2 - x^2) y^3 + bx(a^2 - x^2) y^2 - y' - bx = 0,$

$$\left(y + \frac{bx^2}{2} - C \right) [(y - C)^2 - \left(\arcsen \frac{x}{a} \right)^2] = 0.$$

3. $x^2 y'^2 + 3xyy' + 3y^2 = 0,$

$$x^2 y^2 + 2Cyx^{\frac{3}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x \right) + C^2 = 0.$$

4. $y^3 + 1 - x = 0, \quad 64(y + c)^3 - 27(x - 1)^4 = 0.$

5. $y = y' + \sqrt{1 + y'^2}, \quad y^2 = 1 + Ce^x.$

6. $y = x(y' + \sqrt{1 + y'^2}), \quad x^2 + y^2 = Cx.$

7. $y'^2 + ax - by = 0,$

$$b^2 x - 2b\sqrt{by - ax} + C = 2a \log [b\sqrt{by - ax} - a].$$

8. $ayy'^2 + (2x - b)y' = y, \quad y^2 = aC^2 + (2x - b)C.$

9. $xy' = y + \sqrt{1 + y'^2}$, int. gen. $x = Cy + \sqrt{1 + C^2}$, int. singolare $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

10. $y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy')$. Ponendo $a^2 + y^2 = 2z$, si riduce ad una equazione di CLAIRAUT: l'integrale generale è $\sqrt{(x - C)^2 + y^2} = f(C)$, e l'int. singolare si ottiene eliminando z' tra le equazioni

$$x - z' + \sqrt{(x - z')^2 + y^2} = f'(z') \quad \text{e} \quad \sqrt{(x - z')^2 + y^2} = f(z').$$

11. $f(xy' - y, y') = 0, \quad f(Cx - y, C) = 0.$

12. $y - 2xy' = 2y'f(yy')$, int. gen. $y^2 = 2Cx + 2Cf(C)$, l'int. singolare si ottiene eliminando z' tra $z = xz' + z'f(z')$ e $z + z'^2f'(z') = 0$.

13. $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^3 = 0$, int. gen. $y = Cx^2 + \frac{x}{C}$, int. singolare $y = 2x^{\frac{3}{2}}$. (Si ponga $\frac{y}{x} = z$).

14. $y'^2 + xy' + x^2 = 0$, $4(y + C)^2 + 2x^2(y + C) + x^4 = 0$.

15. $y'^3 + ax'y' + x^3 = 0$; posto $y' = tx$, l'integ. generale è formato dalle due equazioni $x = -\frac{at}{1+t^3}$, $y + C = \frac{a^2}{6} \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}$, considerandovi t come un parametro variabile.

16. $y'^3 + y^3y' + y^4 = 0$; posto $y' = ty$ si trova l'integrale dato dalle due equazioni $x + C = \log \frac{1+t}{t} - \frac{3}{t}$, $y = -\frac{t^3}{1+t}$.

17. $y\sqrt{1+y^2} = n(x+yy')$. Si risolva rispetto ad x ed allora si troverà l'integrale generale $(x-C)^2 + y^2 = n^2C^2$, e, procedendo come per la equazione di CLAIRAUT, l'integrale singolare eliminando p tra le equazioni $y\sqrt{1+p^2} = n(x+py)$, $p - n\sqrt{1+p^2} = 0$.

18. $y'^3 = y^4(y + xy')$, int. gen. $y = \frac{1}{Cx-C^3}$, integ. singolare $4x^3y^2 - 27 = 0$. (Si ponga $y = \frac{1}{z}$).

19. $(1-y')^2 - y'^2e^{-2x} = e^{-2y}$. Si ponga $y' = p$, si prendano i logaritmi dei due membri, si derivi rapporto ad x ; si ottiene così l'int. gen $(1-C^2)e^{2y} = (1+Ce^x)^2$, ed il singolare $e^{2x} + e^{2y} = 1$.

20. $yy'(x^2 + y^2 + a^2) + x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) + C$.

21. $(y'^2 - y)^2 = y(y'^2 + y)^2$, (si ponga $y = z^2$),

$[(x+C)^2 - (2 \arcsen \sqrt{y+2\sqrt{1-y}})] [(x+C)^2 - (2 \arcsen \sqrt{y-2\sqrt{1-y}})] = 0$.

Se tra la $\varphi=0$ e tra le prime $n-1$ delle equazioni (2) eliminiamo successivamente tutte le costanti, eccetto successivamente le $C_1, C_2, \dots, C_n$, otteniamo n equazioni differenziali di ordine $n-1$ della forma

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, C_1) = 0, \\ \varphi_2(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, C_2) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, C_n) = 0, \end{array} \right.$$

Se tutto il sistema è conosciuto, eliminando tra le (3) le $y', y'' \dots y^{(n-1)}$ si ottiene l'integrale generale della proposta equazione.

$$\psi(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, C_r, C_s) = 0,$$

Posto

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = p_1, \quad \frac{dp_1}{dx} = p_2, \dots, \quad \frac{dp_{n-2}}{dx} = p_{n-1},$$

la equazione differenziale proposta diviene
www.libtool.com.cn

$$(5) \quad f\left(x, y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \frac{dp_{n-1}}{dx}\right)$$

cosichè ad essa, si può sostituire il sistema formato dalle equazioni di primo ordine (4), (5) tra la variabile x e le funzioni incognite $y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Si sarà perciò provata l'esistenza dell'integrale generale per la equazione proposta, se si dimostrerà che le equazioni (4), (5) ammettono un sistema di equazioni integrali, cioè n equazioni tra le $y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ con n costanti arbitrarie.

La dimostrazione dell'esistenza del sistema integrale per le equazioni della forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}),$$

$$\frac{dp_1}{dx} = f_2(x, y, p_1, \dots, p_{n-1}), \dots, \frac{dp_{n-1}}{dx} = f_n(x, y, p_1, \dots, p_{n-1}),$$

delle quali le (4) sono casi particolari, e all'ultima delle quali si riduce la (5) risolvendola rispetto a $\frac{dp_{n-1}}{dx}$, si fa, sotto certe condizioni cui debbano soddisfare le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_n$, in modo analogo a quello del n. 153; ma noi crediamo qui di potere, per brevità, omettere tale dimostrazione.

Passeremo ora invece alla effettiva integrazione di equazioni differenziali d'ordine n appartenenti a tipi speciali.

Alcune operazioni coi simboli D e $x D$.

169. Premettiamo alcune proprietà dei simboli D e $x D$, dove $Du = \frac{du}{dx}$, $x Du = x \frac{du}{dx}$.

Con $D^2, D^3, \dots$ intenderemo $\frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^3}{dx^3}, \dots$. Valgono, come è no-

to, le formole (r, n interi positivi)

$$(1) \begin{cases} D(u+v) = Du + Dv, \\ (D^r + D^n)u = (D^n + D^r)u = D^n u + D^r u, D^n D^r u = D^r D^n u = D^{r+n} u. \end{cases}$$

Con $D^{-1} = \frac{1}{D}$ intenderemo l'operazione inversa di D cioè tale che $D^{-1}(Du) = u$, cioè $D^{-1}u = \int u dx + C$ o semplicemente, astraendo dalla costante, $D^{-1}u = \int u dx$. Con D^{-2} si intende $D^{-1}(D^{-1}u)$ cioè $\int dx \int u dx = \int u dx^2, \dots$

$$D^{-n}u = \frac{1}{D^n}u = \int dx \int \dots \int u dx = \int u dx^n$$

Le formole (1) valgono quindi anche per esponenti r, n interi positivi o negativi.

Sia

$$\psi(D) = A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + \dots + A_r D^r + \dots + B_1 D^{-1} + B_2 D^{-2} + \dots$$

una funzione del simbolo D ordinata per le potenze positive e negative di D ; si intende subito il significato di $\psi(D)u$, cioè

$$A_0 u + A_1 Du + A_2 D^2 u + \dots$$

Allora ha luogo la formola

$$(2) \quad \psi(D)e^{ax} = \psi(a)e^{ax}.$$

Infatti $De^{ax} = ae^{ax}$, $D^2 e^{ax} = a^2 e^{ax}, \dots$; $D^{-1}e^{ax} = D^{-1}(a^{-1}De^{ax}) = a^{-1}D^{-1}De^{ax} = a^{-1}e^{ax}$, (come risulta subito anche da

$$D^{-1}e^{ax} = \int e^{ax} dx = a^{-1}e^{ax}) \text{ e quindi } D^{-2}e^{ax} = a^{-2}e^{ax}, \dots$$

ed in generale $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, dove n è numero intero qualunque.

In conseguenza

$$\begin{aligned} \psi(D)e^{ax} &= A_0 e^{ax} + A_1 a e^{ax} + A_2 a^2 e^{ax} + \dots + B_1 a^{-1} e^{ax} + B_2 a^{-2} e^{ax} + \dots \\ &= e^{ax}(A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + B_1 a^{-1} + B_2 a^{-2} + \dots) = \psi(a)e^{ax}. \end{aligned}$$

Se u è funzione qualunque di x abbiamo la formula
www.libtool.com.cn

$$(3) \quad \psi(D)(e^{ax}u) = e^{ax}\psi(D+a)u.$$

Invero $D(e^{ax}u) = e^{ax}(Du + au) = e^{ax}(D+a)u$, da cui
 $e^{-ax}D(e^{ax}u) = (D+a)u$, formola che trasforma il simbolo $D+a$
 nel simbolo $e^{-ax}D(e^{ax})$; cosichè dalla formola precedente si
 ricava

$$e^{-ax}D[e^{ax}e^{-ax}D(e^{ax}u)] = e^{-ax}D^2(e^{ax}u) = (D+a)^2u,$$

intendendo che $(D+a)^2$ indichi $(D+a)(D+a)$; e così di seguito
 otterremo

$$e^{-ax}D^n(e^{ax}u) = (D+a)^nu, \text{ cioè}$$

$$(4) \quad D^n(e^{ax}u) = e^{ax}(D+a)^nu.$$

Relativamente al simbolo $(D+a)^n$, si riconosce subito che

$$(D+a)^nu = (D^n + naD^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2D^{n-2} + \dots)u.$$

Poniamo $(D+a)^nu = u_1$, cosichè, intendendo con $(D+a)^{-n}$
 l'operazione inversa di $(D+a)^n$, sia $u = (D+a)^{-n}u_1$.

La formola (4) diviene

$$D^n[e^{ax}(D+a)^{-n}u_1] = e^{ax}u_1,$$

da cui

$$(5) \quad e^{ax}(D+a)^{-n}u_1 = D^{-n}(e^{ax}u_1), \text{ cioè}$$

$$(D+a)^{-n}u_1 = e^{-ax}D^{-n}(e^{ax}u_1),$$

formola che definisce il simbolo $(D+a)^{-n}$. La (5) mostra che
 la (4) sussiste anche per valori interi negativi di n . Serven-
 docì della (4) si ottiene immediatamente la (3).

Relativamente al simbolo $(D+a)^{-n}$ osserviamo che

$$(D+a)^{-1}u = \frac{1}{D+a}u = e^{-ax}D^{-1}(e^{ax}u) = e^{-ax} \int e^{ax}u dx.$$

Nell'ultimo membro integrando successivamente per parti, prendendo sempre $e^{ax} dx$ per fattore differenziale, e prescindendo dalla convergenza della serie che nasce in tal guisa, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{D+a} u &= e^{-ax} \left[\frac{e^{ax}}{a} - e^{ax} \frac{Du}{a^2} + e^{ax} \frac{D^2 u}{a^3} - \frac{e^{ax} D^3 u}{a^4} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \dots \right) u, \end{aligned}$$

che è lo sviluppo che si otterrebbe se, considerando D come una quantità e non come un simbolo, si sviluppasse $\frac{1}{D+a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{D}{a}}$ in serie ordinata per le potenze di $\frac{D}{a}$. Non

ci preoccupiamo della convergenza della serie perchè la formula precedente sarà esclusivamente adoperata quando u è funzione razionale intera di x , nel qual caso essa si riduce ad un polinomio.

Possiamo intanto dire che operare col simbolo $\frac{1}{D+a}$ equivale ad operare col simbolo che si ottiene sviluppando $\frac{1}{D+a}$ per potenze ascendenti di D . Così, analogamente, si vedrebbe che

$$(D+a)^{-n} = \frac{1}{(D+a)^n} = \frac{1}{a^n} \left(1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \dots \right)^n.$$

Sia $\psi(D)$ funzione razionale intera di D ; il simbolo $\frac{1}{\psi(D)}$ deve essere definito in guisa, che operando col simbolo $\psi(D)$, di cui è noto il significato, sul risultato, ottenuto operando con $\frac{1}{\psi(D)}$ sopra una funzione u , si ottenga la funzione primitiva u . Ora sviluppiamo $\frac{1}{\psi(D)}$ in funzioni semplici, conside-

rando D come una quantità, così che risulti una somma di termini della forma $\frac{A_m}{(D-a)^m}$,

$$\frac{1}{\psi(D)} = \sum \frac{A_m}{(D-a)^m},$$

ed assumiamo quest'ultima formola come definizione del simbolo $\frac{1}{\psi(D)}$. Si riconosce allora subito che $\psi(D) \frac{1}{\psi(D)} u = u$; perchè essendo $\psi(D)$ il prodotto di termini della forma $(D-a)^m$

$$\psi(D) = A(D-a_1)^{m_1}(D-a_2)^{m_2} \dots$$

abbiamo

$$\psi(D) \frac{1}{\psi(D)} u = A \left(\sum \frac{(D-a_1)^{m_1} (D-a_2)^{m_2} \dots}{(D-a)^m} \right) u = 1 \cdot u = u.$$

In luogo poi di $\frac{1}{(D-a)^m}$ nello sviluppo di $\frac{1}{\psi(D)}$ si potranno sostituire gli sviluppi in serie per potenze di D , od anche sviluppare in serie $\frac{1}{\psi(D)}$, come ad es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AD^2 + BD + C} &= \frac{1}{C} \frac{1}{1 + \frac{AD^2 + BD}{C}} \\ &= \frac{1}{C} \left\{ 1 - \frac{AD^2 + BD}{C} + \left(\frac{AD^2 + BD}{C} \right)^2 - \dots \right\}, \\ \frac{1}{AD^2 + BD} &= \frac{1}{BD} \left(1 - \frac{AD}{B} + \left(\frac{AD}{B} \right)^2 - \dots \right) \\ &= \frac{1}{B} \left(\frac{1}{D} - \frac{A}{B} + \frac{A^2 D}{B^2} - \dots \right). \end{aligned}$$

Le formole (2), (3) ora dimostrate valgono quindi se in esse $\psi(D)$ è funzione razionale qualunque di D .

Se nella (3), poniamo $e^{ax}u = v$, abbiamo

$$\psi(D)v = e^{ax}\psi(D+a)(e^{-ax}v).$$

170. La formola di LEIBNIZ è

$$(1) D^n(uv) = uD^n v + nDuD^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2} D^2u D^{n-2}v + \dots$$

Questa formola vale anche se n è intero negativo. Invero, con successive integrazioni per parti, abbiamo

$$D^{-1}(uv) = uD^{-1}v - D^{-1}(DuD^{-1}v) = uD^{-1}v - DuD^{-2}v + D^{-1}(D^2u D^{-2}v)$$

$$= uD^{-1}v - DuD^{-2}v + D^2u D^{-3}v - D^{-1}(D^3u D^{-3}v) = \dots$$

$$= uD^{-1}v - DuD^{-2}v + D^2u D^{-3}v - D^3u D^{-4}v + D^4u D^{-5}v - \dots$$

cosichè, per provare la formola in generale, basterà, ammessa la vera per $n = -m$, dimostrarla per $n = -(m+1)$, la qual cosa si può far facilmente.

In seguito a ciò, osservando la forma del secondo membro della (1), se $\psi(D)$ indica funzione di D ordinata per potenza positive e negative intere di D avremo la formola seguente, che è la generalizzazione di quella di *Leibniz*,

$$\psi(D)(uv) = u\psi(D)v + Du\psi'(D)v + \frac{D^2u}{2}\psi''(D)v + \frac{D^3u}{2 \cdot 3}\psi'''(D)v + \dots,$$

dove $\psi'(D)$, $\psi''(D)$,... indicano le derivate di $\psi(D)$ rapporto a D .

Questa formola vale anche, come subito si riconosce, se i coefficienti di D in $\psi(D)$ contengono la variabile x e se $\psi(D)$ è funzione razionale qualunque di D .

171. Consideriamo ora il simbolo d'operazione $x D$. Con $(xD)^n$ intenderemo $(xD)(xD) \dots (xD)$, non già $x^n D^n$. Per definire il simbolo $(xD)^{-1}$, poniamo $(xD)u = v$, da cui $u = (xD)^{-1}v$; ma

$$Du = \frac{v}{x}, \quad u = D^{-1} \frac{v}{x} = \int \frac{v}{x} dx, \quad \text{cosichè} \quad (xD)^{-1}v = D^{-1} \frac{v}{x} =$$

$$\int \frac{dx}{x} v, \quad \text{e quindi} \quad (xD)^{-n}v = \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \dots \int \frac{dx}{x} v.$$

Posto $x = e^t$, abbiamo

$$xDu = x \frac{du}{dx} = e^t \frac{du}{e^t dt} = \frac{du}{dt} = D_t u,$$

cosichè il simbolo xD si trasforma in questo modo in D_t .

Se ψ indica la solita funzione, abbiamo le formole

$$\psi(xD)x^a = \psi(a)x^a, \quad \psi(xD)(x^a u) = x^a \psi(xD + a)u.$$

Invero, posto $x = e^t$, dalle (2), (3) N. 169 ricaviamo

$$\psi(D_t)e^{at} = \psi(a)e^{at}, \quad \psi(D_t)(e^{at}u) = e^{at}\psi(D_t + a)u,$$

che si trasformano nelle precedenti, sostituendo per D_t il suo valore xD e x per e^t .

Tra il simbolo xD e il simbolo D passa la relazione (n intero positivo o negativo)

$$x^n D^n = xD(xD - 1)(xD - 2) \dots (xD - n + 1).$$

Infatti è

$$xDu = xDu, \quad xD(xD - 1)u = xD(xDu - u) = x^2 D^2 u,$$

cosichè la formola vale per $n = 1, 2$. Ammettiamola vera per $n = m$, e dimostriamola per $n = m + 1$; nella

$$x^m D^m u = xD(xD - 1) \dots (xD - m + 1)u,$$

poniamo $u = (xD - m)v$ cosichè

$$D^m u = D^m(xD - m)v = xD^{m+1}v,$$

ed otterremo appunto

$$x^{m+1} D^{m+1} v = xD(xD - 1) \dots (xD - m + 1)(xD - m)v.$$

Equazioni differenziali lineari d'ordine n .

172. Sono quelle della forma

$$(1) \quad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = X,$$

dove le $a_0, a_1, \dots, a_n, X$ sono funzioni della sola x , che potranno anche in parte o tutte essere delle costanti. La integrazione della (1), che dicesi *completa*, si riduce come vedremo in seguito, a quella delle equazioni della forma

$$(2) \quad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

che diconsi *omogenee* o *senza secondo membro*, delle quali ora ci occuperemo.

Posto $\varphi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$, la (2) può scriversi

$$(2) \quad \varphi(D)y = 0.$$

Siano $y_1, y_2, \dots, y_m$ integrali particolari di questa equazione cioè tali che $\varphi(D)y_r = 0$. Avremo

$$\varphi(D)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m) = C_1 \varphi(D)y_1 + C_2 \varphi(D)y_2 + \dots + C_m \varphi(D)y_m = 0,$$

dove le C sono costanti, cosicchè $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$ è integrale della (2).

Supposto si conoscano n integrali particolari $y_1, y_2, \dots, y_n$ la

$$(3) \quad y_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

sarà integrale della (2), e sarà ancora l'integrale generale qualora si possano determinare le costanti C in modo che per $x = x_0$ la y e le $y', y'' \dots y^{(n-1)}$ acquistino valori prefissati; la qual cosa, ponendo mente alla (3) ed alle

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_n y'_n,$$

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \dots + C_n y''_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n-1)} = C_1 y^{(n-1)}_1 + C_2 y^{(n-1)}_2 + \dots + C_n y^{(n-1)}_n,$$

che da quella si ricavano, si vede aver luogo, se il determinante

www.libtool.com.cn

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

per $x=x_0$ sia diverso da zero; il che succederà quando Δ non risulti nullo identicamente, escludendo il caso speciale che x_0 sia radice della equazione in x , $\Delta=0$.

Se dunque Δ è diverso da zero, la (3) è l'integrale generale, ed allora si dice che $y_1, y_2, \dots, y_n$ costituiscono un *sistema fondamentale* di integrali particolari o un *sistema di integrali particolari distinti*, e Δ è il *determinante del sistema*.

173. Se della equazione $\varphi(D)y=0$ si conoscono m integrali particolari, la sua integrazione è ridotta alle quadrature ed a quella di una equazione differenziale d'ordine $n-m$ (nel nostro caso pure lineare); cioè, come suol dirsi, l'ordine della equazione si può abbassare di m unità.

Sia, infatti, y_1 un integrale particolare, cosicchè $\varphi(D)y_1=0$.

Posto $y=y_1u$ abbiamo, per la formola di LEIBNIZ generalizzata,

$$\begin{aligned} \varphi(D)(y_1u) &= u\varphi(D)y_1 + Du\varphi'(D)y_1 + D^2u \frac{\varphi''(D)y_1}{|2} + \dots \\ &= Du\varphi'(D)y_1 + D^2u \frac{\varphi''(D)y_1}{|2} + \dots + D_nu \frac{\varphi^{(n)}(D)y_1}{|n} = 0, \end{aligned}$$

che è pure lineare in u , ma non contiene esplicitamente u .

Ponendo $Du=v$ essa diviene la equazione lineare di ordine $n-1$ in v ,

$$v\varphi'(D)y_1 + Dv \frac{\varphi''(D)}{|2} y_1 + D^2v \frac{\varphi'''(D)}{|n} y_1 + \dots + D^{n-1}v \frac{\varphi^{(n)}(D)}{|n} y_1.$$

Indichiamo con v il suo integrale generale; allora $u = \int v dx + C_1$ è l'integrale generale della equazione in u , e

$$(1) \quad y = C_1 y_1 + y_1 \int v dx$$

è l'integrale generale della proposta equazione in y ; cosicchè il teorema è dimostrato per $m=1$.

Se della equazione in y si conoscono due integrali particolari y_1, y_2 , allora, poichè se y è integrale della proposta è $\frac{y}{y_1}$ integrale della equazione in u , sarà $\frac{y_2}{y_1}$ integrale particolare di questa equazione (è escluso il caso in cui, per essere $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$, sia $y_2 = c y_1$), e quindi $D \frac{y_2}{y_1}$ è integrale particolare della equazione di ordine $n-1$ in v . La integrazione di questa, procedendo come ora abbiamo visto, si riduce a quella di una equazione di ordine $n=2$ in una variabile w , della quale equazione indicato con w l'integrale generale, sarà, per la (1),

$$v = C_2 D \frac{y_2}{y_1} + D \frac{y_2}{y_1} \int w dx$$

l'integrale generale della equazione in v , e quindi

$$u = C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + \int D \frac{y_2}{y_1} dx \int w dx = C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_2}{y_1} \int w dx - \int \frac{y_2}{y_1} w dx,$$

e perciò

$$(2) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int w dx - y_1 \int \frac{y_2}{y_1} w dx;$$

il teorema è così dimostrato per $m=2$.

Se si conoscono tre integrali particolari y_1, y_2, y_3 della equazione proposta, saranno $D \frac{y_2}{y_1}$, $D \frac{y_3}{y_1}$ integrali particolari della

equazione in v , il cui integrale generale sarà in virtù della (2)

www.libtool.com.cn

$$v = C_2 D \frac{y_2}{y_1} + C_3 D \frac{y_3}{y_1} + D \frac{y_3}{y_1} \int z dx - D \frac{y_2}{y_1} \int \frac{D \frac{y_3}{y_1}}{D \frac{y_2}{y_1}} z dx,$$

indicando con z l'integrale generale della equazione d'ordine $n-2$ cui si riduce la integrazione della equazione in v . In conseguenza

$$u = C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + C_3 \frac{y_3}{y_1} + \int D \frac{y_3}{y_1} dx \int z dx - \int D \frac{y_2}{y_1} dx \int \frac{D \frac{y_3}{y_1}}{D \frac{y_2}{y_1}} z dx$$

e quindi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + y_3 \int z dx - y_2 \int \frac{D \frac{y_3}{y_1}}{D \frac{y_2}{y_1}} z dx + y_1 \int \left(\frac{y_2}{y_1} \frac{D \frac{y_3}{y_1}}{D \frac{y_2}{y_1}} - \frac{y_3}{y_1} \right) z dx$$

che dimostra il teorema per $m=3$. E così di seguito.

Ad esempio, se della equazione lineare di 2° ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \text{ossia} \quad \varphi(D)y = (a_0 D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$$

conosciamo un integrale particolare y_1 , osservando che

$$\varphi'(D) = 2a_0 D + a_1, \quad \varphi''(D) = 2a_0,$$

l'equazione in v risulta la

$$v(2a_0 D + a_1)y_1 + Dv a_0 y_1 = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{Dv}{v} = -2a_0 \frac{Dy_1}{y_1} - \frac{a_1}{a_0},$$

$$\text{da cui } v = C_2 \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} \frac{dx}{y_1}}}{y_1^2}, \text{ e quindi } y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} \frac{dx}{y_1}}}{y_1^2} dx.$$

Così pure se della equazione lineare omogenea di 3° ordine

$$\varphi(D)y = (a_0 D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3)y = 0$$

si conoscono due integrali particolari y_1, y_2 , si trova facilmente l'integrale generale

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \int \frac{y_1 e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')^2} - C_2 y_2 \int \frac{y_2 e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')^2}.$$

174. Come abbiamo accennato precedentemente, si trova mediante sole quadrature l'integrale generale della equazione completa $\varphi(D)y = X$, quando si conosca quello della $\varphi(D)y = 0$. Invero, se y_0 indica un integrale particolare della equazione completa cosicchè sia $\varphi(D)y_0 = X$ e y è l'integrale generale della corrispondente equazione omogenea, $y + y_0$ è l'integrale generale della proposta equazione, giacchè

$$\varphi(D)(y + y_0) = \varphi(D)y + \varphi(D)y_0 = X.$$

L'integrale y si chiama anche la *funzione complementare* nell'integrale generale della equazione completa.

Ora per trovare questo integrale particolare procediamo col seguente metodo, conosciuto col nome di *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*, e dovuto a LAGRANGE.

Sia

$$(1) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

la funzione complementare. Vediamo se sia possibile assumere per le C funzioni di x tali che y sia integrale della $\varphi(D)y = X$.

Derivando la (1), nell'ipotesi che le C siano funzioni, abbiamo

$$\begin{aligned} y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' \\ &+ C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n, \end{aligned}$$

intendendo con C' la derivata di C rapporto ad x . Supponiamo

le C tali che sia

(2) $C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0,$

cosiché allora risulterà

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_n y'_n.$$

Derivando e supponendo le C tali che

$$(3) \quad C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0,$$

avremo

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \dots + C_n y''_n.$$

Così proseguendo, fino ad avere $n-1$ equazioni come le (2), (3) tra le $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$, si ottengono le seguenti equazioni:

[illegible]

e successivamente

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_n y'_n,$$

$$y' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \dots + C_n y''_n,$$

• • • • •

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)},$$

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)}$$

$$+ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)};$$

cosiché, come si riconosce subito sostituendo il valore di y dato

dalla (1) e questi valori delle sue derivate nel primo membro della $\varphi(D)y = X$, la (1) che sarà integrale, se, determineremo $n-1$ delle C_i in guisa che soddisfacciano alle (4) e la restante di esse in modo che sia

$$(5) \quad a_0(C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}) = X,$$

ossia se per le C' prenderemo le radici delle equazioni (4), (5).

Risolvendole abbiamo

$$C_r = \frac{X}{a_0} \frac{\Delta_r}{\Delta}, \quad (r=1, 2, \dots, n),$$

dove Δ_r indica l'elemento reciproco di $y_r^{(n-1)}$ nel determinante Δ del sistema delle $y_1, y_2, \dots, y_n$.

In conseguenza

$$C_r = \int \frac{X}{a_0} \frac{\Delta_r}{\Delta} dx + c_r, \quad (r=1, 2, \dots, n),$$

dove le c_r indicano delle costanti, e

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} y_r \left(c_r + \int \frac{X}{a_0} \frac{\Delta_r}{\Delta} dx \right)$$

è l'integrale generale della $\varphi(D)y = X$, e $\sum_{r=1}^{r=n} y_r \int \frac{X}{a_0} \frac{\Delta_r}{\Delta} dx$

ne è il richiesto integrale particolare ottenuto con semplici quadrature.

Così ad es.: se conosciamo l'integrale generale, ossia due integrali particolari distinti y_1, y_2 , della equazione di secondo ordine

$$\varphi(D)y = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

l'integrale generale della $\varphi(D)y = X$ sarà

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1 \int \frac{X y_2 dx}{a_0 (y_1 y_2' - y_2 y_1')} + y_2 \int \frac{X y_1 dx}{a_0 (y_1 y_2' - y_2 y_1')}.$$

Se della $\varphi(D)y=0$ si conosce un solo integrale particolare www.libtool.com.cn y_1 , se ne ha subito un altro $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx$, come si è visto alla fine del n. 173. In conseguenza

$$y'_2 = y'_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx + \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1},$$

$$\Delta = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}, \text{ e l'integrale generale è}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} X y_1 dx + y_1 \left[\int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx \right] \left[\int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} X y_1 dx \right]$$

ossia, integrando per parti l'integrale nel terzo termine del secondo membro,

$$y = c_1 y_1 + y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} \left[\int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} X y_1 dx + c_2 \right] dx.$$

Equazioni differenziali lineari d'ordine n a coefficienti costanti — o a coefficienti funzioni speciali di x .

175. Sia la equazione

$$\varphi(D)y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0,$$

dove i coefficienti a_r sono tutti costanti. Per integrarla, vediamo se si possa determinare la costante a e la funzione v di

x in guisa che $y = e^{ax} v$ risulti integrale particolare. Ora per la formola di LEIBNIZ generalizzata e per la (2) del n. 169, abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi(D)(e^{ax}v) &= v\varphi(D)e^{ax} + Dv\varphi'(D)e^{ax} + D^2v\frac{\varphi''(D)}{2!}e^{ax} + \dots + D^n v\frac{\varphi^{(n)}(D)}{n!}e^{ax} \\ (1) \quad &= e^{ax} \left[v\varphi(a) + Dv\varphi'(a) + D^2v\frac{\varphi''(a)}{2!} + \dots + D^n v\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} \right], \end{aligned}$$

cosichè, se α è una radice semplice della equazione di grado n , $\varphi(a) = 0$, o, se si vuole, dalla equazione $\varphi(D) = 0$, dove D si intenda essere una incognita e non un simbolo, equazione detta *equazione caratteristica* della equazione lineare $\varphi(D)y = 0$, allora risulterà $\varphi(D)(e^{ax}v) = 0$ prendendo per v tale funzione che sia $Dv = 0$, cioè prendendo per v una costante C ; quindi Ce^{ax} è un integrale particolare. Se α è radice doppia della $\varphi(D) = 0$, cosichè allora $\varphi(x) = 0$, $\varphi'(x) = 0$, in virtù della (1), risulterà $\varphi(D)(e^{ax}v) = 0$ se prenderemo v tale che $D^2v = 0$, cioè $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$, da cui $\frac{dv}{dx} = C_1$, $v = C_1x + C_2$, ed allora $e^{ax}(C_1x + C_2)$ è integrale particolare, contenente due costanti arbitrarie; e così di seguito si vedrebbe che se α è radice r -upla della equazione caratteristica, nasce da essa l'integrale particolare

$$e^{ax}(C_1x^{r-1} + C_2x^{r-2} + \dots + C_{r-1}x + C_r)$$

con r costanti arbitrarie.

Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ le radici della equazione caratteristica, con $r_1, r_2, \dots, r_m$ i loro gradi di molteplicità, l'integrale generale è perciò

$$y = \sum_{s=1}^{s=m} e^{\alpha_s x} [C_{1s}x^{r_s-1} + C_{2s}x^{r_s-2} + \dots + C_{r_s s}].$$

Questa formola vale di qualunque natura siano le radici α della equazione caratteristica. Ma se i coefficienti della $\varphi(D)y = 0$

sono reali, possiamo evitare gli immaginari che in essa compariscono se vi sono delle radici α complesse, nel modo seguente. Sia $\alpha_1 = x + i\beta$ radice semplice complessa, cosichè vi sia anche la sua complessa coniugata $\alpha_2 = x - i\beta$. La parte di integrale $C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$, che proviene da queste due radici, si riduce a

$$e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x} [C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x),$$

(avendo posto $C_1 + C_2 = c_1$, $i(C_1 - C_2) = c_2$ da cui $C_1 = \frac{c_1 + ic_2}{2}$, $C_2 = \frac{c_1 - ic_2}{2}$), che è priva di immaginari e dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie qualunque. Alla espressione precedente si può anche dare la forma

$$A_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x + A_2), \text{ o la forma } B_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x + B_2),$$

dove tra le costanti c_1, c_2, A_1, A_2 e B_1, B_2 passano le relazioni

$$c_1 = A_1 \cos A_2, \quad c_2 = -A_1 \sin A_2; \quad c_1 = B_1 \sin B_2, \quad c_2 = B_1 \cos B_2.$$

cosichè le A_1, A_2 oppure le B_1, B_2 sono costanti arbitrarie.

In modo completamente analogo si troverebbe che, se α_1, α_2 sono radici doppie complesse coniugate, la parte di integrale che proviene da esse può ridursi alla forma

$$e^{\alpha x} [(c_1 x + c_2) \cos \beta x + (c_3 x + c_4) \sin \beta x]$$

o alla forma

$$e^{\alpha x} [c_1 x \cos(\beta x + c_2) + c_3 \cos(\beta x + c_4)] \text{ etc.}$$

E così di seguito se α_1, α_2 sono radici triple etc.

1) $y'' - n^2 y = 0$ ossia $(D^2 - n^2)y = 0$.

Equazione caratteristica $D^2 - n^2 = 0$, quindi $y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$ è l'integrale generale.

2) $y'' - 2my' + (m^2 + n^2)y = 0$ ossia $(D^2 - 2mD + m^2 + n^2)y = 0$.

Equaz. caratt. $D^2 - 2mD + m^2 + n^2 = 0$ le cui radici sono $m \pm in$; quindi $y = e^{mx}(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$ od anche $y = C_1 e^{mx} \cos(nx + C_2)$ od anche $y = C_1 e^{mx} \sin(nx + C_2)$ è l'integrale generale.

In particolare, se $m = 0$, si ha l'integrale $y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$ della equazione $y'' + n^2 y = 0$.

3) $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$.

Equaz. car. $D^3 - 4D^2 + 5D - 2 = (D - 1)^2(D - 2)$, quindi $y = e^x(C_1 x + C_2) + C_3 e^{2x}$ è l'integrale generale.

4) $(D^2 - D - 6)y = 0$; le radici della equaz. caratt. sono 2, $-1 + i\sqrt{2}$, $-1 - i\sqrt{2}$, quindi

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}[C_2 \cos(x\sqrt{2}) + C_3 \sin(x\sqrt{2})]$$

è l'integrale generale.

5) $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$; la equaz. car. ha le radici doppie i , $-i$, cosicchè l'integrale generale è

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x,$$

od anche

$$y = C_1 \cos(x + C_2) + C_3 x \cos(x + C_4).$$

6) Potrà avvenire che, essendo i coefficienti della equazione lineare funzioni di x , la equazione caratteristica ammetta una radice α costante r^{pla} . Allora, come si riconosce facilmente, $e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x + \dots + C_r x^{r-1})$ è integrale della proposta equazione. Così, sia la equazione

$$y''' - (3x + 2)y'' + (6x + 1)y' - 3xy = 0.$$

$$D^3 - (3x+2)D^2 + (6x+1)D - 3x = 0$$

ha l'unità per radice doppia; quindi la equaz. proposta ha l'integrale particolare $e^x(C_1 + C_2 x)$. Si potrebbe poi calcolare l'integrale generale colla formola alla fine del n. 173.

176. Sia ora la equazione completa $\varphi(D)y = X$, dove i coefficienti di D in $\varphi(D)$ sono costanti e X è funzione di x o costante. Conosciuto l'integrale generale della equazione $\varphi(D)y = 0$, sappiamo, colle formole del n. 174, trovare l'integrale generale della equazione completa. Ma per forme speciali di X giova invece cercare di calcolare un integrale particolare della equazione

$\varphi(D)y = X$, operando sopra X col simbolo $\frac{1}{\varphi(D)}$, cioè determinando y colla formola $y = \frac{1}{\varphi(D)} X$. Queste forme speciali di X sono le seguenti.

I. Sia X funzione razionale intera di x . Si sviluppi $\frac{1}{\varphi(D)}$ secondo le potenze intere di D , trascurando, fino dal principio, le potenze D^{k+1} , D^{k+2} , ... di D , se X è di grado k , giacchè allora $D^{k+1}X = 0$, $D^{k+2}X = 0$, ... Se in $\varphi(D)$ la più piccola potenza di D è la r -esima, si raccolga D^r nel denominatore, $\frac{1}{\varphi(D)} = \frac{1}{D^r} \frac{1}{\psi(D)}$, e nello sviluppo di $\frac{1}{\psi(D)}$ si trascurino le potenze D^{k+1} , ...

ESEMPI

1) $(D^2 - n^2)y = m$; $y = \frac{1}{D^2 - n^2} m = \frac{1}{-n^2} m$, e l'integrale generale è $y = -\frac{m}{n^2} + C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$.

2) $(D^2 - 2D + 1)y = x^2$; $y = \frac{1}{(1-D)^2} x^2 = (1 + D + D^2)x^2$
 $= (1 + 2D + 3D^2)x^2 = x^2 + 4x + 6$,

e l'integrale generale è

$$y = x^2 + 4x + 6 + (C_1 x + C_2) e^x.$$

$$3) (D^4 - 2D^3 + D^2)y = x^3;$$

$$y = \frac{1}{D^2(1-D)^2} x^3 = \frac{1}{D^2} (1+D+D^2+D^3)^2 x^3 = \frac{1}{D^2} (1+2D+3D^2+4D^3)x^3 \\ = \left(\frac{1}{D^2} + \frac{2}{D} + 3 + 4D \right) x^3 = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2,$$

e l'integrale generale è

$$y = C_1 x + C_2 + e^x(C_3 x + C_4) + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2.$$

$$4) (D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1)y = 1 + x + x^2;$$

$$y = \frac{1}{1-2D+2D^2} (1+x+x^2) = (1+2D+2D^2)(1+x+x^2) = 7+5x+x^2$$

e l'integrale generale è

$$y = e^x(C_1 x + C_2) + C_3 \cos x + C_4 \sin x + x^2 + 5x + 7.$$

II. Sia X un aggregato di termini della forma $e^{ax} V$; allora abbiamo

$$\varphi(D)y = \Sigma e^{ax} V, \quad y = \Sigma \frac{1}{\varphi(D)} e^{ax} V = \Sigma e^{ax} \frac{1}{\varphi(D+a)} V.$$

In particolare se V è una costante C , e a è radice r^{da} della equazione caratteristica $\varphi(D)=0$ ($r=1$ radice semplice, $r=0$ non radice) osservando che allora

$$\varphi(D+a) = \frac{\varphi^{(r)}(a)}{r!} D^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(a)}{(r+1)!} D^{r+1} + \dots,$$

sarà

$$e^{ax} \frac{1}{\varphi(D+a)} C = \frac{e^{ax} r!}{\varphi^{(r)}(a)} \frac{1}{D^r} C = C \frac{e^{ax} x^r}{\varphi^{(r)}(a)}.$$

Se V è funzione razionale intera di x , per calcolare
 $\frac{1}{\varphi(D+a)}$ V si opera come precedentemente (I).

ESEMPI

$$1) (D^2 + D + 1)y = e^{3x} + x;$$

$$y = \frac{1}{1+D+D^2} e^{3x} + \frac{1}{1+D+D^2} x = \frac{e^{3x}}{13} + (1-D)x = \frac{e^{3x}}{13} + x - 1,$$

e l'integrale generale è

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left[C_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right] + \frac{e^{3x}}{13} + x - 1.$$

$$2) (D^2 - 6D + 8)y = e^x + e^{2x}; y = \frac{e^x}{3} - \frac{xe^{2x}}{2};$$

$$\text{int. gen. } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{e^x}{3} - \frac{xe^{2x}}{2}.$$

$$3) (D^2 - 2D + 1)y = (x^2 + 1)e^{3x};$$

$$y = \frac{1}{(D-1)^2} (x^2 + 1)e^{3x} = e^{3x} \frac{1}{(D+2)^2} (x^2 + 1)$$

$$= \frac{e^{3x}}{4} \left(1 - D + \frac{3}{4} D^2 \right) (x^2 + 1) = e^{3x} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{5}{8} \right);$$

$$\text{int. gen. } y = e^x (C_1 x + C_2) + e^{3x} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{5}{8} \right).$$

III. Sia X aggregato di termini della forma $V \cos(\beta x + \alpha)$, dove V è funzione di x o costante, e α, β sono costanti. Prendiamo, per semplicità, $\varphi(D)y = V \cos(\beta x + \alpha)$, avremo

$$y = \frac{1}{\varphi(D)} [V \cos(\beta x + \alpha)];$$

posto

$$y_1 = \frac{1}{\varphi(D)} [V \operatorname{sen}(\beta x + \alpha)],$$

avremo, ($i = \sqrt{-1}$),

$$y + i y_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \{V[\cos(\beta x + \alpha) + i \operatorname{sen}(\beta x + \alpha)]\} = \frac{1}{\varphi(D)} V e^{i(\beta x + \alpha)},$$

cosicchè

$$y = R \left[\frac{1}{\varphi(D)} (V e^{i(\beta x + \alpha)}) \right] = R \left[e^{i(\beta x + \alpha)} \frac{1}{\varphi(D + i\beta)} V \right]$$

indicando col simbolo $R\gamma$ la parte reale di γ .

In modo analogo, se fosse $\varphi(D)y = V \operatorname{sen}(\beta x + \alpha)$, si troverebbe

$$y = I \left\{ \frac{1}{\varphi(D)} [V e^{i(\beta x + \alpha)}] \right\} = I \left\{ e^{i(\beta x + \alpha)} \frac{1}{\varphi(D + i\beta)} V \right\}$$

intendendo con $I\gamma$ il coefficiente di i della quantità γ .

Notiamo che si può anche operare così: $\varphi(D)y = V \cos(\beta x + \alpha)$,

$$y = \frac{1}{\varphi(D)} [V \cos(\beta x + \alpha)] = \frac{1}{\varphi(D)} \left\{ \frac{V}{2} [e^{i(\beta x + \alpha)} + e^{-i(\beta x + \alpha)}] \right\};$$

$$\varphi(D)y = V \operatorname{sen}(\beta x + \alpha), \quad y = \frac{1}{\varphi(D)} \left\{ \frac{V}{2i} [e^{i(\beta x + \alpha)} - e^{-i(\beta x + \alpha)}] \right\}.$$

ESEMPI

$$1) (D^2 + n^2)y = \cos(ax);$$

$$y = R \left[e^{iax} \frac{1}{(D + ia)^2 + n^2} \right] = R \left[e^{iax} \frac{1}{n^2 - a^2 + D^2 + 2iaD} \right] = R \left[\frac{e^{iax}}{n^2 - a^2} \frac{1}{1 + \frac{D^2 + 2iaD}{n^2 - a^2}} \right]$$

$$= R \left[\frac{e^{iax}}{n^2 - a^2} \right] = \frac{\cos ax}{n^2 - a^2};$$

$$\text{int. gen. } y = C_1 \cos nx + C_2 \operatorname{sen} nx + \frac{\cos ax}{n^2 - a^2}.$$

Se $a=n$,

www.libtool.com.cn

$$y = R \left[e^{inx} \frac{1}{D^2 + 2inD} \right] = R \left[e^{inx} \frac{1}{2inD} \right] = R \left[\frac{e^{inx} x}{2in} \right] = \frac{x \sin nx}{n}$$

$$2) (D^4 + 2D^2 + 1)y = x^2 \cos ax,$$

$$\begin{aligned} y &= R \left\{ e^{iax} \frac{1}{(D + ia)^2 + 1} x^2 \right\} = R \left\{ e^{iax} \frac{1}{(1 - a^2 + 2iaD + D^2)} x^2 \right\} \\ &= R \left\{ \frac{e^{iax}}{(1 - a^2)^2} \left(1 - \frac{2iaD + D^2}{1 - a^2} - \frac{4a^2 D^2}{(1 - a^2)^2} \right) x^2 \right\} = R \left\{ \frac{e^{iax}}{(1 - a^2)^2} \left(1 - \frac{4iaD}{1 - a^2} - \frac{(10a^2 + 2)D^2}{(1 - a^2)^2} \right) x^2 \right\} \\ &= R \left\{ \frac{e^{iax}}{(1 - a^2)^2} \left(x^2 - \frac{8iax}{1 - a^2} - \frac{4(5a^2 + 1)}{(1 - a^2)^2} \right) \right\} = \frac{\cos ax}{(1 - a^2)^2} \left[x^2 - \frac{4(5a^2 + 1)}{(1 - a^2)^2} \right] + \frac{8ax \sin x}{(1 - a^2)^2}; \end{aligned}$$

la funzione complementare è $(C_1 x + C_2) \cos x + (C_3 x + C_4) \sin x$.

Se $a^2 = 1$, poniamo sia $a = 1$, è

$$\begin{aligned} y &= R \left\{ e^{ix} \frac{1}{(2iD + D^2)^2} x^2 \right\} = R \left\{ e^{ix} \frac{1}{-4D^2} \left(1 - \frac{D}{2i} - \frac{D^2}{4} \right)^2 x^2 \right\} \\ &= R \left\{ -\frac{e^{ix}}{4} \frac{1}{D^2} \left(1 + iD - \frac{3}{4} D^2 \right) x^2 \right\} = R \left\{ -\frac{e^{ix}}{4} \left(\frac{1}{D^2} + \frac{i}{D} - \frac{3}{4} \right) x^2 \right\} \\ &= R \left\{ -\frac{e^{ix}}{4} \left(\frac{x^4}{12} + \frac{ix^3}{3} - \frac{3}{4} x^2 \right) \right\} = -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{x^4}{12} - \frac{3}{4} x^2 \right) \cos x - \frac{x^3}{3} \sin x \right]. \end{aligned}$$

$$3) (D^2 + 4)y = x \sin^2 x; \text{ osservando che } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \frac{1}{D^2 + 4} x - \frac{1}{2} R \left\{ e^{2ix} \frac{1}{(D + 2i)^2 + 4} x \right\} = \frac{x}{8} - \frac{1}{2} R \left\{ e^{2ix} \frac{1}{4iD} \frac{1}{1 + \frac{D}{4i}} x \right\} \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{2} R \left\{ \frac{e^{2ix}}{4i} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{4i} \right) x \right\} = \frac{x}{8} - \frac{x}{32} \cos 2x - \frac{x^2}{16} \sin 2x; \end{aligned}$$

$$\text{int. gen. } y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{8} - \frac{x}{32} \cos 2x - \frac{x^2}{16} \sin 2x.$$

$$4) (D^2 - 1)y = xe^x \sin 2x,$$

$$y = I \left\{ e^{2ix} \frac{1}{(D+2i)^2 - 1} (xe^x) \right\} = I \left\{ e^x e^{2ix} \frac{1}{(D+2i+1)^2 - 1} x \right\} = I \left\{ \frac{e^x e^{2ix}}{2(2i-2)} \frac{1}{1 + \frac{2i+1}{2i-2}} x \right\}$$

$$= I \left\{ \frac{e^x e^{2ix}}{2(2i-2)} \left(x - \frac{2i+1}{2i-2} \right) \right\} = -\frac{e^x}{8} \left[(x-1) \sin 2x + \left(x + \frac{1}{2} \right) \cos 2x \right];$$

$$\text{int. gen. } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{e^x}{8} \left[(x-1) \sin 2x + \left(x + \frac{1}{2} \right) \cos 2x \right].$$

IV. Il caso generale in cui X sia funzione qualunque di x si può pure trattare con questo metodo. Sia $\varphi(D)y = X$, da cui $y = \frac{1}{\varphi(D)} X$. Sviluppando $\frac{1}{\varphi(D)}$ in frazioni semplici abbiamo

$$y = \frac{1}{\varphi(D)} X = \sum \frac{A_m}{(D-a)^m} X = \sum A_m e^{ax} \frac{1}{D^m} e^{-ax} X = \sum A_m e^{ax} \int \dots \int e^{-ax} X dx^m.$$

ESEMPI

1) $y^{(n)} = f(x)$; integrale particolare

$$y = \frac{1}{D^n} f(x) = \int dx \int \dots \int f(x) dx = \int f(x) dx^n;$$

e la funzione complementare è

$$C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

$$2) (D^2 + 3D + 2)y = \frac{x}{(1+x)^2}; \quad y = e^{-x} \int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} - e^{-2x} \int \frac{e^{2x} x dx}{(1+x)^2}.$$

$$\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} \quad (\text{es. 17, pag. 48}), \quad \int \frac{e^{2x} x dx}{(1+x)^2} = \int \frac{e^{2x} dx}{1+x} - \int \frac{e^{2x} dx}{(1+x)^2},$$

e integrando per parti l'ultimo integrale

$$\int \frac{e^{2x} x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^{2x}}{1+x} - \int \frac{e^{2x} dx}{1+x},$$

www.libtool.com.cn $y = e^{-x} \int \frac{e^{2x} dx}{1+x};$

l'integrale generale è

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x} \int \frac{e^{2x} dx}{1+x}.$$

$$3) (D^2 - 1)y = x \log x; y = \frac{1}{2} \frac{1}{D-1} x \log x - \frac{1}{2} \frac{1}{D+1} x \log x,$$

e adoperando la formola di LEIBNIZ

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} x \frac{1}{D-1} \log x - \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2} \log x - \frac{1}{2} x \frac{1}{D+1} \log x + \frac{1}{2} \frac{1}{(D+1)^2} \log x \\ &= \frac{x e^x}{2} \int e^{-x} \log x dx - \frac{e^x}{2} \int dx \int e^{-x} \log x dx \\ &\quad - \frac{x e^{-x}}{2} \int e^x \log x dx + \frac{e^{-x}}{2} \int dx \int e^x \log x dx; \end{aligned}$$

la funzione complementare è $C_1 e_x + C_2 e^{-x}$.

$$\begin{aligned} 4) (D^2 - 2)y &= 4x^2 e^{x^2}; y = \sqrt{2} \left(\frac{1}{D - \sqrt{2}} - \frac{1}{D + \sqrt{2}} \right) x^2 e^{x^2} \\ &= \sqrt{2} \{ e^{x^2} \int x^2 e^{-x^2 - x\sqrt{2}} dx - e^{-x^2} \int x^2 e^{x^2 + x\sqrt{2}} dx \}. \end{aligned}$$

Per calcolare il primo integrale poniamo $x = u + \frac{1}{\sqrt{2}}$, così che esso diventa $e^{-\frac{1}{2}} \int \left(u^2 + \frac{1}{2} + u\sqrt{2} \right) e^{u^2} du$, e poichè

$$\int u^2 du = u \frac{e^{u^2}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{u^2} du, \text{ si riduce a}$$

$$e^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{ue^{u^2}}{2} + \sqrt{2} \int ue^{u^2} du \right] = \frac{e^{-\frac{1}{2}} e^{u^2}}{2} (u + \sqrt{2}) = \frac{e^{-\frac{1}{2} + (x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2}}{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right);$$

posto $x = v - \frac{1}{\sqrt{2}}$, si trova analogamente per il valore del secondo integrale, $\frac{e^{-\frac{1}{2} + (x + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}}{2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)$, e perciò

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ e^{\frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + (x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) - e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + (x + \frac{1}{\sqrt{2}})^2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) \right\} = e^{x^2},$$

e l'integrale generale è

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}.$$

177. Anche le equazioni lineari della forma

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = X,$$

dove le $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono costanti, si integrano con metodo analogo a quello per le equazioni a coefficienti costanti.

Per integrare la equazione

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

indicando con $\mathfrak{D}$ il simbolo d'operazione $x \frac{d}{dx} = xD$, trasformiamola mediante la relazione (n. 177)

$$x^m D^m = \mathfrak{D}(\mathfrak{D} - 1)(\mathfrak{D} - 2) \dots (\mathfrak{D} - m + 1),$$

cosicchè essa diventerà

$$\{a_0 \mathfrak{D}(\mathfrak{D} - 1) \dots (\mathfrak{D} - n + 1) + a_1 \mathfrak{D}(\mathfrak{D} - 1) \dots (\mathfrak{D} - n + 2) + \dots + a_{n-1} \mathfrak{D} + a_n\} y = \varphi(\mathfrak{D}) y = 0.$$

Vediamo di determinare la costante x e la funzione v di x in modo che $y = x^\alpha v$ riesca integrale della equazione proposta. Osservando che

$$\varphi(\zeta)(x^\alpha v) = x^\alpha \zeta(\zeta + \alpha)v = x^\alpha \left\{ \varphi(x) + \varphi'(x)\zeta + \frac{\varphi''(x)}{2}\zeta^2 + \dots \right\} v,$$

se α è radice semplice della equazione $\varphi(\zeta) = 0$, che chiameremo, seguendo il FUCHS, *equazione determinante*, basterà prendere v uguale ad una costante C , perchè $y = Cx^\alpha$ risulti integrale della proposta equazione; se α è radice doppia della equazione determinante, prenderemo v in modo che sia $\zeta^2 v = 0$, $\zeta^3 v = 0 \dots$, cosicchè, osservando che $\zeta \log x = 1$ e quindi $\zeta^2 \log x = 0, \dots$, prenderemo $v = C_1 \log x + C_2$ ed allora $y = x^\alpha (C_1 \log x + C_2)$ è integrale particolare con due costanti arbitrarie; e così se α è radice tripla della equazione determinante, si riconosce che $y = x^\alpha [C_1 (\log x)^2 + C_2 \log x + C_3]$ è integrale, con tre costanti arbitrarie, e così di seguito. Così chè se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono le radici della equazione determinante, $r_1, r_2, \dots, r_m$ i loro gradi di molteplicità, l'integrale generale della equazione proposta è

$$y = \sum_{s=1}^{s=m} x^{\alpha_s} [C_{1s} (\log x)^{r_s-1} + C_{2s} (\log x)^{r_s-2} + \dots + C_{r_s s}].$$

Se, essendo $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ reali, α_1, α_2 sono radici complesse coniugate semplici, $\alpha_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha_2 = \alpha - i\beta$, della equazione determinante, la parte di integrale generale che da esse proviene

$$C_1 x^{\alpha+i\beta} + C_2 x^{\alpha-i\beta} = x^\alpha [C_1 x^{i\beta} + C_2 x^{-i\beta}] = x^\alpha [C_1 e^{i\beta \log x} + C_2 e^{-i\beta \log x}]$$

si riduce, come immediatamente si riconosce, alla forma

$$x^\alpha [c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x)];$$

e così, analogamente, se α_1, α_2 sono radici doppie complesse coniugate, la parte di integrale,

$$x^{\alpha+i\beta}(C_1 + C_2 \log x) + x^{\alpha-i\beta}(C_3 + C_4 \log x),$$

che da esse proviene, si riduce alla forma

$$x^\alpha \{ (c_1 + c_2 \log x) \cos(\beta \log x) + (c_3 + c_4 \log x) \sin(\beta \log x) \},$$

e così di seguito.

Determinata così la funzione complementare della equazione $\varphi(\vartheta)y = X$, per averne un integrale particolare nel caso che X sia una funzione razionale intera di $\log x$, o della forma $x^m V$, si opera, analogamente a quanto abbiamo visto nel n. 176, col simbolo $\frac{1}{\varphi(\vartheta)}$ sopra X .

Le equazioni della forma

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = X$$

si riducono alle precedenti col porre $ax+b = z$.

Notiamo ancora che le equazioni che abbiamo studiate ora si riducono a quelle a coefficienti costanti ponendo $x = e^z$.

ESEMPI

1) $x^2 y'' + xy' - y = \log x$, $\varphi(\vartheta) = \vartheta(\vartheta-1) + \vartheta - 1 = \vartheta^2 - 1$, $y = \frac{1}{\vartheta^2 - 1} \log x$, e siccome possiamo subito trascurare le potenze seconde di ϑ perchè $\vartheta^{n+1}(\log x)^n = 0$, abbiamo $y = -\log x$; le radici della equazione determinante essendo ± 1 , la funzione complementare è $C_1 x + C_2 x^{-1}$, e quindi l'integrale generale è

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x} - \log x.$$

$$2) x^2 y'' - xy' + 2y = x \log x, \varphi(\vartheta) = \vartheta^2 - 2\vartheta + 2, \\ y = \frac{1}{\vartheta^2 - 2\vartheta + 2} x \log x = x \frac{1}{(\vartheta+1)^2 - 2(\vartheta+1) + 2} \log x = x \frac{1}{\vartheta^2 + 1} \log x = x \log x,$$

e l'integrale generale è

$$y = x [C_1 \cos(\log x) + C_2 \sin(\log x)] + x \log x.$$

3) $x^4 y^{IV} + 6x^3 y''' + 9x^2 y'' + 2xy' + y = (1 + \log x)^4$, $\varphi(3) = (3^4 + 1)^4$,
www.libtool.com.cn

$$y = \frac{1}{(3^4 + 1)^4} (1 + \log x)^4 = (1 - 3^4)^4 (1 + \log x)^4 = (1 - 2 \cdot 3^4) (1 + \log x)^4 = (1 + \log x)^4 - 4;$$

int. gen.

$$y = (C_1 + C_2 \log x) \cos(\log x) + (C_3 + C_4 \log x) \sin(\log x) + (1 + \log x)^4 - 4.$$

4) $x^2 y'' - 2y = x + \cos x$, $\varphi(3) = 3^2 - 3 - 2$,

$$y = \frac{1}{3^2 - 3 - 2} (x + \cos x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3^2 - 3 - 2} \cos x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3+1} \right) \cos x$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} x^2 \frac{1}{3} x^{-2} \cos x - \frac{1}{3} x^{-1} \frac{1}{3} x \cos x$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \int \frac{\cos x dx}{x^3} - \frac{1}{3x} \int \cos x dx,$$

e, poichè

$$\int \frac{\cos x}{x^3} dx = -\frac{\cos x}{2x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{x^2} dx = -\frac{\cos x}{2x^2} + \frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{x} dx,$$

sarà

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{3x} - \frac{\cos x}{6} + \frac{x \sin x}{6} - \frac{x^2}{6} \int \frac{\cos x dx}{x};$$

la funzione complementare è $C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$.

ESERCIZI

1. $y''' - 7y' + 6y = x^2$,

int. gen. $y = C_1 e^x + e^{3x} (C_2 e^{x/15} + C_3 e^{-x/15}) + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{18}$.

2. $y^{IV} - y = e^x$, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{4} x e^x$.

$$3. y^{iv} - 2y^{iv} + 5y''' - 10y'' - 36y' + 72y = e^{mx},$$

www.libtool.com.cn

$$y = \frac{e^{mx}}{(m-2)^2(m+2)(m^2+9)} + e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-3x} + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x;$$

se $m = -2$ l'integrale particolare è $\frac{x e^{-2x}}{52}$, se $m = 2$ è $\frac{x^2 e^{2x}}{104}$.

$$4. y^{iv} + 5y'' - 14y = \sin(ax),$$

$$y = C_1 e^{x/\sqrt{2}} + C_2 e^{-x/\sqrt{2}} + C_3 \cos(x/\sqrt{7}) + C_4 \sin(x/\sqrt{7}) + \frac{\sin ax}{a^4 - 5a^2 - 14};$$

se $a = \pm \sqrt{7}$ l'int. particolare è $\pm \frac{x \cos(x/\sqrt{7})}{18\sqrt{7}}$.

$$5. y'' - 9y' + 20y = x^2, \quad y = \frac{x^3}{20} + \frac{9x}{200} + \frac{61}{4000} + C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}.$$

$$6. (D-a)^n y = e^{ax}, \quad y = e^{ax} \left(C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1} + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \right).$$

7. Sia la equazione $\varphi(D)y = e^{a_1 x} + e^{a_2 x} + \dots + e^{a_n x}$, dove $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono le radici di $\varphi(D) = 0$. L'integrale generale è, se le radici a sono tutte diverse,

$$y = C_1 e^{a_1 x} + \dots + C_n e^{a_n x} + x \left\{ \frac{e^{a_1 x}}{\varphi'(a_1)} + \frac{e^{a_2 x}}{\varphi'(a_2)} + \dots + \frac{e^{a_n x}}{\varphi'(a_n)} \right\};$$

se $a_1 = a_2$, è

$$y = e^{a_1 x} (C_1 + C_2 x) + \dots + x \left\{ \frac{x e^{a_1 x}}{\varphi''(a_1)} + \frac{e^{a_3 x}}{\varphi'(a_3)} + \dots + \frac{e^{a_n x}}{\varphi'(a_n)} \right\}$$

e così di seguito.

$$8. (D^4 - 1)^2 y = x^4 e^x,$$

$$y = e^x (C_1 + C_2 x) + e^{-x} (C_3 + C_4 x) + (C_5 + C_6 x) \cos x + (C_7 + C_8 x) \sin x$$

$$+ \frac{e^x}{16} \left\{ \frac{x^6}{30} - \frac{3x^5}{5} + \frac{19x^4}{4} - 20x^3 + \frac{171x^2}{4} \right\}.$$

9. $(D^4 + n^4)y = \text{sen}(\lambda x) + e^{\mu x} + x^5$,
www.libtool.com.cn

$$y = \frac{x^5}{n^4} - \frac{120x}{n^5} + \frac{e^{\mu x}}{(\mu \log \rho)^4 + n^4} + \frac{\text{sen}(\lambda x)}{n^4 + \lambda^4} \\ + (C_1 e^{\frac{nx}{\sqrt{2}}} + C_2 e^{-\frac{nx}{\sqrt{2}}}) \cos \frac{nx}{\sqrt{2}} + (C_3 e^{\frac{nx}{\sqrt{2}}} + C_4 e^{-\frac{nx}{\sqrt{2}}}) \text{sen} \frac{nx}{\sqrt{2}}.$$

10. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x} (1 + e^{-x}) \log(1 + e^x).$$

11. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 3x + x^3$,

$$y = x(C_1 \log x + C_2) + C_3 x^2 + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2} x (\log x)^2.$$

12. $x^2 y'' - (2m - 1)xy' + (m^2 + n^2)y = n^2 x^m \log x$,

$$y = x^m [C_1 \cos(n \log x) + C_2 \text{sen}(n \log x)] + x^m \log x.$$

13. $(1+x)^3 y''' + (1+x)^2 y'' + 3(1+x)y' - 8y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$,

$$y = C_1 (1+x)^3 + C_2 \cos[2 \log(1+x)] + C_3 \text{sen}[2 \log(1+x)] \\ - \frac{8}{51} \sqrt{1+x} + \frac{8}{85} \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

14. $x^2 (\log x - 1) y'' - xy' + y = 0$, $y = C_1 x + C_2 \log x$.

15. $(1+x^3)x^2 y'' + (1+2x^3)xy' - (4+2x^3)y = 0$; si determini un integrale particolare della forma x^m ; l'integrale generale è

$$y = \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^2} \left\{ 3x(1+x^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \log \frac{x^2 + x(1+x^3)^{\frac{1}{3}} + (1+x^3)^{\frac{2}{3}}}{[(1+x^3)^{\frac{1}{3}} - x]^2} \right. \\ \left. + \sqrt{3} \arctg \frac{2(1+x^3)^{\frac{1}{3}} + x}{x\sqrt{3}} \right\}.$$

16. $y'' + 2(X+a)y' + \left(\frac{dX}{dx} + X^2 + 2aX + b \right) y = 0$, dove X è

funzione della sola x ;

www.libtool.com.cn

$$y = e^{-\int (x+a) dx} (C_1 e^{x\sqrt{a^2-b}} + C_2 e^{-x\sqrt{a^2-b}}) \text{ se } a^2 - b > 0 \text{ etc.}$$

(Si ponga $y = v e^{-\int (x+a) dx}$).

17. $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$, $y = C_1 e^{1/\sqrt{x}} + C_2 e^{-1/\sqrt{x}}$. (Si faccia un cambiamento di variabile molto semplice).

18. $x^2 y'' - (1+ax)y' + ay = bx^2$, $y = C_1 e^{ax} + C_2(1+ax) - \frac{b}{a}x^2$.
(La equaz. caratt. relativa alla equaz. senza secondo membro ha la radice a).

$$19. y'' + (a+2bx)y' + 2abxy = 0, y = e^{-ax} \left\{ C_1 + C_2 \int e^{ax-2bx^2} dx \right\}.$$

20. Se y_1 è integrale particolare della equazione

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

$y_1 e^{\int P dx}$ sarà integrale particolare della equazione

$$y'' - Py' + \left(Q - \frac{dP}{dx} \right) y = 0.$$

21. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y = \frac{1}{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ (la equaz. ammette l'int. part. $y = \frac{\sin x}{x}$).

$$22. y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) y = 0, y = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

23. $y''' + P(x^2 y'' - 2xy' + 2y) = 0$; si determinino due int. particolari, e si calcoli poi l'integrale generale

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x \int \frac{e^{-\int P x^2 dx} dx}{x^2} - C_3 x^2 \int \frac{e^{-\int P x^2 dx} dx}{x^3}.$$

$$24. (x^2+2)y''' - 2xy'' + (x^2+2)y' - 2xy = x^2+2,$$

www.libtool.com.cn

$$y = \left(C_1 + 2 \int \frac{\sin x - x \cos x}{x^2+2} dx \right) \sin x + \left(C_2 + 2 \int \frac{\cos x + x \sin x}{x^2+2} dx \right) \cos x \\ + x^2 \left[C_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right].$$

**Integrazione di alcune equazioni differenziali
d'ordine superiore al primo.**

178. Equazioni della forma $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$. Se $n=2$,

cioè se si ha la equazione $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si pone $\frac{dy}{dx} = p$, ed

allora $\frac{dp}{dx} = f(p)$, da cui

$$(1) \quad x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1;$$

inoltre dalla $dy = p dx = \frac{p dp}{f(p)}$ si ricava

$$(2) \quad y = \int \frac{p dp}{f(p)} + C_2.$$

Le (1), (2) costituiscono l'integrale generale della equazione proposta, ed eliminando p tra esse lo si ottiene sotto la forma $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Trovata la (1), se da essa si può ricavare p espresso per x , $p = \psi(x, C_1)$, si può terminare l'integrazione, osservando che quest'ultima equazione ci dà

$$y = \int \psi(x, C_1) dx + C_2,$$

che è il richiesto integrale.

Nel caso generale, si pone $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$, ed allora la equazione proposta diviene $\frac{dp}{dx} = f(p)$ dalla quale si ha la (1). Se da essa si può ricavare p espresso per x , $p = \psi(x, C_1)$, si avrà per compiere la integrazione, da integrare l'equazione lineare $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi(x, C_1)$.

Se dalla (1) non si può ricavare p espresso per x , si osservi che, essendo $dx = \frac{dp}{f(p)}$, dalla $y^{(n-1)} = p$ ricaviamo

$$y^{(n-1)}dx = dy^{(n-2)} = p \frac{dp}{f(p)},$$

dalla quale

$$y^{(n-2)} = \int p \frac{dp}{f(p)} + C_2,$$

ed, in modo analogo, da questa

$$y^{(n-3)} = \int \frac{dp}{f(p)} \int p \frac{dp}{f(p)} + C_2 x + C_3,$$

e così di seguito, finchè si ottiene

$$(3) y = \int \frac{dp}{f(p)} \int \frac{dp}{f(p)} \dots \int p \frac{dp}{f(p)} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \dots + C_{n-2} x + C_n$$

e le (1), (3) costituiscono l'integrale generale, che, eliminando p tra esse, assume la forma $\psi(x, y, C_1, C_2 \dots C_n) = 0$.

ESEMPIO. — $y''y''' = \sqrt{b^2 + y''^2}$.

Posto $y'' = p$, è $f(p) = \frac{\sqrt{b^2 + p^2}}{p}$ e la (1) ci dà

$x = \sqrt{b^2 + p^2} + C_1$, dalla quale $p = y'' = \sqrt{(x - C_1)^2 - b^2}$, equa-

zione lineare, il cui integrale è

www.libtool.com.cn

$$y = C_2 x + C_3 + \int dx \int dx \sqrt{(x - C_1)^2 + b^2};$$

posto $x - C_1 = z$ è

$$\begin{aligned} \int dx \int dx \sqrt{(x - C_1)^2 + b^2} &= \int dz \int dz \sqrt{z^2 + b^2} \\ &= \int \frac{dz}{2} \left\{ z \sqrt{z^2 + b^2} - b^2 \log(z + \sqrt{z^2 + b^2}) \right\} \\ &= \frac{1}{6} (z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{b^2}{2} \int dz \log(z + \sqrt{z^2 + b^2}) \\ &= \frac{1}{6} (z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{b^2}{2} \left[2 \log(z + \sqrt{z^2 + b^2}) - \int \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \\ &= \frac{z^2 + 2b^2}{6} \sqrt{z^2 + b^2} - \frac{b^2}{2} z \log(z + \sqrt{z^2 + b^2}), \end{aligned}$$

e l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6} [(x - C_1)^2 + 2b^2] \sqrt{(x - C_1)^2 + b^2} \\ &\quad - \frac{b^2}{2} (x - C_1) \log[x - C_1 + \sqrt{(x - C_1)^2 + b^2}] + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

179. Equazioni della forma $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$. Se $n=2$,

abbiamo $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y)$, che possiamo scrivere così

$$2 \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} dx = 2f(y) dy \quad \text{ossia} \quad d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2f(y) dy,$$

da cui $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \int f(y) dy + C_1$, dalla quale

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1},$$

e da questa

$$(1) \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} + C_2,$$

che è l'integrale generale della proposta equazione.

Nel caso generale, posto $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, l'equazione proposta diviene $\frac{d^2p}{dx^2} = f(p)$, che, in virtù della (1), dà

$$(2) \quad x = \int \frac{dp}{\sqrt{2 \int f(p) dp + C_1}} + C_2.$$

Se da questa si potrà ottenere $p = \psi(x, C_1, C_2)$, rimarrà da integrare la equazione differenziale lineare $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \psi(x, C_1, C_2)$.

Se non può ottenersi questo valore di p , procedendo in modo analogo a quello del n. precedente ed osservando che

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2 \int f(p) dp + C_1}} = \frac{dp}{\varphi(p)},$$

si arriva alla formola

$$y = \int \frac{dp}{\varphi(p)} \int \dots \int \frac{p dp}{\varphi(p)} + C_3 x^{n-2} + C_4 x^{n-4} + \dots C_{n-1} x + C_n.$$

ESEMPIO. $y'' = \frac{1}{y^3}$. Posto $y' = p$, la (2) diviene

$$x = \frac{1}{C_1} \sqrt{C_1 p^2 - 1} + C_2,$$

da cui

$$p = y' = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \sqrt{(C_1 x + C_2)^2 + 1},$$

avendo scritto C_2 in luogo di $-C_1C_2$, la quale integrata dà

$$y = \frac{1}{2C_1\sqrt{C_1}} \left\{ (C_1x + C_2) \sqrt{(C_1x + C_2)^2 + 1} + \log [C_1x + C_2 + \sqrt{(C_1x + C_2)^2 + 1}] \right\} + C_3.$$

180. Equazioni della forma $f(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.
Si abbassano di m unità ponendo $y^{(m)} = p$, giacchè si riducono così alla forma

$$f(x, p, p', \dots, p^{(n-m)}) = 0.$$

Se da questa si può ricavare p , $p = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m})$, la integrazione della equazione lineare $y^{(m)} = p = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m})$ ci darà l'integrale generale della proposta.

ESEMPIO. — Posto $y'' = p$, la $y'' = xy''' + f(y''')$ diviene $p = xp' + f(p')$, che è una equazione di CLAIRAUT, il cui integrale generale è $p = C_1x + f(C_1)$; in conseguenza $y'' = C_1x + f(C_1)$, da cui successivamente,

$$y' = C_1 \frac{x^2}{2} + f(C_1)x + C_2, \quad y = C_1 \frac{x^3}{6} + f(C_1) \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

che è l'integrale generale della equazione proposta.

La equazione di CLAIRAUT ammette anche l'integrale singolare ottenuto eliminando p' tra la $p = xp' + f(p')$ e la $x + f'(p') = 0$, che, posto $p = y''$, può considerarsi come un integrale *primo singolare* della equazione proposta, da cui poi si ricaverà un integrale, con due costanti arbitrarie, della equazione proposta. Così, ad es.: l'integrale generale della equa-

zione $y'' = xy''' + y'''^2$ è $y = C_1 \frac{x^3}{6} + C_1^2 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$, e l'integrale primo singolare è $y'' = -\frac{x^2}{4}$, da cui si ottiene l'integrale della proposta, con due costanti, $y = -\frac{x^4}{48} + C_1x + C_2$.

181. Equazioni della forma $f(y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$. Queste equazioni non contenenti esplicitamente la variabile indipendente

x si abbassano di una unità ponendo $y' = \frac{dy}{dx} = p$ e prendendo y come variabile indipendente.

Infatti, osservando che dalla posizione precedente risulta $\frac{d}{dx} = p \frac{d}{dy}$, avremo

$$y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad y''' = p \left\{ p \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right\},$$

$$y^{iv} = p \left\{ p^2 \frac{d^3p}{dy^3} + 3(p+1) \frac{dp}{dy} \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^3 \right\} \dots$$

dalle quali si vede che y'' è espresso per $\frac{dp}{dy}$, y''' è espresso mediante la derivata prima e seconda di p rapporto ad y , e così via; cosichè la nostra equazione assumerà la forma $\varphi \left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}} \right) = 0$, che è di ordine $n-1$.

ESEMPIO. — La equazione $5 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 - 3 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{d^4y}{dx^4} = 0$ si abbassa intanto di due unità, perchè non contiene y e y' , ponendo $\frac{d^2y}{dx^2} = z$; essa diviene allora $5 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - 3z \frac{d^2z}{dx^2} = 0$, la quale, non contenendo la x esplicitamente, si abbassa di una unità ponendo $\frac{dz}{dx} = p$ e prendendo z per variabile indipendente. In virtù della prima delle (1) essa diviene $5p^2 - 3zp \frac{dp}{dz} = 0$, dalla quale, separando le variabili e integrando, si ottiene $z^5 = C_1 p^3$, $p = \frac{1}{C_1} z^{\frac{3}{5}}$ ed in conseguenza $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{C_1} z^{\frac{5}{5}}$ da cui $x + C_2 = \frac{C_1}{z^{\frac{1}{5}}}$ (avendo ora scritto C_1 in luogo di $-\frac{3}{2}C_1$) e da questa $z = \frac{C_1}{(x + C_2)^{\frac{5}{3}}}$, (dove C_1 è in luogo di $C_1^{\frac{3}{5}}$); ed in ul-

dalle quali si vede che $y^{(r)}$ che è di dimensione $n-r$ contiene come fattore $e^{(n-r)t}$, e t non comparisce esplicitamente altro che come esponente di e . Così ché, se la equazione è omogenea di grado k , si raccoglierà in ogni suo termine e^{kt} , e la equazione, liberata dal fattore e^{kt} , non conterrà esplicitamente la variabile indipendente t ; essa quindi si abbassa di una unità come si è visto nel numero precedente.

È notevole il seguente caso particolare. Supponiamo che le dimensioni dei termini della equazione $f(x, y'', y''', \dots) = 0$ siano $kn + k_1, kn + k_2, kn + k_3, \dots$. Non vi è allora che il solo valore $n = \infty$ che renda eguali le dimensioni dei suoi termini e la equazione è così omogenea di indice infinito. Il numero kn che comparisce nella dimensione di ciascun termine indica che essa contiene in ciascun termine le quantità $y', y'', y''' \dots$ elevate a degli esponenti la cui somma è k , cioè che la funzione $f(x, y', y'', \dots)$ è omogenea di grado k nelle quantità $y, y', y'', \dots$. Diremo allora che la equazione proposta è *omogenea in y e nelle sue derivate*, e queste equazioni sono omogenee di indice infinito. Ma ad esse non si può applicare il precedente procedimento per le equazioni omogenee di indice n . Per abbassarne l'ordine di una unità si pone $y = e^{\int x dx}$, da cui

$$(2) \quad y' = x e^{\int x dx}, \quad y'' = (x' + x^2) e^{\int x dx}, \quad y''' = (x'' + 3xz' + x^3) e^{\int x dx}, \dots$$

dalle quali si scorge che la derivata $y^{(r)}$ contiene solo la derivata $x^{(r-1)}$. Sostituendo nella equazione proposta, si raccoglie un fattore $e^{k \int x dx}$ in ogni termine, e la equazione in x che si ottiene, liberata da questo fattore, è di ordine inferiore di una unità di quello della equazione in y .

Se poi $k_1 = k_2 = k_3 \dots$ tutti i termini della equazione hanno la stessa dimensione $kn + k$, qualunque sia l'indice n ; gioverà allora, in generale, prendere $n = 0$, e trasformare perciò la equazione colle formole $x = e^t, y = x e^{e^t} = z$, ossia cambiare la sola variabile indipendente da x in t .

Si potrà anche far uso della sostituzione $y = e^{\int x dx}$, che corrisponde al supporre $n = \infty$.

1) $ax^2y'' = (y - xy')^2$. Come si trova subito, è omogenea di indice *uno*. Posto $x = e^t$, $y = e^t z$ ed usando le formole (1), essa diviene $a \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \right) = \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$, che si integra ponendo

$$\frac{dz}{dt} = p, \text{ perchè diventa } adp = (p^2 - ap) dt, \text{ da cui}$$

$$dt = \frac{adp}{p^2 - ap}, \quad \frac{p-a}{p} = C_1 e^t, \quad p = \frac{a}{1 - C_1 e^t}, \text{ e quindi}$$

$$z = a \int \frac{dt}{1 - C_1 e^t} = a \log \frac{C_2 e^t}{1 - C_1 e^t}, \text{ e perciò in ultimo}$$

$$y = ax \log \frac{C_2 x}{1 - C_1 x}.$$

$$2) \quad xy'' - 2xy'y' - 2y^2 + 2y' = 0.$$

Questa equazione è omogenea di indice -1 . Posto, perciò, $x = e^t$, $y = x^{-1}z = e^{-t}z$, essa diventa, in virtù delle (1),

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} (1 + 2z) = 0,$$

che, posto $\frac{dz}{dt} = p$ e presa z come variabile indipendente, si riduce alla $\frac{dp}{dz} = 1 + 2z$, da cui $p = z + z^2 + C$, ed in conseguenza

$$dt = \frac{dz}{z^2 + z + C}, \text{ dalla quale } t + \log C_2 = \frac{1}{C_1} \log \frac{2z + 1 - C_1}{2z + 1 + C_1},$$

avendo posto $C_1 = \sqrt{1 - 4C}$; ed in ultimo

$$\log(C_2 x) = \frac{1}{C_1} \log \frac{2xy + 1 - C_1}{2xy + 1 + C_1}, \text{ ossia } C_2 x^{C_1} = \frac{2xy + 1 - C_1}{2xy + 1 + C_1},$$

avendo scritto C_2 in luogo di $C_2 C_1$, e questo è l'integrale gene-

rale della equazione proposta, il quale può anche porsi sotto la forma www.libtool.com.cn

$$y = \frac{1 - C_1 + (1 + C_1)x^{c_1}}{2x(C_1x^{c_1} - 1)}.$$

3) $xyy'' + axy'^2 + yy' = 0$. Qualunque sia l'indice n è equazione omogenea di grado $2n - 1$. Prendiamo perciò $n = 0$, ed in conseguenza poniamo $x = e^t$. La equazione diventa $y \frac{d^2y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} = 0$, e posto $\frac{dy}{dt} = p$ e presa y per variabile indipendente, $y \frac{dp}{dy} + ap = 0$, da cui $py^a = C_1$ e perciò

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = C_1 y^{-a},$$

dalla quale $\frac{y^{a+1}}{a+1} = C_1 t + C_2$ od anche $y^{a+1} = C_1 t + C_2$; l'integrale generale della equazione proposta è quindi

$$y^{a+1} = C_1 \log x + C_2,$$

se a è diverso da -1 . Se $a = -1$, allora l'integrale della (3) è $\log y = C_1 t + \log C_2$, e perciò $\log y = C_1 \log x + \log C_2$ ossia $y = C_2 x^{C_1}$ è l'integrale generale della equaz. $xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$.

4) $xyy'' = yy' + xy'^2 + \frac{bx'y'^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. È omogenea rispetto ad y ed alle sue derivate; poniamo perciò $y = e^{\int z dx}$, ed in virtù delle (2) abbiamo

$$x \frac{dz}{dx} = z + \frac{bxz^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ ossia } \frac{x dz - z dx}{x^2} = \frac{bx dz}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

da cui $C_1 - \frac{x}{z} = -b \sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \frac{x}{b \sqrt{a^2 - x^2} + C}$, e, posto

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \vartheta,$$

$$\begin{aligned} \int x dx &= - \int \frac{b d\vartheta}{C + b\vartheta} = - \frac{b}{b} + \frac{C}{b^2} \log(C + b\vartheta) + C_1 \\ &= - \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{C}{b^2} \log[C + b\sqrt{a^2 - x^2}] + C_1, \end{aligned}$$

e quindi l'integrale generale della proposta equazione è

$$y = e^{C_1} e^{\frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{b}} (C + b\sqrt{a^2 - x^2})^{\frac{C}{b^2}},$$

ossia, posto $\frac{C}{b^2} = C_1$, $e^{C_1} b^{C_1} = C_2$,

$$y = C_2 (bC_1 + \sqrt{a^2 - x^2})^{C_1} e^{-\frac{1}{b} \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

183. Equazioni differenziali esatte. — Una equazione $f(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$ dicesi *esatta* se la funzione f è la derivata rapporto ad x di una funzione $f_1(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ presa considerandovi y come funzione qualunque di x . Allora $f_1 = C$ sarà un integrale primo della equazione $f = 0$. Così, ad esempio, la equazione $2x(y' + 1)y'' + y'^2 + 3y' = 0$ è esatta perchè il suo primo membro è la derivata rapporto ad x della funzione $xy'^2 + 2xy' + y$, e quindi $xy'^2 + 2xy' + y = C$ ne è un integrale primo.

Cominciamo dalle equazioni lineari

$$(1) \quad P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + P_1 y' + P_0 y + P = 0.$$

Osservando che, in virtù della formola al n. 21, è

$$\int P_r y^{(r)} dx = P_r y^{(r-1)} - P'_r y^{(r-2)} + P''_r y^{(r-3)} - \dots + (-1)^{r-1} P_r^{(r-1)} y + (-1)^r \int y P_r^{(r)} dx,$$

l'integrale del primo membro della (1) si riduce alla forma

$$(2) \quad \int P dx + \int Q_0 y dx + Q_1 y + Q_2 y' + \dots + Q_n y^{(n-1)},$$

dove

$$Q_0 = P_0 - P'_1 + P''_2 - P'''_3 + \dots + (-1)^n P_n^{(n)},$$

$$Q_r = P_r - P'_{r+1} + P''_{r+2} - \dots + (-1)^{n-r} P_n^{(n-r)}.$$

Ora la espressione (2) è sempre integrale del primo membro della (1), ma il modo con cui dipende esplicitamente da x varia al variare della funzione y di x , ed affinchè, qualunque sia questa funzione, rimanga sempre la stessa funzione esplicita di x e di $y, y', \dots$ occorre che sia $\int Q_0 y dx = 0$ e perciò, affinchè ciò avvenga qualunque sia la funzione y di x , occorre che sia $Q_0 = 0$. In tal caso, e solo allora, la equazione proposta è esatta, e

$$\int P dx + Q_1 y + Q_2 y' + \dots + Q_n y^{(n-1)} = C$$

è un suo integrale primo.

ESEMPIO. — Si riconosce subito, col procedimento precedente, che la equazione

$$xy''' + 3y'' + xy' + y = 0$$

è esatta e che

$$xy'' + 2y' + xy = C_1$$

è un integrale primo. Questa ultima equazione non è esatta; ma della equazione $xy'' + 2y' + xy = 0$ è integrale particolare

$$y_1 = \frac{\cos x}{x} \text{ (Es. 21 a pag. 521), cosichè, servendoci della formola}$$

alla fine del n. 174 si ha il suo integrale generale

$$y = C_2 \frac{\cos x}{x} + C_3 \frac{\sin x}{x} + \frac{C_1}{x},$$

che è l'integrale generale della equazione proposta.

Consideriamo ora una equazione differenziale qualunque. Si intende subito come, affinchè essa possa essere esatta, fa bisogno che la più alta derivata comparisca al primo grado. Sia

quindi

$$\varphi(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) + \psi(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) y^{(n)} = 0$$

la nostra equazione, che porremo nella forma

$$Vdx = \varphi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) dx + \psi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) dy^{(n-1)} = 0.$$

Poniamo

$$U = \int \psi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) dy^{(n-1)},$$

l'integrazione intendendosi eseguita considerando $x, y, y' \dots y^{(n-2)}$ come costanti, cosicchè sia

$$dU = \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y'} y' + \frac{\partial U}{\partial y''} y'' + \dots + \frac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-2)} \right] dx + \psi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) dy^{(n-1)}$$

e quindi

$$Vdx - dU = \left[\varphi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} y' - \dots - \frac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-2)} \right] dx.$$

Se si riconosce che il secondo membro è il differenziale di una funzione U_1 di $x, y, y' \dots y^{(n-2)}$, allora la equazione proposta è esatta e un suo integrale primo è $U + U_1 = C$. Se il secondo membro non è un differenziale esatto, la equazione proposta non è esatta. Per riconoscere poi se valga il primo o il secondo caso si applica al secondo membro lo stesso procedimento che si è adoperato per Vdx , e così successivamente.

Come per le equazioni differenziali di primo ordine della forma $Mdx + Ndy = 0$, così per quelle di ordine n della forma $Mdx + Ndy^{(n-1)} = 0$, dove M, N sono funzioni di $x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$, esistono dei *fattori integranti o moltiplicatori* μ , funzioni di $x, y, y', \dots y^{(n-1)}$, tali che $\mu(Mdx + Ndy^{(n-1)}) = 0$ è una equazione esatta. Indicato con $\varphi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) = C$ un integrale primo della proposta equazione risoluto rapporto alla costante, la dimostrazione è la stessa di quella per le equazioni di primo ordine (Vedi N. 160).

1) Sia l'equazione

$$yy' - xy'' - xyy'' = 0 \text{ ossia } Vdx = (yy' - xyy'')dx - xydy' = 0;$$

posto $U = -xy \int dy' = -xyy'$ abbiamo $Vdx - dU = 2yy' = d(y^2)$;
quindi

$$y^2 - xyy' = C_1$$

è un integrale primo, il quale, integrato separando le variabili, dà l'integrale generale della proposta equazione, $x = C_2 / \sqrt{y^2 - C_1}$, che può anche porsi sotto la forma

$$y^2 + C_2 x^2 = C_1.$$

$$2) V = (2x + y')y'' + (2 + y'' + 2yy' + 3x)y'' + y'^3 + 3y' + x^3 = 0.$$

Posto

$$U_1 = \int (2x + y')dy'' = (2x + y')y'',$$

$$\text{è } Vdx - dU_1 = \{(2yy' + 3x)y'' + (y'^3 + 3y' + x^3)\}dx = V_1dx;$$

per riconoscere se il secondo membro V_1dx è un differenziale esatto poniamo

$$U_2 = \int (2yy' + 3x)dy' = yy'^2 + 3xy'.$$

ed allora

$$V_1dx - dU_2 = x^3dx = d\frac{x^3}{3},$$

e quindi la equazione proposta è esatta, e poichè

$$Vdx = dU_1 + dU_2 + d\frac{x^3}{3}, \text{ sarà } U_1 + U_2 + \frac{x^3}{3} = C, \text{ cioè}$$

$$(2x + y')y'' + (yy' + 3x)y' + \frac{x^3}{3} = C$$

un suo integrale primo.

3) Proponiamoci di determinare la forma della funzione R di x, y , e le funzioni P, Q di x in modo che la equazione $y'' + \frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}} = 0$, ossia $\mu Vdx = dy + \frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}} dx = 0$ ammetta un mol-

tiplicatore della forma $\mu = Py + Qy'$ (EULERO).

Dovendo essere allora

$$\mu Vdx = dy'(Py + Qy') + \frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}} (Py + Qy') = 0$$

una equazione esatta, posto

$$U = \int (Py + Qy') dy' = Py y' + Q \frac{y'^2}{2},$$

dovrà essere

$$\mu Vdx - dU = \left[\frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}} (Py + Qy') - P' y y' - P y'^2 - Q' \frac{y'^2}{2} \right] dx$$

un differenziale esatto, e quindi dovrà essere intanto

$$(3) \quad 2P + Q' = 0,$$

cosicchè, essendo allora

$$\mu Vdx - dU = \frac{RPy}{Q^{\frac{3}{2}}} dx + \left(\frac{R}{\sqrt{Q}} - P'y \right) dy,$$

dovremo avere ancora

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{RPy}{Q^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{\sqrt{Q}} - P'y \right) \text{ ossia}$$

$$\frac{RP}{Q^{\frac{3}{2}}} + \frac{Py}{Q^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{RQ'}{2Q^{\frac{3}{2}}} - P''y;$$

la quale, ove si prenda per P tal funzione che sia $P'' = 0$ cioè $P = -\gamma x - \beta$, γ e β costanti qualunque e in virtù della (3),

si riduce alla

$$\frac{Py}{Q} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ od anche (4) } \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{Q'y}{2Q} \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

e questa, essendo, per la (3), $Q = x + 2\beta x + \gamma x^2$, α costante qualunque, serve a determinare R . Perciò si osservi che, posto $y = z/\sqrt{Q}$, abbiamo $R(x, y) = R(x, z/\sqrt{Q})$ da cui, indicata con $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$ la derivata totale di R rapporto ad x , si ha

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{zQ'}{2\sqrt{Q}} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{Q'y}{2Q} = 0;$$

quindi R è funzione della sola z cioè di $\frac{y}{\sqrt{Q}}$, vale a dire che soddisfacciamo alla (4) prendendo $R = \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)$, dove φ indica una funzione qualunque.

Da tutto questo si raccoglie che la equazione

$$y'' + \frac{1}{Q^{\frac{3}{2}}} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right) = 0,$$

ammette il fattore integrante $Py + Qy'$, dove $P = -\gamma x - \beta$, $Q = x + 2\beta x + \gamma x^2$, ed un suo integrale primo è

$$U + \int \left[\frac{RPy}{Q^{\frac{3}{2}}} dx + \left(\frac{R}{\sqrt{Q}} - P'y \right) dy \right] = C_1,$$

ossia, per la (3) e se la funzione $\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)$ non presenta singolarità per $y=0$, (formola (5) a pag. 435),

$$-Q'y y' + Qy'^2 + \gamma y^3 + \frac{2}{\sqrt{Q}} \int_0^y \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right) dy = C.$$

Un caso particolare notevole è quello in cui $\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)$

$$= \frac{a \frac{y}{\sqrt{Q}}}{\left(1 + b \frac{y^2}{Q}\right)^2} = \frac{ay Q^{\frac{3}{2}}}{(by^2 + Q)^2}, \text{ cui corrisponde la equazione}$$

$$y'' + \frac{ay}{(by^2 + Q)^2} = 0,$$

che ha perciò l'integrale primo

$$-Q'yy' + Qy'^2 + \gamma y^2 - \frac{Qa}{b(by^2 + Q)} = C.$$

184. Quando una equazione differenziale non rientri in alcuno dei tipi precedenti bisognerà, per integrarla, ricorrere a speciali artifici e trasformazioni come nei seguenti

ESEMPI

1) $y'' + f(x)y' + \varphi(y)y'^2 = 0$ (*Equazione di LIOUVILLE*).
Ponendola nella forma

$$\frac{y''dx}{y'} + f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$$

se ne ricava l'integrale primo

$$\log y' + \int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = \log C_1, \text{ ossia } y' = C_1 e^{-\int f(x)dx} e^{-\int \varphi(y)dy}$$

da cui si ha l'integrale generale

$$\int dy e^{\int \varphi(y)dy} = C_1 \int dx e^{-\int f(x)dx} + C_2.$$

$$2) (1+x^2)y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0.$$

Tutte le equazioni lineari omogenee si possono abbassare di una unità ponendo $y = e^{\int z dx}$; ma la integrazione effettiva riesce

allora raramente. Nel nostro caso giova porre $x = \operatorname{tg} t$, ed allora la equazione diventa (Vol. I, pag. 276) $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$, il cui integrale è $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, e quindi

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos(\operatorname{arctg} x) + C_2 \sin(\operatorname{arctg} x) \\ &= C_1 \cos\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C_2 \sin\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (C_1 + C_2 x) \end{aligned}$$

è l'integrale generale della equazione proposta.

3) $y'' + (e^y - x)y' = 0$. Prendendo y per variabile indipendente la equazione diventa $\frac{d^2 x}{dy^2} + x = e^y$ (Vol. I, eserc. 4° a pag. 292), il cui integrale generale

$$x = C_1 \cos y + C_2 \sin y + \frac{e^y}{2},$$

è l'integrale generale della equazione proposta.

4) $(x^2 + y^2)y'' + (y - xy')(1 + y'^2) = 0$. Preparando la equazione in modo che la variabile indipendente sia qualunque, abbiamo (Vedi cambiamento di variabili Vol. I)

$$(x^2 + y^2)(dx d^2 y - dy d^2 x) + (y dx - x dy)(dx^2 + dy^2) = 0.$$

Ponendo $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, essa diventa (Vedi Vol. I pag. 280, 281).

$$\rho^2(2d\rho^2 d\vartheta - \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho d\rho d\vartheta^2) - \rho^2 d\vartheta(d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2) = 0,$$

ossia $d\rho^2 d\vartheta - \rho^2 d\vartheta^2 + \rho d\rho d\vartheta^2 = 0$, la quale, prendendo ρ come variabile indipendente, diventa $\frac{d\vartheta}{d\rho} + \rho \frac{d^2 \vartheta}{d\rho^2} = 0$, che, integrata col porre $\frac{d\vartheta}{d\rho} = p$, dà $\rho^2 = C_2 a^{C_1 \theta}$, da cui si ottiene l'integrale

$$x^2 + y^2 = C_2 e^{C_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

della equazione proposta.

5) $\alpha y y'' + \beta y'^2 = \frac{y y'}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ (EULERO). È equazione omogenea in y e nelle derivate; posto, perciò $y = e^{\int z dx}$, essa diventa

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} - \frac{z}{\alpha \sqrt{a^2 + x^2}} = -z^2 \frac{\alpha + \beta}{\alpha},$$

che è una equazione di BERNOULLI, il cui integrale, posto $t = [x + \sqrt{a^2 + x^2}]^{\frac{1}{\alpha}}$, si trova essere

$$(2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{t} \left\{ \frac{\beta + \alpha}{2} \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) + C_1 \right\}.$$

Per calcolare $\int z dx$, osserviamo che la (1) ci dà

$$\frac{dz}{z} - \frac{dx}{\alpha \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha} z dx,$$

da cui, integrando,

$$\log C_2 + \log z - \frac{1}{\alpha} \log(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \int z dx,$$

ossia $\log \frac{t}{z} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \int z dx$, e quindi $y = e^{\int z dx} = \left(C_2 \frac{t}{z} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}$,
cioè, per la (1),

$$y = \left[C_2 \left\{ \frac{\beta + \alpha}{2} \left(\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) + C_1 \right\} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}$$

ossia, modificando le costanti,

$$y = C_2 \left[\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_1 \right]^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}$$

e questo è l'integrale generale della proposta equazione.

Se $\alpha = 1$, si trova facilmente la modificazione da introdurre nei calcoli.

185. Le equazioni differenziali che abbiamo fin qui studiate esprimevano, salvo poche eccezioni, una relazione tra le derivate di una funzione, la funzione stessa e la variabile indipendente, ed esse si potevano ridurre subito ad equazioni tra i differenziali delle variabili. Molte volte la equazione differenziale è data sotto quest'ultima forma. Essa deve essere allora omogenea complessivamente rispetto al grado ed all'ordine dei differenziali che in essa compariscono, altrimenti ogni somma di termini omogenei, dovendosi annullare da se, perchè ogni tal somma è un infinitesimo di ordine diverso da quello delle altre somme analoghe, la equazione si scinderebbe in varie equazioni differenziali. Data poi una equazione in tal forma, bisogna che sia fissata quale è la variabile che si considera come indipendente, giacchè la relazione finita tra le variabili, cioè l'integrale, cambierà al cambiare della variabile indipendente, a meno che la equazione non rappresenti una relazione tra i differenziali, che rimanga inalterata qualunque sia la variabile che si prenda come indipendente, ciò che avviene quando la proposta equazione sia ciò che diventa una certa equazione quando la si prepara in modo che la variabile indipendente possa essere qualunque. Allora la equazione proposta, fissata che sia la variabile indipendente, è sempre la trasformata di quella certa equazione in questa nuova variabile indipendente, e l'integrale rimane sempre l'integrale di quest'ultima equazione. Tutto ciò verrà compreso meglio coi seguenti

ESEMPI

1) Sia la equazione $d^2y = Xdx^2$, dove X è funzione della sola x . Se la variabile indipendente è la x , il suo integrale è $y = \int dx \int X dx + C_1x + C_2$.

Supponiamo invece che la variabile indipendente debba essere s , essendo s tale che $ds^2 = dx^2 + dy^2$, cioè supponiamo ds costante. Per integrarla in questa ipotesi, integreremo la sua trasformata quando per variabile indipendente si assuma x . Prepa-

rando l'equazione in modo che la variabile indipendente possa essere qualunque, essa diviene $dsd^2y - dyd^2s = Xdx^2ds$; ma $dsd^2s = dx d^2x + dy d^2y$ ossia, poichè prendiamo ora x per variabile indipendente, $dsd^2s = dy d^2y$, $ds^2 = dx^2(1 + y'^2)$, indicando con apici le derivazioni rapporto ad x , e quindi

$$dsd^2y - \frac{dy^2 d^2y}{ds} = Xdx^2 ds \text{ ossia } (ds^2 - dy^2) d^2y = Xdx^2 ds^2,$$

$$d^2y = Xdx^2(1 + y'^2), \quad y'' = X(1 + y'^2),$$

il cui integrale generale è

$$y = \int dx \operatorname{tg} \left\{ \int X dx + C_1 \right\} + C_2,$$

che è così l'integrale generale della equazione $d^2y = Xdx^2$, quando si supponga ds costante, il quale è ben diverso da quello della stessa equazione $d^2y = Xdx^2$ nell'ipotesi di dx costante.

Invece, qualunque sia la variabile indipendente che si scelga, l'integrale della equazione

$$(1) \quad dxd^2y - dyd^2x = Xdx^2$$

è sempre lo stesso, quello cioè della equazione $y'' = X$, perchè la (1) è ciò che diviene questa ultima equazione preparandola per una variabile indipendente qualunque.

2) Si voglia trovare la relazione tra x e y affinchè sia

$$(2) \quad \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} dx = \frac{xdy^2 + xy d^2y + ydydx}{ydy}$$

nell'ipotesi di ydx costante. Per eseguire la integrazione, integreremo la trasformata quando si supponga dx costante.

Per una variabile indipendente qualunque, posto $ydx = dh$, osserviamo che, indicato con d_h^2y il d^2y che compare nella (2).

è $d_h^2y = \frac{dh d^2y - dy d^2h}{dh}$, ossia, poichè $dydx + yd^2x = d^2h$.

è $d_h^2 y = d^2 y - \frac{dy(dydx + yd^2x)}{ydx}$, che, supposto dx costante, diviene $d_h^2 y = d^2 y - \frac{dy^2}{y}$. La trasformata della (2) quando dx è costante è perciò

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} d\omega = \frac{x d^2 y + dy dx}{dy}, \text{ ossia } \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} y' = xy'' + y',$$

$xy'' = -\frac{2a^2}{x^2 + a^2} y'$, che si integra ponendo $\frac{dy}{dx} = p$; si trova così

$$y = C_1 x - \frac{C_1 a^2}{x} + C_2,$$

che è perciò l'integrale generale della (2) nell'ipotesi di ydx costante.

L'integrale della stessa equazione nell'ipotesi di dy costante è

$$y = C \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \right)$$

ESERCIZI

1. $ay'' = y'^2$, l'integrale è $y = C_2 - a \log(x + C_1)$.
2. $y'' = \frac{1}{\sqrt{ay}}, \frac{9(x + C_1)^2}{4\sqrt{a}} = y\sqrt{y} - 3y\sqrt{C_2} + 4C_1\sqrt{C_2}$.
3. $(x + a)y'' + xy'^2 = y'$, $y = \log(x^2 + C_1^2) + \frac{2a}{C_1} \arctg \frac{x}{C_1} + C_2$.
4. $yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $y = C_1[x + \sqrt{a^2 + x^2}]^{C_1 a^2} e^{C_1 a^2(x + \sqrt{a^2 + x^2})}$.
5. $x^4 y'' - x^3 y' = x^2 y'^2 - 4y^2$, $\log x + C_2 = \int \frac{dz}{C_1 e^z - 4z - 2}$, $z = \frac{y}{x^2}$.
6. $yy'' - y'^2 = y^2 \log y$, $\log y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.
7. $(x + 2y)y'' + 2y'^2 + 2y' + 2 = 0$, $x^2 + y^2 + xy = C_1 x + C_2$.

8. $dx^2 dy - x ds^2 dy = adx ds \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, supposto
 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ costante; $C_1 y = x^2 + 2ax + C_2$.

$$9. dx^3 dy - x ds^2 dy = \frac{bdx^4 ds^2 dy}{\sqrt{dx^2 + a^2 ds^2 dy}} \quad (ds \text{ costante}),$$

$$y = \frac{x^2}{2C_1} + \frac{bx}{\sqrt{C_1^2 + a^2}} + C_2 \text{ integrale generale; vi è ancora un}$$

integrale singolare costituito dalle due equazioni $x = -\frac{b}{(1+a^2 q^2)^{\frac{1}{2}}}$,

$$y = -\frac{b^2 q(1+2a^2 q^2)}{2(1+a^2 q^2)^3} + \frac{b^2 q}{8(1+a^2 q^2)^2} + \frac{3b^2 q}{16(1+a^2 q^2)} + \frac{3b^2}{16a} \arctg(aq) + C.$$

$$10. y''(yy' + a) = y'(1 + y'^2);$$

$$x = a \log p + C_1 \log(p + \sqrt{1+p^2}) + C_2, \quad y = ap + C_1 \sqrt{1+p^2}.$$

$$11. y^3 - yy'' = n\sqrt{y^2 + a^2 y'^2},$$

$$\text{int. gen. } C_1 x + \log(C_2 y + n\sqrt{1+a^2 C_1^2}) + C_3,$$

$$\text{int. singolare } y = na \operatorname{sen} \frac{x+C}{a}.$$

$$12. y(1 - \log y)y'' + (1 + \log y)y^3 = 0, \quad y = e^{\frac{x+C_1}{1+C_2}}.$$

$$13. (y - xy')y'' = 4y'^2, \quad x = C_1[\sqrt{1+C_2 xy} - 1]e^{\sqrt{1+C_2 xy}}$$

(La equaz. è omogenea d'indice qualunque, giova supporla di indice -1).

$$14. ds dy + 3y d^2 s = 0 \quad (dy \text{ costante}), \quad (x + C_1)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = C_2.$$

$$15. a^2 y'' \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 y' = x^2, \quad a^2 y = -\frac{x^3}{9} - \frac{2}{3} a^2 x + \frac{2}{9} (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C_1[x\sqrt{a^2 + x^2} - x^2 + a^2 \log(x + \sqrt{a^2 + x^2})] + C_2.$$

16. $Xdy^3 = dx^2 dy - xdyd^2 x + xdx d^2 y$, $X = X(x)$; si suppongano successivamente costanti dx , dy , xdy , $\frac{dx}{x}$; si ha sempre

$$\text{lo stesso integrale } y + C_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{C_1 - 2 \int \frac{X}{x^2} dx}}; \text{ perchè?}$$

17. $xyy'' + (x-1)yy' + (y^2+1)xy'^2 = 0$, $e^{\frac{y^2}{2}} = C_1 e^x (x+1) + C_2$.

18. $\frac{ds dy}{a^2 x} = a \frac{dx}{dy}$. Se si suppone ds costante l'integrale è

$y = C_1 - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$, $x = C - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + a \log \frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}$; se si suppone dy costante l'integrale è $y = a\sqrt{1+p^2} + C_1$,

$$x = \frac{a}{2} [p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})] + C_2.$$

19. $\frac{ds^2 d^2 y}{ds^4} = \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c}$ (ds costante),

$$y = -\frac{c^2}{a} \cos \frac{x}{c} + C_1 x + C_2.$$

20. $1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}$,

$$y = C_1 \log \frac{C_2(C_1 + \sqrt{C_1^2 + a^2 - x^2})}{a - x} - \sqrt{C_1^2 + a^2 - x^2}.$$

21. $y d^2 x - dx dy + y^2 d^2 y = 0$; se si suppone $\frac{dx}{y}$ costante l'integrale è $y^2 = C_1 x + C_2$; se si suppone $y dx$ costante è $1 + C_1 y^2 = C_2 e^{-2C_1 x}$.

22. $y'' \left(\cos y + \frac{1}{x+y} \right) - \left(\frac{1+y'}{x+y} \right)^2 - y'^2 \sin y - \sin x = 0$,

$$\sin x + \sin y + \log(x+y) = C_1 x + C_2.$$

23. $y''(x+y) + y'(1+y') = 0$, $y = C_1 \log(x+y+C_1) + C_2$.

24. $(a^2 y'^2 + x^2) y'' = xy'$; $x = a\sqrt{2p} \log \frac{p}{C_1}$,

$$y = \frac{ap^2}{\sqrt{2}} \log \frac{p}{C_1} + \frac{ap^2}{2\sqrt{2}} + C_2.$$

25. $x^4 y'' = x^2 y' + 2xyy' - 4y^2$; l'integrale, a seconda del valore di una costante che si presenta nel corso dell'integrazione, ha le tre forme seguenti: $x^2 = (x^2 - y^2) \log \frac{x}{C_1}$,

$$x = C_1 \left[\frac{(C_2 + 1)x^2 - y}{(C_2 - 1)x^2 + y} \right]^{\frac{1}{2C_2}}, \quad y = x^2 + C_2 x^2 \operatorname{tg} \left(C_2 \log \frac{x}{C_1} \right);$$

vi è pure un integrale singolare $y = Cx^2$.

$$26. (x^2 + y^2)y'' - y'y'^2 + xy'^2 + xy' - y = 0, \quad y^2 - x^2 + C_1 xy = C_2.$$

Integrazione per serie delle equazioni differenziali.

136. Quando non si riesca in altro modo si può cercare di esprimere mediante una serie l'integrale di una equazione differenziale. Se questa è di ordine n ci esprimerà $y^{(n)}$ mediante $x, y, y' \dots y^{(n-1)}$, e da essa e servendoci di essa, con successive derivazioni potremo esprimere allo stesso modo $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}$; cosicchè presi arbitrariamente i valori $c_0, c_1, c_2 \dots c_{n-1}$ come quelli che debbano assumere $y, y', \dots y^{(n-1)}$ per $x=a$, avremo i valori di $y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots$ per $x=a$, che indicheremo con $y^{(n)}(a), y^{(n+1)}(a), \dots$. Allora

$$y = c_0 + c_1(x-a) + c_2 \frac{(x-a)^2}{2} + \dots + c_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \\ + y^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + y^{(n+1)}(a) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots,$$

quando e finchè risulti convergente la serie del secondo membro, sarà l'integrale generale della proposta equazione.

Oppure si userà il metodo così detto dei coefficienti indeterminati, cioè si stabilisce uno sviluppo in serie

$$(1) \quad y = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + \dots$$

e si determinano i coefficienti A e gli esponenti m in guisa che la precedente espressione soddisfaccia alla data equazione differenziale. Allora, se la serie (1) è convergente e successivamente derivabile termine a termine, la formola (1) ci darà un integrale della equazione proposta. Tanto l'uno che l'altro metodo sono lunghi, anche se applicati ad equazioni differenziali lineari.

Vi è una forma speciale di equazioni differenziali, che comprende molte equazioni importanti, per la quale si ottiene facilmente lo sviluppo dell'integrale in serie.

La equazione sia della forma

$$(2) \quad \left\{ x^p \varphi \left(x \frac{d}{dx} \right) + \psi \left(x \frac{d}{dx} \right) \right\} y = \{ x^p \varphi(\vartheta) + \psi(\vartheta) \} y = 0,$$

dove φ e ψ sono simboli di funzione razionale intera, e p è un numero positivo. Determiniamo i coefficienti A e gli esponenti m in modo che la (1) soddisfaccia alla nostra equazione.

1) Supponiamo $m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < \dots$; sostituendo in luogo di y il valore (1) nella equazione (2) e ricordando una proprietà del simbolo ϑ (N. 171), il suo primo membro diventa

$$\begin{aligned} & A_1 \varphi(m_1) x^{m_1+p} + A_2 \varphi(m_2) x^{m_2+p} + A_3 \varphi(m_3) x^{m_3+p} + \dots \\ & + A_1 \psi(m_1) x^{m_1} + A_2 \psi(m_2) x^{m_2} + A_3 \psi(m_3) x^{m_3} + \dots, \end{aligned}$$

e poichè m_1 è l'esponente minore di x , affinchè la espressione precedente possa essere zero identicamente, dovrà essere $\psi(m_1)=0$, cioè m_1 dovrà essere una radice a della equazione $\psi(\vartheta)=0$. È quindi escluso il caso in cui $\psi(\vartheta)$ sia una costante. Poi m_2 ed m_1+p ossia $a+p$ sono i successivi esponenti più piccoli di x ; prenderemo $m_2=a+p$, e quindi eguaglieremo a zero il coefficiente di x^{a+p} cioè $A_1 \varphi(a) + A_2 \psi(a+p)$ e così procederemo successivamente.

In tal guisa otteniamo le equazioni

$$m_2 = a + p, \quad m_3 = m_2 + p, \quad m_4 = m_3 + p, \dots$$

dalle quali si ricava

$$m_2 = a + p, \quad m_3 = a + 2p, \quad m_4 = a + 3p, \dots$$

e le quazioni

www.libtool.com.cn

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \varphi(a) + A_2 \psi(a+p) = 0, \\ A_2 \varphi(a+p) + A_3 \psi(a+2p) = 0, \\ A_3 \varphi(a+2p) + A_4 \psi(a+3p) = 0, \\ \dots \end{array} \right.$$

dalle quali si ricava

$$A_2 = - \frac{\varphi(a)}{\psi(a+p)}, \quad A_3 = \frac{\varphi(a)\varphi(a+p)}{\psi(a+p)\psi(a+2p)},$$

$$A_4 = - \frac{\varphi(a)\varphi(a+p)\varphi(a+2p)}{\psi(a+p)\psi(a+2p)\psi(a+3p)}, \dots,$$

e si ha così

$$(4) \quad y = A_1 x^a \left\{ 1 - \frac{\varphi(a)}{\psi(a+p)} x^p + \frac{\varphi(a)\varphi(a+p)}{\psi(a+p)\psi(a+2p)} x^{2p} \right. \\ \left. - \frac{\varphi(a)\varphi(a+p)\varphi(a+2p)}{\psi(a+p)\psi(a+2p)\psi(a+3p)} x^{3p} + \dots \right\},$$

che, ove la serie del secondo membro sia convergente e derivabile termine a termine tante volte quante sono le unità dell'ordine della equazione (2), ne è un integrale particolare.

In questo modo, corrispondentemente a ciascuna radice a della equazione $\psi(z)=0$ si ha un integrale particolare della proposta equazione.

Se una delle quantità $\varphi(a)$, $\varphi(a+p)$... si annulla, poniamo la $\varphi(a+kp)$, senza che si annulli alcuna delle $\psi(a+p)$, $\psi(a+2p)$..., allora le equazioni (3) ci mostrano che dovrà essere $A_{k+2}=0$, $A_{k+3}=0$,... e la serie (4) si riduce ad un polinomio.

Se la prima delle quantità $\psi(a+p)$, $\psi(a+2p)$..., che si annulla è la $\psi(a+kp)$, cioè se $a+kp$ è radice della $\psi(z)=0$,

Se poi, essendo $\psi(a+kp)=0$, è ancora $q(a+(k-s)p)=0$, allora le (3) ci mostrano che $A_{k-s+s}=0$, $A_{k-s+s}=0, \dots A_k=0$ e le (3) si scindono nei due seguenti sistemi di equazioni con incognite A non comuni

[illegible]

e la (4) diviene

$$y = A_1 x^a \left\{ 1 - \frac{\varphi(a)}{\psi(a+p)} x^p + \dots \pm \frac{\varphi(a)\varphi(a+p)\dots\varphi[a+(k-s-1)p]}{\psi(a+p)\psi(a+2p)\dots\psi[a+(k-s)p]} x^{(k-s)p} \right\} \\ + A_{k+1} x^{a+kp} \left\{ 1 - \frac{\varphi(a+kp)}{\psi[a+(k+1)p]} x^p + \frac{\varphi(a+kp)\varphi[a+(k+1)p]}{\psi[a+(k+1)p]\psi[a+(k+2)p]} x^{2p} \dots \right\}$$

con due costanti arbitrarie A_1, A_{k+1} ; la serie che moltiplica A_{k+1} è l'integrale particolare che nascerebbe dalla radice $a+kp$ di $\psi(z)=0$.

2) Qualora lo sviluppo di y per potenze ascendenti di x non riesca convergente od anche indipendentemente da questo fatto, si potrà cercare uno sviluppo per potenze discendenti.

Si supponga allora nella (1)

$$m_1 > m_2 > m_3 > m_4 > \dots$$

Procedendo in modo completamente analogo al precedente si giunge allo sviluppo

$$(5) \quad y = A_1 x^a \left\{ 1 - \frac{\psi(a)}{\varphi(a-p)} x^{-p} + \frac{\psi(a)\psi(a-p)}{\varphi(a-p)\varphi(a-2p)} x^{-2p} \right. \\ \left. + \frac{\psi(a)\psi(a-p)\psi(a-2p)}{\varphi(a-p)\varphi(a-2p)\varphi(a-3p)} x^{-3p} - \dots \right\},$$

dove a è radice della equazione $\varphi(z)=0$. È escluso il caso in cui $\varphi(z)$ sia una costante. Valgono poi considerazioni completamente analoghe alle precedenti.

Notiamo che se nella (2) p è negativo, la (4) è lo sviluppo di y per potenze decrescenti di x , e la (5) lo sviluppo per potenze crescenti.

Il valore assoluto del rapporto d'un termine al precedente nella serie (4) è della forma $x^p \frac{\varphi(a+np)}{\psi(a+(n+1)p)}$, e nella (5) della forma $x^{-p} \frac{\psi(a+np)}{\varphi(a+(n+1)p)}$, cosichè, in particolare, la prima serie sarà convergente qualunque sia x se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(a+np)}{\psi(a+(n+1)p)} = 0, \text{ la seconda se } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(a+np)}{\varphi(a+(n+1)p)} = 0.$$

3) Se la radice a della equazione $\psi(z)=0$ è complessa, $a = \alpha + i\beta$, il procedimento precedente vale ancora, ma il corrispondente integrale particolare contiene nei suoi termini l'immaginario i ; volendo avere direttamente l'integrale scevro

dagli immaginari si può procedere nel modo seguente. Notiamo che l'integrale y si riduce allora alla forma $y = x^2 x^{i\beta}(u_1 - iv_1)$, od anche $x^{i\beta}(u - iv)$ dove u, v sono serie reali ordinate secondo le stesse potenze ascendenti di x . Determiniamo u, v . Abbiamo (Vedi N. 171)

$$[x^p \varphi(\beta) + \psi(\beta)] [x^{i\beta}(u - iv)] = x^{i\beta} [x^p \varphi(\beta + i\beta) + \psi(\beta + i\beta)] (u - iv) = 0,$$

ossia, posto

$$\varphi_1(\beta) = \varphi(\beta) - \frac{\beta^2}{12} \varphi''(\beta) + \frac{\beta^4}{4} \varphi^{(iv)}(\beta) - \dots$$

$$\varphi_1(\beta) = \varphi'(\beta) - \frac{\beta^3}{3} \varphi'''(\beta) + \frac{\beta^5}{5} \varphi^{(v)}(\beta) - \dots$$

$$\psi_1(\beta) = \psi(\beta) - \frac{\beta^2}{12} \psi''(\beta) + \dots, \quad \psi_1(\beta) = \psi'(\beta) - \frac{\beta^3}{3} \psi'''(\beta) + \dots,$$

è

$$x^{i\beta} \{ x^p [\varphi_1(\beta) + i\varphi_1(\beta)] (u - iv) + [\psi_1(\beta) + i\psi_1(\beta)] (u - iv) \} = 0,$$

cosicchè, sviluppando la quantità tra parentesi ed uguagliando a zero la parte reale ed il coefficiente di i dello sviluppo ottenuto, si hanno per determinare u, v le due equazioni

$$x^p [\varphi_1(\beta)u + \varphi_1(\beta)v] + \psi_1(\beta)u + \psi_1(\beta)v = 0,$$

$$x^p [\varphi_1(\beta)u - \varphi_1(\beta)v] + \psi_1(\beta)u - \psi_1(\beta)v = 0.$$

Posto

$$u = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \dots, \quad v = B_1 x^{m_1} + B_2 x^{m_2} + \dots$$

si sostituiscano questi valori nelle equazioni precedenti, e si proceda come abbiamo fatto prima. Si osservi che le due equazioni $\varphi_1(\beta) = 0$, $\psi_1(\beta) = 0$ ammettono la radice comune α , giacché è $\psi(\alpha + i\beta) = \psi_1(\alpha) + i\psi_1(\alpha) = 0$, ed allora si troverà che $m_1 = \alpha$, $m_2 = \alpha + p$, $m_3 = \alpha + 2p, \dots$ e per determinare i coef-

ficienti A_{r+1} e B_{r+1} le equazioni simultanee

www.libtool.com.cn

$$\psi_1(x+rp)B_{r+1} + \psi_2(x+rp)A_{r+1} = -B_r \varphi_1[a+(r-1)p] - A_r \varphi_2[a+(r-1)p],$$

$$\psi_2(x+rp)B_{r+1} - \psi_1(x+rp)A_{r+1} = -B_r \varphi_2[a+(r-1)p] + A_r \varphi_1[a+(r-1)p],$$

cosicchè rimangono arbitrarii A_1, B_1 ; ed abbiamo

$$u = x^a [A_1 + A_2 x^p + A_3 x^{2p} + \dots], \quad v = x^a [B_1 + B_2 x^p + B_3 x^{2p} + \dots].$$

Avendosi l'integrale particolare $y_1 = x^{i\beta}(u - iv)$ si ha anche l'integrale particolare $y_2 = x^{-i\beta}(u + iv)$ proveniente dalla radice $\alpha - i\beta$ coniugata alla $\alpha + i\beta$, e quindi ancora l'integrale particolare $(x^{i\beta} + x^{-i\beta})u - i(x^{i\beta} - x^{-i\beta})v$, ossia, poichè $x^{i\beta} = e^{i\beta \log x}$, l'integrale $2u \cos(\beta \log x) + 2v \sin(\beta \log x)$, ovvero, includendo il fattore 2 nelle costanti A_1, B_1 , semplicemente $u \cos(\beta \log x) + v \sin(\beta \log x)$, che è reale e contiene due costanti arbitrarie.

ESEMPLI.

1) *Equazione di RICCATI.* È la equazione di primo ordine

$$u' + u^2 = zx^n.$$

Poniamo $u = \frac{z'}{z}$; essa diventa

$$(6) \quad z'' - zx^n z = 0.$$

Se si conosce l'integrale generale $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ di questa ultima, l'integrale generale di quella di RICCATI è

$$u = \frac{C_1 z_1' + C_2 z_2'}{C_1 z_1 + C_2 z_2} = \frac{z_1' + C z_2'}{z_1 + C z_2}.$$

Trasformiamo ancora la (6) ponendo $z = y e^{\int p dx}$, da cui $z' = (y' + p y) e^{\int p dx}$, $z'' = (y'' + 2p y' + p' y + p^2 y) e^{\int p dx}$; essa diviene $y'' + 2p y' + y(p' + p^2 - \alpha x^n) = 0$.

Prendiamo p in modo che $p^2 - xx'' = 0$, cioè, posto $\sqrt{x} = c$,
 $m = \frac{n}{2}$, sia $p = c x^m$ e quindi $z = e^{\frac{c x^{m+1}}{m+1}} y$, ed avremo per
 determinare y la equazione

$$(7) \quad y'' + 2c x^m y' + m c x^{m-1} y = 0,$$

ossia la

$$x^2 y'' + 2c x^{m+2} y' + m c x^{m+1} y = \{\vartheta(\vartheta - 1) + x^{m+1}(c 2\vartheta + m)\} y = 0.$$

Sia $m+1 > 0$ cioè $m > -1$; allora

$$p = m+1 > 0, \quad \psi(\vartheta) = \vartheta(\vartheta - 1), \quad \varphi(\vartheta) = c(2\vartheta + m).$$

Quindi, corrispondentemente alle radici $\vartheta = 0$, $\vartheta = 1$ di $\psi(\vartheta) = 0$ ed in virtù della (4), abbiamo gli integrali particolari, sviluppati per potenze ascendenti di x ,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= C_1 \left\{ 1 - \frac{cm}{m(m+1)} x^{m+1} + \frac{c^2 m(3m+2)}{2(m+1)^2(2m+1)} x^{2(m+1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^3 m(3m+2)(5m+4)}{[3(m+1)^3 m(2m+1)(3m+2)]} x^{3(m+1)} + \dots \right\} \\ &= C_1 \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{c^r m(3m+2)(5m+4)(7m+6) \dots [(2r-1)m+2(r-1)]}{[r(m+1)^r m(2m+1)(3m+2)(4m+3) \dots (rm+r-1)]} x^{r(m+1)} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} y_2 &= C_2 x \left\{ 1 - \frac{c(m+2)}{(m+1)(m+2)} x^{m+1} + \frac{c^2(m+2)(3m+4)}{2(m+1)^2(m+2)(2m+3)} x^{2(m+1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^3(m+2)(3m+4)(5m+6)}{[3(m+1)^3(m+2)(2m+3)(3m+4)]} x^{3(m+1)} + \dots \right\} \\ &= C_2 x \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{c^r(m+2)(3m+4)(5m+6) \dots [(2r-1)m+2r]}{[r(m+1)^r(m+2)(2m+3) \dots (rm+r+1)]} x^{r(m+1)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Se $m+1 < 0$ cioè se $m < -1$, queste stesse formole ci danno due integrali particolari in serie ordinata per potenze decrescenti di x .

Tutti questi sviluppi sono convergenti qualunque sia x , come subito si riconosce.

Quando si ha in mira la integrazione della (6), e quindi quella della equazione di RICCATI, basta considerare uno solo degli integrali y_1, y_2 della (7). Invero indichiamo con y quello che consideriamo; esso è della forma, come risulta dalle (8), (9), $x = P - cQ$, dove P, Q contengono solo potenze pari di c , e $z = e^{\frac{c\alpha^{m+1}}{m+1}}(P - cQ)$ è integrale della (6); ma, poichè cambiando c in $-c$ non muta α , anche $z = e^{\frac{-c\alpha^{m+1}}{m+1}}(P + cQ)$ è integrale della (6) ed il suo integrale generale è quindi

$$z = C_1 e^{\frac{c\alpha^{m+1}}{m+1}}(P - cQ) + C_2 e^{\frac{-c\alpha^{m+1}}{m+1}}(P + cQ) \\ = P(C_1 e^{\frac{V_{\alpha\alpha^{m+1}}}{m+1}} + C_2 e^{\frac{-V_{\alpha\alpha^{m+1}}}{m+1}}) - cQ(C_1 e^{\frac{V_{\alpha\alpha^{m+1}}}{m+1}} - C_2 e^{\frac{-V_{\alpha\alpha^{m+1}}}{m+1}})$$

se $\alpha > 0$; se è $\alpha < 0$, $\alpha = -\alpha_1$, $\alpha_1 > 0$, esso prende la forma

$$z = (c_1 P - c_2 \sqrt{\alpha_1} Q) \cos \frac{\sqrt{\alpha_1} x^{m+1}}{m+1} + (c_2 P + c_1 \sqrt{\alpha_1} Q) \sin \frac{\sqrt{\alpha_1} x^{m+1}}{m+1}.$$

Si perde uno dei due integrali particolari y_1 o y_2 quando m è uno dei numeri seguenti

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \dots; -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}, \dots$$

cioè quando $m = -\frac{2h \pm 1}{2h}$, h essendo un numero qualunque intero positivo.

Sono poi notevoli i casi seguenti. Se $m = -1$, è $p = 0$. Non valgono più gli sviluppi (8), (9), ma la (7) è la $\{\mathfrak{P}(\mathfrak{P} - 1) + 2c\mathfrak{P} - 1\}y = 0$, il cui integrale generale è

$y = C_1 x^a + C_2 x^b$, dove a, b sono le radici della $\mathfrak{z}(\mathfrak{z} - 1) + 2c\mathfrak{z} - 1 = 0$.

Se $m = -\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{6}{7}, \dots, -\frac{2h}{2h+1}$, y_1 si riduce alla forma $y_1 = C_1 y_{01} + C_2 y_2$, dove y_{01} è un polinomio; si ha quindi l'integrale particolare finito y_{01} e perciò la equazione di RICCATI può integrarsi in termini finiti.

Se $m = -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{8}{7}, \dots$, y_2 si riduce alla forma $y_2 = C_1 y_{02} + C_2 y$, dove y_{02} è un polinomio. Se $m = -2$, la (7) ammette l'integrale particolare $y = x$.

In conseguenza, se $n = -\frac{4h}{2h \pm 1}$, dove h è un intero positivo qualunque, la equazione di RICCATI può integrarsi in termini finiti (se $n = 0$, corrispondentemente ad $h = 0$, nella equazione di RICCATI si separano subito le variabili).

Per esempio: siano le equazioni

$$(10) \quad z'' - c^2 x^{-4} z = 0, \quad z'' + c^2 x^{-4} z = 0;$$

qui è $m = -2$, nel quale caso la (7) ammette l'integrale particolare $y = x$, cosicchè $P = x$, $Q = 0$, e gli integrali delle (10) sono rispettivamente

$$z = x \left(C_1 e^{-\frac{c}{x}} + C_2 e^{\frac{c}{x}} \right), \quad z = x \left(C_1 \cos \frac{c}{x} + C_2 \sin \frac{c}{x} \right).$$

Per le equazioni

$$z'' - c^2 x^{-\frac{4}{3}} z = 0, \quad z'' + c^2 x^{-\frac{4}{3}} z = 0,$$

$$\text{è } m = -\frac{2}{3}, \quad y_{01} = 1 - 3cx^{\frac{1}{3}}, \quad P = 1, \quad Q = 3x^{\frac{1}{3}},$$

e gli integrali sono rispettivamente

$$z = C_1 e^{3cx^{\frac{1}{3}}} + C_2 e^{-3cx^{\frac{1}{3}}} - 3cx^{\frac{1}{3}} (C_1 e^{3cx^{\frac{1}{3}}} - C_2 e^{-3cx^{\frac{1}{3}}}),$$

$$z = C_1 \cos(3cx^{\frac{1}{3}}) + C_2 \sin(3cx^{\frac{1}{3}}) - 3cx^{\frac{1}{3}} [C_2 \cos(3cx^{\frac{1}{3}}) - C_1 \sin(3cx^{\frac{1}{3}})].$$

2) Si abbia la equazione

www.libtool.com.cn

$$xy' + y + y = 0 \text{ ossia } x^2 y'' + xy' + xy = (\hat{z}^2 + x)y = 0.$$

cosichè $p=1$, $q(\hat{z})=1$, $\psi(\hat{z})=\hat{z}^2$.

Abbiamo un solo integrale particolare proveniente dalla radice $\hat{z}=0$ della $\psi(\hat{z})=0$, e questo è

$$y_1 = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{x^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\underline{n} \mid \underline{n}}.$$

La serie è convergente qualunque sia x .

Per avere un altro integrale particolare, poniamo $y = y_1 u + v$ nella nostra equazione, la quale, avuto riguardo che y_1 ne è integrale particolare, diviene allora

$$xv'' + v' + v + y_1(xu'' + u') + 2xy_1'u' = 0.$$

Giova qui prendere u in modo che sia $xu'' + u' = 0$, cioè $xu' = C_1$, $u = C_1 \log x + C_2$, o semplicemente $u = \log x$, ed allora per determinare v abbiamo la equazione

$$xv'' + v' + v = -2xy_1'u' = -2y_1' = 2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{\underline{n-1} \mid \underline{n}},$$

$$\text{ossia} \quad (\hat{z}^2 + x)v = 2x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\underline{n-1} \mid \underline{n}},$$

per cui posto

$$v = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n + \dots,$$

dovremo determinare i coefficienti A in modo che sia identicamente

$$A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + x) A_n x^n = 2x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\underline{n} \mid \underline{n-1} \mid \underline{n-1}};$$

dovremo dunque avere $A_0 + A_1 = 2$, e noi prenderemo $A_0 = 0$,

$$A_1 = 2, \text{ e poi } A_{n-1} + n^2 A_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\underline{n} \mid \underline{n-1} \mid \underline{n-1}};$$

cioè avremo le relazioni

$$n^2 A_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n \underline{n-1} \underline{n-1}} - A_{n-1}$$

$$(n-1)^2 A_{n-1} = (-1)^n \frac{2}{(n-1) \underline{n-2} \underline{n-2}} - A_{n-2}$$

.....

$$3^2 A_3 = (-1)^4 \frac{2}{3 \underline{2} \underline{2}} - A_2$$

$$2^2 A_2 = (-1)^3 \frac{2}{2 \underline{1} \underline{1}} - A_1$$

$$A_1 = 2;$$

moltiplicando l'ultima di queste equazioni per -1 , la penultima per 2^2 , la terz'ultima per $-2^2 \cdot 3^2$, la precedente a questa per $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$ ossia per $\underline{4} \underline{4}$ etc. la seconda per $(-1)^n \underline{n-2} \underline{n-2}$ e la prima per $(-1)^{n-1} \underline{n-1} \underline{n-1}$, e poi sommando otteniamo

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} 2}{\underline{n} \underline{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

ed in conseguenza

$$v = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\underline{n} \underline{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right\}.$$

La serie è convergente qualunque sia x perchè il rapporto di un termine al precedente è

$$\frac{x}{(n+1)^2} \left[1 + \frac{1}{(n+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)} \right]$$

che ha per limite zero al crescere di n , perchè $n+1$

e $1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n}$ crescono indefinitamente con n .

Così abbiamo trovato un secondo integrale particolare $y_2 = y_1 \log x + v$, e l'integrale generale della nostra equazione è perciò

$$\begin{aligned} y &= C_1 v + y_1 (C_1 + C_2 \log x) = 2C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\underline{n} \underline{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad + (C_1 + C_2 \log x) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\underline{n} \underline{n}} \right) \\ &= 2C_2 \left(x - \frac{3x^2}{2^2} + \frac{11x^3}{2^2 \cdot 3^2} - \frac{50x^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \dots \right) \\ &\quad + (C_1 + C_2 \log x) \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - \dots \right). \end{aligned}$$

La equazione più generale $xy'' + y' + ay = 0$ si ricava da quella ora studiata sostituendovi ax in luogo di x .

3) *Equazione di GAUSS.* È la equazione

$$y'' + \frac{\gamma - (x + \beta + 1)x}{x(1-x)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0, \text{ ossia la}$$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + \gamma x y' - \alpha [x^2 y'' + (x + \beta + 1) x y' + \alpha \beta y] \\ = \{ \vartheta(\vartheta + \gamma - 1) - x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta) \} y = 0. \end{aligned}$$

Qui è $p=1$, $\varphi(\vartheta) = -(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta)$, $\psi(\vartheta) = \vartheta(\vartheta + \gamma - 1)$. L'integrale particolare corrispondente alla radice $\vartheta=0$ della $\psi(\vartheta)=0$ è quindi

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(x+1)(x+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

La importante serie del secondo membro chiamasi *serie ipergeometrica*; la si indica sempre colla notazione $F(x, \beta, \gamma, x)$.

Poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\psi(n+1)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} = 1$, la serie ipergeometrica è convergente se $|x| < 1$, divergente se $|x| > 1$. Si

dimostra poi ¹⁾ che per $|x|=1$ essa è convergente se $\alpha + \beta - \gamma < 0$, divergente se $\alpha + \beta - \gamma \geq 0$.

L'integrale particolare corrispondente alla radice $\vartheta = 1 - \gamma$, si trova essere

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

$$4) \quad x^2(a + bx)y'' + x(a - bx)y' + (a + 2bx)y = 0, \text{ ossia} \\ [a(\vartheta^2 + 1) + xb(\vartheta^2 - 2\vartheta + 2)]y = 0.$$

$$\text{Qui è } \varphi(\vartheta) = b(\vartheta^2 - 2\vartheta + 2), \quad \psi(\vartheta) = a(\vartheta^2 + 1), \quad p = 1.$$

La equazione $\psi(\vartheta) = 0$ ha le due radici $\pm i$, cosicchè $a = 0$, $\beta = 1$, ed essendo $\psi'(\vartheta) = 2a\vartheta$, $\psi''(\vartheta) = 2a$, $\varphi'(\vartheta) = 2b(\vartheta - 1)$, $\varphi''(\vartheta) = 2b$, è $\varphi_1(\vartheta) = 2b(\vartheta - 1)$, $\varphi_2(\vartheta) = b(\vartheta^2 - 2\vartheta + 1)$, $\psi_1(\vartheta) = 2a\vartheta$, $\psi_2(\vartheta) = a\vartheta^2$. Le equazioni che determinano A_1, B_1 sono

$$2aB_1 + aA_2 = 2bB_1 - bA_1, \quad aB_2 - 2aA_2 = -bB_1 - 2bA_1,$$

$$\text{dalle quali si ha } B_1 = \frac{b(3B_1 - 4A_1)}{5a}, \quad A_2 = \frac{b(4B_1 + 3A_1)}{5a}; \text{ e poi-}$$

chè $\varphi_1(1) = 0$, $\varphi_2(1) = 0$ si trova $B_1 = 0$, $A_2 = 0$ e quindi ancora sono zero i coefficienti seguenti, e si ha così in termini finiti l'integrale generale della proposta equazione

$$y = \left[A_1 + \frac{b(4B_1 + 3A_1)}{5a} x \right] \cos(\log x) + \left[B_1 + \frac{b(3B_1 - 4A_1)}{5a} x \right] \sin(\log x).$$

¹⁾ In virtù del seguente teorema sulle serie:

Le serie che ha per termine generale u_n è convergente oppure divergente secondochè la prima delle espressioni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - (n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} \right],$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \log n - \frac{n+1}{n} \log(n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} \right],$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \log n \log(\log n) - \frac{n+1}{n} \log(n+1) \log[\log(n+1)] \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$$

.

che non è uguale a zero, è positiva oppure negativa.

1. $y'' - x x^n y = 0$; è la equazione considerata nell'esempio (1); integrandola direttamente si hanno gli integrali particolari, per qualunque valore di x ,

$$y_1 = C_1 \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r x^{r(n+2)}}{r(n+2)^r (n+1)(2n+3)(3n+5) \dots (rn+2r-1)} \right\},$$

$$y_2 = C_2 x^r \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r x^{r(n+2)}}{r(n+2)^r (n+3)(2n+5)(3n+7) \dots (rn+2r+1)} \right\};$$

per $n = -2$ l'equazione è della forma di quelle considerate al n. 177; per $n = -1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}, \dots, -3, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}, \dots$ si perde un integrale particolare.

$$2. xy'' + 2ny' + mxy = 0;$$

$$y = C_1 \left\{ 1 - \frac{mx^2}{2(2n+1)} + \frac{m^2 x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} - \frac{m^3 x^6}{2.4.6(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \dots \right\} \\ + C_2 x^{1-2n} \left\{ 1 - \frac{mx^2}{2(3-2n)} + \frac{m^2 x^4}{2.4(3-2n)(5-2n)} - \frac{m^3 x^6}{2.4.6(3-2n)(5-2n)(7-2n)} + \dots \right\}.$$

Per $2n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots$ si perde un integrale particolare che si può riacquistare come abbiamo visto. Così per $2n = 1$, abbiamo

$$y = (C_1 + C_2 \log x) \left(1 - \frac{mx^2}{2^2} + \frac{m^2 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^3 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \\ + C_1 \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^r m^r x^{2r}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2r)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} \right) \right\}.$$

$$\text{Per } n = 1 \text{ è } y = \frac{1}{x} [C_1 \sin(x/m) + C_2 \cos(x/m)].$$

3. Integrando per serie, e poi mediante una semplice trasformazione www.equazioneol.com.cn

$$(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0,$$

si dimostrino le notevoli formole, dovute ad EULERO,

$$\cos(a \operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = 1 - \frac{a^2}{2} x^2 + \frac{a^2(a^2-2^2)}{4} x^4 - \frac{a^2(a^2-2^2)(a^2-4^2)}{6} x^6 + \dots,$$

$$\operatorname{sen}(a \operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = a \left\{ x - \frac{a^2-1^2}{3} x^3 + \frac{(a^2-1^2)(a^2-3^2)}{5} x^5 - \frac{(a^2-1^2)(a^2-3^2)(a^2-5^2)}{7} x^7 + \dots \right\},$$

valevoli per $|x| < 1$.

Usando il teorema sulle serie nella nota a pag. 559 si potrà anche provare che valgono per $|x| = 1$.

4. $(x-x^2)y'' + (1-3x^2)y' - xy = 0$ (Vedi vol. I, p. 277). Per $|x| < 1$ abbiamo un integrale particolare

$$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 x^6 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^2 x^{2n} + \dots$$

Si provi che

$$y_1 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}} = \frac{\pi}{2} K,$$

e quindi che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-x^2) \operatorname{sen}^2 \varphi}} = K'$ è altro integrale particolare, cosicchè l'integrale generale è $y = C_1 K + C_2 K'$. (K, K'

si chiamano gli integrali ellittici completi di prima specie, od

anche i moduli di periodicità delle funzioni ellittiche)

www.libtool.com.cn

$$5. \quad x^2 y'' - (x^2 + 4x)y' + 4y = 0; \quad y = C_1 x^4 e^x + C_2 x^4 e^x \int \frac{dx}{x^4 e^x}.$$

$$6. \quad x^{\frac{5}{3}} y'' - c^2 y = 0, \quad x^{\frac{5}{3}} y' + c^2 y = 0;$$

integrali, rispettivamente,

$$y = C_1 e^{-3cx}^{-\frac{1}{3}} (x + 3cx^{\frac{2}{3}}) + C_2 e^{3cx}^{-\frac{1}{3}} (3cx^{\frac{2}{3}} - x),$$

$$y = 3cx^{\frac{2}{3}} [C_1 \cos(3cx^{-\frac{1}{3}}) - C_2 \sin(3cx^{-\frac{1}{3}})]$$

$$+ x [C_2 \cos(3cx^{-\frac{1}{3}}) - C_1 \sin(3cx^{-\frac{1}{3}})].$$

$$7. \quad xy'' + y' + ax^{n-1}y = 0; \text{ qualunque siano } x \text{ ed } n \text{ è}$$

$$y = (C_1 \log x + C_2) \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{a^r x^{rn}}{2^r 3^r \dots r^2 n^{2r}} \right\} \\ + 2C_1 \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{r-1} a^r x^{rn}}{2^r 3^r \dots r^2 n^{2r+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} \right) \right\}.$$

8. Della equazione $x^2(a+bx^n)y'' + x(c+ex^n)y' + (f+gx^n)y = 0$ si può calcolare un integrale in termini finiti se $\beta - \alpha = rn$, dove r è numero intero positivo (negativo) se $n > 0$ ($n < 0$), e α, β sono radici rispettivamente delle equazioni $az^2 + (c-a)x + f = 0$, $bz^2 + (c-b)x + g = 0$.

Così ad es.: l'equazione $x^2(a+bx^3)y'' + axy' - 16ay = 0$ ammette l'integrale $y = \frac{1}{x^4} + \frac{5}{3} \frac{b}{a} \frac{1}{x^3} + \frac{5}{8} \frac{b^2}{a^2}$, e la equazione

$$x^2 y'' + (x+x^2)y' + (x-9)y = 0 \text{ l'integrale } y = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{5} \frac{1}{x^2} \\ + \frac{1}{20} \frac{1}{x}.$$

9. $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ (Equazione di LEGENDRE).
 Per $|x| > 1$ www.libtool.com.cn

$$y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} x^{n-6} + \dots$$

$$y_2 = x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots$$

Se n è intero positivo y_1 si riduce ad un polinomio, se n intero negativo vi si riduce y_2 , se $2n$ è un numero dispari positivo o negativo si perde un integrale particolare.

10. $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$ (Equazione di BESSEL).

$$y_1 = x^n \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{[2 \cdot 2^4(n+1)(n+2)]} - \frac{x^6}{[3 \cdot 2^6(n+1)(n+2)(n+3)]} + \dots \right\}$$

e y_2 si ottiene da y_1 cambiandovi n in $-n$. Se n è intero si perde un integrale particolare.

11. $x^2(1+x^2)y'' + x(1-3x^2)y' + (1+5x^2)y = 0$,
 $y = (C_1 + C_2 x^2) \cos(\log x) + (C_2 - C_1 x^2) \sin(\log x)$.

Integrazione di equazioni differenziali mediante integrali definiti.

187. Alcune volte giova tentare di soddisfare ad una data equazione differenziale mediante integrali definiti, che contengano come parametro variabile la variabile indipendente della proposta equazione. Ci limiteremo solo ad un cenno di questo importante metodo di integrazione.

Si abbia una equazione della forma

$$(a_0 + b_0 x) y^{(n)} + (a_1 + b_1 x) y^{(n-1)} + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y' + (a_n + b_n x) y = 0.$$

ossia, posto $\frac{d}{dx} = D$,

$$(1) \quad x\varphi(D)y + \psi(D)y = 0,$$

dove φ, ψ sono simboli di funzioni razionali intere di grado n .

Cerchiamo se si possano determinare i limiti α, β , indipendenti da x , e la funzione T di t in guisa che

$$(2) \quad y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{xt} T dt$$

risulti integrale della proposta equazione. Osservando che

$$y' = \int_{\alpha}^{\beta} e^{xt} t T dt, \quad y'' = \int_{\alpha}^{\beta} e^{xt} t^2 T dt, \dots$$

il risultato della sostituzione del valore (2) di y nel primo membro della (1) è, tenendo conto di note proprietà del simbolo D ,

$$\int_{\alpha}^{\beta} x e^{xt} \varphi(t) T dt + \int_{\alpha}^{\beta} e^{xt} \psi(t) T dt,$$

ossia, integrando per parti il primo integrale,

$$\left[e^{xt} \varphi(t) T \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^{xt} \left[\frac{d}{dt} \varphi(t) T \right] - \psi(t) T \Big] dt,$$

che sarà zero, e quindi il valore (2) di y sarà integrale della (1); se determineremo la funzione T mediante la equazione

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \{ \varphi(t) T \} - \psi(t) T = 0$$

da verificarsi per i valori di t dell'intervallo (α, β) , e i limiti α, β in guisa che sia

$$(4) \quad \left[e^{xt} \varphi(t) T \right]_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Scritta la (3) nella forma

$$\frac{d}{dt} \left\{ \varphi(t) T \right\} - \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} \varphi(t) T = 0,$$

ricaviamo da essa

$$\varphi(t) T = C e^{\int \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} dt}, \quad T = \frac{C}{\varphi(t)} e^{\int \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} dt}$$

dove C indica una costante arbitraria.

Determinata così la funzione T di t , cercheremo valori di α, β in guisa che sia soddisfatta la (4), cioè $[C e^{\alpha t + \int \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} dt} \beta]_{\alpha}^{\beta} = 0$. Se si trovano questi valori α, β di t , allora la (2), dove T, α, β hanno i valori ora trovati, è integrale della (1). Altrimenti giova procedere nel modo seguente. Preso un certo valore costante μ_1 , sia β_1 un valore di t , indipendente da x , tale che per $t = \beta_1$ risulti $e^{\alpha t + \int \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} dt} = \mu_1$, e siano analogamente $\beta_2, \beta_3, \dots$ valori di t tali che

$$e^{\alpha t + \int \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} dt} = \mu_2, \quad e^{\alpha t + \int \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} dt} = \mu_3, \dots$$

Allora si riconosce subito che

$$(5) \quad y = C_1 \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{\alpha t} T dt + C_2 \int_{\beta_1}^{\beta_3} e^{\alpha t} T dt + \dots$$

è integrale della (1), se tra le costanti $C_1, C_2, \dots$ si stabilisce la relazione

$$C_1(\mu_2 - \mu_1) + C_2(\mu_3 - \mu_1) + \dots = 0;$$

cosichè se i termini nel secondo membro della (5) saranno $n+1$, la (5) ci darà l'integrale generale della proposta equazione.

1) Sia la equazione $xy'' + a^2y' - b^2xy = 0$.

Qui è $q(t) = t^2 - b^2$, $\psi(t) = a^2t$, $\int \frac{\psi(t)}{q(t)} dt = \frac{a^2}{2} \log(t^2 - b^2)$,

quindi $T = \frac{1}{t^2 - b^2} (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2}} = (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1}$. Per determinare i limiti

dell'integrale osserviamo che la equazione $e^{a^2t}(t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2}} = 0$ è soddisfatta da $t = b$, $t = -b$, ed inoltre, se $x > 0$, da $t = -\infty$, e, se $x < 0$, da $t = \infty$; cosicchè abbiamo l'integrale generale della equazione proposta

$$y = C_1 \int_{-b}^b (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{t^2 x} dt + C_2 \int_{-\infty}^{-b} (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{t^2 x} dt \text{ per } x > 0,$$

$$y = C_1 \int_{-b}^b (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{t^2 x} dt + C_2 \int_b^{\infty} (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{t^2 x} dt \text{ per } x < 0.$$

2) Sia $y^{(n)} - xy = 0$. Qui è $q(t) = -1$, $\psi(t) = t^n$, quindi $T = e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}}$; la equazione $e^{\alpha t - \frac{t^{n+1}}{n+1}}$ è soddisfatta da $t = \infty$ e la $e^{\alpha t - \frac{t^{n+1}}{n+1}} = 1$ da $t = 0$; cosicchè il risultato della sostituzione di $\int_0^{\infty} e^{\alpha t - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt$ in luogo di y nel primo membro della equazione

proposta è uguale ad uno. Osserviamo che la funzione T non cambia ponendo ωt in luogo di t , dove ω indica una radice $(n+1)^a$ dell'unità e il risultato della sostituzione di

$\int_0^{\infty} e^{\alpha \omega t - \frac{t^{n+1}}{n+1}} d(\omega t)$ per y nel primo membro della proposta è eguale ad uno.

Da quanto precede si scorge facilmente che, se ω indica

una radice primitiva $(n+1)^a$ dell'unità,

$$y = C_0 \int_0^{\infty} e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt + \omega C_1 \int_0^{\infty} e^{\omega x t - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt + \omega^2 C_1 \int_0^{\infty} e^{\omega^2 x t - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt + \dots \\ + \omega^n C_n \int_0^{\infty} e^{\omega^n x t - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt$$

è l'integrale generale della proposta equazione se tra le costanti C poniamo la relazione

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0.$$

Si potranno poi fare sparire gli immaginari dal secondo membro del precedente valore di y .

ESERCIZI.

$$1. \quad xy'' - (x - \beta)(1 + x)y' - \alpha\beta xy = 0, \quad \beta > x > 0;$$

$$y = C_1 \int_{-\beta}^{\alpha} e^{xt} (t - x)^{\frac{(\beta - \alpha)x}{\alpha + \beta} - 1} (t + \beta)^{\frac{(\beta - \alpha)\beta}{\alpha + \beta} - 1} dt \\ + C_2 \int_{-\infty}^{-\beta} e^{xt} (t - \alpha)^{\frac{(\beta - \alpha)\alpha}{\alpha + \beta} - 1} (t + \beta)^{\frac{(\beta - \alpha)x}{\alpha + \beta} - 1} dt$$

se $x > 0$; se $x < 0$ si cambiano i limiti del secondo integrale in α, ∞ .

$$2. \quad xy'' + ay' + b^2 xy = 0, \quad a > 0;$$

$$y = C_1 \int_0^{bt} e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt + C_2 \int_0^{bt} e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt + C_3 \int_{-\infty}^0 e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt.$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

ovvero

$$y = \int_0^{bt} (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2} - 1} [C \cos(ux) + C_3 \sin(ux)] du + C_3 \int_{-\infty}^0 e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt,$$

se $x > 0$; per $x < 0$, si cambiano i limiti dell'ultimo integrale in $0, \infty$.

3. $xy'' - axy' + (n+m+2)y' - (n+1)ay = 0$, $m+1 > 0$, $n+1 > 0$.

$$y = C_1 \int_0^a e^{tx} t^n (t-a)^m dt + C_2 \int_0^{\frac{x}{a}} e^{\frac{t}{a}x} t^n (t-a)^m dt,$$

$$-\infty \text{ se } x > 0, +\infty \text{ se } x < 0;$$

in particolare, l'integrale della $xy'' + (2-ax)y' - ay = 0$ è

$$y = \frac{1}{x} (C_1 + C_2 e^{ax}).$$

4. Le equazioni della forma

$$x^2 y'' + (a_1 + b_1 x^m) xy' + (a + b x^m + c x^{2m}) y = 0,$$

posto $x^m = t$, $y = t^k z$, dove k è determinato dalla equazione $m^2 k^2 + (a_1 - 1)km + a = 0$, si riducono alla forma, considerata nel testo,

$$m^2 t \frac{d^2 z}{dt^2} + [2m^2 k + m(m-1) + ma_1 + mb_1 t] \frac{dz}{dt} + (mkb_1 + b + ct)z = 0.$$

5. $y'' + a^2 x^{2m-2} y = 0$; qualunque sia m , purchè non appartenente all'intervallo $(0, 1)$, è

$$y = \int_0^a (a^2 - t^2)^{-\frac{(m+1)}{2m}} \left[C_1 \cos\left(\frac{tx^m}{m}\right) + C_2 \sin\left(\frac{tx^m}{m}\right) \right] dt$$

$$+ C_3 \int_{-\infty}^0 e^{\frac{tx^m}{m}} (t^2 + a^2)^{-\frac{1+m}{2m}} dt, \text{ se } \frac{ax^m}{m} > 0,$$

e se $\frac{x^m}{m} < 0$ si cambiano i limiti del secondo integrale in $0, \infty$; od anche

$$y = \int_0^a (a^2 - t^2)^{-\frac{1+m}{2m}} \cos \frac{tx^m}{m} [C_1 + C_2 x^{\frac{1}{m}} (a^2 - t^2)^{\frac{1}{m^2}}] dt.$$

183. Poichè vi sono elementi di una curva, data da una equazione $f(x, y) = 0$ in coordinate cartesiane, che contengono nella loro espressione le derivate di y rapporto ad x , come ad es.: gli angoli della tangente in punto della curva cogli assi, la sottonormale, sottotangente, il raggio di curvatura etc, si intende come il problema di determinare una curva che goda di date proprietà riferentesi a tali elementi, darà luogo ad una equazione differenziale, che sarà la traduzione analitica di quelle proprietà geometriche; si avrà così *la equazione differenziale della curva*, la cui integrazione ci permetterà di arrivare alla equazione della curva.

Analogamente se la curva sia riferita ad un sistema di coordinate polari o ad un altro qualunque sistema di coordinate, la cui scelta opportuna dipenderà poi dalla natura del problema proposto.

ESEMPL.

1) *Trovare una curva tale che in ogni suo punto la sottotangente stia all'ordinata come una costante a sia alla differenza tra l'ordinata e l'ascissa* (Problema proposto ai geometri trent'anni prima della scoperta del calcolo infinitesimale da DE BEAUNE, amico di CARTESIO, il quale ne trovò la soluzione, senza indicare come vi arrivasse. Il problema era allora di un genere nuovo, perchè non richiedeva di dimostrare qualche proprietà di una data curva, ma da una proprietà di una curva incognita domandava di risalire alla curva stessa. Il problema fu poi risoluto da l'HÔPITAL e da GIOVANNI BERNOULLI col calcolo integrale).

Ricordando che la sottotangente in un punto di coordinate (x, y) è $y \frac{dx}{dy}$, l'enunciato del problema proposto si traduce nel-

la equazione differenziale

$$\frac{1}{y} y \frac{dx}{dy} = \frac{a}{y-x} \text{ ossia } \frac{dy}{dx} - \frac{y}{a} = -\frac{x}{a},$$

che è una equazione lineare, il cui integrale generale è

$$y = x + a + C e^{\frac{x}{a}}.$$

Abbiamo così un numero infinito di curve che risolvono il problema, quelle che si ottengono dalla precedente equazione attribuendovi alla costante C tutti i valori.

In particolare per $C=0$ abbiamo la retta $y = x + a$.

2) *Trovare la curva per la quale il punto di mezzo della normale geometrica è sul circolo $X^2 + Y^2 = a^2$.*

Le coordinate di un punto M della curva cercata siano (x, y) , la ascissa del punto N nel quale la normale in M alla curva taglia l'asse delle x è, come si ricava subito dalla equazione $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$ della normale in M , $x + yy'$, e l'ordinata è zero, cosicchè le coordinate del punto P di mezzo della retta MN sono $x + \frac{1}{2} yy'$, $\frac{1}{2} y$. Esprimendo che il punto P , qualunque sia il punto M cioè qualunque siano x, y , è sul circolo $X^2 + Y^2 = a^2$, abbiamo l'equazione differenziale della curva richiesta

$$\left(x + \frac{1}{2} yy'\right)^2 + \frac{1}{4} y^2 = a^2 \text{ ossia } 2x + y' = \sqrt{4a^2 - y^2},$$

dove al radicale si sottintende preposto il segno $\pm$. Per integrarla, poniamo $\sqrt{4a^2 - y^2} = u$; essa si trasforma nella $uu' = 2x - u$, che è omogenea, il cui integrale è $(u - x)(u + 2x) = C$, e quindi quello della equazione in x, y è

$$(\sqrt{4a^2 - y^2} - x)(\sqrt{4a^2 - y^2} + 2x) = C \text{ od anche}$$

$$(4a^2 - y^2 - 2x^2 - C)^2 = x^2(4x^2 - y^2).$$

Le curve rappresentate da questa equazione risolvono il problema. In particolare per $C=0$ abbiamo la curva

$$(\sqrt{4a^2 - y^2} - x)(\sqrt{4a^2 - y^2} + 2x) = 0$$

che si compone del circolo $x^2 + y^2 = 4a^2$, e della ellisse $4x^2 + y^2 = 4a^2$, circolo ed ellisse che soddisfanno ciascuno alle condizioni del problema.

3) *Determinare le curve per le quali il raggio di curvatura è uguale in ogni punto alla normale geometrica.*

L'equazione del problema è

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ossia} \quad (1+y'^2)^2 \mp y^2 y''^2 = 0,$$

e quindi ancora

$$(1+y'^2 + yy'') (1+y'^2 - yy'') = 0.$$

Integriamo ciascuna delle equazioni

$$1+y'^2 + yy'' = 0, \quad 1+y'^2 - yy'' = 0.$$

La prima ammette l'integrale primo $yy' + x = C_1$, il cui integrale è $x^2 + y^2 = 2C_1x + C_2$, che rappresenta dei circoli il cui centro è sull'asse delle x .

Per integrare l'altra equazione, si ponga $\frac{dy}{dx} = p$ e si prenda y per variabile indipendente. Essa diventa allora

$$1 + p^2 - yp \frac{dp}{dy} = 0, \quad \text{dalla quale, integrando col separare le va-}$$

riabili, si ottiene $y = C_1 \sqrt{1+p^2}$ e quindi $dx = \frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}}$ da cui

$$x = C_2 + C_1 \log(y + \sqrt{y^2 - C_1^2}), \quad y + \sqrt{y^2 - C_1^2} = e^{\frac{x-C_2}{C_1}}, \quad \text{ossia}$$

$$y = \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{x-C_2}{C_1}} + C_1 e^{-\frac{x-C_2}{C_1}} \right\} = \frac{C_1}{2} \left\{ \frac{1}{C_1} e^{\frac{x-C_2}{C_1}} + C_1 e^{-\frac{x-C_2}{C_1}} \right\},$$

e, posto $C_1 = e^{c_1}$, $C_2 + C_1 C_3 = C$, abbiamo infine

www.libtool.com.cn

$$y = \frac{C_1}{2} \left\{ e^{\frac{x-c}{c_1}} + e^{-\frac{x-c}{c_1}} \right\},$$

equazione che rappresenta delle catenarie. Queste catenarie e i precedenti cerchi sono le curve richieste.

4) *Curva per la quale l'arco contato a partire dall'asse polare è uguale alla derivata rapporto al raggio vettore del corrispondente settore.*

Indicando con ρ, ϑ le coordinate polari di un punto della curva, l'arco che termina in quel punto ed ha origine nel

punto in cui la curva incontra l'asse polare è $\int_0^\vartheta \rho \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2} d\vartheta$

ed il corrispondente settore è $\frac{1}{2} \int_0^\vartheta \rho^2 d\vartheta$, cosicchè dovremo avere

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\vartheta \rho^2 d\vartheta \right\} = \int_0^\vartheta \rho \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2} d\vartheta,$$

da cui, derivando rapporto a ϑ , abbiamo

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{2} \rho^2 \right) = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2} \quad \text{ossia} \quad \rho = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2}$$

che è l'equazione differenziale del problema: essa si riduce a

$\frac{d\rho}{d\vartheta} = 0$ da cui $\rho = C$; quindi le curve richieste sono i cerchi col centro nel polo.

189. *Problema delle traiettorie.*

Sia il sistema di curve rappresentato dalla equazione $f(\xi, \eta, a) = 0$, dove ξ, η sono le coordinate cartesiane ortogonali correnti ed a è il parametro, che individualizza le curve del sistema. Chiameremo *traiettoria* del sistema una linea che

in ogni suo punto d'incontro con ciascuna linea del sistema la taglia secondo una data legge costante.

Indichiamo con x, y le coordinate correnti della traiettoria e la legge secondo la quale essa deve incontrare le linee del sistema sia espressa dalla equazione

$$(1) \quad F\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \dots, x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0,$$

dove ξ e η e x, y sono uguali tra loro, essendo $(\xi, \eta), (x, y)$ le coordinate del punto comune alla traiettoria ed alla linea del sistema, ma, come è chiaro, sono diversi tra loro $\frac{d\eta}{d\xi}$ e

$\frac{dy}{dx}$, etc. Per trovare l'equazione differenziale delle traiettorie sostituiamo nella (1) in luogo di $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \dots$ i valori che si ricavano dalla $f(\xi, \eta, a) = 0$ e poi tra questa equazione e quella così ottenuta dalla (1) elimineremo a ; il risultato della eliminazione, ove si scriva x, y in luogo di ξ, η è la richiesta equazione differenziale delle traiettorie.

Il più interessante problema delle traiettorie, quello che ordinariamente è considerato come il vero e proprio problema delle traiettorie, consiste nel determinare le curve che tagliano le curve del dato sistema sotto un certo angolo costante α . Se α è retto, le traiettorie chiamansi ortogonali. Indichiamo con T l'angolo che la tangente nel punto M alla traiettoria fa coll'asse delle x , con T' l'angolo che la tangente nel punto M alla curva del sistema che passa per M fa coll'asse delle x , cosicchè sia

$$\operatorname{tg} T' = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \operatorname{tg} T = \frac{dy}{dx};$$

abbiamo allora

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(T - T') = \frac{\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} T'}{1 + \operatorname{tg} T \operatorname{tg} T'} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{d\xi}}{1 + \frac{dy}{dx} \frac{d\eta}{d\xi}},$$

www.libtool.com.cn

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cot \alpha \frac{dy}{dx} - 1}{\cot \alpha + \frac{dy}{dx}},$$

che nel nostro caso corrisponde alla (1).

1) Eliminando α tra la $f(\xi, \eta, \alpha) = 0$ e la $\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} = 0$ si ottenga

$$\psi\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0,$$

la quale sia perciò la equazione differenziale delle linee del dato sistema. Ponendo in questa equazione $\xi = x$, $\eta = y$ e in luogo di $\frac{d\eta}{d\xi}$ il precedente valore, otteniamo la equazione differenziale delle traiettorie

$$\psi\left(x, y, \frac{\frac{dy}{dx} \cot \alpha - 1}{\cot \alpha + \frac{dy}{dx}}\right) = 0.$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cioè se le traiettorie sono ortogonali, questa equazione diventa

$$\psi\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

2) La equazione del sistema dato di curve sia della forma

$$(2) \quad \eta = \varphi(\xi, \alpha),$$

e se ne vogliano determinare le traiettorie ortogonali. In questo caso, oltre al procedimento generale precedente, potremo adoperare il seguente.

Cerchiamo di determinare α come tale funzione di x , che

la equazione

$$(3) \quad y = \varphi(x, a)$$

risulti quella delle traiettorie ortogonali. Avremo allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{da}{dx}, \quad \text{e, dalla (2)} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi};$$

affinché la (3) rappresenti le traiettorie ortogonali dovrà essere

$$1 + \frac{dy}{dx} \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \text{e quindi}$$

$$1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{da}{dx} \right) = 0,$$

ossia, ponendo $x = \xi$, $y = \eta$,

$$(4) \quad 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{da}{dx} = 0.$$

È questa l'equazione differenziale tra x e a cui deve soddisfare a ; integrandola e ponendo nella (3) per a la funzione integrale, la (3) diventa l'equazione delle traiettorie ortogonali delle (2).

3) Trattiamo il problema in coordinate polari. Sia $f(r, \varphi, a) = 0$ l'equazione del dato sistema di curve. Indicando con μ_1 l'angolo che la tangente in un punto (r, φ) ad una delle curve fa col raggio vettore di quel punto, è $\operatorname{tg} \mu_1 = r \frac{d\varphi}{dr}$, ed indicando con μ l'angolo analogo per la traiettoria, di cui indichiamo con ρ, ϑ le coordinate correnti, abbiamo $\operatorname{tg} \mu = \rho \frac{d\vartheta}{d\rho}$, e

$$\text{poichè } \mu - \mu_1 = \alpha, \quad \text{è } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho \frac{d\vartheta}{d\rho} - r \frac{d\varphi}{dr}}{1 + \rho r \frac{d\vartheta}{d\rho} \frac{d\varphi}{dr}} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\rho \cot \alpha \frac{d\vartheta}{d\rho} - 1}{\rho r \frac{d\vartheta}{d\rho} + r \cot \alpha}.$$

Sostituendo questo valore nella equazione differenziale del sistema di curve

$$\psi\left(r, \varphi, \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

e poi ponendo $r = \rho$, $\varphi = \vartheta$, abbiamo la equazione differenziale delle traiettorie

$$\psi\left(\rho, \vartheta, \frac{\rho \frac{d\vartheta}{d\rho} \cot \alpha - 1}{\rho^2 \frac{d\vartheta}{d\rho} + \rho \cot \alpha}\right) = 0,$$

che per le traiettorie ortogonali si riduce alla

$$\psi\left(\rho, \vartheta, -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\vartheta}\right) = 0.$$

ESEMPI

1) *Traiettorie ortogonali dei cerchi di raggio costante r e col centro sull'asse delle ascisse.*

La equazione dei cerchi è $(\xi - a)^2 + \eta^2 = r^2$, a essendo il parametro variabile, e la loro equazione differenziale è quindi

$$\left(\eta \frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \eta^2 = r^2,$$

cosicchè quella delle traiettorie ortogonali è

$$\left(y \frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2 = r^2 \text{ ossia } dx + \frac{dy \sqrt{r^2 - y^2}}{y} = 0,$$

dove al radicale si sottintende preposto il segno $\pm$; l'integrale, e quindi l'equazione delle traiettorie ortogonali, è

$$x = -\sqrt{r^2 - y^2} - r \log \frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{y} + C.$$

Esse sono delle *trattrici* (Vedi Vol. I, pag. 570, eserc. 8), le quali tutte si ottengono da una di esse facendola scorrere in modo che i suoi punti si muovano lungo rette parallele all'asse delle x .

2) *Traiettorie ortogonali del sistema di rette $y = ax + \psi(a)$.*

Questa stessa equazione è quella delle traiettorie purchè a si ricavi dalla equazione che corrisponde alla (4) nel nostro caso, cioè dalla

$$1 + a^2 + a[x + \psi'(a)] \frac{da}{dx} = 0 \text{ ossia } \frac{dx}{da} + \frac{ax}{1+a^2} = -\frac{a\psi'(a)}{1+a^2},$$

equazione lineare il cui integrale è

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left[-\int \frac{a\psi'(a)}{\sqrt{1+a^2}} da + C \right].$$

Considerando a come un parametro variabile, questa equazione e la $y = ax + \psi(a)$ ci danno le coordinate dei punti delle cercate traiettorie, e la eliminazione di a ci dà la loro equazione in coordinate x, y . Così in particolare se $\psi(a) = 0$, le traiettorie ortogonali delle rette $y = ax$ sono date da $y = ax$,

$$x = \frac{C}{\sqrt{1+a^2}}, \text{ cioè sono i cerchi } x^2 + y^2 = C^2.$$

3) *Traiettorie sotto un angolo $\alpha = \pm \frac{\pi}{3}$ del sistema di parabole $\xi^2 = 2a(\eta - \xi\sqrt{3})$.*

Gli assi delle parabole sono rette parallele all'asse delle y , la retta $\xi = \frac{\eta}{\sqrt{3}}$ è una tangente comune a tutte le parabole nell'origine delle coordinate, ed il luogo geometrico dei vertici delle parabole è la retta $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \eta$.

L'equazione differenziale delle parabole è $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi} - \sqrt{3}$.

cosicchè l'equazione differenziale delle traiettorie è, se $x = \frac{\pi}{3}$,

la equazione

$$\frac{\frac{dy}{dx} \frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{dy}{dx}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3} \quad \text{ossia} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y\sqrt{3}},$$

equazione omogenea il cui integrale è $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$, che rappresenta delle parabole i cui assi sono paralleli all'asse delle x , la retta $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ è una tangente comune nell'origine delle coordinate, ed il luogo geometrico dei vertici delle parabole è la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

Se $x = -\frac{\pi}{3}$, la equazione differenziale delle traiettorie è

$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\sqrt{3}}{y\sqrt{3} - x}$, il cui integrale $\sqrt{3}(x^2 + y^2) - 2xy = C$ rappresenta delle ellissi simili col centro nell'origine delle coordinate ed i cui assi sono le rette $y = \pm x$.

4) Si vogliano trovare le traiettorie di un sistema di curve $f(\xi, \eta, a) = 0$, tali che in ogni punto d'incontro colle curve del sistema la sottonormale della traiettoria uguagli la sottonormale della curva del sistema.

Dovremo allora avere $\eta \frac{d\xi}{d\eta} = y \frac{dx}{dy}$, cosicchè se

$\psi\left(x, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0$ è la equazione differenziale delle curve date, quella delle richieste traiettorie è

$$\psi\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

Così ad esempio, date le rette $\eta = a\xi$, la cui equazione dif-

ferenziale è $\eta = \frac{d\eta}{dx} \xi$, la equazione differenziale delle nostre traiettorie è $y = \frac{dx}{dy} x$, il cui integrale $y^2 - x^2 = C$ rappresenta delle iperboli equilatera.

5) *Traiettorie ortogonali delle spirali d'Archimede*
 $r = \varphi + a$.

L'equazione differenziale di queste curve, che si ottengono tutte dalla spirale d'Archimede $r = \varphi$ quando questa ruota intorno al polo, essendo $\frac{dr}{d\varphi} = 1$, quella delle traiettorie ortogonali è $-\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = 1$, il cui integrale $\rho = \frac{1}{\varphi + C}$ rappresenta delle spirali iperboliche, che si ottengono dalla spirale iperbolica $\rho^2 = 1$ quando questa ruota intorno al polo.

ESERCIZI.

1. Si determinino le linee per le quali, in ogni loro punto, la somma della ordinata e della sottonormale è una data costante a .

La equazione delle linee è $x + y = C - a \log(y - a)$.

Se la somma della ordinata e della sottonormale deve essere una costante *qualunque*, allora l'equazione differenziale delle linee è $y' + y'^2 + y'' = 0$, e la equazione delle linee è $x + y = C_1 - C_2 \log(y - C_2)$.

2. Linee per le quali il raggio di curvatura è costante.

Tutti cerchi $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2$.

3. Linee per le quali è una data costante a la somma della normale geometrica e della sottonormale. Linee $y = a \frac{e^x + C}{e^x - C}$.

4. Linee per le quali il punto di mezzo della tangente geometrica è sulla retta $y = x$.

Le parabole $y^2 = C(y - x)$, che passano per l'origine delle

coordinate ove sono tutte tangenti alla retta $y=x$; l'asse di ciascuna parabola è la retta $y = \frac{C}{2}$.

5. Problema precedente relativo al punto di mezzo della normale geometrica.

$$y^2 - xy + 2x^2 = C e^{\frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}.$$

6. Linee per le quali l'area compresa tra l'asse delle x , la curva, un'ordinata fissa qualunque e l'ordinata y corrispondente ad una ascissa generica x , è uguale al cubo dell'ordinata y diviso per l'ascissa x .

$$\text{Equaz. linee } (x^2 - 2y^2)^3 - Cx^2 = 0.$$

Se l'area deve essere quella compresa tra l'ordinata y e la ordinata fissa corrispondente ad una data ascissa x_0 , si ha la sola curva $(x^2 - 2y^2)^3 - x_0^2 x^2 = 0$.

7. Linea per la quale l'arco contato a partire dall'origine delle coordinate è $= \frac{3h}{2} \sin^2 \alpha$, dove h è una costante e α l'angolo che la tangente alla estremità dell'arco fa coll'asse delle x .

L'equaz. diff. del problema è

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 3hy'' \sin(\arctg y') \cos(\arctg y'),$$

il cui integrale generale è $(x - C_1)^{\frac{2}{3}} + (y - C_2)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$. Le costanti C_1, C_2 dovranno essere determinate in modo che la curva soddisfaccia alle altre condizioni del problema, cioè passi per l'origine delle coordinate e l'arco sia zero per $x=0$; si trova così la curva $(x-h)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$.

8. Determinare la curva per la quale $s = \frac{1}{2} h x^2$, dove h indica l'ascissa del punto in cui la curva tocca l'asse della x , s l'arco contato a partire da questo punto fino al punto generico M , ed α l'angolo della tangente in M alla curva coll'asse delle x .

La sviluppante di circolo

www.libtool.com.cn

$$x = h(\cos x + x \operatorname{sen} x), \quad y = h(\operatorname{sen} x - x \cos x).$$

9. Linee per le quali l'arco è in rapporto costante h col raggio di curvatura al suo estremo.

Le curve le coordinate dei punti delle quali sono

$$x - C_2 = C_1 e^{h\alpha} [h \cos x + \operatorname{sen} x], \quad y - C_3 = C_1 e^{h\alpha} [h \operatorname{sen} x - \cos x],$$

che si riconoscono per spirali logaritmiche trasportando gli assi coordinati parallelamente a loro stessi nel punto di coordinate (C_2, C_3) e poi passando alle coordinate polari col polo in questo punto e coll'asse polare passante pel punto di coordinate $(C_1 h, -C_1)$ rispetto al secondo sistema di assi. L'equazione delle curve è allora $\rho = C_1^2 (1 + h^2) e^{h\alpha}$.

10. Linee per le quali il raggio di curvatura è uguale in ogni punto al raggio vettore.

I circoli col centro nel polo e le curve

$$\varphi = \frac{1}{C_1} \sqrt{2\rho C_1 - C_1^2} - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\rho - C_1}{\rho} + C_2.$$

(Indicando μ l'angolo che la tangente in un punto di coordinate (ρ, φ) della curva fa col raggio vettore di quel punto è $\operatorname{tg} \mu = \rho \frac{d\varphi}{d\rho}$, $\cos \mu = \frac{d\rho}{ds}$, $\operatorname{sen} \mu = \rho \frac{d\varphi}{ds}$, dove al solito ds è l'elemento d'arco di curva. Si osservi perciò, che al raggio di curvatura R può darsi la forma $R = \frac{\rho d\rho}{d(\rho \operatorname{sen} \mu)} = \frac{\rho d\rho}{dp}$, dove $p = \rho \operatorname{sen} \mu$ è la distanza della tangente dal polo).

11. Linee per le quali la distanza della tangente dal polo è in rapporto costante $\frac{1}{\mu}$ col raggio vettore.

Le spirali logaritmiche $\rho = C e^{\theta \sqrt{\mu^2 - 1}}$

12. Linee per le quali la parte di tangente compresa tra il punto di contatto e quello nel quale la perpendicolare al

raggio vettore condotta pel polo taglia la tangente è in rapporto costante μ col raggio vettore.

Le spirali logaritmiche $\rho = Ce^{\frac{\theta}{\mu^2-1}}$.

13. Linee per le quali il raggio di curvatura è una data funzione $f(x)$ dell'angolo x che la tangente fa coll'asse delle ascisse.

$$x + C_1 = \int f(x) \cos x dx, \quad y + C_2 = \int f(x) \sin x dx.$$

Casi particolari:

$$f(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \text{ le catenarie } y + C_2 = \frac{a}{2} \left\{ e^{\frac{x+C_1}{a}} + e^{-\frac{x+C_1}{a}} \right\};$$

$$f(x) = \frac{a}{\sin^2 x}, \text{ le parabole } (y + C_2)^2 = 2a(C_1 - x);$$

$$f(x) = ax, \text{ le sviluppanti di circolo } \begin{cases} x + C_1 = a(\cos x + x \sin x) \\ y + C_2 = a(\sin x - x \cos x) \end{cases}$$

14. Linee per le quali il raggio di curvatura è uguale alla distanza della tangente dal polo.

$$C_1 \rho + C_2 = \sqrt{\rho^2 - C_1^2} + C_1 \arcsin \frac{C_1}{\rho}.$$

15. Linee per le quali il settore compreso tra l'asse polare la curva ed il raggio vettore OM è proporzionale all'area del triangolo formato da OM, la normale in M alla curva e la perpendicolare in P ad OM.

$$\text{Equaz. diff. } \frac{d^2(\rho^2)}{d\theta^2} - \frac{2}{k} \rho^2 = 0.$$

Le linee sono $\rho^2 = C[e^{\theta\sqrt{\frac{2}{k}}} + e^{-\theta\sqrt{\frac{2}{k}}}]$ se $k > 0$, e $\rho^2 = C \cos\left(x\sqrt{\frac{2}{-k}}\right)$ se $k < 0$. In particolare per $k = -\frac{1}{2}$ si hanno le lemniscate $\rho^2 = C \cos 2\theta$.

16. Linee per le quali l'arco contato a partire dal punto, la cui ascissa è a , è in rapporto costante $\frac{1}{m}$ col segmento che la tangente all'estremità dell'arco determina sull'asse delle y a partire dall'origine.

$$y = \frac{C}{2(1-m)} (x^{1-m} - ma^{1-m}) - \frac{1}{2C(1+m)} (x^{1+m} + ma^{1+m});$$

e, se $m = \pm 1$, $y = \frac{C}{2} \left[1 + \log \frac{x}{a} \right] - \frac{1}{4C} (x^2 + a^2).$

Se l'arco deve essere contato a partire dal punto, di coordinate (a, b) , sulla linea, allora si hanno le due sole linee che si ottengono dall'equazione precedente facendovi $C = \frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{a^{1-m}}$.

17. Le traiettorie ortogonali dei cerchi che toccano una data retta in un suo punto fisso sono i cerchi tangenti in quel punto alla perpendicolare condotta per esso alla retta data.

18. Le traiettorie ortogonali di un sistema di ellissi omofocali formano il sistema delle iperboli omofocali.

19. Le traiettorie ortogonali delle spirali logaritmiche $\rho = ae^{m\theta}$, se si prende a pel parametro variabile, sono le spirali logaritmiche $\rho = Ce^{-\frac{\theta}{m}}$, e se si prende m per parametro variabile sono le curve $\rho = ae^{\sqrt{c-\theta^2}}$.

20. Le traiettorie ortogonali dei cerchi col centro sull'asse delle y e tangenti alle rette $y = mx$, $y = -mx$ sono le curve

$$(y \pm \sqrt{y^2 - m^2 x^2}) (y \sqrt{1 + m^2} \mp \sqrt{y^2 - m^2 x^2})^{\frac{1}{1+m^2}} = Cx.$$

Se $m = \sqrt{n^2 - 1}$, dove n è intero, esse sono algebriche.

21. Traiettorie oblique, ad angolo $\alpha = \arctg \mu$, delle curve $y = ax^n$.

La equazione differenziale delle traiettorie è

$$(\mu x + ny) dx = (x - \mu ny) dy.$$

Se $n=1$, le linee date sono rette, e le traiettorie spirali logaritmiche (Ciò anche si ricava immediatamente trattando questo problema speciale in coordinate polari).

Se $n=-1$, le curve date sono iperboli equilateri aventi gli assi coordinati per asintoti, e le traiettorie sono le iperboli equilateri $\mu(y^2 - x^2) + 2xy = C$, i cui asintoti comuni sono le rette $y = \frac{\mu x}{1 \pm \sqrt{1 + \mu^2}}$.

Se le traiettorie debbono essere ortogonali, esse sono le ellissi o iperboli $x^2 + ny^2 = C$.

22. Si determinino, pel sistema di curve $y = ax^n$, le traiettorie tali che in ogni punto di incontro con una curva del sistema, le tangenti alla curva e alla traiettoria siano simmetricamente situate rispetto alle coordinate di quel punto.

Le traiettorie richieste sono le linee $x^n y = C$. Per $n=1$ le linee date sono rette e le traiettorie iperboli equilateri.

23. Le traiettorie oblique delle curve ottenute dalla curva $y = f(x)$, quando essa si muove in modo che i suoi punti descrivano rette parallele all'asse delle y , sono le linee

$y + C = \int \frac{f'(x) \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - f'(x)} dx$. Ad es.: se la curva è la parabola $y^2 = 2px$, le traiettorie ortogonali sono le parabole semicubiche $(y + C)^2 = \frac{8}{9p} x^3$.

24. Le traiettorie oblique delle curve ottenute dalla $\rho = f(\varphi)$, quando essa ruota intorno al polo in modo che i suoi punti descrivano circonferenze col centro nel polo, sono le linee

$$\rho + C = \int \frac{1 + \rho f'(\rho) \cot \alpha}{\cot \alpha - \rho f'(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Ad esempio: se la curva data è la spirale logaritmica $\rho = e^{m\theta}$, le traiettorie ortogonali sono le spirali logaritmiche $\rho = e^{-\frac{\theta+C}{m}}$; se la curva è la spirale logaritmica $\rho = e^\theta$, ed $\alpha = \frac{\pi}{4}$, le traiettorie sono i cerchi col centro nel polo; se la curva è un

circolo di raggio r e che passa pel polo, le traiettorie ortogonali sono le [linee libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

$$\vartheta + C = \arccos \frac{\rho}{2r} - \frac{1}{\rho} \sqrt{4r^2 - \rho^2}.$$

25. La equazione differenziale delle traiettorie ortogonali delle tangenti alla curva $f(\xi, \eta) = 0$ (sviluppati della curva data) si ottiene eliminando ξ, η tra le equazioni

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad 1 + y' \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad y'(y - \eta) + x - \xi = 0.$$

Soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine.

190. Senza entrare in particolari, ci proponiamo ora di dare un cenno per le equazioni differenziali di primo ordine delle soluzioni singolari, che abbiamo visto presentarsi nella equazione di CLAIRAUT, cioè di quelle funzioni, non contenenti costante arbitraria, che soddisfanno ad una data equazione e che non si possono ricavare dall'integrale generale attribuendovi alla costante arbitraria un particolare valore.

Sia $\varphi(x, y, C) = 0$ l'integrale generale della equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$, di guisa che eliminando C tra la $\varphi = 0$ e la $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ si ottenga $\mu f = 0$, dove μ non contiene y' . Otterremo lo stesso risultato anche supponendo C tale funzione di x, y che sia $\frac{\partial \varphi}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0$, giacchè allora derivando rapporto ad x la $\varphi = 0$ otterremo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0,$$

ed il risultato della eliminazione di C tra questa equazione e

la $\varphi=0$ sarà ancora, come quando supposevasi C costante,

$\mu f=0$. Ora alla $\frac{\partial \varphi}{\partial C} \frac{dC}{dx}=0$ possiamo soddisfare prendendo

$\frac{dC}{dx}=0$ cioè C costante, ed allora la $\varphi=0$ è ancora l'integrale generale, oppure prendendo $\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0$, equazione che de-

termina C come funzione di x, y , la quale funzione in casi speciali solo potrà ridursi ad una costante. Ponendo per C nella $\varphi=0$ il valore ricavato dalla $\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0$, ossia eliminando C tra la

$$\varphi(x, y, C)=0 \quad \text{e la} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial C}=0$$

si ottiene una equazione che dà le soluzioni singolari della proposta equazione. Notiamo però che, se, per considerare il caso più generale, si suppone la ψ scissa in fattori di determinata natura, alcuni di questi e anche tutti eguagliati a zero potranno non dare una soluzione singolare, perchè potrebbe qualcuno essere contenuto come fattore in μ , e potrebbe la $\psi=0$ non dare alcuna soluzione singolare perchè pel valore di C , funzione di x, y , che si trae da $\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0$, potrebbero annullarsi $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e quindi non po-

tremo più considerare la equazione $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} x' = 0$. Cosichè, ottenuta la $\psi=0$ bisognerà sempre provare i suoi fattori per riconoscere colla diretta sostituzione nella equazione proposta se ad essi corrispondano o no soluzioni singolari. Notiamo ancora che potrà avvenire che la $\psi=0$ sia un integrale particolare, e ciò quando il valore che si trae da $\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0$ riesca una costante.

Geometricamente le soluzioni singolari della $f=0$ corrispondono all'involuppo delle linee $\varphi(x, y, C)=0$ (V. vol. I, pag. 559), e propriamente a quella parte dell'involuppo per la

quale in ogni suo punto la tangente coincide con la tangente della involupata che passa per esso.

Le soluzioni singolari possiamo anche dedurle dalla equazione differenziale proposta, senza conoscerne l'integrale generale. Invero, osserviamo che se dalla equazione differenziale proposta

$$f(x, y, y') = 0 \text{ e dalla } \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

eliminiamo y' otteniamo una equazione il cui primo membro contiene $\varphi(x, y, C)$ come fattore di guisa che potremo considerare la $f(x, y, y') = 0$ come l'integrale della $f = 0$ se la y' è data dalla $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$. Derivando, in questa ipotesi, la

$f = 0$ rispetto a C avremo $\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dC} = 0$, e per eliminare C

tra la $f = 0$ e la $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ basterà eliminare tra loro y' .

Il risultato della eliminazione dà, colle riserve già accennate, la soluzione singolare della $f(x, y, y') = 0$.

A dilucidazione della teoria che abbiamo sommariamente esposta, diamo alcuni

ESEMPLI.

1) Si determinino le linee per le quali, in ogni punto, la lunghezza della normale è media proporzionale tra una quantità data a e la sottonormale aumentata dell'ascissa (*Leibniz*).

L'equazione differenziale del problema è

$$y^2(1 + y'^2) = a(x + yy'),$$

ossia, posto $\frac{dy}{dx} = p$,

(1) $ax = y^2(1 + p^2) - apy$, da cui, differenziando,

$(2py - a) \left(\frac{p^2 + 1}{p} dy + y dp \right) = 0$. Eliminando p tra la (1) e l'integrale della equazione $\frac{p^2 + 1}{p} dy + y dp = 0$, abbiamo l'integrale generale $y^2 + (x - C)^2 = aC$, che rappresenta dei cerchi col centro sull'asse delle x ; eliminando p tra la (1) e la $2py - a = 0$, abbiamo, analogamente a quanto succede per la equazione di *Clairaut*, l'integrale singolare $y^2 = a \left(x + \frac{a}{4} \right)$, che rappresenta una parabola avente per asse l'asse delle x . Questa soluzione singolare si ottiene ancora, come subito si può verificare, eliminando C tra la equazione integrale generale e la sua derivata $-2(x - C) = a$ rispetto C , ed anche eliminando p tra la (1) e la sua derivata $2yp - ay = 0$ rispetto p .

La parabola, che corrisponde alla soluzione singolare, è l'involuppo dei cerchi, che corrispondono all'integrale generale.

2) Curva per la quale la parte di normale compresa tra il punto sulla curva e la perpendicolare nel polo al raggio vettore del punto (normale polare geometrica) è una costante data $2a$.

La equazione differenziale del problema è

$$(2) \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 = 4a^2,$$

il cui integrale generale è $\rho = 2a \sin(C \pm \vartheta)$, od anche $\rho = 2a[C \cos \vartheta \pm \sin \vartheta \sqrt{1 - C^2}]$, (in coord. cartesiane $(x - aC)^2 + (y \mp a\sqrt{1 - C^2})^2 = a^2$) che rappresenta dei cerchi che passano pel polo e che hanno il centro sul circolo $\rho = a$. La soluzione singolare si ricava subito eliminando $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ tra la (1) e la

$2 \frac{d\rho}{d\vartheta} = 0$ ottenuta derivando la (2) rispetto a $\frac{d\rho}{d\vartheta}$, e si ottiene così $\rho^2 = 4a^2$ ossia $\rho = 2a$.

3) La $y = 1 + x - \frac{a^2}{4}$ soddisfa alla equazione differenziale $y = x + xy' + y'^2$; è essa un integrale particolare o una soluzione singolare?

Per riconoscere ciò osserviamo che l'integrale generale della proposta equazione è dato dalle due equazioni

$$(3) \quad y = x + xp + p^2, \quad x = 2(1 - p) + Ce^{-p}.$$

Ora se facciamo $C=0$ ed eliminiamo p tra la prima di queste equazioni e la $x=2(1-p)$, otteniamo appunto

$y = 1 + x - \frac{x^2}{4}$, che, corrispondendo a $C=0$, non è una soluzione singolare ma un integrale particolare.

Per trovare le soluzioni singolari, ove esistano, eliminiamo y' tra la data equazione e la sua derivata rispetto ad y' , $x + 2y' = 0$; otteniamo così $y = x - \frac{x^2}{4}$, che però non soddisfa alla equazione differenziale.

Per ottenere la soluzione singolare dall'integrale generale, dovremo qui eliminare p e C tra le (3) e la $e^{-p} = 0$, ottenuta derivando la seconda delle (3) rapporto a C , ossia eliminare p tra la prima delle (3) e la $e^{-p} = 0$; ma quest'ultima non può essere soddisfatta che da valori infiniti e positivi di p . Quindi non otteniamo, avuto riguardo ai valori di p che si ricavano dalla prima delle (3), neanche così alcuna soluzione singolare.

4) Se l'integrale generale d'una equazione differenziale di primo ordine è della forma $\varphi(x, y) = C$, dove φ è *funzione univalente*, la equazione non ammette soluzione singolare, perchè derivando rapporto a C avremo il risultato $1 = 0$ (Confrontare il n. 196 del vol. I).

Così pure si riconoscerà subito che una equazione differenziale della forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, dove f è *funzione univalente* non ammette soluzione singolare.

5) L'integrale generale della equazione $9yy'^2 - 4 = 0$ è $(x - C)^2 - y^2 = 0$, dal quale otteniamo, colla solita eliminazione, $y = 0$, che però non è soluzione singolare non soddisfacendo alla proposta equazione (Vedi vol. I, pag. 566, es. 2°).

6) L'integrale generale della equazione

$4(1+y) - y^2(3+5y)^2 y^2 = 0$ è $x+C = \int \frac{y(4+5y)}{2\sqrt{1+y}} dy = y^2\sqrt{1+y}$,
 ossia $(x+C)^2 = y^4(1+y)$. Eliminando C tra questa ultima equazione e la $2(x+C)=0$, abbiamo $y^4(1+y)=0$. Il fattore $y=0$ non soddisfa alla proposta equazione, e l'altro $1+y=0$ ci dà la soluzione singolare, che si ottiene subito anche dall'equazione differenziale (Vedi vol. I, pag. 567, es. 4).

ESERCIZI.

1. Curva per la quale la perpendicolare da un punto di coordinate (a, b) sulle sue tangenti è di lunghezza costante r .

L'integrale generale dà le rette $y-b=C(x-a) \pm r\sqrt{1+C^2}$, e la soluzione singolare è il circolo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, che è l'involuppo delle rette.

2. Curve per le quali è una costante $\frac{1}{2}a^2$ l'area del triangolo formato dalla tangente e dagli assi.

Int. gen. $y=aC-C^2x$, soluzione singolare $xy=\frac{1}{4}a^2$.

3. $(x+yy')^2 = x^2(1+y'^2)(1+m^2)$; int. gen. $x^2 + (y-C)^2 = \frac{C^2}{1+m^2}$, da cui l'int. singolare $y^2 = m^2 x^2$; dall'equaz. differenziale ricavasi, col metodo indicato nel testo, $\frac{(1+m^2)x^2(y^2-m^2x^2)}{(1+m^2)x^2 - y^2} = 0$; $x=0$ non soddisfa alla equazione. (Conf. col problema 20 a pag. 583.)

4. Linee tali che il prodotto della lunghezza delle perpendicolari da due punti fissi $(-m, 0), (m, 0)$ sulle tangenti sia una costante k^2 (Lagrange).

Int. gen. $y=Cx + \sqrt{C^2(m^2 \pm k^2) \pm k^2}$, dove al radicale si sottintende preposto il segno $\pm$; soluzione singolare la ellisse $\frac{x^2}{m^2+k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$, e la iperbole $\frac{x^2}{m^2-k^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1$ reale solo se $m^2 > k^2$.

5. $2y^2y' + 2xyy' + x^2 + y^2 - 1 = 0$ ossia $(2yy' + x)^2 = 2(1 - y^2) - x^2$.
 Si ponga $1 - y^2 = z$, $2x - x^2 = u$. L'integrale generale $(x - C)^2 + y^2 = 1 - C^2$, $1 - C^2 > 0$, rappresenta i cerchi descritti col centro sull'asse della x e con raggi uguali alle rispettive corde, perpendicolari ad esso, del circolo $x^2 + y^2 = 1$. La soluzione singolare, involuppo dei cerchi, è l'ellisse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

6. $(1 + y^2)y' = 2a$; integ. gen. le cicloidi

$x + C = a \arccos \frac{a - y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}$; soluz. sing. $2a - y = 0$.

7. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$; int. gen. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{a+C}{a}} + e^{-\frac{a+C}{a}} \right)$, soluz. sing. $y^2 = a^2$.

8. $yy'^3 - 2xy' + y = 0$; int. gen. $y^2 = 2Cx - C^2$, sol. sing. $y^2 - x^2 = 0$.

9. $3y'^3 - x^4y' + 2x^2y = 0$; int. gen. $2y - Cx^2 + 3C^2 = 0$; soluz. sing. $y = \pm \frac{a^3}{y}$.

10. $xy^2y' - y^3y' + x = 0$; int. gen. $1 + x^2C^2 = Cy^2$; sol. sing. $y^4 = 4x^2$.

11. $y'^2 + by^2 = a(y + bx)$; derivando rapporto ad y' abbiamo $y'(3y' + 2b) = 0$; da $y' = 0$ ricaviamo $y + bx = 0$, che soddisfa alla equazione proposta. Si provi che non è soluz. singolare, ma integrale particolare corrispondente al valore $C = -\infty$ della costante nell'integrale generale.

Equazioni a differenziali totali.

191. Nelle equazioni differenziali fin qui studiate comparivano due sole variabili; occupiamoci ora delle equazioni differenziali contenenti più di due variabili.

Cominceremo questo studio dando un cenno delle equazioni di primo ordine a differenziali totali, che sono della forma

$$Pdx + Qdy + Rdz + Tdu + \dots = 0,$$

dove $P, Q, R, \dots$ sono funzioni di $x, y, z, u, \dots$

Sia in primo luogo una equazione
www.libtool.com.cn

$$(1) \quad Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

fra tre variabili. Da una equazione $\varphi(x, y, z) = C$ in termini finiti ricaviamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

e se le derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ hanno un fattore comune μ , l'ultima equazione potrà essere liberata da esso. In ogni modo otteniamo un'equazione della forma (1).

Inversamente, però, una equazione (1) non conduce necessariamente ad una relazione della forma $\varphi(x, y, z) = C$; giacchè occorre perciò che le P, Q, R siano proporzionali alle derivate rapporto ad x, y, z di una certa funzione φ . Quando dalla (1) si possa ricavare una equazione $\varphi(x, y, z) = C$, questa dicesi l'integrale generale della (1), e la proposta equazione a differenziali totali dicesi allora *integrabile*, o che è deducibile da una unica equazione primitiva.

Ora la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) sia integrabile e che tra P, Q, R passi la relazione

$$(2) \quad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

La condizione è necessaria. Invero ammessa l'esistenza della equazione $\varphi(x, y, z) = C$ tale che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu R,$$

abbiamo

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad \text{ossia} \quad \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y},$$

ed in modo analogo

$$\mu \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) = R \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \mu \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) = P \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial \mu}{\partial x};$$

moltiplicando le tre ultime equazioni rispettivamente per R , P , Q e sommando otteniamo la (2).

La condizione è sufficiente. Invero, consideriamo nella (1) come costante una delle variabili, poniamo la z , ed integriamo la equazione differenziale

$$Pdx + Qdy = 0$$

che ne risulta. Sia $f(x, y, z) = \psi(z)$ il suo integrale, ove in luogo della costante arbitraria abbiamo posto la funzione arbitraria $\psi(z)$ di z ; allora è

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu Q.$$

Dico che, ammessa la (2), si potrà determinare la $\psi(z)$ in modo che risulti $\frac{\partial f}{\partial z} - \psi'(z) = \mu R$, ed allora la (1) sarà integrabile ed il suo integrale sarà $f(x, y, z) = \psi(z)$; dovrà perciò $\psi'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} - \mu R$ essere funzione della sola z , quando nel secondo membro si sostituisca per y il valore, espresso per x e z , ricavato dalla $f(x, y, z) = \psi(z)$, cioè dovremo avere

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R \right) = 0$. È ciò che effettivamente ha luogo, giacchè abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \\ &\quad - R \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

la quale, essendo $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{P}{Q}$ ed avuto riguardo alle

formole

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \mu \frac{\partial P}{\partial z} + P \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \mu \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

che si ricavano dalle (3), diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R \right) &= \frac{\mu}{Q} \left\{ Q \frac{\partial P}{\partial z} - P \frac{\partial Q}{\partial z} - Q \frac{\partial R}{\partial x} + P \frac{\partial R}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. - R \left(Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned}$$

ossia, in virtù della (2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R \right) &= \frac{\mu R}{Q} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} \right\} \\ &= \frac{\mu R}{Q} \left\{ \frac{\partial(P\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(Q\mu)}{\partial x} \right\}. \end{aligned}$$

L'ultimo membro essendo zero in virtù delle (3), abbiamo appunto $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R \right) = 0$. Ed avremo allora

$\psi(z) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R \right) dz + C$, cosicchè, non solo rimane dimostrato che la (2) è condizione sufficiente alla integrabilità della (1), ma ne abbiamo ancora trovato l'integrale generale

$$f(x, y, z) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R \right) dz + C.$$

Si noti ancora come dal metodo precedente risulti che si può fare a meno, ove ciò torni opportuno, di verificare se è soddisfatta la (2), perchè se $\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R$ si può ridurre a funzione

della sola z la proposta equazione è integrabile, altrimenti non lo è.

www.libtool.com.cn

ESEMPIO. Data la equazione

$$z[1 - (x + y + z) \cos(x + y + z)](dx + dy + dz) + (x + y + z)[\sin(x + y + z) - \log(x + y + z)]dz = 0,$$

si verifica subito che è soddisfatta la condizione di integrabilità. Per integrarla poniamo in essa $dz = 0$, cosicchè si riduca a

$$z[1 - (x + y + z) \cos(x + y + z)](dx + dy) = 0,$$

da cui $dx + dy = 0$, il cui integrale è $x + y = \psi(z)$. Cosicchè,

essendo $\mu = \frac{1}{z[1 - (x + y + z) \cos(x + y + z)]}$, dovremo ricavare $\psi(z)$ dalla equazione

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= -\mu R = -1 - \frac{(x + y + z)[\sin(x + y + z) - \log(x + y + z)]}{z[1 - (x + y + z) \cos(x + y + z)]} \\ &= -1 - \frac{[\psi(z) + z]\{\sin[\psi(z) + z] - \log[\psi(z) + z]\}}{z\{1 - [\psi(z) + z] \cos[\psi(z) + z]\}}, \end{aligned}$$

che, posto $\psi(z) + z = u$, diviene $\frac{du}{dz} - \frac{u(\sin u - \log u)}{z(1 - u \cos u)} = 0$, da cui $\log(\sin u - \log u) = \log(Cz)$, ossia $\sin u - \log u = Cz$, $\sin[\psi(z) + z] - \log[\psi(z) + z] = Cz$; eliminando $\psi(z)$ tra questa equazione e la $x + y = \psi(z)$ otteniamo $\sin(x + y + z) - \log(x + y + z) = Cz$, che è l'integrale completo della proposta equazione a differenziali totali.

192. Se la condizione di integrabilità non è soddisfatta, la equazione

$$(1) \quad Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

non può, da sola, condurre ad una equazione in termini finiti $\varphi(x, y, z) = C$; ma ciò avverrà se la si considera unitamente ad un'altra equazione differenziale, o ad un'altra equazione in termini finiti tra le variabili x, y, z . Il caso in cui alla (1)

si aggiunga una equazione differenziale appartiene allo studio delle equazioni differenziali simultanee, che verrà fatto in seguito. Supponiamo perciò si aggiunga una equazione $\psi(x, y, z) = 0$. Questa equazione ci permette di esprimere z e dz mediante x, y , e dx, dy , cosicchè la (1) assumerà la forma

$$Mdx + Ndy = 0,$$

il cui integrale $F(x, y, C) = 0$ unitamente alla $\psi(x, y, z) = 0$ costituirà una soluzione della equazione (1).

ESEMPIO. — La equazione

$$zdx - x^2dy + xdz = 0$$

non soddisfa alla condizione di integrabilità. Poniamo tra x, y, z la relazione $xz = f(x)$; allora la equazione proposta si riduce alla $f'(x)dx - x^2dy = 0$, il cui integrale

$$\int \frac{f'(x)}{x^2} dx - y = C$$

forma colla $xz = f(x)$ una soluzione della proposta equazione.

193. Le considerazioni precedenti si estendono facilmente al caso di una equazione fra n variabili

$$(1) \quad P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3 + \dots + P_n dx_n = 0,$$

dove le P sono funzioni delle x .

La condizione necessaria e sufficiente alla integrabilità della equazione (1) è che siano verificate le $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ equazioni che si ottengono dalla

$$(2) \quad P_\lambda \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\mu} \right) + P_\mu \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\nu} \right) + P_\nu \left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_\lambda} \right) = 0$$

ponendovi per λ, μ, ν tre diversi dei numeri $1, 2, 3, \dots, n$. La condizione è necessaria, perchè, se esiste l'integrale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ della (1), dalle eguaglianze $\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} = k P_h$ ($h = 1, 2, \dots, n$), dove k è

un certo coefficiente di proporzionalità, risultano subito le (2). Per dimostrare che la condizione è sufficiente si considera la equazione $P_1 dx_1 + P_2 dx_2 = 0$ ottenuta dalla (1) col supporre costanti le $x_3, x_4, \dots, x_n$; dal suo integrale

$$(3) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_3, x_4, \dots, x_n),$$

dove in luogo della costante arbitraria abbiamo posta la funzione ψ , si ricava $kP_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $kP_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$; si proverà poi che, ponendo nelle $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} - kP_\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda}$ ($\lambda = 3, 4, \dots, n$) per x_2 il valore ricavato dalla (3), si ha $\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} - kP_\lambda \right) = 0$, cosicchè queste $\frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda}$ risultano funzioni solo delle $x_3, x_4, \dots, x_n$; allora l'integrale della

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} dx_4 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n,$$

che è una equazione a differenziali totali integrabile tra le $n-1$ variabili $\psi, x_3, x_4, \dots, x_n$, determina ψ , e per integrarla si userà lo stesso procedimento riducendo l'integrazione a quella di una equazione tra $n-2$ variabili e così di seguito; la (3), postovi per ψ la funzione ora determinata, sarà l'integrale generale della (1).

Notiamo in ultimo che delle equazioni (2) solo $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

sono tra loro indipendenti, cioè tutte quelle che contengono una qualunque determinata delle P , poniamo la P_n . Infatti da tre di esse

$$P_n \left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_\lambda} \right) + P_\lambda \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial P_n}{\partial x_\mu} \right) + P_\mu \left(\frac{\partial P_n}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_n} \right) = 0,$$

$$P_n \left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\lambda} \right) + P_\lambda \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_n} - \frac{\partial P_n}{\partial x_\nu} \right) + P_\nu \left(\frac{\partial P_n}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_n} \right) = 0,$$

$$P_n \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\mu} \right) + P_\mu \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_n} - \frac{\partial P_n}{\partial x_\nu} \right) + P_\nu \left(\frac{\partial P_n}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_n} \right) = 0,$$

moltiplicando la prima per P_ν , la seconda per $-P_\mu$, la terza per P_λ e sommando si ottiene la

$$P_\nu \left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_\lambda} \right) + P_\mu \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\nu} \right) + P_\lambda \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\mu} \right) = 0,$$

che non contiene P_n .

ESEMPLI.

$$1) \, dx + dy + dz + du + 2(x+y+z+u)(xdx+ydy+zdz+udu) = 0.$$

Sono verificate le condizioni di integrabilità. Poniamo x ed u costanti ed integriamo la equazione

$$dx + dy + 2(x+y+z+u)(xdx+ydy) = 0;$$

perciò, posto $x+y=v$, $x^2+y^2=w$, essa diviene

$$dv + (v+z+u)dw = 0, \text{ da cui } \log(v+z+u) + w = C, \text{ e}$$

$$\log(x+y+z+u) + x^2 + y^2 = \psi(z, u), \text{ e quindi } k = \frac{1}{x+y+z+u},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{x+y+z+u} - \frac{1}{x+y+z+u} [1 + 2z(x+y+z+u)] = -2z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = -2u,$$

$$d\psi = -2zdz - 2udu, \quad \psi = -z^2 - u^2 + C;$$

e perciò

$$\log(x+y+z+u) + x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = C,$$

ossia

$$e^{x^2+y^2+z^2+u^2}(x+y+z+u) = C_1$$

è l'integrale generale della proposta equazione.

Si può arrivare subito a questo risultato ponendo nella data

equazione $x + y + z + u = u_1$, $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = v_1$, cosicchè essa diviene $du_1 + u_1 dv_1 = 0$, da cui $u_1 e^{v_1} = C$.

2) Se nella equazione integrabile

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n = 0$$

le P sono funzioni omogenee di grado s delle x , giova porre $x_1 = y_1 x_n$, $x_2 = y_2 x_n$, $\dots$, $x_{n-1} = y_{n-1} x_n$, cosicchè $P_1 = x_n^s Q_1$, $P_2 = x_n^s Q_2$, $\dots$ dove le Q sono funzioni delle $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, e la equazione proposta diviene

$$(Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \dots + Q_{n-1} dy_{n-1}) x_n + (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \dots + Q_{n-1} y_{n-1} + Q_n) dx_n = 0.$$

Se $Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \dots + Q_{n-1} y_{n-1} + Q_n = 0$, l'equazione si riduce alla equazione integrabile

$$Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \dots + Q_{n-1} dy_{n-1} = 0$$

con $n-1$ variabili; altrimenti abbiamo l'equazione

$$\frac{dx_n}{x_n} + \frac{Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \dots + Q_{n-1} dy_{n-1}}{Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \dots + Q_{n-1} y_{n-1} + Q_n} = 0,$$

nella quale il secondo termine è necessariamente un differenziale esatto.

Così ad esempio, posto $x = uz$, $y = vz$, l'equazione

$$(x^2 - y^2 + z^2) dx - z^2 dy + [z(y - x) + \frac{x}{z} (y^2 - x^2)] dy = 0$$

diviene $(u^2 - v^2 + 1) du - dv = 0$, della quale, conoscendosi l'integrale particolare $v = u$, si ha l'integrale generale

$$\int e^{-u^2} du + C = \frac{e^{-u^2}}{v - u}, \text{ e quindi quello della proposta equazione}$$

$$\text{è } \int e^{-u^2} du + C = \frac{ze^{-\frac{x^2}{z^2}}}{y - x} \text{ dove } u = \frac{x}{z}.$$

Così pure, posto $x = x_1 u$, $y = y_1 u$, $z = z_1 u$, la equazione

$$z(y + z) dx + z(u - x) dy + y(x - u) dz + y(y + z) du = 0$$

diviene

$$\frac{du}{u} + \frac{z_1(y_1 + z_1)dx_1 + z_1(1 - x_1)dy_1 + y_1(x_1 - 1)dz_1}{(y_1 + z_1)(z_1x_1 + y_1)} = 0$$

il cui integrale è $\frac{u(z_1x_1 + y_1)}{y_1 + z_1} = C$, e quindi quello della proposta è $\frac{zx + uy}{y + z} = C$.

ESERCIZI

1. $zdx - x^2dy - xdz = 0$, $z + xy = Cx$.

2. $[2x + 1 + 3x^2(x^2 + x + z)]dx + 2y(x^2 + x + z)dy + dz = 0$,
 $e^{x^3+y^2}(x^2 + x + z) = C$.

3. $(ay - bz)dx + (cz - ax)dy + (bx - cy)dz = 0$, $\frac{ay - bz}{cx - ax} = C$.

4. $(y + u)(uy - z^2)dx + (z + x)(zx - u^2)dy + (u + y)(uy - x^2)dz$
 $+ (z + x)(xz - y^2)du = 0$, $\frac{xz + uy}{(x + z)(u + y)} = C$.

5. $(y + u)dx + (z + x)dy + (u + y)dx + (x + z)du = 0$,
 $xy + yz + zu + ux = 0$.

6. $\sin ydx + (x \cos y + \sin z)dy + (y \cos z + \sin u)dz + z \cos u du = 0$,
 $x \sin y + y \sin z + z \sin u = C$.

7. $(y + z + u^2)dx + xdy + xdz + 2uxdu + 2v dv = 0$,
 $x(y + z) + xu^2 + v^2 = C$.

8. L'integrale generale della equazione

$xdx + ydy + cdz \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = 0$ considerata colla equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ è $x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = C$.

9. La soluzione della equazione $2dx + xdy + ydz = 0$ considerata colla equazione $y + z \log z + \varphi(z) = 0$ è $z = C$, e anche $x \log x + x\varphi'(z) - y = 0$.

10. La equazione non integrabile $xdx + ydy + zdx + ydu = 0$ diviene, se vi si aggiunge l'equazione $u = f(y)$, una equazione integrabile nelle variabili x, y, z , il cui integrale è

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yf(y) - 2 \int f(y) dy = C.$$

11. La soluzione della equazione

$$(x^2 + y)dx + (x + z)dy + y(dx + du) = 0,$$

cui si aggiungono le equazioni $x + y + z = u$, $y(z + x) = a$, è

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{2} - a \log y = C.$$

Sistemi di equazioni differenziali simultanee.

194. Passiamo ora a studiare brevemente i sistemi di equazioni differenziali simultanee, nelle quali la variabile indipendente sia una sola e le equazioni sieno tante quante le variabili dipendenti o funzioni incognite che in esse compariscono. Analogamente a quanto si è visto alla fine del n. 168, ad un sistema di k equazioni $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots F_k = 0$, nelle quali x è la variabile indipendente, e che contengono delle derivate al più d'ordine n della funzione y , al più d'ordine m della z , etc., si può sostituire un sistema di $n + m + \dots$ equazioni di primo ordine, ponendo

$$\frac{dy}{dx} = p_1, \frac{dp_1}{dx} = p_2, \dots \frac{dp_{n-1}}{dx} = p_n;$$

$$\frac{dz}{dx} = q_1, \frac{dq_1}{dx} = q_2, \dots \frac{dq_{m-1}}{dx} = q_m; \dots$$

il quale sistema avrà, sotto certe condizioni, un sistema di $n + m + \dots$ equazioni integrali contenenti altrettante costanti arbitrarie. Eliminando tra queste equazioni le $n + m + \dots - k$ quantità $p_1, p_2, \dots p_{n-1}, q_1, q_2, \dots q_{m-1}, \dots$ potremo ottenere k equazioni tra le variabili $x, y, z, \dots$ con k costanti arbitrarie,

che costituiranno il *sistema degli integrali generali* o il *sistema integrale* del proposto sistema di equazioni.

Però il metodo generale di integrazione pei sistemi di equazioni differenziali consiste nel ridurre, mediante opportune operazioni di derivazione e di eliminazione, le equazioni proposte a equazioni differenziali tra due sole variabili, che si integrano coi noti metodi. Così, ad esempio, date le equazioni

$$(1) \quad y' = f(x, y, z), \quad z' = \varphi(x, y, z),$$

dove indichiamo con apici le derivazioni rapporto ad x , deriveremo una delle due, poniamo la prima, rapporto ad x , ottenendo così

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} \varphi(x, y, z);$$

eliminando z tra questa equazione e la prima delle (1) abbiamo una equazione della forma $\psi(x, y, y', y'') = 0$, che non contiene più z nè le derivate di z , e che avrà un integrale della forma

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0. \text{ Da questo ricaviamo } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \text{ e}$$

quindi, per la prima delle (1), $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y, z) = 0$. Questa ultima equazione, insieme alla $f(x, y, C_1, C_2) = 0$, forma il sistema degli integrali generali delle proposte equazioni (1).

Notiamo che in casi speciali gioveranno speciali artifizi.

ESEMPLI.

1) Date le equazioni $y' = x + z'$, $z' = y$, derivando la seconda rapporto ad x , abbiamo $z'' = y' = x + z'$, ossia $z'' - z' = x$, il cui integrale è $z = -x - \frac{x^2}{2} + C_1 e^x + C_2$; questa equazione, e la $y = -1 - x + C_1 e^x$, che si trae dalla $z' = y$, costituiscono il sistema integrale delle proposte equazioni.

2) Siano le equazioni

www.libtool.com.cn

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = nz - mu, \\ \frac{dz}{dx} = lu - ny, \\ \frac{du}{dx} = my - lz; \end{cases}$$

da esse ricaviamo $ly' + mz' + nu' = 0$ e quindi

$$(3) \quad ly + mz + nu = A$$

dove A è una costante, e $yy' + zz' + uu' = 0$ e quindi

$$(4) \quad y^2 + z^2 + u^2 = B$$

dove B è un'altra costante. Derivando la prima delle (2) ed in virtù delle altre due abbiamo

$$y'' = n(lu - ny) - m(my - lz) = lA - y(l^2 + m^2 + n^2)$$

ossia, posto $\rho^2 = l^2 + m^2 + n^2$, $y'' + \rho^2 y = lA$, equazione lineare tra le sole variabili x, y , il cui integrale è

$$(5) \quad y = C_1 \cos \rho x + C_2 \sin \rho x + \frac{lA}{\rho^2};$$

in modo analogo dalla seconda e terza delle (2) si ricava

$$(6) \quad \begin{cases} z = C'_1 \cos \rho x + C'_2 \sin \rho x + \frac{mA}{\rho^2}, \\ u = C''_1 \cos \rho x + C''_2 \sin \rho x + \frac{nA}{\rho^2}. \end{cases}$$

Tre qualunque delle (3), (4), (5), (6) formano il sistema integrale delle (2); gioverà assumere le (5), (6) perché esprimono

le y, z, u esplicitamente mediante x ; ma le costanti C e le costanti A, B non sono tutte arbitrarie, tra loro esistono delle relazioni che si ricavano sostituendo i valori (5), (6) nelle (2) oppure giovandosi delle (3), (4). Ponendo i valori (5), (6) nella (3) e dovendo questa essere soddisfatta qualunque sia il valore di x , dovremo avere

$$(7) \quad lC_1 + mC'_1 + nC''_1 = 0, \quad lC_2 + mC'_2 + nC''_2 = 0.$$

La (4), sostituiti in essa i valori (5), (6) ed avuto riguardo alle (7) ci dà, in modo analogo,

$$C_1^2 + C_1'^2 + C_1''^2 = C_2^2 + C_2'^2 + C_2''^2 = B - \frac{A^2}{\rho^2}, \quad C_1C_2 + C_1'C_2' + C_1''C_2'' = 0;$$

in virtù di queste tre equazioni e delle (7) rimangono arbitrarie tre sole delle otto costanti $A, B, C_1, C_2, C'_1, C'_2, C''_1, C''_2$.

3) Sia il sistema di due equazioni

$$\frac{dx}{y^n z^m - z^n y^m} = \frac{dy}{z^n x^m - x^n z^m} = \frac{dz}{x^n y^m - y^n x^m};$$

le equazioni propriamente sono tre, ma una qualunque è conseguenza delle altre due. Abbiamo

$$\frac{x^n dx + y^n dy + z^n dz}{0} = \frac{dy}{y^n z^m - z^n y^m} = \dots,$$

cosicchè dovremo avere

$$x^n dx + y^n dy + z^n dz = 0;$$

in modo analogo

$$x^m dx + y^m dy + z^m dz = 0,$$

e da queste si trae subito il sistema integrale

$$x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1} = C_1, \quad x^{m+1} + y^{m+1} + z^{m+1} = C_2.$$

4) Per integrare il sistema

www.libtool.com.cn

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

dove

$$X = ax + by + cz + \alpha,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z + \alpha',$$

$$Z = a''x + b''y + c''z + \alpha'',$$

giòva introdurre una variabile ausiliaria t , ponendo

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{l dx + m dy + n dz}{lX + mY + nZ} = \frac{l dx + m dy + n dz}{\lambda(lx + my + nz) + \gamma},$$

dove $\gamma = l\alpha + m\alpha' + n\alpha''$ e le λ, l, m, n sono quantità da determinarsi in modo che sia

$$(8) \quad \begin{cases} al + a'm + a''n = \lambda l, \\ bl + b'm + b''n = \lambda m, \\ cl + c'm + c''n = \lambda n; \end{cases}$$

eliminando l, m, n da queste equazioni ricaviamo

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a - \lambda & a' & a'' \\ b & b' - \lambda & b'' \\ c & c' & c'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Corrispondentemente ad una radice λ_1 di questa equazione cubica in λ le equazioni (8) sono soddisfatte da valori l_1, m_1, n_1 di l, m, n ; cosichè dalla equazione

$$\frac{dt}{t} = \frac{l_1 dx + m_1 dy + n_1 dz}{\lambda_1(l_1 x + m_1 y + n_1 z) + \gamma_1}$$

ricaviamo, integrando,

www.libtool.com.cn

$$c_1 t = \left(l_1 x + m_1 y + n_1 z + \frac{\gamma_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}}.$$

In modo analogo, indicando con l_2, m_2, n_2 ; l_3, m_3, n_3 i valori di l, m, n che corrispondono alle radici λ_2, λ_3 della (9), abbiamo

$$c_2 t = \left(l_2 x + m_2 y + n_2 z + \frac{\gamma_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{\lambda_2}},$$

$$c_3 t = \left(l_3 x + m_3 y + n_3 z + \frac{\gamma_3}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{\lambda_3}}.$$

Da queste equazioni, posto $\frac{c_1}{c_2} = C_1$, $\frac{c_1}{c_3} = C_2$, otteniamo

$$\begin{aligned} \left(l_1 x + m_1 y + n_1 z + \frac{\gamma_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} &= C_1 \left(l_2 x + m_2 y + n_2 z + \frac{\gamma_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{\lambda_2}} \\ &= C_2 \left(l_3 x + m_3 y + n_3 z + \frac{\gamma_3}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{\lambda_3}}, \end{aligned}$$

che sono gli integrali generali del proposto sistema.

Questo metodo si estende subito al caso del sistema generale

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{du}{U} = \dots$$

dove

$$X = ax + by + cz + gu + \dots + a, \dots$$

5) Siano le equazioni

$$y' + \varphi'(x)y - \psi'(x)z = 0,$$

$$z' + \psi'(x)y + \varphi'(x)z = 0,$$

Moltiplicando la prima equazione per y e la seconda per z e sommando, e poi la prima per z e la seconda per y e sot-

traendo, otteniamo

$$yy' + zz' + (y^2 + z^2) \varphi(x) = 0, \quad yz - z'y - (y^2 + z^2) \psi'(x) = 0,$$

dalle quali, dividendo per $y^2 + z^2$ e integrando,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = C_1 e^{-\varphi(x)}, \quad \frac{y}{z} = \operatorname{tg}[\psi(x) + C_2],$$

che sono gli integrali generali delle proposte equazioni, i quali, osservando che $y = \operatorname{sen}[\psi(x) + C_2] \sqrt{y^2 + z^2}$, $z = \cos[\psi(x) + C_2] \sqrt{y^2 + z^2}$, si riducono a

$$y = C_1 e^{-\varphi(x)} \operatorname{sen}[\psi(x) + C_2], \quad z = C_1 e^{-\varphi(x)} \cos[\psi(x) + C_2].$$

6) Si vogliano trovare quelle curve gobbe per le quali la parte di asse delle y intercetta fra l'origine e il punto d'intersezione col piano normale in ogni loro punto sia una data funzione $f(y)$ di y , e la parte di asse delle z intercetta fra l'origine e il punto d'intersezione collo stesso piano normale sia una data funzione $\varphi(z)$ di z .

Poichè l'equazione del piano normale in un punto qualunque (x, y, z) della linea cercata è

$$(X-x)dx + (Y-y)dy + (Z-z)dz = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{xdx + ydy + zdz} = 1,$$

le equazioni differenziali del problema sono

$$xdx + ydy + zdz = f(y)dy = \varphi(z)dz,$$

che, integrate, danno subito le equazioni delle curve richieste

$$\int f(y)dy = \int \varphi(z)dz + C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2 \int f(y)dy + C_2.$$

Così ad es: se $f(y) = \varphi(z) = 1$, abbiamo le curve

$$y = z + C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2y + C_2,$$

intersezioni dei piani $y = z + C_1$ colle sfere $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = C_2'$, (o, ciò che è lo stesso, colle sfere $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = C_2''$).

195. Meritano speciale considerazione i sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti.

Sieno le due equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(D)y + \varphi_1(D)z = X_1, \\ f_2(D)y + \varphi_2(D)z = X_2, \end{cases}$$

dove X_1, X_2 indicano funzioni della variabile indipendente x , e $f_1(D), f_2(D), \varphi_1(D), \varphi_2(D)$ sono funzioni razionali intere del simbolo $D = \frac{d}{dx}$.

Operando sui due membri della prima delle (1) col simbolo $\varphi_2(D)$ e su quelli della seconda col simbolo $\varphi_1(D)$ e sottraendo l'una dall'altra, coll'osservare che $\varphi_2(D)\varphi_1(D)z = \varphi_1(D)\varphi_2(D)z$, otteniamo

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}y = \varphi_2(D)X_1 - \varphi_1(D)X_2,$$

la quale equazione lineare in y , indicati con l_1, l_2, m_1, m_2 i gradi delle funzioni $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ e con n quello dei due numeri $m_2 + l_1, m_1 + l_2$ che non è minore dell'altro, è di ordine n , se i termini di grado n in D non si elidono tra loro. Se P è un integrale particolare e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono le radici dell'equazione caratteristica $\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D) = 0$, abbiamo

$$(2) \quad y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x} + P.$$

Operando in modo analogo per eliminare y tra le (1), si ottiene una equazione lineare d'ordine n in z , il cui integrale generale è

$$(3) \quad z = B_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + B_n e^{\alpha_n x} + Q,$$

dove Q ne è un integrale particolare e le B sono costanti.

Tra le costanti C e B passano delle relazioni, in modo che di esse rimangono solo n arbitrarie. Invero, sostituiamo i va-

lori (2) e (3) in una delle (1), poniamo nella prima; ricordando una nota proprietà del simbolo D abbiamo il risultato

$$(4) \quad [C_1 f_1(\alpha_1) + B_1 \varphi_1(\alpha_1)] e^{\alpha_1 x} + [C_2 f_1(\alpha_2) + B_2 \varphi_1(\alpha_2)] e^{\alpha_2 x} + \dots \\ + [C_n f_1(\alpha_n) + B_n \varphi_1(\alpha_n)] e^{\alpha_n x} + f_1(D)P + \varphi_1(D)Q = X_1;$$

ma hanno luogo le formole

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}P = \varphi_2(D)X_1 - \varphi_1(D)X_2,$$

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}Q = f_1(D)X_2 - f_2(D)X_1,$$

dalle quali, operando sulla prima col simbolo $f_1(D)$, sulla seconda col simbolo $\varphi_1(D)$ e sommando,

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\} \{f_1(D)P + \varphi_1(D)Q\} = \{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}X_1,$$

e quindi $f_2(D)P + \varphi_1(D)Q = X_1$. Cosichè dalla (4), che deve essere identicamente soddisfatta, ricaviamo le equazioni

$$C_1 f_1(\alpha_1) + B_1 \varphi_1(\alpha_1) = 0, \quad C_2 f_1(\alpha_2) + B_2 \varphi_1(\alpha_2) = 0, \dots$$

$$C_n f_1(\alpha_n) + B_n \varphi_1(\alpha_n) = 0,$$

che legano tra loro le costanti C e B .

Le (2), (3), quando tra le C, B passino queste relazioni, sono gli integrali generali delle (1).

Il lettore potrà trovare da se le facili modificazioni da introdursi quando la equazione caratteristica delle equazioni lineari d'ordine n in y e z abbia radici multiple o abbia radici complesse semplici o multiple.

Il precedente metodo si estende facilmente al caso di un sistema di un numero qualunque di equazioni. Così se le equazioni sono tre

$$f_1(D)y + \varphi_1(D)z + \psi_1(D)u = X_1,$$

$$f_2(D)y + \varphi_2(D)z + \psi_2(D)u = X_2,$$

$$f_3(D)y + \varphi_3(D)z + \psi_3(D)u = X_3.$$

ricaviamo da esse la equazione lineare nella sola y

$$\begin{vmatrix} f_1(D) & \varphi_1(D) & \psi_1(D) \\ f_2(D) & \varphi_2(D) & \psi_2(D) \\ f_3(D) & \varphi_3(D) & \psi_3(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \varphi_2(D) & \psi_2(D) \\ \varphi_3(D) & \psi_3(D) \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} \varphi_1(D) & \psi_1(D) \\ \varphi_3(D) & \psi_3(D) \end{vmatrix} X_2 + \begin{vmatrix} \varphi_1(D) & \psi_1(D) \\ \varphi_2(D) & \psi_2(D) \end{vmatrix} X_3$$

e così di seguito.

ESEMPLI.

$$1) \quad y' + z' + y + z = x, \quad y' + 2z' + 3y + 4z = x^2.$$

Qui è $f_1(D) = D+1$, $\varphi_1(D) = D+1$, $f_2(D) = D+3$, $\varphi_2(D) = 2D+4$, e perciò la equazione in y diviene $(D+1)^2 y = 2 + 2x - x^2$, il cui integrale è

$$(5) \quad y = e^{-x} (C_1 x + C_2) - 3 + 6x - x^2.$$

La equazione in z è $(D+1)^2 z = -1 - x + x^2$, il cui integrale è $z = e^{-x} (A_1 x + A_2) + 7 - 5x + x^2$, dove A_1, A_2 sono costanti. Sostituendo questi valori di y e z nella seconda delle equazioni proposte ricaviamo tra le costanti A_1, A_2, C_1, C_2 le relazioni $A_1 + C_1 = 0$, $2A_2 + 2C_2 + A_1 = 0$, dalle quali $A_1 = -C_1$, $A_2 = \frac{C_1}{2} - C_2$; cosicchè la (5) e la

$$z = e^{-x} \left(-C_1 x + \frac{C_1}{2} - C_2 \right) + 7 - 5x + x^2$$

sono gli integrali completi delle equazioni proposte.

$$2) \quad y'' - 3z' + 4y = 1, \quad z'' + 4y' + 4z = x;$$

qui è $f_1(D) = D^2 + 4$, $\varphi_1(D) = -3D$, $f_2(D) = 3D$, $\varphi_2(D) = D^2 + 4$, e perciò le equazioni in y e z sono

$$\{(D^2 + 4)^2 + 9D^2\}y = 7, \quad \{(D^2 + 4)^2 + 9D^2\}z = 4x,$$

i cui integrali sono

$$(6) \quad y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 \sin 4x + C_4 \cos 4x + \frac{7}{16},$$

$$z = A_1 \sin x + A_2 \cos x + A_3 \sin 4x + A_4 \cos 4x + \frac{x}{4}.$$

Sostituendo questi valori in una delle proposte equazioni abbiamo tra le costanti A e C le relazioni $C_1 + B_2 = 0$, $C_2 - B_1 = 0$, $-C_3 + B_4 = 0$, $C_4 + B_3 = 0$; per cui avremo

$$z = C_2 \sin x - C_1 \cos x - C_4 \sin 4x + C_3 \cos 4x + \frac{x}{4}.$$

Questa formola è la (6) danno gli integrali generali delle equazioni proposte.

ESERCIZI

$$1. \begin{cases} xy' = x - 2y, \\ xz' = xy + xz + 2y - x; \end{cases} \quad \text{integrali} \quad \begin{cases} x^2(3y - x) = C_1, \\ y + z = C_2 e^x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} xy'' + 2y' + xy = 0, \\ xz' + 2z = xy'; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x), \\ z = \frac{1}{x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) \\ \quad + \frac{1}{x^2} (C_3 + 2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x). \end{cases}$$

$$3. \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}, \quad \begin{cases} (x+y+z)(y-x)^2 = C_1, \\ (x+y+z)(y-z)^2 = C_2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y' = y + z; \\ z' = y - z; \end{cases} \quad \begin{cases} y = C_1 e^{x/\sqrt{2}} + C_2 e^{-x/\sqrt{2}}, \\ z = C_1 (\sqrt{2} - 1) e^{x/\sqrt{2}} - C_2 (\sqrt{2} + 1) e^{-x/\sqrt{2}}. \end{cases}$$

5. $\begin{cases} y'' = ay + bz \\ z'' = a_1y + b_1z \end{cases}$; giova sommare le due equazioni dopo aver moltiplicato la seconda equazione per una indeterminata λ , che si determina in modo che risulti $b + \lambda b_1 = \lambda(a + \lambda a_1)$; allora si trovano gli integrali

$$y + \lambda_1 z = C_1 e^{\alpha \sqrt{a + \lambda_1 a_1}} + C_2 e^{-\alpha \sqrt{a + \lambda_1 a_1}},$$

$$y + \lambda_2 z = C_3 e^{\alpha \sqrt{a + \lambda_2 a_1}} + C_4 e^{-\alpha \sqrt{a + \lambda_2 a_1}},$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici della equazione $a_1 \lambda^2 + (a - b_1)\lambda - b = 0$,

$$6. \begin{cases} y'' = 11y + 16z, \\ z'' = -8y - 13z \end{cases} \begin{cases} y = 2C_1 e^{\alpha \sqrt{5}} + 2C_2 e^{-\alpha \sqrt{5}} - C_3 \cos(x/\sqrt{5}) - C_4 \sin(x/\sqrt{5}), \\ z = -C_1 e^{\alpha \sqrt{5}} - C_2 e^{-\alpha \sqrt{5}} + C_3 \cos(x/\sqrt{5}) + C_4 \sin(x/\sqrt{5}). \end{cases}$$

$$7. \quad y'' = -y - 2z, \quad z'' = y + z$$

$$y = [(C_3 - C_1)e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} - (C_4 + C_2)e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}] \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$- [(C_3 + C_1)e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} + (C_4 - C_2)e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}] \sin \frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$z = (C_1 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}) \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + (C_3 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} + C_4 e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}) \sin \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$8. \quad y'' = 2y + 3z + 5, \quad z'' = -22y - 15z + 4;$$

$$\begin{cases} y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x + \frac{29}{12}, \\ z = -2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x - \frac{11}{3} C_3 \cos 3x - \frac{11}{3} C_4 \sin 3x - \frac{59}{18}. \end{cases}$$

$$9. \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(x-y)^2}; \quad y^2 - z^2 = C_1, \quad (y-z)^2 = C_2 - 2x.$$

$$10. \begin{cases} xy' - y - z' = 0, \\ xz' - z - y' = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = C_1 x + C_2, \\ z = -C_2 x - C_1. \end{cases}$$

$$11. y' = \frac{y-z}{u-x}, \quad z' = \frac{y-z}{u-x}, \quad u' = y - z + 1;$$

$$y = \log[C_2(C_1 x + C_3)], \quad z = \log[C_2(C_1 x + C_3)] + C_1, \quad u = (C_1 + 1)x + C_2.$$

$$12. y'' + m^2 z = 0, \quad z'' - m^2 y = 0;$$

$$y = [C_1 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} + C_2 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \cos \frac{mx}{\sqrt{2}} + [C_3 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} + C_4 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \sin \frac{mx}{\sqrt{2}},$$

$$z = [C_1 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} - C_2 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \sin \frac{mx}{\sqrt{2}} - [C_3 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} - C_4 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \cos \frac{mx}{\sqrt{2}}.$$

$$13. ay' = (b-c)zu, \quad bz' = (c-a)uv, \quad cu' = (a-b)yz;$$

$$ay^2 + bz^2 + cu^2 = C_1, \quad a^2 y^2 + b^2 z^2 + c^2 u^2 = C_2,$$

$$x = a\sqrt{bc} \int \frac{dy}{\sqrt{[C_2 - cC_1 - ay^2(a-c)][bC_1 - C_2 - ay^2(b-a)]}} + C_3.$$

$$14. \frac{dx}{\cos y \cos z (\sin z - \sin y)} = \frac{dy}{\cos z \cos x (\sin x - \sin z)} \\ = \frac{dz}{\cos x \cos y (\sin y - \sin x)};$$

$$\sin x + \sin y + \sin z = C_1, \quad \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = C_2.$$

$$15. \begin{cases} xy' = y + z, \\ xz' = y - z; \end{cases} \quad \begin{cases} y = C_1 x \sin(\log x + C_2), \\ z = C_1 x \cos(\log x + C_2). \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} y^{IV} + z^{IV} = 0, \\ y''' + z^{IV} + z' = 0; \end{cases} \begin{cases} y = C_1 + C_2 x + C_3 x^3 + C_4 x^5 \\ z = C_5 - 6C_4 x. \end{cases}$$

(Può avvenire, come in questo caso, che le funzioni più generali che soddisfanno al dato sistema di equazioni contengano un numero di costanti arbitrarie minore del normale).

$$17. \begin{cases} y''' + z''' - 3(y'' + z'') + 3(y' + z') - (y + z) = 0, \\ y'' - y + z'' + z' = 0; \end{cases} \begin{cases} y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + C_4 e^{-x}, \\ z = e^x(2C_3 - C_2 - 2C_3 x) - C_4 e^{-x}. \end{cases}$$

$$18. y' + (ay + bz)X = X_1, \quad z' + (a'y + b'z)X = X_2,$$

dove X, X_1, X_2 sono funzioni della sola x ;

$$y + \lambda_1 z = e^{-(a+\lambda_1 a') \int x dx} \left[\int (X_1 + \lambda_1 X_2) e^{(a+\lambda_1 a') \int x dx} dx + C_1 \right],$$

$$y + \lambda_2 z = e^{-(a+\lambda_2 a') \int x dx} \left[\int (X_1 + \lambda_2 X_2) e^{(a+\lambda_2 a') \int x dx} dx + C_2 \right],$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici della equazione $\lambda_1 a' + \lambda(a - b') - b = 0$.

$$19. \begin{cases} xy' + 2(y - z) = x, \\ xz' + y + 5z = x^2; \end{cases} \begin{cases} y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{15}x^2 + \frac{2C_1}{x^3} - \frac{C_1}{x_4}, \\ z = -\frac{1}{20}x + \frac{2}{15}x^2 - \frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x_4}. \end{cases}$$

20. Trovare le linee per le quali, in ogni loro punto, la tangente abbia coseni di direzione proporzionali alla somma delle coordinate di nome diverso da quello dell'asse cui ciascun coseno si riferisce.

$$\text{Le linee piane } \sqrt{x+y+z} = \frac{C_1}{z-x}, \quad \sqrt{x+y+z} = \frac{C_2}{z-y}.$$

www.libtool.com.cn
Equazioni a derivate parziali che contengono le derivate rapporto ad una sola delle variabili indipendenti, ed equazioni a derivate parziali lineari con tre e più variabili.

196. Le equazioni a derivate parziali nelle quali non compariscono che le derivate della funzione incognita rapporto ad una sola delle variabili indipendenti si integrano, come è chiaro, coi metodi di integrazione delle equazioni differenziali ordinarie, considerandovi come costanti quelle variabili indipendenti, le derivate rispetto alle quali non sono contenute nell'equazione proposta, e ponendo, nell'integrale che si ottiene, una loro funzione arbitraria in luogo della costante arbitraria.

ESEMPI

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y, z, \dots)u = \varphi(x, y, z, \dots).$$

Integrando, considerando $y, z, \dots$, come costanti, abbiamo

$$u = e^{-\int f(x, y, z, \dots) dx} \left\{ \int \varphi(x, y, z, \dots) e^{\int f(x, y, z, \dots) dx} dx + \psi(y, z, \dots) \right\}$$

dove $\psi(y, z, \dots)$ indica una funzione arbitraria di $y, z, \dots$

$$2) \quad z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 z^2 = y^3 x \text{ (equaz. di BERNOULLI rispetto a } z \text{ e } x).$$

L'integrale è

$$y(z^2 + xy) = \varphi(y)e^{2xy^2},$$

dove $\varphi(y)$ indica una funzione arbitraria.

$$3) \quad f_1(y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_2(y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + f_3(y, z)u = 0;$$

l'integrale è

$$u = \varphi_1(y, z)e^{\alpha_1 x} + \varphi_2(y, z)e^{\alpha_2 x},$$

dove α_1, α_2 sono le radici della equazione

www.libtool.com.cn

$$f_1(y, z)x_2 + f_2(y, z)x + f_3(y, z) = 0,$$

e φ_1, φ_2 indicano due funzioni arbitrarie.

197. Consideriamo ora le equazioni a derivate parziali di primo ordine fra tre variabili, che contengono linearmente le derivate parziali, e che si chiamano perciò equazioni *lineari*, cioè le equazioni della forma

$$(1) \quad Pp + Qq = R,$$

dove P, Q, R indicano funzioni di x, y, z e $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Le equazioni (1) possono immaginarsi generate nel modo seguente:

Siano $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$ due funzioni determinate di x, y, z ; stabiliamo tra esse una relazione arbitraria $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, cosicchè una delle variabili, la z , si possa considerare come funzione delle altre due variabili x, y . Abbiamo allora, derivando rapporto ad x e ad y ,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} p \right) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} q \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q \right) = 0, \end{cases}$$

dalle quali equazioni rimane eliminata la funzione arbitraria φ

e solo in esse compariscono le derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$. Eliminando

ancora queste derivate si ottiene

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p & \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} q \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} p & \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} p + \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial z} \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

che è una equazione della forma (1).

Ciò premesso, è naturale, per integrare la equazione (1), vedere se sia possibile trovare due funzioni $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$ tali che la z determinata da una relazione arbitraria tra esse $\varphi(x, \beta) = 0$ soddisfaccia alla (1), cioè sia tale che i valori di p, q che da questa si ricavano, ossia quelli dati dalla (2), soddisfacciano alla (1) qualunque sia φ . Ora sostituendo i valori di p, q ricavati dalle (2) nella (1), quest'ultima diventa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left(P \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial x}{\partial y} + R \frac{\partial x}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left(P \frac{\partial \beta}{\partial x} + Q \frac{\partial \beta}{\partial y} + R \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) = 0,$$

e questa sarà soddisfatta qualunque sia la funzione φ , se le funzioni α, β saranno tali da rendere nulli i coefficienti di $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$, cioè se esse soddisfaranno alla equazione

$$(3) \quad P \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + Q \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + R \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0,$$

e la integrazione della (1) è così ridotta a trovare due funzioni α, β di x, y, z che sostituite in luogo di ϑ nella (3) la soddisfacciano. A tale scopo osserviamo che se $\vartheta = \text{costante}$ è tale relazione tra x, y, z per cui risulti $dx = \mu P$, $dy = \mu Q$, $dz = \mu R$, essendo μ una certa funzione di x, y, z , diversa da zero, ossia se $\vartheta = \text{costante}$ è integrale delle equazioni differenziali simultanee $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$, abbiamo

$$d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dz = \mu \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} P + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} Q + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} R \right) = 0,$$

cioè ϑ soddisfa alla (3).

Da quanto precede si ricava;

Per trovare un integrale della equazione lineare

$$Pp + Qq = R,$$

si trovino due integrali, risolti rispetto alle costanti,

$\alpha(x, y, z) = C_1$, $\beta(x, y, z) = C_2$, del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R};$$

ed allora $\varphi(x, \beta) = 0$, dove φ è una funzione arbitraria, è un integrale della proposta equazione.

È anzi l'integrale generale, perchè qualunque altro integrale $\psi(x, y, z) = 0$ della (1) ne è caso particolare, corrispondente ad una certa forma particolare della funzione arbitraria φ . Invero, avremo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q = 0,$$

e sostituendo i valori di p e q , che da esse si traggono, nella (1), dovremo avere, poichè $\psi = 0$ ne è integrale,

$$P \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q \frac{\partial \psi}{\partial y} + R \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0;$$

ma abbiamo altresì

$$P \frac{\partial \alpha}{\partial x} + Q \frac{\partial \alpha}{\partial y} + R \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0,$$

$$P \frac{\partial \beta}{\partial x} + Q \frac{\partial \beta}{\partial y} + R \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0,$$

ed in conseguenza

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial z} \end{vmatrix} = 0;$$

cosichè, essendo nullo l'Iacobiano delle ψ, α, β rapporto alle variabili x, y, z , dovrà tra le funzioni ψ, α, β passare una certa relazione $\psi = f(\alpha, \beta)$, e l'integrale $\psi = 0$ si ricava perciò dall'integrale $\varphi(x, \beta) = 0$ prendendo la funzione arbitraria φ uguale alla f .

198. In modo completamente analogo si procede riguardo alle equazioni a derivate parziali di primo ordine lineari. fra quante si vogliano variabili. Indicando con $p_1, p_2, \dots, p_n$ le derivate di z rapporto, rispettivamente, ad $x_1, x_2, \dots, x_n$, e con $P_1, P_2, \dots, P_n$, R delle funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n, z$, abbiamo la regola seguente:

Per integrare la equazione a derivate parziali lineare di primo ordine

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n = R$$

si formi il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$$

e ne sia

$$x_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_1, \alpha_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_2, \dots, \alpha_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_n$$

il sistema di equazioni integrali risolte rapporto alle costanti; allora

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

dove φ indica una funzione arbitraria, è l'integrale generale della proposta equazione a derivate parziali.

La funzione arbitraria φ potrà essere determinata da speciali condizioni. Così, ad esempio, si potrà porre la condizione che per $x_1 = x_1^0$ la z divenga una data funzione

$$z = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

delle altre variabili $x_2, x_3, \dots, x_n$. Dovremo allora determinare

tuendo per C_1 il suo valore $\frac{y^2}{z^2}$, abbiamo $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2$, che

unitamente a $\frac{y}{z} = C_1$ forma il sistema degli integrali risolti rapporto alle costanti del sistema ausiliario di equazioni differenziali. L'integrale generale della proposta equazione a derivate parziali è perciò

$$\varphi\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

dove φ è funzione arbitraria.

Si osservi anche che questo integrale può porsi sotto la forma

$$\psi\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

dove ψ indica funzione arbitraria; basta notare che

$$\varphi\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}, \frac{y}{z}\right) = \psi\left(\frac{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}}{\frac{y}{z}}, \frac{y}{z}\right) = \psi\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

Se si volesse che per $x = 0$ fosse $z = y^2$, posto

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}, \quad \beta = \frac{y}{z}, \quad \text{avremmo che, per } x = 0, \quad z = y^2 \text{ è}$$

$$\alpha = 1 + y^2, \quad \beta = \frac{1}{y}, \quad \text{dalle quali, eliminato } y, \text{ si ottiene}$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\beta^2}. \quad \text{Prendendo quindi } \varphi(\alpha, \beta) = \alpha - 1 - \frac{1}{\beta^2}, \text{ si ottiene}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = 1 + \frac{z^2}{y^2}, \quad \text{che ci dà l'integrale particolare richie-$$

sto avente la proprietà che il valore di z , che se ne ricava, sia $z = y^2$ per $x = 0$.

2) *Equazione a derivate parziali delle superficie cilindriche.* — Si vogliano determinare quelle superficie il cui piano tangente in ogni loro punto è parallelo ad una retta $x = az$, $y = bz$ (superficie cilindriche). L'equazione del piano tangente in un punto (x, y, z) essendo

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

la condizione che esso sia parallelo alla data retta è che sia

$$ap + bq = 1,$$

e questa è l'equazione a derivate parziali di qualunque superficie cilindrica.

Per integrarla osserviamo che dal sistema ausiliario corrispondente

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

si ricava $x - az = c_1$, $y - bz = c_2$ e quindi l'integrale generale, ossia l'equazione di qualunque superficie cilindrica, è della forma

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

Si voglia determinare la funzione φ in modo che il cilindro passi per la curva

$$f(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Posto $x - az = \alpha$, $y - bz = \beta$, queste equazioni diventano

$$f(az + \alpha, bz + \beta, z) = 0, \quad \psi(az + \alpha, bz + \beta, z) = 0,$$

dalle quali eliminando z otteniamo una equazione della forma

$$F(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{ossia} \quad F(x - az, y - bz) = 0.$$

Dovremo quindi prendere per ψ la funzione F . Così se si vuole che il cilindro passi pel circolo $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, $z = 0$,

elimineremo z tra le equazioni $(az + \alpha)^2 + (bz + \beta)^2 + z^2 = r^2$ e $z = 0$, ottenendo così $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. Il richiesto cilindro è quindi

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2.$$

3) *Equazione a derivate parziali delle superficie coniche*, cioè di quelle superficie il cui piano tangente, in ogni loro punto, passa per un punto fisso di coordinate (a, b, c) . L'equazione del piano tangente essendo

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

l'equazione a derivate parziali di tali superficie è

$$p(a - x) + q(b - y) = c - z,$$

il cui sistema ausiliario è

$$\frac{dx}{a - x} = \frac{dy}{b - y} = \frac{dz}{c - z};$$

l'integrale generale è quindi

$$\varphi\left(\frac{a - x}{b - y}, \frac{a - x}{c - z}\right) = 0,$$

equazione di qualunque superficie conica.

4) *Equazione a derivate parziali delle superficie di rotazione*. Definiamo queste superficie dalla proprietà che la normale in ogni loro punto (x, y, z)

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0$$

incontri una data retta, l'asse della superficie, che supporremo passante per l'origine delle coordinate

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0;$$

eliminando X, Y, Z tra le quattro equazioni precedenti abbiamo l'equazione a derivate parziali delle superficie di rota-

zione:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ 1 & 0 & p & x+pz \\ 0 & 1 & q & y+qz \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$p(mx - ny) + q(nx - lz) = ly - mx,$$

avendo posto $l = cb' - c'b$, $m = ac' - a'c$, $n = ba' - b'a$.

Delle equazioni ausiliarie

$$\frac{dx}{mx - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx} = \frac{l dx + m dy + n dz}{0} = \frac{x dx + y dy + z dz}{0}$$

abbiamo gli integrali

$$lx + my + nz = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2,$$

e quindi l'equazione generale di qualunque superficie di rotazione, il cui asse passi per l'origine, è

$$\varphi(lx + my + nz, x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

5) Si voglia determinare quella superficie per la quale, in ogni suo punto, il punto di mezzo della parte di normale compresa tra la superficie ed il piano $Z=0$ è situato sulla superficie cilindrica parabolica $Z^2 = X + Y$.

Le equazioni della normale nel punto (x, y, z) della cercata superficie essendo

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

le coordinate del detto punto di mezzo sono $x + \frac{pz}{2}$, $y + \frac{qz}{2}$, $\frac{z}{2}$.

e dovremo avere perciò

$$\frac{z^2}{4} = x + \frac{p^2}{2} + y + \frac{q^2}{2} \quad \text{ossia} \quad 2zp + 2zq = z^2 - 4(x+y),$$

che è l'equazione a derivate parziali della nostra superficie.

Le equazioni ausiliarie essendo

$$\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{2z} = \frac{dz}{z^2 - 4(x+y)},$$

avremo subito $x - y = C_1$ dalla equazione $\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{2z}$; e l'altra

equazione $\frac{dx}{2z} = \frac{dz}{z^2 - 4(x+y)}$ si riduce allora alla

$\frac{dx}{2z} = \frac{dz}{z^2 - 8x + 4C_1}$ cioè alla $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{2} = (zC_1 - 4x)z^{-1}$, equazione di BERNOULLI, il cui integrale, risoluto rapporto alla costante, è $e^{-x}(z^2 - 4(x+y) - 8) = C_2$; cosicchè le superficie richieste hanno una equazione della forma

$$\varphi[x - y, e^{-x}(z^2 - 4x - 4y - 8)] = 0,$$

dove φ è funzione arbitraria.

6) Data l'equazione

$$x_1 x_3 x_4 z p_1 + x_3 x_4 x_1 z p_2 + x_4 x_1 x_3 z p_3 + x_1 x_2 x_3 z p_4 = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

formiamo il sistema ausiliario

$$\frac{dx_1}{x_2 x_3 x_4 z} = \frac{dx_2}{x_3 x_4 x_1 z} = \frac{dx_3}{x_4 x_1 x_2 z} = \frac{dx_4}{x_1 x_2 x_3 z} = \frac{dz}{x_1 x_2 x_3 x_4};$$

il sistema integrale essendo, come subito si vede,

$$x_1^2 - z^2 = C_1, \quad x_2^2 - z^2 = C_2, \quad x_3^2 - z^2 = C_3, \quad x_4^2 - z^2 = C_4,$$

l'integrale generale della proposta equazione è

$$\varphi(x_1^2 - z^2, x_2^2 - z^2, x_3^2 - z^2, x_4^2 - z^2) = 0.$$

1. Equazione a derivate parziali lineare $xp - yq = 0$; integrale generale $\varphi(xy, z) = 0$, dove φ indica la funzione arbitraria.

$$2. \omega^2 p - xyq + y^2 = 0, \varphi\left(xy, z - \frac{y^2}{3\omega}\right) = 0.$$

$$3. (z^2 - y)p + 2x(z^2 - y)q + 2zx = 0, \varphi\left(x^2 - y, z + \frac{y}{z}\right) = 0.$$

$$4. (x - y + z)p + (2y - z)q = z, \varphi\left(\frac{z - y}{z^2}, \frac{x + y}{z}\right) = 0.$$

$$5. [m(x + y) - n(x + z)]p + [n(y + z) - l(y + x)]p \\ = l(z + x) - m(z + y), \varphi(lx + my + nz, xy + yz + zx) = 0.$$

$$6. (y - z)\sqrt{X}p + (z - x)\sqrt{Y}q = (x - y)\sqrt{Z}, \text{ dove } X = a + 2bx + cx^2, \\ Y = a + 2by + cy^2, Z = a + 2bz + cz^2,$$

$$\varphi[\sqrt{X} + \sqrt{Y} + \sqrt{Z}, (b + cx + \sqrt{cX})(b + cy + \sqrt{cY})(b + cz + \sqrt{cZ})] = 0.$$

7. Determinare la superficie per la quale la distanza dall'origine delle coordinate a un suo punto qualunque M sia uguale alla distanza dall'origine al punto d'incontro coll'asse delle z del piano tangente in M alla superficie stessa.

La equazione a derivate parziali di tutte le superficie soddisfacenti alla data condizione è $xp + yq = z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e le loro equazioni in termini finiti sono contenute nella $\varphi\left(\frac{y}{x}, z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0$.

Tra queste superficie quella che passa pel circolo $x = b, y^2 + z^2 = a^2$ ha per equazione

$$2\sqrt{a^2 + b^2}(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = b^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

8. Determinare la superficie per la quale la distanza da un suo punto qualunque M al punto N di incontro del piano tangente in M coll'asse delle x sia uguale alla distanza dall'origine delle coordinate al punto N.

Eq. a der. parziali $2z(xp + yq) = z^2 - x^2 - y^2$; equaz. delle superficie $\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}\right) = 0$; quella tra queste superficie che passa per la parabola $z=0, y^2=x$ ha per equazione $(x^2 + y^2 + z^2)y^2 = x(x^2 + y^2)$.

9. Si dimostri che tutte e sole le superficie date dalla equazione $x^2 + y^2 = c^2 z^2$, dove c indica un parametro variabile, appartengono alle superficie di rotazione definite dalla equazione $yp - xq = 0$ e alle superficie coniche definite dalla equazione $xp + yq = z$.

10. Le equazioni delle superficie che segano ortogonalmente l'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sono contenute nella equazione $\varphi\left(\frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$, dove φ indica una funzione qualunque.

11. L'equazione a derivate parziali delle superficie che segano ortogonalmente (superficie traiettorie ortogonali) le superficie del sistema $f(x, y, z, a) = 0$, (a parametro variabile) è la $\frac{\partial f}{\partial x}p + \frac{\partial f}{\partial y}q = \frac{\partial f}{\partial z}$ dove si sostituisca per a il valore ricavato da $f(x, y, z, a) = 0$.

1) Siano le sfere $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + k^2$, aventi i centri sull'asse delle x e passanti pei punti di coordinate $(0, 0, k)$, $(0, 0, -k)$; l'equazione a derivate parziali delle loro traiettorie ortogonali è $(x^2 - y^2 - z^2 + k^2)p + 2xyq = 2xz$, e le loro equazioni sono date dalla $\varphi\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2 + k^2}{z}\right) = 0$. A queste traiettorie appartengono le sfere del sistema $x^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2 = m^2 + n^2 - k^2$, dove m, n indicano parametri variabili.

2) La equazione a derivate parziali delle traiettorie ortogonali dei paraboloidi di rotazione $x^2 + y^2 = 2az$ è $2xyp + 2yzq + x^2 + y^2 = 0$, e le loro equazioni sono contenute nella

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + 2z\right) = 0.$$

A queste traiettorie appartengono gli ellissoidi di rotazione

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = C.$$

12. Equazione a derivate parziali lineare

$$x_1 p_1 + (z + x_3) p_2 + (z + x_1) p_3 = x_2 + x_3;$$

integrale generale $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ dove $\alpha_1 = \frac{x_2 + x_3 + z}{x_1^2}$;

$\alpha_2 = x_1(z - x_2)$, $\alpha_3 = x_1(z - x_3)$. Se per $z = 0$ si vuole che sia $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dovrà essere $x_1^2(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$ cioè

$$(x_2 + x_3 + z)^2 (2z - x_2 - x_3) = x_1^3.$$

13. $(x_1 + x_2 + \dots + x_n + z)p_1 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n + z + x_1)p_2 + \dots + (z + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})p_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$;
 $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$, dove $\alpha_1 = u(x_1 - z)^n$, $\alpha_2 = u(x_2 - z)^n, \dots$,
 $\alpha_n = u(x_n - z)^n$ avendo posto $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n + z$. Se per $z = 0$ deve essere $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = 1$, dovremo avere

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^{n+1} = (x_1^{\frac{1}{n}} + x_2^{\frac{1}{n}} + \dots + x_n^{\frac{1}{n}})^n, \text{ cioè}$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + z)^n [(x_1 - z)^n + (x_2 - z)^n + \dots + (x_n - z)^n]^{n+1} \\ = (x_1 + x_2 + \dots + x_n - nz)^n.$$

Equazioni a derivate parziali di primo ordine non lineari fra tre o più variabili. Integrale completo, singolare, generale.

199. Consideriamo ora una equazione qualunque di primo ordine a derivate parziali fra tre variabili

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Sia

$$(2) \quad F(x, y, z, a, b) = 0$$

una relazione in termini finiti fra le tre variabili x, y, z e due costanti a, b , che definisca z come funzione di x, y e delle co-

stanti. Derivando rapporto ad x e ad y otteniamo

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0;$$

l'eliminazione di a, b fra le equazioni (2), (3) dà per risultato una equazione della forma (1). Supponiamo che essa sia appunto la (1). La (2) dicesi allora l'*integrale completo* della (1). Alla stessa equazione (1) possiamo arrivare supponendo a, b non più costanti, ma certe funzioni di x, y, z . Derivando infatti la (2) in questa ipotesi, otteniamo

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

dove $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} \dots$ indicano le derivate totali di a, b rapporto ad x e ad y . L'eliminazione di a, b fra le equazioni (2), (4) condurrà ancora alla equazione (1) se si suppongono a, b tali funzioni che risulti

$$(5) \quad \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

alle quali equazioni possiamo soddisfare o supponendo a, b tali che $\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \frac{\partial F}{\partial b} = 0$, ed allora, sostituiti nella (2) i valori di a, b che si ricavano da queste ultime equazioni, la (2) si chiama l'*integrale singolare* della (1); oppure supponendo

si abbia $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{array} \right| = 0$, ed affinché ciò sia è necessario e sufficiente che tra le funzioni a, b passi una relazione qualun-

que, cioè che b sia una funzione arbitraria di a , $b = \varphi(a)$. Allora le due equazioni (5) si riducono alla sola

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{db}{da} = 0 \text{ ossia alla } \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \varphi'(a) = 0,$$

che, quando sia data la forma della φ , serve a determinare la funzione a di x, y, z . La (2) quando le a, b siano determinate in questo modo si chiama l'*integrale generale* della (1).

Riassumendo abbiamo:

La $F(x, y, z, a, b) = 0$, dove a, b sono costanti arbitrarie è l'integrale completo della $f(x, y, z, p, q) = 0$, se, eliminando a, b tra la $F = 0$ e le equazioni che da essa si ottengono colla derivazione rispetto ad x e ad y , si giunge alla equazione $f = 0$, o alla $\mu f = 0$ dove μ non contiene p, q .

La $F(x, y, z, a, b) = 0$, dove a, b siano quelle funzioni di x, y, z che vengono determinate dalle equazioni $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$,

$\frac{\partial F}{\partial b} = 0$, è l'integrale singolare o soluzione singolare della $f = 0$.

La $F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0$, dove $\varphi(a)$ è funzione arbitraria di a e la funzione a di x, y, z è determinata dalla equazione

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \varphi'(a) = 0,$$

è l'integrale generale della $f = 0$.

Si vede come gli integrali singolare e generale vengano subito determinati se si conosce l'integrale completo.

Dimostriamo ora che qualunque funzione z di x, y che soddisfa alla (1) appartiene o all'integrale completo o al singolare o al generale.

Per provare ciò, supponiamo, per maggior semplicità ed esattezza, che la equazione proposta sia della forma

$$(6) \quad z = \varphi(x, y, p, q),$$

il suo integrale completo della forma

$$z = \psi(x, y, a, b)$$

e la funzione z di x, y che soddisfa alla equazione proposta (6) sia della forma

$$z = \chi(x, y).$$

Ciò non lede alla generalità, perchè la funzione $f(x, y, z, p, q)$ si può supporre ridotta al prodotto di più fattori della forma $z - \varphi(x, y, p, q)$ ed analogamente per la $F(x, y, z, a, b)$ etc.

Ora abbiamo, per ipotesi,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi(x, y) = \varphi\left(x, y, \frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) \\ \psi(x, y, a, b) = \varphi\left(x, y, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \end{array} \right.$$

l'ultima delle quali è soddisfatta qualunque siano le quantità a, b , anche funzioni di x, y .

Prendiamo ora le a, b in guisa che risulti

$$(8) \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

allora dalle (7) avremo

$$(9) \quad \chi(x, y) = \psi(x, y, a, b).$$

Ora se i valori a, b pei quali sono soddisfatte le (8) fossero certe costanti, la funzione

$$z = \chi(x, y) = \psi(x, y, a, b)$$

sarebbe un caso particolare dell'integrale completo. Se invece quei valori di a, b fossero delle funzioni di x, y , osserviamo che allora dalla (9) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned}$$

e quindi, per la (8),

www.libtool.com.cn

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0,$$

equazioni che corrispondono, nel nostro caso, alle (5), e perciò a, b sono tali funzioni per le quali la $z = \chi(x, y) = \psi(x, y, a, b)$ è l'integrale singolare o è compreso nell'integrale generale della (8).

ESEMPI.

1) Dalla equazione $z = ax + by + ab$, ricaviamo $p = a, q = b$; eliminando tra esse a, b abbiamo l'equazione a derivate parziali

$$z = px + qy + pq,$$

della quale, perciò, $z = ax + by + ab$ è l'integrale completo.

Ricaviamo i valori di a, b dalle

$$\frac{\partial z}{\partial a} = x + b = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = y + a = 0,$$

ed allora $z = -xy$ è l'integrale singolare.

L'integrale generale è

$$z = ax + \varphi(a)y + a\varphi(a)$$

dove a è quella funzione di x, y che soddisfa alla equazione

$$x + \varphi(a) + (y + a)\varphi'(a) = 0.$$

La funzione $z = -\frac{(x+y)^2}{4}$ soddisfa alla proposta equazione;

essa è contenuta perciò in uno dei tre integrali. Non è, come si vede, l'integrale singolare; per vedere a quale degli altri due appartiene, poniamo, seguendo il procedimento esposto,

$$a = -\frac{x+y}{2}, \quad b = -\frac{x+y}{2}, \quad \text{da cui } b = a; \text{ essa si ricava per-}$$

ciò dall'integrale generale facendovi $\varphi(a) = a$.

2) Dalla equazione

$$(10) \quad z = ax + by + h\sqrt{1 + a^2 + b^2},$$

e dalle sue derivate $p = a, q = b$, ricaviamo

$$(11) \quad z = px + qy + h\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

La (11) è l'integrale completo della (10).

L'integrale singolare è la (10) dove a, b sono date dalle

$$a + \frac{ah}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = 0, \quad y + \frac{bh}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = 0,$$

cioè è $x^2 + y^2 + z^2 = h^2$.

L'integrale generale è

$$z = ax + \varphi(a)y + h\sqrt{1 + a^2 + \varphi(a)^2}$$

se a si ricavi dalla

$$x + \frac{ah}{\sqrt{1 + a^2 + \varphi(a)^2}} + \left(y + \frac{\varphi(a)h}{\sqrt{1 + a^2 + \varphi(a)^2}} \right) \varphi'(a) = 0.$$

200. In modo completamente analogo si procede per le equazioni a derivate parziali di primo ordine fra quante si vogliano variabili $x_1, x_2, \dots, x_n, z$. E così:

La

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

dicesi integrale completo della

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

se eliminando le costanti $a_1, a_2, \dots, a_n$ tra la $F = 0$ e le

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z} p_1 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial z} p_2 = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} p_n = 0,$$

si ottiene la $f = 0$, fatta astrazione da un eventuale fattore che non contenga le p .

La $F=0$, ove le $a_1, a_2, \dots, a_n$ siano quelle funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ che si ricavano dalle

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0$$

è l'*integrale singolare* o *soluzione singolare* della $f=0$.

La

$$F[x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \varphi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})] = 0,$$

dove φ indica una funzione arbitraria e le $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sono quelle funzioni delle $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ che soddisfano alle equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} = 0,$$

è l'*integrale generale* della $f=0$.

Qualunque funzione z di $x_1, x_2, \dots, x_n$, che soddisfa alla $f=0$, appartiene o all'integrale completo o al singolare o al generale.

ESEMPLI.

1) Dalla

$$(1) \quad z = a_1 - \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1} + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

ricaviamo

$$p_1 = \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1^2}, \quad p_2 = a_2, \quad p_3 = a_3,$$

dalle quali, essendo già eliminata a_1 , eliminando solo a_2, a_3 otteniamo

$$p_1 = \frac{p_2^2 + p_3^2}{a_1^2} \quad \text{ossia} \quad p_1 x_1^2 = p_2^2 + p_3^2.$$

La (1) è l'integrale completo di questa equazione.

Non esiste in questo caso l'integrale singolare, perchè tra

le equazioni che dovrebbero determinare a_1, a_2, a_3 figurerebbe la equazione assurda $\frac{\partial z}{\partial a_1} = 1 = 0$.

L'integrale generale è

$$z = \varphi(a_2, a_3) - \frac{a_2^2 + a_3^2}{x_1} + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

dove φ è funzione arbitraria e a_2, a_3 funzioni di x_1, x_2, x_3 che si ricavano dalle

$$1 + \left(x_2 - \frac{2a_2}{x_1}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \quad 1 + \left(x_3 - \frac{2a_3}{x_1}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = 0.$$

2) Sia la equazione

$$(2) \quad \log z + a_{n+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

dove tra le $n+1$ costanti a passa la relazione

$$(3) \quad (a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_n - 1) = a_1 a_2 \dots a_n,$$

che riduce il loro numero ad n arbitrarie.

Derivando otteniamo

$$p_1 = z a_1, \quad p_2 = z a_2, \dots, p_n = z a_n$$

ossia

$$p_1 - z = z(a_1 - 1), \quad p_2 - z = z(a_2 - 1), \dots, p_n - z = z(a_n - 1),$$

dalle quali $p_1 p_2 \dots p_n = z^n a_1 a_2 \dots a_n$,

$$(p_1 - z)(p_2 - z) \dots (p_n - z) = z^n (a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_n - 1) = z^n a_1 a_2 \dots a_n,$$

e giungiamo così alla equazione a derivate parziali

$$(p_1 - z)(p_2 - z) \dots (p_n - z) = p_1 p_2 \dots p_n,$$

della quale la (2) colla condizione (3) è l'integrale completo.

Non esiste integrale singolare perchè si dovrebbe avere la equazione assurda $1 = 0$.

L'integrale generale è

$$\log z + \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

dove a_n è espressa colle $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ mediante la (3), la φ è funzione arbitraria e le funzioni $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sono determinate dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial a_1} = x_1 + x_n \frac{\partial a_n}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial a_2} = x_2 + x_n \frac{\partial a_n}{\partial a_2}, \dots$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}} = x_{n-1} + x_n \frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}.$$

Integrazione delle equazioni a derivate parziali di primo ordine fra tre variabili. Metodo di Lagrange-Charpit. Integrazione di alcune equazioni a derivate parziali di primo ordine fra quante si vogliono variabili.

201. Ci proponiamo di trovare l'integrale completo della equazione

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Se fossero noti i valori di p e q , la integrazione di $dz = p dx + q dy$ ci darebbe la funzione incognita z . Ora questi valori sarebbero conosciuti se arrivassimo a trovare fra le nostre quantità x, y, z, p, q un'altra relazione

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

che fosse da esse soddisfatta; perchè allora le equazioni $f=0$, $\varphi=0$ ci darebbero i valori di p, q espressi per x, y, z , e questi sarebbero tali che la equazione a differenziali totali

$$dz - p dx - q dy = 0$$

risulterebbe integrabile e la sua integrazione darebbe l'integrale richiesto. Tutto adunque si riduce a trovare la funzione φ .

A tale scopo osserviamo che dalle equazioni $f=0$, $\varphi=0$ si otterrebbe www.libtool.com.cn

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

dalle quali, eliminando $\frac{\partial p}{\partial x}$ tra le due prime e poi $\frac{\partial q}{\partial y}$ tra le due ultime, ricaviamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + p \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial q}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + q \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) = 0;$$

sommando queste equazioni, coll'osservare che $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$, ed ordinando rispetto alle derivate parziali di φ , abbiamo

$$(1) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

equazione a derivate parziali lineare di primo ordine cui deve soddisfare la funzione φ delle quantità x, y, z, p, q . Per trovare φ dobbiamo quindi determinare un integrale di questa equazione lineare.

Il sistema ausiliario corrispondente di equazioni differenziali è

$$(2) \quad \frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)} = \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q} = \frac{d\varphi}{0};$$

perciò intanto un integrale di questo sistema è $\varphi = C$, e se $\alpha_1 = C_1$, $\alpha_2 = C_2$, $\alpha_3 = C_3$, $\alpha_4 = C_4$, indicano gli altri integrali, l'integrale generale della (1) sarà $\psi[\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = 0$.

Ma a noi basta conoscere un integrale particolare, e quanto più semplice sarà praticamente migliore, della (1), cosicchè basterà conoscere, oltre $\varphi = C$, un altro integrale del sistema; basterà quindi integrare la più semplice delle equazioni contenute in (2); se $\alpha(x, y, z, p, q) = C'$ è questo integrale, basterà prendere $\psi(\varphi, \alpha) = 0$ o più semplicemente $\varphi = \alpha - a$ dove a è una costante, cosicchè $\alpha(x, y, z, p, q) = a$ è la relazione richiesta, che unitamente alla equazione data $f = 0$ serve a determinare i valori di p, q . Riassumendo abbiamo la regola seguente:

Per trovare l'integrale completo della equazione

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

si formi il sistema di equazioni differenziali (2), e se ne trovi un integrale

$$\varphi(x, y, z, p, q) = a,$$

dove a è una costante arbitraria, tenendo presente di scegliere questo integrale in guisa che la funzione φ contenga almeno una delle quantità p, q ; allora ricavati i valori di p, q dalle $f = 0$, $\varphi = 0$ e sostituiti nella $dx - p dx - q dy = 0$, si calcoli l'integrale di questa equazione a differenziali totali necessariamente integrabile; quest'ultimo integrale, che contiene due costanti arbitrarie, a e la costante d'integrazione, è l'integrale completo della equazione a derivate parziali proposta.

Notiamo che potrà qualche volta essere più comodo determinare due integrali delle (2), dai quali ricavare i valori di p, q che si sostituiranno nella equazione proposta, ottenendo

così l'integrale completo, qualora il risultato di tale sostituzione non sia che una relazione tra le due costanti contenute nelle espressioni di p, q , nel qual caso tale relazione determina una delle costanti, e dopo l'integrazione di $dz - pdx - qdy = 0$ l'integrale completo della data equazione.

ESEMPI

1) Sia l'equazione $pq - hxyz = 0$. Le equazioni ausiliarie sono

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{h(yz + xyp)} = \frac{dq}{h(xz + xyq)},$$

dalle quali

$$\frac{ydx - xdy}{qy - px} = \frac{qdp - pdq}{hz(qy - px)} \text{ ossia } ydx - xdy = \frac{qdp - pdq}{hz},$$

ovvero, osservando che in virtù dell'equazione proposta è

$$hz = \frac{pq}{xy},$$

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{qdp - pdq}{pq},$$

che, integrata, dà $C \frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, la quale, unitamente alla proposta equazione dà per p e q i valori $q = ay\sqrt{z}$, $p = \frac{h}{a} x\sqrt{z}$, avendo posto $a = \sqrt{\frac{h}{C}}$. In conseguenza l'equazione

$$dz = pdx + qdy = \frac{h}{a} x\sqrt{z}dx + ay\sqrt{z}dy,$$

ossia

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{h}{a} xdx + aydy$$

ci dà l'integrale completo della proposta equazione,

$$(1) \quad 4\sqrt{z} = \frac{h}{a} x^2 + ay^2 + b.$$

Qui parrebbe che non esistesse l'integrale singolare perchè posto $f(x, y, z, a, b) = 4\sqrt{z - \frac{h}{a}x^2 - ay^2 - b}$, si avrebbe la equa-

zione assurda $\frac{\partial f}{\partial b} = 1 = 0$. Ma si osservi che la $f(x, y, z, a, b)$

non è funzione univalente dei suoi argomenti contenendo il radicale $\sqrt{z}$, mentre che nella teoria esposta si è sottintesa la condizione della univalenza per le funzioni ivi considerate. Per scoprire dunque se veramente vi sia l'integrale singolare oppure no, eleviamo al quadrato la (1) ottenendo così

$$16z = \left(\frac{h}{a}x^2 + ay^2 + b \right)^2;$$

derivando allora rapporto a b otteniamo $2\left(\frac{h}{a}x^2 + ay^2 + b\right) = 0$, cosichè, senza che qui occorra calcolare inoltre la derivata rapporto ad a , riconosciamo che vi è l'integrale singolare $z = 0$.

L'integrale generale è dato dalle equazioni

$$4\sqrt{z} = \frac{h}{a}x^2 + ay^2 + \varphi(a), \quad -\frac{hx^2}{a^2} + y^2 + \varphi'(a) = 0,$$

dove φ è funzione arbitraria.

2) Il sistema ausiliario per la equazione

$$pq + p + q + x + y + z = 0$$

$$\text{è} \quad \frac{dx}{q+1} = \frac{dy}{p+1} = \frac{dz}{2pq+p+q} = \frac{-dp}{1+p} = \frac{-dq}{1+q},$$

da cui $dx = -dq$, $dy = -dp$ e quindi $q = a - x$, $p = b - y$; sostituendo questi valori nella proposta equazione abbiamo l'integrale completo

$$z = ay + bx - xy - a - b - ab;$$

si determina subito l'integrale singolare $z = 1 - x - y$.

3) Tra le equazioni del sistema ausiliario relativo alla equa-

zione

www.libtool.com.cn

$$yp - xq - hpq = 0$$

vi sono le due equazioni

$$\frac{dx}{y - hq} = \frac{dp}{q}, \quad \frac{dy}{-x - hp} = -\frac{dq}{p},$$

che, in virtù della proposta equazione, diventano

$$\frac{dx}{xq} = \frac{dp}{pq}, \quad \frac{dy}{yp} = \frac{dq}{pq},$$

dalle quali si ricava $p = ax, q = b'y$, essendo a, b' costanti. Sostituendo questi valori nella equazione data troviamo che tra le costanti a, b' deve passare la relazione $a - b' - hab' = 0$, da cui ricaviamo $b' = \frac{a}{1 + ah}$; in conseguenza è

$$dz = p dx + q dy = ax dx + \frac{a}{1 + ah} y dy,$$

da cui l'integrale completo della nostra equazione

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{a}{2(1 + ah)} y^2 + b.$$

Manca l'integrale singolare; e si trova senz'altro l'integrale generale.

4) Si vogliono determinare le superficie per le quali il piano tangente in ogni loro punto (x, y, z) tagli, sopra gli assi delle x, y, z , delle lunghezze OA, OB, OC tali che

$$x \cdot OA + y \cdot OB + z \cdot OC = h.$$

L'equazione del piano tangente in un punto (x, y, z) essendo

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

abbiamo

www.libtool.com.cn

$$OA = \frac{px + qy - z}{p}, \quad OB = \frac{px + qy - z}{q}, \quad OC = z - px - qy,$$

e perciò l'equazione a derivate parziali delle richieste superficie è

$$(px + qy - z) \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - z \right) = h$$

ossia

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - z - \frac{h}{px + qy - z} = 0,$$

il cui sistema ausiliario, posto per brevità $u = px + qy - z$, è

$$\frac{dx}{x \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{h}{u^2} \right)} = \frac{dy}{y \left(-\frac{1}{q^2} + \frac{h}{u^2} \right)} = \frac{dz}{z \left(-1 + \frac{h}{u^2} \right)} = \frac{dp}{p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)} = \frac{dq}{q \left(1 - \frac{1}{q^2} \right)},$$

dalle quali si ricava

$$\frac{\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z}}{1 - \frac{1}{p^2}} = \frac{\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}}{1 - \frac{1}{q^2}} = \frac{\frac{dp}{p}}{1 - \frac{1}{p^2}} = \frac{\frac{dq}{q}}{1 - \frac{1}{q^2}},$$

che danno gli integrali $p = a \frac{x}{z}$, $q = b \frac{y}{z}$. Sostituendo questi valori nella equazione a derivate parziali delle nostre superficie, abbiamo

$$z \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 \right) - \frac{hz}{ax^2 + by^2 - z^2} = 0 \quad \text{ossia} \quad (ax^2 + by^2 - z^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 \right) = h,$$

che è l'integrale completo e che rappresenta una famiglia di superficie di secondo ordine col centro nell'origine delle coordinate. In particolare per $a = b = -1$, e h positivo, abbiamo la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{h}{3}$.

Le equazioni che servono per trovare l'integrale particolare sono www.libtool.com.cn

$$(3) \quad \begin{cases} a^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 \right) - (ax^2 + by^2 - z^2) \frac{1}{a^2} = 0, \\ y^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 \right) - (ax^2 + by^2 - z^2) \frac{1}{b^2} = 0, \end{cases}$$

dalle quali $a^2x^2 = b^2y^2$, $ax = \pm by$; chiamando λ il valore comune dei due membri dell'ultima eguaglianza, abbiamo i valori

$a = \frac{\lambda}{x}$, $b = \pm \frac{\lambda}{y}$ che sostituiti in una delle (3) danno

$-1 + \frac{z^2}{\lambda^2} = 0$, da cui $\lambda = \pm z$, cosicchè $a = \pm \frac{z}{x}$, $b = \pm \frac{z}{y}$,

i segni essendo tra loro indipendenti. Sostituendo questi valori di a, b nell'integrale completo, otteniamo l'integrale singolare

$$(\pm x \pm y - z)^2 = h,$$

che rappresenta otto piani (reali o immaginari secondochè $h > 0$ oppure $h < 0$) formanti un ottaedro regolare col centro nell'origine delle coordinate.

202. Consideriamo ora alcuni tipi di equazioni a derivate parziali di primo ordine, la cui integrazione, oltre che col metodo del num. precedente, può ottenersi con procedimenti speciali e semplici, estendibili alle equazioni di forma analoga tra quante si vogliano variabili.

1) *Equazioni della forma* $\varphi(p, q) = 0$. Si riconosce subito che $z = ax + by + c$ dove a, b, c sono costanti è l'integrale completo, purchè tra le a, b passi la relazione $\varphi(a, b) = 0$.

Osserviamo che anche le equazioni, fra $n+1$ variabili, $\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ ammettono l'integrale completo

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + c,$$

se tra le a poniamo la relazione $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$.

ESEMPIO. — La equazione $x p_1 p_2 p_3 = x_1 x_2 x_3$, ovvero la

$$\frac{1}{x_1} \frac{dz}{dx_1} \frac{1}{x_2} \frac{dz}{dx_2} \frac{1}{x_3} \frac{dz}{dx_3} = 1$$
, si riduce alla forma ora conside-
 rata ponendo

$x_1 dx_1 = d\xi_1$, $x_2 dx_2 = d\xi_2$, $x_3 dx_3 = d\xi_3$, $z^{\frac{1}{3}} dz = dZ$, giacchè di-
 venta allora $\frac{dZ}{d\xi_1} \frac{dZ}{d\xi_2} \frac{dZ}{d\xi_3} = 1$, il cui integrale è

$$Z = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + b$$

dove $a_1 a_2 a_3 = 1$. Dalle posizioni fatte ricaviamo

$$Z = \frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}}, \quad \xi_1 = \frac{x_1^2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{x_2^2}{2}, \quad \xi_3 = \frac{x_3^2}{2},$$

cosicchè

$$\frac{3}{2} z^{\frac{4}{3}} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + c,$$

dove $a_1 a_2 a_3 = 1$, è l'integrale completo della equazione proposta.

2) *Equazioni della forma* $\varphi(z, p, q) = 0$. Per integrarle si
 ponga $z = f(\xi)$, $\xi = x + ay$, cosicchè $p = \frac{dz}{d\xi}$, $q = a \frac{dz}{d\xi}$, e de-
 terminiamo z dalla equazione $\varphi\left(z, \frac{dz}{d\xi}, a \frac{dz}{d\xi}\right) = 0$, che è una
 equazione differenziale ordinaria.

Se si ricava $\frac{dz}{d\xi} = \psi(z, a)$, avremo $\xi = \int \frac{dz}{\psi(z, a)} + b$, e

quindi l'integrale completo $x + ay = \int \frac{dz}{\psi(z, a)} + b$ della pro-
 posta equazione.

Questo metodo si applica ancora, come si riconoscerà fa-
 cilmente, alle equazioni con $n + 1$ variabili della forma analoga

$\varphi(z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$, ottenendone l'integrale generale

www.libtool.com.cn

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n = \int \frac{dz}{\psi(z, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})} + b,$$

avendo ricavato $\frac{dz}{d\xi} = \psi(z, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ dalla equazione

$$\varphi\left(z, a_1 \frac{dz}{d\xi}, a_2 \frac{dz}{d\xi}, \dots, a_{n-1} \frac{dz}{d\xi}, \frac{dz}{d\xi}\right) = 0.$$

ESEMPLI. — $z^4 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3$; posto $\xi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_3$,
abbiamo $z^4 = \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 (a_1 a_2 + a_1 + a_2)$, da cui $\frac{dz}{d\xi} = \frac{z^2}{\sqrt{a_1 a_2 + a_1 + a_2}}$

che integrata dà $z = -\frac{\sqrt{a_1 a_2 + a_1 + a_2}}{\xi + a_3}$ e quindi l'integrale completo della proposta equazione

$$z = -\frac{\sqrt{a_1 a_2 + a_1 + a_2}}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_3 + a_3}.$$

Sia ancora l'equazione $z = pq$; applicando il metodo attuale si trova subito l'integrale completo $z = \frac{1}{4} \left(ax + \frac{y}{a} + b \right)^2$.

Col metodo generale, osservando che le equazioni ausiliarie sono

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

e quindi $q = x + a$, $p = y + b$, si trova l'integrale completo nella forma $z = (x + a)(y + b)$.

Si osservi che l'integrale generale è allora $z = (x + a)[(y + \varphi(a))]$, essendo $y + \varphi(a) + (x + a)\varphi'(a) = 0$. Prendendo $\varphi(a) = a_1 a + b_1$ si ottiene $z = -\frac{1}{4a_1} (y + b_1 - a_1 x)^2$, che è della forma del primo integrale completo trovato.

3) *Equazioni della forma* $\varphi(x, p) = \psi(y, q)$. Poniamo $c(x, p) = a$, $\psi(y, q) = a$ e ricaviamo da queste $p = f(x, a)$, $q = F(y, a)$; avremo allora dalle prima di esse $z = \int f(x, a) dx$ + una funzione arbitraria di y , e dalla seconda $z = \int F(y, a) dy$ + una funzione arbitraria di x , cosicchè la funzione

$$z = \int f(x, a) dx + \int F(y, a) dy + b$$

soddisfarà a tutte e due quelle equazioni e quindi alla proposta equazione a derivate parziali e ne sarà l'integrale completo colle due costanti a, b .

Lo stesso metodo è applicabile alle equazioni con $n + 1$ variabili della forma

$$f_1(x_1, p_1) + f_2(x_2, p_2) + \dots + f_n(x_n, p_n) = 0.$$

Infatti poniamo

$$f_1(x_1, p_1) = a_1, \quad f_2(x_2, p_2) = a_2, \quad \dots \quad f_n(x_n, p_n) = a_n,$$

colla condizione $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ e da queste equazioni suppongasi ricavare

$$p_1 = \varphi_1(x_1, a_1), \quad p_2 = \varphi_2(x_2, a_2) \dots p_n = \varphi_n(x_n, a_n);$$

otteniamo allora l'integrale completo della equazione proposta

$$z = \int \varphi_1(x_1, a_1) dx_1 + \int \varphi_2(x_2, a_2) dx_2 + \dots + \int \varphi_n(x_n, a_n) dx_n + b.$$

ESEMPIO. — $p_1^{m_1} x_1^{n_1} + p_2^{m_2} x_2^{n_2} + p_3^{m_3} x_3^{n_3} = 0$.

Abbiamo subito l'integrale completo

$$z = \frac{m_1 a_1^{\frac{1}{m_1}}}{m_1 - n_1} x_1^{\frac{m_1 - n_1}{m_1}} + \frac{m_2 a_2^{\frac{1}{m_2}}}{m_2 - n_2} x_2^{\frac{m_2 - n_2}{m_2}} + \frac{m_3 a_3^{\frac{1}{m_3}}}{m_3 - n_3} x_3^{\frac{m_3 - n_3}{m_3}} + b,$$

essendo $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Se $m_1 = n_1$ in luogo del primo termine del secondo membro vi sarebbe il termine $a_1^{\frac{1}{m_1}} \log x_1$ etc.

4) *Equazione di CLAIRAUT.* — È la equazione della forma

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n + \varphi(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

il cui integrale completo è, come subito si verifica,

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n);$$

l'integrale singolare si ottiene eliminando le a tra questa equazione e le

$$x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0, \quad x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad x_n + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0.$$

ESEMPIO. — Determinare la superficie per la quale la somma delle intercette sugli assi dal piano tangente in ogni loro punto è una costante h .

L'equazione a derivate parziali della superficie cercata è

$$(px + qy - z) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = h \quad \text{ossia} \quad z = px + qy - \frac{hpq}{p+q-pq};$$

l'integrale completo è il sistema di piani

$$z = ax + by - \frac{hab}{a+b-ab}.$$

Per trovare la soluzione singolare elimineremo a, b tra questa equazione e le

$$x - \frac{hb^2}{(a+b-ab)^2} = 0, \quad y - \frac{ha^2}{(a+b-ab)^2} = 0,$$

dalle quali ricaviamo $b^2 y = a^2 x$, e quindi $a = \frac{\sqrt{x+\sqrt{y-\sqrt{h}}}}{\sqrt{x}}$,

$$b = \frac{\sqrt{x+\sqrt{y-\sqrt{h}}}}{\sqrt{y}}, \quad a+b-ab = \frac{\sqrt{h}(\sqrt{x+\sqrt{y-\sqrt{h}}})}{\sqrt{xy}},$$

ed in conseguenza l'integrale singolare è

$$z = (\sqrt{x+\sqrt{y-\sqrt{h}}})^2 \quad \text{od anche} \quad \sqrt{z+\sqrt{h}} = \sqrt{x+\sqrt{y}},$$

ovvero, rendendo l'equazione razionale,

$$[(x+h-x-y)^2 - 4(xy+zh)]^2 = 64hxyz,$$

che rappresenta la superficie involuppo dei piani che costituiscono l'integrale completo.

5) Equazioni della forma

$$xf_1(p, q, z - px - qy) + yf_2(p, q, z - px - qy) + f_3(p, q, z - px - qy) = 0.$$

La integrazione di queste equazioni dipende da quella di una equazione lineare mediante una trasformazione detta *trasformazione di LEGENDRE*. Poniamo

$$(4) \quad u = z - px - qy$$

da cui $du = -x dp - y dq$ e prendiamo p, q come nuove variabili indipendenti, cosichè allora

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial p} = -x, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = -y$$

e la equazione proposta si trasforma nella equazione lineare in u

$$f_1(p, q, u) \frac{\partial u}{\partial p} + f_2(p, q, u) \frac{\partial u}{\partial q} = f_3(p, q, u),$$

il cui integrale generale, della forma

$$\varphi[\alpha(p, q, u), \beta(p, q, u)] = 0,$$

sarà l'integrale generale della equazione proposta, considerandolo unitamente alle equazioni (4), (5). Quando venga assegnata la funzione φ , e si eliminino u, p, q tra quelle equazioni avremo un integrale particolare ed anche, se nella forma assegnata di φ vi saranno contenute due costanti arbitrarie, un integrale completo della proposta equazione.

Notiamo che una equazione qualunque a derivate parziali

di primo ordine

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

si trasforma, mediante la trasformazione di LEGENDRE, nella

$$f\left(-\frac{\partial u}{\partial p}, -\frac{\partial u}{\partial q}, u - p\frac{\partial u}{\partial p} - q\frac{\partial u}{\partial q}, p, q\right) = 0,$$

che potrà riescire qualche volta più facilmente integrabile della proposta.

La trasformazione di LEGENDRE si estende alle equazioni fra $n+1$ variabili, e torna specialmente utile per quelle della forma

$$x_1 f_1(p_1, p_2, \dots, p_n, z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n) + x_2 f_2(\dots) + \dots + x_n f_n(\dots) + f_{n+1}(\dots) = 0.$$

Si pone

$$u = z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n$$

da cui
$$du = -x_1 dp_1 - x_2 dp_2 - \dots - x_n dp_n,$$

e si prendono le p per variabili indipendenti, così che

$$\frac{\partial u}{\partial p_1} = -x_1, \quad \frac{\partial u}{\partial p_2} = -x_2, \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial p_n} = -x_n;$$

la equazione trasformata è allora lineare etc.

ESEMPIO. — Sia la equazione

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)(z - px - qy) + 1 = 0$$

ovvero
$$(qx + py)(z - px - qy) + pq = 0;$$

l'equazione trasformata è

$$\left(-q\frac{\partial u}{\partial p} - p\frac{\partial u}{\partial q}\right)u + pq = 0,$$

il cui integrale generale è

$$\text{www.libtool.com.cn} \quad u^2 - p^2 = \varphi(p^2 - q^2).$$

Per avere l'integrale completo della equazione proposta particolarizzeremo la funzione φ prendendo una funzione, che sceglieremo apposta semplice, con due costanti arbitrarie; prenderemo $\varphi(p^2 - q^2) = a(p^2 - q^2) + b$. Avremo allora

$$u^2 - p^2 = a(p^2 - q^2) + b \quad \text{da cui} \quad u = \sqrt{(1+a)p^2 - aq^2 + b},$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = -x = \frac{(a+1)p}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = -y = \frac{-aq}{u},$$

e quindi

$$p = \frac{-xu}{a+1}, \quad q = \frac{yu}{a}, \quad u^2 = \frac{x^2 u^2}{a+1} - \frac{u^2 y^2}{a} + b, \quad u = \frac{b}{\sqrt{a(a+1) - ax^2 + (a+1)y^2}},$$

avendo scritto, in questa ultima formola, b in luogo di $b\sqrt{a(a+1)}$; cosichè, posto $A = \sqrt{a(a+1) - ax^2 + (a+1)y^2}$, è

$$p = \frac{-xb}{(a+1)A}, \quad q = \frac{yb}{aA}, \quad z - px - qy = z + \frac{ax^2 b}{(a+1)A} - \frac{y^2 b}{aA},$$

e l'eguaglianza $u = z - px - qy$ diviene $z = \frac{b}{A} \left(1 - \frac{x^2}{a+1} + \frac{y^2}{a} \right)$ che è il richiesto integrale completo, che si riduce a

$$z = b\sqrt{a(a+1) - ax^2 + (a+1)y^2}$$

scrivendo b in luogo $\frac{b}{a(a+1)}$. Ponendo $ab^2 = -a_1$, $(a+1)b^2 = b_1$, e poi scrivendo a, b in luogo di a_1, b_1 , lo stesso integrale assume l'aspetto

$$z = \sqrt{ax^2 + by^2 - \frac{ab}{a+b}}$$

Con procedimento analogo si trova che l'integrale completo della equazione

$$\left(\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \dots + \frac{x_n}{p_n}\right)(z - p_1 a_1 - p_2 a_2 - \dots - p_n a_n) + 1 = 0$$

$$\text{è} \quad z = \sqrt{a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 - A}$$

dove

$$A = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_3 a_4 \dots a_n + a_1 a_2 a_4 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

ESERCIZI

1. $z^2 pq - xy = 0$, integrale completo $az^2 + a^2 x^2 + y^2 = b$, non vi è integrale singolare, l'integrale generale è dato dalle due equazioni $az^2 + a^2 x^2 + y^2 - \varphi(a) = 0$, $z^2 + 2ax^2 - \varphi'(a) = 0$; si trovi a qual forma di φ corrisponde l'integrale, particolare del generale, $z = 4^{\frac{1}{4}} (x^2 - 1)^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}$.

$$2. \quad xp^2 + yq^2 = z, \text{ int. completo } \log z = \frac{2\sqrt{ax} + 2\sqrt{y}}{\sqrt{1+a}} + b.$$

$$3. \quad pq = 1, \quad z = ax + \frac{y}{a} + b.$$

$$4. \quad xy = pq, \quad z = ax^2 + \frac{1}{4a} y^2 + b.$$

$$5. \quad q = \varphi(p, y), \quad z = ax + \int \varphi(a, y) dy + b.$$

$$6. \quad p + q^2 xz = 0, \quad z = \frac{y+b}{\sqrt{x^2+a}}.$$

$$7. \quad \sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x, \quad z = \frac{(2x - \sqrt{a})^2}{6} + ay + b.$$

$$8. \quad q = e, \quad z = ax + e^{\frac{a}{h}} y + b.$$

9. $q^a y^b = z(z - px)$, $\log z = a \log x + b \log y + c$ ovvero
 $z = cx^a y^b$ essendo $a + b = 1$.

10. $z = x_1^a p_1^2 + x_2^a p_2^2 + \dots + x_n^a p_n^2$, $2\sqrt{z} = a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 + \dots$
 $+ a_n \log x_n + b$ dove $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$.

$$11. z^2(p^2 - q^2) = y^2 - x^2,$$

$$z^2 + b = x\sqrt{a - x^2} + y\sqrt{a - y^2} + a \arcsen \frac{x}{\sqrt{a}} + a \arcsen \frac{y}{\sqrt{a}}.$$

12. La integrazione delle equazioni della forma

$$xf(y, p, z - px) = q\varphi(y, p, z - px) + \psi(y, p, z - px)$$

dipende da quella di una equazione lineare ponendo $u = z - px$
e prendendo y, p come nuove variabili indipendenti.

Un procedimento analogo vale per la equazione

$$x_1 f_1 = p_2 f_2 + p_3 f_3 + \dots + p_n f_n + f$$

dove $f_1, f_2, \dots, f_n, f$ indicano funzioni di $x_2, \dots, x_n, p_1, z - p_1 x_1$.
Parimenti l'integrazione della equazione

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = p_3 f_3 + \dots + p_n f_n + f,$$

dove le $f_1, f_2, \dots, f_n, f$ indicano funzioni di $x_3, \dots, x_n, p_1, p_2, z - p_1 x_1 - p_2 x_2$, dipende da quella di una equazione lineare
ponendo $u = z - p_1 x_1 - p_2 x_2$ e prendendo $p_1, p_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ come nuove variabili indipendenti.

Analogamente per la equazione

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = p_4 f_4 + \dots + p_n f_n + f,$$

dove le $f_1, f_2, \dots, f_n, f$ indicano funzioni di $x_4, x_5, \dots, x_n, p_1, p_2, p_3, z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3$; e così di seguito.

$$13. q = p^m f(x), \quad ax + a^m y = \int \overline{f(z)}^{\frac{1}{m-1}} dx + b.$$

14. $q = p^m XYZ$, dove X, Y, Z indicano funzioni rispetti-

vamente della sola x , della sola y , della sola z ;

www.libtool.com.cn

$$a \int \frac{dx}{\sqrt[m]{X}} + a^m \int Y dy = \int \sqrt[m]{Z} dz + b.$$

$$15. q = (z + px)^2, \quad z = \frac{a}{x} - \frac{1}{y+b}.$$

$$16. (z - px)^2 + xp^2 - q(y - h)^2 = 0, \quad \frac{(1 + \sqrt{ax})^2}{z} = \frac{1 + a}{y - h} + b.$$

$$17. p_1^m + p_2^m + \dots + p_n^m = \varphi(z),$$

$$a_n + \int \frac{dz}{\sqrt[m]{\varphi(z)}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1}} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n).$$

$$18. p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n},$$

$$z = a_1 x_1^{\frac{h_1 + m_1}{m_1}} + a_2 x_2^{\frac{h_2 + m_2}{m_2}} + \dots + a_n x_n^{\frac{h_n + m_n}{m_n}} + b,$$

$$\text{dove} \quad a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n} = \frac{m_1^{m_1} m_2^{m_2} \dots m_n^{m_n}}{(h_1 + m_1)^{m_1} (h_2 + m_2)^{m_2} \dots (h_n + m_n)^{m_n}}.$$

19. Determinare la superficie per la quale l'area di una sua porzione stia all'area della proiezione della medesima sul piano delle x, y come m sta alla unità.

Equaz. a derivate parziali della superficie $p^2 + q^2 + 1 = m^2$,
int. completo i piani $z = ax + \frac{z}{\sqrt{m^2 - a^2 - 1}} + b$, non vi è integrale singolare.

20. Superficie per le quali la parte di normale compresa tra il punto sulla superficie e il punto d'incontro col piano x, y sia una data costante h .

Equaz. a der. parz. $z^2(1 + p^2 + q^2) = h^2$; integrale completo $(x + ay + b)^2 = (1 + a^2)(h^2 - z^2)$, che rappresenta dei cilindri di rotazione i cui assi hanno per equazioni $z = 0$, $x + ay + b = 0$.

L'integrale singolare è dato dai due piani $z = \pm h$. Se nell'integrale generale si pone $b = \varphi(a) = a_1 a + b_1$ si ottengono le sfere $(x + b_1)^2 + (y + a_1)^2 + z^2 = h^2$.

21. Superficie le cui normali siano tangenti alla sfera di raggio r col centro nell'origine delle coordinate.

Equaz. a der. parz. $(px + qy)^2 + (r^2 - x^2 - y^2)(p^2 + q^2) = 0$; int. compl.

$$z + b = a \left\{ \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} - r \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r} \pm r \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right\}.$$

VI. Elementi del Calcolo delle Variazioni.

Variazioni. —

Variazione prima di un integrale semplice.

203. Sia $y=f(x)$ funzione di x ; supponiamo che la y divenga y_1 in seguito ad un cambiamento nella forma del legame che lega y alla variabile indipendente x , e questo cambiamento supponiamo riduca la forma della funzione a $f(x)+\varepsilon\eta$, dove $\eta=\lambda(x)$ indica una funzione qualunque di x , ed ε una quantità infinitesima indipendente da x ; cosicchè sia $y_1=f(x)+\varepsilon\eta$. La differenza $y_1-y=\varepsilon\eta$ si chiama la *variazione* della funzione y , e la si indica col simbolo $\delta y=\varepsilon\eta$; ε rappresenta la piccolezza, η l'arbitrarietà della variazione δy .

Supporremo ora e nel seguito che la $f(x)$ e la funzione arbitraria $\lambda(x)$ ammettano le derivate di quegli ordini che occorrerà considerare.

Dalla data definizione risulta subito che $d\delta y=\delta dy$. Invero abbiamo

$$y_1-y=\varepsilon\eta=\delta y,$$

da cui

$$\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy}{dx}=\varepsilon\frac{d\eta}{dx}=\delta\frac{dy}{dx},$$

ma $\varepsilon\frac{d\eta}{dx}=\frac{d\varepsilon\eta}{dx}=\frac{d\delta y}{dx}$, quindi $\frac{d\delta y}{dx}=\delta\frac{dy}{dx}$ da cui $d\delta y=\delta dy$,

giacchè $\delta\frac{dy}{dx}=\frac{\delta dy}{dx}$. In conseguenza abbiamo altresì

$$d^2\delta y=\delta d^2y=d\delta dy=d^2\delta y, \delta d^2y=d^2\delta y, \dots$$

Sia ora

www.libtool.com.cn

$$\varphi(x, y, y' \dots y^{(n)}; x, x', x'', \dots x^{(m)}; \dots)$$

una funzione della variabile indipendente x , e delle funzioni di essa $y, x, \dots$ e delle loro derivate rapporto ad x . Ammettiamo l'esistenza delle derivate di φ rapporto ai suoi argomenti sino a quegli ordini che occorrerà considerare.

Attribuiamo a $y, x, \dots$ le variazioni $\partial y, \partial x, \dots$ cioè cambiamo y, x , in $y + \varepsilon \eta, x + \varepsilon \zeta, \dots$ dove $\eta, \zeta, \dots$ sono funzioni arbitrarie di x , colla condizione che ammettano le derivate che dovranno considerarsi. Allora $y', x', \dots$ si cambieranno in $y' + \varepsilon \eta', x' + \varepsilon \zeta', \dots$ e la φ in

$$\varphi(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', \dots x + \varepsilon \zeta, x' + \varepsilon \zeta', \dots),$$

che sviluppata colla formola del TAYLOR diventa

$$\varphi + \varepsilon \varphi_1 + R \quad \text{od anche} \quad \varphi + \varepsilon \varphi_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \varphi_2 + R_1, \dots$$

dove

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi_1 &= \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \eta' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}} \eta^{(n)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \zeta' + \dots \right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \partial y + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \partial y' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}} \partial y^{(n)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \partial x + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \partial x' + \dots, \\ \varepsilon^2 \varphi_2 &= \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} \eta'^2 + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \zeta^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} \zeta'^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} \eta \eta' + \dots \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \partial y^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} \partial y'^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} \partial y \partial y' \dots \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

nelle quali formole con $\partial y^2, \partial y'^2, \dots$ intendiamo $(\partial y)^2, (\partial y')^2, \dots$

Le quantità $\varepsilon \varphi_1, \varepsilon^2 \varphi_2, \dots$ si chiamano le *variazioni prima, seconda* etc. della φ e si indicano coi simboli $\partial \varphi, \partial^2 \varphi, \dots$

In particolare se $\varphi=y$ o $\varphi=z$, o $\varphi=y', \dots$, otteniamo, conformemente alla definizione posta in principio, $\partial y = \varepsilon \eta$, $\partial z = \varepsilon \zeta, \dots$ $\partial y' = \varepsilon \eta', \partial z' = \varepsilon \zeta', \dots$ ed inoltre $\partial^2 y = 0$, $\partial^2 y' = 0, \dots$ $\partial^2 z = 0$, $\partial^2 z' = 0, \dots$

204. La variazione (prima) ∂I di un integrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(m)}, \dots) dx,$$

cioè il termine che contiene la prima potenza di ε nello sviluppo di

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', \dots, z + \varepsilon \zeta, z' + \varepsilon \zeta', \dots) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (\varphi + \varepsilon \varphi_1 + R) dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi dx + \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 dx + \int_{x_0}^{x_1} R dx, \end{aligned}$$

è

$$\partial I = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 dx = \int_{x_0}^{x_1} \partial \varphi dx.$$

Qui si è supposto che i limiti x_0, x_1 dell'integrale siano rimasti inalterati. Supponiamo invece che, mentre $y, z, \dots$ subiscono le variazioni $\partial y, \partial z, \dots$, x_0, x_1 si aumentino di quantità che indicheremo, per uniformità di notazione, con $\partial x_0 = \varepsilon \xi_0$, $\partial x_1 = \varepsilon \xi_1$. Allora ∂I sarà il coefficiente di ε nello sviluppo di $\int_{x_0 + \varepsilon \xi_0}^{x_1 + \varepsilon \xi_1} \Phi(x, \varepsilon) dx$, avendo posto

$$\Phi(x, \varepsilon) = \varphi(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', \dots).$$

Poniamo $x = t + \varepsilon \tau = t + \partial t$, dove τ è una funzione qualunque di t , ma tale che per $t = x_0$ diventi uguale a ξ_0 e per $t = x_1$ diventi ξ_1 , come ad esempio

$$\tau = \frac{t - x_1}{x_0 - x_1} \xi_0 + \frac{t - x_0}{x_1 - x_0} \xi_1 + (t - x_0)(t - x_1) \tau_1,$$

essendo τ_1 funzione qualunque di t . Allora quando x assume

il valore $x_0 + \varepsilon \xi_0$, t assume il valore x_0 , e per $x = x_1 + \varepsilon \xi_1$ si ha $t = x_1$, ed il precedente integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \Phi(t + \varepsilon \tau, \varepsilon) (dt + \varepsilon d\tau) &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\Phi(t, \varepsilon) + \varepsilon \tau \frac{\partial \Phi(t, \varepsilon)}{\partial t} + R \right] (dt + \varepsilon d\tau) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \Phi(t, \varepsilon) dt + \int_{x_0}^{x_1} \left(\Phi(t, \varepsilon) \varepsilon d\tau + \varepsilon \tau \frac{\partial \Phi(t, \varepsilon)}{\partial t} \right) + \text{termini} \end{aligned}$$

che contengono potenze di ε superiori alla prima. L'ultimo integrale è

$$\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} d[\tau \Phi(t, \varepsilon)] = \varepsilon [\xi_1 \Phi(x_1, \varepsilon) - \xi_0 \Phi(x_0, \varepsilon)]$$

e perciò il suo termine in ε è

$$\varepsilon \xi_1 \varphi_1 - \varepsilon \xi_0 \varphi_0 = \varphi_1 \partial x_1 - \varphi_0 \partial x_0,$$

indicando φ_1, φ_0 ciò che diventa φ per $x = x_1$ e per $x = x_0$.

Il termine in ε nello sviluppo di $\int_{x_0}^{x_1} \Phi(t, \varepsilon) dt = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, \varepsilon) dx$ è $\int_{x_0}^{x_1} \partial \varphi dx$, quindi in ultimo

$$\partial I = \varphi_1 \partial x_1 - \varphi_0 \partial x_0 + \int_{x_0}^{x_1} \partial \varphi dx.$$

Posto

$$Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(r)}}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad Z_r = \frac{\partial \varphi}{\partial z^{(r)}}, \dots$$

è

$$\partial \varphi = Y \partial y + Y_1 \partial y' + Y_2 \partial y'' + \dots + Y_n \partial y^{(n)} + Z \partial z + Z_1 \partial z' + \dots$$

e quindi

$$\partial I = \varphi_1 \partial x_1 - \varphi_0 \partial x_0 + \int_{x_0}^{x_1} Y \partial y dx + \int_{x_0}^{x_1} Y_1 \partial y' dx + \dots + \int_{x_0}^{x_1} Y_n \partial y^{(n)} dx + \int_{x_0}^{x_1} Z \partial z + \dots$$

Osservando che $\partial y^{(h)} = \partial \frac{d^h y}{dx^h} = \frac{d^h \partial y}{dx^h}$, $\partial z^{(h)} = \partial \frac{d^h z}{dx^h} = \frac{d^h \partial z}{dx^h}$, ..
 ed applicando la formola di integrazione per parti al n. 21
 otteniamo

$$\int Y_h \partial y^{(h)} dx = Y_h \partial y^{(h-1)} - \frac{dY_h}{dx} \partial y^{(h-2)} + \frac{d^2 Y_h}{dx^2} \partial y^{(h-3)} - \dots$$

$$+ (-1)^{h-1} \frac{d^{h-1} Y_h}{dx^{h-1}} \partial y + (-1)^h \int \frac{d^h Y_h}{dx^h} \partial y dx,$$

$$\int Z_h \partial z^{(h)} dx = Z_h \partial z^{(h-1)} - \frac{dZ_h}{dx} \partial z^{(h-2)} + \frac{d^2 Z_h}{dx^2} \partial z^{(h-3)} - \dots$$

$$+ (-1)^{h-1} \frac{d^{h-1} Z_h}{dx^{h-1}} \partial z + (-1)^h \int \frac{d^h Z_h}{dx^h} \partial z dx,$$

.....

cosicchè, posto

$$K = Y - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2 Y_2}{dx^2} - \dots + (-1)^n \frac{d^n Y_n}{dx^n},$$

$$K_0 = Y_1 - \frac{dY_2}{dx} + \frac{d^2 Y_3}{dx^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} Y_n}{dx^{n-1}},$$

$$K_1 = Y_2 - \frac{dY_3}{dx} + \frac{d^2 Y_4}{dx^2} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} Y_n}{dx^{n-2}},$$

.....

$$K_{n-2} = Y_{n-1} - \frac{dY_n}{dx},$$

$$K_{n-1} = Y_n,$$

$$H = Z - \frac{dZ_1}{dx} + \frac{d^2 Z_2}{dx^2} - \dots + (-1)^m \frac{d^m Z_m}{dx^m},$$

$$H_0 = Z_1 - \frac{dZ_2}{dx} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1} Z_m}{dx^{m-1}},$$

$$H_1 = Z_2 - \frac{dZ_2}{dx} + \dots, \\ \dots \dots \dots$$

$$\Gamma = \varphi \delta x + K_0 \delta y + K_1 \delta y' + K_2 \delta y'' + \dots + K_{n-1} \delta y^{(n-1)} + H_0 \delta z + H_1 \delta z' + \dots + H_{m-1} \delta z^{(m-1)} + \dots$$

abbiamo

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K \delta y + H \delta z + \dots) dx,$$

avendo indicato con Γ_1, Γ_0 ciò che diventa Γ quando si faccia $x = x_1$ e $x = x_0$, ed in conseguenza $y = y_1, y = y_0, y_1' = y_1, y_1' = y_0, \dots \delta y = \delta y_0, \delta y = \delta y_1$ etc. dove $y_1, y_1' \dots$ indicano i valori di $y, y', \dots$ per $x = x_1$, etc.

Problemi di massimo e di minimo relativi al calcolo delle variazioni.

205. Il problema che si propone di risolvere il calcolo delle variazioni è il seguente:

Determinare la forma delle funzioni $y, z, \dots$, tutte arbitrarie o sottoposte a certe leggi, che compariscono in una funzione di forma fissa ψ , che quasi sempre è un integrale definito I con limiti fissi o variabili, in modo che il valore corrisponde ψ_1 di ψ sia massimo o minimo; tale cioè che, indicate con $y_1, z_1, \dots y_1', z_1', \dots$ le forme così determinate di $y, z, \dots$, ove si cambi, compatibilmente colle condizioni del problema, $y_1, z_1, \dots$ in $y_1 + \varepsilon \eta, z_1 + \varepsilon \zeta, \dots$, esista un numero positivo α tale che, per $|\varepsilon| < \alpha$ e qualunque siano le funzioni finite e che ammettono derivate $\eta, \zeta, \dots$, risulti sempre $\psi_1 - \psi \leq 0$, oppure $\psi_1 - \psi \geq 0$, senza che si abbia sempre il caso dell'uguaglianza.

Osservando che la ψ , che comparisce nelle precedenti disuguaglianze, è $\psi_1 + \delta \psi_1 + \frac{1}{2} \delta^2 \psi_1 + \dots$, dovrà l'espressione

$\delta\psi_1 + \frac{1}{2} \delta^2\psi_1 + \dots$ mantenersi sempre dello stesso segno. Ora, poichè si può prendere ε così piccolo, che il segno di quella espressione dipenda da $\delta\psi_1$ e poichè cambiando ε in $-\varepsilon$, $\delta\psi_1$ si cambia in $-\delta\psi_1$, si riconosce che la variazione $\delta\psi_1$ dovrà annullarsi qualunque sia il sistema di variazioni $\varepsilon\eta, \varepsilon\zeta, \dots$ che si attribuisce, compatibilmente colle condizioni del problema, a $y, z, \dots$ e pei valori di $|\varepsilon|$ minori di un certo numero positivo.

L'annullarsi della variazione prima $\delta\psi_1$ è condizione necessaria al massimo o al minimo, ma non condizione sufficiente. Per riconoscere se effettivamente a quelle forme delle funzioni $y, z, \dots$ corrisponda per ψ un massimo o un minimo, o nè massimo nè minimo, occorrerebbe esaminare le variazioni successive di ψ , il che noi non faremo, avendo qui lo scopo di sviluppare i soli elementi del calcolo delle variazioni, e perchè nei problemi che ordinariamente vengono trattati, la natura stessa del problema indica spesso se si abbia propriamente un massimo o un minimo.

206. Venendo al caso più interessante in cui la ψ non sia altro che l'integrale definito

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \dots y^{(n)}, z, z', \dots z^{(n)}, \dots) dx,$$

le funzioni $y, z, \dots$ che lo rendono massimo o minimo dovranno essere tali che risulti

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K\delta y + H\delta z + \dots) dx = 0$$

qualunque siano le variazioni $\delta x_0, \delta x_1, \delta y, \delta z, \dots$ che si attribuiscono a $x_0, x_1, y, z, \dots$, compatibili colle speciali condizioni del problema.

Supponendo che queste variazioni possano essere completamente arbitrarie, potremo assumere

$$\delta x_0 = \delta x_1 = 0, \quad \delta y = \varepsilon \delta^1 K, \quad \delta z = \varepsilon \delta^1 H, \dots$$

dove ε è una funzione qualunque di x , sottoposta alla condi-

zione di annullarsi unitamente alle sue derivate successive che occorre considerare per $x = x_0$ e per $x = x_1$. Allora si annullano per $x = x_0$ e per $x = x_1$ le variazioni

$$\delta y, \delta z, \delta y' = \frac{d\delta y}{dx} \delta y = 2\varepsilon \frac{d\delta}{dx} K + \varepsilon^2 \frac{dK}{dx}, \delta z' = 2\varepsilon \frac{d\delta}{dx} H + \varepsilon^2 \frac{dH}{dx}, \dots,$$

cosicchè, pel sistema di variazioni ora scelto, è $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_0 = 0$ e δI si riduce a

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (\delta^2(K^2 + H^2 + \dots)) dx,$$

che deve risultare zero, e perciò occorre che sia $K = 0$, $H = 0, \dots$

In conseguenza la equazione $\delta I = 0$ si scinde nella equazione

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0,$$

che chiamasi equazione ai limiti, e nelle equazioni

$$K = 0, \quad H = 0, \dots$$

le quali sono equazioni differenziali simultanee in $y, z, \dots$ che servono a determinare queste funzioni.

207. Sviluppiamo il caso in cui la φ contenga una sola funzione y e le sue derivate, cosicchè sia

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx.$$

Allora abbiamo una sola equazione differenziale

$$K = Y - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2 Y_2}{dx^2} - \dots + (-1)^n \frac{d^n Y_n}{dx^n} = 0,$$

di ordine $2n$, che serve a determinare y ; e la quantità Γ si riduce a

$$\Gamma = \varphi \delta x + K_0 \delta y + K_1 \delta y' + \dots + K_{n-1} \delta y^{(n-1)}.$$

Sia

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) = 0,$$

o, più semplicemente,

$$y = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{2n})$$

l'integrale della equazione $K=0$, dove le c indicano le costanti arbitrarie.

Potranno presentarsi i casi seguenti:

1. Sono fissi i limiti x_0 e x_1 dell'integrale e sono fissi ed assegnati i valori $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$; $y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$ di $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ per $x=x_0$ e per $x=x_1$. Allora, essendo $\delta x_0=0$, $\delta x_1=0$, $\delta y_0=0$, $\delta y_1=0, \dots$ è, senz'altro, $\Gamma_1 - \Gamma_0=0$. Ma dovremo avere

$$(1) \begin{cases} y_0 = \psi(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), & y_1 = \psi(x_1, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \\ y'_0 = \psi'(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), & y'_1 = \psi'(x_1, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \\ y''_0 = \psi''(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), & y''_1 = \psi''(x_1, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \\ \dots & \dots \\ y_0^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), & y_1^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(x_1, c_1, \dots, c_{2n}), \end{cases}$$

dove gli apici indicano derivazione rispetto alla x ; queste $2n$ equazioni permetteranno di determinare le $2n$ costanti, cosichè la funzione y che risolve il problema è unica e determinata.

Se per $x=x_0, x=x_1$ fossero assegnati ancora i valori di $y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots$, il problema non sarebbe, generalmente, risolvibile, come subito si riconosce.

2. Non sono assegnati i limiti x_0, x_1 dell'integrale e nessuna delle quantità $y, y', \dots$ ai limiti stessi, cosichè il problema è: determinare i limiti dell'integrale e i valori di y e delle derivate ai limiti stessi e la funzione y in modo che il valore dell'integrale risulti massimo oppure minimo. Allora, non dovendo passare alcuna relazione tra $\delta x_0, \delta y_0, \delta y'_0, \dots, \delta x_1, \delta y_1, \dots$, la equazione ai limiti $\Gamma_1 - \Gamma_0=0$ si scinde nelle $2n+2$ equazioni

$$\varphi_0=0, K_0^0=0, K_1^0=0, \dots, K_{n-1}^0=0; \varphi_1=0, K_0^1=0, K_1^1=0, \dots, K_{n-1}^1=0,$$

avendo indicato con K_r^0, K_r^1 , ciò che diventa K_r per $x=x_0$, e per $x=x_1$. Sostituendo nelle precedenti equazioni in luogo di $y_0, y_0, \dots, y_1, y_1, \dots$ i loro valori espressi per $x_0, x_1, c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ che si ricavano da $y = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{2n})$ abbiamo $2n+2$ equazioni tra le $2n+2$ quantità $c_1, c_2, \dots, c_{2n}, x_0, x_1$, che servono a determinarle.

3. Siano assegnati alcuni dei $2n+2$ valori ai limiti di $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Se è assegnato il valore y_0 di y , mentre che non sia fisso il valore x_0 , indicando con Δy_0 l'aumento che subisce y_0 , dovrà essere $\Delta y_0 = 0$; ora questo aumento proviene dalla variazione che subisce la forma di y cioè da ∂y_0 , e dal fatto che x_0 viene aumentato di ∂x_0 , cosichè, tenendo conto delle sole prime potenze di ε , è $\Delta y_0 = \partial y_0 + y'_0 \partial x_0$, e quindi dovremo avere $\partial y_0 = -y'_0 \partial x_0$. Se fosse assegnato x_0 , allora sarebbe $\Delta y_0 = \partial y_0 = 0$. Se fosse assegnato il valore y'_0 di y' essendo $\Delta y'_0 = \partial y'_0 + y''_0 \partial x_0$ sarebbe $\partial y'_0 = -y''_0 \partial x_0$; e così via dicendo se $y^{(r)}$ è assegnato in un limite dovremo avere $\partial y^{(r)} = -y^{(r+1)} \partial x$ in quel limite.

Sostituendo questi valori di $\partial y^{(r)}$ nella equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, si vedrà facilmente che, se i delle quantità $x, y, \dots, y^{(n-1)}$ ai limiti sono assegnate, la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ si riduce ad una relazione tra le $2n+2-i$ variazioni ai limiti delle $2n+2-i$ quantità non assegnate, ed essa si scinde quindi in $2n+2-i$ equazioni, che unitamente alle $2n$ equazioni (1) danno $4n+2-i$ equazioni per determinare le $2n+2-i$ quantità ai limiti non assegnate e le $2n$ costanti $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$.

4. Tra i valori di $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ai limiti debbano passare r relazioni $M_1 = 0, M_2 = 0, \dots, M_r = 0$.

Allora dovremo avere

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_0} \partial x_0 + \frac{\partial M_i}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial M_i}{\partial y'_0} \Delta y'_0 + \dots + \frac{\partial M_i}{\partial y_0^{(n-1)}} \Delta y_0^{(n-1)} + \frac{\partial M_i}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial M_i}{\partial y_1} \Delta y_1 + \dots = 0$$

($i=1, 2, \dots, r$), dove $\Delta y_0^{(s)} = \partial y_0^{(s)} + y_0^{(s+1)} \partial x_0$, $\Delta y_1^{(s)} = \partial y_1^{(s)} + y_1^{(s+1)} \partial x_1$. Queste r relazioni tra $\partial x_0, \partial y_0, \partial y'_0, \dots, \partial x_1, \partial y_1, \dots$ ne determinano r mediante le rimanenti $2n+2-r$, che rimangono completamente arbitrarie, e la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ si scinde allora

in $2n+2-r$ equazioni, che unitamente alle r equazioni $M_i=0$ ed alle (1) serviranno a determinare le $4n+2$ quantità $c_1, c_2, \dots, c_{2n}, x_0, x_1, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$.

Relativamente alla equazione differenziale $K=0$ faremo le osservazioni seguenti:

1.° Se φ è della forma $\psi(x, y, y' \dots y^{(n)}) + y\psi_1(x)$ (se $\psi_1(x)=0$ la φ non contiene y), allora è $Y=\psi_1(x)$, e si ha un integrale primo

$$Y_1 - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2Y_2}{dx^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}Y_n}{dx^{n-1}} = \int \psi_1(x) dx + c_1$$

della $K=0$, e poi, non comparendo y esplicitamente in esso, il suo ordine potrà ancora abbassarsi di una unità; cosicchè l'integrazione della $K=0$ si riduce a quella d'una equazione differenziale d'ordine $2n-2$.

2.° Supponiamo che la φ non contenga x , cioè si abbia $\varphi(y, y', y'' \dots y^{(n)})$. Allora abbiamo

$$d\varphi = Ydy + Y_1dy' + Y_2dy'' + \dots + Y_ndy^{(n)},$$

$$K=0=Y - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2Y_2}{dx^2} - \dots + (-1)^n \frac{d^nY_n}{dx^n},$$

e da queste, come si può facilmente vedere,

$$\begin{aligned} d\varphi = & d(y'Y_1) + d\left(y''Y_2 - y' \frac{dY_2}{dx}\right) + d\left(y'''Y_3 - y'' \frac{dY_3}{dx} + y' \frac{d^2Y_3}{dx^2}\right) \\ & + d\left(y^{(iv)}Y_4 - y''' \frac{dY_4}{dx^2} + y'' \frac{d^2Y_4}{dx^2} - y' \frac{d^3Y_4}{dx^3}\right) + \dots, \end{aligned}$$

da cui si ricava un integrale primo

$$\varphi + c_1 = y'Y_1 + y''Y_2 - y' \frac{dY_2}{dx} + \dots$$

che è una equazione differenziale di ordine $2n-1$ non contenente esplicitamente x , e della quale perciò si abbassa l'ordine ancora di una unità.

3.° Se nella φ non compariscono x , nè y , la integrazione della $K=0$ si riduce a quella d'una equazione di ordine $2n-3$, giacchè allora è

$$d\varphi = Y_1 dy' + Y_2 dy'' + \dots + Y_n dy^{(n)},$$

e la $K=0$ ci dà

$$c_1 = Y_1 - \frac{dY_2}{dx} + \frac{d^2 Y_3}{dx^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} Y_n}{dx^{n-1}};$$

moltiplicando quest' ultima equazione per dy' e sottraendo dalla penultima, otteniamo

$$d\varphi + c_1 dy' = d(y'' Y_2) + d\left(y''' Y_3 - y'' \frac{dY_2}{dx}\right) + d\left(y^{(4)} Y_4 - y''' \frac{dY_3}{dx} + y'' \frac{d^2 Y_4}{dx^2}\right) + \dots$$

che, integrata, dà una equazione differenziale d'ordine $2n-2$, che si abbassa all'ordine $2n-3$, perchè non contiene esplicitamente x .

208. Considerazioni analoghe alle precedenti potrebbero farsi quando la φ contenesse più funzioni $y, z, \dots$. Senza svilupparle in generale, saranno trattate in alcuni degli esempi che seguono e che si riferiscono a tutta la teoria ora svolta.

ESEMPI

1) Si voglia determinare la funzione y di x , che per $x=x_0$ prende il valore y_0 , per $x=x_1$ il valore y_1 e che rende un massimo o un minimo l'integrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{x_0}^{x_1} (12xy + y'^2 + yy') dx.$$

Qui è $Y = 12x + y'$, $Y_1 = 2y' + y$, l'equazione $K=0$ è $12x - 2y'' = 0$, il cui integrale è $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Per determinare le costanti c_1, c_2 abbiamo le equazioni

$$y_0 = x_0^3 + c_1 x_0 + c_2, \quad y_1 = x_1^3 + c_1 x_1 + c_2,$$

che danno

$$(1) \quad \begin{cases} c_1 = \frac{y_0 - y_1 + x_1^2 - x_0^2}{x_0 - x_1}, \\ c_2 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + x_0 x_1 (x_0^2 - x_1^2)}{x_0 - x_1}, \end{cases}$$

cosicchè la funzione cercata è la

$$y = x^2 + \frac{y_0 - y_1 + x_1^2 - x_0^2}{x_0 - x_1} x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + x_0 x_1 (x_0^2 - x_1^2)}{x_0 - x_1},$$

Qui si riconosce facilmente se si abbia un massimo oppure un minimo. Poniamo $y + \delta y$, $y' + \delta y'$ in luogo di y , y' nel nostro integrale; esso diviene allora

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} (12xy + y'^2 + yy') dx + \int_{x_0}^{x_1} (12x\delta y + 2y'\delta y' + y\delta y' + y'\delta y) dx \\ & + \int_{x_0}^{x_1} [(\delta y')^2 + \delta y\delta y'] dx. \end{aligned}$$

Il secondo integrale è zero, come anche si riconosce effettuando il calcolo tenendo presente che le variazioni ai limiti sono nulle. Il terzo integrale, che è la variazione seconda, è

$$\int_{x_0}^{x_1} (\delta y')^2 dx + \left[\frac{(\delta y)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} (\delta y')^2 dx \text{ che è sempre positivo se } x_0 < x_1.$$

La nostra funzione rende quindi minimo l'integrale I.

Il problema proposto sia ora: Determinare la funzione y e i limiti x_0, x_1 dell'integrale in modo che l'integrale I assuma un valore massimo o minimo. Si trova la stessa funzione y , ma per determinare c_1, c_2, x_0, x_1 , osservando che ora è $K_0 = 2y' + y$, si hanno le quattro equazioni che si ottengono dalle $\varphi = 12xy + y'^2 + yy' = 0$, $K_0 = 2y' + y = 0$ per $x = x_0$ e per $x = x_1$, ossia dalle equivalenti

$$(2) \quad 2y' + y = 0, \quad (24x + y')y' = 0.$$

Dalla prima delle (2) ricaviamo

$$(3) \quad 6x_0^2 + 2c_1 + x_0^2 + c_1x_0 + c_2 = 0, \quad 6x_1^2 + 2c_1 + x_1^2 + c_1x_1 + c_2 = 0,$$

dalle quali

$$(4) \quad \begin{cases} c_1 = -(x_0 + x_1)^2 - 6(x_0 + x_1) + x_0x_1, \\ c_2 = 2(x_0 + x_1)^2 + 12(x_0 + x_1) + x_0x_1(x_0 + x_1) + 4x_0x_1. \end{cases}$$

Dalla seconda delle (2) ricaviamo $24x_0 + y'_0 = 0$, $24x_1 + y'_1 = 0$ ossia

$$(5) \quad 24x_0 + 3x_0^2 + c_1 = 0, \quad 24x_1 + 3x_1^2 + c_1 = 0,$$

dalle quali $(x_0 - x_1)[24 + 3(x_0 + x_1)] = 0$. Non tenendo conto della soluzione $x_0 - x_1 = 0$, perchè i limiti dell'integrale riuscirebbero uguali, rimane $x_0 + x_1 = -8$, cosicchè $c_1 = -16 - 8x_0 - x_0^2$, che sostituito nella prima delle (3) la riduce a $x_0^2 + 8x_0 - 8 = 0$, da cui $x_0 = -4 \pm 2\sqrt{6}$, e quindi $x_1 = -4 \mp 2\sqrt{6}$. I valori di c_1, c_2 diventano allora $c_1 = -24$, $c_2 = 64$.

Dalla seconda delle (2) ricaviamo ancora $y'_0 = 0$, $y'_1 = 0$, cioè $3x_0^2 + c_1 = 0$, $3x_1^2 + c_1 = 0$ e quindi $(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$, $x_0 + x_1 = 0$, $c_1 = -x_0^2$, e l'equazione $3x_0^2 + c_1 = 0$ dà $x_0 = 0$, e quindi ancora $x_1 = 0$ e i limiti dell'integrale sono uguali.

Dalla seconda delle (2) ricaviamo ancora $y'_0 = 0$, $24x_1 + y'_1 = 0$ (oppure $y'_1 = 0$, $24x_0 + y'_0 = 0$), cioè $3x_0^2 + c_1 = 0$, $24x_1 + 3x_1^2 + c_1 = 0$, ossia

$$(6) \quad 2x_0^2 - x_1^2 - x_0x_1 - 6x_0 - 6x_1 = 0, \quad 2x_1^2 - x_0^2 - x_0x_1 - 6x_0 + 18x_1 = 0,$$

che, sommate, danno

$$(x_1 - x_0)(x_1 - x_0 + 12) = 0 \quad \text{e quindi} \quad x_1 = x_0 - 12;$$

sostituendo questo valore di x_1 nella prima delle (6), otteniamo $24x_0 - 6.12 = 0$, da cui $x_0 = 3$, e quindi $x_1 = -9$.

La combinazione $y'_1 = 0$, $24x_0 + y'_0 = 0$ darebbe $x_0 = -9$, $x_1 = 3$. I valori di c_1, c_2 diventano allora $c_1 = -27$, $c_2 = 54$.

Riassumendo, i valori di x_0, x_1 , e la funzione y che pos-

sono risolvere il problema sono

$$x_0 = -4 \pm 2\sqrt{6}, \quad x_1 = -4 \mp 2\sqrt{6}, \quad y = x_3 - 24x + 64;$$

$$x_0 = 3, \quad x_1 = -9 \quad \text{oppure} \quad x_0 = -9, \quad x_1 = 3 \quad \text{e} \quad y = x^3 - 27x + 54.$$

Per completare la ricerca occorrerebbe esaminare la variazione seconda dell'integrale I.

Il problema proposto sia ancora: Determinare la funzione y che rende massimo o minimo l'integrale I, essendo fissi i limiti x_0, x_1 dell'integrale.

Si avrebbe ancora la funzione $y = x^3 + c_1x + c_2$, ma, poichè $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$, la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ darebbe le due equazioni $2y'_0 + y_0 = 0$, $2y'_1 + y_1 = 0$, cioè le (3) dalle quali si ricavano i valori (4) di c_1, c_2 , e la funzione y precedente dove c_1, c_2 , hanno i valori (4) sarebbe la funzione cercata.

In modo analogo si procede negli altri problemi che si presentano in questo esempio. Così se sono dati y_0, y_1 ma non i limiti dell'integrale, le costanti c_1, c_2 vengono date dalle (1); la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ diviene allora $-(\varphi_0 - y'_0 K_0^0) \delta x_0 + (\varphi_1 - y'_1 K_1^0) \delta x_1 = 0$ che si scinde nelle due $\varphi_0 - y'_0 K_0^0 = 0$, $\varphi_1 - y'_1 K_1^0 = 0$, cioè nelle $12x_0y_0 - (3x_0^2 + c_1)^2 = 0$, $12x_1y_1 - (3x_1^2 + c_1)^2 = 0$, e queste equazioni, sostituito per c_1 il valore dato dalle (1), determinano x_0, x_1 .

Se fossero dati x_0, y_0 , ma non x_1, y_1 , la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ darebbe $\varphi_1 = 0$, $K_1^0 = 0$, che unitamente alle $y_0 = x_0^3 + c_1x_0 + c_2$, $y_1 = x_1^3 + c_1x_1 + c_2$, determinerebbero x_1, y_1, c_1, c_2 . Analogamente se fossero dati x_0, y_1 , oppure x_1, y_0 .

2) *Linea più breve tra due punti di coordinate (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) .* Si tratta di determinare le funzioni y, z di x che

rendono minimo l'integrale $I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$.

Abbiamo $Y = 0$, $Z = 0$, $Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$, $Z_1 = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$ cosicchè le equazioni differenziali $K = 0$, $H = 0$ danno

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_2, \quad \text{dalle quali} \quad y' = C_1,$$

$x' = c_2$ e quindi $y = c_1 x + c_3$, $z = c_2 x + c_4$; la linea più breve è perciò la retta che unisce i due punti.

Nel nostro caso è

$$\begin{aligned}\Gamma &= \varphi dx + K_0 dy + H_0 dz = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} [(1+y'^2+z'^2) dx + y' dy + z' dz] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2+c_2^2}} [(1+c_1^2+c_2^2) dx + c_1 dy + c_2 dz].\end{aligned}$$

Se i punti (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) sono fissi la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ è soddisfatta da se, e le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 vengono determinate esprimendo che la retta passa per quei due punti.

Sia dato il punto (x_0, y_0, z_0) e il punto (x_1, y_1, z_1) debba trovarsi sulla superficie $f(x, y, z) = 0$. Allora per determinare le quantità $c_1, c_2, c_3, c_4, x_1, y_1, z_1$ abbiamo le equazioni

$$(7) \quad \begin{cases} y_0 = c_1 x_0 + c_3, & z_0 = c_2 x_0 + c_4, \\ y_1 = c_1 x_1 + c_3, & z_1 = c_2 x_1 + c_4. \end{cases}$$

la $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ e le due equazioni che provengono da $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, ossia, poichè $dx_0 = 0$, $dy_0 = 0$, $dz_0 = 0$, da

$$(1 + c_1^2 + c_2^2) dx_1 + c_1 dy_1 + c_2 dz_1 = 0$$

tenendo conto dalla relazione $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, dalla quale si ha

$$(8) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} \right) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 = 0.$$

Senza calcolare effettivamente queste quantità, limitiamoci ad osservare che, eliminando una delle variazioni dx_1, dy_1, dz_1 tra la (7) e la (8), ed uguagliando a zero i coefficienti delle due variazioni rimanenti, otteniamo

$$c_1 = A \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad c_2 = A \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \text{dove } A = \frac{1 + c_1^2 + c_2^2}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_1}},$$

e quindi

www.libtool.com.cn

$$A = \frac{1 + A^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^2 + A^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + A \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^2 + A \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2},$$

da cui $A = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$, così ch  $c_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$, $c_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$, e le equazioni

della retta, che unisce il punto x_0, y_0, z_0 al punto x_1, y_1, z_1 sulla superficie, $y - y_1 = c_1(x - x_1)$, $z - z_1 = c_2(x - x_1)$ diventano

$$\frac{x - x_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}},$$

cio  quelle della normale alla superficie stessa nel punto x_1, y_1, z_1 . La linea pi  breve   quindi la retta che passa per x_0, y_0, z_0 ed   normale alla superficie.

Se il punto (x_1, y_1, z_1) deve essere sulla superficie $f(x, y, z) = 0$ e il punto (x_0, y_0, z_0) sulla superficie $F(x, y, z) = 0$, per determinare le quantit  $c_1, c_2, c_3, c_4, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ si avrebbero le quattro equazioni (7), le due $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e le quattro che si ricavano da $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, tenendo conto delle due ultime equazioni. Si otterrebbe allora, in modo completa-

mente analogo a quello del caso precedente, $c_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_0}}{\frac{\partial F}{\partial x_0}}$

$c_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z_0}}{\frac{\partial F}{\partial x_0}}$, dalle quali si deduce che la linea pi  breve tra

le due superficie   normale alle due superficie stesse.

Se il punto (x_0, y_0, z_0)   dato e il punto (x_1, y_1, z_1) deve

trovarsi sulla curva $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, abbiamo per determinare le quantità $c_1, c_2, c_3, c_4, x_1, y_1, z_1$ le equazioni $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, $F(x_1, y_1, z_1) = 0$, le (7) e quella che si ricava da

$$(1 + c_1^2 + c_2^2) dx_1 + c_1 dy_1 + c_2 dz_1 = 0$$

osservando che

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} \right) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right) dx_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

cioè la equazione

$$\begin{vmatrix} 1 + c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial z_1} \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione mostra che coesistono le tre equazioni

$$dx_1 + c_1 dy_1 + c_2 dz_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

cioè che i valori di dx_1, dy_1, dz_1 , che soddisfanno alle due ultime delle tre precedenti equazioni, soddisfanno anche alla prima, la quale esprime che la retta

$$x - x_1 = \frac{y - y_1}{c_1} = \frac{z - z_1}{c_2}$$

è sul piano normale

$$(x - x_1) dx_1 + (y - y_1) dy_1 + (z - z_1) dz_1 = 0$$

alla nostra curva nel punto (x_1, y_1, z_1) . In conseguenza la linea più breve tra il punto (x_0, y_0, z_0) e la curva data è la normale alla curva passante pel punto.

In modo analogo si proverebbe che la linea più breve tra due linee ed una superficie è la loro normale comune.

3) *Linee geodetiche.* — Si vogliano trovare le funzioni y, z che rendono massimo o minimo l'integrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \dots y^{(n)}, z, z', \dots z^{(m)}) dx,$$

quando tra y, z debba passare una relazione della forma $\psi(x, y, z) = 0$. Allora tra le variazioni $\delta y, \delta z$, che compariscono sotto il segno integrale nella variazione

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K \delta y + H \delta z) dx,$$

deve passare la relazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z = 0, \text{ da cui } \delta z = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \delta y;$$

cosicchè, essendo allora

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(K - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} H \right) \delta y dx,$$

per determinare y, z abbiamo la equazione differenziale

$$K - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} H = 0, \text{ e la } \psi = 0.$$

Se fosse $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, cioè se la relazione $\psi = 0$ non contenesse

$x, \psi(x, y) = 0$, allora, dovendosi avere $\frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$, sarebbe $dy = 0$,
www.libtool.com.cn
 e ∂I si ridurrebbe a $\Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} H dz dx$, e si avrebbero per determinare y, z la equazione differenziale $H = 0$ e la equazione finita $\psi(x, y) = 0$.

Applichiamo queste considerazioni per determinare la linea *geodetica* sopra una superficie $\psi(x, y, z) = 0$, cioè la linea più breve tracciata sulla superficie stessa tra due suoi punti (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) .

L'integrale che dobbiamo rendere minimo è

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx,$$

colla condizione $\psi(x, y, z) = 0$.

Qui abbiamo

$$K = \frac{1}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} [x'(y'z'' - z'y'') - y''], \quad H = \frac{1}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} [y'(z'y'' - y'z'') - z''],$$

cosichè la equazione differenziale delle geodetiche sulla superficie $\psi = 0$ è la

$$(9) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} [x'(y'z'' - z'y'') - y''] + \frac{\partial \psi}{\partial y} [y'(y'z'' - z'y'') + z''] = 0$$

colla condizione $\psi(x, y, z) = 0$.

Indicando con s l'arco di geodetica, è $K = -\frac{d}{dx} \frac{dy}{ds}$,

$H = -\frac{d}{dx} \frac{dz}{ds}$, e l'equazione $K \frac{\partial \psi}{\partial z} - H \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, da cui si è ricavata la (9), diviene

$$(10) \quad \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}.$$

Osserviamo inoltre che

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0,$$

e che l'equazione $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ dà

$$(12) \quad \frac{dx}{ds} d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

cosicchè moltiplicando la (11) per $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, la (12) per $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ e sottraendo l'una dall'altra, col tenere conto della (10), abbiamo

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}; \text{ quindi per le linee geodetiche vale la relazione}$$

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial z}},$$

la quale esprime che la normale principale in ogni punto della geodetica coincide colla normale alla superficie, ossia che il piano osculatore in ogni punto di una geodetica di una superficie è normale alla superficie stessa.

Se la superficie data è una superficie cilindrica $\psi(x, y) = 0$ o più semplicemente $y = \psi(x)$, la equazione differenziale delle geodetiche si riduce ad $H = 0$, cioè a $y'(y'z'' - z'y'') + z'' = 0$, ossia, sostituendo a y', y'' le espressioni $\psi'(x) = \psi', \psi''(x) = \psi''$, alla

$$z''(1 + \psi'^2) = z'\psi'\psi'', \quad \text{ossia} \quad \frac{dz'}{z'} = \frac{\psi'\psi'' dx}{1 + \psi'^2},$$

che, integrata, dà $z' = C_1 \sqrt{1 + \psi'^2}$ e quindi $z = C_1 \int_a^x \sqrt{1 + \psi'^2} dx + C_2$,

dove a, C_1, C_2 indicano costanti. Esprimendo che la geodetica deve passare pel punto (x_0, y_0, z_0) sulla superficie, abbiamo

$$z_0 = C_1 \int_a^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} dx + C_2 \text{ e quindi } z - z_0 = C_1 \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \psi'^2} dx; \text{ e}$$

poichè la curva passa ancora pel punto (x_1, y_1, z_1) è

$$z_1 - z_0 = C_1 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} dx, \text{ per cui le equazioni della richiesta geodetica sono le}$$

$$y = \psi(x), \quad (z - z_0) \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} dx = (z_1 - z_0) \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \psi'^2} dx.$$

Indicando con γ l'angolo che la tangente in un punto (x, y, z) della geodetica fa coll'asse delle z , è

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{(z_1 - z_0) \sqrt{1 + \psi'^2} dx}{\int_{x_0}^x \sqrt{1 + \psi'^2} dx} \cdot \frac{1}{dx \sqrt{1 + \psi'^2 + \frac{(z_1 - z_0)^2 (1 + \psi'^2)}{(\int_{x_0}^x \sqrt{1 + \psi'^2} dx)^2}}} \\ &= \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{(z_1 - z_0)^2 + (\int_{x_0}^x \sqrt{1 + \psi'^2} dx)^2}}, \end{aligned}$$

cioè $\cos \gamma$ è una costante. La geodetica taglia sotto un angolo costante le generatrici del cilindro. Essa è quindi un elica, e quando il cilindro si sviluppa sopra un piano, la geodetica si dispone lungo una linea che taglia sotto angolo costante un sistema di rette parallele, cioè lungo una retta.

4) Il problema di determinare una funzione y che renda massima o minima una funzione $\varphi(x, y, y', y'' \dots)$ è generalmente insolubile, perchè la funzione y dovrebbe soddisfare contem-

poraneamente alle equazioni $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y''} = 0, \dots$, che si ottengono dal doversi annullare, qualunque siano le $\partial y, \partial y', \partial y''$, la variazione $\partial \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \partial y + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \partial y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y''} \partial y'' + \dots$. Però, in casi speciali, o per l'aggiunta di speciali condizioni, il problema potrà essere solubile.

Così ad es.: si voglia la funzione y che rende massima o minima la funzione

$$\varphi = [y + (m - x)y'] [y + (n - x)y'].$$

Il problema non è solubile perchè y dovrebbe soddisfare alle due equazioni differenziali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y + (n + m - 2x)y' = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = (m + n - 2x)y + (m - x)(n - x)y' = 0.$$

Ma se $m = n$, le due equazioni precedenti hanno il fattore comune $y + (m - x)y'$, e si ha perciò, per determinare y , l'unica equazione differenziale $y + (m - x)y' = 0$, il cui integrale $y = C(m - x)$ può rendere massima o minima la funzione $[y + (m - x)y']^2$. Essa assume effettivamente il valore minimo zero.

Si voglia risolvere ancora il problema: Determinare la curva $y = y(x)$ che, in ogni suo punto, ha la sottonormale massima o minima rispetto alle curve che si ottengono da essa facendo variare $y(x)$ in guisa, che il prodotto della ordinata per la intercetta dalla normale sull'asse delle x a partire dall'origine non subisca alcuna variazione.

La intercetta dalla normale, in un punto (x, y) d'una curva, sull'asse delle x è $x + yy'$, cosichè dobbiamo determinare la funzione y di x che rende massima o minima la funzione yy' colla condizione che la espressione $y'x + yy'$ rimanga invariata quando y, y' subiscono le variazioni $\partial y, \partial y'$; perciò le equazioni del problema sono

$$(13) \quad y' \partial y + y \partial y' = 0, \quad (x + yy') \partial y + y(y' \partial y + y \partial y') = 0,$$

ed avremo quindi, per determinare y , la equazione $x + yy' = 0$, da cui $x^2 + y^2 = c^2$ essendo c una costante. La curva richiesta è un circolo col centro nell'origine delle coordinate.

Per distinguere se si ha un massimo o un minimo di yy' , osserviamo che

$$(y + \delta y)(y' + \delta y') = yy' + \delta y \delta y'$$

e che la seconda delle (13) ci dà $\delta y' = -\frac{x + \frac{2}{y}yy'}{y^2} \delta y = \frac{x}{y^2} \delta y$, cosicchè, essendo $\delta y \delta y' = x \left(\frac{\delta y}{y} \right)^2$, avremo un minimo se $x > 0$, un massimo se $x < 0$.

Notiamo che, per la natura del problema, la variazione δy non è arbitraria completamente; essa è determinata da una delle (13).

La prima di esse, posto $\delta y = \varepsilon \eta$, ci dà $\sqrt{c^2 - x^2} \eta' + \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \eta = 0$,

da cui $\eta = \frac{c_1}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, essendo c_1 una costante. Quindi tra tutte

le curve $y = \sqrt{c^2 - x^2} + \frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, ossia tra le curve

$y = \sqrt{c^2 - x^2} + \frac{c_2}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, o tra le curve $y^2(c^2 - x^2) = (c^2 - x^2 + c_2)^2$,

il circolo $x^2 + y^2 = c^2$ è quella che ha la sottonormale massima o minima nei punti corrispondenti alle medesime ascisse.

5) Si vogliano le funzioni y, z di x che rendono massima o minima la funzione

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 2zx - 2x^3y.$$

Deve essere

$$\delta \varphi = 2(y - x^3) \delta y + 2(z - x) \delta z = 0,$$

da cui $y - x^3 = 0$, $z - x = 0$; le funzioni richieste sono $y = x^3$, $z = x$, che rendono minima la φ , perchè

$$\begin{aligned} x^2 + (y + \delta y)^2 + (z + \delta z)^2 - 2(z + \delta z)x - 2x^3(y + \delta y) = \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2zx - 2x^3y + (\delta y)^2 + (\delta z)^2. \end{aligned}$$

**Problemi di massimi e minimi
relativi nel calcolo delle variazioni.**

209. Sotto questa denominazione si sogliono designare i problemi della natura seguente:

Tra le funzioni $y, z, \dots$ per le quali l'integrale

$$I_1 = \int_{x_0}^x \varphi_1(x, y, y', \dots, z, z', \dots) dx$$

mantiene un valore costante A , determinare quelle che rendono massimo o minimo l'integrale

$$I = \int_{x_0}^x \varphi(x, y, y', \dots, z, z', z'', \dots) dx.$$

Per risolverlo, osserviamo che le funzioni $y, z, \dots$ cercate dovranno essere tali che risulti

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^x (K \delta y + H \delta z + \dots) dx = 0,$$

e inoltre, poichè $I_1 = A$, anche tali che sia

$$\delta I_1 = \Theta_1 - \Theta_0 + \int_{x_0}^x (K_1 \delta y + H_1 \delta z + \dots) dx = 0,$$

dove $\Theta, K_1, H_1 \dots$ sono espressioni formate colla φ_1 come le $\Gamma, K, H, \dots$ lo sono colla φ .

Qui non possiamo ragionare più come al n. 206, perchè le variazioni $\delta y, \delta z, \dots$ non sono completamente arbitrarie, ma legate da una certa relazione, per trovare la quale poniamo

$$(1) \quad \int_{x_0}^x (K_1 \delta y + H_1 \delta z + \dots) dx = \psi(x)$$

dove $\psi(x)$ è una qualunque funzione continua di x , sottoposta alla sola condizione di annullarsi per $x = x_0$ e di diventare

uguale a $\Theta_0 - \Theta_1$ per $x = x_1$, conformemente a quanto è richiesto dalla equazione $\delta I_1 = 0$. La $\psi(x)$ è perciò una funzione completamente arbitraria nell'intervallo (x_0, x_1) , esclusi gli estremi, dove deve prendere i valori precedenti.

Dalla (1) ricaviamo, colla derivazione rispetto ad x ,

$$K_1 \delta y + H_1 \delta z + \dots = \psi'(x)$$

e questa è la relazione che deve passare tra le variazioni $\delta y, \delta z, \dots$. In virtù di questa relazione la equazione $\delta I = 0$ diviene

$$(2) \quad \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{K}{K_1} \psi'(x) + \left(H - \frac{K}{K_1} H_1 \right) \delta z + \dots \right] dx = 0.$$

Ma

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K_1} \psi'(x) dx &= \left[\frac{K}{K_1} \psi(x) \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) dx \\ &= \left(\frac{K}{K_1} \right)_{x_1} (\Theta_1 - \Theta_0) - \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) dx, \end{aligned}$$

per cui la (2) diventa

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 - \left(\frac{K}{K_1} \right)_{x_1} (\Theta_1 - \Theta_0) + \int_{x_0}^{x_1} \left[- \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) \psi(x) + \left(H - \frac{K}{K_1} H_1 \right) \delta z + \dots \right] dx = 0$$

la quale, poichè ora $\psi(x), \delta z, \dots$ sono completamente arbitrarie tra x_0 e x_1 , si sciinde nelle

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 - \left(\frac{K}{K_1} \right)_{x_1} (\Theta_1 - \Theta_0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) = 0, \quad H - \frac{K}{K_1} H_1 = 0, \dots$$

la seconda delle quali dà $\frac{K}{K_1} = -c$, c essendo una costante,

e le altre diventano quindi

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 + c(\Theta_1 - \Theta_0) = 0, \quad H + cH_1 = 0, \dots,$$

le quali, unitamente alla $K + cK_1 = 0$, sono, come subito si riconosce, le equazioni pel massimo o minimo dell'integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi + c\varphi_1) dx.$$

Il problema di massimo o minimo relativo che volevamo risolvere è ridotto perciò al problema di massimo o minimo assoluto del precedente integrale. Nella soluzione che si otterrà comparirà una costante di più, c ; ma questa si determinerà in modo che l'integrale I , acquisti il valore dato A .

ESEMPI

1) *Problema degli isoperimetri.* Tra tutte le curve dello stesso perimetro l , aventi un estremo nell'origine delle coordinate e l'altro estremo sull'asse delle x , determinare quella che coll'asse delle x racchiude un'area massima.

Il problema di massimi e minimi relativi che dobbiamo risolvere è il seguente: Determinare la quantità $a > 0$, e quella funzione y di x , che per $x=0$ è zero ed è pure zero per $x=a$, in modo che l'integrale $\int_0^a y dx$ riesca massimo, dovendo allo stesso tempo essere $\int_0^a \sqrt{1+y'^2} dx = l$. Ed il problema corrispondente di massimo assoluto è: Determinare a e y , dovendo essere $y=0$ per $x=0$ e per $x=a$, in modo che l'integrale

$$\int_0^a (y - c\sqrt{1+y'^2}) dx$$

riesca massimo.

Qui abbiamo $Y=1$, $Y_1 = \frac{-cy'}{\sqrt{1+y'^2}}$, quindi l'equazione $K=0$

*

è $1 + \frac{d}{dx} \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$, da cui $x - c_1 = \frac{-cy'}{\sqrt{1+y'^2}}$ dalla quale
 $y' = \frac{-(x-c_1)}{\sqrt{c^2 - (x-c_1)^2}}$, che, integrata, dà

$$y - c_2 = \sqrt{c^2 - (x - c_1)^2},$$

che rappresenta un circolo di raggio c , col centro nel punto (c_1, c_2) .

Per determinare le costanti osserviamo che per $x=0$ e per $x=a$ dobbiamo avere $y=0$, cosicchè

$$(3) \quad -c_2 = \sqrt{c^2 - c_1^2}, \quad -c_2 = \sqrt{c^2 - (a - c_1)^2},$$

dalle quali si trae $c_1 = \frac{a}{2}$. La equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, poichè per $x=0$ è $dx=0$, $dy=0$, e per $x=a$ è pure $dy=0$, si riduce a ciò che diventa per $x=a$ l'equazione

$$y - c\sqrt{1+y'^2} - \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0, \text{ cioè a } \frac{c}{\sqrt{1+y_a'^2}} = 0, \text{ e poichè } c$$

non può prendersi uguale a zero, dovrà essere y'_a infinito; ma

$$y'_a = \frac{-a}{2\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}}, \text{ cosicchè dovrà essere } a=2c, \text{ quindi } c_1=c$$

e la prima delle (3) dà $c_2=0$; il nostro circolo è perciò

$$y = \sqrt{2cx - x^2},$$

e l'area che risulta massima è il semicircolo al di sopra dell'asse delle x .

Rimane da determinare c , che si determina mediante l'integrale $\int_0^{2c} \sqrt{1+y'^2} dx = l$ che dà, come si può vedere senza ricorrere al calcolo dell'integrale stesso, $c = \frac{l}{\pi}$.

Senza provare che si ha effettivamente sempre un massimo ci limiteremo a provarlo supponendo di lasciare invariato il

limite $2c$ dell'integrale. Invero, essendo

$$\begin{aligned} \int_0^{2c} [y + \delta y - c\sqrt{1 + (y' + \delta y')^2}] dx &= \int_0^{2c} \left\{ y + \delta y - c(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\delta y'(2y' + \delta y')}{1 + y'^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} dx \\ &= \int_0^{2c} \left\{ y + \delta y - c(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\delta y'(2y' + \delta y')}{1 + y'^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta y'(2y' + \delta y')}{1 + y'^2} \right)^2 + \dots \right] \right\} dx, \end{aligned}$$

la variazione seconda dell'integrale, $-\frac{c}{2} \int_0^{2c} \frac{(\delta y')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} dx$, è negativa.

Questo problema risolve immediatamente quello di determinare tra le curve isoperimetre quella che racchiude un'area massima. Si riconosce subito che questa curva è un circolo.

2) Tra i solidi di rotazione che hanno la stessa superficie trovare quello di volume massimo.

Essendo $y = y(x)$ l'equazione della curva che ruotando intorno all'asse delle x genera la superficie, le espressioni della superficie e del volume sono $2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$, $\pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$; il problema che ci proponiamo risolvere è: determinare la funzione y e i limiti x_0, x_1 dell'integrale in modo che $\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$ riesca massimo, dovendo essere $\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} = 2a^2$, avendo indicato con $4\pi a^2$ l'area della superficie. Dovremo perciò rendere massimo l'integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi dx = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + cy \sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

Qui è $Y = 2y + c\sqrt{1 + y'^2}$, $Y_1 = \frac{cy y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$, e poichè φ non contiene x abbiamo un integrale primo $\varphi = y' Y_1 + c_1$ della $K = 0$

(Vedi n. 207), ossia
www.libtool.com.cn

$$(4) \quad y^2 + cy\sqrt{1+y'^2} = \frac{cyy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + c_1.$$

Poichè x_0, x_1, y_0, y_1 non sono dati, l'equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ si scinde nelle equazioni $\varphi_1 = 0, K_0^1 = 0, \varphi_0 = 0, K_0^0 = 0$, ed è quindi ancora

$$\varphi_1 - y'K_0^1 = \left(y^2 + cy\sqrt{1+y'^2} - \frac{cyy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right)_{x=x_1} = 0,$$

ossia, in virtù della (4), $c_1 = 0$, che riduce la equazione (4) alla

$$y^2 + cy\sqrt{1+y'^2} = \frac{cyy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}, \text{ da cui } y' = \frac{\pm\sqrt{c^2 - y^2}}{y},$$

che, integrata, dà

$$x - c_2 = \pm\sqrt{c^2 - y^2} \text{ ossia } (x - c_2)^2 + y^2 = c^2,$$

la quale rappresenta un circolo di raggio c col centro sull'asse delle x .

Le equazioni $K_0^0 = 0, K_0^1 = 0$ danno $y_0 = 0, y_1 = 0$, e per determinare x_0, x_1 abbiamo le equazioni $x_0 = c_2 \mp c, x_1 = c_2 \mp c$, nelle quali non dovremo prendere gli stessi segni per non avere $x_0 = x_1$. Non abbiamo nessuna equazione per determinare c_2 che rimane arbitraria. Ciò si spiega col fatto che trovato un arco di curva che risolva il problema e passante pei punti $(x_0, 0), (x_1, 0)$, qualunque altro arco, ottenuto dal primo facendolo scorrere sul piano (x, y) in modo che i suoi punti percorrano delle rette parallele all'asse delle x , vi soddisfa pure. Potremo perciò, per semplicità, fare $c_2 = 0$, ed allora, poichè supponiamo $x_0 < x_1$, avremo $x_0 = -c, x_1 = c$.

La curva che risolve il problema è quindi un circolo di raggio c col centro nell'origine delle coordinate e i punti x_0, x_1 sono i suoi punti d'incontro coll'asse delle x .

Per determinare c abbiamo l'equazione

$$\int_{-c}^c y \sqrt{1+y^2} dx = \int_{-c}^c \sqrt{c^2-x^2} \frac{c}{\sqrt{c^2-x^2}} dx = 2c^2 = 2a^2, \text{ da cui } c=a.$$

Tra le superficie di rotazione, di area uguale, quella che racchiude il massimo volume è perciò la sfera.

Variazione di un integrale multiplo col campo di integrazione fisso e con valori dati delle funzioni sul contorno del campo stesso, e quando sotto il segno integrale compariscono le sole derivate prime. — Relativi problemi di massimo e minimo.

210. Cominciamo coll'integrale

$$I = \iint \varphi(x, y, z, p, q) dx dy,$$

esteso ad un certo campo, essendo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Avremo

$$\delta I = \iint (Z \delta z + P \delta p + Q \delta q) dx dy$$

avendo posto

$$Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial q};$$

ma, poichè

$$\delta p = \delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(\delta z)}{\partial x},$$

$$\iint P \delta q dx dy = \int dy \int P \frac{\partial(\delta z)}{\partial x} dx = \int dy \left[P \delta z - \int \frac{dP}{dx} \delta z dx \right],$$

ovvero, osservando che nell'integrale $\int P \delta z dy$ il δz si riferisce al contorno del campo di integrazione ed è perciò nullo,

$$\iint P \delta p dx dy = - \iint \frac{dP}{dx} \delta z dx dy.$$

Analogamente avremo

www.libtool.com.cn

$$\iint Q \delta q \, dx \, dy = - \iint \frac{dQ}{dy} \delta z \, dx \, dy,$$

cosichè

$$\delta I = \iint \left(Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} \right) \delta z \, dx \, dy,$$

avendo indicato con $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$ le derivate totali di P , Q rapporto ad x e ad y .

Sia ora

$$I = \int \int \dots \int \varphi(x_1, x_2 \dots x_n, z, p_1, p_2 \dots p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

dove $p_r = \frac{\partial z}{\partial x_r}$, esteso ad un certo campo; posto $Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$,

$P_r = \frac{\partial \varphi}{\partial p_r}$, si trova, in modo completamente analogo,

$$\delta I = \int \int \dots \int \left(Z - \frac{dP_1}{dx_1} - \frac{dP_2}{dx_2} \dots - \frac{dP_n}{dx_n} \right) \delta z \, dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

dove le $\frac{dP_1}{dx_1}$, $\frac{dP_2}{dx_2}$, ... indicano le derivate totali di $P_1, P_2 \dots$ rapporto ad $x_1, x_2, \dots$.

Una formola analoga si trova facilmente se la funzione φ contiene, oltre alla z , altre funzioni $u, v, \dots$ delle $x_1, x_2, \dots x_n$ e le loro derivate prime.

Proposto il problema di determinare la funzione z che rende massimo o minimo l'integrale I , dovrà, qualunque sia δz , essere nulla la variazione prima δI e perciò, procedendo in modo analogo a quello tenuto al n. 206, si troverà che la funzione z dovrà soddisfare alla equazione a derivate parziali

$$Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} = 0$$

nel caso dell'integrale doppio, o alla equazione

$$Z - \frac{dP_1}{dx_1} - \frac{dP_2}{dx_2} - \dots - \frac{dP_n}{dx_n} = 0$$

nel caso dell'integrale multiplo; e queste equazioni servono alla determinazione della funzione z , che potrà poi venire completata dalle condizioni imposte a z sul contorno del campo di integrazione e da altre condizioni.

ESEMPLI.

1). *Superficie d'area minima.* Si tratta di determinare, tra tutte le superficie passanti per una data linea, quella di area minima, cioè di determinare la funzione z che rende un minimo l'integrale

$$I = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$$

esteso al campo limitato dalla proiezione della linea data sul piano delle x, y colla condizione che z prenda sul contorno del campo tali valori, che la superficie passi per la linea data.

La equazione a derivate parziali della z è qui

$$\frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{d}{dy} \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0$$

cioè, sviluppando le derivazioni e facendo astrazione dal fat-

tore positivo $\frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0$$

dove

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Senza passare alla sua integrazione ci limiteremo a notare

che essa esprime la proprietà che le superficie d'area minima hanno in ogni loro punto i raggi principali di curvatura uguali e di segno contrario. (Vedi vol. I, n. 212).

2) Determinare la superficie che, passando per una data curva

$$f(x, y, z) = 0, F(x, y, z) = 0,$$

rende massimo o minimo l'integrale $\iint \sqrt{p^2 + q^2} dx dy$ esteso ad un campo sul piano x, y , limitato da una curva, che è la proiezione su esso della curva

$$f_1(x, y, z) = 0, F_1(x, y, z) = 0,$$

per la quale pure supponiamo debba passare la superficie richiesta.

Qui è $Z = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$, $Q = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ e perciò la equazione a derivate parziali che serve a determinare z è la

$$(1) \quad r q^2 - 2 p q s + t p^2 = 0.$$

Questa equazione si integra facilmente coi metodi conosciuti per integrare alcune equazioni a derivate parziali di secondo ordine. Noi la integreremo con un metodo indiretto e per tentativi.

Osserviamo che se $z = \varphi(x, y)$ fosse un suo integrale, eguagliando z ad una costante c , la equazione $c = \varphi(x, y)$ definirebbe y come una funzione di x tale che $\frac{d^2 y}{dx^2}$ sarebbe zero, perchè il primo membro della (1) è, fatta estrazione dal segno, il numeratore della espressione di $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (Vedi vol. I, n. 117); cioè darebbe $y = -c_1 x - c_2$, dove c_1, c_2 sono costanti; perciò $z = \psi(y + c_1 x + c_2)$ o semplicemente $z = \psi(y + c_1 x)$ dove ψ indica una funzione arbitraria è integrale della (1), e quindi anche $y + c_1 x = \varphi(z)$, dove φ è funzione arbitraria. Ciò ci induce a

provare se sostituendo in luogo di c_1 una funzione arbitraria della z sia ancora $y + x\psi(z) = \varphi(z)$ integrale della (1). È ciò che effettivamente ha luogo, come si può verificare derivando la equazione precedente due volte rispetto ad x , rispetto ad y , rispetto ad x e ad y ; otteniamo così, indicando con $\varphi', \varphi'', \psi', \dots$ le derivate di $\varphi(z)$, $\psi(z)$ rispetto a z ,

$$(\varphi' - x\psi')r + p^2(\varphi'' - x\psi'') - 2\psi'p = 0,$$

$$(\varphi' - x\psi')s + pq(\varphi'' - x\psi'') - \psi'q = 0,$$

$$(\varphi' - x\psi')t + q^2(\varphi'' - x\psi'') = 0,$$

delle quali, eliminando le derivate di φ e ψ , si ottiene

$$\begin{vmatrix} r & p^2 & 2p \\ s & pq & q \\ t & q^2 & 0 \end{vmatrix} = -q(rq^2 - 2pqs + tq^2) = 0.$$

La superficie che risolve il problema è quindi quella di equazione

$$\varphi(z) = y + x\psi(z),$$

nella quale le funzioni arbitrarie vengano determinate dalle altre condizioni del problema. La nostra superficie dovendo passare per la curva $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, dovremo avere

$$f[x, \varphi(z) - x\psi(z), z] = 0, \quad F[x, \varphi(z) - x\psi(z), z] = 0,$$

dalle quali, eliminando x , otteniamo un'equazione della forma

$$\Lambda[z, \varphi(z), \psi(z)] = 0.$$

La superficie dovendo anche passare per la curva $f_1(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$, otterremo, in modo analogo, una equazione

della forma

www.libtool.com.cn

$$\Lambda_1[z, \varphi(z), \psi(z)] = 0;$$

le due equazioni $\Lambda = 0$, $\Lambda_1 = 0$ determinano le due funzioni $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

3) Supposto z fissato ai limiti del campo di integrazione, trovare la funzione z che rende massimo o minimo l'integrale

$$\int \int \dots \int (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n - z)^m dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

La equazione a derivate parziali per determinare z , posto

$$A = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n - z, \text{ è}$$

$$A^{m-1} + \frac{d}{dx_1} (x_1 A^{m-1}) + \frac{d}{dx_2} (x_2 A^{m-1}) + \dots + \frac{d}{dx_n} (x_n A^{m-1}) = 0,$$

cioè

$$(n+1)A^{m-1} + (m-1)A^{m-2} [x_1(x_1 p_{11} + x_2 p_{21} + \dots + x_n p_{n1}) + x_2(x_1 p_{12} + x_2 p_{22} + \dots + x_n p_{n2}) + \dots + x_n(x_1 p_{1n} + x_2 p_{2n} + \dots + x_n p_{nn})] = 0,$$

dove $p_{rs} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s}$, $p_{rs} = p_{sr}$; posto $\frac{n+1}{m-1} = -\alpha$, avremo ancora,

$$-\alpha(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n - z) + \sum_{r=1}^{r=n} x_r (x_1 p_{1r} + x_2 p_{2r} + \dots + x_n p_{nr}) = 0.$$

Tenendo presente il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, si trova facilmente l'integrale di questa equazione sotto la forma

$$z = \varphi_1 + \varphi_\alpha,$$

dove φ_1 indica una funzione omogenea qualunque di primo, φ_α una funzione omogenea qualunque di grado α delle $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1. La funzione y di x che rende massimo o minimo l'integrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{y^3 y''}{y'} dx$, essendo fissi i limiti dell'integrale ed assegnati i valori y_0, y_1 di y per $x=x_0, y=x_1$ è la

$$y = \sqrt{\frac{(y_1^3 - y_0^3) + x_1 y_0^3 - x_0 y_1^3}{x_1 - x_0}}.$$

2. Essendo fissi i limiti dell'integrale $\int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y^2 + y'^2 + 2y') dx$ e non assegnati i valori di y nei limiti stessi, la funzione $y = \frac{e^{-x}}{e^{-x_1} + e^{-x_0}} - \frac{e^{-x}}{e^{x_0} + e^{x_1}}$ rende minimo l'integrale.

3. La funzione $y = \frac{6}{5} x^2 - \frac{12}{5} x + 1$ rende minimo l'integrale $\int_0^1 y'^2 dx$, colle condizioni $y_0 = 1, \int_0^1 \frac{y}{y_1} = -1$.

4. La funzione che per $x=-a, x=a$ è zero, e che rende minimo l'integrale $\int_{-a}^a (y'' - 2y) dx$, è la

$$y = \frac{x^4}{24} - \frac{a^2}{4} x^2 + \frac{5}{24} a^4.$$

5. Essendo invariabili i limiti x_0, x_1 , trovare la curva che rende massimo o minimo l'int. $\int_{x_0}^{x_1} (ax - by^2) dx$.

La parabola $3by^2 = ax$; se $b > 0$, si ha massimo pel ramo di parabola al di sopra, minimo per quello sotto all'asse delle x ; inversamente se $b < 0$.

6. Essendo invariabili i limiti x_0, x_1 , trovare la curva che rende massimo o minimo l'int. $\int_{x_0}^{x_1} (15a^3 x^2 y - 15a^3 xy + 5a^3 y^3 - 3y^5) dx$, $a > 0$.

Le parabole $y^2 = ax$, $y^2 = a^2 - ax$. Per la prima si ha minimo per $x = \frac{a}{2}$, massimo per $x = 0$ e per i valori di x da 0 ad $\frac{a}{2}$ massimo

per $x > \frac{a}{2}$, ed inversamente per il ramo inferiore; per la seconda e per il ramo superiore si ha massimo se $x < 0$ e da $x = 0$ a $x = \frac{a}{2}$, minimo da $x = \frac{a}{2}$ a $x = a$, ed inversamente per il ramo inferiore.

7. Curva per la quale la differenza tra l'area del circolo costruito sul raggio vettore come diametro e il rettangolo delle coordinate in ogni punto è minima rispetto alla stessa differenza in ogni punto, corrispondente alla stessa ascissa, di qualunque altra curva.

$$\text{La retta } y = \frac{2x}{\pi}.$$

8. Curva per la quale è minima la sottonormale, le variazioni di y, y' essendo tali che $y\left(x - \frac{y}{y'}\right)$ non subisca variazione alcuna.

La parabola cubica $y = Cx^3$.

9. Sia $I = I_1 I_2$, dove $I_1 = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 dx$, $I_2 = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_2 dx$; per determinare la funzione y che rende massimo o minimo I dovremo trovare la y per la quale $I_1 \int_{x_0}^{x_1} \delta \varphi_1 dx + I_2 \int_{x_0}^{x_1} \delta \varphi_2 dx = 0$, dove I_1, I_2 sono i valori costanti dei due integrali quando in essi si sostituisce la funzione cercata. Il problema è ridotto così al massimo o minimo dell'integrale $\int_{x_0}^{x_1} (\varphi_1 + c \varphi_2) dx$, dove $c = \frac{I_2}{I_1}$. La c verrà poi determinata dalla precedente equazione.

Così si voglia la curva passante per i punti $(-a, b)$, (a, b) per la quale è minimo il prodotto dell'area per l'arco. Si trova il circolo $y = b + \sqrt{c^2 - a^2} - \sqrt{c^2 - x^2}$, dove c è determinato dalla equazione $2ab + a\sqrt{c^2 - a^2} = 3c^2 \arcsin \frac{a}{c}$.

In particolare se $b = \frac{3\pi a}{4}$ si ha $c = a$.

10. Si provi che per ottenere il massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} \varphi dx$, sotto le condizicni $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 dx = l_1$, $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_2 dx = l_2, \dots$ basta cercare il massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} (\varphi + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots) dx$, dove $a_1, a_2, \dots$ sono delle costanti.

Ad: es: si cerchi la funzione y che per $x = -a$ e per $x = a$ è uguale a b e che rende minimo $\int_a^{-a} y^2 dx$, colle condizioni $\int_a^{-a} y dx = 2b \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$, $\int_a^{-a} y^2 dx = \frac{b^2(e^{2a} - e^{-2a} - 4a)}{(e^a + e^{-a})^2}$. Si trova la $y = \frac{b}{e^a + e^{-a}} (e^x + e^{-x})$.

11. Superficie $z = z(x, y)$ che rende minimo l'integrale $\iint p^2 dx dy$ esteso al campo limitato dal circolo $x^2 + y^2 = r^2$, dovendo essere $z = a$ per $x^2 + y^2 = r^2$, e dovendo inoltre la superficie passare pel circolo $x^2 + y^2 = R^2$, $z = b$.

Si trova $z = \frac{(a-b)x + b\sqrt{r^2 - y^2} - a\sqrt{R^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - y^2} - \sqrt{R^2 - y^2}}$.



www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn