



3433 06274516 5

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

BULLETIN
ASTRONOMIQUE.

www.libtool.com.cn

16994 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

www.libtool.com.cn

BULLETIN
ASTRONOMIQUE

PUBLIÉ

SOUS LES AUSPICES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

PAR

M. F. TISSERAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

Avec la collaboration de

MM. G. BIGOURDAN, O. CALLANDREAU ET R. RADAU.

TOME VIII. — 1891.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

(Tous droits réservés.)

527]

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

www.libtool.com.cn

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
— 42980 —
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.

ASTOR LIBRARY
CANCELED
LIBRARY

NOV 23 1964
CLUB
YACHT

BULLETIN ASTRONOMIQUE.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

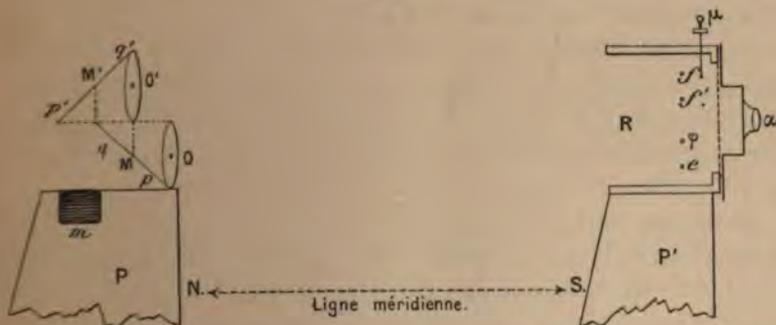
LUNETTE HORIZONTO-ZÉNITHALE,

PAR M. L.-J. GRUEY.

Mesure de l'aberration, de la nutation, des variations de la latitude et de la verticale, par l'observation des étoiles voisines du zénith.

I. Bradley a découvert l'aberration et la nutation par la mesure des déclinaisons de quelques étoiles voisines de son zénith. On peut employer sa méthode pour mesurer très exactement les constantes de ces deux phénomènes, en observant les déclinaisons des

Fig. 1.



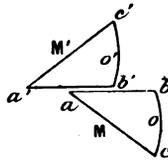
étoiles zénithales avec une lunette spéciale d'une précision bien supérieure à celle des lunettes ordinaires et dont voici la description sommaire :

O, O' deux objectifs égaux de même distance focale à très peu

près, superposés verticalement et perpendiculaires à la ligne méridienne NS; M, M' deux miroirs ajustés à 45° sur chaque objectif respectivement et, par suite, rectangulaires entre eux.

On peut remplacer chacun des systèmes (O, M), (O', M') par un prisme à réflexion totale dont la face verticale bc , $b'c'$, au lieu d'être plane, serait sphérique et sensiblement de même distance focale pour chaque prisme.

Fig. 2.



Ces prismes-lentilles auraient deux faces planes horizontales ab , $a'b'$, et deux faces inclinées à 45° , ac , $a'c'$, remplaçant les miroirs M, M'.

f , croisée de fils rectangulaires mobiles, l'un horizontal fh , l'autre vertical fv , au foyer de O' , éclairée par un oculaire nadiral α ; les rayons lumineux, issus de f , sortent parallèles de O' et se réfléchissent sur M' : moitié sur p' et moitié sur q' .

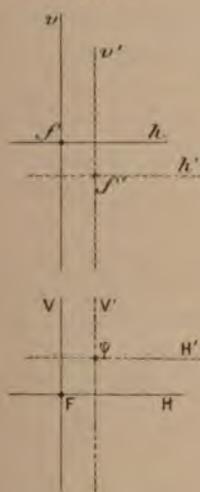
La moitié réfléchi sur p' se réfléchit ensuite sur le bain de mercure m , puis une deuxième fois sur p' , pour donner une image nadirale f' de f dans le plan focal de O' . L'autre moitié, réfléchi sur q' , se réfléchit ensuite sur la moitié q du miroir M, traverse O et forme l'image réelle φ de f dans le plan focal de O.

Supposons le système (OM) ($O'M'$) installé sur un pilier P et le micromètre R (μ , f) installé sur un pilier P', la ligne des piliers étant celle de la méridienne NS. On scellera (O, M) sur P et R sur P' de sorte que le plan des fils f du micromètre coïncide avec le plan focal de O. On disposera ensuite ($O'M'$) sur des coulisseaux horizontaux portés par P, de sorte que, en avançant ou reculant légèrement ce système suivant NS, l'image nadirale f' se fasse dans le plan des fils du micromètre. Alors les plans focaux de O et O'

coïncideront entre eux et avec le plan des fils de ce micromètre.

Cela posé, pointons 10 fois le fil horizontal mobile fh sur son image nadirale $f'h'$; 10 fois aussi le fil vertical fv sur son image nadirale $f'v'$; en donnant aux deux fils les positions correspondantes aux pointés moyens, nous ferons coïncider rigoureusement f avec f' . Alors les rayons lumineux issus de ce point double (f, f') (fig. 3) tomberont sur O' pour se réfléchir sur M' rigoureusement suivant la verticale; et l'image φ , correspondante à la moitié de ces

Fig. 3.



rayons, qui se réfléchissent sur q' d'abord pour se réfléchir ensuite sur q et traverser O , coïncidera avec l'image d'une étoile fictive, supposée fixe au zénith, dont les rayons réfléchis sur p traverseraient O .

Si donc l'on dispose un deuxième système de fils rectangulaires mobiles (FH, FV), dans le champ du micromètre, correspondant à O , comme le premier (fh, fv) correspond déjà à O' , on pourra pointer φ , c'est-à-dire le zénith, avec ces deux nouveaux fils (FH, FV).

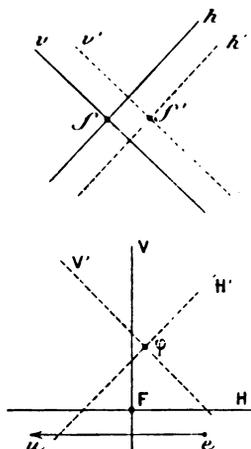
On réglera la direction du fil FH de telle sorte que ce fil soit parcouru sensiblement d'un bout à l'autre, rigoureusement dans sa partie moyenne, par l'image e d'une étoile réelle E au moment

de son passage méridien, observé à travers O par réflexion sur M . On placera FV sous le méridien par rapport au centre optique de O .

On réglera la direction du fil fh , de sorte que son image $\varphi H'$, produite par réflexion successive sur M' et M , soit aussi parcourue par une image stellaire e' . Alors les deux systèmes de fils réels f, F seront parallèles entre eux et avec les deux systèmes de leurs images (*fig. 3*).

Mais les pointés de FH, FV sur le zénith φ seraient peut-être plus précis, si l'on inclinait fh de 45° sur FH , ce dernier fil res-

Fig. 4.



tant réglé toujours comme je viens de le dire. On aurait alors la *fig. 4* dans le champ du micromètre et l'on pointerait φ avec FH ou FV comme une croix de mire.

II. Pour observer une ou plusieurs étoiles réelles E , on commencera par faire un nadir en pointant d'abord 10 fois f sur f' pour fixer f sur le pointé moyen, puis 10 fois FH sur φ ; on éloignera ensuite ($O'M'$) sur ses coulisseaux pour découvrir entièrement (O, M). L'image e de E venant à traverser le champ dans la direction eu (*fig. 4*), il suffira de pointer cette étoile avec FH ,

dans le voisinage du méridien ou de FV, pour obtenir sa distance zénithale méridienne z par la formule

$$z = p_e - p_\varphi,$$

où p_e, p_φ désignent la moyenne des pointés de FH sur e et sur φ .

Après avoir observé ainsi une série d'étoiles zénithales, on ramènera (O', M') dans sa position primitive (*fig. 1*) pour terminer par un dernier nadir dix pointés de f sur f' et dix pointés de FH sur φ .

III. Les variations de z dans le cours d'une année fourniraient la constante de l'aberration; les variations dans le cours de dix-huit ans et demi fourniraient la constante de la nutation.

Si l'on découvrait dans le cours d'un mois ou d'un jour lunaire des variations périodiques de z , on en conclurait l'action déviatrice de la Lune sur la verticale.

Remarques. — Dans un premier essai de cette méthode, on pourrait se contenter de deux petits objectifs de six pouces O, O' et leur donner une distance focale de 100 mètres environ.

Toutes choses égales d'ailleurs, le même micromètre donnerait alors une précision 20 fois plus grande qu'avec une lunette ordinaire de 5^m. De plus, notre lunette, longue de 100^m, aurait une stabilité extraordinaire, le tube étant supprimé avec les cercles divisés, et les pièces d'optique scellées sur d'excellents piliers. Il n'y aurait à craindre ni flexions, ni erreurs de divisions.

Pour soustraire l'instrument aux brusques variations de température, on pourrait l'installer dans une galerie souterraine n'ouvrant sur le ciel qu'au-dessus de P.

Il est clair qu'au lieu d'un seul micromètre on pourrait en superposer deux. L'instrument serait alors formé de la superposition de deux lunettes de 100^m de long chacune. L'une de ces lunettes, à objectif mobile dans le sens du méridien, servirait uniquement aux pointés nadiraux de f sur f' et à donner l'image φ du zénith dans l'autre lunette, qui serait réservée aux passages méridiens des étoiles zénithales.

Il est clair aussi qu'une telle lunette horizontale peut s'installer dans un azimut quelconque.

Le même pilier micrométrique P' pourrait servir à deux lunettes installées simultanément l'une dans le méridien, l'autre dans le premier vertical.

SISMOGRAPHE RECTANGULAIRE,

PAR M. L.-J. GRUEY.

Tout mouvement du sol peut être considéré comme résultant d'une translation et d'une rotation et l'on peut décomposer cette rotation en trois autres : la première autour de la verticale, la seconde autour de la ligne NS et la troisième autour de la ligne EO.

Notre sismographe n'accusera que les deux rotations autour des lignes NS et EO. Voici la description de cet appareil, qui doit être installé dans un sous-sol à température constante.

I. E est un enregistreur photographique analogue à l'enregistreur du magnétomètre Mascart; sa lanterne L possède deux fentes f, f_1 .

B, une lentille biconvexe dont le plan focal principal renferme la fente f et dont l'axe principal est avec f dans un même plan vertical parallèle à la ligne NS.

A, un miroir plan incliné sur l'horizon d'un angle un peu inférieur à 45° et perpendiculaire sur le plan vertical précédent.

C, une cuve divisée en deux compartiments : l'un renferme du mercure M; le fond de l'autre est un miroir plan D.

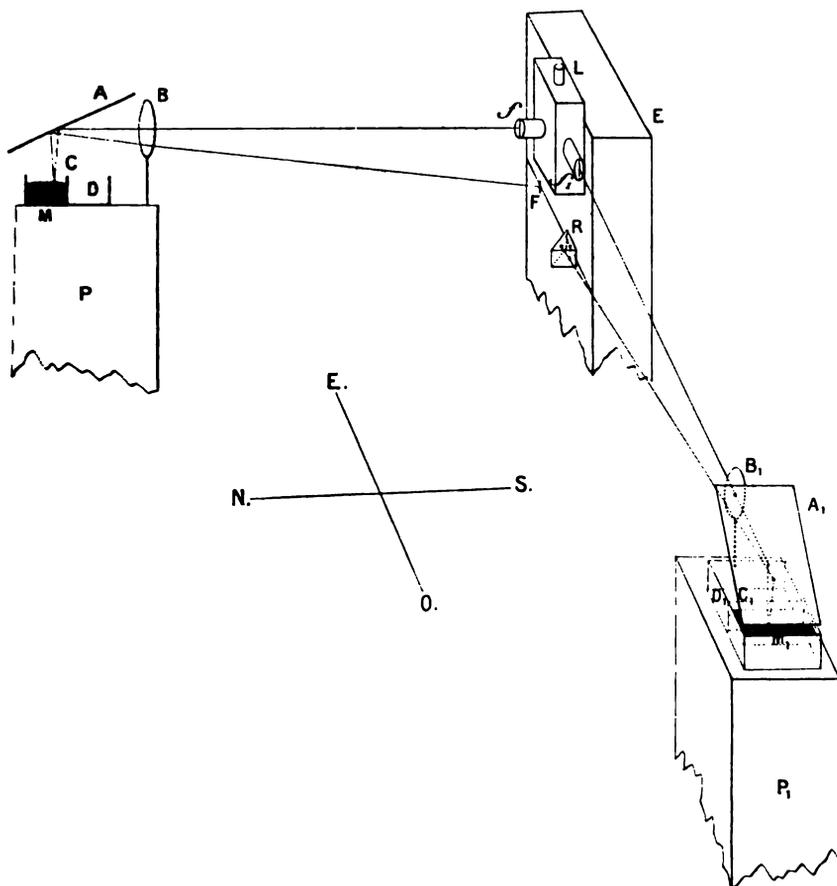
B, A, C, D sont fixés sur le pilier P.

Le faisceau de rayons lumineux provenant de la fente f passe par B, en se réfractant, pour se réfléchir sur A; une portion de ce faisceau se réfléchit alors sur M, puis de nouveau sur A, repasse par B et vient former une image qui impressionne en un point F la feuille sensible de l'enregistreur; l'autre portion se réfléchit sur D, puis sur A, repasse par B et va former aussi, sur la même feuille, une autre image F'. Dans tous les cas, cette dernière image donne naissance, sur la feuille qui est entraînée verticalement par un mouvement d'horlogerie, à une droite qui sert de repère. En temps ordinaire, lorsque le sol est calme, F donne aussi naissance à une droite parallèle à la précédente; mais, quand le sol se met à

trembler ou osciller, F trace autour du repère la courbe de la composante du mouvement du sol autour de NS.

II. On comprend comment le système analogue, composé de la deuxième fente f_1 de la lanterne et du pilier réflecteur P_1 , système qui se trouve établi par rapport à la ligne EO dans la même posi-

Fig. 1.



tion relative que le système f, P par rapport à NS, donne autour d'un repère la courbe de la composante du mouvement du sol autour de EO et sur la même feuille sensible, grâce à un petit prisme R qui lui renvoie les images F_1, F'_1 , à angle droit.

La précision du sismographe, proportionnelle à la distance focale des lentilles $B_1 B_2$, peut être augmentée à volonté avec cette distance qu'il sera toujours facile de prendre entre 10^m et 20^m , par exemple.

Remarques. — Ce sismographe donne la variation de la verticale par rapport au sol sur lequel il est établi; mais il ne donnerait les variations de cette ligne par rapport à l'axe du monde que si le sol local était immobile relativement à cet axe, au lieu d'être soumis à des oscillations lentes ou brusques constatées, presque partout, par les géologues.

Cette dernière espèce de variations peut être observée en rapportant la verticale aux étoiles, au moyen de notre lunette horizontale, à deux objectifs, et en dépouillant des effets de l'aberration, de la précession et de la nutation les distances zénithales méridiennes trouvées pour ces étoiles.

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS,

PAR H. POINCARÉ.

J'ai publié dans le tome XIII des *Acta mathematica* un Mémoire où j'obtiens quelques résultats relatifs à un cas particulier du problème des trois corps et à divers problèmes de Dynamique; je crois qu'il ne sera pas inutile de reproduire ici sans démonstration quelques-uns de ces résultats pour les lecteurs du *Bulletin astronomique* qui n'auraient pas le temps de lire *in extenso* le Mémoire original, qui est assez volumineux.

Je ne parlerai ici que de ce cas particulier du problème des trois corps que je viens de mentionner et qui est le suivant.

Supposons trois masses A, B et C *se mouvant dans un même plan*. Je suppose que la masse A soit très grande, la masse B très petite, la masse C *infinitement* petite et incapable, par conséquent, de troubler les deux autres. Alors A et B se mouvront suivant les lois de Képler. Je suppose de plus que *les excentricités de A et de B sont nulles*, de telle sorte que ces deux masses A et B décrivent des circonférences concentriques, et je me propose d'étudier le

mouvement de C sous l'attraction de A et de B dans le plan de ces deux circonférences. Tel serait le cas du Soleil, de Jupiter et d'une petite planète, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tous les résultats que je vais énoncer se rapportent à ce cas particulier. Depuis j'ai cherché à les étendre au cas général du problème des trois corps; tel a été le principal objet des leçons que j'ai professées à la Sorbonne de novembre 1889 à mars 1890 et qui seront publiées prochainement chez MM. Gauthier-Villars et fils; mais je ne m'occuperai pas pour le moment de cette extension.

Voici d'abord les notations que je compte employer.

Je définirai la position du point C par ses éléments osculateurs. Je désignerai par a , e et n le grand axe, l'excentricité et le moyen mouvement, par y_2 l'anomalie moyenne et par g la longitude du périhélie.

Je désignerai par ι la masse de A et par μ celle de B; μ sera donc une quantité très petite. Je choisirai les unités et l'origine du temps de façon que la constante de Gauss soit égale à 1; que le moyen mouvement de B soit égal à 1, et la longitude de B égale à t .

Je poserai

$$x_1 = \sqrt{a(1-e^2)}, \quad x_2 = \sqrt{a}, \quad y_1 = g - t.$$

F sera la fonction perturbatrice augmentée de $x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$; les équations prendront alors la forme symétrique

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}. \end{cases}$$

La fonction F sera susceptible d'être développée suivant les puissances de μ , et nous écrivons

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots;$$

on aura d'ailleurs

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

Enfin F sera fonction de x_1 , x_2 , y_1 et y_2 seulement et sera périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2 .

Les équations (1) admettent, comme intégrale,

$$F = C;$$

cette intégrale, connue sous le nom d'intégrale de Jacobi, peut être obtenue en combinant celle des forces vives avec celle des aires.

On peut aussi la regarder comme l'intégrale des forces vives dans le mouvement relatif du point C par rapport à deux axes mobiles tournant d'un mouvement uniforme; à savoir la droite AB et une perpendiculaire à AB menée par le centre de gravité du système supposé fixe.

C'est pourquoi je conserverai à la constante C le nom de *constante des forces vives*.

Solutions périodiques.

Les premiers résultats sur lesquels je veux appeler l'attention sont relatifs à certaines solutions particulières remarquables des équations (1). Je citerai d'abord les solutions de la forme suivante, que j'appellerai solutions périodiques,

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t), \quad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t).$$

Les fonctions φ_1 , φ_2 , φ_3 et φ_4 sont des fonctions périodiques de période T et sont, par conséquent, développables suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. De plus, $n_1 T$ et $n_2 T$ sont des multiples de 2π .

Je distingue les solutions périodiques du premier genre, pour lesquelles les fonctions φ_1 , φ_2 , φ_3 et φ_4 sont développables suivant les puissances de μ .

A chaque système de valeurs de n_1 et de n_2 , commensurables entre eux, correspondent au moins deux solutions périodiques du premier genre.

J'enseigne à former les coefficients des séries φ qui sont absolument convergentes.

Solutions périodiques du deuxième genre.

Il existe également des solutions périodiques pour lesquelles les séries φ ne sont pas développables suivant les puissances de μ et que j'appellerai *solutions du deuxième genre*. Voici sous quelle forme elles se présentent d'ordinaire :

Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t), \quad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t)$$

une solution périodique du premier genre, c'est-à-dire développable suivant les puissances de μ ; soit T la période. Soit

$$x_1 = \psi_1^0(t), \quad x_2 = \psi_2^0(t), \quad y_1 = n_1 t + \psi_3^0(t), \quad y_2 = n_2 t + \psi_4^0(t)$$

ce que devient cette solution quand on y donne à μ une certaine valeur μ_0 . Alors les fonctions ψ_i^0 sont développables suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$.

Il existera dans certains cas une solution périodique de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1^0(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{1}{2}} \psi_1^{(1)}(t) + (\mu - \mu_0) \psi_1^{(2)}(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{3}{2}} \psi_1^{(3)}(t) + \dots, \\ x_2 &= \psi_2^0(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{1}{2}} \psi_2^{(1)}(t) + (\mu - \mu_0) \psi_2^{(2)}(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{3}{2}} \psi_2^{(3)}(t) + \dots, \\ y_1 &= n_1 t + \psi_3^0(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{1}{2}} \psi_3^{(1)}(t) + (\mu - \mu_0) \psi_3^{(2)}(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{3}{2}} \psi_3^{(3)}(t) + \dots, \\ y_2 &= n_2 t + \psi_4^0(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{1}{2}} \psi_4^{(1)}(t) + (\mu - \mu_0) \psi_4^{(2)}(t) + (\mu - \mu_0)^{\frac{3}{2}} \psi_4^{(3)}(t) + \dots \end{aligned}$$

Les fonctions $\psi_i^{(1)}(t)$, $\psi_i^{(2)}(t)$, $\psi_i^{(3)}(t)$ sont périodiques par rapport à t ; mais la période n'est pas égale à T comme pour les fonctions $\psi_i^0(t)$, mais à kT , k étant un nombre entier. Par conséquent, x_1 , x_2 , $y_1 - n_1 t$ et $y_2 - n_2 t$ sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu - \mu_0}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{kT}$.

Pour $\mu > \mu_0$, on a deux solutions périodiques du deuxième genre réelles et distinctes; pour $\mu = \mu_0$, elles se confondent entre

elles et avec la solution du premier genre

$$x_i = \psi_i^0(t), \quad y_i = n_i t + \psi_{i+2}^0(t);$$

pour $\mu < \mu_0$, elles deviennent imaginaires.

Dans certains cas le contraire peut avoir lieu, et il peut arriver que les deux solutions soient réelles pour $\mu < \mu_0$ et imaginaires pour $\mu > \mu_0$.

Exposants caractéristiques.

Les solutions périodiques semblent d'abord sans aucun intérêt pour la pratique. La probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une pareille solution est évidemment nulle. Mais il peut très bien arriver qu'elles en diffèrent fort peu ; la solution périodique pourra alors le rôle de première approximation d'« orbite intermédiaire ». Il peut donc y avoir intérêt à étudier les solutions qui diffèrent peu d'une solution périodique. Voici comment on opérera :

Soit

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t), \quad (i = 1, 2)$$

une solution périodique quelconque.

Considérons une solution peu différente et posons

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \quad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + \tau_i.$$

Si les ξ_i et les τ_i sont des quantités assez petites pour qu'on puisse en négliger les carrés, les équations deviendront

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dx_k} \xi_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dy_k} \tau_k \\ \frac{d\tau_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dx_k} \xi_k - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dy_k} \tau_k \end{array} \right\} (i, k = 1, 2).$$

Dans les dérivées secondes de F qui figurent dans les équations (2), on doit remplacer x_i et y_i par $\varphi_i(t)$ et $n_i t + \varphi_{i+2}(t)$; les coefficients de ξ_k et de τ_k dans les seconds membres de ces équations (2) sont donc des fonctions périodiques données de t .

L'intégrale générale des équations (2) s'écrit

$$\left. \begin{array}{l} \xi_i = A e^{\alpha t} S_i + B e^{-\alpha t} S_i + (C + tD) S_i + DS_i'' \\ \tau_i = A e^{\alpha t} T_i + B e^{-\alpha t} T_i + (C + tD) T_i + DT_i'' \end{array} \right\} (i = 1, 2).$$

A, B, C, D sont quatre constantes d'intégration; α est une constante non arbitraire. $S_i, S'_i, S''_i, S'''_i, T_i, T'_i, T''_i, T'''_i$ sont des fonctions périodiques de t développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$.

La constante α et les coefficients de S_i, S'_i, T_i et T'_i sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, ceux de S''_i, S'''_i, T''_i et T'''_i suivant les puissances de μ . J'enseigne à former toutes ces séries qui sont absolument convergentes.

L'exposant α s'appelle exposant *caractéristique*. Il est réel ou purement imaginaire. Dans le premier cas, la solution périodique sera dite instable, dans le second cas elle sera dite stable. Cette dénomination se justifie aisément, bien qu'elle ne doive pas être prise dans un sens absolu, puisque nous avons négligé les carrés des ξ et des η .

Nous avons vu qu'il y aura au moins deux solutions périodiques du premier genre correspondant à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2 , commensurables entre elles. J'ajouterai qu'il y en aura toujours un nombre pair et précisément autant de stables que d'instables.

Solutions asymptotiques.

Soit

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) \quad (i=1, 2)$$

une solution périodique quelconque *instable*. Il existe deux séries de solutions particulières remarquables que j'appellerai *solutions asymptotiques*.

Les solutions asymptotiques de la première série seront de la forme suivante :

$$(3) \begin{cases} x_i = \varphi_i(t) + A e^{-\alpha t} \theta_i^{(1)}(t) + A^2 e^{-2\alpha t} \theta_i^{(2)}(t) + A^3 e^{-3\alpha t} \theta_i^{(3)}(t) + \dots \\ y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + A e^{-\alpha t} \theta_{i+2}^{(1)}(t) + A^2 e^{-2\alpha t} \theta_{i+2}^{(2)}(t) + \dots \\ i = 1, 2. \end{cases}$$

A est une constante arbitraire d'intégration, α est l'exposant caractéristique (que je suppose positif), les fonctions $\theta_i^{(1)}(t), \theta_i^{(2)}(t), \dots$ ($i=1, 2, 3, 4$) sont périodiques de période T et développables par conséquent comme les $\varphi_i(t)$ par rapport aux

sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients du développement sont eux-mêmes des séries dont les termes sont rationnels en $\sqrt{\mu}$.

Inutile de faire remarquer que, si l'on reprend les notations du paragraphe précédent, on a

$$\theta_i^{(1)}(t) = S_i, \quad \theta_{i+2}^{(1)}(t) = T_i.$$

Les séries (3) sont convergentes pour les valeurs de t suffisamment grandes. On voit que, quand t croît indéfiniment, les solutions représentées par les équations (3) se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique.

Les solutions asymptotiques de la seconde série seront de la forme suivante :

$$(3 \text{ bis}) \begin{cases} x_i = \varphi_i(t) + B e^{2t} \omega_i^{(1)}(t) + B^2 e^{2\alpha t} \omega_i^{(2)}(t) + \dots, \\ y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + B e^{\alpha t} \omega_{i+2}^{(1)}(t) + B^2 e^{2\alpha t} \omega_{i+2}^{(2)}(t) + \dots \end{cases}$$

B est une nouvelle constante d'intégration, α est encore l'exposant caractéristique; les fonctions ω sont de même forme que les fonctions θ qui entrent dans les équations (3). On obtient d'ailleurs les fonctions ω si dans les fonctions θ on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Les séries (3 bis) convergent pour les valeurs de t négatives et suffisamment grandes. Quand t tend vers $-\infty$, les solutions qu'elles représentent se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique.

Solutions doublement asymptotiques.

Il existe une infinité de solutions qui appartiennent à la fois aux deux séries et qui sont, par conséquent, représentées par les équations (3 bis) pour les valeurs de t négatives et très grandes, et par les équations (3) pour les valeurs de t positives et très grandes.

L'orbite, d'abord très peu différente de celle qui correspond à une solution périodique, s'en éloigne peu à peu, et après s'en être écartée beaucoup finit par s'en rapprocher asymptotiquement.

L'existence des solutions doublement asymptotiques est un

point d'une démonstration très délicate et qui m'a donné beaucoup de peine. En effet, les séries (3 bis) ne convergent que pour les valeurs de t négatives et très grandes, les séries (3) pour les valeurs de t positives et très grandes. Il y a généralement un intervalle où aucune des deux séries ne converge.

Divergence des séries.

Les considérations qui précèdent peuvent permettre d'établir que les séries habituelles de la Mécanique céleste sont divergentes; ce n'est pas qu'elles ne puissent néanmoins être utilement employées; en effet, il peut arriver que les termes d'une série décroissent d'abord très rapidement pour croître ensuite indéfiniment, et par conséquent que cette série, quoique divergente, puisse servir à représenter une fonction avec une approximation très grande, mais non indéfinie. Tel est le cas de la série célèbre de Stirling et de quelques développements usités en Physique mathématique. Tel est aussi celui des séries de la Mécanique céleste, et l'approximation qu'elles fournissent est très suffisante pour les besoins de la pratique. Ce que je veux dire de leur divergence n'est donc pas une raison pour en proscrire l'usage.

Les séries de M. Lindstedt ne peuvent pas converger uniformément pour toutes les valeurs de la constante d'intégration qui y entre; on démontre, en effet, que, s'il en était ainsi, il n'y aurait pas de solutions asymptotiques.

Je prendrai comme second exemple certaines séries dérivées des séries (3) et (3 bis). La série (3) converge; mais nous avons vu que ses coefficients peuvent eux-mêmes se développer en séries convergentes dont les termes sont rationnels en $\sqrt{\mu}$; quand on a fait ce développement, la série (3) reste encore convergente.

Supposons maintenant que l'on développe ces fonctions rationnelles de $\sqrt{\mu}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, ce développement est possible pour chacune d'elles. Mais si l'on ordonne ensuite la série (3) suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, la série ainsi obtenue devient divergente; on démontre, en effet, que si elle convergerait toute solution asymptotique serait doublement asymptotique, ce qui n'a pas lieu.

Le développement auquel on parvient de la sorte et qui, bien que divergent, peut rendre des services au même titre que ceux de M. Lindstedt, se met sous forme élégante si l'on élimine t et Δ entre les quatre équations (3) par les règles ordinaires du calcul. On trouve, en effet, que x_1 et x_2 s'expriment en séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{y_1}{2}$ et $\frac{y_2}{2}$.

Non-existence des intégrales uniformes.

Les équations (1) admettent une intégrale qui s'écrit

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C :$$

c'est l'intégrale des forces vives; le premier membre F est uniforme par rapport à x_1, x_2, y_1 et y_2 , périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2 , développable suivant les puissances de μ .

Je dis qu'il n'y a pas d'autre intégrale de la même forme; c'est-à-dire que les équations (1) ne peuvent admettre une intégrale

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C$$

distincte de la première et où Φ soit périodique en y_1 et y_2 , développable suivant les puissances de μ , et uniforme pour toutes les valeurs réelles de y_1 et y_2 , pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les valeurs de x_1 et de x_2 comprises dans un certain domaine.

On démontre, en effet, que, s'il en était ainsi, les séries de M. Lindstedt convergeraient. Ce résultat est d'ailleurs susceptible d'être généralisé de diverses manières.

Formes des orbites.

On peut se proposer de dessiner les orbites correspondant aux diverses solutions particulières dont je viens de parler, et j'ai l'intention de revenir sur ce point dans un autre article. Pour cela, le mieux est de considérer deux axes mobiles, à savoir : la droite AB et une perpendiculaire à AB menée par le centre de gravité du

système, et de chercher à dessiner la trajectoire relative du corps C par rapport à ces axes mobiles.

Dans le cas des solutions périodiques, cette orbite relative est une courbe fermée; dans le cas des solutions asymptotiques, c'est une courbe en spirale se rapprochant asymptotiquement d'une courbe fermée. Il convient d'ajouter que les diverses spires se recoupernt mutuellement.

Considérons une orbite fermée correspondant à une solution périodique et les deux séries d'orbites asymptotiques afférentes à cette même solution. Par un point M du plan passeront, en général, une ou plusieurs orbites asymptotiques de la première série, ainsi qu'une ou plusieurs orbites de la deuxième série. Soit T_1 une orbite de la première série passant par M ; soit β l'angle sous lequel elle coupe une orbite T_2 de la deuxième série passant par M . Si β est nul, les deux orbites se confondent en une seule et deviennent ainsi doublement asymptotiques; il y a une infinité de points pour lesquels il en est ainsi.

Mais, en général, β n'est pas nul; cependant, si la masse μ est regardée comme un infiniment petit du premier ordre, on démontre que, parmi les angles β (sous lesquels T_1 coupe les diverses orbites asymptotiques de la deuxième série qui passent par M), il y en a un qui est infiniment petit d'ordre infini; je veux dire qu'il est du même ordre de grandeur que l'exponentielle $e^{-\frac{a}{\sqrt{\mu}}}$, a étant une constante positive.

Il est encore un autre point sur lequel je désire attirer l'attention.

Les séries (3) ne changent pas, si j'y change A en Ae^{z+T} et t en $t+T$; si donc on change A en Ae^{zT} , l'orbite asymptotique correspondante ne change pas; la seule différence est que le mobile C passe en un même point de cette orbite à des époques différentes.

Ainsi les valeurs suivantes de la constante d'intégration

$$A, Ae^{\pm zT}, Ae^{\pm 2zT}, Ae^{\pm 3zT}, \dots$$

correspondent à une seule et même orbite asymptotique.

Il est donc toujours permis, s'il ne s'agit que de définir cette orbite, de choisir la constante A entre 1 et e^{zT} .

Cela posé, considérons n orbites doublement asymptotiques

quelconques; pour des valeurs suffisamment grandes de t , les équations de ces orbites pourront se mettre sous la forme (3). A ces orbites correspondront n valeurs de la constante A que j'appellerai

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

et que je puis toujours supposer comprises entre 1 et e^{2T} .

Pour des valeurs de t négatives et très grandes, les équations de ces mêmes orbites (en changeant au besoin l'origine du temps) pourront se mettre sous la forme (3 bis). A ces n orbites correspondront alors n valeurs de la constante B que j'appellerai

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

et que je pourrai toujours supposer comprises entre 1 et e^{2T} .

Et bien, ce qu'il importe de remarquer et ce qui met bien en évidence la complication du problème des trois corps, c'est que si A_1, A_2, \dots, A_n sont rangés par ordre de grandeur croissante, les constantes, B_1, B_2, \dots, B_n seront, en général, rangées dans un ordre tout différent.

Invariants intégraux.

Une notion nouvelle, celle des invariants intégraux, m'a été très utile pour démontrer les résultats qui précèdent. Je me bornerai ici à énoncer quelques propositions saillantes relatives à cette théorie.

Considérons le problème des trois corps; pour définir la situation du système, nous nous donnerons dix-huit variables: ce seront d'abord les trois coordonnées x_1, x_2, x_3 du premier corps, les projections y_1, y_2, y_3 de la quantité de mouvement de ce premier corps sur les trois axes. Ensuite $x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$ seront les quantités analogues pour le deuxième corps, $x_7, x_8, x_9, y_7, y_8, y_9$ les quantités analogues pour le troisième corps.

Nous envisagerons alors neuf points dans un plan que j'appellerai M_1, M_2, \dots, M_9 et dont les coordonnées seront respectivement $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_9, y_9)$. Cela posé, considérons une solution des équations différentielles du mouvement dépendant de deux constantes arbitraires α et β . Alors les x_i et les y_i seront des fonctions du temps de t , de α et de β . Soit μ le point dont les

coordonnées sont α et β ; si le point μ reste intérieur à une certaine aire σ , les points M_1, M_2, \dots, M_9 resteront intérieurs à certaines aires S_1, S_2, \dots, S_9 . Ces neuf aires se déformeront et se déplaceront, puisque les coordonnées du point M_i dépendent non-seulement de α et β , mais encore du temps t ; mais *la somme algébrique de ces neuf aires demeurera constante*. Il est à peine utile de faire observer que certaines de ces aires pourront avoir des parties positives et des parties négatives; c'est ainsi que, au point de vue analytique, l'aire totale de la lemniscate est nulle parce qu'une des boucles doit être regardée comme positive et l'autre comme négative.

Supposons maintenant que l'on envisage une solution ne contenant plus qu'une seule constante arbitraire α . Si cette constante α varie depuis α_0 jusqu'à α_1 , les neuf points M_1, M_2, \dots, M_9 vont décrire certains arcs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ qui se déplaceront et se déformeront avec le temps, puisque les coordonnées de M_i dépendent non seulement de α , mais encore de t . Soit U_i l'intégrale

$$\int (2x_i dy_i + y_i dx_i)$$

prise le long de l'arc λ_i . U_i sera une fonction du temps puisque l'arc λ_i se déplace. Soit c_0 la valeur de la constante des forces vives correspondant à $\alpha = \alpha_0$, et c_1 la valeur de la constante correspondant à $\alpha = \alpha_1$, on aura

$$U_1 + U_2 + \dots + U_9 + 3(c_1 - c_0)t = K,$$

K étant une constante indépendante du temps.

Stabilité.

Revenons au cas particulier dont nous nous sommes occupé presque exclusivement dans ce travail. Dans ce cas, MM. Hill et Bohlin ont démontré que le rayon vecteur CA ne peut croître au delà de toute limite; mais il reste pour établir complètement la stabilité un dernier point à démontrer. Il faut faire voir que les trois corps se retrouveront une infinité de fois aussi près qu'on voudra de leur position initiale.

L'existence même des solutions asymptotiques montre suffisamment qu'il existe une infinité de solutions particulières qui satisfont pas à cette condition. Mais, d'autre part, j'ai démontré par la méthode des invariants intégraux, qu'il y en a aussi une infinité qui y satisfont. On peut donc, à ce point de vue, dire qu'il y a une infinité de solutions particulières instables, et une infinité de solutions particulières stables.

Mais il y a plus, on peut dire que les premières sont l'exception et que les secondes sont la règle, au même titre que les nombres rationnels sont l'exception et que les nombres incommensurables sont la règle. Je démontre, en effet, que la probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable, que cette probabilité, dis-je, est nulle. Ce mot n'a par lui-même aucun sens : j'en donne dans mon Mémoire une définition précise que je ne crois pas utile de reproduire ici ; mais je dois ajouter que le même résultat subsisterait, quelle que soit la définition adoptée, pourvu qu'il n'entre dans cette définition que des fonctions continues.

NOTE SUR LA COMÈTE 1873 VII ;

PAR MM. SCHULHOF ET BOSSERT.

Dans sa recherche sur l'identité des comètes 1873 VII et 1818 I, M. Schulhof a démontré que, sur dix hypothèses de la durée de révolution qui sont *a priori* possibles, sept doivent être absolument écartées, et il ne reste plus à examiner que les hypothèses $R = 5^{\text{ans}}, 58$, $R = 10^{\text{ans}}, 61$ et $R = 55^{\text{ans}}, 82$, cette dernière étant la plus probable. M. Schulhof a même regardé la durée de révolution $R = 5^{\text{ans}}, 58$ comme jouissant de peu de probabilités, attendu qu'elle laisserait subsister, après le calcul des perturbations entre 1873 et 1818, une erreur inadmissible dans le mouvement diurne de l' \mathcal{A} en 1818, estimé par Pons d'environ $+7^{\text{m}}$ (*Bulletin astronomique*, t. III, p. 180, et t. VI, p. 117). Mais, comme l'estimation de Pons pourrait être sensiblement erronée et que, dans le cas de la réalité d'une période de $5^{\text{ans}}, 6$, la comète serait revenue vers la fin de 1890 dans des circonstances assez favorables,

nous avons voulu acquérir, à ce sujet, une certitude absolue en calculant *grosso modo* les perturbations avant 1873.

Après quelques essais, nous avons pris pour point de départ les éléments osculateurs suivants :

T = 1875, déc. 3, 36, T. m. de Paris.

π	85°.18',8	} Équin. moyen 1850,0.
Ω	248.12,4	
i	26.10,5	
φ	48.58,8	
μ	10',4888	

D'après ces éléments, la comète aurait été, en avril 1865, à la distance 0,64 de Jupiter, et le 31 mars 1853, à la distance 0,155, par conséquent dans la sphère d'attraction de cette planète, et elle y serait demeurée pendant 80 jours. Nous ne donnons que les éléments osculateurs pour 1853, mai 10,0 et février 19,0, temps moyen de Paris, rapportés à l'équinoxe de 1850,0.

Époque.	1833. Mai 10,0.	1833. Fév. 19,0.
M.....	133°.43',4	126°.40'
π	86.45,5	86.38
Ω	250.44,8	251.23
i	30.35,4	35.11
φ	48.14,6	44.26
μ	10',3906	10',217

En poursuivant le calcul des perturbations jusqu'en 1818, on obtient une valeur encore plus considérable pour i . En introduisant les variations dues aux perturbations entre 1873, décembre 3, et 1853, février 19, dans la formule approchée trouvée antérieurement par M. Schulhof,

$$9,83\Delta\mu + 8,16\Delta\pi + 7,99\Delta\Omega + 8,44\Delta i - 9',5 = \text{erreur du mouv. diurne en } \pi,$$

on obtiendrait + 23' pour l'erreur de l'estimation de Pons.

Certes, la valeur $\mu = 10',4888$ n'est pas exactement celle qui produirait la concordance entre l'époque calculée du passage au périhélie et l'époque observée en 1818; mais, quelle que soit la valeur adoptée de μ , l'inclinaison augmente d'une façon considérable de 1873 à 1818. Comme Δi possède dans la formule précé-

dente le coefficient le plus considérable, l'hypothèse d'une période de 5^{ans},6 laisserait, dans tous les cas, subsister une erreur de 1^m à 1^m,5 dans l'estime du mouvement diurne en \mathcal{R} , faite par Pons. Une telle erreur étant tout à fait inadmissible, il est impossible de regarder l'apparition de 1873 comme le 10^e retour de la comète de 1818 I.

OBSERVATIONS DES COMÈTES ZONA ET SPITALER ET DE LA PLANÈTE

(65) CYBELE,

FAITES A L'OBSERVATOIRE D'ALGER (au télescope de 0^m,30);

PAR M. RAMBAUD.

Dates.	Étoiles de comparaison.	Gr.	$\Delta\mathcal{R}$.	$\Delta(\mathcal{D})$.	N. de c.
•◀ Zona.					
1890.					
Déc. 4...	a B. B. t. VI + 34°, n° 748	9	+1.27,83	+ 2. 4,0	12 : 12
5...	b B. B. t. VI + 34°, n° 735	9,4	-1. 1,81	+ 5.46,2	20 : 14
6...	c B. B. t. VI + 34°, n° 716	8,9	+0.37,56	- 1.56,4	10 : 18
9...	d Weisse ₂ , n° 373	7,8	+0.18,09	+ 6.29,6	12 : 12
10...	e Weisse ₂ , n° 303	8,9	-1.12,23	- 3.19,4	12 : 4

(65) Cybele.

Déc. 5...	f Weisse ₂ , n° 535	9	+0.44,46	- 5.40,7	14 : 14
6...	f " "	9	+0. 0,75	- 6.24,4	14 : 14

•◀ Spitaler.

Déc. 6...	g Lal. 9921, Paris 6085	8,5	+0.48,84	- 2. 2,7	20 : 20
-----------	-------------------------	-----	----------	----------	---------

Positions des étoiles de comparaison.

Dates.	★	\mathcal{R} moy. 1890,0.	Réd. au j.	(\mathcal{D}) moy. 1890,0.	Réd. au j.	Autorités.
1890.						
Déc. 4....	a	3.44.30,66	+3,75	+34.47.50,3	+13,8	B. B. t. VI.
5....	b	3.41.42,27	+3,75	+34.38.20,0	+14,1	"
6....	c	3.35. 0,79	+3,72	+34.38.50,1	+14,8	"
9....	d	3.20. 6,53	+3,64	+34. 2.37,0	+16,2	Weisse ₂ .
10....	e	3.16.46,44	+3,62	+34. 1.39,6	+16,6	Weisse ₂ .
5....	f	5.20.54,83	+3,48	+18.37.19,8	+ 5,6	Weisse ₂ .
6....	f	5.20.54,83	+3,49	+18.37.19,8	+ 5,6	Weisse ₂ .
6....	g	5.12.34,27	+4,11	+37.47.37,5	+ 4,5	Lal. Paris.

Positions apparentes.

Dates.	T. moyen d'Alger.	Rapp.	Log. fact. parall.	(D)app.	Log. fact. parall.
◀ Zona.					
1890.	h m s	h m s			
DÉC. 4.....	9.46. 5	3.46. 2,24	1,211 n	+34.50. 8,1	1,642
5.....	9.37.51	3.40.44,21	1,204 n	+34.44.20,3	1,651
6.....	8.34.57	3.35.42,07	1,454 n	+34.37. 8,5	1,917
9.....	9.39.53	3.20.28,26	2,817 n	+34. 9.22,8	1,608
10.....	10.11.13	3.15.37,83	2,470	+33.58.36,8	1,615

(65) Cybele.

5.....	10.44.17	5.21.42,77	1,319 n	+18.31.44,7	0,470
6.....	9.31.50	5.20.59,07	1,521 n	+18.31. 1,0	0,521

◀ Spitaler.

6.....	11. 9. 9	5.13.27,22	1,713 n	+37.45.39,3	0,295
--------	----------	------------	---------	-------------	-------

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

SCHEINER (J.). — DIE SPECTRALANALYSE DER GESTIRNE. Leipzig, W. Engelmann. 1890, in-8°, 474 pages, avec 2 planches et 74 gravures.

La préface que M. C. Vogel, directeur de l'observatoire de Potsdam, a écrite pour ce Volume, nous apprend qu'il œuvre une série dont l'ensemble formera un traité complet d'Astrophysique. La Chimie céleste, ou l'analyse spectrale des astres, a pris, en effet, depuis trente ans, un développement si considérable qu'il paraissait naturel de lui consacrer un Volume tout entier. Le livre que nous donne M. J. Scheiner, qui s'est chargé de traiter cette branche particulière de l'Astrophysique, n'est pas ce qu'on appelle un livre de vulgarisation : c'est un ouvrage tout pratique, destiné à être consulté par les savants de profession qui désirent se mettre au courant de tous les détails des travaux les plus récents.

Il est divisé en quatre Parties :

1. Les appareils destinés à l'analyse spectrale.

II. Les théories (Kirchhoff, Doppler, etc.).

III. Résultats des recherches de Chimie céleste.

IV. Tables numériques et bibliographie.

M. Scheiner commence donc par décrire les systèmes optiques employés pour la construction des spectroscopes et des spectromètres, depuis le simple prisme jusqu'aux appareils compliqués qui servent à photographier les spectres stellaires. Les astronomes disposent, à cet égard, d'une grande variété de moyens, dont M. Scheiner discute, avec compétence, les avantages et les inconvénients respectifs.

Le prisme, placé en avant de l'objectif, ne s'emploie pas souvent, parce qu'on est obligé de lui donner de trop grandes dimensions. On préfère, en général, se servir d'oculaires spectroscopiques; une lentille cylindrique s'ajoute pour élargir un peu les spectres stellaires, qui, sans cela, paraîtraient filiformes. L'appareil à prismes peut d'ailleurs être combiné avec un oculaire ordinaire, ce qui en rend l'usage plus commode. Pour les mesures très précises, et en particulier pour l'étude des raies du spectre solaire, on a recours aux spectromètres, qui se distinguent des spectroscopes surtout par cette circonstance que la lumière est fournie par une fente. M. Scheiner entre dans beaucoup de détails sur la construction et la théorie de ces divers instruments, sur le trouble que l'achromatisme de l'objectif introduit dans l'image d'un spectre, etc.

Un chapitre spécial est consacré aux *spectrographes* (appareils servant à la reproduction photographique des spectres), dont l'usage a fait faire à l'analyse spectrale un pas immense. C'est à tort qu'on entend dire souvent que la supériorité de la photographie, pour les recherches de ce genre, tient à une sensibilité plus grande de la plaque photographique, comparée à la rétine. Le succès tient simplement à l'introduction d'un élément nouveau, qui est le temps : l'œil n'est frappé que par l'*intensité* lumineuse, tandis que l'effet chimique est produit par la *quantité de lumière*, qui dépend à la fois de l'intensité et de la durée d'exposition, que l'on peut prolonger à volonté. Enfin, la plaque n'est pas troublée, comme l'est la rétine, par l'incessante mobilité, par les ondulations capricieuses des images qui ont pour cause l'agitation de l'air. Il en résulte que les mesures sont incomparablement plus faciles et plus précises sur les clichés que par l'observation directe. C'est d'ailleurs ce que prouvent les récents succès, obtenus par M. Vogel dans l'étude spectroscopique du mouvement de translation des étoiles, dont nous avons plus d'une fois entretenu nos lecteurs.

Parmi les travaux théoriques, touchant la nature et l'origine des raies spectrales, il faut citer en première ligne les recherches de Kirchhoff, et sa démonstration de la loi en vertu de laquelle le rapport entre le pou-

voir absorbant et le pouvoir émissif est indépendant de la nature du corps, et n'est fonction que de la température et de la couleur des rayons. M. Scheiner a cru devoir reproduire la démonstration de Kirchhoff telle qu'elle fut publiée en 1859. Les conséquences de cette loi ont été développées plus tard par Kirchhoff lui-même et par d'autres physiciens : Zöllner, Wiedemann, etc. Un autre principe, important par ses conséquences, est celui que Doppler a énoncé en 1842, et qui est relatif à l'influence du mouvement de la source lumineuse sur la longueur d'ondulation des rayons. M. Scheiner reproduit la démonstration que l'on doit à M. Ketteler. On connaît les recherches de M. Fizeau, qui ont mis en lumière la véritable portée du principe.

Nous arrivons aux résultats qu'a donnés jusqu'à ce jour l'analyse de la lumière des corps célestes. C'est le Soleil, cela se comprend, qui a été étudié avec le plus de soin; mais il demanderait, à lui seul, un Volume entier, et M. Scheiner a dû se résigner à n'en parler que brièvement. Il expose successivement les résultats des recherches relatives au spectre solaire proprement dit; aux spectres des taches, des protubérances, de la couronne; à ceux des planètes, des comètes, des nébuleuses; aux trois classes de spectres stellaires; enfin aux spectres de l'aurore boréale et de la lumière zodiacale. Dans l'impossibilité où nous sommes de le suivre à travers tant de détails, nous nous bornerons à citer quelques-uns des faits principaux.

L'étude de la surface solaire n'avance qu'avec lenteur, et bien des faits que l'observation révèle restent encore inexpliqués. Il faut même avouer que l'interprétation des raies de Fraunhofer laisse beaucoup à désirer, les longueurs d'onde des raies métalliques (à l'exception de celles du fer) n'étant connues qu'avec une précision très inférieure à celle des mesures qui se rapportent aux raies du spectre solaire, ce qui rend les identifications difficiles et douteuses.

Le spectre dont il s'agit ici est ce qu'on peut appeler le spectre moyen du Soleil; celui du bord montre souvent, comme on sait, des raies brillantes. La couche absorbante, qui devient visible pendant les éclipses par ses raies lumineuses, très courtes, ne paraît avoir qu'une épaisseur d'environ 1"; ce n'est que la partie la plus élevée de la photosphère, où ne pénètrent pas les produits de condensation. Au-dessous se rencontre la chromosphère, qui donne ordinairement les lignes de l'hydrogène et celle de l'hélium (D_3), mais aussi, parfois, beaucoup d'autres lignes appartenant aux spectres métalliques; M. Young en a compté 273. C'est de cette couche que jaillissent les protubérances. Le spectre de la couronne, enfin, résulte de la superposition d'un spectre continu, d'un spectre gazeux à lignes brillantes, et d'un spectre solaire, dû à la lumière réfléchiée par les particules de l'atmosphère solaire et de l'atmo-

sphère terrestre. L'atmosphère solaire, proprement dite, offre d'ailleurs un degré de raréfaction qui dépasse tout ce qu'on peut réaliser artificiellement.

Les spectres des planètes sont assez malaisés à étudier; on n'est pas encore d'accord sur l'explication des bandes sombres qui se rencontrent dans les spectres de Jupiter et de Saturne, d'Uranus et de Neptune, dont les atmosphères contiennent peut-être des gaz particuliers.

L'identité des bandes lumineuses des comètes avec celles des carbures d'hydrogène (563,5; 516,5; 473,8) ne fait plus de doute. M. Vogel a constaté, en outre, que les gaz que la chaleur dégage des aérolithes donnent un spectre presque parfaitement semblable à celui des comètes; on le reproduit aussi par la superposition des spectres des carbures d'hydrogène et de l'oxyde de carbone. La présence du sodium n'a encore été constatée que pour deux comètes (en 1882). Une conclusion importante à laquelle conduit l'analyse spectrale des comètes, c'est que leur lumière propre est due, au moins en partie, à des décharges électriques.

Le spectre des nébuleuses proprement dites se réduit d'ordinaire à trois ou quatre lignes lumineuses (500,4; 495,7; 486,1; 434,1), dont la première est la plus brillante; on la trouve encore dans les nébuleuses les plus faibles, quand les autres cessent d'être visibles; elle paraît appartenir à l'azote, mais elle coïncide aussi avec une des lignes du plomb. Les deux dernières appartiennent à l'hydrogène; quant à la seconde, on n'en connaît pas encore l'origine. Parmi les autres raies, toujours très faibles, qui ont été observées dans les spectres nébulaires, on peut citer une raie jaune (587,5) qui paraît être celle de l'hélium, et une raie violette (447,6) qui n'est fournie que par la nébuleuse d'Orion et par les étoiles qui s'y trouvent.

Pour les spectres stellaires, M. Scheiner adopte la classification de M. Vogel, qui est une modification de celle proposée par le P. Secchi :

Type I. — Étoiles blanches; raies métalliques à peine visibles dans le spectre, où le bleu et le violet sont fortement accusés. Les spectres du type I_a montrent les raies de l'hydrogène; elles manquent dans le type I_b . Dans les spectres du type I_c , qui comprend les étoiles β Lyre et γ Cassiopée, les lignes de l'hydrogène apparaissent lumineuses, en même temps que D_β . Il est à remarquer que plus de la moitié des étoiles qui ont été examinées appartiennent au type I.

Type II. — Étoiles jaunes; raies métalliques accusées, comme dans le spectre solaire; la région du violet a ici moins d'intensité. Le type II_a ne montre que des raies noires, nombreuses; le type II_b , qui comprend quelques étoiles nouvelles, montre, en outre, certaines raies brillantes.

Type III. — Étoiles rouges; raies et bandes d'absorption, nombreuses et larges; le violet très faible. Dans le type *a*, les bandes sont tranchées du côté du violet, estompées du côté du rouge; le contraire a lieu pour le type *b*. Cette classe est de beaucoup la moins nombreuse.

Il est facile de voir que la classification qui précède correspond, en quelque sorte, à l'âge des étoiles, celles du type I étant encore à un état d'incandescence très vive, tandis que les deux classes suivantes comprennent des astres de plus en plus refroidis. C'est là l'interprétation la plus naturelle des faits, et le fil conducteur qui nous permet de nous reconnaître dans leur multiplicité sans cesse croissante. L'emploi méthodique de la photographie a beaucoup contribué à donner à ce genre de recherches la précision et la sûreté qui d'abord y faisaient défaut.

L'ensemble des faits qui se dégagent de l'étude des spectres stellaires paraît en conformité parfaite avec l'hypothèse d'après laquelle les étoiles sont nées de la condensation de nébuleuses. M. Scheiner a cru devoir consacrer plusieurs pages à l'exposition de la nouvelle hypothèse « météorique » de M. Lockyer, qu'il déclare d'ailleurs incompatible avec les faits connus.

Les derniers paragraphes de cette partie du livre traitent du déplacement des raies spectrales et des conclusions qu'on en peut tirer, touchant le mouvement des astres dans le sens du rayon visuel; nous avons eu, plus d'une fois, l'occasion de parler des recherches de M. Vogel et de quelques autres astronomes qui se sont occupés de cette question.

Les Tables qui forment la dernière Partie du Volume sont : 1° une Table des longueurs d'onde des raies du spectre solaire visible (système Müller et Kempf); 2° une Table des raies de la région ultra-rouge, d'après Abney; 3° une Table des raies du fer, d'après Thalén; 4° un Catalogue de 994 étoiles du type III. En appendice, M. Scheiner donne une bibliographie très complète (35 pages), qui comprend les publications les plus importantes relatives à l'analyse spectrale. Son livre sera désormais indispensable à tous ceux qui voudront cultiver cette branche de la science.

R. R.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n° 3001-3009.

Rebeur-Paschwitz. — Résultats d'observations faites avec le pendule horizontal, en vue d'étudier les variations de la verticale.

Voir *Bulletin*, VII, p. 424.

Schrader. — Observations de planètes et d'étoiles de comparaison faites au cercle méridien de Hambourg.

Pechüle. — Observations diverses faites à Copenhague en 1888 et 1890.

Barnard, Millosevich, Bauschinger, Abetti. — Observations de la comète de d'Arrest.

Luther (W.). — Éléments et éphémérides de la planète (241) Germania.

Ricco. — Le nouvel observatoire de Catane.

L'observatoire de Catane, nouvellement fondé, s'occupera principalement d'Astrophysique, de Photographie céleste, de Météorologie et de Sismologie. Un réfracteur de Merz (0^m, 35) et un équatorial de Cooke (0^m, 15) pourront être employés à des études spectroscopiques et spectrographiques. Une lunette photographique de Steinheil permettra de participer à l'exécution de la Carte du ciel (l'observatoire de Catane chargera de lever la zone comprise entre + 12° et + 6°). On possède aussi un appareil Huggins pour la photographie de la couronne. A l'observatoire Bellini, installé au sommet de l'Etna (3000^m), se trouve encore une monture équatoriale, destinée à recevoir, le cas échéant, l'objet de Merz. Les deux stations seront pourvues d'une collection complète d'instruments météorologiques et d'appareils enregistreurs. Catane est la tête du réseau d'observations sismiques de la Sicile. C'est au zèle de M. Tacchini qu'est due la création des observatoires de l'Etna et de Catane, dont la direction a été confiée à M. Ricco.

Knorre. — Le micromètre à double image de Wellmann.

Nous avons déjà parlé (*Bull.*, VI, p. 413) du micromètre, imaginé par M. V. Wellmann, qui utilise, pour la mesure des distances et des angles de position, les doubles images formées par un prisme biréfringent. Lorsqu'on fait tourner le prisme, l'image extraordinaire d'une étoile tourne autour de l'image ordinaire, et les deux images d'un fil s'écartent ou se rapprochent, leur écartement étant proportionnel au sinus de l'angle de rotation du prisme, compté à partir de la position de coïncidence. Si, dans cette dernière position, le fil bissecte deux étoiles, les quatre images de ces étoiles se trouvent en ligne droite sous le fil.

Le micromètre Wellmann se compose de deux cercles concentriques; le cercle intérieur porte l'oculaire et le prisme; le cercle extérieur porte une croisée de fils. On commence par tourner le cercle intérieur seul de manière à faire coïncider les images de l'un des deux fils; ensuite on tourne le cercle extérieur (qui entraîne les fils et le prisme) jusqu'à ce que les quatre images d'une étoile double se trouvent en ligne droite, et par suite placées parallèlement à celui des fils qui paraît simple. On peut alors lire l'angle de position. Le cercle extérieur étant arrêté dans cette position, on tourne le cercle intérieur jusqu'à ce que l'image extraordinaire A' de l'étoile A se trouve par le travers de B, c'est-à-dire d'équerre avec la ligne AB qui joint les images ordinaires des deux étoiles. En désignant par φ l'angle de rotation, et par μ l'écart constant des deux images d'une même étoile, la distance AB a pour valeur $\mu \cos \varphi$. On obtient quatre déterminations de la distance, en prenant φ successivement dans les quatre quadrants.

M. Knorre a fait, en même temps que MM. Wellmann et Brendel, de longues séries d'expériences en vue de se rendre compte des avantages et des inconvénients de ce micromètre, qui paraît appelé à un grand avenir. On a constaté d'abord que les distances mesurées dans deux quadrants opposés s'accordent en général, tandis qu'il existe des différences notables entre les quadrants contigus. Il est probable que ces différences tiennent à une erreur commise dans la détermination du zéro (de la position de coïncidence). M. Knorre donne les mesures qu'il a effectuées par ce procédé sur les couples γ Orion et Σ 2264.

Ball (L. de). — Observations de comètes et de planètes faites au réfracteur de Liège.

Pickering. — Observations de comètes faites au collège Harvard.

Lewis Swift. — Neuvième catalogue de nébuleuses découvertes à l'observatoire Warner.

Chacune de ces listes comprend 100 nébuleuses.

Berberich. — Éléments des planètes (295), (297), (298), (299) et (300).

Pour la planète (298) de M. Charlois, M. Berberich n'a pu calculer qu'une orbite circulaire, à l'aide de quelques observations du mois de septembre; celles du mois d'octobre paraissent se rapporter à une planète différente, qui prendrait alors le numéro (300).

Berberich. — Occultations d'étoiles par les planètes Vénus, Jupiter et Saturne, observables en 1891.

Kiaer. — Sur la réduction du problème des trois corps à un système canonique du sixième ordre.

Cette méthode de réduction ne nous paraît pas plus simple que celle indiquée par M. H. Bruns.

Weyer. — Sur la longitude de Brindisi.

La *Connaissance des Temps* donne, depuis 1886, pour la longitude de Brindisi, $18^{\circ}0'27''$ à l'est de Paris; c'est évidemment la longitude comptée du méridien de Greenwich; il faut donc la diminuer de $2^{\circ}20'$;

Holetschek. — Sur la relation apparente qui existe entre la longitude héliocentrique du périhélie et le temps du passage au périhélie des comètes.

Dans un précédent travail (voir *Bulletin*, V, p. 436, et VI, p. 47), M. Holetschek avait montré que le groupement plus ou moins systématique des périhélies cométaires autour de certaines directions (270° et 90° de longitude héliocentrique) est dû à des circonstances terrestres, à la situation de la Terre aux époques où les découvertes sont relativement faciles. Cela résulte de ce fait que, pour les comètes connues, la différence $l - L$ de la longitude héliocentrique du périhélie l et de la longitude du Soleil L est souvent voisine de $\pm 180^{\circ}$ (pour les comètes dont la distance périhélie est très petite, elle est plutôt voisine de 0°). M. Holetschek a donc continué de vérifier ce fait, en étendant ses calculs à un total de 317 comètes, pour lesquelles il a calculé la longitude l , puis la différence $l - L$, pour 36 comètes à distance périhélie très petite ($q < 0,3$) et la différence $l - L \pm 180^{\circ}$ pour les 281 autres; ce sont ces différences qui, d'après ses prévisions, doivent être le plus souvent très petites. Voici le groupement des comètes, suivant les valeurs croissantes des différences en question; on a mis à part, dans la seconde colonne, 31 comètes périodiques à courte période.

$l - L \pm 180^{\circ}$.	C. pér.	Non pér.	Total.
0° à 30°	16	90	106
30 60	10	45	55
60 90	3	46	49
90 120	2	26	28
120 150	»	21	21
150 180	»	22	22
Total	31	250	281

t - L.	Comètes.
0 à 60.....	19
60 120.....	10
120 180.....	7
Total.....	36

La prépondérance des petites valeurs de ces différences est également visible en considérant séparément les comètes découvertes pendant certaines périodes, plus ou moins longues. Les conclusions du Mémoire de M. Holetschek se trouvent ainsi suffisamment justifiées.

Hale (George). — Sur la photographie des protubérances.

On a fait, au collège Harvard, diverses tentatives pour photographier les protubérances solaires à l'aide d'un spectroscopie, adapté à une lunette horizontale de 12 pouces d'ouverture, qui a un miroir mobile de 18 pouces. Bien que l'intervention du miroir, qui est déformé par la chaleur, gêne les images, on a pu constater qu'il était possible de reproduire les contours des protubérances. M. Hale a essayé successivement divers procédés, dont l'un consiste à laisser défilier la protubérance derrière la fente du spectroscopie (placée dans la position radiale), pendant que la plaque sensible se meut derrière une fente étroite, près du foyer. Un autre procédé consiste à faire mouvoir les deux fentes, tandis que l'image solaire et la plaque restent immobiles. Il y a lieu de choisir pour ces photographies les raies C ou D₃. Les essais seront bientôt repris à l'observatoire Kenwood, à Chicago, la plaque étant remplacée par un cylindre tournant. Le procédé avait été déjà indiqué par le P. Braun.

Wolf (Max). — Sur la loi des diamètres des images photographiques d'étoiles.

M. Wolf a cherché à déterminer la relation qui existe entre les diamètres des disques et les temps d'exposition, pour deux objectifs de 0^m,16 et de 0^m,06 respectivement. La formule proposée par M. Charlier ($D = D_0 t^{\frac{1}{2}}$) ne paraît pas se vérifier. M. Wolf trouve que ses mesures sont plutôt représentées par la formule

$$D = D_0 \log t + E_0,$$

où D₀, E₀ sont deux constantes.

Wellmann (V.). — Sur la théorie du micromètre à double image.

Les divergences constatées entre les mesures fournies par deux qua-

drants contigus, dont il a été question plus haut, ont engagé M. W
mann à examiner de plus près la théorie des prismes de Rochon e
Wollaston, afin de se rendre compte de la nature des erreurs d'ob
vation qu'ils peuvent entraîner.

Palisa. — Découverte d'une nouvelle planète (301).

Elle a été trouvée le 16 novembre. La planète (298) a été retrou
par M. Charlois le 14 novembre.

Découverte de deux comètes.

L'une a été découverte par M. Zona, à Palerme, le 15 novembre; l'a
par M. Spitaler, à Vienne, le 16.

Bidschof. — Éléments et éphémérides de la comète Zona.

Weyer. — Sur le caractère des orbites que les satellites des p
nètes décrivent autour du Soleil.

Le problème des orbites héliocentriques des satellites a été traité
Képler, Lacaille (1746), Maclaurin (1748), etc. Képler croyait, à tort,
la trajectoire de la Lune dans l'espace est une courbe ondulée; sa fi
inexacte se trouve reproduite dans beaucoup de traités popul
(Delaunay, Mädler, etc.). En réalité, cette trajectoire est concave ve
Soleil, comme l'ont déjà remarqué Maclaurin, et après lui Scherffer (17
Galle (1845), Schjellerup (1865); elle n'a ni points d'inflexion, ni po
doubles. Il n'en est pas de même pour les autres satellites. M. W
donne la solution du problème pour tous les satellites actuelles
connus.

Holetschek. — Remarque sur la visibilité de la comète Zona.

Fényi. — Sur l'augmentation qui se manifeste dans l'acti
solaire.

Tandis que le développement des taches paraît encore presqu
tionnaire, aux environs du minimum, on constate, depuis quel
années, un progrès manifeste dans le développement des protubérai
qui deviennent de plus en plus nombreuses et s'élancent à des haut
de plus en plus considérables (15 août 1890 : hauteur, 323"; 18 a
hauteur, 418"): leur distribution variable paraît d'ailleurs suivre

général, des lois analogues à celles qui régissent les fluctuations de la zone des taches, dans chaque hémisphère.

Searle. — Sur une cause secondaire possible de la lumière antizodiacale.

Il y a quelque temps, M. Searle avait proposé une explication très simple du phénomène de la lumière antizodiacale (*Gegenschein*), fondée sur l'existence d'un maximum d'illumination de la matière météorique en opposition; on obtient ce maximum en admettant l'influence de la phase, constatée par M. Muller et M. Parkhurst pour les astéroïdes (voir *Bull.*, VII, p. 329). Il s'est demandé si le phénomène ne pourrait pas, subsidiairement, s'expliquer par le mode de distribution des météores, en les supposant réunis en essaims, où il y aurait sans cesse des éclipses et des occultations: on trouve alors, en effet, que le maximum d'éclat correspond à l'opposition, où les éclipses coïncident avec les occultations. Toutefois ce maximum serait si peu marqué, qu'il n'y a pas lieu de s'arrêter à cette explication.

Pickering. — Étoiles à spectres remarquables. Variables nouvelles dans le Triangle et l'Hydre.

Luther (R.). — Éléments et éphémérides des planètes (6) Hébé et (11) Parthénope.

Berberich, Zona. — Éléments et éphémérides de la comète Zona (1890).

Spitaler, Rosmanith. — Éléments elliptiques de la comète Spitaler (1890).

D'après ces éléments, le temps de révolution de la comète serait de 6,4. Elle n'a aucun rapport avec la comète Zona, dont elle s'est trouvée fortuitement rapprochée au moment de la découverte.

Knopf. — Éléments et éphémérides de la comète Brooks (1889, V).

La comète a été retrouvée par M. Barnard, le 21 novembre dernier, avec le grand réflecteur de l'observatoire de Lick; elle est maintenant si faible qu'il est à peine possible de la discerner. M. Barnard l'a observée le 21 et le 22.

Comète australe.

Le *Times* a parlé d'une comète qui aurait été vue à Grahamstown le 27 octobre. Le renseignement ne paraît pas sérieux.

Wand (Th.). — Sur l'intégration des équations différentielles qui déterminent le mouvement d'un système de points.

Cette nouvelle Note contient quelques remarques relatives à la théorie de la Lune de Hansen.

R. R.

VARIÉTÉS.

DREYER (J.-L.-E.). — TYCHO BRAHÉ. TABLEAU DE LA VIE D'UN SAVANT AU XVI^e SIÈCLE. Édinburgh, Adams et Charles Black, 1890. Grand in-8°, xvi-405 pages.

M. Dreyer ouvre son beau livre par un tableau sur la renaissance de l'Astronomie en Europe à la fin du xv^e siècle et au commencement du xvi^e. L'Allemagne et l'Italie donnent l'élan : Georges Purbach et Regiomontanus, à l'aide d'instruments bien grossiers, il est vrai, constatent que les positions des planètes données par les tables alphonshines diffèrent notablement de leurs positions réelles dans le ciel. Le cardinal Bessarion cherche à mieux faire connaître Ptolémée au monde scientifique. Dans son observatoire à Nuremberg, Bernard Walther observe avec son maître et ami Regiomontanus la comète de 1472; ils inventent des méthodes d'observations nouvelles; Regiomontanus publie ses *Éphémérides*. En Espagne, Pierre Apian constate que les queues des comètes sont dirigées à l'opposé du Soleil. Copernic fait paraître, en 1543, son *De Revolutionibus*, destiné à devenir la pierre angulaire de l'Astronomie moderne; mais, faute de données d'observations qui lui eussent révélé, peut-être, le véritable mouvement des planètes, il dut avoir recours aux excentriques et aux épicycles des anciens. Erasme Reinhold, disciple de Copernic, publie en 1551 les tables pruteniques, dédiées au duc Albert de Prusse, plus précises, il est vrai, que les tables alphonshines, mais incapables de représenter le vrai système du monde. La connaissance de ce système ne pouvait résulter que des observations suivies des corps célestes : Tycho Brahé le reconnut le premier.

CHAP. II. *Jeunesse de Tycho*. — Tycho Brahé, fils d'Otto Brahé et de

Béate Bille, naquit le 14 décembre 1546 à Knudstrup, en Scanie, province de la Suède méridionale, qui était alors une possession danoise. Il fut élevé par son oncle, Georges Brahé, qui le destinait au barreau et qui lui fit apprendre de bonne heure le latin. A l'âge de treize ans Tycho entra à l'Université de Copenhague où il s'adonna principalement à l'étude de la rhétorique et de la philosophie. Mais l'éclipse du Soleil du 21 août 1560 lui révéla sa véritable vocation. Il y avait pour lui quelque chose de si merveilleux dans la prédiction lointaine du mouvement des corps célestes, qu'il se procura immédiatement les éphémérides de Stadius, puis, peu de temps après, un exemplaire des œuvres de Ptolémée publiées à Bâle en 1551, livre qui existe encore aujourd'hui à la bibliothèque de Prague. Il resta trois ans à Copenhague, s'occupant de Mathématiques et d'Astronomie. En 1562, Georges Brahé l'envoya, sous la direction d'Anders Sorensen Vedel, à l'Université de Leipzig dans l'espoir, peut-être, d'étouffer l'enthousiasme naissant de l'enfant; mais rien ne put arrêter Tycho dans ses nobles aspirations : pendant que le tuteur dormait, l'enfant apprenait les constellations à l'aide d'un petit globe céleste; avec les éphémérides de Stadius il cherchait les planètes dans le ciel; les tables alphonsines et les tables pruténiques ne lui restèrent pas longtemps étrangères; il s'aperçut bientôt que les positions qu'elles assignaient aux planètes étaient erronées et que les éphémérides de Stadius l'étaient également. La conjonction de Saturne et de Jupiter au mois d'août 1563 décida Tycho à commencer immédiatement ses observations, quelque imparfaits que fussent ses instruments. Un compas et un cercle gradué tracé sur du papier constituèrent l'instrument avec lequel il fit, le 17 août 1563, sa première observation. Dans la matinée du 24, la distance angulaire de Jupiter et de Saturne était à peine appréciable. Les tables alphonsines étaient en erreur d'un mois entier, celles de Reinhold l'étaient de quelques jours. Tycho continua ses observations soit avec le compas, soit par des estimations directes, en prenant pour étoiles de comparaison celles qui formaient avec l'astre considéré un triangle rectangle ou une ligne droite. L'année suivante, il se procura une arbalète ou rayon astronomique qui consistait en deux tiges graduées de longueurs inégales, munies de pinnules dont la plus petite était mobile en son milieu, le long de la première avec laquelle elle pouvait former un angle droit. L'observateur plaçait la courte tige à l'une des divisions de la longue, puis faisait tourner la pinnule mobile de la petite tige jusqu'au moment où il apercevait les deux objets considérés à travers cette pinnule et une autre fixée au centre de la tige transversale. Les divisions et une table de tangentes donnaient l'angle cherché. Ces résultats ne comportaient pas une grande précision; aussi, le jeune observateur ne pouvant, faute d'argent,

se procurer un instrument meilleur, construisit-il une table de corrections, ce qui fit dire plus tard à Kepler que la réforme de l'Astronomie par le roi des astronomes, Tycho, date de l'année 1564. Après un court séjour en Danemark, nous retrouvons Tycho à Wittemberg où il étudia sous Caspar Peucer; à Rostock, où Lévinus lui enseigna l'Astrologie et l'Alchimie; à Bâle, puis à Augsbourg. Dans cette dernière ville, il se lia avec les deux frères Hainzel dont l'un, Paul, s'intéressait vivement à l'Astronomie. La construction d'un grand quart de cercle de près de 6^m de rayon fut bientôt résolue et confiée aux constructeurs les plus habiles. L'instrument dont les deux rayons et l'arc gradué sur cuivre étaient reliés par un travail à jour était en chêne et mobile autour de son centre; l'un des rayons portait deux pinnules; un fil à plomb servait à la mesure des hauteurs. L'instrument était fixé à un support en chêne que l'on pouvait faire tourner à l'aide de quatre poignées de façon à amener le quart de cercle dans un plan vertical. Le socle était formé par des pièces qui s'enfonçaient dans le sol. Ce quart de cercle était abrité par une espèce de toiture mobile; il resta à Goggingen, près Augsbourg, jusqu'en 1574, époque à laquelle il fut détruit par une violente tempête. C'est à Augsbourg encore que Tycho fit commencer la construction d'un grand globe céleste de 1^m,5 de diamètre que l'on retrouve plus tard à Uranibourg. De retour en Danemark, Tycho, après la mort de son père, se livra à l'étude de la Chimie avec Steen Bille, l'un de ses rares parents qui savait apprécier ses goûts scientifiques. Un événement inattendu le ramena pour toujours à l'Astronomie.

CHAP. III. *La nouvelle étoile de 1572.* — C'était le 11 novembre 1572, Tycho, revenant de son laboratoire, fut extrêmement surpris en apercevant dans la constellation de Cassiopée, alors au zénith, une étoile qu'il n'avait pas remarquée auparavant. A l'aide d'un sextant qu'il venait de terminer, il mesura la distance de cet astre aux neuf étoiles principales de Cassiopée; pendant les dix-huit mois que l'étoile continua à être visible, il la suivit attentivement, répétant souvent ses mesures dans le cours d'une même soirée pour s'assurer que l'étoile n'avait pas de parallaxe. Il observa l'astre à sa conjonction inférieure à l'aide d'un sextant placé dans le méridien et dont tout déplacement était révélé à l'aide d'un fil à plomb et d'une graduation tracée sur la partie moyenne du rayon horizontal. Les observations, ainsi que l'influence astrologique de cette étoile, se trouvent consignées dans un journal pour 1573 que Tycho préparait alors et qui contient, en outre, les heures des levers et des couchers des principales étoiles, l'aspect des planètes, les phases de la Lune, l'influence de ces astres sur le temps. Il communiqua son ouvrage à son

ami Jean Pratensis en 1573, lors d'une visite à Copenhague, et il le publia bientôt après sous le titre de *De nova Stella*. M. Dreyer donne une description très détaillée de cet ouvrage devenu fort rare. Ce livre, dit l'auteur, nous montre les aspirations du jeune Tycho, et nous fait connaître les difficultés qu'il avait à vaincre. Nous le voyons, pénétré du désir d'accumuler un grand nombre d'observations exactes à l'aide desquelles il veut réformer l'Astronomie, mais nous le voyons en même temps imbu des idées du XVI^e siècle; il croit l'univers entremêlé de fils mystérieux que démêlera la contemplation des étoiles ou des éléments de la nature; il croit aux sphères solides et à l'origine atmosphérique des comètes, hypothèse que quelques années plus tard il réduisit au néant par ses recherches sur les comètes. Il est mécontent du milieu dans lequel il vit, il espère trouver à l'étranger les moyens de réaliser ses projets. Son rapport sur la nouvelle étoile est court, mais complet; l'étoile n'a pas de parallaxe, elle présente l'aspect d'une étoile ordinaire; Tycho en donne la position exacte, ainsi que les variations d'éclat et de couleur qu'elle a présentées. Les quelques remarques qu'il ajoute sur l'influence astrologique probable de cette étoile sont pour lui chose bien secondaire. Ce livre l'élève d'un seul coup au-dessus de tous les astronomes de son temps, tels que le landgrave de Hesse-Cassel Guillaume IV, Peucer, Wolfgang Schuler, Thaddæus Hagecius, Thomas Diggs, Cornelius Gemma, etc., dont l'auteur nous présente les observations et les écrits relatifs à l'étoile de 1572.

CHAP. IV. *Le discours de Tycho sur l'Astrologie et ses voyages en 1575.* — Sollicité par le roi Frédéric II, Tycho fait à l'Université de Copenhague une série de leçons dans lesquelles il expose, à l'aide des tables pruteniques, le calcul du mouvement des sept planètes, leçons qu'il ouvre, le 23 septembre 1574, par un discours sur l'Astrologie que l'auteur rapporte avec beaucoup de détails. La seconde partie du Chapitre IV est consacrée aux voyages de 1575. Tycho se rend à Cassel auprès de Guillaume IV, astronome distingué qui était convaincu aussi de la nécessité de faire des observations systématiques pour arriver à corriger les nombreuses erreurs des Catalogues d'étoiles: il y fait avec son hôte des observations de α Vierge, apprend avec intérêt du landgrave que le mouvement du Soleil se ralentit à son coucher. Cette remarque devint pour Tycho un sujet de méditation; il se rappelle que Walther avait déjà signalé le même fait qu'Alhazen, longtemps auparavant, avait attribué à la réfraction. Nous le trouvons ensuite à Francfort-sur-le-Mein, à Bâle, à Augsbourg, à Ratisbonne. A Augsbourg il rencontre Hagecius, médecin de l'empereur de Bohême, Rodolphe II, qui lui donne une copie

du manuscrit de Copernic : *De hypothesibus motium caelestium Commentaribus*. Après avoir visité Saalfeld et Wittemberg, Tycho retourne à Copenhague avec l'intention bien décidée de quitter sa patrie et d'aller s'établir à Bâle. Mais la haute faveur dont il devint l'objet de la part de Frédéric II l'empêcha de donner suite à cette idée. Un décret royal en date du 23 mai 1576, lui accorde la jouissance pleine et entière de l'île de Hven. Jusqu'à sa mort ce prince ne cessa d'encourager de tout son pouvoir les recherches astronomiques du jeune et illustre astronome. Le 23 février 1576 Tycho se rendit pour la première fois dans cette île destinée à jouer un si grand rôle dans l'histoire de l'Astronomie; il y fit le même soir sa première observation : celle de la conjonction de Mars et de la Lune, coïncidence curieuse qui eût peut-être fortifié sa croyance en l'astrologie s'il avait pu prévoir qu'il devait contribuer dans une si large mesure à l'étude du mouvement de ces deux astres.

CHAP. V. *L'île de Hven. Les observatoires et autres bâtiments de Tycho Brahé.* — L'insula Venusia, vulgo Hoenna, comme l'appelait Tycho, est un pays plat de 800 hectares environ de superficie, à contours irréguliers. Une carte de l'Atlas de Blaeu, reproduite dans l'Ouvrage de M. Dreyer, montre que la partie S.-E. de l'île servait de pâturage. C'est au centre de cette île, à 48^m d'altitude, que Tycho posa, le 8 août 1576, la première pierre de son Uranibourg. Cette somptueuse résidence, dont M. Dreyer reproduit des gravures et des plans, ne fut terminée qu'en 1580. Elle était située au milieu d'un parc qu'entourait une haute muraille en forme de losange orientée suivant les quatre points cardinaux; bâtie dans le style de la Renaissance gothique, cette construction fit époque dans l'histoire de l'architecture scandinave. Les deux grandes tours Nord et Sud, ainsi que les tours voisines plus petites, surmontées de galeries ouvertes, servaient de lieux d'observation. Dans la bibliothèque se trouvaient le grand globe d'Augsbourg, de nombreux livres, des portraits d'astronomes et de philosophes : Hipparque, Ptolémée, Albategnius, Copernic, le landgrave Guillaume IV, etc. Le grand quart de cercle mural de 2^m de rayon, de 0^m, 13 de large et de 0^m, 05 d'épaisseur, sur lequel était peint le portrait de Tycho Brahé, était l'un des principaux instruments installés à Uranibourg; il était gradué à l'aide de transversales et muni de deux visées mobiles sur l'arc. La tour Sud comprenait :

1° Un demi-cercle vertical de 2^m, 4 de diamètre, mobile autour d'un axe vertical et pourvu d'un cercle horizontal qui servait à la mesure des azimuts;

2° Un triquetrum ou instrument parallactique;

3° Un sextant de 1^m, 7 de rayon :

4° Un quart de cercle de 0^m,6 de rayon muni d'un cercle azimutal. Dans la tour Nord se trouvaient :

1° Un triquetrum d'une construction particulière pourvu d'un cercle azimutal de 4^m,9 de diamètre qui reposait sur le bord supérieur de la tour;

2° Un sextant de 1^m,2 de rayon ;

3° Un arc double servant à la mesure des petites distances ;

4° Un triquetrum construit et employé par Copernic.

Les observations devenant plus nombreuses et plus variées, le nombre des élèves augmentant, Tycho dut ouvrir de nouvelles salles et se procurer de nouveaux instruments. Il fit construire, en 1584, non loin d'Uranibourg, un second observatoire, Stjerneborg ou Stellæburgum, observatoire souterrain, dont les toits étaient au niveau du sol, pour mettre les instruments à l'abri du vent. Les salles d'observation, au nombre de cinq, comprenaient :

1° Un quart de cercle azimutal de 1^m,7 de rayon ;

2° Une sphère armillaire zodiacale ;

3° Un grand quart de cercle en cuivre muni d'un cercle azimutal ;

4° Un sextant de 1^m,7 de rayon ;

5° Un instrument équatorial formé d'un cercle de déclinaison de 2^m,9 de diamètre, mobile autour de l'axe polaire et d'un demi-cercle de 3^m,6 de diamètre représentant la partie boréale de l'Équateur ; il était supporté par 18 piliers de maçonnerie.

On y trouvait encore d'autres instruments plus petits, portatifs, tels que : une arille de 1^m,2 de diamètre, un triquetrum, un astrolabe, un petit quart de cercle, une arbalète et un cercle. A l'exception de ces deux derniers instruments et du triquetrum de Copernic, tous les instruments du Stjerneborg et d'Uranibourg avaient été construits à Hven sous la direction de Tycho.

CHAP. VI. *Vie de Tycho Brahé à Hven jusqu'à la mort de Frédéric II.* — A Uranibourg, Tycho passa, de 1576 à 1597, les années les plus heureuses et les plus actives de sa vie. Entouré de sa famille et de ses élèves, honoré des hommes les plus distingués du Danemark et de l'étranger, Tycho pendant ce temps ne cessa d'accumuler des observations destinées à servir de base à la nouvelle Astronomie. Tout en se livrant à ses recherches scientifiques, il sut améliorer les conditions à l'île de Hven ; il fit creuser des bassins, construire une fabrique de papier, une imprimerie, travaux qui nécessitaient de grands efforts de la part de ses sujets qui n'eurent pas toujours à se louer de son égalité d'humeur.

Ses observateurs et ses calculateurs furent Flemböse, Longomontanus,

Paul Wittich, Gellius Sascridus, Olsen Cimber, etc., qui tous s'estimaient heureux d'étudier sous un tel maître.

La Chimie et la Médecine occupèrent aussi les loisirs de Tycho; il distribuait gratuitement des remèdes aux malades qui affluaient à Hven, s'attirant, ainsi qu'il arrive trop souvent, la jalousie de ses émules. Une partie de son temps fut consacrée à correspondre avec Paul Hainzel, Jean Major, Hagecius, Guillaume de Hesse, Rothman, etc. Il discutait dans ses lettres les méthodes d'observation et l'emploi des instruments.

CHAP. VII. *Livre de Tycho Brahé sur la comète de 1577. Son système du monde.* — L'année 1588 compte deux faits mémorables dans la vie de Tycho Brahé : la mort de son ami et bienfaiteur Frédéric II et la publication d'un volume contenant les résultats de son travail à Uranibourg et ses idées sur la structure de l'Univers. Ce livre traite en particulier de la grande comète de 1577, la plus importante des sept qui furent observées à Hven. Cette comète, qui avait une queue de 22°, fut observée pour la première fois par Tycho le 13 novembre 1577. Il la suivit attentivement pendant toute sa période de visibilité, mesurant, soit avec le rayon astronomique, soit avec le sextant, la distance de la tête cométaire à différentes étoiles voisines, faisant aussi de temps à autre des observations de hauteur et d'azimut avec l'un de ses quarts de cercle.

En possession de si précieux documents, Tycho résolut de les réunir en trois Volumes, dont le premier devait être consacré à l'étoile de 1572, à ses recherches sur le mouvement du Soleil, sur la réfraction, la précession, livre qui fut publié par Képler après la mort de Tycho Brahé sous le titre de : *Astronomiæ instauratæ Progymnasmata*.

Le deuxième Volume traite de la comète de 1577.

Le troisième Volume, qui devait traiter de la comète de 1580 et de celles des années suivantes, resta inachevé. Les matériaux de ce Volume qui se rapportent à la comète de 1580 furent réunis et publiés en 1845.

Le deuxième Volume des Œuvres de Tycho Brahé parut à Uranibourg en 1588, sous le titre de : *De Mundi ætherei recentioribus phænomenis*.

M. Dreyer donne un aperçu fort intéressant de ce Livre, dont les dix Chapitres traitent respectivement :

- I. Des observations de la comète;
- II. Des positions plus précises déduites de celles de 12 étoiles fixes;
- III. De la longitude et de la latitude de la comète pour les jours d'observation;

IV. Des ascensions droites et des déclinaisons de la comète;

V. De l'inclinaison et du nœud de son orbite;

VI. De la distance de la comète à la Terre, Chapitre important où Tycho détermine la parallaxe de la comète de plusieurs manières différentes;

VII. De la direction de la queue cométaire;

VIII. De l'orbite de la comète dans l'espace, Chapitre dans lequel Tycho expose ses idées sur la structure de l'Univers;

IX et X. Observations et écrits des astronomes contemporains.

Le monde éthéré est d'une étendue immense, la distance de la planète la plus éloignée à la Terre étant, dans l'opinion de Tycho, 235 fois celle du monde élémentaire limité par l'orbite de la Lune. La distance de la Lune à la Terre est égale à 52 fois le demi-diamètre de la Terre; celle du Soleil à la Terre, 20 fois la distance précédente. C'est dans cet espace que la comète s'est mue; Tycho nous donne à ce sujet son opinion sur le système du monde. A ses yeux, le système de Ptolémée est trop compliqué; celui de Copernic, bien qu'étant conforme aux principes mathématiques, est en contradiction avec ceux de la Physique: la Terre lourde et paresseuse est incapable de se déplacer; ce système est en désaccord avec l'Écriture. L'immense espace qu'il faudrait admettre entre l'orbite de Saturne et les étoiles fixes pour expliquer l'absence de la parallaxe annuelle des étoiles est une objection qu'il fait au système de Copernic. Tycho cherche à mettre l'Astronomie en harmonie avec les principes mathématiques et physiques et les idées des théologiens de son temps. *L'inspiration*, dit-il, le conduisit à la conception suivante:

La Terre est au centre de l'Univers en même temps qu'au centre de l'orbite du Soleil et de la Lune et de la sphère des étoiles fixes, qui tourne autour d'elle en vingt-quatre heures, emportant les planètes. Le Soleil occupe le centre des orbites des cinq planètes: Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. Les orbites des planètes n'étant pas matérielles, il ne voit aucun inconvénient dans l'entrecroisement de celle du Soleil et de Mars. Il cherche à expliquer le mouvement planétaire dans ce système, se contentant de ces quelques indications et se promettant de revenir plus tard sur cette question. Ce moment ne vint jamais.

CHAP. VIII. *Autres travaux sur l'étoile de 1572.* — Le premier Volume des œuvres de Tycho ne fut connu du vivant de cet astronome que d'un petit nombre de ses amis. L'Ouvrage, tel qu'il fut publié plus

tard par Képler, comprend trois Parties et une conclusion où l'on trouve des traces d'un travail souvent interrompu.

PREMIÈRE PARTIE. — Le Chapitre I traite du mouvement apparent du Soleil, de la longueur de l'année, des éléments du Soleil, de la réfraction; la fin de ce Chapitre, consacré à la Lune, retarda longtemps la publication de l'Ouvrage. Le Chapitre II contient des méthodes pour déterminer la position des étoiles, des recherches sur la précession, le catalogue d'étoiles de Tycho Brahé.

DEUXIÈME PARTIE. — Cette Partie de l'Ouvrage est consacrée à l'étoile de 1572. Dans le Chapitre III Tycho traite de son éclat et de sa couleur; au Chapitre IV il donne la description du sextant avec lequel il a fait ses observations; au Chapitre V, les coordonnées écliptiques et équatoriales de l'étoile; au Chapitre VI, sa position dans l'espace. Le Chapitre VII est consacré à des recherches sur le diamètre de la nouvelle étoile qu'il trouve égal à sept fois celui de la Terre.

TROISIÈME PARTIE. — Cette Partie traite des observations des autres astronomes de l'époque.

Dans la conclusion, Tycho parle de la nature physique de la nouvelle étoile formée de « matière céleste » et de son influence astrologique, question, à ses yeux, toute spéculative.

CHAP. IX. Les dernières années à Hven. — La situation de Tycho Brahé semblait être aussi bonne que par le passé. Il continuait, sous la minorité et à l'avènement de Christian IV, à jouir des biens qui lui avaient été accordés par Frédéric II. Il y avait néanmoins, écrivit-il au landgrave Guillaume IV vers 1591, des circonstances qui contrariaient l'exécution de ses projets. Il espérait trouver à l'étranger les moyens de terminer son travail: *Omne solum forti patria est, cælum undique supra est*, disait-il encore dans cette même lettre. M. Dreyer expose les causes de ce mécontentement qui paraît bien peu fondé. Le travail scientifique n'en continua pas moins d'une manière très active. Les observations de 1594-1595 sont plus nombreuses que celles des années précédentes. Tycho s'occupait, depuis 1590, principalement des planètes; en 1593 il fit de nombreuses observations de Mars, de Jupiter et de Saturne. En 1595 il reprit ses observations d'étoiles pour en porter le nombre à 1000 dans son Catalogue. Pendant les mois de janvier et de février de 1597, qui furent les derniers de son séjour à Hven, les observations sont faites avec la plus grande précipitation; il se contente d'une seule mesure de la distance de l'astre à une ou deux étoiles voisines et

d'un diagramme fort grossier pour retrouver cet astre. Vers la fin du mois de mars il ne restait plus à Uranibourg que quatre gros instruments, qui eux aussi devaient bientôt être transportés ailleurs. Peu de temps après Pâques, accompagné de sa famille, Tycho dit à Hven un éternel adieu.

CHAP. X. *Vie de Tycho depuis son départ de Hven jusqu'à son arrivée à Prague.* — Dans ce Chapitre, nous voyons Tycho successivement à Copenhague, à Rostock, regrettant peut-être déjà amèrement son départ précipité, cherchant, dans maintes occasions, à rentrer dans les bonnes grâces de son jeune souverain; mais Christian IV resta sourd aux requêtes de l'astronome, lui faisant connaître ses sentiments dans une lettre que nous rapporte M. Dreyer. De Rostock, Tycho se rend à Wandsbeck, près de Hambourg, où il accepte l'hospitalité de Rantzov. Il y reprend ses observations le 21 octobre 1597 avec une arbalète à défaut d'autres instruments. Le 25 février 1598, il observe une éclipse de Soleil; mais la plus grande partie de son temps est consacrée à la description de ses instruments, qu'il publie à Wandsbeck dans l'Ouvrage intitulé : *Astronomiæ instauratæ Mechanica* et qu'il dédie à l'empereur Rodolphe II. On trouve dans ce volume des gravures et la description des 17 instruments principaux employés à Uranibourg, des plans des deux observatoires Uranibourg et Stjerneborg. Tycho y retrace sa vie antérieure à son arrivée à l'île de Hven, ses voyages, sa vie à Hven; il passe en revue les résultats auxquels l'ont conduit ses observations, il parle des perfectionnements qu'il a apportés aux éléments de l'orbite du Soleil, de la découverte de la troisième inégalité du mouvement de la Lune, de la variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire, et du mouvement de la ligne des nœuds; de la détermination des positions de 1000 étoiles; de ses nombreuses observations de planètes et de comètes, du coup fatal porté à l'oscillation connue sous le nom de *trépidation*, qui affectait, pensait-on, le mouvement de précession.

Il fait préparer à Wandsbeck un petit nombre de copies de son Catalogue d'étoiles; aux tables donnant les longitudes et les latitudes de ces étoiles il en ajoute d'autres relatives à la réfraction et à la précession. Il donne les ascensions droites et les déclinaisons de 100 étoiles pour les époques 1600 et 1700; les longitudes, les latitudes, les ascensions droites et les déclinaisons de 36 étoiles telles qu'elles résultent des tables du roi Alphonse, de celles de Copernic et de ses propres observations. Dans l'introduction de cet Ouvrage, dédié à l'empereur de Bohême, Tycho parle du Catalogue d'Hipparque et de ceux de ses successeurs jusqu'à celui de cet *homme incomparable*, Copernic. Il adresse

ces deux Ouvrages à l'empereur Rodolphe II, et dans une lettre y joint il sollicite la faveur de terminer son travail sous les auspices du grand monarque.

CHAP. XI. *Tycho Brahé en Bohême. Sa mort.* — La requête de Tycho fut agréée : il trouva en Rodolphe II un second bienfaiteur. A l'âge de 53 ans, nous le voyons au château de Benatky, près de Prague, s'occupant de la construction de son nouvel observatoire. Il cherche à s'assurer des assistants ; il trouve un égal, un maître dans Képler. C'est dans ce chapitre que l'auteur nous fait assister à la rencontre de ces deux puissants génies. M. Dreyer nous montre cet autre astronome s'occupant des théories de Mercure, de Vénus, de Mars, et, convaincu de l'impossibilité de représenter le mouvement apparent des planètes par des orbites excentriques et un mouvement uniforme, il en fait l'observation à Tycho. Mais celui-ci n'y donna aucune suite, car il lui tardait de terminer ses Progymnasmes terminées.

Il mourut le 24 octobre, non sans avoir adjuré Képler de terminer ses tables rodolphines, léguant à son successeur un trésor d'observations et un point d'appui du levier avec lequel celui-ci transporta l'univers.

Le 4 novembre 1601 le corps de l'illustre astronome fut transporté avec une grande pompe à sa dernière demeure, à Teynkircke, où ses enfants élevèrent quelques années plus tard un monument en marbre rouge. On peut voir encore aujourd'hui. Il représente Tycho Brahé debout, appuyé contre un pilier, tenant de la main gauche son épée, la droite reposée sur un globe, au-dessous duquel se trouve un bouclier avec les armoiries de sa famille. Son casque est à ses pieds. Sur une inscription on lit le nom et la date de la mort du grand astronome, sa devise : « *Esse potius quam haberi* ». Une inscription latine parle de sa vie, de ses mérites, de sa femme qui repose à côté de lui. Au bas du monument on retrouve l'inscription de Stjerneborg :

Non fasces nec opes sola artis scepra perennant.

CHAP. XII. *Conclusion. Les résultats scientifiques de Tycho Brahé.* — Dans ce chapitre et dans les notes qui terminent le bel Ouvrage de M. Dreyer, dont nous n'avons pu donner ici qu'un aperçu bien incomplet, l'auteur nous présente un tableau d'ensemble des instruments qui ont servi à son immortel héros, ainsi que les résultats auxquels il est parvenu. L'auteur et l'éditeur nous permettront de leur adresser nos bien sincères félicitations.

D. KLUMPKKE.

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES THÉORIES CONCERNANT LES SOLUTIONS PARTICULIÈRES PÉRIODIQUES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS ET L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES;

PAR M. O. CALLANDREAU.

Il est naturel de chercher à faire profiter la Mécanique céleste des progrès réalisés récemment, grâce surtout au grand travail de M. Poincaré sur le problème des trois corps. A l'époque (1877) où M. G.-W. Hill et M. Adams ont publié leurs belles recherches sur la théorie de la Lune, lesquelles offrent précisément des applications des théories mentionnées, ces théories n'étaient pas encore fixées et les éminents auteurs durent se laisser guider par l'induction. Les remarques suivantes aideront, j'espère, à bien saisir l'esprit des recherches de MM. Hill et Adams et permettront peut-être, au besoin, d'en élargir le cadre. Elles se rattachent d'ailleurs, à certains égards, aux admirables travaux de Lagrange sur la théorie de Jupiter et de Saturne et sur les satellites de Jupiter, composés il y a plus d'un siècle, ainsi qu'aux premières pièces d'Euler sur la théorie de la Lune (1753) et celle de Jupiter et de Saturne (*Prix de l'Académie*, t. VII).

Au lieu de raisonner dans ce qui suit sur les équations différentielles mises sous la forme canonique, nous cherchons, à l'exemple de M. Hill, à réduire le plus possible le nombre des inconnues. Pour fixer les idées, nous prenons comme applications quelques cas du problème des trois corps dans le plan.

Le calcul des orbites absolues des petites planètes d'après les méthodes de M. Gylden (*Bulletin*, VII, 470 et suiv.) pourrait être rattaché, croyons-nous, aux présentes remarques.

1. Rappelons d'abord quelques formules contenues dans le Mémoire de M. Tisserand *Sur le problème des trois corps*.

Soient

S, M et M' les trois corps réduits à des points matériels, de masses t , m et m' ;

G le centre de gravité de S et M, $SM = r$, $GM' = r'$;
 μ et μ' des constantes ayant pour valeurs

$$\mu = \frac{m}{1+m}, \quad \mu' = m' \frac{1+m}{1+m+m'};$$

f et f' les doubles des vitesses aréolaires des rayons r et r'
 ν et ν' les distances angulaires des deux points M et M'
 ment à une direction fixe du plan;

V l'angle $MGM' = \nu' - \nu$.

En posant

$$\rho_1 = \mu \frac{dr}{dt}, \quad \rho'_1 = \mu' \frac{dr'}{dt},$$

$$f_1 = \mu f, \quad f'_1 = \mu' f';$$

$$R^2 = r^2 + \frac{2m}{1+m} rr' \cos V + \left(\frac{m}{1+m}\right)^2 r'^2,$$

$$\Delta^2 = r^2 - \frac{2}{1+m} rr' \cos V + \left(\frac{r}{1+m}\right)^2;$$

$$U = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \frac{mm'}{\Delta},$$

$$U_1 = -U + \frac{\rho_1^2}{2\mu} + \frac{\rho_1'^2}{2\mu'} + \frac{f_1^2}{2\mu r^2} + \frac{f_1'^2}{2\mu' r'^2},$$

on a le système d'équations dû à M. Radau :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1}, \quad \frac{dr'}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1'},$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial f_1}, \quad \frac{d\nu'}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial f_1'},$$

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \frac{d\rho_1'}{dt} = -\frac{\partial U_1}{\partial r'},$$

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{\partial U_1}{\partial \nu}, \quad \frac{df_1'}{dt} = -\frac{\partial U_1}{\partial \nu'};$$

on en connaît deux intégrales

$$f_1 + f_1' = C, \quad U_1 = H,$$

C et H désignant des constantes arbitraires.

Si l'on remplace la variable indépendante t par l'éle

$v' - v = u$ des deux corps M et M', il vient

$$du = \left(\frac{f_1'}{\mu' r'^2} - \frac{f_1}{\mu r^2} \right) dt,$$

$$0 = d^2t \left(\frac{f_1'}{\mu' r'^2} - \frac{f_1}{\mu r^2} \right) + dt^2 \left(\frac{df_1'}{dt} - \frac{df_1}{dt} - 2 \frac{f_1'}{\mu' r'^3} \frac{dr'}{dt} + 2 \frac{f_1}{\mu r^3} \frac{dr}{dt} \right)$$

ou, à cause de

$$\frac{df_1}{dt} + \frac{df_1'}{dt} = 0, \quad \frac{df_1}{dt} = - \frac{\partial U_1}{\partial v} = + \frac{\partial U_1}{\partial u},$$

$$0 = d^2t \left(\frac{f_1'}{\mu' r'^2} - \frac{f_1}{\mu r^2} \right) + dt^2 \left[- \left(\frac{1}{\mu r^2} + \frac{1}{\mu' r'^2} \right) \frac{\partial U_1}{\partial u} + 2 \left(\frac{f_1}{\mu r^3} \frac{dr}{du} - \frac{f_1'}{\mu' r'^3} \frac{dr'}{du} \right) \left(\frac{f_1'}{\mu' r'^2} - \frac{f_1}{\mu r^2} \right) \right];$$

par suite du changement de variable, $\frac{d\rho_1}{dt} = \mu \frac{d^2r}{dt^2}$ est donc remplacé par

$$\mu \frac{d^2r}{dt^2} \left(\frac{f_1'}{\mu' r'^2} - \frac{f_1}{\mu r^2} \right) + \mu \frac{dr}{du} \left[- \left(\frac{1}{\mu r^2} + \frac{1}{\mu' r'^2} \right) \frac{\partial U_1}{\partial u} + 2 \left(\frac{f_1}{\mu r^3} \frac{dr}{du} - \frac{f_1'}{\mu' r'^3} \frac{dr'}{du} \right) \left(\frac{f_1'}{\mu' r'^2} - \frac{f_1}{\mu r^2} \right) \right].$$

Les deux équations en $\frac{d\rho_1}{dt}$ et $\frac{d\rho_1'}{dt}$ nous fournissent ainsi deux relations différentielles de la forme

$$A f^2 + B f'^2 + 2 C f f' + D = 0.$$

Si l'on élimine f et f' entre ces relations et les deux intégrales, il reste pour déterminer r et r' deux équations différentielles du deuxième ordre à coefficients périodiques. Les équations possèdent la propriété caractéristique de se reproduire quand on change u en $-u$. En outre, les coefficients qui ont $\sin u$ en facteur contiennent aussi en facteur les masses m et m' . Euler est parti d'équations semblables dans sa Pièce de 1752 sur la théorie de Jupiter et de Saturne.

Pour simplifier le langage, on dira qu'un système d'équations différentielles qui se reproduit, lorsqu'on change le signe de la variable indépendante, est *réversible*.

La méthode ci-dessus renseigne sur l'ordre et la forme des équations

tions différentielles; elle est simple dans son principe, mais elle peut être sujette à des difficultés dans l'application : si, par exemple, on veut tirer f et f' des deux intégrales et porter leurs valeurs dans les équations transformées de

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \frac{d\rho'_1}{dt} = -\frac{\partial U_1}{\partial r'},$$

les masses figurent, au moins en apparence, aux dénominateurs des valeurs de f et f' ; de sorte que la supposition des masses nulles rendrait les formules illusoire.

2. Après ces préliminaires, occupons-nous en premier lieu des solutions particulières périodiques du problème, rencontrées par Euler dans ses recherches sur les théories de la Lune et des planètes envisagées d'une manière approfondie par MM. Adams et Hill enfin étudiées par M. Poincaré, qui a établi *a priori* leur existence (*Bulletin*, I, 65; VIII, 12) (1).

On connaît par la théorie ordinaire des perturbations les inégalités indépendantes des excentricités et des inclinaisons jusqu'au terme du deuxième ordre. On a, par le n° 50 du Livre II de la *Mécanique céleste* (voir aussi *Bulletin*, III, p. 425), la masse du corps central étant prise pour unité,

$$\begin{aligned} r &= a \left[1 + m' \sum_1^{\infty} E_i \cos i(l - l') \right], \\ v &= l - m' \sum_1^{\infty} C_i \sin i(l - l'); \\ r' &= a' \left[1 + m \sum_1^{\infty} E'_i \cos i(l - l') \right], \\ v' &= l' + m \sum_1^{\infty} C'_i \sin i(l - l'); \end{aligned}$$

les lettres ont une signification bien connue; les C_i et les E_i sont des coefficients qui dépendent du rapport des grands axes à

(1) On suppose dans ce qui suit que les masses sont condensées dans les centres de gravité des planètes; mais on peut aussi assimiler le corps central à une des grosses planètes et tenir compte de l'effet de l'aplatissement de la planète.

et $2a'$ et des moyens mouvements n et n' . Les formules sont applicables à condition que le rapport $\frac{n'}{n}$ ne soit pas égal à $\frac{j}{j+1}$, j étant un entier positif.

Il est très facile de déduire des formules ci-dessus celles qui ont lieu lorsque M' est rapporté, comme on l'a fait (n° 4), au centre de gravité G de S et de M ; il suffit de retrancher $\frac{m}{1+m} r \cos(l-l')$ de r' ; on aura donc pour la solution particulière périodique

$$r = a \left(1 + m' \sum_1^{\infty} E_i \cos iu \right),$$

$$r' = a' \left(1 + m \sum_1^{\infty} E'_i \cos iu \right) - ma \cos u;$$

les valeurs sont approchées aux termes près du deuxième ordre.

D'une manière générale on peut écrire

$$r = a(1 + \xi), \quad r' = a'(1 + \xi'),$$

a et a' étant deux constantes et ξ , ξ' des séries trigonométriques ordonnées suivant les puissances des masses. De plus, ξ et ξ' ont respectivement en facteur la masse m' et la masse m ; il est aisé de s'en assurer, en considérant par exemple les expressions des coordonnées rectangulaires pour la solution particulière périodique et les substituant dans les équations différentielles correspondantes. Si l'on porte les valeurs de r et r' dans les équations différentielles du n° 4, on trouve, aux termes près du premier ordre,

$$\frac{1}{r^3} - \left(\frac{f}{r^2} \right)^2 = 0, \quad \frac{1}{r'^3} = \left(\frac{f'}{r'^2} \right)^2;$$

on écrit

$$\frac{f}{r^2} = n + \delta, \quad \frac{f'}{r'^2} = n' + \delta';$$

n et n' sont donnés par les relations

$$n = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}, \quad n' = \frac{1}{a'^{\frac{3}{2}}};$$

δ et δ' sont développables comme ξ et ξ' suivant les puissances des masses et contiennent respectivement en facteur la masse m' et la

masse m . Il est utile de modifier les notations et de mettre en évidence les facteurs m et m' en écrivant

$$\begin{aligned} r &= a(1 + m'\xi), & r' &= a'(1 + m'\xi'), \\ \frac{f}{r^2} &= n + m'\delta, & \frac{f'}{r'^2} &= n' + m'\delta', \\ n &= \frac{1}{a^2}, & n' &= \frac{1}{a'^2}. \end{aligned}$$

Après avoir posé, substituons les constantes a et a' (ou n et n') aux constantes d'intégration C et H , et montrons comment on tire de ces deux intégrales les valeurs de $\frac{f}{r^2}$ et $\frac{f'}{r'^2}$ en fonction de a , a' , et leurs dérivées.

Les deux intégrales sont

$$\mu f + \mu' f' = C \quad \text{ou} \quad \mu r^2 \frac{f}{r^2} + \mu' r'^2 \frac{f'}{r'^2} = C,$$

$$-\frac{m}{r} - \frac{m'}{r'} - \frac{mm'}{\Delta} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\mu'}{2} \left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + \frac{\mu r^2}{2} \left(\frac{f}{r^2}\right)^2 + \frac{\mu' r'^2}{2} \left(\frac{f'}{r'^2}\right)^2$$

Mettons à la place de r , r' , $\frac{f}{r^2}$, $\frac{f'}{r'^2}$ les valeurs ci-dessus ;

$$\mu a^2 n + \mu' a'^2 n' = C,$$

$$-\frac{m}{a} - \frac{m'}{a'} + \frac{\mu a^2}{2} n^2 + \frac{\mu' a'^2}{2} n'^2 = H;$$

Les termes des deux équations deviennent divisibles par mm' ; après suppression de ce facteur, les termes du second membre plus bas en δ et δ' sont

$$\begin{aligned} a^2 \delta + a'^2 \delta' + \dots &= 0, \\ a^2 n \delta + a'^2 n' \delta' + \dots &= 0; \end{aligned}$$

Le déterminant formé avec les coefficients de δ et δ' étant toujours différent de zéro, les deux équations feront connaître δ et δ' en fonction de ξ , ξ' , de leurs dérivées et de constantes a et a' , pourvu que les masses soient assez petites.

En portant les valeurs de r , r' , $\frac{f}{r^2}$ et $\frac{f'}{r'^2}$ dans les équations

n° 1, on aura pour déterminer ξ et ξ' deux équations différentielles, et les parties principales des premiers membres seront

$$\frac{d^2\xi}{du^2} + K^2\xi + \text{fonction périodique de } u,$$

$$\frac{d^2\xi'}{du^2} + K'^2\xi' + \text{fonction périodique de } u,$$

où

$$K^2 = \left(\frac{n}{n-n'}\right)^2, \quad K'^2 = \left(\frac{n'}{n-n'}\right)^2;$$

les termes suivants seront multipliés par les puissances et les produits des masses. Il est aisé de justifier la forme des termes ci-dessus : la première équation du n° 1, par exemple, doit se confondre avec l'équation qui donne la partie principale du rayon vecteur quand la masse troublante est nulle, c'est-à-dire le rayon vecteur elliptique

$$a[1 - e \cos(\vartheta - \varpi)] \quad \text{ou} \quad a \left[1 - e \cos\left(\frac{n}{n-n'} u - \varpi\right) \right].$$

Lorsqu'il n'y a pas de commensurabilité très approchée entre n et n' , telle que $\frac{n'}{n}$ soit à peu près égal à $\frac{j}{j+1}$ (ce qui rendrait illusoire les expressions données d'abord pour les inégalités indépendantes des excentricités et de l'inclinaison), on pourra partir des deux équations écrites comme il suit

$$\frac{d^2\xi}{du^2} + K^2\xi = \sum P, \quad \frac{d^2\xi'}{du^2} + K'^2\xi' = \sum Q;$$

on substituera dans les seconds membres les valeurs des inégalités mentionnées, et on aura rapidement les valeurs plus approchées (jusqu'aux termes du troisième ordre), en observant que, étant donnée l'équation

$$\frac{d^2\xi}{du^2} + K^2\xi = \sum P = \sum A \frac{\sin}{\cos}(iu + \alpha) \quad (i \text{ entier}),$$

on doit prendre

$$\xi = \sum \frac{A \frac{\sin}{\cos}(iu + \alpha)}{K^2 - i^2} = \sum \frac{P}{K^2 - i^2}.$$

Mais dans le cas d'une commensurabilité très approchée, il est

indiqué, pour assurer la précision des petits diviseurs, de joindre aux termes des premiers membres

$$\frac{d^2\xi}{du^2} + K^2\xi, \quad \frac{d^2\xi'}{du^2} + K^2\xi'$$

des deux équations les termes linéaires en ξ , ξ' , $\frac{d\xi}{du}$ et $\frac{d\xi'}{du}$, bien qu'ils soient d'ordre supérieur.

Il est essentiel de remarquer que la solution particulière périodique ne change pas si l'on met $-u$ à la place de u ; elle ne doit contenir que des cosinus de u et de ses multiples.

3. Supposons que l'on ait une solution particulière périodique d'un système réversible d'équations différentielles à coefficients périodiques. Voyons comment on pourra généraliser la méthode de M. Lindstedt et trouver par approximations successives une solution peu différente.

Prenons pour fixer les idées deux équations et désignons par x et y les petites corrections (comparables aux excentricités) à apporter à la solution particulière pour obtenir les véritables rayons vecteurs. Il n'y aura pas de termes constants dans les équations développées suivant les petites quantités x et y .

Soient $E = 0$, $F = 0$ les deux équations différentielles; mettons en évidence les termes des différents degrés en écrivant

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots = 0, \\ F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots = 0.$$

Pour la première approximation, on pose

$$E_1 = 0, \\ F_1 = 0.$$

D'après la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, il existe des intégrales particulières telles que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\mu n} e^{inu} \quad (n \text{ entier}),$$

où $i\mu$ désigne, suivant M. Poincaré, l'un des *exposants caractéristiques* de la solution périodique. De ce que le système est réversible, il suit d'ailleurs que les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signes contraires.

On pourra écrire les expressions des intégrales x et y dans la première approximation

$$(1) \begin{cases} x = \alpha \sum A e^{i\mu u} e^{i\nu u} + \beta \sum B e^{-i\mu u} e^{-i\nu u} + \alpha' \sum C e^{i\mu' u} e^{i\nu u} + \beta' \sum D e^{-i\mu' u} e^{-i\nu u}, \\ y = \gamma \sum A e^{i\mu u} e^{i\nu u} + \delta \sum B e^{-i\mu u} e^{-i\nu u} + \gamma' \sum C e^{i\mu' u} e^{i\nu u} + \delta' \sum D e^{-i\mu' u} e^{-i\nu u}; \end{cases}$$

α, β, α' et β' sont les quatre constantes d'intégration; les rapports $\gamma : \alpha, \delta : \beta, \dots$ sont connus. Nous supposons que μ et μ' aient des valeurs différentes et que ni μ ni μ' ne soient nulles. Les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont regardées comme de petites quantités du premier degré et leurs puissances et produits seront comparés aux puissances de α .

Pour passer à l'approximation suivante, on substitue dans les seconds membres des équations

$$\begin{aligned} E_1 &= S = -E_2 - E_3 - \dots, \\ F_1 &= T = -F_2 - F_3 - \dots, \end{aligned}$$

les premières valeurs de x et y , et on emploie ensuite la méthode de la variation des arbitraires : on écrit que les dérivées premières de x et y ont même forme dans les deux cas où l'on suppose les arbitraires α, β, \dots constantes et ensuite variables; on égale aux seconds membres les parties des dérivées secondes dépendant des dérivées $\frac{dx}{du}, \frac{d\beta}{du}, \dots$

Les expressions de $\frac{dx}{du}, \frac{d\beta}{du}, \dots$ sont données par des déterminants formés avec les solutions particulières et les valeurs des seconds membres. A cause des valeurs égales et de signes contraires des exposants caractéristiques, les déterminants développés sont linéaires par rapport aux exponentielles $e^{i\mu u}, e^{-i\mu u}, e^{i\mu' u}, e^{-i\mu' u}$. Il en résulte que si, après la substitution des premières valeurs de x et y , les seconds membres ne contiennent pas ces exponentielles, on n'a pas à craindre que $\frac{dx}{du}, \frac{d\beta}{du}, \dots$ contiennent des parties constantes et, par suite, que u apparaisse en dehors des cosinus et sinus.

Si les seconds membres contiennent les exponentielles mentionnées, elles seront multipliées par les coefficients α, β, \dots qui leur

sont attachés; mais il est à noter qu'elles ne pourront provenir que des groupes $E_1, E_3, \dots, F_1, F_3, \dots$ à indices impairs, qui sont des deuxième, quatrième, ... degrés par rapport à E_1 et F_1 . Écrivons en séparant les parties S^* et T^* des seconds membres qui renferment ces exponentielles

$$E_1 = S^* + S', \quad E = T^* + T',$$

et substituons à la place de $\alpha e^{i\mu u}$, $\beta e^{-i\mu u}$, ... dans S^* et T^* leurs valeurs en fonctions linéaires de $x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}$, déduites des équations écrites pour la variation des arbitraires; puis faisons passer S^* et T^* dans les premiers membres; on aura le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} E_1 - S^* &= S' & \text{ou} & & E' &= S', \\ F_1 - T^* &= T' & \text{ou} & & F' &= T'; \end{aligned}$$

il est linéaire, à coefficients périodiques, et on s'assure aisément qu'il est réversible; mais il ne présente plus l'inconvénient concernant l'apparition des arcs de cercle.

La substitution de ces deux équations différentielles au système primitif a pour conséquence de modifier les valeurs des exposants caractéristiques; mais il suit de ce qu'on a vu que les termes de correction sont au moins du deuxième degré, en général de degré pair.

La première approximation fait connaître les termes du premier degré et conduit aux valeurs x_1 et y_1 des intégrales; la deuxième conduit aux valeurs x_2 et y_2 approchées aux termes près du troisième degré et les exposants caractéristiques sont modifiés par des termes du deuxième degré, etc.

Ce qui précède montre que, une fois connues les inégalités indépendantes des excentricités, l'intégration des équations se ramène à celle d'équations linéaires à coefficients périodiques.

Remarque I. — Le type d'équations ci-dessus n'est pas le seul qui se présente dans les applications. Il peut arriver que le premier membre de l'équation, $E = 0$ par exemple, se compose d'une suite $E_0 + E_1 + E_2 + \dots$, à laquelle s'ajoute une intégrale portant sur une combinaison analogue; c'est ce qui a lieu dans les travaux de Lagrange (*Théories de Jupiter et de Saturne et des satellites de*

Jupiter) et dans ceux de M. Gyldén (*Recherches sur l'orbite intermédiaire de la Lune*); mais, puisque

$$\int e^{i\mu u} \times \text{fonct. périod. de } u. du = e^{i\mu u} \times \text{fonct. périod. de } u,$$

la difficulté rencontrée plus haut dans les approximations est de même nature pour les deux types d'équations; il n'y aura guère plus de difficulté à traiter un cas que l'autre si l'on emploie la méthode des coefficients indéterminés.

Une autre méthode déjà employée par Lagrange et perfectionnée par M. Gyldén se fonde sur cette remarque qu'une intégrale telle que $\int x \frac{\sin}{\cos} \lambda u. du$ peut être exprimée à très peu près au moyen de x et $\frac{dx}{du}$ en partant de l'équation différentielle réduite à ses termes principaux $\frac{d^2 x}{du^2} + K^2 x = 0$ [Cf. LAGRANGE, *Solution de différents problèmes de Calcul intégral*, Art. 83 (*Œuvres*, t. I); ANDOYER, *Contribution à la théorie des orbites intermédiaires*, p. 16 et suiv.).

Remarque II. — On a vu comment on faisait passer dans les premiers membres des équations différentielles les termes en $e^{i\mu u}$, ... qui auraient fait apparaître l'arc en dehors des sinus et cosinus. S'il existe entre les moyens mouvements une commensurabilité très approchée de telle sorte que, pour l'un des termes,

$$(e^{i\mu u})^\varepsilon (e^{-i\mu' u})^\sigma \times \text{fonct. périod. de } u = e^{i(\mu + \varepsilon)u} \times \text{fonct. périod. de } u,$$

ε soit très petit et comparable aux masses perturbatrices, rien n'empêche de procéder vis-à-vis de ces termes comme pour les termes séculaires; et si ε est plus sensible et qu'on veuille tenir compte des termes à longue période ainsi que des termes séculaires, peut-être serait-il à propos de faire varier les exposants caractéristiques pour avoir précisément $i(\mu + \varepsilon)$; on remplacerait ensuite les exponentielles par leurs expressions linéaires en $x, y, \frac{dx}{du}$ et $\frac{dy}{du}$.

4. Prenons comme application le mouvement d'une masse évanescente attirée par une masse centrale et une seconde masse décrivant une orbite circulaire autour de la masse centrale; on ne

considère que les mouvements dans le plan. C'est ce qu'on appelle souvent le problème *restreint*, problème qui a été envisagé d'abord par M. Hill et M. Tisserand, puis d'une manière spéciale par M. Poincaré dans son Mémoire couronné.

Les équations du problème peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega'}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega'}{\partial y};\end{aligned}$$

on a

$$\Omega' = \frac{\mu'}{r} + \mu' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x}{a^2} \right) + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2);$$

le mouvement de la petite masse est rapporté à un système d'axe mobiles ayant pour origine la masse centrale et tournant avec la vitesse angulaire n' de la masse troublante μ' ; l'axe des x pass

On sait qu'il existe une intégrale, celle de Jacobi, pour les deux équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx^2 + dy^2}{2dt^2} = \frac{1}{2} v^2 = \Omega' + \text{const.}$$

On va éliminer la vitesse v entre l'intégrale de Jacobi et la relation

$$\frac{v^2}{R} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{ds},$$

où ds est l'élément de la trajectoire et R son rayon de courbure; on introduit en même temps les coordonnées polaires, en posant

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta;\end{aligned}$$

θ désigne ainsi l'élongation des deux masses troublée et troublante; la dernière relation devient

$$(2) \quad \frac{v^2}{R} = -2n'v - r \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} \frac{dr}{ds}, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Il y a lieu d'introduire une constante arbitraire autre que celle de l'intégrale de Jacobi.

Soit, en considérant les orbites peu différentes du cercle,

$$(3) \quad r = \frac{a}{1 + \rho} = \frac{\left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + \rho};$$

a est une constante et ρ est supposé très petit.

Remplaçons dans les deux relations entre lesquelles on doit éliminer v les quantités par leurs valeurs principales; faisons partout $\mu' = 0$; il vient

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{a} + \frac{1}{2} n'^2 a^2 + \text{const.},$$

$$v^2 + 2 n' a v - \frac{\mu}{a} + n'^2 a^2 = 0;$$

la dernière donne

$$v = -n' a + \sqrt{\frac{\mu}{a}} = a(n - n');$$

il en résulte l'équation de condition suivante entre la nouvelle constante a (ou n) et la constante de l'intégrale de Jacobi,

$$\frac{1}{2} a^2 (n - n')^2 - \frac{\mu}{a} - \frac{1}{2} n'^2 a^2 = \text{const.}$$

Si nous posons

$$v = a(n - n') + \delta$$

dans les relations (1) et (2) et si nous développons suivant les puissances de ρ et de δ , il n'y aura pas de terme indépendant; il sera aisé de tirer de la relation (1), par exemple, δ développé suivant les puissances et produits de ρ et μ' , et, en substituant dans (2), il viendra une équation différentielle du second ordre et du type appelé réversible.

Nous allons développer cette équation, en nous bornant toutefois aux termes du premier degré en ρ , $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ et δ .

On a, à ce degré de précision,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \left(1 + \rho + \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right),$$

$$v^2 = a^2 (n - n')^2 + 2 C \rho + 2 D \mu';$$

en posant

$$C = \frac{\mu}{a} - n'^2 a^2 + \mu' \left(\frac{a^2 - aa' \cos \theta}{\Delta_0^3} + \frac{a \cos \theta}{a'^2} \right), \quad D = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{a \cos \theta}{a'^2},$$

$$\Delta_0^3 = a'^2 - 2aa' \cos \theta + a^2;$$

on a aussi, avec le degré de précision nécessaire,

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\partial \Omega'}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} + n'^2 r + \mu' \left(\frac{a' \cos \theta - r}{\Delta_0^3} - \frac{\cos \theta}{a'^2} \right) \\ &= -\frac{\mu}{a^2} (1 + 2\rho) + n'^2 a (1 - \rho) + \mu' \frac{a' \cos \theta - a}{\Delta_0^3} + \mu' \frac{a \rho}{\Delta_0^3} \\ &\quad - 3\mu' a \frac{(a' \cos \theta - a)^2}{\Delta_0^5} \rho - \mu' \frac{\cos \theta}{a'^2}, \\ \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} &= -\mu' \frac{a' r \sin \theta}{\Delta_0^3}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} \frac{dr}{ds} &= \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} = -\frac{1}{a} \frac{d\rho}{d\theta} \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta}, \\ &= +\mu' \frac{a' \sin \theta}{\Delta_0^3} \frac{d\rho}{d\theta}. \end{aligned}$$

Il vient pour l'équation différentielle

$$\frac{2C}{a} \rho + \frac{2D}{a} \mu' + a^2 (n - n')^2 \frac{1}{a} \left(\rho + \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} \right) = -2n' \frac{C\rho + D\mu'}{a(n - n')} - \frac{\partial \Omega'}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\theta}$$

on doit laisser de côté dans le second membre les termes indépendants de ρ et de μ' dans $\frac{\partial \Omega'}{\partial r}$. En réunissant les termes semblables, on trouve

$$\begin{aligned} a(n - n')^2 \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} - \mu' \frac{a' \sin \theta}{\Delta_0^3} \frac{d\rho}{d\theta} + \left(an^2 + \frac{\mu'}{a^2} \sum \right) \rho \\ + \mu' \frac{a' \cos \theta - a}{\Delta_0^3} - \mu' \frac{\cos \theta}{a'^2} + 2\mu' \frac{n}{n - n'} \frac{D}{a} = 0, \end{aligned}$$

\sum ayant la signification suivante

$$\begin{aligned} \sum &= \left(\frac{a}{\Delta_0} \right)^3 - 3 \frac{a^3 (a' \cos \theta - a)^2}{\Delta_0^5} \\ &\quad - 2 \frac{n}{n - n'} \frac{a^2 (a' \cos \theta - a)}{\Delta_0^3} + 2 \frac{n}{n - n'} \frac{a^2 \cos \theta}{a'^2}. \end{aligned}$$

L'équation précédente donnera les inégalités dépendantes de la

première puissance de l'excentricité et les inégalités qui en sont indépendantes.

Quand on néglige en outre les termes où μ' multiplie ρ et $\frac{d\rho}{d\theta}$, on a une équation qui se simplifie notablement et qui redonne des résultats connus de la théorie habituelle des perturbations.

Mais il y a lieu de conserver l'équation plus complète lorsque la distance Δ_0 peut devenir petite ou lorsque le rapport des moyens mouvements $\frac{n'}{n}$ est à peu près commensurable et tel qu'on ait $\frac{n'}{n} = \frac{i}{i+1}$, i étant un entier positif; parce qu'il y a alors un petit diviseur dans l'expression ordinaire des inégalités indépendantes des excentricités. Il convient pour obtenir ce petit diviseur avec précision de retenir les termes qui peuvent influencer sur les moyens mouvements et les diviseurs, bien qu'ils soient d'un ordre supérieur relativement aux premiers.

Dans le cas d'Hypérion il est tout indiqué d'employer l'équation complétée, puisque les deux circonstances mentionnées sont réunies: $\frac{n'}{n}$ est à très peu près égal à $\frac{3}{4}$ et $\frac{a}{\Delta_0}$ atteint environ 5.

§. Arrivons au problème des trois corps dans le cas des mouvements plans.

Les équations différentielles de Laplace (*Mécanique céleste*, Livre II, Ch. VI) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{2\mu}{a} + 4m' \int dR + 2m'r \frac{\partial R}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2 r^2}{dt^2} + \frac{2\mu}{r} - 2r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - 2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2m'r \frac{\partial R}{\partial r} &= 0, \end{aligned}$$

avec les équations analogues pour le second corps

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r'}{dt^2} - \frac{2\mu'}{r'} + \frac{2\mu'}{a'} + 4m \int d'R + 2m'r' \frac{\partial R'}{\partial r'} &= 0, \\ \frac{d^2 r'}{dt^2} + \frac{2\mu'}{r'} - 2r'^2 \left(\frac{dv'}{dt} \right)^2 - 2 \left(\frac{dr'}{dt} \right)^2 + 2m'r' \frac{\partial R'}{\partial r'} &= 0; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} R &= \frac{rr' \cos u}{r^3} - \frac{1}{\Delta}, & R' &= \frac{rr' \cos u}{r^3} - \frac{1}{\Delta}, \\ \mu &= M + m, & \mu' &= M + m'. \end{aligned}$$

Nous posons

$$r = \frac{a}{1+\rho}, \quad r' = \frac{a'}{1+\rho'}; \quad \frac{dv}{dt} = n + \delta, \quad \frac{dv'}{dt} = n' + \delta';$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad n' = \sqrt{\frac{\mu'}{a'^3}};$$

nous adoptons comme variable indépendante l'élongation u lieu de t ; il vient

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(v' - v)}{dt} = n' - n + \delta' - \delta,$$

$$-\frac{d^2 t}{dt^2} = \frac{d\delta'}{du} - \frac{d\delta}{du}.$$

Cela posé, les équations qui contiennent $\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{dv'}{dt}\right)^2$ conduisent aux expressions de δ et δ' en fonction de ρ , ρ' et de leurs dérivées; on les obtient par des approximations successives; d'abord, on trouve

$$2a^2 n \delta = \frac{\mu}{a} \rho - a^2 (n' - n)^2 \frac{d^2 \rho}{du^2} + m' r' \frac{\partial R}{\partial r},$$

$$2a'^2 n' \delta' = \frac{\mu'}{a'} \rho' - a'^2 (n' - n)^2 \frac{d^2 \rho'}{du^2} + m r' \frac{\partial R'}{\partial r'},$$

où l'on ne doit garder dans les développements de $r \frac{\partial R}{\partial r}$ et $r' \frac{\partial R'}{\partial r'}$ que les termes du premier degré en ρ et ρ' .

Une fois qu'on a calculé au degré d'approximation voulu

$$\delta, \quad \delta', \quad \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2 t}{dt^2},$$

on transforme les deux autres équations différentielles en introduisant partout u à la place de t . Bornons-nous aux termes du premier degré en ρ et ρ' . La première équation deviendra d'al

$$-2a^2 (n' - n)^2 \frac{d^2 \rho}{du^2} - 2a^2 (n' - n) \frac{d(\delta' - \delta)}{du} \frac{d\rho}{du} + \frac{2\mu}{a} \rho$$

$$+ 4m' \int \left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{dr}{du} - \frac{\partial R}{\partial u} \frac{dv}{du} \right) du + 2m' r \frac{\partial R}{\partial r} = 0.$$

Soit

$$R_0 = \frac{aa' \cos u}{a^3} - \frac{1}{\Delta_0}, \quad R'_0 = \frac{aa' \cos u}{a^3} - \frac{1}{\Delta_0},$$

$$\Delta_0^2 = a'^2 - 2aa' \cos u + a^2;$$

on prendra

$$\frac{d(\delta' - \delta)}{du} = \frac{1}{3} \left(\frac{m}{a'n} \frac{\partial^2 R'_0}{\partial a' \partial u} - \frac{m'}{na} \frac{\partial^2 R_0}{\partial a \partial u} \right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} \frac{dr}{du} = -\alpha \frac{\partial R_0}{\partial a} \frac{d\rho}{du},$$

$$\frac{\partial R}{\partial u} \frac{dv}{du} = \left(\frac{\partial R_0}{\partial u} - \frac{\partial^2 R_0}{\partial u \partial a} \alpha \rho - \frac{\partial^2 R_0}{\partial u \partial a'} \alpha' \rho' \right) \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du},$$

$$\frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{n + \delta}{n' - n + \delta' - \delta} = \frac{n}{n' - n} \left[1 - \frac{\delta'}{n' - n} + \frac{n'}{n(n' - n)} \delta \right],$$

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = \alpha \left(\frac{\partial R_0}{\partial a} - \frac{\partial^2 R_0}{\partial a^2} \alpha \rho - \frac{\partial^2 R_0}{\partial a \partial a'} \alpha' \rho' \right) (1 - \rho),$$

en négligeant les termes du degré supérieur au premier. On voit qu'on arrive à un système d'équations différentielles du type considéré dans la remarque I du n° 3.

Supposons qu'il s'agisse d'obtenir les inégalités proportionnelles aux excentricités des deux orbites. Il suffit pour cela d'intégrer les deux équations ci-dessus en laissant de côté les termes autres que les termes linéaires en ρ et ρ' . On a déjà indiqué deux procédés d'intégration : celui des coefficients indéterminés et celui de Lagrange-Gylden. Un troisième, qui n'est autre que la généralisation des résultats contenus dans la Note de M. Andoyer : *Sur les équations différentielles que l'on rencontre dans la théorie des orbites intermédiaires* (*Bulletin*, IV, p. 177) mérite d'être cité à cause de son élégance et parce qu'il l'emporte sur les autres sous le rapport de la précision. Il consiste à différentier les équations proposées, ce qui fait disparaître le signe d'intégration, et à réduire l'ordre du système différentiel augmenté de deux unités (on a deux équations différentielles du troisième ordre) en utilisant les solutions particulières périodiques propres à ce système.

D'une manière générale, le système d'équations linéaires auxquelles amène la considération d'une solution peu différente d'une solution particulière périodique, lorsqu'on néglige les carrés et les produits des variations, et que nous appellerons, avec M. Poincaré, *les équations aux variations*, admet des solutions particulières périodiques.

On a vu au n° 2 qu'il existait des solutions particulières du problème des trois corps dépendant des deux arbitraires a et a' et

fonctions périodiques de l'élongation u . Si l'on fait varier les arbitraires a et a' , il en résulte des solutions voisines de la solution initiale; les coefficients de δa et $\delta a'$, c'est-à-dire les dérivées partielles de la solution particulière périodique des équations différentielles par rapport aux constantes a et a' seront des solutions des équations aux variations.

Soient, dans le cas qui nous occupe, s et s' , t et t' les deux solutions particulières périodiques des équations aux variations — $a\rho$ et — $a'\rho'$ de r et r' ; nous ferons

$$\begin{aligned} -a\rho &= Cs + C's', \\ -a'\rho' &= Ct + C't'; \end{aligned}$$

en portant ces expressions dans les équations différentielles, il viendra deux équations du deuxième ordre relativement à $\frac{dC}{du}$ et $\frac{dC'}{du}$. De plus, on pourra tirer des deux équations $\frac{d^2}{du^2} \frac{dC}{du}$ et $\frac{d^2}{du^2} \frac{dC'}{du}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} s & s' \\ t & t' \end{vmatrix}$$

différant de l'unité par des termes de l'ordre des masses, puisque

$$r = a(1 + m'\xi), \quad r' = a'(1 + m'\xi')$$

représentant la solution particulière périodique des équations différentielles, on a

$$\begin{aligned} s &= \frac{\partial r}{\partial a}, & s' &= \frac{\partial r}{\partial a'}, \\ t &= \frac{\partial r'}{\partial a}, & t' &= \frac{\partial r'}{\partial a'}. \end{aligned}$$

La question est donc bien ramenée à intégrer deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

Remarque. — L'hypothèse d'une masse nulle, $m = 0$, donne lieu à un cas particulier du problème précédent qui mérite une attention spéciale à cause des applications : au mouvement d'une petite planète troublée par Jupiter, au mouvement d'Hypérioron troublé par Titan, enfin à la théorie de la Lune.

Quand l'orbite de la planète troublante est supposée circulaire, on se trouve dans le cas du problème traité au n° 4.

Il est à noter que le choix de l'élongation comme variable indépendante ne contredit pas l'opinion de Laplace sur le système de coordonnées le plus avantageux dans la théorie de la Lune (*Méc. céle.*, t. V, p. 397-398); car l'anomalie v' du Soleil s'exprime avec précision au moyen de l'anomalie vraie v de la Lune à cause de la faible valeur de m , et l'on a à très peu près $u = v - mv$, de sorte qu'on peut substituer v à u . Mais les travaux de MM. Hill et Adams tendent à montrer que la convergence est plus grande en prenant l'élongation comme variable indépendante.

Au reste, les applications dont une esquisse très rapide a été donnée n'ont pas pour objet de trancher la question du choix de la variable indépendante.

MESURE DIRECTE DE LA FLEXION DU LIMBE D'UN CERCLE MÉRIDIEN
PAR SES PROPRES MICROSCOPES;

PAR M. GRUEY.

I. Dans un travail déjà ancien, *Recherches sur la flexion de la lunette méridienne* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1870), nous avons montré qu'il est possible de mesurer la flexion du *tube* de la lunette méridienne, absolument comme un tour de vis, une distance de fils, en dehors de toute hypothèse, par des moyens purement physiques et pour une hauteur quelconque de la lunette. Malheureusement nous n'avions alors aucune ressource matérielle pour appliquer notre théorie. Quelques années plus tard, l'éminent sous-directeur de l'Observatoire de Paris, M. Lœwy, entrait dans la même voie pour en faire sortir la solution complète de la question sous la forme d'un appareil aussi ingénieux qu'élégant (*Annales de l'Observatoire de Paris*, Mémoire de MM. Lœwy et Périgaud) qui pourrait s'appeler *fleximètre du tube*.

Jusqu'ici les astronomes s'accordent pour déclarer presque nulle ou insensible la flexion du *limbe* même du cercle, sans en donner la preuve directe et positive. L'assertion paraîtra hasardée si l'on

remarque que cette flexion peut atteindre $20''$ à $30''$ dans un simple sextant (*Détermination exacte de la latitude*, par M. Perrin, lieutenant de vaisseau). Elle est certainement beaucoup plus faible dans la plupart des cercles méridiens incomparablement plus lourds, il est vrai, mais dont l'arc divisé s'étend sur une circonférence entière, au lieu de s'arrêter à 60° comme un bras de levier autour du centre. Il n'est pas probable cependant qu'elle soit négligeable sur tous les cercles. Pour la voir et la mesurer avec les propres microscopes de chaque cercle, voici une méthode qui n'exige que deux très petites pièces légères, un *porte-fil* et un *réflecteur* dont les diamètres atteignent au plus 3^{cm} , qui s'installent en quelques minutes, sans arrêter les observations méridiennes. L'ensemble de ces deux pièces constitue un *fleximètre du limbe*.

II. Dans tous les cercles, chaque microscope M est muni d'un porte-lumière P qui éclaire le trait t de la division visible dans le champ. La disposition de P nous importe peu; elle revient toujours à un petit miroir m percé d'une ouverture o sur le trajet de l'axe optique de M et recevant d'une lampe L, plus ou moins directement, la lumière qu'il réfléchit sur t , dans la direction oa sensiblement perpendiculaire au limbe. Quelle que soit la nature de P, fixons sur un rais R du cercle, rais calé devant M, les deux petites pièces suivantes construites solidement et de forme absolument invariable sous l'action de la pesanteur :

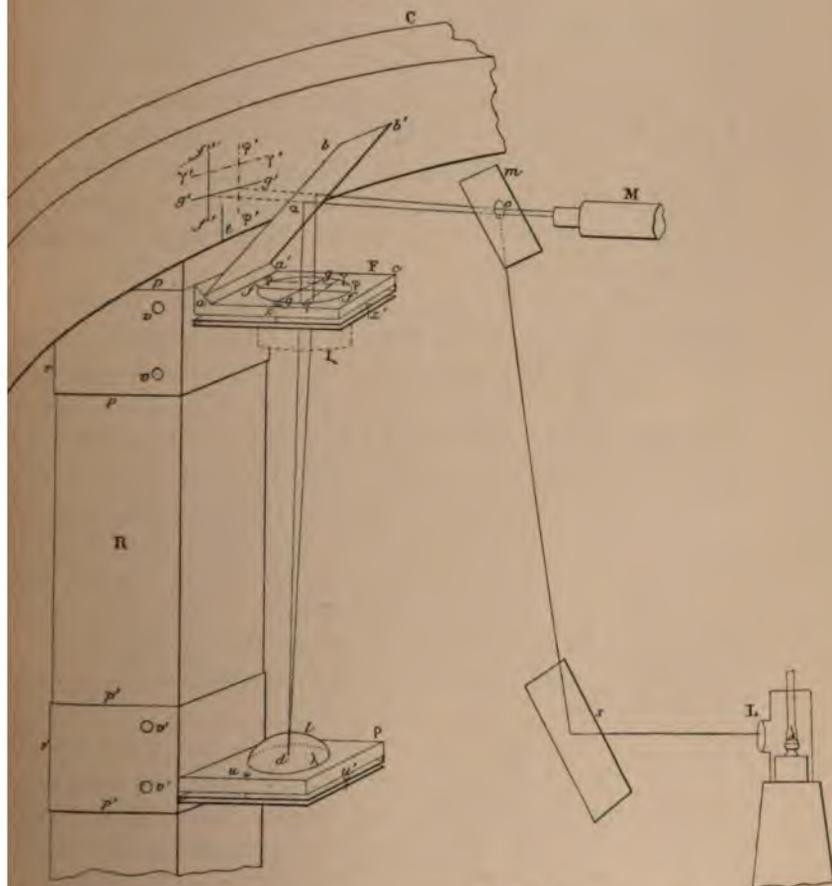
1° A l'extrémité r du rais un *porte-fil* F. Ce porte-fil se compose d'une platine prismatique pp en cuivre sur laquelle sont établis un miroir plan rectangulaire ab' et une plaque carrée ac , évidée circulairement, pour porter, à frottement dur, une douille I. Un fil d'araignée f est tendu sur cette douille, et perpendiculaire sensiblement à l'intersection aa' des plans ab' , ac . Le premier de ces plans bissecte l'angle droit formé par le second avec la direction de R.

La platine présente, dans son épaisseur, deux coulisses, l'une parallèle à R, l'autre perpendiculaire au limbe, qui permettent : la première de faire glisser F sur R jusqu'à ce que la projection de ab' sur le limbe recouvre les divisions du cercle; la deuxième d'approcher ou éloigner F du limbe jusqu'à ce que l'image f' de f

sur le miroir ab' soit vue dans M aussi nettement que le fil pointeur μ de ce microscope et simultanément. On fixe alors F sur R par les vis v dont la pression supprime absolument le jeu des coussins.

Le système acb' est monté sur une double lame de ressorts

Fig. 1.



robustes faisant corps avec pp et pouvant fléchir autour de leurs axes respectifs perpendiculaires entre eux, sous l'action de deux vis correspondantes v, v' ; en agissant sur ces vis très légèrement on dirige l'axe de la douille I sur le réflecteur ρ . Enfin, en tournant f faisant glisser très peu la douille sur elle-même, on rend l'image f'

parallèle à μ ou t et l'on achève la mise au point de cette image.

2° A la base r' du rais, un réflecteur ρ monté de même sur une platine à coulisses $p'p'$. Ce réflecteur se compose d'une lentille plan-convexe l , de 0^m,03 environ de diamètre, d'une distance focale δ sensiblement égale à la longueur $r'r$ du rais. La face plane λ est *argentée*, fait bon miroir et regarde l'axe du cercle. La lentille l est montée aussi sur une double lame de ressorts vigoureux faisant corps avec $p'p'$ et pouvant fléchir autour de leurs talons respectifs, perpendiculaires entre eux, sous l'action de deux vis correspondantes u, u' . Ce dispositif permet de faire varier légèrement et de régler parallèlement à R la direction de la normale à λ , dans le système ρ . Une fois réglée, elle reste rigoureusement invariable dans ce système. A l'aide des vis de pression v', v' on fixe fortement ρ sur R, après avoir fait glisser ρ jusqu'à la distance voulue δ de F.

Les fonctions de F et de ρ se devinent aisément. Les rayons de lumière ox , au lieu d'aller frapper les divisions du limbe, sont réfléchis par ab' dans la direction ad , traversent l , se réfléchissent sur λ et viennent former, dans le plan de la plaque ac , l'image réelle φ de f , si la distance de ρ à F est égale à δ et si, de plus, la normale v à λ diffère assez peu de la direction dz . Ces droites réelles f, φ donnent, par réflexion sur ab' , deux images virtuelles f', φ' situées sur le limbe même du cercle, dirigées comme les divisions et visibles dans le microscope ordinaire M de ce cercle.

Le réglage de δ et de v s'exécute très vite : d'une part, en faisant glisser ρ sur R; d'autre part, en agissant sur u, u' , tandis qu'un aide regarde dans M. J'ai réussi ce réglage presque immédiatement avec M. Hérique.

III. Le réglage fait, on mesure avec le fil mobile μ du microscope la distance initiale Δ_1 de f' et φ' ; distance qu'on pourrait d'ailleurs rendre nulle, par réglage de v , mais inutilement. On décale le cercle et on fait passer le rais R successivement sous chacun des cinq autres microscopes du cercle pour y mesurer $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$.

Les différences à Δ_1 de ces cinq dernières mesures expriment la flexion X_t du trait t lorsqu'il passe du premier microscope aux suivants, c'est-à-dire lorsque la hauteur h de la lunette subit des variations successives de 60°. Cela suffira généralement au calcul,

par interpolation, de X_t pour une valeur quelconque de h ; sinon, rien ne serait plus facile que de mesurer X_t pour des valeurs de h distantes de 30° , puis, s'il le fallait, de 15° seulement, en intercalant un microscope auxiliaire au milieu, puis au quart des intervalles des microscopes ordinaires, intercalation usitée dans la recherche des erreurs de division.

On aura ainsi les valeurs numériques de X_t pour une série de valeurs de h , en progression arithmétique, aussi rapprochées que l'on voudra.

On répétera ce travail pour chacun des douze traits $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}$ situés respectivement aux extrémités des douze rais que présente ordinairement le cercle divisé. Les valeurs $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{12}}$, correspondantes à une même valeur de h , permettront généralement de calculer, par interpolation, X_t pour cette valeur de h et pour un trait intermédiaire quelconque t ; sinon, il sera aisé de prolonger le travail en disposant entre deux rais consécutifs les pièces F et ρ : la première sur la jante, la seconde sur l'axe du cercle, jusqu'à ce que l'interpolation soit permise.

Finalement, on aura les éléments nécessaires au calcul d'une série trigonométrique donnant la flexion X en fonction des deux variables indépendantes t et h . On obtiendra rapidement ces éléments si l'on emploie simultanément plusieurs systèmes (F, ρ) au lieu d'un seul.

IV. En tendant sur la douille I un deuxième fil d'araignée g , perpendiculaire à f , et d'autre part, dans le plan focal de M , un deuxième fil mobile μ' perpendiculaire à μ , on pourra déterminer, en même temps que X , la flexion Y du cercle autour de son diamètre perpendiculaire au trait t . Le fil g et son image nadirale γ donneront par réflexion sur ab' deux images virtuelles g', γ' dont il suffira de mesurer la distance par μ' pour les diverses valeurs de h .

Inutile d'ajouter que le miroir ab' peut être remplacé avantageusement par un petit prisme à réflexion totale.

Notre fleximètre a déjà été essayé sur le cercle méridien de Besançon. Il fonctionne bien, malgré une coloration accidentelle des images f', g' , due probablement à quelque défaut de la partie

optique et que l'habile constructeur, M. Gautier, se propose de faire disparaître.

V. Les erreurs de division et d'excentricité, déterminées conjointement par la méthode usuelle qui les suppose indépendantes de h , ne sont qu'apparentes si X n'est pas identiquement nul. En donnant X , dont les effets perturbateurs ne se détruisent pas nécessairement dans la moyenne des six microscopes, le fleximètre permet de tenir compte de l'effet résultant et de connaître en outre les valeurs véritables de ces erreurs.

RECTIFICATION.

Sur le *Sismographe rectangulaire* dont j'ai donné la description dans le dernier numéro du *Bulletin astronomique*, j'ai reçu une réclamation de priorité de la part de M. Wolf, membre de l'Institut. Le savant astronome et physicien a effectivement établi, dès l'année 1883, dans les caves de l'Observatoire de Paris, un appareil destiné à montrer les mouvements du sol et décrit son appareil à la page 228 du tome XCVII des *Comptes rendus* dans une Note très détaillée. J'ignorais l'existence de cette Note et de cet appareil dont mon sismographe n'est que la reproduction amoindrie. J'ai été conduit à cette reproduction inconsciente par l'installation récente d'un magnétomètre enregistreur de M. Mascart, dont la balance présente un dispositif analogue, et par le débat ouvert dernièrement sur les variations de latitude.

L.-J. GRUEY.

OBSERVATIONS DES PLANÈTES (180), (254), (261), (272), (279), (284), (287), (294),
(297), (298), (300), (301)
ET DES COMÈTES ZONA (1890, nov. 15), SPITALER (1890, nov. 16),

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE NICE (équatorial Gautier, 0^m,38 d'ouverture);

PAR M. CHARLOIS.

l. T. m. de Nice. ΔR. ΔQ. N. de c. Rapp. log f. p. Q^e app. log f. p. ★

(180).

l.	h	m	s	m	s	.	h	m	s	.	h	m	s	.	h	m	s	.
9.	11.58.28			-0.14,62		-	7.22,6	6	3.17.30,86		1,340		70.21.30,2		0,585	n	1	
10.	11.40.3			-0.56,60		-	4.17,0	5	3.16.48,88		1,289		70.24.35,7		0,578	n	1	

(254).

15.	11.54.5			+0.3,47		+	2.57,5	6	0.31.44,48		1,031	n	90.40.54,3		0,790	n	2
-----	---------	--	--	---------	--	---	--------	---	------------	--	-------	---	------------	--	-------	---	---

(261).

17.	10.5.30			+1.40,31		-	9.21,9	5	5.46.10,05		1,346	n	67.41.24,8		0,543	n	3
18.	11.12.26			+3.35,06		-	8.59,8	5	5.44.57,39		2,931	n	67.39.53,6		0,509	n	4

(272).

6.	8.38.54			-0.30,16		-	1.15,6	7	23.37.7,44		1,495		101.55.1,0		0,838	n	5
9.	8.55.19			+1.14,41		-	4.12,7	4	23.39.56,40		1,538		101.33.10,4		0,830	n	6

(279).

18.	16.35.53			-1.53,16		+	1.7,0	6	7.8.45,03		1,550		66.8.59,8		0,590	n	7
10.	10.30.37			-2.1,41		+	2.36,9	3	6.53.45,50		1,102	n	65.40.21,3		0,477	n	8

(284).

14.	9.54.42			-1.55,91		-	9.40,1	5	3.33.59,73		2,015	n	73.13.58,5		0,600	n	9
17.	8.56.10			-3.57,70		+	3.27,7	5	3.31.57,94		2,984	n	73.27.6,3		0,608	n	9
15.	9.47.3			+2.50,43		+	4.5,4	5	3.25.0,80		1,281		74.33.51,7		0,637	n	10

74 www.libtool.com.cn MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

Dates.	T. m. de Nice.	$\Delta R.$	$\Delta \varphi.$	N. dec.	R app.	log f. p.	φ app.	log L.
(287).								
1890-91.	h m s	m s	"		h m s			
DÉC. 18.	12.17.37	-1.24,24	+ 3.34,3	5	7.14. 1,49	$\bar{1},092 n$	78.50.34,3	0,680 m
JANV. 5.	10.49.15	+1.21,92	+ 9.22,7	6	6.56.12,88	$\bar{1},095 n$	77.36.14,4	0,665 m

(294).								
OCT. 2.	8.25.54	-0.37,90	+ 3.20,5	7	20.55.54,30	$\bar{2},499$	109.44. 5,3	0,897 m
4.	9.38.47	+0.22,44	+ 3. 4,6	6	20.56.54,61	$\bar{1},264$	109.43.49,5	0,887 m

(297).								
OCT. 2.	11. 6.43	-6.24,51	- 2.11,1	4	22. 8.40,96	$\bar{1},280$	99.16.39,8	0,841 m
3.	11.14.33	-6.43,58	- 2.36,6	4	22. 8.21,88	$\bar{1},324$	99.16.14,3	0,840 m
NOV. 15.	9.16.29	+1.48,17	- 8. 9,8	5	22.17. 5,65	$\bar{1},439$	97.22.45,9	0,825 m
17.	7.41.19	+2. 2,51	+ 6. 9,2	5	22.18.24,37	$\bar{1},113$	97.13.18,9	0,833 m
DÉC. 11.	7.21.42	-2.56,24	+ 3. 8,6	5	22.39.17,47	$\bar{1},344$	94.51.29,9	0,815 m
JANV. 5.	7. 8.18	-1.23,69	+ 0.43,1	6	23. 7.53,66	$\bar{1},481$	91.39.47,2	0,794 m

(298).								
NOV. 14.	11.12. 3	-2.37,96	+ 7. 9,4	5	23.52.20,59	$\bar{1},471$	89.39.39,8	0,783 m
15.	7.12. 8	-2.31,84	+ 5.22,8	5	23.52.26,70	$\bar{1},050 n$	89.37.53,3	0,782 m
16.	7.41. 2	-2.22,95	+ 3. 4,2	5	23.52.35,58	$\bar{2},722 n$	89.35.34,7	0,782 m
DÉC. 13.	9. 5.49	-0.16,46	- 6.14,9	6	0. 7. 7,25	$\bar{1},412$	87.33.13,8	0,768 m
14.	7. 2.39	-1.16,74	+ 7.44,2	5	0. 7.55,89	$\bar{2},721$	87.27.17,4	0,764 m
JANV. 13.	9.40.21	+0.28,10	+ 5.20,7	5	0.43. 4,90	$\bar{1},599$	83.23. 8,9	0,761 m

(300).								
OCT. 3.	10.19. 3	-1.50,08	+ 7.26,7	5	0.17.58,22	$\bar{1},101 n$	88.47.19,7	0,775 m
4.	10. 7.28	+0.10,80	+ 4.49,2	6	0.17.15,41	$\bar{1},141 n$	88.51.43,7	0,776 m
NOV. 16.	8 .20. 9	-1.36,78	+ 8.14,8	5	23.58.55,40	$\bar{3},930$	90.37.25,2	0,790 m
17.	8.17. 2	-1.37,59	+ 8. 3,0	4	23.58.54,59	$\bar{2},002$	90.37.13,5	0,790 m
DÉC. 6.	11.19.35	-1.17,73	+ 4.14,4	7	0. 2.32,47	$\bar{1},588$	90. 7.31,7	0,785 m
8.	9.35. 4	-0.32,40	- 1.14,1	7	0. 3.17,78	$\bar{1},442$	90. 2. 3,3	0,785 m

(301).								
DÉC. 9.	11.16.46	-2.34,69	-- 7. 5,2	5	2.55.27,05	$\bar{1},245$	80.33.16,9	0,702 m
10.	9.50.24	-3. 5,87	- 6.28,3	5	2.54.55,87	$\bar{2},411$	80.33.53,9	0,695 m

T. m. de Nice. ΔR. Δ φ . N. de c. Rapp. log f. p. φ app. log f. p. *

◀ Zona (15 novembre 1890).

i.	h	m	s	m s	„	h	m	s					
17.	11.17.21	-5.	8,02	-1.40,3	4	5.24.29,44	1,468	n	56.	7.30,7	0,327	n	28
22.	16. 6.22	+3.	6,23	+10.20,3	5	4.54.12,07	1,601		55.	12.19,3	0,421	n	29

◀ Spitaler (16 novembre 1890).

6.	12.57.56	+0.46,20	+1.27,4	6	5.13.24,53	1,046	52.13.45,2	1,987	n	30	
10.	10.51.37	+3.49,21	-1.38,1	5	5. 9.47,40	1,148	n	51.37. 3,2	1,968	n	31
11.	11.14.12	-0.25,18	-1.37,0	5	5. 8.50,62	2,885	n	51.28.17,3	1,909	n	32

Positions des étoiles de comparaison.

Gr.	R. moy. 1890,0.	Réd. au J.	φ moy. 1890,0.	Réd. au J.	Autorités.
7	3.17.42,19	+3,29	70.29. 7,1	-14,3	D. M. +19°, 523, rapp. à $\frac{1}{2}$ (Paris 3973 + Arm ₂ 421). Id.
7	"	+3,29	"	-14,4	
10	0.31.38,65	+2,36	90.38.12,7	-15,9	D. M. - 0°, 91, rapp. à B. B. VI - 0°, 103. Weisse ₂ 1402 h. V. Kustner 184.
9,2	5.44.25,99	+3,75	67.50.50,2	-3,5	
9,5	5.41.18,57	+3,76	67.48.57,2	-3,8	
10	22.37.35,86	+1,74	101.56.24,9	-8,3	Anon. rapp. à $\frac{1}{4}$ (Gould 31005 + W ₁ 816 + L ₂ 3964 + S.2564). Anon. rapp. à $\frac{1}{4}$ (Gould 31005 + W ₁ 816 + L ₂ 3964 + S.2564).
11	22.38.40,28	+1,71	101.37.31,3	-8,2	
9,5	7.10.34,45	+3,73	66. 7.48,4	+4,4	B. B. VI + 23°, 1657.
6	6.55.46,44	+0,47	65.37.46,2	-1,8	Glasgow 1724.
8	3.35.52,32	+3,32	73.23.51,4	-12,8	Weisse ₂ 738 h. III.
8	"	+3,32	"	-12,8	Id.
9	3.22.10,74	-0,28	74.29.46,3	0,0	Weisse ₂ 417 h. III.
7,5	7.15.22,32	+3,41	78.46.56,8	+3,2	Glasgow 1837.
7,7	6.54.50,57	+0,39	77.26.53,3	-1,6	Glasgow 1719.
7	20.56.30,02	+2,18	109.40.51,0	-6,2	$\frac{1}{3}$ (Cinc. 3535 + Y. 9436 + 1 obs. Paris). Id.
7	"	+2,15	"	-6,1	
7	22.15. 3,13	+2,34	99.19. 3,2	-12,3	$\frac{1}{4}$ (Lam ₅ 3886 + W ₁ 259 + R. 10098 + 1 obs. Paris). Id.
7	"	+2,33	"	-12,3	
9,5	22.15.15,64	+1,84	97.31. 6,3	-10,6	$\frac{1}{2}$ (Lam ₂ 4548 + W ₁ 266).
8	22.16.20,05	+1,81	97. 7.20,1	-10,4	$\frac{1}{3}$ (L ₃ 4557 + W ₁ 289 + Ll. 43627).

76 www.libtool.com MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

★	Gr.	Moy. 1890,0.			Moy. 1890,0.			Autorités.
		h	m	s	h	m	s	
17.	9	22.42.	12,05	+1,66	94.48.31,9	-10,6	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{Y. 10020} + \text{Br. 10209} + \\ 5951). \end{array} \right.$	
18.	8,5	23. 9.	18,87	-1,52	91.38.55,1	+ 9,0		$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{L}_1 \text{ 9133} + \text{W}_1 \text{ 129-} \\ 1334). \end{array} \right.$
19.	8	23.54.	56,23	+2,32	89.32.45,8	-15,4	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{Lam}_1 \text{ 9375} + \text{R. 118} \\ \text{Id.} \\ \text{Id.} \end{array} \right.$	
19.	8	"		+2,31	"	-15,3		
19.	8	"		+2,30	"	-15,3		
20.	8,5	0. 7.	21,60	+2,11	87.39.43,1	-14,4	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{Schj. 45-46} + \text{Kam.} \\ + \text{Y. 63}). \end{array} \right.$	
21.	9	0. 9.	10,52	+2,11	87.19.47,7	-14,5	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{Kam. 41} + \text{Y. 84}). \\ \frac{1}{2}(\text{Paris 1003} + \text{Glasg.:} \\ 1334). \end{array} \right.$	
22.	6	0.42.	37,91	-1,11	83.17.42,5	+ 5,7		
23.	6	0.19.	45,79	+2,51	88.40. 9,5	-16,5	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{Gl. 101} + \text{Paris 449} + \\ \frac{1}{2}(\text{Paris 375} + \text{Schj. 11} \\ \frac{1}{2}(\text{Lam}_1 \text{ 9402} + \text{Kam.} \\ \text{Schj. 9991-92} + \text{R. 11} \\ \text{Id.} \end{array} \right.$	
24.	9,2	0.17.	2,10	+2,51	88.47.11,0	-16,5		
25.	7,8	0. 0.	29,85	+2,33	90.29.25,5	-15,1	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{Schj. 9991-92} + \text{R. 11} \\ \text{Id.} \end{array} \right.$	
25.	7,8	"		+2,33	"	-15,0		
26.	10	0. 3.	48,04	+2,16	90. 3.31,3	-14,0	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Anon. rapp. à } \frac{1}{2}(\text{Paris 5;} \\ + \text{Kam. 9-10-11-12-1} \\ \text{Id.} \end{array} \right.$	
26.	10	"		+2,14	"	-13,9		
27.	9	2.57.	58,68	+3,06	80.40.35,7	-13,6	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kustner 125.} \\ \text{Id.} \end{array} \right.$	
27.	9	"		+3,06	"	-13,5		
28.	9	5.29.	33,94	+3,52	56. 9.13,8	- 2,8	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Weisse}_2 \text{ 805 h. V.} \\ \text{Weisse}_2 \text{ 1089 h. IV.} \end{array} \right.$	
29.	8,5	4.51.	2,11	+3,73	55. 2. 5,5	- 6,5		
30.	8	5.12.	34,23	+4,10	52.12.23,5	- 5,7	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\text{Lal. 9881} + 1 \text{ obs. P} \\ \mu \text{ Cocher } (\text{Berl. Jahr} \\ \text{Weisse}_2 \text{ 161 h. V.} \end{array} \right.$	
31.	5	5. 5.	54,02	+4,17	51.38.48,0	- 6,7		
32.	9	5. 9.	11,59	+4,21	51.30. 0,9	- 6,6		

Remarques. — Le 22 novembre, la comète Zōna a l'aspect d'une nébulosité circulaire de 1',5 de diamètre environ, avec une condensation centrale dont l'éclat est celui d'une étoile de 11 à 12^e grandeur.

Le 10 décembre, la comète Spitaler est faible; son noyau de grandeur 13,5 à 14,0 est entouré d'une nébulosité peine visible de 15" à 20" de diamètre.

* Les positions moyennes des étoiles marquées d'un astérisque sont données pour 1891,0.

COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES DE JUPITER,

Tirées des Tables de Le Verrier [suite (1)];

PAR J. CONIEL.

	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.	Diff.
<i>Équinoxe -1789, décembre 30, 7 (1790,0).</i>						
17...	343.15.15,4		-1.11.29,8		0,6970338	
6...	345. 4. 8,7	+1.48.53,3	1.12.31,1	-1. 1,3	0,6967542	-2796
26...	346.53.10,1	1.49. 1,4	1.13.28,0	0.56,9	0,6964924	2618
A. 15...	348.42.19,2	1.49. 9,1	1.14.20,6	0.52,6	0,6962490	2434
IS 7...	350.31.35,5	1.49.16,3	1.15. 8,8	0.48,2	0,6960241	2249
27...	352.20.58,2	1.49.22,7	1.15.52,4	0.43,6	0,6958179	2062
MIL 6...	354.10.26,9	1.49.28,7	1.16.31,5	0.39,1	0,6956308	1871
VI 6...	356. 0. 1,0	1.49.34,1	1.17. 5,9	0.34,4	0,6954632	1676
26...	357.49.39,9	1.49.38,9	1.17.35,6	0.29,7	0,6953151	1481
JAN 15...	359.39.23,1	1.49.43,2	1.18. 0,7	0.25,1	0,6951867	1284
FEB. 5...	1.29. 9,9	1.49.46,8	1.18.20,9	0.20,2	0,6950781	1086
25...	3.18.59,9	1.49.50,0	1.18.36,4	0.15,5	0,6949894	887
AOUT 14...	5. 8.52,2	1.49.52,3	1.18.47,1	0.10,7	0,6949208	686
SEPT. 3...	6.58.46,4	1.49.54,2	1.18.53,0	0. 5,9	0,6948724	484
23...	8.48.41,9	1.49.55,5	1.18.54,0	-0. 1,0	0,6948442	282
OCT. 13...	10.38.37,8	1.49.55,9	1.18.50,2	+0. 3,8	0,6948362	- 80
NOV. 2...	12.28.33,6	1.49.55,8	1.18.41,6	0. 8,6	0,6948485	+ 123
22...	14.18.28,7	1.49.55,1	1.18.28,1	0.13,5	0,6948811	326
DÉC. 12...	16. 8.22,5	1.49.53,8	1.18. 9,8	0.18,3	0,6949340	529
JANV. 1...	17.58.14,3	1.49.51,8	1.17.46,8	0.23,0	0,6950073	733
21...	19.48. 3,5	1.49.49,2	1.17.19,0	0.27,8	0,6951006	933
FÉVR. 10...	21.37.49,5	1.49.46,0	1.16.46,5	0.32,5	0,6952139	1133
MARS 2...	23.27.31,8	1.49.42,3	1.16. 9,3	0.37,2	0,6953471	1332
22...	25.17. 9,7	1.49.37,9	1.15.27,4	0.41,9	0,6954999	1528
AVRIL 11...	27. 6.42,5	1.49.32,8	1.14.41,0	0.46,4	0,6956723	1724
MAI 1...	28.56. 9,7	1.49.27,2	1.13.50,1	0.50,9	0,6958638	1915
21...	30.45.30,9	1.49.21,2	1.12.54,8	0.55,3	0,6960744	2106
JUN 10...	32.34.45,4	1.49.14,5	1.11.55,1	0.59,7	0,6963037	2293
30...	34.23.52,4	1.49. 7,0	1.10.51,1	1. 4,0	0,6965515	2478
JUL. 20...	36.12.51,7	1.48.59,3	1. 9.42,9	1. 8,2	0,6968175	2660
AOUT 9...	38. 1.42,7	1.48.51,0	1. 8.30,6	1.12,3	0,6971013	2838
29...	39.50.24,9	1.48.42,2	1. 7.14,3	1.16,3	0,6974027	3014
SEPT. 18...	41.38.57,6	1.48.32,7	1. 5.54,1	1.20,2	0,6977212	3185
OCT. 8...	43.27.20,5	1.48.22,9	1. 4.30,1	1.24,0	0,6980564	3352
28...	45.15.33,0	+1.48.12,5	-1. 3. 2,4	+1.27,7	0,6984080	+3516

o h. Temps moyen de Paris.	Longitude héliocentrique.	DIF.	Latitude héliocentrique.	DIF.	Logarithme du rayon vecteur.
1786. OCT. 28...	45.15.33,0	.	-1. 3. 2,4	.	0,6984080
NOV. 17...	47. 3.34,8	+1.48. 1,8	1. 1.31,1	+1.31,3	0,6987756
DÉC. 7...	48.51.25,4	1.47.50,6	0.59.56,3	1.34,8	0,6991587
27...	50.39. 4,1	1.47.38,7	0.58.18,1	1.38,2	0,6995569
1787. JANV. 16...	52.26.30,5	1.47.26,4	0.56.36,7	1.41,4	0,6999698
FÉVR. 5...	54.13.44,3	1.47.13,8	0.54.52,2	1.44,5	0,7003968
25...	56. 0.45,2	1.47. 0,9	0.53. 4,7	1.47,5	0,7008375
MARS 17...	57.47.32,7	1.46.47,5	0.51.14,4	1.50,3	0,7012914
AVRIL 6...	59.34. 6,6	1.46.33,9	0.49.21,4	1.53,0	0,7017580
26...	61.20.26,5	1.46.19,9	0.47.25,7	1.55,7	0,7022368
MAI 16...	63. 6.32,1	1.46. 5,6	0.45.27,6	1.58,1	0,7027272
JUIN 5...	64.52.23,1	1.45.51,0	0.43.27,2	2. 0,4	0,7032288
23...	66.37.59,2	1.45.36,1	0.41.24,6	2. 2,6	0,7037408
JUILL. 15...	68.23.20,2	1.45.21,0	0.39.19,9	2. 4,7	0,7042629
AOUT 4...	70. 8.25,7	1.45. 5,5	0.37.13,3	2. 6,6	0,7047945
24...	71.53.15,7	1.44.50,0	0.35. 5,0	2. 8,3	0,7053351
SEPT. 13...	73.37.49,9	1.44.34,3	0.32.55,1	2. 9,9	0,7058840
OCT. 3...	75.22. 8,1	1.44.18,2	0.30.43,6	2.11,5	0,7064407
23...	77. 6.10,1	1.44. 2,0	0.28.30,8	2.12,8	0,7070045
NOV. 12...	78.49.55,7	1.43.45,6	0.26.16,8	2.14,0	0,7075750
DÉC. 2...	80.33.24,7	1.43.29,0	0.24. 1,7	2.15,1	0,7081516
22...	82.16.37,2	1.43.12,5	0.21.45,7	2.16,0	0,7087337
1788. JANV. 11...	83.59.33,1	1.42.55,9	0.19.28,8	2.16,9	0,7093208
31...	85.42.12,2	1.42.39,1	0.17.11,3	2.17,5	0,7099124
FÉVR. 20...	87.24.34,4	1.42.22,2	0.14.53,3	2.18,0	0,7105079
MARS 11...	89. 6.39,7	1.42. 5,3	0.12.34,8	2.18,5	0,7111067
31...	90.48.28,1	1.41.48,4	0.10.16,1	2.18,7	0,7117083
AVRIL 20...	92.29.59,6	1.41.31,5	0. 7.57,2	2.18,9	0,7123121
MAI 10...	94.11.14,1	1.41.14,5	0. 5.38,3	2.18,9	0,7129175
30...	95.52.11,6	1.40.57,5	0. 3.19,4	2.18,9	0,7135240
JUIN 19...	97.32.52,1	1.40.40,5	-0. 1. 0,8	2.18,6	0,7141311
JUILL. 9...	99.13.15,8	1.40.23,7	+0. 1.17,5	2.18,3	0,7147383
29...	100.53.22,7	1.40. 6,9	0. 3.35,3	2.17,8	0,7153451
AOUT 18...	102.33.12,9	1.39.50,2	0. 5.52,5	2.17,2	0,7159510
SEPT. 7...	104.12.46,4	1.39.33,5	0. 5.52,5	2.16,6	0,7165554
27...	105.52. 3,3	1.39.16,9	0. 8. 9,1	2.15,8	0,7171578
OCT. 17...	107.31. 3,8	1.39. 0,5	0.10.24,9	2.14,9	0,7177578
NOV. 6...	109. 9.48,1	1.38.44,3	0.12.39,8	2.13,9	0,7183549
26...	110.48.16,3	1.38.28,2	0.14.53,7	2.12,8	0,7189486
DÉC. 16...	112.26.28,4	1.38.12,1	0.17. 6,5	2.11,6	0,7195383
1789. JANV. 5...	114. 4.24,6	1.37.56,2	0.19.18,1	2.10,3	0,7201238
25...	115.42. 5,1	1.37.40,5	0.21.28,4	2. 8,9	0,7207045
FÉVR. 14...	117.19.50,0	1.37.24,9	0.23.37,3	2. 7,4	0,7212800
MARS 6...	118.56.39,5	+1.37. 9,5	+0.25.44,7	+2. 5,9	0,7218498

	Longitude héliocentrique.	Dif.	Latitude héliocentrique.	Dif.	Logarithme du rayon vecteur.	Dif.
	118.56.39,5	*	+0.27.50,6	*	0,7218498	
	120.33.33,9	+1.36.54,4	0.29.54,8	+2. 4,2	0,7224136	+5638
	122.10.13,5	1.36.39,6	0.31.57,2	2. 2,4	0,7229709	5573
	123.46.38,4	1.35.24,9	0.33.57,9	2. 0,7	0,7235213	5504
	125.22.48,7	1.36.10,3	0.35.56,6	r.58,7	0,7240645	5432
	126.58.44,7	1.35.56,0	0.37.53,4	1.56,8	0,7246000	5355
	128.34.26,7	1.35.42,0	0.39.48,1	1.54,7	0,7251276	5276
	130. 9.54,9	1.35.28,2	0.41.40,7	1.52,6	0,7256470	5194
	131.45. 9,7	1.35.14,8	0.43.31,1	1.50,4	0,7261576	5106
	133.20.11,4	1.35. 1,7	0.45.19,2	1.48,1	0,7266590	5014
	134.55. 0,1	1.34.48,7	0.47. 5,0	1.45,8	0,7271511	4921
	136.29.36,1	1.34.36,0	0.48.48,5	1.43,5	0,7276337	4826
	138. 3.59,8	1.34.23,7	0.50.29,5	1.41,0	0,7281062	4725
	139.38.11,3	1.34.11,5	0.52. 8,1	1.38,6	0,7285683	4621
	141.12.11,1	1.33.59,8	0.53.44,0	1.35,9	0,7290197	4514
	142.45.59,4	1.33.48,3	0.55.17,4	1.33,4	0,7294603	4406
	144.19.36,5	1.33.37,1	0.56.48,2	1.30,8	0,7298898	4295
	145.53. 2,8	1.33.26,3	0.58.16,2	1.28,0	0,7303079	4181
	147.26.18,5	1.33.15,7	0.59.41,5	1.25,3	0,7307143	4064
	148.59.23,9	1.33. 5,4	1. 1. 4,0	1.22,5	0,7311087	3944
	150.32.19,5	1.32.55,6	1. 2.23,6	1.19,6	0,7314910	3823
	152. 5. 5,6	1.32.46,1	1. 3.40,4	1.16,8	0,7318609	3699
	153.37.42,4	1.32.36,8	1. 4.54,3	1.13,9	0,7322181	3572
	155.10.10,2	1.32.27,8	1. 6. 5,3	1.11,0	0,7325625	3444
	156.42.29,5	1.32.19,3	1. 7.13,3	1. 8,0	0,7328939	3314
	158.14.40,6	r.32.11,1	1. 8.18,3	1. 5,0	0,7332123	3184
	159.46.43,9	r.32. 3,3	1. 9.20,3	1. 2,0	0,7335172	3049
	161.18.39,6	r.31.55,7	1.10.19,2	0.58,9	0,7338085	2913
	162.50.28,1	r.31.48,5	1.11.15,1	0.55,9	0,7340861	2776
	164.22. 9,9	r.31.41,8	1.12. 7,8	0.52,7	0,7343498	2637
	165.53.45,3	r.31.35,4	1.12.57,3	0.49,5	0,7345996	2498
	167.25.14,6	r.31.29,3	1.13.43,7	0.46,4	0,7348353	2357
	168.56.38,1	r.31.23,5	1.14.27,0	0.43,3	0,7350568	2215
	170.27.56,3	r.31.18,2	1.15. 7,0	0.40,0	0,7352638	2070
	171.59. 9,5	r.31.13,2	1.15.43,9	0.36,9	0,7354562	1924
	173.30.18,1	r.31. 8,6	1.16.17,5	0.33,6	0,7356340	1778
	175. 1.22,4	r.31. 4,3	1.16.47,9	0.30,4	0,7357971	1631
	176.32.22,7	r.31. 0,3	1.17.15,0	0.27,1	0,7359455	1484
	178. 3.19,6	r.30.56,9	1.17.38,8	0.23,8	0,7360790	1335
	179.34.13,5	r.30.53,9	1.17.59,4	0.20,6	0,7361976	1186
	181. 5. 4,5	r.30.51,0	1.18.16,7	0.17,3	0,7363011	1035
	182.35.53,2	r.30.48,7	1.18.30,8	0.14,1	0,7363896	885
	184. 6.39,9	r.30.46,7	1.18.41,5	0.10,7	0,7364630	734
	185.37.24,9	+r.30.45,0	+1.18.48,9	+0. 7,4	0,7365213	+587

o h. Temps moyen de Paris.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.
1791. JUIL. 14...	185. 37. 24,9		+1. 18. 48,9		0,7365213
AOUT 3...	187. 8. 8,6	+1. 30. 43,7	1. 18. 53,1	+0. 4,2	0,7365644
23...	188. 38. 51,5	1. 30. 42,9	1. 18. 54,0	+0. 0,9	0,7365924
SEPT. 12...	190. 9. 33,8	1. 30. 42,3	1. 18. 51,6	-0. 2,4	0,7366051
OCT. 2...	191. 40. 15,9	1. 30. 42,1	1. 18. 45,8	0. 5,8	0,7366026
22...	193. 10. 58,2	1. 30. 42,3	1. 18. 36,8	0. 9,0	0,7365850
NOV. 11...	194. 41. 41,2	1. 30. 43,0	1. 18. 24,5	0. 12,3	0,7365522
DÉC. 1...	196. 12. 25,2	1. 30. 44,0	1. 18. 8,9	0. 15,6	0,7365041
21...	197. 43. 10,6	1. 30. 45,4	1. 17. 50,1	0. 18,8	0,7364408
1792. JANV. 10...	199. 13. 57,8	1. 30. 47,2	1. 17. 28,0	0. 22,1	0,7363625
30...	200. 44. 47,1	1. 30. 49,3	1. 17. 2,6	0. 25,4	0,7362691
FÉVR. 19...	202. 15. 39,0	1. 30. 51,9	1. 16. 34,0	0. 28,6	0,7361606
MARS 10...	203. 46. 33,7	1. 30. 54,7	1. 16. 2,2	0. 31,8	0,7360371
30...	205. 17. 31,6	1. 30. 57,9	1. 15. 27,1	0. 35,1	0,7358988
AVRIL 19...	206. 48. 33,2	1. 31. 1,6	1. 14. 48,9	0. 38,2	0,7357456
MAI 9...	208. 19. 38,8	1. 31. 5,6	1. 14. 7,5	0. 41,4	0,7355776
29...	209. 50. 48,8	1. 31. 10,0	1. 13. 22,9	0. 44,6	0,7353950
JUIN 18...	211. 22. 3,4	1. 31. 14,6	1. 12. 35,2	0. 47,7	0,7351978
JUIL. 8...	212. 53. 23,1	1. 31. 19,7	1. 11. 44,3	0. 50,9	0,7349862
28...	214. 24. 48,2	1. 31. 25,1	1. 10. 50,4	0. 53,9	0,7347603
AOUT 17...	215. 56. 19,3	1. 31. 31,1	1. 9. 53,4	0. 57,0	0,7345202
SEPT. 6...	217. 27. 56,6	1. 31. 37,3	1. 8. 53,4	1. 0,0	0,7342659
26...	218. 59. 40,4	1. 31. 43,8	1. 7. 50,4	1. 3,0	0,7339975
OCT. 16...	220. 31. 31,1	1. 31. 50,7	1. 6. 44,4	1. 6,0	0,7337154
NOV. 5...	222. 3. 29,1	1. 31. 58,0	1. 5. 35,4	1. 9,0	0,7334196
23...	223. 35. 34,6	1. 32. 5,5	1. 4. 23,5	1. 11,9	0,7331104
DÉC. 13...	225. 7. 48,1	1. 32. 13,5	1. 3. 8,7	1. 14,8	0,7327879
1793. JANV. 4...	226. 40. 9,9	1. 32. 21,8	1. 1. 51,1	1. 17,6	0,7324523
24...	228. 12. 40,3	1. 32. 30,4	1. 0. 30,7	1. 20,4	0,7321037
FÉVR. 13...	229. 45. 19,8	1. 32. 39,5	0. 59. 7,5	1. 23,2	0,7317423
MARS 5...	231. 18. 8,6	1. 32. 48,8	0. 57. 41,6	1. 25,9	0,7313684
25...	232. 51. 7,1	1. 32. 58,5	0. 56. 13,0	1. 28,6	0,7309822
AVRIL 14...	234. 24. 15,7	1. 33. 8,6	0. 54. 41,8	1. 31,2	0,7305840
MAI 4...	235. 57. 34,6	1. 33. 18,9	0. 53. 8,0	1. 33,8	0,7301740
24...	237. 31. 4,2	1. 33. 29,6	0. 51. 31,6	1. 36,4	0,7297523
JUIN 13...	239. 4. 44,7	1. 33. 40,5	0. 49. 52,8	1. 38,8	0,7293193
JUIL. 3...	240. 38. 36,4	1. 33. 51,7	0. 48. 11,5	1. 41,3	0,7288752
23...	242. 12. 39,7	1. 34. 3,3	0. 46. 27,9	1. 43,6	0,7284203
AOUT 12...	243. 46. 55,0	1. 34. 15,3	0. 44. 42,0	1. 45,9	0,7279550
SEPT. 1...	245. 21. 22,4	1. 34. 27,4	0. 42. 53,8	1. 48,2	0,7274793
21...	246. 56. 2,2	1. 34. 39,8	0. 41. 3,4	1. 50,4	0,7269937
1793. OCT. 11...	248. 30. 54,8	1. 34. 52,6	0. 39. 10,9	1. 52,5	0,7264986
31...	250. 6. 0,4	1. 35. 5,6	0. 37. 16,4	1. 54,5	0,7259942
NOV. 20...	251. 41. 19,4	+1. 35. 19,0	+0. 35. 19,8	-1. 56,6	0,7254809

Moyens rés.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.	Diff.
20...	251.41.19,4		+0.35.19,8		0,7254809	
10...	253.16.51,9	+1.35.32,5	0.33.21,4	-1.58,4	0,7249590	-5219
30...	254.52.38,2	1.35.46,3	0.31.21,1	2. 0,3	0,7244288	5302
19...	256.28.38,7	1.36. 0,5	0.29.19,0	2. 2,1	0,7238908	5380
8...	258. 4.53,5	1.36.14,8	0.27.15,3	2. 3,7	0,7233452	5456
28...	259.41.22,8	1.36.29,3	0.25.10,0	2. 5,3	0,7227926	5526
20...	261.18. 6,9	1.36.44,1	0.23. 3,1	2. 6,9	0,7222333	5593
9...	262.55. 6,1	1.36.59,2	0.20.54,8	2. 8,3	0,7216676	5657
29...	264.32.20,5	1.37.14,4	0.18.45,2	2. 9,6	0,7210961	5715
19...	266. 9.50,3	1.37.29,8	0.16.34,3	2.10,9	0,7205191	5770
8...	267.47.35,7	1.37.45,4	0.14.22,3	2.12,0	0,7199370	5821
28...	269.25.36,8	1.38. 1,1	0.12. 9,2	2.13,1	0,7193502	5868
18...	271. 3.53,8	1.38.17,0	0. 9.55,2	2.14,0	0,7187593	5909
7...	272.42.27,0	1.38.33,2	0. 7.40,3	2.14,9	0,7181647	5946
27...	274.21.16,5	1.38.49,5	0. 5.24,7	2.15,6	0,7175669	5978
16...	276. 0.22,3	1.39. 5,8	0. 3. 8,4	2.16,3	0,7169664	6005
6...	277.39.44,5	1.39.22,2	+0. 0.51,6	2.16,8	0,7163636	6028
26...	279.19.23,3	1.39.38,8	-0. 1.25,7	2.17,3	0,7157590	6046
15...	280.59.18,8	1.39.55,5	0. 3.43,2	2.17,5	0,7151531	6059
5...	282.39.31,0	1.40.12,3	0. 6. 0,9	2.17,7	0,7145464	6067
25...	284.20. 0,0	1.40.29,0	0. 8.18,7	2.17,8	0,7139394	6070
14...	286. 0.45,9	+1.40.45,9	-0.10.36,5	-2.17,8	0,7133325	-6069

Équinoxe 1800, janvier 0, 1.

25...	284.28.22,3		-0. 8.23,2		0,7139394	
14...	286. 9. 8,2	+1.40.45,9	0.10.40,9	-2.17,7	0,7133325	-6069
3...	287.50.11,1	1.41. 2,9	0.12.58,5	2.17,6	0,7127265	6060
23...	289.31.30,9	1.41.19,8	0.15.15,7	2.17,2	0,7121219	6046
13...	291.13. 7,6	1.41.36,7	0.17.32,6	2.16,9	0,7115192	6027
4...	292.55. 1,4	1.41.53,8	0.19.48,9	2.16,3	0,7109189	6003
24...	294.37.12,1	1.42.10,7	0.22. 4,5	2.15,6	0,7103215	5974
14...	296.19.39,8	1.42.27,7	0.24.19,3	2.14,8	0,7097276	5939
3...	298. 2.24,3	1.42.44,5	0.26.33,2	2.13,9	0,7091377	5899
23...	299.45.25,4	1.43. 1,1	0.28.46,1	2.12,9	0,7085523	5854
13...	301.28.43,2	1.43.17,8	0.30.57,7	2.11,6	0,7079722	5801
2...	303.12.17,6	1.43.34,4	0.33. 8,0	2.10,3	0,7073979	5743
22...	304.56. 8,3	1.43.50,7	0.35.16,9	2. 8,9	0,7068298	5681
11...	306.40.15,3	1.44. 7,0	0.37.24,1	2. 7,2	0,7062686	5612
1...	308.24.38,5	1.44.23,2	0.39.29,6	2. 5,5	0,7057148	5538
21...	310. 9.17,7	1.44.39,9	0.41.33,2	2. 3,6	0,7051691	5457
10...	311.54.12,7	1.44.55,0	0.43.34,8	2. 1,6	0,7046318	5373
30...	313.39.23,2	+1.45.10,5	-0.45.34,2	-1.59,4	0,7041037	-5281

o. h.	Temps moyen de Paris.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	du
1795.	NOV. 30...	313.39.23,2		-0.45.34,2		0
	DÉC. 29...	315.24.49,0	+1.45.25,8	0.47.31,3	-1.57,1	0
1796.	JANV. 9...	317.10.29,8	1.45.40,8	0.49.26,1	1.54,8	0
	29...	318.56.25,4	1.45.55,6	0.51.18,3	1.52,2	0
	FÉVR. 18...	320.42.35,5	1.46.10,1	0.53.7,8	1.49,5	0
	MARS 9...	322.28.59,8	1.46.24,3	0.54.54,5	1.46,7	0
	29...	324.15.38,0	1.46.38,2	0.56.38,3	1.43,8	0
	AVRIL 18...	326.2.29,8	1.46.51,8	0.58.19,0	1.40,7	0
	MAI 8...	327.49.34,7	1.47.4,9	0.59.56,6	1.37,6	0
	28...	329.36.52,6	1.47.17,9	1.1.30,8	1.34,2	0
	JUIN 17...	331.24.23,0	1.47.30,4	1.3.1,6	1.30,8	0
	JUILL. 7...	333.12.5,4	1.47.42,4	1.4.28,9	1.27,3	0
	27...	334.59.59,3	1.47.53,9	1.5.52,5	1.23,6	0
	AOUT 16...	336.48.4,3	1.48.5,0	1.7.12,4	1.19,9	0
	SEPT. 5...	338.36.20,1	1.48.15,8	1.8.28,4	1.16,0	0
	25...	340.24.46,1	1.48.26,0	1.9.40,4	1.12,0	0
	OCT. 15...	342.13.21,8	1.48.35,7	1.10.48,4	1.8,0	0
	NOV. 4...	344.2.6,6	1.48.44,8	1.11.52,2	1.3,8	0
	24...	345.51.0,0	1.48.53,4	1.12.51,8	0.59,6	0
	DÉC. 14...	347.40.1,5	1.49.1,5	1.13.47,1	0.55,3	0
1797.	JANV. 3...	349.29.10,7	1.49.9,2	1.14.38,0	0.50,9	0
	23...	351.18.27,0	1.49.16,3	1.15.24,4	0.46,4	0
	FÉVR. 12...	353.7.49,9	1.49.22,9	1.16.6,2	0.41,8	0
	MARS 4...	354.57.18,6	1.49.28,7	1.16.43,5	0.37,3	0
	24...	356.46.52,7	1.49.34,1	1.17.16,2	0.32,7	0
	AVRIL 13...	358.36.31,5	1.49.38,8	1.17.44,1	0.27,9	0
	MAI 3...	0.26.14,6	1.49.43,1	1.18.7,3	0.23,2	0
	23...	2.16.1,2	1.49.46,6	1.18.25,8	0.18,5	0
	JUIN 12...	4.5.50,7	1.49.49,5	1.18.39,5	0.13,7	0
	JUILL. 2...	5.55.42,6	1.49.51,9	1.18.48,3	0.8,8	0
	22...	7.45.36,3	1.49.53,7	1.18.52,4	-0.4,1	0
	AOUT 11...	9.35.31,1	1.49.54,8	1.18.51,6	+0.0,8	0
	31...	11.25.26,2	1.49.55,1	1.18.45,9	0.5,7	0
	SEPT. 20...	13.15.21,3	1.49.55,1	1.18.35,5	0.10,4	0
	OCT. 10...	15.5.15,7	1.49.54,4	1.18.20,2	0.15,3	0
	30...	16.55.8,8	1.49.53,1	1.18.0,1	0.20,1	0
	NOV. 19...	18.44.59,9	1.49.51,1	1.17.35,3	0.24,8	0
	DÉC. 9...	20.34.48,4	1.49.48,5	1.17.5,7	0.29,6	0
	29...	22.24.33,5	1.49.45,1	1.16.31,4	0.34,3	0
1798.	JANV. 18...	24.14.14,8	1.49.41,3	1.15.52,5	0.38,9	0
	FÉVR. 7...	26.3.51,7	1.49.36,9	1.15.8,9	0.43,6	0
	27...	27.53.23,5	1.49.31,8	1.14.20,8	0.48,1	0
	MARS 19...	29.42.49,6	1.49.26,1	1.13.28,2	0.52,6	0
	AVRIL 8...	31.32.9,6	+1.49.20,0	-1.12.31,3	+0.56,9	0

Moyen ris.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.	Diff.
VRIL 8...	313.2. 9,6		-1.12.31,3		0,6961075	+2304
28...	33.21.22,9	+1.49.13,3	1.11.30,0	+1. 1,3	0,6963379	2487
MAI 18...	35.10.28,8	1.49. 5,9	1.10.24,4	1. 5,6	0,6965866	2668
JUN 7...	36.59.26,7	1.48.57,9	1. 9.14,7	1. 9,7	0,6968534	2845
27...	38.48.16,4	1.48.49,7	1. 8. 0,9	1.13,8	0,6971379	3021
JUL.17...	40.36.57,2	1.48.40,8	1. 6.43,1	1.17,8	0,6974400	3192
AOÛT 6...	42.25.28,7	1.48.31,5	1. 5.21,4	1.21,7	0,6977592	3358
26...	44.13.50,3	1.48.21,6	1. 3.55,9	1.25,5	0,6980950	3521
SEPT.15...	46. 2. 1,5	1.48.11,2	1. 2.26,8	1.29,1	0,6984471	3681
OCT. 5...	47.50. 1,8	1.48. 0,3	1. 0.54,2	1.32,6	0,6988152	3836
25...	49.37.50,8	1.47.49,0	0.59.18,1	1.36,1	0,6991988	3986
NOV. 14...	51.25.28,1	1.47.37,3	0.57.38,7	1.39,4	0,6995974	4131
DÉC. 4...	53.12.53,1	1.47.25,0	0.55.56,1	1.42,6	0,7000105	4272
24...	55. 0. 5,6	1.47.12,5	0.54.10,4	1.45,7	0,7004377	4408
JANV.13...	56.47. 5,1	1.46.59,5	0.52.21,8	1.48,6	0,7008785	4539
FÉVR. 2...	58.33.51,4	1.46.46,3	0.50.30,3	1.51,5	0,7013324	4665
22...	60.20.24,0	1.46.32,6	0.48.36,2	1.54,1	0,7017989	4786
MARS 14...	62. 6.42,7	1.46.18,7	0.46.39,6	1.56,6	0,7022775	4901
AVRIL 3...	63.52.47,1	1.46. 4,4	0.44.40,5	1.59,1	0,7027676	5011
23...	65.38.36,8	1.45.49,7	0.42.39,2	2. 1,3	0,7032687	5117
MAI 13...	67.24.11,6	1.45.34,8	0.40.35,7	2. 3,5	0,7037804	5217
JUN 2...	69. 9.31,2	1.45.19,6	0.38.30,3	2. 5,4	0,7043021	5310
22...	70.54.35,5	1.45. 4,3	0.36.23,0	2. 7,3	0,7048331	5399
JUL.12...	72.39.24,2	1.44.48,7	0.34.13,9	2. 9,1	0,7053730	+5483
AOÛT 1...	74.23.57,1	+1.44.32,9	-0.32. 3,3	+2.10,6	0,7059213	

(A suivre).

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

t. CXI, n° 12-26.

Janssen (J.). — Compte rendu d'une ascension scientifique au mont Blanc.

Cette ascension avait pour but de résoudre la question de la présence de l'oxygène dans l'atmosphère solaire.

Déjà en 1888 (voir *Bulletin*, VI, p. 31), poursuivant le même but, M. Janssen était monté jusqu'à la cabane des *Grands Mulets* (3000^m d'altitude) et avait constaté, dans les groupes des raies dus à l'action de l'oxygène atmosphérique, une diminution en rapport avec la hauteur de la station et qui indiquait déjà nettement qu'aux limites de notre atmosphère ces groupes devaient disparaître entièrement, et que, par conséquent, l'atmosphère solaire n'intervenait pas dans la production du phénomène.

Mais la station des Grands Mulets n'est qu'aux trois cinquièmes de la hauteur du mont Blanc et en août 1890 M. Janssen a répété au sommet ses observations de 1888. Comme l'ascension à pied lui était en quelque sorte impossible, il s'y est fait transporter sur un traineau construit *ad hoc* à l'observatoire de Meudon, trainé et maintenu par des guides.

Les observations faites au sommet complètent et confirment celles de 1888; tout conduit à admettre l'absence de l'oxygène dans les enveloppes gazeuses solaires qui surmontent la photosphère, du moins de l'oxygène avec la constitution qui lui permet d'exercer sur la lumière les phénomènes d'absorption qu'il produit dans notre atmosphère et qui se traduisent dans le spectre solaire par les raies A, B, α ,

M. Janssen fait le récit de l'ascension, relate diverses observations météorologiques, physiologiques, etc., et termine en formant le vœu qu'il soit établi au sommet du mont Blanc, ou au moins tout près de ce sommet, un observatoire pour l'Astronomie physique, pour la Physique terrestre et pour la Météorologie.

Lecoq de Boisbaudran. — Spectre électrique du chlorure de gadolinium.

Trouvelot (E.-L.). — Identité de structure entre les éclairs et les décharges des machines d'induction.

Faye (H.). — Sur les boules de feu ou globes électriques du tornado de Saint-Claude, d'après le rapport de M. Cadenat.

Sparre (de). — Sur le mouvement du pendule de Foucault.

Antérieurement (1882), l'auteur avait donné les formules relatives au pendule de Foucault, en ayant recours à l'emploi des fonctions elliptiques. Aujourd'hui il présente un Mémoire où ces formules sont établies direc-

tement, par des développements en série, et il calcule l'influence de la résistance de l'air, supposée proportionnelle au carré de la vitesse : lorsque les amplitudes sont quelconques, la durée de l'oscillation est très légèrement diminuée par la résistance de l'air, mais l'influence de cette diminution est négligeable au point de vue de l'expérience.

Tisserand (F.) présente à l'Académie le tome II de son *Traité de Mécanique céleste*, et indique les deux sujets principaux dont il traite : la figure des corps célestes et leur mouvement de rotation.

Il nous suffira de renvoyer le lecteur à l'analyse de M. Radau, p. 419 du tome VII du *Bulletin*.

Mouchez. — Présentation du cinquième fascicule du *Bulletin du Comité international de la Carte du Ciel*. État d'avancement des travaux préparatoires.

Voir *Bulletin*, VII, p. 392.

Mouchez. — Sur une photographie de la nébuleuse de la Lyre, obtenue à l'observatoire d'Alger.

Le cliché original a été obtenu par MM. Trépied et Rabourdin, en six heures de pose (deux séances chacune de trois heures), dont on a pu faire un agrandissement de 64 fois qui est encore assez net. Cette photographie montre que l'intérieur de l'anneau est rempli de matière nébuleuse douée d'un pouvoir lumineux que l'œil perçoit assez difficilement. En outre, on voit dans l'intérieur non une seule étoile, mais trois au moins, peut-être quatre, qui dans l'image agrandie se confondent un peu avec le bord intérieur de la nébuleuse.

Baillaud (B.). — Sur une épreuve photographique obtenue après neuf heures de pose, à l'observatoire de Toulouse.

Résultats analogues à ceux qui résultent de la photographie obtenue à Alger. La plaque entière de $0^m,09$ à $0^m,12$ renferme 4800 étoiles; il est à noter que des clichés de la même région obtenus par des poses de deux heures donnent beaucoup moins d'étoiles.

Trécul (A.). — Note sur les éclairs allant à la rencontre l'un de l'autre.

Radau (R.). — Remarques relatives à une cause de variation des latitudes.

Voir *Bulletin*, VII, p. 352. où cette Note est reproduite avec plus de développement.

Gaillot (A.). — Sur les variations constatées dans les observations de la latitude d'un même lieu.

Dans un travail entrepris en 1865 à la demande de Villarceau M. Gaillot avait déjà constaté que les latitudes déduites des observations de Paris, faites de 1856 à 1861, présentaient une variation périodique, le maximum de latitude correspondant à l'été, le minimum à l'hiver et l'amplitude de l'oscillation autour de la valeur moyenne était de $\pm 0^{\circ},25$: c'était donc exactement le même résultat auquel ont conduit les observations faites en 1889 à Berlin, Postdam et Prague.

La variation étant bien constatée, il s'agit de l'expliquer, et parmi les hypothèses faites dans ce but M. Gaillot retient comme les plus probables les deux suivantes :

1° L'axe de rotation se déplacerait réellement à l'intérieur de la Terre;

2° La variation constatée s'expliquerait par des phénomènes de réfraction.

Il montre ensuite que les stations pour les observations devraient être choisies au moins deux à deux sur le même parallèle et à des longitudes très différentes.

Si l'axe de rotation se déplace dans l'intérieur de la Terre, à toutes les époques de l'année on obtiendra des variations de latitude égales et de signes contraires dans les stations opposées en longitude. D'ailleurs, l'observation d'une mire méridienne bien stable devrait être poursuivie attentivement : les époques du maximum et du minimum de la mire devraient correspondre aux valeurs moyennes de la latitude observée et inversement.

Si la variation observée tient à une disposition irrégulière des couches atmosphériques, le choix proposé pour les stations le montrera encore, car les époques de maxima et de minima de la latitude, au lieu de varier progressivement avec la longitude, seront à peu près simultanées pour tous les points situés sur le même parallèle. L'amplitude du phénomène pourra d'ailleurs être très différente, selon qu'on se placera dans les régions équatoriales ou vers les latitudes moyennes, dans les stations très élevées ou dans celles dont l'altitude est peu considérable.

Il importe aussi de remarquer que la méthode Horrebow-Talcott n'élimine pas les effets d'une disposition irrégulière des couches atmosphériques.

Deslandres. — Organisation des recherches spectroscopiques avec le grand télescope de l'Observatoire de Paris.

Fényi (Jules). — Deux protubérances solaires, observées à l'observatoire de Haynald, à Kalöcsa (Hongrie).

Ces protubérances, observées en août 1890, atteignaient respectivement les hauteurs de $323''$ et $418''$, soit 306700 kilomètres pour la dernière.

Perrotin. — Observations de la planète Vénus à l'observatoire de Nice.

Ces observations, entreprises dans le but de vérifier les récentes découvertes de M. Schiaparelli sur la rotation de la planète, ont été faites pendant le jour, du 15 mai au 4 octobre 1890. L'ensemble des faits observés conduit l'auteur aux conclusions suivantes :

« 1° La rotation de la planète est très lente et se fait de telle sorte que la position relative des taches et du terminateur n'éprouve pas de changement notable, pendant un grand nombre de jours ;

2° La durée de la rotation de la planète ne diffère pas de la durée de la révolution sidérale, soit 225 jours environ, de plus de 30 jours. Pourtant nos observations s'accommoderaient plus volontiers d'une rotation plus rapide, dont la durée serait comprise entre 195 et 225 jours.

3° L'axe de rotation de la planète est à peu près perpendiculaire au plan de l'orbite. »

Callandreau (O.). — Sur la réduction à la forme canonique des équations différentielles pour la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation.

Tondini. — Le méridien neutre de Jérusalem-Nyanza, proposé par l'Italie pour fixer l'heure universelle, déterminé par sa distance horaire à 120 observatoires.

Noguès (A.-F.). — Mouvements sismiques du Chili; tremblement de Terre du 23 mai 1890.

Zenger (Ch.-V.). — La rotation de la Terre autour de son axe produite par l'action électrodynamique du Soleil.

Réalisation de la rotation d'une sphère creuse sous l'influence des deux pôles d'une machine électrique.

Oppert (J.). — Un annuaire astronomique chaldéen, utilisé par Ptolémée.

Lamey (dom). — Sur la variation annuelle de la latitude, causée par l'inégalité de réfraction dans les marées atmosphériques.

Fényi (Jules). — Ascension rapide d'une protubérance solaire.

Cette protubérance, observée le 6 octobre 1890, a atteint rapidement une hauteur de 285^r; la vitesse variable d'ascension a atteint jusqu'à 275 kilomètres par seconde.

Doûmet-Adanson. — Sur un tornado observé à Fourchambault (Nièvre).

Ce tornado extrêmement violent a limité ses dégâts à un espace à peu près ovale de 400^m sur 200^m. Il paraît s'être formé sur place et ensuite s'être élevé rapidement dans l'atmosphère. La giration avait lieu dans le sens des aiguilles d'une montre.

Faye (H.). — Sur la trombe de Fourchambault.

Le sens noté pour la giration est excessivement rare; M. Faye exprime le désir qu'il soit donné de plus amples détails sur cette trombe.

Angot (Alfred). — Sur la tempête des 23-24 novembre 1890 et les mouvements verticaux de l'atmosphère.

Cette tempête a fourni les valeurs les plus élevées que l'on ait obtenues à la Tour Eiffel pour la vitesse horizontale et la vitesse verticale du vent depuis l'installation des nouveaux instruments : la vitesse horizontale a atteint alors 34^m par seconde et la vitesse verticale ascendante a dépassé 3^m par seconde.

Mouchez. — Observations de petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, du 1^{er} octobre 1889 au 31 mars 1890.

Ces observations ont été faites par MM. Barré, Boquet et Callandreau.

André (Ch.). — Sur l'observation du passage des satellites de Jupiter et des occultations d'étoiles.

A la fin de l'été dernier M. André s'est rendu, avec M. Marchand, à l'observatoire du Pic du Midi pour y continuer ses études sur les phénomènes optiques que présentent les passages des satellites de Jupiter et les occultations d'étoiles par la Lune.

Par des images d'une netteté parfaite on a vu s'établir encore la liaison lumineuse entre Jupiter et son satellite; mais ce pont était moins gênant que lorsque les rayons lumineux ont à traverser toute l'atmosphère. Le premier satellite a encore été vu tout entier sur le disque de Jupiter dans un passage *derrière* la planète. Enfin une étoile de 6^e grandeur occultée par la Lune a été vue pendant 2^s sur le disque lumineux de cet astre.

L'avantage des écrans en *treillis* ou en *réseaux* s'est encore manifesté nettement dans toutes ces observations.

Cornu (A.). — Sur la limite ultra-violette du spectre solaire, d'après les clichés obtenus par M. le D^r O. Simony, au sommet du pic de Ténériffe.

La connaissance exacte de la limite ultra-violette du spectre solaire, ou plutôt la connaissance de la loi suivant laquelle décroît l'intensité du spectre continu idéal de la photosphère, fournirait des données très importantes sur la température du Soleil. Aussi, depuis déjà de longues années, M. Cornu a cherché à reculer la limite connue de cette portion du spectre, en s'aidant de la photographie. Malheureusement l'absorption des radiations lumineuses par l'atmosphère terrestre croît, avec la réfrangibilité des radiations, suivant une loi très rapide, de sorte qu'on doit songer immédiatement à diminuer l'épaisseur atmosphérique, c'est-à-dire à observer en des points aussi élevés que possible. Et même de ce côté on gagne fort peu : par des observations faites dans les Alpes en 1879 (*Comptes rendus*, t. LXXXIX, p. 808), M. Cornu avait trouvé en effet qu'on ne gagne guère qu'une unité de l'échelle des longueurs d'onde d'Angström (un milliardième de millimètre) pour une élévation de 868^m. Ce nombre est confirmé par l'étude comparée des clichés obtenus par M. Simony à Ténériffe et par M. Cornu à Courtenay (Loiret), et on peut dire qu'en moyenne on gagne une unité de longueur d'onde pour chaque élévation de 1000^m. Pour compléter son dessin de la partie ultra-

violette du spectre (*Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. IX).
M. Cornu a joint à sa Note le dessin de la partie comprise entre t et U et même au delà (jusqu'à $\lambda = 292$), d'après le meilleur cliché obtenu par M. Simony à Ténériffe.

Denza (P. F.). — Période météorique du mois de novembre 1890.

D'après les observations faites en Italie dans 7 stations, le maximum de météores fourni par les Léonides a eu lieu dans les nuits du 14-15 et du 15-16 novembre, tandis que dans les années précédentes il tombait dans la nuit du 13 au 14. Il semble en outre que cette pluie de Léonides tend à acquérir une plus grande énergie, mais ce fait demande confirmation.

Romieux (A.). — Relations entre la déformation actuelle de la croûte terrestre et les densités moyennes des terres et des mers.

Jeannel (G.). — Le tornado du 18 août 1890 en Bretagne.

Il a ravagé une zone de 16^{km} de long sur une largeur moyenne de 600 à 800^m.

Prix d'Astronomie décernés par l'Académie des Sciences dans la séance publique annuelle du 29 décembre 1890.

Le prix *Lalande* a été décerné à M. *Schiaparelli* pour ses belles observations sur la rotation de Mercure et de Vénus.

Le prix *Valz* a été donné à M. *S. de Glasenapp* pour sa détermination d'orbites des étoiles doubles qui figurent au Catalogue de Poulkova.

Le prix *Janssen* a été donné à M. *Young*.

Quant au prix *Damoiseau*, pour lequel il a été présenté un seul Mémoire, il a été remis au concours pour l'année prochaine en conservant le même sujet, qui est le suivant : *Perfectionner la Théorie des inégalités à longues périodes causées par les planètes dans le mouvement de la Lune. Voir s'il en existe de sensibles, en dehors de celles déjà bien connues.*

Comète Brooks. — Observations par Courty, Picart, Rayet.

Comète Coggia. — Observations par Courty.

Comète Denning. — Observations par Picart, Rayet.

Comète d'Arrest. — Observations par Bigourdan.

Comète Zona. — Observations par Bigourdan, Courty, Klumpke (M^{lle}), Picart, Rambaud, Renaux, Sy.

② Observations par Sy.

G. B.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n^{os} 3010-3014.

Albrecht (U.). — Résultats provisoires des séries d'observations, exécutées à Berlin, Potsdam et Prague, en vue de constater la variabilité des latitudes.

M. Tisserand a déjà donné une analyse du rapport de M. Albrecht dans le numéro de septembre du *Bulletin* (t. VII, p. 341).

Dunér. — Sur les variations d'éclat de l'étoile Y Cygne (Ch. 7488).

La période de cette variable paraît être d'un jour et demi; elle offre des particularités assez curieuses; malheureusement on ne peut guère l'observer maintenant que sous des latitudes très élevées.

Pickering. — Étoiles à spectres remarquables. Deux nouvelles variables dans Persée.

Safarik. — Sur les variations d'éclat de S Persée (Ch. 814).

Denza. — Les étoiles filantes du mois d'août.

La pluie d'étoiles filantes du mois d'août a été, cette année, particulièrement abondante; elle a été observée, du 9 au 12, dans beaucoup de stations qui font partie du réseau italien.

Hœrdtl. — Éphéméride de la comète Winnecke pour 1891.

Knopf. — Éléments et éphéméride de la planète Mathilde (253).

Souscription pour l'érection d'un monument sur la tombe de Fabricius.

Le pasteur David Fabricius, qui, avec son fils Jean, observait les taches du Soleil dès l'année 1610, fut assassiné le 7 mai 1617, comme nous l'apprend l'inscription gravée sur la dalle de son tombeau, dans le cimetière du village d'Osstel (Frise orientale). La Société des naturalistes d'Emden

ouvre une souscription pour l'érection d'un monument commémoratif des travaux de ces hommes.

Bauschinger. — Sur l'orbite de la comète Brooks (1889, V).

Les éléments calculés par M. Bauschinger (temps de révolution 7^a, 03) représentent d'une manière très suffisante les dernières positions obtenues par M. Barnard; les écarts (d'environ 5^a) peuvent être attribués aux perturbations.

Abetti. — Orbite définitive de la comète 1887, IV.

Le travail de M. Abetti paraît être plus complet que celui de M. F. Muller (voir *Bulletin*, V, p. 446).

Helmert. — Sur l'explication des variations observées des latitudes.

M. Helmert, qui avait déjà donné, dans le t. II de son *Traité de Géodésie supérieure*, un lumineux exposé de la théorie du mouvement de la Terre sous l'influence de diverses causes perturbatrices, y revient aujourd'hui pour montrer comment les variations des latitudes peuvent s'expliquer par des phénomènes météorologiques, à période annuelle.

En désignant par x, y les coordonnées sphériques du pôle d'inertie C, rapportées à des axes fixes dans le globe, menés par le point fixe C₀, et par u, v les coordonnées du pôle de rotation, rapportées aux mêmes axes et au même point C₀, M. Helmert trouve que les équations différentielles du mouvement de rotation peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \mu(v - \gamma) &= 0, \\ \frac{dv}{dt} - \mu(u - x) &= 0, \end{aligned}$$

que l'on peut aussi démontrer indirectement en s'appuyant sur le principe du cycle eulérien. Le coefficient μ représente $\frac{\omega}{305}$, ω étant la vitesse de la rotation diurne. Posant alors

$$\begin{aligned} x &= a \sin mt + a' \cos mt, \\ y &= b \sin mt + b' \cos mt, \end{aligned}$$

on voit facilement que C décrit une ellipse dont le centre est en C₀, de sorte qu'il suffit de prendre

$$x = p \cos mt, \quad y = q \sin mt.$$

L'intégration donne ensuite

$$u = \frac{\mu^2 p + \mu m q}{\mu^2 - m^2} \cos mt + A \cos(\mu t + B),$$

$$v = \frac{\mu^2 q + \mu m p}{\mu^2 - m^2} \sin mt + A \sin(\mu t + B).$$

En prenant $m = \frac{\omega}{366}$, les périodes des arguments mt , μt sont respectivement d'une année et de dix mois (cycle eulérien), ce qui donne une grande période de cinq ans. On a d'ailleurs, à peu près,

$$\mu^2 - m^2 = \frac{11}{36} \mu^2 = \frac{11}{30} \mu m,$$

de sorte que les termes annuels des coordonnées u , v du pôle de rotation deviennent

$$(3,3p + 2,7q) \cos mt, \quad (3,3q + 2,7p) \sin mt.$$

Pour $p = q$, les deux coefficients atteignent la valeur $6p$; le déplacement primitif p est alors amplifié six fois (1). M. Helmert discute les divers cas qui peuvent se présenter; il considère aussi l'effet d'une forme encore plus générale des coordonnées périodiques x , y . La marche du pôle de rotation, pendant cinq ans, est représentée, pour quelques cas particuliers, par des diagrammes, exécutés par M. Schnauder. Ces recherches, très intéressantes, de M. Helmert, jettent un grand jour sur les causes des variations observées depuis quelque temps, et M. Helmert y trouve un motif sérieux pour presser le départ de l'expédition qui doit être envoyée à Honolulu, afin d'y faire des observations correspondantes.

Lamp (J.). — Sur les oscillations du niveau des mers, considérées comme une cause possible des variations de la latitude.

M. Lamp croit pouvoir conclure, du régime des courants océaniques, que, pendant l'été, l'hémisphère boréal a un excédent d'eau, qui pendant l'hiver se transporte sur l'hémisphère austral. Cette dénivellation périodique pourrait expliquer les variations des latitudes.

Braun (C.). — Photographie des protubérances.

(1) La combinaison d'une périodicité annuelle avec une période de cinq ans donnerait un argument m , à peu près égal à μ , et par suite un dénominateur voisin de zéro.

Le P. Braun a indiqué, il y a vingt ans, un procédé semblable à celui que vient de proposer M. Hale (*Bull.*, VIII, p. 35).

Engelhardt. — Observations des satellites de Saturne, faites à Dresde, au réfracteur de douze pouces.

R.

VARIÉTÉS.

COMÈTES ET PLANÈTES DE 1890.

Dans le courant de cette année, on a pu observer encore les comètes 1889 I, 1889 II et 1889 V.

La première, découverte par M. Barnard le 2 septembre 1888, a été observée par le même astronome, à l'aide du grand réfracteur de l'observatoire Lick, le 17 août dernier, alors que ses distances à la Terre et au Soleil étaient respectivement 6,0 et 6,5. Les dernières observations confirment le caractère hyperbolique de l'orbite de cette comète.

La comète 1889 V (Brooks), si remarquable par ses compagnons et par la brièveté de sa période, a été observée encore le 22 novembre 1890.

La comète 1890 I = *g* 1889, découverte par M. Borrelly à Marseille, le 12 décembre 1889, a été également observée au commencement de 1890.

En outre, on a trouvé les comètes suivantes :

Comète 1890 II = *a* 1890. — Découverte par M. W.-R. Brooks à l'observatoire Smith, Geneva (N.-Y.). Elle était alors visible le matin et son mouvement était très faible. C'était une nébulosité télescopique, avec noyau assez stellaire et queue courte peu apparente. Elle était encore observable au milieu d'octobre.

Comète 1890 III = *b* 1890. — Découverte par M. Coggia à l'observatoire de Marseille le 18 juillet. Elle était assez brillante, ronde, avec condensation centrale d'éclat comparable à celui d'une étoile de 10^e-11^e grandeur. Elle s'apercevait alors facilement dans une lunette de 0^m,10 d'ouverture, mais son éclat diminuait rapidement et elle disparut bientôt à l'horizon nord-ouest.

Comète 1890 IV = e 1890. — Cette comète fut découverte trois mois et demi après son passage au périhélie, par M. Zona, à Palerme, le 15 novembre. Annoncée d'abord comme assez brillante, son éclat diminua rapidement; cependant elle est encore observable dans les instruments très puissants.

Comète d'Arrest = comète 1890 V = d 1890. — L'éphéméride pour la recherche de cette comète périodique avait été calculée par M. G. Leveau; elle fut cherchée vainement dans divers observatoires et on pouvait déjà craindre qu'elle fût passée inaperçue, lorsqu'elle fut trouvée par M. Barnard (Lick, 6 octobre) fortuitement, mais tout à côté de la position indiquée par M. Leveau, car les corrections de son éphéméride données par les premières observations étaient $-0^m,5$ en ascension droite et $-1'$ en déclinaison.

Comète 1890 VI = c 1890. — Elle fut découverte par un astronome amateur, M. W.-F. Denning à Bristol, le 23 juillet, au moyen d'un réflecteur de 10 pouces anglais d'ouverture : c'était une faible nébulosité ronde d'environ $1'$ de diamètre, avec légère condensation centrale et placée près de θ et de ζ Petite Ourse. Mais elle descendait presque perpendiculairement à l'équateur, de sorte qu'elle ne fut visible que jusqu'au milieu de septembre, époque où elle passa dans l'hémisphère austral.

Comète 1890 VII = f 1890. — Cette comète, la plus intéressante de l'année à cause de sa courte période, a été découverte par M. R. Spitaler à Vienne, le 16 novembre : la comète Zona, découverte la veille, ayant été annoncée par un télégramme parvenu à l'observatoire de Vienne le matin du 17 novembre vers $2^h 30^m$, M. Spitaler la chercha aussitôt avec le grand équatorial de 27 pouces. Dès le premier examen, il aperçut près de la position indiquée un objet cométaire, mais qui, au lieu d'être brillant comme la comète annoncée, était au contraire très faible. On put croire un instant que c'était un compagnon, situé à $\frac{1}{2}$ degré environ de la comète principale, mais les premières observations montrèrent des mouvements différents. C'était donc une comète nouvelle de 13^e grandeur, avec une chevelure ronde, de $30''$ de diamètre et petit noyau bien distinct. Comme son éclat allait en diminuant, et par suite d'autres

circonstances, cette comète Spitaler n'a guère été observée qu'à Vienne. La durée de sa révolution est de six ans quatre mois.

La comète de *Brorsen* a repassé à son périhélie en 1890, mais on l'a cherchée vainement dans divers observatoires.

Après ces comètes, il faut mentionner un phénomène aperçu le 27 octobre, à Grahamstown (Afrique australe) et qui pourrait être une comète à mouvement extraordinairement rapide, puisqu'elle aurait parcouru dans le ciel plus de 100" en moins de 1^h 15^m : c'était une bande lumineuse de $\frac{1}{4}$ de degré de large et dont la longueur, qui était d'abord de 30", atteignit ensuite jusqu'à 90"; une de ses extrémités ressemblait à une tête de comète sans noyau, tandis que l'éclat de l'autre s'effaçait graduellement jusqu'à disparition complète.

On a découvert en 1890 les quatorze planètes suivantes :

- (288) *Glauke*, découverte par M. R. Luther à Dusseldorf, le 20 février.
- (289) *Nenetta*, découverte par M. Charlois à Nice, le 10 mars.
- (290) *Bruna*, découverte par M. Palisa à Vienne, le 20 mars.
- (291) *Alice*, découverte par M. Palisa à Vienne, le 25 avril.
- (292) *Ludovica*, découverte par M. Palisa à Vienne, le 25 avril.
- (293) *Brasilia*, découverte par M. Charlois à Nice, le 20 mai.
- (294) *Félicia*, découverte par M. Charlois à Nice, le 15 juillet.
- (295) *Theresia*, découverte par M. Palisa à Vienne, le 17 août.
- (296) » découverte par M. Charlois à Nice, le 19 août.
- (297) » découverte par M. Charlois à Nice, le 9 septembre.
- (298) » découverte par M. Charlois à Nice, le 9 septembre.
- (299) » découverte par M. Palisa à Vienne, le 6 octobre.
- (300) » découverte par M. Charlois à Nice, le 3 octobre (1).
- (301) » découverte par M. Palisa à Vienne, le 16 novembre.

Il est remarquable que deux fois cette année (25 avril et 9 septembre), deux planètes nouvelles aient été trouvées dans la même nuit par le même observateur. En outre, les deux planètes 291 et 292, l'une et l'autre trouvées par M. Palisa le 25 avril, ont été découvertes également par M. Charlois le lendemain 26 avril.

G. B.

(1) Elle n'a été reconnue que plus tard.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LA FLEXION DES FILS MICROMÉTRIQUES ;

PAR MM. MAURICE HAMY ET F. BOQUET.

Cet article contient le résumé des expériences qui ont été faites au cercle méridien du jardin de l'Observatoire de Paris, en vue de mesurer la flexion du fil de déclinaison. La méthode employée repose sur un procédé physique, au moyen duquel on obtient la valeur de l'inclinaison d'une portion quelconque du fil. Ce procédé a déjà fait l'objet d'une Note dans ce Recueil (*). Nous commencerons par en rappeler les principes.

On a vu que l'appareil se compose d'une tige orientée à peu près horizontalement dans la direction est-ouest et percée à ses extrémités de deux petites ouvertures à parois minces convenablement éclairées. Cette tige, qui est placée au foyer du collimateur de la mire, fait partie d'un pendule dont l'axe de rotation est horizontal et parallèle au méridien. Le mode de suspension du pendule, tel qu'il a été décrit dans le *Bulletin*, a été modifié. Primitivement l'appareil reposait par deux pointes fines sur des plans d'acier entourés d'un petit rempart métallique. La détérioration de ces pièces étant très rapide, on a supprimé les remparts, substitué des plans de glace aux plans d'acier et terminé l'extrémité des pointes par des surfaces sphériques de 0^{mm},3 de diamètre. En outre, la plate-forme horizontale sur laquelle sont fixés les plans de glace a été munie d'une bascule permettant de soulever le pendule au-dessus de ses supports, comme un fléau de balance. Ces modifications apportées à l'appareil primitif sont les seules ; nous renvoyons, pour compléter cette courte description, à ce qui a été dit dans le *Bulletin*.

La valeur de l'inclinaison s'obtient en mesurant les différences de hauteur h_1 , h_2 des images des petites ouvertures, avec le fil à étudier, dans deux positions du pendule différant de 180° en azimut. Le retournement de l'appareil se fait au moyen de la

(*) *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 5.

Bulletin astronomique. T. VIII. (Mars 1891.)

ique égale à $\alpha \frac{r}{d}$. Cette erreur provient du changement de position du contact des pointes lorsque l'on retourne la plate-forme. Dans nos expériences la valeur du facteur $\frac{r}{d}$ était d'environ $\frac{1}{400}$; il a suffi de rendre α inférieur à $7'$ pour éviter une erreur dépassant $1''$.

Mesure de la flexion. — Nous avons déterminé l'inclinaison de trois portions du fil ayant chacune $40'$ de longueur. On a placé : 1° une image à l'est et l'autre au méridien; 2° les deux images symétriquement par rapport au méridien; 3° une image au méridien et la seconde à l'ouest.

Voici les résultats obtenus dans une première série de mesures faites par un temps peu humide :

1890, avril 10 (temps peu humide).

Inclinaison de la partie			
est. (Bonnes images.)	centrale. (Images ondul.)	ouest. (Bonnes images.)	
-1.12	-1.2	-1.6	
-1.14	-1.5	-1.9	
-1.16	-1.11	-1.10	
-1.20	-1.17	-1.8	
-1.13	-1.19	-1.6	
Moyennes	-1.15	-1.11?	-1.8

Malgré les cinq déterminations du milieu dont la moyenne est douteuse, on peut conclure à l'existence d'une légère flexion en s'appuyant sur les autres.

Les deux séries suivantes ont été obtenues par un temps couvert et très humide. Les images étaient d'une fixité absolue.

1890, avril 18 (temps très humide).

Inclinaison de la partie			
est. (Tr. bonnes imag.)	centrale. (Tr. bonnes imag.)	ouest. (Tr. bonnes imag.)	
-1.28	-1.14	-1.0	
-1.26	-1.14	-1.4	
-1.22	-1.13	-1.1	
-1.22	-1.10	-1.1	
-1.21	-1.10	-1.10	
Moyennes	-1.24	-1.12	-1.4

1890, avril 19 (temps très humide).

Inclinaison de la partie		
est.	centrale.	ouest.
(Tr. bonnes imag.)	(Tr. bonnes imag.)	(Tr. bonnes imag.)
-1'.26	-1'.10	-1'.1
-1.26	-1.12	-1.2
-1.21	-1.13	-1.3
-1.18	-1.10	-0.58
-1.18	-1.14	-0.54
Moyennes	-1.22	-1.0

Les moyennes des deux séries sont

$$-1'23'', \quad -1'12'', \quad -1'2''.$$

Ces nombres forment une progression arithmétique de son 10^{''}.

En les comparant à ceux qui ont été obtenus dans la première série, on constate que la flexion est beaucoup plus notable l'humidité que par la sécheresse. Ce résultat est d'accord avec ce que l'on sait relativement à la faculté que possèdent les fils de gaine, d'absorber facilement l'humidité.

Flèche de la courbe. — Nous suivrons la marche indiquée le *Bulletin* (1), pour arriver à l'équation de la courbe, en partant des données qui précèdent. Prenons pour origine des coordonnées le point du fil situé dans le méridien; pour axes des y et z la verticale et l'horizontale qui s'y croisent. Soit ξ l'abscisse milieu d'une portion quelconque du fil égale à $\delta = 40'$. Les inclinaisons mesurées sont comprises dans la formule

$$(2) \quad i = -72'' + \frac{1}{120} \xi,$$

en donnant à ξ les valeurs successives

$$-1200'' = -20', \quad 0'', \quad +1200'' = +20'.$$

Il y a donc lieu d'admettre que cette formule fait connaître l

(1) *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 52.

raison pour toutes les valeurs de ξ . On déduit de la formule (2)

$$\text{tang } i = A + B\xi,$$

en posant $A = -72 \sin 1''$, $B = \frac{1}{120} \sin 1''$. L'équation de la courbe est, d'après ce qui a été dit antérieurement,

$$(3) \quad y = Ax + \frac{B}{2} x^2,$$

x et y étant exprimés en secondes.

Le champ de l'instrument méridien du jardin est de 2° ; les extrémités du fil correspondent donc à $x = -1^\circ = -3600''$ et $x = +1^\circ = 3600''$. L'équation (3) donne

$$y = 1'',52 \text{ pour } x = -3600'',$$

$$y = -1'',00 \text{ pour } x = +3600''.$$

La flèche de la courbe est l'ordonnée à l'origine de la droite qui passe par ces deux points. On trouve pour sa valeur $0'',26$. Ce nombre correspond à la direction horizontale du tube de la lunette et son influence diminue rapidement avec la hauteur; il faudrait d'ailleurs le réduire de beaucoup pour obtenir l'effet de la flexion dans le cas d'un état hygrométrique moyen. Il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte dans les observations. Le fil de l'instrument où cette recherche a été faite a une longueur de $0^m,15$.

En terminant, nous signalerons une erreur commise dans le *Bulletin* (1), erreur qui a été relevée par M. Prosper Henry. Contrairement à ce qui a été dit, l'effet de la flexion du fil dans des instruments de même champ est proportionnel à la distance focale. Cela tient à ce que la flèche d'un petit arc est proportionnelle au carré de ce petit arc et non à l'arc lui-même.

(1) *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 51.

COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES DE JUPITER,

Tirées des Tables de Le Verrier [suite (*)]:

PAR J. CONIEL.

Équinoxe 1800, janvier 0, 1.

Temps moyen de Paris.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.
1. AOÛT 1...	74.23.57,1		—0.32. 3,3		0,7059213
21...	76. 8.14,0	+1.44.16,9	0.29.51,3	+2.12,0	0,7064774
SEPT. 10...	77.52.14,7	1.44. 0,7	0.27.37,9	2.13,4	0,7070406
30...	79.35.59,2	1.43.44,5	0.25.23,4	2.14,5	0,7076104
OCT. 20...	81.19.27,3	1.43.28,1	0.23. 7,8	2.15,6	0,7081863
NOV. 9...	83. 2.38,9	1.43.11,6	0.20.51,4	2.16,4	0,7087677
29...	84.45.33,7	1.42.54,8	0.18.34,2	2.17,2	0,7093541
DÉC. 19...	86.28.11,8	1.42.38,1	0.16.16,4	2.17,8	0,7099447
1. JANV. 8...	88.10.33,1	1.42.21,3	0.13.58,1	2.18,3	0,7105393
28...	89.52.37,7	1.42. 4,6	0.11.39,4	2.18,7	0,7111372
FÉVR.17...	91.34.25,4	1.41.47,7	0. 9.20,5	2.18,9	0,7117379
MARS 9...	93.15.56,1	1.41.30,7	0. 7. 1,5	2.19,0	0,7123408
29...	94.57. 9,9	1.41.13,8	0. 4.42,5	2.19,0	0,7129454
AVRIL18...	96.38. 6,8	1.40.56,9	0. 2.23,6	2.18,9	0,7135511
MAI 8...	98.18.46,8	1.40.40,0	—0. 0. 5,0	2.18,6	0,7141574
28...	99.59. 9,9	1.40.23,1	+0. 2.13,2	2.18,2	0,7147637
JUIN 17...	101.39.16,4	1.40. 6,5	0. 4.30,9	2.17,7	0,7153697
JUILL. 7...	103.19. 6,2	1.39.49,8	0. 6.48,0	2.17,1	0,7159748
27...	104.58.39,5	1.39.33,3	0. 9. 4,4	2.16,4	0,7165786
AOÛT 16...	106.37.56,3	1.39.16,8	0.11.19,9	2.15,5	0,7171804
SEPT. 5...	108.16.56,6	1.39. 0,3	0.13.34,5	2.14,6	0,7177798
25...	109.55.40,6	1.38.44,0	0.15.48,1	2.13,6	0,7183764
OCT. 15...	111.34. 8,5	1.38.27,9	0.18. 0,5	2.12,4	0,7189697
NOV. 4...	113.12.20,5	1.38.12,0	0.20.11,7	2.11,2	0,7195592
24...	115.50.16,7	1.37.56,2	0.22.21,5	2. 9,8	0,7201444
DÉC. 14...	116.27.57,2	1.37.40,5	0.24.29,9	2. 8,4	0,7207249
1. JANV. 3...	118. 5.22,2	1.37.25,0	0.26.36,8	2. 6,9	0,7213003
23...	119.42.31,9	1.37. 9,7	0.28.42,1	2. 5,3	0,7218702
FÉVR.12...	121.19.26,5	1.36.54,6	0.30.45,7	2. 3,6	0,7224342
MARS 4...	122.56. 6,2	1.36.39,7	0.32.47,5	2. 1,8	0,7229918
24...	124.32.31,3	1.36.25,1	0.34.47,4	1.59,9	0,7235426
AVRIL13...	126. 8.41,9	1.36.10,6	0.36.45,4	1.58,0	0,7240862
MAI 3...	127.44.38,3	1.35.56,4	0.38.41,4	1.56,0	0,7246223
23...	129.20.20,5	+1.35.42,2	+0.40.35,3	+1.53,9	0,7251506

) Voir *Bulletin astronomique*, VII, p. 166, et VIII, p. 77.

Temps moyen à Paris.	Longitude héliocentrique.	Dif.	Latitude héliocentrique.	Dif.	Logarithme du rayon vecteur.	Dif.
MAI 23...	129.20.20,5	+1.35.28,4	+0.40.35,3	+1.51,8	0,7251506	+5200
JUIN 12...	130.55.48,9	1.35.15,0	0.42.27,1	1.49,5	0,7256706	5114
JUILL. 2...	132.31.3,9	1.35.1,8	0.44.16,6	1.47,3	0,7261820	5026
22...	134.6.5,7	1.34.48,8	0.46.3,9	1.44,9	0,7266846	4934
AOÛT 11...	135.40.54,5	1.34.36,2	0.47.48,8	1.42,5	0,7271780	4839
31...	137.15.30,7	1.34.23,7	0.49.31,3	1.40,0	0,7276619	4740
SEPT. 20...	138.49.54,4	1.34.11,6	0.51.11,3	1.37,5	0,7281359	4639
OCT. 10...	140.24.6,0	1.34.0,0	0.52.48,8	1.34,9	0,7285998	4535
30...	141.58.6,0	1.33.48,4	0.54.23,7	1.32,3	0,7290533	4428
NOV. 19...	143.31.54,4	1.33.37,1	0.55.56,0	1.29,6	0,7294961	4317
DÉC. 9...	145.5.31,5	1.33.26,2	0.57.25,6	1.26,9	0,7299278	4205
20...	146.38.57,7	1.33.15,6	0.58.52,5	1.24,2	0,7303483	4091
2. JANV. 18...	148.12.13,3	1.33.5,3	1.0.16,7	1.21,3	0,7307574	3974
FÉVR. 7...	149.45.18,6	1.32.55,3	1.0.138,0	1.18,5	0,7311548	3854
27...	151.18.13,9	1.32.45,6	1.2.56,5	1.15,6	0,7315402	3732
MARS 19...	152.50.59,5	1.32.36,2	1.4.12,1	1.12,7	0,7319134	3608
AVRIL 8...	154.23.35,7	1.32.27,4	1.5.24,8	1.9,7	0,7322742	3481
28...	155.56.3,1	1.32.18,8	1.6.34,5	1.6,7	0,7326223	3354
MAI 18...	157.28.21,9	1.32.10,5	1.7.41,2	1.3,7	0,7329577	3225
JUIN 7...	159.0.32,4	1.32.2,4	1.8.44,9	1.0,6	0,7332802	3093
27...	160.32.34,8	1.31.54,8	1.9.45,5	0.57,6	0,7335895	2959
JUILL. 17...	162.4.29,6	1.31.47,6	1.10.43,1	0.54,5	0,7338854	2824
AOÛT 6...	163.36.17,2	1.31.40,6	1.11.37,6	0.51,4	0,7341678	2687
26...	165.7.57,8	1.31.34,0	1.12.29,0	0.48,2	0,7344365	2548
SEPT. 15...	166.39.31,8	1.31.27,6	1.13.17,2	0.45,0	0,7346913	2408
OCT. 5...	168.10.59,4	1.31.21,8	1.14.2,2	0.41,9	0,7349321	2267
25...	169.42.21,2	1.31.16,3	1.14.44,1	0.38,6	0,7351588	2124
NOV. 14...	171.13.37,5	1.31.11,1	1.15.22,7	0.35,4	0,7353712	1980
DÉC. 4...	172.44.48,6	1.31.6,4	1.15.58,1	0.32,3	0,7355692	1834
24...	174.15.55,0	1.31.2,1	1.16.30,4	0.28,9	0,7357526	1690
18. JANV. 13...	175.46.57,1	1.30.58,0	1.16.59,3	0.25,7	0,7359216	1543
FÉVR. 2...	177.17.55,1	1.30.54,2	1.17.25,0	0.22,5	0,7360759	1396
22...	178.48.49,3	1.30.51,0	1.17.47,5	0.19,2	0,7362155	1248
MARS 14...	180.19.40,3	1.30.48,1	1.18.6,7	0.15,9	0,7363403	1099
AVRIL 3...	181.50.28,4	1.30.45,4	1.18.22,6	0.12,6	0,7364502	949
23...	183.21.13,8	1.30.43,2	1.18.35,2	0.9,3	0,7365451	798
MAI 13...	184.51.57,0	1.30.41,3	1.18.44,5	0.6,0	0,7366249	647
JUIN 2...	186.22.38,3	1.30.39,8	1.18.50,5	+0.2,8	0,7366896	497
22...	187.53.18,1	1.30.38,8	1.18.53,3	+0.0,5	0,7367393	345
JUILL. 12...	189.23.56,9	1.30.38,0	1.18.52,8	0.3,9	0,7367738	192
AOÛT 1...	190.54.34,9	1.30.37,8	1.18.48,9	0.7,1	0,7367930	+38
21...	192.25.12,7	1.30.37,9	1.18.41,8	0.10,4	0,7367968	-117
SEPT. 10...	193.55.50,6	+1.30.38,3	1.18.31,4	-0.13,6	0,7367851	-268
30...	195.26.28,9		+1.18.17,8		0,7367583	

10 www.libtool.com MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

h. Temps moyen de Paris.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.
1803. SEPT. 30...	195.26.28,9		+1.18.17,8		0,7367583
OCT. 20...	196.57.7,9	+1.30.39,0	1.18.0,9	-0.16,9	0,7367164
NOV. 9...	198.27.48,2	1.30.40,3	1.17.40,7	0.20,2	0,7366596
29...	199.58.29,9	1.30.41,7	1.17.17,3	0.23,4	0,7365878
DÉC. 19...	201.29.13,5	1.30.43,6	1.16.50,6	0.26,7	0,7365009
1804. JANV. 8...	202.59.59,4	1.30.45,9	1.16.20,7	0.29,9	0,7363988
28...	204.30.47,9	1.30.48,5	1.15.47,6	0.33,1	0,7362816
FÉVR. 17...	206.1.39,6	1.30.51,7	1.15.11,3	0.36,3	0,7361493
MARS 8...	207.32.34,7	1.30.55,1	1.14.31,9	0.39,4	0,7360020
28...	209.3.33,6	1.30.58,9	1.13.49,3	0.42,6	0,7358398
AVRIL 17...	210.34.36,8	1.31.3,2	1.13.3,5	0.45,8	0,7356627
MAI 7...	212.5.44,6	1.31.7,8	1.12.14,6	0.48,9	0,7354708
27...	213.36.57,4	1.31.12,8	1.11.22,7	0.51,9	0,7352643
JUIN 16...	215.8.15,5	1.31.18,1	1.10.27,6	0.55,1	0,7350433
JUILL. 6...	216.39.39,3	1.31.23,8	1.9.29,6	0.58,0	0,7348079
26...	218.11.9,0	1.31.29,7	1.8.28,5	1.1,1	0,7345583
AOUT 15...	219.42.45,1	1.31.36,1	1.7.24,4	1.4,1	0,7342945
SEPT. 4...	221.14.28,0	1.31.42,9	1.6.17,4	1.7,0	0,7340166
24...	222.46.17,9	1.31.49,9	1.5.7,4	1.10,0	0,7337249
OCT. 14...	224.18.15,4	1.31.57,5	1.3.54,6	1.12,8	0,7334194
NOV. 3...	225.50.20,7	1.32.5,3	1.2.38,9	1.15,7	0,7331004
23...	227.22.34,2	1.32.13,5	1.1.20,4	1.18,5	0,7327680
DÉC. 13...	228.54.56,3	1.32.22,1	0.59.59,1	1.21,3	0,7324224
1805. JANV. 2...	230.27.27,4	+1.32.31,1	+0.58.35,1	-1.24,0	0,7320638

Équinoxe 1810, janvier 0,5.

1804. DÉC. 13...	229.3.18,5		+0.59.55,1		0,7324224
1805. JANV. 2...	230.35.49,6	+1.32.31,1	0.58.31,0	-1.24,1	0,7320638
22...	232.8.29,8	1.32.40,2	0.57.4,2	1.26,8	0,7316923
FÉVR. 11...	233.41.19,6	1.32.49,8	0.55.34,8	1.29,4	0,7313083
MARS 3...	235.14.19,3	1.32.59,7	0.54.2,8	1.32,0	0,7309119
23...	236.47.29,5	1.33.10,2	0.52.28,3	1.34,5	0,7305034
AVRIL 12...	238.20.50,2	1.33.20,7	0.50.51,2	1.37,1	0,7300830
MAI 2...	239.54.21,8	1.33.31,6	0.49.11,7	1.39,5	0,7296510
22...	241.28.4,5	1.33.42,7	0.47.29,8	1.41,9	0,7292077
JUIN 11...	243.1.58,8	1.33.54,3	0.45.45,5	1.44,3	0,7287533
JUILL. 1...	244.36.4,9	1.34.6,1	0.43.59,0	1.46,5	0,7282882
21...	246.10.23,2	1.34.18,3	0.42.10,3	1.48,7	0,7278126
AOUT 10...	247.44.53,9	1.34.30,7	0.40.19,4	1.50,9	0,7273267
30...	249.19.37,5	1.34.43,6	0.38.26,5	1.52,9	0,7268309
SEPT. 19...	250.54.34,1	1.34.56,6	0.36.31,5	1.55,0	0,7263254
OCT. 9...	252.29.44,0	+1.35.9,9	+0.34.34,5	-1.57,0	0,7258106

	Longitude		Latitude		Logarithme	
	héliocentrique.	Diff.	héliocentrique.	Diff.	du rayon vecteur.	Diff.
	252.29.44,0	+1.35.23,5	+0.31.34,5		0,7258106	-5236
	254. 5. 7,5	1.35.37,3	0.32.35,7	-1.58,8	0,7252870	5321
	255.40.44,8	1.35.51,4	0.30.35,1	2. 0,6	0,7247549	5402
	257.16.36,2	1.36. 5,8	0.28.32,8	2. 2,3	0,7242147	5480
	258.52.42,0	1.36.20,5	0.26.28,8	2. 4,0	0,7236667	5554
	260.29. 2,5	1.36.35,3	0.24.23,2	2. 5,6	0,7231113	5625
	262. 5.37,8	1.36.50,3	0.22.16,2	2. 7,0	0,7225488	5692
	263.42.28,1	1.37. 5,4	0.20. 7,9	2. 8,3	0,7219796	5755
	265.19.33,5	1.37.21,1	0.17.58,2	2. 9,7	0,7214041	5814
	266.56.54,6	1.37.36,9	0.15.47,2	2.11,0	0,7208227	5867
	268.34.31,5	1.37.53,9	0.13.35,2	2.12,0	0,7202360	5916
	270.12.24,4	1.38. 8,8	0.11.22,2	2.13,0	0,7196444	5961
	271.50.33,2	1.38.25,0	0. 9. 8,2	2.14,0	0,7190483	6000
26...	273.28.58,2	1.38.41,3	0. 6.53,4	2.14,8	0,7184483	6037
.16...	275. 7.39,5	1.38.57,6	0. 4.37,9	2.15,5	0,7178446	6067
3...	276.46.37,1	1.39.14,2	0. 2.21,8	2.16,1	0,7172379	6094
25...	278.25.51,3	1.39.31,0	+0. 0. 5,2	2.16,6	0,7166285	6115
1.14...	280. 5.22,3	1.39.48,0	-0. 2.11,8	2.17,0	0,7160170	6131
4...	281.45.10,3	1.40. 5,1	0. 4.29,1	2.17,3	0,7154039	6142
24...	283.25.15,4	1.40.22,3	0. 6.46,5	2.17,5	0,7147897	6148
N. 13...	285. 5.37,7	1.40.39,2	0. 9. 4,0	2.17,7	0,7141749	6149
ÉC. 3...	286.46.16,9	1.40.56,1	0.11.21,4	2.17,2	0,7135600	6144
23...	288.27.13,0	1.41.13,3	0.13.38,4	2.16,8	0,7129456	6134
ANV. 12...	290. 8.26,3	1.41.30,6	0.15.55,4	2.16,5	0,7123322	6118
FÉVR. 1...	291.49.56,9	1.41.47,7	0.18.11,9	2.15,9	0,7117204	6097
21...	293.31.44,6	1.42. 4,9	0.20.27,8	2.15,1	0,7111107	6071
MARS 13...	295.13.49,5	1.42.22,1	0.22.42,9	2.14,3	0,7105036	6038
22...	296.56.11,6	1.42.39,3	0.24.57,2	2.13,4	0,7098998	5999
MAI 12...	298.38.50,9	1.42.56,3	0.27.10,6	2.12,3	0,7092999	5955
JUN 1...	300.21.47,2	1.43.13,2	0.29.22,9	2.11,0	0,7087044	5906
21...	302. 5. 0,4	1.43.30,0	0.31.33,9	2. 9,7	0,7081138	5852
JUL 11...	303.48.30,4	1.43.46,9	0.33.43,6	2. 8,2	0,7075286	5791
31...	305.32.17,3	1.44. 3,6	0.35.51,8	2. 6,6	0,7069495	5725
AUT 20...	307.16.20,9	1.44.20,0	0.37.58,4	2. 4,8	0,7063770	5653
PT. 9...	309. 0.40,9	1.44.36,4	0.40. 3,2	2. 2,9	0,7058117	5574
29...	310.45.17,3	1.44.52,5	0.42. 6,1	2. 0,9	0,7052543	5491
Y. 19...	312.30. 9,8	1.45. 8,4	0.44. 7,0	1.58,8	0,7047052	5402
V. 8...	314.15.18,2	1.45.24,0	0.46. 5,8	1.56,4	0,7041650	5306
28...	316. 0.42,2	1.45.39,3	0.48. 2,2	1.53,9	0,7036344	5206
ÉC. 18...	317.46.21,5	1.45.54,4	0.49.56,1	1.51,4	0,7031138	5099
NOV. 7...	319.32.15,9	1.46. 9,4	0.51.47,5	1.48,7	0,7026039	4988
27...	321.18.25,3	1.46.24,1	0.53.36,2	1.45,9	0,7021051	4871
DÉC. 16...	323. 4.49,4	+1.46.38,3	0.55.22,1	-1.42,9	0,7016180	-4748
	324.51.27,7		-0.57. 5,0		0,7011432	

0 h. Temps moyen de Paris.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Li de ra
1808. FÉVR. 16...	324.51.27,7	+1.46.52,3	-0.57. 5,0	-1.39,9	0,1
MARS 7...	326.38.20,0	1.47. 5,8	0.58.44,9	1.36,6	0,1
27...	328.25.25,8	1.47.19,0	1. 0.21,5	1.33,3	0,1
AVRIL 16...	330.12.44,8	1.47.31,8	1. 1.54,8	1.29,9	0,1
MAI 6...	332. 0.16,6	1.47.44,3	1. 3.24,7	1.26,3	0,1
26...	333.48. 0,9	1.47.56,2	1. 4.51,0	1.22,6	0,1
JUIN 15...	335.35.57,1	1.48. 7,7	1. 6.13,6	1.18,8	0,1
JUILL. 5...	337.24. 4,8	1.48.18,7	1. 7.32,4	1.15,0	0,1
25...	339.12.23,5	1.48.29,5	1. 8.47,4	1.11,0	0,1
AOUT 14...	341. 0.53,0	1.48.39,6	1. 9.58,4	1. 6,9	0,1
SEPT. 3...	342.49.32,6	1.48.49,1	1.11. 5,3	1. 2,7	0,1
23...	344.38.21,7	1.48.58,2	1.12. 8,0	0.58,4	0,1
OCT. 13...	346.27.19,9	1.49. 6,8	1.13. 6,4	0.54,1	0,1
NOV. 2...	348.16.26,7	1.49.14,7	1.14. 0,5	0.49,7	0,1
22...	350. 5.41,4	1.49.22,3	1.14.50,2	0.45,2	0,1
DÉC. 12...	351.55. 3,7	1.49.29,1	1.15.35,4	0.40,7	0,1
1809. JANV. 1...	353.44.32,8	1.49.35,4	1.16.16,1	0.36,1	0,1
21...	355.34. 8,2	1.49.41,0	1.16.52,2	0.31,4	0,1
FÉVR. 10...	357.23.49,2	1.49.46,1	1.17.23,6	0.26,7	0,1
MARS 2...	359.13.35,3	1.49.50,6	1.17.50,3	0.22,0	0,6
22...	1. 3.25,9	1.49.54,5	1.18.12,3	0.17,2	0,6
AVRIL 11...	2.53.20,4	1.49.57,7	1.18.29,5	0.12,4	0,6
MAI 1...	4.43.18,1	1.50. 0,4	1.18.41,9	0. 7,5	0,6
21...	6.33.18,5	1.50. 2,5	1.18.49,4	-0. 2,7	0,6
JUIN 10...	8.23.21,0	1.50. 3,7	1.18.52,1	+0. 2,1	0,6
30...	10.13.24,7	1.50. 4,6	1.18.50,0	0. 7,0	0,6
JUILL. 20...	12. 3.29,3	1.50. 4,8	1.18.43,0	0.11,8	0,6
AOUT 9...	13.53.34,1	1.50. 4,2	1.18.31,2	0.16,7	0,6
29...	15.43.38,3	1.50. 3,1	1.18.14,5	0.21,4	0,6
SEPT. 18...	17.33.41,4	1.50. 1,2	1.17.53,1	0.26,3	0,6
OCT. 8...	19.23.42,6	1.49.58,7	1.17.26,8	0.31,0	0,6
28...	21.13.41,3	1.49.55,7	1.16.55,8	0.35,7	0,6
NOV. 17...	23. 3.37,0	1.49.52,0	1.16.20,1	0.40,3	0,6
DÉC. 7...	24.53.29,0	1.49.47,7	1.15.39,8	0.44,9	0,6
27...	26.43.16,7	1.49.42,8	1.14.54,9	0.49,5	0,6
1810. JANV. 16...	28.32.59,5	1.49.37,3	1.14. 5,4	0.54,0	0,6
FÉVR. 5...	30.22.36,8	1.49.31,2	1.13.11,4	0.58,4	0,6
25...	32.12. 8,0	1.49.24,6	1.12.13,0	1. 2,7	0,6
MARS 17...	34. 1.32,6	1.49.17,4	1.11.10,3	1. 6,9	0,6
AVRIL 6...	35.50.50,0	1.49. 9,5	1.16. 3,4	1.11,1	0,6
26...	37.39.59,5	1.49. 1,2	1. 8.52,3	1.15,2	0,6
MAI 16...	39.29. 0,7	1.48.52,2	1. 7.37,1	1.19,2	0,6
JUIN 5...	41.17.52,9	+1.48.42,8	1.6.17,9	+1.23,0	0,6
25...	43. 6.35,7		-1. 4.54,9		0,6

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

Le moyen solaire.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.	Diff.
JUN. 23...	43. 6.35,7	" " "	-1. 4.54,9	" " "	0,6973858	
JUL. 15...	44.55. 8,5	+1.48.32,8	1. 3.28,2	+1.26,7	0,6977220	+3362
AOUT 4...	46.43.31,0	1.48.22,5	1. 1.57,8	1.30,4	0,6980751	3531
24...	48.31.42,6	1.48.11,6	1. 0.23,8	1.34,0	0,6984444	3693
SEPT. 13...	50.19.42,8	1.48. 0,2	0.58.46,5	1.37,3	0,6988296	3852
OCT. 3...	52. 7.31,0	1.47.48,2	0.57. 5,8	1.40,7	0,6992302	4006
23...	53.55. 6,9	1.47.35,9	0.55.22,0	1.43,8	0,6996459	4157
NOV. 12...	55.42.30,3	1.47.23,4	0.53.35,1	1.46,9	0,7000761	4302
22...	57.29.40,9	1.47.10,6	0.51.45,3	1.49,8	0,7005205	4444
NOV. 11...	59.16.38,0	1.46.57,1	0.49.52,7	1.52,6	0,7009784	4579
31...	61. 3.21,4	1.46.43,4	0.47.57,5	1.55,2	0,7014494	4710
DECEMBRE 20...	62.49.50,5	1.46.29,1	0.45.59,7	1.57,8	0,7019330	4836
JANV. 12...	64.36. 5,0	1.46.14,5	0.43.59,6	2. 0,1	0,7024284	4954
FEB. 1...	66.22. 4,8	1.45.59,8	0.41.57,3	2. 2,3	0,7029352	5068
21...	68. 7.49,5	1.45.44,7	0.39.52,9	2. 4,4	0,7034529	5177
MARS 11...	69.53.18,9	1.45.29,4	0.37.46,5	2. 6,4	0,7039809	5280
31...	71.38.32,7	1.45.13,8	0.35.38,3	2. 8,2	0,7045187	5378
AVRIL 20...	73.23.30,6	1.44.57,9	0.33.28,4	2. 9,9	0,7050657	5470
MAY 10...	75. 8.12,5	1.44.41,9	0.31.17,0	2.11,4	0,7056215	5558
30...	76.52.38,2	1.44.25,7	0.29. 4,2	2.12,8	0,7061852	5637
JUN 19...	78.36.47,4	1.44. 9,2	0.26.50,2	2.14,0	0,7067564	5712
JUL 8...	80.20.40,0	1.43.52,6	0.24.35,0	2.15,2	0,7073346	5782
28...	82. 4.15,9	1.43.35,9	0.22.18,9	2.16,1	0,7079191	5845
AUG 8...	83.47.34,9	1.43.19,0	0.20. 1,9	2.17,0	0,7085093	5902
28...	85.30.37,0	1.43. 2,1	0.17.44,2	2.17,7	0,7091047	5954
SEPT. 7...	87.13.22,0	1.42.45,0	0.15.25,9	2.18,3	0,7097048	6001
27...	88.55.49,9	1.42.27,9	0.13. 7,1	2.18,8	0,7103090	6042
OCT. 17...	90.38. 0,7	1.42.10,8	0.10.48,1	2.19,0	0,7109167	6077
6...	92.19.54,3	1.41.53,6	0. 8.28,9	2.19,2	0,7115273	6106
26...	94. 1.30,7	1.41.36,4	0. 6. 9,6	2.19,3	0,7121403	6130
NOV. 15...	95.42.49,9	1.41.19,2	0. 3.50,4	2.19,2	0,7127550	6147
5...	97.23.51,9	1.41. 2,0	-0. 1.31,4	2.19,0	0,7133710	6160
DEC. 25...	99. 4.36,7	1.40.44,8	+0. 0.47,3	2.18,7	0,7139877	6167
JANV. 14...	100.45. 4,3	1.40.27,6	0. 3. 5,5	2.18,2	0,7146046	6169
FEB. 13...	102.25.14,7	1.40.10,4	0. 5.23,2	2.17,7	0,7152212	6166
MARS 4...	104. 5. 8,1	1.39.53,4	0. 7.40,3	2.17,1	0,7158369	6157
24...	105.44.44,5	1.39.36,4	0. 9.56,5	2.16,2	0,7164512	6143
AVRIL 13...	107.24. 4,1	1.39.19,6	0.12.11,9	2.15,4	0,7170635	6123
MAY 3...	109. 3. 6,9	1.39. 2,8	0.14.26,3	2.14,4	0,7176735	6100
JUN 23...	110.41.53,2	1.38.46,3	0.16.39,6	2.13,3	0,7182805	6070
JUL 13...	112.20.23,1	1.38.29,9	0.18.51,7	2.12,1	0,7188842	6037
AUG 3...	113.58.36,7	1.38.13,6	0.21. 2,5	2.10,8	0,7194841	5999
SEPT. 23...	115.36.34,1	1.37.57,4	0.23.11,9	2. 9,4	0,7200798	5957
OCT. 13...	117.14.15,6	+1.37.41,5	+0.25.19,9	+2. 8,0	0,7206706	+5908

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

0 h. Temps moyen de Paris.	Longitude héliocentrique.	Diff.	Latitude héliocentrique.	Diff.	Logarithme du rayon vecteur.
1812. Nov. 1...	117.14.15,6		+0.25.19,9		0,7206706
21...	118.51.41,3	+1.37.25,7	0.27.26,3	+2. 6,4	0,7212562
DÉC. 11...	120.28.51,3	1.37.10,0	0.29.31,0	2. 4,7	0,7218362
31...	122. 5.45,9	1.36.54,6	0.31.33,9	2. 2,9	0,7224102
1813. JANV. 20...	123.42.25,3	1.36.39,4	0.33.35,1	2. 1,2	0,7229776
FÉVR. 9...	125.18.49,7	1.36.24,4	0.35.34,4	1.59,3	0,7235379
MARS 1...	126.54.59,2	1.36. 9,5	0.37.31,6	1.57,2	0,7240909
21...	128.30.54,2	1.35.55,0	0.39.26,9	1.55,3	0,7246362
AVRIL 10...	130. 6.35,0	1.35.40,8	0.41.20,0	1.53,1	0,7251735
30...	131.42. 1,8	1.35.26,8	0.43.10,9	1.50,9	0,7257021
MAI 20...	133.17.14,9	1.35.13,1	0.44.59,5	1.48,6	0,7262223
JUIN 9...	134.52.14,6	1.34.59,7	0.46.45,9	1.46,4	0,7267336
29...	136.27. 1,1	1.34.46,5	0.48.29,9	1.44,0	0,7272351
JUILL. 19...	138. 1.34,7	1.34.33,6	0.50.11,4	1.41,5	0,7277267
AOUT 8...	139.35.55,6	1.34.20,9	0.51.50,4	1.39,0	0,7282083
28...	141.10. 4,2	1.34. 8,6	0.53.26,8	1.36,4	0,7286795
SEPT. 17...	142.44. 0,7	1.33.56,5	0.55. 0,7	1.33,9	0,7291399
OCT. 7...	144.17.45,5	1.33.44,8	0.56.31,9	1.31,2	0,7295992
27...	145.51.18,9	1.33.33,4	0.58. 0,4	1.28,5	0,7300771
NOV. 16...	147.24.41,1	1.33.22,2	0.59.26,2	1.25,8	0,7304536
DÉC. 6...	148.57.52,6	1.33.11,5	1. 0.49,1	1.22,9	0,7308283
26...	150.30.53,7	1.33. 1,1	1. 2. 9,2	1.20,1	0,7312709
1814. JANV. 15...	152. 3.44,7	1.32.51,0	1. 3.26,5	1.17,3	0,7316611
FÉVR. 4...	153.36.26,0	1.32.41,3	1. 4.40,9	1.14,4	0,7320388
24...	155. 8.57,9	1.32.31,9	1. 5.52,3	1.11,4	0,7324036
MARS 16...	156.41.20,6	1.32.22,7	1. 7. 0,8	1. 8,5	0,7327555
AVRIL 5...	158.13.34,6	1.32.14,0	1. 8. 6,2	1. 5,4	0,7330942
25...	159.45.40,1	1.32. 5,5	1. 9. 8,6	1. 2,4	0,7334195
MAI 15...	161.17.37,6	1.31.57,5	1.10. 8,0	0.59,4	0,7337313
JUIN 4...	162.49.27,4	1.31.49,8	1.11. 4,3	0.56,3	0,7340294
24...	164.21. 9,8	1.31.42,4	1.11.57,4	0.53,1	0,7343135
JUILL. 14...	165.52.45,3	1.31.35,5	1.12.47,4	0.50,0	0,7345835
AOUT 3...	167.24.14,1	1.31.28,8	1.13.34,3	0.46,9	0,7348393
23...	168.55.36,8	1.31.22,7	1.14.18,0	0.43,7	0,7350808
SEPT. 12...	170.26.53,6	1.31.16,8	1.14.58,5	0.40,5	0,7353078
OCT. 2...	171.58. 4,9	1.31.11,3	1.15.35,8	0.37,3	0,7355201
22...	173.29.11,1	1.31. 6,2	1.16. 9,8	0.34,0	0,7357178
NOV. 11...	175. 0.12,6	1.31. 1,5	1.16.40,7	0.30,9	0,7359006
DÉC. 1...	176.31. 9,7	1.30.57,1	1.17. 8,3	0.27,6	0,7360684
21...	178. 2. 2,7	1.30.53,0	1.17.32,6	0.24,3	0,7362212
1815. JANV. 10...	179.32.52,1	+1.30.49,4	+1.17.53,7	+0.21,1	0,7363589

au des corrections à appliquer aux coordonnées héliocentriques Jupiter, tirées des Tables de Bouvard, pour obtenir celles de Ferrer. (Les corrections applicables au logarithme du rayon vecteur sont exprimées en unités du sixième ordre décimal.)

Corrections en				Corrections en			
	longitude.	latitude.	rayon vecteur.		longitude.	latitude.	rayon vecteur.
9.				1774.			
7.	- 4,2	- 0,1	+ 30	SEPT. 1.	- 8,6	+ 0,1	- 4
27.	4,2	- 0,2	33	OCT. 31.	9,2	0,1	- 3
26.	3,6	+ 0,1	34	DÉC. 30.	9,5	0,4	0
0.				1775.			
25.	3,1	0,0	35	FÉVR. 28.	10,1	0,3	+ 1
26.	2,6	+ 0,1	34	AVRIL 29.	10,4	0,3	4
25.	1,9	- 0,1	34	JUIN 28.	10,6	0,2	5
24.	1,6	+ 0,6	36	AOUT 27.	10,4	0,6	6
22.	1,0	+ 0,1	38	OCT. 26.	9,7	0,7	10
21.	0,8	- 0,3	40	DÉC. 25.	8,9	0,5	12
1.				1776.			
20.	1,2	0,2	42	FÉVR. 23.	8,3	0,8	14
21.	1,1	0,0	43	AVRIL 23.	7,3	0,6	17
20.	0,7	0,5	43	JUIN 22.	6,3	0,9	19
19.	0,2	0,2	42	AOUT 21.	5,4	0,8	22
17.	0,2	0,4	40	OCT. 20.	4,2	1,0	25
16.	- 0,3	0,4	38	DÉC. 19.	2,2	1,1	27
2.				1777.			
15.	+ 0,1	0,4	36	FÉVR. 17.	- 0,8	0,9	28
15.	+ 0,1	0,4	34	AVRIL 18.	+ 0,9	0,8	29
14.	- 0,2	0,6	31	JUIN 17.	1,6	0,9	30
13.	0,6	0,4	29	AOUT 16.	2,5	1,0	28
11.	0,8	0,3	24	OCT. 15.	3,8	1,0	27
10.	1,5	0,5	23	DÉC. 14.	4,5	0,6	25
3.				1778.			
9.	2,2	0,4	20	FÉVR. 12.	4,9	0,5	23
10.	2,8	0,3	17	AVRIL 13.	5,3	0,5	21
9.	3,0	0,5	13	JUIN 12.	5,6	0,9	20
8.	3,8	0,4	7	AOUT 11.	5,5	0,7	17
6.	4,1	- 0,2	4	OCT. 10.	5,5	0,7	15
5.	4,5	+ 0,2	3	DÉC. 9.	4,7	1,0	13
1774.				1779.			
JANV. 4.	5,2	- 0,2	+ 3	FÉVR. 7.	4,1	0,8	11
MARS 5.	6,4	- 0,1	- 1	AVRIL 8.	4,3	0,8	9
MAI 4.	6,9	+ 0,1	3	JUIN 7.	3,2	0,7	4
JUIL. 3.	- 8,1	+ 0,1	- 4	AOUT 6.	+ 1,7	+ 0,4	+ 4

Corrections en				Corrections en		
	longitude.	latitude.	rayon vecteur.	longitude.	latitude.	v
1779.				1783.		
OCT. 7.	+ 2,0	+0,5	3	MAI 6.	+ 4,3	-0,8
DÉC. 4.	2,1	0,6	2	JUILL. 5.	3,9	0,6
1780.				1786.		
FÉVR. 2.	2,0	+0,4	0	SEPT. 3.	4,0	0,3
AVRIL 2.	+ 0,5	-0,2	2	NOV. 2.	4,1	0,3
JUN 1.	- 0,3	-0,3	3	JANV. 1.	3,9	0,1
JUILL. 31.	+ 0,3	+0,3	4	MARS 2.	3,6	0,3
SEPT. 29.	- 0,6	0,0	6	MAI 1.	3,1	0,2
NOV. 28.	1,5	0,0	8	JUIN 30.	2,7	-0,1
1781.				AOUT 29.		
JANV. 27.	1,6	-0,1	11	OCT. 28.	1,6	0,2
MARS 28.	1,8	0,3	13	DÉC. 27.	1,6	0,0
MAI 27.	2,3	0,4	16	1787.		
JUILL. 26.	2,5	0,5	20	FÉVR. 25.	1,1	0,5
SEPT. 24.	2,8	0,2	25	AVRIL 26.	0,8	0,4
NOV. 23.	3,2	0,4	26	JUIN 25.	0,4	0,3
1782.				AOUT 24.		
JANV. 22.	3,6	0,0	28	OCT. 23.	+ 0,1	0,5
MARS 23.	4,7	0,3	30	DÉC. 22.	- 0,1	0,8
MAI 22.	4,6	0,8	29	1788.		
JUILL. 21.	4,6	0,8	33	FÉVR. 20.	0,0	0,5
SEPT. 19.	4,8	0,8	33	AVRIL 20.	+ 0,4	0,7
NOV. 18.	4,4	0,9	34	JUIN 19.	0,4	0,6
1783.				AOUT 18.		
JANV. 17.	4,0	0,6	35	OCT. 17.	0,2	0,4
MARS 18.	3,2	1,0	36	DÉC. 16.	0,6	0,6
MAI 17.	2,8	0,7	35	1789.		
JUIN 16.	2,7	0,6	34	FÉVR. 14.	1,0	0,6
SEPT. 14.	2,0	0,9	34	AVRIL 15.	1,3	0,4
NOV. 13.	- 0,8	1,5	34	JUIN 14.	1,8	0,3
1784.				AOUT 13.		
JANV. 12.	+ 0,2	0,7	34	OCT. 12.	2,7	0,5
MARS 12.	0,5	0,9	32	DÉC. 11.	3,3	0,7
MAI 11.	1,3	1,0	30	1790.		
JUILL. 10.	2,6	0,9	28	FÉVR. 9.	3,6	0,6
SEPT. 8.	3,6	1,0	26	AVRIL 10.	4,5	0,6
NOV. 7.	4,3	0,9	23	JUIN 9.	5,4	0,2
1785.				AOUT 8.		
JANV. 6.	4,6	0,9	21	OCT. 7.	6,8	0,9
MARS 7.	+ 4,3	-1,3	+19	DÉC. 6.	+ 7,7	+0,6

(A suivre)

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

MÉLANGES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES, TIRÉS DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG, t. VII, 1890.

Lindemann (E.). — Sur une équation personnelle qui se manifeste dans les comparaisons photométriques des étoiles.

Il y a quelque temps, M. Ceraski avait signalé l'existence d'une équation personnelle, d'une nature très curieuse, dans ses comparaisons photométriques d'étoiles voisines. Il avait constaté qu'en comparant entre elles deux étoiles de même grandeur, il estimait toujours celle qui se trouvait à droite plus faible que celle qui était à gauche; la différence pouvait aller à une demi-grandeur. Cette erreur physiologique affectait, d'une manière plus ou moins sensible, les comparaisons d'étoiles de toutes les grandeurs. Il y aurait donc là une source d'erreurs assez graves pour les déterminations photométriques qui ne se font pas d'une manière symétrique (par exemple, en renversant l'ordre des objets).

M. E. Lindemann a fait, dans le cours des mois de septembre et d'octobre 1890, quelques expériences en vue de vérifier cette inquiétante découverte. Il a exécuté une série de comparaisons en plaçant l'étoile tour à tour entre les deux étoiles artificielles du photomètre de Zöllner (suivant l'usage adopté à Poulkova), puis en dehors de l'intervalle, à gauche ou à droite. Il s'est trouvé qu'il y avait presque toujours une légère différence entre les résultats obtenus dans les trois positions, l'étoile paraissant trop brillante à gauche, et trop faible à droite; mais cette différence ne dépassait jamais, en moyenne, un dixième de grandeur. Elle se trouve d'ailleurs éliminée dans le procédé habituel de M. Lindemann, qui consiste, ainsi qu'on l'a dit, à observer entre les deux étoiles artificielles. Mais l'erreur ou l'équation personnelle dont il s'agit peut être beaucoup plus sensible chez d'autres observateurs. M. Lindemann pense qu'elle s'expliquerait en admettant que l'on vise de préférence l'objet placé à droite, de sorte que l'objet qui se trouve à gauche paraît un peu trop brillant, parce que l'image de cet objet occupe une position excentrique sur la rétine.

Nyrén. — Sur l'existence d'un terme qui dépend de la température dans les lectures des collimateurs du cercle méridien de Poulkova.

La discussion des séries d'observations méridiennes, exécutées par Sabler, Düllen et Winnecke, de 1850 à 1863, et publiées dans le tome VIII des *Observations de Poulkova*, avait montré que la différence N.-S. des lectures du cercle, relatives aux collimateurs sud, augmentait avec la température (d'environ 0",03 pour 1° F) et était de même de la différence 360° + N.-S. des lectures effectuées après l'échange de l'oculaire et de l'objectif de la MM. O. Struve, Backlund, Schwarz ont tour à tour proposé des explications de cette influence de la température, mais sans élucider complètement la question. C'est du moins l'opinion de M. Romberg qui a de nouveau étudié, sous ce point de vue, les matériaux recueillis par les premiers observateurs aussi bien que ceux qui ont été plus tard par Gromadzki et par M. Romberg. Ainsi, on ne saurait attribuer le terme + 0",03 t à une variation de la flexion, car il n'y a pas de signe après la substitution de l'oculaire à l'objectif, tandis que la flexion, tout en conservant la même valeur numérique, s'ajoute à la différence des lectures, et s'en retranche ensuite. Pour la période on a, en effet :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \dots\dots\dots & N - S + 360^\circ = 180^\circ + 2b + 0",03 t, \\ \text{(II)} \dots\dots\dots & N - S \qquad \qquad = 180^\circ - 2b + 0",03 t, \end{aligned}$$

b étant la flexion; pour la période qui comprend les observations de M. Romberg (1874-1876), les microscopes ayant été fixés du côté

$$\begin{aligned} \text{(I)} \dots\dots\dots & S - N + 360^\circ = 180^\circ + 2b + 0",043 t, \\ \text{(II)} \dots\dots\dots & S - N \qquad \qquad = 180^\circ - 2b + 0",031 t. \end{aligned}$$

Le coefficient est ici, en moyenne, de 0",037 pour 1° R. Mais, curieuse et inattendue, M. Nyrén a obtenu un coefficient qui est cinq fois plus fort (en moyenne 0",16), en essayant de le déduire de la comparaison des lectures faites par M. Romberg dans le cours de la même soirée, où la température avait souvent baissé d'une manière sensible. Il faut donc renoncer à voir, dans ce phénomène, une simple dilatation, simplement proportionnelle à la température.

M. Nyrén, après avoir écarté successivement une série d'explications hypothétiques auxquelles on aurait pu songer au premier abord, et qui ne résistent pas à une critique plus approfondie, s'arrête à l'explication qui lui ont suggérée les recherches expérimentales auxquelles il a procédé dans ces derniers temps, et qui met en cause les inégalités de dilatation (*zapfen*, tourillons) par lesquels chaque collimateur repose

deux coussinets. Ces colliers n'étant pas exactement cylindriques, mais légèrement coniques, il en résulte que le niveau à bulle d'air, posé sur les colliers, n'indique pas toujours rigoureusement l'inclinaison de l'axe optique, le moindre déplacement des supports dans le sens longitudinal pouvant occasionner un changement apparent très sensible de cette inclinaison. En supposant que les supports du niveau ne se déplacent pas par suite d'un changement de température (les gaines des niveaux étant faites du même métal que les tubes des collimateurs), il est encore possible que la dilatation du tube déplace les colliers sur leurs coussinets, fixés sur un pilier de granit, et qu'il en résulte des variations d'inclinaison de l'ordre des écarts observés. Ces variations seraient relativement plus sensibles dans le cours d'une soirée que dans le cours d'une saison, à cause de la différence de conductibilité du métal et du pilier. Il faut ajouter, pour compléter cette explication, que l'on est obligé de déterminer l'inclinaison des collimateurs par la lecture des niveaux, parce qu'ils ne peuvent être pointés l'un sur l'autre pendant que le cercle reste en place.

Si l'explication proposée soulevait des difficultés, on pourrait encore invoquer la variabilité de l'erreur de collimation du collimateur α , constatée par M. Romberg (elle tient sans doute au manque de fixité du tube qui porte la croisée des fils).

Il est à présumer que la même cause d'erreur a dû influencer les déterminations du point zénithal du cercle et les déclinaisons qui en ont été déduites. C'est peut-être là qu'il faut chercher l'explication des écarts entre les déclinaisons fournies par le cercle méridien et le cercle vertical de Poulkova, écarts qui varient avec les saisons. En tout cas, M. Nyrén pense qu'il y aurait lieu de faire rectifier les surfaces des colliers, qui devraient être exactement cylindriques, et de se préoccuper aussi de donner plus de fixité à la croisée des fils.

R. R.

CLERKE (Miss AGNÈS M.). — THE SYSTEM OF THE STARS (London, Longmans Green and Co, 1890, 424 pages in-8. 21 sh.).

L'auteur de l'*Histoire de l'Astronomie pendant le XIX^e siècle* acquiert un nouveau titre à l'estime des astronomes et à la reconnaissance du public scientifique. *Le système des étoiles* a pour objet de faire connaître le monde sidéral qui nous environne et cette tâche a été remplie avec bonheur par miss Clerke. En choisissant dans chaque classe de phénomènes des exemples typiques, et en les traitant avec assez de

détails pour éveiller l'intérêt et le rendre plus vivant en quelque sorte l'auteur a évité les longueurs auxquelles aurait donné lieu une exposition complète. Les faits sont considérés en premier lieu; ensuite tentatives pour les interpréter sont indiquées, et on signale avec impartialité les difficultés des différentes théories.

L'extrait ci-dessous de la Table des matières prouvera mieux qu'un analyse combien *Le système des étoiles* embrasse tous les problèmes de l'Astronomie sidérale. Espérons qu'une traduction permettra à tous les astronomes et amateurs français de goûter le livre de miss Clerke.

CHAP. I et II. *Objets et méthodes de l'Astronomie sidérale* (p. 1-56).

CHAP. III, IV et V. *Étoiles du type de Sirius et du Soleil; avec spectres de bandes; étoiles gazeuses et nébuleuses.* — Dans le Chap. V (p. 66-82), il est parlé des raies brillantes dans les spectres stellaires, de la constitution des étoiles gazeuses, de la variété découverte par MM. Wolf et Rayet, de la transition entre les étoiles et les nébuleuses, des spectres des nébuleuses gazeuses, de celle d'Orion et de celle d'Andromède, de l'application de la Photographie à l'analyse spectrale des nébuleuses.

CHAP. VI. *Évolution stellaire* (p. 82-95).

CHAP. VII, VIII et IX. *Étoiles temporaires, étoiles variables à longue et à courte période* (p. 95-146).

CHAP. X. *Couleurs des étoiles* (p. 146-163).

CHAP. XI et XII. *Étoiles doubles, étoiles doubles variables.* — Sommaire du dernier Chapitre (p. 179-187): Nature des changements dans les composantes. Variabilité mutuelle. Satellite de δ Cygne. Étoiles doubles variables ayant des spectres du type de Sirius. Liaison physique dans les couples prouvée par les changements mutuels d'éclat. Importance de l'étude de la variabilité dans les systèmes stellaires.

CHAP. XIII et XIV. *Orbites stellaires et systèmes multiples.* Sommaire du Chapitre XIV (p. 205-220): Systèmes triples (γ Andromède, Rigel, β Eridan, Castor). Système de ζ Ecrevisse. Composante observée du système de ζ Grande Ourse. Découvertes spectroscopiques des satellites d'étoiles. Étoiles quadruples (ε Lyre, ν Scorpion). Groupes stellaires multiples. Relations avec les nébuleuses. Trapèze d'Orion. Transition entre les amas.

CHAP. XV et XVI. *Les Pléiades, les amas d'étoiles.* — Sommaire du Chap. XVI (p. 234-251) : Amas globulaires et irréguliers. Structure réticulaire. Signes de subdivision. Abondance des étoiles rouges et doubles dans les amas. Amas près de γ Croix. Amas de Præsepe. Équilibre dynamique des amas globulaires. Apparence radiale. ω Centaure et δ Toucan. Intervalles sombres. Le grand amas d'Hercule. Affinités nébuleuses des amas.

CHAP. XVII, XVIII et XIX. *Les formes des nébuleuses, les grandes nébuleuses, nature et changement des nébuleuses* (p. 251-297). — Sommaire du dernier Chap. (p. 285-297) : Nébuleuses et comètes. Ressemblance de structure. Courbe type des nébuleuses en hélice. Indications d'une action répulsive. Immobilité des nébuleuses. Satellites des nébuleuses planétaires. Variabilité d'éclat. Disparitions et fluctuations. Changements locaux dans les nébuleuses irrégulières. Illumination électrique.

CHAP. XX, XXI et XXII. *Les distances des étoiles et leurs mouvements propres. Translation du système solaire* (p. 297-352).

CHAP. XXIII et XXIV. *La voie lactée. Distribution des nébuleuses* (p. 352-379).

CHAP. XXV. *La construction du ciel* (p. 379-399). — Sommaire : Un problème de Dynamique. Caractère limité du système sidéral. Jaugeage photographique des étoiles. L'amas solaire. Difficultés que présente son organisation. Éléments du système sidéral calculés par Maxwell Hall. Lois d'agrégation. Distribution rectiligne et annulaire des étoiles. Forme de l'univers visible....

Six planches et en premier lieu la carte des Pléiades de MM. Henry ornent le volume; dans le texte se trouvent d'excellentes illustrations.

Un appendice contient les Tables suivantes :

Étoiles ayant des raies brillantes dans leurs spectres.

Étoiles doubles variables.

Parallaxes stellaires (avec les mouvements propres).

Étoiles à forts mouvements propres ($> 1''$ par an).

Masses des étoiles doubles.

Vitesses radiales des étoiles.

Un Index très complet termine l'Ouvrage.

HELMERT (R.). — DIE SCHWERKRAFT IM HOCHGEBIRGE, INSBESONDERE IN TYROLER ALPEN, ETC. Berlin, 1890.

Lorsqu'on a déterminé, à l'aide de l'ensemble des observations de pendule, préalablement réduites au niveau de la mer par la formule de Bouguer, les coefficients de la formule de Clairaut

$$g_{\varphi} = A + B \sin^2 \varphi,$$

où

$$A = g^{\text{équat.}}$$

et

$$B = g^{\text{pôle}} - g^{\text{équat.}},$$

si l'on calcule, pour chaque lieu d'observation, la valeur théorique de la pesanteur et qu'on la compare à la valeur observée, on reconnaît immédiatement que les résidus, observation moins calcul, présentent une allure systématique et peuvent être classés en trois groupes distincts, correspondant : le premier aux stations des îles de l'Océan, le deuxième aux stations côtières, le troisième aux stations de montagne.

Dans les îles la pesanteur observée est plus grande que la pesanteur théorique. Aux stations côtières et sur les continents, loin des grandes chaînes de montagne, les résidus sont de l'ordre des erreurs d'observation et tantôt positifs, tantôt négatifs : la pesanteur normale. Aux stations de haute montagne, la pesanteur observée est plus faible que la pesanteur calculée.

Baily, Saigey, Fischer, Listing, etc., ont signalé ces anomalies. Plus récemment le colonel Herschel les a fait ressortir dans une réduction d'ensemble de toutes les observations (plus de 600) qu'il a pu recueillir de 1672 à 1874. La loi est remarquablement régulière pour l'Inde anglaise (1865-1874). Le Tableau suivant, extrait de la Préface du tome V des publications de l'*India Survey (Pendulum operations)*, donne une idée précise de ces variations de pesanteur observée et de leur importance. Ce Tableau représente les nombres d'oscillations perdues ou gagnées en un jour par une pendule à secondes.

Îles.

Minicoy	osc. +4,02
Colaba	+3,40
Aden	+2,34
Moyenne	+3,25

Côtes.

Punnoë.....	osc. 0,00
Kudankolam.....	+0,09
Alleppy.....	+1,44
Mangalore.....	-0,59
Madras.....	-0,74
Cocanada.....	+0,84
Calcutta.....	+1,38
Ismaïlia.....	-0,48
Moyenne.....	+0,24

Stations continentales d'altitude inférieure à 2000 pieds.

Mallapatti.....	osc. -1,12
Pachapaliam.....	-1,76
Namthabad.....	-2,89
Kodangal.....	-1,94
Damargida.....	-3,91
Somtana.....	-1,66
Bagdaon.....	-1,38
Ahmadpur.....	-1,73
Kalianpur.....	-0,96
Pahargarh.....	-2,95
Usira.....	-0,95
Datairi.....	-1,65
Kaliana.....	-3,49
Nojli.....	-4,23
Mean Meer.....	-3,36
Moyenne.....	-2,27

Stations continentales d'altitude comprise entre 2000 et 7000 pieds.

Bangalore sud.....	osc. -3,28
Bangalore nord.....	-2,79
Dehra.....	-8,71
Mussoorie.....	-5,57
Moyenne.....	-5,09
Moré, 15 400 pieds.....	-21 ^{osc.} ,44

Diverses explications de ces anomalies ont été tentées. Celle qui

est le plus généralement acceptée est due à Archdeacon Pratt, de Calcutta. L'excès de pesanteur des îles serait dû à un excès de densité du fond des mers, lequel compenserait le défaut de masse des océans. Le défaut de pesanteur des continents viendrait d'un défaut de densité des couches sous-jacentes, compensant l'excès de masse représenté par la saillie des continents. Le colonel Clarke (1) a remarqué qu'à la station de Moré, où se trouve le plus grand défaut de pesanteur connu, le résidu du calcul, 22 oscillations environ par jour, représente presque exactement l'attraction de la couche comprise entre le niveau de la station et la surface de niveau zéro, de telle sorte que, sous les hauts plateaux de l'Himalaya, la compensation serait parfaite.

D'autre part, en 1887-1888, le lieutenant-colonel von Sterneck (2), se proposant de rechercher expérimentalement l'influence réelle des variations et anomalies de la pesanteur sur l'erreur de fermeture d'un nivellement de précision, a mesuré la pesanteur relative en 37 stations d'une ligne de nivellement embrassant de ses contours le massif central des Alpes tyroliennes. Les résultats de ces mesures, rapportées à la pesanteur absolue mesurée à Vienne par Oppolzer, n'ont pas amélioré beaucoup la fermeture ($-0^m,18$) du nivellement, car, alors que la correction orthométrique calculée atteint $-0^m,007$, la correction dynamique conclue de la pesanteur observée est de $-0^m,023$, et ne diminue la différence d'altitude donnée par les deux chemins Botzen-Brenner-Inspruck, Botzen-Mals-Landeck-Inspruck que de $0^m,016$. Mais l'examen des nombreuses valeurs de g ainsi obtenues dans les hautes vallées et les principaux cols des Alpes tyroliennes, combinées avec cinq autres stations exécutées dans la même région sur des lignes accessoires de nivellement, a montré au lieutenant-colonel von Sterneck que, dans la région, la pesanteur calculée, quand on ne tient pas compte de l'attraction des montagnes, s'accorde vers 1700^m d'altitude avec la pesanteur observée, phénomène analogue à celui de l'Himalaya —

Dans le Mémoire qui fait l'objet de cet article, M. Helmert == repris les observations du lieutenant-colonel von Sterneck, les

(1) *Geodesy*, par Clarke.

(2) *Mittheilungen des K. und K. militär geographischen Institutes*, 1889, 2^e Band

réunies aux observations des Indes, y a ajouté neuf mesures de la pesanteur récemment exécutées dans les massifs montagneux du Caucase, et a développé et précisé les conclusions déjà ébauchées ou implicitement contenues dans les publications antérieures de l'*India Survey* et de l'*Institut topographique militaire de Vienne*. Il a en outre recherché, à l'aide des observations exécutées dans le cours de ce siècle, jusqu'à quel point la compensation, mise en avant pour rendre compte des anomalies de la pesanteur, est réalisée dans l'écorce terrestre.

Voici, en résumé, la marche des calculs de M. Helmert, effectués suivant les principes de sa méthode de la compensation (1).

Soit g la pesanteur observée en un point P d'altitude H et de latitude φ , γ la pesanteur calculée pour le point P à l'aide de la formule de l'auteur

$$\gamma = 9^m,7800(1 + 0.00531 \sin^2 \varphi) \left(1 - \frac{2H}{R}\right).$$

R est le rayon terrestre.

Représentons par I l'attraction sur le point P de la couche comprise entre la surface de niveau passant par P et la surface topographique des environs de la station (ce que M. Helmert appelle la réduction au terrain horizontal). Au point Q, pied de la verticale de P sur la surface de niveau zéro, on aura

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma \left(1 + \frac{2H}{R}\right), \\ g' &= g \left(1 + \frac{2H}{R}\right) + I. \end{aligned}$$

g' est la pesanteur observée réduite au niveau de la mer par la méthode de la condensation.

Si l'on tient compte de l'attraction de la couche PQ, comprise entre les deux surfaces de niveau séparées par l'altitude H, on a

$$g'' = g' \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta}{D} \frac{H}{R}\right),$$

δ étant la densité géologique moyenne des roches de la couche PQ et D la densité moyenne de la Terre prise égale à 5,6.

(1) Voir F.-R. HELMERT, *Höhere Geodäsie* (t. II).

M. Helmert forme, pour chacune des stations qu'il considère, les différences $g - \gamma$, $g' - \gamma'$, $g'' - \gamma''$.

Or, tandis que $g' - \gamma'$ est très exactement représenté par une fonction linéaire de l'altitude H

$$x + yH \text{ (}^1\text{),}$$

$g'' - \gamma''$ reste remarquablement constant pour des régions bien définies du globe, ce qui revient à dire qu'il existe, pour ces régions, une anomalie constante de la pesanteur.

On trouve ainsi :

Europe.

Dans les Alpes tyroliennes	$(g'' - \gamma'')_1 = -0,00147^m$
Continents et côtes (faibles altitudes)...	$(g'' - \gamma'')_2 = +0,00002$

Indes anglaises.

Moré.....	$(g'' - \gamma'')_3 = -0,00515$
Stations à moins de 100 ^{km} de l'Himalaya.	$(g'' - \gamma'')_4 = -0,00098$
Stations à plus de 500 ^{km} de l'Himalaya..	$(g'' - \gamma'')_5 = -0,00050$
Côtes.....	$(g'' - \gamma'')_6 = +0,00021$

Le Caucase donne des résultats analogues, quoique moins nettement systématiques.

g'' n'étant en somme que la pesanteur observée réduite au niveau de la mer par la formule de Bouguer, et γ' la pesanteur théorique déduite de la formule de Clairaut, les nombres ci-dessus font bien ressortir le défaut de la pesanteur apparente sur la surface de niveau zéro sous les continents et les montagnes.

Recourant encore à sa méthode de la condensation, M. Helmert calcule quelle épaisseur h une couche de matière, de densité $\delta = \frac{1}{2}D$, condensée sur la surface de niveau zéro, devrait avoir pour compenser exactement ces défauts de la pesanteur. Désignant par N l'écart de la surface de niveau zéro et de l'ellipsoïde moyen théorique, il pose

$$g'' - \gamma' = \frac{3\gamma'}{2R} \left(\frac{\delta h}{D} - N \right).$$

(¹) C'est le résultat déjà obtenu en 1887, dans les Alpes-Maritimes, par MM. B. et Defforges, du Service géographique de l'armée. (Voir les comptes rendus conférence de l'Association géodésique internationale tenue à Salzburg.)

Il combine alors par soustraction 1 et 2, puis 3 et 5, en substituant à $g^2 - \gamma'$ son expression en h et N . D'après les déviations de la verticale connues en Europe, il estime qu'on peut négliger N dans la région alpine (N n'y dépasse pas quelques décimètres); la première combinaison lui donne alors

$$h = 1000^m \text{ environ.}$$

Le défaut de la pesanteur sous le massif alpin du Tyrol équivaut donc, sur la surface de niveau zéro, à l'action d'une couche de matière condensée de 1000^m de puissance. Évaluant ensuite à 2000^m , d'après les cartes autrichiennes, l'altitude moyenne du massif embrassé par la ligne de nivellement, M. Helmert arrive à cette conclusion que la compensation de la saillie montagneuse par un défaut de densité dans les couches inférieures, est imparfaite et n'est réalisée qu'à moitié (1).

La deuxième combinaison fait voir que, sous le continent indien, la compensation est presque parfaite. Au Caucase, la compensation, satisfaisante dans l'ensemble de la région, est imparfaite en certains points, et tantôt en excès, tantôt en défaut. Par des calculs analogues, M. Helmert étend son raisonnement aux îles des mers profondes et prouve que l'excès de pesanteur observé y est plus ou moins exactement compensé par le défaut de densité des océans.

Commandant DEFFORGES.

MONTHLY NOTICES.

T. L, numéro supplémentaire et Appendice.

T. LI, nos 1 et 2, novembre et décembre 1890.

Marth (A.). — Deux Tables auxiliaires pour la solution du problème de Kepler.

La première Table donne, pour l'argument $\log e \sin \varepsilon$, les valeurs de

(1) Cette conclusion repose entièrement sur l'exactitude de la valeur de g acceptée pour Vienne et qui sert de fondement à tout le raisonnement. Un changement de $\frac{1}{10000}$ dans le g absolu de Vienne rendrait la compensation parfaite.

log ν , et l'on a

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\sin \mu}{\cos \mu - e + e^2 \sin^2 \varepsilon \cdot \nu};$$

cette première Table est valable pour toutes les excentricités.

L'autre Table donne, pour le même argument, les valeurs de log λ dont la signification résulte de l'équation

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\lambda \sin \mu}{\lambda \cos \mu - e};$$

elle s'arrête à log $(e \sin \varepsilon) = \bar{1},880$ ou $\varepsilon - \mu = 43^\circ, 46$.

Les Tables sont construites en vue des calculs à 7 décimales.

Marth (A.). — Éphémérides des satellites de Saturne et de Neptune.

Les Éphémérides des satellites de Saturne sont continuées dans les numéros de novembre et décembre. M. Marth espère que les observateurs porteront toute leur attention sur Saturne.

L'Appendice au t. L des *Monthly Notices* contient, après quelques remarques préliminaires du Professeur Adams sur le mode de réduction des observations de Greenwich et les Tables de Hansen, *la comparaison des observations de Greenwich, de 1847 à 1861, avec les positions déduites des Tables de Burckhardt et de Hansen*; on trouve trois séries de Tables :

Les différences de longitude et de latitude, entre les Tables lunaires de Burckhardt et de Hansen, pour minuit moyen à Greenwich, de 1847 à 1862 (p. 7-39); *la comparaison des Tables de Hansen avec les observations faites, pendant le même temps, à l'Observatoire Royal de Greenwich, au cercle méridien* (p. 49-95) et *l'altazimut* (p. 99-175).

Folie (F.). — Sur les variations réelles et apparentes de la latitude de Greenwich.

Fowler (A.). — Note préliminaire sur la duplicité de α Lyre.

Le doublement de la raie K dans quelques photographies du spectre de Wéga prises par M. A. Fowler et dont il avait déduit que Wé était une étoile double du type de β Cocher et ζ Grande Ourse n'a pu

été confirmé par les photographies prises par MM. Pickering, Vogel et Henry (*Nature*, n° 4107).

Espin (Rev. T.-E.). — Sur les variations des spectres de R Couronne et de R Écu et sur les spectres de R Cocher et de R Andromède.

Mc Clean (F.), Higgs (G.). — Photographies comparatives du spectre solaire à de hautes et basses altitudes; Notes sur la photographie de l'extrémité rouge du spectre. Photographie de la raie A dans le spectre solaire.

Les photographies de M. Mc Clean (voir *Bulletin*, VI, p. 501) sont à la même échelle que la Carte d'Angström. Grâce à leur juxtaposition, elles mettent en évidence les raies telluriques. L'auteur communique les formules des solutions absorbantes pour la photographie de l'extrémité rouge du spectre et entre à ce sujet dans beaucoup de détails.

M. Higgs annonce qu'il s'occupe de préparer des émulsions sèches, avec des sels d'argent haloïdes de la série de l'anthracène, pour avoir des plaques sensibles aux rayons rouges, et présente de belles photographies de la région de la raie A.

A la Séance du 14 novembre, le général Tennant, président, a félicité M. Mc Laren qui a fait don à l'Université de Cambridge d'une somme de 300000^{fr} pour favoriser les études relatives à la Théorie des perturbations et à l'Astronomie physique. Cette somme servira à fonder trois bourses auxquelles sera attaché le nom de Newton.

Curtie (A.-L.). — Notes spectroscopiques.

Le premier point et le plus important concerne la raie noire que quelques observateurs ont décrite comme coïncidant avec la raie brillante D_3 dans le spectre solaire. En réalité, il n'y a pas de raie noire à cette place, mais une raie tellurique se trouve tout près. Des photographies de M. Higgs, prises à différentes altitudes du Soleil, confirment les observations de Stonyhurst.

L'auteur discute ensuite, en rapprochant les constatations de différents spectroscopistes, la variabilité des deux raies $\lambda 6676,9$ et $\lambda 6361,16$ d'Angström.

Maunder (E.-W.). — Note sur les taches solaires de 1888. Sur le groupe de taches de 1890, août 25 à septembre 5.

Le groupe dont il s'agit présente un cas de visibilité pendant trois révolutions du Soleil. Au second retour (août 25 à septembre 5) il était particulièrement remarquable, les trois couples de noyaux dont il se composait tournant les uns autour des autres. M. Maunder communique les positions des noyaux pendant la période mentionnée.

Les taches solaires de 1888 ont eu un caractère intermittent.

A une question du Professeur Alexandre Herschel, sur la latitude des taches en 1888, M. Maunder répond que les taches en 1888 avaient, comme à la fin des cycles, de faibles latitudes. Le minimum se place pour lui au milieu de 1889.

Keeler (J.-E.). — La tache rouge sur Jupiter (avec un dessin de Jupiter).

L'auteur rappelle une Communication récente de M. A. Stanley Williams (*Bulletin*, VII, p. 366) sur la conjonction de la tache rouge avec une tache noire. Il a remarqué naguère, et M. Barnard est de son avis, qu'en arrivant près de la tache rouge les autres taches se dissipent ou sont déviées comme par un obstacle.

Spitta (E.-J.). — Quelques expériences relatives à la comparaison photométrique des aires et des points lumineux.

La présente Communication du D^r Spitta n'offre pas moins d'intérêt que les récentes recherches photométriques du même auteur (*Bulletin* VII, p. 251, 366, 372). Il s'agit des objections qu'on peut faire au photomètre à prisme dans le cas des aires lumineuses et surtout de l'équation personnelle de l'œil appelé à apprécier des aires lumineuses de différentes grandeurs. M. Spitta trouve que, lorsque le diamètre angulaire de la surface lumineuse dépasse 40', son œil ne mesure plus qu'une partie de la lumière émise; cela s'accorderait avec le fait que la faculté de vision de l'œil est limitée à la grandeur de la fossette centrale dans la tache jaune de la rétine. (Recherches d'Helmholtz et d'autres physiologistes) Comme confirmation, si la perte de lumière dépend réellement de la grandeur de l'image sur la rétine, elle ne doit plus se produire quand les deux aires lumineuses sont vues sans lunette et que leur diamètre angulaire est petit; c'est ce que M. Spitta a vérifié. Il paraît donc nécessaire de réduire optiquement les aires lumineuses à des points, si l'on veut tenir compte de la conformation de l'œil.

Russell (H.-C.). — Sur quelques photographies célestes obtenues à l'observatoire de Sydney. — Système de contrôle électrique.

pour les mouvements d'horlogerie des équatoriaux (avec un dessin).

www.libtool.com.cn

Les photographies ont été prises avec un objectif à portraits, la lunette photographique n'étant pas encore installée à Sydney.

Le contrôle du mouvement d'entraînement s'obtient au moyen de deux pendules lourds; le mouvement n'est pas absolument uniforme, mais il est contrôlé à chaque seconde pendant que la vis tangente fait *un* tour.

Gore (J.-E.). — Sur l'orbite de η Hercule = η 15 Alvan Clark.

Cette étoile double a été découverte, en 1859, par Alvan Clark pendant une visite à l'observatoire de M. Dawes. $P = 54^{\text{ans}}$, $\alpha = 1''$ environ. M. Gore donne la comparaison avec les observations des éléments provisoires calculés par lui.

Tebbutt (John). — Observations de l'étoile variable R Carinac de novembre 1886 à juin 1890.

Elle a pour période 312 jours.

Tennant (J.-F.). — Sur quelques errata du tome II du *Traité d'Oppolzer Bahnbestimmung*, etc.

Observations de l'éclipse de Soleil du 16-17 juin 1890, faites à l'observatoire de Greenwich.

On s'était proposé de rechercher, par des mesures micrométriques sur les cornes, les corrections des demi-diamètres du Soleil et de la Lune ainsi que les corrections tabulaires pour la Lune; mais il n'a été possible d'obtenir qu'un petit nombre de mesures.

Observations de la comète α 1890 (Brooks) à l'observatoire de Greenwich.

Plummer (J.-I.). — Observations de comètes faites à l'observatoire d'Orwell Park en 1889-90.

☄ I 1889, 8 observations; ☄ V 1888, 1 observation; ☄ IV 1889, 20 observations; ☄ V 1889, 37 observations; ☄ II 1889, 8 observations; ☄ VI 1889, 3 observations; ☄ (Borrelly, décembre 12, 1889), 1 observation; ☄ (Brooks, mars 20, 1890), 15 observations.

Cortie (A.-L.). — Observations des spectres des taches solaires dans la région B — D, faites à Stonyhurst, de 1882 à 1889.

Ce travail doit être publié dans le t. I. des *Mémoires de la Société Royale astronomique*. Voici quelques-uns des résultats sur lesquels M. Maunder a appelé l'attention de la Société : les raies du fer dans la période agitée (vers le maximum) sont rarement parmi les raies très élargies, tandis qu'elles sont beaucoup plus affectées dans la période de calme. Au contraire, il y a des raies du titane, très faibles dans le spectre ordinaire, qui sont à toutes les époques du cycle des taches parmi les plus larges. A l'égard des raies appartenant à des substances inconnues, en majorité de beaucoup dans cette partie du spectre, un grand nombre de raies faibles, qui ne se trouvent pas dans la Carte d'Angström, apparaissent vers le maximum, et quelquefois elles réapparaissent vers le minimum quand elles sont larges; plusieurs raies faibles qui ont été suivies avec assiduité sont constamment élargies dans toutes les taches grandes ou petites, à toutes les périodes; les cinq raies brillantes de la chromosphère ont été peu élargies en moyenne. Bien que les raies basiques de M. Lockyer, dont il y a 11 spécimens dans cette partie du spectre, se soient montrées toutes, à un moment ou à un autre, parmi les plus élargies, on peut dire que cela arrive rarement (15 observations sur un total de 407). Quelques raies marquées comme telluriques dans la Carte d'Angström étaient élargies dans les spectres des taches.

Les résultats du P. Cortie contredisent, sur quelques points, les données antérieures de *la Chimie du Soleil* de M. Lockyer.

Jacoby (H.). — Correction de la réfraction dans les mesures micrométriques (16 pages).

L'auteur a construit et fait imprimer des Tables pour le calcul de la correction de réfraction, en ayant surtout égard, d'après le conseil du Dr Gill, à la réduction des observations héliométriques des parallaxes d'étoiles; les arguments sont la distance et l'angle de position. Pour obtenir ces Tables, on peut s'adresser à l'observatoire du Cap de Bonne-Espérance.

Burnham (S.-W.). — Note sur la nébuleuse variable de M. Hind dans la constellation du Taureau.

Il existe dans le voisinage de l'étoile variable T Taureau une petite nébuleuse qui est peut-être variable d'éclat. M. Burnham a examiné

de cette région du ciel, ainsi que M. Barnard, avec la grande lunette du mont Hamilton; M. Keeler a trouvé que le spectre de la nébuleuse renfermait la raie λ 5005. M. Burnham engage les observateurs d'étoiles variables à suivre T Taureau dont la période est encore incertaine. Pour lui, il doit continuer l'examen de la nébuleuse.

Denning (W.-F.). — Dix nouvelles nébuleuses.

Elles ont été découvertes par l'auteur à l'occasion de la recherche des comètes. Les positions sont seulement approchées.

Russell (H.-C.). — Notes sur quelques photographies célestes prises à l'observatoire de Sydney.

Hind (J.-R.). — Éléments et éphémérides de la comète Zona.

Nous ferons remarquer qu'à la séance du 12 décembre MM. A. Cornu, Membre de l'Institut, et C. Souillart, de Lille, ont été élus associés de la Société Royale astronomique.

O. C.

THE OBSERVATORY.

Septembre 1890-janvier 1891.

Une nouvelle Société astronomique, l'*Association astronomique d'Angleterre*, s'est formée à la fin de l'année passée. Le groupement des observateurs, spécialement les possesseurs de petits instruments, en vue d'une aide mutuelle, et leur organisation pour les observations astronomiques, la circulation des nouvelles astronomiques, forment l'objet de l'Association qui fait appel à tous les amis de l'Astronomie, sans exclure les femmes d'aucune des dignités.

La nouvelle Société a été rapidement constituée, ce qui semble prouver qu'elle répond bien aux besoins d'un grand nombre d'amateurs désireux de travailler utilement, mais que la Société Royale astronomique ne pouvait diriger dans leurs tentatives.

Les noms des Membres du Conseil, que nous reproduisons ci-dessous, donneront une juste idée de la force de l'Association, et son journal, édité par M. E. Walter Maunder, l'ancien éditeur de l'*Observatory*, ne pouvait être placé entre des mains plus capables. Nous lui ferons une place spéciale dans les analyses du *Bulletin*.

Membres du Conseil de l'Association astronomique.

Président : Capt. W. NOBLE.

Vice-présidents : A.-M.-W. DOWNING, W. HUGGINS, ISAAC ROBERTS,
le comte DE ROSSE.

Trésorier : W.-H. MAW.

Secrétaires : ARTHUR COTTAM, P.-F. DUKE.

Éditeur : E.-WALTER MAUNDER.

Membres du Conseil : Miss AGNES CLERKE, E. DUNKIN, N.-E.
GREEN, Sir HOWARD GRUBB, Mrs HUGGINS, W.-B. HUTCHINSON,
H. INGALL, S.-T. KLEIN, W.-H.-S. MONCK, H. SADLER, G.-M.
SEABROKE, W.-H. WESLEY et STANLEY WILLIAMS.*Directeurs des différentes sections.*

Météores : D. BOOTH.

Soleil : Miss E. BROWN.

Lune : T.-G. ELGER.

Spectroscopie et photographie : Rév. T.-E. ESPIN.

Couleurs des étoiles : W.-S. FRANKS.

Étoiles variables : J.-E. GORE.

Étoiles doubles : K.-J. TARRANT.

Jupiter : Rev. W.-R. WAUGH.

Une section cométaire ne tardera sans doute pas à être établie. Le *Journal de l'Association* paraît régulièrement depuis le mois d'octobre.

A la séance du 14 novembre de la Société Royale astronomique, le général Tennant, président, a annoncé que le professeur Pritchard était maintenant en possession de la lunette photographique pour la carte du ciel; l'objectif fait par Sir Howard Grubb lui donne une entière satisfaction; le réseau, l'appareil de mesure pour les disques stellaires ne laissent aussi rien à désirer.

A propos de la photographie, M. Knobel parle des recherches du professeur Holden à l'observatoire Lick, pour déterminer par la photographie les parallaxes des nébuleuses; les noyaux de plusieurs nébuleuses ont pu être photographiés en quelques secondes.

M. Knobel présente une traduction d'un ouvrage turc dû au général Mouktar Pacha : *La réforme du calendrier*.

A la séance du 12 décembre, le P. Cortie a présenté les résultats des observations de Stonyhurst sur les spectres des taches solaires. M. Roberts a mis sous les yeux de la Société de nouvelles photographies célestes. Il n'y a pas eu d'autre communication scientifique. D'après une convocation spéciale, l'assemblée devait s'occuper de modifier l'heure des séances; nous n'avons pas à parler de ce débat.

Articles.

Gill (D), Clerke (Miss A.-M.). — Sur la parallaxe de β Orion-Rigel et la grande nébuleuse.

Le D^r Gill communique une détermination provisoire de la parallaxe de β Orion ou Rigel, en prenant les étoiles suivantes comme étoiles de comparaison :

$$a = \text{DM.} - 7^{\circ}, 997 \dots 8^{\text{M}}, 5 \quad b = \text{DM.} - 8^{\circ}, 1078 \dots 8^{\text{M}}, 4$$

la parallaxe rapportée à la moyenne des étoiles de comparaison est

$$\pi = -0^{\text{S}}, 167 \pm 0^{\text{S}}, 011;$$

mais si l'on prend les mesures relatives à a et b , on trouve

Parallaxe de β Orion d'après a	— 0 ^S , 064
b	— 0 ^S , 325

Il serait probable d'après cela que β Orion appartiendrait avec l'étoile a à un système très éloigné tandis que l'étoile b est comparativement proche de nous.

L'emploi de la photographie, qui permet de multiplier les étoiles de comparaison, aurait de l'avantage dans un cas comme celui-ci. Miss Clerke fait ressortir l'intérêt de la conclusion du D^r Gill lorsqu'on tient compte de la liaison de la grande nébuleuse avec les étoiles voisines : on peut avoir ainsi des indications sur la parallaxe de la nébuleuse. Il faudrait d'abord examiner les vitesses radiales des étoiles et voir comment elles diminuent à l'approche du Trapèze où (d'après une photographie du D^r Huggins du 5 février 1888) il n'y a pas de mouvement radial relatif entre θ Orion et la matière nébuleuse voisine. Mais le spectre de cette étoile remarquable n'a pas encore été suffisamment examiné au point de vue de la vitesse radiale relativement à nous.

Dans une note complémentaire (numéro de novembre), Miss Clerke insiste sur la liaison de la nébuleuse et des étoiles voisines. Le D^r Huggins et M^{me} Huggins ont démontré la condensation de la matière nébuleuse dans le voisinage immédiat du Trapèze. Le D^r Scheiner a indiqué comme cause vraisemblable de la communauté des spectres du premier type des étoiles d'Orion leur liaison avec la nébuleuse. En juillet 1889, il signalait la présence d'une raie par $447,14 \mu$ sur quelques-unes des plaques de Potsdam (*Astr. Nachr.*, n^{os} 2923-24), et quelques mois plus tard il étudiait sa nature et ses relations (*Monatsberichte*, 13 février 1890). Cette raie qui se trouve dans les spectres de β , γ , δ , ε et ζ Orion n'appartient à aucune autre étoile, excepté Algol. Or, la raie par $447,6 \pm 0,5$, mesurée par le D^r Copeland dans le spectre de la nébuleuse (*Bulletin*,

V, p. 103), est très probablement la même; elle ne se trouve pas parmi les raies solaires.

Il est certain aussi, comme le remarque Miss Clerke, que les récentes photographies de la nébuleuse montrent des dépendances curieuses, comme dans le cas des Pléiades, entre les étoiles et les traînées nébuleuses.

Keeler (J.-E.), Maunder (E.-W.). — Vitesses radiales des nébuleuses planétaires.

M. Maunder rend compte des observations de M. Keeler sur les vitesses radiales des nébuleuses planétaires (*Publications de la Société astronomique du Pacifique*, n° 41) qui jettent un nouveau jour sur la question controversée de la position de la raie principale dans le spectre des nébuleuses (*Bulletin*, VII, p. 373) et nous renseignent sur les mouvements des nébuleuses.

A l'égard du premier point, M. Maunder faisait remarquer que la différence entre la position de la raie du magnésium (λ 5006,36) et celle de la raie des nébuleuses (λ 5005,68) pouvait encore s'expliquer à la rigueur par la vitesse radiale des nébuleuses; mais que la question serait tranchée si M. Keeler pouvait obtenir une série de comparaisons de la raie F dans ces nébuleuses avec la raie de l'hydrogène, ou encore déterminer les positions de la raie principale dans une série de nébuleuses et les différences avec la position moyenne.

Il résulte de la Communication de M. Keeler (*Observatory*, numéro de janvier) qu'il a pu observer en octobre la nébuleuse d'Orion et comparer la troisième raie dans le spectre du troisième ordre du réseau avec la raie de l'hydrogène, l'erreur probable d'une détermination de la vitesse radiale étant de 2^{km} , 4. Les observations donnent la vitesse radiale de la nébuleuse d'Orion, fixent la position de la raie principale et permettent d'assigner les valeurs numériques des vitesses radiales pour les dix nébuleuses étudiées précédemment. La vitesse radiale pour la nébuleuse d'Orion est environ de $+15^{\text{km}}$ (le signe + indiquant que l'astre s'éloigne), insuffisante pour expliquer, comme on pouvait encore le supposer avec M. Maunder, l'écart de la raie principale des nébuleuses et de la raie du magnésium.

Si l'on admet que la nébuleuse d'Orion est fixe dans l'espace, hypothèse assez plausible, on trouve 22^{km} pour la vitesse de translation du système solaire, ce qui concorde bien avec les valeurs les plus dignes de confiance (*Bulletin*, V, p. 115; VII, p. 325, 326).

Denning (W.-F.). — Quatre nouvelles nébuleuses.

On donne leurs positions approchées avec la description des étoiles voisines.

Stanley Williams (A.). — Histoire de la tache rouge sur Jupiter.

L'auteur s'occupe de rechercher les observations antérieures de la tache ou plutôt de la grande baie dans la bande équatoriale sud qui en marque l'endroit. Il a trouvé sept dessins dans les manuscrits de Schwabe datant de 1831 à 1855 [consulter sur le même sujet un article de M. R.-J. Ryle (numéro de décembre), un travail du capitaine Noble (*Bulletin*, IV, p. 442) et les remarques de M. Hough, de Chicago (*Bulletin*, I, p. 514)].

Taylor (A.). — Sur l'éclipse totale du Soleil du 21-22 décembre 1889.

A propos d'un article de M. Holden sur les photographies de la Couronne extérieure obtenues à Cayenne (*Publications astronomiques du Pacifique*, t. II, n° 8), l'auteur dit qu'on ne peut rien affirmer sur les grandes extensions de la Couronne; la question reste ouverte (*Bulletin*, VI, p. 549).

Gill (David). — Sur quelques expériences avec la lunette photographique du Cap.

Le D^r Gill constate que les ondulations atmosphériques n'ont pas d'influence fâcheuse sur les photographies.

Il insiste sur la convenance de se borner pour les étoiles guides à des étoiles distantes de 40' au plus du centre de la plaque (au lieu de 20', comme l'a proposé le Comité), parce que les étoiles guides pourraient alors être immédiatement tirées du Catalogue général de Gould.

Huggins (M^{me} M.-L.). — Le système des étoiles.

M^{me} Huggins parle du Livre de Miss Clerke avec les plus grands éloges.

Clerke (Miss A.-M.). — Les étoiles à raies brillantes du type de Wolf-Rayet (d'après un Mémoire du D^r Huggins et de M^{me} Huggins, lu à la Société royale, le 11 décembre 1890).

Les observations de M. et de M^{me} Huggins ont porté sur les quatre étoiles

BD. + 37°, 4001; BD. + 35°, 4013; BD. + 36°, 3956; BD. + 37°, 3821,

dont les trois premières ont été découvertes par MM. Wolf et Ray en 1867 et la quatrième par le Dr Copeland en 1884 (*Bulletin*, I, p. 45) en vue de décider si la raie bleue de leurs spectres coïncide avec bande de l'hydrogène carboné par $\lambda 474$; cette coïncidence n'existe pas. L'article de Miss Clerke est très détaillé.

Bigelow (Frank H.). — L'extension de la Couronne et les détails de sa structure.

L'auteur ne peut admettre ce que dit M. Taylor (voir plus haut) sur l'incertitude où l'on est encore touchant les extensions de la Couronne solaire; pour lui, d'après l'étude qu'il a faite (*Bulletin*, V, p. 176), les détails de la structure de la Couronne ont un rôle capital dans la Physique solaire.

Plummer (W.-E.). — Périhélies des comètes.

M. Plummer analyse un travail récent de M. Holetschek (voir *Bulletin*, VIII, p. 34).

Burnham (S.-W.). — Le mouvement propre de $\Sigma 547$.

Le changement dans les positions des composantes est dû au mouvement propre de la plus belle ($0^{\circ},052$ par $317^{\circ},8$).

Elger (T.-G.). — Notes sélénographiques.

Correspondance.

Freeman (Rev. A.). — Conjonctions des satellites de Jupiter.

Le 11 et le 22 août, l'auteur a observé des appulses des satellites I, II, I et III. Il communique dans plusieurs numéros de l'*Observateur* des éphémérides utiles pour l'observation de ces phénomènes.

Stanley Williams (A.). — Conjonction de la tache rouge de Jupiter avec des taches noires.

La conjonction de la tache noire principale avec le deuxième bord de la tache rouge a eu lieu vers le 24 juillet (*Bulletin*, VII, p. 367).

Denning (W.-F.), *Waugh (Rev. W.-R.)*, *Duke (P.-F.)*. — Note sur Jupiter.

M. Denning entre dans des détails intéressants sur les conjonctions de la tache rouge avec les bandes ou taches sombres sur son bord austral; il cite un article antérieur (*Bulletin*, III, p. 304) et un autre plus récent (*Journal de la Société astronomique de Liverpool*, déc. 1888) où la conjonction de la tache rouge et de la bande sombre était annoncée pour une série de dates : juillet 1890, septembre 1892... Quant à la hauteur respective de la tache rouge et des bandes, il demeure convaincu que la première domine les autres. Cela s'accorde, on peut ajouter, avec les remarques de M. Keeler (*Bulletin*, VIII, 124). MM. Waugh et Duke parlent d'une tache noire, produite par l'ombre du satellite IV.

Denning (W.-F.), Monck (W.-H.-S.). — Remarques sur les points radiants.

De l'examen du Catalogue naguère publié par M. Denning (*Bulletin*, VII, 362), M. Monck avait conclu que les points radiants stationnaires constituent une classe générale et que les points radiants mobiles ne résultent pas forcément des observations de M. Denning; c'est ce que M. Denning ne peut admettre.

Knott (G.), Backhouse (T.-W.), Gore (J.-E.). — Notes sur la nouvelle variable de la Machine pneumatique. Observation d'Algol.

Les deux premiers auteurs signalent la découverte de la nouvelle variable due à M. Paul (*Bulletin*, VII, 327); M. Backhouse observe que cette variable offre la particularité que les variations de grandeur ont lieu pendant plus de la demi-période; qu'elle ne peut donc être rangée dans le type d'Algol où les variations d'éclat proviendraient des éclipses d'un gros satellite sombre; dans ce cas la variation d'éclat peut se faire sentir au maximum pendant une demi-période.

M. Gore communique une observation du minimum d'Algol, le 3 novembre.

Lecky (Robert-J.). — Sur des instruments historiques.

Note complétant celle de M. Lewis (*Bulletin*, VII, 368). Il s'agit d'un instrument qui a servi au cap. Cook, dans l'expédition du passage de Vénus, en 1769.

Maw (W.-H.). — Mesures de l'étoile double Σ 1888 = ξ Bouvier.

Lynn (W.-T.). — M. Stockwell et les anciennes éclipses.

Remarques critiques sur l'interprétation des anciennes éclipses dans l'article de M. Stockwell relatif aux inégalités séculaires de la Lune (*Bulletin*, VII, 439).

Tennant (J.-F.). — Un Ouvrage récent du professeur Dana sur les volcans.

L'attention des géologues est appelée sur le livre ci-dessus qui contient une description du Kilauea et des autres volcans des îles Hawaï. Ces volcans, avec leur lave fusible et fluide, semblent plus comparables que d'autres aux volcans de la Lune.

Maunder (E.-W.). — Taches solaires par de grandes latitudes.

Tableau des principales taches solaires en 1890.

Observatoires et publications.

Observatoire du College de Carleton. — Un catalogue de 644 étoiles de comparaison, observées en 1887-89, par le Dr H.-C. Wilson, au cercle méridien de Repsold, vient d'être publié.

Observatoire naval des États-Unis. — Le professeur A. Hall s'est occupé de Saturne et de ses satellites. Les notes d'observations prises depuis 1875 viennent d'être publiées (*Saturn and its Rings, 1875-1889. Washington observations. Appendix II*).

Au cercle méridien, on a obtenu 1700 observations.

Depuis environ deux ans, avec l'équatorial de 9,6 pouces, M. H.-M. Paul étudie une série d'étoiles dont la variabilité est soupçonnée; on lui doit la découverte de la variable possédant la plus courte période connue (*Bulletin, VII, 327*).

Le professeur Frisby a fait paraître la 3^e édition du catalogue de Yarnall (*Washington observations, 1884. Appendix I*). Ce travail, mentionné à plusieurs reprises dans le *Bulletin*, constitue une révision complète, en tenant compte des *errata* publiés par MM. Holden, Krueger, Millosevich, dans les *Astronomische Nachrichten*, et par le Dr Peters dans le t. III des *Mémoires de l'Académie américaine des Sciences*. Les zones du Dr Gould ont servi pour faciliter l'identification des étoiles; dans les cas douteux, le ciel a été examiné avec l'équatorial de 9,6 pouces.

Il y a aussi à noter la publication du Rapport du lieutenant de vaisseau A.-G. Winterhalter, délégué au Congrès photographique international en 1887 (*Washington observations, 1885. Appendix I*). La seconde partie du Rapport, comprenant près de 300 pages, a pour titre: Visite à divers observatoires d'Europe et à d'autres institutions. Une troisième partie renferme des notes sur divers appareils astronomiques et nautiques, parmi lesquels nous citerons l'équatorial coudé de M. Læwy, l'appareil de M. Bigourdan pour obtenir l'équation personnelle dans la

mesure des étoiles doubles, le bain de mercure dû à M. Gautier. Les notes de M. Winterhalter sont intéressantes à consulter.

Le Rapport du capitaine de vaisseau R.-L. Phythian, directeur de l'Observatoire naval, se termine par deux appendices relatifs, l'un, aux chronomètres et aux instruments nautiques; l'autre, aux travaux de la Commission du passage de Vénus. M. W. Harkness communique les résultats obtenus jusqu'ici ($\pi = 8^{\text{e}}, 842 \pm 0,012$) et annonce qu'il s'occupe d'une discussion d'ensemble des diverses constantes liées à la parallaxe solaire.

Observatoire de Wolsingham. — M. Espin annonce que l'étoile DM. + 33°, 470 et 9^M, 2 a été notée le 7 novembre, 7^M, 5; elle est du type III et probablement variable. L'étoile 710 a du nouveau catalogue de Birmingham (édité par M. Espin) a été notée 9^M le 15 novembre et au printemps 7^M, 5 — 8^M; elle est très rouge avec un beau spectre du type III. Raies brillantes aperçues dans les spectres de θ^1 et θ^2 Orion.

Observatoire de M.-V. Nielsen (Copenhague). — M. Nielsen annonce qu'il va avoir un réfracteur de 7 $\frac{1}{2}$ pouces avec un objectif construit en verre d'Iéna; il espère employer avec succès cet instrument pour la photographie; les foyers visuels et chimiques ne diffèrent que de 1^{mm}, 5.

Observatoire de New-Haven. — Le Rapport du Secrétaire de l'Université Yale signale les mesures héliométriques faites par le D^r Elkin et M. Hall fils sur Victoria et Sapho; les observations d'Iris, obtenues en 1888, feront connaître la parallaxe solaire. M. Chase s'occupe de la triangulation héliométrique des étoiles de comparaison de Victoria. La détermination des parallaxes des étoiles de première grandeur dans l'hémisphère boréal, entreprise par le D^r Elkin, touche à sa fin. Les calculs de la triangulation des étoiles près du pôle nord sont aussi à peu près terminés.

Les progrès de l'Astronomie météorique aux États-Unis. — Brochure du professeur J.-R. Eastman, qui est signalée par M. Denning comme utile à consulter.

Annonce d'ouvrages.

La naissance et le développement des mondes, par M. A.-H. Green. Une traduction française, par M. Joseph Vinot, des *Mouvements célestes* de M. W.-T. Lynn. Nouvelle édition de l'*Histoire du ciel*, par Sir Robert Ball.

Notes des éditeurs.

Avantages relatifs du sextant et du théodolite de voyage. — Un rapport dû à deux officiers de la marine anglaise, le commandant Field et le lieutenant Cust, donne les conclusions d'une série d'observations

faites à Greenwich, en 1889. L'avantage est du côté du théodolite qui donne lieu à une erreur plus faible sur le temps et à une équation personnelle plus constante. Publication du service hydrographique anglais (*Observatory*, p. 185).

Orbite de O Σ , 215. — M. Gore s'occupe de déterminer cette orbite et demande qu'on veuille bien lui envoyer les mesures récentes.

Mémorial du P. Perry. — Une souscription est organisée par les soins des savants les plus éminents de l'Angleterre, pour élever un monument durable à la mémoire du regretté P. Perry. Il s'agirait de doter l'observatoire de Stonyhurst d'un instrument plus grand de 15 pouces d'ouverture. Adresser les souscriptions aux éditeurs de l'*Observer*.

L'hypothèse météorique et l'histoire des systèmes stellaires. — Conférence du professeur G. Darwin à l'Institution Royale, publiée dans numéro d'octobre du *Century Magazine*.

Subventions à des recherches astronomiques. — Miss Bruce avait confié une somme de 6000 dollars entre les mains du Directeur de l'observatoire d'Harvard College, pour faciliter les travaux astronomiques les plus intéressants. Cette somme a été distribuée comme suit : professeur Newcomb : *Discussion des observations du contact de Vénus pendant les passages de 1874 et 1882*. D'Plasmann : *Impressé d'observations de météores et d'étoiles variables*. Société astronomique de Leipzig : *Construction de Tables pour le calcul des perturbations absolues des astéroïdes d'après la méthode de Gylden*. Association géodésique internationale : *Envoi d'une expédition aux îles Sandwich pour l'étude des variations de la verticale*. Turner (H.-H.) : *Construction de Tables pour le calcul des réductions stellaires*. Holden (E.-S.) : *Réduction des observations méridiennes des étoiles*. Struve. Rowland (H.-A.) : *Identification des métaux dans le spectre solaire*. Struve (L.) : *Réduction des observations d'occultations d'étoiles pendant l'éclipse du 28 janvier 1888*....

Laplace et Bowditch [*Proceedings amer. Acad. of Arts and Sciences* (nouvelle série), t. XVI, p. 185]. — Intéressante étude de M. Jos Lovering sur Bowditch, le traducteur de l'édition anglaise de la *Mécanique céleste*, laquelle est enrichie d'un commentaire approfondi.

Propriétés spectroscopiques de différentes poussières. — Conclusions d'une étude récente, communiquée à la *Société Royale*, par professeurs Liveing et Dewar : une poussière aussi fine qu'elle soit en suspension dans un gaz ne se comporte pas comme une substance gazeuse en devenant lumineuse avec son spectre caractéristique et une décharge électrique. Comme conséquences, le spectre de l'air n'est pas dû à l'intervention d'une matière venant de l'espace, à moins que cette matière ne soit à l'état gazeux ou possède des propriétés

différentes de celles des poussières. L'hypothèse météorique est intéressée dans la question.

Photographies lunaires. — D'une lettre de M. S.-P. Langley à M. Common, il résulte que l'*Institution Smithsonian* a le projet de publier une immense photographie de la Lune de 1^m,9 de diamètre (à l'échelle de 1^{mm} pour 1") en 68 cartes de 0^m,20 sur 0^m,25. M. Langley, le secrétaire de l'Institution, désire être renseigné sur les questions qui se rattachent au projet, sur les procédés photographiques à employer, sur les procédés de reproduction.

Mesures d'étoiles doubles. — M. Doberck a publié les mesures faites par lui, de 1875 à 1886, dans les *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXIX, n° 13.

Description des lunettes photographiques anglaises. — Dans l'*Engineering* pour 1890, décembre 19, se trouve une description de la lunette de Melbourne, faite par Sir Howard Grubb.

Index de spectres. — Cet index, dû au Dr Watts, et qui promet d'être fort utile, vient d'être publié.

O. C.

JOURNAL DE L'ASSOCIATION ASTRONOMIQUE D'ANGLETERRE.

Octobre-décembre 1890.

Les articles indiqués ci-dessous ne forment qu'une portion restreinte du journal, qui renferme de nombreuses analyses très bien faites; mais nous avons dû éviter les répétitions.

Clerke (Miss A.-M.). — Les périodes de rotation de Mercure et de Vénus (avec 3 dessins).

Maunder (E.-W.). — La raie principale des nébuleuses (9 pages).

Article important sur la question vidée tout récemment par M. Keeler (*Bulletin*, VIII, 130).

La tache rouge de Jupiter (p. 43). — D'après des observations faites le 25 et contrôlées le 30 août 1890, par MM. Stuyvaert et Niesten, et d'autre part par M. Holden (p. 157), la tache rouge, arrivée au méridien central, était en partie cachée par la bande grise de l'hémisphère sud, tandis que la circonférence blanche de la tache semblait passer dessus la ceinture équatorial sud (Cf. *Bulletin*, VIII, 124, 133).

Remarques sur plusieurs Mémoires de MM. Faye, Wilsing, Belo-

polsky, concernant la rotation du Soleil (p. 45). — On peut dire que les résultats déduits de la spectroscopie et de l'observation des taches, qui concordent, se rapportent à une même couche; les *facules* appartiendraient à une autre couche.

Programmes des Directeurs des différentes sections.

Soleil. — On recommande l'observation, par projection, des taches et des facules; on indique l'usage de disques en carton pour déterminer avec l'aide du *Compagnon de l'Observatory*, la longitude et la latitude héliographiques des taches.

Lune. — Monographies des formations lunaires, à grande échelle, avec autant de détails que possible.

Jupiter et ses satellites. — Dessins de Jupiter dans différentes positions; étude de la tache rouge et des autres taches. Phénomènes des satellites indiqués dans le *Compagnon de l'Observatory*.

Couleur des étoiles. — Formation d'un Catalogue des couleurs des étoiles en commençant par la calotte polaire. D'après la méthode de M. W.-S. Franks (*Bulletin*, IV, passim).

Étoiles variables. — M. Gore propose l'observation des variables un peu négligées, des étoiles à courte période. Les étoiles de comparaison seront communiquées aux observateurs.

Météores. — M. David Booth, chef de la section, propose aux observateurs de limiter leurs recherches à des régions définies du ciel suivant le lieu de leur résidence.

Thomson (A.-W.). — Détermination des coordonnées héliographiques des taches solaires.

Downing (A.-M.-W.). — Les éclipses des satellites de Jupiter.

Après avoir rappelé que l'incertitude dans les observations ordinaires peut s'élever à une dizaine de secondes, M. Downing recommande la méthode photométrique imaginée par M. Cornu, en 1883, et mise en pratique par M. Obrecht, de l'observatoire de Paris. Les lecteurs du *Bulletin* ont été mis au courant de la nouvelle méthode.

Johnson (Rev. S. J.). — Premiers phénomènes astronomiques observés en Angleterre.

Éclipses, aurores boréales, pluies de météores notés dans les plus anciennes chroniques.

Stanley Williams (A.). — Exposé des observations récentes sur les canaux et les taches de Mars.

Green. — Les canaux de Mars.

Conférence faite à la séance du 31 décembre.

Waugh (W.-R.). — Travaux de la section de Jupiter.

Il y a quatorze membres de l'Association spécialement occupés avec le système de Jupiter. Le directeur de la section, M. Waugh, communique les observations d'éclipses obtenues ainsi que diverses remarques concernant les taches.

Il serait bon, croyons-nous, que les travaux des différentes sections fussent résumés d'une manière sommaire.

Franks (W.-S.). — Travaux de la section des couleurs des étoiles.

Détermination des couleurs moyennes de 35 étoiles dans Cassiopée et dans la Girafe.

Webb (J.). — L'observatoire de James Nasmyth (avec 1 dessin).

Description de l'observatoire de l'auteur de *La Lune*, la meilleure monographie qui existe sur notre satellite.

Espin (Rev. T.-E.). — Trois nouvelles étoiles rouges.

Ce sont les étoiles DM. + 35°, 4077; + 32°, 3954; + 17°, 4397.

Monck (W.-H.-S.). — Sur la liaison entre les comètes et les météores (7 pages).

Le fait d'une liaison existe pour quatre comètes et essaims (*Bulletin*, II, 483); mais on n'en peut pas conclure la preuve de l'origine cométaire de tous les météores.

Plassmann (J.). — Notes sur Algol et λ Taureau.

D'après ces notes, traduites de l'allemand et communiquées par M. Gore, la courbe des éclats de λ Taureau forme une transition entre Algol et β Lyre.

O. C.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n° 3013-3018.

Küstner. — Sur la possibilité de s'affranchir des variations de la latitude dans la détermination de la constante de l'aberration par les étoiles zénithales.

On sait que l'observation des distances zénithales ($\varphi - \delta$) d'étoiles qui passent au méridien dans le voisinage du zénith fournit l'un des meilleurs moyens de déterminer la constante de l'aberration, et qu'elle peut être réduite à des mesures micrométriques différentielles. Mais les distances zénithales sont influencées par les variations de la latitude (φ), qui peuvent très bien atteindre quelques dixièmes de seconde. Pour s'affranchir de cette cause d'erreur, il y aura lieu d'observer les différences des distances zénithales de deux étoiles qui se succèdent au méridien. M. Küstner a cherché à se rendre compte des conditions dans lesquelles il faudra instituer de pareilles observations.

La différence des déclinaisons moyennes d'un couple d'étoiles, déduite de l'observation, se trouvera encore affectée d'une erreur $b\gamma$, en désignant par γ la correction cherchée de la constante de l'aberration. La somme cyclique d'une série de différences, fournies par un certain nombre p d'étoiles, associées deux à deux, ne sera donc pas nulle, mais égale à $\gamma \Sigma b$, et il faudra s'arranger de manière que le coefficient Σb devienne aussi grand que possible, pour obtenir une bonne détermination de l'inconnue γ par cette méthode, que M. Küstner appelle, pour abrégé, *polygonale*. Il a choisi ce nom parce que l'expression théorique du coefficient représente le contour d'un polygone. On trouve qu'il est avantageux, 1° d'observer chaque couple à l'époque de l'année où les temps de culmination des deux étoiles sont symétriques par rapport au minuit vrai; 2° de répartir les observations uniformément sur toute l'année, en choisissant des étoiles séparées par des intervalles égaux d'ascension droite. La valeur théorique du coefficient de γ croît avec le nombre p , mais elle reste toujours inférieure à 6; comme elle a le facteur $\sin \varphi$, le maximum devient 4,2 pour $\varphi = 45^\circ$ (4,8 pour Berlin; 5,2 pour Poulkova). C'est de ces conditions théoriques qu'il faut tâcher de se rapprocher le plus possible dans la pratique.

M. Küstner examine encore, au même point de vue, les divers procédés particuliers dont on peut faire usage pour la mesure des distances zénithales méridiennes, à savoir : détermination de la distance $\varphi - \delta$ au cercle vertical, ou de $180^\circ + \varphi - \delta$ au cercle méridien (en faisant le nadir); observation de passages dans le premier vertical; méthode micro-

métrique de Horrebow (Talcott), où l'étoile S est remplacée par un couple S, S', de sorte qu'au lieu de $\varphi - \delta$ on observe $\varphi - \frac{1}{2}(\delta + \delta')$. L'emploi du couple a ici un autre sens que dans ce qui précède, où il s'agissait d'associer des étoiles pour obtenir les différences de leurs déclinaisons. C'est la méthode de Horrebow (méthode M. N., micromètre-niveau) que M. Küstner n'hésite pas à recommander de préférence à toutes les autres.

Quant au nombre p des étoiles d'un cycle, il y aurait quelque avantage à prendre simplement $p = 2$; les étoiles seraient alors écartées de 12^h en ascension droite; on les observerait à 6^h du soir et à 6^h du matin, à deux époques séparées par un intervalle de six mois. La valeur du coefficient de y serait 3,0 pour Berlin; deux étoiles donneraient donc directement $3y$. Rien n'empêcherait, bien entendu, de former plusieurs cycles composés de cette manière. Toutefois cette combinaison ne serait commode que pour le cercle vertical; elle ne serait guère réalisable avec la méthode M. N. (où les deux étoiles devraient être remplacées par deux couples). Il faudrait ici prendre au moins $p = 3$ (trois couples). Le choix des combinaisons dépendra évidemment de la situation de l'observatoire, de la nature de l'instrument disponible, etc. Enfin, les couples seront avantageusement remplacés par des groupes de couples.

Les séries d'observations qui ont été faites à Berlin et ailleurs pour la méthode M. N., en vue de constater les variations de la latitude, permettront subsidiairement, au moyen de groupements convenables, d'obtenir une nouvelle valeur de la constante de l'aberration, indépendante de ces variations. M. Küstner montre encore que cette méthode est la seule qui soit à l'abri des causes d'erreur résultant des anomalies de la réfraction, dont l'influence est toujours à craindre avec les autres méthodes par lesquelles on a essayé de déterminer la constante de l'aberration.

Plassmann (J.). — Observations des Perséides.

M. Plassmann donne tous les détails des observations faites à Warendorf, en 1888 (*Bull.*, VI, p. 45).

Plassmann. — Sur les variations d'éclat de l'étoile λ Taureau.

Plassmann. — Sur la véritable forme de la courbe d'Algol.

Un ensemble de 175 observations nouvelles a permis de constater l'existence d'une inflexion dans la partie de la courbe qui passait pour être rectiligne.

Berberich. — Sur l'orbite de la planète $\text{\textcircled{285}}$ Anne.

Elle ne pourra être observée, en 1891, que par les astronomes de l'hémisphère sud, à cause de ses déclinaisons australes (-50° en avril). M. Berberich trouve que la déclinaison de cette planète peut atteindre -73° .

Vogel. — Observations des systèmes de β Cocher et ζ Gr. Ourse, révélés par l'étude de leurs spectres.

La duplicité de l'étoile β Cocher et de l'une des composantes de ζ Gr. Ourse a été révélée par les photographies de leurs spectres, obtenues au Collège Harvard, ainsi que l'a expliqué M. Pickering dans les *Monthly Notices* et dans son quatrième rapport annuel (*Henry Draper Memorial*). Dans l'appareil de Cambridge, le prisme est placé en avant de l'objectif de la lunette, la plaque photographique se trouve au foyer; l'arête du prisme étant parallèle au mouvement diurne, on peut élargir les spectres stellaires en ralentissant ou en accélérant un peu le mouvement d'horlogerie qui conduit le tube; mais cette disposition ne permet pas de photographier, avec le spectre stellaire, celui d'une source terrestre, pour faciliter les comparaisons. C'est là, au contraire, l'un des avantages que présente le spectrographe de Potsdam, qui se trouve tout entier du côté de l'oculaire. Si l'on a pu, néanmoins, faire à Cambridge la découverte en question, c'est qu'elle repose sur la comparaison de deux spectres juxtaposés ou superposés, dont les raies se dédoublent périodiquement (voir *Bulletin*, VII, p. 248).

D'après M. Pickering, les doublements de la raie K (H_2) donnent pour β Cocher une période de 4 jours, pour ζ Gr. Ourse une période de 105 jours; les vitesses relatives des composantes seraient respectivement de 240^{km} et de 160^{km} . M. Vogel avait photographié le spectre de β Cocher le 14 novembre 1888 et le 3 janvier 1889; les épreuves obtenues à ces deux dates montrent la raie du magnésium 448, nettement doublée. Après la publication de la note de M. Pickering dans les *Monthly Notices*, on a fait, à Potsdam, de nouvelles photographies de ce spectre, en novembre et décembre 1890, qui confirment les résultats annoncés; la période est exactement de quatre jours, les raies se voient doubles tous les deux jours; la vitesse relative paraît être de 220^{km} au maximum. En attribuant à chaque composante une vitesse orbitaire de 110^{km} , on trouve pour le diamètre de l'orbite 12000000^{km} ; la masse du système serait à peu près 5 fois celle du Soleil. Le déplacement de la raie H γ donne encore -26^{km} pour le mouvement de β Cocher par rapport au système solaire.

L'observation de l'étoile principale de ζ Gr. Ourse est moins facile; l'orbite doit être fortement elliptique, car le doublement est toujours de très courte durée, malgré la longueur de la période (105 jours). Les photographies de Potsdam s'accordent assez bien avec les résultats obtenus à Cambridge.

Ball (L. de). — Observations de quelques étoiles doubles.

M. de Ball publie ses mesures d'une série de couples, proposés par M. Struve comme objets d'épreuves, pour la détermination de l'équation personnelle des divers observateurs. Ces mesures remontent à 1886.

Burnham. — Sur les étoiles doubles O Σ 15 et O Σ 487.

Ces couples, très serrés, sont des objets difficiles; la distance ne dépasse guère 0",15 pour le premier, 0",20 pour le second.

Barnard. — Nouvelle nébuleuse planétaire.

Elle est voisine de l'étoile DM. + 34°,732.

Berberich. — Éphéméride de la comète 1889 I.

Kiaer. — Sur les Théories des queues cométaires.

C'est le résumé d'une Thèse soutenue par M. Kiaer en 1890, et dont nous avons déjà parlé (*Bulletin*, VII, p. 309). Après avoir montré l'insuffisance de l'hypothèse de la répulsion électrique, telle qu'elle a été développée par Zöllner, l'auteur examine celle de l'action répulsive des rayons solaires (Maxwell), qu'il trouve également inadmissible. Il pense qu'il est possible d'expliquer la formation des queues sans recourir à une force répulsive, tout simplement par l'introduction d'une grande vitesse initiale dans une direction opposée au Soleil. Cette vitesse, par laquelle les gaz légers sont chassés à l'opposite du Soleil, aurait pour cause une pression particulière qui se manifesterait dans l'atmosphère des comètes, et qui serait due, d'abord à la chaleur solaire, ensuite aux collisions des particules dont se compose la nébulosité cométaire.

Barnard. — Sur les nébulosités des Pléiades.

M. Barnard a constaté l'existence d'une petite nébulosité planétaire au sud de Mérope.

Barnard. — Observations de Vénus près de sa conjonction inférieure.

Peters (C.-F.-W.). — Remarque sur le problème de Kepler.

En désignant par E_0 une valeur approchée de l'anomalie excentrique E , et posant

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e \sin E_0, & E_2 &= M + e \sin E_1, & \dots \\ \Delta_0 &= E_1 - E_0, & \Delta_1 &= E_2 - E_1, & \dots \end{aligned}$$

on trouve approximativement

$$\Delta_1 = e \cos E_0 \Delta_0, \quad \Delta_2 = (e \cos E)^2 \Delta_0, \quad \dots,$$

de sorte que les Δ forment une progression géométrique. On pourra donc faire

$$E = E_2 + \frac{\Delta_1^2}{\Delta_0 - \Delta_1},$$

formule très commode, que M. Peters applique à l'exemple choisi par Gauss. L'erreur du résultat est $-3''$, 4, tandis que le premier calcul de Gauss est en erreur de $+10''$, 5. Nous ferons seulement remarquer que le même résultat s'obtient par la formule

$$E = E_0 + \frac{\Delta_0}{1 - e \cos \varepsilon}$$

ou bien

$$E = E_1 + \frac{\Delta_0}{\frac{1}{e \cos \varepsilon} - 1},$$

en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}(E_0 + E_1)$.

Appliquée à l'exemple de Gauss, elle n'est en erreur que de $-2''$, 8.

Pour obtenir la première approximation E_0 , on se servirait, avec avantage, de notre diagramme (*Bulletin*, I, p. 383).

Hackenbergl. — Éléments de la planète (301).

Noms donnés aux petites planètes :

(283) *Emma*; (284) *Amelia*; (285) *Regina*; (289) *Nenetta*; (290) *Bruna*
(291) *Alice*; (292) *Ludovica*; (293) *Brasilía*; (294) *Felicia*; (295) *Theresia*

R.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR UN THÉORÈME DE M. TISSERAND;

PAR M. MAURICE HAMY.

On sait que la fonction $(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-s}$, où α est un nombre positif inférieur à l'unité et s l'une des quantités $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ peut être développée comme il suit

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-s} = \frac{1}{2} B_s^{(0)} + \sum_1^{\infty} B_s^{(i)} \cos i \psi,$$

en posant (TISSERAND, *Mécanique céleste*, T. I, p. 272)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} B_s^{(i)} = \frac{s(s+1)\dots(s+i-1)}{i!} \alpha^i \left[1 + \frac{s}{1} \frac{s+i}{1+i} \alpha^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} \frac{(s+i)\dots(s+i+n-1)}{(i+1)\dots(i+n-1)} \alpha^{2n} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

La fonction

$$\frac{\alpha^p}{p!} \frac{d^p B_s^{(i)}}{d\alpha^p}$$

joue un rôle important dans la Théorie des perturbations. M. Tisserand a démontré à son égard (*Comptes rendus*, t. XC) un théorème remarquable qui a été le point de départ de belles recherches de la part de MM. O. Callandreaux et G. Darboux (*Comptes rendus*, t. XC).

Le théorème de M. Tisserand consiste en ceci :

L'expression $\frac{d^p}{p!} \frac{d^p B_s^{(i)}}{d\alpha^p}$, dans laquelle s désigne l'une des quantités $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, tend vers zéro pour $\alpha < \frac{1}{2}$, et vers l'infini pour $\alpha > \frac{1}{2}$, quand i et s restent fixes p croît indéfiniment.

Voici une démonstration nouvelle de la proposition de M. Tisserand :

$$1^\circ \alpha < \frac{1}{2}.$$

Changeons α en $\alpha + y$ dans la fonction (1). On obtient ainsi une fonction de y holomorphe dans le cercle de rayon $1 - \alpha$. Le terme général du développement de cette fonction, suivant les puissances de y , $\frac{y^p}{p!} \frac{d^p B_s^{(i)}(\alpha)}{d\alpha^p}$, tend vers zéro pour tout point intérieur au

cercle de convergence. Si l'on fait en particulier $y = \alpha$, on tombe sur l'expression de M. Tisserand.

$$2^{\circ} \alpha > \frac{1}{2}.$$

On tire de la formule (1)

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{x^p}{p!} \frac{d^p B_x^{(i)}}{dx^p} &= \frac{s(s+1)\dots(s+i-1)}{i!} \alpha^i \sum_{(n)} \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} \\ &\times \frac{(s+i)\dots(s+i+n-1)}{(i+1)\dots(i+n)} \frac{(2n+i)(2n+i-1)\dots(2n+i-p+1)}{p!} \end{aligned} \right.$$

n est un entier positif devant recevoir toutes les valeurs limitées inférieurement par l'inégalité $i + 2n - p > 0$, qui exprime que les exposants de α dans $\frac{d^p B_x^{(i)}}{dx^p}$ sont positifs. La même inégalité montre que les termes de la suite (2) sont tous positifs; il en résulte que la seconde partie du théorème de M. Tisserand sera établie si l'on fait voir que certains termes de la série augmentent indéfiniment avec p .

Soit λ un entier fixe quelconque. Faisons $n = p + \lambda$ dans la formule (2). Le terme général écrit sous le signe \sum devient une certaine fonction de p , u_p , dont on trouverait la valeur au moyen de la fonction Γ . Mais cela est inutile pour le but que nous nous proposons. Il suffit de remarquer que l'on a

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{s + \lambda + p}{1 + \lambda + p} \frac{s + i + \lambda + p}{1 + i + \lambda + p} \frac{(2p + 2 + 2\lambda + i)(2p + 1 + 2\lambda + i)}{(p + 1)(p + 2\lambda + i + 1)} \alpha^2,$$

ou

$$(3) \quad \frac{u_{p+1}}{u_p} = (2\alpha)^2 \left[1 + \frac{1}{p} \left(2s - \frac{5}{2} \right) + \dots \right].$$

Ce rapport reste constamment supérieur à l'unité lorsque p dépasse une limite convenable. A partir de cette valeur de p , u_p ira donc en croissant et croîtra indéfiniment.

Il est à remarquer que l'entier arbitraire λ ne figure pas dans le second membre de l'inégalité (3). On doit en conclure qu'il y a dans la suite (2) un nombre fini de termes qui augmentent indéfiniment avec p .

$$3^{\circ} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Dans le cas intermédiaire où $\alpha = \frac{1}{2}$, le rapport (3) devient encore

supérieur à l'unité lorsque p dépasse une certaine limite, en exceptant toutefois la valeur $s = \frac{1}{2}$, et u_p augmente encore indéfiniment. Pour $s = \frac{1}{2}$, M. Tisserand a démontré que $\frac{d^p}{p!} \frac{d^p B_s^{(i)}}{dx^p}$ tend vers zéro; notre raisonnement cesse d'être applicable.

SUR LES GRANDES PERTURBATIONS DES COMÈTES PÉRIODIQUES;

PAR M. L. SCHULHOF.

I. Toutes les comètes périodiques d'une courte durée de révolution, sauf celle d'Encke, se rapprochent tellement de l'orbite de Jupiter qu'elles doivent à certaines époques subir d'énormes perturbations de la part de cette planète. Quand il s'agit de décider la question de l'identité de deux comètes, on rencontre presque toujours de grandes difficultés, malgré l'important critérium de M. Tisserand. Il sera souvent nécessaire, avant d'entreprendre des calculs rigoureux, d'évaluer d'une manière approchée les grandes perturbations subies dans l'intervalle de deux apparitions, en faisant plusieurs suppositions sur la position relative de la comète par rapport à Jupiter, vers l'époque de leur proximité. On pourra alors notamment négliger les perturbations produites par le Soleil dans le mouvement de la comète pendant que celle-ci demeure dans la sphère d'activité de Jupiter. Dans un tel cas, il est avantageux d'employer les coordonnées et les vitesses jovicentriques qui, à l'entrée dans la sphère d'activité de la planète et à la sortie, correspondent à la même distance de la planète. Nous suivrons donc l'exemple de M. Tisserand et de M. Callandreau qui, dans leurs importantes recherches sur la capture des comètes, se sont servis de ce procédé. Nous rapporterons toutes les coordonnées au plan de l'orbite de Jupiter.

Soient x, y, z, r les coordonnées héliocentriques de la comète, x', y', z', r' leurs dérivées par rapport à $\tau = kt$; ensuite $a, p, e, i, Q, \omega, \nu, c$ ses demi grand axe, paramètre, excentricité, inclinaison, nœud, longitude du périhélie, distance du périhélie au nœud et anomalie vraie, et $g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Soient les quantités analogues dans l'orbite jovicentrique de la comète, qui sera toujours une

hyperbole, $\xi, \eta, \zeta, \rho, \xi', \eta', \zeta', \rho', -\alpha, \pi, \varepsilon, \iota, \Omega, \upsilon, \gamma^2$ (la longitude du périjove et la distance du périjove au nœud ne joueront aucun rôle). Soient enfin X, Y, R, X', Y', R', A et P , les coordonnées et vitesses héliocentriques, le demi grand axe et le paramètre de Jupiter, $G^2 = X'^2 + Y'^2$, et L et M sa longitude héliocentrique et sa masse.

Nous distinguerons par les indices e et s les données qui sont différentes à l'entrée et à la sortie. Selon notre convention nous aurons $\rho_e = \rho_s = \rho$, $-\rho'_e = \rho'_s = \rho'$ et $-\upsilon_e = \upsilon_s = \upsilon$. Il suffira de chercher l'expression d'une seule coordonnée et de sa dérivée, par exemple de ξ_s et ξ'_s ; on obtiendra les autres par le simple échange des lettres ξ, η, ζ . Nous aurons besoin des relations connues

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi\eta' - \eta\xi' = \sqrt{M\pi} \cos \iota, \\ \eta\zeta' - \zeta\eta' = \sqrt{M\pi} \sin \Omega \sin \iota, \\ \xi\zeta' - \zeta\xi' = \sqrt{M\pi} \cos \Omega \sin \iota, \\ \pi = \alpha(\varepsilon^2 - 1), \\ \frac{\rho'^2}{M} + \frac{\pi}{\rho^2} = \frac{2}{\rho} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma^2}{M}, \\ \rho \cos \upsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\pi - \rho), \\ \rho \sin \upsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \rho \rho'. \end{array} \right.$$

De l'expression de ξ_s

$$\xi_s = \xi_e \cos 2\upsilon + (\eta_e \cos \iota + \zeta_e \cos \Omega \sin \iota) \sin 2\upsilon$$

on déduit, après quelques transformations, les formules

$$\begin{aligned} \xi_s + \xi_e &= 2\xi_e \cos^2 \upsilon + \frac{2}{\sqrt{M\pi}} (\rho\rho'\xi_e + \rho^2\xi'_e) \sin \upsilon \cos \upsilon \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} (\pi - \rho) \left[\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha} \right) \xi_e + \frac{1}{M} \rho\rho'\xi'_e \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_s - \xi_e &= -2\xi_e \sin^2 \upsilon + \frac{2}{\sqrt{M\pi}} (\rho\rho'\xi_e + \rho^2\xi'_e) \sin \upsilon \cos \upsilon \\ &= -\frac{2\rho\rho'}{M\varepsilon^2} [\rho'\xi_e + (\rho - \pi)\xi'_e]. \end{aligned}$$

En échangeant les indices e et s , on obtient deux expressions

analogues dont la combinaison avec les précédentes donne les relations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'_s + \xi'_c &= \frac{M}{\rho\rho'} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha} \right) (\xi_s - \xi_c) \\ &= -\frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha} \right) [\rho' \xi_c + (\rho - \pi) \xi'_c]; \\ \xi'_s - \xi'_c &= \frac{\rho'}{\rho - \pi} (\xi_s + \xi_c) \\ &= -\frac{2\rho'}{\varepsilon^2} \left[\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha} \right) \xi_c + \frac{1}{M} \rho\rho' \xi'_c \right]. \end{aligned} \right.$$

En mettant η et ζ à la place de ξ , on aura les expressions analogues pour η_s , ζ_s , η'_s et ζ'_s . La combinaison de l'ensemble de ces équations fournit la relation de vérification

$$\xi_c \zeta'_s + \xi_s \zeta'_c + \eta_c \eta'_s + \eta_s \eta'_c + \zeta_c \zeta'_s + \zeta_s \zeta'_c = 0.$$

II. Les formules (2) sont d'un emploi suffisamment commode quand on veut calculer pour une comète donnée les éléments héliocentriques qu'elle aura après sa sortie de la sphère d'activité de Jupiter. Mais s'il s'agit de recherches générales sur les relations entre les anciens et les nouveaux éléments héliocentriques d'un astre, comme celles que M. Tisserand a inaugurées dans ce *Bulletin* (t. VI, p. 241) et celles que M. Callandreau a récemment publiées dans le tome XX des *Mémoires de l'Observatoire de Paris*, on peut encore avantageusement modifier les équations (2) et déduire, d'une manière différente, les importants résultats que ces recherches ont mis pour la première fois en lumière.

Nous désignerons par $2t$ la durée du séjour de la comète dans la sphère d'activité de Jupiter et nous supposerons partout le rayon ρ de cette sphère égal à 0,3. On pourra, comme l'a remarqué Laplace, prendre sans inconvénient pour ρ une plus grande valeur. Cette remarque est d'une assez grande importance dans ces recherches, dans lesquelles on néglige forcément les perturbations qu'exerce Jupiter avant l'entrée dans sa sphère d'activité et après la sortie, et celles du Soleil pendant le séjour de l'astre dans cette sphère.

En posant

$$kt = \tau, \quad \frac{fp'}{M\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}\right)} = \tau + \Delta\tau$$

et

$$\frac{2\rho'}{z^2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}\right) = c,$$

nous pourrons écrire les équations (2) sous la forme

$$(2^*) \quad \xi_s - \xi_e = (\tau + \Delta\tau)(\xi'_s + \xi'_e), \quad \zeta_s - \zeta_e = -c[\xi_e + (\tau + \Delta\tau)\xi'_e].$$

$\frac{2(\tau + \Delta\tau)}{k}$ représente l'intervalle de temps au bout duquel la comète arriverait au point de sortie avec une vitesse uniforme dont les composantes sont $\frac{\xi'_s + \xi'_e}{2}$, $\frac{\tau'_s + \tau'_e}{2}$ et $\frac{\zeta'_s + \zeta'_e}{2}$. Nous démontrons tout à l'heure que $\Delta\tau$ est toujours une quantité positive, d'autant plus considérable que α est plus grand.

Il est utile de déterminer dans l'orbite primitive et dans l'orbite modifiée les coordonnées que la comète posséderait à l'instant du passage au périhélie ou à une époque voisine de cet instant, si son mouvement n'était pas troublé par Jupiter. Nous examinons d'abord brièvement deux cas auxquels nous ne nous arrêterons

En distinguant par les indices 1 et 2 les coordonnées dans l'orbite primitive et dans la nouvelle orbite et en désignant par x'' la seconde dérivée de x par rapport à τ , nous aurons, *grosso modo*, pour l'instant du passage au périhélie,

$$x_1 = x_e + \tau x'_e + \frac{\tau^2}{2} x''_e = X_e + \xi_e + \tau(X'_e + \xi'_e) + \frac{\tau^2}{2} x''_e,$$

$$x_2 = X_s + \xi_s + \tau(X'_s + \xi'_s) + \frac{\tau^2}{2} x''_s;$$

par conséquent

$$x_2 - x_1 = \xi_s - \xi_e + \tau(\xi'_s + \xi'_e) + \frac{\tau^2}{2}(x''_s - x''_e) = \Delta\tau(\xi'_s + \xi'_e).$$

De même on aurait, en cherchant x_1 pour l'instant $\frac{\tau + \Delta\tau}{k}$

l'entrée et x_2 pour l'instant $\frac{\tau + \Delta\tau}{k}$ avant la sortie, approximativement $x_2 - x_1 = -\Delta\tau(X'_s + X'_e)$. A cause de la petitesse de $\Delta\tau$, $\Delta\tau(\xi'_s + \xi'_e)$ aussi bien que $\Delta\tau(X'_s + X'_e)$ sont de petites quantités. On peut donc dire qu'aux environs du point de proximité x_2, y_2 et z_2 sont peu différents de x_1, y_1 et z_1 . On tire de ce résultat la conséquence très importante que, quel que soit le bouleversement d'une orbite à la suite de l'action de Jupiter, il doit subsister entre ses éléments trois relations communes à l'ancienne et à la nouvelle orbite. On exprime généralement ce fait par les trois propositions suivantes :

1° Les deux orbites doivent se rapprocher beaucoup dans un point donné ;

2° Ce point est sensiblement leur point de proximité à l'orbite de Jupiter ;

3° Les vitesses relatives de la comète par rapport à Jupiter sont à peu près les mêmes à l'entrée dans la sphère d'activité, située dans l'ancienne orbite, et à la sortie qui se trouve déjà dans la nouvelle orbite. M. Tisserand a remplacé la troisième proposition par une relation très élégante entre les anciens et les nouveaux éléments, relation qui joue un très grand rôle dans les questions d'identité de deux comètes. Nous donnerons ultérieurement encore deux autres relations, équivalentes aux deux premières propositions, et qui pourront être utiles dans le cas de l'identification d'une comète périodique avec une ancienne comète insuffisamment observée.

Si une comète était successivement plusieurs fois troublée au même point de proximité, on aurait, dans le second cas considéré, approximativement $x_2 - x_1 = -2X'_0(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 + \dots + \Delta\tau_n)$, X'_0 étant la moyenne des différentes valeurs X' . Comme les valeurs des $\Delta\tau$ s'additionnent toujours, les écarts entre x_1 et x_2 augmentent de plus en plus, c'est-à-dire, le point de proximité se déplace successivement toujours dans le même sens, dans une mesure d'autant plus forte que n est plus grand. On peut généraliser cette remarque et l'étendre au cas où l'astre est successivement troublé par Jupiter, sans avoir été trop voisin de la planète. Ce fait a déjà été, comme l'a remarqué M. Callandreau, reconnu par Le Verrier dans sa recherche sur la comète de Vico. Vers l'aphélie de Jupiter

le déplacement du point de proximité est un peu plus lent que vers le périhélie.

Les deux combinaisons offrent à côté de grands avantages l'inconvénient qu'on ne peut pas, dans des recherches générales, tenir compte des termes en $\Delta\tau$ qui est une fonction transcendente et qu'en les négligeant on commet une erreur trop sensible. Nous avons préféré une troisième combinaison, dans laquelle les termes négligés restent dans des limites plus étroites. Nous introduirons les coordonnées x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 et leurs dérivées qui se rapportent aux deux points dans lesquels l'astre, marchant dans l'orbite primitive et dans l'orbite modifiée, se trouverait à sa plus courte distance de Jupiter, si la planète n'exerçait pas une action perturbatrice sur son mouvement.

En posant

$$0 = \frac{\rho\rho'}{\gamma^2}, \quad \xi_1 = \xi_c + \theta\xi'_c, \quad \xi_2 = \xi_s - \theta\xi'_s, \quad \xi'_1 = \xi'_c \quad \text{et} \quad \xi'_2 = \xi'_s,$$

nous avons

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_1 \eta'_1 - \eta_1 \xi'_1 = \xi_2 \eta'_2 - \eta_2 \xi'_2 = \xi_c \eta'_c - \eta_c \xi'_c = \xi_s \eta'_s - \eta_s \xi'_s = \sqrt{M\pi} \cos t, \\ \zeta_1 \eta'_1 - \eta_1 \zeta'_1 = \zeta_2 \eta'_2 - \eta_2 \zeta'_2 = \sqrt{M\pi} \sin \Omega \sin t, \\ \xi_1 \zeta'_1 - \zeta_1 \xi'_1 = \xi_2 \zeta'_2 - \zeta_2 \xi'_2 = \sqrt{M\pi} \cos \Omega \sin t, \end{cases}$$

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho^2 - 2\theta\rho\rho' + \theta^2\gamma^2 = \rho^2 - \frac{\rho^2\rho'^2}{\gamma^2} = \frac{M\pi}{\gamma^2},$$

$$\rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2 = -\rho\rho' + \theta\gamma^2 = 0, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma^2,$$

$$M\pi \sin^2 t = \frac{M\pi}{\gamma^2} \zeta_1^2 + \gamma^2 \zeta_1^2 = \frac{M\pi}{\gamma^2} \zeta_2^2 + \gamma^2 \zeta_2^2.$$

En exprimant, à l'aide des équations (2*), ξ_2 et ξ'_2 en fonctions de ξ_1 et ξ'_1 , nous obtenons

$$\begin{aligned} \xi_2 &= [1 - c(\tau + \Delta\tau - \theta)]\xi_1 + 2(\tau + \Delta\tau - \theta) \left[1 - \frac{c}{2}(\tau + \Delta\tau - \theta) \right] \xi'_1, \\ \xi'_2 &= [1 - c(\tau + \Delta\tau - \theta)]\xi'_1 - c\xi_1. \end{aligned}$$

Pour simplifier ces expressions, nous poserons $\frac{\rho'}{c\gamma} = \sin\sigma$, et nous

aurons

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \sigma = \frac{1}{\varepsilon \gamma} \sqrt{(\varepsilon^2 - 1) \gamma^2 + \frac{M \pi}{\rho^2}} = \frac{\sqrt{M \pi}}{\varepsilon \gamma} \left(\frac{\gamma^2}{M} - \frac{1}{\rho} \right), \\ c(\tau + \Delta\tau - \theta) = \frac{2 \rho'}{\varepsilon^2} \left(\frac{\gamma^2}{M} - \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\rho \rho'}{\gamma^2 - \frac{M}{\rho}} - \frac{\rho \rho'}{\gamma^2} \right) = 2 \sin^2 \sigma, \\ c = \frac{2 \rho'}{\varepsilon^2} \left(\frac{\gamma^2}{M} - \frac{1}{\rho} \right) = 2 \sin \sigma \cos \sigma \frac{\gamma^2}{\sqrt{M \pi}}, \\ \tau + \Delta\tau - \theta = \operatorname{tang} \sigma \frac{\sqrt{M \pi}}{\gamma^2}; \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = \cos 2\sigma \xi_1 + \frac{\sqrt{M \pi}}{\gamma^2} \sin 2\sigma \xi_1', \\ \xi_2' = \cos 2\sigma \xi_1' - \frac{\gamma^2}{\sqrt{M \pi}} \sin 2\sigma \xi_1, \\ \frac{\xi_2'^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{M \pi} \xi_2^2 = \frac{\xi_1'^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{M \pi} \xi_1^2. \end{array} \right.$$

On peut toujours prendre σ entre 0° et 90° ; sa limite supérieure est donnée par la condition que la distance périjove correspondante x ne soit pas inférieure à une certaine quantité. Dans le Tableau que nous donnerons ultérieurement, nous adoptons comme limite de x la valeur 0,000713 qui correspond à une fois et demie le rayon de Jupiter. En choisissant γ , ρ et x comme variables indépendantes, on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{x}{a} + 1 = x \left(\frac{\gamma^2}{M} - \frac{2}{\rho} \right) + 1, \\ \pi = (\varepsilon + 1)x = \left(\frac{\gamma^2}{M} - \frac{2}{\rho} \right) x^2 + 2x, \\ \sin \sigma = \frac{\rho'}{\varepsilon \gamma} = \frac{1}{\varepsilon \gamma} \sqrt{\gamma^2 - \frac{M \pi}{\rho^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{M x}{\rho^2 \gamma^2} \left(2 + \frac{\gamma^2}{M} x - \frac{2x}{\rho} \right)}}{1 + \frac{\gamma^2}{M} x - \frac{2x}{\rho}}, \\ \cos \sigma = \frac{\left(\frac{\gamma^2}{M} - \frac{1}{\rho} \right) \sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{\gamma^2}{M} x - \frac{2x}{\rho}}}{\frac{\gamma}{\sqrt{M}} \left(1 + \frac{\gamma^2}{M} x - \frac{2x}{\rho} \right)}. \end{array} \right.$$

Pour déterminer τ , on a besoin de l'angle auxiliaire φ , donné par la relation $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma$. A l'aide de φ on peut

exprimer dans une forme très simple toutes les quantités entrent en ξ et ξ' . On a notamment

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \left(1 + \frac{\rho}{\alpha}\right) \cos \varphi, \quad \rho\rho' = \left(1 + \frac{\rho}{\alpha}\right) \sqrt{M\alpha} \sin \varphi, \\ \tau = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}} \left[\left(1 + \frac{\rho}{\alpha}\right) \sin \varphi - \log \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi\right) \right], \\ \tau + \Delta\tau = \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \rho \sin \varphi, \quad \Delta\tau = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}} \left[\log \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi\right) - \sin \varphi \right], \\ \sin \sigma = \frac{\sqrt{M\alpha} \operatorname{tang} \varphi}{\rho\gamma}. \end{array} \right.$$

On voit que $\Delta\tau$ ne dépend que de α et φ . Sa valeur est toujours positive et augmente avec celle de φ , sa limite supérieure correspondant au minimum de x . Dans la parabole et dans l'ellipse est également toujours positif; dans cette dernière, il ne dépend que du demi grand axe et de l'anomalie excentrique. Quand la valeur de τ , elle atteint son maximum pour $\nu = 90^\circ$, c'est-à-dire pour $\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}}$.

Nous allons exprimer x_2, y_2, z_2 et x'_2, y'_2 et z'_2 à l'aide de x_1 , et x'_1, y'_1, z'_1 ; nous ne tiendrons compte que d'une manière abrégée des termes du second ordre, en prenant $x'' = X''$. Nous obtenons ainsi

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = X_c + 0 X'_c + \frac{0^2}{2} X''_c + \xi_c + 0 \xi'_c = X_1 + \xi_1, \\ x_2 = X_s - 0 X'_s + \frac{0^2}{2} X''_s + \xi_s - 0 \xi'_s \\ \quad = X_1 + 2(\tau - 0) X'_1 + 2(\tau - 0)^2 X''_1 + \xi_2 = X_2 + \xi_2, \\ x'_1 = X'_c + 0 X''_c + \xi'_c = X'_1 + \xi'_1, \\ x'_2 = X'_s - 0 X''_s + \xi'_s = X'_1 + 2(\tau - 0) X''_1 + \xi'_2 = X'_2 + \xi'_2. \end{array} \right.$$

Nous nous contenterons toujours de prendre

$$X_2 = X_1 + 2(\tau - 0) X'_1$$

et

$$X'_2 = X'_1 - \frac{2(\tau - 0)}{R_1^3} X_1;$$

nous nous permettrons même quelquefois de négliger complètement des termes en $\tau - \theta$, quantité qui est positive tant que σ est petit et négative quand σ est grand. L'erreur ainsi commise pourra être assez considérable. Pour $\alpha = 0,1$, valeur qui se présente dans le cas de la comète Tempel 1867 II, et pour $\rho = 0,3$, $\tau - \theta$ est au maximum égal à $0,5$ et deviendrait encore plus considérable, si l'on adoptait un rayon plus grand pour la sphère d'activité; mais, si l'on choisissait une des deux autres combinaisons mentionnées, l'erreur deviendrait encore plus sensible toutes les fois qu'on négligerait dans un but de simplification les termes en τ ou en $\Delta\tau$. Ajoutons qu'avec l'augmentation de la valeur de ρ , $\tau - \theta$ n'augmenterait pas autant que τ et $\Delta\tau$. Ainsi, par exemple, pour $\alpha = 0,05$ et $\kappa = 0,000713$, $\tau - \theta$ passe de $-0,321$ à $-0,393$, si l'on prend pour ρ la valeur $0,4$ au lieu de $0,3$; dans le même cas, $\Delta\tau$ devient égal à $0,681$ au lieu de $0,590$, et τ monte de $1,558$ à $2,195$.

Dans l'expression des éléments héliocentriques, il n'entrera, outre ξ et ξ' , que les quatre combinaisons

$$X\xi' + Y'\tau' = H, \quad X'\xi + Y'\tau = K, \quad X\xi + Y\tau = N, \quad X\xi' + Y'\tau' = O.$$

On a, en tenant compte des relations (3),

$$18) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{P}\xi = Y'N - YK, \quad \sqrt{P}\tau = XK - X'N, \\ \sqrt{P}\xi' = Y'O - YH, \quad \sqrt{P}\tau' = XH - X'O, \\ P(\xi^2 + \tau^2) = P\left(\frac{M\pi}{\gamma^2} - \zeta^2\right) = G^2N^2 + R^2K^2 - 2RR'KN, \\ P(\xi'^2 + \tau'^2) = P(\gamma^2 - \zeta'^2) = G^2O^2 + R^2H^2 - 2RR'HO, \\ P(\xi\xi' + \tau\tau') = -P\zeta\zeta' = G^2NO + R^2HK - RR'(HN + KO), \\ \sqrt{P}(\xi\tau' - \tau\xi') = \sqrt{MP}\pi \cos t = HN - KO, \\ M\pi \sin^2 t = \frac{M\pi}{\gamma^2} \zeta'^2 + \gamma^2 \zeta^2. \end{array} \right.$$

En posant

$$\begin{aligned} H &= \frac{\sqrt{P}}{R} \gamma \cos l \cos \lambda, & K &= \frac{\sqrt{MP}\pi}{R\gamma} \cos l \sin \lambda, \\ O &= \frac{\sqrt{P}}{G} \gamma \cos n \cos \nu, & N &= \frac{\sqrt{MP}\pi}{G\gamma} \cos n \sin \nu. \end{aligned}$$

nous aurons

www.libtoyl.com.cn

$$\begin{aligned}
 \frac{\zeta'^2}{M\pi} &= 1 - \cos^2 l \sin^2 \lambda - \cos^2 n \sin^2 \nu \\
 &\quad + 2\sqrt{RR'} \cos l \cos n \sin \lambda \sin \nu, \\
 \frac{\zeta'^2}{\gamma^2} &= 1 - \cos^2 l \cos^2 \lambda - \cos^2 n \cos^2 \nu \\
 &\quad + 2\sqrt{RR'} \cos l \cos n \cos \lambda \cos \nu, \\
 \frac{\zeta\zeta'}{\sqrt{M\pi}} &= -\cos^2 l \cos \lambda \sin \lambda - \cos^2 n \cos \nu \sin \nu \\
 &\quad + \sqrt{RR'} \cos l \cos n \sin(\lambda + \nu), \\
 \cos \iota &= \frac{\sqrt{P}}{GR} \cos l \cos n \sin(\nu - \lambda), \\
 \frac{\zeta'^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{M\pi} \zeta^2 &= \sin^2 l + \sin^2 n + 2\sqrt{RR'} \cos l \cos n \cos(\nu - \lambda) \\
 &= \sin^2 \iota = 1 - \frac{P}{G^2 R^2} \cos^2 l \cos^2 n \\
 &\quad + \frac{P}{G^2 R^2} \cos^2 l \cos^2 n \cos^2(\nu - \lambda).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Nous prendrons l et n toujours dans le premier quadrant. En choisissant l et n comme variables indépendantes, il faut satisfaire à la condition $\sin^2 l + \sin^2 n \leq 1$. En négligeant l'excentricité de Jupiter, on a pour $\sin \iota = 0$, $\cos l = \cos n = 1$ et $\nu = \pm 90^\circ + \lambda$, et pour $\sin \iota = 1$, $\cos^2 n = \sin^2 l$.

On tire des deux dernières équations les relations

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} \cos l \cos n \cos(\nu - \lambda) &= \sqrt{RR'} \pm \sqrt{\sin^2 l \sin^2 n + RR'^2 (\sin^2 l + \sin^2 n)}, \\ \cos l \cos n \sin(\nu - \lambda) &= \pm \frac{GR}{\sqrt{P}} \sqrt{\cos^2 l + \cos^2 n - 1 - 2\sqrt{RR'} \sin l \sin n}. \end{aligned} \right.$$

Comme $\frac{GR}{\sqrt{P}}$ ne s'écarte de l'unité qu'au plus de 0,0012 et que $\sqrt{RR'}$ est au maximum égal à 0,048, on pourra presque toujours adopter

$$\tag{10^*} \cos(\nu - \lambda) = \pm \operatorname{tang} l \operatorname{tang} n, \quad \sin(\nu - \lambda) = \pm \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 l \operatorname{tang}^2 n}.$$

En posant pour l'ancienne orbite

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l \cos \lambda, & K_1 &= \frac{\sqrt{MP\pi}}{R_1 \gamma} \cos l \sin \lambda, \\
 N_1 &= R_1 \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos n \sin \nu, & O_1 &= R_1 \gamma \cos n \cos \nu.
 \end{aligned}$$

ous aurons pour l'orbite modifiée

$$\begin{aligned}
 (11) \quad H_1 &= H_1 \cos 2\sigma - \frac{\gamma^2}{\sqrt{M\pi}} K_1 \sin 2\sigma \\
 &\quad - \frac{2(\tau - \theta)}{R_1^3} \left(O_1 \cos 2\sigma - \frac{\gamma^2}{\sqrt{M\pi}} N_1 \sin 2\sigma \right) \\
 &= \frac{\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l \cos(\lambda + 2\sigma) - \frac{2(\tau - \theta)}{R_1^3} \gamma \cos n \cos(\nu + 2\sigma), \\
 K_2 &= \frac{\sqrt{MP\pi}}{R_1 \gamma} \cos l \sin(\lambda + 2\sigma) - \frac{2(\tau - \theta)}{R_1^3} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos n \sin(\nu + 2\sigma), \\
 N_2 &= R_1 \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos n \sin(\nu + 2\sigma) + \frac{2\sqrt{P}}{R_1} (\tau - \theta) \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos l \sin(\lambda + 2\sigma), \\
 O_2 &= R_1 \gamma \cos n \cos(\nu + 2\sigma) + \frac{2\sqrt{P}}{R_1} (\tau - \theta) \gamma \cos l \cos(\lambda + 2\sigma).
 \end{aligned}$$

Si, inversement, on prend pour point de départ la nouvelle orbite pour chercher les anciens éléments, il suffira de changer le signe de σ et de $\tau - \theta$.

On simplifiera beaucoup les discussions ultérieures, en négligeant les termes en $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$ qui sont d'autant plus petits que la comète rapproche plus de Jupiter. Nous adopterons en outre souvent, sans commettre une erreur trop sensible, au lieu de R_1 , R_2 et G_1 , leurs moyennes R et G qui correspondent à l'instant du passage périhélie.

(A suivre.)

COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES DE JUPITER,

Tirées des Tables de Le Verrier [suite et fin (*)];

PAR J. CONIEL.

Corrections en			Corrections en			
longitude.	latitude.	rayon vecteur.	longitude.	latitude.	rayon vecteur	
1792.						
+ 8,1	+0,6	+ 7	JANV. 30.	+10,4	+0,7	+ 7
8,7	0,7	6	MARS 30.	10,1	0,7	9
9,6	0,7	7	MAI 29.	9,5	0,7	11
10,0	0,7	5	JUILL. 28.	8,8	0,5	12
10,4	0,6	5	SEPT. 26.	8,4	0,4	12
+10,4	+0,5	+ 6	Nov. 25.	+ 7,8	+0,3	+14

Bulletin astronomique, VII, p. 466, et VIII, p. 77, 102.

MEMOIRES ET OBSERVATIONS.

	Corrections en				Corrections en		
	longitude.	latitude.	rayon vecteur.		longitude.	latitude.	rayon vecteur.
1793.				DÉC. 24.	+ 8,5	+1,7	+18
JANV. 24.	+ 5,8	+0,1	+18	1799.			
MARS 23.	4,6	0,1	21	FÉVR. 22.	7,8	2,1	20
MAI 24.	3,8	0,1	23	AVRIL 23.	7,6	2,1	21
JUILL. 23.	2,0	+0,1	23	JUIN 22.	7,1	2,1	21
SEPT. 1.	+ 0,6	0,0	26	AOUT 21.	6,6	2,4	25
NOV. 20.	- 1,1	-0,1	29	OCT. 20.	6,3	2,3	31
1794.				DÉC. 19.	5,8	2,6	32
JANV. 19.	2,5	0,0	30	1800.			
MARS 20.	4,0	0,1	29	FÉVR. 17.	5,9	2,3	30
MAI 19.	5,2	0,2	32	AVRIL 18.	5,6	2,1	32
JUILL. 18.	5,8	0,1	34	JUIN 17.	4,9	2,0	32
SEPT. 16.	6,5	0,2	33	AOUT 16.	5,1	1,8	31
NOV. 15.	7,3	0,4	34	OCT. 15.	4,5	1,4	33
1795.				DÉC. 14.	4,7	1,5	34
JANV. 14.	7,6	0,2	31	1801.			
MARS 13.	7,9	0,5	29	FÉVR. 12.	5,0	1,3	30
MAI 4.	7,7	0,2	27	AVRIL 13.	5,4	1,0	28
JUILL. 13.	7,2	0,4	26	JUIN 12.	4,8	0,8	26
SEPT. 11.	6,7	0,7	25	AOUT 11.	4,8	0,5	21
NOV. 10.	5,9	0,6	21	OCT. 10.	4,7	+0,1	19
1796.				DÉC. 9.	5,1	-0,2	18
JANV. 9.	5,2	0,9	17	1802.			
MARS 9.	4,1	0,8	15	FÉVR. 7.	5,3	0,2	12
MAI 8.	3,5	1,0	11	AVRIL 2.	5,0	0,4	8
JUILL. 7.	- 1,5	0,9	8	JUIN 7.	6,2	0,4	4
SEPT. 5.	0,0	0,9	6	AOUT 6.	6,7	0,3	+ 2
NOV. 4.	+ 1,7	0,9	3	OCT. 5.	6,6	0,5	- 1
1797.				DÉC. 4.	7,9	0,9	5
JANV. 3.	2,6	1,0	3	1803.			
MARS 4.	4,3	0,9	2	FÉVR. 2.	8,8	1,0	8
MAI 3.	5,0	1,0	1	AVRIL 3.	10,0	0,9	8
JUILL. 2.	6,0	0,7	2	JUIN 2.	10,5	0,9	11
AOUT 31.	6,7	0,8	2	AOUT 1.	11,2	0,8	10
OCT. 30.	7,5	0,7	2	SEPT. 30.	12,2	0,4	9
DÉC. 29.	8,9	0,8	2	NOV. 29.	13,0	1,0	6
1798.				1804.			
FÉVR. 27.	9,3	0,7	3	JANV. 28.	13,4	0,7	6
AVRIL 28.	9,3	-0,6	6	MARS 28.	13,9	0,8	- 3
JUIN 27.	8,8	+0,3	11	MAI 17.	14,7	0,6	0
AOUT 26.	9,0	0,7	14	JUILL. 26.	15,4	0,7	+ 4
OCT. 25.	+ 8,8	+1,6	+16	SEPT. 24.	+15,8	-0,5	+ 5

	Corrections en				Corrections en		
	longitude.	latitude.	rayon vecteur.		longitude.	latitude.	rayon vecteur.
1804.				1809.			
NOV. 23.	+15,7	-0,4	+ 8	DÉC. 27.	- 6,4	-2,8	- 4
1805.				1810.			
JANV. 22.	16,1	0,2	16	FÉVR. 23.	5,2	2,8	8
MARS 23.	16,8	0,1	19	AVRIL 26.	4,5	2,5	10
MAI 22.	16,4	-0,1	23	JUIN 25.	3,7	2,6	9
JUILL. 21.	17,1	+0,2	27	AOUT 24.	2,6	2,4	8
SEPT. 19.	17,3	0,3	31	OCT. 23.	1,5	2,3	7
NOV. 18.	17,4	0,5	36	DÉC. 22.	- 0,8	3,0	6
1806.				1811.			
JANV. 17.	17,1	0,4	40	FÉVR. 20.	+ 1,2	2,5	3
MARS 18.	16,5	0,6	46	AVRIL 21.	1,7	2,2	- 2
MAI 17.	16,9	0,9	50	JUIN 20.	2,6	2,3	+ 4
JUILL. 16.	16,3	0,7	51	AOUT 19.	3,2	2,2	5
SEPT. 14.	15,4	1,3	54	OCT. 18.	3,5	2,4	8
NOV. 13.	14,3	0,8	57	DÉC. 17.	3,5	2,5	10
1807.				1812.			
JANV. 12.	13,2	0,9	58	FÉVR. 15.	3,9	2,4	15
MARS 13.	11,8	0,9	55	AVRIL 15.	3,9	2,1	19
MAI 12.	9,9	0,7	56	JUIN 14.	3,7	2,5	21
JUILL. 11.	8,0	0,5	55	AOUT 13.	2,9	2,1	22
SEPT. 9.	6,2	0,6	54	OCT. 12.	2,8	1,8	25
NOV. 8.	4,9	0,2	53	DÉC. 11.	2,5	1,9	27
1808.				1813.			
JANV. 7.	2,5	0,4	51	FÉVR. 9.	2,3	1,9	29
MARS 7.	+ 0,3	0,2	46	AVRIL 10.	1,3	1,8	27
MAI 6.	- 1,4	+0,1	41	JUIN 9.	1,3	1,7	28
JUILL. 5.	2,4	-0,6	35	AOUT 8.	1,3	1,3	28
SEPT. 3.	4,8	0,8	31	OCT. 7.	1,3	1,4	29
NOV. 2.	5,9	0,8	28	DÉC. 6.	1,4	1,4	27
1809.				1814.			
JANV. 1.	6,8	1,0	21	FÉVR. 4.	1,5	1,0	27
MARS 2.	7,2	1,2	14	AVRIL 5.	2,1	1,0	24
MAI 1.	7,9	1,5	11	JUIN 4.	2,6	0,6	24
JUIN 30.	7,8	1,6	8	AOUT 3.	2,8	0,3	20
AOUT 29.	7,5	1,9	+ 2	OCT. 2.	3,4	0,2	18
OCT. 28.	- 6,8	-2,1	- 1	DÉC. 1.	+4,0	-0,3	+15

OBSERVATIONS DE LA COMÈTE ZONA ET DE LA PLANÈTE (24) THÉ

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE

(équatorial d'Eichens, ouverture 0^m,258);

PAR M. COGGIA.

Dates. T. m. Marseille. ΔR . ΔP . N. dec. R app. log f. p. P app.

☞ Zona (Palerme 1890, nov. 15).

	h	m	s	m	s		h	m	s		h	m	s
1890. Nov. 17.	9.14.42	+4.	6,91	-10.52,7	5.5		5.24.56,28	-1,679	56.	8.27,6			
Déc. 2.	10. 3.50	+1.	5,79	- 1. 7,4	5.5		3.56.53,13	-1,180	54.56.54,1				
10.	10.28. 6	-2.	2,63	- 4.36,6	5.5		3.15.36,11	+2,846	56. 1.25,5				

(24) Thémis.

DÉC. 17.	10. 7.22	+0.26,71	- 7.26,2	5.5	4.19.19,00	-2,726	67.49.53,7
18.	9.54. 4	-0.19,74	- 5.42,9	5.5	4.18.32,55	-2,849	67.51.37,0
19.	10. 3.32	-1. 6,02	- 3.57,2	5.5	4.17.46,28	-2,622	67.53.22,7
29.	6.26.41	-7.40,02	+ 6. 5,8	5.5	4.11.15,04	-1,542	68. 9. 1,6
1891. JANV. 3.	9.30.32	-4.28,14	-13.41,1	5.5	4. 8.41,35	+2,470	68.15.42,5
13.	10. 3.23	+0.52,95	+ 0.12,4	5.5	4. 5.35,41	+1,253	68.24.10,1
14.	9.43.25	+0.43,32	+ 0.41,2	5.5	4. 5.25,78	+1,172	68.24.38,9

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1890,0.	Réd. au J.	P moy. 1890,0.	Réd. au J.	Autorités.
1.	7	5.20.45,83	+3,54	56.19.23,9	- 3,6	Paris 6258.
2.	8,9	3.45.43,55	+3,79	54.58.14,1	-12,6	1151 Weisse (n. c.)
3.	9	3.17.35,12	+3,62	56. 6.18,7	-16,5	Paris 4019.
4.	5	4.18.48,70	+3,59	67.57.30,5	-10,6	Paris 5099 x' Taure
5.	5	4.18.48,70	+3,59	67.57.30,5	-10,6	Paris 5099 x' Taure
6.	5	4.18.48,70	+3,60	67.57.30,5	-10,7	Paris 5099 x' Taure
7.	5,6	4.18.51,44	+3,62	68. 3. 6,6	-10,8	Paris 5101.
		R moy. 1891,0.		P moy. 1891,0.		
8.	5,6	4.13. 9,46	+0,03	68.29.25,8	- 2,2	Paris 4996.
9.	9	4. 4.42,53	-0,07	68.24. 0,0	- 2,3	19 Weisse (n. c.), H
10.	9	4. 4.42,53	-0,07	68.24. 0,0	- 2,3	19 Weisse (n. c.), I

Le 17 nov. 1890, la comète est peu brillante; elle a l'aspect d'une nébulosité diffuse, de 2' de diamètre environ, avec une légère condensation centrale.

Le 2 déc., elle est petite, faible, diffuse.

Le 10 déc., elle est très faible, diffuse, à peine visible dans l'instrument.

Le 19 déc., l'observation de Thémis est rendue difficile par la présence de la Lune.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

TABLES DES LOGARITHMES A HUIT DÉCIMALES DES NOMBRES ENTIERS DE 1 A 120 000, ET DES SINUS ET TANGENTES DE DIX SECONDES EN DIX SECONDES D'ARC DANS LE SYSTÈME DE LA DIVISION CENTÉSIMALE DU QUADRANT, publiés par ordre du Ministre de la guerre. Gr. in-4°. Paris 1891. Imprimerie nationale. Librairie Gauthier-Villars et fils.

Une Table numérique, bien faite, représente un capital, à peu près au même titre qu'un lingot d'or qui a été extrait des profondeurs de la Terre. Il arrive un moment, quelquefois c'est après de longues années d'attente, où le travail patiemment accumulé commence à porter ses fruits. C'est ainsi que le trésor que gardent la bibliothèque de l'Institut et celle de l'Observatoire, — je veux parler des fameuses Tables du cadastre, — a enfin été utilisé de la manière la plus heureuse. Le Service géographique de l'armée, placé actuellement sous la haute direction de M. le général Derrécaigaix, en a tiré ses Tables de logarithmes à huit décimales, dont la publication, commencée par le regretté général Perrier, a été terminée par M. le lieutenant-colonel Bassot, chef de la Section de Géodésie; publication qui marque une date dans l'histoire des Tables de logarithmes.

La construction des Tables que le service du cadastre devait exécuter sous la direction de Prony avait été décidée en 1794. « Comme on voulait donner à tout ce qui était relatif au système métrique français un caractère de grandeur qui excitât l'attention, on m'engagea expressément, dit Prony, non seulement à composer des Tables qui ne laissassent rien à désirer quant à l'exactitude, mais à en faire le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui eût jamais été exécuté ou même conçu. » On se mit donc à l'œuvre : à la tête, cinq ou six des plus habiles géomètres, chargés de préparer les formules; puis, sept ou huit calculateurs exercés, chargés de fournir les nombres et les différences successives qui devaient former les points de départ et d'arrivée

des intervalles; enfin, 70 ou 80 calculateurs ordinaires, qui n'avaient plus qu'à remplir les intervalles, à l'aide des différences, dont la dernière est constante.

Les calculs ont été faits en double, par deux séries de calculateurs travaillant séparément. Les deux manuscrits forment chacun 17 volumes in-folio; l'un est à l'Observatoire de Paris, l'autre à la bibliothèque de l'Institut, qui l'a reçu, en 1858, des héritiers de Prony. Ils renferment:

1° Les logarithmes des nombres, de 1 à 200000, avec 14 décimales, et ceux des 10000 premiers nombres, avec 19 décimales;

2° Les valeurs naturelles des sinus, pour chaque dix-millième du quadrant, avec 22 décimales;

3° Les logarithmes des rapports des arcs aux sinus et des arcs aux tangentes, pour chaque cent-millième du quadrant, depuis 0^{e} jusqu'à $0^{\text{e}},05$, avec 14 décimales;

4° Les logarithmes des sinus et des tangentes, pour chaque cent-millième du quadrant, depuis 0^{e} jusqu'à 1^{e} , avec 14 décimales.

Ces Tables devaient être publiées avec 12 décimales, et avec trois colonnes de différences. L'impression en avait été décidée, et le traité conclu avec Firmin Didot, pour une édition stéréotype, qui aurait renfermé 1200 pages in-folio. Déjà les deux tiers de la composition étaient achevés, et 100 planches stéréotypées, lorsque la dépréciation du papier et la monnaie fit abandonner l'entreprise. Il n'en reste que quelques épreuves de la Table des sinus naturels. D'après de Morgan, en 1820, le gouvernement anglais proposa au Bureau des Longitudes de reprendre l'impression du recueil, à frais communs, en offrant d'y contribuer pour une somme de 5000 livres sterling; mais la proposition fut déclinée.

C'est l'exemplaire manuscrit de l'Observatoire qui a servi à former les Tables à huit décimales que vient de publier le Service géographique de l'armée, et qui constituent un chef-d'œuvre de typographie. On a pensé, avec raison, que l'exécution matérielle devait être à la hauteur des efforts et des soins consacrés à l'établissement de ces belles Tables.

La disposition qui a été adoptée, après de longs tâtonnements, est éminemment propre à faciliter la recherche des logarithmes, et nous ne nous plaindrons pas de la grandeur du format, qui a permis d'employer des caractères forts et de faire régner dans ces innombrables colonnes de chiffres une clarté qui réjouit les yeux. Il n'est pas jusqu'à la teinte du papier, légèrement coloré en jaune, qui ne contribue à diminuer la fatigue du calculateur.

Les logarithmes des nombres sont donnés de 1 à 1000, puis de 10000 à 120000; chaque page contient 500 logarithmes, avec tableaux des parties proportionnelles. Viennent ensuite les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, de 10 secondes en 10 secondes centési-

males; en d'autres termes, pour chaque cent-millième du quadrant ($3'',24$). L'intervalle est donc trois fois plus petit que dans les Tables ordinaires à sept décimales. Chaque page correspond à un quart de grade; au verso, les sinus et les cosinus; en face, au recto, les tangentes et les cotangentes. Dans les cinq premiers grades, on a donné les logarithmes des rapports $\frac{\sin x}{x}$ et $\frac{\tan x}{x}$, qui sont plus faciles à interpoler. Mentionnons enfin deux petites Tables, pour la conversion des logarithmes naturels en logarithmes vulgaires, des logarithmes vulgaires en logarithmes naturels, des degrés en grades et des grades en degrés.

On avait déjà des Tables trigonométriques, faites pour la division décimale du cercle : celles de Borda, publiées par Delambre en 1800; celles de Hobert et Ideler (1799), etc. Mais ce sont des Tables à sept décimales, et l'intervalle adopté est le dix-millième du quadrant ($32'',4$), sauf pour les trois premiers grades. On avait, d'autre part, des Tables à huit décimales : celles de John Newton (1658); mais ici l'intervalle est le centième de degré ($36''$); il est beaucoup trop grand.

On sait que Briggs, dans la *Trigonometria Britannica* (1633), avait également donné les logarithmes des sinus et des tangentes de centième en centième de degré; malheureusement la publication simultanée de la *Trigonometria artificialis* de Vlacq, où les intervalles sont plus rapprochés ($10''$ au lieu de $36''$), empêcha la division décimale du degré de prévaloir dans la pratique des astronomes. Si Vlacq eût adopté le millième de degré ($3'',6$), nul doute que la réforme imaginée par Briggs n'eût été universellement acceptée, et la division sexagésimale du degré, qui est, à vrai dire, une aberration, une inconséquence monstrueuse avec nos habitudes décimales, n'existerait plus depuis plus de deux siècles.

Serait-il encore possible de revenir à la réforme si malencontreusement arrêtée, ou plutôt de la compléter, en appliquant la division décimale, suivant le conseil de Lagrange, directement au quart de la circonférence? Borda, qui regardait la nouvelle division du cercle comme le complément indispensable de la grande réforme du système des poids et mesures, s'était empressé de l'introduire dans les instruments que l'on construisait pour la mesure de la méridienne de France, et de faire calculer, en même temps, les *Tables trigonométriques décimales*. La Commission royale, instituée en 1807, sous la présidence de Laplace, pour fixer les règles d'exécution de la triangulation générale de la France, confiée au Dépôt de la Guerre, n'hésita pas à prescrire l'emploi de la nouvelle division dans les méthodes d'observation et de calcul. Depuis lors, la graduation décimale du quart de la circonférence n'a pas cessé d'être appliquée par les géodésiens français. L'expérience en a consacré les avantages et démontré définitivement la supériorité sur la division sexagési-

male, aussi bien dans les instruments que dans la pratique des calculs. Comment se fait-il qu'en dehors de ce cercle restreint de fidèles réformateurs de Borda ait été si peu acceptée ? Laplace l'avait cependant introduite dans sa *Mécanique céleste* ; Biot, Le Verrier, d'autres encore l'ont adoptée à l'occasion. C'est qu'elle se heurte à la force de l'habitude. M. Houël, en recommandant vivement, il y a vingt-cinq ans, l'introduction de la division décimale du cercle, croit prudent d'ajouter qu'il ne propose nullement l'extension de la réforme aux calculs d'Astronomie pratique, non plus qu'aux Cartes célestes ou géographiques. « Quels que soient les avantages du système décimal, dit-il, ils ne seront jamais assez importants pour compenser les inconvénients qu'entraîneraient le bouleversement total des habitudes des astronomes et la refonte d'une aussi énorme masse de documents. Mais pour tous les calculs autres que les calculs immédiats des observations astronomiques et nautiques la division décimale ne présente que des avantages.... »

De son côté, M. Glaisher, dans son Rapport à l'Association britannique, présenté au nom de la Commission des Tables mathématiques (1873), borne ses vœux à l'adoption de la division décimale du degré ordinaire, inaugurée par Briggs (1) ; « car il faut tenir pour certain que la grandeur du degré ne sera jamais changée. » Selon M. Glaisher, le centième du quadrant est une unité tout aussi arbitraire que le degré nonagésimal, et la substitution de l'un à l'autre n'aurait que des inconvénients, tandis que la division décimale du degré, en nous débarrassant des minutes et secondes, nous procurerait tous les avantages d'un véritable système décimal. Nous ne sommes pas de cet avis. Il nous semble que le quart de la circonférence, pris comme unité, doit être préféré, dès qu'on dépasse 90° , comme dans tous les calculs de Géodésie et de Mécanique céleste. Tous ceux qui ont fait l'essai de la division naturelle du quadrant y ont trouvé des avantages marqués, et notamment une réelle économie de temps, et, conséquence forcée, une diminution des erreurs de calcul. On exagère évidemment les difficultés que rencontrerait l'adoption générale de la réforme. L'invasion irrésistible de la photographie dans la pratique astronomique nous semble, au contraire, appeler d'autres réformes urgentes, et qu'elle rendrait singulièrement faciles. On peut d'ailleurs constater l'existence d'un courant d'opinion, favorable à l'adoption de la division décimale, et la diffusion de Tables logarithmiques appropriées ne peut que hâter le triomphe des partisans de la réforme.

(1) Elle avait été déjà recommandée par Simon Stevin, dans son *Traité de la Disme* (1585).

Il est permis d'espérer que les Tables que vient de publier le Service géographique de l'armée (anciennement Dépôt de la Guerre) contribueront beaucoup à cet heureux résultat. On n'a rien négligé pour en assurer la rigoureuse exactitude. Voici comment s'est faite la correction des épreuves et la vérification des logarithmes : « Sur des tableaux conformes à l'impression, on a d'abord pris copie des Tables du cadastre en les réduisant à huit décimales : cette copie a servi à la composition. Les premières épreuves ont été collationnées en double, d'une manière indépendante, sur le manuscrit même de Prony, par deux groupes de lecteurs; les corrections, relevées par chacun de ces groupes, étaient ensuite contrôlées par un calculateur. Lorsqu'on avait obtenu une épreuve sans faute, identique alors à ce manuscrit, on procédait au clichage. Chaque page clichée a donné lieu aux vérifications suivantes : 1° Sur chaque colonne verticale, on a fait la somme des logarithmes, par groupes de cinq; les sommes, ainsi obtenues, étant relevées dans le sens horizontal et transcrites les unes au-dessous des autres par groupes de dix, on formait leurs différences successives; ces différences, dans chaque groupe, devaient être identiques à deux ou trois unités près du dernier chiffre, l'écart maximum ne pouvant dépasser cinq unités; cette opération avait spécialement pour objet de mettre en évidence les erreurs de chiffres qui auraient pu se trouver dans le corps même des logarithmes. 2° On a formé les différences successives des logarithmes eux-mêmes en les suivant dans l'ordre horizontal; ces différences devaient être constantes à une unité près du dernier chiffre pour chaque ligne horizontale, et croître ou décroître d'une façon continue du haut au bas de la page. Dans les lignes trigonométriques, pour les tangentes et les cotangentes inscrites sur la même page, les deux modes de vérification doivent en outre donner des nombres identiques pour les arcs qui sont complémentaires l'un de l'autre. Ces divers contrôles ont permis de relever un petit nombre de fautes qui existaient dans le manuscrit de l'Observatoire; ils étaient donc nécessaires. » Ces vérifications ont été faites successivement par MM. de Villedeuil et L'Hôpital, calculateurs.

Les caractères employés sont d'un type nouveau, créé par l'Imprimerie nationale pour cet ouvrage (chiffres inégaux). Les logarithmes approchés par excès sont suivis d'un point; indication discrète qui nous paraît préférable aux chiffres soulignés de Schrön. Disons, pour terminer, que les caractéristiques négatives ont été substituées aux caractéristiques positives complémentaires.

En résumé, la publication de ces Tables constitue un réel progrès; elle a mérité au Service géographique la reconnaissance du monde savant.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

t. CXII, n° 1-10.

Vaux (G. de). — Sur l'état actuel des pyramides élevées aux extrémités de la base boréale de l'arc du Pérou.

Moureaux (Th.). — Sur la valeur absolue des éléments magnétiques au 1^{er} janvier 1891.

	Parc Saint-Maur.		Perpignan.	
	Valeurs abs. 1 ^{er} janv. 1891.	Var. séc. en 1890.	Valeurs abs. 1 ^{er} janv. 1891.	Var. séc. en 1890.
Déclinaison.....	15.35,9	—5,5	14.24,1	—4,9
Inclinaison.....	65.10,6	—1,6	60.16,2	—2,3
Comp. horizontale...	0,19554	+0,00030	0,22242	+0,00037
Comp. verticale.....	0,42272	+0,00011	0,38947	+0,00004
Force totale.....	0,46576	+0,00023	0,44850	+0,00021

Faye (H.). — Sur l'hypothèse du sphéroïde et sur la formation de la croûte terrestre.

Toutes les mesures géodésiques concourent à montrer que la Terre est actuellement un ellipsoïde de révolution, comme elle devait l'être à l'origine. Cette conservation de la forme primitive tient aux compensations qui se sont produites, par suite de ce fait que, à toutes les époques, le refroidissement du globe terrestre va plus vite et plus profondément sous les mers que sous les continents. L'observation montre, en effet, que la température décroît verticalement dans les océans, tandis qu'elle croît rapidement sous les continents. Le jeu de compensation qui résulte de là explique et complète la théorie des soulèvements en Géologie et rend compte de diverses anomalies qui se présentent dans la détermination de l'intensité de la pesanteur.

Tacchini (P.). — Résumé des observations solaires faites à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le second semestre de 1890.

Marchand (Ed.). — Observations des taches solaires faites, en 1890, à l'équatorial Brunner (0^m, 18) de l'Observatoire de Lyon.

Phillips. — Pendule isochrone.

Au moment de sa mort, M. Phillips venait de mettre la dernière main à un Mémoire sur la réalisation de l'isochronisme du pendule, isochronisme qu'il obtenait en reliant, par une bielle, un point de la tige du pendule à l'extrémité libre d'un ressort prismatique dont l'autre extrémité est fixe. Cette Note est un extrait du Mémoire où la théorie de ce système est étudiée en détail. M. Wolf y a joint deux Tableaux résumant diverses expériences et qui montrent que l'on peut obtenir, par le procédé de M. Phillips, un isochronisme à peu près parfait.

Gonnessiat (F.). — Sur l'équation personnelle dans les observations de passages.

L'étude de cette équation a été faite avec un appareil analogue à celui qui est en usage à l'Observatoire de Greenwich, mais complété de façon à donner des vitesses au moins dix fois plus faibles; les instruments employés, au nombre de deux, avaient respectivement les ouvertures de 57^{mm} et de 135^{mm} . Dans cette étude on a fait varier successivement un grand nombre de conditions : sens du mouvement, méthode d'enregistrement, éclat des étoiles, diamètre des planètes, etc. L'auteur, qui a une équation personnelle assez forte ($-0^{\circ},30$), conclut que la méthode électrique d'enregistrement présente une supériorité marquée sur la méthode de l'œil et de l'oreille; toutefois cette dernière donne de meilleurs résultats quand on emploie une unité de temps plus courte que 1^r et en outre l'équation personnelle s'abaisse de $-0^{\circ},30$ à $-0^{\circ},11$.

Defforges (G.). — Sur la résistance opposée par l'air au mouvement d'un pendule.

Defforges (G.). — Sur la résistance de divers gaz au mouvement d'un pendule.

On sait, depuis les expériences de du Buat (1786) qu'un corps en mouvement dans un fluide entraîne une partie du fluide environnant, de telle sorte que la poussée hydrostatique semble accrue pendant le mouvement. Le facteur d'accroissement de cette poussée varie avec la forme du pendule, avec la nature du fluide et avec sa pression. M. Defforges détermine, pour les pendules Brunner employés par le Service géographique de l'armée, la loi de variation de la durée d'oscillation et de l'amplitude, en fonction de la pression du fluide environnant. Dans la seconde Note il étudie l'influence de la nature de ce fluide en

employant successivement l'air, l'acide carbonique, l'oxygène et l'hydrogène.

www.libtool.com.cn

Semmola (Eugène). — Sur la pression barométrique à Naples, à des altitudes différentes.

Moureaux. — Variation magnétique pendant le tremblement de terre du 15 janvier 1891 en Algérie.

La courbe du magnétographe du Parc Saint-Maur porte la trace d'un trouble particulier à peu près à l'heure où avait lieu un tremblement de terre dans le voisinage de Cherchell.

Lippmann (G.). — La photographie des couleurs.

Exposition du très remarquable procédé physique par lequel M. Lippmann a reproduit photographiquement les couleurs de la lumière.

Derrécaigaix (général). — Sur une Table de logarithmes centésimaux à huit décimales.

Ce Recueil, magnifiquement imprimé sur beau papier par l'Imprimerie nationale, contient les logarithmes des fonctions circulaires (dans le système de la division centésimale du quadrant) et ceux des nombres entiers de 1 à 120000, tous avec huit décimales. Ces Tables sont un extrait vérifié des Tables manuscrites de Prony, dont l'impression, interrompue au moment de la dépréciation du papier monnaie, fut sur le point d'être reprise en 1820 à frais communs par les gouvernements anglais et français.

Tacchini (P.). — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le second semestre de 1890.

Pendant l'année 1890, comme en 1889, les protubérances ont toujours été plus fréquentes dans l'hémisphère austral, et le maximum de fréquence s'est maintenu dans la zone -40° à -50° de latitude héliocentrique.

Léotard (J.). — Remarques sur la température à Marseille.

Leveau (Gustave). — Détermination de la masse de Mars et de

la masse de Jupiter par les observations méridiennes de Vesta.

Dans les Tables de Vesta, construites à l'aide de la théorie exposée par M. Leveau dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, cet astronome a adopté pour les masses de Mars et de Jupiter les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{3093500} \text{ (Hall), } \quad \frac{1}{1050} \text{ (Le Verrier).}$$

Il a comparé ensuite à la théorie les 5000 observations méridiennes de cette planète faites de 1807 à 1888 pour en déduire les corrections à apporter aux éléments qui ont servi de point de départ. En introduisant dans les équations deux nouvelles inconnues, deux termes dépendant des corrections à apporter à la masse de Mars et de celle de Jupiter, il a obtenu pour ces masses $\frac{1}{3700000}$ et $\frac{1}{1045,6}$, c'est-à-dire des corrections respectivement égales à $-0,165$ et $+0,0042$. L'addition des termes nécessaires pour tenir compte de l'influence séculaire des petites planètes ne modifie pas sensiblement les résidus, de sorte qu'il n'en sera pas tenu compte dans la formation des Tables définitives.

Pour la masse de Jupiter, la correction concorde avec les déterminations récentes. Pour Mars, la forte correction ainsi obtenue est presque identique à celle que M. Airy a déduite autrefois de la discussion des observations méridiennes du Soleil (*Phil. Trans.*, 1828, et *Month. Not.*, 1878, p. 140), discussion qui donna également la masse de la Lune adoptée aujourd'hui et, pour l'équation lunaire, des coefficients sensiblement égaux à ceux obtenus plus tard par Le Verrier.

Wolf (Rad.). — Histoire de l'appareil Ibañez-Brunner.

Réclamation de priorité en faveur de Tralles, qui aurait, le premier, dans la mesure des bases, substitué le contact optique au contact réel des règles portées bout à bout.

Laussedat (A.). — Histoire des appareils à mesurer les bases.

L'idée de la substitution du contact optique au contact réel est due à d'Aubuisson de Voisins, qui employait une règle unique à traits transportée successivement entre des repères disposés à l'avance sur l'alignement de la base à mesurer. Pour plus de détails, M. Laussedat renvoie à une de ses Notes insérées antérieurement au tome XCI (1886) des *Comptes rendus*, p. 922.

Wolf (Rod.). — Sur la statistique solaire de l'année 1890.

Le parallélisme des taches solaires et des variations magnétiques se maintient toujours et montre que l'époque du minimum des taches doit tomber à la fin de 1889 ou au commencement de 1890.

Henry (Prosper). — Sur une méthode de mesure de la dispersion atmosphérique.

On connaît, depuis Fraunhofer, les effets d'un réseau placé en avant d'un objectif. Supposons le plan de ce réseau perpendiculaire à l'axe optique, ses lignes étant dans le plan vertical qui passe par cet axe. Si, avec ce système, on examine un point lumineux non affecté par la réfraction astronomique, au foyer de la lunette on voit une image centrale du point, et, de part et d'autre de cette image, une série de spectres linéaires horizontaux. Si le point examiné est une étoile, dont les différentes radiations sont déviées verticalement, on obtient une courbe spectrale sur laquelle il est facile de mesurer la variation de la réfraction en passant d'une radiation à une autre. Le réseau employé par M. Henry est un carton que l'on trouve dans le commerce sous le nom de *bristol perforé*. A la distance zénithale de 45°, les Tables ordinaires donnent pour la réfraction la valeur 58°,22, valeur qui se rapporte à la longueur d'onde des rayons les plus brillants du spectre ($\lambda = 0\mu,575$). Partant de là, M. Henry trouve, pour l'expression générale de la réfraction à 45° de distance zénithale et en fonction de λ :

$$A = 56^{\circ},55 + \frac{0^{\circ},726}{\lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour les rayons chimiques d'intensité maxima ($\lambda = 0\mu,430$) cette formule donne $A = 59^{\circ},13$: il faudra donc, pour calculer la réfraction photographique en partant de la réfraction ordinaire, ajouter à cette dernière $59,13 - 58,22$ ou 0,9156 de sa valeur.

D'après cela le *rayon vert*, qui est la limite du spectre du Soleil à l'horizon, doit, dans nos latitudes, persister une seconde environ après la disparition du rayon jaune.

Deslandres (H.). — Sur le spectre de α Lyre.

M. Fowler a annoncé récemment le dédoublement périodique de la raie K du calcium dans le spectre de α Lyre. Ce fait a été mis en doute par M. Pickering et par M. Vogel. De son côté, M. Deslandres a obtenu le spectre de la même étoile au même moment où a été obtenu celui sur lequel se fonde principalement M. Fowler, le 8 octobre 1890; et dans

Le spectre de M. Deslandres la raie K est simple : les conclusions tirées par M. Fowler du dédoublement de la raie K manquent donc complètement de base.

Farchand (Em.). — Observations des facules solaires, faites en 1889 et 1890 à l'équatorial Brunner (0^m, 18) de l'Observatoire de Lyon.

Elles placent le minimum d'activité solaire en novembre 1889 et elles montrent que la distribution en latitude des régions d'activité change complètement vers le moment du minimum : c'est l'hémisphère sud qui est le plus riche en régions actives jusqu'au minimum, et c'est au contraire l'hémisphère nord après le minimum.

Wolf (C.). — Mémoires sur le pendule (tome II).

Le *Bulletin* (VI, p. 541, et VII, p. 214) a fait connaître le premier volume consacré par M. Wolf à la bibliographie et à l'historique des travaux sur le pendule. Le second, qui vient de paraître, contient les traductions de la fin du Mémoire de Bessel sur la longueur du pendule simple à Königsberg, le très important travail du même auteur sur la force avec laquelle la Terre attire les corps de différente nature, et la Note de Bessel sur la construction du pendule symétrique à axes réciproques, qui a été l'origine de l'appareil aujourd'hui universellement employé pour la mesure de l'intensité de la pesanteur. Les autres Mémoires sont relatifs à la question de la résistance du milieu.

Mouchez. — Observations de petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année 1890.

Ces observations ont été faites par M. Callandreau.

Bigourdan (G.). — Sur une nébuleuse variable.

La nébuleuse 1186 N. G. C. trouvée par W. Herschel en 1785, revue par J. Herschel en 1831, a été cherchée en vain à Birr Castle en 1854 et 1864, et par D'Arrest en 1863. Or aujourd'hui cette nébuleuse est visible à la place indiquée par les deux Herschel : sa variabilité est donc probable et il serait intéressant de la photographier.

Savief. — Résultats des observations actinométriques faites à Kiel (Russie) en 1890.

Montessus de. — Sur la répartition saisonnière des séismes.

Le www.libtoogl.com.cn astronomiques n'ont aucune relation avec les séismes, il paraît en être de même pour les saisons météorologiques; toutefois, pour elles, l'auteur réserve sa conclusion.

Vénoukoff. — De la mesure du cinquante-deuxième parallèle en Europe.

Ce parallèle se trouve actuellement mesuré sur une longueur de 69°. 5 depuis Valencia en Irlande jusqu'à Orsk sur les confins de l'Asie. En comparant la longueur de diverses parties de ce parallèle, on voit que ce parallèle n'est pas un cercle et que la longueur de 1° n'est pas la même dans les diverses parties de l'Europe, de sorte que la Terre n'est pas un ellipsoïde de révolution.

Comète Brooks 1890 II. — Observations par Picart, Rayet.

Comète Zona. — Observations par Picart, Rayet.

Planète Charlois (11 février 1891). — Observations par Baillaud, Charlois, M^{lle} Klumpke.

Planète Charlois (16 février 1891). — Observations par Charlois.

Planète Millosevich (1^{er} mars 1891). — Observations par M^{lle} Klumpke.

Planète Charlois (5 mars 1891). — Observations par Andoyer, Baillaud, Cosserat et Charlois.

G. B.

COMPTE RENDU DES SÉANCES DE LA NEUVIÈME CONFÉRENCE GÉNÉRALE DE L'ASSOCIATION GÉODÉSIQUE INTERNATIONALE ET DE SA COMMISSION PERMANENTE, RÉUNIES A PARIS DU 3 AU 12 OCTOBRE 1889, RÉDIGÉS PAR LE SECRÉTAIRE PÉPETUEL A. HIRSCH, AVEC LES RAPPORTS SPÉCIAUX SUR LES PROGRES DE LA MESURE DE LA TERRE ET LES RAPPORTS DES DÉLÉGUÉS DES ÉTATS (in-4° avec 14 Cartes et planches).

Les séances de l'Association géodésique internationale ont offert un grand intérêt. Un événement important a été l'entrée de nouveaux États, et en particulier des États-Unis d'Amérique, dans l'Association, de sorte qu'elle s'étend maintenant sur presque toutes les parties du globe ter-

restre. Le Président du comité permanent, général Ibañez, avait proposé M. Faye comme président pendant la session et comme vice-présidents MM. Foerster et Van de Sande Bakhuyzen, directeurs des Observatoires de Berlin et de Leyde.

Avant d'indiquer le contenu des principaux Rapports, nous donnerons quelques extraits des procès-verbaux :

« M. le général Ferrero (Italie) fait remarquer la coïncidence des erreurs moyennes dans toutes les triangulations des différents pays, coïncidence qui prouve en même temps l'uniformité des méthodes employées et la conscience scientifique avec laquelle les travaux sont accomplis. Ces résultats excellents engagent le rapporteur à exprimer le vœu d'avoir à sa disposition des données plus complètes pour étudier la loi de distribution des erreurs d'observation. Il donne lecture des nombres obtenus avec à peu près 3000 triangles du cadastre italien. Les erreurs de clôture, distribuées selon leur grandeur, présentent le contrôle le plus remarquable de la loi des erreurs de Gauss.

Le général Ferrero termine son Rapport en constatant le résultat obtenu par la jonction des triangulations française et italienne par les Alpes maritimes. L'immense polygone trigonométrique qui entoure le bassin occidental de la Méditerranée est fermé par une chaîne continue. Il est facile d'entrevoir les conséquences importantes qu'on peut espérer obtenir en combinant les observations géodésiques et astronomiques le long d'un périmètre formé de plus de 4000^{km}. Le rapporteur parle encore de l'arc de parallèle de plus de 39°, s'étendant du cap Finistère, en Espagne, jusqu'à l'embouchure du Dniester dans la mer Noire. Il exprime enfin le vœu de pouvoir, en commun avec les géodésiens français, réunir la Sardaigne au continent, en passant par la Corse. Et, si l'Angleterre ne reste pas définitivement étrangère aux travaux de l'Association, M. le général Ferrero émet également le vœu de voir s'exécuter la jonction trigonométrique de la Sicile avec l'île de Malte.

M. Cornu rappelle l'étude faite par lui, en 1874, des erreurs d'un chronographe enregistreur : elle offre également un cas où l'on détermine les *erreurs absolues* et non pas seulement les écarts avec une moyenne dont la précision est incertaine. Dans ces déterminations, bien différentes des mesures angulaires, la loi de fréquence des erreurs a été aussi la loi de Gauss [*Mémoire sur la détermination de la vitesse de la lumière* (*Annales de l'Observatoire de Paris; Mémoires*, t. XIII)].

« M. le colonel Bassot lit son Rapport sur les *mesures des bases*. Il en résulte que, depuis 1887, on a mesuré 5 nouvelles bases, dont 1 en Russie, 2 aux États-Unis d'Amérique et 2 au cap de Bonne-Espérance. M. le colonel Bassot fait remarquer la longueur des bases américaines, qu'on a poussée jusqu'à 17^{km}, ainsi que la rapidité avec laquelle ces bases

ont été mesurées. Dans son opinion, les mesures directes de ces longues bases, en raison de la haute précision des appareils modernes, fournissent des résultats plus exacts que ceux qu'on peut obtenir avec des bases de petites dimensions, qu'on agrandit ensuite par un réseau de triangles -

M. le colonel Bassot constate que le nombre total des bases géodésiques mesurées s'élève à 130. Il insiste, en terminant, pour que les États qui n'ont pas encore fait étalonner leurs appareils de base, les envoient au Bureau international des Poids et Mesures, pour que leurs constantes y soient déterminées. »

Les nivellements de précision (rapporteur M. V. Kalmár) ont fait l'objet des propositions suivantes du rapporteur :

« La Conférence recommande de nouveau aux directeurs des nivellements dans les différents pays de faire opérer, là où elles manquent encore, les jonctions de leurs réseaux avec ceux des pays voisins, au moins en trois points limitrophes s'il est possible, et de diriger les opérations et les calculs de façon à pouvoir déterminer le plus tôt possible les cotes des repères de jonction par rapport au plan fondamental choisi dans chaque pays.

» Afin de pouvoir procéder au choix du niveau fondamental unique pour toute l'hypsométrie de l'Europe, la Conférence émet le vœu que, dans les États situés sur les bords de la Baltique, de la mer du Nord, de l'Océan Atlantique, de la Méditerranée et de l'Adriatique, on fasse tous les efforts pour établir, au moins dans les ports principaux, le niveau moyen de la mer ainsi que ses oscillations, et pour terminer les lignes de nivellement qui réunissent les ports entre eux.

» Afin d'obtenir la comparaison des niveaux moyens des différentes mers d'Europe, aussi indépendants que possible des variations de la pesanteur, M. V. Kalmár exprime le vœu que, dans les pays maritimes, outre les jonctions déjà exécutées entre les mers qui les entourent, on complète les lignes doubles (c'est-à-dire nivelées deux fois, à l'aller et au retour) qui existent déjà le long des côtes, par des opérations polygonales, de manière que les différences de niveau entre les maréographes et les échelles placées le long de toutes les côtes puissent être déduites aussi sans passer sur des hauteurs trop considérables. »

Suivent encore quelques recommandations que nous omettons pour donner des extraits du Rapport de M. le général marquis de Mulhacén sur les maréographes.

« On peut constater un grand progrès dans le nombre des maréographes installés dans l'Europe continentale, puisqu'en 1883, lors du dernier Rapport, ils n'atteignaient que le chiffre de 38, tandis qu'à présent leur nombre total est de 93 (avec des stations météorologiques à proximité). Lorsqu'ils seront tous reliés entre eux, ils suffiront sans doute pour

étudier l'hypsométrie générale de l'Europe; mais, malgré tout, l'opinion de la Commission permanente est que le moment n'est pas encore venu de résoudre la question du zéro commun. »

M. le commandant Defforges a fait, à Breteuil, une étude complète de l'influence de la pression du fluide environnant sur la durée d'oscillation d'un pendule.

Ces expériences ont démontré : 1° que la variation de la durée d'oscillation suit bien une loi proportionnelle à la fois à la pression et à la racine carrée de la pression; 2° que les coefficients restent bien les mêmes pour un pendule réversible symétrique, quand on passe d'un couteau à l'autre. Les expériences de Breteuil ont été refaites sur un plan plus large et complétées en ce qui concerne l'air, à Paris et à Dunkerque. M. le commandant Defforges se propose d'étendre ces recherches à différents gaz, notamment à l'acide carbonique et à l'hydrogène (voir les Communications faites récemment dans les *Comptes rendus*, 26 janvier et 16 février).

M. Tisserand donne un court résumé d'un Mémoire sur les diverses méthodes employées à la détermination de l'aplatissement. M. Roche avait appelé l'attention sur la contradiction qui existe entre l'aplatissement de Clarke et celui que l'on peut déduire de la théorie de la précession, en faisant intervenir la théorie de Clairaut; comme l'ont montré des travaux récents, cette contradiction subsiste, quelle que soit la loi inconnue des densités dans l'intérieur de la Terre. Il n'est pas probable d'ailleurs que des corrections admissibles dans les constantes de la précession et de la nutation puissent rétablir entièrement l'accord. M. Tisserand discute ensuite la méthode employée par Clarke et ses devanciers, et il est amené à penser que cette méthode et les données sur lesquelles elle s'appuie ne sont pas actuellement assez précises pour que l'on puisse affirmer dès à présent le désaccord réel entre les deux aplatissements. La conclusion que M. Roche a tirée, relativement à l'état solide d'une partie notable du globe, semble donc au moins prématurée.

A l'occasion d'une Communication de M. Davidson, délégué des États-Unis, concernant les différents travaux exécutés sur l'immense territoire des États-Unis par le *Coast and Geodetic Survey*, M. Faye fait savoir que les négociations engagées, il y a quelques années, entre le Président actuel de la République de l'Équateur et quelques Membres de l'Académie et du Bureau des Longitudes, relativement à une nouvelle mesure de l'arc du Pérou, mesuré au siècle dernier, par les géodésiens français, pourront aboutir prochainement, de sorte que la France serait en mesure d'entreprendre cette nouvelle opération.

Le Rapport sur les longitudes, latitudes et azimuts par M. H.-G. van de Sande Bakhuyzen, inséré dans les Annexes, parle d'une discussion

approfondie et très remarquable de M. le professeur Löw, de Berlin sur les déterminations de latitudes exécutées par le Bureau central, sur les erreurs systématiques de ces latitudes, déterminées par des hauteurs circumméridiennes et par les hauteurs de la Polaire. Il a trouvé qu'en faisant le pointé au moment de la bissection de l'étoile par un fil il y a une différence assez grande, qui va jusqu'à plus de $2^{\text{r}},5$ entre les latitudes déduites des hauteurs de l'étoile avant et après son passage méridien; en d'autres termes, il trouve des valeurs différentes de la latitude, en se servant de la hauteur d'une étoile quand cette hauteur croît et quand elle décroît.

D'après des expériences multipliées qu'il a faites à Leyde, M. van Sande Bakhuyzen est porté à croire que la différence peut venir d'une torsion de l'axe, la vis de rappel agissant dans deux sens opposés quand la hauteur de l'étoile croît et quand elle décroît.

M. Helmert, Directeur du Bureau central de l'Association, constate dans son Rapport *sur les déviations de la verticale* que, dans le courant des dernières années, nos connaissances sur la marche des déviations se sont considérablement enrichies. Avant tout, il faut mentionner un grand travail que les géodésiens russes ont accompli sur 40 stations en Bulgarie; en outre, on a exécuté des recherches locales en Finlande, en Suisse, dans l'Allemagne du Nord, dans l'Afrique du Sud et dans les îles Sandwich. Les observations faites dans les îles Sandwich promettent de fournir des renseignements sur les densités des volcans, à diverses périodes de leur développement. Les volcans éteints, comme le Hakkala, ont montré sur le pendule et le fil à plomb une attraction correspondante à leur forme extérieure, tandis que ceux qui sont encore en activité semblent posséder un défaut de masse.

Un calcul étendu, que l'on a entrepris au Bureau central, pour comparer les mesures de degrés de latitude russo-scandinave avec l'arc anglo-français, au moyen des triangulations française, belge, allemande et russe, a fourni un résultat remarquable: les déviations de la verticale en latitude, dans le système anglo-français, par rapport à l'ellipsoïde de Clarke, deviennent toutes positives, étant augmentées de 4^{r} environ. Ce fait indique des anomalies très étendues du géoïde. Mais M. Helmert est d'avis qu'on ne se presse pas de chercher un autre ellipsoïde s'autant mieux à toutes les mesures existantes; on se rendra mieux compte des anomalies de la figure de la Terre en conservant la même surface en comparaison.

Un autre Rapport de M. Helmert *sur les déterminations de la pesanteur par le pendule* complète le Tableau statistique présenté à la Conférence dans sa session de 1887, à Nice. On a établi un assez grand nombre de stations, surtout en France et en Autriche; de même

Russie, les observations du pendule se poursuivent sur une grande échelle.

Une bonne partie des mesures ont pour but d'étudier l'influence de l'altitude sur l'intensité de la pesanteur. En général, il semble que le fait constaté déjà autrefois se confirme, savoir que l'attraction des masses continentales est en grande partie compensée par des vides souterrains. Par contre, l'effet d'attraction des masses relativement faibles des montagnes se fait sentir ordinairement avec évidence.

La majeure partie du Volume que nous avons sous les yeux est, bien entendu, consacrée aux Rapports des délégués des différents États.

Les extraits des Procès-Verbaux et des Rapports spéciaux que nous avons reproduits suffisent à donner l'idée la plus haute de la grande œuvre poursuivie par l'Association géodésique internationale. Comme le disait le Président, M. Faye, à la fin de son discours d'ouverture, la Géométrie, la Mécanique générale, la Physique terrestre y sont interversées aussi bien que les travaux publics, l'armée et la marine.

DEFFORGES (le commandant). — SUR L'INTENSITÉ ABSOLUE DE LA PESANTEUR. (Extrait du *Journal de Physique* et du *Bulletin de la Société française de Physique*, 1888. Paris, Gauthier-Villars et fils, 53 p. in-8°.)

Exposition des recherches du commandant Defforges (*Bulletin*, V, 160) ayant pour but d'éliminer, par l'emploi de deux pendules réversibles convenablement disposés, l'effet du support et celui du rayon de courbure des couteaux.

Nous avons cru devoir signaler cette exposition de travaux importants et sur lesquels il n'avait été donné dans les *Comptes rendus* que de courtes indications.

BONSDORFF (A.). — HERLEITUNG EINER FORMEL ZUR BERECHNUNG VON PARALLELBOGEN DES ERDELLIPSOÏDES. (*Mélanges mathématiques et astronomiques*, t. VII. Saint-Pétersbourg.)

On considère dans les formules ordinaires de la Géodésie le triangle formé par la ligne géodésique de l'ellipsoïde qui joint deux points très rapprochés par leurs méridiens, et l'on développe suivant les puissances des petites quantités : excentricité de l'ellipsoïde et rapport de l'arc géodésique au rayon terrestre (Tisserand, *Méc. céleste*, II, 340). En vue du calcul du grand arc du cinquante-deuxième parallèle, de Orsk à

Bulletin astronomique, T. VIII. (Avril 1891.)

Valentia, l'auteur fait connaître une formule qui donne facilement la longueur linéaire de l'arc de parallèle, quelle que soit la longueur de l'arc géodésique, et cela indépendamment de l'azimut.

NOBILE (A.). — RIFLESSIONI GEODETICHE. (Napoli, 1889, 13 p., gr. in-4°.)

Dans le premier paragraphe : *Combinaison d'arcs spéciaux pour obtenir les éléments de l'ellipsoïde terrestre*, l'auteur montre comment, par la combinaison de *petits* arcs de méridien dans les latitudes moyennes et vers l'équateur, on peut déterminer simplement la figure elliptique du méridien considéré, et, par la comparaison avec les autres, savoir si le sphéroïde terrestre est de révolution ou se rapproche plutôt d'un ellipsoïde à trois arcs.

Le second paragraphe a pour objet de montrer comment on peut déterminer l'aplatissement terrestre et le rapport $\frac{\alpha}{\Delta}$ parallaxe horizontale (ou même α et Δ) sans faire intervenir les Tables de la Lune. Il suffit pour cela que le long d'un méridien terrestre soient établies certaines stations astronomico-géodésiques de coordonnées parfaitement connues et dans lesquelles on observe les distances zénithales de la Lune. M. Nobile développe les calculs sur un exemple particulier en prenant cinq stations; trois stations seulement, à la rigueur, seraient suffisantes.

O. C.

BECKER (L.). — THE SOLAR SPECTRUM AT MEDIUM AND LOW ALTITUDES (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. XXXVI, 1890).

Le D^r Ludwig Becker, de l'Observatoire royal d'Édimbourg, a fait une série d'observations intéressantes du spectre solaire à des altitudes moyennes et basses. La région observée était située entre $\lambda 6024$ et $\lambda 4861$. Dans la méthode ordinairement employée pour déterminer les longueurs d'onde des raies dans le spectre solaire, on lit un vernier attaché à la lunette d'observation. Le D^r Becker a déterminé les longueurs d'onde en calant la lunette et observant les positions d'un réseau de Rowland, quand les raies sont successivement amenées sous la croisée de fils dans le champ de l'instrument. Un système de roues dentées permet de donner au réseau un mouvement régulier et très lent. Les observations sont enregistrées sur une bande de papier télégraphique, et non seulement les positions des raies, mais encore leurs intensités. Dans l'intervalle men-

tionné, le Mémoire indique 3637 raies du spectre solaire dont 928 telluriques qui, à l'exception de 28 raies, se répartissent en trois bandes. A la fin du Mémoire se trouvent les Cartes reproduites par la photolithographie; elles montrent les intensités des raies solaires et telluriques pour une altitude du Soleil et des conditions atmosphériques moyennes, et les intensités des raies telluriques quand la hauteur apparente du Soleil est de 1° ou 2° .

Notons que M. Becker trouve plus de raies que M. Thollon (*Annales de l'Observatoire de Nice*, T. III, *Bulletin*, VII, p. 209) dont « les Cartes sont réellement une œuvre d'art »; ce sont les expressions de M. Becker.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n^{os} 3019-3022.

Wolf (Max). — Détermination photographique des grandeurs stellaires dans l'amas C.G. 4410.

Pour se faire une idée de la précision que l'on peut atteindre, dans ces sortes de mesures, même avec de faibles moyens, M. Wolf a comparé quatre épreuves photographiques de l'amas C.G. 4410 à quatre épreuves des Pléiades, obtenues en même temps que les premières et dans des conditions autant que possible identiques. Les diamètres des images des Pléiades mesurés au micromètre étant pris pour abscisses, et les grandeurs connues des étoiles correspondantes pour ordonnées, on pourrait construire graphiquement les courbes des grandeurs et s'en servir ensuite pour déterminer les grandeurs des étoiles de l'amas, d'après les diamètres de leurs images, mesurés sur les clichés.

Les courbes sont un peu différentes, suivant qu'on adopte pour les grandeurs des Pléiades l'échelle de Bonn ou celle de M. Charlier, qui paraît à M. Wolf préférable. Une autre difficulté, assez sensible, naît de l'influence que la mise au point exerce sur la netteté des contours des disques stellaires, qui ne sont généralement bien définis que pour certaines grandeurs, et estompés pour les autres.

M. Wolf donne d'abord les grandeurs de 28 étoiles des Pléiades, telles qu'elles résultent des diamètres relevés sur les quatre clichés et des courbes construites à l'aide des données de M. Charlier, puis rectifiées par la loi de continuité. Il met en regard les grandeurs d'après Charlier, d'après la *Durchmusterung* et d'après Pickering. Un autre Tableau renferme les résultats des déterminations photographiques de 73 étoiles de l'amas, relevées par M. Wolf sur ses quatre clichés. On y remarque

des écarts assez considérables, mais ce sont principalement des différences constantes d'une épreuve à l'autre (de $0^{\text{m}}, 2$ ou $0^{\text{m}}, 5$) qui s'expliquent par l'inégale influence de l'absorption atmosphérique, due à la différence de hauteur de l'amas et de la constellation des Pléiades au-dessus de l'horizon. Or une fois (le 12 octobre) les deux constellations s'étaient trouvées à la même hauteur; on avait ainsi le moyen de réduire par l'application d'une correction constante les résultats des trois autres clichés au cas normal de l'égalité de hauteur. Ce sont les grandeurs ainsi réduites que l'on trouve dans le dernier Tableau de M. Wolf. Elles s'accordent très bien entre elles, mais la comparaison avec Valentiner et le *Durchmusterung* donne des écarts assez sensibles pour les étoiles les plus brillantes (8^{e} grandeur).

Nobile (A.). — Note sur un appareil qui donnerait les variations de la latitude.

Dans les cercles méridiens, le point nadiral peut varier de plusieurs secondes en une seule soirée. C'est ce qui a engagé M. Nobile à imaginer, pour l'étude des variations de la verticale, un autre appareil, dont il a déjà fait commencer la construction et dont voici le principe. Un mur en maçonnerie, bâti sur le roc naturel dans le sens du méridien, supporte une lunette fixe de long foyer et une lunette qui flotte sur un bain de mercure, tournées l'une contre l'autre, et munies chacune d'un fil horizontal fixe; la distance variable des deux fils, dans le champ de la lunette fixe, est mesurée au micromètre. On pourrait aussi employer deux lunettes fixes, avec un miroir vertical, argenté sur l'une de ses faces et porté par un flotteur.

Weiss (E.). — Errata des zones australes d'Argelander et du Catalogue d'Oeltzen.

C'est une dernière liste des petites erreurs qu'a fait découvrir la révision continuée pendant l'impression de la nouvelle édition du Catalogue des zones australes. Elle est suivie de remarques de M. Schœnfeld.

Schur (W.). — Sur les bases des Catalogues d'Argelander, publiés dans le t. VI des *Observations de Bonn*, et la relation qui existe entre ces Catalogues et celui de Schjellerup.

En vue de la réduction définitive des zones observées par Klinkerfues de 1858 à 1863, M. Schur et ses collaborateurs avaient dressé un Catalogue de fondamentales, dont ils avaient puisé les éléments dans les

Catalogues d'Argelander (*Obs. de Bonn*, t. VI), de Schjellerup et de Yarnall. A cet effet, il avait fallu d'abord comparer entre eux ces divers Catalogues pour pouvoir réduire les positions des deux derniers au système Wolfers, adopté par Argelander. On avait notamment trouvé, pour les limites des zones de Klinkerfues (-15° à $+15^{\circ}$),

Argel., Schjell..... $+0^{\circ},11$ et $+0^{\circ},3$.

Mais on n'avait pas tenu compte d'une remarque d'Argelander, sur laquelle un travail de M. Oertel vient de rappeler l'attention, et d'après laquelle ses déclinaisons, observées antérieurement à l'année 1859, reposent sur une autre base que celles qu'il a faites plus tard, de sorte qu'il en résulte un écart de $0^{\circ},4$. M. Schur fait voir que cette circonstance ne peut avoir qu'une faible influence sur l'interprétation de son système de fondamentales, qui s'écarterait légèrement de celui de Wolfers.

Bauschinger. — Sur les étoiles de M. Schœnfeld qui se trouvent dans les Catalogues de Lamont.

M. Schœnfeld avait comparé sa Revision du ciel austral (S. D.) aux Catalogues de Lamont; la nouvelle édition des Catalogues de Munich, revus et corrigés, rend nécessaires quelques changements dans les résultats de ces comparaisons.

Engelhardt. — Observations de la planète (24) Thémis, comparées aux éléments de M. Krueger.

Tebbutt. — Observations de planètes, faites à Windsor (N. S. W.).

Holetschek. — Sur deux nouvelles variables à longue période, dans le Mât du Navire et le Poisson austral.

Elles ont été découvertes à l'occasion de la revision des zones australes d'Argelander. Ce sont les étoiles

Argelh.-Oeltzen, 8952 et 21834.

La période de la première paraît être d'une année et de quelques mois, celle de la seconde de huit à neuf mois.

Espin. — Nouvelle variable dans la constellation du Cocher.

Charlois, Millosevich, Palisa, Charlois. — Découverte de planètes.

Elles ont été trouvées respectivement le 11, le 12, le 14 et le 16 février.

Herz (Norbert). — Sur la variation annuelle des latitudes.

Il y a quelque temps on pouvait lire, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (17 novembre 1890) une Note de dom Lamey « sur la variation annuelle de la latitude, causée par l'inégalité de réfraction dans les marées atmosphériques. » Pour démontrer l'existence de cette cause de perturbation, l'auteur de la Note se borne à mettre les variations des latitudes, observées à Paris et à Potsdam, en regard de certains nombres, tirés de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1885 (p. 133), qui servent à calculer l'heure de la pleine mer pour le 15 de chaque mois, mais qui n'ont aucun rapport avec la hauteur de la marée. Il suffit d'ailleurs de constater que, d'après Laplace, la marée atmosphérique ne fait que modifier d'une fraction de millimètre l'état du baromètre (dont on tient d'ailleurs compte dans le calcul de la réfraction), pour comprendre qu'elle ne peut avoir aucune influence sur la variation apparente des latitudes. On pourrait, il est vrai, songer au changement d'inclinaison des couches de niveau qui en résulte; mais M. Herz, en faisant le calcul, trouve que l'inégalité de réfraction, due à cette cause, ne dépasserait pas 1 ou 2 cent-millièmes de seconde! Cependant il a cherché à se rendre compte de la grandeur possible de l'effet analogue qui pourrait résulter d'une influence *électrique* du Soleil sur la Terre. On trouve alors une période annuelle; mais il faudrait attribuer à la quantité d'électricité du Soleil une valeur bien exagérée. M. Herz recommande, pour élucider la question, de recourir, en dehors de la méthode de Talcott, à des observations faites dans le premier vertical.

Ball (L. de). — Remarque concernant un problème de calcul intégral.

Il s'agit d'un problème dont on trouve l'énoncé dans le t. I^{er} (p. 40) du *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand.

Millosevich. — Observations de planètes faites à l'Observatoire du Collège romain.

Thome. — Observations de planètes faites à Cordoba.

amp (*E.*). — Observations de planètes faites à Kiel.

Berberich. — Sur la nouvelle planète (302).

La planète que M. Charlois a observée le 14 novembre à la place de la planète (298) est nouvelle et portera le numéro (302).

Vogel. — Notice nécrologique sur G.-L. Camphausen.

Un astronome amateur distingué, le conseiller privé Gottfried-Ludolph Camphausen, est mort à Cologne le 3 décembre 1890, à l'âge de 87 ans. Il était surtout connu comme financier et homme politique. Dans ses heures de loisir il faisait des Mathématiques et de l'Astronomie; il s'est occupé du problème de Douwes, de la construction des spectroscopes, etc., et il avait, paraît-il, un petit observatoire à Rüngsdorf, sur le Rhin.

Mönnichmeyer (*C.*). — Perturbations absolues de Thémis produites par Mars et Saturne.

M. Krueger, dans son Mémoire sur l'orbite de Thémis, publié en 1866, avait fait usage, pour le calcul des perturbations produites par Mars, d'une valeur trop faible du moyen mouvement de Thémis ($635^{\circ},6$ au lieu de $639^{\circ},3$) et d'une valeur trop forte de la masse de Mars, qui a été rectifiée depuis par A. Hall. Il était donc désirable de reprendre *ab ovo* le calcul des perturbations absolues de cette planète, et M. Mönnichmeyer, qui avait déjà publié, en 1886, une thèse sur les perturbations de Thémis, dues à Jupiter, s'est décidé à exécuter le même travail pour Mars et Saturne. Il a déterminé les perturbations dues à Mars par la méthode de Hansen pour le calcul des perturbations absolues des petites planètes et celles qui proviennent de Saturne, par une autre méthode, qu'on trouve exposée dans les Mémoires de Hansen sur le *Développement des puissances négatives et impaires*, etc., et qui dispense de l'emploi des quadratures mécaniques. L'auteur donne, en quelques Tableaux, les principaux résultats de son travail, qui sera publié ailleurs *in extenso*.

Franke (*J.-H.*). — Sur la transformation des coordonnées sphériques rectangulaires.

Les coordonnées sphériques rectangulaires, dont l'introduction est due à Soldner (1810), offrent certains avantages qui en recommandent l'emploi en Géodésie. M. Franke donne les formules de transformation nécessaires pour passer d'un point normal N à un autre. On prend d'ordinaire

pour axe des abscisses le méridien du point normal N, les ordonnées étant mesurées sur des cercles perpendiculaires à ce méridien. En choisissant un nouveau point normal N' comme origine d'un système local, M. Franke prend pour axe des ordonnées le cercle mené par N' perpendiculairement au méridien de N, et pour axe des abscisses le cercle qui coupe le premier en N' à angle droit. Il trouve ce choix plus avantageux que celui qui consiste à prendre pour axes des coordonnées le méridien de N' et un cercle perpendiculaire à ce méridien.

Tebbutt. — Observations de comètes faites à Windsor (N. S. W.).

Berberich. — Éléments des planètes (298) et (300).

Les planètes (298), (300) et (302) ont été extrêmement voisines les unes des autres au mois de septembre dernier, comme le montrent les positions suivantes :

	R.	Q.
	h m s	
1890, sept. 17, 5 (298)	0.31. 5	+2.16,6
» (300)	0.29.27	+2.24,1
» (302)	0.28.26	+2.23,5

On peut donc s'étonner qu'elles n'aient pas été découvertes en même temps.

Les nouvelles planètes.

La planète trouvée le 11 février par M. Charlois n'est autre, paraît-il, que Lacrymosa (208); celles qui ont été découvertes depuis recevront les numéros suivants :

(303)	Millosevich, 12 février.
(304)	Palisa, 14 février.
(305)	Charlois, 16 février.
(306)	Millosevich, 1 mars.
(307)	Charlois, 5 mars.
(308)	Borrelly, 31 mars.

R. R.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

ORBITE DE LA COMÈTE TEMPEL-SWIFT (1869 III, 1880 IV) (*);

PAR M. J. BOSSERT.

Retour de la comète en 1891.

Nous ne possédons encore que les observations faites pendant deux apparitions de cette comète, bien que la durée de révolution soit de 5 ans et demi; cela tient à cette particularité que la comète effectue son passage au périhélie dans des conditions alternativement favorables et défavorables pour l'observation; le faible éclat de la comète en 1875 et 1886 et sa position dans le voisinage du Soleil ont empêché de l'observer lors de ces deux retours; il en sera de même en 1897, 1908, etc. Le prochain passage, en 1891, se présentant dans de très bonnes conditions de visibilité, il y a nécessité de fournir à l'avance tous les éléments qui peuvent servir à la recherche de la comète.

Nous avons pris comme point de départ le système d'éléments publié tome III, p. 72, et qui est basé sur les observations des deux apparitions de 1869 et 1880. Ces éléments rapportés à l'équinoxe moyen de 1890,0 deviennent :

$$T = 1886 \text{ mai } 9,462555.$$

π	43.13.15,42	} Éclipt. et équin. moy. 1890,0.
Ω	296.57.48,16	
i	5.23.38,07	
$\log a$	0,4938331	
$\log q$	0,0304537	
ϖ	40°59'30",45	

Comme, de 1886 à 1891, il n'y a aucune grande approche avec l'une quelconque des planètes, nous avons négligé l'effet des perturbations dépendant des planètes autres que Jupiter et Saturne.

Le calcul des perturbations a été continué d'après le procédé employé de 1869 à 1886; la méthode employée est celle de Hansen-Tietjen (Oppolzer, t. II); l'intervalle adopté est de quarante jours

(*) Voir *Bulletin astronomique*, t. II, p. 550; t. III, 23 et 65.

et les positions héliocentriques des planètes perturbatrices ont été déduites des Tables de Le Verrier. Le Tableau suivant contient les valeurs de $\frac{d\Delta\omega}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$, $U dt$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ qui ont servi à former les tableaux d'intégration. Les trois dernières valeurs sont données en unités de la 7^e décimale.

Date	$\frac{d\Delta\omega}{dt}$	$\frac{dM}{dt}$	$U dt$	Unités de la 7 ^e décimale.		
				$\frac{d^2v}{dt^2}$	$\frac{d^2z}{dt^2}$	
1846.						
AVRIL 27,0...	+ 0,251	- 0,014	- 25,86	+ 49,07	- 6,34	
JUIN 6,0...	- 0,283	0,000	- 34,98	- 24,86	- 4,21	
JUILL. 16,0...	- 0,398	+ 0,116	- 0,14	- 37,73	+ 0,62	
AOUT 25,0...	- 0,014	+ 0,424	+ 73,13	- 12,93	- 6,80	
OCT. 4,0...	- 0,607	+ 0,784	+ 180,38	+ 7,64	+ 14,47	
NOV. 13,0...	- 1,369	+ 1,189	+ 320,59	+ 27,98	+ 23,92	
DÉC. 23,0...	+ 2,250	+ 1,288	+ 495,01	+ 39,82	+ 34,87	
1847.						
FÉVR. 1,0...	+ 3,259	+ 1,269	+ 704,72	+ 49,46	+ 48,11	
MARS 13,0...	+ 4,385	+ 0,996	+ 948,18	+ 56,09	+ 62,26	
AVRIL 22,0...	+ 5,698	+ 0,434	+ 1219,47	+ 60,24	+ 76,87	
JUIN 1,0...	+ 7,110	- 0,436	+ 1505,96	+ 61,25	+ 90,47	
JUILL. 11,0...	+ 8,665	- 1,622	+ 1788,82	+ 59,66	+ 101,54	
AOUT 20,0...	+ 10,312	- 3,113	+ 2045,46	+ 55,68	+ 108,63	
SEPT. 19,0...	- 12,016	- 4,891	+ 2254,07	+ 50,12	+ 110,86	
NOV. 8,0...	+ 13,714	- 6,927	+ 2599,01	+ 43,59	+ 108,00	
DÉC. 18,0...	+ 15,366	- 9,187	+ 2473,76	+ 37,00	+ 100,58	
1848.						
JANV. 27,0...	+ 16,947	- 11,638	+ 2481,19	+ 30,98	+ 89,65	
MARS 7,0...	+ 18,430	- 14,248	+ 2431,18	+ 26,00	+ 76,47	
AVRIL 16,0...	+ 19,808	- 16,992	+ 2336,93	+ 21,85	+ 61,76	
MAI 26,0...	+ 21,081	- 19,849	+ 2212,51	- 18,99	+ 47,04	
JUILL. 5,0...	+ 22,259	- 22,804	+ 2069,49	+ 17,10	+ 32,70	
AOUT 14,0...	+ 23,358	- 25,846	+ 1918,99	+ 16,03	+ 19,17	
SEPT. 23,0...	+ 24,395	- 28,971	+ 1766,79	+ 15,68	+ 6,57	
NOV. 2,0...	+ 25,391	- 32,176	+ 1618,25	+ 15,95	- 4,87	
DÉC. 12,0...	+ 26,364	- 35,463	+ 1476,54	+ 16,68	- 15,48	
1849.						
JANV. 21,0...	- 27,338	- 38,835	+ 1343,50	+ 17,82	- 25,26	
MARS 2,0...	+ 28,330	- 42,298	+ 1220,13	+ 19,36	- 34,34	
AVRIL 11,0...	+ 29,363	- 45,860	+ 1106,89	- 21,24	- 42,90	
MAI 21,0...	+ 30,459	- 49,531	+ 1003,94	+ 23,51	- 51,07	
JUIN 30,0...	+ 31,642	- 53,322	+ 910,82	+ 26,40	- 59,29	
AOUT 9,0...	+ 32,938	- 57,249	+ 827,64	+ 29,76	- 67,29	
SEPT. 18,0...	+ 34,390	- 61,327	+ 754,30	+ 33,70	- 75,57	
OCT. 28,0...	+ 35,997	- 65,578	+ 689,65	+ 38,41	- 84,17	
DÉC. 7,0...	- 37,838	- 70,026	+ 634,28	+ 44,20	- 93,43	

Date. 1890.	$\frac{d\Delta\omega}{dt}$.	$\frac{d\Delta M}{dt}$.	U dt.	Unités de la 7 ^e décimale.		
				$\frac{d^2v}{dt^2}$.	$\frac{d^2z}{dt^2}$.	
JANV. 16,0...	+ 39,956	- 74,700	+ 587,70	+ 51,27	- 103,50	
FÉVR. 25,0...	+ 42,420	- 79,634	+ 549,82	+ 60,12	- 114,83	
AVRIL 6,0...	+ 45,316	- 84,881	+ 520,45	+ 71,34	- 127,74	
MAI 16,0...	+ 48,761	- 90,491	+ 499,48	+ 85,84	- 142,76	
JUIN 25,0...	+ 52,910	- 96,542	+ 486,73	+ 104,99	- 160,54	
AOUT 4,0...	+ 57,984	- 103,131	+ 481,94	+ 130,92	- 182,01	
SEPT. 13,0...	+ 64,284	- 110,393	+ 484,77	+ 166,58	- 208,33	
OCT. 23,0...	+ 72,259	- 118,512	+ 494,23	+ 217,93	- 241,28	
DÉC. 2,0...	+ 82,581	- 127,709	+ 508,64	+ 294,38	- 283,40	
1891.						
JANV. 11,0...	+ 96,298	- 138,468	+ 524,95	+ 413,34	- 338,18	
FÉVR. 20,0...	+ 115,125	- 151,408	+ 537,14	+ 608,58	- 411,89	
AVRIL 1,0...	+ 141,999	- 167,464	+ 534,67	+ 948,81	- 512,51	
MAI 11,0...	+ 182,185	- 188,497	+ 499,81	+ 1669,73	- 617,09	
JUIN 20,0...	+ 245,857	- 218,225	+ 406,61	+ 2929,53	- 846,91	
JUILL. 30,0...	+ 352,793	- 263,529	+ 236,54	+ 5958,04	- 1084,52	
SEPT. 8,0...	+ 536,708	- 340,665	+ 27,49	+ 13249,42	- 1168,55	
OCT. 18,0...	+ 790,730	- 485,623	- 124,55	+ 24247,76	- 249,10	
NOV. 27,0...	+ 862,006	- 740,853	- 44,09	+ 12208,89	- 1866,18	

De nos tableaux d'intégration nous avons déduit pour la date 1891 novembre 7,0

$$\begin{aligned} \Delta M &= - 59' 22'', 2. \\ \Delta \omega &= + 59' 0'', 6, \\ \frac{dz}{dt} &= - 60 41, 61, \\ \int \Sigma U dt &= + 50 436, 61, \\ \frac{dv}{dt} &= + 51616, 64. \\ v &= + 118809, 47, \\ z &= - 2355, 67. \end{aligned}$$

L'application et la réduction de ces valeurs nous ont donné le système d'éléments suivants :

T = 1891 novembre 14,95835, T. m. de Paris.

π	43.14.15,7	} Éclipt. et équin. moy. 1891,0.
Ω	296.31.14,8	
i	5.23.13,8	
$\log a$	0,495370	
$\log q$	0,036071	
ϖ	40° 44' 44'', 4	

Au moyen de ce système d'éléments, nous avons calculé une éphéméride qui facilitera la recherche de la comète lors de son prochain retour. La valeur du facteur $\frac{1}{r^2 \Delta^3}$ permettra de juger de l'intensité lumineuse de la comète; en 1869, ce facteur était 13,17 et 6,04 aux dates extrêmes des observations; en 1880, ses valeurs étaient 18,46 et 1,70.

Éphéméride calculée pour minuit, temps moyen de Paris.

Date 12 h. T. m. Paris.	R.	(Ω).	l. dist. à la Terre.	T. d'aberr. m s	$\frac{1}{r^2 \Delta^3}$
1891.	h m s				
JUILL. 2.....	22. 4. 24	-10. 7,5	0,0492	9.18	0,21
6.....	22. 6. 8	- 9.38,6			
10.....	22. 7. 28	- 9. 9,8	9,9993	8.17	0,28
14.....	22. 8. 23	- 8.41,2			
18.....	22. 8. 50	- 8.12,6	9,9473	7.21	0,39
22.....	22. 8. 49	- 7.44,1			
26.....	22. 8. 15	- 7.15,7	9,8936	6.30	0,54
30.....	22. 7. 9	- 6.47,3			
AOUT 3.....	22. 5. 27	- 6.18,9	9,8390	5.44	0,74
7.....	22. 3. 10	- 5.50,4			
11.....	22. 0. 18	- 5.21,8	9,7845	5. 3	1,04
15.....	21.56.52	- 4.52,9			
19.....	21.52.52	- 4.23,5	9,7314	4.28	1,44
23.....	21.48.25	- 3.53,4			
27.....	21.43.31	- 3.22,6	9,6812	3.59	1,97
31.....	21.38.20	- 2.50,9			
SEPT. 4.....	21.33. 2	- 2.18,2	9,6353	3.35	2,66
8.....	21.27.45	- 1.43,9			
12.....	21.22.41	- 1. 8,0	9,5946	3.16	3,50
16.....	21.17.58	- 0.30,0			
20.....	21.13.52	+ 0.10,4	9,5587	3. 0	4,49
24.....	21.10.25	+ 0.53,6			
28.....	21. 7.55	+ 1.40,0	9,5265	2.48	5,65
OCT. 2.....	21. 6.24	+ 2.30,1	9,5114	2.42	6,30
4.....	21. 6. 4	+ 2.56,8			
6.....	21. 6. 2	+ 3.24,8	9,4965	2.36	7,01
8.....	21. 6.19	+ 3.54,0			
10.....	21. 6.55	+ 4.24,7	9,4817	2.31	7,77
12.....	21. 7.51	+ 4.56,9			
14.....	21. 9. 9	+ 5.30,8	9,4667	2.26	8,61
16.....	21.10.48	+ 6. 6,4			

Date 12 h. T. m. Paris. 1891.	R. h m s	(λ).	L. dist. à la Terre.	T. d'aberr. m s	$\frac{1}{r^2 \Delta^2}$
18.....	21.12.49	+ 6.43,9	9,4512	2.21	9,54
20.....	21.15.13	+ 7.23,4			
22.....	21.18. 0	+ 8. 4,8	9,4353	2.16	10,54
24.....	21.21.12	+ 8.48,3			
26.....	21.24.50	+ 9.34,0	9,4189	2.11	11,64
28.....	21.28.56	+10.22,2			
30.....	21.33.30	+11.12,8	9,4021	2. 6	12,83
Nov. 1.....	21.38.35	+12. 5,8			
3.....	21.44.11	+13. 1,6	9,3851	2. 1	14,09
5.....	21.50.21	+13.59,9			
7.....	21.57. 7	+15. 0,9	9,3683	1.56	15,41
9.....	22. 4.31	+16. 4,2			
11.....	22.12.34	+17.10,1	9,3520	1.52	16,71
13.....	22.21.20	+18.18,0			
15.....	22.30.48	+19.27,7	9,3372	1.48	17,93
17.....	22.41. 1	+20.38,5			
19.....	22.52. 1	+21.50,0	9,3247	1.45	18,92
21.....	23. 3.47	+23. 1,2			
23.....	23.16.23	+24.11,4	9,3159	1.43	19,56
25.....	23.29.43	+25.19,4			
27.....	23.43.49	+26.24,2	9,3119	1.42	19,68
29.....	23.58.33	+27.25,1			
Déc. 1.....	0.13.53	+28.19,7	9,3138	1.43	19,19
3.....	0.29.39	+29. 7,8			
5.....	0.45.45	+29.49,1	9,3223	1.45	18,06
7.....	1. 2. 2	+30.23,7			
9.....	1.18.16	+30.49,7	9,3376	1.48	16,42
11.....	1.34.22	+31. 7,8			
13.....	1.50. 7	+31.18,1	9,3593	1.54	14,44
15.....	2. 5.28	+31.21,6			
17.....	2.20.13	+31.18,6	9,3863	2. 1	12,37
19.....	2.34.23	+31.10,2			
21.....	2.47.50	+30.57,3	9,4175	2.10	10,35
23.....	3. 0.37	+30.40,6			
25.....	3.12.40	+30.21,0	9,4519	2.21	8,52
27.....	3.24. 3	+29.59,3			
29.....	3.34.45	+29.36,3	9,4883	2.33	6,94

Les coordonnées rectangulaires écliptiques de la comète pour 1891, 0 sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x &= [9,998462] r \sin(133^{\circ}.20'.20''.9 + v), \\ y &= [9,954119] r \sin(41^{\circ}. 0'.24''.6 + v), \\ z &= [9,646156] r \sin(53^{\circ}.10'.10''.0 + v). \end{aligned}$$

NOTES.

I. Depuis la publication de notre premier Mémoire sur la comète Tempel-Swift, l'Observatoire de Strasbourg a donné dans les *Astronomische Nachrichten* le résultat de ses observations sur cette comète. Nous donnons ci-après la comparaison avec l'éphéméride publiée page 552 (*Bulletin astronomique*, t. II); les Tableaux sont identiques à ceux donnés dans notre Mémoire.

Positions moyennes des étoiles de comparaison.

N ^o d'ordre.	R 1860,0.	(Q) 1860,0.
92 ^a	^h 5.32. ^m 16. ^s 58	+34.11.32,3
	R 1881,0.	(Q) 1881,0.
104.....	5.53.31,60	+28.36.17,8
105.....	5.55. 4,18	+28.12. 8,3
110.....	6.12.47,31	+24.36.51,3
111.....	6.14. 0,86	+24.27.58,6
112.....	6.18. 3,40	+23.46.23,5

Comparaison des observations de la comète.

Dates.	T. m. Berlin.	R géoc.	cos(Q) dR.	(Q) géoc.	d(Q).	★
1860. DÉC. 25....	9. 7.34	^h 5.32. ^m 42. ^s 19	+1,96	+34. 0.43,6	+ 0,4	92 ^a
1861. JANV. 6....	14.14.24	5.53.43,50	+2,83	+28.36.12,9	- 5,7	104
7....	15.10.33	5.55. 7,96	+1,20	+28.14.28,6	-31,4	105
21....	10.41.34	6.12.19,10	+2,73			110
21....	10.59.36			+24.38.31,8	-19,2	110
22....	9.52.18	6.13.26,55	+2,26			111
22....	10. 6.31			+24.27.22,3	-12,2	111
26....	9.57.41	6.18. 7,3	+2,2	+23.44.46,2	+ 3,0	112

La position moyenne de l'étoile 92^a repose sur deux observations méridiennes faites à l'Observatoire de Strasbourg et sur deux observations méridiennes de l'Observatoire de Leyde. Les étoiles 110, 111 et 112 sont déduites d'observations méridiennes faites à Berlin ou à Strasbourg par le D^r Becker.

II. Nous avons dit que la comète avait été découverte une première fois à l'Observatoire de Marseille; c'est une erreur. Tempel ne fut attaché que peu de temps à l'Observatoire et avant 1866.

En 1869, il découvrit la comète III 1869, à son domicile particulier, rue Pythagore, avec une bonne lunette qui lui appartenait en propre. C'est là également, croyons-nous, que furent découvertes les comètes II 1867 et II 1869.

SUR LES GRANDES PERTURBATIONS DES COMÈTES PÉRIODIQUES,

PAR M. L. SCHULHOF.

[Suite (1)].

III. Pour pouvoir relier les nouveaux éléments aux anciens, il nous faut encore exprimer certaines combinaisons des éléments à l'aide des quantités $H, K, N, O, \zeta, \zeta', \dots$. Des relations connues fournissent d'abord les équations suivantes, dans lesquelles rien n'est encore négligé :

$$g^2 = G^2 + \gamma^2 + 2H = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

$$(12) \quad r^2 = R^2 + \frac{M\pi}{\gamma^2} + 2N, \quad rr' = RR' + K + O;$$

$$(13) \quad \begin{cases} \sqrt{p} \cos i = \sqrt{P} + \sqrt{M\pi} \cos t + X\zeta' - Y\zeta' + Y'\zeta - X'\zeta \\ = \sqrt{P} + \sqrt{M\pi} \cos t + \frac{R^2}{\sqrt{P}} H + \frac{G^2}{\sqrt{P}} N - \frac{RR'}{\sqrt{P}} (K + O); \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \sqrt{p} \sin i \cos \varnothing = X\zeta' - X'\zeta + \zeta\zeta' - \zeta\zeta', \\ \sqrt{p} \sin i \sin \varnothing = Y\zeta' - Y'\zeta + \gamma\zeta' - \zeta\gamma'; \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} e \sin \varpi = \frac{Y}{r} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) - \frac{x}{r} \sqrt{pr'} + \frac{e\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \cos(\nu - \varnothing), \\ e \cos \varpi = \frac{x}{r} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) + \frac{Y}{r} \sqrt{pr'} + \frac{e\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \sin(\nu - \varnothing); \end{cases}$$

$$(15^*) \quad \begin{cases} e \sin(2\varnothing - \varpi) = \frac{Y}{r} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) + \frac{x}{r} \sqrt{pr'} - \frac{e\zeta}{r} \cot \frac{1}{2} i \cos(\nu + \varnothing), \\ e \cos(2\varnothing - \varpi) = \frac{x}{r} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) - \frac{Y}{r} \sqrt{pr'} + \frac{e\zeta}{r} \cot \frac{1}{2} i \sin(\nu + \varnothing); \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} e \sin i \sin \omega = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \zeta - rr' \zeta', \\ e \sin i \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{P}} [r' \zeta + (p - r) \zeta']. \end{cases}$$

(1) Voir *Bulletin astronomique*, VIII, p. 147.

On emploiera les relations (15) ou (15*) selon que le mouvement sera direct ou rétrograde. Pour des valeurs de i , comprises entre 45° et 135° , on se servira avantagement des équations (16).

Nous examinerons d'abord les expressions de $\frac{1}{a}$ et $\sqrt{p} \cos i$. On a, en admettant que $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$ est inférieur à 0,3, avec une exactitude suffisante, $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{N}{R^3}$; donc

$$(17) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{A} - \gamma^2 - 2H - \frac{2N}{R^2},$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2} \sqrt{p} \cos i \\ &= \frac{2(P+R^2R'^2)}{R^2} + \frac{1}{A} - \gamma^2 + \frac{2N}{R^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{A} \right) + \frac{2\sqrt{MP^2\pi}}{R^2} \cos i - 2 \frac{R'}{R} r \\ &= \frac{4}{R} - \frac{1}{A} - \gamma^2 + \frac{2}{R^{\frac{3}{2}}} \sqrt{M\pi} \cos i - \frac{2R'}{R} r r'. \end{aligned} \right.$$

Comme $\frac{1}{R} - \frac{1}{A}$, $\frac{2}{R^{\frac{3}{2}}} \sqrt{M\pi} \cos i$ et $\frac{2R'}{R} r r'$ ne peuvent pas dépasser les valeurs 0,01, 0,005 et 0,002 respectivement, nous écrivons

$$(18^*) \quad \frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2} \sqrt{p} \cos i = \frac{4}{R} - \frac{1}{A} - \gamma^2 = \frac{3}{R} - \gamma^2.$$

M. Tisserand a, le premier, attiré l'attention sur l'importance de l'équation (18), qui fournit une relation presque absolument constante entre les anciennes et les nouvelles valeurs de a , p et i , même après des perturbations répétées, surtout si le point de proximité est situé près du périhélie ou de l'aphélie de Jupiter. En appelant R_0 le rayon vecteur de Jupiter dans le point qui est à peu près le plus rapproché de l'ancienne et de la nouvelle orbite, on a, avec une exactitude suffisante,

$$(19) \quad \frac{1}{a_1} + \frac{2\sqrt{P}}{R_0^2} \sqrt{p_1} \cos i_1 = \frac{1}{a_2} + \frac{2\sqrt{P}}{R_0^2} \sqrt{p_2} \cos i_2.$$

Même s'il existe deux points de proximité et qu'on suppose la comète plusieurs fois troublée, tantôt dans l'un, tantôt dans l'autre des deux points, la relation précédente restera encore assez exacte,

si l'on prend pour R_0 le rayon de Jupiter qui correspond au milieu de l'intervalle entre les deux points.

L'équation (18^a) détermine γ^2 . Si l'on suppose avec M. Tisserand qu'à l'origine $\frac{1}{a_1}$ était égal à zéro, on obtient par l'équation (17) les limites extrêmes de γ^2 . On a au maximum

$$H_1 = \pm \frac{\sqrt{P}}{R_1} \gamma \quad \text{et} \quad N_1 = \pm R \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma};$$

donc

$$\gamma^2 \pm 2 \frac{\sqrt{P}}{R_1} \gamma = \frac{1}{\Lambda} \mp \frac{2}{R_1^2} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}.$$

En adoptant pour R le rayon vecteur de Jupiter à son périhélie et pour $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$ le rayon de la sphère d'activité 0,3, on trouve pour γ^2 les limites 0,0243 et 1,2423, et pour α les limites 0,0532 et 0,00077. Ces limites sont à la rigueur déjà un peu trop étendues vu que, pour $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} = 0,3$, la comète ne ferait que raser la sphère d'activité. Toutefois, la valeur de $\frac{1}{a_1}$ ne dépasse pas sensiblement zéro quand α reste entre 0,1 et 0,05; pour $\alpha = 0,1$ on aurait $\frac{1}{a_1} = +0,066$.

Il est intéressant de remarquer que quand γ^2 prend ses valeurs limites, l'astre se trouve à peu près à son périhélie; on a alors en effet $K_1 = O_1 = 0$, donc $r_1 r'_1 = R_1 R'_1$, très peu différent de zéro.

Parmi les comètes périodiques actuellement connues, il y en a un assez grand nombre dont la plus courte distance à l'orbite de Jupiter est sensiblement supérieure à 0,3 ou 0,4. Pour toutes ces comètes la valeur de $\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2} \sqrt{\rho} \cos i$ est très considérable. Si l'on veut pour celles-ci connaître la valeur de γ^2 , il faut prendre $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{N}{R^2} - \frac{\rho^2}{2R^3} + \frac{3}{8R^3} (\rho^2 + 2N)^2$ et ajouter, dans la formule (18), au second membre, les termes $-\frac{\rho^2}{R^3} + \frac{3}{4R^3} (\rho^2 + 2N)^2$. La relation (19) ne change pas, vu que la même correction entre dans le premier et dans le second terme. Si l'on ne tenait pas compte de cette remarque, on trouverait dans le Tableau que nous avons donné dans le *Bulletin* (t. VI, p. 468) plusieurs comètes

pour lesquelles α semblerait être sensiblement supérieur à 0,0532. En écartant avec M. Tisserand la comète d'Encke pour laquelle il est indispensable de supposer dans le passé une forte perturbation du demi-grand axe par Mercure (¹), il reste encore les comètes de Barnard 1884 II (ρ environ 0,5) et de Tempel 1867 II (ρ environ 0,3) pour lesquelles le calcul direct de α donne les valeurs 0,058 et 0,109 respectivement. Ce dernier astre est particulièrement intéressant, vu que $\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2} \sqrt{p} \cos i$ atteint presque la valeur maximum qu'admet l'hypothèse d'une orbite parabolique primitive. Le point de proximité qu'il avait à l'origine a dû être situé presque au périhélie de Jupiter, vers la longitude héliocentrique 11°. Actuellement la longitude de ce point est de 61°; elle était en 1856, d'après les calculs approchés de M. von Åsten, de 56°. Si le déplacement du point de proximité était toujours aussi considérable, il serait possible que la comète n'appartînt au système solaire que depuis trois siècles. Par contre, l'instant auquel Jupiter pourrait la chasser du système solaire semble être extrêmement éloigné. Il est toutefois possible qu'en s'éloignant de plus en plus de Jupiter son orbite devienne presque circulaire et qu'alors Jupiter soit assez rapproché de son second point de proximité.

Retournons à l'équation (17) pour chercher les conditions dans lesquelles $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$ atteint sa valeur maximum.

Nous avons

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} &= 2H_1 - 2H_2 + \frac{2}{R^3} N_1 - \frac{2}{R^3} N_2 \\ &= \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l [\cos \lambda - \cos(\lambda + 2\sigma)] \\ &\quad + \frac{2}{R^2} \frac{\sqrt{M}\pi}{\gamma} \cos n [\sin \nu - \sin(\nu + 2\sigma)] \\ &\quad + \frac{4(\tau - \theta)}{R^2} \gamma \cos n \cos(\nu + 2\sigma). \end{aligned} \right.$$

Le deuxième et le troisième terme étant toujours très petits, on aura, tant que $\cos l$ est sensiblement plus grand que zéro, le maxi-

(¹) Olbers a entrevu la possibilité d'une forte action de Mercure sur la comète d'Encke dans le passé ou dans l'avenir (*Berl. Jahrb.*, 1880, p. 197).

minimum de $\pm \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right)$ pour $\sin(\lambda + 2\sigma) = \sin \lambda$, c'est-à-dire pour $\lambda = \pm 90^\circ - \sigma$. Le terme principal devient ainsi $\frac{4\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l \sin \sigma$.

Plus $\sin \sigma$ augmente, plus $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$ devient petit, de sorte qu'on pourrait complètement négliger le deuxième terme. Pour $\cos l = 1$ on a, d'après (9), soit $\cos t = 0$, soit $\sin t = 0$, c'est-à-dire soit $\cos n = 0$, soit $\cos n = 1$; dans le premier cas, le deuxième et le troisième terme disparaissent et l'on a simplement $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \pm \frac{4\sqrt{P}}{R} \gamma \sin \sigma$; dans le second cas, on a, à cause de $v = \pm 90^\circ + \lambda$,

$$\pm \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) = \frac{4\sqrt{P}}{R_1} \gamma \sin \sigma \left[1 \pm \frac{\sqrt{M\pi}}{R^{\frac{3}{2}} \gamma^2} \right] \mp \frac{4(\tau - \theta)}{R^2} \gamma \cos \sigma.$$

Le signe supérieur au deuxième membre convient au mouvement direct, le signe inférieur au mouvement rétrograde. Pour un γ donné, le maximum de $\gamma \sin \sigma$ correspond, d'après (6), à la valeur minimum de x . On l'obtient en satisfaisant à la condition

$$\gamma^2 = \frac{M}{x(\rho + x)} \left(\rho - x + \frac{2x^2}{\rho} \right),$$

ou simplement

$$\gamma^2 = \frac{M(\rho - x)}{x(\rho + x)},$$

ce qui donne

$$\gamma \sin \sigma = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \sqrt{\frac{M}{x}}.$$

Pour $\rho = 0,3$ et $x = 0,000711$, $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$ peut donc, au maximum, devenir égale à $\pm \frac{5,284}{R}$, selon qu'on prend $\lambda = +90^\circ - \sigma$ ou $\lambda = -90^\circ - \sigma$. L'expression générale de $\frac{1}{a_1}$ serait, dans ce cas,

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{\Lambda} - \gamma^2 \mp \frac{2\sqrt{P}}{R} \gamma \sin \sigma \left[1 \pm \frac{\sqrt{M\pi} \cos n}{R^{\frac{3}{2}} \gamma^2} \right] \pm \frac{2(\tau - \theta)}{R^2} \gamma \cos \sigma \cos n,$$

$\cos n$ étant égal soit à 0, soit à 1. Les perturbations pourraient donc changer $\frac{1}{a}$ de $-1,64$ en $-0,63$ et inversement.

Le maximum et le minimum correspondants de

$$\sqrt{\rho_2} \cos i_2 - \sqrt{\rho_1} \cos i_1$$

sont donnés, en négligeant des petits termes, par l'expression $\pm 2R\gamma \sin \sigma$ dont la valeur peut varier entre $-2,64\sqrt{R}$ et $+2,64\sqrt{R}$.

Le cas particulier de $\frac{1}{a_1} = 0$, considéré par M. Tisserand et M. Callandreau, mérite une attention spéciale.

On a, d'après (17),

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} &= \frac{1}{A} - \gamma^2 - \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l \cos \lambda - \frac{2}{R_2} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos n \sin v = 0, \\ \frac{1}{a_2} &= \frac{1}{A} - \gamma^2 - \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l \cos(\lambda + 2\sigma) - \frac{2}{R_2} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos n \sin(v + 2\sigma) \\ &\quad + \frac{4(\tau - \theta)}{R^2} \gamma \cos n \cos(v + 2\sigma). \end{aligned}$$

En supposant $\cos l$ sensiblement plus grand que zéro, nous négligerons les faibles termes en $\cos n$. Dans la recherche du maximum et du minimum de $\frac{1}{a_2}$ il faut distinguer deux cas, selon que $\cos l$ est supérieur ou inférieur à une certaine limite qui est environ 0,64 pour le maximum et 0,78 pour le minimum. Cette distinction est imposée par la condition que σ ne dépasse pas une certaine valeur correspondant au minimum de x . Dans le premier cas, on peut mettre en

$$\frac{1}{a_2} = \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l [\cos \lambda - \cos(\lambda + 2\sigma)],$$

$\cos(\lambda + 2\sigma) = \mp 1$, c'est-à-dire $\lambda = 180^\circ - 2\sigma$ ou $\lambda = -2\sigma$, selon que l'on cherche le maximum ou le minimum; on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} &= \pm \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \gamma \cos l (1 - \cos 2\sigma), \\ \gamma &= \pm \frac{\sqrt{P}}{R_1} \cos l \cos 2\sigma + \sqrt{\frac{1}{A} + \frac{P}{R_1^2} \cos^2 l \cos^2 2\sigma}. \end{aligned}$$

La condition du maximum et du minimum est fournie par la

relation $1 - 2 \cos 2\sigma = \frac{R_1^2}{AP \cos^2 l}$, ce qui donne pour le maximum

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{A} \sqrt{1 - 2 \cos 2\sigma}}, \quad \frac{1}{a_2} = \frac{2}{A} \frac{1 - \cos 2\sigma}{1 - 2 \cos 2\sigma} = \frac{1}{A} + \frac{P}{R_1^2} \cos^2 l,$$

et pour le minimum

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 - 2 \cos 2\sigma}}{\sqrt{A}}, \quad \frac{1}{a_2} = -\frac{2}{A} (1 - \cos 2\sigma) = -\frac{1}{A} - \frac{R_1^2}{A^2 P} \sec^2 l.$$

Dans le second cas, on mettra $\cos \lambda = \pm 1$, ce qui donne

$$\gamma = \mp \frac{\sqrt{P}}{R_1} \cos l + \sqrt{1 + \frac{P}{R_1^2} \cos^2 l},$$

$$\frac{1}{a_2} = \pm \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \cos l (1 - \cos 2\sigma) \left(\mp \frac{\sqrt{P}}{R_1} \cos l + \sqrt{1 + \frac{P}{R_1^2} \cos^2 l} \right),$$

le signe supérieur se rapportant au maximum, l'inférieur au minimum. Pour trouver la valeur extrême de $\cos l$, pour laquelle on peut encore prendre $\cos(\lambda + 2\sigma) = \mp 1$, il faut combiner

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{A} \sqrt{1 - 2 \cos 2\sigma}} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\sqrt{1 - 2 \cos 2\sigma}}{\sqrt{A}}$$

avec

$$\sin \sigma = \frac{\sqrt{1 - \frac{Mx}{\rho^2 \gamma^2} \left(2 + \frac{\gamma^2 x}{M} - \frac{2x}{\rho} \right)}}{1 + \frac{\gamma^2 x}{M} - \frac{2x}{\rho}},$$

ou simplement avec

$$\sin \sigma = \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2 x}{M} - \frac{2x}{\rho}}$$

en introduisant la valeur minima de x .

On remarque la différence tranchée entre les conditions du maximum et du minimum de $\frac{1}{a_2}$. Tandis que le plus grand maximum, égal environ à $+\frac{2}{R}$ pour $\gamma = \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $\cos 2\sigma = 0$, correspond à $\cos l = 1$, la valeur négative la plus forte de $\frac{1}{a_2}$ est fournie par le minimum de $\cos l$, ci-dessus défini. M. Tisserand a reconnu le premier le cas spécial si intéressant de $\frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}$ et montré qu'il cor-

respond à $\varepsilon^2 = 2$. Comme on doit prendre dans ce cas $\cos l = 1$, on aura soit $\cos t = 0$, soit $\sin t = 0$, c'est-à-dire $\cos n = 0$ ou $\cos n = 1$ et $\nu = \pm 90^\circ + \lambda$. On a donc rigoureusement, dans le premier cas,

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{A} + \frac{P}{R_1^2},$$

et dans le second cas

$$\frac{1}{a_2} = \left(\frac{1}{A} + \frac{P}{R_1^2} \right) \left(1 \pm \frac{\sqrt{M\pi}}{R\gamma} \right),$$

le signe supérieur se rapportant au mouvement direct, le signe inférieur au mouvement rétrograde. Le terme en $\tau - \theta$ s'évanouit dans les deux cas. A cause de $\cos 2\sigma = 0$ on a, d'après (6), $\frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{M\pi}{\rho^2 \gamma^2} \right) = \sin^2 \sigma = \frac{1}{2}$; donc $\varepsilon^2 = 2 - \frac{2M\pi}{\rho^2 \gamma^2} = 2$, d'accord avec M. Tisserand. On a, en outre, $\pi = \alpha$ et

$$\frac{\sqrt{M\pi}}{R\gamma} = \frac{M}{\sqrt{1 - 2 \frac{RM}{\rho}}} = M = 0,001.$$

Il en résulte pour un mouvement direct $a_2 = \frac{AR_1^2}{1,001(R_1^2 + AP)}$. Si Jupiter se trouve à cette époque à son périhélie ou à son aphélie, on a exactement $e_2 = 1$, $2a_2 = \frac{R_1}{1,001}$, c'est-à-dire que la comète devrait passer par le centre du Soleil. Le résultat est sensiblement le même pour une valeur quelconque de R_1 . La comète de Denning 1881 V pourrait presque réaliser ce cas, la valeur de son γ^2 étant peu différente de $\frac{1}{R}$.

M. Callandreau a indiqué plusieurs raisons pour expliquer le fait qu'on ne connaît pas encore des comètes fortement hyperboliques, quoique celles-ci soient aussi probables que les comètes périodiques. Ces raisons sont les suivantes : une moitié de ces astres, pour lesquels $X_2 \xi'_2 + Y_2 \tau'_2$ est positif, se trouvera dans la branche ascendante de l'hyperbole et s'éloignera du Soleil et de nous; une grande partie des autres, pour lesquels $X_2 \xi'_2 + Y_2 \tau'_2$ est négatif, restera à son périhélie trop loin du Soleil, ou passera au périhélie sous des conditions défavorables pour l'observation.

La distance périhélie d'une comète devenue hyperbolique par l'action de Jupiter et ayant un mouvement direct doit être grande,

à moins que la valeur de γ ne soit considérable. On a, en effet, d'après (18*),

$$\sqrt{p_2} \cos i_2 = \left(\frac{3}{R_2} - \gamma^2 - \frac{1}{a_2} \right) \frac{R_2^{\frac{3}{2}}}{2};$$

donc

$$q_2 = \frac{R_2^{\frac{3}{2}}}{4(1+e_2) \cos^2 i_2} \left(\frac{3}{R_2} - \gamma^2 - \frac{1}{a_2} \right)^2.$$

Pour $\gamma^2 = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{a_2}$, on aurait $q_2 = \frac{R_2}{(1+e_2) \cos^2 i_2}$, et dans le cas le plus favorable de $\cos i = +1$, $q_2 = \frac{R_2}{1+e_2}$ ou sensiblement $q_2 = \frac{R_2}{2}$, vu que e_2 serait peu différent de l'unité. Or on ne découvre que tout à fait exceptionnellement des comètes ayant une aussi grande distance périhélie. Il faudrait donc que γ^2 fût encore plus grand que $\frac{1}{R_2} - \frac{1}{a_2}$. Mais une comète, ayant une vitesse relative considérable, reste moins longtemps dans le voisinage de Jupiter et dans sa sphère d'activité; sa distance périjove doit donc être très faible (d'après le Tableau ci-joint plus petit que 0,02) pour qu'elle puisse subir de fortes perturbations. Ces circonstances doivent notablement diminuer la fréquence des comètes hyperboliques. La distance périhélie de ces comètes est sensiblement plus faible avant l'entrée qu'après la sortie; il est donc possible que des comètes paraboliques observées par nous deviennent plus tard des comètes hyperboliques par l'action de Jupiter.

Des orbites hyperboliques rétrogrades doivent être encore plus rares et présenter au moins une faible distance périhélie, ou une grande inclinaison, vu qu'on aurait, dans ce cas,

$$\gamma^2 = \frac{3}{R_2} - \frac{1}{a_2} - \frac{2}{R_2^{\frac{3}{2}}} \sqrt{p_2} \cos i_2,$$

c'est-à-dire $\gamma^2 \approx \frac{4}{R}$.

On aurait donc plus de chances de trouver des comètes fortement hyperboliques de mouvement direct que des rétrogrades. La question de leur existence est assez importante pour engager les chercheurs de comètes à explorer particulièrement la région du ciel opposée au Soleil, dans laquelle les circonstances de visibilité sont plus favorables à cause de leur grande distance périhélie, et dans

laquelle on devrait aussi rencontrer des comètes périodiques d'une faible excentricité.

Il existe deux cas dans lesquels a et $\sqrt{p} \cos i$ ne changent que très peu malgré une forte action de Jupiter : c'est quand $\cos l$ ou $\sin(\lambda + \sigma)$ sont peu différents de zéro. Pour $\cos l = 0$, c'est-à-dire $i = 90^\circ$ et $\cos n = 1$, et pour $\sin(\lambda + \sigma) = 0$, on a

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{R^2} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos n [\sin v - \sin(v + 2\sigma)] \\ + \frac{i(\tau - \theta)}{R^2} \gamma \cos n \cos(v + 2\sigma).$$

La valeur de cette expression ne peut jamais atteindre 0,02.

Il est facile de trouver les conditions qui déterminent le sens du mouvement de la comète avant et après les grandes perturbations. Il suffira de considérer le cas où $\cos l$ est grand, vu que $\sqrt{p} \cos i$ ne pourrait pas beaucoup varier pour de petites valeurs de $\cos l$. Nous négligerons, pour simplifier, les termes en $\cos n$ et nous regarderons l'orbite de Jupiter comme circulaire.

Nous avons, d'après (18*),

$$\sqrt{p_1} \cos i_1 = \left(\frac{3}{R} - \gamma^2 - \frac{1}{a_1} \right) \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2}.$$

En posant $\gamma^2 = \frac{b}{R} - \frac{1}{a_1}$, c'est-à-dire $\sqrt{p_1} \cos i_1 = \frac{3-b}{2} \sqrt{R}$ ou $H_1 = \frac{3-b}{2R}$, nous avons, d'après (11), (13) et (17),

$$H_2 = H_1 \cos 2\sigma - \frac{\gamma}{\sqrt{R}} \cos l \sin \lambda \sin 2\sigma \\ = H_1 \cos 2\sigma \mp \frac{\sin 2\sigma}{\sqrt{R}} \sqrt{\gamma^2 \cos^2 l - R H_1^2}.$$

$$\sqrt{p_2} \cos i_2 = \sqrt{R} \left[1 - \frac{b-1}{2} \cos 2\sigma \mp \sin 2\sigma \sqrt{\left(b - \frac{R}{a_1} \right) \cos^2 l - \frac{1}{4} (b-1)^2} \right].$$

On voit que le mouvement héliocentrique primitif est direct tant que b est inférieur à 3, mais que l'orbite modifiée peut devenir rétrograde pour des valeurs sensiblement plus faibles de b , si toutefois $\sin \lambda$ est positif, et qu'alors $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$ prend des valeurs positives très considérables. Pour $\frac{1}{a_1} = 0$, $\cos l = 1$ et $\sin 2\sigma = 1$, b dé-

passerait très peu l'unité; pour des valeurs négatives de $\frac{1}{a_1}$, b pourrait même être inférieur à 1. Pour $b > 3$ et $\frac{1}{a_1} = 0$ le mouvement primitif est rétrograde, mais il devient direct si $\sin \lambda$ est négatif et $\sin 2\sigma$ assez grand. Dans ce cas, l'orbite modifiée sera hyperbolique; $\frac{1}{a_2}$ ne pourrait être sensiblement positif que pour de fortes valeurs négatives de $\sqrt{p_2} \cos i_2$. Pour $b = 3$ on aura, *grosso modo*,

$$\sqrt{p_1} \cos i_1 = 0,$$

c'est-à-dire soit une distance périhélie q_1 excessivement faible, soit $i_1 = 90^\circ$. Dans le second cas i_2 pourra osciller d'une part entre 90° et 0° , quand on a $\frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_1}$, d'autre part entre 90° et 180° , pour $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_1}$, vu que $\sqrt{p_2} \cos i_2$ prendra pour $\cos l = 1$ toutes les valeurs entre

$$\sqrt{R} \left(1 - \sqrt{2 - \frac{R}{a_1}} \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{R} \left(1 + \sqrt{2 - \frac{R}{a_1}} \right)$$

et que $\sqrt{p_2} \sin i_2$ pourra, dans certaines conditions, être peu différent de zéro.

IV. Examinons maintenant les relations qui subsistent entre l'inclinaison et le nœud de l'ancienne et de la nouvelle orbite.

En posant

$$X = R \cos L, \quad Y = R \sin L,$$

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin \mu \sin t, \quad \zeta'_1 = \gamma \cos \mu \sin t$$

nous avons, d'après (5), (8) et (14),

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_2 = \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin(\mu + 2\sigma) \sin t, \quad \zeta'_2 = \gamma \cos(\mu + 2\sigma) \sin t, \\ R \sqrt{p} \sin i \cos(L - \Omega) = (R^2 + N)\zeta' - (RR' + O)\zeta, \\ R \sqrt{p} \sin i \sin(L - \Omega) = \frac{\zeta}{\sqrt{P}} (P + R^2H - RR'O) \\ \quad - \frac{\zeta'}{P} (R^2K - RR'N), \\ p \sin^2 i = r^2 \zeta'^2 + g^2 \zeta^2 - 2rr' \zeta \zeta' \end{array} \right.$$

et, en négligeant tous les termes qui ne peuvent pas dépasser 0.01

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{p_1} \sin i_1 \cos(L_1 - Q_1) \\
 &= \left[R_1 \gamma \cos \mu - \sqrt{M\pi} \cos n \sin(\nu - \mu) - R_1 \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin \mu \right] \sin \iota, \\
 & \sqrt{p_2} \sin i_2 \cos(L_2 - Q_2) \\
 &= \left[R_2 \gamma \cos(\mu + 2\sigma) + \sqrt{M\pi} \cos n \sin(\nu - \mu) \right. \\
 & \quad \left. - R_2 \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin(\mu + 2\sigma) \right] \sin \iota, \\
 & \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin(L_1 - Q_1) \\
 &= \left[\frac{\sqrt{P}}{R_1} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin \mu + \sqrt{M\pi} \cos l \sin(\mu - \lambda) \right] \sin \iota, \\
 (21^*) \quad & \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin(L_2 - Q_2) \\
 &= \left[\frac{\sqrt{P}}{R_2} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin(\mu + 2\sigma) + \sqrt{M\pi} \cos l \sin(\mu - \lambda) \right] \sin \iota, \\
 & p_1 \sin^2 i_1 = \left[R_1^2 \gamma^2 \cos^2 \mu + G_1^2 \frac{M\pi}{\gamma^2} \sin^2 \mu \right. \\
 & \quad + 2 R_1 \sqrt{M\pi} \gamma \cos n \cos \mu \sin(\nu - \mu) \\
 & \quad \left. + \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \frac{M\pi}{\gamma} \cos l \sin \mu \sin(\mu - \lambda) \right] \sin^2 \iota, \\
 & p_2 \sin^2 i_2 = \left[R_2^2 \gamma^2 \cos^2(\mu + 2\sigma) + G_2^2 \frac{M\pi}{\gamma^2} \sin^2(\mu + 2\sigma) \right. \\
 & \quad + 2 R_2 \sqrt{M\pi} \gamma \cos n \cos(\mu + 2\sigma) \sin(\nu - \mu) \\
 & \quad \left. + \frac{2\sqrt{P}}{R_2} \frac{M\pi}{\gamma} \cos l \sin(\mu + 2\sigma) \sin(\mu - \lambda) \right] \sin^2 \iota
 \end{aligned}$$

Nous en tirons d'abord, avec une exactitude suffisante,

$$(22) \quad \begin{cases} \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin(L_2 - Q_2) - \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin(L_1 - Q_1) \\ = \frac{\sqrt{P}}{R} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} [\sin(\mu + 2\sigma) - \sin \mu] \sin \iota. \end{cases}$$

Cette expression atteint pour une valeur donnée de ι son maximum pour $\sin(\mu + \sigma) = 0$, et devient alors égale à

$$\pm \frac{2\sqrt{P}}{R} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin \sigma \sin \iota$$

ou, d'après (1) et (6), égale à

$$\pm \frac{2M}{\gamma^2} \frac{\sqrt{P}}{R} \sin \sigma \sin \iota;$$

sa valeur ne pourra jamais dépasser 0,09. Nous pourrons donc adopter la relation approchée

$$(22^*) \quad R_2 \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin(L_2 - \Omega_2) = R_1 \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin(L_1 - \Omega_1).$$

Cette relation remplace avantageusement la première proposition donnée plus haut, d'après laquelle les deux orbites doivent avoir un point commun. Cette relation fournit aussi une équation de condition approximative quand on soupçonne qu'une ancienne observation isolée appartient à une comète périodique qui a dû dans l'intervalle subir une ou plusieurs fois de fortes perturbations.

On déduit de (21*), en négligeant les faibles termes, les deux équations

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{p_1 p_2} \sin i_1 \sin i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2 + L_2 - L_1) \\ & = \sqrt{M\pi} \left[\sqrt{P} \sin 2\sigma + 2R\gamma \cos l \sin(\mu - \lambda) \sin \sigma \sin(\mu + \sigma) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\sqrt{P}}{R} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos n \sin(\nu - \mu) \sin \sigma \cos(\mu + \sigma) \right] \sin^2 \iota, \\ & \sqrt{p_1 p_2} \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2 + L_2 - L_1) \\ & = \left[R^2 \gamma^2 \cos \mu \cos(\mu + 2\sigma) + 2R\sqrt{M\pi} \gamma \cos n \sin(\nu - \mu) \cos \sigma \cos(\mu + \sigma) \right. \\ & \quad \left. + \frac{P}{R^2} \frac{M\pi}{\gamma^2} \sin \mu \sin(\mu + 2\sigma) + \frac{2\sqrt{P}}{R} \frac{M\pi}{\gamma} \cos l \sin(\mu - \lambda) \cos \sigma \sin(\mu + \sigma) \right] \sin^2 \iota. \end{aligned} \right\}$$

On voit que $\text{tang}(\Omega_1 - \Omega_2 + L_2 - L_1)$ est indépendant de ι . Son numérateur est toujours très petit; il faut donc, pour que $\Omega_2 - \Omega_1$ puisse être très considérable, que le dénominateur devienne négatif, ou qu'il soit au moins très petit si son signe est positif. Il existe deux cas où ce résultat peut être facilement obtenu.

Soit d'abord $\sin \mu = 0$, c'est-à-dire $\zeta_1 = 0$.

En posant $\cos l \sin \lambda = \sin \beta$, on a, d'après (9),

$$\cos n \sin \nu = \cos \beta;$$

on aura donc

$$\begin{aligned} & \text{tang}(\Omega_1 - \Omega_2 + L_2 - L_1) \\ & = \frac{\sqrt{M\pi} \left(\sqrt{P} \sin 2\sigma - 2R\gamma \sin \beta \sin^2 \sigma + \frac{\sqrt{P}}{R} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \cos \beta \sin 2\sigma \right)}{R^2 \gamma^2 \cos 2\sigma + 2R\sqrt{M\pi} \gamma \cos \beta \cos^2 \sigma - \frac{\sqrt{P}}{R} \frac{M\pi}{\gamma} \sin \beta \sin 2\sigma}. \end{aligned}$$

Tant que $\gamma^2 n$ 'est pas trop grand, 2σ peut dépasser 90° ; par con-

séquent le premier terme du dénominateur peut devenir négatif; les deux autres sont également négatifs quand $\sin \beta$ est positif et $\cos \beta$ négatif, c'est-à-dire quand K_1 est positif et N_1 négatif. Dans ces conditions le dénominateur, quoique petit, dépassera fort le numérateur et la valeur de $\Omega_1 - \Omega_2$ pourra se rapprocher de 180° .

Soit, en second lieu, $\cos \mu = 0$, c'est-à-dire $\zeta'_1 = 0$. En posant $\cos l \cos \lambda = \cos \delta$, on a

$$\cos n \cos \nu = \sin \delta,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & \text{tang}(\Omega_1 - \Omega_2 + L_2 - L_1) \\ &= \frac{(\sqrt{P} + R\gamma \cos \delta) \sin 2\sigma + 2 \frac{\sqrt{P}}{R} \frac{\sqrt{M}\pi}{\gamma} \sin \delta \sin^2 \sigma}{R\gamma \sin \delta \sin 2\sigma + \frac{P}{R^2} \frac{\sqrt{M}\pi}{\gamma^2} \cos 2\sigma + 2 \frac{\sqrt{P}}{R} \frac{\sqrt{M}\pi}{\gamma} \cos \delta \cos^2 \sigma}. \end{aligned}$$

On voit que $\Omega_1 - \Omega_2$ se rapproche de 180° pour toutes les valeurs un peu considérables de $\sin 2\sigma$, si $\cos \delta$ et $\sin \delta$, c'est-à-dire Π_1 et O_1 , sont négatifs.

La comète de Lexell offre l'exemple d'une forte variation du nœud; les calculs de Le Verrier donnent pour 1767 $\Omega = 352^\circ$ et pour 1770 $\Omega = 132^\circ$. D'après les calculs approchés de M. Chandler le nœud de la comète Brooks 1889 V se serait, en 1885, changé de 179° en 18° .

L'inclinaison est déterminée par l'équation

$$\text{tang } i = \frac{\sqrt{p} \sin i}{\sqrt{p} \cos i}.$$

Nous avons déjà discuté le dénominateur et nous avons d'abord trouvé qu'au maximum $\sqrt{p_2} \cos i_2 - \sqrt{p_1} \cos i_1$ varie approximativement entre les limites $-2R\gamma \cos l \sin \sigma$ et $+2R\gamma \cos l \sin \sigma$, tant que la valeur de $\cos l$ est assez considérable pour qu'on puisse négliger les termes en $\cos n$. Nous avons ensuite remarqué que les limites de $\sqrt{p_2} \cos i_2 - \sqrt{p_1} \cos i_1$ sont tellement larges qu'un mouvement direct peut facilement se transformer en un mouvement rétrograde et inversement, et nous avons déterminé les conditions dans lesquelles cette transformation aurait lieu. Nous avons enfin vu que, quand γ^2 n'est pas trop différent de $\frac{3}{R} - \frac{1}{a_1}$ et que la distance périhélic n'est pas très petite, i_1 se rapproche de 90° et que

dans ce cas i_2 pourra presque atteindre 0° ou 180° si la valeur de $\sqrt{p_2} \sin i_2$ devenait très faible. L'examen de l'expression de $\sqrt{p} \sin i$ en (21) et (21*) montre que, pour des valeurs données de ι et γ , $\sqrt{p} \sin i$ subira des variations d'autant plus fortes que ζ' sera plus petit. Pour $\zeta'_1 = 0$ la valeur de

$$\sqrt{p_1} \sin i_1 = g_1 \zeta'_1 \sqrt{\frac{2}{R} \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} \sin \iota}$$

ne dépasserait jamais 0,1, tandis que $\sqrt{p_2} \sin i_2$ prendrait des valeurs considérables si $\sin 2\sigma$ était peu différent de 1. On aurait, dans ce cas, avec une exactitude suffisante,

$$\sqrt{p_2} \sin i_2 = [R_2 \gamma \sin 2\sigma + \sqrt{M\pi} \cos n \sin(\nu - \mu)] \sin \iota.$$

$\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$ étant très petit pour des valeurs considérables de $\sin 2\sigma$, on aurait donc sensiblement $\sin i_1 = 0$ et

$$\sqrt{p_2} \sin i_2 = R \gamma \sin 2\sigma \sin \iota.$$

On voit ainsi qu'au cas d'une grande proximité d'une comète à Jupiter, la probabilité de fortes variations de l'inclinaison est très grande. Celle-ci ne resterait à peu près constante que dans le cas d'une très faible inclinaison jovicentrique ι et quand $\sqrt{p} \cos i$ et $\sqrt{p} \sin i$ augmenteraient ou diminueraient simultanément.

La comète de Lexell offre un exemple de très grandes variations de l'inclinaison; celle-ci était avant 1767 de 33° d'après Le Verrier, de 42° d'après Burckhardt, et seulement de $1^\circ, 5$ en 1770. La plus forte inclinaison constatée est celle de la comète périodique de Pigott 1783, de 45° , ou celle de 54° de la comète Méchain-Tuttle, d'une période d'environ 14 années, si l'on veut encore comprendre cet astre dans le groupe des comètes périodiques qui doivent leur ellipticité à Jupiter. La rareté de grandes inclinaisons s'explique très simplement par le fait que les grandes vitesses jovicentriques γ sont peu fréquentes. Nous avons vu qu'à de petits γ correspondent un mouvement héliocentrique direct et des valeurs relativement considérables de $\sqrt{p} \cos i$. Si donc $\cos i$ est petit, p doit devenir grand, par conséquent l'excentricité faible; dans ces conditions l'astre reste toujours trop loin de nous pour pouvoir être découvert. Cette raison explique le fait, surprenant à

première vue, qu'un assez grand nombre de comètes périodiques sont découvertes peu après une forte modification de leur orbite par l'action de Jupiter. Pour la plupart de celles-ci les conditions de visibilité étaient antérieurement moins favorables.

(A suivre)

ÉLÉMENTS PROVISOIRES DE LA PLANÈTE (296);

PAR M. J. CONIEL.

La planète (296) ne semble avoir été observée que par l'intermédiaire de sa découverte à Nice, M. Charlois, du 20 août au 16 septembre 1890. Les éléments provisoires que nous publions ont été déduits sous la direction de M. Schulhof, qui a bien voulu vérifier une grande partie de nos calculs.

A l'aide d'un premier système d'éléments, et avec les neuf observations qui nous ont été fournies par M. Charlois, nous avons déduit cinq lieux, de la manière suivante : août 22,0 (4 obs.), août 26,0 (1 obs.), septembre 1,8 (2 obs.), septembre 6,5 (1 obs.) et septembre 16,4 (1 obs.).

Ce système d'éléments a été obtenu par la méthode de la détermination des distances.

1890 août 22,0, T. m. de Paris.

M.....	330.33.44,5	} Équin. et éclipt. moy. 1890,0.
π	10.49.12,6	
\varnothing	120.49.17,9	
i	1.44.53,1	
φ	9. 6.25,9	
μ	1068",122	
log a	0,3475906	

La représentation des lieux intermédiaires montre les écarts suivants dans le sens observation moins calcul :

	II.	III.	IV.
$\Delta\lambda$	-0",8	+1",0	+0",9
$\Delta\beta$	+2",3	+0",5	+0",2

L'incertitude du mouvement moyen diurne dépasse $\pm 10''$. Nous proposons de préparer, pour la prochaine opposition, des éphémérides de recherches.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

VIERTELJAHRSCHEFT DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT, 25^e année, fascicule 2 ;
Leipzig, 1890.

Nous trouvons, dans ce fascicule, des notices plus ou moins détaillées sur les travaux des observatoires suivants :

Bâle, Berlin, Bonn, Breslau, Dresde (Engelhardt), Dusseldorf, Genève, Göttingue, Gotha, Hambourg, Herény (Gothard), Kalocsa, Kiel, Königs-berg, Kremsmünster, Leipzig, Lund, Milan, Munich, O'Gyalla (Konkoly), Potsdam, Prague, Prague (Safarik), Stockholm, Strasbourg, Upsal, Zurich.

A Bâle, les instruments sont utilisés, avant tout, pour l'enseignement. A Zurich, on s'occupe surtout de l'étude du Soleil. A Genève, en dehors de l'étude des chronomètres déposés par l'industrie horlogère, on a pu faire quelques déterminations de positions et quelques observations d'Astronomie physique; le service météorologique a fonctionné comme par le passé.

A Berlin, le grand cercle méridien, confié aux mains expérimentées de M. Küstner, a été employé en dehors des observations courantes, à diverses recherches spéciales, relatives à l'équation personnelle qui dépend de l'éclat des étoiles, à la nouvelle disposition du bain de mercure, imaginée par M. Gautier (*Bulletin*, II, p. 549), etc. On a constaté, comme l'avait aussi trouvé M. Périgaud (*Bulletin*, V, p. 315), que le calme des images n'est pas dû au flottage partiel de la cuvette, mais à la faible épaisseur de la couche mercurielle; les meilleures images s'obtenaient en réduisant cette couche à un quart de millimètre. Il faudra seulement s'assurer que, dans ces conditions, la tension superficielle n'altère pas l'horizontalité du bain de mercure. M. Küstner fait encore mention d'une oscillation des niveaux du cercle, observée par lui le 25 août 1889, vers 8^h30^m, temps moyen, et qui paraît avoir eu pour cause le tremblement de terre ressenti le même jour en Grèce. La vitesse de propagation aurait été d'environ 3^{km} par seconde. M. Knorre a continué d'observer au réfracteur de 9 pouces, en se servant tour à tour de son déclinographe et d'un micromètre filaire. Il a entrepris des recherches sur le micromètre à double image de Wellmann, et sur les causes du *temps perdu* dans la marche des vis micrométriques (voir *Bulletin*, VII, p. 445). M. Wellmann a expérimenté, en outre, un nouveau micromètre circulaire, tracé sur verre et éclairé par la tranche. M. Goldstein s'est livré à des recherches d'analyse spectrale. M. Marcuse a employé l'instrument des passages à

des observations destinées à mettre en évidence les variations de la latitude, et dont les résultats sont maintenant connus. Il a constaté, de son côté, une oscillation des niveaux, causée par un tremblement de terre dans la nuit du 11 au 12 juillet. La hauteur des nuages noctiluques signalés par M. O. Jesse, a été fixée par des levés photographiques exécutés en trois stations. M. Battermann a observé au petit cercle méridien. M. Færster n'a pas discontinué ses recherches sur la marche des pendules. Le Bureau des Calculs, dirigé par M. Tietjen, a publié *Jahrbuch* pour 1891 et préparé le volume suivant.

L'Observatoire de Potsdam est, depuis le commencement de 1889, en possession d'un réfracteur photographique de Steinheil et Repsold (objectif optique de 9 pouces, objectif photographique de 13 pouces) dont les qualités ont été trouvées tout à fait satisfaisantes. MM. Vogel et Scheiner ont terminé une longue série de photographies de spectres stellaires, qui sont mesurées et discutées en vue de recherches sur le mouvement des étoiles dans le sens du rayon visuel. M. Müller a profité d'un séjour de trois mois sur le Sântis pour étudier les raies telluriques du spectre solaire. Il a continué, avec M. Kempf, ses travaux de photométrie. M. Spörer poursuit toujours l'étude de la surface solaire. M. W. Siemens s'est occupé de recherches sur la rotation du Soleil et sur la vitesse de la lumière.

A Bonn, on s'efforce de terminer la revision et la réduction des zones comprises entre $+40^{\circ}$ et $+50^{\circ}$. M. Schönfeld a consacré ses loisirs à mettre en ordre les matériaux qu'il a réunis touchant les étoiles variables.

Le personnel de l'Observatoire de Breslau a pris part à une nouvelle détermination de la longitude, ainsi qu'aux recherches concernant la variabilité des latitudes. A Dresde, M. d'Engelhardt a observé des planètes, des comètes, des nébuleuses. M. R. Luther, à Dusseldorf, a obtenu quelques positions de planètes.

Le grand héliomètre de l'Observatoire de Göttingue est employé par M. Schur à une triangulation de l'amas du Cancer (la Crèche), dont on possède déjà des mesures micrométriques, exécutées par A. Hall et par Winnecke. En outre, on a observé, avec le même instrument, les planètes Victoria et Sapho, en vue d'une détermination de la parallaxe du Soleil. Le petit héliomètre est entre les mains de M. Ambronn, le cercle méridien est confié à M. Buschbaum. Le Catalogue des zones de Klinkerfeld est prêt pour l'impression.

M. Harzer, directeur de l'Observatoire de Gotha, a terminé ses recherches sur la théorie de la Lune. L'Observatoire de Hambourg, qui est maintenant chargé de l'étude des chronomètres de la marine, a pu, en outre, fournir un grand nombre de positions d'étoiles fixes, de planètes et de comètes.

A Herény, on a installé l'éclairage électrique et commencé la construction d'une maison d'habitation. A Kalocsa, on n'a pu obtenir que quelques observations de taches solaires. De même, à O'Gyalla, on a observé le Soleil, tenté quelques expériences de photographie, etc.

A Kiel, M. Krueger a publié le catalogue de ses zones (voir *Bull.*, VII, p. 384). MM. Krueger, Lamp et Kreutz ont consacré aux observations courantes, à des calculs d'éphémérides, etc., le temps que leur laissent la publication des *Astronomische Nachrichten* et le service des télégrammes astronomiques. A Königsberg, MM. Peters et Rahts observent au cercle méridien, l'héliomètre est entre les mains de M. Franz. A Kremsmünster, M. Schwab a obtenu quelques positions de comètes et de planètes, sans compter les observations de taches solaires.

A Leipzig, on est occupé à terminer la réduction des zones. M. Peters a exécuté une série de mesures héliométriques. A Lund, on a commencé l'impression des zones.

A l'Observatoire de Milan, M. Schiaparelli a mesuré des étoiles doubles, et mené à bonne fin ses belles recherches sur la rotation de Mercure et de Vénus, que nos lecteurs connaissent déjà. M. Celoria a observé des comètes, mesuré des étoiles doubles. M. Rajna et M. Porro ont exécuté des travaux géodésiques.

Le grand Catalogue de l'Observatoire de Munich, fondé sur les observations anciennes, s'imprime lentement. M. Bauschinger a mis beaucoup de temps et de soin à le purger des fautes qui s'y étaient glissées. Le nouveau Catalogue est également terminé. Le réfracteur a été utilisé par M. Seeliger, M. Bauschinger et M. Oertel pour des observations diverses.

A Prague, M. Weinek a continué de faire des dessins de paysages lunaires. Il a participé, avec M. Gruss, aux recherches méthodiques sur la variabilité des latitudes, dont nous avons déjà eu, plus d'une fois, l'occasion de parler. M. Safarik a poursuivi ses observations d'étoiles variables.

A Stockholm, M. Charlier s'occupe de photographie céleste. M. Gylén et ses collaborateurs préparent diverses publications, relatives à leurs recherches théoriques. L'Observatoire d'Upsal n'a encore que des instruments de faible dimension, dont MM. Dunér, Bohlin et Schultz-Steinheil s'efforcent de tirer le meilleur parti possible.

A Strasbourg, on commence à se plaindre du peu de stabilité des fondations de l'Observatoire et du voisinage de rues fréquentées. Le grand réfracteur a été utilisé par M. Becker; le cercle méridien par MM. Kobold, Wislicenus, Kaufmann, Zwink, Halm. L'altazimuth a été employé par M. Kobold à une série d'observations de la latitude par la méthode Horrebow-Talcott. Les résultats sont malheureusement affectés de fortes erreurs systématiques, qui paraissent provenir de l'imperfection du niveau employé, mais dont la cause n'a pas encore été complètement expliquée.

La variation de la latitude, constatée à Strasbourg, s'accorde d'ailleurs avec ce qui a été observé ailleurs. L'héliomètre a été utilisé pour des mesures du diamètre solaire, pour l'observation de conjonctions des planètes, etc. On pousse avec activité la réduction des observations méridiennes accumulées depuis longtemps, ainsi que celle des zones observées à Strasbourg. R.

THE SIDEREAL MESSENGER

(novembre 1889-décembre 1890).

Piazzi Smyth (C.). — Dépendance entre la Météorologie et les cycles des taches solaires.

Monck (W.-H.-S.). — Météores et météorites (8 pages).

Veeder (M.-A.). — L'origine solaire de l'aurore boréale.

L'auteur a constaté, sur près de 200 aurores boréales, qu'il y a une liaison remarquable entre l'apparition des aurores et l'existence de perturbations, représentées surtout par les facules, au bord oriental du Soleil.

M. Marchand, météorologiste à l'Observatoire de Lyon, a naguère publié (*Bulletin*, VI, p. 309) un travail intéressant sur les relations des phénomènes solaires et des perturbations du magnétisme terrestre.

Keeler, Barnard, Hill, Leuschner. — Observations de l'occultation de Jupiter, le 3 septembre 1889, à l'Observatoire Lick.

Burnham (S.-W.). — Notes sur les étoiles doubles.

Étoiles.	s.	Remarques.
Comp. ψ^1 Verseau.....	0,15	Mouvement relatif du couple insensible.
★ près ψ^3 Verseau....	1,0	Notée 11 ^M en 1884-88, rien vu en 1889.
Comp. ζ^4 Cassiopée...	1,7	Petit compagnon nouveau.
★ Pléiades.....	0,3	Couple 9 ^M , suit Alcyone 6 ⁴ 4' N.
★ Pléiades.....	0,4	Couple 11 ^M , 5, suit 28 Taureau 55 ^s .
Comp. 67 Ophiuchus...	6,8	★ très faible.
Comp. DM 63 ^o , 1618....	1,3	Compagnon très faible à ★ principale.
Σ 2816.....	1,5	Petit comp. à ★ princip. Mou. rel. nul.
2 Andromède.....	0,8	Couple nouveau.
Comp. α Cassiopée....	17,5	★ très faible.
γ Andromède.....	< 0,1	Allongée, limite pour la lunette de 36 ^o .
7 Taureau.....	0,30	Mouvement rapide.
70 Ophiuchus.....		3 ^e ★ du syst. invis. Compos. coïncident.

Barnard (E.-E.). — Appulse de Mars et de Saturne, le 19 septembre 1889. Mesures micrométriques.

Hall (Asaph). — Le milieu résistant dans l'espace (9 pages).

M. Hall expose les conséquences qu'on peut tirer des recherches de Encke, von Asten, et de celles plus récentes de MM. Möller, Backlund, E. von Haerdtl. L'existence d'un milieu résistant ne peut guère être défendue d'une manière générale. M. Hall suggère qu'il y aurait lieu de reprendre les idées de Bessel (*Astronomische Nachrichten*, t. XIII, p. 345) sur les perturbations du mouvement qui peuvent résulter de l'abandon d'une partie de la matière cométaire par suite de la désintégration.

Porter (J.-G.). — Notice sur Ormsby Macknight Mitchell.

Howe (H.-A.). — Effet des trépidations terrestres sur le bain de mercure.

Lewis Swift. — Étoiles filantes doubles.

L'auteur cite plusieurs observations d'étoiles filantes doubles; dans l'un des cas, un léger filament réunissait les deux composantes.

Pickering (W.-H.). — La grande nébuleuse d'Orion.

Description sommaire des photographies obtenues au sommet du mont Wilson, élevé de plus de 2000^m, et qui montrent des filaments nébuleux non encore remarqués entre les étoiles, ainsi qu'une grande nébuleuse spirale dont l'extrémité extérieure se trouve dans le voisinage de γ Orion. Cela tendrait à montrer que les étoiles et la nébuleuse sont liées ensemble (*Bulletin*, VIII, 129). M. Pickering promet une description détaillée des épreuves. Il doute qu'on puisse obtenir de tels résultats dans les observatoires placés à proximité des grandes villes.

Coakley (G.-W.). — Sur la stabilité des anneaux de Saturne (2 articles).

Après avoir cité les travaux connus de Laplace, Bond, Maxwell, etc., l'auteur entreprend de prouver que les anneaux peuvent être fluides : parce que les marées engendrées par un corps extérieur, satellite, Soleil, etc., produisent un effet contraire à celui de l'attraction de ce corps sur les anneaux non déformés. Laplace, comme on sait, a montré qu'un

est tout uniforme et homogène étant restée et que la moindre action exercée se traduit à l'aise sur la planète les masses pesantes balance-
ment en effet.

Waltrey Miss Mary-W. — Notice sur Maria Mitchell.

M^{lle} Maria Mitchell était directeur de l'observatoire du Collège Vassar, réservé à l'éducation des jeunes filles. On lui doit des découvertes de comètes. M^{lle} Waltrey lui a succédé.

Edgewood D.-W. — Une visite à Slough.

Célèbre par les travaux de W. Herschel.

Comstock G.-C. — Observations d'étoiles doubles à l'Observatoire Washburn.

Les observations ont porté sur des couples découverts, de 1881 à 1884, par M. Burnham et M. Holden, et mesurés, en 1888, par M. Comstock, qui a pris soin de déterminer son équation personnelle avec M. Burnham d'après la comparaison des mesures sur 134 couples. Une étoile triple intéressante a aussi été mesurée :

$$SD. 14^{\circ}.1171: \quad R = 5^{\circ}28^m.6 \quad D = -17^{\circ}27'.$$

Étoiles A et B. gr. 10-11.

1882,3.....	1^s	130^p	Estimé (Holden).
1888,35.....	$2^s.76$	219.6	Comstock.

Étoiles A et C.

1888,91.....	$1^s.80$	$252^p.2$	Petit comp. nouv. (Comstock).
--------------	----------	-----------	-------------------------------

Toutes ces mesures doivent être bientôt publiées.

Hutchins (C.-C.). — Usage des fils de quartz pour les micromètres.

On doit à M. Vernon Boys le moyen de fabriquer des fils de quartz très remarquables par leur finesse, la régularité de leur diamètre, leur résistance à la rupture et leur faible couple de torsion (au moyen de ces fils, M. Boys a reproduit facilement, en petit, l'expérience de Cavendish sur l'attraction des sphères). M. Hutchins dit qu'un micromètre garni de fils de quartz ne laisse rien à désirer.

C'est la première application à l'Astronomie de la belle invention de M. Vernon Boys.

Tatlok (John jr.). — Nouvel horizon artificiel.

Une boîte ronde et plate couverte d'un disque de glace légèrement courbé renferme de l'éther; on s'arrange pour que la bulle circulaire soit vue au milieu du disque.

L'Éditeur. — La grande lunette de l'Observatoire Lick (avec un dessin).

Frost (E.-B.). — Activité relative des deux hémisphères solaires.

Gerrish (W.-P.). — Observations de passages au moyen de la photographie.

Compte rendu des essais poursuivis à l'Observatoire d'Harvard depuis 1886 (*Mémoires de l'Académie américaine*, t. XI, p. 228).

Des appareils spéciaux ont été construits en 1888 et depuis, qui adaptés à une lunette de 3 pouces, permettent d'enregistrer photographiquement les passages des étoiles des trois premières grandeurs. Il faudrait une grande ouverture à l'instrument méridien dans le cas des étoiles plus faibles.

La méthode proposée par M. Wilson (*Bulletin*, VII, 123) ne diffère pas de celle des premiers essais, en 1886.

Il paraît important de poursuivre ces tentatives en vue des observations du Soleil. N'en pourrait-on pas tirer aussi parti pour déterminer les équations personnelles?

Gerrish (W.-P.). — Interrupteur de circuit pour les pendules.

Cette forme d'interrupteur est facile à construire et peut être adaptée en quelques minutes à une pendule quelconque. On s'en sert à l'Observatoire d'Harvard pour contrôler le mouvement de la lunette photographique de Draper.

M. C.-A. Young s'en est servi autrefois de son côté (Cf. *Sidereal Messenger*, p. 233, une lettre de M. Young).

Wilson (H.-C.). — Sur la comète 1889 V.

Notice sur les recherches de M. Chandler concernant l'identité de la comète avec la comète de Lexell, ainsi que sur les travaux de MM. Schulhof et Bredichin (voir *Bulletin*, VI, *passim*).

Bigelow (F.-H.). — Expédition américaine pour l'observation de l'éclipse solaire du 22 décembre 1889.

Notice sur cette expédition, dirigée par le professeur Todd (*Bull. Litta.*, VII, 359). Le cap Ledo était une bonne position, mais le ciel a été couvert.

Pickering (W.-H.). — L'occultation de Jupiter, le 3 septembre 1889, observée sur le mont Wilson.

8 épreuves photographiques ont été obtenues avec une lunette de 13 pouces: elles montrent une influence sensible de la phase; mais le disque de la planète pendant l'occultation ne présente pas d'autres ombres que les taches. Les mesures micrométriques des photographies donneraient pour le diamètre de Jupiter mesuré près de la Lune et dans la direction de son centre une diminution d'environ 1"; cela représenterait le double de la réfraction horizontale pour la Lune, soit environ le $\frac{1}{1000}$ de la réfraction horizontale dans le cas de la Terre.

Il serait intéressant de recommencer les déterminations de M. W.-H. Pickering.

Hough (G.-W.). — Éclairage d'un micromètre.

M. Hough se trouve très bien de l'éclairage électrique qu'il obtient simplement au moyen de quelques accumulateurs.

Lewis Swift. — Les grains de Bailey.

Ce curieux phénomène accompagne toujours les éclipses totales et annulaires de Soleil. Quand la Lune empiète sur le Soleil en avançant vers l'Est, et réduit le bord oriental du Soleil à un croissant très étroit, ce croissant se brise tout d'un coup en une quantité d'objets lumineux allant d'un bout à l'autre du croissant et rappelant les grains d'un cha-pelet. Francis Bailey les a décrits en 1836, mais ils ont été vus auparavant par Halley et par d'autres. Le même phénomène a lieu au bord ouest du Soleil 4^e ou 5^e avant que le bord de la Lune le laisse à découvert.

Ces grains lumineux présentent différentes formes suivant les observateurs. On les a attribués aux dépressions des montagnes de la Lune, mais cette explication n'est guère admissible, et M. Swift pense que la cause est plutôt à chercher dans la diffraction de la lumière qui produit aussi la *goutte noire*.

Wendell (O.-C.). — Solution approchée de l'équation d'Euler pour les orbites paraboliques.

La modification proposée par l'auteur consiste à supposer $\mu = 1$ et les deux rayons extrêmes égaux; on obtient facilement la valeur de l'un d'eux par des approximations successives.

Habituellement on procède par approximations successives en prenant $r + r'' = 2$. Il est certain que cette hypothèse peut être éloignée de la vérité, et cela arrivera de plus en plus dans l'avenir avec les grands instruments qui permettront de voir les comètes très loin de la Terre.

Au lieu de supposer les rayons vecteurs égaux avec M. Wendell, il paraît préférable d'admettre que $r^2 + r''^2 = \frac{(r + r'')^2}{2}$, ce qui conduit à une valeur approchée de $r + r''$, qui servira de point de départ au lieu de $r + r'' = 2$; on pourrait déterminer cette valeur approchée en résolvant graphiquement une équation de la forme

$$aX + b = F(X, c).$$

(Voir un article de M. Radau, *Bulletin*, IV, p. 416 et suiv.).

Safford (T.-H.). — La photographie et les observations méridiennes.

La photographie céleste permettra sans doute, dans l'avenir, de limiter les observations méridiennes aux étoiles de huitième grandeur ou plus brillantes; mais il faudra avoir leurs coordonnées avec une grande précision et employer d'excellents instruments.

On a aujourd'hui les positions précises des étoiles de sixième grandeur; elles sont disséminées dans une foule de documents. Un travail utile serait la détermination des positions précises des étoiles de septième grandeur dont beaucoup ont été observées à des époques antérieures (d'Agelet, Piazzini, Groombridge). Le besoin des étoiles de huitième grandeur ne se fera sentir que plus tard (Cf. *Bulletin*, VII, 140).

Brashear (J.-A.). — Perfectionnement des mesures modernes. (Extrait des *Transactions of the Engineers Society of Western Pennsylvania*).

Conférence dans laquelle l'auteur signale un nouvel instrument du professeur Albert Michaelson, le *Réfractomètre interférentiel*, qui, fondé sur le phénomène des interférences, permet de faire les mesures avec une erreur relative de $\frac{1}{10^6}$.

Newton (H.-A.). — Notice sur le professeur Elias Loomis (13 pages avec un portrait).

Notice étendue sur le célèbre astronome et météorologiste américain, né le 7 août 1811 et mort le 15 août 1889.

Pickering (W.-H.). — Photographies de la surface de Mars.

Ces photographies, prises sur le mont Wilson (avril 1890), montrent dans les taches polaires des changements caractérisés qu'on peut suivre de jour en jour.

Aldro Jenks. — Courbure de l'ombre sur les anneaux de Saturne.

La courbure était opposée à la planète, en sens contraire (1889, avril 25) du sens ordinaire; cela a été noté par d'autres observateurs (*Webb : Cæsterial objects for common Telescopes*). L'auteur propose une explication.

Burnham (S.-W.). — Mesures du compagnon de Sirius avec la lunette de 36 pouces.

	s.	p.
1890,232	4,17	359,6
1890,239	4,20	361,6
1890,304	4,19	356,8

Monck (W.-H.-S.). — Une application des mesures spectroscopiques faites sur les étoiles doubles.

L'auteur montre le parti qu'on peut tirer d'un travail de M. Rambaut (*Bulletin*, VII, 250), qui donne le produit de la parallaxe π par la composante radiale V de la vitesse orbitale

$$\pi V = A + B \cos(\theta - \lambda),$$

où θ est l'anomalie vraie; A , B et λ dépendent des éléments de l'orbite.

Soient v_1 , m_1 et v_2 , m_2 les vitesses radiales et les masses des deux composantes du couple, la première étant l'étoile principale : la vitesse radiale du centre de gravité du système sera $\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$; la vitesse radiale W de l'étoile principale déterminée par le spectroscopie

$$W = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \text{mouv. pr. du couple} = \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} + \text{mouv. p.}$$

ou

$$W = \pm \frac{m_2}{m_1 + m_2} V + \text{mouvement propre.}$$

En retranchant les deux équations qui ont lieu pour deux époques, on trouve

$$\pi \frac{m_1 + m_2}{m_2} = B \frac{\cos(\theta - \lambda) - \cos(\theta' - \lambda)}{W - W'}$$

Le second membre étant connu, il en résulte en particulier une limite supérieure de la parallaxe π .

Harris Hancock. — Arguments de Ptolémée contre la rotation de la Terre.

Citation des pages 19 et suiv. de l'*Almageste*.

Wood (W.-E.). — Spectre de l'éclair (avec un dessin).

Observation faite le 23 juin 1890, avec un petit spectroscopie de Browning, sans échelle de mesure.

Burnham (S.-W.). — Sur quelques étoiles doubles découvertes à l'observatoire Washburn et remesurées avec la grande lunette de 36 pouces.

	<i>s.</i>	<i>p.</i>	
§ 815.....			Chang. dû au mouv. pr. 0", 15 par 145°.
§ 794.....	0,50	126,9	1890,35 Chang. considér. en <i>p.</i>
Comp. à § 794...	5,71	71,8	1890,37 Comp. déc. av. le 36 ^{me} .
Autre comp. ...	26,73	78,6	1890,37 Id.

Hazen (H.-A.). — Mouvement de l'atmosphère au-dessus des nuages.

L'observation des fumées et des traînées des météores pourrait jeter quelque lumière sur le mouvement des couches supérieures de l'atmosphère (voir aussi une lettre de M. Swift, *Sidereal Messenger*, p. 472).

Backhouse (T.-W.). — La structure de l'univers sidéral.

Indication sur le contenu d'un Mémoire (*Bulletin*, VII, 255) que l'auteur se fera un plaisir d'envoyer aux astronomes qu'intéresse ce sujet.

Sadler (H.). — Liste des parallaxes d'étoiles (11 pages).

Reproduction d'un Tableau publié dans le numéro de février de *Knowledge*.

Bulletin astronomique. T. VIII. (Mai 1891.)

Jones (G.-S.). — Travail d'un miroir de télescope (10 pages).

Indications étendues sur les parties principales du travail. L'auteur indique à ceux qui voudraient avoir plus de détails l'article *Télescope* dans l'*Encyclopedia britannica* et le Mémoire du professeur Henry Draper dans le t. XIV des *Smithsonian Contributions* (1865) sur la construction de sa lunette de 15^{me}, 5.

Pickering (W.-H.). — Observation oculaire de la surface de Mars.

M. Pickering a examiné la surface de Mars au point de vue des colorations et des canaux. Avec un peu d'exercice, il a reconnu sans difficulté la plupart des canaux de Schiaparelli, sans pouvoir les dédoubler toutefois. Les observations ont été faites avec l'équatorial de 12 pouces de Cambridge.

Le nouvel équatorial de l'Observatoire du Collège de Carleton.

Il aura 16 pouces d'ouverture : les deux disques de flint (de Iéna) et de crown (Mantois, à Paris) sont soumis à l'examen préalable du professeur Hastings, de l'Université Yale, et de M. Brashear.

Packer (D.). — Nouvelle variable près de l'amas 5 M (Balancé).

L'étoile précède l'amas de 9^e ou 10^e. La variabilité a été confirmée par M. Common (*Bulletin*, VII, 366).

Mann (N.-M.). — Notes sur quelques couples remarquables.

Notice sur les orbites de Castor et de 70 Ophiuchus.

Notice biographique sur Chester Smith Lyman.

Parkhurst (H.-M.). — Comment on mesure l'invisible.

Conférence populaire sur les découvertes dues au spectroscopie.

See (T.-J.-J.). — Sur la loi de l'attraction dans les systèmes stellaires.

L'auteur, étudiant américain qui complète ses études à l'Université de Berlin, a publié (il n'est pas dit où) un travail d'après lequel l'universalité de la loi de Newton peut être établie en faisant appel au spectroscopie pour déterminer l'inclinaison de l'orbite sur le rayon visuel et s'assurer si l'étoile est bien au foyer de l'ellipse.

Barnes (W.-L.). — Passage sombre du 3^e satellite de Jupiter le 2 septembre 1890.

Publications de l'Observatoire Washburn (n^{os} 1 et 2 du t. VI).

Le n^o 1 renferme les observations méridiennes, faites par Alice Maxwell Lamb et Milton Updegraff, assistants de l'Observatoire, d'une liste d'étoiles comprenant des étoiles employées pour déterminer la latitude, des étoiles de comparaison pour (181) Eucharis, des étoiles pour l'étude de la réfraction et des fondamentales du *Berliner Jahrbuch*.

Le n^o 2 contient les observations d'étoiles doubles par G.-C. Comstock, directeur de l'Observatoire, précédées d'une introduction étendue.

M. Comstock se propose de déterminer la constante d'aberration par le procédé de M. Lœwy.

Safford (T.-H.). — Usage du niveau dans un instrument portatif.

Article intéressant dont voici les conclusions : un instrument portatif assez grand pour avoir un appareil à retournement devrait avoir un niveau reposant sur les tourillons, avec des bras suffisants pour permettre à l'oculaire de passer au zénith; il ne devrait jamais être retourné avec la main pendant les observations, mais toujours en même temps que l'instrument; M. Safford cite un travail de M. Döllen : *Die Zeitbestimmung vermittelt des tragbaren Durchgangsinstrumente im Verticale des Polarstern*. Saint-Petersbourg, 1874.

Porter (J.-G.). — Notice biographique sur C.-H.-F. Peters.

Burnham (S.-W.). — Examen de la région où se trouvait l'étoile de Tycho Brahé, avec la lunette de 36 pouces.

M. Burnham n'a rien trouvé rappelant l'étoile de Tycho Brahé, mais il a découvert de nouveaux couples :

	<i>s.</i>	<i>p.</i>	
1890,74...	$9^m, 2 - 9^m, 3$	$0^s, 52$	$31^o, 9$
			$0^h 19^m 57^s, 7 + 63^o 46' 2'' (1880, 0)$
1890,74...	$8^m, 4 - 11^m, 3$	$1^s, 66$	$90^o, 2$
			DM. $63^o, 52$.

Un peu après la première et 8' N, autre couple *s* 12" de 9^m — 10^m.

Ritchie (John jr.). — Nos connaissances sur Mars.

Lewis Swift. — Passage sombre du troisième satellite de Jupiter.

Le 21 juillet 1890. Jamais M. Swift n'avait vu le satellite si noir.

Levis Swift. — Dédoublément de la bande équatoriale sud de Jupiter.

Le 21 août 1890, une fine division allait d'un bord à l'autre de la bande.

Pour éviter les répétitions, nous avons dû omettre beaucoup d'articles du *Sidereal Messenger*, en nous limitant aux Mémoires originaux.

Ce Recueil a pris une sérieuse importance; les articles scientifiques et biographiques sont habilement mêlés par l'éditeur, qui est parvenu à orner chaque numéro d'un portrait de savant ou d'une illustration astronomique.

O. C.

THE AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE.

Janvier-décembre 1890.

Preston (E.-D.). — Mesure de l'arc du Pérou.

Dans ce Mémoire, qui a été lu devant l'Association américaine pour l'avancement des Sciences, à Toronto, au mois d'août 1889, l'auteur fait une revue d'ensemble de la question des dimensions de l'ellipsoïde terrestre; il parle avec détails de l'expédition de Bouguer, au Pérou, en 1735, et conclut que l'amplitude de l'arc du Pérou peut être en erreur de plusieurs secondes.

Il a été depuis parlé de la même question aux réunions de l'Association géodésique internationale (*Bulletin*, VIII, 175).

Pickering (E.-C.). — Sur le spectre de ζ Grande Ourse.

Voir *Bulletin*, VII, p. 290.

Michelson (A.-A.). — Mesures par les longueurs d'onde (6 pages avec une planche).

Les mesures de distances et d'angles sont obtenues avec le microscope et la lunette. L'auteur établit une comparaison entre ces deux instruments et le réfractomètre (qui permet de mesurer la différence de marche de deux rayons interférents); il signale quelques analogies remarquables entre les instruments et s'attache à montrer que le dernier, au point de vue de la précision du pointé, l'emporte beaucoup sur les autres.

aldo (F.). — Contributions récentes à la Météorologie dynamique (13 pages).

Compte rendu analytique de 20 Ouvrages ou Mémoires récents parmi lesquels se trouvent les recherches de M. de Bezold sur la *Thermodynamique de l'atmosphère*, le traité de M. Ferrel sur les vents....

Becker (G.-F.). — Une preuve élémentaire de la rigidité de la Terre (16 pages).

L'auteur obtient, au moyen de raisonnements élémentaires, les résultats dus à Sir W. Thomson concernant la quasi-rigidité de la Terre, et expose l'ensemble du sujet.

Hutchins (C.-C.). — Énergie radiante de la bougie étalon. Masse des météores.

En mesurant la lumière émise par un morceau de météorite volatilisé dans l'arc électrique, l'auteur est amené à une évaluation de la masse des météores; la masse d'un météore brillant comme une étoile de la première grandeur serait insignifiante.

Langley (S.-P.) et Very (F.-W.). — Forme la plus économique de la lumière (17 pages avec 3 planches).

L'objet de ce Mémoire important pour la Physique générale est de montrer, par l'étude de la radiation des vers luisants, qu'il est possible de produire de la lumière sans autre chaleur que celle qui fait partie de la lumière elle-même; que cela s'obtient actuellement par les procédés de la nature, et qu'ils sont plus économiques que nos procédés industriels à un degré jusqu'ici inconnu....

Dans toutes les méthodes industrielles pour produire la lumière, il y a une perte énorme, surtout pour les températures peu élevées, comme dans l'éclairage avec une bougie, une lampe et même avec le gaz, où elle dépasse ordinairement 99 pour 100; et dans les températures élevées comme celles des lampes incandescentes et de l'arc électrique, il y a encore une perte de plus de moitié. L'objet du présent travail est de démontrer qu'un rendement bien plus grand est obtenu dans certains procédés naturels que rien ne nous empêche, autant qu'on peut juger, de pouvoir imiter avec succès.

On sait que, d'une manière générale, les différentes formes d'énergie se changent les unes dans les autres; que l'énergie de forme supérieure comme le mouvement peut être transformée intégralement dans une forme inférieure comme la chaleur; que la transformation inverse est

incomplète et difficile : il faut passer par tous les degrés inférieurs et dépenser beaucoup d'énergie en pure perte.

Il y a cependant certains phénomènes étudiés depuis longtemps, mais encore peu connus, qui font exception à cette règle : ainsi, dans le corps des animaux, la nourriture est convertie en travail avec un rendement bien supérieur à celui de toutes les machines. La phosphorescence de certains insectes, du ver luisant, en particulier le *Pyrophorus noctilucus*, à Cuba et ailleurs, offre une autre exception remarquable. On pensait bien que la lumière émise par l'insecte n'était pas associée à une haute température qui en est pour nous la source nécessaire; mais il restait à analyser, en regard de la lumière émise, la quantité et surtout la qualité des rayons calorifiques. MM. Langley et Very ont utilisé le bolomètre pour cette curieuse recherche.

L'expérience a montré que la lumière de l'insecte est accompagnée environ du $\frac{1}{300}$ de la chaleur ordinairement associée avec des flammes moins lumineuses, de telle sorte que le ver luisant nous donne le type d'une machine à lumière presque parfaite.

Bigelow (F.-H.). — Étude sur la couronne solaire (16 pages).

Application de la théorie mathématique imaginée par l'auteur (*Bulletin*, VII, p. 176) à un cliché obtenu en 1878, lors de l'éclipse totale du 29 juillet. Les calculs paraissent assez longs; peut-être pourrait-on simplifier la théorie. En tout cas, le principal est d'avoir des photographies à grande échelle pour faire des mesures précises.

Preston (E.-D.). — Observations magnétiques et pendulaires sur la côte d'Ouest d'Afrique et dans quelques îles de l'Atlantique.

O. C.

EBERT (H.). — SUR LA FORMATION DES CIRQUES LUNAIRES (Extraits des *Annalen der Physik und Chemie*, nouvelle Série. t. XLI, 1890, et des *Comptes rendus de la Société physico-médicale d'Erlangen*, 1890).

Le premier Article est le développement d'une courte Notice insérée dans les *Astronomische Nachrichten (Bulletin*, VI, p. 457).

On trouve dans le second un relevé complet des mesures relatives à 92 cirques; cela offre beaucoup d'intérêt pour l'étude approfondie de la surface lunaire, puisqu'on a ainsi le moyen de comparer aux faits les résultats des expériences de laboratoire. L'auteur conclut, avec réserve.

ue si les expériences donnent des indications utiles sur les cirques, il
loit y avoir toutefois une grande diversité dans leur mode de production.

Ebert (H.). — Sur le spectre de la lumière zodiacale [Extrait
des *Annalen der Physik und Chemie (Ibid.)*]

A propos d'observations récentes de M. Maxwell Hall (*Bulletin*, VII,
p. 129) sur le spectre de la lumière zodiacale, l'auteur étudie l'influence
que peuvent avoir, sur l'observation du spectre d'une source lumineuse
extra-terrestre très faible, la sensibilité de l'œil pour les rayons des
différentes longueurs d'onde et l'action élective de l'atmosphère terrestre.
Il trouve, comme le supposait M. Maxwell Hall, que la lumière crépus-
culaire joue un rôle important dans les observations.

Les remarques de M. Ebert peuvent présenter aussi de l'intérêt dans
le cas de l'étude des spectres des comètes.

BAKER (DANIEL W.). — HISTOIRE DE L'OBSERVATOIRE DU COLLÈGE HARVARD
DE 1846 A 1890 (32 pages avec figures).

Une préface de M. Edward C. Pickering dit qu'il a paru utile de réunir
quelques articles publiés dans un journal de Boston (*Evening Tra-
veller*) et que la Notice de M. Baker peut être considérée comme une
description populaire des travaux accomplis à l'Observatoire pendant
les cinquante premières années de son existence. Voici le bref résumé de
ces travaux : l'observation en vue du grand Catalogue de l'*Astrono-
mische Gesellschaft* de la zone comprise entre $-9^{\circ}50'$ et $-14^{\circ}10'$; les
observations photométriques, spectroscopiques et photographiques qui
se font dans l'hémisphère austral pour compléter les séries correspon-
dantes de Cambridge s'étendant jusqu'à -30° environ; la classification
des spectres d'étoiles au moyen de la Photographie, poursuivie à la fois
à Cambridge et au Pérou (ce travail forme le Mémorial de Draper); et,
en laissant de côté quelques recherches analogues, une longue série de
mesures photométriques sur les satellites de Jupiter. Les mesures com-
mencées en 1878 ont pris fin en 1890, après une révolution complète de
Jupiter. Pendant cette période, 450 éclipses ont été observées.

TODD (DAVID-P.). — PROBLÈMES SOULEVÉS PAR LES ÉCLIPSES RÉCENTES. Article
extrait d'un journal de New-York (*The Forum*, juillet 1890).

M. Todd a dirigé l'organisation des expéditions américaines pour l'ob-
servation des éclipses récentes (*Bulletin*, VII, p. 259).

CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE (Compte rendu des travaux et Mémoires, publiés par M. E. Caspari, secrétaire. Paris, Gauthier-Villars, 1890; 205 pages in-4°).

Les procès-verbaux des séances du Congrès, qui avait le rôle de président M. Phillips, sont complétés par un certain nombre de Mémoires de M. Phillips et de MM. Caspari, Cornu, Rozé, Wolfer, d'une grande importance pour l'art de la Chronométrie. La construction mécanique, l'emploi des chronomètres à la mer a fait aussi l'objet de plusieurs travaux dus à des artistes (MM. Rodanet, Paul Garnier, Antoine, Richard) et à des officiers de Marine. Nous nous bornons à signaler cette importante publication.

GUYOU (E.). — NOUVELLES ÉPHÉMÉRIDES ASTRONOMIQUES POUR 1891, PRÉPARÉES EN VUE DE FACILITER ET DE SIMPLIFIER LES CALCULS DE NAVIGATION (Paris, Berger-Levrault, XXXIV-130 pages; in-12).

L'usage des grandes vitesses de marche oblige de plus en plus les marins à perfectionner tout ce qui est relatif à la solution du problème du point. M. Guyou, capitaine de frégate, chargé il y a peu d'années de Cours de Navigation à l'École Navale, se préoccupe de composer un *trait de la Connaissance des Temps* présentant les éléments sous une forme qui se prêterait le mieux aux calculs à la mer. Ce qui distingue les nouvelles éphémérides bornées au Soleil, à la Lune et aux planètes principales (il n'y a que 10 pages pour un mois), c'est que tous les éléments autres que le temps moyen et les angles horaires en sont exprimés. M. Guyou généralise ce qui se fait depuis longtemps pour les éphémérides du Soleil dans lesquelles on passe du temps vrai au temps moyen et inversement au moyen de l'équation du temps; A désignant la déclinaison sur l'équateur céleste du cercle de déclinaison passant par un astre quelconque et M celle relative au Soleil moyen, on considère d'une manière générale la distance angulaire AM correspondant à l'équation du temps.

Telle est la quantité qui figure dans les éphémérides avec le temps moyen du passage. M. Guyou a jugé utile d'appeler ces deux éléments *retard* et *avance horaires*. Quoi qu'il en soit, l'idée de M. Guyou est naturelle et pratique. Outre les éphémérides des planètes, le projet de Recueil soumis à l'appréciation des personnes compétentes contient plusieurs Tables utiles, parmi lesquelles nous signalerons la Table VI sur la parallaxe en hauteur de la Lune diminuée de la réfraction moyenne. Au reste, la disposition des éphémérides de M. Guyou est bien connue et les détails concernant l'impression, le format, etc., ne sont pas nég-

O. C.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LES GRANDES PERTURBATIONS DES COMÈTES PÉRIODIQUES,

PAR M. L. SCHULHOF.

[Suite et fin (')]

V. L'excentricité peut être déterminée à l'aide des relations (15) et (15') ou plus simplement par l'équation

$$a(1 - e^2) = p \cos^2 i + p \sin^2 i.$$

On a ainsi approximativement, d'après (13) et (18*),

$$(24) \quad \begin{cases} a_2(1 - e_2^2) = R [1 + \gamma \sqrt{P} \cos l \cos(\lambda + 2\sigma)]^2 + p_2 \sin^2 i_2 \\ = \left(\frac{3}{R_2} - \frac{1}{a_2} - \gamma^2 \right)^2 \frac{R_2^4}{4P} + p_2 \sin^2 i_2. \end{cases}$$

Pour une valeur donnée de a_2 , le minimum de e_2 dans l'ellipse et son maximum dans l'hyperbole correspondent au maximum de $p_2 = r_2^2 p_2^2 - r_2^2 r_2'^2$, c'est-à-dire à $r_2 r_2' = 0$. Pour des valeurs positives de a_2 , inférieures à R , on aurait alors $e_2 = \frac{r_2}{a_2} - 1$ et la comète se trouverait à son aphélie; pour des valeurs positives de a_2 , supérieures à R , et pour des valeurs négatives, on aurait

$$e_2 = 1 - \frac{r_2}{a_2};$$

dans ce cas l'astre serait à son périhélie. Pour des valeurs négatives de $\frac{1}{a_1}$ et pour $\frac{1}{a_1} = 0$ on ne peut pas satisfaire à la condition $r r' = 0$, quand i_2 est égal à zéro. Le maximum de p_2 correspond dans ce cas à la plus petite valeur de γ qui est encore compatible avec l'existence simultanée de $\frac{1}{a_2}$ et $\frac{1}{a_1}$. A cause de

$$p \sin^2 i = (r \zeta' - r' \zeta)^2 + (g^2 - r'^2) \zeta^2,$$

on ne peut avoir $i = 0$ que pour $\zeta = \zeta' = 0$, c'est-à-dire pour $t = 0$.

(') Voir *Bulletin astronomique*, VIII, p. 147 et 191.

En mettant donc $\cos l = \cos n = 1$ on a, d'après (17) et (18), rigoureusement

$$\gamma = -\frac{\sqrt{P}}{R_1} \cos \lambda + \sqrt{\frac{1}{\Lambda} + \frac{P}{R_1^2} \cos^2 \lambda - \frac{1}{a_1} - \frac{2\sqrt{M\pi}}{\gamma R^2} \cos \lambda},$$

$$a_2(1 - e_2^2) = \left[\frac{2}{R^2} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{2a_1} - \frac{1}{2a_2} - \frac{P}{R_1^2} \cos^2 \lambda \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{P}}{R_1} \cos \lambda \sqrt{\frac{1}{\Lambda} + \frac{P}{R_1^2} \cos^2 \lambda - \frac{1}{a_1} - \frac{2\sqrt{M\pi}}{\gamma R^2} \cos \lambda} + \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma R^2} \cos \lambda \right]^2$$

et *grosso modo*

$$a_2(1 - e_2^2) = R \left[\frac{R}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \sin^2 \lambda + \cos \lambda \sqrt{1 + \cos^2 \lambda - \frac{R}{a_1}} \right]^2$$

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{R} [\cos \lambda - \cos(\lambda + 2\sigma)] \left(-\cos \lambda + \sqrt{1 + \cos^2 \lambda - \frac{R}{a_1}} \right).$$

Pour obtenir le maximum de $a_2(1 - e_2)$, il faut combiner ces deux équations et chercher le maximum de $\cos \lambda$, tout en se rappelant que σ ne peut pas dépasser une certaine limite. En tenant compte de cette remarque, on trouve qu'on peut, pour $\frac{1}{a_1} = 0$, prendre $\cos \lambda = 1$, c'est-à-dire

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{R}} [\sqrt{2} - 1] \quad \text{et} \quad a_2(1 - e_2^2) = R \left(\sqrt{2} - \frac{R}{2a_2} \right)^2,$$

tant que $\frac{1}{a_2}$ reste entre les limites 0 et $\frac{1,61}{R}$. Au delà de cette dernière limite $\cos \lambda$ diminuera de plus en plus rapidement pour des valeurs de plus en plus grandes de $\frac{1}{a_2}$, et deviendra égal à zéro dans le cas extrême de $\frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}$. M. Tisserand et M. Callandreaux ont fourni un petit Tableau des minima de e_2 pour des valeurs données positives de $\frac{1}{a_2}$, en supposant $\frac{1}{a_1} = 0$ et $i_2 = 0$.

Nous avons mentionné plus haut que la comète de Tempel 1867 II présente actuellement une valeur de γ , notablement inférieure au minimum encore compatible avec l'hypothèse que l'orbite de cet astre était à l'origine parabolique. On trouverait donc probablement, sans renoncer à l'hypothèse que l'orbite était parabolique à l'origine, des cas particuliers où, pour $i_2 = 0$, e_2 pourrait avoir

une valeur inférieure au minimum ci-dessus déterminé. Il semble très difficile de décider directement cette question intéressante par l'Analyse. Nous avons voulu déterminer les conditions générales dans lesquelles une comète, possédant à l'origine un mouvement parabolique, et devenue elliptique par l'action de Jupiter, pourrait, à la suite de nouvelles perturbations, acquérir une valeur de γ^2 , inférieure au minimum 0,0243.

Une comète dont l'inclinaison est très faible ou nulle aura, après être devenue périodique, deux points de proximité, l'un dans l'anomalie vraie v et l'autre en $-v$. Supposons qu'en v la valeur de γ^2 soit à peu près égale au minimum 0,0243 et examinons l'expression de γ^2 correspondant à l'autre point de proximité, nous distinguerons les données qui se rapportent aux deux points par les indices i et ii . Il suffira de déterminer ξ'_{ii} et η'_{ii} pour voir s'ils pourraient être plus faibles que ξ'_i et η'_i . Si la longitude de Jupiter dans le premier point est L , elle sera dans le second point $L - 2v$, ce qui donne

$$X'_{ii} = X'_i \cos 2v + \frac{X_1}{R_1 \sqrt{P}} \sin 2v.$$

On déduira par un simple échange de lettres l'expression de η'_{ii} de celle de ξ'_{ii} .

On a, d'après (2),

$$x'_{ii} = x'_i + \frac{2r'_i}{e^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) x_i - \frac{2rr'_i{}^2}{e^2} x'_i;$$

donc, en désignant par E l'anomalie excentrique,

$$\begin{aligned} \xi'_{ii} &= \xi'_i + 2 \sin^2 v \left(X'_i - \frac{r}{P} x'_i \right) + 2 \sin v \left(\frac{\cos E}{r \sqrt{P}} x_i - \frac{\cos v}{R_1 \sqrt{P}} X_1 \right) \\ &= \xi'_i \left(1 - \frac{2a \sin^2 E}{r} \right) + \frac{\sqrt{a}}{r^2} \sin 2E \xi'_i + 2 \left(1 - \frac{r}{P} \right) \sin^2 v X'_i \\ &\quad + \frac{2\sqrt{a} \sin E}{r^2} X_1 \left[\cos E \left(1 - \frac{a\sqrt{P}}{R_1 \sqrt{P}} \right) + \frac{ea\sqrt{P}}{R_1 \sqrt{P}} \right]. \end{aligned}$$

On pourrait, dans un cas donné, disposer d'une manière convenable les différentes variables, pour obtenir en même temps $\xi'_{ii} < \xi'_i$ et $\eta'_{ii} < \eta'_i$, donc $\gamma'^2_{ii} < \gamma'^2_i$. L'expression précédente devient un peu

plus simple dans le cas spécial où p est peu différent de r ; on peut alors mettre avec une exactitude suffisante

$$\xi'' = \left(1 - \frac{2a \sin^2 E}{r}\right) \xi' + \frac{\sqrt{a}}{r^2} \sin 2E \xi_1 + \frac{2a^{\frac{3}{2}} \sqrt{pe} \sin E}{r^2 R_1 \sqrt{P}} X_1.$$

Ajoutons que nous avons, dans un but de simplification, supposé qu'au deuxième point de proximité R sera à peu près identique avec R_1 , ce qui n'est pas conforme à la réalité, à cause de l'excentricité de l'orbite de Jupiter. Quand le premier point de proximité est près du périhélie de Jupiter, le second sera généralement situé en dedans de l'orbite de la planète.

Il y a de ce fait une correction à introduire qui peut aussi, dans certains cas, diminuer la valeur de γ'' . Il est clair que le lent déplacement du même point de proximité, à la suite de perturbations répétées, pourrait également amener une diminution notable de γ^2 .

Cherchons après cette digression pour les comètes de mouvement direct la condition du minimum de i_2 , dans le cas où p_2 est à peu près égal à $r_2^2 g_2^2$.

Nous aurons d'après (18*), *grosso modo*,

$$\cos^2 i_2 = \frac{1}{4} \left(3 - R\gamma^2 - \frac{R}{a_2}\right)^2 \frac{1}{2 - \frac{R}{a_2}}.$$

Le minimum de i_2 correspond à la plus petite valeur de γ^2 qui est encore compatible avec l'existence simultanée de $\frac{1}{a_1}$ et $\frac{1}{a_2}$ et avec la condition $r_2 r_2' = R_2 R_2' + K_2 + O_2 = 0$. Nous obtiendrons ce résultat d'une manière approchée en mettant $\cos n = 0$ et en ne changeant du reste rien à l'expression de γ trouvée plus haut dans le cas de $i_2 = 0$. Nous n'aurons négligé en $r_2 r_2'$ que les faibles termes

$$R_2 R_2' + \frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma \sqrt{R}} \sin(\lambda + 2\tau) + \frac{2(\tau - \theta)}{\sqrt{R}} \gamma \cos(\lambda + 2\tau).$$

Nous pouvons donc prendre $\gamma = (\sqrt{2} - 1) \frac{1}{\sqrt{R}}$ si $\frac{1}{a_1}$ est zéro et si $\frac{1}{a_2}$ est compris entre les limites 0 et $\frac{1,61}{R}$ et nous aurons, dans

ce cas,

$$\cos^2 i_2 = \left(\sqrt{2} - \frac{R}{2a_2} \right)^2 \frac{1}{2 - \frac{R}{a_2}}$$

ou

$$\sin^2 i_2 = \frac{R}{4a_2} \left(1 - \frac{0,3432}{2 - \frac{R}{a_2}} \right).$$

Pour des valeurs de $\frac{1}{a_2}$ supérieures à $\frac{1,61}{R}$, γ deviendra de plus en plus grand, comme nous l'avons montré plus haut.

Examinons de plus près le cas très intéressant où l'orbite de la comète devient circulaire par l'action de Jupiter. Nous avons alors rigoureusement

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \left(\frac{3}{R_2} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{N_2}{R_2^2} \right) (1 - \cos i_2) + \frac{2}{R_2^3} \sqrt{M\pi} \cos i \\ &= \frac{2P}{R_2^2} \cos^2 l \cos^2 \lambda + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{a_1} \\ &\quad - \frac{2\sqrt{P}}{R_1} \cos l \cos \lambda \sqrt{\frac{P}{R_2^2} \cos^2 l \cos^2 \lambda + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{a_1} - \frac{2N_1}{R^2} - \frac{2N_1}{R^3}}. \end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{a_1} = 0$ toutes les inclinaisons de 21° à 180° sont possibles.

On voit ici une différence très tranchée entre les comètes périodiques et les petites planètes, qui ont généralement une très faible inclinaison quand leur excentricité est peu considérable. L'expression de $r_2 r'_2$ montre qu'au périhélie et à l'aphélie de Jupiter on a rigoureusement $r_2 r'_2 = 0$, en prenant $\lambda + 2\sigma = 180^\circ$ et soit $\cos l = 1$, soit $\cos n = 1$. Il est remarquable qu'une comète, pour laquelle $\frac{1}{a_1}$ est égal à $-\frac{4}{R}$, peut encore acquérir une orbite circulaire dans le cas de $i = 180^\circ$.

VI. La longitude du périhélie ϖ , et dans une certaine mesure même l'époque du passage au périhélie, pourront être déterminées par les équations (15) ou par (15*) selon que le mouvement est direct ou rétrograde; il suffit d'examiner les premières; pour un mouvement rétrograde, on n'aura qu'à mettre dans toutes les

formules $2 \varrho - \varpi, -v, -r'$ et $-\cot \frac{1}{2} i$ à la place de ϖ, v, r' et $\tan \frac{1}{2} i$. Les relations (15) donnent

$$(25) \left\{ \begin{aligned} e \sin(L - \varpi) &= \left[\frac{Xy - Yx}{rR} + \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \cos(L - \varrho) \right] \left(1 - \frac{p}{r} \right) \\ &\quad + \left[\frac{Xx + Yy}{Rr} + \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \sin(L - \varrho) \right] \sqrt{p} r', \\ e \cos(L - \varpi) &= \left[\frac{Xx + Yy}{Rr} + \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \sin(L - \varrho) \right] \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \\ &\quad + \left[\frac{Xy - Yx}{Rr} + \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \cos(L - \varrho) \right] \sqrt{p} r'. \end{aligned} \right.$$

D'autre part on a

$$(25^*) \left\{ \begin{aligned} e \sin(L - \varpi) &= \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \sin(L - v - \varpi) + \sqrt{p} r' \cos(L - v - \varpi), \\ e \cos(L - \varpi) &= \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \cos(L - v - \varpi) - \sqrt{p} r' \sin(L - v - \varpi). \end{aligned} \right.$$

On en déduit les relations

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \sin(L - v - \varpi) &= \frac{Yx - Xy}{Rr} - \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \cos(L - \varrho) \\ &= \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{M\pi}{\gamma^2} - \zeta^2 - \frac{N^2}{R^2}} - \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \cos(L - \varrho), \\ \cos(L - v - \varpi) &= \frac{Xx + Yy}{Rr} + \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \sin(L - \varrho) \\ &= \frac{R^2 + N}{Rr} + \frac{\zeta}{r} \tan \frac{1}{2} i \sin(L - \varrho). \end{aligned} \right.$$

On voit que $\sin(L - v - \varpi)$ ne peut au maximum atteindre que la valeur de $\pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{M\pi}{\gamma^2}}$; on peut donc presque toujours mettre, avec une approximation suffisante, $\sin(L - v - \varpi) = 0$, c'est-à-dire $v = L - \varpi$ ou $v = 180^\circ + L - \varpi$. Connaissant à peu près l'époque à laquelle la perturbation a lieu, on pourrait ainsi, *grosso modo*, à l'aide de a_2, e_2 et $L_2 - \varpi_2$, trouver l'époque du passage au périhélie; cela peut être d'un grand secours dans des essais d'identification de deux comètes. Pour aucune des comètes périodiques connues $1 - \frac{p}{r}$ n'est sensiblement inférieur à 0,5. On peut donc, au moins dans leur cas, adopter $e \cos(L - \varpi) = \frac{p}{r} - 1$ et mettre

$$(27) \quad R_1 e_1 \cos(L_1 - \varpi_1) - p_1 = R_2 e_2 \cos(L_2 - \varpi_2) - p_2.$$

C'est la troisième et dernière relation approchée entre les anciens et les nouveaux éléments dans laquelle n'entrent pas les coordonnées et vitesses de la comète au point de proximité. Cette relation remplace avantageusement la proposition suivant laquelle les deux orbites doivent avoir, dans des points voisins, leur plus courte distance à l'orbite de Jupiter. La remarque que nous avons faite à l'occasion de la relation (22*) s'applique également à la relation (27). Quand il s'agit d'une comète dont la plus courte distance à l'orbite de Jupiter est actuellement considérable, il faut mettre dans cette formule r_2 au lieu de R_2 ; mais dans ce cas les perturbations n'ont pu être fortes entre les deux apparitions que si l'intervalle de temps entre les deux est très considérable.

Nous pourrions toujours mettre $\cos(L - \nu - \varpi) = 1$; nous aurons donc

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang}(L - \varpi) \\ \sqrt{p} r r' - \left[\frac{r}{r'} \text{tang} \frac{1}{2} i \cos(L - \Omega) \pm \sqrt{\frac{M\pi}{\gamma^2} - \zeta^2 - \frac{N^2}{R^2}} \right] (p - r) \\ p - r + \left[\frac{r}{r'} \text{tang} \frac{1}{2} i \cos(L - \Omega) \pm \sqrt{\frac{M\pi}{\gamma^2} - \zeta^2 - \frac{N^2}{R^2}} \right] \sqrt{p} r r' \end{array} \right.$$

On voit que ϖ subira de fortes variations simultanément avec $r r'$ et avec $p - r$. On a, *grosso modo*,

$$r_2 r'_2 - r_1 r'_1 = R_1 \gamma \cos n [\cos(\nu + 2\sigma) - \cos \nu]$$

dont la valeur maxima est $\pm 2R\gamma \cos n \sin \sigma$. D'autre part on a, à cause de $p = r^2 g^2 - r^2 r'^2$,

$$p_1 - r_2 - (p_1 - r_1) = R^2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + R^2 \gamma^2 \cos^2 n [\cos^2 \nu - \cos^2(\nu + 2\sigma)].$$

Si une seule des deux quantités $r r'$ et $p - r$ change de signe de l'entrée à la sortie, la variation de ϖ ne pourra pas atteindre 180° . Mais si les deux quantités changent simultanément de signe, ϖ pourra parcourir presque toute la circonférence. Quand $r_1 r'_1$ et $p_1 - r_1$ sont petits, des perturbations peu considérables pourront déjà amener ce résultat. Nous avons déjà traité ce cas, qui est celui d'une orbite presque circulaire. Pour les comètes périodiques connues $r r'$ a, à deux ou trois exceptions près, une valeur assez faible; par contre $r - p$ dépasse généralement la valeur $\frac{r}{2}$. On peut donc dire qu'à moins de fortes perturbations, leur aphélie ne sera jamais

trop éloigné de leur point de proximité, et que les conditions de leur visibilité deviennent très défavorables si ϖ varie beaucoup, vu qu'alors p et q ont dû augmenter dans une forte mesure. C'est un point très important dans des recherches d'identité de deux comètes. Les calculs de Le Verrier sur la comète de Lexell présentent précisément le cas où ϖ peut parcourir toute la circonférence; mais dans cet exemple aussi les variations de ϖ restent entre des limites assez étroites, tant que p ne prend pas des valeurs très voisines de r .

Nous avons mentionné plus haut que $\frac{1}{a}$ reste constant pour $\cos l = 0$ et pour $\sin(\lambda + \sigma) = 0$. Dans le cas particulier de $\cos l = 0$ et $\cos(\nu + \sigma) = 0$, les éléments a, p, i ne changeraient que très peu, mais les variations de \mathcal{Q} et même celles de ϖ et de ν pourraient monter jusqu'à 180° pour de petites valeurs de $p - r$. De même, dans le cas de $\sin(\lambda + \sigma) = 0$ et $\sin i = 0$, a et p resteraient presque constants et ϖ et ν seuls varieraient considérablement, surtout si $p - r$ était petit.

Quand i reste, aussi bien à l'entrée qu'à la sortie, entre 45° et 135° , on remplace avantageusement l'équation (28) par la suivante, tirée des relations (16),

$$(29) \quad \text{tang } \omega = \frac{\sqrt{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \zeta - \sqrt{p} r r' \zeta'}{r' \zeta + (p - r) \zeta'}.$$

Sauf le cas exceptionnel de valeurs très faibles de p , dans lequel ζ' pourrait être, malgré une grande inclinaison, voisine de zéro, et dans lequel ω varierait extrêmement, on peut mettre avec une exactitude suffisante $\text{tang } \omega = \frac{\sqrt{p} r r'}{r - p}$. La discussion de cette équation est identique avec celle de l'expression $\text{tang}(L - \varpi)$.

On peut donner aux équations (25) une forme un peu différente, en partant des relations

$$(30) \quad \begin{cases} e \sin \varpi = -\frac{y}{r} - x' \sqrt{p} \cos i + \zeta' \sqrt{p} \sin i \sin \mathcal{Q} \\ \quad \quad \quad + 2e \sin \omega \cos \mathcal{Q} \sin^2 \frac{1}{2} i, \\ e \cos \varpi = -\frac{x}{r} + y' \sqrt{p} \cos i + \zeta' \sqrt{p} \sin i \cos \mathcal{Q} \\ \quad \quad \quad - 2e \sin \omega \sin \mathcal{Q} \sin^2 \frac{1}{2} i. \end{cases}$$

On trouve alors, par exemple pour $\text{Re} \cos(L - \varpi)$, après quelques transformations,

$$(25^{**}) \left\{ \begin{aligned} & \text{Re} \cos(L - \varpi) \\ & = (Xy' - Yx')(xy' - yx') + \zeta'X(x\zeta' - \zeta x') \\ & \quad + \zeta'Y(y\zeta' - \zeta y') - \frac{Yy + Xx}{r} \\ & + 2 \text{Re} \sin \omega \sin(L - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2} i \\ & = p - r + (X\xi + Y\eta + \rho^2) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \\ & \quad + (X'\xi + Y'\eta + \rho\rho') rr' + 2 \text{Re} \sin \omega \sin(L - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2} i. \end{aligned} \right.$$

VII. Nous voulons encore déduire rigoureusement l'équation importante (19), en tenant compte de l'action du Soleil et de Jupiter.

Les équations différentielles du mouvement de la comète autour de Jupiter sont

$$(31) \left\{ \begin{aligned} & \xi'' + \frac{M\xi}{\rho^3} + \frac{X + \xi}{r^3} - \frac{X}{R^3} = 0, \\ & \eta'' + \frac{M\eta}{\rho^3} + \frac{Y + \eta}{r^3} - \frac{Y}{R^3} = 0, \\ & \zeta'' + \frac{M\zeta}{\rho^3} + \frac{\zeta}{r^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous en tirons les expressions de γ^2 et de $\xi\eta' - \eta\xi'$,

$$(32) \left\{ \begin{aligned} & \gamma^2 = \frac{2M}{\rho} - \int \frac{d\rho^2}{R^3} - 2 \int (\rho\rho' + O) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau, \\ & \xi\eta' - \eta\xi' = \frac{1}{\sqrt{P}} \int (RR'N - R^2K) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau, \end{aligned} \right.$$

que nous introduirons dans l'équation (18), en tenant compte de la circonstance que $\rho\rho'$ n'est plus égal à zéro et qu'il faut mettre ρ à la place de la valeur particulière $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2} \sqrt{\rho} \cos i &= \frac{2}{r} + \frac{G^2}{R^2} (r^2 - \rho^2) - \gamma^2 \\ &+ \frac{2\sqrt{P}}{R^2} (\xi\eta' - \eta\xi') - \frac{2R'}{R} (rr' - \rho\rho'). \end{aligned}$$

En nous servant des relations

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2N, \quad rr' = RR' + \rho\rho' + K + O$$

nous obtenons, après quelques opérations intermédiaires,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2} \sqrt{\rho} \cos i &= \frac{4}{R} - \frac{1}{A} - \frac{2M}{\rho} - \frac{2R'}{R} (rr' - \rho\rho') \\ &+ \frac{2N}{R^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{A} \right) - 6 \int N \frac{dR}{R^4} - 2 \int \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) R dR \\ &- 2 \int N \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{dR}{R} - 4\sqrt{P} \int (\xi\eta' - \eta\xi') \frac{dR}{R^2}. \end{aligned}$$

On voit qu'au delà d'une certaine valeur de $\frac{1}{\rho}$ l'orbite héliocentrique instantanée est hyperbolique.

L'excentricité de Jupiter entre dans les quatre intégrales; par conséquent leur omission ne produirait pas une grande erreur, surtout vers le périhélie et l'aphélie de Jupiter, même en prenant $N \lesssim R\rho$ entre des limites très larges. On peut mieux juger de la grandeur des trois premières intégrales, en mettant pour $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}$ sa valeur approchée

$$-\frac{3\rho^2}{2R^5} - \frac{3N}{R^6} + \frac{15}{8R^7} (\rho^2 + 2N)^2,$$

ce qui donne

$$3 \int \left(R^2 \rho^2 - 4N \rho^2 - \frac{5}{4} \rho^4 - 3N^2 \right) \frac{dR}{R^6}.$$

En distinguant par les indices 1 et 2 les données qui correspondent à la même valeur de ρ , on trouve la valeur rigoureuse de

$$\frac{1}{a_2} + \frac{2\sqrt{P}}{R_2^2} \sqrt{\rho_2} \cos i_2 - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2\sqrt{P}}{R_1^2} \sqrt{\rho_1} \cos i_1 \right),$$

peu différente de zéro, même en prenant $\rho = 1$.

L'expression rigoureuse des relations approchées (22) et (27) contient en partie des intégrales doubles. Nous nous contentons de donner ici l'expression relativement simple de

$$R\sqrt{\rho} \sin i \sin(L - \Omega) = \sqrt{P}\zeta + Y(\xi\xi' - \zeta\xi') - X(\eta\xi' - \zeta\eta').$$

On déduit des équations différentielles (31)

$$\xi' - \zeta' = \int X \zeta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau, \quad \tau \zeta' - \zeta \tau' = \int Y \zeta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau.$$

A leur aide on obtient, par intégration partielle,

$$\begin{aligned} R\sqrt{p} \sin i \sin(L - \Omega) &= \sqrt{P} \zeta + \int (Y' \xi - X' \tau) d\zeta + \int (X' \tau' - Y' \xi') \zeta d\tau \\ &= (\sqrt{P} + Y' \xi - X' \tau) \zeta + 2 \int (X' \tau' - Y' \xi') \zeta d\tau + \int (Y \xi - X \tau) \frac{\zeta}{R^2} d\tau. \end{aligned}$$

D'après (8) on a

$$(Y \xi - X \tau) \frac{\zeta}{R^2} < \frac{\zeta}{P^2} \sqrt{\rho^2 - \zeta^2} < \frac{\rho^2}{2P^2}$$

et

$$(X' \tau' - Y' \xi') \zeta < \frac{\zeta}{\sqrt{P}} \sqrt{\gamma^2 - \zeta'^2}.$$

Dans la supposition de fortes perturbations $\zeta < \rho$ ne pourrait être considérable qu'avec de grandes valeurs de ζ' ; par conséquent $\frac{\zeta}{\sqrt{P}} \sqrt{\gamma^2 - \zeta'^2}$ sera toujours petit. Dans le calcul numérique de ces deux intégrales les différentielles $(X' \tau' - Y' \xi') \zeta d\tau$ n'auront généralement pas le même signe avant et après le passage au périjove, de sorte que les termes individuels se détruiraient en partie.

On pourra donc, dans tous les cas, tant que ρ ne dépasse pas $0,5$, prendre avec une approximation suffisante

$$\begin{aligned} R_2 \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin(L_2 - \Omega_2) - R_1 \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin(L_1 - \Omega_1) \\ = (\sqrt{P} + Y_2 \xi_2 - X_2 \tau_2) \zeta_2 - (\sqrt{P} + Y_1 \xi_1 - X_1 \tau_1) \zeta_1. \end{aligned}$$

VIII. Nous avons déjà mentionné qu'on peut, d'après une remarque de Laplace, prendre le rayon de la sphère d'activité de Jupiter sensiblement plus grand que $0,3$. Pour démontrer l'exactitude de cette remarque, il nous suffit de mettre en parallèle les expressions exactes de $xy' - yx'$, $y\zeta' - \zeta y'$, $x\zeta' - \zeta x'$, $\frac{1}{a}$, ξ et ζ' dans l'orbite héliocentrique d'une part, et d'autre part de $\xi\tau' - \tau\xi'$, $\tau\zeta' - \zeta\tau'$, $\xi\zeta' - \zeta\xi'$, $\frac{1}{a}$, ζ et ζ' dans l'orbite jovicentrique. Nous supposons que le plan de l'orbite de Jupiter est pris pour le plan fondamental.

On a, en regardant le Soleil comme corps central,

$$xy' - yx' = C_1 + M \int (Y\xi - X\tau) \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau,$$

$$y\zeta' - \zeta y' = C_2 - M \int Y\zeta \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau,$$

$$x\zeta' - \zeta x' = C_3 - M \int X\zeta \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau,$$

$$\frac{1}{a} = C_4 + 2M \int (\rho\rho' + X'\xi + Y'\tau) \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau + 2M \int \frac{\rho\rho'}{R^3} d\tau,$$

et pour la détermination de ζ et ζ' , l'équation différentielle du second ordre

$$\zeta'' + \frac{\zeta}{\rho^3} + \frac{M\zeta}{\rho^3} = 0.$$

D'autre part on a, en prenant Jupiter comme corps central,

$$\xi\tau' - \tau\xi' = c_1 + \int (X\tau - Y\xi) \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau,$$

$$\tau\zeta' - \zeta\tau' = c_2 + \int Y\zeta \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau,$$

$$\xi\zeta' - \zeta\xi' = c_3 + \int X\zeta \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau,$$

$$\frac{M}{\alpha} = c_4 - 2 \int (\rho\rho' + X'\xi + Y'\tau) \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\tau - 2 \int \frac{\rho\rho'}{R^3} d\tau,$$

$$\zeta'' + \frac{M\zeta}{\rho^3} + \frac{\zeta}{\rho^3} = 0.$$

C_1, c_1, \dots désignent les constantes d'intégration.

S'il ne s'agissait que des trois premières intégrales et de la première partie de $\frac{1}{a}$ et $\frac{M}{\alpha}$, on aurait, pour le rapport des différentielles,

$M \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) : \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right)$, ce qui permettrait de regarder Jupiter comme corps central jusqu'à $\rho = 0,6$.

L'intégrale $2 \int \frac{\rho\rho'}{R^3} d\tau$ resterait aussi très petite dans ces limites, vu que les termes différentiels $\frac{\rho\rho'}{R^3} d\tau$ sont, avant et après le passage au périjove, à peu près égaux et de signe contraire. Il n'en est plus de même pour ζ et ζ' . Il entre dans l'intégration double qu'exige la connaissance de ces variables, d'une part les différentielles $\frac{M\zeta}{\rho^3} d\tau^2$

et, d'autre part, $\int_{r^3}^{\xi} d\tau^2$ dont le rapport est $\frac{Mr^3}{\rho^3}$, ce qui donne environ 0,5 comme limite de ρ . On pourrait donc, à la rigueur, dès que ρ est inférieur à 0,5, déjà regarder Jupiter comme corps central, surtout si l'on voulait se contenter de calculer *grosso modo* les perturbations du Soleil avec des éléments jovicentriques invariables. Il semble qu'on pourrait dans ce cas prendre des intervalles de temps un peu plus grands que dans le cas contraire où le Soleil est regardé comme corps principal, notamment si l'on passait, vers l'époque du passage au périjove, à de nouveaux éléments jovicentriques osculateurs. Mais, si l'on voulait exécuter des calculs rigoureux, il y aurait des inconvénients réels à prendre des limites trop larges pour ρ , vu qu'il s'agit ici de très faibles quantités, $\xi\tau' - \eta\xi'$, ..., qui différeront relativement d'une manière assez sensible, selon qu'on changera les éléments de pas en pas, ou non.

Il n'est pas facile de décider ce qui aurait une influence plus fâcheuse sur le résultat final, de négliger complètement les perturbations de Jupiter avant l'entrée de la comète dans sa sphère d'activité et après la sortie, ou de regarder Jupiter comme corps central pendant tout le temps que ρ reste inférieur à 0,5 et de ne pas tenir compte de l'action du Soleil pendant cet intervalle de temps.

Il est incontestable que les termes en $\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}\right) d\tau$ sont, avant et après le passage au périjove, de signe contraire et que leur somme, prise entre les limites $\rho = 0,5$ et $\rho = 0,3$, avant l'entrée dans la sphère d'activité et après la sortie, sera presque nulle, tandis que dans l'orbite jovicentrique les termes en $\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) d\tau$ s'additionneront presque toujours. Il nous paraît néanmoins que dans le cas où la comète se rapproche extrêmement de Jupiter, surtout si son inclinaison et sa vitesse relative γ sont faibles, l'omission des perturbations qu'elle subit de la part de la planète avant l'entrée dans sa sphère d'activité, pendant que ρ reste inférieur à 0,5, vicierait plus sensiblement les nouveaux éléments que si l'on négligeait l'action du Soleil durant le même intervalle de temps. On a, en effet, d'après (2).

$$\xi'_x = -\frac{2\rho'}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha}\right) \xi'_c - \left(\frac{2\rho\rho'^2}{M\varepsilon^2} - 1\right) \xi'_c.$$

Or, pour les faibles valeurs de x , $\frac{2\rho'}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a} \right)$ dépasse 4, et $\frac{2\rho\rho'^2}{M\varepsilon^2} - 1$ même 20. Les nouveaux éléments, dépendant principalement de ξ_e , η_e et ζ_e , seront donc, dans le cas de petites valeurs de x , probablement plus fortement affectés par les erreurs de ξ_e , η_e , ζ_e , ξ_e' , η_e' et ζ_e' que par l'omission des perturbations du Soleil. Nous nous proposons de revenir à une autre occasion sur cette question.

IX. Il est d'un grand intérêt d'examiner, à la lumière des discussions précédentes, le Tableau des comètes périodiques que nous avons donné (*Astronomische Nachrichten*, t. CXXIV, p. 195). Ce Tableau contient 16 comètes dont la période est exactement connue, six qui sont certainement périodiques, mais dont la durée de révolution n'a pas pu être bien déterminée, et trois comètes pour lesquelles il y a seulement présomption d'une courte période. Nous pouvons y ajouter deux nouveaux membres : la comète de Méchain-Tuttle (1790 II) et celle de Spitaler 1890. La première, d'une durée de révolution de presque 14 années, se rapproche des orbites de Jupiter et de Saturne à 0,8 et 1,8 respectivement. Nous l'avions d'abord exclue, pensant qu'elle avait pu être capturée aussi bien par Saturne que par Jupiter. Il est toutefois plus probable qu'elle doit sa périodicité à Jupiter.

Rappelons pour la compréhension du petit Tableau suivant que n_j désigne la valeur de l'expression $\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{A}}{R^2} \cos i \sqrt{\rho}$ et l_j la longitude héliocentrique approchée du point de proximité.

Noms.	n_j .	π .	Ω .	i .	e .	a .	l_j .
Méchain-Tuttle 1790 II.	0,337	116°	269°	54°	0,82	5,78	263°
Spitaler 1890.....	0,540	58°	45°	13°	0,47	3,44	228°

Nous remarquons principalement les points suivants :

(a). La distribution des l_j est excessivement inégale. Sur 24 comètes 13 ont leur point de proximité entre $l_j = 152^\circ$ et $l_j = 234^\circ$, tandis que dans le grand intervalle de $l_j = 270^\circ$ à $l_j = 150^\circ$ il n'existe au plus que 10 points de proximité, et dans l'intervalle de $l_j = 285^\circ$ à $l_j = 106^\circ$ seulement 5. Cette inégalité devient encore plus marquée si l'on considère que sur ces 10 points 5 correspondent à de grandes valeurs de n_j , comprises entre 0,542 et 0,591 et que pour trois autres la valeur incertaine de n_j pour-

rait se trouver renfermée entre ces mêmes limites. Or, nous avons montré (p. 194) que, dans la supposition d'une orbite primitive parabolique le point de proximité doit être d'autant plus voisin du périhélie de Jupiter, situé en $l_j = 12^\circ$, que la valeur de n_j est plus grande. La statistique des comètes périodiques est en accord absolu avec ce postulatum. Elle met en même temps en évidence ce fait très remarquable que pour des n_j compris entre 0,337 et 0,540 il existe au plus 5 comètes sur 19, et probablement seulement 2 sur 16, dont le point de proximité se trouve entre $l_j = 270^\circ$ et $l_j = 152^\circ$. Nous avons antérieurement tenté d'expliquer le fait de l'accumulation des points de proximité autour de l'aphélie de Jupiter par la considération que l'action de la planète est plus forte vers ce point par suite de la distance plus considérable du Soleil et de la marche plus lente de Jupiter et des comètes voisines. Nous pouvons encore ajouter la remarque que le déplacement continu des points de proximité est, comme nous l'avons déjà mentionné, plus lent vers l'aphélie de Jupiter qu'ailleurs. Mais ces deux explications sont évidemment insuffisantes et il paraît nécessaire, soit d'admettre une prédominance réelle des comètes, arrivant de l'espace stellaire dans la direction de l'aphélie de Jupiter, soit de supposer que ces astres ne sont que les débris d'un nombre restreint de comètes. La dernière supposition s'accorde bien avec le fait déjà deux ou trois fois constaté de la division d'une comète en plusieurs.

(b). Les comètes qui présentent les plus fortes valeurs de n_j n'ont pas seulement leur point de proximité presque à leur aphélie, mais en outre leur aphélie est généralement situé en dedans de l'orbite de Jupiter et, pour la plupart, la plus courte distance à la planète dépasse notablement 0,3. Il semble même que cette plus courte distance est d'autant plus considérable que l_j est plus loin du périhélie de Jupiter. Toutes ces circonstances accordent parfaitement avec la théorie de la capture des comètes. Prenons, pour démontrer cette assertion, les équations (17) (18*), complétées des termes omis.

$$*) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{A} - \gamma^2 - 2H - \frac{2N}{R^3} - \frac{\rho^2}{R^3} + \frac{3}{4R^5} (\rho^2 + 2N)^2,$$

$$*) \quad n_j = \frac{4}{R} - \frac{1}{A} - \gamma^2 - \frac{\rho^2}{R^3} + \frac{3}{4R^5} (\rho^2 + 2N)^2.$$

On voit, comme nous l'avons déjà dit, que n_j ne peut être grand que pour de faibles valeurs de $\gamma^2 + \frac{r^2}{R^3}$. Comme $\frac{1}{a}$ est également grand pour les comètes en question, il faut que H ait une valeur négative considérable, il s'ensuit que K et O et par conséquent aussi rr' doivent être petits; le point de proximité doit donc effectivement se trouver près de l'aphélie. La supposition que ces comètes marchaient à l'origine dans une orbite parabolique et se trouvaient dans leur point de proximité à 0,3 de Jupiter impose pour γ^2 une limite inférieure, égale à 0,0243, si à l'origine l_j était situé près du périhélie de Jupiter et à 0,0292 près de l'aphélie de la planète. Nous avons vu que la comète devait à l'origine se trouver tout près de son périhélie dans le cas du minimum de γ^2 . Il y a peu de probabilité qu'un tel cas ait eu lieu plusieurs fois. Si donc quelques comètes ont effectivement un γ^2 aussi petit ou même plus faible, on doit s'attendre à ce que la plus courte distance ρ soit supérieure à 0,3, vu qu'alors γ^2 peut être petit, simplement parce que l'astre est plus loin de Jupiter et non à cause d'un état initial aussi exceptionnel. Toutes ces comètes doivent nécessairement appartenir depuis fort longtemps à notre système solaire et y demeurer encore pendant un espace de temps très considérable, avant que le lent déplacement de leur point de proximité les ramènera assez près de Jupiter pour que la planète puisse de nouveau les chasser dans l'espace stellaire.

(c). Il existe une relation approchée entre la distance angulaire du point de proximité à l'aphélie et la durée de révolution, due exclusivement à la circonstance que des comètes possédant une grande distance périhélie ont peu de chance d'être découvertes. On peut énoncer cette relation de la manière suivante : plus la durée de révolution est grande, plus le point de proximité s'écartera de l'aphélie. Si le point de proximité est tout près de l'aphélie, on a $e = \frac{r}{a} - 1$ et $q = 2a - r$. Pour $a = \frac{3r}{4}$, on aurait $e = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{r}{2}$; aucune des comètes périodiques n'a une aussi grande distance périhélie; le point de proximité ne sera donc près de l'aphélie que pour des comètes dont la période ne dépasse pas six années. Il résulte encore de cette remarque que pour des incli-

naisons supérieures à 10° la durée de révolution ne pourra pas être au-dessous de six années si $\sin \omega$ dépasse $\pm 0,5$. Pour la comète de Swift (1889 VI) dont on ne connaît pas malheureusement assez exactement la période, on a $i = 10^\circ$ et $\sin \omega = -0,94$.

(d). Si l'on examine la distribution des distances du périhélie au nœud ω , on voit qu'il y a juste autant entre 270° et 90° qu'entre 90° et 270° . Il n'en est plus de même si l'on divise les comètes en groupes, l'un contenant celles dont l'inclinaison est entre 0° et 10° , l'autre renfermant les comètes d'une inclinaison supérieure à 10° . Sur 15 comètes du second groupe, 10 ont leur ω entre 90° et 270° et seulement 5 entre 270° et 90° ; pour le premier groupe, la proportion est renversée. Le dernier fait peut être entièrement dû au hasard, vu que, pour de faibles inclinaisons, le nœud change continuellement et dans une mesure très considérable. La prédominance des signes négatifs de $\cos \omega$, pour des i supérieurs à 10° , doit, par contre, être attribuée à la distribution si inégale des points de proximité, qui sont pour la plupart situés dans la partie de l'orbite de Jupiter dans laquelle la latitude héliocentrique de la planète et même celles de Saturne, Uranus et Neptune sont boréales. D'après la relation (16)

$$e \sin i \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{p}} [r' \zeta + (p - r) \zeta'],$$

on doit avoir, pour des $\cos \omega$ négatifs, des ζ' positifs, c'est-à-dire des ζ_e négatifs et des ζ_s positifs. Dans les points où la latitude de Jupiter est boréale, les comètes d'une forte inclinaison qui montent vers l'hémisphère boréal subiront plus facilement de fortes perturbations que celles qui passent dans ces endroits par leur nœud descendant.

X. Dans sa recherche sur la comète de Wolf 1884 III, M. Lehmann-Filhès a essayé (*Astr. Nachr.*, n° 2953) de déterminer approximativement les éléments paraboliques que cet astre a dû posséder à l'origine. Une telle tentative ne peut même pas réussir pour les comètes qui ont, comme celle de Tempel 1867 III, un n_j très considérable. Dans un tel cas, on peut seulement dire qu'à l'origine la distance périhélie a dû être sensiblement égale à A_j et se confondre avec le point de proximité, et, si l'inclinaison dépassait

8° à 10°, avec un des deux nœuds. L'inclinaison elle-même pourra encore être enfermée dans des limites relativement étroites, mais pas autant que le pense M. Lehmann-Filhès. La quantité n_j n'est pas absolument constante; sa valeur à l'origine $n_j = \frac{2\sqrt{P}}{R_0^2} \sqrt{2q_0 \cos i_0}$ fournira pour un q_0 donné des i_0 assez différents, selon qu'on suppose pour R_0 la distance périhélic ou aphélic de Jupiter. Et nous avons vu que par suite du lent déplacement de l_j , qui est relativement considérable dans le cas de grands n_j , et de la possibilité de la formation ou disparition d'un second point de proximité, il est tout à fait chimérique de vouloir déterminer l'endroit où la comète était entrée à l'origine dans la sphère d'activité de Jupiter.

L'emploi judicieux des résultats obtenus dans cette recherche permettra du moins souvent, sans trop de calcul, de décider la question de l'identité de deux comètes, dont l'une a une durée de révolution exactement connue, même dans le cas si difficile où il faut supposer que l'astre s'était plusieurs fois rapproché de Jupiter dans l'intervalle des deux apparitions. Le point acquis le plus important est qu'il existe trois relations entre les anciens et les nouveaux éléments, dont deux seulement approximatives et la troisième, formant l'admirable criterium de M. Tisserand, presque absolument exacte. Celle-ci fournira tout d'abord non seulement $\frac{1}{a_2}$, mais en même temps par la connaissance de γ^2 les valeurs approchées de H_1 , H_2 et σ qui permettent, après quelques tâtonnements, de mieux préciser le point où la comète a dû entrer dans la sphère d'activité de Jupiter. Connaissant ainsi *grosso modo* les coordonnées et vitesses dans ce point, on pourra à l'aide des deux autres relations, ou mieux à l'aide des équations (15) et (16), juger du degré de probabilité que possède la supposition de l'identité des deux astres. Je fus précisément conduit aux recherches précédentes par les remarques que m'ont suggérées des calculs entrepris sur la comète de Brorsen. J'ai voulu d'abord décider si cet astre pouvait être identique avec les comètes de 1532 et de 1661, dont les éléments montrent une grande ressemblance entre eux et avec ceux de la comète de Brorsen. Ensuite je m'étais posé la question de savoir si je pouvais imaginer des conditions dans

lesquelles la comète aurait pu avoir dans le passé une orbite parabolique. Je crois qu'il n'est pas sans intérêt de communiquer ici quelques résultats, assez péniblement obtenus à la suite de tâtonnements, par un calcul dans lequel j'avais uniformément gardé les mêmes données de Jupiter et exclusivement considéré l'action de cette planète pendant le temps que la comète demeurait dans la sphère d'activité. La comète de Brorsen se recommandait particulièrement pour une telle recherche, les perturbations négligées ne pouvant jamais être bien considérables à cause de sa très grande inclinaison et son point de proximité ne se déplaçant que très peu à cause de la petitesse de z dont la valeur est inférieure à 0,009.

J'ai pris pour point de départ les éléments, rapportés à 1810,0, que M. Harzer avait donnés pour l'époque antérieure à la grande perturbation en 1842. Pour Jupiter, j'ai arbitrairement adopté les données qui se rapportent à 1771 avril 25,0 et je les ai développées en séries, en ne conservant que les termes des trois premiers ordres. Ces séries fournissent, avec une exactitude suffisante, les coordonnées et vitesses de Jupiter pour un espace de temps comprenant 200 jours avant et 200 jours après l'époque de la plus grande proximité.

Voici d'abord 6 systèmes d'éléments, rapportés à l'écliptique, suffisants pour faire connaître *grosso modo* toutes les orbites que la comète a pu posséder avant la grande perturbation arrivée, d'après M. Harzer, vers 1759-1760.

	π .	ϱ .	u .	\bar{v} .	$\log a$.
I.....	110.32	103.12	46.97	50.36	0,47092
II.....	109.22	103.13	46.37	51.47	0,46439
III.....	105.6	103.98	50.9	51.45	0,45685
IV.....	104.40	103.34	52.3	41.52	0,48729
V.....	110.57	103.33	50.40	36.55	0,51065
VI.....	112.37	103.20	47.37	45.22	0,48886

D'après ce Tableau, la comète de Brorsen ne peut être identique avec aucune des anciennes comètes. Les orbites III, IV et V sont à peu près celles qui résultent des plus fortes perturbations. M'étant proposé le problème de trouver les conditions dans lesquelles un petit nombre de perturbations successives auraient

suffi pour transformer l'orbite parabolique originale de la comète en l'orbite actuelle, j'ai pris comme point de départ le système V et, procédant par tâtonnement, j'en ai déduit les éléments V^a, donnés ci-après, puis de la même manière de ceux-ci les éléments V^b, et ainsi de suite. Je me suis arrêté au système V^e qui fournit déjà une durée de révolution très considérable; en calculant dans les mêmes conditions encore deux ou trois étapes antérieures, on arriverait à des éléments paraboliques ou faiblement hyperboliques. J'ai déduit en outre à l'aide des éléments IV le système IV qui montre qu'en continuant les calculs on obtiendrait à peu près une série parallèle à la série V^a à V^e. Même en se servant exactement des résultats obtenus dans les recherches théoriques précédentes, on arriverait à la conclusion que la comète a dû, depuis l'origine, passer au moins 8 à 10 fois dans le voisinage immédiat de Jupiter et qu'elle appartient dans tous les cas depuis un intervalle de temps très considérable à notre système solaire.

En examinant la série V à V^e ou même les éléments IV et IV^e on voit que l'orbite de la comète a dû, à une certaine époque, être presque circulaire. On arrive à la même conclusion, en appliquant après des simplifications permises, les équations (18*), (17), (8) et (21),

$$(18^*) \quad \frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2} \sqrt{p} \cos i = \frac{3}{R} - \gamma^2,$$

$$(17) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{A} - \gamma^2 - 2H,$$

$$(8) \quad \zeta'^2 = \gamma^2 - \frac{O^2}{R^2} - RH^2,$$

$$(21) \quad \sqrt{p} \sin i = R\zeta'.$$

On a, pour 1842,

$$\frac{1}{a} = \frac{1,73}{R}, \quad \sqrt{p} \cos i = 0,78, \quad \text{et} \quad \sqrt{p} \sin i = 0,81.$$

Pour que $\frac{1}{a}$ devienne égal à $\frac{1}{R}$, il faut que $\sqrt{p} \cos i$ augmente de 0,83 et que H, dont la valeur est négative, diminue; $\frac{O^2}{R^2}$ étant une petite quantité, ζ' et par conséquent $\sqrt{p} \sin i$ augmenteront plutôt; p devra

doit être supérieur à 3,6 et e inférieur à 0,35. La comète de Brorsen s'accorderait donc aussi bien avec l'hypothèse d'une origine planétaire qu'avec la théorie de la capture des comètes.

L'orbite III possède un demi grand axe plus petit que celui de toutes les comètes connues, à l'exception de la comète d'Encke.

J'en ai déduit les éléments III^a, sans réussir à diminuer la valeur de a . On pourrait toutefois, en cherchant les conditions les plus favorables, obtenir un a un peu plus petit et réaliser ainsi *grosso modo* le cas intéressant de $a = \frac{R}{2}$.

	π .	Ω .	i .	φ .	$\log a$.
V ^a	106.14	103.49	50.48	23.21	0,5657
V ^b	77.57	104. 3	48.29	10.19	0,6491
V ^c	357.21	104.23	42.31	20. 6	0,8075
V ^d	338.25	104.41	35.37	40.25	1,0891
V ^e	330.44	104.52	31.44	56.57	1,4375
IV ^a	92.20	103.52	51.18	36. 1	0,5216
III ^a	99.50	103.50	49.33	54. 8	0,4542

XI. Dans le Tableau suivant nous fournissons pour certains α quelques valeurs des quantités φ , 2σ , 2τ , $2\Delta\tau$, $2(\tau - \theta)$ et $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$, calculées en supposant $\rho = 0,3$; nous y comprenons celles qui correspondent au maximum de τ et au minimum de α que nous avons adopté égal à 0,000713. On pourra ainsi, dans chaque cas donné, se former une idée de l'importance des quantités en question. On voit, par exemple, que dans le cas de $\alpha = 0,005$ ou *grosso modo* $\gamma^2 = \frac{1}{R}$, on aurait, pour $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma} = 0,02$, $2\sigma = 27^0,5$ et $2t = 76^j,5$. Dans ces conditions les perturbations de Jupiter ne pourraient pas être trop considérables, malgré la petitesse de $\frac{\sqrt{M\pi}}{\gamma}$. Et nous avons vu que, pour des comètes hyperboliques, d'un mouvement direct, ayant une distance périhélie inférieure à $\frac{R}{2}$, on devrait avoir $\gamma^2 > \frac{1}{R}$. Cela explique, comme nous l'avons déjà dit, la rareté de tels astres. Nous n'avons pas cru nécessaire de prendre pour α des valeurs plus petites que 0,005.

α	β	γ	Δ	ϵ	$\frac{\sqrt{\Delta}}{\gamma}$
(I) $\alpha = 0,20, \quad \gamma^2 = 0,01113.$					
20. 0	18.17	2,888	0,083	-0,766	0,2783
40. 0	42.58	4,888	0,696	-0,900	0,2138
50. 46,1	64.37	5,239	1,489	-0,433	0,1604
60. 0	98.13	4,911	2,611	-0,462	0,0982
66.19,9	169.26	4,209	3,747	-1,474	0,0111
(II) $\alpha = 0,10, \quad \gamma^2 = 0,01291.$					
40. 0	25. 2	3,702	0,246	-0,544	0,2244
50. 0	35.51	4,204	0,501	-0,440	0,1835
60. 0	53. 8	4,396	0,923	-0,141	0,1342
70. 0	90.22	4,142	1,629	-0,475	0,0723
74. 0	128.26	3,855	2,049	-0,869	0,0360
75.25,0	165.55	3,716	2,228	-1,039	0,0093
(III) $\alpha = 0,05, \quad \gamma^2 = 0,02545.$					
50. 0	19.49	3,150	0,177	+0,239	0,1900
60. 0	28.57	3,435	0,326	+0,144	0,1452
67.47,6	41.44	3,512	0,508	-0,006	0,1061
74. 0	60.27	3,450	0,725	-0,203	0,0715
79. 0	95.54	3,280	0,984	-0,451	0,0383
81.40,1	160.34	3,117	1,180	-0,643	0,0073
(IV) $\alpha = 0,04, \quad \gamma^2 = 0,03022.$					
50. 0	16.14	2,849	0,127	+0,187	0,1909
60. 0	23.41	3,130	0,234	+0,121	0,1468
69.56,4	37.52	3,238	0,411	-0,027	0,0973
76. 0	56.44	3,185	0,584	-0,187	0,0639
80. 0	84.25	3,074	0,752	-0,349	0,0386
82. 0	114.55	2,982	0,865	-0,460	0,0225
83. 7,4	158.23	2,914	0,942	-0,536	0,0067
(V) $\alpha = 0,03, \quad \gamma^2 = 0,03817.$					
55. 0	14.59	2,643	0,113	+0,117	0,1706
65. 0	22.35	2,847	0,202	+0,052	0,1243
72.27,1	33.33	2,900	0,308	-0,041	0,0866
77.20	47.56	2,871	0,411	-0,138	0,0601
81.10	71.57	2,795	0,529	-0,252	0,0373
83.40	110.40	2,704	0,639	-0,361	0,0188
84.39,6	155. 9	2,653	0,696	-0,417	0,0060

τ .	$z\tau$.	$z\tau$.	$z\Delta\tau$.	$z\tau - \theta$.	$\frac{1}{\gamma} \frac{\Delta\pi}{\gamma}$.
(VI) $\alpha = 0,02, \quad \gamma^2 = 0,05408.$					
60. 0	12.27	2,296	0,083	+0,057	0,1491
69. 0	18.47	2,427	0,138	+0,013	0,1061
75. 31,4	28. 4	2,459	0,201	-0,044	0,0728
80. 10	42.22	2,438	0,269	-0,110	0,0478
83.25	65.43	2,388	0,341	-0,181	0,0289
85.20	100.12	2,334	0,403	-0,243	0,0157
86.17,3	149.47	2,296	0,445	-0,284	0,0051
(VII) $\alpha = 0,01, \quad \gamma^2 = 0,10180.$					
65. 0	7.56	1,721	0,039	-0,016	0,1265
73.30	12.31	1,807	0,055	+0,003	0,0847
79.39,2	20.22	1,819	0,092	-0,032	0,0530
83.40	35.49	1,807	0,123	-0,063	0,0317
86. 0	54.59	1,785	0,153	-0,092	0,0186
87.20	86.44	1,761	0,179	-0,118	0,0101
88. 1,2	137.56	1,743	0,198	-0,137	0,0037
(VIII) $\alpha = 0,005, \quad \gamma^2 = 0,19723.$					
79. 0	9.41	1,317	0,031	-0,009	0,0570
82.38,6	14.36	1,322	0,040	-0,018	0,0381
84.40	20.12	1,320	0,047	-0,025	0,0275
86. 0	27. 7	1,316	0,054	-0,032	0,0203
87.20	41.13	1,309	0,063	-0,041	0,0131
88.30	77.32	1,297	0,076	-0,054	0,0061
88.55,6	122. 7	1,289	0,084	-0,062	0,0027

XII. La théorie de la capture des comètes impose une classification des comètes périodiques toute différente de celle qui réunit les astres, ayant à peu près les distances aphéliques égales, et les rattache à la grosse planète dont le demi grand axe diffère peu de la moyenne de ces distances aphéliques. Ici, ce sont les points de proximité d'après lesquels il faut grouper les différentes comètes elliptiques. Il nous a semblé intéressant de donner dans un Tableau la liste des comètes périodiques qu'on pourrait rattacher à chacune des grosses planètes, en indiquant la valeur approchée de la plus courte distance Δ des deux orbites. Nous ne répéterons pas celles dont la durée de révolution R est inférieure à dix années et nous nous arrêterons à la limite $R = 10000$ ans. Un grand nombre d'orbites cométaires se

rapproche de deux ou même trois orbites planétaires. Quand la plus courte distance à Jupiter, Saturne, Uranus ou Neptune est suffisamment petite, nous ne mentionnerons pas toujours les points de proximité secondaires; mais, quand cette distance Δ dépasse sensiblement le rayon de la sphère d'activité, nous indiquerons aussi la plus courte distance approchée à d'autres planètes. Nous placerons alors la comète dans deux ou trois groupes différents, chacune de ces planètes ayant pu à l'origine contribuer à la transformation de l'orbite parabolique en une orbite elliptique. La comète 1864 II Tempel, avec $R = 3930^a$, peut, à cause de sa faible inclinaison ($i = 17^{\circ}8'$), se rapprocher de toutes les planètes, à l'exception de Mercure et de Vénus; nous l'avons exclu à cause de cette circonstance.

Il n'y a que très peu de comètes elliptiques pour lesquelles on ne trouve pas des points de proximité; les plus remarquables sont celles dont la distance périhélie q est excessivement petite. Si l'on voulait attribuer l'ellipticité de leurs orbites à un milieu résistant plus dense dans le voisinage immédiat du Soleil, il faudrait admettre que l'action de ce milieu diminue énormément avec sa distance au Soleil, et on ne pourrait pas l'invoquer pour expliquer l'accélération constatée dans le mouvement moyen de la comète d'Encke. En effet, on a pour les comètes 1843 I et 1882 I $q = 0,00554$ et $0,00775$, $i = 144^{\circ}$ et 142° et $R = 533^a$ et 843^a pour la comète 1680 Kirch, qui se rapproche d'ailleurs à $0,4^c$ Jupiter et à $0,005$ de la Terre, $q = 0,00622$, $i = 61^{\circ}$ et $R = 881^c$ et pour la comète 1847 I Hind $q = 0,0426$, $i = 49^{\circ}$ et $R = 1021^c$ tandis que la comète 1882 I Wells, avec $q = 0,0608$ et $i = 7^{\circ}$ ne présente presque plus de trace d'ellipticité. Il semble que pour l'inclinaison de ces comètes intéressantes est grande, plus la période est longue. Le groupe des comètes 1843 I, 1882 II, etc se rapproche actuellement de l'orbite de Pallas à moins de $0,1^c$ il n'est donc pas impossible que cette petite planète ait, à l'origine, modifié leur excentricité.

Les comètes suivantes ne se rapprochent suffisamment d'aucune orbite planétaire et durent être exclues du Tableau :

1807 Parisi, $R = 1713^a$, à $0,08$ de Vénus.

1871 IV Tempel. $R = 2690^a$, à $0,063$ de la Terre, à $1,7$ de Jupiter.

- 1873 IV Borrelly, $R = 3375^a$, observée pendant 31 jours, à 0,085 de Vénus, à 3 de Neptune.
 1822 IV Pons, $R = 5450^a$, à 0,13 de la Terre.
 1851 III Brorsen, $R = 5550^a$, à 1,8 de Jupiter.
 1857 VI Donati, $R = 6143^a$, observée pendant 39 jours, à 1,8 de Jupiter.
 1887 IV Barnard, $R = 8298^a$, à 2,4 de Neptune, à 0,09 de Mars.

Les comètes elliptiques qui coupent l'écliptique au delà de l'orbite de Neptune sont les suivantes :

- (a) 1857 Peters $R = 235^a$, 1873 IV Borrelly $R = 3375^a$, 1889 IV Davidson $R = 5127^a$ et 1887 IV Barnard $R = 8298^a$, à une distance d'environ 70.
 (b) 1807 Parisi $R = 1714^a$ et 1881 III Tebbutt $R = 2954^a$, à une distance d'environ 150.
 (c) 1888 I Sawerthal $R = 2182^a$, distance approchée 330.
 (d) 1822 IV Pons $R = 5450^a$, distance approchée 600.

Le groupe (α) présente un faible indice de l'existence d'une planète transneptunienne à une distance d'environ 70 du Soleil.

Voici le Tableau dans lequel chaque groupe porte le nom de la planète à laquelle il est rattaché. Nous y avons désigné par leurs signes conventionnels les planètes dont une comète se rapproche dans un second point de proximité.

Noms. R. Δ .

I. — *Mercur*e.

1883 II Ross.....	94^a (inc.)	0,033 \mathcal{Z} 1,4
1827 III Pons.....	2611	0,036
1857 III Klinkerfues.....	7040	0,003 \mathcal{Z} 0,94

On peut encore ajouter à ce groupe la comète d'Encke, $\Delta = 0,017$.

Noms. R. Δ .

II. — *Vénus*.

1812 Pons.....	72^a	0,076 \mathcal{H} 1,2
1857 IV Peters.....	235	0,023
1845 III Colla.....	250 (inc.)	0,031 \mathcal{O} 0,05
1858 VI Donati.....	1880	0,01 \mathcal{Z} 1,2
1888 I Sawerthal.....	2182	0,027
1857 V Klinkerfues.....	2463	0,025 \mathcal{Z} 1,0
1881 III Tebbutt.....	2954	0,008

Noms. R. Δ.

III. — *La Terre.*

1866 I Tempel.....	33 ^a	0,007	♃ 0,15, ♃ 0,4
1862 III Tuttle.....	120	0,005	♃ 0,75
1845 III Colla.....	250(inc.)	0,05	♀ 0,031
1861 I Thatcher.....	415	0,002	♃ 0,3
1846 VII Brorsen.....	500	0,057	♂ 0,043
1854 IV Klinkerfues..	1309	0,016	♃ 0,13
1889 IV Davidson.....	5127	0,04	
1763 Messier.....	7334	0,025	et 0,032
1680 Kirch.....	8810	0,005	♃ 0,4

On peut encore ajouter à ce groupe la comète de Biela, dont plus courte distance à l'orbite terrestre était de 0,0002 en 18

IV. — *Mars.*

1867 I Coggia.....	34	0,021	♃ 0,05
1846 VII Brorsen.....	500	0,43	♂ 0,057
1887 II Brooks.....	791	0,07	♃ 1,5
1846 I De Vico.....	2721	0,075	♃ 1,3

V. — *Jupiter.*

Tuttle-Méchain.....	14	0,8	♃ 1,8
1852 IV Westphal.....	61	0,4	
1815 Olbers.....	74	0,8	♂ 0,09
Halley.....	76	0,8	♂ 0,05, ♂ 0,05
1847 V Brorsen.....	81	0,5	
1883 II Ross.....	94(inc.)	1,4	♃ 0,033
1889 III Barnard.....	128	0,5	♂ 0,04
1793 II Perny.....	422(inc.)	0,6	
1885 III Brooks.....	496	0,3	
1854 V Winnecke-Dien...	994	0,3	
1853 I Secchi.....	1215(inc.)	0,85	
1854 IV Klinkerfues.....	1309	0,13	♂ 0,016
1785 II Méchain.....	1325	1,5	
1858 VI Donati.....	1880	1,2	♀ 0,01
1769 Messier.....	2090	0,8	
1857 V Klinkerfues.....	2463	1,0	♀ 0,025
1881 VIII Swift.....	2740	0,46	♃ 1,2
1811 I Flaugergues.....	3066	0,85	
1825 IV Pons-Biela.....	4470	0,9	
1871 I Winnecke.....	5200	0,1	♀ 0,04
1857 III Klinkerfues.....	7040	0,91	♃ 0,003
1849 III Schweizer-Bond...	8375	0,6	
1680 Kirch.....	8810	0,4	♂ 0,005

Noms. R. Δ.

VI. — *Saturne.*

1846 VI Peters.....	13 ^a	0,6	
Tuttle-Méchain.....	14	1,8	Z 0,8
1866 I Tempel.....	33	0,45	δ 0,007, ♃ 0,1
1862 III Tuttle.....	120	0,75	δ 0,005
1840 IV Bremiker.....	344	0,9	
1861 II Tebbutt.....	409	0,6	
1861 I Thatcher.....	415	0,3	δ 0,002
1811 II Pons.....	875	0,15	
1881 VIII Swift.....	2740	1,2	Z 0,46

VII. — *Uranus.*

1866 I Tempel.....	33	0,1	δ 0,007, ♃ 0,46
1867 I Coggia.....	34	0,05	σ 0,021
1812 Pons.....	72	1,2	♀ 0,076
1846 IV De Vico.....	76	0,7	♀ 0,06
1874 IV Coggia.....	306	0,04	
1855 I Schweizer.....	1059	0,24	
1840 II Galle.....	3790	1,4	♄ 1,3
1858 VII Tuttle.....	6000(inc.)	0,56	♃ 1,0, ♄ 0,46

VIII. — *Neptune.*

1853 II Schweizer.....	782	1,34	δ 0,073
1887 II Brooks.....	794	1,5	σ 0,07
1846 I De Vico.....	2721	1,3	σ 0,075
1840 II Galle.....	3790	1,3	♃ 1,4
1858 VII Tuttle.....	6000(inc.)	0,46	♃ 1,0, ♄ 0,56

Il est remarquable qu'il existe très peu de comètes paraboliques qui ne se rapprochent plus ou moins d'aucune orbite planétaire.

OBSERVATION DU PASSAGE DE MERCURE SUR LE SOLEIL,

FAITE A L'OBSERVATOIRE KHÉDIVIAL DU CAIRE :

PAR M. IBRAHIM ESMATT.

L'observation a été faite avec un équatorial de 0^m, 21 d'ouverture :

Second contact intérieur, le 9 mai 1891 à.... 18^h 48^m 6^s
 » extérieur, » » 18^h 53^m 6^s

en temps moyen astronomique du Caire.

La position de l'Observatoire est

Latitude..... 30° 4' 40" Nord
Longitude 1^h 55^m 48^s Est de Paris.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

EXTRAIT D'UN RAPPORT SUR UN MÉMOIRE ENVOYÉ EN RÉPONSE A UNE QUESTION MISE AU CONCOURS POUR L'ANNÉE 1889, PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE COPENHAGUE.

La question posée était la suivante :

Dans une étoile double formée de deux points A et B à des masses égales, les orbites décrites sont circulaires. Un troisième point C, dont la masse est infiniment petite, se meut sur le plan des orbites de A et de B, de manière qu'à l'origine il se trouve sur le prolongement de AB, à une distance de A égale à la moitié de celle qui sépare A de B, et qu'en quittant cette position il décrirait une orbite circulaire autour de A si B n'existait pas. A l'origine, tous les mouvements se font dans le même sens.

Le calcul doit être poussé assez loin pour que C ait fait au moins une révolution autour de B, comme aussi B une autour de A. Les résultats seront présentés en partie sous forme de Table avec une exactitude de cinq chiffres environ, et, pour quelques moments correspondant au commencement et à la fin, on donnera des orbites intermédiaires avec des contacts du troisième ordre ou d'un ordre plus élevé.

Un seul Mémoire a été envoyé; il a été soumis par la Commission des Sciences au jugement d'une Commission qui a présenté le Rapport suivant :

« Dans l'appréciation du Mémoire, ayant pour devise quelque chose de Gœthe, qui a été soumis à notre examen, il faut avoir présentes à l'esprit certaines circonstances spéciales qui suivent. Il s'agit de déterminer par un calcul numérique quelques cas simples bien caractérisés du problème des trois Corps. Parmi ces cas simples, il y en a qui présentent un m

ment purement périodique, de sorte que les corps, au bout d'un temps constant, reviennent dans des positions mutuelles qui sont congruentes avec les précédentes, et la connaissance de ces cas simples sera aussi d'une très grande importance pour l'étude des autres. Mais on ne savait pas directement comment trouver des exemples d'une pareille périodicité.

« Dans le cours de son travail, notre auteur — chose assez inattendue — a constaté que le cas proposé est très voisin d'une de ces formes de mouvement périodique, et il faut reconnaître que cette découverte a dû autoriser et encourager l'auteur à traiter librement la question proposée par l'Académie, et surtout le porter à s'intéresser à cette périodicité apparente ou réelle.

« L'auteur a cependant calculé le mouvement dont il s'agit par intégration numérique dans l'étendue prescrite par l'Académie et correspondant à trois périodes, et ses résultats, qu'il donne en nombres et graphiquement, montrent, entre autres choses de grand intérêt, combien sont petites les valeurs dont ce mouvement s'écarte de la rigoureuse périodicité. L'auteur regarde comme possible que ces écarts soient dus à l'accumulation inévitable des petites inexactitudes de son long calcul. Il nous a été difficile de juger du degré d'exactitude réellement obtenu, car l'auteur donne seulement ses résultats, sans rien communiquer de ses calculs. Le rapporteur de la Commission a, par suite, dû refaire le calcul jusqu'au premier périhélie avec une exactitude sans doute un peu plus grande. Les écarts ainsi trouvés nous autorisent à admettre que, dans le travail de l'auteur, on peut, pour une période, compter sur une exactitude de trois décimales environ, et c'est en tout cas suffisant pour que les tableaux et les graphiques de l'auteur puissent avoir leur utilité dans des recherches et des conclusions plus étendues.

« Le degré d'exactitude demandé par l'Académie n'est pas atteint; mais nous trouvons que c'est plus que compensé par la circonstance que l'auteur, outre le cas proposé, en a encore calculé un autre.

« L'auteur a lui-même évalué plus bas que nous l'exactitude de ses résultats, et pense que les écarts de la périodicité qu'il a trouvés peuvent être attribués à une accumulation d'inexactitudes; mais, quelque petits que soient ces écarts, il est cependant probable qu'ils sont beaucoup trop grands pour pouvoir être expliqués de cette manière. Il y a, tant dans la question elle-même que dans les résultats de l'auteur, des circonstances telles, qu'elles auraient dû l'engager à chercher des preuves plutôt contre que pour la réalité de cette périodicité apparente, et il aurait eu de bonnes chances pour trouver une preuve contre s'il avait seulement calculé une demi-période du mouvement avec une exactitude plus grande.

» L'Académie avait demandé qu'on calculât des orbites intermédiaires ayant avec l'orbite réelle des contacts du troisième ordre ou d'un ordre plus élevé. Elle se proposait certainement par là surtout de faire soumettre la méthode de M. le professeur Gylden à une épreuve pratique; toutefois nous ne chercherons pas querelle à l'auteur, parce qu'il laisse cette recherche de côté en donnant pour raison que la véritable forme du mouvement, telle qu'elle résulte de ses calculs, s'écarte tellement de la forme supposée par la théorie des orbites intermédiaires, qu'on peut voir sans calcul qu'elles ne peuvent servir comme approximation même pour une seule révolution. Mais cette demande de l'Académie renfermait en même temps l'indication d'un moyen pour donner aux calculs l'exactitude désirée, qu'il aurait été très difficile d'obtenir par une intégration numérique ordinaire. Quelque grand que soit l'écart entre le mouvement dont il s'agit et ces orbites intermédiaires, celles-ci ou d'autres analogues, employées pour de plus petites portions du mouvement, surtout dans le voisinage du périhélie, auraient pu cependant contribuer à un haut degré à l'exactitude de l'intégration numérique, en diminuant les perturbations et en permettant l'emploi de plus grands intervalles. L'auteur aurait aussi pu contrôler par d'autres moyens ses résultats et remédier en partie à l'incertitude du calcul. Des quatre intégrations, par exemple, qui sont nécessaires, il y a en effet une qui, dans ce cas, peut se faire exactement.

.....

» Bien donc que nous ne trouvions pas dans le travail de notre auteur la marque de qualités brillantes, telles que la souplesse et le talent de découvrir au premier coup d'œil le meilleur moyen de surmonter les difficultés, nous devons cependant reconnaître qu'en suivant vaillamment jusqu'au bout la voie qu'il avait une fois adoptée, il a donné un équivalent plus que suffisant de ce que l'Académie avait demandé. Sa réponse à la question proposée, par les illusions qu'elle dissipe et les excellents renseignements qu'elle renferme, sera d'une grande utilité. Nous avons, en l'examinant, eu l'occasion de remarquer combien sa manière de rendre, pour ainsi dire, visibles les mouvements dont il est question, peut servir à éveiller des idées et à guider dans le traitement du difficile problème dont il s'agit ici, et avons aussi le ferme espoir que ce sera également pour d'autres un stimulant pour soumettre cette question à de nouvelles recherches en partant de points de vue très différents. Nous croyons en conséquence devoir proposer à l'Académie de décerner à ce Mémoire sa médaille d'or.

THELE,
Rapporteur.

J.-P. GRAM.

H. VALENTINER.

« Les conclusions de ce Rapport ont été approuvées d'abord par la Classe des Sciences et ensuite par l'Académie, dans sa séance du 20 février. A l'ouverture du billet qui accompagnait le Mémoire, l'auteur s'est trouvé être M. le baron Eduard v. Haerdtl, docteur en philosophie et docent à l'Université d'Innsbruck, mais domicilié à Vienne. »

LOCKYER (J.-N.). — HYPOTHÈSE MÉTÉORITIQUE OU EXPOSÉ DES RÉSULTATS DES RECHERCHES SPECTROSCOPIQUES SUR L'ORIGINE DES SYSTÈMES COSMIQUES.

Dans le volume intitulé : *Hypothèse météoritique*, M. Lockyer s'est proposé de réunir et de coordonner les observations spectroscopiques des corps cosmiques des différents ordres en les comparant aux résultats de ses travaux de laboratoire. Les premières conclusions de ce travail de comparaison parurent dans les *Proceedings of the Royal Society*, vol. XLIII, p. 117-156; on les trouvera traduites dans le *Bulletin astronomique*, t. V, p. 408 et suivantes.

Le Livre de M. Lockyer comprend neuf parties, qui traitent successivement :

- I. De la chute et de la nature des météorites.
- II. De l'analyse spectrale de ces corps.
- III. Des météorites dans l'air.
- IV. Des météorites dans le système solaire.
- V. Des météorites dans l'espace.
- VI. D'une classification nouvelle des corps cosmiques.
- VII. De l'origine des systèmes doubles et multiples.
- VIII. Des variations d'éclat et de couleur des corps cosmiques.
- IX. Des conclusions générales.

Les météores, les bolides, les globes de feu, les étoiles filantes ne diffèrent les uns des autres que par leurs dimensions, ainsi que cela résulte de l'étude des spectres et des vitesses de ces corps; aussi l'auteur fait-il choix du mot *météorite* pour désigner à la fois les plus petites et les plus grandes masses errantes de l'espace.

Les météorites se présentent toujours sous une forme fragmentaire, elles semblent être le résultat de fractures. Leur couche extérieure, marquée de sillons, de rainures, de dépressions, est en général terne; quelquefois, au contraire, elle présente l'aspect d'un vernis noir.

On les a subdivisées en trois classes :

1° Les ~~lacro-sidér~~sidériles, ou simplement les sidériles, qui sont composés de fer et de nickel;

2° Les aérolithes ou météorites, formées de matière pierreuse;

3° Les sidérolithes ou méso-sidériles, formées de pierre et de fer spangieux.

Les métalloïdes qu'on rencontre le plus fréquemment dans les météorites sont ceux qui sont le plus répandus à la surface de notre globe il n'en est point de même des métaux. D'autres substances, au contraire ne se rencontrent que dans les météorites, telles que la *trailite*, l'*o-dhamite* et la *daubréélite*.

Les spectres des météorites varient d'une température à l'autre; les raies qu'ils présentent sont en général celles de basse température de magnésium, du sodium, du fer, du chrome, du manganèse, du strontium du calcium, du baryum, du potassium, du fer, du bismuth et du nickel mais ces raies ne se trouvent pas toujours dans le spectre d'une même météorite.

La ligne du magnésium, que l'on rencontre le plus fréquemment, est un reste de la cannelure $\lambda 500$. Le manganèse est en général représenté par la raie $539,5$ et par une autre dans le violet $\lambda 403$; le fer l'est par les raies 579 ; $526,8$; $438,3$; $602,4$.

En traitant des météorites dans le système solaire, M. Lockyer s'occupe des comètes qui ne seraient autres que des essaims de météorites. Cette idée, comme l'auteur le montre, n'est pas nouvelle; en 1819, Chladni émettait l'hypothèse que les étoiles filantes, les météores, les comètes ne seraient que des manifestations d'un même phénomène.

L'examen d'observations nombreuses montre que les comètes obéissent toutes aux mêmes lois. Elles présentent dans leurs spectres des changements qui dépendent en général de leur distance au Soleil, de leur vitesse et de leur distance périhélie. Le carbone joue un grand rôle dans le spectre des comètes. A de très basses températures, tous les carbures donnent le spectre de cannelures du carbone froid. A des températures plus élevées, on obtient le spectre de cannelures du carbone chaud ou carbone A. La température s'élevant davantage, le spectre de lignes succède au spectre de cannelures et l'on constate la présence d'un groupe commençant à $\lambda 460$, que M. Lockyer appelle carbone B, puis d'autres groupes $\lambda 420$ et $\lambda 388$. Le spectre du carbone qu'on observe en général dans le cas des comètes est celui des hautes températures.

Voici comment on peut résumer les changements d'aspect que présente le spectre cométaire.

Lorsque la comète se trouve à l'aphélie, on ne remarque, dans son

spectre, qu'une seule raie, due, paraît-il, à l'émission du magnésium. Cette ligne est bientôt remplacée en partie ou en totalité par le spectre du carbone froid. La ligne $\lambda = 521$ du spectre du magnésium apparaît ensuite et le carbone froid fait place au carbone chaud. Puis vient l'émission du manganèse $\lambda 558$ et quelquefois celle du plomb $\lambda 546$. On constate ensuite les phénomènes d'absorption. La bande du carbone dans l'orangé se trouve *masquée* par le manganèse $\lambda 558$ et le plomb $\lambda 546$. A ce moment apparaît quelquefois aussi la bande d'absorption du fer et le groupe B des cannelures du carbone. La température augmentant toujours et la comète se trouvant dans le voisinage du périhélie, le magnésium est représenté par la ligne *b* et l'on voit apparaître les lignes du fer. Au périhélie la force répulsive du soleil agit avec le plus d'intensité et si les vapeurs sont chassées, avec une vitesse suffisamment grande, dans la direction du rayon visuel, les lignes brillantes du spectre cométaire subiront un déplacement. On remarquera alors dans le spectre de la comète des lignes brillantes d'une certaine longueur d'onde dues aux vapeurs émises, puis des lignes noires d'une longueur d'onde différente provenant des vapeurs enveloppant les météorites du noyau cométaire. Après le passage au périhélie les mêmes phénomènes se reproduiront, mais dans l'ordre inverse.

Quelle est l'origine de la lumière des comètes? A l'exemple de Reichenbach et du professeur Tait, M. Lockyer attribue la lumière des comètes à des collisions de météorites qui peuvent être de trois espèces :

- 1° Collisions internes, dues au mouvement des météorites d'un essaim autour de leur centre de gravité commun;
- 2° Collisions dues à un phénomène de marée;
- 3° Collisions externes produites entre les météorites de l'essaim et celles des espaces extérieurs.

Après les comètes M. Lockyer étudie les nébuleuses, c'est-à-dire les météorites dans l'espace. Les raies principales des spectres de ces corps sont 486, 495 et 500 (1).

Pour M. Lockyer les nébuleuses sont réellement des essaims de météorites ou de poussières météoritiques. Ces météorites sont très dispersées et les collisions qu'elles subissent produisent une élévation de température, d'où résulte l'incandescence.

L'idée d'une relation entre les nébuleuses et les météorites fut émise, pour la première fois, par le professeur Tait. Depuis, les expériences

(1) Cette dernière raie qui, d'après les recherches de M. Lockyer, paraît être un reste de la cannelure au magnésium a provoqué et provoque encore de nombreuses discussions.

de M. Lockyer ont montré que les spectres des comètes et des nébuleuses peuvent être reconstitués, en ce qui concerne l'hydrogène et le carbone, à l'aide de la vapeur des météorites. Cette opinion a été partagée par le Dr Huggins, qui attribue la raie $\lambda 500$ à l'azote et $\lambda 373$ à l'hydrogène.

Les formes régulières qu'affectent les nébuleuses peuvent se subdiviser en trois groupes dépendant de la direction de la force agissante :

- 1° Nébuleuses globulaires, puis sphéroïdales;
- 2° Nébuleuses en spirale;
- 3° Nébuleuses cométaires.

Pour expliquer la formation des premières, M. Lockyer imagine un essaim de météorites primitivement au repos qui serait traversé par d'autres essaims de l'espace suivant des directions quelconques. A une certaine distance du centre de cet essaim, il existerait une région où les collisions seraient maxima. Les météorites qui y seraient arrêtées commenceraient à décrire une orbite circulaire autour de leur centre de gravité commun. Cette surface des collisions maxima est la seule qui soit visible pour nous : elle nous présentera l'apparence d'une nébuleuse planétaire. Des collisions qui se produiront à l'intérieur de cette enveloppe offriront l'aspect d'une étoile nébulaire. Mais ces nébuleuses commenceront tôt ou tard d'un mouvement de rotation autour d'un axe qui résultera la formation des nébuleuses sphéroïdales.

Si l'on suppose maintenant que ces nébuleuses sphéroïdales sont envahies par d'autres essaims, venant de différentes régions de l'espace, on devra s'attendre à constater sur un fond nébuleux, plus ou moins lumineux, des courbes plus brillantes, qui seront les lieux d'intersection du nouvel essaim avec l'ancien; si les météorites venant d'une direction déterminée sont en excès on aura l'apparence de spirales ou d'arcs brisés.

D'après M. Lockyer, les nébuleuses cométaires seraient formées soit par un essaim très dense se mouvant avec une grande vitesse à travers une nappe de météorites au repos, soit par un essaim au repos environné par une nappe de météorites qui se déplace suivant une direction déterminée.

La discussion montre que les étoiles dont les spectres présentent des lignes brillantes et les étoiles de la classe IIIa de la classification de M. Vogel sont étroitement liées aux comètes. D'une comparaison des spectres des nébuleuses, des aurores, des comètes, des étoiles à spectres brillants et des étoiles à cannelures mixtes, il résulte que les raies $\lambda 468$, $\lambda 474$, $\lambda 517$ et $\lambda 558$ se rencontrent dans les spectres de ces catégories de corps, les cannelures $\lambda 486$ de l'hydrogène, $\lambda 521$ et $\lambda 526$ du magnésium, $\lambda 546$ du plomb sont communes à quatre de ces catégories. Les cannelures du carbone se présentent dans les spectres de toutes

corps célestes, depuis celui des nébuleuses planétaires jusqu'à celui des étoiles à lignes brillantes.

Les spectres des nébuleuses subissent des changements analogues à ceux des spectres cométaires. Lorsque les collisions sont peu nombreuses, et l'essaim par conséquent à peine lumineux, on ne constate dans le spectre considéré que la raie $\lambda 500$. La température augmentant, le spectre continu apparaît; l'essaim nébulaire se condense de plus en plus, et il en résulte la formation de ce qui nous apparaît comme une étoile, astre dont le spectre continu est sillonné de raies et de cannelures brillantes. Ce premier corps se transforme ensuite en un autre dont le spectre présente l'émission du carbone et des cannelures métalliques d'absorption. Le carbone brillant disparaît à son tour et les cannelures font place à des lignes d'absorption.

Ainsi donc, dans le cas des nébuleuses comme dans celui des comètes, la succession des phénomènes est la même :

Ligne brillante $\lambda 500$.

Émission du carbone et du manganèse.

Absorption du manganèse et du plomb.

Lignes brillantes et lignes d'absorption.

En d'autres termes, il existe des corps cosmiques dont la température va en s'élevant par suite de la condensation qu'ils éprouvent. Il y a donc lieu de modifier l'ancienne classification, qui est basée sur la température décroissante, et d'étendre la classification nouvelle aux étoiles, aux comètes et aux nébuleuses.

La classification que propose M. Lockyer comprend 7 groupes principaux subdivisés chacun en plusieurs groupes secondaires.

- Groupe I :* Caractérisé par la prédominance des lignes et des cannelures brillantes. Les phénomènes d'absorption ne se manifestent que dans les corps extrêmes de ce groupe.
Couleur : bleu, bleu vert, blanc ou gris pâle.
- Groupe II :* Lignes et cannelures brillantes; prédominance des phénomènes d'absorption.
Couleur : rouge jaune.
- Groupe III :* Prédominance des lignes d'absorption; température croissante; les spectres des différents corps de ce groupe prennent une forme de plus en plus simple.
Couleur : variant du jaune au blanc.
- Groupe IV :* Prédominance des lignes d'absorption les plus simples.
Couleur : blanc bleuâtre.
- Groupe V :* Prédominance des lignes d'absorption; température décrois-

sante; les spectres des différents corps de ce § prennent une forme de plus en plus complexe.

Couleur : variant du blanc au jaune.

Groupe VI : Prédominance de l'absorption du carbone.

Couleur : variant du jaune rouge au rouge sang.

Groupe VII : Extinction de toute lumière.

Couleur : celle des corps obscurs.

M. Lockyer résume, comme il suit, les conclusions générales auxquelles il a conduit ses recherches. Bien que ces conclusions aient partiellement été publiées dans le *Bulletin*, t. V, p. 564-568, nous les reproduisons *extenso*, ici.

1. Tous les corps célestes, lumineux par eux-mêmes, sont composés d'essaims de météorites ou de masses de vapeur météoritique. La lumière qui produit cette vapeur résulte de la condensation des essaims de météorites due à la gravité. La vapeur météoritique se condense finalement en un globe solide.

2. La distinction entre les étoiles, les comètes et les nébuleuses repose sur aucune donnée physique.

3. Les étoiles à température croissante diffèrent de notre Soleil principalement formées de corpuscules météoritiques isolés, et les comètes d'après l'hypothèse de M. Schiaparelli.

4. Les spectres de tous les corps cosmiques dépendent de la lumière développée par les collisions dans les météorites et de l'espace qui existe entre ces météorites en essaim, ou, dans le cas d'essaims complètement volatilisés, de la quantité de chaleur rayonnée depuis l'époque de la vaporisation complète.

5. Dans les nébuleuses, dans les étoiles à lignes brillantes différentes de celles de l'hydrogène et dans les comètes loin du périhélie, les vapeurs produites par les collisions et prédominantes dans les spectres de ces corps, ont une température à peu près égale à celle du brûleur Bunsen.

6. Les vapeurs produites par les collisions dans les étoiles telles que α Orion, qui prédominent par leurs phénomènes d'absorption, ont une température à peu près égale à celle de la flamme de Bessemer.

7. Dans un essaim simple suffisamment grand, on constatera successivement l'évolution ordinaire de tous les phénomènes lumineux. Les points essentiels sont définis par les groupes I à VII.

8. Il est cependant possible que les étoiles (étoiles en apparence) de l'un quelconque des groupes I, II, III, IV soient formées d'une manière moins régulière par la collision de deux courants ou essaims de météorites, ou par la collision d'un courant et d'un essaim, pourvu toutefois que la vitesse des météorites soit assez grande pour porter la vapeur météoritique à la température voulue.

9. La courbe d'élévation des températures des essaims de météorites et le refroidissement subséquent de la masse de vapeur produite, ainsi que les phénomènes qui accompagnent ces variations de température, peuvent être résumés d'une façon générale, comme le montre le Tableau de la page 262.

10. L'éclat de ces agrégations, à chaque accroissement de température, dépend du nombre des météorites formant l'essaim; en d'autres termes, la différence d'éclat dépend de la quantité et non de l'intensité de la lumière.

11. Les variétés des spectres des corps célestes, dont la température va en croissant, dépendent principalement du rapport qui existe entre les distances mutuelles des météorites et leurs surfaces incandescentes.

12. Quand l'intervalle entre les météorites individuelles est considérable, la ténuité des gaz provenant des collisions sera telle que ces gaz donneront un spectre lumineux peu étendu. Quand l'intervalle est moins grand, la ténuité des gaz est moindre et les vapeurs existant dans les régions intermétéoriques donneront dans leurs spectres des lignes brillantes ou des cannelures. Quand l'intervalle est relativement faible et que, par conséquent, la température des météorites individuelles est plus élevée, la prépondérance des lignes brillantes ou des cannelures, dans le spectre de l'intervalle, diminuera et la vapeur incandescente enveloppant chaque météorite manifestera sa présence par l'absorption qui se fait dans le spectre continu que donnent ces météorites elles-mêmes.

13. L'intervalle entre les météorites diminuant, on verra succéder aux phénomènes d'absorption propres aux basses températures ceux qui se manifestent aux températures élevées.

14. Les cannelures d'émission et d'absorption du carbone sont le plus propres à établir la liaison qui existe entre la nature physique et la nature chimique des différents groupes de corps.

15. Les expériences permettent de conclure que la ligne $\lambda = 500$, d'origine inconnue jusqu'ici et que l'on observe dans les spectres de

Ordre de succession (provisoire) des espacements et des températures.

	SPECTRE de l'espace intermétéorique.		SPECTRE DE LA VAPEUR DE LA MÉTÉORITE.		SPECTRE de la météorite. — Émission.
	II.	C.	Émission.	Absorption.	
<i>Température croissante du froid au chaud ou des essaims dispersés aux essaims condensés.</i>					
Nébuleuses (sans hydrogène).....	Rien.	Rien.	(500) ± 495.	Rien.	faiblement discontinu.
Comètes de 1865 et de 1867.....	Rien.	Rien.	(500).		
<i>Vœu Cygni</i> préc. collision.....	Rien.	Rien.	(500).	?	
Nébul usé avec hydrogène).....	II.	Rien.	Mg 500 ± 495.	?	
Étoiles présentant des raies brillantes à ce hydrogène).....	II.	Rien.	Fe, Mn.	?	
Nébul usés, telles que la nébuleuse d'Andromède.....	Rien.	C.	?	?	
Étoiles présentant des raies brillantes (sans hydrogène).....	Rien.	C.	Fe, Mn.	Absorption de Mn et de Pb.	Continu.
Comètes dans les conditions moyennes de collision.....	Rien.	C.	Mg (b), Mn, Pb.	?	
Comètes dans le voisinage du périhélie.	Rien.	C.	Lignes des météorites.)	?	
Étoiles du Groupe II non troublées... » troublées.....	Rien.	C.	Lignes des météorites.)	Cannelures et lignes des météorites.	Continu et éclatant.
Étoiles du Groupe III.....	II.	C.	»		
»	Rien.	Rien.	»		
<i>Condensation complète des météorites.</i>					
Étoiles du Groupe IV.....			Continu.	Lignes de haute température des éléments présents dans les météorites.	Au rayonnement des mé- téorites individuelles succède maintenant le rayonnement de la

quelques nébuleuses, dans ceux de quelques comètes ainsi que dans le spectre de *Nova Cygni*, pourrait être le reste de la cannellure du magnésium visible avec le plus d'éclat aux basses températures; cette ligne serait due à la présence de l'olivine dans les différents essais de météorites.

16. Le spectre de l'hydrogène observé dans les nébuleuses, dont le spectre présente des lignes brillantes, semble être dû à une faible excitation électrique, comme il arrive pour le spectre du carbone des comètes et de quelques autres nébuleuses. On voit un spectre succéder brusquement à l'autre dans la lueur des météorites, quand celles-ci sont placées dans des tubes vides d'air où l'on fait passer un courant électrique. On peut toujours produire le changement du spectre de l'hydrogène en spectre du carbone en portant la météorite à une température plus élevée.

17. Le spectre de l'hydrogène, donné par les étoiles variables du groupe II, au moment de leur maxima, est dû à l'hydrogène émis par les météorites des essaims en collisions qui se rencontrent avec de très grandes vitesses.

18. Les lignes très brillantes qu'on observe dans les nébuleuses en spirale ou dans celles où une rotation a commencé sont dues, probablement, à des courants de météorites animés de mouvements irréguliers et venant de courants principaux où les collisions seraient presque nulles. M. le professeur G.-H. Darwin, discutant l'hypothèse gazeuse, a déjà émis cette idée que, dans ces nébuleuses, la plus grande partie de la masse de gaz n'est pas lumineuse, l'apparence lumineuse étant, d'après une loi d'Hydrodynamique connue, une preuve de condensation le long des lignes de faible vitesse. De ce point de vue, on peut considérer la nébuleuse visible comme un diagramme lumineux de ses propres lignes de courant.

19. Les couleurs des étoiles se succèdent dans les différents groupes en formant une série régulière; elles dépendent de la température et de la condition physique de l'essaim ou de la masse condensée, entourée d'une atmosphère absorbante. Cette succession de couleurs peut présenter des modifications dans le cas des variables.

20. Les étoiles doubles ou multiples résultent de la condensation des nébuleuses doubles ou multiples. Pour aucune des étoiles doubles observées, les compagnons ne paraissent avoir été ajoutés après coup aux systèmes primitifs.

21. La plupart des étoiles variables observées appartiennent à des

classes de corps qui seraient formés, d'après M. Lockyer, d'essaims de météorites non condensés ou bien d'étoiles condensées dont la lumière est presque éteinte et autour desquels circuleraient un ou plusieurs essaims.

22. Toute variation régulière de l'éclat des corps célestes est produite par la révolution d'un essaim ou d'un corps autour d'un autre essaim, condensé ou non, ou plutôt autour du centre de gravité commun - La révolution de l'essaim secondaire s'effectue le long d'une ellipse, le maximum d'éclat ayant lieu au périastre; dans le cas des corps condensés, le minimum d'éclat est produit par le compagnon qui éclipsé la lumière de l'astre principal.

23. Toute variation irrégulière de l'éclat des corps cosmiques est due :

a. A la révolution de plusieurs essaims ou corps autour d'un autre essaim ou corps, ou autour de leur centre de gravité commun;

b. A l'entre-croisement des courants ou nappes de météorites.

24. Les étoiles nouvelles vues soit avec, soit sans nébuleuses, proviennent d'une rencontre d'essaims de météorites; les lignes brillantes qu'on observe très souvent dans leurs spectres sont des lignes de basses températures d'éléments dont les spectres ont le plus d'éclat à une température peu élevée (1). Ces mêmes lignes s'observent dans les spectres des comètes et dans ceux d'autres essaims non condensés.

25. Le nombre relativement petit des corps appartenant au groupe semble indiquer que les régions de l'espace qu'il nous est donné d'examiner sont plus riches en corps à température croissante qu'en corps à température décroissante.

26. Il pourrait se faire qu'il existât dans l'espace, en dehors des grandes accumulations de matière, une force tendant à rendre la constitution chimique des corps de moins en moins complexe.

27. Dans les annales des temps passés, on ne trouve aucun exemple d'un monde en feu, ni le récit d'aucune collision de masses de matières aussi grandes que la Terre; il n'y a donc pas lieu de parler de masses comparables au Soleil. Mais la distribution exposée ici des météorites dans tout l'espace indique que de telles collisions forment une partie intégrale de l'économie de la nature.

(1) Les étoiles variables à longue période sont exclues ici.

Applications spéciales au Soleil.

α. Les résultats auxquels M. Lockyer a été conduit par ses recherches tendent à confirmer l'hypothèse que la plupart des phénomènes solaires proviennent de chutes de météorites à la surface de notre Soleil.

β. On peut reproduire assez exactement le spectre solaire (et dans quelques régions du spectre presque ligne pour ligne) en superposant les photographies des spectres de plusieurs météorites pierreuses choisis au hasard et placées entre les pôles de l'arc voltaïque constitués par des fragments de météorites ferrugineuses.

γ. Le carbone, qui faisait partie primitivement de l'essaim des météorites dont la condensation a donné naissance au système solaire, a été refoulé, comme cela arrive pour les comètes, ou dissocié par l'énorme chaleur produite par cette condensation.

δ. Les indices de la présence du carbone que j'ai découverts en 1874 (*Roy. Soc. Proc.*, vol. XXXVII, p. 308) continueront lentement à s'accroître en intensité, jusqu'au moment où, grâce à la diminution de la température du Soleil, et à celle de la force répulsive qui en résulte, l'absorption principale sera celle du carbone. C'est dans cet état que nous trouvons actuellement les étoiles du groupe VI.

ε. Parmi les changements principaux qui s'effectuent actuellement dans le spectre solaire, il semble qu'il faut compter l'élargissement de la raie K et le rétrécissement des lignes de l'hydrogène.

D. KLUMPKE.

SCHAEBERLE (J.-M.). — SUR LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA COURONNE (1).

Dans le n° 14 des *Publications de la Société astronomique du Pacifique*, M. Schaeberle donne un aperçu de son Mémoire sur la Théorie mécanique de la couronne dont la publication, ainsi que celle du rapport de l'éclipse du 22 décembre 1889, se trouve retardée par suite de travaux d'impression très urgents.

Ce Mémoire comprend :

1° Des considérations sur les trois théorèmes fondamentaux suivants, qui servent de base à la nouvelle théorie.

(1) Aux pages 255 et 500, t. VII du *Bulletin*, lisez : Théorie mécanique au lieu de Théorie magnétique de la Couronne solaire.

I. Les éruptions à la surface du Soleil sont les plus actives et les plus nombreuses dans les zones des taches solaires.

II. Le Soleil tourne autour d'un axe passant par son centre.

III. L'axe de rotation du Soleil fait avec l'écliptique un angle d'environ $82^{\circ}, 75$.

2° L'étude de l'équation du mouvement d'une molécule de matière expulsée par le Soleil, normalement à sa surface, dans la région des taches.

3° L'étude de la forme générale de la couronne vue en projection, de la Terre, aux différentes époques de l'année.

4° Les formules fondamentales de l'inclinaison des rayons.

5° Des considérations sur le changement dans la position des pôles de la Couronne par rapport aux pôles du Soleil.

6° et 7° Considérations théoriques sur la forme de la couronne externe.

8° Une méthode de représenter graphiquement les rayons polaires.

9° La comparaison de la théorie mécanique de la couronne et de toutes les observations faites pendant les éclipses de Soleil.

10° Les conclusions générales.

Il résulterait du travail de M. Schaeberle que les principaux phénomènes observés pendant les éclipses de Soleil s'expliquent à l'aide de principes de Mécanique bien connus, d'où le nom donné à la nouvelle théorie.

D. KLUMPKA.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n° 3023-3030.

Espin. — Liste d'étoiles à spectres remarquables.

Suite des listes précédemment publiées.

Doberck. — Observations d'étoiles doubles faites à Markree.

Espin. — Nouvelle variable.

Il s'agit d'une étoile rouge, qui doit être D.M. + $68^{\circ}, 398$. Elle passe de la 8^e à la 9^e grandeur.

Millosevich, Charlois, Borrelly, Palisa. — Découverte de planètes.

La planète (306) a été trouvée par M. Millosevich le 1^{er} mars; la pla

nète (307) par M. Charlois le 5; (308) par M. Borrelly le 31; (300) par M. Palisa le 6 avril.

Wolf (R.). — Notice nécrologique sur Émile Gautier.

Le colonel Émile Gautier, directeur de l'Observatoire de Genève, est mort le 24 février dernier. Né à Genève le 18 avril 1822, il fut de bonne heure initié à l'Astronomie par son oncle Alfred Gautier. Après avoir terminé ses études à Genève et à Paris, où il travailla quelque temps sous la direction de Le Verrier, il publia, en 1847, sous forme de thèse, un *Essai sur la théorie des perturbations des comètes*. Mais il appartenait à l'arme du génie, et il ne tarda pas à être absorbé par ses devoirs militaires. En 1882, après la mort de Plantamour, le colonel Gautier fut chargé de la direction de l'Observatoire de Genève, tandis que le cours d'Astronomie était confié à M. Cellérier. Ce dernier, étant mort en 1889, eut pour successeur M. Raoul Gautier (le fils du colonel Gautier), qui bientôt remplaça aussi son père à la direction de l'Observatoire. M. Émile Gautier a succombé à une maladie du cœur, dont il souffrait depuis longtemps.

Beck (A.). — Sur un nouvel instrument pour la détermination du temps et de la latitude.

L'instrument combiné par M. Beck sert à observer les passages des étoiles par le même almicantar (cercle parallèle à l'horizon). On connaît les méthodes pour trouver l'heure et la latitude par des hauteurs égales de plusieurs étoiles observées au sextant ou au théodolite; mais un instrument qui permettrait de prendre en tout temps la même hauteur offrirait les avantages que l'on rencontre dans l'observation des passages des astres pour un plan fixe. L'*almucantar* de M. Chandler (*Bull.*, I, p. 37) est déjà fondé sur ce principe. C'est une lunette fixe, portée par un flotteur et un bain de mercure. Dans l'instrument de M. Beck, la hauteur constante s'obtient par l'emploi d'un prisme à base rhomboïdale, fixé au-dessous de l'objectif d'une lunette verticale.

Les angles du prisme sont de 60° et de 120° . Il renvoie dans la lunette les rayons émanés d'un point dont la distance zénithale est de 60° , en leur faisant subir deux réflexions totales, l'une sur la face horizontale inférieure, l'autre sur la face inclinée postérieure, qui fait avec la première un angle de 120° . L'image est donc déviée de 120° par une rotation autour de l'axe du prisme ou du double miroir, et un petit dérangement du prisme ne produit, dans la distance zénithale, qu'une erreur du second ordre. Les faces d'entrée et de sortie sont normales aux rayons.

La lunette est fixée contre un support, muni d'un niveau à bulle d'air.

M. Beck propose de donner à cet instrument le nom de *lunette normale*. Il explique longuement le mode d'observation et de réduction des observations. Il donne aussi les résultats d'une série d'observations d'essai qu'il a faites à Riga, l'année dernière, avec un instrument construit d'après ses plans, par la maison Breithaupt, de Cassel. Ces résultats sont très encourageants.

Vogel. — Sur la prétendue duplicité de α Lyre.

M. Lockyer a publié des mesures faites par son assistant, M. Fowler, et qui semblaient indiquer un doublement périodique de l'une des lignes du spectre de α Lyre. Cette découverte n'est pas confirmée par les observations de Potsdam.

Haerdtl. — Éphéméride de la comète de Winnecke.

Pritchard. — Sur une nébuleuse voisine de Mérope.

M. Barnard ayant récemment annoncé l'existence de cette petite nébuleuse, qu'il croyait difficile à photographier, M. Pritchard fait remarquer qu'elle a été plus d'une fois reproduite sur les photographies des Pléiades, obtenues à Oxford.

Harzer. — Rectification d'un passage du Mémoire sur un cas spécial du problème des trois Corps.

M. Harzer répond aussi, en quelques mots, à une légère critique, formulée par M. Charlier dans son compte rendu (*Vierteljahrsschrift*, 1890).

Pickering (E.-C.). — Sur un nouveau type de spectres stellaires.

Le grand nombre de spectres stellaires, dont l'étude systématique a été provoquée par la fondation Draper, commence à faire naître des difficultés de classification, et les quatre types adoptés par le P. Secchi et par M. Vogel suffisent à peine à les contenir. M. Pickering croit qu'il faudra classer à part, sous le type V, les étoiles dont les spectres se composent de raies brillantes; il en énumère trente-trois, toutes échelonnées le long de la Voie lactée. On rangerait dans le même type les nébuleuses planétaires.

Fleming. — Étoiles à spectres remarquables. Variables nouvelles dans le Verseau, le Dauphin et la Girafe.

Plassmann. — Remarques sur la théorie des étoiles Algol et λ Taureau.

M. Plassmann est d'avis que les anomalies observées ne s'expliquent pas complètement par des occultations du satellite.

Wanach (Bernard). — Déterminations de la latitude de Poulkova par des passages observés dans le premier vertical.

M. Wanach a exécuté, depuis le mois d'avril 1890, une série de déterminations de la latitude, par la méthode précédemment employée par M. Nyrén dans ses recherches sur la constante de l'aberration. Ces observations ont été faites avec l'instrument des passages, établi dans le premier vertical. Les variations de la latitude, constatées depuis le mois d'avril jusqu'au mois de décembre, sont à peu près de même grandeur que celles observées à Berlin et à Prague; il y a seulement une petite différence de phase.

Zona. — Sur la latitude de Palerme.

La nouvelle détermination confirme celle de Piazzì.

Thraen. — Éléments et éphéméride de la comète Wolf (1884 III), pour le retour de 1891.

M. Berberich avait déjà, de son côté, calculé une éphéméride pour la recherche de cette comète.

Petr. — Éphéméride de la planète Aline (266).

Harzer. — Sur le mouvement de rotation du Soleil.

D'après M. Harzer, les nombres obtenus par M. Dunér pour les vitesses de rotation des parallèles solaires, aussi bien que les résultats des expériences de M. Belopolsky, prouveraient que le frottement intérieur n'est pour rien dans la loi observée des vitesses. M. Harzer trouve d'abord que les vitesses observées ψ' sont très bien représentées par les formules

$$\psi' = 14^{\circ}, 112 \sqrt{1 - 0,5914 \cos^2 \mathcal{S}}$$

ou bien

$$\psi' \sin \mathcal{S} = 14^{\circ}, 072 \sin \mathcal{S} \sqrt{1 - 0,5733 \cos^2 \mathcal{S}},$$

dont la première est déduite en attribuant le même poids aux valeurs de ψ' , la seconde aux valeurs de $\psi' \sin \mathcal{S}$. Or on arriverait à une expression de cette forme en supposant simplement que dans une masse gazeuse,

animée d'un mouvement de rotation, la densité et la température sont fonctions de la distance au centre r et de la distance polaire ϑ , et les couches d'égale densité ou d'égale température sont des sphères concentriques; car on aurait alors pour ψ^2 une série de la forme

$$a + b \cos^2 \vartheta + \dots,$$

et cette conclusion serait indépendante de l'existence du frottement intérieur.

Pour le démontrer, M. Harzer cherche à intégrer les équations générales du mouvement d'une masse gazeuse, en supposant qu'elle obéisse à la loi de Mariotte, et en adoptant, pour le rayon r d'une surface d'égale densité, son développement en série par les fonctions sphériques. Le résultat final se concilie très bien avec le fait connu, que l'aplatissement du sphéroïde solaire est à peine perceptible. On peut d'ailleurs admettre que l'aplatissement des couches de niveau augmente en allant de la surface vers le centre; les observations ne permettent pas de décider si cette augmentation est très sensible.

Scheiner. — Errata des listes d'étoiles à spectres remarquables publiées par M. Espin.

Marcuse. — Variations de la latitude de Berlin observées depuis le mois de septembre dernier.

Les observations de la latitude, continuées de septembre en janvier, ont donné les moyennes suivantes :

Dates.	Latitude.	Écarts.
1890. SEPT. 5.....	52°.30'.17",56	+0",26
OCT. 10.....	17,48	+0,18
» 31.....	17,49	+0,19
DÉC. 1.....	17,27	-0,03
» 29.....	17,28	-0,02
1891. JANV. 15.....	17,12	-0,18

Il y a donc une diminution de 0",4 à 0",5. L'erreur probable des moyennes est de $\pm 0",025$.

Gédéonof. — Occultations d'étoiles observées à Tachkent.

Kalbmayer. — Dénombrements des taches solaires faits à l'observatoire de Vienne.

Wolf (Max.). — Sur la nébuleuse qui entoure l'étoile ζ d'Orion.

M. Wolf a obtenu plusieurs photographies de cette vaste nébuleuse, dont une partie est disposée en spirale.

Porro (F.). — Sur la plus ancienne observation d'Algol.

M. Porro a retrouvé, dans les notes manuscrites de Bianchini, les dates des observations de Montanari, relatives à Algol; la première est du 17 septembre 1669, la dernière du 8 janvier 1681. Il y a un minimum observé le 8 novembre 1670, qui s'accorde bien avec la période de Chandler.

Berberich. — Éléments des planètes (308) et (301).

Struve (L.). — Éléments et éphéméride de la comète Wolf, (1884, III).

La comète a été retrouvée par M. Barnard le 4 mai, à une place très voisine de celles que lui assignent les éphémérides de MM. Berberich, Struve et Thraen.

Découverte d'une comète.

Elle a été trouvée par M. Barnard le 29 mars, et par M. Denning (Bristol) le 30.

Berberich, Lamp (E.). — Éléments et éphéméride de la nouvelle comète Barnard-Denning.

Rümker. — Observations de comètes et de planètes faites à Hambourg depuis 1888.

Harzer. — Sur le mouvement du périhélie de Mercure.

M. Harzer s'est demandé s'il ne serait pas possible d'expliquer le mouvement séculaire de $43''$ du périhélie de Mercure par une inégalité sensible des moments d'inertie principaux du Soleil. Mais, tant qu'on ne tient compte que du sphéroïde solaire proprement dit, cette explication rencontre un obstacle dans la loi des vitesses de rotation de la surface, que M. Harzer a étudiée dans un précédent travail. En effet, il faudrait, pour satisfaire à cette loi tout en rendant compte du mouvement du périhélie de Mercure, attribuer au Soleil un aplatissement de 1 : 1780, qui supposerait une différence des diamètres d'au moins 1^e, dix ou vingt fois plus forte que celle qui serait admissible d'après M. Auwers. L'influence de la lumière zodiacale (considérée comme un milieu matériel)

ne pourrait pas davantage être invoquée ici, pour diverses raisons. Mais M. Harzer pense que la couronne solaire pourrait, à la rigueur, fournir la différence des moments d'inertie, nécessaire pour rendre compte des $43''$ en question; il suffirait de lui attribuer une densité égale à $0,00004$ de la densité moyenne du Soleil (15 fois plus faible que celle du gaz hydrogène); la couronne représenterait alors $\frac{1}{100000}$ de la masse du Soleil. En dehors du mouvement direct de $43''$ du périhélie, il y aurait, il est vrai, un mouvement rétrograde des nœuds, de $4'',7$; enfin, il en résulterait des mouvements de $+5''$ pour le périhélie et les nœuds de Vénus. M. Harzer ne voit point là de difficultés insurmontables.

Abbe (E.). — Sur un moyen de constater les variations temporaires de la verticale.

La note de M. Nobile, relative au même sujet, a suggéré à M. E. Abbe un dispositif très simple pour l'observation des variations de la verticale. Au-dessus d'un bain de mercure est fixée une plaque de verre horizontale, appuyée par trois de ses points sur le roc naturel; ses deux faces, au lieu d'être exactement parallèles, ont une inclinaison relative de quelques secondes. En dirigeant une lunette sur cet appareil on verra donc trois images de la croisée de fils, et la position variable de l'image réfléchie par le mercure, par rapport aux deux images formées par le verre, permettra de reconnaître les variations de la verticale, tant en grandeur qu'en azimut. Si l'on peut disposer d'un local approprié, on pourra même supprimer la lunette, en remplaçant la plaque par un verre plan-convexe; un oculaire, placé à une certaine hauteur au-dessus de la lentille, permettra de mesurer l'écart entre les images d'un point lumineux, formées par le mercure et par la surface plane de la lentille. La seule difficulté consiste à relier la plaque ou la lentille au roc naturel d'une manière invariable.

Porter (J.-G.). — Mouvements propres de cinq étoiles.

Spitaler. — Sur la nébuleuse N. G. C. 1186.

Prix de la Société Jablonowski.

La Société désire provoquer une nouvelle détermination des perturbations séculaires de Mercure, Vénus, la Terre et Mars (en tenant compte des termes d'ordre supérieur). Le prix est de 1250^{fr.}

R. R.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

ÉTUDES SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION;

PAR M. R. RADAU.

Interpoler, c'est compléter, par un procédé rapide, une suite de nombres dont on possède déjà quelques termes. Le mot a été employé pour la première fois, je crois, par Wallis. Par extension, on appelle *formule d'interpolation* une formule obtenue d'une manière empirique, et destinée à tenir lieu d'une fonction de x dont on ne connaît qu'une série de valeurs particulières. C'est alors une formule d'approximation, qui sert à régulariser, à *compenser*, une série d'observations. Géométriquement parlant, c'est déterminer une courbe par un certain nombre de points.

Dans la construction des Tables numériques, dans la recherche des lois de phénomènes accessibles à l'observation, les méthodes d'interpolation sont d'un grand secours et d'une application constante. Pour l'Astronomie, elles ont une importance capitale. C'est ce qui m'a fait penser que la publication des études suivantes, qui résument beaucoup de lectures, coordonnent des résultats connus, et les complètent ou les éclairent, ne serait pas dépourvue d'utilité.

Henry Briggs, au commencement du xvii^e siècle, avait déjà eu recours, pour calculer ses logarithmes, à la considération des différences. Plus tard, vers 1670, on trouve un procédé rationnel d'interpolation employé par G. Mouton, de Lyon, pour le calcul des déclinaisons du Soleil. C'est la « méthode de Mouton », que Lagrange a ramenée à un principe très simple, dans son Mémoire de 1792, *sur la Méthode d'interpolation*. Il faut ensuite citer les formules de Newton, dont la première se trouve dans le Livre III des *Principes*, et les autres dans le *Methodus differentialis* (1711). Ses idées sont développées par Cotes (1722), Stirling (1730), Euler, Lagrange.

Laplace, à son tour, applique à la solution de ces sortes de problèmes sa conception des « fonctions génératrices ». Parmi les tra-

vaux modernes, relatifs aux mêmes questions, il faut mentionner le Mémoire que Encke a rédigé en 1830, d'après un cours de l'auteur auquel il avait assisté en 1812, et qui vient d'être réimprimé ainsi que le Mémoire posthume de Gauss sur l'interpolation, puis, surtout, les recherches de Cauchy (1835-1853) et celles de M. Tchébychef (1854-1875). Le Rapport de M. Merrifield, présenté à l'Association britannique en 1880 (1), n'en fait mention.

I.

1. Considérons les deux séries parallèles

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots \end{array}$$

et désignons par $Dy_0, Dy_1, \dots, D^2y_0, D^2y_1, \dots$, ou plus simplement par $D_0, D_1, \dots, D_0^2, D_1^2, \dots$ les rapports

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad D_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \dots, \\ D_0^2 = \frac{D_1 - D_0}{x_2 - x_0}, \quad D_1^2 = \frac{D_2 - D_1}{x_3 - x_1}, \quad \dots, \\ D_0^3 = \frac{D_1^2 - D_0^2}{x_3 - x_0}, \quad D_1^3 = \frac{D_2^2 - D_1^2}{x_4 - x_1}, \quad \dots \end{array} \right.$$

dont l'expression générale

$$(2) \quad D_i^{n+1} = \frac{D_{i+1}^n - D_i^n}{x_{i+n+1} - x_i}$$

a pour dénominateur la différence des valeurs extrêmes de x qui ont encore concouru à la formation de chaque rapport, comme montre le Tableau

x_0	y_0			
		D_0		
x_1	y_1		D_0^2	
		D_1		D_0^3
x_2	y_2		D_1^2	D_0^4
		D_2		D_1^3
x_3	y_3		D_2^2	
		D_3		
x_4	y_4			

(1) *Report on the present state of knowledge of the application of differences and interpolation to actual data.*

En l'écrivant sous cette forme

$$y_0 = y_1 - (x_0 - x_1)D_0, \quad D_0 = D_1 + (x_0 - x_2)D_0^1, \quad \dots,$$

il saute aux yeux que notre algorithme ne fait que traduire, ou résoudre en ses éléments, la formule d'interpolation

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1)D_1 + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)D_1^1 + \dots,$$

qui devient

$$(3) \quad \begin{cases} y = y_0 + (x - x_0)D_0 + (x - x_0)(x - x_1)D_0^2 \\ \quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)D_0^3 + \dots, \end{cases}$$

si nous mettons x, y, x_0, y_0, \dots à la place de $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots$, en reculant les indices d'une unité. C'est la formule générale d'interpolation de Newton, à peu près telle qu'on peut la tirer du 5^e lemme du Livre III des *Principes* (*Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quocunque puncta transit.*)

On peut aussi commencer par poser

$$y = D_0^0 + (x - x_0)D_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)D_0^2 + \dots,$$

d'où

$$\begin{aligned} y_0 &= D_0^0, \\ y_1 &= D_0^0 + (x_1 - x_0)D_0^1, \\ y_2 &= D_0^0 + (x_2 - x_0)D_0^1 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)D_0^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

de sorte que la signification des constantes D_0^n résulte du rôle même qu'elles jouent dans la formule. Mais nous allons les considérer encore sous un autre aspect.

2. On voit sans peine, en développant, l'une après l'autre, les expressions (1) des quantités D_0^n , qu'on aura

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}, \\ D_0^1 &= \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

et, en général,

$$(1) \quad D_0^n = \frac{y_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \dots + \frac{y_n}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}.$$

Le rapport D_0^n est donc une fonction symétrique des quantités

$x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$, dont nous sommes libres de permuter les indices. C'est ce qui justifie la nouvelle notation

$$D_0 = (01), \quad D_1 = (12), \quad \dots, \quad D_0^n = (012), \quad D_1^n = (123), \quad \dots$$

analogue à celle d'Encke dans son Mémoire de 1830, et que fera mieux comprendre le petit Tableau ci-après :

0				
	(01)			
1		(012)		
	(12)		(0123)	
2		(123)		(01234)
	(23)		(1234)	...
3		(234)		(12345)

				...

En écrivant 0, 1, ..., pour x_0, x_1, \dots , on a, par exemple,

$$(0123) = \frac{(012) - (123)}{0 - 3} = \frac{(012) - (013)}{2 - 3} = \frac{(023) - (123)}{0 - 1} = \dots$$

Si l'on suppose maintenant que y est une fonction entière de x

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

$$y_0 = A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + \dots,$$

il est facile de voir que D_0^n représente la partie entière du développement de l'un quelconque des termes de l'expression (4); on aura, par exemple,

$$(5) \quad D_0^n = E \frac{y_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)},$$

ou bien, en développant,

$$D_0^n = E(A_n + A_{n+1}x_0 + \dots) \left(1 + \frac{x_1}{x_0} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{x_n}{x_0} + \dots\right),$$

$$D_0^n = A_n + \dots + A_p(x_0, x_1, \dots, x_n)^{p-n} + \dots$$

En appliquant l'opération D^n aux termes successifs de y_0 , on voit, en effet, que A_p a en facteur le polynôme

$$(6) \quad D^n x_0^p = (x_0, x_1, \dots, x_n)^{p-n}$$

qui se déduit de $(x_0 + x_1 + \dots + x_n)^{p-n}$ en y remplaçant tous

les coefficients par l'unité. On a, en particulier,

$$\begin{aligned} D^n x_0^{n+1} &= x_0 + x_1 + \dots + x_n, \\ D^n x_0^n &= 1, \quad D^{n+1} x_0^n = 0, \quad \dots \end{aligned}$$

Les D s'annulent si leur exposant dépasse celui de x . Si donc y n'est que du degré p , nous aurons $D^{p+1} y_0 = 0$.

Supposons que y soit du degré n ,

$$(7) \quad y = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n.$$

En ajoutant à cette relation celles qui s'en déduisent en remplaçant x, y par $x_0, y_0, \dots, x_n, y_n$, nous avons $n + 2$ équations qui permettent d'éliminer les $n + 1$ coefficients A_0, \dots, A_n , et le résultat de l'élimination, c'est l'équation

$$(8) \quad D^{n+1} y = 0$$

qui, développée à l'aide de la formule (4), devient

$$\frac{y}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} + \frac{y_0}{(x_0-x)(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} + \dots + \frac{y_n}{(x_n-x)(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})} = 0,$$

ou bien

$$(9) \quad y = y_0 \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} + \dots$$

C'est la formule d'interpolation de Lagrange, qui exprime y en fonction de x et des quantités données $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$. Lagrange l'a donnée en 1795, dans ses *Leçons élémentaires* (*Journal de l'Éc. Pol.*, t. II, p. 277). D'après Boole, on la trouve aussi dans Euler (*De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina*).

Nous avons, d'autre part,

$$D^n y = A_n = \text{const.},$$

et, par suite,

$$(10) \quad D^n y = D^n y_0,$$

équation qui, développée, devient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= y_0 + (x-x_0)Dy_0 \\ &+ (x-x_0)(x-x_1)D^2y_0 + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})D^n y_0 \end{aligned} \right.$$

C'est la formule d'interpolation de Newton, que nous avons déjà démontrée plus haut [formule (3)].

3. Il faut mentionner ici une Note de M. Emory M^c Clintock, publiée dans le tome II de l'*American Journal of Mathematics* (1879), sous ce titre : *A new general method of interpolation*. L'innovation consiste simplement à introduire, au lieu des rapports (1), les suivants :

$$D_1^1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad D_2^1 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}, \quad \dots,$$

$$D_2^2 = \frac{D_2^1 - D_1^1}{x_2 - x_1}, \quad D_3^2 = \frac{D_3^1 - D_1^1}{x_3 - x_1}, \quad \dots,$$

dont l'expression générale est

$$(12) \quad D_i^{n+1} = \frac{D_i^n - D_n^n}{x_i - x_n}.$$

On a ensuite

$$y = y_0 + (x - x_0)D_1^1 + (x - x_0)(x - x_1)D_2^2 + \dots$$

Ce mode de calcul rend, selon l'auteur, la besogne plus mécanique (*work more mechanical*). On constate aisément que les têtes de séries $D_1^1, D_2^2, D_3^3, \dots$ de M. M^c Clintock peuvent être représentées par le second membre de la formule (4), et coïncident, en valeur, avec les rapports que nous avons désignés plus haut par D_0, D_0^2, D_0^3, \dots

4. On sait, d'autre part, que la formule de Lagrange a été généralisée par Cauchy. En cherchant à exprimer y , non plus par une fonction *entière*, mais par une fonction *rationnelle* de x , de la forme

$$(13) \quad \frac{\alpha + bx + \dots + hx^n}{x + \beta x + \dots + \varepsilon x^m},$$

il trouve

$$y = \frac{y_0 y_1 \dots y_m (x - x_{m+1}) \dots (x - x_{m+n})}{(x_0 - x_{m+1}) \dots (x_0 - x_{m+n}) \dots (x_m - x_{m+1}) \dots (x_m - x_{m+n})} + \dots$$

$$\frac{y_0 y_1 \dots y_{m-1} (x_0 - x) \dots (x_{m-1} - x)}{(x_0 - x_m) \dots (x_0 - x_{m+n}) \dots (x_{m-1} - x_m) \dots (x_{m-1} - x_{m+n})} + \dots$$

Cette formule a fait l'objet d'un Mémoire de Brassinne (*Journal*

de Liouville, t. XI, 1846); elle a été aussi étudiée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXX, 1845) et par Rosenhain (*ibid.*).

Je me bornerai ici aux remarques suivantes. Si l'on veut utiliser l'expression (13) pour l'interpolation, il convient de mettre le numérateur et le dénominateur sous la forme adoptée par Newton.

Posons

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0 + (x - x_0)D_0 + (x - x_0)(x - x_1)D_0^2 + \dots, \\ Y_1 &= y_1 + (x - x_1)D_1 + (x - x_1)(x - x_2)D_1^2 + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et

$$\alpha(y - Y_0) + \beta(x - x_0)(y - Y_1) + \gamma(x - x_0)(x - x_1)(y - Y_2) + \dots = 0,$$

d'où

$$y = \frac{\alpha Y_0 + (x - x_0)\beta Y_1 + (x - x_0)(x - x_1)\gamma Y_2 + \dots}{\alpha + (x - x_0)\beta + (x - x_0)(x - x_1)\gamma + \dots}$$

ou bien

$$y = \frac{\alpha y_0 + (x - x_0)(\alpha D_0 + \beta y_1) + (x - x_0)(x - x_1)(\alpha D_0^2 + \beta D_1 + \gamma y_2) + \dots}{\alpha + (x - x_0)\beta + (x - x_0)(x - x_1)\gamma + \dots}$$

En faisant $m + n = p$, le nombre de valeurs de y dont on aura besoin sera $p + 1$. Si alors on fait successivement $x = x_0, x_1, \dots, x_p$, le premier membre de l'équation

$$\alpha(y - Y_0) + \beta(x - x_0)(y - Y_1) + \dots = 0$$

se réduit à 0 pour $x = x_0, \dots, x_n$, parce que Y_0, Y_1, \dots, Y_m (qui sont des degrés $n, n - 1, \dots, n - m$) coïncident avec les valeurs correspondantes de y ; mais les substitutions $x = x_{n+1}, \dots, x_p$ donnent les conditions

$$\begin{aligned} \alpha D_0^{n+1} + \beta D_1^n + \gamma D_2^{n-1} + \dots &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha D_0^p + \beta D_1^{p-1} + \gamma D_2^{p-2} + \dots &= 0, \end{aligned}$$

et l'on a ainsi $m + 1$ équations entre lesquelles on peut éliminer $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. On voit que le dénominateur de y s'obtiendra en formant le déterminant

1	$(x - x_0)$	$(x - x_0)(x - x_1)$...
D_0^n	D_1^{n-1}	D_2^{n-2}	..
D_0^{n-1}	D_1^{n-2}	D_2^{n-3}	...
.....

et le numérateur en y remplaçant la première ligne par celle-ci

$$Y_0 (x - x_0) Y_1 (x - x_0)(x - x_1) Y_2 \dots$$

La formule ainsi construite pourra être, en quelque sorte, renversée, en remplaçant partout y, y_0, \dots par $\frac{1}{y}, \frac{1}{y_0}, \dots$, transformation qui peut aider à la simplifier. On trouve ainsi, par exemple, pour $m = n = 1$, avec trois valeurs données de y ,

$$y = \frac{y_0 D_1 + (x - x_0)(D_1 D_0 - y_1 D_0^2)}{D_1 - (x - x_0) D_0^2}$$

ou bien

$$-\frac{y}{y_0 y_1 y_2} = \frac{D \frac{1}{y_1} + (x_0 - x) D^2 \frac{1}{y_0}}{D y_1 + (x_0 - x) D^2 y_0}$$

5. Dans le cas où x_0, x_1, \dots forment une série arithmétique, si nous prenons l'intervalle constant $(x_1 - x_0)$ pour unité, nous aurons, en désignant par Δ, Δ^2, \dots les différences successives,

$$D^n = \frac{\Delta^n}{1.2 \dots n}$$

En faisant $x - x_0 = t$, la formule de Newton devient

$$(14) \quad y_t = y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1.2} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

ou bien

$$y_t = y_0 + t \Delta_0 + t_2 \Delta_0^2 + t_3 \Delta_0^3 + \dots,$$

où t, t_2, t_3, \dots sont les coefficients du binôme. On suppose ici $x > x_0, t > 0$. Pour $x < x_0$, on fait $x_0 - x = t$, et la formule devient (en remplaçant t par $-t$)

$$(15) \quad y_{-t} = y_0 - t \Delta y_0 + \frac{t(t+1)}{1.2} \Delta^2 y_0 - \frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

ou bien

$$y_{-t} = y_0 - t \Delta_0 + (t+1)_2 \Delta_0^2 - (t+2)_3 \Delta_0^3 + \dots,$$

ou encore, en avançant les indices,

$$y_0 = y_t - t \Delta_t + (t+1)_2 \Delta_t^2 - (t+2)_3 \Delta_t^3 + \dots$$

On peut donner une remarquable transparence à toutes les formules de cette théorie par l'emploi de la notation symbolique

de Leibniz, que Lagrange a développée dans son Mémoire de 1772 (*Œuvres*, t. III, p. 441), et qui tend à devenir d'un usage courant (voir BOOLE, *Calculus of finite differences*). Dans cette notation,

$$y_1 = (1 + \Delta)y_0,$$

et la formule de Newton s'écrit

$$(16) \quad y_t = (1 + \Delta)^t y_0,$$

ou bien, si nous omettons y , en désignant y_0 par Δ^0 , comme le fait Lagrange,

$$y_t = (\Delta^0 + \Delta)^t_0.$$

On aurait de même

$$(17) \quad y_{-t} = (1 + \Delta)^{-t} y_0, \quad y_0 = (1 + \Delta)^{-t} y_t.$$

Les différences $\Delta_0, \Delta_0^2, \dots$, dans ces formules, sont les différences successives qui, dans le Tableau, descendent en diagonale, à partir de y_0 ,

$$\begin{array}{cccc} y_0 & & & \\ \dots & \Delta_0 & & \\ y_1 & \dots & \Delta_0^2 & \\ \dots & \Delta_1 & \dots & \Delta_0^3 \\ y_2 & \dots & \Delta_1^2 & \\ \dots & \Delta_2 & & \\ y_3 & & & \end{array}$$

Dans les formules (14) et (15), elles servent respectivement à interpoler en avant et en arrière. Si, pour interpoler en arrière, on voulait suivre une marche rétrograde, symétrique de la marche progressive, il faudrait employer les différences qui montent en diagonale (en changeant le signe des différences d'ordre impair), et les formules (14) et (15) s'écriraient

$$(18) \quad y_{-t} = y_0 - t\Delta_{-1} + \frac{t(t-1)}{1.2} \Delta_{-2}^2 - \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3} \Delta_{-3}^3 + \dots,$$

$$(19) \quad y_t = y^0 + t\Delta_{-1} + \frac{t(t+1)}{1.2} \Delta_{-2}^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3} \Delta_{-3}^3 + \dots;$$

ces transformations s'obtiennent, sans calcul, par l'inspection du Tableau des différences.

6. Reprenons la formule (3), où les intervalles sont quelconques. En écrivant a, b, c, \dots à la place de x_0, x_1, x_2, \dots , et faisant usage de la nouvelle notation des rapports D^a , qui a été expliquée au n° 2, elle devient

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= y_a + (x-a)(ab) + (x-a)(x-b)(abc) \\ &\quad + (x-a)(x-b)(x-c)(abcd) + \dots \end{aligned} \right.$$

Il est clair que les lettres a, b, c, \dots pourront représenter les valeurs données de x dans un ordre arbitrairement choisi. Si nous écrivons a, b, a', b', \dots au lieu de a, b, c, d, \dots , en faisant coïncider la suite naturelle des éléments x avec l'un ou l'autre des deux groupements symétriques

$$\begin{aligned} \dots & a' a' a b b' b' \dots, \\ \dots & b' b' b a a' a' \dots, \end{aligned}$$

il est visible que la formule, qui devient alors

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= y_a + (x-a)(ab) + (x-a)(x-b)(a'ab) \\ &\quad + (x-a')(x-a)(x-b)(a'abb') + \dots, \end{aligned} \right.$$

n'introduit (par une marche en zigzag) que les différences placées immédiatement au-dessus ou au-dessous de la ligne horizontale, menée par le milieu de l'intervalle ab :

$$\begin{array}{l} a' \\ \dots (a'a) \\ a \quad \dots (a'ab) \\ \dots (ab) \quad \dots (a'abb') \\ b \quad \dots (abb') \\ \dots (bb') \\ b' \end{array} \left| \begin{array}{l} b' \\ \dots (bb') \\ b \quad \dots (abb') \\ \dots (ab) \quad \dots (a'abb') \\ a \quad \dots (a'ab) \\ \dots (aa') \\ a' \end{array} \right.$$

Cette formule convient surtout lorsque x tombe entre a et b .

Au lieu de varier les groupements, on pourrait aussi en conserver un seul, le premier, et faire, en revanche, des permutations de lettres dans la formule (21). Les deux permutations

$$\begin{aligned} \dots & a'' a' a b b' b'' \dots \\ \dots & b' b a a' a'' a''' \dots \\ \dots & b'' b' b a a' a'' \dots \end{aligned}$$

donneraient respectivement

$$(22) \quad \begin{cases} y = y_a + (x-a)(aa') + (x-a)(x-a')(a'ab) \\ \quad + (x-a')(x-a)(x-b)(a''a'ab) + \dots, \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} y = y_b + (x-b)(ab) + (x-a)(x-b)(abb') \\ \quad + (x-a)(x-b)(x-b')(a'abb') + \dots \end{cases}$$

En combinant (21) d'abord avec (22), puis avec (23), on trouverait successivement

$$(24) \quad \begin{cases} y = y_a + (x-a) \frac{(ab) + (aa')}{2} + (x-a) \left(x - \frac{a'+b}{2} \right) (a'ab) \\ \quad + (x-a')(x-a)(x-b) \frac{(a'abb') + (a''a'ab)}{2} + \dots, \end{cases}$$

$$(25) \quad \begin{cases} y = \frac{y_a + y_b}{2} + \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (ab) + (x-a)(x-b) \frac{(a'ab) + (abb')}{2} \\ \quad + (x-a)(x-b) \left(x - \frac{a'+b'}{2} \right) (a'abb') + \dots \end{cases}$$

7. L'aspect de ces formules se simplifie beaucoup lorsque les valeurs données de y sont équidistantes, c'est-à-dire séparées par des intervalles égaux de l'argument x . En faisant $x - a = \pm t$, $b - a = 1$, et confondant a avec x_0 , les formules (21) et (22) deviennent

$$(26) \quad \begin{cases} y_t = y_0 + t\Delta_0 + \frac{t(t-1)}{1.2} \Delta_1^2 + \frac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3} \Delta_1^3 \\ \quad + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4} \Delta_1^4 + \dots, \\ y_{-t} = y_0 - t\Delta_0 + \frac{t(t+1)}{1.2} \Delta_1^2 - \frac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3} \Delta_1^3 + \dots \end{cases}$$

et

$$(27) \quad \begin{cases} y_t = y_0 + t\Delta_{-1} + \frac{t(t+1)}{1.2} \Delta_1^2 + \frac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3} \Delta_1^3 \\ \quad + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{1.2.3.4} \Delta_1^4 + \dots, \\ y_{-t} = y_0 - t\Delta_{-1} + \frac{t(t-1)}{1.2} \Delta_1^2 - \frac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3} \Delta_1^3 + \dots \end{cases}$$

De même, (23) nous donne

$$(28) \quad \begin{cases} y_t = y_1 + (t-1)\Delta_0 + \frac{t(t-1)}{1.2} \Delta_0^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3} \Delta_0^3 \\ \quad + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4} \Delta_0^4 + \dots \end{cases}$$

Au lieu d'établir ces formules directement par l'interprétation des groupements, on pourrait les déduire des formules (14) et (15) par substitutions successives, en faisant

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2(1 + \Delta)y_{-1} = \Delta^2_1 + \Delta^2_{-1},$$

et ainsi de suite; mais la marche que nous avons suivie, avec Gauss, est plus simple.

Je ne citerai que pour mémoire la formule de Laplace (*Théorie analytique des Probabilités*, p. 13), qui peut s'écrire

$$y_t = y_0 + t\Delta_r + \frac{t(t+2r-1)}{1.2} \Delta^2_{2r} + \frac{t(t+3r-1)(t+3r-2)}{1.2.3} \Delta^3_{3r} + \dots$$

ou bien

$$y_t = y_0 + t\Delta_r + \frac{t(t-2r-1)}{1.2} \Delta^2_{2r} + \dots$$

Par la combinaison des formules (26) et (27), on obtient la suivante, qui correspond à (24),

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} y_t &= y_0 + t \frac{\Delta_0 + \Delta_{-1}}{2} + \frac{t^2}{1.2} \Delta^2_1 \\ &+ \frac{t(t^2-1)}{1.2.3} \frac{\Delta^3_1 + \Delta^3_2}{2} + \frac{t^2(t^2-1)}{1.2.3.4} \Delta^4_2 + \dots \end{aligned} \right.$$

C'est la formule dite *de Stirling*, mais qui était déjà connue de Newton (Prop. III de la *Méthode différentielle*). Elle est surtout propre à l'interpolation entre un nombre impair de quantités équidistantes. Pour un nombre pair, on aurait la suivante, qui résulte de la combinaison de (26) et (28), et qui correspond à (25)

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} y_t &= \frac{y_0 + y_1}{2} + (t - \frac{1}{2})\Delta_0 \\ &+ \frac{t(t-1)}{1.2} \frac{\Delta^2_0 + \Delta^2_1}{2} + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{1.2.3} \Delta^3_1 + \dots \end{aligned} \right.$$

Cette formule, que l'on trouve aussi dans Stirling, peut s'écrire, en simplifiant les deux premiers termes,

$$(31) \quad y_t = y_0 + t\Delta_0 + \frac{t(t-1)}{1.2} \frac{\Delta^2_0 + \Delta^2_1}{2} + \dots$$

ou bien encore, en comptant t à partir du milieu de l'intervalle $x_1 - x_0$,

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} y_{t+\frac{1}{2}} &= \frac{y_0 + y_1}{2} + t \Delta_0 + \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{1 \cdot 2} \frac{\Delta_0^2 + \Delta_1^2}{2} \\ &+ \frac{t(t^2 - \frac{1}{4})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_1^3 + \frac{(t^2 - \frac{1}{4})(t^2 - \frac{9}{4})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\Delta_1^4 + \Delta_2^4}{2} + \dots \end{aligned} \right.$$

On trouve, dans le *Recueil de Tables astronomiques* de Peters, deux Tables qui facilitent l'application des formules (29) et (31). Pour la formule de Newton, les valeurs des coefficients sont données par Vega, Barlow, etc. Voir aussi Woolhouse, *On interpolation* (Londres, 1865).

En faisant $t = 0$, (32) donne la formule connue

$$(33) \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{8} \frac{\Delta_0^2 + \Delta_1^2}{2} + \frac{3}{128} \frac{\Delta_1^4 + \Delta_2^4}{2} - \dots$$

8. L'avantage des formules qui précèdent, c'est qu'elles mettent en jeu des différences « symétriques », c'est-à-dire échelonnées le long d'une ligne de symétrie (d'une ligne horizontale) du Tableau, ce qui favorise la convergence. Mais, lorsqu'on s'arrête aux formules (26), (27), la symétrie n'est pas apparente dans les notations, et la marche est alternante : pour passer de Δ_0 à Δ_{-1}^2 , l'opération est $\frac{\Delta}{1 + \Delta}$, et de Δ_{-1}^2 à Δ_{-1}^3 , simplement Δ . Sur la même ligne, rigoureusement, on ne peut passer que de Δ_0 à Δ_{-1}^3 , par l'opération $\frac{\Delta^2}{1 + \Delta}$, qui ne se dédouble pas :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & y_{-1} \\ & & & & & & \dots \quad \Delta_{-1} \quad \dots \quad \Delta_{-2}^3 \quad \dots \\ & & & & & & y_0 \quad \dots \quad \Delta_{-1}^2 \quad \dots \quad \Delta_{-2}^4 \quad \dots \\ & & & & & & \dots \quad \Delta_0 \quad \dots \quad \Delta_{-1}^3 \quad \dots \\ & & & & & & y_1 \end{array}$$

Pour retrouver la symétrie, on a recours aux différences que nous appellerons *médianes* (c'est-à-dire placées sur la ligne médiane du Tableau), en comblant les lacunes par les moyennes arithmétiques des différences de même ordre, placées immédiatement au-dessus et au-dessous de la ligne, comme le montrent les

formules (29) et (30). La ligne menée par le travers de y_0 contient les différences médianes

$$(34) \quad \frac{\Delta_0 + \Delta_{-1}}{2}, \quad \Delta_{-1}^2, \quad \frac{\Delta_{-1}^3 + \Delta_{-2}^3}{2}, \quad \Delta_{-2}^4, \quad \dots,$$

tandis que celle qui passe entre y_0 et y_1 renferme

$$(35) \quad \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad \Delta_0, \quad \frac{\Delta_0^2 + \Delta_{-1}^2}{2}, \quad \Delta_{-1}^3, \quad \frac{\Delta_{-1}^4 + \Delta_{-2}^4}{2}, \quad \dots$$

Afin d'abrégier l'écriture, et de mieux marquer la symétrie de l'algorithme de l'interpolation, on introduit souvent, dans la notation des différences, l'argument moyen, qui correspond à la ligne sur laquelle la différence est placée, au lieu de l'argument de départ, qui figure dans l'ancienne notation. Les différences médianes, placées sur une même ligne, ont alors toutes le même argument. Si, pour plus de clarté, nous les désignons par la lettre D , celles qui forment la série (34) s'écriront

$$D(0), \quad D^2(0), \quad D^3(0), \quad D^4(0), \quad \dots,$$

et celles de la série (35)

$$D^0\left(\frac{1}{2}\right), \quad D\left(\frac{1}{2}\right), \quad D^2\left(\frac{1}{2}\right), \quad D^3\left(\frac{1}{2}\right), \quad D^4\left(\frac{1}{2}\right), \quad \dots$$

ou, si l'on préfère la notation d'Encke,

$$f'(0), \quad f''(0), \quad f'''(0), \quad f^{iv}(0), \quad \dots$$

et

$$f^0\left(\frac{1}{2}\right), \quad f'\left(\frac{1}{2}\right), \quad f''\left(\frac{1}{2}\right), \quad f'''\left(\frac{1}{2}\right), \quad f^{iv}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \dots$$

Hansen, dans un Mémoire de 1865 (*Relationen zw. Summen und Differenzen*) met l'argument moyen en indice écrit, par exemple, $\Delta y_{\frac{1}{2}}$. Cet usage est critiqué par G. Boole le déclare anti-scientifique (*unscientific and wholly in defiance of convention*); mais la notation est commode et ne cause de méprises, si l'on a toujours soin de mettre l'argument entre deux parenthèses; avec cette notation, les formules (27) s'écrivent

$$(36) \quad \begin{cases} y_{\pm t} = y_0 \pm t D(\pm \frac{1}{2}) + \frac{t(t-1)}{1.2} D^2(0) \pm \frac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3} D^3(\pm \frac{1}{2}) \\ y_{\mp t} = y_0 \pm t D(\mp \frac{1}{2}) + \frac{t(t+1)}{1.2} D^2(0) \pm \frac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3} D^3(\mp \frac{1}{2}) \end{cases}$$

ou bien

$$f(\pm t) = f(0) \pm t f'(\pm \frac{1}{2}) + t^2 f''(0) \pm (t+1)_2 f'''(\pm \frac{1}{2}) + \dots$$

$$f(\pm t) = f(0) \pm t f'(\mp \frac{1}{2}) + (t+1)_2 f''(0) \pm (t+1)_3 f'''(\mp \frac{1}{2}) + \dots$$

La formule de Stirling s'écrit (pour $t \geq 0$)

$$(37) \quad y_t = y_0 + t D(0) + \frac{t^2}{1.2} D^2(0) + \frac{t(t^2-1)}{1.2.3} D^3(0) + \frac{t^2(t^2-1)}{1.2.3.4} D^4(0) + \dots$$

et la formule (31)

$$(38) \quad y_t = y_0 + t D(\frac{1}{2}) + \frac{t(t-1)}{1.2} D^2(\frac{1}{2}) + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{1.2.3} D^3(\frac{1}{2}) + \dots$$

Enfin (33) devient

$$(39) \quad y_{\frac{1}{4}} = D^0(\frac{1}{4}) - \frac{1}{8} D^2(\frac{1}{4}) + \frac{3}{128} D^4(\frac{1}{4}) - \frac{5}{1024} D^6(\frac{1}{4}) + \dots$$

La formule de Stirling offre l'avantage de se prêter, avec la même facilité, à l'interpolation en avant et en arrière, puisqu'il suffit de changer le signe des termes d'ordre pair pour l'interpolation en arrière.

En la développant suivant les puissances de t , on trouverait

$$(40) \quad \begin{cases} y_t = y_0 + t(D - \frac{1}{6} D^3 + \frac{1}{30} D^5 - \dots) \\ \quad + t^2(\frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{24} D^4 + \frac{1}{180} D^6 - \dots) + t^3(\frac{1}{6} D^3 - \frac{1}{24} D^5 + \dots) \\ \quad + t^4(\frac{1}{24} D^4 - \frac{1}{144} D^6 + \dots) + t^5(\frac{1}{120} D^5 - \dots) + \dots \end{cases}$$

9. Pour les applications que nous avons en vue, il importe de nous rendre compte des relations qui existent entre les différences ordinaires Δ et les différences médianes D , dont le caractère mixte s'oppose à l'emploi de l'algorithme habituel.

D'après les définitions du numéro précédent, nous avons

$$D^0(0) = \Delta_0^0, \quad D(0) = \frac{\Delta_0 + \Delta_{-1}}{2},$$

$$D^2(0) = \Delta_{-1}^2, \quad D^3(0) = \frac{\Delta_{-1}^3 + \Delta_{-2}^3}{2},$$

$$\dots, \dots,$$

$$D^{2n}(0) = \Delta_n^{2n}, \quad D^{2n+1}(0) = \frac{\Delta_n^{2n+1} + \Delta_{n-1}^{2n+1}}{2}.$$

On aurait aussi, comme il est facile de voir

$$(41) \quad \begin{cases} D^{2n}(0) = \Delta_n^{2n}, & D^{2n+1}(0) + \frac{1}{2} D^{2n+2}(0) = \Delta_n^{2n+1}, \\ D^{2n}(n) = \Delta_0^{2n}, & D^{2n+1}(n) + \frac{1}{2} D^{2n+2}(n) = \Delta_0^{2n+1}, \end{cases}$$

et par la formule (17)

$$(17) \quad \Delta^s_n = \Delta^s (1 + \Delta)_0^{-n}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons l'indice 0 et l'argu- ment (0) toutes les fois que cela pourra se faire sans nuire à clarté. On trouve alors, en se servant de la formule (17),

$$(42) \quad \begin{cases} 2D = \Delta + \frac{\Delta}{1 + \Delta} = 1 + \Delta - (1 + \Delta)^{-1}, \\ D^2 = \frac{\Delta^2}{1 + \Delta} = 1 + \Delta + (1 + \Delta)^{-1} - 2, \\ (1 + \Delta)^{\pm 1} = 1 \pm D + \frac{1}{2} D^2, \quad \Delta = D + \frac{1}{2} D^2. \end{cases}$$

Pour une différence quelconque, d'ordre pair ou d'ordre im- on trouve de même

$$(43) \quad \begin{cases} D^{2n} = \Delta^{2n} (1 + \Delta)^{-n} = \left[(1 + \Delta)^{\frac{1}{2}} - (1 + \Delta)^{-\frac{1}{2}} \right]^{2n}, \\ 2D^{2n+1} = \Delta^{2n+1} \left[(1 + \Delta)^{-n} + (1 + \Delta)^{-n-1} \right] \\ = \left[(1 + \Delta) - (1 + \Delta)^{-1} \right] \left[(1 + \Delta)^{\frac{1}{2}} - (1 + \Delta)^{-\frac{1}{2}} \right]^{2n}. \end{cases}$$

On a donc $D^{2n} = (D^2)^n$, et

$$D \cdot D^{2n} = D^{2n+1}, \quad D^2 \cdot D^{2n} = D^{2n+2}, \quad \dots, \quad D^s \cdot D^{2n} = D^{2n+s}$$

mais non pas $(D)^{2n} = D^{2n}$; on ne peut donc associer directer deux exposants impairs, ni élever D à une puissance, comme permis de le faire pour D^2 . On a ici

$$(44) \quad \begin{cases} D \cdot D = D^2 + \frac{1}{4} D^4, \\ (D)^{2n} = (D^2 + \frac{1}{4} D^4)^n = D^{2n} (1 + \frac{1}{4} D^2)^n, \\ D \cdot D^{2n+1} = D^{2n+2} + \frac{1}{4} D^{2n+4}. \end{cases}$$

En développant les expressions (43), on trouve ensuite

$$(45) \quad \begin{cases} D^{2n} = \Delta^{2n} - n \Delta^{2n+1} \\ \quad + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \Delta^{2n+2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^{2n+3} + \dots \\ D^{2n+1} = \Delta^{2n+1} - (n + \frac{1}{2}) \Delta^{2n+2} \\ \quad + \frac{(n+1)^2}{1 \cdot 2} \Delta^{2n+3} - \frac{(n+1)(n+2)(n + \frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^{2n+4} + \dots \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} D &= \Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Delta^3 - \frac{1}{2} \Delta^4 + \dots, \\ D^2 &= \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 - \dots \\ D^3 &= \Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta^4 + 2 \Delta^5 - \dots \\ D^4 &= \Delta^4 - 2 \Delta^5 + 3 \Delta^6 - \dots \end{aligned}$$

Pour arriver à exprimer les Δ par les D , nous appliquerons l'opération D^{2n} à la formule de Stirling, en y faisant $t = n$, ce qui nous donne

$$D^{2n}(n) = D^{2n}(0) + n D^{2n+1}(0) + \frac{n^2}{2} D^{2n+2}(0) + \dots$$

Le premier membre étant remplacé par $\Delta^{2n}(0)$, nous pouvons supprimer partout l'argument 0, et il vient

$$(46) \quad \Delta^{2n} = D^{2n} + n D^{2n+1} + \frac{n^2}{2} D^{2n+2} + \frac{n(n^2-1)}{2 \cdot 3} D^{2n+3} + \dots$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Delta^{2n} &= D^{2n} + n D^{2n+1} + \frac{2n}{2n+2} (n+1)_2 D^{2n+2} \\ &\quad + (n+1)_3 D^{2n+3} + \frac{2n}{2n+4} (n+2)_4 D^{2n+4} + \dots \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$\Delta^{2n+1} = \Delta \cdot \Delta^{2n} = (D + \frac{1}{2} D^2)(D^{2n} + n D^{2n+1} + \dots),$$

et, en tenant compte des relations (44) dans la rencontre des exposants impairs, on trouve

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^{2n+1} &= D^{2n+1} + (n + \frac{1}{2}) D^{2n+2} \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} D^{2n+3} + \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} D^{2n+4} + \dots \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Delta^{2n+1} &= D^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+2} (n+1) D^{2n+2} \\ &\quad + (n+1)_2 D^{2n+3} + \frac{2n+1}{2n+4} (n+2)_3 D^{2n+4} + \dots \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on aura

$$\begin{aligned} (1 + \Delta)^\mu &= 1 + \sum_0 D^{2n+1} (\mu_{2n+1} + n \cdot \mu_{2n} + n_2 \cdot \mu_{2n-1} + \dots) \\ &\quad + \sum_1 D^{2n} \frac{\mu}{2n} [(\mu-1)_{2n-1} + n(\mu-1)_{2n-2} + \dots]. \end{aligned}$$

Or on a généralement (en désignant toujours par n_p les coefficients de la puissance $n^{\text{ième}}$ du binôme)

$$(\mu + n)_p = \mu_p + n \mu_{p-1} + n_2 \mu_{p-2} + \dots$$

Il s'ensuit que

$$(1 + \Delta)^\mu = 1 + \sum_0 D^{2n+1} (\mu + n)_{2n+1} + \sum_1 D^{2n} \frac{\mu}{2n} (\mu + n - 1)_{2n-1}$$

ou bien

$$(1 + \Delta)^\mu - 1 = \sum_0 \left(D^{2n+1} + \frac{\mu}{2n+2} D^{2n+2} \right) (\mu + n)_{2n+1}.$$

Or les formules (42) montrent qu'on aura $(1 + \Delta)^{-1}$ en remplaçant D par $-D$ dans $(1 + \Delta)$; on trouve donc

$$(48) \quad (1 + \Delta)^{-\mu} - 1 = \sum_0 \left(\pm D^{2n+1} + \frac{\mu}{2n+2} D^{2n+2} \right) (\mu + n)_{2n+1}.$$

Cette relation nous sera utile dans la suite.

10. La méthode de Mouton que Lagrange développe dans son Mémoire de 1792 (1) consiste à déterminer, par les différences de la série donnée, celles de la série interpolée, et à remonter de celles-ci aux termes cherchés, de sorte que le calcul se réduit à des additions successives.

Les formules s'établissent très facilement à l'aide de la notation symbolique. Étant donnée une série de termes équidistants T_0, T_1, \dots , il s'agit d'interpoler les termes également équidistants t_0, t_1, \dots , de façon à subdiviser l'intervalle primitif en m intervalles plus petits. Nous aurons

$$T_0 = t_0, \quad T_1 = t_m, \quad T_s = t_{ms},$$

et, en désignant par Δ les différences des T , par δ celles des t ,

$$T_1 = (1 + \Delta)T_0, \quad t_1 = (1 + \delta)t_0,$$

par conséquent

$$(49) \quad 1 + \Delta = (1 + \delta)^m.$$

(1) *Œuvres*, t. V, p. 663. Voir aussi le Mémoire de 1778 *Sur les interpolations* (*Œuvres*, t. VII, p. 535) et le Mémoire de 1783 *Sur une méthode particulière d'approximation* (t. V, p. 517).

Il en résulte que

$$\Delta = (1 + \delta)^m - 1 = m \delta + m_2 \delta^2 + m_3 \delta^3 + \dots$$

et aussi

$$\Delta^s = [(1 + \delta)^m - 1]^s = (m \delta + m_2 \delta^2 + \dots)^s.$$

On trouve ainsi

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{m^s} \Delta^s &= \delta^s + s \frac{m_2}{m} \delta^{s+1} + \left(s \frac{m_3}{m} + s_2 \frac{m_2^2}{m^2} \right) \delta^{s+2} + \dots \\ &= \delta^s + s \frac{m-1}{2} \delta^{s+1} \\ &\quad + s \frac{m-1}{2} \left(\frac{m-2}{3} + \frac{s-1}{2} \frac{m-1}{2} \right) \delta^{s+2} + \dots \end{aligned} \right.$$

Nous avons, d'autre part,

$$(51) \quad 1 + \delta = (1 + \Delta)^{\frac{1}{m}}$$

d'où

$$\delta = (1 + \Delta)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m} \Delta + \left(\frac{1}{m} \right)_2 \Delta^2 + \dots$$

et aussi

$$\delta^s = \left[(1 + \Delta)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]^s = \left[\frac{1}{m} \Delta + \left(\frac{1}{m} \right)_2 \Delta^2 + \dots \right]^s;$$

par conséquent, en remplaçant m par $\frac{1}{m}$ dans (50),

$$(52) \quad m^s \delta^s = \Delta^s + sm \left(\frac{1}{m} \right)_2 \Delta^{s+1} + \left[sm \left(\frac{1}{m} \right)_3 + s_2 m^2 \left(\frac{1}{m} \right)_2^2 \right] \Delta^{s+2} + \dots$$

ou bien

$$\delta^s = \frac{\Delta^s}{m^s} - s \frac{m-1}{2} \frac{\Delta^{s+1}}{m^{s+1}} + s \frac{m-1}{2} \left(\frac{2m-1}{3} + \frac{s-1}{2} \frac{m-1}{2} \right) \frac{\Delta^{s+2}}{m^{s+2}} - \dots$$

Si Δ^r est la dernière différence sensible ($\Delta^{r+1} = 0$), on aura évidemment

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^r &= \frac{1}{m^r} \Delta^r, \\ \delta^{r-1} &= \frac{1}{m^{r-1}} \Delta^{r-1} - \frac{(r-1)(m-1)}{2m^r} \Delta^r, \\ \delta^{r-2} &= \frac{1}{m^{r-2}} \Delta^{r-2} - \frac{(r-2)(m-1)}{2m^{r-1}} \Delta^{r-1} \\ &\quad + \frac{(r-2)(m-1)}{2m^r} \left(\frac{2m-1}{3} + \frac{r-3}{2} \frac{m-1}{2} \right) \Delta^r, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

En faisant $s = 1, 2, 3, \dots$ dans (52), on trouve

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{m} \Delta - \frac{m-1}{2m^2} \Delta^2 \\ &\quad + \frac{(m-1)(8m-4)}{24m^3} \Delta^3 - \frac{(m-1)(3m-1)(4m-2)}{48m^4} \Delta^4 + \dots \\ \delta^2 &= \frac{1}{m^2} \Delta^2 - \frac{2(m-1)}{2m^4} \Delta^3 \\ &\quad + \frac{2(m-1)(11m-7)}{24m^5} \Delta^4 - \frac{2(m-1)(4m-2)(5m-3)}{48m^6} \Delta^5 + \dots, \\ \delta^3 &= \frac{1}{m^3} \Delta^3 - \frac{3(m-1)}{2m^6} \Delta^4 \\ &\quad + \frac{3(m-1)(14m-10)}{24m^7} \Delta^5 - \frac{3(m-1)(5m-3)(6m-4)}{48m^8} \Delta^6 + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Le cinquième terme de δ est $+\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)}{120m^5} \Delta^5$.

L'expression des différences δ que C.-F. Degen a donnée sans démonstration dans une courte Note (*Astr. Nach.*, n° 15, 1822), cesse d'être exacte pour $s > 3$. Le Verrier a traité le même sujet (*Ann. de l'Obs.*, t. I, p. 126 et 151).

11. Les différences δ sont les différences successives à partir de t_0 ($\delta t_0, \delta^2 t_0, \dots$), comme les Δ sont les différences successives à partir de T_0 , et elles servent à former, par additions répétées, les termes cherchés t_1, t_2, \dots . Dans le Tableau, ces différences descendent en diagonale. Lorsqu'on veut faire usage des différences médianes D , il faut construire un autre algorithme.

Remarquons d'abord qu'en appliquant aux δ les formules (42) il vient

$$(54) \quad \begin{cases} 2d = 1 + \delta - (1 + \delta)^{-1}, \\ d^2 = 1 + \delta + (1 + \delta)^{-1} - 2, \end{cases}$$

où d, d^2, \dots sont les différences médianes pour les intervalles réduits. Or, en vertu de (51), nous avons $1 + \delta = (1 + \Delta)^{\frac{1}{m}}$; et, en faisant $\mu = \frac{1}{m}$, (48) nous donne

$$(55) \quad (1 + \delta)^{\mu-1} - 1 = \sum_0 \left(\pm D^{2n+1} + \frac{1}{2n+2} D^{2n+2} \right) \left(\frac{1}{m} + n \right)_{2n+1}.$$

En substituant dans (54), on trouve

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \sum_0 D^{2n+1} \left(\frac{1}{m} + n\right)_{2n+1}, \\ d^2 = \frac{1}{m} \sum_0 \frac{D^{2n+2}}{n+1} \left(\frac{1}{m} + n\right)_{2n+1}, \end{array} \right.$$

ou bien

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{1}{m} D + \left(\frac{1}{m} + 1\right)_3 D^3 + \left(\frac{1}{m} + 2\right)_5 D^5 + \dots \\ = \frac{1}{m} D - \frac{m^2-1}{6m^3} D^3 + \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{120m^5} D^5 - \dots \end{array} \right.$$

et

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2 = \frac{1}{m^2} D^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{m} + 1\right)_3 D^4 + \frac{1}{3m} \left(\frac{1}{m} + 2\right)_5 D^6 + \dots \\ = \frac{1}{m^2} D^2 - \frac{m^2-1}{12m^4} D^4 + \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{360m^6} D^6 - \dots \end{array} \right.$$

De ces expressions fondamentales, les autres d se déduisent par les relations

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^{2n} = (d^2)^n = \frac{1}{m^{2n}} D^{2n} - \frac{n(m^2-1)}{12m^{2n+2}} D^{2n+2} + \dots, \\ d^{2n+1} = d \cdot d^{2n} = \frac{1}{m^{2n+1}} D^{2n+1} - \frac{(n+2)(m^2-1)}{12m^{2n+3}} D^{2n+3} + \dots \end{array} \right.$$

On aurait, par exemple,

$$\begin{aligned} d^3 &= \frac{1}{m^3} D^3 - \frac{m^2-1}{4m^5} D^5 + \frac{(m^2-1)(7m^2-3)}{120m^7} D^7 - \dots, \\ d^4 &= \frac{1}{m^4} D^4 - \frac{m^2-1}{6m^6} D^6 + \frac{(m^2-1)(7m^2-3)}{240m^8} D^8 - \dots \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier qu'on n'a pas $d \cdot d = d^2$, mais qu'on a $d^2 \cdot d^s = d^{2+s}$.

Ces formules sont d'accord avec celles que M. J.-J. Astrand a publiées en 1858 (*A. N.*, 1125) et en 1875 (*Vierteljahrschrift*, t. X, p. 279), mais sans en indiquer complètement la loi. Encke avait traité un problème analogue dans le *Jahrbuch* pour 1852.

En suivant une marche inverse, on pourrait exprimer les D par

les d , et l'on trouverait

$$(60) \quad \begin{cases} D = md + (m+1)_2 d^2 + (m+2)_3 d^3 + \dots, \\ D^2 = m^2 d^2 + \frac{m}{2} (m+1)_3 d^3 + \frac{m}{3} (m+2)_4 d^4 + \dots \end{cases}$$

Pour $m = 2$, on aurait donc

$$\begin{aligned} D &= 2d + d^2, \\ D^2 &= 4d^2 + d^3, \\ D^3 &= 8d^3 + 6d^4 + d^5, \\ D^4 &= 16d^4 + 8d^5 + d^6, \end{aligned}$$

Ces relations peuvent faciliter le calcul des différences d . Ayant calculé ces dernières pour l'argument 0, on trouve les différences δ par les formules

$$\begin{aligned} \delta_{-1} &= d - \frac{1}{2}d^2, & \delta_{-2}^2 &= d^2 - \delta_{-2}^2, & \delta_{-2}^3 &= d^3 - \frac{1}{2}d^4, \\ \delta_0 &= d + \frac{1}{2}d^2, & \delta_{-1}^2 &= d^2, & \delta_{-1}^3 &= d^3 + \frac{1}{2}d^4, \\ & & \delta_0^3 &= d^3 + \delta_{-1}^2, & & \end{aligned}$$

J'ai dû me borner à démontrer ces diverses formules en renonçant à donner des exemples de calcul, qui auraient pris trop de place.

(A suivre.)

OBSERVATIONS DES PLANÈTES (208), (245), (267), (289), (302), (303), (304), (306), (307), (308), (309),

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE NICE (équatorial Gautier, 0^m, 38 d'ouverture);

PAR M. CHARLOIS.

Dates.	T. m. de Nice.	ΔR .	$\Delta \varphi$.	N. de c.	R app.	log f. p.	φ app.	log f.
(208).								
1891.	h m s	m s			h m s			
FÉVR. 11.	10.17.53	-0.7,08	-4.57,2	6	9.51.35,09	1,366 n	75.6.21,6	0,652
12.	9.4.50	-0.56,28	-8.46,7	5	9.50.45,89	1,522 n	75.2.32,1	0,665
14.	10.24.58	+1.5,47	+9.18,5	5	9.48.58,75	1,292 n	74.54.20,2	0,647
15.	8.55.24	+0.16,76	+5.35,0	5	9.48.10,05	1,514 n	74.50.36,7	0,674
17.	8.38.29	-1.26,64	-3.11,6	5	9.46.26,66	1,527 n	74.42.50,1	0,650
23.	8.29.59	+4.0,33	-1.9,6	5	9.39.44,64	1,473 n	74.13.57,0	0,660
26.	9.26.38	+3.10,40	-4.36,7	5	9.38.54,72	1,299 n	74.10.29,8	0,633
MARS 11.	9.6.42	+4.14,55	-8.33,8	4	9.29.53,89	1,104 n	73.36.28,3	0,612
19.	11.30.12	-1.24,83	0.55,1	6	9.25.58,74	1,314	73.24.42,5	0,622

	T m. de Nice.	$\Delta R.$	$\Delta \varphi.$	N. dec.	Rapp.	log f. p.	φ app.	log f. p.	★
(245).									
	$h \quad m \quad s$	$m \quad s$	$''$		$h \quad m \quad s$		$''$		
2.	8.37.45	+2.13,66	+5.1,7	3	10.1.25,65	$\bar{1},470$	70.7.2,8	0,610	n 6
5.	11.28.29	-0.5,55	-4.15,2	5	9.59.6,44	$\bar{2},658$	69.57.45,7	0,548	n 6
(267).									
IL 11.	10.21.29	-1.6,40	+6.22,3	5	12.1.22,64	$\bar{2},590$	80.47.5,5	0,698	n 7
14.	10.41.17	-0.3,01	+0.33,1	6	11.59.18,74	$\bar{2},395$	80.41.23,3	0,697	n 8
(280).									
ML 10.	13.32.24	+0.40,72	-0.27,4	6	13.56.45,67	$\bar{2},213$	97.45.31,5	0,838	n 9
11.	11.5.45	+1.42,90	+1.59,8	5	13.56.3,94	$\bar{1},222$	97.39.57,6	0,834	n 10
(302).									
IV. 28.	7.29.56	+0.10,24	-3.19,3	8	1.5.20,60	$\bar{1},476$	80.58.16,3	0,723	n 11
29.	9.8.42	-2.5,67	-2.44,9	8	1.7.1,99	$\bar{1},606$	80.47.29,2	0,752	n 12
(303).									
IV. 15.	9.25.15	-2.38,51	-1.13,9	4	9.48.58,59	$\bar{1},461$	73.0.8,9	0,643	n 13
19.	9.55.11	+1.32,42	-5.3,8	6	9.45.32,51	$\bar{1},322$	72.51.0,1	0,618	n 14
(304).									
IV. 17.	17.5.9	-1.6,20	-12.32,8	5	10.30.31,02	$\bar{1},596$	82.44.26,5	0,757	n 15
28.	11.22.57	-1.4,73	-6.50,7	5	10.21.8,67	$\bar{2},662$	81.0.58,0	0,700	n 16
(305).									
IV. 16.	15.35.7	+1.6,16	+10.15,4	4	9.41.32,02	$\bar{1},548$	82.57.36,1	0,748	n 17
17.	8.11.18	+0.34,25	+6.41,6	5	9.41.0,12	$\bar{1},547$	82.54.2,3	0,747	n 17
19.	11.39.4	-1.5,18	-4.29,0	6	9.39.20,69	$\bar{3},544$	82.42.51,8	0,719	n 17
23.	9.11.8	-4.50,75	-1.58,8	5	9.36.26,53	$\bar{1},369$	82.22.20,8	0,726	n 18
ans 19.	8.40.28	+1.31,27	+1.7,4	5	9.24.9,05	$\bar{1},016$	80.29.18,7	0,697	n 19
ans 10.	9.49.18	+0.57,40	-0.39,3	2	9.24.49,50	$\bar{1},263$	79.35.9,5	0,694	n 20
11.	8.53.27	+1.15,46	-1.44,0	5	9.25.7,54	$\bar{2},950$	79.34.4,8	0,686	n 20
(306).									
ans 2.	7.42.24	-0.24,69	+8.40,4	5	10.46.43,18	$\bar{1},600$	78.16.43,1	0,735	n 21

Dates. T. m. de Nice. $\Delta R.$ $\Delta \varphi.$ N. de c. Rapp. log f. p. φ app. log

(307).

1891.		h	m	s	m	s		h	m	s						
MARS	5.	8.46.45	+2.14,14	+15.49,5	4	10. 1.26,13	$\bar{1},419 n$	70. 17.50,4	0,5							
	8.	10.58.45	-0.49,57	+ 5. 6,1	5	9.59.13,18	$\bar{3},977$	70. 6.10,8	0,5							
	11.	8.23.16	-1.54,19	- 5.32,0	5	9.57.17,79	$\bar{1},409 n$	69.56.28,6	0,5							
AVRIL	8.	8.48.54	+0.40,67	- 0. 1,9	5	9.47.54,61	$\bar{2},212$	69.32.53,4	0,5							
	10.	8. 8.28	+0.42,85	+ 2.42,1	7	9.47.56,76	$\bar{2},688 n$	69.35.37,2	0,5							
	11.	8.29. 1	+0.46,18	+ 4.19,7	5	9.48. 0,08	$\bar{5},521 n$	69.37.14,7	0,5							
MAI	1.	9.29.54	-4.12,17	+ 2.39,2	5	9.53.42,75	$\bar{1},398$	70.33.49,1	0,5							
	2.	8.49.56	-3.43,15	+ 6.17,3	4	9.54.11,76	$\bar{1},271$	70.37.37,1	0,5							

(308).

AVRIL 13.	14.12.34	-3.30,84	-- 6.11,8	5	12.15. 5,61	$\bar{1},523$	90.32.16,6	0,7
-----------	----------	----------	-----------	---	-------------	---------------	------------	-----

(309).

AVRIL 14.	11. 8.30	-0.21,83	- 3.21,6	6	12.34.19,48	$\bar{2},007$	95.41.38,2	0,8
-----------	----------	----------	----------	---	-------------	---------------	------------	-----

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1891.0	Réd. au j.	φ moy. 1891.0	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s			
4.	10	9.51.41,38	+0,79	75.11.16,7	+ 2,1	{ Anonyme rapp. à $\frac{1}{2}$ (Sci + Br. 4166.
1.	10	"	+0,79	"	+ 2,1	Id.
2.	8,8	9.47.52,46	+0,82	74.44.59,6	+ 2,1	$\frac{1}{2}$ (Yarnall 4125 + Runk
2.	8,8	"	+0,83	"	+ 2,1	Id.
2.	8,8	"	+0,84	"	+ 2,1	Id.
3.	9	9.35.43,45	+0,86	74.15. 4,8	+ 1,8	Weisse ₂ 727 (3 obs. mér
3.	9	"	+0,87	"	+ 1,7	Id.
4.	7	9.25.38,52	+0,82	73.45. 1,1	+ 1,0	$\frac{1}{2}$ (Weisse ₂ 496 + 1 obs.
5.	10	9.27.22,80	+0,77	73.25.37,0	+ 0,6	{ Anon. rapp. à $\frac{1}{2}$ (Weisse 1 obs. Paris).
6.	8	9.59.11,04	+0,95	70. 1.59,2	+ 1,9	$\frac{1}{2}$ (Kam. 1674 + W ₂ 121
6.	8	"	+0,95	"	+ 1,7	Id.
7.	8	12. 5.27,97	+1,07	80.40.37,8	+ 5,4	$\frac{1}{2}$ (Glasg. 3114 + Schj. 4
8.	9	11.59.20,70	+1,05	80.40.45,2	+ 5,0	$\frac{1}{2}$ (Glasg. 3094 + Br. 49
9.	8	13.56. 3,88	+1,07	97.45.40,6	+ 8,3	$\frac{1}{3}$ (Mun ₁ 9740 + 2 obs. I
10.	7	13.54.19,96	+1,08	97.37.49,6	+ 8,2	{ $\frac{1}{3}$ (Gould 19021 + Br. R. 4539).
11.	7,8	1. 5.11,53	-1,17	81. 1.30,1	+ 5,5	$\frac{1}{2}$ (Paris 1516 + Glasg.
12.	8	1. 9. 8,83	-1,17	80.50. 8,6	+ 5,5	$\frac{1}{2}$ (Paris 1582 + Glasg.

Gr.	R moy. 1891,0.	Réd. au J.	Q moy. 1891,0.	Réd. au J.	Autorités.
7	9.51.36,26	+0,84	73. 1.20,6	+ 2,2	$\frac{1}{4}$ (3 Arm ₂ 1152 + R. 3015).
9	9.43.59,23	+0,86	72.56. 1,9	+ 2,0	$\frac{1}{2}$ (R. 2960 + Weisse ₂ 890).
9	10.32.36,44	+0,78	82.56.56,2	+ 3,1	$\frac{1}{2}$ (Schjellerup 3889-90).
8	10.22.12,53	+0,87	81. 7.45,3	+ 3,4	$\frac{1}{3}$ (Mun ₁ 5319 + 2 obs. Paris).
5,5	9.40.25,07	+0,79	82.47.18,5	+ 2,2	$\frac{1}{3}$ (Arm ₂ 1129 + Y. 4059 + Br. 4073).
5,5	"	+0,80	"	+ 2,2	Id.
5,5	"	+0,80	"	+ 2,3	Id.
8	9.41.16,46	+0,82	82.24.17,1	+ 2,5	Glasgow 2539.
6	9.22.37,07	+0,71	80.28. 9,2	+ 2,1	$\frac{1}{2}$ (Glasgow 2450 + Br. 3977).
9	9.23.51,62	+0,48	79.35.47,7	+ 1,1	Weisse ₁ 466, h. IX.
9	"	+0,46	"	+ 1,1	Id.
9	10.47. 6,96	+0,91	78. 7.58,9	+ 3,8	$\frac{1}{2}$ (Mun ₁ 5923 + Schj. 3969).
8	9.59.11,04	+0,95	70. 1.59,2	+ 1,7	$\frac{1}{2}$ (Kam. 1674 + W ₂ 1215-16).
9	10. 0. 1,80	+0,95	70. 1. 3,1	+ 1,6	$\frac{1}{2}$ (Kam. 1678 + Weisse ₂ 1241).
8	9.59.11,04	+0,94	70. 1.59,2	+ 1,4	$\frac{1}{2}$ (Kam. 1674 + W ₂ 1215-16).
8	9.47.13,25	+0,69	69.32.56,5	- 1,2	$\frac{1}{3}$ (Weisse ₂ 955 + 2 obs. mérid. Nice).
8	"	+0,66	"	- 1,4	Id.
8	"	+0,65	"	- 1,5	Id.
7,5	9.57.54,48	+0,44	70.31.12,3	- 2,4	$\frac{1}{2}$ Arm ₂ 1163 + Kam. 1672).
7,5	"	+0,43	"	- 2,5	Id.
9	12.18.35,41	+1,04	90.38.21,5	+ 6,9	Munich ₁ 8003.
9	12.34.40,26	+1,05	95.44.52,2	+ 7,6	Weisse ₁ 544, h. XII.

ÉLÉMENTS DE LA PLANÈTE (293) BRASILIA,

CALCULES A L'AIDE DES OBSERVATIONS FAITES A NICE DU 20 MAI AU 9 JUILLET 1890;

PAR M. CHARLOIS.

Époque : 1890 juin 17,5, Temps moyen de Paris.

M.....	92.29. 3,8	} Équinoxe moyen 1890,0.
π	144.26.32,4	
Ω	62. 4.40,7	
i	15.15.17,5	
ϖ	6.48. 2,9	
log a.....	0,4574574	
μ	730 ⁷ .8370	

Éphéméride pour l'opposition de 1891 déduite de ces éléments.

(Positions moyennes 1891,0.)

19 h. T. m. de Paris. 1891.	R. h m s	(Q).	log Δ.	log r.
JUILL. 28.....	22.31. 1	—32.57,7	0,3593	0,5059
30.....	29.42	—33.12,3		
AOUT 1.....	28.18	26,6	0,3562	0,5060
3.....	26.49	40,6		
5.....	25.17	—33.54,3	0,3540	0,5060
7.....	23.41	—34. 7,4		
9.....	22. 2	19,8	0,3525	0,5060
11.....	20.19	31,9		
13.....	18.34	43,3	0,3518	0,5060
15.....	16.47	—34.54,0		
17.....	14.59	—35. 4,0	0,3520	5,5061
19.....	13. 9	13,3		
21.....	22.11.19	—35.21,8	0,3529	0,5061

Grandeur de la planète 13,5.

ÉPHÉMÉRIDES DE RECHERCHE POUR LA PLANÈTE 296 PHAETUSA,
EN 1892.

PAR J. CONIEL.

En faisant varier les distances géocentriques des 21 août et 16 septembre 1890, nous avons déduit les deux systèmes d'éléments I et III, auxquels nous joignons les éléments les plus probables du système II publiés dans le *Bulletin astronomique*, t. VIII, p. 206.

1890. août 22,0. temps moyen de Paris.

	I.	II.	III.	
M.....	331.50.59,8	330.33.44,5	329.36.24,7	} éq. et écl. moy. 1890,0
π.....	8.23.45,9	10.49.12,6	12.48. 7,2	
Q.....	121.25.37,1	120.49.17,9	120.14.13,9	
i.....	1.48. 5,1	1.44.53,1	1.41.55,5	
φ.....	8.32. 8,7	9. 6.25,9	9.38. 0,4	
μ.....	1060",456	1068".122	1075".649	
log α...	0,3496760	0,3475906	0,3455574	

La représentation des lieux normaux intermédiaires, par ces

éléments, laisse subsister les écarts suivants dans le sens observation — calcul :

	I.		II.		III.	
	$\Delta\lambda$.	$\Delta\beta$.	$\Delta\lambda$.	$\Delta\beta$.	$\Delta\lambda$.	$\Delta\beta$.
Août 27.....	+2,4	+1,1	-0,8	+2,3	-3,6	+2,7
SEPT. 2.....	+3,3	-2,0	+1,0	+0,5	+0,3	+1,2
6.....	-2,5	-1,6	+0,9	+0,2	+3,6	+1,8

Les lieux extrêmes se trouvant rigoureusement représentés, il semble que le système d'éléments I soit trop rapproché des éléments les plus probables; de cette circonstance, il résulte que la planète pourrait, à la rigueur, se trouver un peu en dehors de l'éphéméride I.

Nous donnons ci-après l'éphéméride approchée de jour en jour, basée sur le système d'éléments II, et deux autres éphémérides, de deux jours en deux jours, déduites des systèmes d'éléments I et III.

Éphéméride déduite du système d'éléments II.

12 h. T. moy. de Paris. 1892.	α 1892,0. h m s	δ 1892,0.	log Δ .	$\Delta\delta$.
FÉVR. 2.....	10.56.26	+ 8.17,4	0,1933	-5,71
3.....	10.55.42	8.22,9	0,1919	-5,95
4.....	10.54.57	8.28,5	0,1905	
5.....	10.54.10	8.34,2	0,1891	
6.....	10.53.22	8.40,1	0,1879	
7.....	10.52.33	8.46,1	0,1867	
8.....	10.51.42	8.52,2	0,1856	
9.....	10.50.50	8.58,3	0,1845	
10.....	10.49.58	9. 4,6	0,1835	-5,64
11.....	10.49. 4	9.10,9	0,1826	-5,89
12.....	10.48. 9	9.17,3	0,1818	
13.....	10.47.13	9.23,8	0,1810	
14.....	10.46.17	9.30,4	0,1803	
15.....	10.45.20	9.36,9	0,1797	
16.....	10.44.22	9.43,5	0,1792	
17.....	10.43.23	9.50,2	0,1788	
18.....	10.42.24	9.56,9	0,1784	-5,52
19.....	10.41.24	10. 3,6	0,1781	-5,80
20.....	10.40.23	10.10,4	0,1779	
21.....	10.39.23	10.17,1	0,1778	
22.....	10.38.22	10.23,9	0,1778	
23.....	10.37.20	10.30,6	0,1779	
24.....	10.36.19	10.37,3	0,1780	
25.....	10.35.17	10.43,9	0,1782	

12 h. T. moy. de Paris. 1892.	α 1892,0. h m s	δ 1892,0.	log Δ .	Δz .
FÉVR. 26.....	10.34.16	10.50,5	0,1785	-5,39
27.....	10.33.14	10.57,1	0,1789	-5,70
28.....	10.32.13	11. 3,6	0,1794	
29.....	10.31.12	11.10,0	0,1799	
MARS 1.....	10.30.12	11.16,4	0,1805	
2.....	10.29.12	11.22,7	0,1813	
3.....	10.28.12	11.28,9	0,1821	
4.....	10.27.13	11.35,0	0,1829	
5.....	10.26.14	11.41,0	0,1839	-5,21
6.....	10.25.17	11.46,9	0,1849	-5,5
7.....	10.24.20	11.52,7	0,1860	
8.....	10.23.23	11.58,4	0,1872	
9.....	10.22.28	+12. 4,0	0,1885	
MARS 10.....	10.21.34	+12. 9,4	0,1898	
11.....	10.20.40	12.14,7	0,1912	
12.....	10.19.48	12.19,9	0,1926	
13.....	10.18.57	+12.24,9	0,1941	-5,1
				-5,4

Éphémérides déduites des systèmes d'éléments I et III.

12 h. T. m. de Paris. 1892.	I.		III.	
	α 1892,0. h m s	δ 1892,0.	α 1892,0. h m s	δ 1892,0.
FÉVR. 2....	10.38.45	+ 9.58,3	11.13.17	+ 6.37,3
4....	10.37. 5	10.10,1	11.11.58	6.47,5
6....	10.35.21	10.22,2	11.10.34	6.58,3
8....	10.33.33	10.34,7	11. 9. 4	7. 9,6
10....	10.31.40	10.47,5	11. 7.29	7.21,4
12....	10.29.44	11. 0,5	11. 5.49	7.33,7
14....	10.27.46	11.13,6	11. 4. 4	7.46,3
16....	10.25.46	11.26,7	11. 2.16	7.59,3
18....	10.23.44	11.39,9	11. 0.23	8.12,5
20....	10.21.41	11.53,1	10.58.28	8.25,9
22....	10.19.37	12. 6,1	10.56.30	8.39,5
24....	10.17.34	12.18,9	10.54.30	8.53,1
26....	10.15.32	12.31,5	10.52.28	9. 6,7
28....	10.13.31	12.43,8	10.50.26	9.20,3
MARS 1....	10.11.33	12.55,7	10.48.23	9.33,8
3....	10. 9.37	13. 7,2	10.46.21	9.47,0
5....	10. 7.45	13.18,3	10.44.20	10. 0,0
7....	10. 5.56	13.28,9	10.42.21	10.12,7
9....	10. 4.12	13.38,9	10.40.25	10.24,9
11....	10. 2.33	13.48,3	10.38.31	10.36,7
13....	10. 0.59	+13.57,1	10.36.40	+10.48,1

Nous avons donné dans l'éphéméride II, de huit jours en huit jours, deux valeurs de la variation en déclinaison correspondant à une variation de 1^m en ascension droite : la première valeur se rapporte à l'intervalle compris entre l'hypothèse I et l'hypothèse II; la seconde à l'intervalle compris entre l'hypothèse II et l'hypothèse III.

La grandeur sera 15,2 le 2 février, 15,1 le 26 février et 15,3 le 13 mars, en admettant que la grandeur était 13,5 en 1890.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

THE OBSERVATORY.

Février 1891.

Articles.

Denz̄ng (W.-F.). — Notes sur la recherche des comètes à *Brisol*. Météores télescopiques.

Reproduisons les remarques suivantes sur les *Météores télescopiques* :
Je trouve que durant la dernière moitié de l'année environ un météore par heure est vu dans le chercheur de comètes, mais que dans la première moitié le nombre est plus faible, la moyenne étant d'un météore en deux heures. Cela s'accorde avec la fréquence relative des météores visibles à l'œil nu et prouve que les deux classes d'objets sont identiques en ce qui regarde les variations dans leur distribution pendant l'année. Ma première estimation que les météores télescopiques sont plus fréquents que les météores visibles à l'œil nu dans la proportion d'environ 22 à l'unité est confirmée par les observations récentes. L'opinion que les premiers sont à une plus grande hauteur dans l'atmosphère terrestre paraît très probable d'après la lenteur de leur mouvement et la brièveté de leurs cours. Beaucoup d'entre eux présentent des trajectoires courbes, bien que cela ne se présente guère pour les météores à l'œil nu.

Sidgreaves (Walter). — La Chromosphère en 1889 et 1890 d'après les observations faites à *Stonyhurst*.

See (T.-J.-J.). — Les grandes excentricités des doubles.

Indications succinctes sur le contenu d'un Mémoire et qui promet d'être très important.

L'action séculaire des marées qui, d'après le professeur n'a pas joué un grand rôle dans l'évolution du système la plus haute importance dans l'évolution des systèmes les recherches de l'auteur, il paraît très probable était d'abord une nébuleuse unique qui s'est ensuite donner naissance à deux composantes de masses commutuelles ont eu pour effet, avec le temps, d'agrandir rendant plus excentriques. On expliquerait de la caractéristiques des systèmes binaires où l'on rencontre tricités et où les masses des composantes sont con-

Elger (T.-G.). — Notes sélénographiques.

Correspondance. Observatoires et Publications.

Knott (G.). — U et T Taureau.

La variabilité de U Taureau n'est pas bien sûre. T Taureau depuis vingt-sept ans; mais il n'est pas (voir l'article de M. Burnham, *Bulletin*, VIII, p. 1

Rambaut (A.-A.). — Parallaxe et vitesse des étoiles

M. Rambaut s'est aperçu que l'idée de son travail se trouvait déjà dans un Mémoire antérieur du professeur *thly Notices*, 1874).

Johnson (S.-J.). — Comètes non cataloguées.

Trois comètes mentionnées par Calvisius.

Gore (J.-E.). — Astronomical Lessons.

Annonce d'un nouvel Ouvrage de M. Gore.

Photométrie méridienne (t. XXIV des *Annales de l'Observatoire de l'Université Harvard*).

Après la publication du Catalogue contenu dans *Photometry*, on construisit un nouveau photomètre objectif de 4 pouces d'ouverture (au lieu de 2 pour déterminer les grandeurs d'un nombre suffisant d'étoiles) la *Durchmusterung* et distribuées avec assez d'un

aux évaluations futures des grandeurs et permettre de les ramener à une échelle photométrique commune. Le présent Volume contient le Catalogue des grandeurs photométriques de 20982 étoiles. Les mesures ont été faites par MM. E.-C. Pickering et O.-C. Wendell; avec les perfectionnements apportés au nouvel instrument, l'écart moyen a été réduit à $0^m,16 - 0^m,11$.

Darwin (G.). — Prédiction des marées.

Conférence (*Bakerian Lecture*) faite à la Société Royale, le 29 janvier 1891. La machine pour prédire les marées, fondée sur l'analyse harmonique, imaginée par Sir William Thomson, en 1872, permet de tracer une courbe représentant toutes les marées dans un port quelconque pour chaque jour de l'année en quatre heures environ; mais pour divers motifs, en particulier son prix très élevé, l'usage de cette machine ne s'est pas répandu. M. Darwin a donc cherché à fournir à un port qui en ferait les frais une table générale (déduite bien entendu de l'observation des marées dans ce port) applicable à toutes les époques, au moyen de laquelle les personnes ayant quelque connaissance du *Nautical Almanac* pourraient calculer en quelques minutes deux ou trois marées pour les jours demandés.

O. C.

MONTHLY NOTICES.

T. LI, n° 3, janvier 1891.

Vogel (H.-C.). — Remarques sur une Note de M. Fowler concernant la duplicité de α Lyre.

M. Vogel communique les résultats obtenus à Potsdam et qui contredisent l'annonce de M. Fowler (*Bulletin*, VIII, p. 122). Il ajoute que la méthode du prisme objectif peut conduire à de fausses raies doubles et triples, à moins de précautions spéciales. Dans l'instrument de Potsdam une fente est employée qui évite les fausses raies.

Burnham (S.-W.). — Le mouvement propre de l'étoile H 1968 (avec un diagramme).

La discussion des mesures de Sir John Herschel (en 1831) et des mesures postérieures du baron Dembowski et de l'auteur conduirait à

admettre un mouvement propre pour l'étoile B ($0^{\circ},18$ par $195^{\circ},5$). $A = 593$
Lalande a un mouvement propre de $0^{\circ},252$ par $92^{\circ},0$ (Stumpe, A. N. 2999).

Stone (E.-J.). — Comparaison des observations lunaires de Greenwich, en 1887, avec les Tables de Hansen.

Suivant qu'on prend les Tables mêmes de Hansen ou les Tables modifiées par les corrections de M. Newcomb ou celles de M. Stone.

Roberts (Isaac). — Variabilité du noyau de la grande nébuleuse d'Andromède.

Elle résulte de dix photographies prises de 1885 à 1890 qui montrent actuellement un noyau stellaire (1890 : nov. 1 et déc. 9), ce qui n'avait pas lieu à d'autres dates.

Roberts (Isaac). — Description sommaire de son Observatoire sur le mont Crowborough (Sussex).

A la séance du 9 janvier 1891, le Président et le Secrétaire ont insisté auprès de M. Roberts pour avoir une description détaillée du nouvel Observatoire dont tout le monde vante l'arrangement. Nous donnerons alors une idée des dispositions.

Rambaut (A.-A.). — Observations des planètes Victoria et Sapho et des étoiles de comparaison à l'Observatoire de Dursink (17 pages).

On a une mesure de la précision des observations par les erreurs probables $0^{\circ},033$ en ascension droite et $0^{\circ},42$ en déclinaison. Les observations, surtout pour Sapho, sont très nombreuses.

Maunder (E.-W.). — Déterminations spectroscopiques des vitesses radiales des étoiles obtenues en 1890 à l'Observatoire de Greenwich.

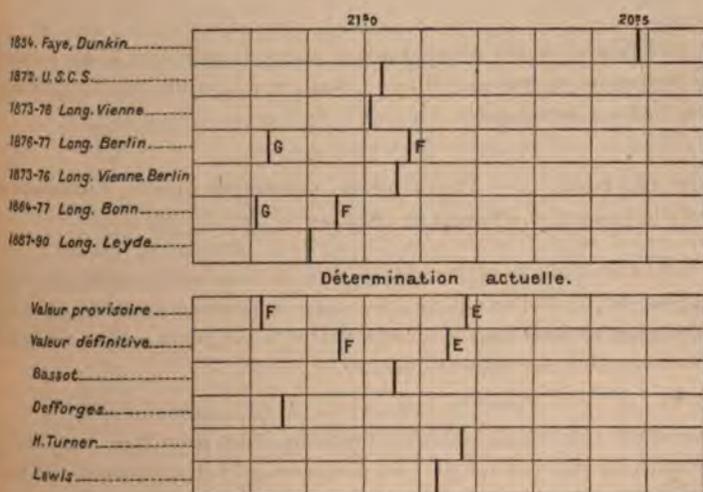
Occultations d'étoiles et phénomènes des satellites de Jupiter observés, en 1890, à l'Observatoire de Greenwich.

Errata dans les observations de la comète α 1890.

Turner (H.-H.). — Note sur la détermination récente de la longitude Paris-Greenwich.

M. Turner dit qu'en 1887 une proposition fut faite à l'Astronome royal pour redéterminer la longitude de Paris-Greenwich, les valeurs obtenues directement ou indirectement montrant des divergences sensibles, comme il ressort du diagramme ci-dessous.

Fig. 1.



N. B. — Les lettres E, F, G désignent les résultats obtenus par les observateurs anglais, français ou allemands, quand il y a eu des déterminations indépendantes. Les nombres de 1854 et 1872 proviennent de mesures directes, les autres résultent indirectement des diverses déterminations de longitude.

Il fut entendu que la longitude serait redéterminée en 1888 par deux observateurs français (le colonel Bassot et le commandant Defforges, du Service géographique de l'armée) et deux observateurs anglais (M. H. Turner et M. Lewis). Les observateurs français avaient acquis une grande expérience avec les déterminations de longitude en Algérie et en France. Une comparaison des résultats provisoires calculés indépendamment indiqua une forte différence, d'environ 0^s,4, à laquelle on ne put trouver d'explication pendant longtemps. Par la suite, la cause du

désaccord fut localisée dans les déterminations de l'heure à Greenwich et à Paris, incompatibles avec les équations personnelles connues, et on découvrit que les nivellements de l'instrument français obtenus avec le niveau différaient systématiquement d'environ 3" du résultat obtenu par l'observation du nadir. Si l'on regardait comme seules exactes les déterminations obtenues par le nadir, il y aurait accord entre les résultats des observateurs anglais et français. Mais, en présence de la différence non expliquée jusqu'ici entre les valeurs du nivellement par les deux méthodes, les observateurs français ont pris simplement la moyenne des valeurs. Le diagramme ci-dessus montre les résultats obtenus. En terminant sa Communication à la séance du 9 janvier, M. Turner dit qu'on a fait très peu de déterminations indépendantes de longitude, mais qu'on a rencontré, le cas échéant, des discordances analogues (voir le diagramme). Il insiste fortement sur la nécessité de ne pas négliger ces questions, aujourd'hui que tous les efforts sont dirigés du côté de l'Astronomie physique et de la Photographie.

A une observation du Président, l'Astronome royal répond que la forte discordance rencontrée, après toutes les précautions prises, a été un grand sujet d'ennui; que l'expérience obtenue sera mise à profit pour la détermination de la longitude de Montréal dans le courant de la présente année, et qu'il espère reprendre ensuite la détermination de la longitude de Paris.

Marth (A.). — Liste de dessins et de photographies de la Lune arrangés d'après la position du Soleil (13 p.).

L'Auteur insiste sur la nécessité de ne pas oublier de marquer la date et l'heure sur les dessins.

Marth (A.). — Éphéméride pour les observations physiques de la Lune.

Marth (A.). — Éphéméride des satellites d'Uranus, en 1891.

Bassot et Desforges. — Lettre adressée au Président de la Société Royale astronomique (longitude Paris-Greenwich).

« Les valeurs individuelles obtenues pour la différence de longitude entre Paris (méridien de Cassini), et Greenwich (méridien du Transit-Cercle) sont contenues dans le Tableau suivant :

TABLEAU I.

Valeur individuelle de la différence de longitude entre Paris
et Greenwich.

Dates.	Échanges			
	HT et L.	B et D.	HT et D.	B et L.
SEPT. 30.....	^m 9.20,73	^s 20,85	^s 21,10	^s 20,47
OCT. 1.....	9.20,77	20,89	21,12	20,56
3.....	9.20,98	20,99	21,19	20,72
5.....	9.20,97	20,91	21,14	20,73
11.....	9.20,65	21,17	20,81	21,05
13.....	9.20,69	21,18	20,64	21,24
14.....	9.20,72	21,25	20,71	21,26
15.....	"	"	20,88	"
17.....	9.20,73	21,20	20,84	21,14
19.....	9.20,54	21,18	20,82	20,96
20.....	9.20,60	21,22	20,82	20,98
21.....	9.20,62	21,10	20,72	21,02
23.....	9.21,30	20,97	21,32	20,96
26.....	9.21,07	20,84	21,07	20,72
27.....	9.21,19	"	"	"
30.....	9.21,12	20,95	21,23	20,89
Nov. 9.....	9.21,18	21,00	21,42	"
13.....	9.21,02	20,84	21,16	20,67
Moy... { 1 ^{re} période..	9.20,86	20,91	21,14	20,62
{ 2 ^e période..	9.20,65	21,19	20,78	21,09
{ 3 ^e période..	9.21,15	20,92	21,24	20,81
1 ^{re} et 2 ^e périodes.....	9.20,76	21,05	20,96	20,86
2 ^e et 3 ^e périodes.....	9.20,90	21,06	21,01	20,95
Longitude moyenne..	9.20,83	21,06	20,99	20,91

La comparaison des résultats moyens des trois périodes fournit, pour les valeurs des équations personnelles,

	HT - L.	B - D.	HT - D.	B - L.
1 ^{re} échange d'observateurs.	-0,10	+0,14	-0,18	+0,23
2 ^e échange d'observateurs.	-0,25	+0,14	-0,23	+0,14
Moyennes.....	-0,18	+0,14	-0,21	+0,19

» L'équation personnelle B — D est restée remarquablement constante elle est d'ailleurs identique à la moyenne des valeurs déterminées, presque chaque année, depuis 1877, c'est-à-dire depuis 14 ans entre les deux observateurs B et D.

» Mais les différences des deux valeurs de chacune des équations B — HT et HT — L semblent indiquer chez l'observateur L une variation d'équation personnelle assez notable.

» La différence des équations personnelles moyennes deux à deux donne

$$B - HT = + 0^s, 37,$$

$$B - HT = + 0^s, 35.$$

L'accord de ces deux valeurs montre que l'influence des erreurs systématiques des quatre chronographes pendant les échanges est très petite et peut être très négligée. Les divergences des valeurs trouvées pour la longitude n'en peuvent donc provenir.

» Dans le but d'en rechercher l'origine, on a fait intervenir l'observateur « Standard » de Greenwich (AD). La pendule « Standard » de l'Observatoire de Greenwich enregistrait, par l'intermédiaire d'un relai distributeur, intercalé dans le circuit de l'Observatoire, la seconde sidérale sur les deux chronographes de la longitude. La correction de cette pendule, donnée par AD, a été comparée chaque jour aux corrections trouvées par les deux observateurs de Greenwich.

» On a obtenu, par cette comparaison, les nombres suivants :

TABLEAU II.

Dates.	AD — HT.	AD — B.	AD — L.	AD — D.
SEPT. 30.....	°	°	— 0,16	+ 0,23
OCT. 1.....			0	+ 0,37
3.....			+ 0,08	+ 0,32
5.....			+ 0,24	+ 0,42
11.....	— 0,12	+ 0,29		
13.....	— 0,23	+ 0,37		
14.....	— 0,07	+ 0,45		
15.....	+ 0,03	»		
17.....	— 0,04	+ 0,33		
20.....	— 0,05	+ 0,31		
21.....	+ 0,04	+ 0,44		
23.....			+ 0,49	+ 0,47

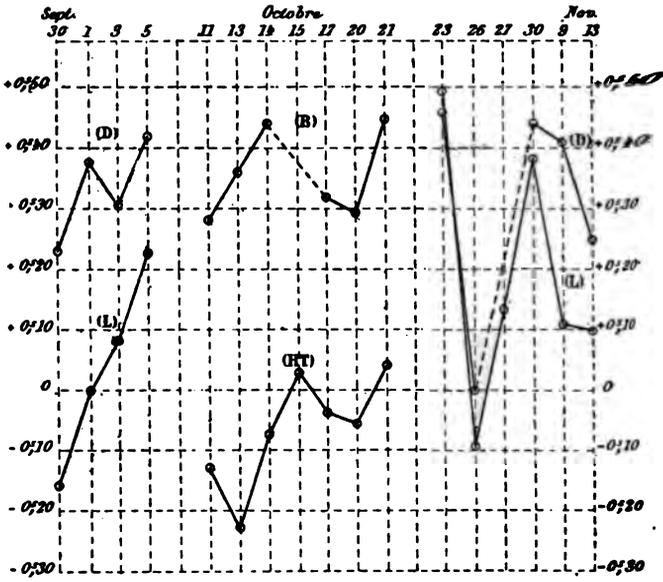
Dates.	AD - HT.	AD - B.	AD - L.	AD - D.
OCT. 26.....	°	°	-0,07	°
27.....			+0,15	»
30.....			+0,38	+0,46
Nov. 9.....			+0,12	+0,42
13.....			+0,11	+0,26
Moyennes.....	-0,06	+0,37	+0,13	+0,33

» Prenant les moyennes de ces nombres pour chaque observateur comme la mesure de son équation personnelle avec AD, on a calculé, au moyen des échanges de signaux enregistrés sur les chronographes, la valeur de la longitude par la comparaison des heures observées d'une part à Greenwich par AD, et d'autre part à Paris, successivement par HT, L, B et D. On a trouvé :

TABLEAU III.

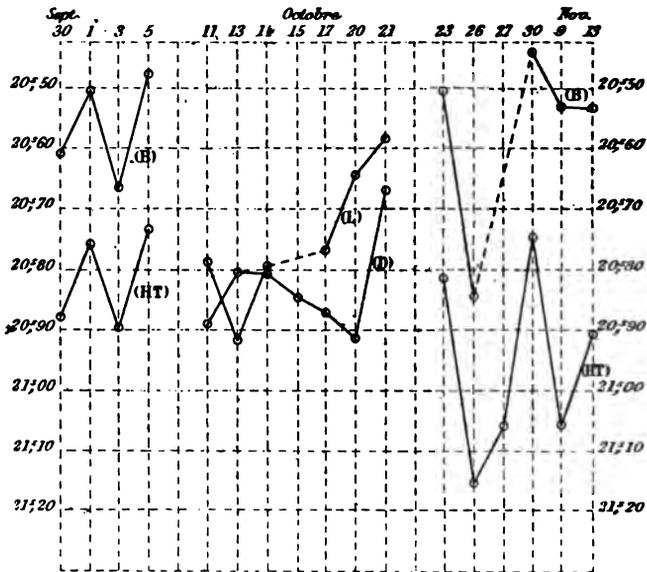
Dates.	Longitudes déterminées par			
	HT et AD.	B et AD.	L et AD.	D et AD.
SEPT. 30.....	20,89	20,62		
OCT. 1.....	20,77	20,52		
3.....	20,90	20,67		
5.....	20,73	20,49		
11.....			20,77	20,88
13.....			20,92	20,81
14.....			20,79	20,80
15.....			»	20,85
17.....			20,77	20,87
20.....			20,65	20,91
21.....			20,58	20,66
23.....	20,81	20,52		
26.....	21,14	20,84		
27.....	21,04	»		
30.....	20,74	20,49		
Nov. 9.....	21,06	20,58		
13.....	20,91	20,58		
Moyennes.	20,90	20,59	20,75	20,83
Équat. pers.	- 0,06	+ 0,37	+ 0,13	+ 0,33
Long. concl.	20,84	20,96	20,88	21,16

Fig. 1.



Équations personnelles avec AD.

Fig. 2.



Longitudes avec AD.

» C'est ainsi que HT et L paraissent s'accorder entre eux et que D et B semblent diverger de $0^{\circ}, 2$.

» En examinant de plus près les deux Tableaux précédents, nous avons été conduits à construire les deux courbes ci-contre représentant, la première, les équations personnelles, calculées comme ci-dessus, des observateurs de Greenwich avec AD, la seconde, les valeurs qui en sont déduites pour la longitude.

» Ces courbes affectent une allure remarquablement parallèle, et les quatre ordonnées présentent à la fois les mêmes variations systématiques, variations qui atteignent jusqu'à près de $0^{\circ}, 6$ d'un jour à l'autre.

» Il n'y a, à notre avis, que deux manières d'expliquer ces variations.

» Ou bien elles proviennent des variations mêmes de l'observateur AD, ce qui n'est admissible pour personne, ou bien elles proviennent de la variation journalière, accidentelle, d'un organe intercalé entre la pendule de Greenwich et les chronographes, et cet organe n'est autre que le relai distributeur, qu'on était obligé de régler chaque jour, et dont l'influence a, par suite, chaque jour, été différente, comme on s'en convainc facilement d'ailleurs, en examinant les variations inadmissibles des nombres contenus dans les Tableaux II et III.

» Cela étant, le calcul précédent n'est plus légitime, car l'équation personnelle moyenne déterminée par rapport à AD pour un observateur, pendant son séjour à Greenwich, renferme un élément variable indépendant de l'observateur et ne peut lui convenir lorsqu'il s'est transporté à Paris.

» L'équation personnelle réelle de AD avec l'observateur de Paris (HT, B, L, D) peut être cependant calculée pour chaque jour en ajoutant à l'équation personnelle déterminée ce jour entre AD et l'observateur de Greenwich (L, D, HT, B) Tableau II l'équation personnelle moyenne $HT - L, B - D, B - L, HT - D$, établie à la suite du Tableau I.

» Comparant de cette façon l'heure déterminée par AD à Greenwich avec l'heure déterminée à Paris, on obtient :

www.libtool.com TABLEAU IV.

Dates.	Longitudes déterminées avec AD			
	par HT.	par B.	par L.	par D.
SEPT. 30.....	20,55	20,99		
OCT. 1.....	20,59	21,03		
3.....	20,80	21,13		
5.....	20,79	21,05		
11.....			20,83	21,03
13.....			20,87	21,04
14.....			20,90	21,11
15.....			»	»
17.....			20,91	21,06
19.....			20,72	21,04
20.....			20,78	21,08
21.....			20,80	20,96
23.....	21,12	21,11		
26.....	20,89	20,98		
27.....	21,01	»		
30.....	20,94	21,09		
Nov. 9.....	21,00	21,14		
13.....	20,84	20,98		
Moy ..				
{ 1 ^{re} période.	20,68	21,05		
{ 2 ^e période.			20,83	21,09
{ 3 ^e période.	20,97	21,06		

» L'écart entre les valeurs françaises et anglaises subsiste, mais les nombres moyens de B et D sont identiques, une fois l'influence du relai éliminée, tandis que la variation d'équation personnelle de L est de nouveau mise en évidence et fait croire à chaque période les nombres obtenus par HT et par L.

» Ce sont maintenant les valeurs françaises qui s'accordent entre elles, tandis que les nombres anglais sont discordants. Un tel résultat suffit pour enlever toute confiance aussi bien dans l'une que dans l'autre des valeurs de la longitude.

» Comme l'a fort bien dit l'Astronome royal, il est nécessaire de recommencer la mesure et le plus tôt sera le mieux.

« Il faudra, dans une nouvelle détermination, supprimer le relai distributeur, donner à chaque chronographe une pendule séparée, et surtout s'efforcer de s'affranchir des erreurs instrumentales (telles que mouvements des objectifs, irrégularités des fioles des niveaux et flexions anormales) qui se sont manifestées, tant dans les instruments anglais que dans l'instrument français de Greenwich. Il y aurait, croyons-nous, une garantie sérieuse à échanger les instruments comme les observateurs. Il faut encore noter, comme l'a fait M. Turner dans l'*Observatory*, que les deux seules longitudes, faites parallèlement et simultanément par deux couples d'observateurs différents, ont donné toutes deux des résultats discordants. Peut-être la précision qu'on est habitué à attribuer aux longitudes télégraphiques n'est-elle pas réelle. Les fermetures des polygones, jusqu'à présent publiées, tendraient à le faire supposer. »

Après avoir donné lecture de la Communication du colonel Bassot et du commandant Defforges à la Société Royale astronomique, M. Turner dit (*Observatory*, numéro d'avril) qu'il a mentionné dans une Note, lue au mois de janvier, une discordance entre les résultats obtenus par les observateurs anglais et français. Quatre observateurs prirent part au travail, deux Anglais et deux Français, et pendant les opérations les signaux s'échangèrent d'une manière satisfaisante. On trouva ensuite que les déterminations du temps ne s'accordaient pas aux deux stations, qu'en fait l'équation personnelle des observateurs à Paris paraissait modifiée quand ils se transportaient à Greenwich, pour reprendre sa valeur primitive après le retour à Paris. A ce propos, dans une Note antérieure, il a signalé un fait et énoncé une opinion. Le fait est qu'après un examen très soigneux des réductions, rien ne put être découvert pour expliquer la difficulté qu'une différence curieuse entre les déterminations d'inclinaison par le nadir et par le niveau, dans le cas de l'instrument français employé à Greenwich. Après avoir remarqué que les déterminations faites au moyen du nadir donnaient des résultats concordants, il semble qu'il ait été amené à exprimer trop fortement son opinion que les autres déterminations (au moyen du niveau) étaient inexactes. Les observateurs français différant d'appréciation ont estimé qu'il convenait de prendre la moyenne des deux modes de déterminations comme ils l'ont fait. Ils font aussi remarquer que l'équation personnelle des observateurs anglais a varié pendant les opérations, comme c'était naturel, l'usage des petits instruments étant nouveau pour eux, habitués au cercle méridien; et que les variations dans l'équation personnelle jettent quelque doute sur les résultats. Tels sont les points principaux de la Note communiquée à la Société par les observateurs français. Ils ont certainement fortifié leur position en appelant l'atten-

tion sur les erreurs accidentelles très sensibles que montre la comparaison des résultats avec les observations faites au cercle méridien de Greenwich, et il n'y a pas de doute que l'erreur probable d'une telle comparaison est forte, plus forte peut-être qu'il n'avait été supposé. La détermination du temps n'était pas une chose aussi simple qu'on pouvait le croire à première vue, car des déterminations avec deux ou trois instruments côte à côte n'ont pas donné des résultats concordants, comme on aurait pu s'y attendre. Les observateurs français ont estimé que ces différences étaient trop fortes pour justifier une combinaison des résultats et pour en condamner une autre. Ils ont aussi objecté à la comparaison avec le cercle méridien qu'un relai additionnel était interposé entre les observations du cercle méridien et celles de la longitude et qu'il ne paraissait pas avoir fonctionné d'une manière constante. Le relai a été contrôlé à diverses reprises et n'a jamais été trouvé en défaut, de sorte que, pour lui (M. Turner), il n'y a pas lieu de soupçonner ce relai. Et, de plus, le relai étant commun aux deux instruments à Greenwich n'aurait pas pu produire de différence. L'objet principal de la réponse de M. Turner (*Monthly Notices*), numéro d'avril a été d'appeler de nouveau l'attention sur le fait que les séries de longitudes pourraient être rendues concordantes par la simple supposition que les déterminations de l'erreur d'inclinaison au moyen du nadir sont à considérer comme plus correctes.

Les paroles suivantes de l'Astronome royal résument la discussion : Les membres de la Société, ici présents, peuvent peut-être penser que ces matières sont bien techniques, mais elles sont très importantes, ces discussions nous seront d'un grand secours pour les déterminations de longitudes dans l'avenir. C'est pourquoi j'accueille très volontiers les remarques des observateurs français. J'espère que l'année prochaine, de concert avec eux, nous pourrions arriver à une nouvelle détermination qui donnera, j'en ai la confiance, des résultats plus concordants et plus sûrs. Différentes sources d'erreurs ont été révélées par les discussions, et l'on se mettra en garde contre elles dans l'avenir. En ce qui concerne le relai, nous avons discuté avec soin notre programme avec les observateurs français avant de commencer le travail, mais sans avoir égard à ce fait que, tandis que nous employons nos chronographes en établissant les contacts, les observateurs français procèdent par interruption. Dès que les observateurs français furent arrivés, nous vîmes que pour travailler avec leurs chronographes il fallait intercaler un relai. J'ai discuté depuis la question de la détermination du temps avec le commandant Delforges et nous sommes arrivés à la conclusion qu'il sera préférable que chaque série d'observateurs eût ses pendules. Les difficultés seront, il faut l'espérer, écartées de cette manière. J'estime

comme M. Turner, que le désaccord entre le cercle méridien et les observations de longitude s'expliquent difficilement par des variations dans la marche du relai, mais encore y a-t-il là la possibilité d'une cause d'erreur.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n° 3031-3035.

Comstock (George). — Variations de latitude constatées à l'Observatoire Washburn.

M. George C. Comstock a soumis à une discussion minutieuse les observations faites au cercle méridien de l'Observatoire Washburn, à Madison, de 1883 à 1887, afin de voir s'il s'y manifeste quelques indices de variations périodiques de la latitude, analogues à celles qui ont été constatées dans ces derniers temps, à Berlin, à Poulkova et ailleurs. Malheureusement, les matériaux sur lesquels devait porter la discussion sont d'une nature assez hétérogène, les observations spéciales, commencées par M. Tatlock en 1883, pour la détermination de la latitude par des groupes d'étoiles symétriques, ayant été bientôt interrompues par les déterminations d'étoiles fondamentales pour les zones australes de la Société astronomique. De 1885 à 1887, le système d'observations primitif a été repris par M. Updegraff et miss Lamb. Les latitudes reposent principalement sur les déclinaisons du *Jahrbuch*, mais l'on a fait aussi des séries d'observations de la Polaire.

La nouvelle discussion de tous ces matériaux, en grande partie déjà publiés, a montré qu'on ne pouvait utiliser pour la latitude que les observations distribuées d'une manière plus ou moins symétrique des deux côtés du zénith, et accompagnées d'une détermination du nadir. M. Comstock a ensuite formé des moyennes qui embrassent toujours des intervalles de quelques semaines. Les observations des cinq années 1883-1887 ont fourni vingt moyennes, qui laissent reconnaître une période annuelle, et qui sont (assez médiocrement) représentées par la formule

$$\lambda = 43^{\circ}4'36'',54 + 0'',26 \sin(\odot + 73^{\circ}),$$

les écarts dépassant quelquefois $\pm 0'',25$.

M. Comstock montre que les variations constatées ne peuvent dépendre des ascensions droites des étoiles employées, qu'elles ne sont pas dues davantage à une erreur de la constante de l'aberration, ni aux variations de la réfraction ou de la température. La seule explication plausible est

celle fondée sur un déplacement de l'axe de rotation à la surface de la Terre. Pour Madison, le maximum de la latitude arrive vers le 6 avril. En admettant une différence de phase d'environ quinze jours pour chaque heure de longitude, et que les stations occidentales sont en avance sur les stations orientales, la formule donnerait, pour Berlin et Poulkova, les résultats suivants :

		Observations.	Calcul.
Berlin	1884,32-1884,70.....	—0,23	—0,15
»	1885,31-1884,70.....	—0,44	—0,16
Poulkova	1885,23-1884,70.....	—0,32	—0,38
»	1885,31-1884,70.....	—0,33	—0,27

Cette comparaison montre que les résultats obtenus à Madison s'accordent *grosso modo* avec ceux de Berlin et de Poulkova. M. Comstock trouve aussi que les latitudes observées à Poulkova de 1877 à 1885 s'accordent beaucoup mieux entre elles lorsqu'elles sont corrigées de l'inégalité annuelle indiquée par la formule. Il trouve encore que la latitude de Madison est sujette à une faible variation séculaire; elle augmenterait de 0",05 par an. Cette augmentation est confirmée par les observations faites avec la lunette zénithale depuis 1873.

Bauschinger. — Observations de comètes faites au réfracteur de l'Observatoire de Munich.

Bidschof. — Éphéméride de la comète 1890 II.

Luther (R.). — Éléments et éphéméride de la planète (247) Eucrate.

Weiler. — Rectifications concernant deux Mémoires antérieurs.

Barnard. — Sur la nouvelle nébuleuse voisine de Mérope.

M. Barnard répond aux remarques de M. Pritchard; il pense toujours que l'objet en question méritait d'être signalé aux astronomes.

Lehmann-Filhès. — Sur deux cas particuliers du problème des trois Corps.

Les solutions des cas particuliers traités par Laplace sont susceptibles d'être généralisées. Au lieu de trois corps placés aux sommets d'un triangle équilatéral, on peut en considérer quatre, placés aux som-

mets d'un tétraèdre régulier; il faut qu'ils décrivent des trajectoires rectilignes, passant par leur centre de gravité commun. Dans ces conditions, le problème peut être complètement résolu. On peut de même, au lieu de trois points matériels placés en ligne droite, en considérer un nombre quelconque (n). M. Lehmann-Filhés montre que les équations de condition admettent des racines réelles. Les points pourront décrire des sections coniques semblables.

Weyer. — Nouvelles remarques sur les orbites héliocentriques des satellites.

M. Weyer complète les renseignements bibliographiques relatifs à cette question (voir *Bulletin*, VIII, p. 36); ils prouvent que certaines erreurs ont la vie dure.

Schur (W.). — Sur la parallaxe de β Orion.

L'année dernière, M. Gill avait trouvé, pour cette étoile comparée à deux étoiles de 8^e grandeur, une parallaxe de $-0^s,17$. M. Schur, en répétant les mesures avec l'héliomètre de Gætingue, a obtenu une faible parallaxe positive.

Une Communication postérieure de M. Schur nous apprend que la parallaxe négative de M. Gill provient d'une erreur de réduction; la parallaxe de β Orion est, en réalité, insensible.

Krueger. — Notice nécrologique sur E. Schœnfeld.

Né en 1828, Edouard Schœnfeld entra seulement dans sa soixante-troisième année, quand la mort est venue l'enlever brusquement à la Science et à ses nombreux amis. Il avait commencé sa carrière scientifique comme chimiste; en 1852, Argelander réussit à le gagner à l'Astronomie, à laquelle il devait rendre de si grands services. C'est à cette époque qu'il fut chargé, avec M. Krueger, de l'exécution de cet inventaire du ciel, connu sous le nom de *Durchmusterung*. De 1859 à 1875, Schœnfeld resta à Manheim, où il se mit à observer des étoiles variables, des nébuleuses, etc. Appelé ensuite à la direction de l'Observatoire de Bonn, il entreprit, sans tarder, la revision du ciel austral, qu'il lui a été donné d'achever avant de mourir. Il était, en outre, chargé du cours d'Astronomie à l'Université de Bonn, et la Société astronomique perd en lui un secrétaire plein de zèle, bienveillant, obligeant, et d'une rare compétence. M. Schœnfeld est mort le 1^{er} mai, après une assez longue maladie.

Schœnfeld. — Sur l'étoile nouvelle de l'année 1006.

Dans cette Note, la dernière qui soit sortie de sa plume, M. Schœnfeld discute les renseignements fournis par les chroniques sur cette étoile nouvelle, qui probablement ne le cédait pas en éclat à la *Nova* de 1572.

Pickering. — Sur la découverte des étoiles doubles par l'étude de leurs spectres.

Il arrive souvent que les deux composantes d'un couple sont de couleur différente, et que leurs spectres appartiennent à deux types opposés, l'un analogue au spectre du Soleil, l'autre caractérisé par la prédominance des raies de l'hydrogène. Si les deux étoiles sont trop rapprochées pour être séparées par les moyens ordinaires, on peut encore espérer d'en reconnaître la duplicité par une étude attentive de leurs spectres superposés. Miss A.-C. Maury a rencontré, parmi les spectres des étoiles d'un certain éclat, toutes les transitions possibles du premier type au second, et l'on peut se demander si, dans tous ces cas, il s'agit de spectres combinés, ou seulement d'altérations d'un spectre simple, dues à des circonstances physiques. L'hypothèse de la duplicité serait confirmée par des déplacements périodiques des raies de l'hydrogène. En examinant à ce point de vue quatre photographies du spectre de Procyon, on a constaté que les longueurs d'onde des raies G et *h*, déduites de la comparaison avec six autres raies, étaient respectivement 434,09 et 410,22 au lieu de 434,06 et 410,19, valeurs que fournirait la carte du spectre solaire de H.-A. Rowland. L'écart de 0,03 correspond à une vitesse de translation de 20^{km} par seconde; mais il n'est pas démontré qu'il ne puisse s'expliquer d'une autre manière. On ne saurait donc affirmer encore la duplicité de l'étoile en question. Miss Maury a constaté des particularités analogues pour une dizaine d'étoiles, dont plusieurs sont notoirement doubles, tandis que pour d'autres (τ Persée, ζ Cocher, etc.) la preuve reste à faire.

Ambrohn. — Détermination du diamètre de Mercure.

Une série de mesures effectuées au mois de mai 1890 avec l'héliomètre de Göttingue a donné en moyenne pour le diamètre de Mercure

$$6'',597 \pm 0'',050.$$

Le diamètre de cette planète a été mesuré assez souvent à l'occasion de ses passages sur le Soleil, mais rarement en dehors des passages; les

seules tentatives de ce genre que M. Ambronn ait pu découvrir sont celles de MM. Kaiser et de Ball. Voici d'ailleurs les résultats obtenus par divers astronomes depuis 1832, époque à laquelle remontent les mesures de Bessel.

Micromètres à double image.

Passages de Mercure	}	1832 Bessel	6,679
		1868 Wolf (Bonn).....	6,229
		1868 Plummer	6,07
		1868 Copeland.....	6,644
		1878 Todd.....	6,604
En dehors du ☉	}	1878 Schur et Hartwig.....	6,802
		1865 Kaiser.....	6,606
		1890 Ambronn.....	6,597

Micromètres filaires, etc.

Passages de Mercure	}	1848 Hind	6,268
		1861 Schmidt.....	6,877
		1861 Hartnup.....	6,83
		1868 Maclear	5,65
		1868 Börgen.....	6,48
		1878 Krueger.....	6,205
		1878 Bruhns.....	5,900
		1878 Peter.....	5,968
		1878 Lohse.....	6,467
		1878 Copeland.....	5,916
		1878 Carpenter.....	6,942
		1878 Maxwell Hall.....	6,537
En dehors		De Ball.....	7,456

On voit que l'accord de ces mesures laisse beaucoup à désirer.

Wislicenus. — Étude physique de Mars pendant l'opposition de 1890.

La dernière opposition n'a pas été très favorable aux observations, à cause des fortes déclinaisons australes de la planète. M. Wislicenus a pu, néanmoins, l'observer une vingtaine de fois, avec les deux réfrac-

teurs de Strasbourg, et déterminer les positions d'une série de taches. Une planche lithographiée qui accompagne sa Note indique les points de la surface auxquels se rapportent les mesures.

Ristenpart. — Éléments de la comète 1890 IV.

Harzer. — Résultats déduits des observations méridiennes faites à l'Observatoire de Gotha.

M. Harzer donne une liste de positions moyennes d'étoiles fixes qui se rencontrent dans le catalogue de Tobie Mayer, mais non dans celui de Bradley. Elles ont été observées par M. E. Becker, de 1883 à 1887, à la demande de M. Auwers, en vue de la détermination de leurs mouvements propres. Les positions sont données pour 1885, 0. Les observations ont été faites sous la forme de zones, en mêlant aux étoiles de Mayer un grand nombre de fondamentales.

Spitaler. — La comète 1889 I dans l'opposition de 1891.

Le 1^{er} mai, M. Spitaler a pu retrouver cette comète avec le grand réfracteur de Vienne; la durée de la visibilité dépasse ainsi 970 jours.

Galle (J.-G.). — Sur quelques phénomènes d'apparence cométaire.

Les bolides laissent parfois derrière eux des queues blanchâtres qui persistent pendant plusieurs minutes; on en a vu qui n'avaient pas disparu au bout d'une demi-heure. Il est possible que ces lucurs aient été quelquefois prises pour des comètes. On s'expliquerait ainsi certaines observations d'un caractère douteux.

Observations de planètes et de comètes, etc.

R. R.



MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

TRANSFORMATION DES MIRES MÉRIDiennes,

PAR M. GRUEY.

Dans les observations méridiennes, l'usage des mires s'est transformé et amélioré peu à peu. On n'a d'abord employé qu'une mire, placée au nord ou au sud de la lunette suivant la configuration du terrain. A l'origine, cette mire unique consistait simplement en un signal, tel qu'une croix tracée dans le méridien de la lunette sur un pilier massif ou un rocher lointains. La distance du signal, au minimum de 4^{km} ou 5^{km}, permettait de regarder les rayons lumineux, qu'il envoyait dans la lunette, comme parallèles entre eux et à une direction terrestre invariable. On avait la collimation de la lunette en la pointant sur cette direction, immédiatement avant et après son retournement sur ses coussinets; on rectifiait ensuite, s'il y avait lieu, l'azimut de la lunette en amenant, sur le signal, son fil de collimation nulle.

Le signal lointain n'étant pas visible la nuit, ni même le jour, par les temps brumeux, on a été bientôt conduit à le remplacer par une mire rapprochée, formée d'une lentille à long foyer scellée sur un pilier voisin de la lunette, et d'une croisée de fils scellée au foyer de la lentille, sur un autre pilier plus éloigné, de telle sorte que l'axe optique de cette mire rencontre sensiblement l'axe de rotation de la lunette, en son milieu, à angle droit.

Pour pointer cette mire à un instant quelconque du jour ou de la nuit, il suffit d'éclairer la croisée des fils par une lampe quelconque. La distance des piliers est allée en grandissant de 20^m à 50^m et même 100^m, pour mieux assurer la stabilité de l'axe optique de la mire contre les variations du terrain et de la température. On a pu dès lors instituer des observations régulières et quotidiennes de la mire, pour les substituer avantageusement, dans la détermination de l'azimut de la lunette, aux observations de la polaire dont les images sont souvent diffuses, ondulantes par certains états de l'atmosphère, lorsqu'elles ne sont pas supprimées par les nuages ou brumes. Les observations irrégulières et discontinues de la

polaire ne servent plus aujourd'hui qu'à la détermination d'une valeur moyenne de l'azimut de la mire, pendant tout le temps que cet azimut semble demeurer constant.

L'azimut de la lunette est donc déterminé par les observations combinées de la polaire et de la mire; sa collimation se détermine toujours par un retournement précédé et suivi d'un pointé sur la mire.

Si, dans le cours d'une période d'observations privée de la polaire, le pointé sur la mire vient à subir une variation brusque, il est probable, mais il n'est pas certain, que cette perturbation doit être attribuée à la lunette plutôt qu'à la mire. Ce cas douteux est assez rare; pour le résoudre, on ne se contente plus maintenant d'une seule mire; on en plante deux, l'une au nord, l'autre au sud de la lunette. On comprend que ces deux mires se contrôlent: si la perturbation du pointé d'une mire est due à la lunette, elle se retrouvera avec un signe contraire sur l'autre mire. La réciproque est vraie, à moins que le système des deux mires, prises en bloc, n'ait varié en azimut par suite d'un mouvement du terrain de grande amplitude, ce qui est invraisemblable sans toutefois être impossible; si la perturbation ne se constate que sur une seule mire on pourra l'attribuer à cette mire et n'employer que les pointés de l'autre.

Lorsqu'une lunette méridienne est pourvue de deux mires, l'une au nord, l'autre au sud, on détermine encore ordinairement sa collimation par un retournement sur l'une ou l'autre mire. Ce retournement était facile autrefois avec les premières lunettes méridiennes, petites, légères, non surchargées de grands cercles muraux, ni flanquées d'une douzaine de microscopes. Aujourd'hui le retournement des grands cercles méridiens lourds et compliqués est une opération délicate, difficile et même dangereuse aussi bien pour l'observateur que pour l'instrument; il est à la fois imprudent et nécessaire de la renouveler souvent pour bien suivre l'erreur de collimation. Ce grave inconvénient a conduit les astronomes à abandonner les mires pour mesurer cette erreur dans une grande lunette, et à leur substituer deux petits collimateurs méridiens, l'un au nord, l'autre au sud, dont les axes optiques sont mis en coïncidence à travers le cube ouvert de la lunette. En pointant cette lunette, sans la retourner, successivement sur chaque colli

nateur, la moyenne des pointés donne le fil de collimation nulle.

Chaque collimateur en fonction est intercalé, dans la salle méridienne, entre une mire et la lunette; il s'opposerait aux pointés ordinaires de la mire, s'il n'était enlevé dès que la collimation est mesurée, pour être replacé lors d'une mesure suivante. Cette répétition continuelle de l'installation minutieuse des collimateurs est un premier inconvénient.

Pour s'intercaler ainsi, entre la lunette et une mire, les collimateurs doivent avoir en général une distance focale notablement inférieure à celle de la lunette. De là résulte un deuxième inconvénient, plus grave : la coïncidence des axes optiques des deux collimateurs n'est établie qu'avec une précision inférieure à celle que la lunette fournit dans le pointé d'une direction.

Il semble que ces deux inconvénients peuvent être supprimés du même coup, en transformant en collimateurs les mires nord et sud elles-mêmes. Cette transformation est tout indiquée. Il suffit de placer au foyer de chaque mire, ou de l'une d'elles seulement, un véritable micromètre au lieu d'une simple croisée de fils. Ce micromètre permettra de faire coïncider les axes optiques des deux mires avec une grande précision, ou mieux encore de mesurer leur différence d'azimut, c'est-à-dire, en un mot, de faire jouer à ces mires le rôle amélioré des petits collimateurs usités jusqu'ici. Une croisée de fils fixes dans chaque micromètre conservera d'ailleurs aux mires leur ancien rôle.

Chaque micromètre sera donc formé d'une croisée de fils fixes rectangulaires, inclinés de 45° sur l'horizon et d'un fil vertical f , mobile à l'aide d'une vis micrométrique. On pourra prendre des fils fins de platine.

Chaque jour on pointera une ou plusieurs fois les deux croisées de fils avec la lunette méridienne à la manière ordinaire et, immédiatement après, on déterminera l'angle azimutal des axes optiques des deux mires, en pointant successivement, au foyer de chacune d'elles, sa croisée de fils fixes et l'image de la croisée de l'autre.

Ces pointés quotidiens, réunis aux observations de la polaire, permettront de connaître, pour chaque jour, l'azimut et la collimation de la lunette.

En outre, on réalisera ainsi deux avantages particuliers. En pointant une mire sur l'autre, on saura si elles sont entre elles en

repos ou en mouvement relatif et on possédera un élément de plus, soit pour apprécier leur stabilité, soit pour résoudre le cas douteux qui vient d'être rappelé.

On pourra, sans doute, étudier, dans sa portion utilisée, avec une grande facilité, la vis micrométrique d'ascension droite V de la lunette par la méthode bien connue de Bessel, en disposant dans le micromètre de la mire un système vertical de trois fils d'araignée, mobiles avec le fil de platine f , et distants entre eux de quantités respectives répondant à un tour et à une fraction de tour de V . Ces fils d'araignée se verront et se pointeront très bien dans le champ de la lunette.

On pourra étudier de même la portion utile de la vis V' de déclinaison de la lunette, avec un deuxième système de vis et fils disposés dans le micromètre perpendiculairement au premier ou bien après avoir fait tourner de 90° , à l'aide d'un cercle de position, ce premier système, s'il est unique.

On pourrait même, une fois pour toutes, et avant de fixer définitivement le micromètre de la mire, étudier ainsi les diverses portions des vis V et V' , en faisant glisser ce micromètre, sur une platine horizontale, de l'est à l'ouest, de petites quantités correspondantes à ces diverses portions.

Enfin, dans le cas où les images ne seraient pas ondulantes, on pourrait renverser la méthode de Bessel et pointer, dans le micromètre de la mire, les fils mobiles de la lunette s'avancant en progression arithmétique. La vis v de la mire ayant été étudiée préalablement ferait connaître celle de la lunette avec une précision supérieure, marquée par le rapport des distances focales de la mire et de la lunette. L'étude préalable de v pourrait d'ailleurs se faire par la méthode de Bessel avec un couple de fils mobiles disposés dans le micromètre de la lunette et vus dans celui de la mire.

En résumé, on étudierait les vis de la lunette avec celles des mires et inversement.

J'ai fait un premier essai avec les deux mires méridiennes de Besançon, longues environ de 50^m et 100^m , en plaçant provisoirement au foyer de chacune d'elles les deux micromètres de l'équatorial droit. Les fils éclairés de l'un sont visibles dans l'autre, à travers le cube ouvert de la lunette méridienne, sans qu'il soit nécessaire d'enlever les miroirs d'éclairage du champ de celle-ci.

Les images de ces fils sont nettes, sans coloration aucune, ce qui indique l'absence pratique d'aberration de sphéricité et de réfrangibilité. Il en est de même des images des fils de la lunette, vues au foyer d'une mire et inversement des images des fils d'une mire vues au foyer de la lunette. Ces dernières sont, toutes choses égales d'ailleurs, les moins ondulantes lorsque l'air atmosphérique n'est pas en équilibre, mais toutes peuvent se pointer aisément et avec la même précision finale en majorant le nombre de pointés pour les images les plus ondulantes.

Après avoir supprimé le retournement de la lunette, il semble aussi qu'on pourrait supprimer le niveau à bulle d'air, dont l'emploi exige tant de précautions indispensables, et le remplacer avantageusement par un pointé nadiral du fil mobile d'ascension droite qui donnerait immédiatement l'inclinaison, la position du fil sans collimation étant déterminée tous les jours.

On supprimerait du même coup, comme inutile, la recherche de l'inégalité des tourillons.

Les praticiens connaissent les inconvénients et les avantages du retournement de la lunette, de l'emploi des petits collimateurs ordinaires, du nivellement avec une fiole en verre pleine d'éther et d'une bulle de vapeur; ils diront si les vues précédentes renferment quelque chose d'utile à tenter, capable de diminuer le travail sans altérer la précision des observations méridiennes.

ÉTUDES SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION;

PAR M. R. RADAU.

[Suite (1)].

12. Quand nous ferons d'autres applications des différences médianes, nous désignerons par la lettre M la moyenne $\frac{1}{2}\left(\Delta + \frac{\Delta}{1+\Delta}\right)$, représentée plus haut par D, et D représentera l'opération fictive $\frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta}}$. On aura $M = D\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$, et, pour unifier la notation

(1) Voir *Bulletin astronomique*, VIII, p. 275.

des différences successives, il suffira de diviser par $\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$ les développements où figurent $D^{2n+1}(o)$ ou $D^{2n}(\frac{1}{2})$.

Avant d'aller plus loin, il convient de faire une remarque qui peut paraître banale, mais qui n'est pas superflue. C'est qu'au lieu de la quantité y dont on connaît une série de valeurs (soit isolées, soit relevées sur un tracé graphique), on peut interpoler telle fonction de y qui s'y prête avec plus de facilité. On peut essayer y^2 , ou \sqrt{y} , ou $\log y$. Dans beaucoup de cas, surtout dans les problèmes de Physique ou de Statistique, c'est le logarithme qui est tout indiqué par le caractère général de la courbe. M. Merrifield insiste sur ce point, dans le Rapport que nous avons déjà cité, et dans une Note intitulée *Considerations respecting the translation of series of observations into continuous formulæ* (*Proc. R. Soc.*, nov. 1880). Il rappelle, à ce propos, le passage suivant de Stirling (*Methodus differentialis*, p. 88) : *Nam interpolatio non est temere suscipienda, sed ante exordium operis inquirendum est quænam sit series simplicissima, ex cujus intercalatione pendet ea seriei propositæ. Atque hæc præparatio est magna ex parte omnino necessaria, ut deveniamus ad conclusiones concinnas et elegantes.* C'est là aussi, je crois, le sens d'une remarque de M. Laisant sur la formule d'interpolation de Lagrange (*Bull. de la Soc. math.*, 1891, p. 111).

Dans le cas où la forme de la fonction de x est approximativement connue d'avance, on aura tout avantage à interpoler la différence $y - f(x)$, ou le rapport $\frac{f(x)}{y}$, ou $\log y - \log f(x)$.

Il y a encore une autre remarque à faire. La formule de Lagrange peut s'écrire

$$y = y_a X_a + y_b X_b + \dots$$

où les facteurs X s'annulent pour $x = a$, sauf X_a , qui se réduit à l'unité. En posant

$$F(x) = (x - a)(x - b) \dots (x - l) = (x - a)F_a(x),$$

on peut faire, avec Lagrange,

$$X_a = \frac{F_a(x)}{F_a(a)}.$$

Mais ce choix n'est pas le seul qu'on puisse faire; il est clair qu'on peut remplacer X_a par une fonction de X_a qui s'annule en

ème temps, ou plus généralement par le produit

$$X_a \frac{\theta(x)}{\theta(a)},$$

où $\theta(x)$ est un polynôme indéterminé, comme l'a fait M. Hermite dans une Note sur l'Interpolation (*Comptes rendus*, janv. 1859). Dans une lettre adressée à M. Borchardt (*Journal de Crelle*, t. 84, 1877), M. Hermite indique une autre généralisation de la formule de Lagrange, qu'il obtient en cherchant à représenter par un polynôme F du degré $n-1$, non seulement la fonction donnée $f(x)$, mais encore ses premières dérivées, de sorte que, par exemple, $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{n-1}(a)$ coïncident avec $F(a)$, $F'(a)$, ..., $F^{n-1}(a)$. On peut consulter, à ce sujet, une Note de M. V. Williot (*Bull. des Sciences math.*, octobre 1890).

Il y a quelques années, à propos d'un travail de M. Weyer (*Astr. Nachr.*, 2804), j'ai montré comment la formule de Lagrange se transforme quand le nombre des ordonnées y_n devient infini, et en particulier quand ces ordonnées forment une suite périodique où un groupe de m ordonnées se reproduit indéfiniment; les coefficients se changent alors en fonctions trigonométriques (voir *Bull. astr.*, t. IV, p. 515).

Mais je laisserai de côté l'interpolation par les séries trigonométriques, dont Lagrange, on le sait, s'est occupé à plusieurs reprises (*Recherches sur la manière de former des Tables des planètes d'après les seules observations*, 1772; *Œuvres*, t. VI, p. 507; *Sur les interpolations*, 1780; *Œuvres*, t. VII, p. 541). Il y aurait à citer la formule de Walbeck (*Corresp. astr.*, 1820), celle de Bessel (*Astr. Nachr.*, n° 136; 1828); puis la méthode que Le Verrier a développée dans le tome I des *Annales de l'Observatoire* (1855) et dont, peu de temps après, Encke a donné un exposé dans le *Jahrbuch* (1860).

Le problème a été résolu par Gauss, d'une manière beaucoup plus simple, dans le Mémoire posthume intitulé : *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (*Œuvres*, t. III, p. 265), où l'on trouve la formule

$$y = y_a \frac{\sin \frac{x-b}{2} \sin \frac{x-c}{2} \dots \sin \frac{x-l}{2}}{\sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a-c}{2} \dots \sin \frac{a-l}{2}} + \dots,$$

qui peut tenir lieu de la série

$$y = \alpha + \alpha' \cos x + \alpha'' \cos 2x + \dots \\ + \beta' \sin x + \beta'' \sin 2x + \dots$$

II.

13. Dans beaucoup de cas, la recherche des coefficients de la formule d'interpolation se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires.

L'introduction des déterminants est un excellent moyen pour simplifier la théorie de l'élimination; mais, lorsqu'il s'agit de calculs numériques, on préférera toujours le procédé ordinaire de l'élimination successive des inconnues. Ce procédé peut d'ailleurs être présenté sous une forme élégante, en suivant les prescriptions de Gauss ou celles de Cauchy.

Supposons d'abord qu'on ait à déterminer m inconnues x, y, z, \dots, t par m équations linéaires

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + \dots + H_1 t = F_1, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + \dots + H_2 t = F_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

dont nous représenterons l'une quelconque par l'équation

$$(I) \quad Ax + By + Cz + \dots + Ht = F.$$

On commence par éliminer x , en retranchant de chaque équation F la première F_1 , multipliée par le rapport $\frac{A}{A_1}$ des coefficients respectifs de x , et l'on obtient $m - 1$ équations de la forme

$$(II) \quad y \Delta B + z \Delta C + \dots + t \Delta H = \Delta F,$$

les différences premières Δ étant définies par les relations

$$\Delta A = 0, \quad \Delta B = B - \frac{A}{A_1} B_1, \quad \Delta C = C - \frac{A}{A_1} C_1, \quad \dots, \quad \Delta F = F - \frac{A}{A_1} F_1$$

de sorte que $\Delta B_1, \Delta C_1, \dots, \Delta F_1$ s'annulent évidemment. On élimine ensuite y entre les expressions $\Delta F_2, \Delta F_3, \dots, \Delta F_m$ dans les équations nouvelles du type

$$(III) \quad z \Delta^2 C + \dots + t \Delta^2 H = \Delta^2 F.$$

tions finales en nombre *égal* à celui des inconnues ; ce qui peut se faire de deux manières.

On peut, d'une part, en ajoutant les équations (4) après les avoir multipliées par des facteurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$, former un système de m équations linéaires tel que le système (1), et en déduire les équations finales (3). En partant de l'équation type

$$ax + by + cz + \dots + ht = f,$$

et nous servant de la notation de Gauss

$$(x\beta) = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n,$$

les *sommes pondérées* des équations primitives pourront s'écrire

$$(5) \quad \begin{cases} (\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + \dots = (\lambda f) = F_1, \\ (\mu a)x + (\mu b)y + (\mu c)z + \dots = (\mu f) = F_2, \\ (\nu a)x + (\nu b)y + (\nu c)z + \dots = (\nu f) = F_3, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

L'élimination successive de x , de y , de z , ... donne des séries d'équations telles que les suivantes

$$(6) \quad \begin{cases} (\mu b.1)y + (\mu c.1)z + \dots = (\mu f.1), \\ (\nu b.1)y + (\nu c.1)z + \dots = (\nu f.1), \\ \qquad \qquad \qquad (\nu c.2)z + \dots = (\nu f.2), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

où, d'après la notation de Gauss,

$$\begin{aligned} (\mu f.1) &= (\mu f) - \frac{(\mu a)}{(\lambda a)} (\lambda f), \quad \dots, \\ (\nu f.2) &= (\nu f.1) - \frac{(\nu b.1)}{(\mu b.1)} (\mu f.1), \quad \dots \end{aligned}$$

Avec la notation de Cauchy, qui représente par Δ, Δ^2, \dots de « espèces de différences finies de divers ordres », ces expressions deviennent

$$\begin{aligned} \Delta F_2 &= \Delta(\mu f) = (\mu f) - (\mu a) \frac{(\lambda f)}{(\lambda a)}, \\ \Delta^2 F_3 &= \Delta^2(\nu f) = \Delta(\nu f) - \Delta(\nu b) \frac{\Delta(\mu f)}{\Delta(\mu b)}, \end{aligned}$$

et il est visible qu'elles peuvent être mises sous la forme

$$\Delta F_1 = (\mu \Delta f), \quad \Delta^2 F_2 = (\nu \Delta^2 f), \quad \dots,$$

en posant

$$\Delta f = f - a \frac{(\lambda f)}{(\lambda a)}, \quad \Delta^2 f = \Delta f - \Delta b \frac{(\mu \Delta f)}{(\mu \Delta b)}, \quad \dots,$$

ce qui, à la vérité, modifie légèrement le sens du signe d'opération Δ .

Il faut se garder de confondre le symbole Δ , employé ici, avec celui des différences finies ordinaires, où $\Delta \cdot \Delta = \Delta^2$. Les Δ sont ici des coefficients d'élimination. Ainsi Δ^2 naît de l'élimination de x , y entre les équations

$$F = Ax + By + \dots,$$

$$F_1 = A_1x + B_1y + \dots,$$

$$F_2 = A_2x + B_2y + \dots,$$

et l'opération se fait comme si les autres inconnues n'existaient pas. En désignant par $[ab_1]$ le déterminant formé avec les éléments

ments $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$, on trouve

$$\Delta F = F - \frac{A}{A_1} F_1 = \frac{[FA_1]}{A_1},$$

$$\Delta^2 F = \Delta F - \frac{\Delta B}{\Delta B_2} \Delta F_2 = \frac{[FA_1 B_2]}{[A_1 B_2]},$$

$$\Delta^3 F = \Delta^2 F - \frac{\Delta^2 C}{\Delta^2 C_3} \Delta^2 F_3 = \frac{[FA_1 B_2 C_3]}{[A_1 B_2 C_3]},$$

et ainsi de suite. On voit que les Δ sont des fonctions symétriques des coefficients qui y sont contenus.

Les quantités $(\mu \Delta f)$, $(\nu \Delta^2 f)$, ... sont composées d'une manière analogue, les éléments des déterminants étant les coefficients (λf) , (μf) , ..., (λa) , (μa) , ..., (λb) , (μb) , ...

Il nous semble que l'emploi du signe Δ aide à régler la marche des opérations.

On se trouve ainsi conduit (comme l'a remarqué Bienaymé) au mode d'élimination fondé sur l'algorithme de Cauchy.

14. On peut, en effet, avec Cauchy, établir directement les équations finales sans passer par toute la série des expressions (5).

Pour cela, remarquons d'abord qu'en éliminant successivement x, y, z, \dots des équations (4), on peut écrire à la fois le système des relations approchées (où chaque ligne représente n équations)

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} xa + yb + zc + \dots + th = f, \\ y \Delta b + z \Delta c + \dots + t \Delta h = \Delta f, \\ z \Delta^2 c + \dots + t \Delta^2 h = \Delta^2 f, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ t \Delta^{m-1} h = \Delta^{m-1} f, \end{array} \right.$$

et le système d'équations définitives

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} x(\lambda a) + y(\lambda \Delta b) + z(\lambda c) + \dots + t(\lambda h) = (\lambda f), \\ y(\mu \Delta b) + z(\mu \Delta c) + \dots + t(\mu \Delta h) = (\mu \Delta f), \\ z(\nu \Delta^2 c) + \dots + t(\nu \Delta^2 h) = (\nu \Delta^2 f), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

qui se déduisent l'un de l'autre, ligne après ligne, les différences Δ étant formées comme il suit :

$$\Delta f = f - \frac{(\lambda f)}{(\lambda a)} a, \quad \Delta^2 f = \Delta f - \frac{(\mu \Delta f)}{(\mu \Delta b)} \Delta b, \quad \dots$$

La première des équations (8) est la somme pondérée des n équations contenues dans la première ligne de (7); combinée avec celles-ci, elle sert à former les n équations que représente la seconde ligne de (7), et dont la somme pondérée fournit la seconde équation du système (8). Celle-ci, à son tour, sert à déduire la troisième ligne de (7) de la seconde; cette troisième ligne fournit la troisième équation (8), et ainsi de suite.

Pour abréger, nous introduirons les notations nouvelles (1)

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{(\lambda f)}{(\lambda a)}, \quad \varphi' = \frac{(\mu \Delta f)}{(\mu \Delta b)}, \quad \varphi'' = \frac{(\nu \Delta^2 f)}{(\nu \Delta^2 c)}, \quad \dots \\ \Delta f = f - \varphi a, \quad \Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta b, \quad \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi'' \Delta^2 c, \quad \dots \end{array} \right.$$

(1) Il faut dire que la notation que nous avons adoptée n'est pas tout à fait celle de Cauchy, qui écrit, par exemple,

$$\Delta f = f - x(\lambda f), \quad x = \frac{a}{(\lambda a)};$$

mais les formules gagnent en symétrie par l'introduction des rapports φ .

qui entraînent ces formules d'opérations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (\lambda \Delta) = 0, & (\lambda \Delta^2) = 0, & (\mu \Delta^2) = 0, \\ (\lambda \Delta^2) = 0, & (\mu \Delta^2) = 0, & (\nu \Delta^3) = 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

On a, en effet, par définition,

$$(\lambda \Delta f) = (\lambda f) - \varphi(\lambda a) = 0, \quad \dots$$

En désignant toujours par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les rapports φ pour $f = a, b, c, \dots$, on trouve

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha = 1, & & \\ \beta = \frac{(\lambda b)}{(\lambda a)}, & \beta' = 1, & \\ \gamma = \frac{(\lambda c)}{(\lambda a)}, & \gamma' = \frac{(\mu \Delta c)}{(\mu \Delta b)}, & \gamma'' = 1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Delta a = 0, & & \\ \Delta b = b - \beta a, & \Delta^2 b = 0, & \\ \Delta c = c - \gamma a, & \Delta^2 c = \Delta c - \gamma' \Delta b, & \Delta^3 c = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots \end{array} \right.$$

le système (8) peut s'écrire

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y\beta + z\gamma + \dots + t\tau = \varphi, \\ \quad y + z\gamma' + \dots + t\tau' = \varphi', \\ \quad \quad z + \dots + t\tau'' = \varphi'', \\ \quad \quad \quad \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

et les formules (9) donnent immédiatement

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \varphi a + \varphi' \Delta b + \varphi'' \Delta^2 c + \dots, \\ \Delta f = \quad \quad \varphi' \Delta b + \varphi'' \Delta^2 c + \dots, \\ \Delta^2 f = \quad \quad \quad \varphi'' \Delta^2 c + \dots, \end{array} \right.$$

15. Le procédé d'élimination qui vient d'être exposé donne les équations finales pour la détermination des inconnues sous une forme très simple. Ainsi que l'a fait déjà remarquer M. Bienaimé, il convient également à la méthode des moindres carrés et à la méthode de Cauchy : la différence est dans le choix des facteurs λ, μ, ν, \dots qui servent à former les sommes pondérées des équations approximatives (τ).

La méthode des moindres carrés veut qu'on fasse $\lambda = a$, $\mu = b$, $\nu = c$, ... en d'autres termes, que l'on prenne pour les poids λ , μ , ν , ... les coefficients mêmes des inconnues. Ce choix est conforme aux principes du Calcul des probabilités (1).

De son côté, Cauchy, s'inspirant d'une règle ancienne, prend tous les facteurs égaux à ± 1 , le signe étant celui du coefficient de l'inconnue qui doit être éliminée la première, de sorte que, dans l'équation finale, cette inconnue a toujours pour coefficient une somme de termes positifs. Ainsi, dans le système (8), les coefficients (λa) , $(\mu \Delta b)$, $(\nu \Delta^2 c)$, ..., qu'il désigne par

$$S a, S' \Delta b, S'' \Delta^2 c, \dots,$$

représentent les sommes des *valeurs numériques* de a , Δb , $\Delta^2 c$, ... et l'on a

$$\begin{aligned} (\lambda a) &= S a = \Sigma \pm a, \\ (\mu \Delta b) &= S' \Delta b = \Sigma \pm \Delta b, \end{aligned}$$

le signe inférieur étant adopté toutes les fois que a , Δb , ... sont négatifs. Il en résulte donc que les dénominateurs des expressions (9) et (11) sont toujours des sommes de termes positifs et, par suite, aussi grands que possible (en les supposant obtenus par voie d'addition). Quant aux numérateurs

$$\begin{aligned} (\lambda f) &= S f = \Sigma \pm f, \\ (\mu \Delta f) &= S' \Delta f = \Sigma \pm \Delta f. \end{aligned}$$

le choix des signes y est tout indiqué, puisque les facteurs λ , μ , ν , ... se déterminent par les dénominateurs. Pour caractériser d'un mot cette dépendance, Yvon Villarceau, dans l'exposé qu'il a fait de la méthode de Cauchy, propose de nommer *dominante* la fonction qui règle les changements de signe dans les autres fonctions, et il appelle S , S' , S'' , ... les sommes *subordonnées* aux dominantes a , Δb , $\Delta^2 c$, ...

Par l'emploi de ces facteurs, dont chacun se réduit (au signe

(1) Ajoutons que, suivant une remarque de Jacobi, les valeurs des inconnues que l'on tire d'un système d'équations en nombre surabondant, par l'application de la méthode des moindres carrés, sont des moyennes pondérées des valeurs que l'on obtiendrait en formant, de toutes les manières possibles, des groupes d'équations en nombre strictement suffisant (*Journal de Crelle*, t. 22).

près) à l'unité, Cauchy obtient les valeurs de x, y, \dots pour lesquelles, dans un certain sens, « la plus grande erreur à craindre est la moindre possible. » Il n'en est pas moins vrai, comme on l'a fait remarquer avec raison, que ce choix des facteurs ne fournit pas, en général, les valeurs les plus probables. On se rapprocherait davantage du principe des probabilités en suivant la règle recommandée par Le Verrier (*Ann. de l'Obs.*, t. I, p. 135-137), qui revient à partager les équations en groupes d'après l'importance du coefficient de l'inconnue à éliminer, et à multiplier ces groupes par $0, \pm \frac{1}{10}, \pm \frac{2}{10}, \dots, \pm \frac{9}{10}, \pm 1$ (ou par $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 9, \pm 10$). Cette marche abrégée ne fait presque rien perdre de la précision du résultat. Il suffira même, bien souvent, de faire $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$ suivant le cas, en supprimant les équations où le coefficient de l'inconnue sera moindre que le tiers du plus grand coefficient analogue, et en prenant $\lambda = \pm 1$ pour les autres. M. Tisserand a justifié ce procédé par des considérations tirées du Calcul des probabilités (voir BRUNNOW, *Astronomie pratique*, p. 213).

16. Comme nous l'avons déjà dit, pour rendre les équations (4) exactes, il faut mettre $f - \varepsilon$ à la place de f et, par suite, écrire $\Delta f - \Delta \varepsilon$ au lieu de $\Delta f, \dots$. L'élimination de la dernière inconnue t du système (7), qui donnerait l'équation approximative $0 = \Delta^m f$ (puisque $\Delta^m h = 0$ par définition), donnera donc exactement

$$0 = \Delta^m f - \Delta^m \varepsilon, \quad \Delta^m f = \Delta^m \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $\Delta^m f$ sera d'autant plus petit que les équations (4) seront plus exactes (1).

Dès lors, si le nombre m des inconnues à déterminer n'est pas donné a priori (ce qui arrive, par exemple, si ce sont les coefficients d'une formule d'interpolation, destinée à représenter des valeurs observées f_1, f_2, \dots), on pourra se servir de l'algorithme du n° 14 pour en déterminer d'abord une, puis deux, trois, etc., jusqu'à ce que le nombre en soit assez grand pour rendre les résidus $\Delta^m f$ comparables aux erreurs d'observation.

(1) C'est Δ^m qu'il faut considérer, et non Δ^{m+1} , comme le fait Cauchy par inadvertance, dans les Notes de 1853.

On commencera par supposer

$$f = ax,$$

en faisant $y = 0, z = 0, \dots$, et le système (13) donnera

$$x = \varphi,$$

en première approximation. Dans la méthode de Cauchy, le rapport $\varphi = \frac{(\lambda f)}{(\lambda a)}$ devient

$$\varphi = \frac{Sf}{Sa},$$

où $Sa = \Sigma \pm a$ est la somme des valeurs numériques de a , et $Sf = \Sigma \pm f$, les changements de signe du numérateur étant réglés sur ceux du dénominateur, dont tous les termes deviennent positifs. Ensuite on formera les résidus

$$\Delta f = f - a\varphi,$$

dont la combinaison $(\lambda \Delta f)$ ou $S\Delta f$ doit s'annuler, ce qui fournit une vérification du calcul. S'il y a lieu, on procède à la seconde approximation, en posant

$$f = ax + by.$$

et le système (13) donnera

$$\begin{aligned} x + \beta y &= \varphi, \\ y &= \varphi'. \end{aligned}$$

où

$$\beta = \frac{Sb}{Sa}, \quad \varphi' = \frac{S'\Delta f}{S'\Delta b}, \quad \Delta b = b - \beta a.$$

Les relations (14) donnent d'ailleurs

$$f = \varphi a + \varphi' \Delta b.$$

On peut continuer de cette manière, jusqu'à ce que les résidus $\Delta^n f$ paraissent suffisamment petits.

17. Présentée de cette manière, la méthode de Cauchy se rattache très naturellement aux procédés d'élimination plus anciens, dont elle constitue une ingénieuse modification. Je n'ai pas voulu en interrompre l'exposé par des remarques relatives à l'historique de la question, qu'il y a lieu de placer ici.

Le *Mémoire sur l'Interpolation*, qui avait été autographié à Prague, en 1835, a été reproduit en 1837 dans le tome II du *Journal de Mathématiques* de Liouville, mais sans l'exemple numérique qui le terminait. En 1847, Cauchy a donné un résumé de sa méthode et des applications qu'elle comporte dans une série de *Mémoires* sur la détermination des orbites, insérés au tome XXV des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (p. 405, 531, 572, 650). A son tour, en 1849, Yvon Villarceau a étudié cette méthode dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1852 [voir aussi *Annales de l'Observatoire de Paris (Obs.)*, t. XII, 1856].

En 1853, la méthode donne lieu à une intéressante polémique entre Cauchy et J. Bienaymé, qui a beaucoup contribué à la mettre dans son vrai jour. Une Note de Cauchy *sur l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations* (*Comptes rendus*, 27 juin, p. 1114) est suivie d'une Note de Bienaymé *sur les différences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la méthode des moindres carrés* (*Comptes rendus*, 4 juillet, p. 5; *Journal de Liouville*, t. XVIII), à laquelle répondent un *Mémoire sur l'Interpolation* et une Note *sur la nouvelle méthode d'interpolation comparée à la méthode des moindres carrés* (*Comptes rendus*, 18 juillet, p. 64, et 25 juillet, p. 100). Bienaymé prétend que le procédé en question n'est qu'une modification de l'élimination ordinaire entre plusieurs équations du premier degré; « qu'il n'offre aucun degré spécial de probabilité quand on l'applique à des équations plus nombreuses que les inconnues; qu'au contraire il ajoute alors aux risques d'erreur et n'en assigne pas la mesure... » Pour le démontrer, il fait voir, notamment, que les résidus Δz pourront grandir au lieu de décroître dans la suite des calculs, de sorte que rien ne garantit que les erreurs n'iront pas en croissant. On en voit un exemple, dit-il, dans l'interpolation même faite par Cauchy dans son premier *Mémoire* (*). Ainsi la grandeur, ou la petitesse des résidus, n'est pas un sûr indice qu'on puisse arrêter les calculs.

(*) Une remarque analogue a été faite par M. Seeliger (*Astron. Nachr.*, 2295; 1880). Le résultat de l'interpolation ne s'améliore pas, au contraire, en augmentant le nombre des termes. M. Tisserand, ayant tenté d'appliquer le procédé de *Bulletin astronomique*. T. VIII. (Août 1891.)

Cette objection ne se trouve pas nettement écartée dans la réponse de Cauchy. Il insiste seulement sur les facilités qu'offre son procédé dans le cas où le nombre des inconnues n'est pas fixé d'avance, par exemple, lorsqu'il s'agit de déterminer non seulement les valeurs des coefficients d'une série convergente, mais encore le nombre des termes après lesquels la série pourra être arrêtée sans inconvénient. Ce nombre se détermine par la considération des résidus successifs $\Delta^m f$: on s'arrête lorsqu'ils sont devenus suffisamment petits. C'est donc, à vrai dire, un procédé de tâtonnement. Mais il est très commode, et Villarceau se loue beaucoup des résultats qu'il a obtenus en l'appliquant à la détermination des orbites, au lieu du procédé recommandé par Laplace, qui repose sur la formule générale de Newton. De même, P.-G. Bartlett (*On the empirical interpolation of observations; Am. J. of Sc.*, juillet 1862) recommande le procédé de Cauchy pour la représentation d'une série d'expériences.

Cauchy a encore proposé d'appliquer d'abord son procédé avec les facteurs ± 1 , puis de *corriger* le résultat par la méthode des moindres carrés; mais c'est peut-être compliquer les choses plus que de raison. Au surplus, pour conformer le procédé tout de suite au principe des moindres carrés, il n'y a qu'à mettre pour λ, μ, ν, \dots les coefficients mêmes des inconnues, comme l'ont déjà expressément remarqué Cauchy et Bienaymé. On peut consulter, à ce sujet, deux Notes de M. E. Carvallo, *sur les formules d'interpolation et sur l'application de la méthode des moindres carrés* (*Comptes rendus*, 30 janvier et 26 mars 1888).

Si les facteurs λ, μ, ν, \dots sont déterminés de cette manière, on a la formule que M. Tchébychef a donnée en 1854, et dont il sera question plus loin, en même temps que de quelques autres travaux se rattachant aux problèmes de ce genre.

18. Les Mémoires qu'il m'a fallu lire sont très nombreux; je ne puis songer à les résumer tous, ni à reproduire toujours les notations des auteurs, qui changent d'un Mémoire à l'autre, et dont la diversité rend la lecture successive et la comparaison de ces écrits

Cauchy à la détermination du mouvement propre du système solaire, a dû l'abandonner pour la méthode des moindres carrés.

très pénible. J'ai été fort embarrassé pour choisir une notation convenable. Cela semble peu de chose; mais, dans ces matières, une notation bien faite peut épargner la moitié du travail; elle nous guide, nous avertit, et prévient l'hésitation; elle rend des services du même ordre que ceux des outils et des machines. C'est sans doute pour cela que les nouvelles méthodes se réduisent si souvent à des changements de notation.

La difficulté consiste ici à bien indiquer, sans un appareil rébarbatif d'exposants et d'indices, l'algorithme, en soi assez compliqué, des opérations que comporte un problème d'élimination. Il faut, en outre, approprier tour à tour les notations au cas d'un système d'équations linéaires déterminant les inconnues x, y, z, \dots et à celui d'une formule d'interpolation dont on cherche les coefficients a, b, c, \dots , qui deviennent les inconnues, tandis que les valeurs particulières des variables jouent le rôle de constantes données. C'est à ce dernier cas que s'appliquait primitivement le procédé de Cauchy, et sa première formule d'interpolation s'écrivit

$$y = au + bv + cw + \dots,$$

où a, b, c, \dots sont les coefficients cherchés, tandis que u, v, w, \dots sont les fonctions de x suivant lesquelles il s'agit de développer y . Villarceau, dans son exposé de la méthode, écrit

$$y = aA + bB + cC + \dots,$$

en désignant pour A, B, C, \dots les fonctions de x (ou d'un nombre quelconque de variables) dont les valeurs sont données par l'observation. M. Gram écrit

$$y_x = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots$$

Mais nous aurons besoin des indices inférieurs pour distinguer les valeurs particulières correspondant aux valeurs x_0, x_1, x_2, \dots de l'argument x . Il serait, d'autre part, très difficile d'écrire certaines formules sans un signe quelconque, indiquant le rang des fonctions u, v, w, \dots dans la série. Cette difficulté devient surtout sensible lorsqu'on veut conformer la méthode de Cauchy au principe des moindres carrés. Pour avoir une notation commode et maniable, il m'a paru nécessaire de recourir aux lettres accen-

tuées, et de remplacer u, v, w, \dots par

$$x^0, x', x'', \dots, x^n \dots$$

Dans le cas le plus simple, celui d'un développement suivant les puissances ascendantes de x , on aura donc

$$x^0 = 1, \quad x' = x, \quad x'' = x^2, \quad \dots$$

et x^n représentera, à l'ordinaire, la puissance $n^{\text{ième}}$ de x ; mais, en général, nous désignerons par x^n la fonction de x dont n est le numéro d'ordre ou le rang dans la série. On verra qu'il n'en peut résulter aucune confusion et qu'on peut se dispenser d'écrire $x^{(n)}$ au lieu de x^n , ce qui serait peut-être plus clair, mais très incommode pour la transcription des formules. Nous conserverons aussi la notation de Gauss

$$(\alpha\beta) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

pour représenter les sommes de produits ou sommes pondérées.

19. Ceci posé, nous allons considérer le cas spécial où le procédé de Cauchy est appliqué à la construction d'une formule d'interpolation.

En admettant que la fonction de x accessible à l'observation⁽¹⁾ soit développable en série convergente suivant les puissances de x ou, plus généralement, suivant certaines fonctions x^0, x', x'', \dots , de sorte qu'on puisse poser

$$(15) \quad f = Ax^0 + Bx' + Cx'' + \dots$$

il s'agit de déterminer les coefficients A, B, C, \dots à l'aide d'un certain nombre de valeurs données f_1, f_2, f_3, \dots , qui correspondent aux valeurs x_0, x_1, x_2, \dots de l'argument x . On aura donc le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} f_1 &= Ax_1^0 + Bx_1' + Cx_1'' + \dots \\ f_2 &= Ax_2^0 + Bx_2' + Cx_2'' + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

(¹) Dans beaucoup de cas, il sera plus commode de développer directement quelque fonction de f , par exemple son logarithme, comme nous l'avons déjà dit (n° 12).

où les coefficients donnés $x_i^0, x_i', x_i'', \dots$ sont ceux que nous avons désignés plus haut par a_i, b_i, c_i, \dots , tandis que A, B, C, \dots remplacent les inconnues x, y, z, \dots .

Comme le nombre des équations est, le plus souvent, supérieur à celui des inconnues, on déduit du système donné un nombre d'équations strictement suffisant en formant les sommes pondérées

$$(16) \quad (\lambda f) = (\lambda x^0)A + (\lambda x')B + (\lambda x'')C + \dots$$

analogues à celles qui composent le système (5).

Mais le nombre de ces équations dépend évidemment du nombre de termes qu'on veut conserver dans la formule d'interpolation (15). Or, on sait rarement d'avance combien de termes il faudra introduire pour obtenir une représentation satisfaisante, et pour chaque terme nouveau on est obligé de répéter tous les calculs. C'est pour parer à cet inconvénient que Cauchy a imaginé sa méthode d'approximation successive, où les termes nouveaux se déterminent en gardant toujours les anciens. Pour y accommoder nos formules, nous n'avons qu'à mettre x^0, x', x'', \dots à la place de a, b, c, \dots , et A, B, C, \dots au lieu de x, y, z, \dots . Les relations (14) montrent que f s'obtient sous la forme

$$(17) \quad f = \varphi x^0 + \varphi' \Delta x' + \varphi'' \Delta^2 x'' + \dots,$$

les coefficients φ et les Δ étant définis par les relations suivantes

$$(18) \quad \Delta f = f - \varphi x^0, \quad \Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta x', \quad \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi'' \Delta^2 x'', \quad \dots,$$

$$(19) \quad \varphi = \frac{(\lambda f)}{(\lambda x^0)}, \quad \varphi' = \frac{(\mu \Delta f)}{(\mu \Delta x')}, \quad \varphi'' = \frac{(\nu \Delta^2 f)}{(\nu \Delta^2 x'')}, \quad \dots,$$

qui entraînent les formules d'opération générales

$$(10) \quad \begin{cases} (\lambda \Delta) = 0, & (\lambda \Delta^2) = 0, & (\mu \Delta^2) = 0; \\ (\lambda \Delta^3) = 0, & (\mu \Delta^3) = 0, & (\nu \Delta^3) = 0; \quad \dots \end{cases}$$

déjà indiquées plus haut. Ajoutons que, n étant le nombre des valeurs données de f , on aura $\Delta^n f = 0$.

Les rapports φ , qui étaient dénotés plus haut par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pour $f = a, b, c, \dots$, seront maintenant désignés par $\varphi_0, \varphi_1,$

φ_2, \dots pour $f = x^0, x', x'', \dots$. On aura donc l'algorithme

$$(20) \left\{ \begin{array}{llll} \varphi_0 = 1, & & & \\ \varphi_1 = \frac{(\lambda x')}{(\lambda x^0)}, & \varphi_1' = 1, & & \\ \varphi_2 = \frac{(\lambda x'')}{(\lambda x^0)}, & \varphi_2' = \frac{(\mu \Delta x'')}{(\mu \Delta x')}, & \varphi_2'' = 1, & \\ \varphi_3 = \frac{(\lambda x''')}{(\lambda x^0)}, & \varphi_3' = \frac{(\mu \Delta x''')}{(\mu \Delta x')}, & \varphi_3'' = \frac{(\nu \Delta^2 x''')}{(\nu \Delta^2 x'')}, & \varphi_3''' = 1, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \end{array} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{array}{llll} \Delta x^0 = 0, & & & \\ \Delta x' = x' - \varphi_1 x^0, & \Delta^2 x' = 0, & & \\ \Delta x'' = x'' - \varphi_2 x^0, & \Delta^2 x'' = \Delta x'' - \varphi_2' \Delta x', & \Delta^3 x'' = 0, & \\ \Delta x''' = x''' - \varphi_3 x^0, & \Delta^2 x''' = \Delta x''' - \varphi_3' \Delta x', & \Delta^3 x''' = \Delta^2 x''' - \varphi_3'' \Delta^2 x'', & \\ \dots, & \dots, & \dots, & \end{array} \right.$$

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} x^0 = x^0, \\ x' = \varphi_1 x^0 + \Delta x', \\ x'' = \varphi_2 x^0 + \varphi_2' \Delta x' + \Delta^2 x'', \\ \dots \end{array} \right.$$

On commence par poser $f = Ax^0$ en première approximation, et l'on trouve

$$A = \varphi, \quad f = \varphi x^0.$$

On calcule alors les résidus Δf , à savoir

$$\Delta f_1 = f_1 - \varphi x_1^0, \quad \Delta f_2 = f_2 - \varphi x_2^0, \quad \dots, \quad \Delta f_n = f_n - \varphi x_n^0,$$

et s'il y a lieu, on procède à la seconde approximation en posant

$$f = Ax^0 + Bx'.$$

La formule (17) donne alors

$$f = \varphi x^0 + \varphi' \Delta x', \quad \Delta f = \varphi' \Delta x'.$$

par conséquent

$$B = \varphi', \quad A = \varphi - \varphi_1 \varphi',$$

où les coefficients φ sont fournis par les formules (19) et (20), que nous pourrons écrire, avec Cauchy,

$$\varphi_1 = \frac{Sx'}{Sx^0}, \quad \varphi = \frac{Sf}{Sx^0}, \quad \varphi' = \frac{S'\Delta f}{S'\Delta x'},$$

en réduisant les facteurs λ, μ à ± 1 , les signes étant pris de ma-

nière que tous les termes de Sx^0 et de $S'\Delta x'$ deviennent positifs. On dira alors, avec Villarceau, que x^0 est la dominante des sommes S , et $\Delta x'$ celle des sommes S' , ces deux fonctions déterminant, l'une le facteur λ dans les sommes S , l'autre le facteur μ dans les sommes S' .

On cherche ensuite les résidus

$$\Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta x'$$

et, s'ils sont encore sensibles, on essaye une troisième approximation

$$f = Ax^0 + Bx' + Cx'',$$

dans laquelle on a

$$f = \varphi x^0 + \varphi' \Delta x' + \varphi'' \Delta^2 x'', \quad \Delta^2 f = \varphi'' \Delta^2 x''$$

et, par suite,

$$C = \varphi'', \quad B = \varphi' - \varphi'_1 \varphi'',$$

$$A = \varphi - \varphi_1 B - \varphi_2 C = \varphi - \varphi_1 (\varphi' - \varphi'_1 \varphi'') - \varphi_2 \varphi'',$$

les coefficients étant toujours donnés par les formules (19) et (20). On peut continuer ainsi, jusqu'à ce qu'on arrive à des résidus $\Delta^m f$ qui soient négligeables. Mais il est visible que le choix des facteurs λ, μ, ν, \dots reste arbitraire.

Au lieu de les réduire, avec Cauchy, à ± 1 , nous pouvons les égaler aux coefficients des inconnues A, B, C, \dots et prendre $\lambda = x^0, \mu = x', \nu = x'', \dots$, pour nous conformer à la méthode des moindres carrés et obtenir le résultat le plus avantageux.

Il est toutefois permis de penser que l'emploi rigoureux de la méthode des moindres carrés est bien rarement nécessaire, et qu'il suffit, le plus souvent, d'en suivre le principe en arrondissant les facteurs, c'est-à-dire en remplaçant des groupes de facteurs par une valeur moyenne en nombre rond. Cauchy, en les réduisant tous à ± 1 , va probablement trop loin; on sera plus près de la règle, ainsi que nous l'avons déjà dit, en égalant les facteurs à $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ selon l'importance du coefficient de l'inconnue qui joue le rôle de *dominante*.

20. Dans le cas le plus simple, celui d'un développement sui-

vant les puissances de x , nous avons

$$x^0 = 1, \quad x' = x, \quad x'' = x^2, \quad \dots$$

$$f = A + Bx + Cx^2 + \dots$$

et (17) devient

$$(23) \quad f = \varphi + \varphi' \Delta x + \varphi'' \Delta^2 x^2 + \dots$$

Les facteurs λ se réduisent à $+1$ (dans la méthode de Cauchy, comme dans la méthode des moindres carrés); la somme S est la somme ordinaire Σ , et $(\lambda x^0) = n$ représente le nombre des observations; les quantités $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont des moyennes arithmétiques. On a

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \varphi = \frac{1}{n} \Sigma f, & \varphi' = \frac{(\mu \Delta f)}{(\mu \Delta x)}, & \varphi'' = \frac{(\nu \Delta^2 f)}{(\nu \Delta^2 x^2)}, & \dots \\ \varphi_1 = \frac{1}{n} \Sigma x, & \varphi_1' = 1, & & \\ \varphi_2 = \frac{1}{n} \Sigma x^2, & \varphi_2' = \frac{(\mu \Delta x^2)}{(\mu \Delta x)}, & \varphi_2'' = 1, & \\ \varphi_3 = \frac{1}{n} \Sigma x^3, & \varphi_3' = \frac{(\mu \Delta x^3)}{(\mu \Delta x)}, & \varphi_3'' = \frac{(\nu \Delta^2 x^3)}{(\nu \Delta^2 x^2)}, & \varphi_3''' = 1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

Ensuite

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Delta f = f - \varphi, & \Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta x, & \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi'' \Delta^2 x^2, & \dots \\ \Delta x = x - \varphi_1, & \Delta^2 x = 0, & & \\ \Delta x^2 = x^2 - \varphi_2, & \Delta^2 x^2 = \Delta x^2 - \varphi_2' \Delta x, & \Delta^3 x^2 = 0, & \\ \Delta x^3 = x^3 - \varphi_3, & \Delta^2 x^3 = \Delta x^3 - \varphi_3' \Delta x, & \Delta^3 x^3 = \Delta^2 x^3 - \varphi_3'' \Delta^2 x^2, & \Delta^4 x^3 = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

enfin

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = \varphi_0, \\ x = \varphi_1 + \Delta x, \\ x^2 = \varphi_2 + \varphi_2' \Delta x + \Delta^2 x^2, \\ x^3 = \varphi_3 + \varphi_3' \Delta x + \varphi_3'' \Delta^2 x^2 + \Delta^3 x^3, \\ \dots \end{array} \right.$$

La forme explicite de la série devient

$$f = \varphi + \varphi'(x - \varphi_1) + \varphi''[x^2 - \varphi_2 - \varphi_2'(x - \varphi_1)] + \dots$$

Quant aux facteurs μ, ν, \dots , on prendrait, avec Cauchy,

$$\begin{aligned} (\mu \Delta x) &= S' \Delta x = \Sigma \pm \Delta x, \\ (\nu \Delta^2 x^2) &= S'' \Delta^2 x^2 = \Sigma \pm \Delta^2 x^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

en choisissant les signes de manière à n'avoir ici que des termes positifs. C'est sous cette forme que Bartlett a étudié le procédé d'interpolation de Cauchy, en traitant quelques exemples numériques (*Am. J. of Sc.*, 1862).

Si nous voulions nous conformer au principe des moindres carrés, il faudrait prendre $\mu = x, \nu = x^2, \dots$

21. De même, dans le cas général, en faisant usage de la formule

$$(17) \quad f = \varphi x^0 + \varphi' \Delta x' + \varphi'' \Delta^2 x'' + \dots,$$

on se conformerait au principe des moindres carrés en prenant $\lambda = x^0, \mu = x', \nu = x'', \dots$, et l'algorithme aurait la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta f &= f - \varphi x^0, & \Delta^2 f &= \Delta f - \varphi' \Delta x', \\ \Delta^3 f &= \Delta^2 f - \varphi'' \Delta^2 x'', & \dots, & \quad \Delta^n f = 0; \\ \varphi &= \frac{(x^0 f)}{(x^0 x^0)}, & \varphi' &= \frac{(x' \Delta f)}{(x' \Delta x')}, & \varphi'' &= \frac{(x'' \Delta^2 f)}{(x'' \Delta^2 x'')}, & \dots \end{aligned}$$

On aurait, pour $f = x^r$,

$$\begin{aligned} \Delta x^r &= x^r - \varphi_r x^0, & \Delta^2 x^r &= \Delta x^r - \varphi_r' \Delta x', \\ \Delta^3 x^r &= \Delta^2 x^r - \varphi_r'' \Delta^2 x'', & \dots, & \quad \Delta^{r+1} x^r = 0; \\ \varphi_r &= \frac{(x^0 x^r)}{(x^0 x^0)}, & \varphi_r' &= \frac{(x' \Delta x^r)}{(x' \Delta x')}, & \dots, & \quad \varphi_r^{(r)} = 1, & \varphi_r^{(r+1)} &= 0, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \\ \varphi_1 &= \frac{(x^0 x^1)}{(x^0 x^0)}, & \varphi'_1 &= 1, \\ \varphi_2 &= \frac{(x^0 x^2)}{(x^0 x^0)}, & \varphi'_2 &= \frac{(x^1 \Delta x^2)}{(x^1 \Delta x^1)}, & \varphi''_2 &= 1, \\ & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \dots\dots \end{aligned}$$

La formule

$$(27) \quad \Delta^{s+1} f = \Delta^s f - \varphi^{(s)} \Delta^s x^s$$

donne d'ailleurs

$$\varphi^{(s)} = \frac{(x^s \Delta^s f)}{(x^s \Delta^s x^s)}$$

en définissant $\varphi^{(s)}$ par la relation $(x^s \Delta^{s+1} f) = 0$, ou $(x^{s-1} \Delta^s f) = 0$, qui entraîne $(x^{s-1} \Delta^{s+1} f) = 0$, ... , et enfin, d'une manière générale,

$$(28) \quad (x^r \Delta^s) = 0 \quad \text{pour} \quad r < s,$$

comme le demandent les formules (10), qui s'écrivent maintenant

$$(10) \quad (x^0 \Delta) = 0, \quad (x^0 \Delta^2) = 0, \quad (x^1 \Delta^2) = 0, \quad \dots$$

On a même, plus généralement,

$$(29) \quad (\Delta^m x^r \Delta^s) = 0 \quad \text{pour} \quad r < s.$$

Cela résulte des égalités

$$(30) \quad (F \Delta^s f) = (\Delta F \Delta^s f) = (\Delta^2 F \Delta^s f) = \dots = (\Delta^s F \Delta^s f),$$

qui se déduisent successivement des formules (27) et (28); elles montrent que, dans les formules (28), on peut remplacer x^r par Δx^r , $\Delta^2 x^r$, ... , $\Delta^r x^r$ et en général par $\Delta^m x^r$, puisque cette différence s'annule pour $m > r$. On aura donc aussi

$$(31) \quad (\Delta^r x^r \Delta^s x^s) = 0 \quad \text{pour} \quad r \geq s.$$

Grâce à ces relations, les sommes qui figurent dans les expressions des coefficients φ peuvent s'écrire de diverses manières, par

exemple

$$(32) \quad \begin{cases} (x' \Delta f) = (f \Delta x') = (\Delta x' \cdot \Delta f), \\ (x'' \Delta^2 f) = (f \Delta^2 x'') = (\Delta^2 x'' \cdot \Delta^2 f), \\ (x' \Delta x') = (\Delta x' \cdot \Delta x'), \\ (x'' \Delta^2 x'') = (\Delta x'' \cdot \Delta^2 x'') = (\Delta^2 x'' \cdot \Delta^2 x''), \end{cases}$$

et l'on voit que les dénominateurs des φ deviennent des sommes de carrés. M. Carvallo a fait une remarque analogue.

22. Considérons en particulier le cas d'un développement suivant les puissances de x . Nous avons alors $x^0 = 1$, $x' = x$, ... et $(x^n x^0) = n$. L'algorithme, pour l'application de la méthode des moindres carrés, devient

$$(33) \quad \begin{cases} f = \varphi + \varphi' \Delta x + \varphi'' \Delta^2 x^2 + \dots \\ \Delta f = \varphi' \Delta x + \varphi'' \Delta^2 x^2 + \dots \\ \Delta^2 f = \varphi'' \Delta^2 x^2 + \dots \end{cases}$$

puis

$$(34) \quad \begin{cases} \Delta f = f - \varphi, & \Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta x, & \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi'' \Delta^2 x^2, & \dots \\ \Delta x = x - \varphi_1, & \Delta^2 x = 0, & & \\ \Delta x^2 = x^2 - \varphi_2, & \Delta^2 x^2 = \Delta x^2 - \varphi_2' \Delta x, & \Delta^3 x^2 = 0, & \\ \dots, & \dots, & \dots, & \end{cases}$$

et

$$(35) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{n} \Sigma f, & \varphi' = \frac{(x \Delta f)}{(x \Delta x)}, & \varphi'' = \frac{(x^2 \Delta^2 f)}{(x^2 \Delta^2 x^2)}, \\ \varphi_1 = \frac{1}{n} \Sigma x, & \varphi_1' = 1, & \\ \varphi_2 = \frac{1}{n} \Sigma x^2, & \varphi_2' = \frac{(x \Delta x^2)}{(x \Delta x)}, & \varphi_2'' = 1, \\ \varphi_3 = \frac{1}{n} \Sigma x^3, & \varphi_3' = \frac{(x \Delta x^3)}{(x \Delta x)}, & \varphi_3'' = \frac{(x^2 \Delta^2 x^3)}{(x^2 \Delta^2 x^2)}, & \varphi_3''' = 1, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

et aussi

$$(36) \quad \begin{cases} x = \varphi_1 + \Delta x, \\ x^2 = \varphi_2 + \varphi_2' \Delta x + \Delta^2 x^2, \\ x^3 = \varphi_3 + \varphi_3' \Delta x + \varphi_3'' \Delta^2 x^2 + \Delta^3 x^3, \\ \dots \end{cases}$$

Il est à remarquer qu'en vertu des relations (32) nous avons

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x \Delta f) = (f \Delta x) = (\Delta x \cdot \Delta f), \\ (x \Delta x) = (\Delta x \cdot \Delta x), \\ (x \Delta x^2) = (x^2 \cdot \Delta x) = (\Delta x \cdot \Delta x^2), \\ (x^2 \Delta^2 f) = (f \cdot \Delta^2 x^2) = (\Delta^2 x^2 \cdot \Delta^2 f), \\ (x^2 \Delta^2 x^2) = (\Delta^2 x^2 \cdot \Delta^2 x^2), \\ \dots\dots\dots; \end{array} \right.$$

ce qui permet de transformer les coefficients $\varphi^{(s)}$ de bien des manières.

Si nous voulions les exprimer par les sommes de puissances $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, il suffirait d'appliquer aux relations (36) les formules (28), qui peuvent s'écrire

$$(38) \quad \Sigma \Delta = 0, \quad \Sigma \Delta^2 = 0, \quad \Sigma x \Delta^2 = 0, \quad \dots, \quad \Sigma x^r \Delta^{r+l} = 0.$$

On trouverait, par exemple,

$$\begin{aligned} n(\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_1) &= (x \Delta x), & n(\varphi_3 - \varphi_2 \varphi_1) &= (x^2 \Delta x), \\ n(\varphi_3 - \varphi_1 \varphi_2) &= (x \Delta x) \varphi_2', & n(\varphi_4 - \varphi_3 \varphi_2) &= (x^2 \Delta x) \varphi_2' + (x^2 \Delta^2 x^2), \\ n(\varphi_4 - \varphi_1 \varphi_3) &= (x \Delta x) \varphi_3', & n(\varphi_5 - \varphi_3 \varphi_3) &= (x^2 \Delta x) \varphi_3' + (x^2 \Delta^2 x^2) \varphi_3', \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

23. On pourrait aussi exprimer les coefficients de la formule (33) par les puissances de Δx . Posons

$$\Delta x = z, \quad x = z + \varphi_1.$$

nous aurons, en vertu de (28),

$$(39) \quad \Sigma z = 0, \quad (z^{s-l} \Delta^s) = 0, \quad (z^s \Delta^s) = (x^s \Delta^s),$$

et ces formules permettent de déterminer les coefficients $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \dots$ de l'expression

$$(40) \quad \Delta^s x^s = z^s + \alpha_s z^{s-1} + \beta_s z^{s-2} + \gamma_s z^{s-3} + \dots$$

en fonctions des sommes Σz^m , par une série de relations de la forme

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \Sigma z^s + \alpha_s \Sigma z^{s-1} + \beta_s \Sigma z^{s-2} + \gamma_s \Sigma z^{s-3} + \dots \\ 0 = \Sigma z^{s+1} + \alpha_s \Sigma z^s + \beta_s \Sigma z^{s-1} + \gamma_s \Sigma z^{s-2} + \dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Elles donnent encore

$$(x^s \Delta^s x^s) = (z^s \Delta^s x^s) = \Sigma z^{2s} + \alpha_s \Sigma z^{2s-1} + \beta_s \Sigma z^{2s-2} + \dots$$

et

$$0 = (z^{s+1} \Delta^s x^s) + \alpha_{s+1} (z^s \Delta^s x^s).$$

Or la différence $z = x - \frac{1}{n} \Sigma x$ ne change pas, si nous remplaçons x par $x + \alpha$, et Δf ne change pas non plus, si l'on met $f+b$ à la place de f . Il s'ensuit [comme le montrent les relations (34) et (37)] qu'il est permis, dans la formule (33), d'ajouter une constante quelconque à x aussi bien qu'à f ; on peut aussi remarquer qu'elle est homogène (de dimension zéro) par rapport à x , de sorte que l'unité de x reste arbitraire.

Quand les valeurs données f_1, f_2, \dots correspondent à des intervalles égaux de l'argument x ou seulement à des valeurs de x distribuées symétriquement autour de la valeur moyenne, on aura $z_1 = -z_n$, et en général $z_i = -z_{n+1-i}$; par suite

$$(42) \quad \Sigma z = 0, \quad \Sigma z^2 = 0, \quad \Sigma z^3 = 0, \quad \dots$$

et les équations de la forme

$$0 = \alpha_s \Sigma z^{2m} + \gamma_s \Sigma z^{2m-2} + \varepsilon_s \Sigma z^{2m-4} + \dots$$

qui résultent de (41), donnent alors

$$\alpha_s = 0, \quad \gamma_s = 0, \quad \varepsilon_s = 0, \quad \dots,$$

de sorte qu'on trouve

$$(43) \quad \Delta^s x^s = z^s + \beta_s z^{s-2} + \delta_s z^{s-4} + \dots$$

Comme l'unité de x reste arbitraire et que les formules ne renferment que des différences, nous sommes libres de supposer que x_1, x_2, \dots représentent les nombres 1, 2, 3, ..., n , de sorte que

$$(44) \quad \varphi_1 = \frac{n+1}{2}, \quad z = x - \frac{n+1}{2}, \quad z_i = i - \frac{n+1}{2}$$

et

$$z_i = \pm \frac{n-1}{2}, \quad \pm \frac{n-3}{2}, \quad \dots$$

On a aussi, d'une part,

$$x^s = (\varphi_1 + z)^s = \varphi_1^s + \dots + s \varphi_1^{s-1} z + z^s,$$

et de l'autre, par les formules (36)

$$x^s = \varphi_s + \varphi'_s x + \dots + \varphi_s^{(s-1)} \Delta^{s-1} x^{s-1} + \Delta^s x^s,$$

et, en tenant compte de (43), la comparaison donne

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_s^{(s-1)} = s \varphi_1 = s \frac{n+1}{2}, \\ \varphi_s^{(s-2)} = \frac{s(s-1)}{1.2} \varphi_1^2 - \beta_s, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

24. La formule (33), à laquelle conduit l'algorithme de Cauchy, accommodé au principe des moindres carrés, ne diffère que par les notations de celle que M. Tchébychef a donnée en 1854 et dont on trouve la démonstration dans son *Mémoire de 1855 sur les fractions continues*, traduit en français par M. J. Bienaymé, en 1858 (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. III). Cette formule peut s'écrire

$$f = \psi_0(x) \frac{\sum \theta^2 \cdot \psi_0 f}{\sum \theta^2 \cdot \psi_0^2} + \psi_1(x) \frac{\sum \theta^2 \cdot \psi_1 f}{\sum \theta^2 \cdot \psi_1^2} + \dots,$$

où les fonctions ψ_s sont celles que nous avons désignées par $\Delta^s x^s$, tandis que θ^2 représente le poids des observations, que nous avons pris égal à l'unité.

M. Eug. Rouché a étudié les séries de ce genre dans un *Mémoire sur le développement des fonctions* (*Journ. de l'École Polytechnique*, 1858). M. Hermite, dans une Note très intéressante *sur l'Interpolation* (*Comptes rendus*, 10 janvier 1859), rattache les résultats de M. Tchébychef d'une manière directe à la formule de Lagrange, généralisée par l'introduction des polynômes $\theta(x)$. M. Borchardt s'en est occupé, à son tour, en 1860. M. Tchébychef lui-même y est revenu à plusieurs reprises : d'abord dans le *Mémoire sur l'Interpolation par la méthode des moindres carrés* (*Mém. de l'Ac. de Saint-Petersbourg*, 1859), ensuite dans deux *Mémoires sur l'Interpolation*, publiés en 1864 et en 1875 (en russe, dans les *Bulletins de l'Académie*), modifiant chaque fois les notations et le mode d'exposition. Il a aussi traité le cas où la fonction f est en partie connue, de sorte qu'il s'agit de la repré-

sentier par la série

$$f = F(\Lambda_0 + \Lambda_1 x + \dots + \Lambda_n x^n),$$

où le facteur F est donné (*Mémoires couronnés de l'Acad. roy. de Belgique*, t. XXI, 1870, et *Traité de Balistique extérieure* de Mayevski, 1872). M. Jouffret a cherché à établir ces formules d'une manière plus élémentaire (*Revue d'Artillerie*, 1873-74), et M. Schols en a donné une démonstration directe, en partant des équations de condition ordinaires, fournies par le principe des moindres carrés (*Verlagen en Mededeel. der Akad. te Amsterdam*, t. IX, 1876; *Archives néerlandaises*, t. XII, 1877).

M. Bienaymé, dans une Note qui précède sa traduction, signale le lien étroit qui existe entre les fonctions ψ de M. Tchélychef et les Δ de Cauchy, ou les coefficients analogues de Gauss. Lorsque, au lieu de donner un certain nombre de valeurs de la fonction f , on la regarde comme continue, les fonctions ψ deviennent aussi continues : elles satisfont alors à des équations aux différences partielles du second ordre, et les sommes, dans les formules, sont remplacées par des intégrales. On retrouve ainsi les fonctions V que Sturm et Liouville ont étudiées dans une série de Mémoires (*Journal de Mathématiques*, t. I et II). Toutes ces fonctions satisfont aux conditions du principe des moindres carrés, et fournissent autant de procédés d'interpolation, jouissant d'un minimum d'erreurs. C'est ce que G. Plarr avait déjà montré pour les polynômes de Legendre et pour la série trigonométrique de Fourier (*Comptes rendus*, 11 mai 1857). La question a été reprise, quelques années plus tard, par E. Heine (*Monatsberichte*, 1866, *Handbuch der Kugelf.*, t. I, p. 292) et par Töpler (*Bull. de l'Acad. de Vienne*, 1876). Enfin, M. J.-P. Gram en a fait le sujet d'une thèse *Sur les développements en série, obtenus par la méthode des moindres carrés* (*Om Rækkeudviklinger, bestemt ved hjælp af de mindste kvadraters methode*. Copenhague, 1879, in-8°, 122 p.) et d'un Mémoire publié ensuite dans le *Journal de Crelle* (t. XCIV, 1883), où les « séries à interpolation » sont étudiées sous un point de vue très général.

(A suivre.)

OBSERVATIONS DE LA PLANÈTE (310),

FAITES A L'OBSERVATOIRE D'ALGER (au télescope de 0^m,50);

PAR MM. RAMBAUD ET SY.

Dates.	Étoiles de comparaison.	Gr.	$\Delta R.$	$\Delta(Q).$	N. de c.	Obs.
1891.			^m ^s			
MAI 3...	a Cincinnati, n° 2715	8	+0.44,18	- 6. 2,3	10 : 16	R
3...	a " "	"	+0.43,79	- 5.56,8	10 : 20	S
5...	a " "	"	-0.49,88	+ 0.28,7	12 : 12	R
5...	a " "	"	-0.50,46	+ 0.30,0	12 : 12	S
6...	b Cincinnati, n° 2705	9	+1.12,70	- 3.29,8	10 : 10	R
6...	b " "	"	+1.12,25	- 3.25,3	10 : 10	R
8...	b " "	"	-0.20,66	+ 2.56,0	12 : 12	R
8...	b " "	"	-0.21,08	+ 2.58,1	12 : 12	S
11...	c Zones d'Argel. (Cat. de Vienne, n° 12398)	9	+0.29,03	+ 7.22,4	20 : 10	S
11...	c " "	9	+0.28,23	+ 7.24,2	20 : 10	S

Positions des étoiles de comparaison.

Dates.	★	R moy. 1891.0.	Réd. au j.	(Q) moy. 1891.0.	Réd. au j.	Autorités.
1891.		^h ^m ^s	^s	^h ^m ^s	^s	
MAI 3...	a	16. 6. 1,34	+1,71	-19.17.44,1	-7,8	Cincinnati.
5...	a	" "	+1,73	" "	-7,8	"
6...	b	16. 3. 1,12	+1,73	-19.10. 0,9	-7,9	Cincinnati.
8...	b	" "	+1,74	" "	-7,9	"
11...	c	15.59.53,79	+1,75	-19. 4.43,7	-8,0	Argelander.

Positions apparentes.

Dates.	T. moyen d'Alger.	R app.	Log. fact. parall.	(Q) app.	Log fact. parall.
1891.	^h ^m ^s	^h ^m ^s			
MAI 3.....	12.13. 6	16. 6.47,23	1,076	-19.23.54,2	0,862
3.....	12.42.14	16. 6.46,84	1,256	-19.23.48,7	0,856
5.....	9.14.42	16. 5.13,19	1,381 n	-19.17.23,2	0,848
5.....	9.34.40	16. 5.12,61	1,303 n	-19.17.21,9	0,853
6.....	13.14.52	16. 4.15,55	1,434	-19.13.38,6	0,842
6.....	13.32.25	16. 4.15,10	1,479	-19.13.34,1	0,836
8.....	11.53.50	16. 2.42,20	1,107	-19. 7.12,8	0,860
8.....	12.15. 3	16. 2.41,78	1,238	-19. 7.10,7	0,856
11.....	12.23.37	16. 0.24,57	1,339	-18.57.29,3	0,849
11.....	12.41. 9	16. 0.23,77	1,402	-18.57.27,5	0,844

OBSERVATIONS DE PLANÈTES ET DE LA COMÈTE BARNARD-DENNING,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE

(équatorial d'Eichens, ouverture 0^m,258);

PAR M. BORRELLY.

Ann.	T. m. Marseille.	$\Delta R.$	$\Delta Q.$	N. de c.	R. app.	log f. p.	$Q_{app.}$	log f. p.	*
------	------------------	-------------	-------------	----------	---------	-----------	------------	-----------	---

208 Lacrimosa.

et.	h	m	s	m	s	h	m	s					
15.	9.58.	9	+0.13,85	+ 5.25,9	5.5	9.48.	7,06	-1,376	74.50.28,6	-0,647	1		
16.	9.49.23	-0.37,51	+ 1.23,9	5.5	9.47.15,70	-1,388	74.46.26,6	-0,648	2				
17.	9.32	-1.28,22	- 2.13,6	5.5	9.46.24,99	-1,305	74.42.49,0	-0,638	3				
18.	9.13.35	-2.19,95	- 6. 5,2	5.5	9.45.33,26	-1,457	74.38.57,3	-0,658	4				

305 Charlois.

18.	9.58.	5	-0.16,04	+ 0.58,1	5.5	9.40.	9,88	-1,297	82.48.16,2	-0,726	5
19.	9.43.49	-1. 1,58	- 4. 7,4	5.5	9.39.24,36	-1,332	82.43.11,0	-0,727	6		
2.	9.43.44	-0.55,66	- 2.15,7	5.5	9.31.41,42	-1,099	81.45.46,4	-0,711	7		
4.	8.37.11	-2. 6,62	-12. 5,9	5.5	9.30.30,50	-1,356	81.35.56,6	-0,717	8		
5.	8.41.26	+1. 1,34	+11. 7,7	5.5	9.29.55,71	-1,319	81.30.50,5	-0,715	9		

307 Millosevich.

2.	8.58.29	+0.24,09	+12.19,9	5.5	10.46.40,28	-1,510	78.16.13,1	-0,715	10
4.	9. 7.18	-1.27,88	- 3.58,1	5.5	10.44.48,32	-1,474	77.59.55,1	-0,696	11
5.	9. 2.15	-1.32,10	+ 1.15,5	5.5	10.43.53,58	-1,475	77.51.52,7	-0,695	12

Barnard-Denning.

4.	8.17. 7	+5. 3,91	+ 0.18,2	3.3	1.16. 5,83	+1,694	51. 6. 4,9	-0,791	13
6.	8.23. 9	+2. 2,44	+ 5.18,0	2.2	1.20.44,90	+1,579	53.11.26,2	-0,838	14

Positions des étoiles de comparaison.

Gr.	R. moy. 1891,0.	Réd. au j.	Q moy 1891,0.	Réd. au j.	Autorités.
7	9.47.52,38	+0,83	74.45. 0,6	+ 2,1	2988 Rümker.
7	9.47.52,33	+0,83	74.45. 0,6	+ 2,1	Id.
7	9.47.52,38	+0,83	74.45. 0,6	+ 2,0	Id.
7	9.47.52,38	+0,83	74.45. 0,6	+ 2,0	Id.
5,5	9.40.25,14	+0,78	82.47.16,0	+ 2,1	3336 B.A.C.
5,5	9.40.25,14	+0,80	82.47.16,0	+ 2,3	Id.
7. 8	9.32.36,27	+0,81	81.47.59,6	+ 2,5	676 Weisse (a. c.), H. IX.
8	9.32.36,27	+0,85	81.47.59,6	+ 2,9	Id.

★	Gr.	R moy. 1891,0.	Réd. au j.	Q moy. 1891,0.	Réd. au j.	Autorités -
9.	8	9.28.53,57	+0,80	81.30.50,5	+ 2,4	584 Weisse (a)
10.	8	10.46.15,28	+0,91	78. 3.49,3	+ 3,9	4624 Washington
11.	8	10.46.15,28	+0,92	78. 3.49,3	+ 3,9	Id.
12.	8	10.45.24,75	+0,93	77.50.33,3	+ 3,9	4620 Washington.
13.	8	1.11. 3,97	-2,05	51. 5.40,8	+ 5,9	1615 Paris.
14.	8	1.18.44,44	-1,98	53. 6. 2,4	+ 5,8	344 Weisse (n. c.),

c) H.
H.1

ÉLÉMENTS ET ÉPHÉMÉRIDE DE LA COMÈTE D'ENCKE,

PAR M. O. BACKLUND.

L'éphéméride est seulement approximative, car on a négligé les perturbations de Vénus, de la Terre, de Mars et de Saturne, pendant la dernière révolution. Les éléments qui ont servi à la calculer sont :

Époque et osculation, 1891 mai 31,0. T. moy. de Berlin.

M.....	318.12.48,96	} Équin. moyen 1891,0.
φ.....	57.49.48,64	
Q.....	334.41.26,74	
ω.....	158.38.46,35	
i.....	12.54.57,86	
μ.....	1074",379285	
μ'.....	+0,053121	
ε'.....	+1,88	

Oh. Temps moyen de Berlin		R.	(Δ).	log r.	log Δ.	T. d'aberr.
1891.		h m s				m s
JUILL.	2.....	2.32.50	+22.40. 2	0,2768	0,3488	18.31
	3.....	2.34.57	+22.53. 5	0,2742	0,3446	
	4.....	2.37. 6	+23. 6. 8	0,2716	0,3405	12.10
	5.....	2.39.16	+23.20. 2	0,2690	0,3363	
	6.....	2.41.28	+23.33. 8	0,2663	0,3321	17.50
	7.....	2.43.42	+23.47. 4	0,2636	0,3279	
	8.....	2.45.56	+24. 1. 0	0,2608	0,3235	17.28
	9.....	2.47.12	+24.14. 6	0,2580	0,3191	
	10.....	2.50.32	+24.28. 4	0,2552	0,3147	17. 7
JUILL.	11.....	2.52.54	-24.42. 3	0,2523	0,3102	

aps moyen		R.		Q.		log r.	log Δ.	T. d'aberr.
Berlin.		h m s		° ' "				m s
1891.								
U.L.	12	2.55.16		+24.56.	2	0,2494	0,3057	16.46
	13	2.57.40		+25.10.	1	0,2465	0,3011	
	14	3. 0. 7		+25.24.	2	0,2436	0,2966	16.25
	15	3. 2.36		+25.38.	4	0,2406	0,2920	
	16	3. 5. 7		+25.52.	7	0,2375	0,2872	16. 4
	17	3. 7.41		+26. 6.	9	0,2345	0,2824	
	18	3.10.17		+26.21.	2	0,2314	0,2776	15.43
	19	3.12.56		+26.35.	5	0,2282	0,2727	
	20	3.15.37		+26.49.	9	0,2250	0,2678	15.22
	21	3.18.21		+27. 4.	40	0,2218	0,2628	
	22	3.21. 8		+27.19.	0	0,2186	0,2579	15. 1
	23	3.23.58		+27.33.	7	0,2153	0,2529	
	24	3.26.51		+27.48.	4	0,2119	0,2477	14.40
	25	3.29.48		+28. 3.	2	0,2085	0,2426	
	26	3.32.48		+28.18.	1	0,2051	0,2374	14.20
	27	3.35.52		+28.33.	0	0,2016	0,2321	
	28	3.38.59		+28.47.	9	0,1981	0,2268	13.59
	29	3.42.10		+29. 2.	8	0,1945	0,2215	
	30	3.45.25		+29.17.	7	0,1909	0,2160	13.39
	31	3.48.42		+29.32.	6	0,1872	0,2105	
UT	1	3.52. 5		+29.47.	5	0,1834	0,2050	13.17
	2	3.55.32		+30. 2.	4	0,1796	0,1995	
	3	3.59. 3		+30.17.	3	0,1758	0,1939	12.54
	4	4. 2.39		+30.32.	2	0,1719	0,1883	
	5	4. 6.20		+30.47.	0	0,1680	0,1826	
	6	4.10. 7		+31. 1.	8	0,1640	0,1768	
	7	4.13.59		+31.16.	6	0,1599	0,1711	12.18
	8	4.17.56		+31.31.	3	0,1557	0,1653	
	9	4.22. 0		+31.45.	7	0,1515	0,1594	11.58
	10	4.26.10		+32. 0.	0	0,1472	0,1535	
	11	4.30.25		+32.14.	2	0,1429	0,1476	11.39
	12	4.34.47		+32.28.	2	0,1385	0,1416	
	13	4.39.17		+32.42.	0	0,1340	0,1356	11.20
	14	4.43.55		+32.55.	4	0,1294	0,1296	
	15	4.48.37		+33. 8.	6	0,1248	0,1236	11. 2
	16	4.53.28		+33.21.	4	0,1201	0,1176	
	17	4.58.27		+33.33.	9	0,1153	0,1115	10.44
	18	5. 3.35		+33.45.	9	0,1104	0,1054	
	19	5. 8.50		+33.57.	4	0,1054	0,0993	10.26
	20	5.14.14		+34. 8.	4	0,1003	0,0932	
	21	5.19.46		+34.18.	8	0,0952	0,0871	10. 9
	22	5.25.27		+34.28.	5	0,0900	0,0811	
T	23	5.31.17		+34.37.	3	0,0847	0,0751	9.52

0 h. Temps moyen de Berlin.		R.	(D.)	log r.	log Δ.	T - d'aberr.	
1891.		h m s	'			"	
AOUT	24	5.37.17	+34.45.4	0,0793	0,0691		
	25	5.43.27	+34.52.6	0,0737	0,0630	9.36	
	26	5.49.47	+34.58.8	0,0680	0,0571		
	27	5.56.18	+35.3.9	0,0622	0,0512	9.20	
	28	5.2.59	+35.8.0	0,0563	0,0454		
	29	6.9.50	+35.10.7	0,0504	0,0396	9.5	
	30	6.16.51	+35.11.9	0,0443	0,0339		
	31	6.24.1	+35.11.6	0,0380	0,0284	8.52	
	SEPT.	1	6.31.22	+35.9.5	0,0316	0,0229	
		2	6.38.53	+35.5.5	0,0251	0,0176	8.39
		3	6.46.34	+34.59.9	0,0184	0,0124	
4		6.54.25	+34.52.8	0,0115	0,0074	8.26	
5		7.2.24	+34.43.5	0,0045	0,0025		
6		7.10.31	+34.31.8	9,9974	9,9978	8.15	
7		7.18.45	+34.17.6	9,9901	9,9935		
8		7.27.7	+34.0.5	9,9826	9,9891	8.5	
9		7.35.36	+33.40.9	9,9749	9,9850		
10		7.44.11	+33.18.9	9,9671	9,9813	7.57	
11		7.52.52	+32.54.6	9,9590	9,9779		
12		8.1.37	+32.28.0	9,9508	9,9747	7.50	
13		8.10.25	+31.58.4	9,9424	9,9719		
14		8.19.15	+31.25.1	9,9336	9,9693	7.45	
15		8.28.7	+30.49.3	9,9246	9,9671		
16		8.36.58	+30.10.9	9,9154	9,9653	7.40	
17		8.45.49	+29.29.7	9,9060	9,9638		
18		8.54.39	+28.45.5	9,8964	9,9623	7.37	
19		9.3.28	+27.58.5	9,8864	9,9623		
20		8.12.15	+27.9.0	9,8761	9,9620	7.36	
21	9.20.59	+26.16.9	9,8655	9,9626			
22	9.29.38	+25.22.5	9,8546	9,9634	7.37		
23	9.38.11	+24.25.8	9,8434	9,9644			
24	9.46.38	+23.26.7	9,8319	9,9656	7.40		
25	9.55.0	+22.25.7	9,8200	9,9677			
26	10.3.16	+21.22.9	9,8078	9,9700	7.44		
27	10.11.26	+20.18.4	9,7963	9,9728			
28	10.19.30	+19.12.2	9,7823	9,9760	7.51		
29	10.27.27	+18.4.7	9,7689	9,9727			
30	10.35.18	+16.55.8	9,7552	9,9838	7.59		
Oct.	1	10.43.3	+15.45.8	9,7410	9,9883		
	2	10.50.43	+14.34.7	9,7267	9,9931	8.10	
	3	10.58.18	+13.22.6	9,7120	9,9983		
	4	11.5.48	+12.9.8	9,6968	0,0039	8.22	
Oct.	5	11.13.14	+10.56.2	9,6814	0,0098		

Days moyen	Berlin.	R.	(D).	log r.	log Δ.	T. d'aberr.
1899.	h m s					m s
6	11.20.36	+ 9.42. 0	9,6659	0,0159	8.36	
7	11.27.55	+ 8.27. 2	9,6503	0,0223		
8	11.35.12	+ 7.11. 8	9,6347	0,0289	8.52	
9	11.42.29	+ 5.56. 0	9,6191	0,0357		
10	11.49.45	+ 4.39. 8	9,6042	0,0427	9. 9	
11	11.57. 2	+ 3.23. 2	9,5897	0,0498		
12	12. 4.20	+ 2. 6. 4	9,5762	0,0570	9.27	
13	12.11.40	+ 0.49. 4	9,5627	0,0542		
14	12.19. 4	- 0.27. 6	9,5531	0,0713	9.47	
15	12.26.30	- 1.44. 4	9,5744	0,0783		
16	12.34. 0	- 3. 0. 9	9,5377	0,0853	10. 6	
17	12.41.34	- 4.16. 9	9,5336	0,0921		
18	12.49.13	- 5.32. 2	9,5321	0,0987	10.25	
19	12.56.53	- 6.46. 1	9,5336	0,1050		
20	13. 4.34	- 7.58. 3	9,5374	0,1111	11.43	
21	13.12.16	- 9. 8. 9	9,5439	0,1169		
22	13.19.59	-10.17. 7	9,5527	0,1225	11. 0	
23	13.27.41	-11.24. 3	9,5634	0,1278		
24	13.35.21	-12.28. 7	9,5757	0,1329	11.16	
25	13.42.59	-13.30. 5	9,5893	0,1378		
26	13.50.34	-14.29. 9	9,6036	0,1426	11.31	
27	13.58. 6	-15.26. 8	9,6187	0,1472		
28	14. 5.33	-16.21. 2	9,6341	0,1516	11.46	
29	14.12.56	-17.13. 1	9,6497	0,1560		
30	14.20.14	-18. 2. 4	9,6654	0,1603	12. 0	
31	14.27.27	-18.49. 3	9,6809	0,1646		
v. 1	14.34.36	-19.33. 9	9,6963	0,1687	12.14	

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

t. CXII, n^{os} 11-13.et *Puiseux*. — Détermination de la constante de l'aberra-

s méthodes employées jusqu'ici pour déterminer la constante de
rration ont conduit à des valeurs fort divergentes : les écarts dépassent
plus de 20 fois les erreurs probables. C'est que ces diverses déter-

minations sont sujettes à des causes d'erreurs systématiques très difficiles à éliminer; par exemple la méthode qui a donné jusqu'ici les meilleurs résultats, et qui déduit cette constante d'observations de latitude faites avec un instrument placé dans le premier vertical, suppose la latitude de parfaitement invariable, ce qui est loin d'être certain. Bien au contraire, on peut affirmer qu'il se produit des variations, au moins apparentes, et qui, tant qu'on ne saura pas en tenir compte, vicieront les résultats fournis par cette méthode.

Aidé de M. Puiseux, M. Lœwy vient d'employer, pour la détermination de la même constante, cette sorte de compas céleste différentiel qu'il a imaginé, consistant en un double miroir placé devant l'objectif et destiné à ramener dans la même direction les rayons venant d'étoiles angulairement très éloignées les uns des autres.

Cette première Note est consacrée principalement à montrer les discordances des résultats obtenus jusqu'ici et à indiquer les causes d'erreurs systématiques qui ont conduit à des nombres si divergents. Elle dit aussi quelques mots des observations faites en 1890-1891, qui ne sont pas encore complètement réduites, mais qui conduiront à un nombre très peu différent de celui proposé d'abord par W. Struve ($20''$, 445).

Ce résultat est particulièrement intéressant au point de vue de la Physique céleste. On admet généralement que la loi de la propagation de la lumière est indépendante du mouvement de la source lumineuse. Mais les lois de la réflexion restent-elles aussi les mêmes quand la surface réfléchissante est en mouvement? En d'autres termes, un observateur placé à la surface de la terre trouvera-t-il la même aberration pour la lumière réfléchie et pour la lumière directe? Il doit en être ainsi en vertu de considérations théoriques développées en 1887 par M. Fizeau et cette déduction théorique est aujourd'hui confirmée par l'expérience, puisque les observations de MM. Lœwy et Puiseux, faites avec un équatorial coudé, c'est-à-dire sur des rayons réfléchis trois fois, conduisent au même résultat que les observations de W. Struve et dans lesquelles les rayons ne subissaient aucune réflexion. Voici, du reste, les conclusions de cette Note :

- « 1° Le chiffre $20''$, 445 proposé par W. Struve est très rapproché de la vérité. Il serait encore prématuré, à notre avis, de vouloir le modifier;
- » 2° Ainsi que l'a prévu M. Fizeau, les rayons réfléchis se comportent, au point de vue de l'aberration, comme les rayons directs;
- » 3° La méthode nouvelle pour la recherche de l'aberration peut être regardée comme éprouvée et définitive. »

Lœwy et Puiseux. — Détermination de la constante de l'aberra-

tion. Valeurs numériques déduites de l'observation de deux groupes de quatre étoiles.

Cette seconde Note expose : 1° le mode d'opération suivi en faisant les observations; 2° les procédés de calcul employés pour la réduction; 3° les valeurs numériques fournies par l'observation de deux groupes de quatre étoiles.

1° Chaque observation, qui dure une heure au plus, consiste essentiellement à mesurer la différence des arcs qui séparent deux couples d'étoiles : l'emploi simultané de deux couples élimine l'influence de l'imperfection de la mise au foyer et celle de la variation possible de l'angle du double miroir dans l'intervalle des mesures. Chaque différence mesurée dans une soirée fournit une équation de condition.

2° Pour le calcul numérique on peut grouper de différentes manières les équations de condition ainsi obtenues, suivant l'observateur, suivant les saisons, etc. Ces divers modes de groupement donneront, pour la constante de l'aberration, des résultats légèrement différents, quoique fondés exactement sur les mêmes observations : MM. Læwy et Puiseux passent en revue les divers modes de groupement et indiquent leurs avantages particuliers. Ils insistent aussi sur diverses causes qui ont augmenté l'erreur probable de leurs résultats et n'hésitent pas à croire que pour cette recherche l'équatorial ordinaire a une grande supériorité sur l'équatorial coudé.

3° Enfin les résultats déduits de deux couples sont les suivants :

Couple de 19 ^h : Correction de la constante de Σ ..	+ 0",027 ± 0",033
Couple de 0 ^h :	» — 0",023 ± 0",035

d'où résulte, pour la valeur finale de la constante de l'aberration,

$$20",447 \pm 0",024.$$

Berget (Adolphe). — Méthode graphique pour déterminer les valeurs relatives de la gravité en différents lieux.

L'auteur propose d'enregistrer photographiquement les oscillations d'un pendule et a successivement employé deux dispositifs. Celui qu'il préfère enregistre l'oscillation tout entière sous forme de sinuséide. A cet effet, le pendule porte une petite lentille qui donne sur une pellicule sensible et mobile l'image très fine d'un petit trou vivement éclairé par une lampe à pétrole. Sur les graphiques mêmes qui enregistrent les oscillations on pourrait inscrire, dit l'auteur, les instants des passages

méridiens des étoiles, et, comme on peut facilement construire des pendules qui oscillent plus de 24 heures, les déterminations seraient exemptes des irrégularités des pendules astronomiques. Enfin il se propose d'employer un pendule invariable oscillant dans le vide et à la température de zéro, ce qui donnerait évidemment des valeurs très précises de l'intensité relative de la pesanteur en différents lieux.

Brillouin (Marcel). — Sur le degré de complexité des molécules gazeuses.

Remarques intéressantes sur les spectres des vapeurs et des gaz incandescents.

Colley (R.), Michkine (N.) et Kazine (M.). — Observations actinométriques faites à l'Observatoire de l'Académie Petrowska près de Moscou.

Crova (A.). — Remarques sur les observations de MM. R. Colley, H. Michkine et M. Kazine.

Mouches. — Troisième réunion du Comité international permanent pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel. (Voir p. 362).

Pomel (A.). — Les tremblements de terre du 15 et du 16 janvier 1891 en Algérie.

Bigourdan (G.). — Nébuleuses nouvelles, découvertes à l'Observatoire de Paris (3 Notes).

Ces listes (n^{os} 103 à 214) font suite à celles que l'on trouve dans le tome CV (p. 926 et 1116) des *Comptes rendus*. Les nébuleuses qu'elles renferment ont été découvertes principalement de 1887 à 1890 avec l'équatorial de la Tour de l'Ouest, de 0^m,31 d'ouverture. La plupart sont très faibles et voisines d'autres nébuleuses signalées antérieurement. Cependant le n^o 152 est une nébuleuse brillante, qui pourrait se placer dans la classe I de W. Herschel.

Gaillot (A.). — Sur les variations observées de la latitude d'un même lieu.

Résultats fournis par une assez longue série d'observations faites au

cercle de Gambey, de août 1854 à septembre 1857, et présentant un concours de circonstances particulièrement favorables : observations nombreuses du nadir et d'étoiles culminant près du zénith, lectures constamment faites sur les mêmes traits pour toutes les observations similaires, soirées d'observation presque toujours commencées et terminées par un nadir.

Ces observations n'accusent aucune variation annuelle sensible de la latitude, mais elles établissent l'existence d'un minimum chaque soir vers 9^h.

Deslandres (H.). — Méthode nouvelle pour la recherche des bandes faibles dans les spectres de bandes. Application au spectre des hydrocarbures.

En 1887, M. Deslandres a fait connaître une loi générale de répartition des bandes dans le spectre de bandes; aujourd'hui il l'applique au spectre du carbone pour trois bandes d'origine un peu douteuse encore et il montre qu'elles suivent exactement cette loi : il est donc très probable que ces trois bandes appartiennent bien au spectre des hydrocarbures. « Cette application de la loi de répartition des bandes constitue une méthode nouvelle pour la recherche des bandes faibles qui sont noyées dans un mélange de groupes de bandes différents. Elle est le premier exemple de la découverte par le calcul de bandes nouvelles dans les spectres de bandes, la première découverte analogue pour les spectres de lignes, ayant été faite, comme on sait, par M. Lecoq de Boisbaudran ».

Tillo (général Alexis de). — Grandes anomalies magnétiques du centre de la Russie d'Europe.

Entre Charkov et Koursk, entre des points qui ne sont pas éloignés de plus de 12^{km}, la déclinaison magnétique subit la variation énorme de 86°, passant de 48° Ouest à 38° Est. L'inclinaison varie de 29° et l'intensité totale passe de 0,84 à 0,65 (unité électrique). La constitution géologique du sol, autant qu'elle est connue, ne permet pas d'expliquer cette anomalie extraordinaire.

Planète (304) *Millosewich*, observations par M^{lle} Klumpke.

G. B.

Sixième fascicule.

A mesure que l'on se rapproche du moment de l'exécution de la Carte photographique du Ciel, les questions à étudier encore et à résoudre prennent un caractère de plus en plus technique et spécial; aussi le présent fascicule est en majeure partie consacré à des études instrumentales dont il est à peu près impossible de donner une analyse, de sorte que pour un certain nombre de Mémoires nous devons nous borner à mentionner leurs titres.

Kapteyn (J.-C.). — Plan et détails de l'appareil parallactique de mesures.

Gautier (P.). — Description d'un appareil parallactique de mesures.

Scheiner (J.). — Sur une méthode très simple permettant d'orienter un instrument à monture parallactique plus exactement qu'on ne peut le faire en général par des lectures des cercles.

En adoptant les notations ordinaires, on a

— $\lambda \cosh = x$ = l'erreur du pôle instrumental dans le sens du méridien;
 $\lambda \sinh = y$ = l'erreur du pôle instrumental dans la direction perpendiculaire au méridien.

On trouve aisément, pour la variation de la déclinaison en fonction de celle de l'angle horaire,

$$\frac{d\delta}{d\tau} = x \sin \tau + y \cos \tau,$$

de sorte que $\frac{d\delta}{d\tau}$ est indépendant de la déclinaison, de la collimation et de l'obliquité des deux axes; au méridien, y agit seul, tandis que c'est x qui agit seul dans le cercle horaire de $\pm 6^h$.

Pour annuler y , le mouvement d'horlogerie étant lancé, on visera donc une étoile zénithale située au méridien, et on la placera sur la croisée des fils. Si après quelques minutes elle s'éloigne du fil de déclinaison, on la ramènera sur ce fil en déplaçant l'instrument en azimut, et y se trouvera annulé.

On procédera d'une façon analogue pour annuler x , mais en employant alors une étoile située dans le cercle horaire de $\pm 6^h$.

Wolf (Max.). — Sur la loi des diamètres photographiques des disques stellaires.

Entre le diamètre photographique D d'une étoile et la durée d'exposition t , M. Charlier a trouvé la relation

$$D = D_0 t^{\frac{1}{2}}.$$

Mais cette formule ne représente pas les résultats obtenus par M. Wolf, d'après des clichés donnés par deux objectifs de 0,16 et de 0,06 d'ouverture; ses nombres sont au contraire bien représentés par la formule logarithmique

$$D = D_0 \log t + E_0.$$

Dunér (C.). — Sur les clichés types des étoiles de la 11^e et de la 14^e grandeur.

Kapteyn (J.-C.). — Théorie des erreurs de l'instrument paralactique de mesure et de réduction des clichés.

Dunér (C.). — Sur la détermination des grandeurs photographiques des étoiles.

La seule méthode propre à obtenir les grandeurs photographiques des étoiles consiste à mesurer les diamètres des points stellaires sur les clichés. Mais, outre l'éclat des étoiles, ces diamètres dépendent du temps de pose, de la sensibilité des plaques, de l'action plus ou moins énergique et plus ou moins prolongée du bain de développement, ainsi que de sa température, etc. Ces faits conduisent à plusieurs méthodes, plus ou moins rationnelles, permettant d'évaluer les grandeurs photographiques. M. Dunér les passe successivement en revue; et après avoir discuté en détail celle qui consiste à tirer parti de la formule de M. Gould (c'est-à-dire à employer le nombre des étoiles d'un même diamètre comme *criterium* de leur grandeur), il propose finalement un procédé pratique basé sur la définition suivante des grandeurs photographiques :

La relation entre l'éclat de deux étoiles qui diffèrent l'une de l'autre d'une grandeur photographique est exprimée par le facteur par lequel on doit multiplier ou diviser le temps de pose d'une plaque donnée, pour rendre égal le diamètre de l'image d'une

étoile, sur le nouveau cliché, à l'image de l'autre étoile sur le cliché donné.

www.libtool.com.cn

Henry (Prosper). — Mesure de la dispersion atmosphérique

Cette Note, insérée d'abord dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, a déjà été analysée (voir p. 170 de ce vol.).

G. B.

VARIÉTÉS.

L'OBSERVATOIRE DE PÉKIN;

PAR M. RUSSELL (*).

L'Observatoire de Pékin, le plus ancien qui existe au monde, fut construit en 1279 sous le règne de Khoubilaï-Khan, premier empereur de la dynastie mongole. Il est situé le long des fortifications et se compose de deux terrasses dont l'une, très élevée, est de forme carrée. Une petite porte pratiquée dans le mur Sud de l'Observatoire donne accès sur une grande cour ombragée, dirigée de l'Est à l'Ouest, où se trouvent trois instruments qui furent construits en 1279 par l'astronome Ko-Cheou-King.

Déjà antérieurement, vers 1050 de notre ère, sous la dynastie Song, on avait construit des instruments astronomiques en bronze qu'on avait installés d'abord à K'ai-Feng-Fu, la capitale de la province de Honan, et transportés dans la suite à Pékin. Mais ces instruments, détériorés par le temps, n'étaient pas faits pour la latitude de Pékin; aussi Ko-Cheou-King fut-il chargé d'en construire quatre nouveaux, un équatorial armillaire, un astrolabe, un altilimut et un globe, qui occupent encore aujourd'hui leur emplacement d'autrefois.

Dans la partie Est de la cour se trouve l'équatorial armillaire, en bronze comme les autres instruments; il est formé de 7 cercles dont le premier, qui est horizontal, est supporté par 4 dragons majestueux. Un double cercle vertical, solidement fixé au précédent dans les régions Nord et Sud, repose par sa partie inférieure

(*) Note extraite des *Chinese Times*, avril 1888, par M^{lle} D. Klumpke.

ar un pilier de bronze. Puis d'autres cercles mobiles représentent e colure des solstices, le colure des équinoxes, l'équateur et l'éclip-ique; enfin, à l'intérieur de ceux-ci, se trouve le cercle de déclinaison, cercle double qui peut tourner seul autour de l'axe polaire; an tube creux, servant à viser les astres, se meut entre ces deux cercles; il est probable que ce tube était autrefois muni de croisées de fils qui définissaient la ligne de vision. Tous ces cercles sont divisés en $365^{\circ} \frac{1}{4}$; le degré est subdivisé en $10'$.

Dans la partie Ouest de la cour se trouvent l'astrolabe et l'altazimut.

L'astrolabe consiste en un cercle de bronze fixe, parallèle à l'équateur et en un cercle double perpendiculaire à celui-ci et pouvant tourner autour d'un axe parallèle à l'axe du monde. Ici encore, un tube creux servait à l'observation des astres. Cet instrument est d'une construction plus simple et moins lourde que le précédent; en outre, il est le seul de l'Observatoire dont la monture se rapproche de celle aujourd'hui en usage.

L'altazimut, formé d'un cercle horizontal fixe et d'un cercle vertical mobile, servait à la détermination des azimuts et des hauteurs des astres.

Ces instruments ressemblent beaucoup à ceux que fit construire Tycho Brahé, le premier astronome en Europe qui ait eu des instruments en métal. Ainsi donc, en ce qui concerne la construction de leurs instruments, les Chinois ont devancé les Européens de trois siècles. Considérés comme instruments scientifiques ou simplement comme œuvres d'art, ces monuments témoignent de la grande habileté que les Chinois avaient acquise dans ces premiers siècles.

Au commencement de la dynastie des Tsin, les instruments mongols étaient tombés en désuétude. « Ils étaient lourds, dit Verbiest, d'une manœuvre difficile et d'une si grande profusion d'ornements que, dans certaines positions du tube, les observations n'étaient guère possibles. » Ils étaient, en outre, désorientés, et ne possédaient aucun moyen de rectification. Les recherches astronomiques semblent avoir été peu cultivées vers la fin de la dynastie des Ming.

En 1670, sous Khang-Hi, Verbiest fut chargé de la construction de six nouveaux instruments; la même année, ce célèbre jésuite fut élu membre du Tribunal astronomique. Les instruments dus au P. Verbiest diffèrent peu des anciens instruments mongols;

ils sont toutefois d'une construction plus précise, pourvus de moyens de rectification et présentent une plus grande commodité de manœuvre. Ils semblent avoir été faits sur le modèle de ceux de Tycho Brahé. Les cercles sont tous divisés en 360° et non plus en $365^{\circ}\frac{1}{4}$; le degré est subdivisé en 6 parties dont chacune correspond à $10'$, et à l'aide d'une échelle l'observateur peut lire les $15''$; les anciens instruments, au contraire, ne donnaient que les $10'$. Dans la suite, deux autres instruments ont été ajoutés à ceux du P. Verbiest : l'un, un équatorial armillaire, qui date de la neuvième année du règne de Chien-Lung; l'autre, un altazimut, remarquable surtout par l'absence de tout ornement; il paraît avoir été envoyé par Louis XIV à l'empereur Khang-Hi.

Le Qw'ei-Ying-T'ang, bâtiment composé de trois pièces, constitue l'une des parties les plus intéressantes de l'Observatoire; il date d'une époque fort reculée. A l'intérieur se trouve une table en pierre, d'environ $4^m,9$ de long et de $0^m,8$ de large, autour de laquelle ont été creusés de petits canaux destinés à recevoir l'eau qui sert à mettre la table de niveau. A l'extrémité Sud, on remarque un pilier de bronze, de près de 3^m de hauteur, qui présente à sa partie supérieure un petit trou circulaire de $0^m,08$ de diamètre. Vers l'extrémité Nord, se trouve un autre petit pilier de bronze d'environ 1^m de haut. A midi, les rayons du Soleil pénétrant par cette ouverture circulaire forment sur la table une ombre elliptique du Soleil; au solstice d'hiver, cette ombre se forme sur le pilier de bronze situé du côté Nord. C'est par l'observation de la distance de l'image solaire au pied du pilier de bronze Sud qu'on déterminait les points solsticiaux et équinoxiaux.

Tous ces instruments ne sont plus aujourd'hui d'aucun usage. Ceux de la cour inférieure, les instruments mongols, étaient à l'époque de leur construction les plus beaux qui existassent au monde. Ils sont néanmoins bien inférieurs aux instruments à cercles construits par le P. Verbiest. Dans l'opinion de ce missionnaire, ce genre d'instruments suffisait amplement aux besoins des Chinois; aussi ne le vit-on pas adopter la lunette qui servait alors en Europe dans les observations astronomiques, et dont le mode d'emploi devait être connu des Chinois, grâce au *Traité sur les lunettes* écrit par le P. Schall.

L'Observatoire de Paris possède une belle collection des photo-

graphies de tous ces instruments, collection qui a figuré à l'Exposition de 1889. Sept grandes vues représentent la cour inférieure, les anciens instruments mongols, puis les deux instruments plus récents; d'autres photographies plus petites donnent des vues d'ensemble sur l'Observatoire, la terrasse supérieure, les instruments de Ko-Cheou-King et du P. Verbiest.

Une question se pose : D'après le Chou-King, un des livres sacrés des Chinois, ceux-ci connaissent les instruments astronomiques depuis près de 4000 ans. Comment expliquer le peu de progrès qu'ils ont fait au point de vue des constructions? Supérieurs aux Européens, au XIII^e siècle, pourquoi, à l'heure actuelle, leur sont-ils si inférieurs? La cause principale de cet arrêt de développement se trouve peut-être dans le but même que les Chinois poursuivaient dans leurs recherches astronomiques. Pour eux, l'objet essentiel était la construction du calendrier et la détermination de l'heure. Des observations très précises ne leur étaient pas nécessaires; aussi le besoin de posséder des instruments plus parfaits ne s'est-il jamais fait sentir chez eux. Les grands problèmes sur la nature de la voûte céleste, sur le Soleil, la Lune, les planètes, les étoiles, sur la distance de la Terre à ces différents astres n'ont jamais fixé bien sérieusement l'attention des astronomes chinois. Néanmoins, depuis la plus haute antiquité, l'Astronomie chez eux a toujours été en honneur. Au moment même où s'ouvre l'histoire de la Chine, plus de trente siècles avant J.-C., les progrès faits par eux dans cette Science étaient déjà notables. Les étoiles avaient reçu des noms, on avait reconnu les constellations zodiacales, on avait déterminé les saisons, la durée de l'année était connue avec une certaine approximation. L'empereur Yao, ainsi que le rapporte le Chou-King, donnait des instructions à ses quatre astronomes pour la détermination des équinoxes et des solstices au moyen de la culmination des étoiles. Il leur nommait les étoiles qu'ils verraient, dans le crépuscule, passer au méridien. Mais l'époque de ces observations est si vague et, d'autre part, le mouvement de précession si lent que les données que l'on possède ne suffisent pas pour fixer avec certitude la date du règne de Yao. Il faut aller jusqu'au règne de Chung-K'ang, le quatrième empereur de la dynastie Hia, la première dynastie impériale, pour trouver dans le Chou-King des traces de recherches astronomiques.

C'est dans une des premières années du règne de ce prince, peut-être même dans la première, qu'eut lieu une éclipse de Soleil célèbre dans l'Histoire, non seulement à cause de sa très haute antiquité (elle est antérieure de 1500 ans à toutes celles dont les autres nations aient gardé le souvenir), mais à cause du sort terrible que subirent les deux astronomes Hsi et Ho. Ceux-ci, surpris par ce phénomène et non préparés à célébrer les cérémonies d'usage, furent d'après le Chou-King punis de mort.

Le Tribunal astronomique se compose de 18 personnages officiels ayant à leur tête le cinquième prince du sang. Le personnel, y compris les élèves, est au nombre de 196. Le privilège d'appartenir à cette docte assemblée est devenu, de fait, absolument héréditaire, grâce au soin que prend le Tribunal de tenir cachées les Tables lunaires, solaires et autres qui servent à la construction du calendrier; aussi, de génération en génération, les mêmes fonctions sont-elles remplies par les membres des mêmes familles. Ces fonctions sont simplement honorifiques; le peuple ne se plaint donc pas trop de cette usurpation. La tâche principale qui incombe au Tribunal astronomique est la construction du calendrier, livre le plus important qu'on publie en Chine et dans lequel on trouve, outre les phénomènes astronomiques, la liste des jours fastes et néfastes; il est bien peu de Chinois qui ne consultent ces pages avant de s'engager dans les transactions, quelque peu importantes qu'elles soient. Enfin un autre devoir, non moins important, consiste dans l'observation des éclipses de Lune et de Soleil; les instruments dont disposent les astronomes chinois ne servent guère à d'autre but. C'est grâce à ces observations qu'on a pu déterminer, entre autres, l'année de l'avènement de Chung-K'ang, qu'il faut rapporter à 2136 avant J.-C. et non à 2158, date généralement acceptée; de même, l'éclipse totale de Lune du 29 janvier 1136 avant J.-C. nous apprend que Vou-Vang, le chef de la dynastie des Tchéou, parvint au trône en 1110 et non en 1121.

La veille du jour de l'an, à minuit, des membres du Tribunal astronomique, réunis en séance et entourés de bannières, regardent de quel côté souffle le vent, puis ils prononcent leur augure sur la nouvelle année.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

DÉTERMINATION DES MOUVEMENTS PROPRES DES ÉTOILES
DU CATALOGUE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS;

PAR M. JOSEPH BOSSERT.

Nous présentons ici le Tableau des étoiles ayant un mouvement propre appréciable et qui sont comprises dans le tome II (6^h à 12^h d'*R*) du Catalogue de l'Observatoire de Paris. Ce Tableau est conforme et fait suite à celui qui est publié dans le *Bulletin astronomique*, t. IV, p. 509; les mêmes règles ont été suivies pour la comparaison des positions intermédiaires, mais nous avons pu y joindre les données déduites d'un certain nombre de Catalogues que nous avons eus à notre disposition depuis la publication de la première partie de notre travail. Ces Catalogues sont les suivants :

Kam (1855,0), Bruxelles (1865,0), Nine Years Catalogue (1872,0), Armagh II (1875,0), Gould (1875,0), Christiania (1875,0), Dorpat (1875,0), Leyde (1875,0), Krueger (1875,0), Lund (1875,0), Albany (1875,0), Seeliger (1880,0), Küstner (1885,0), Dunsink (1885,0), Cincinnati (1885,0).

Pour la comparaison des positions déduites de Bessel, nous avons eu souvent recours à une nouvelle réduction au moyen des excellentes Tables de M. E. Luther, ce qui nous a permis d'améliorer sensiblement les positions obtenues et nous a fait reconnaître un certain nombre d'erreurs de réductions de la part de Weisse.

Numéros.		Mouvements propres.		Numéros.		Mouvements propres.	
Paris.	Lalande.	<i>R</i> .	<i>Q</i> .	Paris.	Lalande.	<i>R</i> .	<i>Q</i> .
7401	11774	0,0000	+0,236	7702	6 Lynx	0,0000	+0,345
7446	11831	-0,0040	+0,263	7711	12296	-0,0309	+0,210
7448	11855	-0,0056	+0,203	7715	12350	+0,0051	+0,085
7527	12018	-0,0153	-0,167	7813	1159 Gr.	0,0000	+0,625
7557	12029	0,0000	+0,130	7821	12535	-0,0109	+0,310
7558	12056	+0,0133	+0,247	7927	12671	+0,0054	+0,179
7584	12041	+0,0089	0,000	7970	12758	0,0000	+0,090
7603	12084	0,0000	+0,078	8004	12780	+0,0058	+0,081
7632	12184	+0,0023	+0,068	8048	12850	0,0000	+0,082
7678	12283	+0,0173	+0,226	8061	12831	0,0000	+0,186

Numéros.		Mouvements propres.		Numéros.		Mouvements p
Paris.	Lalande.	R.	Q.	Paris.	Lalande.	R.
8082	12856	+0,0230	+0,209	9216	14594	+0,0074 -
8098	12920	0,0000	+0,070	9226	14619	-0,0111 -
8119	12903	0,0000	-0,179	9284	14706	-0,0054 -
8137	12964	-0,0072	+0,234	9293	α ¹ Gém.	-0,0095 -
8197	13047	0,0000	+0,131	9312	14671	0,0000 -
8253	13198	0,0000	+0,204	9325	14744	0,0000 -
8255	13150	+0,0067	+0,188	9356	14844	0,0000 -
8293	13284	-0,0333	0,000	9363	14834	-0,0195 -
8299	15 Lynx	+0,0023	+0,105	9379	14779	-0,0143 -
8321	13288	+0,0182	+0,201	9390	14859	0,0000 -
8325	13310	+0,0055	+0,087	9409	14851	0,0000 -
8359	13373	-0,0083	0,000	9413	14895	+0,061 -
8366	278 Piazz VI ^h	+0,0285	+0,346	9430	14938	0,0000 -
8412	13396	-0,0099	+0,119	9439	14950	0,0000 -
8421	13387	-0,0026	+0,113	9451	14930	-0,0075 -
8564	13614	0,0000	+0,081	9458	14962	+0,0062 -
8647	13753	+0,0041	-0,268	9460	1339 Gr.	-0,2093 -
8683	13784	0,0000	+0,262	9487	15077	0,0000 -
8689	13791	0,0000	+0,250	9589	15277	+0,0167 -
8693	13796	0,0000	+0,103	9598	15287	+0,0048 -
8717	13792	-0,0047	+0,187	9654	15389	+0,0052 -
8736	13812	0,0000	+0,098	9655	15333	0,0000 -
8744	13849	-0,0095	-0,514	9687	15430	-0,0182 -
8747	13856	-0,0031	+0,111	9763	15560	-0,0170 -
8784	13921	0,0000	-0,209	9775	15556	-0,0115 -
8810	18 Lynx	-0,0144	+0,256	9785	15547	+0,0185 -
8844	13972	-0,0291	+0,155	9796	15565	-0,0082 -
8852	13942	+0,0046	+0,179	9835	15579	-0,0063 -
8873	14003	+0,0041	+0,103	9906	15795	-0,0107 -
8890	14045	0,0000	+0,121	9958	15911	0,0000 -
8926	14056	+0,0098	0,000	9975	15925	-0,0062 -
8940	14080	+0,0060	+0,166	9993	15950	-0,0353 -
8961	14146	-0,0370	-0,120	10014	16027	-0,0154 -
8974	14145	0,0000	+0,120	10018	16004	+0,0055 -
9040	14340	+0,0088	+0,107	10045	15976	-0,0329 -
9082	14378	-0,0081	+0,074	10056	16091	+0,0143 -
9112	2445 B.A.C.	-0,0185	0,000	10167	16304	+0,0148 -
9124	14431	-0,0055	+0,157	10168	16270	0,0000 -
9134	63 Gém.	-0,0034	-0,109	10204	16309	0,0000 -
9152	14463	+0,0111	-0,204	10207	16284	0,0000 -
9165	14494	0,0000	+0,060	10220	16369	-0,0053 -
				10246	16404	0,0000 -
				10297	16494	+0,0100 -

nos.	Mouvements propres.		Numéros.		Mouvements propres.	
	R.	Q.	Paris.	Lalande.	R.	Q.
Lalande. 16509	-0,0135	0,000	11321	18115	-0,1738	+0,592
16506	-0,0114	+0,157	11358	18192	-0,0115	-0,050
16491	0,0000	+0,130	11364	18219	+0,0090	+0,305
16469	0,0000	+0,371	11408	18256	0,0000	+0,131
16465	-0,0174	+0,117	11419	18286	0,0000	+0,514
16622	0,0000	+0,106	11437	18300	-0,0020	+0,118
16895	-0,0060	+0,158	11500	18390	0,0000	+0,133
16896	-0,0060	+0,143	11513	18397	-0,0314	+0,373
16933	-0,0066	+0,180	11521	18422	0,0000	+0,117
17046	0,0000	+0,502	11524	18450	+0,0055	+0,120
17050	+0,0094	+0,295	11535	18472	0,0000	+0,118
17053	+0,0125	+0,296	11583	18517	0,0000	+0,113
17103	-0,0157	-0,385	11595	18522	0,0000	+0,166
17081	0,0000	+0,279	11636	18572	0,0000	+0,140
17122	-0,0116	+0,060	11652	18596	-0,0167	0,000
17158	+0,0061	+0,196	11653	h Gr. O.	+0,0170	-0,025
17169	0,0000	+0,134	11672	18660	+0,0092	0,000
17143	-0,0079	+0,034	11673	18661	+0,0131	0,000
17161	-0,0214	+0,624	11674	22 Gr. O.	+0,0139	+0,076
17199	0,0000	+0,219	11680	18594	-0,0088	-0,066
17257	+0,0149	0,000	11698	18715	-0,0085	+0,125
17354	0,0000	+0,264	11786	18812	-0,0574	+0,270
Érev. 17480	-0,0314	+0,237	11801	18857	0,0000	+0,208
17480	+0,0141	+0,247	11863	18914	0,0000	+0,147
17507	+0,0088	+0,260	11864	18847	-0,0126	+0,070
17472	0,0000	+0,176	11870	18937	-0,0133	0,000
17528	-0,0061	+0,220	11909	18986	0,0000	+0,148
17582	0,0000	+0,137	11952	19051	-0,0015	+0,094
17705	0,0000	+0,130	11998	19160	0,0000	+0,131
17697	-0,0382	+0,269	12015	19159	+0,0210	+0,091
17789	0,0000	+0,212	12020	19199	0,0000	+0,128
17815	-0,0110	+0,075	12048	v Gr. O.	-0,0357	+0,156
17792	0,0000	+0,154	12078	19267	-0,0198	+0,095
17874	+0,0046	+0,125	12105	19303	+0,0037	+0,180
17876	-0,0143	+0,067	12110	19318	+0,0062	+0,201
17901	+0,0172	0,000	12113	19306	+0,0220	+0,128
17937	0,0000	+0,109	12167	19386	0,0000	+0,132
1279 Br.	+0,0164	+0,061	12181	19419	+0,0057	+0,195
17982	-0,0098	+0,143	12211	19470	+0,0134	+0,093
Érev. 175	-0,0079	+0,378	12216	19430	-0,0118	+0,011
18069	-0,0236	+0,106	12264	19514	0,0000	+0,124
18101	+0,0155	0,000	12275	19529	-0,0237	+0,034
18137	-0,0366	-0,228	12288	19545	-0,0409	+0,471

Numéros.		Mouvements propres.		Numéros.		Mouvements prop.	
Paris.	Lalande.	R.	Q.	Paris.	Lalande.	R.	
12342	19604	-0,0110	+0,134	12816	20251	-0,0101	-
12343	19624	0,0000	+0,108	12845	20315	-0,0294	-
12344	19634	-0,0094	0,000	12876	20351	-0,0106	-
12363	19635	-0,0157	0,000	12921	20401	-0,0098	-
12376	19659	-0,0048	+0,093	12929	20438	0,0000	+
12384	19681	+0,0060	+0,225	12932	20443	0,0000	+
12394	19697	-0,0103	0,000	12962	20483	0,0000	+
12420	19726	0,0000	+0,101	12977	20494	+0,0133	+
12436	19749	-0,0171	0,000	12980	20501	0,0000	-
12441	19780	0,0000	+0,363	13017	20541	+0,0174	+
12445	19782	-0,0168	0,000	13040	20554	-0,0224	+
12449	19795	0,0000	+0,189	13049	20577	-0,0120	+
12460	19818	0,0000	-0,180	13058	20593	-0,0092	-
12468	19808	+0,0076	+0,179	13124	20671	+0,0161	+
12474	19822	-0,0133	+0,087	13127	20665	-0,0096	+
12480	19821	-0,0279	-0,060	13129	20653	-0,0282	+
12493	19852	+0,0124	+0,115	13135	20679	0,0000	+
12494	19845	-0,0137	+0,202	13138	20687	+0,0091	+
12511	19863	0,0000	+0,114	13195	20751	-0,0094	+
12517	19880	-0,0071	+0,167	13198	20760	-0,0265	+
12530	19875	0,0000	+0,094	13203	20759	-0,0145	+
12532	19897	-0,0146	-0,050	13211	20775	-0,0268	+
12533	19888	-0,0058	+0,120	13254	20853	+0,0057	-
12534	19896	+0,0150	+0,108	13274	20882	0,0000	-
12568	19927	-0,0036	+0,117	13282	20881	-0,0150	-
12573	19937	-0,0170	-0,035	13311	20925	-0,0206	-
12574	19932	+0,0035	+0,094	13315	20921	+0,0054	-
12586	19952	-0,0310	+0,091	13321	20945	-0,0172	+
12604	19965	+0,0072	+0,319	13334	20959	-0,0155	-
12607	19991	-0,0111	+0,043	13341	20969	+0,0049	+
12615	19992	-0,0160	+0,074	13368	20992	0,0000	+
12635	20017	-0,0156	+0,209	13378	21008	-0,0333	+
12670	20066	-0,0109	+0,147	13381	21014	+0,0100	-
12671	20089	-0,0102	-0,238	13390	21032	-0,0208	-
12688	20100	0,0000	+0,334	13400	21036	-0,0070	-
12699	20128	0,0000	+0,105	13404	21043	0,0000	+
12700	20111	-0,0192	+0,120	13442	21080	-0,0286	-
12709	20131	0,0000	+0,085	13455	21101	-0,0109	-
12713	20142	-0,0147	+0,051	13462	21096	-0,0090	-
12730	20155	-0,0082	+0,269	13468	21120	-0,0324	-
12772	20208	0,0000	+0,179	13495	21143	0,0000	-
12783	20222	-0,0097	-0,125	13508	21176	0,0000	-
12808	20253	-0,0097	+0,192	13523	21185	-0,0128	-

no.	Mouvements propres.		Numéros.		Mouvements propres.	
	Lalande.	R. φ .	Paris.	Lalande.	R. φ .	
21200	0,0000	+0,171	14074	21899	-0,0248	+0,195
21203	0,0000	+0,152	14083	21911	0,0000	+0,178
21237	-0,0338	+0,080	14102	21926	+0,0114	+0,190
21295	-0,0262	+0,072	14124	21947	-0,0166	+0,118
21315	-0,0168	-0,169	14134	21965	-0,0120	+0,108
21328	0,0000	+0,162	14174	22006	0,0000	+0,100
21358	-0,0172	0,000	14177	22011	-0,0136	+0,066
21373	-0,0134	+0,200	14221	22080	-0,0233	+0,142
21368	+0,0440	+0,215	14222	22083	0,0000	+0,255
21387	-0,0108	+0,248	14258	22114	0,0000	+0,247
21389	-0,0090	+0,238	14259	22116	0,0000	+0,405
21429	+0,0089	+0,200	14267	22128	0,0000	+0,110
21454	0,0000	+0,175	14273	22132	-0,0279	-0,026
21455	-0,0180	+0,112	14330	22189	-0,0179	0,000
21453	-0,0243	+0,173	14356	22218	-0,0043	+0,111
21458	-0,0257	+0,167	14367	22231	0,0000	+0,152
21506	0,0000	+0,126	14371	22232	-0,0109	+0,191
21560	0,0000	+0,161	14374	22237	-0,0125	+0,127
21565	+0,0548	+0,144	14378	22242	0,0000	+0,183
21571	0,0000	+0,198	14393	22258	+0,0176	0,000
21584	-0,0155	-0,116	14422	22293	-0,0102	0,000
21586	-0,0154	+0,116	14426	22302	-0,0105	+0,175
21637	-0,0150	+0,226	14436	22322	0,0000	+0,180
21640	-0,0146	0,000	14483	22385	-0,0195	-0,090
21657	0,0000	+0,135	14533	22440	0,0000	+0,191
21691	-0,0221	+0,024	14561	22472	-0,0050	+0,102
21771	0,0000	+0,161	14573	22494	0,0000	+0,134
21770	-0,0198	+0,034	14585	22506	-0,0109	0,000
21783	-0,0438	-0,159	14591	22508	-0,0158	+0,092
21805	0,0000	+0,174	14668	22585	0,0000	+0,466
21815	-0,0139	0,000	14698	22623	-0,0306	-0,067
21846	0,0000	+0,169	14727	22662	-0,0100	0,000
21849	-0,0094	0,000	14732	22667	+0,0043	+0,535
21863	0,0000	+0,252	14737	22673	-0,0142	+0,053
21882	-0,0251	-0,216	14761	22701	-0,0353	0,000
21898	-0,0235	+0,217				

is avons trouvé, en outre, un certain nombre d'étoiles pour les les discordances dans les comparaisons peuvent s'expliquer l'hypothèse d'un mouvement propre, mais les positions édiaires étant en trop petit nombre ou bien disséminées manière peu favorable, il nous reste quelque doute sur la

réalité et la valeur de ce mouvement propre. Ces étoiles réunies dans le Tableau suivant :

Numéros.		Mouvements propres		Numéros.		Mouvements propres	
Paris.	Lalande.	R.	U.	Paris.	Lalande.	R.	U.
7255	11622	+0,0050	+0,093	11962	19080		+0
7298	11676		+0,074	11964	19084		+0
7576	12038		+0,115	11983	19101	-0,0096	
7650	12230		+0,116	11988	19107	-0,0202	
7754	12413	+0,0087		12049	19218		-0
8085	12867	+0,0044	+0,203	12070	19271		-0
8112	12949		+0,100	12155	19388		+0
8158	13004	+0,0114		12192	19409	-0,0146	+0
8309	13279		+0,140	12202	19460		+0
8436	13425		+0,146	12244	19475	-0,0124	
8509	13514	+0,0098		12312	19584		+0
8567	13586		-0,135	12325	19593	+0,0127	+0
8660	13759	+0,0069	+0,180	12362	19646		-0
8718	13809		+0,151	12432	19744	-0,0070	-0
8882	14000		+0,136	12452	19783		-0
9192	14557		+0,121	12503	19853		-0
9643	15325		+0,156	12567	19915	+0,0084	-0
9833	15682	+0,0090	+0,177	12579	19931	-0,0075	
10430	16688		+0,150	12792	20223	+0,0155	
10598	17005	+0,0172		12991	20510	-0,0193	
10613	17017	-0,0040		12993	20516	+0,0094	+0
10905	17500		+0,085	13007	20533	-0,0087	-0
11028	17690	-0,0030	+0,093	13098	20644		-0
11072	17613	-0,0050	+0,090	13141	20674		-0
11238	18024		+0,123	13202	20755		+0
11312	18132		+0,135	13412	21042	-0,0077	
11404	18263	-0,0049	+0,090	13439	21086		-0
11475	18359	+0,0092	+0,174	13499	21157		+0
11599	18559		+0,094	13592	21305		+0
11620	18563		+0,191	13713	21459		+0
11634	18584		+0,093	13937	21715		-0
11640	18600	-0,0100	+0,200	13958	21740	-0,0127	
11648	18593	-0,0164	+0,153	13996	21798		+0
11655	18613		+0,160	14030	21854		-0
11681	18672	-0,0292	+0,074	14069	21891		-0
11728	18718		-0,226	14082	21907		-0
11788	18802	-0,0125		14089	21914		-0
11866	18939	+0,0134		14159	21986	+0,0081	-0
11889	18916	-0,0088	+0,135	14163	21992		-0

N ^{os} numéros.		Mouvements propres.		Numéros.		Mouvements propres.	
no.	Lalande.	R.	Q.	Paris.	Lalande.	R.	Q.
66	21993	-0,0100	*	14600	22522		+0,109
67	21995	-0,0150		14620	22546		+0,136
479	22379		+0,230	14680	22599	-0,0092	+0,102
491	22395	-0,0045	+0,146	14726	22659	-0,0062	+0,090
496	22399		+0,100	14757	22696	-0,0029	+0,132
4570	22489	-0,0210		14763	22703	-0,0100	

Afin de rendre aussi complet que possible notre Tableau synoptique des mouvements propres publié dans le *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 98, on devra y faire les additions suivantes, qui proviennent soit de nouvelles déterminations de mouvements propres faites depuis la publication de ce travail, soit de déterminations anciennes qui n'étaient pas alors suffisamment justifiées, soit de quelques valeurs qui nous avaient échappé dans notre recherche. Nous remercions vivement M. Holden d'avoir bien voulu nous signaler quelques omissions.

Noms.	Gr.	Positions 1890,0.		Mouvement propre.			
		R.	(Q).	R.	(Q).	Résult.	Direct.
8760 Lac.....	7.8	21.10 ^h	-39 ^m .17 ^s	-0,285	-1,24	3,53	249,5
1915 A + 59 ^o	8.9	18.42	+59.27	-0,171	+1,90	2,30	325,4
592 W ₁	8.9	5.26	-3.41	+0,046	-2,14	2,25	162,1
661 Lac.....	6	2.6	-51.23	+0,220	+0,69	2,17	71,5
954 W ₁	9	9.45	-11.45	+0,078	-1,34	1,76	139,6
175 W ₁	8	23.11	-14.24	-0,033	-1,21	1,30	201,4
3993 A + 5 ^o	9	18.52	+5.48	-0,015	-1,20	1,22	190,4
502 W ₁	8.9	21.24	-12.59	+0,063	-0,27	0,96	106,2
5761 Lal.....	8	3.3	+25.57	-0,012	-0,89	0,91	190,6
95 W ₁	8.9	2.9	-1.43	+0,060	-0,14	0,91	98,5
47231 Lal.....	8.9	0.0	+45.12	+0,084	-0,14	0,90	98,7
617 W ₁	7	3.35	-3.34	+0,050	-0,25	0,80	108,3
47207 Lal.....	6.7	23.59	+34.3	+0,063	+0,08	0,78	83,8
27742 Lal.....	6.7	15.8	+19.41	-0,042	+0,34	0,68	299,6
83 ^o Lion.....	7	11.21	+3.36	-0,044	+0,16	0,66	283,9
45755 Lal.....	7.8	23.16	+43.29	+0,055	+0,24	0,65	68,4
26196 Lal.....	7.8	14.14	-4.38	-0,043	-0,09	0,65	261,8
29381 Lal.....	7	16.1	+39.27	-0,052	+0,08	0,61	277,3
21368 Lal.....	8.9	11.5	+31.3	+0,044	-0,22	0,60	110,8
8683 Lal.....	7	20.6	+15.51	-0,032	+0,36	0,59	307,5
9439 Lal.....	8.9	16.3	+38.58	+0,017	-0,51	0,54	159,3

Noms.	Gr.	Positions 1890,0.		Mouvement propre.			
		R.	(D).	R.	(D).	Résult.	Direct.
22667 Lal.....	9	11.58 ^h + 3.58 ^m		+0,004	-0,54	0,54	173,2
161 W ₁	8	1.13	- 1.26	+0,031	-0,26	0,54	119,1
45028 Lal.....	7.8	22.56	- 4.26	+0,031	-0,26	0,53	119,7
18397 Lal.....	7	9.15	+40.41	-0,031	-0,37	0,52	223,7
1353 Lal.....	7	0.44	-23.49	+0,036	+0,15	0,52	73,3
18286 Lal.....	8	9.11	+29.2	0,000	-0,51	0,51	180,0
5638 Lal.....	6	2.57	-28.30	+0,020	-0,44	0,51	148,6
1799 Lal.....	8	0.57	+ 4.28	+0,031	+0,21	0,51	65,7
19896 Lal.....	8.9	10.8	+ 3.43	+0,015	-0,41	0,51	143,8
30699 Lal.....	7.8	16.43	+68.18	-0,051	+0,43	0,51	326,8
695 Lac.....	6	2.14	-26.28	-0,017	+0,45	0,50	332,6
17046 Lal.....	8	8.34	+11.56	0,000	-0,50	0,50	180,0
20881 Lal.....	8	10.46	+20.53	-0,015	-0,45	0,50	205,0
39704 Lal.....	6.7	20.29	+41.30	-0,017	+0,46	0,50	337,8

ÉTUDES SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION ;

PAR M. R. RADAU.

[Suite (1)].

25. La formule de M. Tchébychef, destinée à représenter des observations de même poids, lorsque f est développable en série suivant les puissances de x , peut s'écrire comme il suit :

$$(46) \quad f = \psi_0(x) \frac{\sum f_i \cdot \psi_0(x_i)}{\sum \psi_0^2(x_i)} + \psi_1(x) \frac{\sum f_i \cdot \psi_1(x_i)}{\sum \psi_1^2(x_i)} + \dots$$

Les fonctions $\psi_s(x)$ sont les dénominateurs des réduites qui se rencontrent dans le développement en fraction continue de la somme

$$(47) \quad \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{1}{x-x_n}.$$

On a d'ailleurs $\psi_0 = 1$, et l'on s'assure facilement que la fonction $\psi_s(x)$ de M. Tchébychef n'est autre chose que la différence $\Delta^s x$,

(1) Voir *Bulletin astronomique*, VIII, p. 275 et 325.

de Cauchy. En vertu de (31), on a donc

$$(48) \quad \sum \psi_p \cdot \psi_s = 0.$$

La formule (46) revient à celle-ci

$$f = \frac{1}{n} \sum f + \frac{(f \Delta x)}{(\Delta x \Delta x)} \Delta x + \frac{(f \Delta^2 x^2)}{(\Delta^2 x^2 \cdot \Delta^2 x^2)} \Delta^2 x^2 + \dots,$$

qui coïncide avec notre série (33). Mais M. Tchélychef y arrive par une autre voie, et fait usage d'algorithmes ingénieux pour le calcul des coefficients. Dans le Mémoire de 1859, les sommes $(f \cdot \Delta^s x^s)$ sont ramenées à la forme équivalente $(x^s \cdot \Delta^s f)$ et les calculs reposent sur des séries récurrentes; on les applique à un exemple numérique.

26. Un cas particulier très intéressant est celui où les valeurs données f_i correspondent à des intervalles égaux de l'argument x . Comme nous l'avons déjà dit, il est alors permis d'identifier $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ avec les nombres 1, 2, 3, ..., n , de sorte que la série (47) devient

$$(49) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n}.$$

En désignant par D^s les différences finies ordinaires, M. Tchélychef montre qu'on aura

$$(50) \quad \psi_s(x) = D^s \Phi_s,$$

où

$$(51) \quad \Phi_s = (x-1)(x-2)\dots(x-s)(x-n-1)\dots(x-n-s),$$

à un facteur constant près, qui reste évidemment arbitraire.

La fonction ψ_s , ainsi définie, joue dans le calcul inverse des différences un rôle analogue à celui des polynômes de Legendre dans le Calcul intégral.

La formule (46) se transforme comme il suit :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{1}{n} \sum_1^n f_i + \frac{3}{n(n^2-1)} \psi_1(x) \sum_1^n \frac{i}{1} \frac{n-i}{1} Df_i \\ &+ \frac{5}{n(n^2-1)(n^2-4)} \psi_2(x) \sum_1^n \frac{i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1.2.1.2} D^2 f_i + \dots \end{aligned} \right.$$

Dans le Mémoire de 1859, M. Tchébychef remplace x par $z = \Delta x$; on a

$$x = z + \frac{n+1}{2},$$

par conséquent

$$(53) \Phi_s = \left(z + \frac{n-1}{2}\right) \left(z + \frac{n-3}{2}\right) \dots \left(z + \frac{n-2s+1}{2}\right) \left(z - \frac{n+1}{2}\right) \dots \left(z - \frac{n+2s-1}{2}\right)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \left(z^2 - z - \frac{n^2-1}{4}\right) \left(z^2 - 3z - \frac{n^2-9}{4}\right) \dots \\ &= \left[z(z-1) - \frac{n^2-1}{4}\right] \left[(z-1)(z-2) - \frac{n^2-1}{4}\right] \dots \left[(z-s)(z-s+1) - \frac{n^2-1}{4}\right] \end{aligned}$$

Comme on a d'ailleurs $Dx = Dz$, on pourra prendre les différences par rapport à z . En faisant, avec M. Tchébychef, $\psi_s = D^s \Phi_s$, le terme le plus élevé de ψ_s devient

$$D^s z^{2s} = \frac{(2s)!}{s!} z^s + \dots$$

Pour réduire le coefficient de z^s à l'unité, nous poserons plutôt

$$(54) \quad \psi_s = \frac{s!}{(2s)!} D^s \Phi_s = C \cdot D^s \Phi_s.$$

On trouve alors $\psi_s = \Delta^s x^s$, et

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = z, \quad \psi_2 = z^2 - \frac{n^2-1}{12}, \quad \psi_3 = z^3 - \frac{3n^2-7}{20} z, \quad \dots$$

ou bien

$$\psi_1 = x - \frac{n+1}{2}, \quad \psi_2 = x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}, \quad \dots$$

Quant à la démonstration de ces formules, elle est facile à l'aide de certains théorèmes du calcul aux différences finies. En faisant $\mathfrak{S} = D^{-1}$ on a, comme on sait (1),

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = \sum_1^n f_i = \mathfrak{S}^{n+1} f_{n+1}$$

(1) Dans les formules de M. Tchébychef, \sum_0^m signifie aussi somme jusqu'à m exclusivement.

puis, pour deux fonctions f, F ,

$$\sum F_x \cdot Df_x = F_x \cdot f_x - \sum F_{x+1} \cdot Df_x,$$

et par suite

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x \cdot D^s f_x = F_x \cdot D^{s-1} f_x - D F_x \cdot D^{s-2} f_{x+1} \\ \quad + D^2 F_x \cdot D^{s-3} f_{x+2} - \dots \pm D^{s-1} F_x \cdot f_{x+s-1} \mp \sum f_{x+s} \cdot D^s F_x. \end{array} \right.$$

Toutes les différences Df qui se rencontrent hors du signe \sum se déduisent de la série de valeurs $f_x, f_{x+1}, \dots, f_{x+s-1}$, correspondant aux arguments $x, x+1, \dots, x+s-1$, qui, pour les deux limites $x=1$ et $x=n+1$, deviennent respectivement $1, 2, \dots, s$, et $n+1, n+2, \dots, n+s$. Or, en vertu de (51), Φ_s s'annule pour ces arguments. Il s'ensuit qu'en faisant $f = \Phi_s$, les termes hors du signe \sum s'évanouissent aux limites et qu'on aura, d'une manière générale,

$$\sum_1^{n+1} F \cdot D^s \Phi_s(x) = \mp \sum_1^{n+1} \Phi_s(x+s) D^s F,$$

ou bien

$$(56) \quad \sum_1^n F \cdot D^s \Phi_s(x) = (-1)^s \sum_1^n \Phi_s(x+s) D^s F,$$

Φ_s étant défini par la formule (51). Lorsque F représente une fonction rationnelle d'un degré r , inférieur à s , on a $D^s F = 0$, et il vient

$$(57) \quad \sum_1^n F \cdot D^s \Phi_s = 0.$$

Dès lors, en posant $F = D^r \Phi_r$, $r < s$, nous aurons

$$(58) \quad \sum D^r \Phi_r \cdot D^s \Phi_s = 0,$$

et cette relation a lieu, évidemment, pour $r \leq s$. C'est précisément la relation (31), ou (48), qui suffit à déterminer les fonctions ψ_s à un facteur numérique près. On en conclut que

$$(54) \quad \psi_s(x) = C \cdot D^s \Phi_s.$$

Pour transformer les numérateurs ($f \cdot \psi_s$), nous avons, en vertu de (56), en écrivant i pour x ,

$$(59) \quad \frac{1}{C} \sum f \cdot \psi_s = \sum_1^n f_i \cdot D^s \Phi_s(i) = (-1)^s \sum_1^n \Phi_s(i+s) D^s f_i,$$

où

$$(60) \quad \Phi_s(i+s) = i(i+1) \dots (i+s-1)(i-n) \dots (i-n+s-1).$$

On a

$$\Phi_0 = 1, \quad \Phi_1(i+1) = i(i-n), \quad \Phi_2(i+1) = i(i+1)(i-n)(i-n+1).$$

Il reste à transformer les dénominateurs $\sum \psi_s^2$. En faisant, dans la formule (59), $f = \psi_s$, on trouve

$$(61) \quad \frac{1}{C} \sum \psi_s^2 = (-1)^s \sum_1^n \Phi_s(i+s) D^s \psi_s(i).$$

Or, le terme le plus élevé de ψ_s étant x^s , on a $D^s \psi_s = s!$, et en remarquant encore que $\Phi_s(i+s)$ s'annule depuis $i = n - s + 1$ jusqu'à $i = n$, l'équation (61) se réduit à celle-ci

$$(62) \quad \frac{1}{C} \sum \psi_s^2 = (-1)^s s! \sum_1^{n-s} \Phi_s(i+s).$$

On a d'ailleurs, en faisant toujours $C = \frac{s!}{(2s)!}$,

$$(63) \quad C \cdot D^s(i-s) \dots (i+s-1) = i(i+1) \dots (i+s-1);$$

en nous servant de cette relation pour transformer Φ_s , et introduisant S à la place de \sum , (62) peut s'écrire

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C^2} \sum \psi_s^2 &= (-1)^s s! \sum_1^{n-s+1} (i-n) \dots (i-n+s-1) \\ &\times D^s(i-s) \dots (i+s-1). \end{aligned} \right.$$

Si nous appliquons la formule générale (55) à l'expression qui précède, il vient

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C^2} \sum \psi_s^2 &= s! \sum_1^{n-s+1} i(i+1) \dots (i+2s-1) \\ &\times D^s(i-n) \dots (i-n+s-1). \end{aligned} \right.$$

car les termes hors du signe disparaissent aux deux limites [ceux qui dépendent du premier produit $(i - n) \dots$ à la limite supérieure, à cause du facteur $i - n + s - 1$, et ceux qui dépendent du second $(i - s) \dots$ à la limite inférieure, à cause du facteur $i - 1$]. Or

$$D^s(i - n) \dots (i - n + s - 1) = D^s i^s = s!$$

et

$$i(i + 1) \dots (i + 2s - 1) = \frac{1}{2s + 1} D(i - 1)i \dots (i + 2s - 1).$$

En substituant, intégrant et mettant les limites, on trouve

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C^2} \sum \psi_s^2 &= \frac{s! s!}{2s + 1} n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \dots (n^2 - s^2) \\ &= \frac{s! s!(n + s)!}{(2s + 1)(n - s - 1)!} \end{aligned} \right.$$

On pourrait établir cette formule à l'aide de l'expression générale

$$\int \Phi_s(i + s) = \frac{i - 1}{2s + 1} \Phi_s(i + s) \left[1 + \frac{s(n + s)}{2s(n - i)} + \dots \right],$$

mais la démonstration qui précède peut suffire. En substituant (59) et (66) dans la formule (46), on obtient la série (52) de M. Tchébychef, qui devient

$$\left(\begin{aligned} f &= \frac{1}{n} \sum f_i + \frac{2.3}{n(n^2 - 1)} \psi_1(x) \sum \frac{i}{1} \frac{n - i}{1} Df_i + \dots \\ &+ \frac{(2s + 1)! \psi_s(x)}{s! n(n^2 - 1) \dots (n^2 - s^2)} \sum \frac{i}{1} \dots \frac{i + s - 1}{s} \frac{n - i}{1} \dots \frac{n - i - s + 1}{s} D^s f_i + \dots, \end{aligned} \right.$$

à cause du facteur C , introduit par la formule (54).

27. Il faut enfin chercher une expression de ψ_s , appropriée au calcul numérique. Nous avons

$$(51) \quad \Phi_s(x) = (x - 1) \dots (x - s)(x - n - 1) \dots (x - n - s),$$

$$(54) \quad \psi_s = C. D^s \Phi_s = \frac{s!}{(2s)!} D^s \Phi_s.$$

En posant

$$(68) \quad F_s(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - s),$$

on aurait

$$F_s(s + 1 - x) = (-1)^s F_s(x),$$

puis aussi

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} F_s(x+1) &= \frac{x}{x-s} F_s(x) = x F_{s-1}(x), \\ DF_s(x) &= \frac{s}{x-s} F_s(x), \\ D^2 F_s(x) &= \frac{s(s-1)}{(x-s)(x-s+1)} F_s(x), \quad \dots, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$\begin{aligned} DF_s(x) &= s F_{s-1}(x), \quad \dots, \\ D^m F_s(x) &= s(s-1)\dots(s-m+1) F_{s-m}(x) = \frac{s!}{(s-m)!} F_{s-m}(x), \\ D^m F_{m+i}(x) &= (i+1)\dots(i+m) F_i(x) = \frac{(i+m)!}{i!} F_i(x). \end{aligned}$$

Ensuite

$$(x-n-1)\dots(x-n-s) = F(x-n) = (-1)^s F(n+s+1-x)$$

et, par conséquent,

$$(70) \quad \Phi_s(x) = F_s(x) \cdot F_s(x-n).$$

On peut maintenant développer $F(x-n)$ par la formule des différences

$$F(x-n) = F(s+1-n) + \frac{x-s-1}{1} DF(s+1-n) + \dots;$$

d'où, par les relations (69),

$$\frac{F(x-n)}{F(s+1-n)} = 1 + \frac{s}{1} \frac{x-s-1}{1-n} + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} \frac{x-s-1}{1-n} \frac{x-s-2}{2-n} + \dots$$

ou bien

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^s \frac{F(x-n)}{F(n)} &= 1 - \frac{s}{1} \frac{x-s-1}{n-1} \\ &+ \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} \frac{x-s-1}{n-1} \frac{x-s-2}{n-2} - \dots \end{aligned} \right.$$

et, à cause de (70),

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^s \frac{\Phi_s(x)}{F_s(n)} &= F_s(x) - \frac{s}{n-1} F_{s+1}(x) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{s(s-1)}{(n-1)(n-2)} F_{s+2}(x) - \dots \end{aligned} \right.$$

Il s'ensuit que

$$(-1)^s \frac{D^s \Phi_s(x)}{F_s(n)} = D^s F_s(x) - \frac{s}{n-1} D^s F_{s+1}(x) + \dots$$

Or nous avons

$$D^s F_s = s!, \quad D^s F_{s+1} = (s+1)!(x-1),$$

$$D^s F_{s+2} = \frac{(s+2)!}{1.2} (x-1)(x-2), \quad \dots$$

et

$$(-1)^s s! F_s(n) = \Phi_s(s+1);$$

par conséquent

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} D^s \Phi_s(x) &= \Phi_s(s+1) \left[1 - \frac{s(s+1)}{1.1} \frac{x-1}{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s-1)s(s+1)(s+2)}{1.2.1.2} \frac{x-1}{n-1} \frac{x-2}{n-2} - \dots \right], \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(74) \quad \psi_s(x) = \frac{s! s!}{(2s)!} \sum_0^s \frac{(-1)^{\lambda+s}}{\lambda! \lambda!} \frac{(s+\lambda)!}{(s-\lambda)!} \frac{(x-1)!}{(x-\lambda-1)!} \frac{(n-\lambda-1)!}{(n-s-1)!},$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \psi_s(x) &= (-1)^s \frac{s! s!}{(2s)!} (n-1) \dots (n-s) \\ &\quad \times \left[1 - \frac{s(s+1)}{1} \frac{x-1}{n-1} + \frac{(s-1) \dots (s+2)}{1.2.1.2} \frac{x-1}{n-1} \frac{x-2}{n-2} - \dots \right] \\ &= (-1)^s \frac{s! s!}{(2s)!} F_s(n) \left[1 - \frac{s(s+1)}{n-1} F_1(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s-1) \dots (s+2)}{1.2.1.2(n-1)(n-2)} F_2(x) + \dots \right], \end{aligned}$$

ou bien, à rebours,

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_s(x) &= F_s(x) - s^2 \frac{n-s}{2s} F_{s-1}(x) \\ &\quad + \frac{s^2(s-1)^2}{1.2} \frac{n-s}{2s} \frac{n-s+1}{2s-1} F_{s-2}(x) - \dots \end{aligned} \right.$$

On a donc $\psi_n(x) = F_n(x)$, et $\psi_n(x_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

28. En posant

$$\psi_s(x) = \Lambda_0 + \Lambda_1 F_1 + \Lambda_2 F_2 + \Lambda_3 F_3 + \dots$$

on a, quelle que soit la fonction ψ_s ,

$$\begin{aligned} D\psi_s(x) &= A_1 + 2A_2F_1 + 3A_3F_2 + \dots, \\ D^2\psi_s(x) &= 1.2A_2 + 2.3A_3F_1 + 3.4A_4F_2 + \dots, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \psi_s(x+1) &= \psi_s(x) + D\psi_s(x) = B_0 + B_1F_1 + B_2F_2 + \dots, \\ D\psi_s(x+1) &= D\psi_s(x) + D^2\psi_s(x) = B_1 + 2B_2F_1 + 3B_3F_2 + \dots, \\ \psi_s(x+2) &= \psi_s(x) + 2D\psi_s(x) + D^2\psi_s(x) = C_0 + C_1F_1 + C_2F_2 + \dots, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 + A_1, & B_1 &= A_1 + 2A_2, & \dots, & B_\lambda &= A_\lambda + (\lambda + 1)A_{\lambda+1}, \\ C_0 &= B_0 + B_1, & C_1 &= B_1 + 2B_2, & \dots, & C_\lambda &= B_\lambda + (\lambda + 1)B_{\lambda+1}. \end{aligned}$$

On a aussi, comme il est facile de le vérifier,

$$(76) \quad \begin{cases} (x-1)\psi_s(x) = B_0F_1 + B_1F_2 + B_2F_3 + \dots, \\ (x-2)(x-1)\psi_s(x) = C_0F_2 + C_1F_3 + C_2F_4 + \dots \end{cases}$$

et, par analogie,

$$\begin{aligned} (x-1)D\psi_s(x) &= B_1F_1 + 2B_2F_2 + 3B_3F_3 + \dots, \\ (x-1)D^2\psi_s(x) &= 1.2B_2F_1 + 2.3B_3F_2 + \dots, \\ (x-1)(x-2)D^2\psi_s(x) &= 1.2C_2F_2 + 2.3C_3F_3 + \dots \end{aligned}$$

Ces relations permettent de constater, en premier lieu, que $\psi_s(x)$ satisfait à l'équation aux différences finies (analogue à l'équation différentielle des fonctions sphériques)

$$(77) \quad \begin{cases} (x+1)(x+1-n)D^2\psi_s(x) \\ + [2x+1-n-s(s+1)]D\psi_s(x) - s(s+1)\psi_s(x) = 0, \end{cases}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} \left[(z+1)(z+2) - \frac{n^2-1}{4} \right] D^2\psi + 2(z+1)D\psi &= s(s+1)(\psi + D\psi) \\ &= s(s+1)\psi(z+1). \end{aligned}$$

Cela résulte de la relation

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda+1)C_\lambda - (n-1)(\lambda+1)(\lambda+2)A_{\lambda+2} \\ + (3-n)(\lambda+1)^2B_{\lambda+1} - s(s+1)B_\lambda = 0, \end{aligned}$$

qui se déduit des suivantes

$$\begin{aligned} (\lambda+1)^2A_{\lambda+1} &= -\frac{(s-\lambda)(s+\lambda+1)}{n-\lambda-1}A_\lambda, \\ (\lambda+1)B_\lambda &= \frac{(\lambda+1)(n-1)-s(s+1)}{n-\lambda-1}A_\lambda. \end{aligned}$$

29. On s'assure aussi facilement, en réunissant les termes de même rang, que $(x - 1)\psi_s(x)$ est égal à la somme

$$\frac{n-1}{2} \psi_s + \psi_{s+1} + \frac{s^2}{4} \frac{n^2 - s^2}{4s^2 - 1} \psi_{s-1}.$$

Il en résulte l'identité

$$(78) \quad \psi_{s+1} + \left(\frac{n+1}{2} - x\right) \psi_s + \frac{s^2}{4} \frac{n^2 - s^2}{4s^2 - 1} \psi_{s-1} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(79) \quad \psi_{s+1} = x \cdot \psi_s - \frac{s^2}{4} \frac{n^2 - s^2}{4s^2 - 1} \psi_{s-1},$$

en faisant toujours $x = \frac{n+1}{2}$. Elle permet de déduire ψ_{s+1} de ψ_s et ψ_{s-1} . On a d'ailleurs

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = x.$$

En posant $2x = z_1$, $2^s \cdot \psi_s = z_s$, pour éviter l'introduction des facteurs 2^m dans les dénominateurs, l'équation (79) devient

$$z_{s+1} = z_1 \cdot z_s - s^2 \frac{n^2 - s^2}{4s^2 - 1} z_{s-1},$$

et nous avons l'algorithme

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 z_1 - \frac{1(n^2 - 1)}{1 \cdot 3}, \\ z_3 &= z_1 z_2 - \frac{4(n^2 - 1)}{3 \cdot 5} z_1, \\ z_4 &= z_1 z_3 - \frac{9(n^2 - 9)}{5 \cdot 7} z_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} &= z^2 - \frac{n^2 - 1}{12}, \\ &= z^3 - \frac{3n^2 - 7}{20} z, \\ &= z^4 - \frac{3n^2 - 13}{14} z^2 + \frac{3(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}, \\ &= z^5 - 5 \frac{n^2 - 7}{18} z^3 + \frac{15n^4 - 230n^2 + 407}{1008} z, \\ &= z^6 - 5 \frac{3n^2 - 31}{44} z^4 + \frac{5n^5 - 110n^3 + 329}{176} z^2 - 5 \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)(n^2 - 25)}{14784}, \\ &= z^7 - 7 \frac{3n^2 - 43}{32} z^5 + 7 \frac{15n^5 - 450n^3 + 2051}{2288} z^3 - \frac{35n^6 - 1645n^4 + 17297n^2 - 27207}{27456} z. \end{aligned}$$

La forme générale de $\psi_s(z)$ est assez compliquée, en voici les premiers termes

$$\begin{aligned} \psi_s = z^s - \frac{s(s-1)}{2^2(2s-1)} \left[n^2 - \frac{s(s-1)+1}{3} \right] z^{s-2} \\ + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^6(2s-1)(2s-3)} \left[n^4 - 2 \frac{s(s-1)+3}{3} n^2 \right. \\ \left. + \frac{5s^4 - 22s^3 + 37s^2 - 20s + 21}{45} \right] z^{s-4} + \dots \end{aligned}$$

30. Le terme général de la formule (67) peut s'écrire

$$(80) \quad (-1)^s \psi_s(x) \frac{(2s+1)!(n-s-1)!}{s!s!(n+s)!} \sum_{x=1}^{x=n} \Phi_s(x+s) D^s f(x).$$

En faisant

$$\begin{aligned} (-1)^s \Phi_s(x+s) &= x(x+1) \dots (x+s-1)(n-x-s+1) \dots (n-x) \\ &= \frac{(s+x-1)!}{(x-1)!} \frac{(n-x)!}{(n-x-s)!}, \end{aligned}$$

il devient

$$(81) \quad \psi_s(x) \frac{(2s+1)!(n-s-1)!}{s!(n+s)!} \sum_1^n \frac{(s+x-1)!}{s!(x-1)!} \frac{(n-x)!}{s!(n-x-s)!} D^s f(x),$$

où les deux facteurs de $D^s f$ sont des coefficients du développement de $(a+b)^{s+x-1}$ et de $(a+b)^{n-x}$.

En arrêtant la série (52) ou (67) au terme qui répond à $s = l - 1$, on trouve pour $f(x)$ une valeur approchée $f^{(l)}(x)$, qui, pour $x = 1$, sera $f^{(l)}(1)$. Pour la calculer, il faut faire $x = 1$ dans $\psi_s(x)$. La formule (74), qui se réduit alors à son premier terme, donne

$$(82) \quad \psi_s(1) = C_s \cdot \Phi_s(s+1) = (-1)^s \frac{s!s!}{(2s)!} \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!},$$

et le terme général de $f(1)$, que nous désignerons par \tilde{f}_s , devient

$$(83) \quad \tilde{f}_s = (-1)^s \frac{2s+1}{n} \frac{s!n!}{(n+s)!} \sum_1^n \frac{(s+x-1)!}{s!(x-1)!} \frac{(n-x)!}{s!(n-x-s)!} D^s f(x),$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$(-1)^s \frac{2s+1}{n} \sum_1^n \frac{A \cdot B}{C} D^s f,$$

où A, B, C sont des coefficients du développement de certaines puissances de $(a + b)$. On a ensuite

$$f^{(l)}(1) = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \dots + \mathfrak{F}_{l-1}.$$

Les différences successives $Df(1)$, $D^2f(1)$, ... s'obtiennent aussi facilement. Nous avons d'abord

$$\frac{1}{C} D^m \psi_s(x) = D^{m+s} \Phi_s(x)$$

et la série (72) montre que le premier terme effectif de $D^m \psi_s$ provient de $D^{m+s} F_{m+s}(x)$, les termes précédents étant nuls; ce terme est indépendant de x , les suivants ont le facteur $(x - 1)$ et s'annulent pour $x = 1$. Il ne reste donc qu'un seul terme, et l'on trouve, pour $x = 1$,

$$\frac{1}{C} D^m \psi_s(1) = (-1)^{s+m} F_s(n) \frac{1}{m!} \frac{s(s-1)\dots(s-m+1)}{(n-1)\dots(n-m)} D^{s+m} F_{s+m}$$

ou bien

$$(84) \quad \begin{cases} D^m \psi_s(1) = \frac{(-1)^{s+m}}{m!} \frac{s! s!}{(2s)!} \frac{(n-m-1)!}{(n-s-1)!} \frac{(s+m)!}{(s-m)!} \\ = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(n-m-1)!}{(n-1)!} \frac{(s+m)!}{(s-m)!} \psi_s(1). \end{cases}$$

En tenant compte de (81), il vient, pour le terme général de $D^m f(1)$,

$$(85) \quad D^m \mathfrak{F}_s = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(n-m-1)!}{(n-1)!} \frac{(s+m)!}{(s-m)!} \mathfrak{F}_s.$$

La somme devra être prise depuis $s = m$ jusqu'à $s = l - 1$, car, pour $s < m$, $D^m \psi_s$ s'annule, ψ_s étant du degré s . En désignant le coefficient de \mathfrak{F}_s par (m, s) , on aura donc

$$(86) \quad D^m f^{(l)}(1) = (m, m) \mathfrak{F}_m + (m, m+1) \mathfrak{F}_{m+1} + \dots + (m, l-1) \mathfrak{F}_{l-1}.$$

Pour le calcul des coefficients, il est bon de noter que $(0, s) = 1$, et

$$(87) \quad \frac{(m, s)}{(m-1, s)} = -\frac{(s+m)(s-m+1)}{m(n-m)} = -\frac{s(s+1)-m(m-1)}{m(n-m)}.$$

M. Tchébychef, dans son Mémoire de 1875, donne un exemple numérique de l'application de ces formules, qui sont particulièrement commodes.

31. On peut enfin, avec M. Tchébychef, chercher l'expression de la somme des carrés des erreurs ou résidus $\Delta'f$.

En partant de la formule

$$(46) \quad f(x) = \psi_0(x) \frac{\Sigma f \cdot \psi_0}{\Sigma \psi_0^2} + \psi_1(x) \frac{\Sigma f \cdot \psi_1}{\Sigma \psi_1^2} + \dots$$

et nous rappelant qu'en vertu de (48) nous avons

$$\Sigma \psi_r \psi_s = 0 \quad \text{pour } r \neq s,$$

nous obtiendrons Σf^2 en ne conservant dans f^2 que les carrés des termes successifs de (46),

$$\Sigma f^2 = \Sigma \psi_0^2 \left(\frac{\Sigma f \psi_0}{\Sigma \psi_0^2} \right)^2 + \Sigma \psi_1^2 \left(\frac{\Sigma f \psi_1}{\Sigma \psi_1^2} \right)^2 + \dots$$

ou bien

$$(88) \quad \Sigma f^2 = \frac{[\Sigma f \psi_0]^2}{\Sigma \psi_0^2} + \frac{[\Sigma f \psi_1]^2}{\Sigma \psi_1^2} + \dots$$

En allant jusqu'au dernier terme ψ_{n-1} , ces formules reproduisent les valeurs données de f_i et de Σf^2 . En nous arrêtant au terme ψ_{l-1} , nous trouvons la valeur approchée $f^{(l)}$, et la différence de Cauchy

$$\Delta'f = f - f^{(l)} = \psi_l(x) \frac{\Sigma f \psi_l}{\Sigma \psi_l^2} + \dots$$

représente l'erreur de la formule abrégée. On aura d'ailleurs, toujours à cause de (48),

$$(89) \quad \Sigma (\Delta'f)^2 = \frac{[\Sigma f \psi_l]^2}{\Sigma \psi_l^2} + \frac{[\Sigma f \psi_{l+1}]^2}{\Sigma \psi_{l+1}^2} + \dots$$

et, en comparant (88) et (89),

$$(90) \quad \Sigma (\Delta'f)^2 = \Sigma f^2 - \frac{[\Sigma f \psi_0]^2}{\Sigma \psi_0^2} - \dots - \frac{[\Sigma f \psi_{l-1}]^2}{\Sigma \psi_{l-1}^2}.$$

On en conclut que

$$(91) \quad \Sigma (\Delta'^{l+1}f)^2 = \Sigma (\Delta'f)^2 - \frac{[\Sigma f \psi_l]^2}{\Sigma \psi_l^2}$$

ou bien

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Sigma (\Delta'f)^2 - \Sigma (\Delta'^{l+1}f)^2 \\ & = \frac{2l+1}{l!l!} \frac{[\Sigma i(i+1) \dots (i+l-1)(n-i) \dots (n-i-l+1) \Delta'f]^2}{n(n^2-1) \dots (n^2-l^2)}. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs, pour $l = 1$,

$$\Delta f = f - \frac{1}{n} \Sigma f$$

et

$$\Sigma (\Delta f)^2 = \Sigma f^2 - \frac{1}{n} (\Sigma f)^2;$$

mais le calcul direct de Δf est évidemment plus simple.

32. Je tâcherai maintenant de donner, en quelques mots, une idée des recherches de M. Gram, en conservant toutefois la notation employée jusqu'ici. Il s'agit de déterminer par la méthode des moindres carrés, à l'aide des valeurs données f_1, f_2, \dots, f_n , les coefficients A, B, C, ... de la formule d'interpolation

$$f = Ax^0 + Bx' + Cx'' + \dots,$$

où x^0, x', x'', \dots sont des fonctions connues de x . Si la précision des observations est variable et qu'on désigne par v leur poids (l'inverse du carré de l'erreur moyenne), le problème consiste à rendre minima la somme

$$M_l = \Sigma v(f - f^l)^2,$$

où f^l , qu'on peut aussi écrire $f^{(l)}$, représente la valeur de f que donnerait la formule, arrêtée à l termes (la somme étendue à toutes les observations). Il en résulte l équations de condition de la forme

$$\Sigma v(f - f^l)x^i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, l-1).$$

En posant

$$(93) \quad \Sigma v f x^i = s_i, \quad \Sigma v x^i x^j = p_{ij},$$

elles deviennent

$$(94) \quad s_i = Ap_{i0} + Bp_{i1} + Cp_{i2} + \dots$$

et elles déterminent les l coefficients A, B, C, ... dont les valeurs dépendent du nombre l , tandis que les quantités s_i et p_{ij} en sont évidemment indépendantes.

Si nous prenons un terme de plus, f^l devient f^{l+1} , et les nouveaux coefficients sont donnés par $l+1$ équations de la même forme, dont nous retrancherons les précédentes. En désignant les différences des coefficients respectifs par a, b, c, \dots et faisant,

pour simplifier l'écriture des formules, $l = 2$, nous aurons les deux systèmes d'équations

$$\begin{aligned} s_0 &= Ap_{00} + Bp_{01} + Cp_{02}, & o &= ap_{00} + bp_{01} + Cp_{02}, \\ s_1 &= Ap_{10} + Bp_{11} + Cp_{12}, & o &= ap_{10} + bp_{11} + Cp_{12}, \\ s_2 &= Ap_{20} + Bp_{21} + Cp_{22}; & f^{(3)} - f^{(2)} &= ax^0 + bx' + Cx''. \end{aligned}$$

En égalant les deux valeurs de C, fournies par le premier et le second système, et qui sont des rapports de déterminants, il vient

$$C = \frac{[p_{00}p_{11}s_2]}{[p_{00}p_{11}p_{22}]} = \frac{[p_{00}p_{11}]}{[p_{00}p_{11}x'']} [f^{(3)} - f^{(2)}],$$

d'où l'on tire

$$f^{(3)} - f^{(2)} = \frac{[p_{00}p_{11}s_2]}{[p_{00}p_{11}p_{22}]} \frac{[p_{00}p_{11}x'']}{[p_{00}p_{11}]}$$

Pour $l = 1$, on aurait

$$f^{(1)} = \frac{s_0}{p_{00}} x^0,$$

et l'on trouve ainsi, par additions successives,

$$(95) \quad f = \frac{s_0}{p_{00}} x^0 + \frac{[p_{00}s_1]}{[p_{00}p_{11}]} \frac{[p_{00}x']}{p_{00}} + \frac{[p_{00}p_{11}s_2]}{[p_{00}p_{11}p_{22}]} \frac{[p_{00}p_{11}x'']}{[p_{00}p_{11}]} + \dots$$

On obtient donc pour f une série ordonnée suivant des polynômes qui sont des fonctions linéaires de x^0, x', x'', \dots . En les désignant par $\psi_m(x)$, nous aurons

$$(96) \quad \psi_m(x) = [p_{00}p_{11} \dots x^m] = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^0 & x' & \dots & x^m \end{vmatrix}$$

et, par suite,

$$[p_{00}p_{11} \dots s_m] = \Sigma v f \psi_m.$$

Enfin le dénominateur du terme général peut s'exprimer par $\Sigma v \psi_m^2$. En effet, on voit facilement que $\Sigma v \psi_m \psi_r$ s'obtient en remplaçant x^i , dans ψ_m , par $\Sigma v x^i \psi_m$; or, cette somme est nulle pour $i < r$, car elle s'obtient en remplaçant, dans ψ_r , la dernière ligne x^0, x', \dots, x^r par $p_{i0}, p_{i1}, \dots, p_{ir}$; pour $i = r$, elle représente le déterminant

$$[p_{00}p_{11} \dots p_{rr}] = P^{ir}.$$

Il s'ensuit que $\Sigma v \psi_m \psi_r$ s'annule pour $m < r$, et, par raison de

symétrie, aussi pour $r < m$; pour $r = m$, il reste le produit de $P^{(r)}$ par son premier déterminant mineur. On aura donc

$$(97) \quad \begin{cases} \sum v \psi_r \psi_s = 0 & \text{pour } r \geq s, \\ \sum v \psi_r^2 = P^{(r-1)} P^{(r)}. \end{cases}$$

Ces relations expriment la propriété caractéristique des fonctions ψ qui peuvent servir à développer f en séries *selon le principe des moindres carrés*. La « série d'interpolation » a la forme

$$(98) \quad f = \frac{\sum v f \psi_0}{\sum v \psi_0^2} \psi_0(x) + \frac{\sum v f \psi_1}{\sum v \psi_1^2} \psi_1(x) + \dots,$$

où $\psi_0(x) = x^0$. En l'arrêtant à ψ_m , elle représente le résultat de la *compensation* des observations données par une série procédant suivant les fonctions x^0, x^1, \dots, x^m . C'est proprement une formule d'interpolation si le nombre des termes $(m+1)$ égale n , et une formule d'approximation pour $m+1 < n$.

La série (98) coïncide avec celle de M. Tchébychef dans le cas où x^0, x^1, \dots sont les *puissances* de x . Lorsque x^0, x^1, \dots sont des fonctions ψ qui satisfont aux conditions (97), on a évidemment $p_{ij} = 0$ pour $i \geq j$, et les coefficients A, B, C, ... prennent la forme caractéristique de la série (98); on a, par exemple,

$$C = \frac{s_2}{p_{22}} = \frac{\sum v f x^2}{\sum v x^2 x^2}.$$

On trouve enfin, comme on le vérifie aisément, pour la somme qui devient un minimum,

$$(99) \quad M_l = \sum v f^2 - Q_l,$$

où

$$Q_l = \sum v f f^{(l)} = \frac{(\sum v f \psi_0)^2}{\sum v \psi_0^2} + \frac{(\sum v f \psi_1)^2}{\sum v \psi_1^2} + \dots,$$

et M_l tend vers zéro à mesure que l augmente.

33. M. Tchébychef n'avait considéré que les séries d'interpolation qui découlent d'un développement suivant les puissances ascendantes de x , en particulier pour $v = 1$; dans ce cas, pour des ordonnées équidistantes, la série (98) donne nos formules (52) ou (67). M. Gram indique encore une autre série pour $v = n_x$.

En prenant $\psi_i = \frac{F(x)}{(x-x_i)}$, on arrive à la formule d'interpolation de Lagrange

$$f = f_0 \frac{\psi_0(x)}{\psi_0(x_0)} + f_1 \frac{\psi_1(x)}{\psi_1(x_1)} + \dots$$

Les séries trigonométriques par lesquelles on représente une suite d'observations d'un phénomène périodique (BESSEL, 1827; *Astr. Nachr.*, n° 136) fournissent un autre exemple de séries d'interpolation, construites selon le principe des moindres carrés.

Lorsque la série doit servir à représenter une fonction continue $f(x)$, on remplace les intervalles de l'argument x par dx , les sommes se changent en intégrales définies, la première équation (97) devient

$$(100) \quad \int_a^b v \psi_r \psi_s dx = 0,$$

et le développement a la propriété de rendre minima l'intégrale

$$\int_a^b v (f - f^l)^2 dx,$$

f^l ou $f^{(l)}$ étant toujours la valeur de f fournie par l termes de série, et v une quantité positive fonction de x . On se trouve ainsi conduit aux fonctions V , étudiées autrefois par Sturm et Liouville (1836-1837).

De ce genre, sont les séries de Fourier (1), qui procèdent suivant les sinus et cosinus de mx ; on a ici $v = 1$, les limites des intégrales sont $+\pi$ et $-\pi$.

Les fonctions sphériques, ou polynômes de Legendre (2), satisfont à la même condition en prenant $v = 1$ et pour limites $+1$ et -1 . De même, les fonctions de Bessel, et d'autres polynômes qui sont étudiés dans le Traité de Heine. M. Gram, dans sa Thèse, a indiqué une grande variété de séries d'interpolation; il étudie, notamment, celles qu'on obtient en partant des formules

$$f = (a + b.x + c.x^2 + \dots)e^{-x}, \quad v = e^{-x}$$

(1) Voir la Notice historique de B. Riemann (*Bull. des Sc. math.*, t. V, juillet 1873), et une Note de M. Töpler (*Bull. de l'Acad. de Vienne*, 1876).

(2) G. PLAMB. *Comptes rendus*, mai 1857. — E. ROUCHE, *Journ. de l'École Polytechnique*, 1858.

$$f = (a + bx + cx^2 + \dots)e^{-x^2}, \quad v = e^{x^2},$$

les limites étant, dans le premier cas, 0 et ∞ , et dans le second $\pm \infty$.
 Pour le développement d'une fonction de deux variables suivant les Y de Laplace, M. F. Neumann a donné en 1838 une ingénieuse méthode que l'on trouve reproduite dans ses *Vorlesungen über die Theorie des Potentials* (1887) : elle suppose les valeurs données distribuées d'une certaine façon qui simplifie beaucoup le calcul des coefficients. Elle s'applique aussi aux polynômes de Legendre. M. Seeliger vient de publier des Tables auxiliaires destinées à faciliter l'application de cette belle méthode (1).
 (A suivre.)

ÉPHÉMÉRIDE DE LA PLANÈTE (173) INO

(GRANDEUR 9,9);

PAR M. L. FABRY.

(Les éléments ont été tirés du *Jahrbuch* pour 1891.)

Lieux moyens 1891,0.

12 h. T. m. de Paris.	R.	(D).	log Δ.	log r.
1901.	h m s			
OCT. 16	3.15.50	— 5.35,6	0,1092	0,3425
18	14.43	5.54,5		
20	13.32	6.12,8	0,1062	0,3432
22	12.15	6.30,4		
24	10.54	6.47,2	0,1045	0,3439
26	9.29	7. 3,1		
28	8. 1	7.18,0	0,1040	0,3447
30	6.30	7.31,8		
Nov. 1	4.56	7.44,5	0,1048	0,3454
3	3.20	7.56,1		
5	1.43	8. 6,5	0,1069	0,3462
7	3. 0. 6	8.15,5		
9	2.58.29	8.23,2	0,1101	0,3471
11	56.54	8.29,5		
13	55.20	8.34,5	0,1146	0,3480
Nov. 15	2.53.48	— 8.38,1		

(1) *Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine Reihe von Kugelfunctionen.* Munich. 1890.

12 h. T. m. de Paris.	R.	(D).	log Δ.	log
1891.	h m s			
Nov. 17.....	2. 32. 19	-8. 40, 4	0, 1203	0, 34
19.....	50. 53	8. 41, 2		
21.....	49. 30	8. 40, 6	0, 1270	0, 34
23.....	48. 11	8. 38, 8		
25.....	46. 57	8. 35, 7	0, 1347	0, 35
27.....	45. 48	8. 31, 2		
29.....	44. 44	8. 25, 5	0, 1433	0, 35
Déc. 1.....	43. 46	8. 18, 5		
3.....	42. 53	8. 10, 3	0, 1526	0, 35
5.....	42. 6	8. 0, 9		
7.....	41. 26	7. 50, 5	0, 1626	0, 35
9.....	40. 52	7. 39, 1		
11.....	40. 25	7. 26, 7	0, 1731	0, 35
13.....	40. 5	7. 13, 4		
15.....	2. 39. 52	- 6. 59, 2	0, 1840	0, 35

ÉPHÉMÉRIDE DE LA PLANÈTE 288 ;

Par M. R. LUTHER.

Selon une observation de M. A. Charlois, à Nice, du 30
 let 1891, la correction de ma première éphéméride de 288 (12, 5 gr.), était +1^m 46^s, +3', 7.

En faisant usage de cette observation, j'ai trouvé la correction
 ΔM = +17' et cette nouvelle éphéméride de 288 Glauke

12 h. Berlin.	R.	(D).	log Δ.	log r.	T d a
1891.	h m s				m
AOUT 17.....	20. 5. 47	-21. 4, 0	0, 2742	0, 4513	15. 3
21.....	3. 23	15, 8	0, 2820	0, 4526	15. 3
25.....	20. 1. 19	16, 3	0, 2904	0, 4538	16. 1
29.....	19. 59. 38	35, 3	0, 2994	0, 4550	16. 3
SEPT. 2.....	58. 20	42, 8	0, 3089	0, 4562	16. 5
6.....	57. 26	49, 0	0, 3188	0, 4575	17. 1
10.....	56. 58	53, 7	0, 3290	0, 4587	17. 4
14.....	56. 54	57, 0	0, 3394	0, 4598	18. 7
18.....	57. 14	59, 0	0, 3501	0, 4610	18. 3
22.....	57. 57	59, 7	0, 3608	0, 4622	19. 2
26.....	19. 59. 2	59, 2	0, 3716	0, 4634	19. 3
30.....	20. 0. 29	-21. 57, 4	0, 3824	0, 4645	20. 0

1889. 1890.	h	m	s	(D.)	log Δ.	log r.	T. d'aberr. m s
OCT. 4.	20.	2.	17	-21.54,4	0,3931	0,4656	20.30
8.		4.	25	50,2	0,4038	0,4667	21. 1
12.		6.	51	44,9	0,4143	0,4679	21.32
16.		9.	34	38,4	0,4247	0,4690	22. 3
20.	20.	12.	34	-21.30,8	0,4349	0,4701	22.35

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

MONTHLY NOTICES.

Février, mars et avril 1891.

Travaux des Observatoires anglais.

Greenwich. — Il est parlé d'arrangements, faits l'automne dernier, pour déterminer la variation d'équation personnelle suivant la grandeur de l'étoile. Les grandeurs des étoiles étaient modifiées d'une quantité constante en plaçant un écran de gaze devant l'objectif du cercle méridien, une partie du passage étant observée avec l'ouverture libre, l'autre avec l'écran. La comparaison des deux résultats donne la différence d'équation personnelle pour un changement de grandeur déterminé. Les observations ne sont pas finies encore.

Les thermomètres placés au nord et au sud de la trappe méridienne, en 1888 et 1889, indiquaient une distribution non symétrique de la température pendant les heures d'observation. Pour éliminer les erreurs d'index, ces thermomètres ont été échangés en janvier 1890; les lectures subséquentes ont confirmé les résultats obtenus en 1888-89. Cette question est toujours à l'étude. Le travail de l'objectif de 28 pouces touche à sa fin.

L'équatorial photographique pour la Carte du Ciel a été reçu au mois de mars 1890; il est maintenant prêt à fonctionner. A cause du mauvais temps, il y a eu peu de photographies d'étoiles, mais plusieurs expériences ont été faites sur la meilleure manière d'obtenir l'impression du réseau, sur les plaques à adopter; les clichés obtenus sont satisfaisants. L'appareil employé pour mesurer les photographies du passage de Vénus a été modifié pour servir provisoirement aux clichés de la Carte,

et c'est avec lui qu'on détermine les erreurs des deux réseaux par le professeur Vogel.

M. Hollis a fait un choix d'étoiles guides pour les plaques de la *Ca*. Elles sont empruntées à la *Durchmusterung* et les déclinaisons *v* de $+60^\circ$ au pôle nord. Les positions du Catalogue ont été empruntées en partie au Catalogue d'Helsingfors publié récemment (zone de $+60^\circ$ à $+65^\circ$), en partie, pour les déclinaisons supérieures à 81° , à Carrington et à d'autres autorités.

Les déterminations spectroscopiques des vitesses radiales des étoiles ont été faites sur le même plan que les années précédentes (538 mesures de la raie F et de la raie *b* dans les spectres de 53 étoiles, plus 84 mesures de raies dans les spectres solaire, lunaire, planétaire, pour servir de contrôle).

Édimbourg. — Le Rapport exprime l'espoir que les travaux du nouvel Observatoire destiné à recevoir les instruments de Dunecht vont bientôt commencer. Mention est faite du récent travail de spectroscopie du Dr Becker (*Bulletin*, VIII, 178) et de la publication du Catalogue de la bibliothèque de l'Observatoire de Dunecht.

Cap de Bonne-Espérance. — Les principaux objets d'observation ont été le Soleil, Mercure et Vénus, des étoiles appartenant à la liste du Catalogue décennal pour 1890, des étoiles occultées par la Lune, des étoiles employées aux déterminations de latitude dans les opérations géodésiques de l'Afrique australe, des étoiles de comparaison pour les comètes et des étoiles employées pour l'étude de la valeur de l'éche de l'héliomètre: en tout 6717 ascensions droites (sur lesquelles 2584 observations faites avec des écrans pour étudier l'influence des grandeurs d'étoiles sur l'équation personnelle), et 4512 distances polaires.

Avec la lunette zénithale, 638 couples d'étoiles ont été observés par la méthode de Talcott-Horrebrow, pour déterminer la latitude d'après le procédé de M. Kapteyn (*Bulletin*, I, 103), pour contrôler la forme de la flexion du cercle méridien et pour corriger les Catalogues des déclinaisons boréales et australes; cela met fin à une série d'observations commencée en 1887 sur 414 couples d'étoiles distribuées uniformément sur le Ciel et tellement choisies que, dans chaque couple, les heures de culmination supérieure (ou inférieure) des deux étoiles diffèrent seulement de quelques minutes, et que la différence de leurs distances zénithales, de part et d'autre du zénith, n'excède pas $10'$. Les distances zénithales vont de 2° à 80° . Chaque couple a été observé au moins 6 fois. Toutes ces étoiles sont comprises dans la liste du Catalogue décennal pour 1890; elles seront ainsi reliées à toutes les étoiles australes et à toutes celles des éphémérides principales.

Le Dr Gill parle en détail des études complémentaires auxquelles

au lieu l'héliomètre de 7 pouces principalement employé cette année à la triangulation des étoiles de comparaison de Victoria. Le travail a été poursuivi de concert avec les Observatoires de Yale et de Göttingen.

Le nouvel équatorial photographique a été monté en août; l'objectif réclame une légère retouche. Le Dr Gill, en vue de s'assurer de la précision des méthodes photographiques, a eu la bonne idée de photographier les étoiles de comparaison de Victoria, de Sapho et d'Iris (586 poses pour les trois planètes); la triangulation héliométrique des mêmes étoiles fournira des données précieuses pour la détermination de la distorsion optique.

Le Dr Gill mentionne les progrès des opérations géodésiques et de nombreuses déterminations de longitude et de latitude.

Le Rapport conclut par l'indication du degré d'avancement de la *Durchmusterung* photographique du ciel austral, dont les réductions, on le sait, sont poursuivies par M. J.-C. Kapteyn; ce travail dans son ensemble est aux deux tiers achevé.

Cambridge. — Il faut faire une mention spéciale des nombreuses observations de la Polaire, directes et par réflexion (120 observations directes, 42 par réflexion). La latitude conclue n'a pas changé depuis le temps du professeur Challis. Le coefficient de la flexion déduit de ces observations concorde parfaitement avec la valeur fournie par les collimateurs.

Le Rapport mentionne les travaux d'installation du réfracteur de 25 pouces donné par M. Newall, de Gateshead.

Dunsink. — Travaux d'installation du télescope de 15 pouces offert à l'Observatoire par M. Isaac Roberts et destiné à la détermination photographique des parallaxes. Un micromètre à microscope semblable à celui d'Oxford a été construit par MM. Troughton et Simms pour la mesure des clichés.

Glasgow. — Le travail de revision des discordances entre le Catalogue de Glasgow et le premier Catalogue de Weisse est fini.

Kew. — Il est fait mention de dessins des taches solaires, de mesures du pouvoir actinique du Soleil avec l'actinomètre de Violle et de la détermination photographique de la hauteur et de la vitesse des nuages d'après une méthode due au général Strachey, Président du Conseil météorologique : deux chambres noires étant solidement fixées sur leurs supports, avec les axes de leurs objectifs dirigés vers le zénith, on prend des photographies simultanées des deux régions du Ciel s'écartant du zénith d'environ 15°. Ces photographies sont superposées l'une sur l'autre, de sorte que les deux épreuves paraissent coïncider, et une simple mesure de la distance entre les images des deux points zénithaux, qui sont marqués par deux lignes rectangulaires sur la photographie, donne un moyen de déterminer facilement la hauteur du nuage au-dessus de la surface de

la terre. Une seconde mesure, faite de même, du déplacement des zéniths dans une seconde paire de photographies, après un intervalle de temps donné, permet de déterminer la composante horizontale de la vitesse du nuage en grandeur et direction. 20 groupes de nuages donnant des hauteurs comprises entre $2^{\text{km}},5$ et 13^{km} avec des vitesses de 8^{km} à l'heure ont été ainsi photographiés et mesurés durant l'été pas-

Liverpool. — Aucun fait particulier à noter. Le service chronométrique pour les besoins de la Marine marchande fonctionne régulièrement.

Oxford (Observatoire Radcliffe). — Continuation des observations nécessaires pour former un *Catalogue général* d'étoiles entre 0° et 90° de déclinaison.

Une discussion des observations du Soleil, de 1884 à 1886, conduisant à des corrections suivantes : $+ 0^{\circ},042$ pour les ascensions droites des étoiles horaires, $- 0^{\circ},20$ pour les distances polaires et $+ 0^{\circ},27$ pour l'obliquité adoptée dans les Tables.

Oxford (Observatoire de l'Université). — La lunette photographique pour la Carte du Ciel peut être regardée comme très satisfaisante. La chambre noire a été sensiblement modifiée, et l'on a profité de perfectionnements indiqués par l'Astronome royal (pour établir, par exemple, les plaques de telle sorte que les images des étoiles soient rapportées à l'équinoxe moyen de 1900,0).

Pour obtenir les grandeurs des étoiles les plus faibles jusqu'à la 14^e grandeur, par une mesure directe plutôt que par estimation, on a demandé à M. Hilger un prisme de verre de teinte neutre d'une extrême délicatesse; il servira à comparer les grandeurs photographiques avec les grandeurs oculaires des étoiles très faibles. Pour mesurer avec rapidité et une exactitude suffisante les diamètres des disques d'étoiles, des raies tracées sur verre se coupant sous un angle très aigu et dont l'échelle est graduée en millimètres rendent de bons services.

Des recherches dans le détail desquelles n'entre pas le Rapport ont pour but la construction d'un appareil pour la mesure des parallaxes et la reproduction des clichés sur papier

Quelques expériences ont été tentées pour obtenir par la photographie les parallaxes de quelques nébuleuses; mais il faudrait, semble-t-il, des instruments plus puissants.

Tous ces travaux n'ont pas empêché la continuation des déterminations photographiques de parallaxes qui touche à son terme.

Observatoire Temple, Rugby. — Mesures spectroscopiques de parallaxes radiales d'étoiles, par M. Seabroke.

Observatoire du Collège des PP. Jésuites, à Stonyhurst. — Spectromètre solaire construit par Hilger et muni d'un réseau de Land ayant 14438 traits par pouce a été installé d'une manière plé-

mode. Un héliostat d'une construction très simple et peu coûteuse a été monté sur le toit de la cabane du spectromètre pour être tout à fait sous la main de l'observateur. Il consiste en un axe polaire court portant un miroir plan à son extrémité inférieure. Le miroir est susceptible de se mouvoir en déclinaison et son mouvement est guidé par une corde passant à la partie supérieure de l'axe polaire, puis sur une poulie, et de là dans la cabane où l'observateur peut agir sur elle par petits mouvements. Le second miroir est fixe; son centre est à l'intersection de l'axe polaire prolongé et de l'axe du collimateur muni de la fente. De cette manière, il y a place entre le miroir fixe et la fente pour un objectif de 9 pieds de longueur focale. Un objectif de 6 pouces et de 7 pieds de longueur focale, par Alvan Clark, a été employé depuis le commencement de l'été, et les deux miroirs ont très bien supporté l'épreuve, l'image solaire sur la fente étant bien définie avec un bord net et sans apparence d'images multiples à cause des réflexions sur les surfaces. L'héliostat est conduit par une petite pendule fixée au mur dans la cabane d'observation; il est relié à la pendule par une légère chaîne sans fin en acier, et celle-ci est guidée par une paire de rouleaux de friction.

Avec cet appareil [dont le principe est exposé dans l'article de M. Radau, *Sur la théorie des héliostats* (*Bulletin*, I, p. 158)], on se propose d'étudier surtout les modifications des raies métalliques du spectre solaire.

Observatoire de M. Common, à Ealing. — M. Common a fait, avec le grand télescope de 5 pieds d'ouverture, de nombreuses photographies de nébuleuses et d'amas, ainsi que des observations directes sur les satellites de Saturne, Uranus et Neptune et les apparences de ces planètes.

Le grand télescope est maintenant muni d'un spectroscopie stellaire.

Il faut noter spécialement les travaux de M. Common concernant la construction des miroirs paraboliques et sphériques, la détermination photographique des pouvoirs réflecteurs des miroirs métalliques ou argentés, les procédés d'argenture.

Observatoire de M. Crossley, Bermerside, Halifax. — Annonce de la publication de mesures d'étoiles doubles, d'observations des phénomènes des satellites de Saturne, et d'occultations d'étoiles.

Observatoire Wolsingham (Rev. T.-S. Espin). — Continuation de la recherche d'étoiles à spectres remarquables. Revision du Catalogue de Birmingham.

Observatoire du Dr Huggins. — Les travaux principaux sont résumés ainsi :

1. Un nouvel examen de la position et du caractère de la raie princi-

pale dans les spectres de la nébuleuse d'Orion et de quelques autres, résultats confirmant les conclusions antérieures.

2. De nouvelles photographies du spectre de la nébuleuse d'Orion différent de celles décrites dans le dernier rapport en ce qu'elles contiennent en plus 4 et peut-être 5 des raies de l'hydrogène au delà de et d'autres raies nouvelles.

3. Deux photographies du spectre de Sirius, qui montrent un nouveau groupe de raies dans l'ultra-violet. Il consiste en 6 raies qui ont été mesurées.

4. Un examen des étoiles découvertes par MM. Wolf et Rayet dans la constellation du Cygne et une comparaison directe de ces étoiles avec la flamme de l'hydrogène carboné, le sodium et l'hydrogène. La bande bleue n'appartient pas au carbone.

5. Un examen de plusieurs étoiles parmi les types caractéristiques de la classe III α de Vogel. Une comparaison de ces étoiles avec diverses substances terrestres. La manière de voir du Dr Huggins, en 1861, a été confirmée.

6. Observations du caractère et de l'étendue du spectre continu de la grande nébuleuse d'Andromède. La suggestion du Dr Huggins, en 1864, que la limite apparente du spectre dans l'orangé peut provenir de l'impuissance de l'œil dans cette partie du spectre, a été trouvée l'explication véritable. Avec une combinaison convenable de prismes, l'extrémité rouge peut être vue nettement.

Observatoire Rousdon (M. Peck). — 452 observations de 24 étoiles variables.

Observatoire du comte de Rosse, Birr Castle. — Annonce de la publication prochaine de dessins de la voie lactée et des mesures de la chaleur de la Lune pendant l'éclipse du 28 janvier 1888.

Observatoire de Melbourne. — Le travail des miroirs du grand télescope a exigé beaucoup d'efforts et de temps; mais l'instrument est aujourd'hui aussi bon que jamais.

La Commission de visite a demandé au Gouvernement d'établir un grand réfracteur qui serait monté sur le grand télescope et lui serait associé.

Un fait important à mentionner est la publication du second *Catalogue général* de Melbourne, comprenant 1211 étoiles.

Observatoire de Natal. — En dehors des travaux d'observation : détermination de la latitude par la méthode Talcott-Horrebrow (au moyen de 900 observations de 30 paires d'étoiles), comparaison, par la même méthode, des déclinaisons boréales et australes, il y a à citer le grand travail de discussion des observations lunaires de Greenwich

comparées aux Tables de Hansen; il comprend maintenant 38 ans (1851-1888); il y a lieu de penser que les corrections trouvées feront disparaître les écarts systématiques à courte période, parfois très sensibles.

Annonce de la publication de deux Mémoires étendus sur les inégalités dans le mouvement de la Lune dues aux perturbations des planètes, comprenant des recherches théoriques et le calcul numérique de beaucoup de termes.

Observatoire de Sydney. — On remarque le nombre considérable de mesures de l'inclinaison et de la collimation, près de 400; l'usage est de les déterminer chaque jour à 9 heures du matin pour contrôler la stabilité des piliers. Outre les observations méridiennes, 2800 ascensions droites et distances polaires réunies, le Rapport mentionne de nombreuses mesures d'étoiles doubles, et, comme observations équatoriales, celles de la comète de D'Arrest et de la comète c 1890.

Les préparatifs pour la Carte du Ciel tiennent naturellement une bonne place. L'objectif de la lunette photographique est très satisfaisant. Peut-être sera-t-elle établie sur une colline à une certaine distance de Sydney.

L'éclairage électrique est maintenant étendu à tous les instruments avec beaucoup d'avantage; chaque instrument a son groupe d'accumulateurs, mais ils sont chargés à la fois, ce qui est plus économique et préférable.

Observatoire de M. Tebbutt, Windsor (Nouvelle-Galles du Sud). — Comme les années précédentes, les observations de M. Tebbutt sont nombreuses et variées: Occultations d'étoiles, 27; phénomènes des satellites de Jupiter, 41; petites planètes: Cérès, Junon, Ariane, Undine (nombreuses comparaisons pour chacune); $\ast\ast$ Denning (3 comparaisons), $\ast\ast$ D'Arrest 99; mesures d'étoiles doubles; déterminations des grandeurs de γ Argus et de R Carinæ.

Extraits des Notes relatives aux progrès de l'Astronomie pendant l'année.

Newcomb (S.). — Discussion des passages de Vénus sur le Soleil, en 1761 et 1769. (*Astronomical papers*, t. II, Part 5.)

Le motif qui a engagé M. Newcomb à reprendre la discussion des passages déjà discutés bien des fois est que, si l'on admet comme erreur probable des heures observées des contacts un nombre de secondes compris entre 10 et 30, selon l'habileté de l'observateur, la qualité de sa lunette et l'état de l'atmosphère, ... ces erreurs correspondent à des écarts de $0^{\circ},2$ à $0^{\circ},6$ dans les positions héliocentriques relatives de la Terre et de Vénus. Une collection de cent ou deux cents observations d'une

pareille précision, à une époque si éloignée, n'est pas à dédaigner, spécialement à cause de la rareté d'observations méridiennes précises de Vénus pendant le demi-siècle suivant. Même si la parallaxe déduite des passages devait avoir peu de valeur, ces matériaux mériteraient une discussion au point de vue de l'étude des mouvements de Vénus et de la Terre.

Le deuxième Chapitre est consacré à la citation, accompagnée de commentaires, de toutes les observations du passage de 1761, et, autant que possible, les notes originales de chaque observation séparée sont reproduites. Le troisième Chapitre donne de la même manière les observations du passage de 1769 et, en particulier, celles du P. Hell, à Wardhus, sur le compte desquelles il existait des doutes éclaircis par M. Newcomb dans un Mémoire inséré au t. XLIII des *Monthly Notices*.

Les trois Chapitres qui viennent ensuite contiennent, avec tous les détails désirables, les positions géographiques des stations empruntées aux sources modernes, les tableaux des heures calculées pour les contacts dans les différentes stations et le résumé sous forme tabulaire des heures observées; il y a à remarquer la disposition ingénieuse grâce à laquelle M. Newcomb caractérise la phase notée (filet lumineux, contact géométrique, heures tardives ou prématurées des contacts...), la classe des observations (distribuées en quatre classes suivant le degré de confiance qu'on peut raisonnablement leur accorder) et, pour finir, la hauteur approchée du Soleil.

Le Chapitre VI (formation et solution des équations de condition) commence par les réflexions suivantes : « Un examen rapide des résidus montre que nous n'avons pas affaire à des observations homogènes, ayant toutes le même degré de précision, mais à des observations faites dans des conditions notablement différentes, et par conséquent d'un module de précision très différent. On sait que la méthode des moindres carrés, sous sa forme ordinaire, ne permet pas de déduire les meilleurs résultats d'un pareil ensemble d'observations. J'ai discuté ce sujet dans un Mémoire inséré dans l'*American Journal of Mathematics* (*Bulletin*, IV, p. 384), et montré qu'en combinant un système d'observations de modules différents, mais inconnus, le poids qu'on doit assigner à chaque observation isolée dépend de l'écart qu'elle présente par rapport au résultat général des autres et ne peut, par conséquent, être assigné *a priori*. »

Pour savoir jusqu'à quel point les observations s'éloignent de l'homogénéité, M. Newcomb dit qu'il suffit de comparer les résidus à la loi de Gauss; c'est ce qu'il fait en arrondissant les écarts en multiples de 5 secondes. Il remarque ensuite que, malgré le défaut d'homogénéité d'un système d'observations, il y a une donnée qui peut toujours en être

déduite, savoir les limites les plus étroites entre lesquelles une majorité des résultats est renfermée. Dans le cas d'observations d'une précision uniforme, ces limites sont celles de l'erreur probable, et le même mot peut servir pour les limites correspondantes dans le cas des observations hétérogènes. En d'autres termes, quelque hétérogène que puisse être une série d'observations, si une moitié des résultats est contenue entre les limites A et B, nous pouvons leur assigner une erreur probable de $\frac{1}{2}(A - B)$. On trouve ainsi les résultats suivants :

Contacts.	A.	B.	N. rés. entre A - B.	En dehors de A - B.
1761, II.....	-17 ^s	+17 ⁿ	12	12
1761, III.....	- 7	+17	49	48
1769, II.....	-22	+ 7	77	74
1769, III.....	-17	+17	17	16

Il paraît donc qu'en ne rejetant aucune observation, l'erreur probable d'une observation isolée est moindre que $\pm 15''$, ce qui correspond à $\pm 0',30$ dans les positions héliocentriques relatives de la Terre et de Vénus. En rejetant les observations manifestement fautives, et diminuant le poids de celles qui s'écartent par trop de la courbe ordinaire de probabilité, M. Newcomb prépare la discussion, presque sans introduire encore d'appréciation personnelle.

Si l'arrivée et la disparition du filet lumineux se faisaient partout de la même manière, la discussion reviendrait à celle d'Encke. M. Newcomb estime qu'il convient de tenir compte de l'irradiation et des autres imperfections de la vision, car si le Soleil est, par exemple, bas au moment de l'entrée, les images seront sans doute diffuses et le filet de lumière sera aperçu plus tard que dans des conditions favorables; c'est pourquoi M. Newcomb introduit des termes empiriques k_i calculés d'après la hauteur du Soleil, l'ouverture de la lunette, la grandeur de la tache noire et propres à chaque phase observée. Le calcul montre bien l'utilité d'introduire ces termes, car les résultats deviennent concordants, et il existe aussi un accord satisfaisant entre les valeurs de k propres à chaque phase. Le résultat final pour la parallaxe est

$$\pi = 8'',79 \pm 0'',05.$$

M. Newcomb donne aussi les corrections concernant la position du nœud de l'orbite de Vénus.

Le Catalogue de Munich contenant les positions de 33082 étoiles pour l'époque 1880,0.

Les différents Catalogues de zones d'étoiles observées à Munich, de

En 1872, réduites à l'époque de 1850 et publiées dans les *Supplément des Annales de Munich*, étaient considérées par Lamont, sous la direction duquel les observations et les réductions furent faites, comme seulement provisoires. L'auteur avait en vue la formation d'un Catalogue général de toutes les positions de plus de 25000 étoiles pour l'époque 1860, de toutes d'environ 75000 observations et résumant les divers Catalogues de zones. Ce projet vient d'être accompli par le Professeur Seeliger, successeur de Lamont dans la direction de l'Observatoire de Munich, avec l'assistance du Dr Julius Bauschinger. Le Catalogue forme le tome I des *Nouvelles Annales de l'Observatoire royal de Bogenhausen, près Munich*.

Les observations faites au cercle méridien de Reichenbach, de 0^m,109 d'ouverture (avec un cercle de 0^m,95), embrassent 55082 étoiles allant jusqu'à la 10^e grandeur et situées entre -32° et -24° de déclinaison. Les positions des étoiles ont été revisées avec beaucoup de soin, et l'on a profité des *errata* insérés dans les *Annales de Vienne*, ainsi que des remarques d'Argelander et de Schönfeld. Au besoin, le ciel a été examiné à nouveau.

Observations des zones de Leyde.

Le tome V des *Annales de l'Observatoire de Leyde*, récemment publié, contient les observations restantes, sauf un très petit nombre dans la zone 36 à 37 de déclinaison, devolue à l'Observatoire de Leide et dont la première partie a paru dans le tome IV des *Annales*.

Après une introduction étendue, on trouve une série de tableaux corrections aux observations de zones (p. XX-LIII).

Revision photométrique de la *Durchmusterung* par le Professeur Pickering.

Les tomes XXIII et XXIV des *Annales de l'Observatoire de Cambridge* renferment la continuation des recherches dont la première Partie a paru dans le tome XIV. La grandeur des étoiles cataloguées dans ce Volume était mesurée avec un instrument appelé le photomètre méridien, composé de deux lunettes chacune de deux pouces d'ouverture, avec miroirs et prisme de Nicol convenablement disposés (*Bulletin*, t. II, p. 179). Les résultats obtenus avec cet instrument parurent si satisfaisants qu'il fut décidé d'appliquer le même procédé à la mesure des étoiles plus faibles, au moyen d'un photomètre méridien d'une ouverture double. Les observations faites avec ce nouvel instrument forment le sujet des tomes XXIII et XXIV.

La première Partie du tome XXIII contient une description de l'instrument et l'ensemble des données concernant la réduction des observations, dont les résultats sont compris dans le tome XXIV. La deuxième Partie du tome XXIII contient une discussion de ces résultats et leur comparaison avec ceux que fournissent les Catalogues antérieurs.

MÉTHODE DU PROFESSEUR BAKHUYZEN POUR LA DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION PERSONNELLE ABSOLUE DANS LES OBSERVATIONS DE PASSAGES (40 pages avec 2 planches, extrait du tome VII des *Annales de l'Observatoire de Leyde* et dédié à l'Observatoire de Poulkova, à l'occasion de son cinquantenaire).

En entreprenant de déterminer les positions des étoiles circumpolaires assez brillantes jusqu'à 10° du pôle (*Bulletin*, t. II, p. 95), M. Bakhuyzen dut se préoccuper de la connaissance des équations personnelles dans les observations de passages de ces étoiles relativement aux équations personnelles concernant les observations des étoiles horaires. Il fallait donc un dispositif permettant, dans diverses positions de la lunette du cercle méridien, de déterminer les équations personnelles absolues pour des vitesses très différentes de l'étoile.

M. Bakhuyzen a déjà fait connaître le principe de l'appareil dans le Congrès de la Société astronomique tenu à Berlin, en 1879 (*Vierteljahrsschrift*, t. XIV); depuis l'appareil a été construit et a fonctionné à la satisfaction de M. Bakhuyzen. La mire est employée comme étoile artificielle, et, sur le pilier du collimateur, entre la lentille de mire et le cercle méridien, est installé mobile autour d'un axe vertical un prisme avec un très petit angle et son arête verticale. Par ce prisme, l'image de la mire est déviée dans la lunette, et cette déviation se modifie si le prisme se meut lentement. Une armature attachée au prisme ferme chaque fois un courant galvanique, quand l'image de la mire dans son mouvement couvre un fil du réticule.

Dans le voisinage du minimum de déviation, le mouvement de l'image de la mire produit par la rotation du prisme n'est en aucune manière proportionnel à cette rotation, mais pour les plus grands angles d'incidence (30° ou 35° pour le prisme employé qui a un angle de $16'$) on s'approche beaucoup de cette proportionnalité. Il est vrai qu'alors la déviation totale et la dispersion qui en résulte sont assez grandes, mais ce défaut peut être évité facilement si l'on oppose au prisme mobile un second prisme fixe; la différence des déviations est à peu près proportionnelle à la rotation, et la dispersion est insensible.

Avec cet appareil on détermine aussitôt l'équation personnelle pour la position horizontale de la lunette. Désire-t-on la déterminer pour

une autre position de la lunette, comme dans les observations directes et réfléchies des circompolaires, on doit, au moyen d'un miroir plan placé devant le prisme, renvoyer la lumière soit à un second miroir placé devant l'objectif, soit à la surface du bain de mercure.

Le point important dans l'appareil est que le commencement du contact coïncide avec la bissection de l'image par le fil du réticule. M. Bakhuyzen décrit les précautions prises pour s'en assurer ainsi que la manière de disposer les observations.

Un assez grand nombre d'observateurs ont fait des expériences avec l'appareil : MM. Gill, Oudemans, Kapteyn, Wislicenus, qui s'est occupé récemment de la détermination des équations personnelles (*Bullet.* t. VI, 177) et les observateurs réguliers de Leyde : MM. H.-G. et E. van de Sande Bakhuyzen et M. J.-H. Wilterdink; les résultats de ces observations sont donnés; en général, le sens du mouvement ne paraît pas avoir d'influence.

Notons que les observations des étoiles s'accordent bien avec les résultats de l'appareil : ainsi pour une déclinaison de $+30^\circ$, la différence E.-F. Bakhuyzen-Wilterdink serait de $0^s,34$, l'appareil donne $+0^s,41$; pour la Polaire, les nombres correspondants seraient $+0^s$ et $+0^s,67$.

Sur les préparatifs pour le travail de la Carte du ciel (communiqué par l'Astronome royal).

Les remarques de l'Astronome royal concernent : le Catalogue des étoiles guides, les erreurs du réseau, la conduite du travail et les clichés d'épreuves obtenus à Greenwich; l'étude de ces clichés a permis de construire le Tableau ci-dessous :

Temps de pose nécessaire pour obtenir les images de diamètre des étoiles de diverses grandeurs.

Diamètre.	9^m .	11^m .	14^m .
6,0	277	29	461
5,0	151	16	252
4,0	72	7,6	120
3,0	28	3,9	46
2,5	15	1,6	25

Il faut que le diamètre du disque soit au moins de $2^s,5$ pour être visible.

A la séance du 13 mars, une discussion intéressante s'est eue entre l'Astronome royal et M. Plummer, d'Oxford, sur les ter-

pose. Il semble qu'on ne peut rien affirmer *a priori*, à cause des différences qui existent entre les plaques, de l'influence considérable de l'atmosphère....; c'est sans doute ce qui a engagé l'Astronome royal à proposer l'usage de photographies de la Polaire pour servir de témoins.

Sande Bakhuyzen (H.-G. van de). — Variations de la latitude déduites des observations de la Polaire, faites à Greenwich, de 1851 à 1889 (20 pages avec un diagramme).

Les variations de latitude dont il a été question (*Bulletin*, t. VII, 341) ne peuvent être expliquées par des erreurs accidentelles et pas davantage par des anomalies dans la réfraction, car il résulte des recherches récentes du professeur Albrecht et de M. Bakhuyzen que les étoiles zénithales et celles qui sont distantes du zénith de 20° à 30° s'accordent pour donner à très peu près la même variation (les étoiles zénithales conduisent à une latitude absolue plus forte que l'ensemble des étoiles). Il est donc très intéressant de chercher si cette variation s'est manifestée dans les années antérieures, et M. Bakhuyzen a étudié à ce point de vue les observations de la polaire faites à Greenwich depuis 1851. Il y a ici le désavantage que les observations, faites du même côté du zénith, dépendent bien plus de la réfraction que les observations de part et d'autre du zénith qui ont mis en évidence les variations de la latitude. Quoi qu'il en soit, mettant à profit les discussions antérieures de MM. Downing et Thackeray, M. Bakhuyzen conclut que les discordances dans les distances zénithales de la polaire ne sont pas le fait, pour la plus grande part, d'une variation réelle de la latitude, mais sont surtout un effet de la température; qu'il n'est pas possible d'expliquer ces discordances par une erreur dans les indications du thermomètre extérieur, ou par une influence dépendant seulement de la température extérieure; que les discordances peuvent être expliquées, pour la plus grande part, par une cause dépendant de la différence entre les deux températures extérieure et intérieure, telle qu'une réfraction dans la salle d'observation proportionnelle à cette différence; et enfin que les discordances corrigées de cet effet de réfraction sont à peu près les mêmes pour les deux culminations et peuvent être expliquées par une variation réelle de la latitude. Le calcul montre, dans cette hypothèse, que la latitude doit avoir son minimum vers le milieu de février et son maximum vers le milieu d'août; ces époques correspondent à celles qu'on a trouvées récemment; mais l'amplitude de la variation serait plus faible 0",1 environ. Il semblerait donc que l'amplitude des variations s'est accrue depuis quelques années.

Downing (A.-M.-W.). — Comparaison entre les positions des étoiles du Catalogue décennal de Greenwich (1880), celles du second Catalogue général de Melbourne et celles du Catalogue du Cap pour 1880.

Cette comparaison, fondée sur 472 étoiles communes aux trois Catalogues, indique une légère différence systématique des ascensions droites de Greenwich pour les grandes distances polaires, relativement aux ascensions droites de Melbourne et du Cap.

Pritchard (Rev. Ch.). — Sur la parallaxe de β Cocher.

Parallaxe obtenue au moyen de deux étoiles voisines : $0^{\circ},06 \pm 0^{\circ},02$.

Burnham (S.-W.). — Les compagnons d'Aldébaran (avec un diagramme).

Le compagnon le plus proche, découvert par M. Burnham, avec l'équatorial de 18^{no}, 5 de Chicago, en 1877, doit avoir, d'après les dernières mesures faites avec le 36 pouces de Lick, le même mouvement propre que l'étoile principale. Le compagnon plus éloigné d'Herschel a été observé pendant plus de cent ans; ses changements de position étaient attribués seulement au mouvement propre de l'étoile principale; mais Flammarion a montré que cela ne rendait pas compte entièrement des changements, et que l'étoile plus faible a un mouvement propre dans une direction différente.

En 1888, le compagnon d'Herschel a été dédoublé avec le 36 pouces, la distance des deux étoiles étant de 2". D'après les mesures de 1888 et de 1890, il semble que les deux étoiles ont même mouvement propre; mais on ne peut encore rien affirmer.

Burnham (S.-W.). — L'orbite de α Pégase (β 989).

En 1880, M. Burnham a constaté, avec l'équatorial de 18^{no}, 5 de Chicago, que l'étoile principale (α Pégase a un compagnon de 9^m à une distance de 12", découvert par W. Herschel, en 1786) était double et formait un couple très serré de 0",3 environ. Cette mesure, une due à Engelmann de Leipzig et trois nouvelles avec le grand instrument de Lick, permettent de déterminer les éléments approchés du couple; l'angle de position a varié de 230° ($a = 0^{\circ},32$, $P = 11^{\text{ans}},3$). M. Burnham doit continuer les mesures.

Un autre résultat des mesures de M. Burnham est que l'étoile principale α Pégase a un mouvement propre de 0",036 par 72".

Rambaut (A.-A.). — Sur la détermination des orbites des étoiles doubles d'après les évaluations spectroscopiques de la vitesse radiale. (15 pages avec diagrammes.)

Article intéressant dans lequel l'auteur développe un procédé graphique et numérique pour obtenir les éléments de l'orbite d'une étoile double au moyen des mesures spectroscopiques de la vitesse radiale (*Bulletin*, t. VII, p. 250). Application est faite à β Cocher en mettant à profit les mesures publiées par M. Pickering.

La formule qui sert de point de départ est

$$\pi V = \frac{la \sin \gamma}{p \sqrt{1 - e^2}} [e \cos \lambda + \cos(\theta - \lambda)];$$

θ désigne l'anomalie vraie et e l'excentricité; λ est l'anomalie vraie du nœud Ω où la vitesse radiale V acquiert sa valeur positive maximum V_1 ; pour l'anomalie vraie $\lambda + 180^\circ$, la vitesse radiale acquiert sa valeur négative minimum V_2 ; la vitesse moyenne $V_3 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ a lieu dans l'intervalle pour l'anomalie vraie $\lambda + 90^\circ$; on peut relever sur la courbe des vitesses déduite des observations les époques du maximum V_1 et du minimum V_2 et, avec une précision sans doute supérieure, les deux époques où la vitesse devient égale à la valeur moyenne V_3 . De ces données résultent (la période étant supposée déjà connue) les valeurs de e et de λ .

Montrons comment le calcul est particulièrement simple quand l'excentricité e ne dépasse pas des valeurs modérées, et rappelons dans ce but un résultat dû à M. Radau (*Bulletin*, t. I, p. 308) : si l'on pose v , M et e étant les anomalies vraie et moyenne et l'excentricité,

$$\Gamma = \frac{5v + 3M}{8},$$

d'où

$$v = \Gamma + \frac{3}{5}(\Gamma - M);$$

on a approximativement

$$\Gamma = M + \frac{5}{4}e \sin \Gamma.$$

Soit M l'anomalie moyenne inconnue au moment du passage par le Ω comme plus haut; mettons un ou plusieurs accents aux quantités qui se rapportent aux autres dates considérées. On aura, d'après les don-

nées de M. Rambaut,

- (1) $\Gamma = M + \frac{5}{4} e \sin \Gamma, \quad \left(V_1, \frac{t}{P} = + 0,02 \right),$
 (2) $\Gamma' = M' + \frac{5}{4} e \sin \Gamma' = M + 70^{\circ}, 2 + \frac{5}{4} e \sin \Gamma', \quad \left(V_3, \frac{t}{P} = + 0,31 \right),$
 (3) $\Gamma'' = M'' + \frac{5}{4} e \sin \Gamma'' = M + 167^{\circ}, 4 + \frac{5}{4} e \sin \Gamma'', \quad \left(V_2, \frac{t}{P} = + 0,48 \right),$
 (4) $\Gamma''' = M''' + \frac{5}{4} e \sin \Gamma''' = M + 266^{\circ}, 8 + \frac{5}{4} e \sin \Gamma''', \quad \left(V_3, \frac{t}{P} = + 0,76 \right)$

avec les conditions

$$(5) \quad v''' - v'' = v'' - v' = v' - v = 90^{\circ},$$

et celles qui s'en déduisent à cause de

$$\Gamma = \frac{5v + 3M}{8};$$

on a aussi l'équation donnée par M. Rambaut (avec cette différence nous avons remplacé λ par v) :

$$e \cos v = \frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2}.$$

Cela posé, en remarquant que

$$\Gamma' - \Gamma = \frac{5}{8} \cdot 90^{\circ} + \frac{3}{8} \cdot 70^{\circ}, 2 = 56^{\circ}, 3 + 26^{\circ}, 2 = 82^{\circ}, 6,$$

$$\Gamma''' - \Gamma = \frac{5}{8} \cdot 270^{\circ} + \frac{3}{8} \cdot 266^{\circ}, 8 = 168^{\circ}, 8 + 100^{\circ}, 0 = 268^{\circ}, 8.$$

retranchons des équations (2) et (4), terme à terme, l'équation (1) vient

$$\frac{5}{2} e \sin \frac{\Gamma' - \Gamma}{2} \cos \frac{\Gamma' + \Gamma}{2} = 12^{\circ}, 4 \quad \text{ou} \quad e \cos(\Gamma + 41^{\circ}, 3) = 7^{\circ}, 52,$$

$$\frac{5}{2} e \sin \frac{\Gamma''' - \Gamma}{2} \cos \frac{\Gamma''' + \Gamma}{2} = 2^{\circ}, 0 \quad \text{ou} \quad e \cos(\Gamma + 134^{\circ}, 4) = 1^{\circ}, 12;$$

on tire de là, à peu près,

$$e = 0,13 \quad M = -45^{\circ}.$$

La question considérée par M. Rambaut avait déjà fait l'objet d'une communication du professeur Niven (*Monthly Notices*, t. XXV p. 339).

Abbott (J.). — Mesures d'étoiles doubles à Windsor (Nouvelle-Galles du Sud), en 1889 et 1890.

Les mesures concernent surtout γ Couronne australe, ρ Eridan et α Centaure.

Core (J.-E.). — Observations de l'étoile variable ι Sagittaire, en 1890.

Downing (A.-M.-W.). — Note sur l'orbite de Junon.

Comparaison avec les observations des éléments publiés récemment par l'auteur.

Observations des planètes Victoria et Sapho et des étoiles de comparaison, à Cambridge et à Oxford (Observatoire Radcliffe). (19 pages.)

Gledhill (J.). — Observations des satellites de Saturne. Occultations d'étoiles. Phénomènes des satellites de Jupiter (Observatoire de M. E. Crossley, Bermerside, Halifax).

Marth (A.). — Éphémérides pour les observations physiques de Jupiter, en 1891 (15 pages).

Burnham (S.-W.). — Sirius (avec un diagramme représentant l'orbite du compagnon).

La période est encore incertaine, mais elle pourra être fixée quand le compagnon, qui échappe maintenant aux observations, sera de nouveau observable (avec le 36^{pe}) vers la fin de l'année 1894. L'article de M. Burnham renferme le tableau de toutes les mesures du compagnon, avec l'indication des autorités. Notons qu'une série d'observations faites, à Paris, par M.M. Henry (*Bulletin*, t. I, p. 388), est attribuée par erreur à M. Young.

Burnham (S.-W.). — Étoiles doubles invisibles (avec plusieurs diagrammes).

« Outre un nombre considérable d'étoiles doubles qui ont été observées et mesurées d'une manière régulière, nous avons maintenant une nouvelle classe de couples qui peuvent être appelés des étoiles doubles invi-

sibles, puisqu'elles n'ont jamais été vues et qu'elles sont seulement révélées par certaines particularités dans leur apparence ou dans leurs mouvements. Ce qu'on connaît sur elles est dû à des recherches relativement récentes, et on ne peut pas dire que leur existence soit absolument démontrée; d'autant plus que les indications sur lesquelles on s'appuie proviennent d'observations plus ou moins en erreur; comme il est très difficile de distinguer un changement réel d'erreurs d'observations beaucoup plus sensibles, le résultat doit être accueilli avec précaution, surtout quand l'intervalle de temps des observations est limité. »

Les additions les plus récentes à cette classe d'étoiles doubles sont dues au spectroscopie, qui a montré un doublement périodique de certaines raies, lequel, on le suppose, doit être causé par les mouvements alternatifs d'approche et d'éloignement des composantes d'un couple serré à mouvement rapide. Tout en considérant cette explication comme la plus probable, M. Burnham remarque qu'il serait bon de la contrôler par des observations spectroscopiques d'étoiles doubles connues dont l'orbite est peu inclinée sur la ligne de visée. Il y a déjà plusieurs années (*Bulletin*, t. I, p. 97), M. Downing indiquait l'intérêt de telles observations sur α Centaure.

Mais M. Burnham envisage surtout les étoiles qu'on suppose être doubles à cause des irrégularités apparentes dans leurs mouvements d'après les observations méridiennes et micrométriques, et pour lesquelles, à la seule exception de Sirius, il a été impossible de découvrir les corps troublants, même avec les plus puissants instruments. Aucune de ces étoiles n'a été mieux étudiée que ζ Écrevisse, et l'on connaît les belles recherches de M. Seeliger à ce sujet (*Bulletin*, t. VII, p. 102). M. Burnham a représenté graphiquement toutes les positions connues de la composante C de ζ Écrevisse, et cherché si les particularités de mouvement ne se retrouvent pas dans d'autres couples analogues, parce que, si les positions discordantes en apparence sont plutôt la règle que l'exception, cela tendrait à prouver que les particularités du mouvement sont peut-être le fait de mesures inexactes, et non celui d'un corps troublant mystérieux.

Un examen des mesures de l'étoile C de ζ Écrevisse montre que les positions de cette étoile ne sont pas distribuées uniformément, mais groupées plus ou moins régulièrement le long de sa trajectoire. Cela paraît indiquer que, par suite de quelque cause perturbatrice, non reconnue auparavant, le mouvement de l'étoile était tantôt accéléré, tantôt retardé, et comme cela pouvait être l'effet d'une quatrième étoile, non aperçue, on a supposé C accompagné d'une étoile obscure dont la masse est environ la même que celle de C.

Les diagrammes relatifs à Castor, ϵ^2 Lyre, ζ Verseau, γ et δ Lion, ξ Scorpion

tion et ϵ Hercule indiquent une tendance analogue à un groupement des positions, et à des intervalles presque aussi réguliers parfois que dans le cas de ζ Écrevisse. Rien n'empêcherait de calculer pour ces étoiles (qu'on ne suppose cependant pas accompagnées de satellites sombres), comme pour ζ Écrevisse, des orbites qui représenteraient ces observations; mais M. Burnham se demande si ces particularités ne s'expliquent pas aussi, en partie du moins, par le fait que toutes ces étoiles ont un mouvement d'environ un demi-degré par an, et que l'erreur moyenne des mesures d'angle, étant certainement supérieure, les mouvements apparents rétrogrades et les groupes de positions peuvent se présenter là où il y a des mesures annuelles. Il n'y a rien d'extraordinaire, dans un pareil cas, à trouver des positions coïncidentes pendant une demi-douzaine d'années.

M. Burnham remarque, en terminant, qu'une explication plus plausible de la variation du mouvement de l'étoile C dans ζ Écrevisse serait que le centre de gravité de A et B n'est pas au milieu de A et B. Il y a aussi une source spéciale d'erreurs possibles dans les mesures de C, parce qu'elles sont rapportées le plus souvent au milieu de A-B. Remarque curieuse : le triangle formé par les trois étoiles A, B et C se reproduit périodiquement après un intervalle de 17 ans.

Pour s'assurer de la réalité des changements de C, il convient de rapporter les mesures à A ou B séparément, ou plutôt à une étoile de comparaison extérieure au système. M. Burnham suggère que la meilleure méthode, dans le cas de ζ Écrevisse, serait de mesurer, au cercle méridien, la différence en déclinaison de C et d'une étoile de $7^{\text{h}}, 4, 2^{\text{m}}$ après C et $1', 5$ au nord. On pourra ainsi contrôler la théorie, d'après laquelle C doit surtout varier en déclinaison pendant quelques années.

A la séance du 10 avril, M. Downing a dit qu'il lui paraissait difficile d'expliquer des changements qui se produisent à intervalles réguliers seulement par les erreurs d'observation; il a cité, d'après M. Lewis, une étoile pour laquelle il existerait onze pareils centres de discordance.

Mentionnons, pour finir, la remarque du Cap. Noble, que la Photographie est peut-être appelée à révéler les compagnons problématiques.

Thackeray (W. Grasett). — Comparaison des distances polaires du *Nautical Almanac* pour 1880 avec le Catalogue du Cap, le Catalogue décennal de Greenwich et les positions fondamentales de Boss pour 1880.

Il résulte de cette comparaison que les distances polaires du *Nauti-*

cal Almanac, pour 1880 et 1890, déduites des Catalogues de Greenwich pour 1860, 1864 et 1872, sont affectées d'une erreur périodique quand on les range par ordre d'ascension droite, et que cette erreur (due sans doute en grande partie aux différences des mouvements propres adoptés) a été éliminée dans le Catalogue décennal pour 1880.

Thackeray (W. Grasett). — Valeurs approchées des mouvements propres de quelques étoiles de Groombridge.

Valeurs approchées pour 48 étoiles, déduites de la comparaison du Catalogue de Groombridge avec celui de Radcliffe (1845) et avec les positions de Greenwich.

Bryant (Robert). — Perturbations de $\textcircled{80}$ Sapho.

Tableaux des perturbations des éléments de la planète par Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne, pour faire suite aux recherches antérieures.

Stanley Williams (A.). — Réduction des mesures des photographies de Jupiter, prises à l'Observatoire Lick, en 1890.

Signalons les conclusions importantes de l'auteur : les mesures de photographies de Jupiter, étant donnée la petitesse des erreurs probables, sont comparables pour la précision avec les meilleures mesures micrométriques.

Kleiber (J.). — Catalogue de 918 orbites d'essaims d'étoiles filantes, d'après les observations de M. W.-F. Denning.

Les observations de M. Denning ont été publiées dans le numéro de mai 1890 des *Monthly Notices*. Le Catalogue de M. Kleiber forme la conclusion d'un Ouvrage étendu, publié en russe avec un extrait, en anglais, *Sur la détermination des orbites des essaims de météores* (Saint-Petersbourg, 1891, 330 pages, dont 150 pour les tables numériques).

Dans le Chapitre d'introduction, M. Kleiber fait quelques remarques générales sur le problème à traiter. Il insiste sur ce que les désaccords dans les positions des points radiants donnés par les observateurs sont principalement dus, non pas aux erreurs inévitables d'observation et la manière de tracer les trajectoires sur les Cartes, mais à l'inexactitude des méthodes par lesquelles les points radiants sont déduits des trajectoires observées (l'aberration du point radiant, l'attraction zénithal

étant ordinairement négligées). Il est donc désirable de publier les observations originales elles-mêmes. Il serait avantageux, pour faciliter le calcul des orbites, d'avoir des Cartes spéciales rapportées à l'écliptique plutôt qu'à l'équateur.

Le Chapitre II contient un historique du problème et des recherches nombreuses auxquelles il a donné lieu, les dernières en date et les plus connues étant celles de M. Lehmann-Filhès (*Bulletin*, t. V, p. 361). L'objet de M. Kleiber est d'obtenir, au moyen de tables convenables et de diagrammes, les éléments avec une précision comparable au dixième de degré. Le Chapitre III est consacré à la transformation des ascensions droites et déclinaisons en longitudes et latitudes : cette même question est traitée avec d'autres dans le Chap. V et dernier au moyen de méthodes graphiques, et il est fait usage des diagrammes indiqués par M. Radau (*Bulletin*, t. III, *passim*).

Le Chapitre IV (p. 86-152) forme la partie essentielle. Il contient les formules pour le calcul exact ou approché des éléments des orbites, d'après la position du point radiant, la solution du problème inverse et de quelques autres qui se lient à ces deux principaux ; l'auteur a soin de montrer comment les calculs se réduisent de plus en plus lorsqu'on admet certaines simplifications souvent permises.

La question importante du déplacement des points radiants des essaims est discutée dans les paragraphes 106-109 du Chapitre IV. L'auteur dit qu'on peut envisager le sujet *a priori* sous deux points de vue : Un essaim peut constituer un anneau ayant une orbite définie dans l'espace ; dans ce cas les éléments i , $\varpi - \Omega$ sont constants pour toutes les parties de l'anneau, et par suite aussi les quantités $\odot - l$, b (l et b désignent la longitude et la latitude du point radiant) sont constantes ; cela concorde avec les observations de M. Denning sur les Perséides, dont le point radiant marche vers l'est durant la période d'activité. L'autre supposition (envisagée par Hoek) de la capture d'un nuage cosmique par le Soleil conduit à des résultats plus compliqués, mais du même ordre. On peut ajouter qu'il en est encore ainsi dans l'hypothèse de la capture des comètes et de leur désintégration en étoiles filantes par les planètes (*Comptes rendus*, t. CXII, p. 1303.)

Les 918 points radiants ou orbites du Catalogue représentent en réalité un nombre beaucoup moindre d'essaims distincts, plusieurs essaims étant représentés par plus d'un point radiant. Mais comme l'identification des points radiants est une matière encore sujette à controverse, M. Kleiber a pensé avec raison qu'il valait mieux calculer les éléments pour chaque point radiant séparément, en donnant ainsi un nouveau criterium pour leur identification *a posteriori* par la comparaison des éléments de leurs orbites.

Tebbutt (J.). — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, à Windsor (Nouvelle-Galles du Sud), en 1890.

Très nombreuses observations.

Marth (A.). — Éphéméride pour les observations physiques de la Lune.

Pritchard (C.). — Expériences nouvelles concernant la détermination photographique des grandeurs d'étoiles.

Il y a encore beaucoup d'incertitude sur le temps nécessaire pour produire une impression satisfaisante des étoiles très faibles. Par exemple, l'Astronome royal a considéré une pose de 90 secondes comme suffisante pour avoir une étoile de 11^m (*Bulletin*, t. VIII, p. 406), tandis que M. Pritchard a établi dans un travail envoyé au dernier Congrès que 200 secondes étaient nécessaires.

Pour éclaircir ces difficultés, une série d'expériences a été faite d'abord au premier lieu dans la région occupée par les Cartes du Prof. Petrus, puis ensuite dans la zone attribuée à Oxford. Dans chaque cas, les clichés obtenus ont été examinés avec le photomètre à prisme, et les grandeurs déterminées avec soin. Les conclusions antérieures du Prof. Pritchard se sont trouvées complètement confirmées; et, par conséquent, il faut accepter comme un fait qu'il peut y avoir une grande différence de pose pour obtenir une certaine grandeur. On sait que, d'après les arrangements du Congrès, chaque Observatoire est invité à rechercher par lui-même la durée de pose nécessaire pour avoir la onzième grandeur. Le Prof. Pritchard offre de déterminer les grandeurs d'un certain nombre de telles étoiles pour faciliter la mise en œuvre de la méthode du Comité.

Quant à l'obtention des étoiles de la 14^m, en partant de la pose nécessaire pour la 11^m, accrue 2,5 fois pour chaque classe de grandeur, les expériences d'Oxford indiqueraient que cette règle n'est pas exacte, au moins si l'on apprécie l'effet produit par la grandeur du disque de l'étoile. Par exemple, une étoile de 5^m avec une pose de 50 secondes ayant un certain diamètre, une étoile de 9^m avec une durée de pose de 50^s × 2,5 a pour diamètre les $\frac{2}{3}$ du précédent. Cela montre qu'il faut distinguer entre les grandeurs photographiques définies par une règle nécessairement un peu arbitraire et les grandeurs photométriques.

Christie (W.-H.-M.). — Sur une nouvelle coupole destinée à l'Observatoire de Greenwich (avec 2 planches).

Cette coupole, qui doit abriter la grande lunette de 28 pouces d'ouverture, est un peu plus large que la tour. Une trappe de plus de 2^m la partage dans toute son étendue en deux parties égales.

Roberts (Isaac). — Photographies de Neptune et de son satellite.

Seize photographies avec des durées de pose variant entre quinze minutes et trois heures. Le satellite est visible sur 8 plaques, mais l'angle de position est difficile à mesurer à cause de la faiblesse de l'image du satellite, qui se déplace, et de la position incertaine du centre de la planète.

Les photographies n'indiquent pas d'autre satellite.

Roberts (Isaac). — Photographies de la région du Taureau comprenant la nébuleuse variable de Hind et de l'amas de l'Écrevisse.

Il n'y a pas sur les clichés de traces d'une nébulosité, malgré une durée de pose de trois heures. Il faut admettre qu'il y a eu un changement rapide dans la nébuleuse de Hind, entre le 15 octobre 1890, date des observations de M. Burnham (*Bulletin*, t. VIII, p. 126), et le 9 décembre, où ont été prises les photographies.

Naegamvala (K.-D.). — Sur le caractère de la raie principale de la nébuleuse d'Orion.

L'auteur, du Collège scientifique, à Poonah, dans l'Inde, a observé pendant deux mois, d'une manière assidue, le spectre de la grande nébuleuse avec un télescope de 16⁰⁰ $\frac{1}{2}$, muni de spectroscopes ayant un, deux ou trois prismes. La raie principale a été vue nette en toute circonstance sans qu'on puisse soupçonner de cannelure. C'est le résultat obtenu par le D^r Huggins et par M. Keeler, en contradiction avec la suggestion de M. Lockyer dans son récent Ouvrage (*Bulletin*, t. VIII, p. 255).

Comme il fallait s'y attendre, cette Note a soulevé de nouvelles discussions à la Société astronomique (séance du 8 mai).

O. G.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n° 3036-3042.

Becker (E.). — Sur quelques essais du nouveau procédé d'observation des passages, imaginé par M. J. Repsold.

Le procédé de M. Repsold (*Bulletin*, t. VI, p. 568) consiste à maintenir un fil mobile en contact avec l'étoile, pendant que l'oculaire est entraîné automatiquement avec le fil, qui occupe ainsi toujours le milieu du champ; le passage du fil mobile par le méridien est enregistré par un chronographe. M. Becker avait adapté à cet usage le micromètre d'un instrument portatif de l'Observatoire de Strasbourg et les essais ont pu commencer au mois d'octobre dernier. MM. Becker, Kober, Zwink et Halm ont, tour à tour, observé quelques passages par l'ancienne et la nouvelle méthode (l'instrument permettant l'emploi des deux procédés), afin de déterminer, pour chaque observateur, la différence des résultats qu'elles fournissent; ensuite les équations personnelles des observateurs ont été déterminées par des passages enregistrés à la manière ordinaire (le micromètre n'ayant pas assez de jeu pour les déterminer par le nouveau procédé). Les écarts entre les deux procédés ont été, en moyenne,

B.	H.	K.	Z.
+0 ^s ,319	+0 ^s ,224	+0 ^s ,110	+0 ^s ,158

leurs différences sont loin d'être égales aux équations personnelles trouvées par la méthode ordinaire, et qui ont les valeurs suivantes :

-H.	B-K.	B-Z.	H-K.	H-Z.	K-Z.
+0 ^s ,155	+0 ^s ,255	+0 ^s ,159	+0 ^s ,100	+0 ^s ,004	-0 ^s ,096

Mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit ici d'essais faits avec un nouvel instrument dont les observateurs n'avaient pas l'habitude, et que le dispositif employé avait divers défauts, assez gênants, auxquels MM. Repsold ont, depuis, trouvé moyen de remédier. M. Becker pense, en définitive, et son jugement s'accorde avec celui de M. Albrecht, que le procédé de M. J. Repsold pourra être employé avec avantage pour les passages du Soleil et des étoiles horaires, mais qu'il ne paraît pas devoir donner de bons résultats pour la détermination d'étoiles faibles, dont il est plus facile de noter les passages par des fils fixes que de suivre le mouvement à l'aide d'un fil mobile. Le moment n'est-il pas venu d'essayer aussi l'application de la photographie à l'observation des passages ?

Luther (R.). — Observations de petites planètes faites au micromètre circulaire.

Tebbut (J.). — Occultations d'étoiles observées à Windsor (N. S. W.).

Porro (F.). — Observations d'étoiles variables à longue période.

Krueger. — Éphéméride de la comète Wolf (1884 III).

La comète a été retrouvée par M. Spitaler le 1^{er} mai et par M. Barnard deux jours plus tard.

Berberich. — Éléments des planètes (305), (306), (308), (309).

Kœnig (R.). — Détermination de l'orbite de la comète 1857 III.

Oppenheim (S.). — Orbite de la planète Bruna (290).

Pritchard (C.). — Sur la parallaxe de β Cocher.

M. Pritchard a employé, pour la détermination de cette parallaxe, cinquante épreuves photographiques, obtenues en vingt-cinq soirées (deux expositions successives de cinq minutes). Les étoiles de comparaison sont les deux suivantes :

(a) DM + 44°, 1322, gr. 10, 2;

(b) DM + 44°, 1334, gr. 8, 8.

Leur situation, par rapport à β Cocher, est indiquée par les coordonnées polaires

$$p = 269^{\circ} 10', \quad s = 945''$$

$$p = 91^{\circ} 50', \quad s = 711''$$

La discussion des mesures micrométriques a donné à M. Pritchard.

Par l'étoile (a) $\pi = + 0^{\circ}, 0591 \pm 0^{\circ}, 0244$,

» (b) $\pi = + 0^{\circ}, 0652 \pm 0^{\circ}, 0243$.

Il en résulterait que les deux composantes de β Cocher, dont M. Vogel a démontré l'existence par ses observations spectroscopiques, ne peuvent jamais s'écarter pour nous de plus de 0^o, 005.

Kleiber (J.). — Sur la distance moyenne des étoiles dont la vitesse radiale nous est connue.

Si la distribution des vitesses stellaires est due au hasard, la somme des valeurs absolues de leurs projections sur une droite quelconque doit être une quantité constante. Ainsi la somme des valeurs absolues des mouvements propres en déclinaison ($\Sigma \Delta\delta$) doit être égale à $\Sigma \Delta r$ et en désignant par Δr les vitesses radiales (considérées comme positives), et par Π la parallaxe moyenne, on aura

$$\Sigma \Delta\delta = \Sigma \Delta x \cos \delta = \frac{1}{C} \Pi \Sigma \Delta r,$$

où $C = 4,85$, si les vitesses Δr sont exprimées en kilomètres par seconde et les mouvements propres $\Delta x, \Delta\delta$ en secondes d'arc par année. *Kleiber* a essayé d'appliquer ces équations aux 22 étoiles dont les vitesses radiales ont été déterminées avec une grande précision par *M. Bessel*, tandis que leurs mouvements propres en ascension droite et en déclinaison sont connus par les recherches de *M. Auwers*. On a ici

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta\delta &= 5'',54, & \Sigma \Delta x \cos \delta &= 4'',83, \\ \Sigma \Delta r &= 363^{\text{km}}, & \text{grandeur moyenne} &= 1,8; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Pi &= 0'',074 \text{ par les } \Delta\delta, \\ \Pi &= 0'',065 \text{ » } \Delta x, \end{aligned}$$

et, en moyenne, $\Pi = 0'',07$. L'écart entre les deux résultats n'est que $0'',009$, ou de $\frac{1}{8}$; d'après les probabilités, il aurait pu dépasser $\frac{1}{6}$. La parallaxe moyenne de $0'',07$ est un peu plus faible que celle que donneraient les probabilités pour les deux premières classes de grandeur

Hale (G.-E.). — Photographie des protubérances.

L'un des procédés imaginés par *M. Hale* (*Bulletin*, t. VIII, p. 100) semble, il en convient, à une méthode proposée par le *P. Brauer*. Le procédé qu'il a définitivement adopté est complètement différent.

Aschieri. — Observations méridiennes de la Lune, faites à l'observatoire de Turin.

M. Aschieri a tenté d'appliquer la méthode recommandée par *M. Franz*, en visant toujours le cratère *Mæsting A*.

Observations du passage de Mercure (9 mai 1891), faites

lin, Breslau, Christiania, Gern (près Munich), Dresde, Gœttingue, Heidelberg, Iéna.

www.libtool.com.cn

Oertel (K.). — Nouvelles remarques sur les relations qui existent entre les Catalogues de Bonn (t. VI des *Annales*) et le Catalogue de Schjellerup.

Un travail récent de M. Schur (voir *Bulletin*, t. VIII, p. 180) ayant attiré l'attention de M. Oertel sur une petite erreur de réduction qui s'était glissée dans les comparaisons publiées par lui quelque temps auparavant (*Bulletin*, t. VII, p. 409), il a rectifié les nombres qui en étaient affectés, et il fait connaître le résultat du nouveau calcul. Il montre aussi que les écarts entre les $\Delta\delta$ calculés par lui-même et par M. Schur sont dus principalement à cette circonstance que M. Schur a négligé de corriger les déclinaisons d'Argelander, observées antérieurement à 1859; la moyenne des écarts est $-0^{\text{r}},30$, et c'est précisément ce qu'on trouve en évaluant l'influence de la correction omise. Il reste donc acquis que les $\Delta\delta$ varient beaucoup suivant les ascensions droites, comme l'avait trouvé M. Oertel.

Barnard. — Recherches entreprises pour retrouver la comète de Winnecke, avant le périhélie.

Le résultat de ces recherches a été jusqu'ici négatif.

Wilsing (J.). — La rotation du Soleil et la périodicité des taches solaires.

M. Wilsing a tenté d'expliquer la loi de rotation qui se déduit de l'observation des taches solaires, en partant de cette hypothèse que les différences de vitesse existantes sont les derniers vestiges d'un immense courant qui brassait les couches extérieures du Soleil. Le problème n'est pas sans analogie avec celui que M. Zöppritz a résolu dans ses recherches sur la théorie des courants (1878). M. Wilsing admet que le corps central (quel qu'en soit d'ailleurs l'état physique) tourne tout d'une pièce; que l'enveloppe extérieure, formée d'un fluide d'une très faible densité, possédait originairement des vitesses de rotation variant d'un parallèle à l'autre, et il se demande quel est le temps nécessaire pour que ces différences de vitesse disparaissent peu à peu sous l'influence de la viscosité ou du frottement intérieur. Il trouve qu'il faut pour cela des millions d'années; et la conclusion, c'est que les différences qui s'observent aujourd'hui peuvent être attribuées à l'existence ancienne d'un grand

courant. Le phénomène aurait donc le caractère d'une inégalité séculaire. Quant à la périodicité des taches solaires, M. Wilsing pense qu'elle pourrait être attribuée aux réactions violentes, nées des perturbations du mouvement de rotation que M. G. Darwin et M. Schiaparelli ont considérées dans leurs recherches sur la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques.

Vogel (H.-C.). — Sur l'étoile β Cocher.

M. Vogel a pu faire quelques observations nouvelles du spectre de cette étoile, très probablement double. Les résultats de ses mesures s'accordent très bien avec la période trouvée par M. Pickering (2²³ 37^m).

Vogel. — Sur la période de l'étoile α Vierge.

De nouvelles observations ont confirmé les résultats précédemment obtenus.

Charlois. — Découverte des planètes (310) et (311).

Wellmann. — Tables pour le calcul de la fonction perturbatrice des petites planètes.

Ces Tables sont destinées à faciliter le calcul des coefficients de la fonction perturbatrice sous la forme adoptée par M. Gylden.

Wellmann. — Sur une forme nouvelle du micromètre circulaire et du micromètre à réticule.

Le micromètre de M. Wellmann est formé d'une plaque de verre dans laquelle sont gravés plusieurs cercles concentriques et deux diamètres qui se coupent à angles droits. La plaque est éclairée par la tranche, qui reste à découvert, et la lumière, en y pénétrant, fait paraître les rayures comme des lignes lumineuses sur fond sombre. Fraunhofer avait déjà essayé de réaliser un micromètre de ce genre, mais le mode d'éclairage auquel il avait recours était insuffisant. L'artifice imaginé par M. Wellmann résout le problème d'une manière très satisfaisante, et il pourrait s'appliquer également à la construction des micromètres à réticule, dont l'emploi est à recommander.

Bossert (J.). — Éphémérides de la comète Tempel-Swift.

Herz (Norbert). — Remarques sur la « variation diurne des latitudes » de M. Folie.

M. Herz fait voir, en peu de mots, qu'il s'agit encore d'une confusion d'idées.

Schultz (Ernest). — Application de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton à la détermination de l'orbite d'un point soumis à l'attraction d'un sphéroïde homogène.

L'auteur obtient une détermination directe des perturbations des éléments. Mais il faut dire que M. Harzer a montré (*Astr. Nachr.*, 3046) que le mouvement du périhélie, trouvé par M. Schultz, est inexact.

Burnham. — Mesures des étoiles signalées comme doubles dans le Catalogue Krueger.

M. Burnham a trouvé, parmi les objets en question, 67 qui n'avaient pas encore été mesurés, et il s'est attaché à les examiner tous. Sa Note est suivie de quelques remarques explicatives de M. Krueger.

Pickering. — Observations de comètes, faites à l'Observatoire du collège Harvard, par M. O. Wendell.

Abetti. — Observations de planètes, faites à Padoue.

Knopf (O.). — Éléments de la planète (307).

Dunér. — Remarques concernant la variable Y Cygne.

M. Dunér rectifie les conclusions qu'il avait tirées d'observations antérieures, faites dans de mauvaises conditions.

Observations de comètes et de planètes, etc.

R. R.



BIBLIOGRAPHIE.

- BATTERMANN. — *Beiträge zur Bestimmung der Mondbewegung und der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen von Sternbedeckungen.* Berlin, 1891; in-4°.
- BREDICHIN. — *Sur les phénomènes extraordinaires présentés par la grande comète de 1882.* Saint-Pétersbourg, 1890; in-8°, avec 1 planche.
- BREDICHIN. — *Sur les propriétés importantes des courants météoriques.* Moscou, 1890; in-8°, avec 2 planches.
- FRANZ (J.). — *Die jährliche Parallaxe des Sterns *œltzen* 11677, bestimmt mit dem Königsberger Heliometer.* Königsberg, 1891; in-8°.
- KREUTZ (H.). — *Untersuchungen über das System der Cometen 1813 I, 1880 I und 1882 II. Zweiter Theil : Der grosse Septembercomet 1882 II.* Kiel, 1891; in-4°.
- LANGLEY, VERY. — *On the cheapest form of light, from studies at the Allegheny Observatory,* 1890; in-8°, 3 planches.
- NOBILE. — *Resultati delle osservazioni meridiane della 2^a meta del 1890.* Naples, 1891; in-4°.
- Report for the year 1889-90, presented by the board of managers of the Observatory of Yale University to the president and fellows.* In-8°.
- Report of the superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending 1890 June 30.* Washington, 1890; in-8°.
- Reports on the observations of the total eclipse of the Sun, december 21-22, 1889, and of the total eclipse of the Moon, July 22, 1888, published by the Lick Observatory.* Sacramento, 1891; in-8°.
- SEELIGER. — *Ueber optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne.* Munich, 1889; in-8°.
- SEELIGER. — *Ueber Zusammenstöße und Theilungen planetarischer Massen.* Munich, 1891; in-4°.
-

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

ÉTUDES SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION;

PAR M. R. RADAU.

[*Suite et fin* (¹).]

III.

34. C'est sur un autre principe que reposent les formules que M. Tchébychef a développées dans son *Mémoire sur l'Interpolation dans le cas d'un grand nombre de données*, présenté à l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg en octobre 1858 (Saint-Petersbourg, 1859; in-4° de 81 pages). Il s'y propose le problème suivant :

« Étant donnée une suite de valeurs f_1, f_2, \dots de

$$f(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

qui correspondent à des valeurs de x équidistantes et très rapprochées entre elles, combiner f_1, f_2, \dots par simple addition et soustraction, de manière que le résultat final ne contienne que le terme affecté de A_i et que ce terme soit le plus grand possible. »

La solution s'obtient en supposant le nombre des données *infini*. Elle est fournie par des séries dont les coefficients dépendent d'intégrales définies que l'on évalue, par quadratures mécaniques, à l'aide des ordonnées f_1, f_2, \dots . Les formules établies dans cette hypothèse représentent évidemment la limite vers laquelle convergent les résultats de l'interpolation, à mesure qu'augmente le nombre des ordonnées.

On voit déjà que la méthode de M. Tchébychef convient essentiellement aux cas où les données sont très nombreuses, où, par conséquent, la méthode des moindres carrés entraîne des calculs d'une longueur disproportionnée avec les avantages qu'elle procure sous le rapport de la précision du résultat. La méthode des moindres carrés resterait réservée aux cas où le nombre des données

(¹) Voir *Bulletin astronomique*, VIII, p. 273, 325 et 376.

n'est pas très grand, parce qu'elle permet d'épuiser, en quelque sorte, les ressources qu'elles offrent pour diminuer l'erreur moyenne à craindre, et aussi pour nous rendre un compte exact du degré d'approximation qui a été atteint.

La méthode de M. Tchébychef a fait, dans ces derniers temps, l'objet d'études importantes, publiées par M. O. Backlund dans le tome VII des *Mélanges mathématiques* de l'Académie de Saint-Petersbourg (mai 1884) et par M. P. Harzer, dans les nos 2757-2759 des *Astronomische Nachrichten* (novembre 1886; voir aussi *Bull. astr.*, t. III, p. 611). Ces études, qui sont accompagnées d'exemples numériques, nous faciliteront notre tâche.

35. Il s'agit donc de déterminer les coefficients A de la formule d'interpolation

$$(1) \quad f(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

par des relations de la forme

$$c_i A_i = S_1 f - S_2 f + S_3 f - \dots \pm S_m f,$$

où S_1, S_2, S_3, \dots sont des sommes de valeurs successives de f , ces valeurs étant données en nombre infini pour des valeurs équidistantes de x . En faisant

$$(2) \quad c_i = (S_1 - S_2 + S_3 - \dots) x^i,$$

on trouve d'abord

$$(S_1 - S_2 + S_3 - \dots) f = A_0 c_0 + A_1 c_1 + \dots + A_n c_n,$$

et, cette expression devant se réduire à un seul terme $A_i c_i$ (avec un facteur c_i aussi grand que possible), on a les conditions

$$(3) \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \dots, \quad c_{i-1} = 0, \quad c_{i+1} = 0, \quad \dots, \quad c_n = 0.$$

Si les valeurs données sont très rapprochées entre elles, les sommes pourront être remplacées par des intégrales; nous pourrions encore, sans nuire à la généralité des formules, supposer l'argument x contenu entre les limites $+1$ et -1 . Cet intervalle étant divisé en une série de tronçons, ayant pour limites successives

$$-1, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_m, \quad +1.$$

et correspondant aux sommes partielles S_1, S_2, \dots , si nous représentons par le symbole \int_m la suite d'intégrales définies

$$\int_{-1}^{a_1} - \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} - \int_{a_3}^{a_4} + \dots + (-1)^m \int_{a_m}^{+1}$$

ou bien

$$\int_{-1}^{a_1} + \int_{a_2}^{a_1} + \int_{a_2}^{a_3} + \int_{a_1}^{a_3} + \dots \pm \int_{a_m}^{+1},$$

nous aurons

$$\int_m f(x) dx = [F(x)]_m = 2F(a_1) - 2F(a_2) + \dots \mp 2F(a_m) \pm F(+1) - F(-1),$$

$F(x)$ étant l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$. Ensuite

$$(4) \quad c_i \Lambda_i = \int_m f \cdot dx,$$

où le second membre s'obtient par voie de quadrature mécanique, à l'aide des valeurs données de f , tandis que le coefficient c_i ou $c_i^{(m)}$ peut être calculé, une fois pour toutes, par la formule

$$(5) \quad c_i^{(m)} = \int_m x^i dx,$$

d'où l'on tire

$$(6) \quad \frac{1+l}{2} c_i^{(m)} = a_1^{l+1} - a_2^{l+1} + \dots \pm a_m^{l+1} + \frac{(-1)^m + (-1)^l}{2}.$$

Les limites intercalaires a_1, a_2, \dots, a_m se déterminent par les conditions (3), en égalant à zéro l'expression (6), dont le dernier terme est, tour à tour, 0 ou ± 1 .

En prenant $m = n$, on aurait donc n équations (non linéaires) pour déterminer n inconnues (a_1, a_2, \dots) pour chaque valeur particulière de i . Il faudrait ensuite, parmi les racines réelles, choisir celles qui forment une suite régulière entre les limites -1 et $+1$, et qui donnent pour c_i la plus grande valeur possible (*).

(*) On ne peut guère recourir ici aux équations de condition $dc_0 = 0, dc_1 = 0, \dots$ que fournit la théorie des maxima relatifs; elles seraient en général incompatibles avec les équations données, à moins de prendre $m > n$ et d'admettre des racines égales (n° 40).

Le mode de solution employé par M. Tchébychef, fort ingénieux, mais d'une application assez pénible, repose sur les remarques suivantes.

On a, en développant suivant les puissances descendantes de x ,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^n}{x-1} - \frac{2}{x-a_1} + \frac{2}{x-a_2} - \dots \\ & = - \sum \frac{(l+1)c_l}{x^{l+2}} = - \frac{(i+1)c_i}{x^{i+2}} - \frac{(n+2)c_{n+1}}{x^{n+2}} - \dots \end{aligned} \right.$$

à cause des relations (3), en vertu desquelles les coefficients c_l s'annulent jusqu'à $l = n$, excepté pour $l = i$. En multipliant par dx et intégrant, jusqu'à $x = \infty$, on trouve

$$\log \frac{x+1}{(x-1)^{-1}} \frac{(x-a_2)^2 \dots}{(x-a_1)^2 \dots} = \frac{c_i}{x^{i+1}} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+2}} + \dots$$

Cette relation peut s'écrire

$$(8) \quad \frac{x+1}{(x-1)^{-1}} \frac{(x-a_2)^2(x-a_4)^2 \dots}{(x-a_1)^2(x-a_3)^2 \dots} = e^{\frac{c_i}{x^{i+1}} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+2}} + \frac{c_{n+2}}{x^{n+3}} + \dots}$$

On pourrait aussi la déduire de la formule générale qui exprime la dépendance mutuelle des coefficients d'une équation algébrique et des sommes des puissances semblables de ses racines :

$$(9) \quad (x-a)(x-b)(x-c) \dots = x^n \cdot e^{-\frac{s_1}{x} - \frac{s_2}{2x^2} - \frac{s_3}{3x^3} - \dots},$$

où $s_n = a^n + b^n + c^n + \dots$

36. M. Tchébychef se sert de la formule (8) pour déterminer c_i et les racines a_1, a_2, \dots , à l'aide de raisonnements empruntés à la théorie des fractions continues, en considérant les réduites qui se rencontrent dans le développement de l'expression

$$\sqrt{\frac{(x-1)^{-1}}{x+1}} e^{\frac{c_i}{2x^{i+1}}}$$

Mais il convient peut-être de circonscrire tout de suite le problème, en constatant que la résolution directe des équations (3), en supposant $m = n$, donne toujours n racines symétriques (c'est-à-dire égales et de signes contraires) dans le cas de $i = n, n-2, n-4, \dots$ et $n-1$ racines symétriques (la $n^{\text{ième}}$ étant ± 1) dans le cas de $i = n-1, n-3, \dots$. On peut, en effet, prouver que la

solution est fournie par n ou $n - 1$ racines symétriques $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, ... (dont l'une égale à zéro, si leur nombre est impair).

Pour le démontrer, remarquons que, si nous changeons x en $-x$, la formule (8) devient

$$(10) \quad \frac{x-1}{(x+1)^2} \frac{(x+a_2)^2(x+a_4)^2 \dots}{(x+a_1)^2(x+a_3)^2 \dots} = e^{\pm \frac{c_i}{x^{i+1}} \pm \frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \dots}$$

Lorsque i est un nombre pair, en multipliant (8) par (10), c_i s'élimine, et l'on trouve, suivant que n est pair ou impair,

$$(11) \quad i \text{ pair} \begin{cases} n \text{ pair} \dots\dots\dots \frac{x^2 - a_2^2}{x^2 - a_1^2} \frac{x^2 - a_4^2}{x^2 - a_3^2} \dots = e^{\frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \dots} \\ n \text{ impair} \dots\dots\dots \frac{x^2 - 1}{x^2 - a_1^2} \frac{x^2 - a_3^2}{x^2 - a_2^2} \dots = e^{\frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \dots} \end{cases}$$

Lorsque i est impair, on élimine c_i en divisant (8) par (10); on trouve ainsi

$$i \text{ impair} \begin{cases} n \text{ impair} \dots\dots\dots \frac{x+a_1}{x-a_1} \frac{x+a_3}{x-a_3} \dots \frac{x-a_2}{x+a_2} \frac{x-a_4}{x+a_4} \dots = e^{\frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \dots} \\ n \text{ pair} \dots\dots\dots \frac{x+1}{x-1} \frac{x+a_1}{x-a_1} \frac{x+a_3}{x-a_3} \dots \frac{x-a_2}{x+a_2} \frac{x-a_4}{x+a_4} \dots = e^{\frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \dots} \end{cases}$$

Comme le degré des dénominateurs ne dépasse pas n ou $n + 1$, nous pouvons remplacer les exponentielles par l'unité. Les relations (11) signifient dès lors que les quantités a_2^2, a_4^2, \dots coïncident avec a_1^2, a_3^2, \dots ; dans le cas de n impair, il y en a une qui est égale à l'unité.

Or, on ne peut faire $a_1 = a_2, \dots$, car la formule (8) conduirait alors à des conditions incompatibles; il s'ensuit que les racines a_1, a_3, \dots sont égales à $-a_2, -a_4, \dots$, en d'autres termes, que les racines sont *symétriques* (dans le cas d'un nombre impair, il y en a une qui se réduit à l'unité, de sorte que $m = n - 1$).

Les formules (12), relatives au cas de i impair, nous disent que les racines sont encore symétriques, mais l'une se réduit à zéro; et, si n est pair, une autre se réduit à l'unité. Pour le comprendre, il suffira d'écrire les équations pour $n = 4$ et $n = 5$

$$\begin{aligned} n=4 & \quad (x-1)(x+a_1)(x+a_3)(x-a_2)(x-a_4) = (x-1)(x-a_1)(x-a_3)(x+a_2)(x+a_4), \\ n=5 & \quad \alpha_1(x+a_3)(x+a_5)(x-a_2)(x-a_4) = (x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)(x+a_2)(x+a_4). \end{aligned}$$

En faisant $x = 0$, elles donnent respectivement $a_1 a_2 a_3 a_4 = 0$ et $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 0$, d'où il suit qu'il y a toujours une racine nulle. En faisant, dans la première, $x = 1$, le second membre s'annule, et il s'ensuit qu'il faut faire $a_4 = 1$ ou $a_4 = -1$, ce qui réduit le nombre des racines utiles à trois. On a donc encore $m = n - 1$.

37. En résumé, le nombre m des racines est égal à n , lorsque n et i sont de même parité ($i = n, n - 2, n - 4, \dots$); on aura $m = n - 1$ (l'une des racines coïncidant avec ± 1) pour $i = n - 1, n - 3, \dots$. Nous n'avons plus, dès lors, que des racines symétriques $\pm a, \pm b, \pm c, \dots$ (y compris la racine zéro, si leur nombre est impair). La formule (6) devient

$$(13) \quad \frac{1+l}{4} c_i^{(m)} = \frac{(-1)^l + (-1)^m}{2} \left(\frac{1}{2} - a^{l+1} + b^{l+1} - \dots \right),$$

et l'on voit que, de cette façon, on aura, pour $m = n$,

$$c_{n-1} = 0, \quad c_{n-3} = 0, \quad \dots, \quad c_{n+1} = 0, \quad c_{n+3} = 0, \quad \dots,$$

et pour $m = n - 1$,

$$c_n = 0, \quad c_{n-2} = 0, \quad \dots, \quad c_{n+2} = 0, \quad c_{n+4} = 0, \quad \dots$$

Il reste donc, dans le premier cas, les conditions $c_n = 0, c_{n-2} = 0, \dots$, et dans le second, les conditions $c_{n-1} = 0, c_{n-3} = 0$, qui, les unes et les autres, peuvent s'écrire

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} = a^{m+1} - b^{m+1} + c^{m+1} - \dots \\ \frac{1}{2} = a^{m-1} - b^{m-1} + c^{m-1} - \dots \\ \dots \end{cases}$$

Le nombre des inconnues a, b, c, \dots est $\frac{m}{2}$, ou bien $\frac{m-1}{2}$ (plus la racine 0). En même temps,

$$i = m, \quad m - 2, \quad m - 4, \quad \dots \quad \text{et} \quad n = m \quad \text{ou} \quad m + 1.$$

Il est entendu que celle des équations (14) qui correspond à $c_i = 0$ doit être remplacée par la suivante

$$(15) \quad \frac{1}{2} \cdot (-1)^l \cdot \frac{1+l}{4} c_i = a^{l+1} - b^{l+1} + c^{l+1} - \dots$$

On trouve ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned}
 m = 2 \quad & \left\{ \begin{array}{l} i = 2 \quad \dots \quad a = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - a^2 = \frac{3}{4} c_2, \\ n = 2 \text{ ou } 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 0 \quad \dots \quad a^3 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - a = \frac{1}{4} c_0, \\ \\ m = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 3 \quad \dots \quad a^2 = \frac{1}{2}, \quad a^4 - \frac{1}{2} = c_3, \\ n = 3 \text{ ou } 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \quad \dots \quad a^4 = \frac{1}{2}, \quad a^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} c_1, \\ b = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

de sorte que les limites intercalaires et les coefficients c_i deviennent, pour $n = 3$,

Limites.	Coefficients c_i .
$n = 3 \left\{ \begin{array}{l} \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ et } 0 \\ \pm \frac{1}{4} \\ \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } 0 \end{array} \right.$	$c_0 = -1,1748$ $c_1 = +0,4142$ $c_2 = +0,5$ $c_3 = -0,25.$

On a ensuite, par exemple, pour $i = 2$,

$$\frac{1}{2} A_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f dx,$$

où les intégrales devront être évaluées par quadratures mécaniques. Pour $m = 4, 5, 6, \dots$, on trouve de même

$$\begin{aligned}
 m = 4 \quad & \left\{ \begin{array}{l} i = 4 \quad \dots \quad a - b = a^3 - b^3 = \frac{1}{2}, \quad a^5 - b^5 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} c_4, \\ n = 4 \text{ ou } 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 2 \quad \dots \quad a - b = a^3 - b^3 = \frac{1}{2}, \quad a^3 - b^3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} c_2, \\ i = 0 \quad \dots \quad a^3 - b^3 = a^5 - b^5 = \frac{1}{2}, \quad a - b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} c_0, \end{array} \right. \\ \\ m = 5 \quad & \left\{ \begin{array}{l} i = 5 \quad \dots \quad a^2 - b^2 = a^4 - b^4 = \frac{1}{2}, \quad a^6 - b^6 = \frac{1 + 3c_5}{2}, \\ n = 5 \text{ ou } 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 3 \quad \dots \quad a^2 - b^2 = a^6 - b^6 = \frac{1}{2}, \quad a^4 - b^4 = \frac{1 + 2c_3}{2}, \\ c = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \quad \dots \quad a^4 - b^4 = a^6 - b^6 = \frac{1}{2}, \quad a^2 - b^2 = \frac{1 + c_1}{2}, \\ \\ m = 6 \quad & \left\{ \begin{array}{l} i = 6 \quad \dots \quad a - b + c = a^3 - b^3 + c^3 = a^5 - b^5 + c^5 = \frac{1}{2}, \\ n = 6 \text{ ou } 7 \quad \left\{ \begin{array}{l} a^7 - b^7 + c^7 = \frac{1}{2} - \frac{7}{4} c_6, \\ \dots \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

38. La résolution de ces équations n'offre aucune difficulté sérieuse.

Dans le cas particulier de $i = m$, ainsi que l'a remarqué M. Tchébychef, les valeurs des constantes peuvent s'obtenir d'une manière explicite. Les conditions sont ici

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha^{m+1} - b^{m+1} + c^{m+1} - \dots = \frac{1}{2} - (-1)^m \frac{1+m}{4} c_m^{(m)}, \\ \alpha^{m-1} - b^{m-1} + c^{m-1} - \dots = \frac{1}{2}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

On y satisfait en posant

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \frac{\pi}{m+1}, & b = \cos \frac{2\pi}{m+1}, & c = \cos \frac{3\pi}{m+1}, & \dots, \\ c_m^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m-1}}. \end{cases}$$

Cela résulte des relations

$$(18) \quad \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2n+1} - \cos \frac{2\pi}{2n+1} + \dots \pm \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\pi}{n} + \dots \pm \cos \frac{n-1}{n}\pi = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}, \end{cases}$$

comme on le vérifie aisément.

Les formules (3) et (13) montrent que, pour $i = m$, nous avons

$$(19) \quad c_0^{(m)} = 0, \quad c_1^{(m)} = 0, \quad \dots, \quad c_{m-1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+3}^{(m)} = 0, \quad \dots$$

On trouve ensuite

$$(20) \quad c_{2n}^{(0)} = \frac{2}{2n+1}, \quad c_{2n+1}^{(1)} = \frac{-2}{2n+2}$$

et, pour $m > 1$,

$$(21) \quad \begin{cases} c_{m+2}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} \frac{m+1}{1}, & c_{m+4}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m+3}} \frac{m+1}{1} \frac{m+4}{2}, \\ c_{m+6}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m+5}} \frac{m+1}{1} \frac{m+5}{2} \frac{m+6}{3}, & \dots, \end{cases}$$

ou bien, pour $m > 2i$,

$$(22) \quad (-1)^m 2^{m-1} c_m^{(m-2i)} = m_i - m_{i-1},$$

où le second membre représente les coefficients du développement de $(1-x)(1+x)^m$.

39. Dans le cas général, on peut se servir avec avantage des relations bien connues qui existent entre les coefficients p_n d'une équation algébrique et les sommes s_n des puissances semblables de ses racines, à savoir

$$s_1 = p_1, \quad s_2 = p_1^2 - 2p_2, \quad s_3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3, \quad \dots,$$

ou bien, si l'on fait $s'_1 - s_n = nq_n$,

$$q_3 = p_1p_2 - p_3, \quad q_5 = (p_1^2 - p_2)q_3 + p_1p_3 - p_5,$$

$$q_7 = (p_1^2 - p_2)q_5 + (p_1p_3 - p_4)q_3 + p_1p_6 - p_7, \quad \dots$$

On trouve ainsi, par exemple,

$m.$ $i.$

$$4 \quad 1 \dots \quad 4a - 1 = 4b + 1 = \sqrt{5}; \quad c_4 = \frac{1}{8}.$$

$$4 \quad 2 \dots \quad (4a - 1)^2 = (4b + 1)^2 = 2\sqrt{13} - 1; \quad 4c_2 = 3 - \sqrt{13}.$$

$$4 \quad 0 \dots \quad 2(a - b)^2 - 5(a - b) + 9 = \frac{5}{2}.$$

$$5 \quad 5 \dots \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad b = \frac{1}{2}; \quad c_5 = -\frac{1}{16}.$$

$$5 \quad 3 \dots \quad 4a^2 - 1 = 4b^2 + 1 = \sqrt{5}; \quad 4c_3 = \sqrt{5} - 2.$$

$$5 \quad 1 \dots \quad \begin{cases} (a^2 - b^2)^2 - 2(a^2 - b^2) + \frac{3}{4} = 0; \\ a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} = 0; \quad \left(\frac{1+c_1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + c_1. \end{cases}$$

$$6 \quad 6 \dots \quad \begin{cases} a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{8} = 0; \\ a = \cos \frac{\pi}{7}, \quad b = \cos \frac{2\pi}{7}, \quad c = \cos \frac{3\pi}{7}; \quad c_6 = \frac{1}{32}. \end{cases}$$

$$6 \quad 4 \dots \quad \begin{cases} a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}(\sqrt{29} - 1)a + \frac{1}{16}(\sqrt{29} - 3) = 0; \\ c_4 = -\frac{1}{16}(\sqrt{29} - 5). \end{cases}$$

$$6 \quad 2 \dots \quad \begin{cases} a^3 - \frac{1}{2}a^2 + p_2a - p_3 = 0, \\ p_1^2 + \frac{1}{4}p_2^2 - \frac{1}{4}p_2 = \frac{1}{64}, \quad 4p_3 + \frac{1}{8}p_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 m. \quad i. \\
 6 \quad 0 \dots \left\{ \begin{array}{l} a^3 - p_1 a^2 + p_2 a - p_3 = 0, \\ 2p_1^0 - 15p_1^1 + 63p_1^2 - 225p_1^3 + \frac{315}{2} p_1^4 - \frac{175}{4} p_1 + 18 = 0, \\ q_3 = (p_1^2 - p_2) q_2, \quad q_3 = p_1 p_2 - p_3. \end{array} \right. \\
 7 \quad 7 \dots \left\{ \begin{array}{l} b^2 = \frac{1}{2}, \quad a^2 + c^2 = 1, \quad a^2 - a^4 = c^2 - c^4 = \frac{1}{8}, \quad d = 0, \\ a = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \cos \frac{\pi}{4}, \quad c = \sin \frac{\pi}{8}, \quad c_7 = -\frac{1}{64}. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Voici d'ailleurs les valeurs numériques des constantes :

<i>m.</i>	<i>n.</i>	Coefficients.	Limites Intercalaires.		
0	0 ou 1...	$c_0 = 2$...		
1	1 ou 2...	$c_1 = -1$	0		
2	2 ou 3...	$c_2 = +0,5$ $c_0 = -1,1748$	$\pm 0,5$ $\pm 0,79370$		
3	3 ou 4...	$c_3 = -0,25$ $c_1 = +0,41421$	$\pm 0,70711$ $\pm 0,84090$	et 0	et 0
4	4 ou 5...	$c_4 = +0,125$ $c_2 = -0,15139$ $c_0 = +0,83443$	$\pm 0,80902$ $\pm 0,87305$ $\pm 0,89729$	$\pm 0,30902$ $\pm 0,37305$ $\pm 0,60591$	
5	5 ou 6...	$c_5 = -0,0625$ $c_3 = +0,05901$ $c_1 = -0,22777$	$\pm 0,86603$ $\pm 0,89945$ $\pm 0,91681$	$\pm 0,5$ $\pm 0,55589$ $\pm 0,67411$	et 0 et 0
6	6 ou 7...	$c_6 = +0,03125$ $c_4 = -0,02407$ $c_2 = +0,06653$ $c_0 = -0,64758$	$\pm 0,90097$ $\pm 0,91975$ $\pm 0,93091$ $\pm 0,93839$	$\pm 0,62349$ $\pm 0,66389$ $\pm 0,72574$ $\pm 0,76036$	$\pm 0,22252$ $\pm 0,24414$ $\pm 0,29483$ $\pm 0,48387$
7	7 ou 8...	$c_7 = -0,01562$	$\pm 0,92388$	$\pm 0,70711$	$\pm 0,38268$

Pour mieux faire saisir l'esprit de la méthode, transcrivons les formules finales pour $n = 3$.

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3.$$

$$-1,1748 A_0 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^a f dx + \int_a^1 f dx; \quad a = 0,7937,$$

$$0,4142 A_1 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^0 f dx + \int_0^a f dx - \int_a^1 f dx; \quad a = 0,84$$

$$\frac{1}{2} A_2 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^a f dx + \int_a^1 f dx; \quad a = 0,5,$$

$$-\frac{1}{4} A_3 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^0 f dx + \int_0^a f dx - \int_a^1 f dx; \quad a = 0,70$$

Les intégrales s'obtiennent par quadratures mécaniques, à l'aide des valeurs données de f , que l'on suppose nombreuses et rapprochées entre elles. Il faut, bien entendu, commencer par ramener à ± 1 les limites x_0, x_n de l'argument donné x , en posant

$$(23) \quad x = \frac{x_n + x_0}{2} + \frac{x_n - x_0}{2} x.$$

40. On pourrait aussi établir des formules analogues en prenant $m > n$. Ainsi, pour $n = 2, m = 4$, on aurait les limites $\pm a, \pm b$, avec les conditions

$$a - b = \frac{1}{2}, \quad a^3 - b^3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} c_2;$$

la meilleure valeur de c_2 s'obtiendrait pour $a = +\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$, à savoir $c_2 = \frac{8}{9}$. On trouverait alors

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 f dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f dx - \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f dx - 3 \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f dx.$$

Mais cela revient à introduire encore des facteurs numériques qui multiplient les intégrales, et ce serait déjà une extension du problème. Il est vrai que la relation

$$\frac{8}{9} \Lambda_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f dx - 3 \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f dx$$

ne serait guère moins simple que celle-ci

$$\frac{1}{2} \Lambda_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f dx.$$

41. M. Tchébychef a fait l'application de ses formules à un exemple numérique, emprunté aux recherches de Kopp sur la densité de l'eau. M. Backlund a traité, à son tour, quelques exemples de nature à intéresser les astronomes (réduction d'observations spectrales, comparaison de deux Catalogues, distances mesurées d'un couple).

L'évaluation des intégrales qui entrent dans ces formules peut

être abrégée par l'emploi d'un procédé graphique; on peut aussi commencer par régulariser les données d'observation en formant des « lieux normaux » de même poids. M. Tchébychef a d'ailleurs donné une formule très simple pour le calcul approximatif des intégrales, qui se déduit de la formule des trapèzes, et que l'on peut, avec M. Backlund, ramener à cette dernière par l'introduction des valeurs de $f(x)$ qui correspondent aux limites intercalaires. Supposons que la limite a tombe entre les valeurs x_3, x_1 , de l'argument pour lesquelles on connaisse f_3, f_1 , on fera simplement

$$f_a = f_3 + \frac{a - x_3}{x_1 - x_3} (f_1 - f_3).$$

On aura ensuite, par la formule des trapèzes, en supposant x_1, x_3, \dots, x_9 compris entre a et b ,

$$\begin{aligned} \int_a^b f dx &= \frac{x_1 - a}{2} (f_a + f_1) + \frac{x_3 - x_1}{2} (f_1 + f_3) + \dots + \frac{b - x_9}{2} (f_9 + f_b) \\ &= \frac{x_1 - a}{2} f_a + \frac{x_3 - a}{2} f_1 + \frac{x_5 - x_3}{2} f_3 + \dots + \frac{x_9 - x_7}{2} f_9 \\ &\quad + \frac{b - x_9}{2} f_b \\ &= \frac{(x_1 - a)^2 f_1 - (x_3 - a)^2 f_3}{2(x_1 - x_3)} + \frac{x_5 - x_3}{2} f_5 + \frac{x_7 - x_5}{2} f_7 + \dots \\ &\quad + \frac{x_{10} - x_8}{2} f_9 + \frac{(x_9 - b)^2 f_{10} - (x_{10} - b)^2 f_9}{2(x_{10} - x_9)}. \end{aligned}$$

42. Un des inconvénients de cette méthode, c'est qu'il faut fixer d'avance le degré de la formule d'interpolation, et recommencer tous les calculs, si le résultat n'est pas satisfaisant. M. Tchébychef a cherché à remédier à ce défaut par sa seconde méthode, fondée sur la formule

$$(24) \quad f(x) = \alpha_0 \theta_0 + \alpha_1 \theta_1 + \dots + \alpha_n \theta_n,$$

où $\theta_0, \theta_1, \dots$ sont des polynômes donnés de la forme

$$(25) \quad \theta_l = \beta_l x^l + \gamma_l x^{l-2} + \dots,$$

tandis que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ se déduisent des valeurs données de f en faisant

$$(26) \quad \alpha_m = \int_m f(x) dx.$$

les limites intercalaires étant ici exclusivement celles fournies par les formules (16), de sorte que

$$\int_0 = \int_{-1}^{+1}, \quad \int_1 = \int_{-1}^0 - \int_0^{+1}, \quad \int_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \int_{+\frac{1}{2}}^{+1},$$

$$\int_3 = \int_{-1}^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} - \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^0 + \int_0^{+\sqrt{\frac{1}{2}}} - \int_{+\sqrt{\frac{1}{2}}}^{+1}, \quad \dots$$

D'après ce qui a été dit, ces limites vérifient les conditions

$$(27) \quad c_0^{(m)} = 0, \quad c_1^{(m)} = 0, \quad \dots, \quad c_{m-1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+3}^{(m)} = 0, \quad \dots,$$

où

$$c_l^{(m)} = \int_m x^l dx.$$

On peut déterminer les θ de plusieurs manières. Remarquons d'abord qu'en substituant l'expression (24) dans (26), on doit trouver une identité, d'où il suit que

$$(28) \quad \begin{cases} \int_m \theta_m dx = 1, \\ \int_m \theta_l dx = 0 \quad \text{pour} \quad l = 0, 1, \dots, m-1, m+1 \dots n. \end{cases}$$

Si θ_l a la forme (25), ces conditions sont déjà remplies pour $l = 0, 1, \dots, m-1, m+1, m+3, \dots$, à cause de (27); il ne reste donc que les conditions relatives à $l = m, m+2, m+4, \dots$, qui suffisent pour déterminer les coefficients de θ_l , puisque

$$\int_m \theta_l dx = \beta c_l^{(m)} + \gamma c_{l-2}^{(m)} + \dots$$

On aurait, en faisant successivement $m = l, l-2, l-4, \dots$,

$$\begin{aligned} 1 &= \beta c_l^{(l)}, \\ 0 &= \beta c_l^{(l-2)} + \gamma c_{l-2}^{(l-2)}, \end{aligned}$$

les coefficients $c_l^{(m)}$ étant donnés par les formules (19). On trouve ainsi

$$(29) \quad \begin{cases} \theta_0 = \frac{1}{2}, & \theta_1 = -x, & \theta_2 = 2x^2 - \frac{2}{3}, & \theta_3 = -4x^3 + 2x, \\ \theta_4 = 8x^4 - 6x^2 + \frac{2}{5}, & \theta_5 = -16x^5 + 16x^3 - \frac{8}{3}, & \dots \end{cases}$$

Il est d'ailleurs visible que la forme (25), adoptée pour θ_l , est exigée par les conditions (28), qui montrent que θ_l est nécessairement une fonction paire ou impaire, de degré l .

43. Nous allons maintenant déterminer les polynômes θ d'une manière plus directe. Il convient, pour cela, de poser

$$(30) \quad \int_0^x f(x) dx = F(x)$$

d'où

$$\alpha_m = \left[\frac{F}{m} \right] = -F(-1) + 2F(\alpha_1) - 2F(\alpha_2) + \dots + (-1)^m F(1).$$

Nous ferons en même temps

$$(31) \quad 2(m+1) \int_0^x \theta_m dx = (-1)^m X_{m+1},$$

de sorte que (24) devient

$$(32) \quad \begin{cases} 2F(x) = \alpha_0 X_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 X_2 + \frac{1}{3} \alpha_2 X_3 - \dots \\ 2F(x) = X_1 \left[\frac{F}{0} \right] - \frac{1}{2} X_2 \left[\frac{F}{1} \right] + \frac{1}{3} X_3 \left[\frac{F}{2} \right] - \dots \end{cases}$$

En désignant par z une quantité arbitraire, et prenant

$$f(x) = \frac{1}{(z-x)^2}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{z-x} dx,$$

on aurait donc

$$(33) \quad 2 \int_0^x \frac{1}{z-x} dx = X_1 \left[\frac{1}{z-x} \right] - \frac{1}{2} X_2 \left[\frac{1}{z-x} \right] + \dots$$

Or, d'après ce que nous avons vu, par les formules (6), (7), on a (pour $i = m$)

$$\begin{aligned} m \left[\frac{1}{z-x} \right] &= -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-\alpha_1} - \frac{2}{z-\alpha_2} + \dots + \frac{(-1)^m}{z-1} \\ &= \frac{(m+1)c_m^{(m)}}{z^{m+2}} + \frac{(m+3)c_{m+2}^{(m)}}{z^{m+4}} + \dots \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $(m+1)c_m^{(m)}$ représente le numérateur de la fraction $m \left[\frac{1}{z-x} \right]$, et qu'on aura

$$(34) \quad m \left[\frac{1}{z-x} \right] = \frac{(m+1)c_m^{(m)}}{(z^2-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_m)}.$$

Or

$$c_m^{(m)} = (-1)^m 2^{1-m},$$

et les racines a_1, a_2, \dots sont $\cos \frac{\pi}{m+1}, \cos \frac{2\pi}{m+1}, \dots$. En faisant $z = \cos \zeta$, et nous rappelant que

$$\sin n \zeta = 2^{n-1} \sin \zeta \left(\cos \zeta - \cos \frac{\pi}{n} \right) \left(\cos \zeta - \cos \frac{2\pi}{n} \right) \dots \left(\cos \zeta - \cos \frac{n-1}{n} \pi \right),$$

il vient

$$(35) \quad {}_m \left[\frac{1}{z-x} \right] = \frac{(-1)^{m+1} 2(m+1)}{\sin \zeta \cdot \sin(m+1)\zeta}.$$

Si l'on fait encore $2z = \beta + \frac{1}{\beta}$, on trouve

$$-4 \sin \zeta \sin n \zeta = \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \left(\beta^n - \frac{1}{\beta^n} \right)$$

et, par suite,

$$(36) \quad \frac{(-1)^m}{(m+1)} {}_m \left[\frac{1}{z-x} \right] = \frac{4}{\left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \left(\beta^{m+1} - \frac{1}{\beta^{m+1}} \right)}.$$

En substituant cette expression dans (33), et mettant m pour $m+1$, on trouve

$${}_0 \left[\frac{\beta - \frac{1}{\beta}}{\beta + \frac{1}{\beta} - 2x} \right] = \sum \frac{2X_m}{\beta^m - \frac{1}{\beta^m}}$$

ou bien

$$(37) \quad \sum \frac{2\beta^m X_m}{1-\beta^{2m}} = \frac{1-\beta^2}{1-2\beta x + \beta^2} - \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \frac{2\beta^2}{1+\beta^2} + \frac{2\beta(x-\beta)}{1-2\beta x + \beta^2}.$$

Si l'on fait $x = \cos y$, cette relation devient

$$(38) \quad \sum \frac{\beta^m X_m}{1-\beta^{2m}} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} + \Sigma \beta^m \cos my,$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$(39) \quad \Sigma (-1)^m \frac{m \beta^m \theta_{m-1}}{1-\beta^{2m}} = -\Sigma m \beta^m \frac{\sin my}{2 \sin y},$$

puisque

$$(-1)^m \theta_m = \frac{1}{m+1} \frac{dX_{m+1}}{2 dx}.$$

Il en résulte les valeurs suivantes des X :

$X_1 = \cos y,$	$X_2 = \cos 2y + 1,$
$X_3 = \cos 3y - \cos y,$	$X_4 = \cos 4y - 1,$
$X_5 = \cos 5y - \cos 3y,$	$X_6 = \cos 6y - \cos 2y,$
$X_7 = \cos 7y - \cos 5y,$	$X_8 = \cos 8y - 1,$
$X_9 = \cos 9y - \cos 7y,$	$X_{10} = \cos 10y - \cos 2y,$
$X_{11} = \cos 11y - \cos 9y,$	$X_{12} = \cos 12y - \cos 4y,$
$X_{13} = \cos 13y - \cos 11y,$	$X_{14} = \cos 14y - \cos 6y,$
$X_{15} = \cos 15y - \cos 13y + \cos y,$	$X_{16} = \cos 16y - 1,$
.....

On aurait également

$$\begin{aligned}
 2\theta_0 &= 1, & 2\theta_1 &= -\frac{\sin 2y}{\sin y}, \\
 2\theta_2 &= \frac{\sin 3y}{\sin y} - \frac{1}{3}, & 2\theta_3 &= -\frac{\sin 4y}{\sin y}, \\
 2\theta_4 &= \frac{\sin 5y}{\sin y} - \frac{1}{5}, & 2\theta_5 &= -\frac{\sin 6y}{\sin y} + \frac{1}{3} \frac{\sin 2y}{\sin y}, \\
 &..... & &.....
 \end{aligned}$$

ou bien

$$\theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_1 = -\cos y, \quad \theta_2 = \cos 2y + \frac{1}{3}, \quad \theta_3 = -\cos 3y - \cos y, \quad \dots$$

Il est donc facile d'exprimer les X et les θ en fonctions de $x = \cos y$ ou de $\xi = 2x$.

44. On pourrait aussi procéder comme il suit. Supposons que l'on ait $f(x) = A_0 + A_1 x + \dots$; en substituant dans les coefficients x_m , on aurait

$$A_0 + A_1 x + \dots = \sum \theta_l \int_l (A_0 + A_1 x + \dots),$$

par conséquent, à cause des relations (27),

$$(40) \quad x^m = \theta_m c_m^{(m)} + \theta_{m-2} c_m^{(m-2)} + \dots$$

Avec les valeurs (21) des coefficients $c^{(m)}$, on trouve

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} (-2x)^m &= \theta_m + \frac{m-1}{1} \theta_{m-2} + \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2} \theta_{m-4} \\ &+ \frac{m(m-1)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \theta_{m-6} + \dots + \frac{2^m}{m-1} \theta_0. \end{aligned} \right.$$

où il faut écrire θ_1 au lieu de θ_0 , si m est impair. L'intégration donne ensuite, en mettant n pour $m + 1$ et ξ pour $2x$,

$$(42) \quad \frac{1}{2} \xi^n = X_n + n X_{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} X_{n-4} + \dots + 2^{n-1} X_1 \text{ (ou } 2^{n-2} X_2 \text{)}.$$

En remplaçant X_1 par x ou X_2 par $2x^2$, on trouverait, pour n impair ou pair,

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1}(x^n - x) \\ 2^{n-1}(x^n - x^2) \end{array} \right\} = X_n + n X_{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} X_{n-4} + \dots$$

Ces formules conduisent aux relations suivantes :

$\frac{1}{2} \xi = X_1$	$\frac{1}{2} \xi^2 = X_2$
$\frac{1}{2} \xi^3 = X_3 + 4 X_1$	$\frac{1}{2} \xi^4 = X_4 + 4 X_2$
$\frac{1}{2} \xi^5 = X_5 + 5 X_3 + 16 X_1$	$\frac{1}{2} \xi^6 = X_6 + 6 X_4 + 16 X_2$
$\frac{1}{2} \xi^7 = X_7 + 7 X_5 + 21 X_3 + 64 X_1$	$\frac{1}{2} \xi^8 = X_8 + 8 X_6 + 28 X_4 + 64 X_2$
.....
$\frac{1}{2} = \theta_0, \quad \frac{1}{2} \xi^2 = \theta_2 + \frac{2}{3},$	$-\frac{1}{2} \xi = \theta_1, \quad -\frac{1}{2} \xi^3 = \theta_3 - \xi.$
$\frac{1}{2} \xi^4 = \theta_4 + 3\theta_2 + \frac{8}{5},$	$-\frac{1}{2} \xi^5 = \theta_5 + 4\theta_3 - \frac{8}{3} \xi,$
$\frac{1}{2} \xi^6 = \theta_6 + 5\theta_4 + 9\theta_2 + \frac{32}{7}, \dots,$	$-\frac{1}{2} \xi^7 = \theta_7 + 6\theta_5 + 14\theta_3 - 8\xi,$

d'où l'on tire encore

$$\begin{aligned} 2X_1 &= \xi, \\ 2X_2 &= \xi^2, \\ 2X_3 &= \xi(\xi^2 - 4), \\ 2X_4 &= \xi^2(\xi^2 - 4), \\ 2X_5 &= \xi(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 1), \\ 2X_6 &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 2), \\ 2X_7 &= \xi(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2), \\ 2X_8 &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 2)^2, \\ 2X_9 &= \xi(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 3)(\xi^2 - 1)^2, \\ 2X_{10} &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 3)(\xi^2 - 2)(\xi^2 - 1), \\ 2X_{11} &= \xi(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 3)(\xi^2 - 1)(\xi^4 - 3\xi^2 + 1), \\ 2X_{12} &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 2)^2(\xi^4 - 4\xi^2 + 2). \\ &\dots \end{aligned}$$

En développant, on aurait

www.libtool.com.cn

$$2X_1 = \xi,$$

$$2X_2 = \xi^2,$$

$$2X_3 = \xi^3 - 4\xi,$$

$$2X_4 = \xi^4 - 4\xi^2,$$

$$2X_5 = \xi^5 - 5\xi^3 + 4\xi,$$

$$2X_6 = \xi^6 - 6\xi^4 + 8\xi^2,$$

$$2X_7 = \xi^7 - 7\xi^5 + 14\xi^3 - 8\xi,$$

$$2X_8 = \xi^8 - 8\xi^6 + 20\xi^4 - 16\xi^2,$$

$$2X_9 = \xi^9 - 9\xi^7 + 27\xi^5 - 31\xi^3 + 12\xi,$$

$$2X_{10} = \xi^{10} - 10\xi^8 + 35\xi^6 - 50\xi^4 + 24\xi^2,$$

$$2X_{11} = \xi^{11} - 11\xi^9 + 44\xi^7 - 77\xi^5 + 55\xi^3 - 12\xi,$$

$$2X_{12} = \xi^{12} - 12\xi^{10} + 54\xi^8 - 112\xi^6 + 104\xi^4 - 32\xi^2,$$

$$2X_{13} = \xi^{13} - 13\xi^{11} + 65\xi^9 - 156\xi^7 + 182\xi^5 - 91\xi^3 + 12\xi,$$

.....

On en tire les valeurs de θ_m , en différentiant et divisant par $\frac{\pm 1}{m+1}$:

$$2\theta_0 = 1,$$

$$-2\theta_1 = \xi,$$

$$2\theta_2 = \xi^2 - \frac{1}{3},$$

$$-2\theta_3 = \xi^3 - 2\xi,$$

$$2\theta_4 = \xi^4 - 3\xi^2 + \frac{1}{3},$$

$$-2\theta_5 = \xi^5 - 4\xi^3 + \frac{8}{3}\xi,$$

$$2\theta_6 = \xi^6 - 5\xi^4 + 6\xi^2 - \frac{8}{5},$$

$$-2\theta_7 = \xi^7 - 6\xi^5 + 10\xi^3 - 4\xi,$$

$$2\theta_8 = \xi^8 - 7\xi^6 + 15\xi^4 - \frac{31}{3}\xi^2 + \frac{1}{3},$$

$$-2\theta_9 = \xi^9 - 8\xi^7 + 21\xi^5 - 20\xi^3 + \frac{25}{3}\xi,$$

$$2\theta_{10} = \xi^{10} - 9\xi^8 + 28\xi^6 - 35\xi^4 + 15\xi^2 - \frac{12}{11},$$

$$-2\theta_{11} = \xi^{11} - 10\xi^9 + 36\xi^7 - 56\xi^5 + \frac{104}{3}\xi^3 - \frac{16}{3}\xi,$$

$$2\theta_{12} = \xi^{12} - 11\xi^{10} + 45\xi^8 - 84\xi^6 + 70\xi^4 - 21\xi^2 + \frac{12}{13}.$$

M. Harzer a calculé des Tables qui donnent les logarithmes des θ (jusqu'à θ_{12}) pour tous les centièmes de l'argument x , depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ (*Astr. Nachr.*, 2759). Il a aussi donné deux exemples complètement développés, où l'application des formules est facilitée par l'emploi d'un procédé graphique (voir *Bull.*, t. III, p. 615).

C'est au même ordre d'idées que se rattachent les recherches de M. Tchébychef sur les formules de quadrature à coefficients égaux, communiquées à l'Association française pour l'avancement des Sciences, à l'occasion du Congrès de Lyon [elles ont été reproduites dans le *Journal de Mathématiques*, 1873; voir aussi l'*Étude sur les formules d'approximation* (*ibid.*, 1880)].

IV.

45. Nous terminerons ces études par quelques remarques sur les formules de quadrature, qui sont étroitement liées aux formules d'interpolation. Il faut, pour cela, reprendre la notation symbolique du n° 8, en la complétant et la modifiant un peu.

Désignant toujours par Δ les différences ordinaires, nous savons que l'opération $(1 + \Delta)^{\pm n}$ a pour effet de changer y_0 en $y_{\pm n}$. Quelques auteurs (Boole, Merrifield) remplacent $1 + \Delta$ par le symbole E , de sorte qu'on a

$$E = 1 + \Delta, \quad y_1 = Ey_0, \quad y_{\pm n} = E^{\pm n}y_0.$$

Si nous réservons, d'autre part, le signe D pour les différences médianes, nous pourrons, pour dédoubler l'opération D^2 , supposer qu'entre les termes donnés on ait intercalé ceux qui correspondent aux arguments fractionnaires $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{3}{2}$, ... et poser

$$(1) \quad \begin{cases} D^2 = \frac{\Delta^2}{1 + \Delta} = E + E^{-1} - 2, \\ D = \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \Delta}} = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}, & 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2} = E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}, \\ \Delta = D\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2} + \frac{1}{2}D^2. \end{cases}$$

L'opération fictive D se trouve ainsi parfaitement définie; mais, en fait, elle est remplacée par une moyenne arithmétique que, pour plus de clarté, je désignerai maintenant par la lettre M (et non plus par D , comme au n° 9), de sorte qu'on aura

$$(2) \quad \begin{cases} 2M = \Delta + \frac{\Delta}{1 + \Delta} = E - E^{-1}, \\ M = D\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}, \\ \Delta = \frac{1}{2}D^2 + M, \\ E^{\pm 1} = 1 + \frac{1}{2}D^2 \pm M = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2} \pm \frac{1}{2}D\right)^2 \end{cases}$$

Le facteur $\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$ sert donc à passer de l'opération fictive D à l'opération réelle M , par laquelle s'obtiennent les différences intermédiaires; et si l'on veut confondre les différences d'ordre pair ou impair dans la même notation, et mettre, par exemple, D^{2n+1} au lieu de MD^{2n} , il n'y aura qu'à supprimer dans les développements le facteur $\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$, ou à diviser par $\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$.

Il faut seulement distinguer entre les différences $D^s(o)$, relatives à y_0 , et les différences $D^s(\frac{1}{2})$ qui sont rapportées à $y_{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \Delta} \cdot y_0$. Les premières résultent des opérations

$$1, M, D^2, MD^2, D^4, \dots,$$

et les secondes des opérations

$$\frac{M}{D}, D, MD, D^3, MD^3, \dots$$

Pour ramener les unes et les autres à la notation $D^0, D^1, D^2, D^3, D^4, \dots$, il faut, dans le cas de l'argument (o) , diviser par $\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$ les développements où ne figurent que les différences d'ordre impair et, dans le cas de l'argument $(\frac{1}{2})$, ceux où figurent les différences d'ordre pair. On a d'ailleurs

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}} = 1 - \frac{1}{8}D^2 + \frac{3}{128}D^4 - \frac{5}{1024}D^6 + \dots$$

46. La différence Δ correspondant à l'accroissement fini h de l'argument x , on a, entre différences et dérivées, les relations symboliques

$$(3) \quad \begin{cases} E = 1 + \Delta = e^d, \\ d = \log(1 + \Delta), \end{cases}$$

où, pour abrégé, nous mettons d pour $h \frac{d}{dx}$. On aura donc, en indiquant par des exposants négatifs des sommes ou des intégrales

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta^{-n} = (e^d - 1)^{-n}, \\ d^{-n} = \log^{-n}(1 + \Delta). \end{cases}$$

Il est entendu que les exponentielles et les logarithmes doivent être remplacés par leurs développements en séries. Lagrange donne les coefficients de ces développements dans son Mémoire de 1772

Sur une nouvelle espèce de calcul (*Œuvres*, t. III, p. 458). Dans les cas les plus simples, on a

$$\begin{aligned}\Delta &= e^d - 1 = d + \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{6} d^3 + \frac{1}{24} d^4 + \dots, \\ d \cdot \Delta^{-1} &= \frac{d}{e^d - 1} = 1 - \frac{1}{2} d + \frac{1}{12} d^2 - \frac{1}{720} d^4 + \frac{1}{30240} d^6 - \dots \\ &\quad - (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} d^{2n} + \dots,\end{aligned}$$

où B_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli; puis

$$\begin{aligned}d &= \log(1 + \Delta) = \Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \frac{1}{4} \Delta^4 + \dots, \\ \Delta d^{-1} &= \frac{\Delta}{\log(1 + \Delta)} = 1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^2 + \frac{1}{24} \Delta^3 \\ &\quad - \frac{19}{720} \Delta^4 + \frac{3}{160} \Delta^5 - \frac{863}{60480} \Delta^6 + \frac{275}{24192} \Delta^7 - \dots\end{aligned}$$

Ces développements permettent d'établir les formules usuelles de la manière la plus directe, en faisant usage des définitions

$$d = h \frac{d}{dx}, \quad d^{-1} = \frac{1}{h} \int \dots dx.$$

$$\Delta^{-1} = \sum, \quad \sum_0^n y = y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}.$$

Le symbole Δ^{-1} , comme le remarque Boole, a un caractère interrogatif : la réponse consiste à renverser l'opération. Mais l'intégrale finie Δ^{-1} ou Σ n'est déterminée que par le point d'arrivée (y_{n-1}); le point de départ reste arbitraire; on est libre d'ajouter une constante d'intégration C , comme on fait pour l'intégrale \int . L'indétermination cesse dès qu'on définit Σ et \int en indiquant la limite inférieure.

Pour abrégé les formules, je désignerai encore par S la somme

$$(5) \quad S = \sum_0^n y + \frac{1}{2}(y_n - y_0) = \frac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n;$$

hS représente alors la somme des trapèzes contenus entre les

ordonnées y_0, y_1, \dots, y_n , qui figure dans la formule de quadrature la plus simple

$$(6) \quad \int_0^{nh} y \, dx = hS.$$

47. Les relations équivalentes

$$(7) \quad d = \Delta \frac{d}{e^d - 1}, \quad \Sigma = \frac{1}{e^d - 1},$$

conduisent immédiatement à la formule sommatoire de Maclaurin ou d'Euler (*) sous ses deux formes. La première donne, en désignant par y', y'', \dots les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$,

$$hy' = \Delta y - \frac{1}{2} h \Delta y' + \frac{1}{12} h^2 \Delta y'' - \frac{1}{720} h^4 \Delta y^{(4)} + \dots$$

ou bien

$$\Delta y = h(y' + \frac{1}{2} \Delta y') - \frac{1}{12} h^2 \Delta y'' + \frac{1}{720} h^4 \Delta y^{(4)} - \dots,$$

ce qu'on peut écrire

$$(8) \quad y_1 - y_0 = \frac{h}{2} (y'_1 + y'_0) - \frac{h^2}{12} (y''_1 - y''_0) + \frac{h^4}{720} (y^{(4)}_1 - y^{(4)}_0) - \dots$$

La seconde donne

$$\Sigma y = \frac{1}{h} \int y \, dx - \frac{1}{2} y + \frac{h}{12} y' - \frac{h^3}{720} y''' + \dots$$

ou bien

$$\frac{1}{h} \int y \, dx = \Sigma y + \frac{1}{2} y - \frac{h}{12} y' + \frac{h^3}{720} y''' - \dots,$$

et l'on voit que la formule d'Euler est à deux fins : elle peut servir de formule sommatoire (pour trouver Σ) ou de formule de quadrature (pour trouver $\int y \, dx$). Mais il faut la compléter, soit en ajoutant une constante d'intégration C, soit en introduisant deux

(*) On peut consulter, sur cette formule, un Mémoire de Malmsten (1847), ou bien J. Tannery, *Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*, p. 352-363.

limites, ce qui donne

$$(9) \quad \frac{1}{h} \int_0^{nh} y \, dx = S - \frac{h}{12} (y'_n - y'_0) + \frac{h^3}{720} (y''_n - y''_0) - \dots,$$

S étant la somme définie par l'expression (5). Le premier terme de la formule d'Euler est donc le second membre de la formule des trapèzes.

Si, au lieu des relations (7), nous avons utilisé la suivante

$$\Delta = \frac{e^{\Delta} - 1}{e^{\Delta} + 1} (2 + \Delta) = \text{Th} \frac{\Delta}{2} (2 + \Delta),$$

nous aurions trouvé la formule de Boole

$$(10) \quad \Delta y = \frac{h}{2} (y'_1 + y'_0) - \frac{h^3}{24} (y''_1 + y''_0) + \frac{h^5}{240} (y'''_1 + y'''_0) - \dots,$$

puisque $(2 + \Delta)y_0 = y_1 + y_0$.

48. En partant de la relation

$$(11) \quad d^{-1} = \frac{1}{\log(1 + \Delta)} = \Delta^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \Delta + \dots,$$

Lagrange obtient directement la formule de quadrature

$$(12) \quad \frac{1}{h} \int y \, dx = \Sigma y + \frac{1}{2} y - \frac{1}{12} \Delta y + \frac{1}{24} \Delta^2 y - \dots$$

Laplace (*Méc. céleste*, t. IV, p. 206) y arrive par un détour. Il commence par démontrer la relation

$$(13) \quad \frac{1}{h} \int_0^h y \, dx = y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 y_0 - \dots,$$

qu'il obtient en intégrant la formule d'interpolation de Newton, et qui s'écrirait directement

$$\Delta d^{-1} = \frac{\Delta}{\log(1 + \Delta)},$$

puis il en déduit la formule (12) par une sommation ($\Sigma \Delta = 1$). En introduisant des limites, cette formule devient

$$(14) \quad \frac{1}{h} \int_0^{nh} y \, dx = S - \frac{1}{12} (\Delta y_n - \Delta y_0) + \frac{1}{24} (\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0) - \dots$$

Mais les différences Δy_n , $\Delta^2 y_n$, ... sont incommodes parce

qu'elles renferment des ordonnées situées en dehors des limites d'intégration; il y a lieu de recourir à une transformation par différences ascendantes, en posant

$$\log(1 + \Delta) = -\log\left(1 - \frac{\Delta}{1 + \Delta}\right).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} d^{-1} &= \frac{1 + \Delta}{\Delta} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{1 + \Delta} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2}{(1 + \Delta)^2} - \frac{1}{24} \frac{\Delta^3}{(1 + \Delta)^3} - \dots \right] \\ &= \Delta^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta}{1 + \Delta} - \frac{1}{24} \frac{\Delta^2}{(1 + \Delta)^2} - \dots \end{aligned}$$

et l'on voit que les deux premiers termes sont les mêmes que dans (11), mais que les suivants sont transformés de façon que Δ_n^* devient $\pm \Delta_{n-s}^*$. On trouve ainsi

$$(15) \quad \frac{1}{h} \int_0^{nh} y \, dx = S - \frac{1}{12} (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{1}{24} (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) - \dots$$

C'est la formule que Laplace recommande comme « la plus simple et la plus commode ».

49. Jusqu'ici nous avons fait usage des différences ordinaires Δ . Pour introduire les différences médianes D , on peut se servir des relations (1), (2), (3); mais, pour unifier la notation, il faut diviser par $\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}$ les développements où figurent $D^{2s+1}(o)$ ou $D^{2s}(\frac{1}{2})$.

En ne considérant que les opérations D , on aurait

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} D &= e^{\frac{1}{2}d} - e^{-\frac{1}{2}d} = 2 \operatorname{Sh} \frac{1}{2} d, \\ 2\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2} &= e^{\frac{1}{2}d} + e^{-\frac{1}{2}d} = 2 \operatorname{Ch} \frac{1}{2} d, \\ d &= \log(1 + \frac{1}{2} D^2 + M) = 2 \log\left(\frac{1}{2} D + \sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}\right), \\ \frac{1}{2} d &= \arg \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D = \arg \operatorname{Ch} \sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}. \end{aligned} \right.$$

S'il s'agit des différences successives, il faut distinguer entre $D^n(o)$ et $D^n(\frac{1}{2})$. On aura

$$(17) \quad \arg(o) \quad \left\{ \begin{aligned} d^{\pm 2n} &= [2 \arg \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D]^{\pm 2n}, \\ d^{\pm(2n+1)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} [2 \arg \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D]^{\pm(2n+1)}, \end{aligned} \right.$$

$$(18) \quad \arg(\frac{1}{2}) \quad \left\{ \begin{aligned} d^{\pm 2n} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} [2 \arg \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D]^{\pm 2n}, \\ d^{\pm(2n+1)} &= [2 \arg \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D]^{\pm(2n+1)}. \end{aligned} \right.$$

On retrouve ainsi, sous une autre forme, les relations très simples que M. Tisserand a indiquées dans une Note *Sur un point du calcul des différences* (*Comptes rendus*, 28 mars 1870). Les développements s'exécutent sans difficulté. Les formules connues, relatives aux fonctions hyperboliques, donnent

$$2 \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D = D - \frac{1}{24} D^3 + \frac{3}{640} D^5 - \frac{5}{7168} D^7 + \dots,$$

$$(2 \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D)^2 = D^2 - \frac{1}{12} D^4 + \frac{1}{90} D^6 - \frac{1}{560} D^8 + \dots,$$

$$(2 \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D)^{-1} = D^{-1} + \frac{1}{24} D - \frac{17}{5760} D^3 + \frac{367}{967680} D^5 - \dots,$$

$$\frac{2 \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} = D - \frac{1}{6} D^3 + \frac{1}{30} D^5 - \frac{1}{140} D^7 + \dots,$$

$$\frac{(2 \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{2} D)^{-1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} = D^{-1} - \frac{1}{12} D + \frac{11}{720} D^3 - \frac{191}{60480} D^5 + \dots,$$

et ainsi de suite. On tire de là, par exemple,

$$h \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \right) = D \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{24} D^3 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{640} D^5 \left(\frac{1}{2} \right) - \dots,$$

$$h \frac{d}{dx} (0) = D(0) - \frac{1}{6} D^3(0) + \frac{1}{30} D^5(0) - \dots,$$

$$\frac{1}{h} \int_{\frac{1}{2}h}^{nh + \frac{1}{2}h} y \, dx = D^{-1} \left(n + \frac{1}{2} \right) - D^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{24} [D \left(n + \frac{1}{2} \right) - D \left(\frac{1}{2} \right)] - \dots,$$

$$\frac{1}{h} \int_0^{nh} y \, dx = D^{-1}(n) - D^{-1}(0) - \frac{1}{12} [D(n) - D(0)] + \dots$$

Les D à exposants négatifs sont des sommes qui s'obtiennent en prolongeant le tableau des différences vers la gauche; ce sont les quantités désignées par ' f ', ' f ', ... dans les Mémoires d'Encke sur les quadratures mécaniques (*Jahrbuch*, 1837 et 1862), où ce sujet est traité avec tous les détails qu'il comporte.

50. On arrive aux mêmes résultats en partant des formules de Stirling (n° 8), développées suivant les puissances de t , la pre-

mière pour l'argument (0)

$$(19) \left\{ \begin{aligned} y_t &= y_0 + t \left(D - \frac{1}{6} D^3 + \frac{1}{30} D^5 - \frac{1}{140} D^7 + \dots \right) \\ &+ \frac{t^2}{2} \left(D^2 - \frac{1}{12} D^4 + \frac{1}{90} D^6 - \dots \right) \\ &+ \frac{t^3}{2 \cdot 3} \left(D^3 - \frac{1}{4} D^5 + \frac{7}{120} D^7 - \dots \right) \\ &+ \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(D^4 - \frac{1}{6} D^6 + \dots \right) + \frac{t^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(D^5 - \frac{1}{3} D^7 + \dots \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

et la seconde pour l'argument ($\frac{1}{2}$)

$$(20) \left\{ \begin{aligned} y_{t+\frac{1}{2}} &= y_{\frac{1}{2}} + t \left(D - \frac{1}{24} D^3 + \frac{3}{640} D^5 - \dots \right) \\ &+ \frac{t^2}{2} \left(D^2 - \frac{5}{24} D^4 + \frac{259}{5760} D^6 - \dots \right) + \frac{t^3}{2 \cdot 3} \left(D^3 - \frac{1}{8} D^5 + \dots \right) \\ &+ \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(D^4 - \frac{7}{24} D^6 + \dots \right) + \frac{t^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(D^5 - \dots \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Les coefficients des puissances de t représentent évidemment des dérivées.

Nous écrirons maintenant n à la place de t .

Pour obtenir les expressions de $d^{\pm 1}$, relatives à $y_n = f(nh)$, que nous désignerons par $d^{\pm 1}(n)$, il suffit de différentier ou d'intégrer les formules de Stirling par rapport à n . Nous pourrions également les établir à l'aide des notations symboliques, en remarquant que

$$(21) \left\{ \begin{aligned} d(n) &= E^n d(0) = e^{nd} d(0), \\ \frac{d(n) + d(-n)}{2} &= \text{Ch } n d \cdot d(0), \\ \frac{d(n) - d(-n)}{2} &= \text{Sh } n d \cdot d(0), \\ D &= 2 \text{Sh } \frac{d}{2}, \quad M = \text{Sh } d. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions hyperboliques $\text{Ch } nd$ et $\text{Sh } nd$ étant exprimées par $\text{Sh } d$ et $\text{Sh } \frac{d}{2}$, on trouve d'abord

$$\begin{aligned} \text{Ch } nd &= 1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} D^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} D^4 + \dots, \\ \text{Sh } nd &= M \left[n + n \frac{n^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} D^2 + n \frac{(n^2-1)(n^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} D^4 + \dots \right]. \end{aligned}$$

On a ensuite, en divisant par le facteur de réduction $\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$ la série des différences d'ordre impair,

$$\begin{aligned} \frac{d(n) + d(-n)}{2} &= \left(1 + \frac{n^2}{1.2} D^2 + \dots\right) \frac{2 \operatorname{ArgSh} \frac{1}{2} D}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} \\ &= D + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{1}{6}\right) D^3 + \left(\frac{n^4}{24} - \frac{n^2}{8} + \frac{1}{30}\right) D^5 + \dots, \end{aligned}$$

puis, en omettant le facteur de réduction dans le cas des différences d'ordre pair, et remplaçant M par $\frac{D + \frac{1}{4} D^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}}$,

$$\begin{aligned} \frac{d(n) - d(-n)}{2} &= \left(n + n \frac{n^2 - 1}{1.2.3} D^2 + \dots\right) \left(D + \frac{1}{4} D^3\right) \frac{2 \operatorname{ArgSh} \frac{1}{2} D}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} \\ &= n D^2 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n}{12}\right) D^4 + \left(\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{36} + \frac{n}{90}\right) D^6 + \dots, \end{aligned}$$

où les D se rapportent à l'argument (o).

Nous n'insisterons pas davantage sur la démonstration des formules de ce genre, que l'on trouve longuement développées dans les Mémoires d'Encke et de Hansen (*Relationen zwischen Summen und Differenzen*). Oppolzer, à son tour, a traité ce sujet dans le premier Chapitre du tome II de son Traité des Orbites (*Différentiation et intégration numériques*). Les formules prennent beaucoup de place, et elles sont d'ailleurs suffisamment connues.

52. Des formules de quadrature d'un aspect très différent sont celles où figurent, non plus les différences successives des ordonnées, mais les ordonnées elles-mêmes, et dont la plus simple est la formule des trapèzes. A cette catégorie appartiennent les formules de Cotes, qui supposent des ordonnées équidistantes; celles de Gauss, qui sont moins commodes, mais qui permettent d'atteindre une précision double; celles de Jacobi et celles de M. Tchébychef, à coefficients égaux, etc. En dehors des Mémoires de Gauss, de Jacobi, de Tchébychef (*Journal de Mathém.*, 1873), on peut consulter ceux de Clausen et de Minding (*Journal de Crelle*, t. VI), Christoffel (*ibid.*, t. LV), Mehler (*ibid.*, t. LXIII), Encke (*Jahrbuch*, 1863), Schellbach (1877), et un travail plus récent de M. B. Baillaud (1881). J'ai résumé la plupart de ces tra-

vauX dans mon *Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie* (*Journal de Mathém.*, 1880; voir aussi *Comptes rendus*, 8 mars et 19 avril 1880, 16 juillet 1883, et une Note de M. Callandreau, *ibid.*, 3 mai 1880). Il faut enfin citer les recherches de M. Stieltjes (*Ann. de l'École Norm.*, 1884), de M. A. Markoff (*Math. Ann.*, 1884), de M. J. Deruyts (*Bull. de l'Acad. de Belg.*, 1886). On trouvera aussi quelques remarques intéressantes dans le Rapport de M. Merrifield.

Je voudrais seulement, pour terminer, indiquer en quelques mots le parti qu'on peut tirer des formules (24) et (25) du n° 6, en supposant les ordonnées distribuées d'une manière symétrique. Soient donc $y_0, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots$ les ordonnées correspondant aux arguments $0, \pm a, \pm b, \dots$, et posons

$$y_0 = \sigma_0, \quad \frac{y_1 + y'_1}{2} = \sigma_1, \quad \frac{y_2 + y'_2}{2} = \sigma_2, \quad \dots,$$

$$\frac{y_1 - y'_1}{2a} = \delta_1, \quad \frac{y_2 - y'_2}{2b} = \delta_2, \quad \dots$$

Les formules en question pourront s'écrire

$$y = \sigma_0 + \delta_1 \cdot x + \sigma'_0 \cdot x^2 + \delta'_1 \cdot x(x^2 - a^2) + \sigma''_0 \cdot x^2(x^2 - a^2) + \delta''_1 \cdot x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + \dots$$

et

$$y = \sigma_1 + \delta_1 \cdot x + \sigma'_1(x^2 - a^2) + \delta'_1 \cdot x(x^2 - a^2) + \sigma''_1(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + \delta''_1 \cdot x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + \dots$$

où

$$\delta'_1 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{b^2 - a^2} = \frac{\delta_1}{a^2 - b^2} + \frac{\delta_2}{b^2 - a^2},$$

$$\delta''_1 = \frac{\delta'_2 - \delta'_1}{c^2 - a^2} = \frac{\delta_1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{\delta_2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{\delta_3}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

.....

et d'une manière analogue

$$\sigma'_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{a^2}, \quad \sigma'_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b^2 - a^2}, \quad \dots,$$

$$\sigma''_0 = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_0}{b^2}, \quad \sigma''_1 = \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{c^2 - a^2}, \quad \dots,$$

et ainsi de suite.

L'intégration donne les formules de quadrature pour intervalles inégaux

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} y dx = \sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma'_0 + \left(\frac{1}{5} - \frac{a^2}{3} \right) \sigma''_0 + \left(\frac{1}{7} - \frac{a^2 + b^2}{5} + \frac{a^2 b^2}{3} \right) \sigma'''_0 + \dots$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} y dx = \sigma_1 + \left(\frac{1}{3} - a^2 \right) \sigma'_1 + \left(\frac{1}{5} - \frac{a^2 + b^2}{3} + a^2 b^2 \right) \sigma''_1 + \dots,$$

dont la première suppose un nombre impair, et la seconde un nombre pair d'ordonnées. Pour avoir des intervalles égaux, il suffit de faire, dans la première formule, $b = 2a$, $c = 3a$, ... , et dans la seconde $b = 3a$, $c = 5a$, En faisant encore, dans la première, $a = \frac{1}{n}$ pour $2n + 1$ ordonnées, et dans la seconde, $a = \frac{1}{2n - 1}$ pour $2n$ ordonnées, de sorte que les ordonnées se trouvent distribuées d'une manière uniforme entre les limites de l'intégrale, on obtient les formules de Cotes. Si, enfin, nous prenons pour a, b, c, \dots les racines de l'équation $P_n = 0$, où P_n est un polynôme de Legendre, nous avons la formule de quadrature de Gauss, car alors, en vertu d'un théorème connu, un certain nombre de coefficients de la formule s'annulent, et il en résulte que le degré de précision $2n - 1$ s'obtient avec n ordonnées.

§3. Avec les coordonnées équidistantes $y_0, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots$ correspondant aux arguments $0, \pm a, \pm 2a, \dots$ (dont aucun ne coïncide avec 2π), on peut encore construire une formule d'interpolation qui mérite d'être mentionnée. Elle se compose d'expressions analogues aux fonctions symétriques D''_0 du n° 2, où $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ sont remplacés par les cosinus $1, \cos a, \cos 2a, \cos 3a, \dots$ de sorte qu'elles prennent la forme

$$D''_0(f) = \frac{f_0}{(1 - \cos a)(1 - \cos 2a)(1 - \cos 3a) \dots} + \frac{f_1}{(\cos a - 1)(\cos a - \cos 2a)(\cos a - \cos 3a) \dots} + \dots$$

Les numérateurs f sont, d'une part, les quantités s_0, s_1, s_2, \dots et

t_1, t_2, \dots qui dépendent des constantes données.

$$s_0 = y_0, \quad s_1 = \frac{y_1 + y'_1}{2}, \quad s_2 = \frac{y_2 + y'_2}{2}, \quad \dots,$$

$$t_1 = \frac{y_1 - y'_1}{2 \sin a}, \quad t_2 = \frac{y_2 - y'_2}{2 \sin 2a}, \quad \dots,$$

et de l'autre les quantités $1, \cos x, \cos 2x, \dots$ et $\frac{\sin x}{\sin a}, \frac{\sin 2x}{\sin 2a}, \dots$

On a donc, par exemple,

$$D_0(s) = \frac{s_0 - s_1}{1 - \cos a}, \quad D_0(\cos x) = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos a}, \quad D_1(t) = \frac{t_1 - t_2}{\cos a - \cos 2a},$$

$$D_0^2(s) = \frac{s_0}{(1 - \cos a)(1 - \cos 2a)} + \frac{s_1}{(\cos a - 1)(\cos a - \cos 2a)} + \frac{s_2}{(\cos 2a - 1)(\cos 2a - \cos a)},$$

$$D_0^2(\cos x) = \frac{1}{(1 - \cos a)(1 - \cos 2a)} + \frac{\cos x}{(\cos a - 1)(\cos a - \cos 2a)} + \frac{\cos 2x}{(\cos 2a - 1)(\cos 2a - \cos a)},$$

$$D_1^2(t) = \frac{t_1}{(\cos a - \cos 2a)(\cos a - \cos 3a)} + \frac{t_2}{(\cos 2a - \cos a)(\cos 2a - \cos 3a)} + \frac{t_3}{(\cos 3a - \cos a)(\cos 3a - \cos 2a)},$$

et ainsi de suite. On trouve aussi

$$\frac{1}{2^{n-1}} D_0^n(\cos x) = \frac{(1 - \cos x)(\cos a - \cos x)(\cos 2a - \cos x) \dots [\cos(n-1)a - \cos x]}{(1 - \cos na)(\cos a - \cos na)(\cos 2a - \cos na) \dots [\cos(n-1)a - \cos na]},$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} D_1^{n-1} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right) = \frac{\sin x (\cos a - \cos x)(\cos 2a - \cos x) \dots [\cos(n-1)a - \cos x]}{\sin na (\cos a - \cos na)(\cos 2a - \cos na) \dots [\cos(n-1)a - \cos na]},$$

de sorte que $D_0^n(\cos x)$ s'annule pour $x = 0, a, 2a, \dots, (n-1)a$ et se réduit à 2^{n-1} pour $x = na$. Avec ces notations, le terme général de la formule d'interpolation peut s'écrire

$$\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} (1 - \cos na)(\cos a - \cos na) \dots [\cos(n-1)a - \cos na] D_0^n(s) D_0^n(\cos x)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sin na (1 - \cos na) \dots [\cos(n-1)a - \cos na] D_1^{n-1}(t) D_1^{n-1} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)$$

et, en simplifiant l'expression des premiers termes, elle devient

$$\begin{aligned}
 y &= s_0 + (s_1 - s_0) \frac{1 - \cos x}{1 - \cos a} \\
 &+ \frac{1}{2} (\cos 2a - 1)(\cos 2a - \cos a) D_0^2(s) D_0^2(\cos x) \\
 &- \frac{1}{4} (\cos 3a - 1)(\cos 3a - \cos a)(\cos 3a - \cos 2a) D_0^3(s) D_0^3(\cos x) + \dots \\
 &+ t_1 \sin x + \frac{1}{2} \sin 2a \frac{t_2 - t_1}{\cos a - \cos 2a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} - \frac{\sin 2x}{\sin 2a} \right) \\
 &+ \frac{1}{4} \sin 3a (\cos 3a - \cos a)(\cos 3a - \cos 2a) D_1^2(t) D_1^2 \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

On a ainsi le développement de y suivant les sinus et cosinus des multiples de x .

OBSERVATIONS DES PLANÈTES (76), (86), (147), (178), (181), (258), (283), (288),
(305), (307), (308), (310), (311).

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE NICE (équatorial Gautier, 0^m,38 d'ouverture);

PAR M. CHARLOIS.

N.	T. m. de Nice.	$\Delta R.$	$\Delta \varphi.$	N. de c.	R app.	log f. p.	φ app.	log f. p.	★
					(76).				
17.	h m s 11.57.39	m s -0.15,27	" -7.51,4	5	h m s 16.41.31,71	1,087 n	110.37.18,2	0,896 n	1
					(86).				
16.	14.51.53	-0.55,78	-0.28,1	5	16.37.6,46	1,331	109.38.19,9	0,883 n	2
17.	11.34.4	-1.35,20	-1.14,9	5	16.36.27,06	1,196 n	109.37.33,1	0,889 n	2
					(147).				
2.	10.49.59	+0.54,51	+4.56,8	5	16.20.57,70	2,968 n	111.37.46,5	0,902 n	3
3.	11.8.41	+0.4,87	+2.32,2	5	16.20.8,06	2,665 n	111.35.21,9	0,903 n	3
					(178).				
15.	11.16.8	-2.7,35	+0.38,2	5	13.40.0,47	1,112	99.39.3,7	0,847 n	4
16.	9.16.42	-2.41,69	-1.39,3	5	13.39.26,13	2,933 n	99.36.46,2	0,848 n	4

Dates.	T m. de Nice.	$\Delta R.$	$\Delta \varphi.$	N. dec.	R app.	log f. p.	φ app.	log f. p.
(181).								
1891.	h m s	m s	" "	h m s				
JUILL. 8.	12. 8. 9	+0.52,20	-- 5.25,2	5 18.42.34,09	$\bar{2},778$		95.43.52,7	0,826
10.	11. 5.59	-0.34,22	+ 1.48,4	4 18.41. 7,69	$\bar{2},593 n$		95.51. 6,2	0,827
30.	9.53. 7	+4. 3,88	- 0.15,0	5 18.28. 3,31	$\bar{3},583 n$		97.21.14,4	0,836
(258).								
JUILL.25.	11.15.43	-0.39,34	+ 0.11,5	5 19.57.33,16	$\bar{2},725 n$		84.53.28,3	0,740
AOUT 20.	10.23.59	-1.26,54	+ 3.16,2	5 19.39.35,57	$\bar{2},873$		87.27.29,9	0,763
(283).								
JUILL. 7.	11.48.32	+3.28,94	- 1. 6,7	4 18.27. 7,70	$\bar{2},707$		118.50.54,4	0,925
8.	11 38.37	+2.34,06	- 3.14,2	5 18.26.12,83	$\bar{2},663$		118.48.46,9	0,925
(288).								
JUILL.30.	10.44.41	-0.44,70	+ 0.43,2	5 20.20. 3,27	$\bar{1},087 n$		109.54.46,7	0,894
AOUT 4.	11.23.20	+2. 5,01	- 3.52,5	5 20.18.16,17	$\bar{2},441 n$		110. 3.36,2	0,898
(305).								
MAI 13.	9. 3.58	+2.54,85	- 4.46,4	5 9.45.32,44	$\bar{1},453$		80. 3.30,2	0,712
27.	9.17. 8	-0. 3,28	+ 1.54,9	6 9.59.21,60	$\bar{1},547$		80.50.55,9	0,734
28.	9. 5. 6	+1. 0,33	+ 5.57,2	5 10. 0.25,20	$\bar{1},534$		80.54.58,2	0,732
(307).								
JUIN 9.	10.33.47	-0.26,32	- 1. 0,0	8 10.23.57,29	$\bar{1},619$		74. 5.25,7	0,719
(308).								
MAI 27.	11.29.20	+1. 4,97	+ 5.32,5	5 12. 5. 1,88	$\bar{1},550$		88.40.58,2	0,779
28.	9.28.50	+1.19,72	+ 6.31,0	5 12. 5.16,62	$\bar{1},288$		88.41.56,7	0,775
(310).								
MAI 16.	14. 0.41	- 3.24,26	-- 3.31,9	3 16.22.37,65	$\bar{1},169$		110.27.40,7	0,894
17.	12.38.37	-4.12,93	-- 6.46,0	5 16.21.49,00	$\bar{1},331 n$		110.24.26,6	0,900
25.	9.37.11	+2. 3,31	- 0.43,0	5 16.14.49,58	$\bar{1},429 n$		109.56.30,2	0,874
27.	12.11.10	+2.17,71	- 1. 9,6	5 16.12.56,25	$\bar{2},580$		109.48.54,1	0,897
JUIN 4.	11. 0.53	-0. 3,23	+ 2.54,9	5 16. 5.59,91	$\bar{2},404 n$		100.20.47,2	0,896

stes. T. m. de Nice. ΔR. ΔQ. N. de c. Rapp. log f. p. Q app. log f. p. ★

(310).

st.	h	m	s	m	s	h	m	s	Rapp.	log f. p.	Q app.	log f. p.	★
N 5.	10.	5.	3	-0.51,13	-0.21,4	5	16.	5.12,02	1,097	n	109.17.30,9	0,892	n 19
17.	12.	32.	28	+1.38,96	+1.1,5	6	15.	56.22,19	1,413		108.40.19,9	0,872	n 20
L. 2.	9.	28.	35	+3.51,61	+3.58,5	5	15.	49.54,40	2,617		108.10.37,7	0,891	n 21
8.	9.	23.	50	+2.52,09	-1.58,5	5	15.	48.54,85	2,903		108.4.40,6	0,889	n 21
10.	9.	38.	37	+2.44,88	-3.8,0	2	15.	48.47,63	1,092		108.3.31,1	0,887	n 21
23.	9.	23.	0	+1.18,19	+5.16,1	5	15.	51.13,97	1,298		108.6.54,8	0,879	n 22
28.	9.	52.	3	+2.27,80	+8.18,1	5	15.	52.23,55	1,424		108.9.56,7	0,869	n 22
IT 8.	9.	59.	11	-0.57,87	+0.57,3	6	15.	58.22,11	1,520		108.26.34,3	0,854	n 23

(311).

N 11.	14.	0.	16	-0.20,68	+0.27,9	5	17.	22.53,01	1,359		113.10.55,5	0,892	n 24
12.	10.	55.	26	-1.8,10	+0.38,0	6	17.	22.5,60	1,100	n	113.11.5,6	0,905	n 24
13.	12.	58.	3	-2.7,37	+0.51,2	5	17.	21.6,34	1,115		113.11.18,8	0,905	n 24
ILL 5.	11.	40.	21	+1.26,91	-3.10,5	5	17.	3.6,98	1,259		113.12.28,9	0,899	n 25
6.	10.	21.	27	+0.50,29	-3.8,7	7	17.	2.30,36	2,545		113.12.30,7	0,909	n 25
7.	9.	58.	40	+0.12,71	-3.6,7	5	17.	1.52,78	3,300	n	113.12.32,7	0,910	n 25
11.	10.	11.	32	+1.38,93	-1.29,2	6	16.	59.33,11	2,784		113.12.46,7	0,909	n 26
IT 4.	10.	33.	14	-0.40,09	+0.15,0	4	16.	53.39,51	1,458		113.21.39,2	0,880	n 27
7.	9.	26.	49	-0.23,47	+2.28,3	6	16.	53.56,10	1,283		113.23.52,5	0,898	n 27

Positions des étoiles de comparaison.

Gr.	R moy. 1891,0.	Red. au j.	Q moy. 1891,0.	Red. au j.	Autorités.
8,5	16.41.45,46	+1,52	110.45.3,1	+6,5	1/2 (Cinc. 2762 + Kustner 476).
9	16.38.0,74	+1,50	109.38.41,3	+6,7	1/2 (Cinc. 2758 + 2 obs. Bord.).
9	"	+1,52	"	+6,7	Id.
9,2	16.20.1,44	+1,75	111.32.42,3	+7,4	Arg. OE. 15631.
9,2	"	+1,75	"	+7,4	Id.
8,5	13.42.6,59	+1,23	99.38.16,9	+8,6	Munich ₁ 9516.
8,5	"	+1,23	"	+8,6	Id.
5	18.41.39,80	+2,09	95.49.17,2	+0,7	1/3 (Mun ₁ 17445 + Greenw. 1880 + Cord. C. G. 25694).
5	"	+2,11	"	+0,6	Id.
9	18.23.57,28	+2,15	97.21.29,5	-0,1	1/2 (Mun ₁ 16430 + Schjellerup 6768-69).
9,5	19.58.10,33	+2,17	84.53.20,5	-3,7	Munich ₁ 22798.
8,4	19.40.59,92	+2,19	87.24.19,8	-6,1	Weisse ₁ 1002, h. XIX.
6,6	18.23.36,36	+2,40	118.51.58,3	+2,8	1/3 (Yarnall 7826 + St. 10076 + Cord. C. G. 25248).
6,6	"	+2,41	"	+2,8	Id.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

★	Gr.	À moy. 1891.0.	Réd. au j.	U ^e moy 1891.0.	Réd. au j.	Autorités.
10.	8	^{h m s} 20.20.45,46	+2,51	109.54. 8,2	- 4,7	$\frac{1}{2}$ (Cinc. 3405 + Yarnall 68)
11.	8,5	20.16. 8,63	+2,53	110. 7.33,1	- 4,4	Cincinnati 3386.
12.	9	9.42.37,44	+0,15	80. 8.16,7	- 0,1	DM + 10°, 2058 (2 obs. Leipzig)
13.	8,6	9.59.24,80	+0,08	80.49. 1,4	- 0,4	DM + 9°, 2289 (2 obs. Leipzig)
13.	8,6	"	+0,07	"	- 0,4	Id.
14.	9,3	10.24.23,48	+0,13	74. 6.28,7	- 3,0	Anonyme rapp. à $\frac{1}{2}$ (B. B. V. + 15°, 2209 + R. supp. 10)
13.	9,2	12. 3.56,14	+0,77	88.35.21,3	+ 4,4	Albany A. G. 4439.
13.	9,2	"	+0,76	"	+ 4,4	Id.
16.	8	16.26. 0,40	+1,51	110.31. 5,7	+ 6,9	$\frac{1}{2}$ (Yarnall, 6941 + Cinc. 27)
16.	8	"	+1,53	"	+ 6,9	Id.
17.	6	16.12.44,64	+1,63	109.57. 5,7	+ 7,5	$\frac{1}{3}$ (Br. 6516 + Cord. C. G. 22 + Cincinnati 2726).
18.	6	16.10.36,88	+1,66	109.49.56,1	+ 7,6	$\frac{1}{3}$ (Br. 6498 + Cord. C. G. 22 + A. OE. 15468-69).
19.	8	16. 6. 1,42	+1,72	109.17.44,5	+ 7,8	$\frac{1}{3}$ (Cinc. 2715 + A. OE. 15468-69) + 1 obs. Paris).
19.	8	"	+1,73	"	+ 7,8	Id.
20.	9,2	15.54.41,47	+1,76	108.39.10,2	+ 8,2	Anon. rapp. à $\frac{1}{2}$ (A. OE. 15177 + 1 obs. Bordeaux).
21.	7	15.46. 1,08	+1,71	108. 6.30,9	+ 8,3	$\frac{1}{4}$ (A. OE. 14963-64-65 + 1 obs. Bordeaux).
21.	7	"	+1,68	"	+ 8,2	Id.
21.	7	"	+1,67	"	+ 8,2	Id.
22.	9	15.49.54,21	+1,57	108. 1.30,8	+ 7,9	A. OE. 15035, rapp. à l'★
22.	9	"	+1,54	"	+ 7,8	Id.
23.	10,5	15.59.18,51	+1,47	108.25.29,4	+ 7,6	An. rapp. à $\frac{1}{3}$ (Cord. C. G. 21 + A. OE. 15192-93 + 1 obs. Bordeaux).
24.	9	17.23.11,75	+1,94	113.10.22,4	+ 5,2	$\frac{1}{2}$ (A. OE. 16841 + Cord. Z. 17 ^b , n° 1508).
24.	9	"	+1,95	"	+ 5,2	Id.
24.	9	"	+1,96	"	+ 5,2	Id.
25.	10	17. 1.37,99	+2,08	113.15.32,8	+ 6,6	An. rapp. à $\frac{1}{3}$ (Y. 7073 + Cord. C. G. 23103 + St. 9290).
25.	10	"	+2,08	"	+ 6,6	Id.
25.	10	"	+2,08	"	+ 6,6	Id.
26.	7	16.57.52,11	+2,07	113.14. 9,0	+ 6,9	$\frac{1}{3}$ (Y. 7073 + Cord. C. G. 23103 + St. 9290).
27.	12,5	16.54.17,69	+1,91	113.21.16,7	+ 7,5	An. rapp. à $\frac{1}{3}$ (Y. 6992 + Cord. C. G. 22878 + St. 9192).
27.	12,5	"	+1,88	"	+ 7,5	Id.

ÉLÉMENTS ET ÉPHÉMÉRIDE DE LA PLANÈTE (294) FÉLICIE,

PAR M. CHARLOIS.

A l'aide des observations de Nice des 15 juillet, 21 août et 2 octobre 1890, nous avons calculé les éléments suivants :

Époque : 1890 octobre 2,5, Temps moyen de Paris.

M.....	8°.44'.50,7	} Éclipt. et équin. moyen 1890,0.
π	317.10.51,6	
Ω	136.53.51,7	
i	6.15. 0,1	
φ	11.30.22,2	
$\log a$	0,4958982	
μ	639 ^r ,9696	

qui représentent comme il suit l'ensemble des observations de Nice :

		Obs. — Calc.	
		$\cos \delta \Delta R.$	$\Delta \odot.$
1890. JUIL.	15.....	-0,04	+0,3
	16.....	-0,07	-0,5
	17.....	-0,21	-0,9
	18.....	-0,21	-1,9
	22.....	-0,02	-2,2
	27.....	-0,11	-4,0
AOUT	5.....	-0,18	-2,4
	7.....	+0,05	+0,8
	14.....	+0,08	+0,3
	21.....	-0,06	+0,2
SEPT.	6.....	-0,10	+2,9
OCT.	2.....	-0,02	+0,1
	4.....	-0,08	-3,0

On en a déduit, pour l'opposition prochaine, l'éphéméride ci-après :

(Positions moyennes 1891,0.)

12 h. T. m. de Paris.	R.	(\odot).	$\log r.$	$\log \Delta$
1891.	h m s	°		
Nov. 18.....	4.49.44	+11. 5,7	0,5076	0,3551
20.....	48. 5	2,5		
22.....	46.25	+13.59,5	0,5089	0,3544
24.....	44.43	56,7		
26.....	4.42.59	+13.54,1	0,5101	0,3545

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

12 h. T. m. de Paris.	R.	Q.	log r.	log Δ.
1891.	h m s			
Nov. 28.....	4.41.15	+13.51,5		
30.....	39.31	49,2	0,5114	0,3556
Déc. 2.....	37.46	47,1		
4.....	36. 2	45,2	0,5126	0,3576
6.....	34.19	43,6		
8.....	32.37	42,2	0,5138	0,3605
10.....	30.56	41,1		
Déc. 12.....	4.29.18	+13.40,2	0,5150	0,3643

Opposition en R 1891 déc. 2; grandeur 14,3.

OBSERVATIONS DE LA PLANÈTE (308).

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial d'Eichens, ouverture 0"

PAR M. ESMIOL.

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔQ.	N. de c.	R app.	log f. p.	Q ¹ app.
(308)							
1891.	h m s	m s			h m s		
Mai 1.	9.53.33	-1.34,06	+ 0.37,4	6.6	12. 5.57,60	+2,688	89. 9.55,6
5.	11.43.25	+3. 4,43	- 0.18,3	5.5	12. 4.46,70	+1,429	88.57.57,2
6.	10.48. 9	+2.51,10	- 2.40,1	2.2	12. 4.33,36	+1,270	88.55.35,4
8.	9.43.45	+2.28,83	- 7.17,8	5.5	12. 4.11,08	+2,931	88.50.57,6
8.	10.25.26	+1.43,92	+ 4.35,3	4.4	12. 4.10,55	+1,207	88.50.56,1
11.	11.18.53	+1.18,17	- 0.49,3	3.3	12. 3.44,78	+1,430	88.47.31,3
12.	10. 8.45	+1.13,13	- 2.26,7	5.5	12. 3.39,74	+1,207	88.43.53,9
12.	11.19.11	+1.13,00	- 2.30,9	4.4	12. 3.39,61	+1,440	88.43.49,7
13.	10.18.45	+1. 9,08	- 3.49,6	6.6	12. 3.35,68	+1,267	88.42.30,9

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy 1891,0.	Red. au j.	Q ¹ moy 1891,0.	Red au j.	Autorités.
1.	9	12. 7.30,70	+0,96	89. 9.12,3	+ 5,9	3616 Lamc
2.	9	12. 1.41,35	+0,92	88.58. 9,8	+ 5,7	3578 Lamo
3.	9	12. 1.41,35	+0,91	88.58. 9,8	+ 5,7	Id.
4.	9	12. 1.41,35	+0,90	88.58. 9,8	+ 5,6	Id.
5.	7	12. 2.25,73	+0,90	88.46.15,3	+ 5,5	3102 Glasz
6.	7	12. 2.25,73	+0,88	88.46.15,3	+ 5,3	Id.
7.	7	12. 2.25,73	+0,88	88.46.15,3	+ 5,3	Id.
8.	7	12. 2.25,73	+0,88	88.46.15,3	+ 5,3	Id.
9.	7	12. 2.25,73	+0,87	88.46.15,3	+ 5,2	Id.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

RÉUNION DU COMITÉ INTERNATIONAL PERMANENT POUR L'EXÉCUTION DE LA CARTE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL A L'OBSERVATOIRE DE PARIS EN 1891.

Ce fascicule comprend deux parties : les Procès-verbaux des séances et les Annexes.

Les réunions plénières, au nombre de quatre, eurent lieu les 31 mars, 1. 2 et 3 avril. Déjà le 28 mars divers membres du Comité, présents à Paris, s'étaient réunis à l'Observatoire et avaient arrêté un programme provisoire, qui servit de base aux discussions des quatre réunions suivantes.

Première séance. — Après le discours de bienvenue de l'amiral Mouchez, il fut procédé à la nomination du Bureau, qui fut ainsi constitué :

Président : Amiral Mouchez.

Vice-Présidents : MM. H.-G. v. d. S. Bakhuyzen et Gill.

Secrétaires : MM. Kapteyn et Trépied.

On rendit compte d'abord de l'avancement des travaux dans les Observatoires participants : tous étaient satisfaits de leurs instruments et prêts pour commencer immédiatement, ou au moins dans le courant de l'année, sauf toutefois celui de Santiago, dont les travaux sont interrompus par les graves événements survenus au Chili. Un grand nombre d'entre eux avaient déjà fait des clichés d'essai, placés sous les yeux du Comité et qui tous furent jugés des plus satisfaisants par une Commission chargée de les examiner.

Les réseaux manquaient encore, mais M. Gautier, à Paris, avait déjà construit une machine pour les tracer et allait pouvoir les livrer incessamment. Pour les plaques, on savait que la manufacture de glaces de Saint-Gobain et la maison Lumière avaient offert leurs produits au prix de revient. Enfin M. Champigneulle s'occupait de nouveau de la vitrification des clichés.

La première question discutée fut celle du *mode d'impression des réseaux* sur la plaque sensible avant son exposition au foyer de la lunette. Emploierait-on pour cette impression un appareil spécial, ou bien ferait-on usage de l'objectif photographique lui-même ? Une Commission fut chargée d'examiner les résultats obtenus par divers procédés et les trouva tous très satisfaisants ; aussi se borna-t-on à recommander l'emploi de rayons parallèles en laissant à chacun le choix du procédé, ainsi que celui de la source de lumière.

Les Membres chargés du choix et du calcul des *étoiles-guides* firent ensuite connaître l'état d'avancement de leur travail et exposèrent les difficultés, quelquefois insurmontables, qu'ils avaient rencontrées pour trouver des étoiles peu éloignées des centres des plaques, et assez brillantes pour être facilement vues en champ éclairé dans les lunettes pointeurs, qui ont généralement 0^m.19 d'ouverture. Après discussion prit la résolution suivante, relativement au choix des étoiles-guides :

1^o On choisira comme étoile-guide pour chaque plaque l'étoile plus brillante de la distance au centre de la plaque ne dépassant pas 20 :

2^o Dans le cas où l'éclat de cette étoile sera plus faible que ce d'une étoile de grandeur 9.0, on ajoutera comme étoile-guide supplémentaire l'étoile de grandeur 9.0 ou d'un éclat supérieur, si sera trouvée la plus voisine du centre de la plaque.

3^o Toutefois lorsqu'un astronome trouvera que l'étoile-guide qui lui est fournie par le Catalogue n'est pas d'un éclat suffisant, il aura la liberté de choisir lui-même une étoile plus brillante jusqu'à 30 du centre de la plaque.

Deuxième séance. — M. Christie, qui n'avait pu assister à la première séance, fait son rapport sur l'instrument de Greenwich et sur les travaux et essais dont il avait été chargé. M. le Cap. Abney fait connaître ensuite les résultats de ses études sur la sensibilité des plaques et moyens de l'augmenter, après qu'il eut passé à l'orientation des plaques.

D'après la construction des plaques, on doit recevoir les plaques pendant l'impression du réseau, les lignes des traits du réseau seront sensiblement parallèles aux lignes des zones; puis deux de ces boîtes seront placées, pendant l'exposition au foyer de la lunette, à peu près suivant le parallèle céleste du point photographié. En vue de faciliter les réductions des clichés du Catalogue et l'usage des Cartes fournies par les clichés à longue pose, il est desirable que ces conditions soient remplies aussi exactement que possible. Dès lors on s'est demandé l'on orienterait les plaques suivant le parallèle apparent du jour ou suivant celui de 1900.0, époque à laquelle doivent être ramenées toutes les coordonnées. On a reconnu que, près du pôle, l'orientation suivant le parallèle de 1900.0 faciliterait la réduction des mesures, et, après avoir reconnu que l'orientation dont il s'agit ne peut être qu'approximative, le Comité a adopté la proposition suivante :

L'orientation des plaques sera faite pour l'équinoxe de 1900.0 dans les zones de déclinaison supérieure à 65°; pour les autres, l'orientation se rapportera à l'équinoxe apparent du jour.

Une discussion animée s'est engagée ensuite sur la question de savoir si l'on commencerait par exécuter d'abord uniquement les clichés du Catalogue, pour n'entreprendre les clichés à longue pose que lorsque ceux de l'autre série seraient terminés. On aurait eu ainsi l'avantage de commencer par un travail pour lequel il ne peut y avoir de difficulté; les clichés à longue pose auraient alors bénéficié de l'expérience acquise et de la plus grande sensibilité que l'on peut espérer pour les plaques de l'avenir. Les essais déjà faits avaient montré qu'en effet l'obtention des images d'étoiles de la 14^e grandeur peut exiger des poses beaucoup plus longues qu'on ne l'avait pensé d'abord. D'un autre côté, certains Membres virent dans cette proposition une tendance à abandonner les clichés à longue pose pour s'occuper surtout de ceux du Catalogue. La discussion ayant été fort longue, le vote fut remis à la séance suivante.

Troisième séance. — Après les explications échangées à la suite de la deuxième séance, le Congrès adopta, à l'unanimité, la résolution suivante :

Les travaux décidés par le Congrès de 1887 comprenant deux séries de clichés faits avec des poses différentes, le Comité permanent, tout en recommandant aux observateurs de pousser avec la plus grande activité possible l'exécution des clichés de la deuxième catégorie (clichés destinés à la construction d'un Catalogue) est d'avis qu'on devra aussi profiter du plus grand nombre possible de belles soirées pour faire des clichés à longue pose de la première série.

Puis, à la résolution n^o 23 de 1889, on substitua celle-ci :

Pour les clichés du Catalogue il y aura deux poses sur la même plaque, l'une montrant faiblement les images des étoiles de la 11^e grandeur, l'autre d'une durée deux fois plus grande, et la distance des deux images sera de 2 à 3 dixièmes de millimètre.

Pour les clichés de la Carte on prit d'abord la résolution suivante relativement à leur mode de reproduction :

En ce qui concerne le mode de reproduction des étoiles de la Carte, les méthodes purement photographiques seront employées à l'exclusion de toute autre méthode exigeant l'intervention de la main humaine. L'examen des questions de détail est renvoyé à la Commission chargée en 1889 de l'étude des questions relatives à la multiplication des clichés.

Ensuite on discuta s'il ne conviendrait pas de faire trois poses au lieu

d'une pour les clichés de la Carte, afin de distinguer facilement fausses étoiles.

Divers membres, admettant que *dans le tirage sur papier* le d'une pose de 1. heure, par exemple, est équivalent à celui de trois poses de 20 minutes donnant de chaque étoile trois images très voisines proposaient de faire une triple pose sur chacun des clichés de la Carte.

D'autres insistaient sur l'accroissement de travail qui résulterait de là et trouvaient en outre ce projet en opposition avec une résolution du Congrès de 1887, qui n'avait décidé de faire une double série de clichés que pour éliminer les fausses étoiles. D'autres enfin, prenant un moyen terme, proposaient une pose simple sur une série de clichés et une pose triple sur l'autre série; mais alors, comme les centres d'une série de clichés doivent se trouver sur les angles des clichés de l'autre série, les étoiles des bords d'une plaque n'auraient de bonnes images que sur un seul cliché.

L'entente se faisant difficilement en séance plénière, cette question fut renvoyée à une Commission et le vote remis au lendemain.

Quatrième séance. — Sur la proposition de la Commission nommée la veille, le Comité adopta la résolution suivante :

Pour la Carte proprement dite du Ciel, on commencera par une série des clichés dont les centres sont de déclinaison paire; cette série sera faite à une seule pose (c'est-à-dire présentera une image unique de chaque étoile).

Des études ultérieures montreront s'il y a lieu de recommencer pour la seconde série (centre de déclinaison impaire), deux ou trois poses au lieu d'une seule comme pour la première série.

Parmi les questions qui restaient à résoudre, la plus difficile était de dire aux observateurs un moyen pratique de calculer le temps de pose nécessaire pour avoir sur les clichés les étoiles de 11^e grandeur (Catalogue) et celles de 14^e grandeur (Carte).

La discussion étant accélérée, le Comité vota successivement les résolutions suivantes :

Dans le but de permettre aux observateurs de passer d'une manière uniforme et sûre de la grandeur 9 d'Argelander à la grandeur 14 que l'on désire obtenir sur les clichés du Catalogue, une Commission distribuera aux Observatoires participants des écrans à mailles métalliques, absolument identiques pour tous les Observatoires. Ces écrans, placés devant l'objectif de la lunette photographique, diminueront la grandeur d'une étoile de deux unités, et, dans la dé-

mination de la diminution de grandeur, les commissaires adopteront le coefficient 2,512 pour le rapport entre les éclats de deux grandeurs consécutives.

Chaque observatoire fera, de temps en temps, des clichés-types de certaines régions déterminées du Ciel, choisies par la Commission, de telle sorte que chaque astronome pourra toujours en observer une au moins à la distance zénithale convenable.

Le Comité permanent indique 40 minutes comme la durée de la pose pour les clichés de la Carte (série de déclinaisons paires) dans les conditions atmosphériques moyennes à Paris et avec les plaques Lumière actuellement en usage à Paris.

La Commission des écrans métalliques remettra à MM. Henry un écran au moyen duquel ils détermineront le temps t exprimé en minutes, qui permet d'obtenir les 11^{es} grandeurs en partant des 9^{es} grandeurs d'Argelander. Alors, pour tous les observateurs qui seront munis d'un écran identique, le rapport $\frac{40}{t}$ sera le facteur par lequel on devra multiplier le temps de pose donnant les 11^{es} pour obtenir les étoiles de la plus faible grandeur de la Carte.

Les questions concernant le nombre des étoiles fondamentales de repère pour chaque cliché du Catalogue, le choix de ces étoiles et les moyens propres à en assurer des observations méridiennes sont renvoyées à une Commission spéciale avec pleins pouvoirs pour les résoudre définitivement.

Dès qu'il le jugera convenable, chaque observateur exécutera lui-même ou fera exécuter par tel Observatoire ou tel bureau de mesures qu'il voudra choisir :

1^o En coordonnées rectilignes, les mesures des positions sur les plaques du Catalogue, chaque étoile étant rapportée au trait du réseau le plus voisin.

2^o Les mesures nécessaires pour la détermination des grandeurs des étoiles.

Les Observatoires publieront les résultats bruts de ces mesures et le Comité permanent s'occupera des questions relatives à la réduction de toutes ces mesures dès qu'on aura obtenu un nombre suffisant d'observations méridiennes des étoiles fondamentales de repère.

Les travaux d'exécution de la Carte photographique du Ciel devront commencer dans chaque Observatoire dès qu'on sera en possession de l'écran métallique absorbant deux grandeurs. Le délai prévu pour la livraison de ces écrans est de deux mois. Toutefois, chaque observateur sera libre de commencer ses travaux avant d'avoir reçu son écran, sous la condition de s'assurer qu'il obtient bien

toutes les études de la grandeur 11 sur ses clichés du Catalogue.

Sans fixer aucune règle, le Comité permanent recommande, pour la région écliptique du Ciel, une série spéciale de clichés avec de très longues poses, en laissant à cette série le caractère d'une recherche personnelle.

Chaque année, avant la fin du mois de janvier, un Rapport sur l'état d'avancement des travaux sera adressé par chaque Observatoire au Bureau du Comité permanent.

La Conférence exprime à l'Académie des Sciences ses profonds remerciements pour tout ce qu'elle a fait jusqu'ici en faveur de l'œuvre de la Carte du Ciel, en lui accordant son haut patronage et en assurant la publication du Bulletin. Elle exprime le vœu que l'Académie veuille bien continuer son précieux concours pour la publication des Procès-verbaux et des travaux ultérieurs. Elle a aussi la confiance que les divers Gouvernements accorderont aux Observatoires participants tous les moyens de travail nécessaires pour l'œuvre elle-même et pour la publication de la Carte.

En 1889, on avait voté une répartition des zones entre les Observatoires participants, en assignant à chaque Observatoire une zone voisine que possible de son zénith, afin de rendre minima les effets de refraction. Plus tard, on reconnut qu'il est souvent difficile de photographier dans le voisinage du zénith à cause des condensations de vapeur sur l'objectif. Aussi le projet primitif fut modifié de telle sorte qu'un Observatoire tient en général à photographier que des zones distantes de plus de 10° à 12° de son zénith et on adopta la répartition suivante :

Observatoire	Latitude	Zone		Distance zénithale	No de pl.
		en asc.	en desc.		
Greenwich.....	-51.29	-9	-65	-13.31 à -38.31	1
Rome.....	-41.54	-64	-55	-13.6	-22.7
Catane.....	-37.30	-54	-7	-9.30	-16.30
Helsingfors.....	-60.9	-6	-7	-14.9	-20.9
Potsdam.....	-52.23	-39	-37	-14.23	-20.23
Oxford.....	-51.46	-31	-25	-20.46	-26.46
Paris.....	-48.50	-24	-18	-24.50	-30.50
Bordeaux.....	-44.50	-17	-11	-27.50	-33.50
Toulouse.....	-43.37	-10	-5	-33.37	-38.37
Alger.....	-36.48	-4	-2	-32.48	-38.48
San Fernando.....	-36.28	-3	-9	-39.28	-45.28
Tacubaya.....	-19.24	-10	-10	-29.24	-35.24
Santiago du Chili.....	-33.27	-17	-23	-10.17	-16.27
La Plata.....	-34.55	-24	-31	-3.55	-10.55

Observatoires.	Latitude.	Zone		Distance zénithale.		Nombre de plaques.
		en déclinaison.				
Rio-Janeiro.....	-22.54	-32	-40	+ 9. 6	-17. 6	1376
Cap de B.-Espérance.	-33.56	-41	-51	- 7. 4	+17. 4	1512
Sydney.....	-33.52	-52	-64	+18. 8	+30. 8	1400
Melbourne.....	-37.50	-65	-90	+27.10	+52.10	1149

ANNEXES. — 1. *Rapport fait au nom de la Commission chargée d'examiner les résultats photographiques obtenus dans les différents Observatoires*, par M. Paul Henry.

2. *Rapport fait au nom de la Commission chargée du règlement des questions se rapportant au mode de reproduction des clichés de la Carte*, par M. Wolf.

3. *La Carte photographique internationale*, par le professeur Pritchard. Résumé des essais faits, du 13 décembre 1890 au 26 février 1891, avec l'instrument de Grubb employé à Oxford pour la Carte du Ciel.

Les temps de pose nécessaires pour obtenir des images susceptibles d'être mesurées et qui ne soient pas sujettes à passer inaperçues sur les négatifs sont les suivants :

Gr. des étoiles.	Soirées		Diamètres.
	les plus pures.	ordinaires.	
9.....	$\begin{matrix} m & s \\ 0.20 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} m & s \\ 0.55 & \end{matrix}$	= 4'
11.....	3.20	5.12	< 4'
14.....	45. 0	80. 0	< 4'

Pour que le tirage sur papier au gélatinobromure montre les étoiles de 11^e grandeur, il faut que le cliché porte une impression bien distincte des étoiles de 12^e grandeur, ce qui exige 13 minutes de pose en moyenne. De même, pour obtenir les 14^{es} sur papier, il faudra une pose d'au moins deux heures.

Sur l'accroissement des diamètres avec le temps de pose; sur la détermination des grandeurs photographiques.

4. *Sur la relation qui, pour un objectif donné et pour une grandeur d'étoiles donnée, existe entre le diamètre de l'image et la durée de l'exposition*, par M. Ch. Trépied.

5. *Recherches photométriques sur les clichés stellaires*, par M. le Dr J. Scheiner. Recherches intéressantes sur l'influence qu'exercent les agitations atmosphériques et la distance des étoiles au centre de la plaque sur la détermination des grandeurs stellaires; loi d'accroissement du temps de pose en passant d'une grandeur à la suivante.

Juvisy. Naturellement il n'a pas été possible d'utiliser les termes de Picard, détruits depuis longtemps et que l'on ne connaissait déjà plus au siècle dernier; on a même renoncé aux termes marqués par les deux pyramides élevées sur des terrains achetés par l'Académie.

La mesure de la nouvelle base, exécutée en juin, juillet et août par les officiers de la Section de Géodésie, a donné pour sa longueur, réduite au niveau de la mer, 7226^m, 792, avec une erreur qui ne paraît pas dépasser le centimètre.

Gautier (P.). — Sur un procédé de construction des vis de haute précision pour les appareils de mesure de la Carte du Ciel.

Au lieu de se borner à fileter la vis avec soin, M. Gautier l'améliore ensuite en la faisant passer un très grand nombre de fois dans un écrou de cuivre, avec interposition d'émeri très fin. La construction d'un écrou assez long présente des difficultés qui ont été tournées en le constituant au moyen de dix écrous partiels légèrement séparés et montés sur une même base d'acier.

Capus (Guillaume). — Observations météorologiques sur les Pamirs.

Tacchini. — Observations solaires faites à l'Observatoire Royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1891.

Les taches, les facules et les protubérances ont été plus nombreuses que dans le trimestre précédent et ont présenté un maximum secondaire dans le mois de février.

Perchot (L.). — Sur le mouvement du périhélie de la Lune.

Janssen (J.). — Sur le passage de Mercure.

Les préparatifs faits à l'Observatoire de Meudon ont été rendus inutilisables par les nuages qui couvraient complètement le ciel dans la matinée du 10 mai 1891. Au Japon, dans le passage de Vénus de 1874, M. Janssen aperçut la planète se projetant en sombre sur le fond du ciel, quand elle était encore à 2' ou 3' du bord solaire. Il aurait été intéressant de répéter cette observation pour Mercure. On aurait en même temps un contrôle de la méthode proposée par M. Huggins pour photographier la couronne solaire en dehors des éclipses. Si, en effet, la planète se voyait sur l'image photographique tout à fait en dehors du Soleil et à

une distance où on ne la voit pas dans les lunettes, on aurait un témoignage de l'origine réellement solaire des phénomènes photographiés.

Cornu (A.). — Sur un double halo avec parhélies observé le 15 mai 1891.

Depuis plusieurs années (*Comptes rendus*, C, 1324; CII, 1210; CV, 910; CX, 497), M. Cornu a appelé l'attention sur les indications que les divers halos et parhélies peuvent fournir sur l'état et les mouvements des régions supérieures de l'atmosphère, car la répartition de l'intensité lumineuse le long des courbes présentées par ces phénomènes est en rapport avec l'orientation des prismes de glace, et cette orientation est elle-même en rapport entre la grandeur et la direction du mouvement.

Le 15 mai 1891, le point supérieur de tangence du halo circulaire de 22° et du halo elliptique circonscrit présentait l'intensité extraordinaire qui paraît être caractéristique de perturbations atmosphériques prochaines : les bourrasques survenues les jours suivants montrent que les prévisions basées sur l'observation de ces phénomènes méritent d'être prises en considération.

Faye. — Sur un Mémoire de M. W. von Bezold relatif à la théorie des cyclones.

Crova. — Sur l'analyse de la lumière diffusée par le Ciel (deux Notes).

Eginitis (D.). — Observation du passage de Mercure sur le disque du Soleil le 9 mai 1891, faites avec l'équatorial Plöessl à l'Observatoire national d'Athènes.

Le phénomène de la goutte noire ne s'est pas produit et on n'a pas aperçu d'auréole autour de la planète. Voici les heures de la sortie, en temps moyen d'Athènes :

Sortie, contact interne.....	18 ^h 17 ^m 20 ^s
» externe.....	18 ^h 22 ^m 0 ^s

Fondini. — Les conditions atmosphériques de Greenwich par rapport à la question de l'heure universelle.

Le long du méridien Jérusalem-Nyanza les conditions atmosphériques sont plus favorables, au point de vue astronomique, que le long du méridien de Greenwich.

Savétef. R. — Détermination de la constante solaire.

Guilbert. G. — Étude sur le « gradient » appliqué à la précision du temps.

G. R.

THE OBSERVATORY.

Février-juin 1891.

Après les indications données dans l'analyse des *Monthly Notices*, il y a peu de chose à ajouter sur les séances de la Société royale astronomique.

À la séance du 10 avril, l'Astronome royal a rendu compte des résultats du Congrès photographique; après lui, le capitaine Abney, M. Plummer et M. Roberts ont fait quelques remarques intéressantes.

Le capitaine Abney estime que trois poses ne sont pas nécessaires. Il annonce qu'il possède une formule pour préparer des plaques donnant de meilleurs résultats que celles des fabricants. M. Plummer, qui faisait partie, avec MM. Henry et le D^r Scheiner, du Comité chargé de l'examen des plaques, dit que le Comité a été frappé de la similitude des résultats obtenus malgré la différence des plaques et des objectifs.

M. Roberts a obtenu sur une plaque, par une nuit très belle avec une durée de pose de 60", un nombre d'étoiles inférieur à 200, alors que par une autre soirée, mauvaise en apparence, avec une durée de pose de 15" il en a obtenu un nombre beaucoup plus grand; cela indiquerait qu'il est très difficile de déterminer exactement les durées de pose nécessaires pour les plaques de la carte du Ciel. Le capitaine Abney répond qu'il est parfaitement possible que, dans les nuits lumineuses, une action se produise sur la plaque en même temps que les étoiles l'impressionne. En Suisse, il a pris quelques photographies, et certainement quarante n'y avait pas de lune, avec un ciel très noir, il a toujours obtenu un grand nombre d'étoiles sur les plaques. M. Roberts pensait que le clair de lune avait une influence; mais qu'elle se produisait de la même manière pendant les différentes nuits; il trouve qu'il n'en est pas ainsi.

M. Turner demande au capitaine Abney si la loi, naguère posée par lui, de l'équivalence entre l'augmentation de l'intensité lumineuse de l'objet à photographier et l'augmentation proportionnelle de la durée de pose doit être acceptée sans réserves; il voudrait connaître mieux son opinion sur l'action initiale des faibles sources lumineuses (*Bulletin*, t. VI, p. 279).

La loi d'équivalence est toujours pour le capitaine Abney l'expression de la vérité, bien que des observations faites à Oxford (*Bulletin*, t. VII

de celles faites à Potsdam. On croirait que jusqu'à un certain point, pour les étoiles assez brillantes, la proportionnalité a lieu; tandis que, pour les étoiles faibles, la durée de pose exigée augmenterait constamment, au lieu d'être simplement multipliée par 2,5 pour aller d'une grandeur à la grandeur suivante.

A l'égard de l'action initiale, le capitaine Abney dit qu'il serait beaucoup préférable d'avoir des plaques plus sensibles qui ne demanderaient pas d'exposition préliminaire. Il croit que toutes les plaques du commerce ont reçu une exposition préliminaire, en d'autres termes que les sels d'argent ont subi un commencement de décomposition.

Or, quand on veut estimer les grandeurs d'étoiles, cette exposition préliminaire fausse entièrement le rapport des densités et des disques des images; c'est là peut-être la cause de la divergence des formules proposées pour déduire les grandeurs des diamètres des disques des images. Si l'on veut avoir beaucoup d'étoiles sur les plaques sans s'occuper des grandeurs, une exposition préliminaire est à conseiller; mais, si l'on veut mesurer les grandeurs, il faut l'éviter et employer des plaques parfaitement brillantes. Il y aurait là une explication du désaccord indiqué plus haut entre la loi d'équivalence et les nombres trouvés à Oxford et à Potsdam. D'ailleurs la mesure des disques qui a fourni ces nombres est difficile et incertaine. Le capitaine Abney tient compte de l'ensemble de l'action photographique représentée par le dépôt d'argent et la grandeur du disque. Il mesure en fait la perte totale de lumière produite par l'image placée comme un écran devant une ouverture. Ce procédé a donné de bons résultats.

A la séance du 8 mai, le Dr Gill a entretenu la Société de la Carte du Ciel et surtout des déterminations photographiques des vitesses radiales poursuivies à Potsdam. Il trouve que les mesures sont incomparablement les plus précises qu'on ait faites encore; et, avec une lunette de 25 pouces ou de 30 pouces bien montée, avec un spectroscope semblable, en employant la plus grande dispersion possible, il estime que l'observation des spectres des étoiles les plus brillantes permettra de mesurer la vitesse de la Terre dans son orbite d'une manière si précise que la parallaxe solaire pourra être obtenue par cette méthode avec plus de sûreté que par toutes les autres. C'est un progrès énorme dans la spectroscopie de précision, et on peut penser qu'à Potsdam et ailleurs on ne tardera pas à voir de grandes lunettes occupées à un tel travail. Ces paroles sont bien dignes de fixer l'attention.

Articles.

See (T.-J.-J.). — Les grandes excentricités des orbites des

étoiles doubles. L'origine des systèmes stellaires. Diagramme comparatif des excentricités des orbites d'étoiles doubles et celles des planètes et des comètes.

Articles importants qui jettent un jour tout nouveau sur la genèse des étoiles doubles.

Le contraste marqué entre les petites excentricités des orbites des planètes et les fortes excentricités des orbites des étoiles doubles est bien connu, la valeur moyenne des excentricités des étoiles doubles étant environ dix fois plus considérable. Ces grandes excentricités doivent sans doute tenir à quelque cause physique. M. See a été conduit, par une analyse rigoureuse, à cette conclusion que les grandes excentricités sont dues à l'action continue du frottement des marées. En suivant une voie analogue à celle du Prof. G.-H. Darwin, l'auteur trouve qu'il est très probable qu'une étoile double provient de l'évolution d'une nébuleuse qui, primitivement unique, s'est partagée ensuite en deux masses comparables, lesquelles, par l'action prolongée du frottement des marées, tendent à se mouvoir dans des orbites de plus en plus agrandies et excentriques. D'après les recherches du Prof. Darwin, on sait que le frottement des marées n'a guère eu d'influence dans l'évolution du système planétaire. La différence des excentricités mentionnées ci-dessus tiendrait donc à l'action fort diverse, suivant les cas, du frottement des marées.

Dans le second article, l'auteur discute quelques hypothèses mises en avant pour expliquer les étoiles doubles : on les a considérées comme analogues aux comètes de notre système, comme provenant de deux essaims de météorites qui se sont rapprochés (Prof. Lockyer), comme engendrées à la suite d'explosions de nébuleuses....; toutes ces hypothèses ne sont pas soutenables, et M. See prend son point de départ dans les recherches de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. VII) et dans celles de M. Darwin (*Bulletin*, t. IV, p. 524). Rappelons ici l'essentiel des conclusions de M. Poincaré touchant la figure d'équilibre séculairement stable d'une masse fluide homogène qui se contracte en se refroidissant, le moment de la quantité de mouvement restant d'ailleurs constant. Au début, la densité étant très faible, la figure de la masse est un ellipsoïde de révolution très peu différent d'une sphère. Le refroidissement aura d'abord pour effet d'augmenter l'aplatissement de l'ellipsoïde, qui restera cependant de révolution. Quand l'aplatissement sera devenu à peu près égal à $\frac{2}{3}$, l'ellipsoïde cessera d'être de révolution et deviendra un ellipsoïde de Jacobi (parce que les figures d'équilibre stables sont d'abord les ellipsoïdes de révolution d'un aplatissement infé-

teur à $\frac{2}{3}$ et ensuite les ellipsoïdes de Jacobi peu allongés). Le refroidissement continuant, la masse cessera d'être ellipsoïdale. L'ellipsoïde semble se creuser légèrement dans sa partie moyenne, mais plus près de l'un des sommets du grand axe. La plus grande partie de la matière tend à se rapprocher de la forme sphérique, pendant que la plus petite partie sort de l'ellipsoïde par un sommet du grand axe, comme si elle cherchait à se séparer de la masse principale...

M. See invite le lecteur à comparer les figures théoriques du Mémoire de M. Poincaré aux dessins de nébuleuses doubles publiés par Herschel dans les *Phil. Trans.* pour 1833.

Le diagramme montrant les excentricités dans les trois classes de corps : planètes, comètes et étoiles doubles tend à prouver qu'il existe des différences essentielles entre les trois espèces de corps.

Il faut espérer que la publication du Mémoire de M. See ne se fera pas attendre.

Vewall (H.-F.). — Notes sur quelques Observatoires d'Amérique.

A noter des photographies de nébuleuses à courte pose, prises avec le 36 pouces de l'Observatoire Lick, dans lesquelles le noyau de la nébuleuse donne une image nette comparable à celles d'étoiles de 8^m ou de 9^m; ces photographies doivent servir à l'étude de la parallaxe des nébuleuses.

A Cambridge, M. Pickering se propose d'appliquer, pour vérifier la variabilité des étoiles, une nouvelle méthode photométrique. Un petit prisme de très petit angle est attaché à un doublet photographique de courte distance focale et monté équatorialement. Le prisme couvre une très petite fraction de l'ouverture du doublet, et il a pour but de produire une petite déviation avec aussi peu de dispersion que possible. Dirigée sur un groupe d'étoiles à comparer, la lunette donnera, outre les images A, B, C des étoiles en question, des images dues au prisme α , β , γ , lesquelles multiplient les facilités de la comparaison.

Des Cartes photographiques montrant toutes les étoiles jusqu'à la 12^m ont été obtenues, et il est alors possible de vérifier aussitôt la variabilité, sujet qui a acquis un grand intérêt par son rapprochement avec la classification des spectres; en effet, les raies de l'hydrogène ont été vues brillantes dans 30 étoiles variables à longue période, et cette particularité des étoiles variables fournit un moyen de les découvrir.

A propos de l'échauffement des tubes des grandes lunettes dans certaines observations, mention est faite de recherches de Lord Rayleigh concernant le fâcheux effet sur la définition des images des différences

de température dans les tubes. Ces effets augmentent avec la grandeur des instruments (cf. *Nature*, n° 4133).

Innes (R.-T.-A.). — Visite à l'Observatoire de M. Tebb (Windsor, Nouvelle-Galles du Sud).

Récit intéressant qui contient le conseil, donné autrefois par le Noble, d'observer les occultations en mettant le fil équatorial près de l'étoile, un peu avant l'immersion; l'émergence devra évidemment se faire près du même fil.

M. John Tatlock fait mieux (*Observatory*, numéro de juin) : il place l'étoile près du point d'intersection du fil équatorial avec un des fils perpendiculaires, de sorte que non seulement on sait où aura lieu l'immersion, mais de plus on est averti de l'heure du phénomène. Cela suppose, bien entendu, un équatorial bien réglé et muni d'un mouvement d'horlogerie.

Cette remarque, combinée avec le procédé graphique pour faire le triage des occultations (*Bulletin*, t. VI, p. 129), nous paraît beaucoup faciliter les observations dans les lieux pour lesquels les phénomènes ne sont pas prédits à l'avance.

Observatoire astro-physique Smithsonian.

Ce nouvel Observatoire, qui aura en vue les recherches sur la lumière, la chaleur et l'énergie radiante en général, est placé sous la direction de M. Langley. Les instruments principaux sont un sidérostade pour un miroir de 20 pouces de diamètre et construit par Grubb. Dans la chambre noire en correspondance avec le sidérostade, est monté un grand instrument, le spectrobolomètre, c'est-à-dire un grand spectroscope muni d'un cercle donnant les 5' et spécialement destiné à servir concurremment avec le bolomètre.

Denning (W.-F.). — Variations dans les nébuleuses.

Il faut tenir grand compte, pour apprécier ces variations, de l'état de l'atmosphère qui change souvent d'heure en heure.

Plummer (W.-E.). — La capture des comètes périodiques.

M. Plummer donne une analyse substantielle des recherches récentes de MM. Tisserand et Callandreau (complétées par celles de M. Schuyler qui viennent de paraître dans le *Bulletin*); il conclut que ce qu'il y a de vague et de peu satisfaisant dans la théorie de la capture a été écarté et qu'elle présente un haut degré de probabilité.

Les Éditeurs, Mouchez (amiral). — La Carte photographique du Ciel.

Les Éditeurs, en rendant compte du dernier Congrès photographique, paraissent regretter l'extension donnée au projet primitif de la construction de la Carte du Ciel, avec un Catalogue d'étoiles de 11^M comme complément, et ils partagent le sentiment de M. Cornu, dont les paroles sont reproduites : « Ce qui me préoccupe surtout, c'est de voir la tendance qui se manifeste dans la Conférence à vouloir toujours augmenter un travail déjà si considérable en lui-même. »

Mention est faite aussi de l'incertitude qu'a jetée, au dernier moment, dans le Comité, la déclaration du D^r Scheiner sur la nécessité d'augmenter les temps de pose dans une forte proportion (*voir* plus haut les remarques du capitaine Abney sur ce point).

Après ces remarques, les Éditeurs louent sans réserve l'esprit d'union qui a présidé à toutes les résolutions et l'intelligente libéralité de M. Bischoffsheim ainsi que de M. Biver, directeur de la Cristallerie de Saint-Gobain, et Lumière, de Lyon, fabricant de plaques photographiques.

L'amiral Mouchez, à l'égard de la première partie de l'article des Éditeurs, écrit que la Carte du Ciel a toujours été, maintenant comme en 1887, le but essentiel; mais, tenant compte de la décision prise de faire deux séries de clichés, une série pour la Carte, l'autre pour le Catalogue, il estimait avantageux de commencer par la seconde, la plus facile du reste.

Cortie (Rév. A.-L.). — Un bref du pape sur l'Astronomie.

À l'occasion de l'article des Éditeurs sur la Carte du Ciel où est citée cette déclaration du P. Denza : « Nous sommes autorisé par le Saint-Père à faire tout ce qui sera possible et nécessaire pour mener à bonne fin l'entreprise », le P. Cortie reproduit les passages principaux du bref papal ayant pour titre : *Du rétablissement et de l'extension de l'Observatoire du Vatican*, d'abord établi par suite des décisions du Concile de Trente et illustré surtout par le P. Secchi.

Poole (James-U.). — John Harrison.

Documents intéressants sur les premiers constructeurs de chronomètres en Angleterre.

Elger (T.-G.). — Notes sélénographiques.

Correspondance.

Johnson (Rév. S.-J.), *Dreyer* (J.-L.-E.). — Comètes non cataloguées anciennes comètes.

Comètes parues en 539, 541, 595, 849, 906, 1077, 1506.

Lynn (W.-T.). — Jean Fabritius et le mouvement des taches solaires. Raisons de considérer l'Écrevisse comme une étoile variable. — M. S. Eckwell et les dates des éclipses historiques.

Gore (J.-E.). — Erreur dans la distance polaire de 11292 Lalande.

Elle serait $78^{\circ}13'27'',7$ au lieu de $77^{\circ}13'27'',7$.

Booth (D.), *Denning* (W.-F.). — Le radiant des Perséides.

Les observations de M. Plassmann (*Astr. Nachr.*, n° 3016) indiquent un déplacement du point radiant vers l'est; elles confirment celles de M. Denning.

Ajoutons que ce déplacement du point radiant a été indiqué comme probable par Le Verrier, en 1871 (*Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 130) et qu'il se présente comme une suite de la théorie (*Bulletin*, V, p. 415).

Denning (W.-F.). — Notes sur la comète α 1891 (avec un dessin).

En suivant cette comète, découverte par lui le 30 mars, M. Denning a vu, le 4 avril, un météore télescopique de 8^m passer à côté de la tache

Asaph Hall. — Remarque sur son dessin de Saturne.

Le bord intérieur de l'anneau sombre est représenté comme trop brillant sur la figure.

Stanley Williams (A.). — La tache rouge sur Jupiter.

La tache rouge semble gagner en éclat; le passage au méridien central a lieu 4^m après l'heure fixée par les éphémérides de M. Marth.

Cette recrudescence d'éclat qui rend la tache aussi brillante qu'en 1858, alors qu'elle attira l'attention générale, survient après un intervalle de douze ans, durée de la révolution de la planète.

Observatoires et Publications.

Leyde. — Les tomes V et VI des *Annales* viennent d'être publiés (*Bulletin*, VIII, p. 404); le tome VI contient les observations ainsi que

les réductions des distances zénithales d'étoiles fondamentales, des circumpolaires principales ainsi qu'une réduction nouvelle des étoiles de latitude ou autres dans le tome II. Une Introduction, de 128 pages, traite de tous les éléments de réduction : erreurs progressives et périodiques des vis des microscopes et de la vis micrométrique; déterminations nadirales (avec beaucoup de renseignements intéressants); erreurs de division; flexions (à l'horizon et au nadir)... Le retard apporté à la publication s'explique par les travaux importants accomplis depuis la publication du tome IV : Achèvement de la zone 30°-35°; observations de 84 circumpolaires entre 80°-90°; observations de 303 fondamentales pour les zones australes; observations, conjointement avec l'Observatoire du Cap, de 34 étoiles boréales et 35 australes pour l'étude de la réfraction; déterminations des différences de longitude avec Greenwich et Paris...

Un extrait du tome VII des *Annales* vient de paraître, et contient un Mémoire important du D^r J.-C. Kapteyn *Sur la détermination des parallaxes au moyen d'observations chronographiques au cercle méridien* (128 pages). Déjà, en réduisant les observations des passages de Wagner, à Poulkova, M. Béliopolsky avait montré l'utilité qu'on pouvait en attendre pour les déterminations des parallaxes (*Bulletin*, VI, p. 287); mais le D^r Kapteyn fait ressortir toute la valeur de la méthode lorsqu'on a systématiquement en vue la détermination d'un nombre assez grand de parallaxes; les résultats valent en précision ceux des mesures héliométriques, et on les obtient bien plus vite, à moins de frais. Sans doute plusieurs Observatoires munis de bons instruments méridiens entreront dans la voie ouverte par le D^r Kapteyn, quand ils verront les résultats obtenus pendant le court intervalle des vacances de Pâques et de Noël, en 1885 et 1887.

Les observations, dans le détail desquelles il paraît inutile d'entrer vu leur simplicité, ont porté sur 15 des étoiles à fort mouvement propre du tome VII des *Observations de Bonn*. La comparaison des résultats avec ceux que l'héliomètre a donnés autorise à affirmer que la présente méthode répond à toutes les exigences, alors même que les mesures héliométriques avec les instruments récemment perfectionnés seraient plus précises et prendraient moins de temps (*Bulletin*, VI, p. 564).

En finissant, le D^r Kapteyn esquisse le plan du travail qui consisterait à déterminer les parallaxes de toutes les étoiles jusqu'à la 5^e grandeur, et il estime que deux observateurs, un dans chaque hémisphère, pourraient achever le travail en huit ans au moyen de la méthode proposée. Pour les étoiles faibles, le D^r Kapteyn estime qu'on doit recourir à la photographie, et il renvoie à un travail publié par lui dans le 4^e fascicule du *Bulletin international de la Carte du Ciel*, p. 262.

Madras. — M. Pogson vient de publier le tome III des observations au cercle méridien contenant les résultats obtenus en 1868-69-70.

Paris. — Annonce de la publication du tome XIX des *Annales de l'Observatoire* (Mémoires).

Université de Virginie (*Observatoire Leander Mc. Cormick*, t. I, n°5 des *Publications*). — Continuation de la *Durchmusterung*, par — 23. 6635 observations, commencées à l'Observatoire de Cincinnati, avec références aux Catalogues de Cordoba, de Washington et aux zones d'Argelander-Oeltzen.

Annonces d'Ouvrages nouveaux.

Handbuch der angewandten Optik. (Manuel d'Optique pratique, par les D^r A. Steinheil et E. Voit, tome I. Calcul des systèmes optiques et application aux lentilles simples et achromatiques. Leipzig, Teubner. Prix : 12 marks).

Catalogue d'étoiles doubles. (Réédition du Catalogue publié par M. Gore dans les *Transactions de l'Académie royale d'Irlande* et contenant en particulier les éléments de 61 orbites, avec plusieurs renseignements utiles sur les grandeurs, couleurs, etc., et l'indication des sources.)

Cartes des constellations. (Seconde édition des Cartes de M. Cotta recommandées par les éditeurs.)

Handbuch der geographischen Orts-Bestimmungen auf Reisen. [Manuel pour la détermination des positions géographiques, par le D^r W.-F. Wislicenus (Leipzig, W. Engelmann). Les éditeurs de l'*Observatory* regrettent seulement que l'auteur n'ait pas donné une forme plus pratique à ce Manuel d'ailleurs très bien fait.] Signalons à cette occasion une publication de M. A. Donner (*Formeln und Tafeln zur Berechnung von Zeitbestimmungen durch Höhen in der Nähe des ersten Vertikals*, Helsingfors, 1890).

Telescopic Work for Starlight Evenings. [Ouvrage de M. Denning, très recommandé par les éditeurs (London, Taylor and Francis).]

Observatoire de O'Gyalla (Hongrie). — Publications des tomes XI et XII contenant les travaux effectués en 1888 et 1889, à l'Observatoire du D^r de Konkoly : observations physiques du Soleil, de Jupiter, des comètes Sawerthal, Barnard et Davidson; de météores, etc.

Cælestia motions (de M. W.-T. Lynn); *Astronomical Lessons* (de M. J.-E. Gore).

O. C.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

NOTE SUR L'ÉTAT ACTUEL DE LA THÉORIE DE LA LUNE.

PAR M. F. TISSERAND.

1. La théorie du mouvement de la Lune, fondée uniquement sur la loi de la gravitation universelle, a provoqué depuis deux siècles des travaux remarquables auxquels sont attachés les noms de Newton, Clairaut et d'Alembert, Euler, Laplace, Plana, Damoiseau, Poisson, Hansen, Delaunay, Adams, S. Newcomb, Hill, . . . J'ai été conduit à les résumer, en préparant le Tome III de mon *Traité de Mécanique céleste*, dans lequel la Lune doit avoir une place prépondérante. J'avais songé d'abord à donner dans le *Bulletin* un aperçu rapide de ces belles théories; mais j'ai préféré les réserver pour mon Ouvrage, et je me bornerai aujourd'hui à en extraire une Notice sur l'état actuel de la théorie. Je me suis appuyé presque constamment sur le beau Mémoire de M. S. Newcomb, *Researches on the motion of the Moon* (*Observations de Washington* pour 1875) : je crois y avoir ajouté quelques compléments intéressants.

2. La publication des Tables de la Lune de Hansen, en 1857, faite aux frais du gouvernement anglais, a été un grand événement scientifique; on a cru posséder enfin la solution définitive d'un problème si longtemps débattu. Hansen annonçait en effet que sa théorie, qui était ingénieuse et nouvelle, représentait presque exactement les observations les plus précises, c'est-à-dire les observations méridiennes faites depuis l'époque de Bradley, embrassant un siècle entier, de 1750 à 1850.

Il ne semble pas que l'auteur des nouvelles Tables ait comparé systématiquement à sa théorie toutes les observations faites pendant ces cent années, ou du moins il n'a pas publié la comparaison détaillée. Il donne (*Monthly Notices*, t. XV, p. 1; 1854) le résultat de la comparaison pour les observations faites par

DES OBSERVATIONS.

de ces observations, en supposant que permettait
de déterminer les positions de Bradley: les écarts
entre les observations de Bradley et de Hansen a fait
de ces observations. Hansen a fait
des observations méridiennes faites
à Stockholm en 1750 et 1751: l'erreur
de ces observations est de 11.44. dépas-
sant l'erreur d'observation d'une étoile.
Hansen a aussi à ses Tables
de Stockholm de 1750, que les
de Stockholm de 1750, mais rien en différe
de Stockholm est ainsi que s'est
de Stockholm Hansen représentent exac-
de Stockholm de 1750. En fait, on peut
de Stockholm de 1750. Les Tables sont
de Stockholm de 1750. A partir de 1830,
de Stockholm de 1750, aussi petites;
de Stockholm de 1750, entre 1' et 2',
de Stockholm de 1750 en 1880. Les
de Stockholm de 1750, voulue, le
de Stockholm de 1750 avant 1730?

de Stockholm de 1750, ment résolue
de Stockholm de 1750, à faire tous les
de Stockholm de 1750, auxquelles on
de Stockholm de 1750, les historiens con-
de Stockholm de 1750, de Soleil,
de Stockholm de 1750, la Terre: ces
de Stockholm de 1750, et la date du
de Stockholm de 1750, ans.

de Stockholm de 1750, *Père mée dans*
de Stockholm de 1750, de l'aise à sa
de Stockholm de 1750, le 19, ont été
de Stockholm de 1750, ont de l'an-
de Stockholm de 1750, de plus de
de Stockholm de 1750, le 15^m ou 20^m.

M. Newcomb a conclu de leur discussion les erreurs suivantes des Tables de Hansen :

Époque.	C.	
— 687	— 11	± 4
— 381	— 27	± 5
— 189	— 20	± 3
+ 134	— 16	± 4

On voit que l'on peut admettre avec assez de vraisemblance que, durant les huit siècles qui ont précédé l'ère chrétienne, les Tables de Hansen réclament une correction d'environ — 18'.

III. *Éclipses observées par les Arabes.* — Ces observations sont contenues dans un manuscrit arabe dont quelques extraits seulement avaient été faits pour les *Prolegomènes de Tycho Brahe*. Il appartenait à la bibliothèque de l'Observatoire de Leyde, fut prêté vers la fin du siècle dernier au gouvernement français et traduit en 1804 par Gaussin, professeur d'arabe au Collège de France, avec le titre suivant : *Le livre de la grande Table Hakémite* . . . ; la plus grande partie des éclipses avaient été publiées un peu auparavant dans les Mémoires de l'Institut, t. II, an VII. Il s'agit d'éclipses de Soleil et de Lune, au nombre de 28, observées à Bagdad et au Caire entre les années 829 et 1004. Ce qui leur donne une importance assez grande, dans le cas des éclipses de Soleil, c'est qu'aux moments du premier et du dernier contact, on a déterminé aussi par l'observation les hauteurs du Soleil, ou celles de belles étoiles, au degré ou au demi-degré près, il est vrai ; on a donc, pour la détermination de l'heure, des données beaucoup plus précises que dans le cas des éclipses de Ptolémée, et, bien que les éclipses des Arabes soient deux fois moins éloignées de nous que celles de Ptolémée, elles peuvent finalement avoir une précision presque équivalente. On ne dit pas toujours comment se faisait l'observation ; cependant on voit que, pour quelques-unes, on regardait le Soleil par réflexion dans l'eau. M. Newcomb a déduit de la discussion des observations les résultats suivants :

Époque.	C.		Nombre de phases.
850	— 3,8	± 2,4	3
927	— 1,6	± 1,7	7
986	— 4,5	± 1,3	20

IV. *Observations faites en Europe avant l'invention des lunettes.* — Il y a un premier groupe d'observations faites par Regiomontanus et Walther, un second par Tycho Brahe ; il s'agit toujours d'éclipses. Le temps est déterminé encore par des hauteurs d'étoiles, avec une précision qui ne surpasse pas beaucoup celle des astronomes arabes. L'intervalle qui les sépare de nous étant moins grand, on ne peut pas en attendre de résultats meilleurs. M. Newcomb les laisse de côté ; il s'étonne en passant qu'un observateur aussi infatigable que Tycho Brahe n'ait observé aucune occultation d'une belle étoile, telle qu'Aldébaran.

V. *Observations faites avec les lunettes, mais sans chronomètre ; Bouillaud et Gassendi.* — L'application des lunettes à l'observation des éclipses et des occultations peut être considérée comme commençant avec ces observateurs ; mais ils n'avaient pas de montre. Au moment même de l'observation, un signal était donné à un aide qui déterminait avec un quart de cercle la hauteur d'une belle étoile. Les observations utilisables s'étendent de 1621 à 1652, et sont au nombre de 20 environ. Si chacune donne la longitude de la Lune avec une erreur probable de 15", l'erreur probable de la moyenne sera de 5" ou 6", et correspondra à une époque voisine de 1640.

VI. *Observations d'Hevelius.* — Ces observations vont de 1639 à 1683 ; avec elles commence l'emploi de la pendule dans les observations d'éclipses et d'occultations ; on la règle au moyen de hauteurs du Soleil ou d'étoiles. L'erreur probable de chaque détermination du temps paraît être de 24", et par suite celle de la longitude de la Lune 12" environ. Le matériel d'observations équivalait à 40 occultations environ ; on peut donc penser que l'erreur probable de la moyenne sera inférieure à 3" ; l'époque moyenne est 1675.

VII. *Observations des astronomes de Paris.* — La fondation de l'Observatoire de Paris avait amené, dans la détermination du temps, un progrès très grand, à tel point que les occultations observées entre 1680 et 1720 sont souvent comparables pour l'exactitude à celles d'aujourd'hui. L'erreur probable du temps ne

passait pas $2''$, correspondant à $1''$ d'erreur sur la longitude de la lune. Cela n'excède pas l'erreur provenant des irrégularités du diamètre, laquelle paraît être d'environ $1''$. On peut donc admettre $1''$,4 comme erreur probable d'une longitude de la Lune. L'erreur provenant de la position de l'étoile occultée est plus grande, et aussi celle des perturbations tabulaires; ces deux dernières peuvent élever à $3''$. On peut compter que, de 1680 à 1720, on a l'équivalent de 60 bonnes occultations observées à l'Observatoire de Paris : cela donne pour la moyenne, vers 1700, la longitude de la lune à $0''$,6 près. De 1720 à 1753, on a encore les observations de Paris, et celles de Delisle à Saint-Pétersbourg; on peut compter sur une bonne occultation chaque année, à Paris et à Saint-Pétersbourg, de sorte que la longitude de la Lune est déterminée dans cet intervalle à moins de $2''$ près. La plupart des observations dont il vient de parler ont été extraites des manuscrits de l'Observatoire de Paris, que Delaunay avait mis obligeamment à la disposition de M. Newcomb.

M. Newcomb a donc pu, à la suite d'un travail immense et minutieux, obtenir les corrections ϵ des Tables de Hansen, pour les époques comprises entre 1620 et 1750. Afin d'atténuer l'influence des erreurs, il a pris des moyennes de 25 en 25 ans, et c'est ainsi qu'il a formé le Tableau suivant :

	ϵ .			ϵ .	
1625.....	+50	± 13	1775.....	0	± 1
1650.....	+39	± 5	1800.....	0	± 1
1675.....	+32	± 1	1825.....	0	± 1
1700.....	+21	± 1	1850.....	0	± 1
1725.....	+7	± 1	1875.....	-8	± 1
1750.....	0	± 1			

On voit donc que les Tables de Hansen ne représentent pas bien le mouvement de la Lune avant 1750; elles ne le représentent pas non plus après 1850. Il serait intéressant d'avoir les comparaisons exactes entre 1750 et 1850, pour les observations méridiennes et les occultations. M. Newcomb dit que l'erreur des Tables pour 1875,0 a été trouvée de $-9''$,7 par les observations méridiennes de Greenwich et de Washington; les occultations ont donné environ $2''$ de moins, de sorte que l'on a admis $-8''$.

4. Pour chercher la cause des erreurs inadmissibles, avant 1750 et après 1850, il convient d'examiner les trois points suivants, qui servent de base à la construction des Tables :

- (a) Le calcul des perturbations solaires;
- (b) Le calcul des inégalités à longues périodes;
- (c) La détermination numérique des constantes.

(a) Les coefficients des diverses inégalités provenant de l'action du Soleil ont été déterminés par Hansen et Delaunay en suivant deux méthodes essentiellement différentes. Les résultats ne sont pas directement comparables; M. Newcomb a exécuté les opérations nécessaires pour passer des uns aux autres, et il a trouvé des différences minimales, de sorte que, si l'on calcule la longitude de la Lune par les Tables de Hansen ou par les formules de Delaunay, l'ensemble des perturbations solaires ne différera pas généralement dans les deux cas de plus de 1". C'est là un résultat fondamental; le contrôle mutuel que se prêtent les deux théories établit l'exactitude de chacune, et l'on est en droit de dire que le calcul des perturbations solaires de la Lune est *pratiquement* résolu. Ce n'est pas à dire qu'il n'y ait encore quelques desiderata au point de vue de la rigueur : ainsi les expressions analytiques données par Delaunay, pour les coefficients des diverses inégalités, sont des séries développées suivant les puissances de certaines fractions assez petites, $e, e', \gamma, m, \frac{a}{a'}$; m désigne le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune. Dans l'un quelconque des coefficients, un terme en $e^i e'^j \gamma^k m^l \left(\frac{a}{a'}\right)^k$ est multiplié par une série de la

$$A_1 m + A_2 m^2 + A_3 m^3 + \dots,$$

dans laquelle A_1, A_2, \dots sont des nombres fractionnaires plus ou moins compliqués. Or il arrive que ces séries numériques relatives à m convergent très lentement; de sorte que Delaunay, malgré ses immenses calculs, n'a pas obtenu un assez grand nombre de coefficients A_1, A_2, \dots pour réaliser la précision à laquelle il voulait arriver. Aussi s'est-il vu contraint d'évaluer par extrapolation les restes des séries, qu'il nomme *compléments probables*. C'est là un inconvénient, mais qui ne paraît pas avoir beaucoup

de gravité, puisque, finalement, les coefficients ainsi complétés sont d'accord avec ceux de Hansen. C'est surtout pour la détermination des coefficients du temps dans les longitudes du périhélie et du nœud qu'il aurait fallu pousser les calculs beaucoup plus loin que ne l'a fait Delaunay. MM. Adams et Hill ont pu, dans ces dernières années, donner les compléments analytiques des portions les plus importantes des moyens mouvements du nœud et du périhélie, de sorte qu'il est permis d'espérer que la théorie arrivera bientôt à donner ces mouvements avec toute la précision désirable. M. Airy avait cherché à déterminer par la théorie les compléments numériques de Delaunay, pour les coefficients des principales inégalités périodiques; ses tentatives ingénieuses n'ont pas abouti.

Si donc, pour les perturbations solaires, l'œuvre de Delaunay n'est pas absolument complète au point de vue du géomètre, elle répond cependant presque entièrement aux besoins de l'astronome. Elle a le mérite de fournir les expressions analytiques des coefficients des inégalités, de sorte que l'on peut y suivre l'influence de chacun des éléments des orbites de la Lune et du Soleil; on doit dire que c'est un véritable monument scientifique.

Mais, d'après ce que l'on a vu, il ne faut pas s'attendre à voir disparaître les erreurs des Tables en prenant les perturbations solaires de Delaunay (1) à la place de celles de Hansen.

(b) Hansen a découvert deux inégalités à longue période provenant de l'action de Vénus : les valeurs qu'il a adoptées dans ses Tables sont

$$V_1 = + 15'', 34 \sin(-g - 16g' + 18g'' + 33^\circ 36'), \quad \text{période de 273 ans,}$$

$$V_2 = + 21'', 47 \sin(8g'' - 13g' + 4'' 44'), \quad \text{période de 239 ans,}$$

où g , g' et g'' désignent respectivement les anomalies moyennes de la Lune, de la Terre et de Vénus. La détermination analytique de V_1 et V_2 est très difficile; elle a été reprise par Delaunay (*Additions à la Connaissance des Temps* pour 1862 et 1863), qui a trouvé

$$V_1 = + 16'', 34 \sin(-g - 16g' + 18g'' + 35^\circ 16', 5),$$

$$V_2 = + 0'', 27 \sin(8g'' - 13g' - 41^\circ 48').$$

(1) Le Bureau des Longitudes a fait calculer, d'après les formules de Delaunay, des Tables qui paraîtront prochainement.

Il y a donc entre les deux astronomes un accord satisfaisant pour V_1 , et un désaccord complet pour V_2 , que Delaunay trouve à peu près insensible. Les calculs de Delaunay ont été repris par d'autres astronomes et paraissent exacts (1).

Pour expliquer la divergence, il est nécessaire de rappeler que Hansen a déterminé V_1 par la théorie, et qu'après bien des tentatives il a fini par déterminer empiriquement le coefficient de V_2 , disant pour justifier ce terme que, sans son introduction, les observations montrent à diverses époques des déviations notables qui disparaissent jusqu'à la dernière trace quand on l'introduit. On voit que cette raison n'existe plus, puisque, si l'introduction de V_2 permet d'annuler presque entièrement les erreurs des Tables entre 1750 et 1850, elle en laisse subsister d'autres qui sont tout à fait inadmissibles, soit avant 1750, soit après 1850. Il paraît donc naturel de chercher ce que deviendront les erreurs des Tables quand on retranchera V_2 de la longitude théorique, ce qui revient à ajouter V_2 à l'erreur tabulaire

$$\zeta = \text{observation moins calcul.}$$

Il est évident qu'on détruira ainsi l'accord entre 1750 et 1850; il faudra chercher à le rétablir autrement.

(c) Hansen a adopté des valeurs déterminées pour les constantes elliptiques, et pour l'accélération séculaire s il a pris $s = 12''.17$, valeur qu'il a soutenue longtemps comme résultant de ses calculs théoriques et représentant bien les éclipses chronologiques. Il a reconnu finalement l'exactitude des recherches théoriques de MM. Adams et Delaunay, qui donnent $s = 6'',18$. Le nombre $s = 12'',17$ n'a donc plus de base théorique; il reste pour lui ce fait qu'il représente bien les éclipses chronologiques. On verra d'ailleurs plus loin que ces deux valeurs de s permettent de représenter presque aussi bien l'une que l'autre, grâce à l'introduction

(1) Delaunay avait d'abord trouvé pour V_1 un coefficient très petit, mais il avait négligé l'inclinaison de l'orbite de Vénus; c'est en tenant compte du carré de cette inclinaison qu'il a obtenu le coefficient de $16'',34$. J'ai montré récemment (*Comptes rendus*, t. CXIII, 6 juillet 1891) que, pour avoir toute la précision désirable, il fallait avoir égard à la quatrième puissance de l'inclinaison en question.

d'une inégalité empirique, les observations faites de 1625 à 1875.

Quand on ajoute V_2 aux erreurs tabulaires \mathcal{E} , elles prennent les valeurs \mathcal{E}' indiquées dans le Tableau suivant :

	v_2 .	\mathcal{E}' .
1625.....	- 17,1	+ 33
1650.....	- 21,4	+ 18
1675.....	- 16,8	+ 15
1700.....	- 5,2	+ 16
1725.....	+ 8,6	+ 16
1750.....	+ 18,9	+ 19
1775.....	+ 21,2	+ 21
1800.....	+ 14,7	+ 15
1825.....	+ 2,1	+ 2
1850.....	- 11,4	- 11
1875.....	- 20,1	- 28

5. La présence du terme V_2 a fourni à Hansen une valeur du moyen mouvement séculaire n (pour 1700,0) qui est sensiblement erronée; il y a donc lieu de faire varier n de δn ; il convient aussi d'attribuer à l'accélération séculaire s et à la longitude moyenne de l'époque ε les variations δs et $\delta \varepsilon$. Mais il suffit d'un coup d'œil jeté sur le Tableau précédent pour voir qu'il n'existe pas de système de valeurs de δn , δs et $\delta \varepsilon$ susceptible d'annuler pratiquement les quantités \mathcal{E}' . La conclusion est donc que la théorie actuelle est impuissante à représenter avec précision l'ensemble des observations, de 1625 à 1875.

Tout ce que l'on peut faire, c'est d'introduire dans la longitude de la Lune une inégalité empirique

$$R = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t,$$

et de chercher à déterminer les quantités δn , δs , $\delta \varepsilon$, A , B et α , de manière à annuler les erreurs \mathcal{E}' ; c'est ce qu'a fait M. Newcomb, et il a donné à α une valeur telle que la période $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ de R soit égale à 273 ans, la période même de V_1 . On aura, pour atteindre ce but, onze équations de la forme

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial L}{\partial n} \delta n + \frac{\partial L}{\partial s} \delta s + A \sin \alpha t + B \cos \alpha t = L_0 - L_c = \mathcal{E}'.$$

Il nous sera commode de supposer dans R le temps compté en

arrivés à partir de 70 : pour tout recevoir les valeurs

$$-12 \quad -14 \quad -16 \quad -18 \quad -20 \quad -22.$$

Nous formons

$$12z = 2$$

le signe que z prendra les valeurs

$$-12 \quad -14 \quad -16 \quad -18 \quad -20 \quad -22.$$

Soit la valeur de T adoptée par M. Newcomb, on a

$$\frac{360^2}{z} = 720 \quad z = 12z = \frac{36000^2}{z^2} = 33^{\circ}.$$

J'ai pensé qu'il serait intéressant de faire quatre calculs en prenant successivement pour α les valeurs 23°, et 23' cinquante correspondant des valeurs de T : 391^{ms}, 209^{ms} et 17^{ms}. On verra mieux ainsi entre quelles limites faire varier T sans cesser de bien représenter les observations.

J'ai obtenu les quatre systèmes suivants, dont le second est celui de M. Newcomb :

	A	B	A	B	
-23 - 2z	-0,75	-0,56	-0,906	-0,423 = 0	
-14 - 2z	-0,50	-0,25	-0,999	-0,035	
-15 - 2z	-0,65	-0,40	-0,934	-0,358	
-16 - 2z	-0,80	-0,55	-0,779	-0,695	
-17 - 2z	-0,95	-0,70	-0,594	-0,920	
-18 - 2z	-1,10	-0,85	-0,380	-1,000	
-19 - 2z	-1,25	-1,00	-0,139	-0,920	
-20 - 2z	-1,40	-1,15	-0,119	-0,695	
-21 - 2z	-1,55	-1,30	-0,034	-0,358	
-22 - 2z	-1,70	-1,45	-0,099	-0,035	
-23 - 2z	-1,85	-1,60	-0,196	-0,423	
...	A	B	A	B	A
...	-0,279	-0,099	-0,574	-0,819	-0,996
...	-0,743	-0,069	-0,139	-0,099	-0,530
...	-0,988	-0,156	-0,777	-0,629	-0,358
...	-0,914	-0,407	-0,998	-0,070	-0,961
...	-0,743	-0,839	-0,682	-0,731	-0,799
...	-0,000	-1,000	0,000	-1,000	0,000
...	-0,743	-0,839	-0,682	-0,731	-0,799
...	-0,914	-0,407	-0,998	-0,070	-0,961
...	-0,988	-0,156	-0,777	-0,629	-0,358
...	-0,743	-0,069	-0,139	-0,099	-0,530
...	-0,279	-0,099	-0,574	-0,819	-0,996

Dans les trois derniers groupes, je n'ai pas reproduit les termes sont les mêmes que dans le premier, afin d'abrégier l'écriture. J'ai appliqué à ces équations la méthode des moindres carrés pour déterminer les inconnues $\delta\varepsilon$, δn , A et B; j'ai cru toutefois avoir le droit de simplifier les calculs en prenant comme multiplicateurs, pour chaque inconnue, des nombres exacts d'unités ou dixièmes, depuis 1 jusqu'à 10 (*voir* dans les derniers numéros *Bulletin* le travail de M. Radau sur l'*Interpolation*); je pense qu'on peut souvent opérer ainsi, parce que la détermination des poids à attribuer aux diverses équations comporte presque toujours un peu d'arbitraire. J'ai obtenu ainsi les valeurs suivantes des inconnues, en regard desquelles je place les résidus R qui consistent dans les premiers nombres des onze équations de chaque type :

R.		
	- 4,2 + 0,20 δs	- 5,6
	+ 2,0 + 0,00	+ 2,0
	+ 0,9 - 0,06	+ 1,3
$u = 23^\circ$, T = 391 ans.	- 0,3 - 0,03	- 0,1
$\delta\varepsilon = + 28''$,00 - 0,666 δs	+ 1,4 + 0,02	+ 1,3
$\delta n = - 44''$,93 - 1,155 δs	0,0 + 0,06	- 0,4
A = + 30'',07 + 0,128 δs	- 2,6 + 0,05	- 2,9
B = + 13'',42 + 1,052 δs	- 1,0 + 0,00	- 1,0
	+ 2,7 - 0,05	+ 3,0
	+ 1,2 - 0,06	+ 1,6
	- 1,1 + 0,04	- 1,3

R.		
	- 1,3 + 0,49 δs	- 4,2
	+ 2,7 + 0,03	+ 1,9
	+ 0,2 - 0,13	+ 1,0
$u = 33^\circ$, T = 273 ans.	- 1,3 - 0,08	- 0,8
$\delta\varepsilon = + 24''$,24 - 0,240 δs	+ 1,3 + 0,04	+ 1,1
$\delta n = - 26''$,87 - 1,179 δs	+ 1,0 + 0,13	+ 0,2
A = + 14'',50 + 0,136 δs	- 1,3 + 0,10	- 1,9
B = + 9'',19 + 0,706 δs	- 0,6 - 0,01	- 0,5
	+ 1,5 - 0,13	+ 2,3
	- 0,4 - 0,13	+ 0,4
	+ 0,1 + 0,11	- 0,6

	R.	
	- 5,7 - 1,14 δs	- 1,1
	- 6,2 - 0,28	+ 4,5
	- 0,2 - 0,17	+ 0,8
$u = 43$. $T = 209$ ans.....	- 3,4 - 0,20	- 2,2
$\dot{\epsilon}z = - 21'.06 - 0.041 \dot{\epsilon}z$	- 0,2 - 0,04	0,0
$\dot{\epsilon}n = - 80'.57 - 1.266 \dot{\epsilon}z$	- 1,8 - 0,12	+ 1,1
$A = - 11'.02 - 0.199 \dot{\epsilon}z$	+ 0,2 - 0,10	- 0,4
$B = - 7'.81 - 0.540 \dot{\epsilon}z$	- 0,6 - 0,07	- 0,2
	- 0,6 - 0,24	+ 0,8
	- 2,8 - 0,20	- 1,6
	- 2,4 - 0,25	+ 0,9

	R.	
	- 13,8 - 1,81 δs	+ 2,9
	- 15,4 - 0,84	+ 10,3
	- 3,2 - 0,04	+ 3,0
$u = 53$. $T = 170$ ans.....	- 6,2 - 0,34	- 4,2
$\dot{\epsilon}z = - 22'.08 - 0.009 \dot{\epsilon}z$	- 4,9 - 0,34	- 2,8
$\dot{\epsilon}n = - 18'.32 - 1.530 \dot{\epsilon}z$	- 1,5 - 0,17	- 0,5
$A = - 11'.46 - 0.271 \dot{\epsilon}z$	- 0,7 - 0,52	+ 2,4
$B = - 4'.62 - 0.065 \dot{\epsilon}z$	- 1,5 - 0,17	- 0,5
	- 3,1 - 0,29	- 1,4
	- 4,4 - 0,15	- 3,5
	- 6,2 - 0,39	- 3,9

La dernière colonne contient les valeurs des résidus, quand on fait $\dot{\epsilon}z = - 6'.0$, ce qui ramène l'accélération séculaire à sa valeur théorique.

On voit immédiatement que le quatrième système ($T = 170$ ans) laisse peser sur les observations récentes des erreurs trop fortes pour qu'on puisse l'admettre. Cette conclusion partielle présente un certain intérêt, et nous nous y arrêterons un moment. Laplace avait remarqué (*Mécanique céleste*, Livre VII) que le moyen mouvement de la Lune déterminé par les observations antérieures à Bradley était plus grand que celui que l'on trouvait avec les observations postérieures; c'est le contraire qui aurait dû avoir lieu en vertu de l'accélération séculaire. Laplace en avait conclu déjà à l'existence d'une ou de plusieurs inégalités à longues périodes, et il avait signalé comme pouvant être sensible celle qui a pour argument $\pi - 2\varrho - 3\pi - \pi$ et ϱ désignent les longitudes du périhélie et du nœud lunaire, π celle du périhélie solaire; γ ; le

coefficient du temps dans cet argument est en effet très petit, et la période de l'inégalité atteint 184 ans. Jugeant très difficile le calcul théorique du coefficient, Laplace l'avait déterminé empiriquement, de façon à faire disparaître la différence signalée plus haut entre les deux déterminations de n , et il l'avait trouvé d'environ $15''$. Hansen affirme que cette inégalité est insensible, mais il n'a pas publié ses calculs, non plus que Delaunay, qui dit cependant (*Comptes rendus*, t. XLVII, p. 813; 1858) qu'il a calculé l'inégalité en question par sa méthode, en tenant compte du carré et du cube de la force perturbatrice, et qu'il a trouvé le coefficient inférieur à $0'',001$, donc absolument insensible. La période de notre quatrième système différant peu de celle de l'inégalité signalée par Laplace, on voit que la faiblesse de cette inégalité se trouve confirmée.

Nous allons calculer maintenant, d'après nos trois premiers systèmes, l'erreur des Tables de Hansen, en 1889,0; cette erreur aura pour expression

$$\delta z + 1,89 \delta n + 3,57 \delta s + A \sin(5,56 u) + B \cos(5,56 u) - V_2,$$

V_2 étant d'ailleurs égal à $-21'',4$. On trouve ainsi les erreurs suivantes :

	K.	
$u = 23^\circ$	$-20,1 + 0,17 \delta s$	$-21,1$
$u = 33^\circ$	$-15,1 + 0,38$	$-17,4$
$u = 43^\circ$	$-7,8 + 0,69$	$-11,9$

La correction moyenne observée est $u = -17'',4$, d'après M. Stone. On voit que, si l'on suppose $\delta s = 0$, pour reproduire la correction précédente, il faudrait attribuer à u une valeur un peu plus petite que 33° , et par suite à T une valeur un peu plus grande que 273 ans. Avec l'accélération théorique, $\delta s = -6''$, les résidus deviennent $-21'',1$; $-17'',4$ et $-11'',9$; le second système représente donc exactement la correction observée en 1889; nous avons dit que ce second système est à peu près celui de M. Newcomb.

Nous allons donner un Tableau d'ensemble pour montrer comment les observations sont représentées : de 1620 à 1850, nous empruntons de 10 en 10 ans les corrections des Tables de la Lune de Hansen, affectées du terme empirique V_2 , à M. Neison (*Mémoires de la Société Royale astronomique de Londres*, t. XLVIII, p. 369; 1884), qui les a lui-même interpolées d'après

les résultats de M. Newcomb. Pour les années 1850-1888, avons tiré ces corrections, de 2 en 2 ans, des données pu chaque année par M. Stone, en groupant chaque correction la précédente et la suivante pour atténuer les erreurs. Les not C et C' désignent les corrections calculées par la formule

$$-V_2 + \delta\varepsilon + (t - 1700)\delta n + (t - 1700)^2 \delta s + A \sin[1^\circ, 32(t - 1750)] + B \cos[1^\circ, 32(t - 1750)],$$

où $\delta\varepsilon$, δn , A et B ont les valeurs qui correspondent à u : (p. 491), et où l'on donne à δs les valeurs extrêmes 0 et — on a écrit $1^\circ, 32$ au lieu de $\frac{33^\circ}{25}$. O désigne la correction obse enfin, on a formé la différence O — C', qui donne une idée représentation; on a omis, pour abrégér, la colonne O — C.

	c.	o.	c.	o - c.
1620.....	+50	+53	+46	+ 7
30.....	+48	+48	+46	+ 2
40.....	+45	+43	+44	- 1
50.....	+42	+39	+42	- 3
60.....	+38	+36	+39	- 3
70.....	+34	+33	+35	- 2
80.....	+30	+30	+30	0
1690.....	+24	+26	+25	+ 1
1700.....	+20	+21	+20	+ 1
10.....	+15	+15	+15	0
20.....	+11	+ 9	+11	- 2
30.....	+ 7	+ 5	+ 6	- 1
40.....	+ 1	+ 2	+ 1	+ 1
50.....	+ 1	0	0	0
60.....	0	0	- 1	+ 1
70.....	- 1	0	- 2	+ 2
80.....	- 2	0	- 2	+ 2
1790.....	- 1	0	- 1	+ 1
1800.....	0	0	0	0
10.....	0	0	+ 1	- 1
20.....	+ 1	0	+ 2	- 2
30.....	+ 1	0	+ 2	- 2
40.....	+ 1	0	+ 2	- 2
1850.....	0	0	+ 1	- 1
50.....	- 0,1	+ 0,7	+ 0,7	0,0
52.....	- 0,5	+ 1,3	+ 0,2	+1,1
1854.....	- 1,0	+ 1,4	- 0,3	-1,7

	c.	o.	c.	o-c.
1836.....	- 1,4	+ 1,2	- 0,9	+2,1
58.....	- 1,9	+ 1,9	- 1,4	+3,3
60.....	- 2,3	+ 2,3	- 1,9	+4,2
62.....	- 2,9	+ 2,2	- 2,6	+4,8
64.....	- 3,5	+ 0,1	- 3,3	+3,4
66.....	- 4,2	- 2,3	- 4,1	+1,8
68.....	- 4,9	- 4,0	- 5,0	+1,0
70.....	- 5,7	- 5,4	- 5,9	+0,5
72.....	- 6,5	- 7,5	- 6,9	-0,6
74.....	- 7,4	- 9,1	- 8,0	-1,1
76.....	- 8,3	- 9,6	- 9,1	-0,5
78.....	- 9,3	- 9,0	-10,2	+1,2
80.....	-10,3	-10,3	-11,4	+1,1
82.....	-11,3	-12,6	-12,7	+0,1
84.....	-12,3	-14,8	-14,0	-0,8
86.....	-13,4	-15,4	-15,4	0,0
1888.....	-14,6	-16,9	-16,8	-0,1

La représentation est satisfaisante en général; toutefois, il subsiste des indices d'une autre inégalité, à période moindre et ayant un coefficient de 2" à 3".

6. On voit que, jusqu'ici, on a eu recours seulement aux observations modernes pour déterminer les inconnues $\delta\epsilon$, δn , A et B au moyen de δs et des quantités connues. Pour trouver δs , il faut s'adresser aux deux groupes d'observations anciennes. Ces deux groupes ont fourni à M. Newcomb (*loc. cit.*, p. 264) les équations suivantes :

Éclipses de Ptolémée.

Dates.	$\delta\epsilon$.	δn .	δs .		Poids.
-687.....	0,017	-0,40	+9,55	= -11	3
-381.....	0,017	-0,35	+7,28	= -27	2
-189.....	0,017	-0,31	+5,95	= -20	4
+134.....	0,017	-0,26	+4,11	= -16	3

Éclipses des Arabes.

+830.....	0,017	-0,14	+1,20	= - 4,4	8
+927.....	0,017	-0,13	+0,99	= - 1,1	16
+986.....	0,017	-0,12	+0,84	= - 4,8	30

On a négligé les termes $A \sin zt$ et $B \cos zt$, comme on pouvait le faire; les seconds membres exprimaient d'abord des minutes d'arc : on les a ramenés à exprimer des secondes, en divisant les deux membres de chaque équation par 60. Il faut maintenant substituer

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= + 24'', 24 - 0, 24 \delta s, \\ \delta n &= - 26'', 87 - 1, 18 \delta s,\end{aligned}$$

ce qui donne, pour les deux groupes,

	Ptolémée.	Arabes.
(1)	10,02 $\delta s = - 22,$	1,37 $\delta s = - 8,6,$
	7,69 $\delta s = - 37,$	1,14 $\delta s = - 5,0,$
	6,32 $\delta s = - 29,$	0,98 $\delta s = - 8,4.$
	4,42 $\delta s = - 23,$	

Chacune des sept équations donne une valeur négative de δs ; le coefficient $s_0 = 12'', 17$ de Hansen est donc certainement trop fort. En ayant égard aux poids, les éclipses de Ptolémée donnent, à elles seules,

$$\delta s = - 3'', 87; \quad s = s_0 + \delta s = 8'', 3.$$

Les éclipses des Arabes donnent de leur côté

$$\delta s = - 6'', 84; \quad s = 5'', 3.$$

On tire de l'ensemble

$$\delta s = - 5'', 1; \quad s = 7'', 1.$$

M. Newcomb a trouvé pour l'ensemble $s = 8'', 8$; nous arrivons à $7'', 1$, valeur très voisine du chiffre théorique; la différence tient au mode de calcul employé. M. Newcomb a déterminé δs , δn et $\delta\varepsilon$ par toutes les observations anciennes et modernes, en négligeant A et B; il n'a retenu que la valeur de δs , et a calculé ensuite les valeurs de $\delta\varepsilon$, δn , A et B qui satisfont le mieux à l'ensemble des observations modernes.

La valeur $\delta s = - 5'', 1$, étant substituée dans les équations (1), laisse dans les premiers membres les résidus suivants :

$$\begin{array}{rcl} - 31', & + 1', 6, \\ - 2', & - 0', 8, \\ - 3', & + 3', 4. \\ 0, & \end{array}$$

Il y a donc un résidu très fort et tout à fait anormal. M. Neison a expliqué (*Monthly Notices*, t. XXXIX, 1878, p. 73) que cela tient à ce qu'un poids trop grand a été assigné à l'une des trois éclipses qui ont servi à obtenir l'erreur des Tables pour — 687, et que cette éclipse est discordante. Si l'on supprimait la première des équations (1), on trouverait $\delta s = -5''{,}87$, $s = 6''{,}3$, c'est-à-dire l'accélération théorique.

On voit ainsi qu'il est possible de représenter les éclipses de Ptolémée et celles des Arabes par l'accélération théorique; on n'aurait donc pas besoin d'invoquer l'influence du frottement des marées pour produire un ralentissement progressif dans la rotation de la Terre, ayant pour cause une accélération apparente du mouvement de la Lune. On éviterait de la sorte le double inconvénient de toucher à la base fondamentale de la mesure du temps, et d'introduire dans la théorie de la Lune un nombre empirique qui, ne pouvant être déterminé par le calcul, empêcherait d'arriver à des résultats définitifs, alors même que toutes les autres difficultés auraient été surmontées.

7. Cependant il subsiste une grave objection contre cette manière de voir : les éclipses chronologiques, qui sont bien représentées par l'accélération de $12''$, le sont beaucoup plus mal par l'accélération théorique de $6''$. Les principales de ces éclipses sont celles de Thalès, de Larissa, d'Agathocle et de Stiklastad.

Éclipse de Stiklastad. — Elle se produisit pendant un combat que les guerriers chrétiens, sous la conduite du roi de Norwège, Olaf le Saint, livraient à une armée de paysans païens révoltés. Voici ce qu'en rapporte Snorre Sturlason : « Le temps était beau et le Soleil brillait; mais, quand la bataille eut commencé, une teinte rougeâtre se répandit sur le ciel et sur le Soleil, et, avant que le combat fût terminé, l'obscurité devint aussi grande que pendant la nuit. » Hansten, qui a publié un Mémoire sur cette éclipse (*Astron. Nachr.* de 1849), a déterminé avec certitude la position du champ de bataille où elle a été vue, et il a fixé la date de l'éclipse au 31 août 1030. Or, dans une Note récente (*Astron. Nachr.*, nov. 1888), M. Hjort dit que les sources historiques, laissées de côté par Hansten, permettent d'établir que la bataille a

eu lieu le 29 juillet; c'est ce qui résulte de l'Ouvrage de M. Maurer (*Die Bekehrung des norwegischen Stammes zum Christenthume*, t. II, p. 531-540). S'il en est réellement ainsi, l'éclipse aura eu lieu plus d'un mois après la bataille, on ne sait plus rien sur le lieu d'observation, et l'éclipse doit être rayée de la liste des éclipses historiques.

Éclipse de Larissa. — On lit dans Xénophon : « Lorsque les Perses succédèrent aux Mèdes dans l'empire, le roi des Perses assiégeant cette ville (Larissa) ne pouvait la prendre par aucun moyen; mais un nuage en couvrant le Soleil produisit une telle obscurité que les hommes sortirent de la ville, et c'est ainsi qu'elle fut prise. » D'après les détails que donne Xénophon, il paraît certain que Larissa n'est autre que la moderne Nimrod. Mais le phénomène dont il s'agit est-il bien une éclipse totale de Soleil? Le texte dit que c'est un nuage (*νεφέλη*) qui couvrit le Soleil. M. Airy n'hésite pas en faveur de l'éclipse totale, et en cherchant tous les phénomènes de ce genre qui ont eu lieu dans un intervalle de 40 ans comprenant la date probable de la prise de Larissa, il trouve qu'il y eut, à Nimrod même, une éclipse totale de Soleil le 19 mai de l'année 557 avant Jésus-Christ. M. Newcomb se laisse convaincre moins facilement, et il fait remarquer judicieusement que, parce que l'on a trouvé dans un intervalle de 40 années une éclipse totale observable à Larissa, il n'en résulte pas nécessairement l'identité de ce phénomène avec celui qui a fait évacuer la ville.

Éclipse d'Agathocle. — Agathocle, étant bloqué par les Carthaginois dans le port de Syracuse, profita d'un relâchement momentané dans le blocus pour s'échapper du port et se diriger vers la côte d'Afrique, où il parvint au bout de six jours. Pendant qu'il naviguait ainsi, le second jour, il fut témoin d'une éclipse totale de Soleil. Voici comment Diodore de Sicile rapporte le fait : « Comme Agathocle était déjà enveloppé par l'ennemi, la nuit étant survenue, il s'échappa contre toute espérance. Le jour suivant, il se produisit une telle éclipse de Soleil que l'on pouvait croire qu'il était tout à fait nuit, car les étoiles apparaissaient de toutes parts. De sorte que les soldats d'Agathocle, persuadés que les Dieux leur présageaient quelque malheur, étaient dans la plus vive inquiétude sur l'avenir. »

Ici, pas de doute possible; avec l'apparition des étoiles, c'est bien une éclipse totale de Soleil. Malheureusement c'est la position du lieu d'observation qui n'est pas exactement connue, car on ne sait pas si Agathocle est allé directement vers l'Afrique, ou s'il a fait le tour de la Sicile en prenant le nord de cette île. On paraît être d'accord sur la date de l'éclipse, que l'on fixe au 15 août de l'année 510 avant Jésus-Christ; mais, par une singulière fatalité, les limites admissibles dans la position d'Agathocle correspondent presque exactement aux limites entre lesquelles on peut faire varier l'accélération séculaire, de sorte que cette éclipse si bien décrite ne permet pas d'assigner à cette accélération une valeur définitive.

Éclipse de Thalès. — On lit dans Hérodote : « Après cela, les Lydiens et les Mèdes furent en guerre pendant cinq années consécutives; dans cette guerre, souvent les Mèdes furent vainqueurs des Lydiens, souvent aussi les Lydiens vainquirent les Mèdes; une fois même, ils se battirent la nuit. Or, comme la guerre se poursuivait avec des chances égales des deux côtés, la sixième année, un jour que les armées étaient aux prises, il arriva qu'au milieu du combat le jour se changea subitement en nuit; Thalès de Milet avait prédit ce phénomène aux Ioniens, en indiquant précisément cette même année où il eut lieu en effet. Les Lydiens et les Mèdes, voyant que la nuit succédait subitement au jour, mirent fin au combat et ne s'occupèrent plus que du soin d'établir la paix entre eux. »

Il paraît probable que le phénomène signalé par Hérodote est une éclipse totale de Soleil; mais le lieu où il a été vu n'est pas indiqué; on sait seulement qu'il doit être situé en Asie Mineure, ou au moins très près de cette contrée. La date du phénomène n'est pas mieux fixée : Pline la met à la quatrième année de la 48^e olympiade, Clément d'Alexandrie vers la 50^e olympiade.

Les divers auteurs qui en ont parlé depuis font varier la date depuis le 1^{er} octobre 583 jusqu'au 3 février 626 avant J.-C. Pour Baily et Oltmans, elle aurait eu lieu le 30 septembre de l'an 610; pour M. Airy, le 28 mai de l'an 585; cette dernière date est d'accord avec celle de Pline.

M. Newcomb trouve que trois points seulement sont nettement établis :

Qu'une bataille engagée entre les Lydiens et les Mèdes a été terminée par une obscurité subite;

Que, le 28 mai de l'an 585, l'ombre de la Lune a passé sur l'Asie Mineure, ainsi que cela résulte des calculs fondés sur les Tables;

Enfin que Thalès a prédit une éclipse.

Mais, que ces trois phénomènes se rapportent à un seul et même événement, c'est ce que M. Newcomb ne regarde pas comme démontré.

Il semble en somme que les récits des anciens historiens sont trop vagues pour qu'on puisse s'en servir afin d'éclairer la théorie de la Lune; c'est plutôt à la théorie de donner des indications sur les dates des phénomènes et les lieux où ils ont été observés.

Cependant, il faudrait avoir égard aussi à un Mémoire important de M. Ginzcl, *Astronomische Untersuchungen über Finsternisse* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Vienne, 1883 et 1884).

M. Ginzcl, après de longues et patientes recherches, a pu réunir des documents concernant 45 éclipses totales de Soleil, échelonnées depuis l'an 346 de notre ère jusqu'à l'année 1415, et dont 2 seulement avaient été discutées déjà par M. Celoria; il a trouvé surtout de précieux matériaux dans les chroniques des monastères du moyen âge. Il n'est pas question d'heures exactes pour les phases; on se borne à dire qu'en tel lieu le Soleil a été éclipsé, et dans un assez grand nombre de cas, qu'on a vu apparaître les étoiles. M. Ginzcl a conclu de sa discussion que l'accélération séculaire adoptée par Hansen devait être un peu diminuée, et ramenée seulement à $11''{,}47$. Il serait très important d'examiner si ces éclipses, principalement les 17 comprises entre les années 733 et 1267, dont l'époque moyenne diffère peu de celle qui correspond aux éclipses arabes, peuvent être représentées avec une accélération de $6''$ à $7''$, et en appliquant au moyen mouvement de Hansen la correction que nous avons indiquée. Mais je pense qu'il faudrait faire un choix dans les documents: M. Ginzcl a pour telle éclipse totale, celle de 1133 par exemple, 78 récits de l'ensemble desquels il déduit une correction moyenne de la zone de centralité; il vaudrait peut-être mieux garder ceux des récits qui sont très nets, qui affirment qu'on a vu les étoiles, les discuter séparément et laisser les autres de côté. Il s'agirait de voir si, avec

les corrections indiquées pour δn et δs , l'éclipse reste totale dans les lieux où l'on a dit nettement qu'elle l'était.

Il nous faut parler encore des recherches de M. Schjellerup sur les anciennes éclipses chinoises (voir *Copernicus*, t. I, p. 41-47). Mais les données sont ici très peu précises. L'auteur parle en effet de 36 éclipses de Soleil mentionnées dans les *Annales de la Chine*, et il en choisit 3 qui sont mentionnées comme ayant été totales, dans les années 708, 600 et 548 avant J.-C. Les mois dans lesquels on les a observées ont dû être corrigés, pour les deux premières. Il arrive en outre que ces éclipses ne sont pas très bien représentées par l'accélération de Hansen; il est vrai qu'elles le sont encore plus mal avec celle de MM. Adams et Delaunay, car il faudrait, pour avoir des éclipses totales, changer de 30° la longitude du lieu où l'on suppose qu'elles ont été observées. Le résultat n'est guère meilleur en adoptant, avec M. Airy, la correction $\delta n = -36''$. Il ne semble pas qu'on puisse en tirer une conclusion assurée pour ou contre l'accélération théorique.

8. Il faut prendre un parti. Nous pensons que l'on doit, sans plus se préoccuper des observations anciennes, chercher à représenter les observations modernes en employant l'accélération théorique. Les doutes qui peuvent rester encore sur ce point ne peuvent pas avoir d'influence trop grande, encore pendant un siècle. Le plus pressant serait de découvrir la cause de l'inégalité à longue période

$$R = A \sin zt + B \cos zt,$$

car, aussi longtemps qu'on n'aura pas les expressions théoriques de A, B et z, la détermination du moyen mouvement manquera de précision, et il sera impossible de construire des Tables lunaires ayant quelques chances de durée.

C'est à l'action des planètes qu'il est naturel de penser pour lever cette difficulté embarrassante. Très nombreuses sont les combinaisons linéaires que l'on peut faire avec les longitudes moyennes de la Lune, de la Terre et d'une planète, et celles des périhélies et des nœuds, de manière à obtenir pour le temps un coefficient très petit dans l'argument résultant. Existe-t-il, en dehors de V_1 (et d'une petite inégalité provenant de Jupiter,

découverte par M. Neison et calculée par M. Hill), une ou plusieurs inégalités ayant des coefficients sensibles? Telle est la question mise au concours depuis plusieurs années par l'Académie des Sciences, pour le prix Damoiseau, et à laquelle on n'a pas encore fait de réponse satisfaisante.

Enfin, n'y a-t-il rien à reprendre dans le calcul de V_4 ? Nous croyons devoir citer à ce sujet le passage suivant d'une Note de M. Newcomb, *On the mean motion of the Moon* (*American Journal of Science and Arts*, t. XIV, 1877) :

« Bien que Hansen, Delaunay et moi-même, nous soyons arrivés au même résultat pour la valeur du terme en $g + 16g' - 18g''$, je ne peux pas dire avec confiance que le résultat soit complet. Dans les trois calculs, on a négligé les termes du second ordre dus à l'attraction mutuelle de la Terre et de Vénus. Il est évident que, par suite de cette attraction mutuelle, l'action directe de Vénus sur la Lune est différente de ce qu'elle serait si les deux planètes se mouvaient dans des orbites elliptiques. Il peut arriver que cette différence soit sensible dans des termes d'ordre aussi élevé que ceux dont il s'agit. J'ai calculé actuellement les termes additionnels de $\frac{1}{D^2}$ (D désignant la distance de Vénus à la Terre) qui proviennent de la source indiquée et dépendent de $8g'' - 13g'$. Le résultat est que plusieurs de ces termes sont parfaitement comparables avec les parties elliptiques correspondantes dépendant du même argument; mais ces coefficients se détruisent mutuellement quand on en fait la somme. J'ai toujours regardé mes calculs sur ce sujet comme incomplets; aussi ne les ai-je jamais publiés.... » C'est probablement cette considération qui a engagé M. Newcomb à prendre la période du terme empirique R égale à celle de V_4 . La correction totale apportée par M. Newcomb aux Tables de Hansen est

$$\Delta' = -1'',14 - 29'',17t - 3'',86t^2 - V_2 - 0'',09 \sin A - 15'',49 \cos A$$

où

$$A = 18V - 16E - g,$$

V et E désignant les longitudes moyennes de Vénus et de la Terre g l'anomalie moyenne de la Lune, et t le temps compté en siècle: à partir de 1800. La formule empirique à laquelle nous somme:

ivés de notre côté est

$$\begin{aligned} \Delta' = & + 24'', 24 - 0, 240 \delta s - (26'', 87 + 1, 179 \delta s) t' + \delta s. t'^2 - V_2 \\ & + (14'', 50 + 0, 136 \delta s) \sin(132^\circ \times t') \\ & + (9'', 19 + 0, 706 \delta s) \cos(132^\circ \times t'), \end{aligned}$$

à t' et t'' désignent des nombres de siècles comptés respectivement à partir de 1700 et de 1750; on a (1)

$$\delta s = -6'', 0, \quad t' = t + 1, \quad t'' = t + \frac{1}{2}.$$

et la correction devient

$$\begin{aligned} & + 25'', 68 - 19'', 80(t+1) - 6'', 00(t^2 + 2t + 1) + 13'', 67 \sin(132^\circ \times t + 66^\circ) \\ & + 4'', 95 \cos(132^\circ \times t + 66^\circ) - V_2 \end{aligned}$$

ou bien

$$\Delta' = -0'', 12 - 31'', 80t - 6'', 00t^2 - V_2 + 14'', 54 \sin(132^\circ \times t + 85^\circ 54');$$

est maintenant compté en siècles à partir de 1800.

La théorie de la Lune se trouve arrêtée par la difficulté que nous venons de développer; déjà, à l'époque de Clairaut, la gravitation universelle paraissait impuissante à expliquer le mouvement du périhélie; elle triomphera encore du nouvel obstacle qui se présente aujourd'hui; mais il reste à faire une belle découverte!

OBSERVATIONS DE LA COMÈTE PÉRIODIQUE WOLF,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial de 0^m, 26 d'ouverture);

PAR M. L. FABRY.

N.	T. m. Marseille.				$\Delta R.$	$\Delta \mathcal{U}.$	N. de c.	M. app.			$\mathcal{U}.$ app.	log t. p.	★	
	h	m	s	ms				h	m	s				
7.	13.31.	28	-6.	0,62	+ 2.27,0	5.5	1.	7.	28,27	1,651 n	63.21.	1,6	0,637 n	1
11.	14.11.	4	+0.	48,29	- 4.16,3	5.5	1.	18.	9,33	1,609 n	62.51.	1,0	0,577 n	2
16.	13.35.	57	+1.	55,05	+ 2.36,8	5.5	1.	31.	28,36	1,642 n	62.19.	55,2	0,608 n	3
17.	13.51.	58	+4.	38,51	- 2.44,4	5.5	1.	34.	11,85	1,625 n	62.14.	33,8	0,585 n	4
4.	13.58.	28	+1.	54,87	+ 0.39,1	2.2	2.	23.	57,91	1,591 n	61.36.	21,4	0,539 n	5
0.	14.11.	43	+5.	13,56	- 1. 1,0	3.3	2.	39.	2,99	1,557 n	61.51.	39,9	0,516 n	6
7.	14.58.	49	-1.	38,64	- 3.14,3	5.5	2.	57.	28,38	1,438 n	62.29.	55,2	0,459 n	7

(1) Dans le cas où l'on voudrait maintenir dans la comparaison des observations modernes l'accélération de Hansen, ce qui revient à faire $\delta s = 0$, il faudrait, pour représenter l'erreur tabulaire en 1889, admettre une valeur de u comprise entre 23° et 33°, voisine de 28°, et pour T une valeur peu éloignée de 320^{mm}; pour fixer cette valeur de T, un nouveau calcul serait nécessaire.

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1891,0. h m s	Réd. au j. s	Q moy. 1891,0.	Réd. au j.	Autorités.
1.	6	1.13.28,38	+0,51	63.18.32,9	+ 1,7	1657 Paris $\frac{1}{2}$ (II+II)
2.	9	1.17.20,41	+0,63	62.55.16,3	+ 1,0	307-8 Weisse I ^b .
3.	8	1.29.32,58	+0,73	62.17.18,2	+ 0,2	1962 Paris $\frac{1}{2}$ (II+I)
4.	»	»	+0,76	»	0,0	Id.
5.	9	2.21. 1,95	+1,09	61.35.45,5	- 3,2	446 Weisse I ^b .
6.	9	2.33.48,20	+1,23	61.52.45,2	- 4,3	759 Weisse II. ^a .
7.	8	2.59. 5,69	+1,33	62.33.14,9	- 5,4	1368 Weisse I ^b .

Aspect de la comète.

Juillet 7. — La comète est une nébulosité faible (grandeur 12, ~~5~~), sans noyau, diffuse sur les bords; son diamètre est de 4 ~~0~~.

Août 17. — La comète est une nébulosité assez brillante (11^e grandeur), de 40" de diamètre, très diffuse sur les bords.

ÉPHÉMÉRIDE DE RECHERCHE POUR LA PLANÈTE (300) GERALDINE.
EN 1891.

PAR J. CONIEL.

La planète (300), découverte le 3 octobre 1890, par M. Charlois, à Nice, fut observée en tout 12 fois, à partir de cette date jusqu'au 13 décembre. Cet astre ne semble pas avoir été observé ailleurs qu'à Nice et à Vienne.

M. Berberich a publié, dans le n^o 3022 des *Astronomische Nachrichten*, un premier système d'éléments déduit des observations des 3 et 22 octobre, 1 et 17 novembre. En nous aidant de ces éléments, nous avons formé, des douze observations qui nous ont été communiquées par M. Charlois, cinq lieux normaux de la manière suivante : octobre 4,0 (2 obs.), octobre 22,0 (3 obs.), novembre 15,5 (3 obs.), décembre 7,5 (2 obs.) et décembre 13,0 (2 obs.).

Par la variation des distances géocentriques, du 4 octobre et

Le 13 décembre, nous avons obtenu les trois systèmes d'éléments suivants :

Époque : 1890 octobre 4,0, Temps moyen de Paris.

	I.	II.	III.	
.....	22. 5. 59.6	32. 52. 46.2	40. 57. 54.6	} Équin. et éclip. moy. 1890,0.
.....	342. 45. 1,8	331. 0. 36,7	322. 3. 57,9	
.....	42. 22. 51,3	42. 20. 35,0	42. 18. 1,3	
.....	0. 46. 51,4	0. 46. 53,5	0. 46. 56,1	
.....	2. 16. 22,8	2. 25. 30,4	2. 38. 17,4	
.....	615 ⁹ . 5751	617 ⁹ . 4432	618 ⁹ . 7947	
g a.....	0,5071504	0,5062729	0,5056399	

En satisfaisant rigoureusement aux lieux extrêmes, ces divers systèmes d'éléments laissent subsister, dans les lieux normaux et intermédiaires, les écarts suivants dans le sens obs. — calc.

	I.		II.		III.	
	$\Delta\lambda.$	$\Delta\beta.$	$\Delta\lambda.$	$\Delta\beta.$	$\Delta\lambda.$	$\Delta\beta.$
Oct. 22,0.....	+0,3	+1,1	+0,3	+0,4	+3,6	-0,2
Nov. 13,3.....	+5,3	+1,1	+2,7	+0,4	-1,9	-0,2
Déc. 7,3.....	-0,5	+1,5	-2,8	+1,3	-6,0	+1,1

De ces trois groupes d'éléments, le groupe II est celui qui représente le mieux les observations et doit être considéré comme le système d'éléments le plus probable. Les systèmes d'éléments I et III donnent les limites du mouvement moyen diurne. Cependant, d'après l'examen du Tableau des écarts, il semblerait que la limite inférieure de μ pourrait être un peu plus petite que 615,57. En tous cas, l'incertitude des éléments est peu considérable, et il suffira certainement de chercher la planète à $\pm 5^m$ de l' R fournie par l'éphéméride la plus probable que nous publions. Cette éphéméride approchée est déduite du système d'éléments II.

12 h. T. moy. de Paris.	R 1891,0.	(\odot) 1891,0.	log Δ .	T. d'aberr.
1891.	h m s			m s
Nov. 20.....	5. 50. 54	+24. 5,2	0,3710	19. 32
21.....	5. 50. 15	24. 5,3	0,3698	
22.....	5. 49. 35	24. 5,4	0,3686	19. 25
23.....	5. 48. 55	24. 5,5	0,3675	
24.....	5. 48. 13	24. 5,6	0,3664	19. 19

12 h. T. moy. de Paris.	R 1891,0.	(D) 1891,0.	log Δ.	T. d'abr
1891.	h m s	° ' "		m
Nov. 25	5.47.30	+24. 5,7	0,3654	
26	5.46.46	24. 5,7	0,3645	19.14
27	5.46. 1	24. 5,7	0,3636	
28	5.45.16	24. 5,7	0,3627	19. 9
29	5.44.29	24. 5,6	0,3619	
30	5.43.42	24. 5,5	0,3611	19. 5
Déc. 1	5.42.54	24. 5,4	0,3604	
2	5.42. 5	24. 5,3	0,3597	19. 2
3	5.41.15	24. 5,1	0,3591	
4	5.40.25	24. 5,0	0,3586	18.59
5	5.39.35	24. 4,8	0,3581	
6	5.38.44	24. 4,6	0,3576	18.56
7	5.37.52	24. 4,3	0,3572	
8	5.37. 0	24. 4,0	0,3569	18.54
9	5.36. 8	24. 3,7	0,3566	
10	5.35.16	24. 3,4	0,3564	18.53
11	5.34.23	24. 3,1	0,3563	
12	5.33.30	24. 2,7	0,3562	18.52
13	5.32.37	24. 2,3	0,3562	
14	5.31.43	24. 1,8	0,3562	18.52
15	5.30.50	24. 1,3	0,3563	
16	5.29.57	24. 0,8	0,3564	18.53
17	5.29. 5	24. 0,3	0,3566	
18	5.28.12	23.59,8	0,3569	18.54
19	5.27.19	23.59,3	0,3572	
20	5.26.27	23.58,7	0,3575	18.56
Déc. 21	5.25.35	23.58,1	0,3579	
22	5.24.43	23.57,5	0,3584	18.58
23	5.23.52	23.56,9	0,3590	
24	5.23. 1	23.56,2	0,3596	19. 1
25	5.22.11	23.55,6	0,3602	
26	5.21.22	23.54,9	0,3609	19. 5
27	5.20.33	23.54,2	0,3617	
28	5.19.44	23.53,5	0,3625	19. 9
29	5.18.57	23.52,8	0,3634	
30	5.18.10	+23.52,1	0,3643	19.14

Nous donnons en outre, dans le Tableau suivant, de huit jours pendant à une variation de 1^m en ascension droite; la première ces valeurs se rapporte à des R plus petites, la seconde correspond à des R plus grandes que celles fournies par l'éphéméride.

Novembre.		Décembre.			
20.	23.	6	14.	22.	30.
-0',39	-0',54	-0',70	-0',86	-1',05	-1',21
+0',29	+0',41	+0',58	+0',75	+0',93	+1',09

La grandeur d'opposition de la planète sera 13, 2.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

STRUVE (HERMANN). — VORLEUFIGE RESULTATE AUS DEN BEOBSACHTUNGEN DER SATURNSTRABANTEN. III. DIE LIBRATION VON HYPERION (*Astron. Nachr.*, n° 3060; septembre 1891).

Nous avons rendu compte d'un Mémoire et de deux Notes de M. H. Struve, contenant les résultats de ses mesures micrométriques des satellites de Saturne (voir *Bull.*, t. V, p. 351, et t. VII, p. 19 et 305). La Note que nous avons sous les yeux est consacrée à Hypérior.

On sait que la ligne des apsides de ce satellite fait une révolution dans le sens rétrograde en 18 ans, et que les conjonctions de Titan et d'Hypérior ont toujours lieu dans le voisinage de l'aposaturne d'Hypérior. Ce fait, constaté à peu près en même temps par M. A. Hall, M. Newcomb et M. Marth (*Monthly Notices*, t. XLIV, n° 9; 1884), a conduit M. Newcomb à expliquer le mouvement des apsides d'Hypérior par l'action perturbatrice de Titan, qui est très sensible à cause de la commensurabilité approximative des moyens mouvements, et qui doit aussi donner lieu à une libration, dont la période serait, d'après M. Newcomb, d'environ 512 jours (*Bull.*, t. II, p. 235). Les recherches théoriques de M. Tisserand (*Bull.*, t. III, p. 435) ont jeté un jour nouveau sur ce curieux problème; on se rappelle que M. Tisserand arrive à cette conclusion, que les phénomènes observés peuvent s'expliquer, dans leur ensemble et dans une première approximation, en admettant que l'excentricité propre de l'orbite d'Hypérior est nulle, ou du moins très petite, et ne considérant que l'excentricité apparente, voisine de 0,1, qui est produite par les perturbations. Après M. Tisserand, M. Ormond Stone et M. G.-W. Hill se sont occupés du même problème (voir *Bull.*, t. V, p. 347 et 446), et ont contribué à l'élucider.

M. H. Struve, à son tour, a discuté avec soin les observations d'Hy-

péron et de Titan qu'il a pu faire avec le grand réfracteur de Poulkova pendant les cinq apparitions de 1887, 1888, 1889, 1890 et 1891.

En désignant par l , l' les longitudes moyennes des deux satellites, par ω le péri saturne d'Hypériorion, et faisant

$$V = 4l - 3l' - \omega,$$

la théorie montre que l'angle V doit osciller autour de 180° ; cette libration est représentée par l'équation approximative

$$V = 180^\circ + A \sin \frac{360^\circ}{T} (t - t_0),$$

et, en prenant

$$A = 36^\circ, \quad T = 643 \text{ jours}, \quad t_0 = 1887 \text{ mars } 25,$$

M. Struve arrive aux résultats suivants :

Époques.	V calc.	V obs.	Obs. - Calc.
1887 MARS 13.....	176,5	177,3	+ 0,8
1888 MARS 21.....	166,1	170,9	+ 4,8
1889 MARS 13.....	204,9	201,1	- 3,8
1890 FÉVR. 26.....	149,3	146,1	- 3,2
1891 MARS 22.....	215,8	213,7	- 2,1

En partant des données fournies par les observations de Washington, on trouverait :

Époques.	V calc.	V obs.	Obs. - Calc.
1882 JANV. 2.....	187,2	191,8	+ 4,6
1884 JANV. 26.....	214,6	230,8	+ 16,2
1884 DÉC. 4.....	146,4	157,0	+ 10,6

La libration est donc certaine; mais il est clair que la formule par laquelle on a essayé de la représenter n'est encore qu'une première approximation. En tenant compte des observations de Lassell (1852-53), M. Struve rectifie d'abord la valeur de T , pour laquelle il trouve 641 jours au lieu de 643. Il corrige ensuite les longitudes moyennes l d'Hypériorion de la libration

$$\delta l = 9^\circ \sin 0^\circ, 562 (t - t_0)$$

(le quart de δV), et en les réduisant à la même époque avec le moyen mouvement adopté par M. A. Hall, il forme un tableau qui fait ressortir les écarts qui restent à expliquer. Ces écarts (ils ne dépassent guère $\pm 1^\circ$) montrent que l'expression de la libration doit comprendre au moins deux termes. C'est aussi à tort qu'on a négligé l'excentricité de l'orbite de

elle doit produire une oscillation à longue période, a tant pour la différence $\omega - \omega'$ des deux périodes saturniennes, et qui expliquerait leurs de V observées en 1884. En attendant que la théorie de ces perturbations soit complètement développée, il y a lieu de chercher à exprimer l'expression d'une manière empirique, par la discussion des observations.

R. R.

PUBLICATIONS OF THE CINCINNATI OBSERVATORY: n° 11. *Charts and micrometric measurements of nebulae, made in the years 1884, 1885 and 1886.*
J. G. Porter, Director.

Observations de 105 nébuleuses ou amas d'étoiles, compris entre l'équateur et le parallèle de -35° . Elles ont été faites avec un équatorial de 11 inches d'ouverture et ordinairement avec un micromètre filaire, orienté de manière à donner les différences d'ascension droite par passages et les différences de déclinaison par la vis.

Pour chaque étoile de comparaison on donne toutes les positions individuelles tirées de divers catalogues. Par contre, et cela paraît regrettable, on donne sans le moindre détail les différences définitives NÉB. — *, de sorte qu'on ne peut se faire aucune idée de la précision des observations.

Ce qui caractérise le travail de M. Porter, c'est que, pour les objets mesurés, il donne une carte des étoiles voisines sur une étendue carrée d'environ $30'$ sur $30'$.

G. B.

PICKERING (E.-C.). — QUARANTE-CINQUIÈME RAPPORT ANNUEL DU DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE D'HARVARD COLLEGE.

La dernière année, prenant fin le 31 octobre 1890, un nombre total de 9000 photographies a été obtenu (en réunissant les résultats de Cambridge et des stations du Pérou et de Californie). Le nombre total des plaques que possède aujourd'hui l'Observatoire de Cambridge est de 27000, représentant non seulement presque tout le ciel du pôle nord au pôle sud, mais encore les spectres des étoiles. Aussi M. Pickering se préoccupe de la conservation de ces précieux matériaux qu'un incendie pourrait détruire.

Équatorial de l'Est. — Les observations comprennent : 91 observations photométriques des satellites de Jupiter (en tout 451 depuis 1877); 67 observations de comètes, dont la moitié concerne la comète 1889 V et le compagnon; 381 estimations (par la méthode d'Argelanders) des

grandeurs de 17 étoiles circompolaires... Les observations, sauf celles des satellites de Jupiter, ont été faites par M. Wendell.

Cercle méridien. — On imprime le Catalogue de la zone (50° à 55°) dévolue à l'Observatoire de Cambridge, et la discussion des résultats avec les mouvements propres qui en résultent est achevée.

Les observations de la zone australe, de $-9^{\circ}50'$ à $-14^{\circ}10'$ de déclinaison, ont été continuées pendant l'année par le professeur Searle, assisté de M. Dunne, en tout 6955 observations.

Équatorial de l'Ouest. — L'équatorial de 6 pouces a été employé pour expérimenter la nouvelle méthode proposée par le professeur Michelson pour mesurer les étoiles doubles au moyen des images de diffraction. M. W.-M. Reed l'a aussi employé dans une étude sur les courbes de lumière d'étoiles variables à longue période.

Fondation Draper. — Pendant l'année, 1309 photographies ont été prises avec la lunette Bache à la station de Chosica (Pérou), se rapportant presque toutes à la région au sud du parallèle de -20° . Des cartes photographiques, avec 10^m de pose, montrent toutes les étoiles de la région jusqu'à 12^M ; d'autres cartes, avec 60^m de pose, montrent, pour la moitié de la même région, les étoiles jusqu'à 14^M . On a les spectres, avec une pose de 10^m , des étoiles de 6^M pour toute la région, et, pour la moitié, les spectres des étoiles de 8^M avec une pose de 60^m .

Un doublet photographique semblable à celui de la lunette Bache est installé, comme on sait, à Cambridge, grâce à la générosité de M^{me} Draper. Depuis le 27 septembre 1889, 2157 photographies ont été prises avec lui, au nord du parallèle de -20° , la durée de pose étant de 10^m . En plaçant sur l'objectif un prisme d'un petit angle, les spectres des étoiles faibles ont été obtenus jusqu'à 10^M . Même des étoiles rouges peuvent être photographiées de cette manière, et beaucoup d'objets à spectres remarquables peuvent maintenant être étudiés par la photographie. 29 spectres du type IV, de Secchi, ont été obtenus, dont 6 nouveaux. Il faut noter surtout une trentaine de spectres à raies brillantes se rapportant à la classe des étoiles naguère signalées par MM. Wolf et Rayet et caractéristiques pour les étoiles variables à longue période (*Bulletin*, t. VIII, p. 268 et 275). Le département de la Spectroscopie est dirigé par M^{me} Fleming, qui a découvert déjà nombre de spectres remarquables.

L'étude détaillée des spectres des étoiles brillantes avec la lunette de 11 pouces a été continuée. 815 photographies ont été obtenues pendant l'année passée d'à peu près toutes les belles étoiles visibles au-dessus de l'horizon de Cambridge, et la classification des spectres a été commencée. On sait que M^{lle} Maury a découvert le doublement périodique des raies de β Cocher, 78 photographies du spectre de cette étoile et 89 de celui de ζ Grande Ourse ont été prises, auxquelles il en faut ajouter 26

et 143 autres respectivement prises en attachant deux des grands prismes à l'équatorial de 15 pouces.

Fondation Boyden. — Les recherches comprises dans cette section sont dirigées par le professeur William H. Pickering. Beaucoup de temps a été employé à l'observation directe des teintes et des taches de Mars avec la lunette de 12 pouces de Cambridge. Plusieurs canaux ont été reconnus, mais un seulement a été nettement dédoublé. On a étudié les procédés d'agrandissement photographique des objets astronomiques. Des recherches fondées sur les observations de Cambridge et des autres stations ont eu en vue : la météorologie du globe, surtout au point de vue du choix des stations astronomiques; les principes fondamentaux de la photographie astronomique, la nébuleuse d'Orion, la meilleure forme de l'étalon de lumière, et des questions de photographie quantitative (Cf. *Bulletin*, t. VIII, p. 211, 214, 216, 218).

Le mont Wilson a été abandonné comme station et les instruments ont été démontés pour être envoyés à Cambridge et de là au Pérou. Après une étude des localités, les observations seront continuées à Arequipa, qui va remplacer Chosica.

Les observations d'étoiles australes avec le photomètre méridien touchent à leur fin.

Lunette photographique de Miss Bruce. — Les disques pour l'objectif ne sont pas encore arrivés; on a seulement le disque pour le prisme, qui paraît exempt de défauts.

Si l'on ajoute à tous les travaux mentionnés la publication de plusieurs gros volumes pendant l'année 1890, on ne peut qu'être confondu en présence de la masse des travaux accomplis sous l'habile direction de M. Edward C. Pickering, avec une rapidité, il faut ajouter, dont le nouveau monde paraît avoir seul le privilège.

Le Catalogue Draper de spectres d'étoiles forme la partie essentielle du Tome XXVII des *Annales de l'Observatoire d'Harvard*. Pour chaque étoile du Catalogue (Table I, p. 7-113), il y a, avec les nombres de référence du Catalogue Draper, ceux de la *Durchmusterung*, de l'*Harvard Photometry*, l'ascension droite et la déclinaison approchées, pour 1900; puis le nombre de plaques sur lesquelles les mesures ont été faites, la désignation du spectre au moyen d'une lettre de A à Q, dont la valeur est expliquée d'après les 8 types de spectres formant le frontispice du Volume; la grandeur photographique moyenne (déduite de l'intensité du spectre vers la raie G) et sa comparaison avec les grandeurs données par la *Durchmusterung*, le *Catalogue général de Gould*, l'*Harvard Photometry*. Le Catalogue Draper contient les spectres de 10351 étoiles au nord du parallèle de -25° , figurant sur 633 plaques et résultant des mesures de 28266 spectres. M^{me} M. Fleming a

une part prépondérante dans la préparation et la publication du Catalogue.

Une seconde Table (p. 113-374) contient le détail des mesures avec des remarques. Le Volume se termine par le tableau des spectres des principales étoiles formant les constellations.

M. Pickering réserve pour le Tome XXVI la discussion des résultats, et d'une manière générale l'exposé des travaux accomplis avec la lunette Bache.

WOLF (C.). — ASTRONOMIE ET GÉODÉSIE. Cours professé à la Sorbonne et rédigé par MM. Le Barbier et Bourguignon (Paris, Georges Carré, 1891. 414 pages in-8°).

L'éminent auteur a voulu composer un manuel résumant, sous une forme brève mais suffisante, l'ensemble des matières de la partie astronomique du programme de la licence, en évitant les calculs purement mathématiques et s'attachant à faire comprendre aux élèves le caractère des méthodes de calcul de l'Astronomie d'observation, ainsi que la différence profonde qui les sépare des méthodes rigoureuses du calcul mathématique.

Nous devons signaler aux lecteurs du *Bulletin* le cours de M. Wolf comme un modèle de clarté et d'élégante simplicité.

A propos de l'erreur d'excentricité (p. 46-54), M. Wolf fait la remarque nouvelle et intéressante qu'on peut éliminer *complètement* cette erreur dans la lecture d'un cercle gradué sur la couronne (comme le cercle mural de Gambey) par une disposition convenable des microscopes. Nombre d'autres remarques intéressantes se rencontrent dans les Chapitres concernant les instruments, les mouvements propres et les parallaxes des étoiles, les notions de Géodésie.

WOLF (D^r RUDOLF). — HANDBUCH DER ASTRONOMIE (2^e fascicule).

Ce 2^e fascicule, avec lequel commence le second Livre : *Introduction à l'Astronomie*, se distingue, comme le 1^{er} fascicule, par une grande abondance de remarques historiques et bibliographiques, concernant surtout l'Astronomie ancienne; pour l'époque moderne, il y aurait quelques additions à faire à la bibliographie : sur la densité de la Terre, travaux de MM. Stieltjes et Radau, publiés ici même; celui de M. Stieltjes sur le problème du plus petit crépuscule (*Astr. Nach.*), celui de M. Ch.

Simon sur la libration de la Lune avec les compléments de M. Tisserand; les noms de H.-A. Newton, à propos de l'origine cosmique des étoiles filantes, et de O. Struve, à propos de la translation du système solaire, ne sont pas cités.... Des Tables mathématiques, astronomiques, physiques et historiques occupent une partie du fascicule.

BELOPOLSKY (A.). — UEBER DIE ROTATION DES JUPITER (*Mélanges mathématiques et astronomiques du Bulletin de Saint-Petersbourg*, t. VII, 16 pages avec planche).

L'auteur a réuni et discuté tous les dessins et évaluations concernant les taches et leurs périodes. Les vitesses de rotation présentent une discontinuité vers la région 5°-10° de latitude jovienrique. A l'exception de la ceinture équatoriale, où la rotation se fait en 9^h50^m,5, l'ensemble de la surface de Jupiter paraît tourner avec une vitesse constante et la rotation se faire en 9^h55^m environ. Il n'y a pas symétrie pour les deux hémisphères, et la région de rotation rapide empiète vers l'hémisphère nord. Il y a là des circonstances difficiles à expliquer.

MONTESUS (Cap. F. DE). — ÉTUDE SUR LA RÉPARTITION HORAIRE DIURNE-NOCTURNE DES SÉISMES ET LEUR PRÉTENDUE RELATION AVEC LES CULMINATIONS DE LA LUNE; ÉTUDE CRITIQUE DES LOIS DE RÉPARTITION SAISONNIÈRE DES SÉISMES (*Archives de Genève*, t. XXII et XXV; 1889 et 1891).

Le capitaine de Montessus, qui a patiemment accumulé les observations et données concernant les séismes, possède aujourd'hui un Catalogue de plus de 60000 de ces phénomènes, individuellement discutés. Il établit que les séismes se produisent uniformément de jour comme de nuit; qu'ils n'ont aucune relation avec les culminations de la Lune et les saisons astronomiques. Il faut donc considérer comme mal fondées des coïncidences dont on a souvent parlé. (O. C.)

KREUTZ (H.). — UNTERSUCHUNGEN UEBER DAS SYSTEM DER COMETEN, 1843 I, 1880 I UND 1882 II. — II Theil. DER GROSSE SEPTEMBER COMET, 1882 II. Kiel 1891 (1).

Le noyau de la grande comète II de 1882 s'est subdivisé, comme on le

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 117, et le Mémoire de M. Tisserand sur les noyaux de la grande comète II de 1882 (*Bulletin*, t. VII, p. 54).

sait, en cinq noyaux partiels que M. Kreutz désigne par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, le point 1 étant le plus éloigné de la queue de la comète. Les noyaux 2 et 3 ont été plus brillants que les autres.

Dans la Partie I de son travail sur le système cométaire 1843 I, 1880 I et 1882 II, publiée en 1888, M. Kreutz admet que le centre de gravité de la comète 1882 II se trouve en 2; les éléments II qu'il donne se rapportent à ce point.

Des recherches très étendues et très approfondies, exposées dans la Partie II, conduisent l'auteur à un résultat différent : les observations ne permettent pas de localiser avec précision le centre de gravité de la comète.

La Partie II comprend 10 paragraphes que nous exposerons brièvement.

10. Calcul d'une nouvelle éphéméride déduite des éléments II.

Cette éphéméride, qui s'étend du 7 septembre 1882 au 2 juin 1883, est complètement indépendante de celle du § 2, Partie I.

11. Comparaison des éléments II et des observations antérieures à la division du noyau.

L'accord est en général satisfaisant.

12. Positions relatives des différents noyaux cométaires.

13. Comparaison des éléments II et des observations postérieures à la division du noyau.

L'auteur a formé des Tableaux relatifs aux observations exposées au § 3, Partie I, donnant les écarts dx et $d\delta$ entre le calcul et l'observation, puis ces mêmes écarts rapportés à la ligne des noyaux et à une perpendiculaire à cette ligne. Ces nouveaux écarts, $d\psi$ et $d\varphi$, sont liés aux anciens par les relations suivantes

$$\begin{aligned} d\psi &= \sin p \cos \delta \, dx + \cos p \, d\delta, \\ d\varphi &= -\cos p \cos \delta \, dx + \sin p \, d\delta, \end{aligned}$$

où p désigne l'angle de position de la ligne des noyaux. L'avantage de cette transformation est évidente : les erreurs provenant de l'identification erronée des noyaux observés n'influent que sur les quantités $d\psi$. Les quantités $d\varphi$ peuvent donc servir à corriger les éléments, même dans le cas où il est impossible d'identifier le noyau observé.

Pour la plupart des observations les quantités $d\varphi$ ont seules été utilisées.

14. Calcul des écarts normaux et établissement des éléments III en admettant que le centre de gravité coïncide avec le point (2).

Les différences entre les éléments II et III sont de l'ordre des erreurs probables. L'accord entre le calcul et l'observation est satisfaisant; mais, avant de se prononcer sur la position du centre de gravité, l'auteur se propose d'examiner si un déplacement du centre de gravité sur la ligne des noyaux est en contradiction avec les observations.

15. Établissement des éléments III, le centre de gravité étant supposé en (3), en (4) ou en (1).

Les éléments III calculés pour le point (3) ne diffèrent pas sensiblement, sauf en ce qui concerne l'excentricité, des éléments III rapportés au point (2); fait important dans la théorie de la formation du noyau.

Les quantités $\Delta x \cos \delta$, $\Delta \delta$, $\Delta \varphi$ montrent qu'il est difficile de dire si le centre de gravité était en (2) ou en (3). L'auteur remarque que ces points constituaient des masses parfaitement coordonnées du noyau primitif et qu'il ne peut être question d'un centre de gravité visible du système après la division du noyau. Les observations antérieures à cette division sont représentées d'une manière plus satisfaisante par les éléments III (3) que par les éléments III (2). Ce qui semble indiquer que la durée de révolution de la comète était plus longue avant la séparation du noyau cométaire qu'elle ne l'est après ce phénomène.

L'auteur revient sur ce point au § 17.

Les éléments III (4) montrent que le point (4) n'a pu être que la position limite extrême du centre de gravité sur la ligne des noyaux. La représentation des lieux normaux I à VIII est moins bonne que dans les deux cas précédents, mais les écarts qu'on observe entre le calcul et l'observation ne sont pas suffisamment grands pour qu'on doive conclure à l'impossibilité d'identifier (4) avec la position du centre de gravité.

Quant aux éléments III (1), ils représentent les observations d'une manière tout à fait insuffisante.

L'auteur est donc conduit à conclure que le centre de gravité du système après la division du noyau a pu se trouver entre (2) et (4), mais qu'il n'a certainement pas été au delà de ces points.

16. Établissement des éléments IV pour les différents noyaux cométaires, en faisant abstraction des observations antérieures à la division du noyau.

Les observations sont assez nombreuses pour qu'on songe à faire ce calcul, mais on ne peut s'attendre à obtenir les éléments en question avec une très grande précision, à cause de la forme même de l'orbite après la sortie de la comète des rayons du soleil. Cette orbite ressemblait alors sensiblement à une ligne droite.

L'incertitude qui affecte les éléments IV (2) comparés à III (2) ne

disparaît que pour l'excentricité; pour ces deux systèmes d'éléments la valeur de celle-ci est identique dans les limites des erreurs probables.

Voulant éliminer l'incertitude qui affecte l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, M. Kreutz calcule un nouveau système d'éléments IV' pour le point (2), en admettant que Ω et i restent invariables dans le passage de II à IV'. Ce nouveau système IV' (2) comparé à III (2) ne peut être considéré comme définitif.

De même, la représentation des observations n'est pas meilleure pour IV (3) et IV' (3) que pour les éléments III (3); aussi M. Kreutz considère-t-il ces derniers comme les éléments définitifs pour le point (3).

Pour les points (4) et (1), M. Kreutz se contente de calculer les éléments IV'; il arrive à la même conclusion que dans les cas précédents.

Ainsi donc, malgré l'hypothèse relative à la position du centre de gravité qui entache le système d'éléments III, celui-ci représente le mieux les observations.

17. Sur l'orbite de la comète avant la séparation du noyau.

L'accord entre le calcul et les observations faites avant la division du noyau est meilleur pour les éléments III (3) que pour les éléments III (2); M. Kreutz se trouve donc conduit à calculer de nouveaux éléments V qui satisfassent aux observations antérieures au 30 septembre 1882. Il détermine ici deux systèmes d'éléments: le premier, en supposant que chacun des éléments II doive subir une correction; le second, en admettant que le plan de l'orbite reste le même avant et après la séparation du noyau, en d'autres termes que Ω et i ont les mêmes valeurs que dans le système II. Les observations justifient cette hypothèse.

La détermination de l'excentricité est incertaine, aussi M. Kreutz se demande s'il n'est pas possible de représenter par une parabole les observations antérieures au partage; mais, pour les trois systèmes d'éléments paraboliques qu'il détermine, l'accord entre le calcul et l'observation n'est pas satisfaisant.

Par conséquent, si l'on admet que le plan de l'orbite n'ait pas été modifié par le partage du noyau, la comète serait entrée dans notre système planétaire suivant une orbite elliptique dont la durée de révolution est comprise entre 770 et 1000 ans. La grande incertitude qui affecte la durée de révolution de la comète rend tout essai d'identification avec une de ses apparitions antérieures sinon illusoire du moins extrêmement difficile.

18. Sur la cause du partage du noyau cométaire.

Ce paragraphe constitue l'un des plus importants et des plus intéressants du travail de M. Kreutz. L'auteur considère la division du noyau

comme produite par une force perturbatrice T' , qu'il décompose suivant la direction du rayon vecteur, d'une perpendiculaire au rayon vecteur et d'une perpendiculaire au plan de l'orbite. Cette force fait subir aux éléments de l'orbite des variations infiniment petites avec le temps. Le problème est résolu par la méthode de la variation des constantes. M. Kreutz suppose que la direction de la force est celle de la tangente à la courbe dans le plan de l'orbite; le signe + correspondant à un accroissement, le signe - à un décroissement de la vitesse. Cette diminution de la vitesse pourrait s'expliquer par l'existence d'un milieu résistant. L'auteur représente la force T' par une fonction de la distance r et de la vitesse c dans le mouvement elliptique; il pose

$$T' = \frac{U c^2}{10^7 r^2}$$

où U , quantité constante exprimée en unités du septième ordre décimal, représente la force perturbatrice agissant sur l'unité de vitesse et à l'unité de distance. Les constantes α et β sont susceptibles de différentes valeurs. M. Kreutz fait $\alpha = \beta = 2$.

Il trouve pour les valeurs de U relatives aux différents noyaux cométaires les quantités suivantes :

Points.	U.		Err. probable d'un lieu normal. (nn_7).	Éléments III.		Différences ($nn_7 - (nn_6)$.
				(nn_6).	err.	
2..	-0,0400	$\pm 0,0143$	+ 92,59	$\pm 0,99$	100,30 $\pm 1,02$	- 7,71
3..	+0,0418	$\pm 0,0200$	+181,4	$\pm 1,39$	189,83 $\pm 1,40$	- 8,43
4..	+0,0766	$\pm 0,0247$	+179,8	$\pm 1,62$	205,2 $\pm 1,70$	-25,4
1..	-0,1457	$\pm 0,0256$	+196,7	$\pm 1,70$	290,41 $\pm 2,04$	-93,7

On voit donc que les sommes des carrés des résidus (nn_6) des éléments III se trouvent diminuées, par l'introduction de la force perturbatrice T' , respectivement de 7^e, 71; 8, 43; 25, 4 et 93, 7.

Les valeurs de la force perturbatrice U sont incertaines, comme on devait le prévoir, les éléments III (2), III (3), III (4) représentant déjà suffisamment bien les observations. Or la seule loi qu'on ait fait intervenir dans le calcul de ces éléments est celle de la gravitation universelle.

Les différences que présentent les systèmes d'éléments III (2), III (3), III (4), III (1) disparaissent presque entièrement, si l'on admet que la force perturbatrice prend des valeurs différentes pour les différents noyaux cométaires.

M. Kreutz cherche donc, pour une position déterminée du centre de gravité, la forme que doit prendre la constante U pour que les éléments

des différents noyaux puissent se déduire de ceux du centre de il trouve les valeurs suivantes :

	(2).	(3).	(4).	(1).
U.....	-0,0279	+0,0279	+0,0638	-0,096

le centre de gravité étant supposé au point milieu de 2-3.

En ayant égard à ces valeurs et en corrigeant les éléments II de tités $d\omega$, dQ , ... correspondantes, l'auteur obtient pour les noyaux considérés des éléments que l'on peut considérer comme tiques les uns par rapport aux autres; ce sont les éléments que pos la comète à son entrée dans notre système solaire.

ÉLÉMENTS IX.

Osculation pour les perturbations par les planètes 1882 sept. t. m. Berlin.

Osculation pour la force perturbatrice 1882 sept. 8, 6664 t. m. Be

		Points.		
		(2).	(3).	
T.....	1882 sept. 17,2613058		sept. 17,2613006	
ω	69.35.14.03		69.35.16.23	} Équin. 1882
Q	346. 0.37,74		346. 0.31,49	
i	141.59.44,01		141.59.42,76	
$\log g$	7,8892819		7,8893718	
e	0,9999114		0,9999114	
Durée de rév....	817 ^a ,3		817 ^a ,3	
U.....	-0,0279		+0,0279	

		Points.		
		(4).	(1).	
T.....	1882 sept. 17,2612964		sept. 17,2613107	
ω	69.35. 8,14		69.35. 7,19	} Équin. 1882
Q	346. 0.23,50		346. 0.35,70	
i	141.59.39,08		141.59.41,31	
$\log g$	7,8893395		7,8891674	
e	0,9999114		0,9999114	
Durée de rév....	817 ^a ,3		817 ^a ,3	
U.....	+0,0638		-0,0963	

Il faut remarquer que la position du centre de gravité est pur hypothétique; il est probable qu'une autre position voisine du 1 aurait donné des résultats tout aussi satisfaisants.

Pour avoir les éléments de la comète à sa sortie du système planétaire, il suffit d'appliquer aux éléments précédents les corrections suivantes :

	Points.			
	(2).	(3).	(4).	(1).
$\delta\omega$	0,00	0,00	0,00	0,00
$10^7\delta T$	- 1	+ 1	+ 2	- 4
$10^7\delta \log q$	- 4	+ 4	+ 9	- 14
$10^7\delta e$	-38,4	+38,4	+87,8	-132,5

M. Kreutz obtient ainsi les

ÉLÉMENTS X.

Osculation pour les perturbations par les planètes 1882 sept. 20,5 t. m. Berlin.

Osculation pour la force perturbatrice 1883 mars 3,0 t. m. Berlin.

	Points.	
	(2).	(3).
T.....	1882 sept. 17,2613057	sept. 17,2613007
ω	69° 35' 14,03	69° 35' 16,23
Q	346. 0.37,74	346. 0.34,49
i	141.59.44,01	141.59.42,76
$\log q$	7,8892815	7,8893722
e	0,9999076	0,9999153
Durée de rév.....	769 ^a ,2	875 ^a ,2
U.....	-0,0279	+0,0279

	Points.	
	(4).	(1).
T.....	1882 sept. 17,2612966	sept. 17,2613103
ω	69° 35' 8,14	69° 35' 7,19
Q	346. 0.23,50	346. 0.35,70
i	141.59.39,08	141.59.44,34
$\log q$	7,8893404	7,8891660
e	0,9999202	0,9998982
Durée de rév.....	959 ^a ,4	664 ^a ,3
U.....	+0,0638	-0,0963

Des variations précédentes, celle de l'excentricité est de beaucoup la plus considérable; on peut donc négliger les autres en présence de celle-ci. Le Tableau des variations des éléments, calculées par M. Kreutz,

montre que la variation en question de l'excentricité a lieu dans le voisinage du périhélie; on peut donc l'expliquer par une perturbation instantanée, qui se serait produite au périhélie dans la direction de la tangente. Au périhélie on a

$$\delta Q = \delta i = \delta T = \delta \log q = \delta \omega = 0,$$

$$\delta e = \frac{2}{k} \sqrt{p} T' dt;$$

ce qui correspond à une perte de vitesse de

$$-0^m,46 \quad +0^m,46 \quad +1^m,05 \quad -1^m,58$$

pour les points (2), (3), (4) et (1).

Or, la vitesse de la comète au périhélie était de 478052^m; il y a donc lieu de s'étonner de la faible diminution qu'il a fallu pour produire la division du noyau.

La force perturbatrice, si on la suppose concentrée au périhélie, a dû avoir son origine dans la comète elle-même. Toute force perturbatrice émanant du Soleil, quelle qu'en soit la nature, doit nécessairement agir suivant la direction du rayon vecteur; mais cette force, tant qu'elle reste différentielle, ne peut, au périhélie, avoir une influence sur l'excentricité; elle ne peut donc, par conséquent, contribuer à la séparation du noyau.

M. Kreutz montre ensuite que la force perturbatrice agissant au périhélie, soit suivant le rayon vecteur, soit suivant une perpendiculaire au plan de l'orbite, produirait des effets que les observations ne sauraient révéler.

On peut donc dire que la force perturbatrice, intérieure à la comète, est susceptible d'agir suivant une direction quelconque, pourvu que la composante tangentielle ait une intensité suffisante pour produire la division du noyau. On ne saurait nier l'existence d'une pareille force si l'on se rappelle les modifications spectroscopiques que la comète a présentées au périhélie. Quant à dire quelle est la nature interne de cette force, nos connaissances actuelles ne nous le permettent pas.

M. Kreutz remarque qu'une force émanant du centre de la comète et s'étendant régulièrement dans toutes les directions, produirait un phénomène analogue à celui qu'on a observé. La composante tangentielle de cette force aurait seule une influence sensible sur le groupement des particules cométaires suivant la ligne des noyaux. Enfin, M. Kreutz rejette l'hypothèse d'une résistance provenant de l'atmosphère du Soleil

19. De l'influence de l'aplatissement du Soleil sur l'orbite de la comète.

Les observations du point (2) ne donnent aucune trace de l'aplatissement du Soleil. Il n'y a pas lieu de faire des recherches à ce sujet pour les autres noyaux (3), (4) et (1).

D. KLUMPKE.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, nos 3043-3056.

Lehmann-Filhès. — Sur les répartitions les plus probables des erreurs d'observation.

En partant d'une certaine loi de probabilité des erreurs, on calcule d'ordinaire le nombre des erreurs qui tombent entre deux limites données, en multipliant le nombre total des erreurs par la probabilité d'une erreur comprise entre ces limites; le produit étant un nombre fractionnaire, on le remplace par le nombre entier le plus voisin. Mais la somme des nombres ainsi obtenus peut s'éloigner sensiblement du nombre total donné. M. Lehmann-Filhès a cherché un mode d'évaluation plus précis, et qui indique la répartition la plus probable des erreurs, en supposant toujours connue la loi de probabilité qui en détermine la fréquence.

Soient donc n_1, n_2, \dots, n_k les nombres entiers d'éléments qui, sur un nombre total donné n , tombent dans les classes A_1, A_2, \dots, A_k , et w_1, w_2, \dots, w_k les probabilités correspondant à ces classes; on aura la répartition la plus probable, en prenant pour n_1, n_2, \dots les exposants du plus grand terme du développement du polynôme $(w_1 + w_2 + \dots + w_k)^n$. Les conditions du maximum s'expriment par des inégalités de la forme

$$\frac{n_p + 1}{n_q} > \frac{w_p}{w_q} > \frac{n_p}{n_q + 1},$$

d'où découle encore la suivante

$$n w_i - 1 < n_i < (n + k) w_i,$$

qui fournit des limites provisoires pour les nombres cherchés n_i . Il est clair que le problème peut, dans certains cas, comporter plusieurs solutions également probables. Dans l'exemple traité par M. Lehmann-Filhès (300 déclinaisons de Bradley), on trouve $n_1 = 65$ ou 66, tandis que le mode de calcul habituel donnerait $n w_1 = 65,08$, ou en nombre rond 65.

Thraen. — Éléments et éphéméride de la comète Wolf pour le retour de 1891.

La comète ayant été retrouvée le 1^{er} mai, M. Thraen a repris le calcul

des éléments, et l'éphéméride qui s'en déduit suffira probablement pour suivre la comète jusqu'au delà du périhélie.

www.libtool.com.cn

Langley. — L'Observatoire d'Astrophysique de Washington.

M. Langley annonce qu'il abandonne la direction de l'Observatoire d'Allegheny pour se consacrer désormais à des travaux de Physique et d'Astrophysique pour lesquels a été outillé le nouvel établissement fondé à Washington, et qui fait partie de l'Institut Smithsonian.

Copeland (R.). — Taches de Saturne.

M. Stanley Williams, de Burgess Hill (Sussex), a découvert trois taches dans la région équatoriale de Saturne; deux sont rondes et brillantes, la troisième est une tache sombre. Il a calculé des éphémérides pour en faciliter l'observation.

Weiss (E.). — Observations faites à l'Observatoire impérial de Vienne, dans le cours de l'année 1890.

Nombreuses positions de petites planètes et de comètes.

Observations du passage de Mercure (9 mai 1891), faites à Berlin, Tachkent, Upsal, Munich, Prague, Gotha, Kief, Saint-Louis, Kharkof, Riga, Honolulu, Windsor, Moscou, Kazan, Varsovie, Palerme.

Wand (Théodore). — Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un système de points.

L'auteur développe l'algorithme de ses « substitutions normales ».

Weiler. — Remarques sur le Mémoire de M. Poincaré, concernant le problème des trois corps.

Harzer. — Remarque sur un travail de M. Schultz.

Voir *Bull.*, t. VIII, p. 423.

Dunér. — Sur quelques essais de Photographie stellaire.

M. Christie avait proposé de prendre, pendant l'exécution de la Carte du Ciel, des photographies de la polaire, qui serviraient de témoins et

permettraient de juger de l'état de l'atmosphère; ces clichés d'épreuve devaient être faits avec un objectif de 0^m, 100. M. Dunér a fait des essais, avec un objectif de Steinheil, de 0^m, 055 d'ouverture et de 0^m, 55 de longueur focale, qui ont donné de bons résultats, en remplaçant la polaire par un objet plus faible (DM. + 88°, 4). Mais M. Dunér recommande d'employer de préférence des objectifs à long foyer, pour lesquels l'influence de l'agitation de l'air devient plus sensible. Il s'étonne d'apprendre que les grandes lunettes, destinées à l'exécution de la Carte du Ciel, donnent encore aux étoiles les plus faibles un diamètre de 2" à 3", car la petite lunette dont il a fait usage lui-même réduit le diamètre des disques à 4", et il s'ensuit que, toute proportion gardée, les grandes devraient le réduire à 0", 75. Il semble donc que l'on ne gagne pas beaucoup à exagérer les dimensions des lunettes photographiques.

Safarik. — Mesures du diamètre de Titan.

M. Safarik a tenté d'évaluer le diamètre de ce satellite en le comparant aux disques d'interférence des étoiles fixes, vues dans un réfracteur de 0^m, 20; un grand nombre de comparaisons lui ont donné, en moyenne, 0", 35. Le diamètre réel correspondant serait de 2,400^{km}. D'après Pickering, les grandeurs photométriques de Saturne et de Titan sont respectivement 0^m, 9 et 9^m, 4; on en conclurait un diamètre apparent de 0", 33. En admettant, avec M. H. Struve, que la masse de Titan est $\frac{1}{4700}$ de celle de Saturne, on trouverait 0,06 pour le rapport des diamètres (à densité égale), et par suite 1" pour le diamètre apparent de Titan. Il faut donc attribuer à ce satellite une densité beaucoup plus grande que celle de Saturne (voir *Bull.*, t. V, p. 357).

Meissel. — Formules pouvant servir au calcul des fonctions de Bessel.

Burnham. — Mesures d'étoiles doubles, faites avec l'équatorial de 36 pouces de l'Observatoire Lick, pendant l'année 1890.

M. Burnham s'applique toujours à mesurer des objets difficiles qui sont hors de la portée des instruments ordinaires. On sait d'ailleurs qu'à cette catégorie appartiennent la plupart des systèmes stellaires qui offrent un réel intérêt, et notamment ceux à mouvements rapides. Parmi les 70 couples nouveaux que renferme cette 17^e liste de M. Burnham, il y en a 39 dont les distances sont inférieures à 1", la moyenne étant 0", 45, et 25 dont les distances tombent au-dessous de 0", 5, la moyenne étant 0", 33. On peut considérer comme particulièrement inté-

ressants les couples formés par des étoiles brillantes avec des compagnons très faibles et très rapprochés.

Wolf (Max.). — Nébulosités visibles dans la constellation du Cygne.

Ces nébulosités ont été reconnues sur des clichés photographiques obtenus dans ces derniers temps.

Backlund. — Éléments et éphéméride de la comète d'Encke pour le retour de 1891.

La comète a été revue par M. Barnard le 1^{er} août.

Millosevich. — Éléments de la planète (303) Joséphine.

Ball (L. de). — Démonstration de quelques formules relatives à la théorie des fonctions de Bessel.

Folie. — Sur les formules correctes de la nutation initiale.

Herz. — Réponse à la Note de M. Folie.

Pickering. — Étoiles à spectres remarquables. Nouvelle variable dans le Sagittaire.

Position de la variable : $19^h 51^m,8$; — $42^{\circ}7'$.

Kreutz. — Éphéméride de la planète Weringia (226).

Laska. — Notice nécrologique sur Auguste Seydler.

Né en 1819, à Senftenberg (Bohême), Auguste Seydler avait été attaché, en 1870, comme adjoint, à l'Observatoire de Prague. En 1882, il fut nommé professeur d'Astronomie à la nouvelle Université tchèque, puis directeur de l'Institut astronomique, qui dépend de cette Université. Il a publié des Mémoires relatifs au problème des trois corps, des calculs d'orbites de planètes et de comètes, et un traité de Physique mathématique, en langue tchèque, resté inachevé. Seydler est mort le 22 juin 1891.

Fényi. — Notice nécrologique sur le cardinal L. de Haynald.

Le nom du cardinal Haynald n'est pas inconnu aux astronomes; ils savent que c'est à la munificence de ce savant prélat qu'est due la fon-

datation de l'Observatoire de Kalocsa. Né en 1816, à Szécsény (Hongrie), Louis de Haynald devint archevêque de Kalocsa en 1866. C'est en 1879 que fut érigé l'Observatoire, que dirigea pendant quelques années le P. Braun (voir *Bull.*, t. III, p. 499). M^{sr} Haynald est mort le 4 juillet dernier.

Observations de l'éclipse de Soleil du 6 juin 1891, faites à Berlin, Kis-Kartal, Iéna, Bonn, Rome, Turin, Christiania, Göttingue, Strasbourg, Kief, Carlsruhe, Kiel, Varsovie, Palerme.

Stechert. — Éléments et éphéméride de la planète (258) Tyché.

Thraen. — Nouveaux éléments de la comète Wolf.

Wolf (R.). — Lettre à l'éditeur.

M. Wolf indique le contenu des n^{os} 77 et 78 de ses *Mittheilungen*.

Stanley Williams. — Sur les taches de Saturne.

L'auteur donne des détails circonstanciés, accompagnés de dessins, sur les trois taches qu'il a découvertes, et dont il a été question plus haut. Le temps de rotation paraît être de $10^h 14^m, 6$.

Pickering. — Le spectre de β Lyre.

Le spectre de cette étoile ne ressemble à aucun de ceux qui ont été étudiés jusqu'à présent. Il renferme des bandes sombres et des lignes brillantes dont les positions sont sujettes à des changements périodiques. Ces changements sont probablement en rapport étroit avec les variations d'éclat de cette étoile, dont la période est d'un peu moins de 13 jours, avec des maxima secondaires.

Hayn. — Mesures d'étoiles doubles, faites à Göttingue, avec un réfracteur de Merz.

Schur. — Remarques au sujet de ces observations.

Barnard. — Le premier satellite de Jupiter.

M. Barnard recommande cet objet aux astronomes; on se rappelle que, le 8 septembre 1890, il a vu le satellite double (*Bull.*, t. VII, p. 444).

Seeliger. — Remarque au sujet de l'étoile triple ζ du Cancer.

M. Burnham, dans une Note sur les étoiles doubles invisibles, se

demande si les anomalies du mouvement de l'étoile C de ce système ternaire ne pourraient pas s'expliquer par des erreurs d'observation. Il ne paraît pas connaître les travaux de M. Sceliger, relatifs au même sujet (voir *Bull.*, t. VII, p. 108).

Weiler. — Les perturbations absolues des planètes intérieures.

Ball (L. de). — Remarques sur les dérivées de la fonction perturbatrice.

Luther (R.). — Éphéméride de la planète Glauke (288).

Hale (G.-E.). — Résultats de quelques essais de photographie des protubérances et de leur spectre.

Les procédés que M. Hale a précédemment décrits ont été employés avec un plein succès. Les lignes H et K se montrent toujours renversées, sous la forme de fines raies brillantes, se détachant sur les bandes sombres. La ligne H est double. Ces lignes sont particulièrement propres à être choisies pour des essais de photographie des protubérances, parce qu'elles permettent d'ouvrir suffisamment la fente du spectroscopie. On pourra aussi obtenir maintenant des reproductions des protubérances blanches, d'ordinaire invisibles.

Espin. — Sur une nouvelle variable.

Scheiner. — Recherches de photométrie photographique.

Extrait d'une Communication faite au Comité international permanent, réuni à Paris au mois d'avril dernier (Annexe n° 5 du Compte rendu de la réunion, p. 81-98). M. Scheiner avait trouvé qu'en multipliant le temps de pose par 2,5, on ne gagne pas une grandeur entière (comme on l'avait supposé à tort), mais seulement une demi-grandeur ou tout au plus trois quarts. Il a su, depuis, que MM. E.-C. et W.-H. Pickering étaient arrivés, avant lui, à la même conclusion.

Pickering (E.-C.). — Étoiles à spectres remarquables. Nouvelle variable.

La variable est l'étoile DM + 39° 4851.

Dunér. — Observations des minima de Y Cygne.

Engelhardt. — Sur le mouvement propre de l'étoile B.B.VI + 25° 2874.

De nouvelles mesures donnent 1",20 pour le mouvement propre en arc de grand cercle (voir *Bull.*, t. VI, p. 565).

Luther (R.). — Éphéméride de la planète (61) Danaé.

Luther (W.). — Éphéméride de la planète (82) Alcmène.

Albrecht (Th.). — Résultats des observations continuées à Berlin et à Prague, touchant la variabilité des latitudes.

M. Albrecht fait connaître les résultats des séries obtenues à Berlin par MM. Marcuse et Battermann, du 2 septembre 1890 au 6 mai 1891, et à Prague, par MM. Weinek et Gruss, du 12 octobre au 5 mai. Commencées en 1889, ces observations embrassent maintenant un intervalle de plus de deux années, et le parallélisme des courbes de Berlin, de Potsdam et de Prague a toujours été frappant. Voici les maxima et les minima constatés.

	Berlin 52° 30'.	Potsdam 52° 22'.	Prague 50° 5'.
MAX. 1889. SEPT. 6...	17,55	JUILL. 23... 56,49	AOUT 1... 16,02
MIN. 1890. FÉVR. 16...	17,05	FÉVR. 4... 55,97	FÉVR. 16... 15,53
MAX. 1890. SEPT. 2...	17,53	SEPT. 9... 16,07
MIN. 1891. MARS 16...	17,03	FÉVR. 27... 15,65

Voici encore quelques-uns des écarts observés :

	Berlin.	Potsdam.	Prague.
1889. MARS 1	-0,03	+0,02	+0,05
AOUT 8	+0,25	+0,25	+0,23
NOV. 16	+0,02	-0,08	0,00
1890. FÉVR. 24	-0,24	-0,24	-0,29
MAI 15	-0,06	+0,05
SEPT. 12	+0,24	+0,25
DÉC. 21	-0,02	0,00
1891. MARS 11	-0,26	-0,17

Au mois d'avril, une expédition est partie pour Honolulu, afin d'y faire des observations correspondantes.

oubiago. — Observations faites à Kazan, en 1891.

Observations de l'éclipse totale de Lune du 23 mai 1891, faites à K harkof, Varsovie, Palerme.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

inek. — Nouvelle rainure et nouveau cratère lunaires, découverts sur des clichés de l'Observatoire Lick.

Ayant reçu de M. Holden une série de clichés photographiques de la lune, obtenus avec le grand réfracteur, M. Weinek s'en est servi pour commencer de nouveaux dessins des paysages lunaires. Il a pu, à cette occasion, découvrir une rainure et un cratère, bien visibles sur ces clichés, et qui ont été oubliés par tous les sélénographes. Le cratère est aussi marqué sur une photographie faite à Melbourne, en 1873. M. Holden a pu le voir directement.

inichmeyer. — Éléments et éphéméride de la planète (28) **ettina**.

isa. — Découverte d'une planète.

La planète, que M. Palisa a rencontré le 14 août, n'est autre que Méduse.

issel. — Contribution à la théorie des fonctions de Bessel. Tables de ces fonctions.

Nous nous contenterons de citer ici la transformation suivante, qui joue un grand rôle dans les développements de M. Meissel. En posant

$$x - \sin x = \frac{1}{4} z^2,$$

a les séries

$$z = x - \frac{x^3}{60} + \frac{x^5}{8400} + \frac{x^7}{349272000} + \frac{19x^{11}}{181621440000} + \dots$$

$$x = z + \frac{z^3}{60} + \frac{z^5}{1400} + \frac{z^7}{25200} + \frac{43z^9}{17248000} + \frac{1213z^{11}}{7207200000} + \frac{151439z^{13}}{1271350080000} + \dots$$

valczyk. — Observations faites à Varsovie.

Passage de Mercure, éclipse de Soleil, éclipse de Lune, observation d'un phénomène d'apparence cométaire qui a duré 20 minutes.

berich. — Éléments de la planète (310).

Observations de planètes et de comètes, etc.

R. R.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

OBSERVATIONS DE LA PLANÈTE $\textcircled{306}$ UNITAS,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE TOULOUSE (équatorial Brunner, 0^m,25 d'ouverture);

PAR M. E. COSSERAT.

Dates. 1891.	Étoiles de comparaison.	Gr.	Planète — ★.		N. de c.
			$\Delta R.$	$\Delta(\odot).$	
MARS 3.... a	2267 B. D. + 12°	9.5	$-0.14,90$	$-0.49,2$	36 : 18
3.... b	2269 B. D. + 12°	8.2	$-0.37,34$	$-3.19,8$	20 : 20
3.... a	2267 B. D. + 12°	9.5	$-0.17,30$	$-0.28,7$	12 : 6
4.... c	2265 B. D. + 12°	8.7	$-0.11,73$	$+1.42,3$	12 : 12
5.... d	2262 B. D. + 12°	9.5	$-0.11,16$	$+4.34,4$	12 : 12
6.... e	2257 B. D. + 12°	9.2	$+0.29,75$	$-11.36,6$	20 : 10
12.... f	2294 B. D. + 13°	9.0	$+0.10,08$	$-1.36,3$	12 : 10
19.... g	Anonyme	10	$+0.22,70$	$+0.42,5$	8 : 4
29.... i	Id.	10	$+0.13,26$	$-1.16,2$	4 : 4
30.... j	2252 B. D. + 14°	9	$+0.32,50$	$+5.10,7$	8 : 6
31.... j	2252 B. D. + 14°	9	$+0.4,57$	$+8.51,7$	10 : 6
AVRIL 2.... k	2206 B. D. + 15°	7	$+0.4,56$	$+4.42,9$	10 : 10

Positions des étoiles de comparaison.

Dates. 1891.	★	R moy. 1891.0.	Réd. au j.	\odot	. 1891.0.	Réd. au j.	Autorités.
MARS 3...	a	10.45.54,66	+0,92	11.53.29,6	-3,9	Rapportée à b.	
3...	b	10.46.15,51	+0,92	11.56.13,3	-3,9	803 W ₁ , H. 10.	
3...	a	10.45.54,66	+0,92	11.53.29,6	-3,9	Rapportée à b.	
4...	c	10.44.59,69	+0,92	11.58.27,0	-3,9	769 W ₁ , H. 10.	
5...	d	10.43.59,10	+0,92	12.4.13,5	-3,9	Rapportée à c.	
6...	e	10.42.27,73	+0,94	12.27.59,3	-3,8	716 W ₁ , H. 10.	
12...	f	10.37.21,58	+0,95	13.3.48,5	-3,5	631 W ₁ , H. 10.	
19...	g	10.31.26,13	+0,94	13.48.38,1	-2,9	Rapp. à 2267 B. D. + 14°.	
29...	i	10.24.50,88	+0,88	14.44.13,4	-2,2	Rapportée à j.	
30...	j	10.23.58,25	+0,87	14.42.10,6	-2,1	385 W ₁ , H. 10.	
31...	j	10.23.58,25	+0,87	14.42.10,6	-2,0	Id.	
AVRIL 2...	k	10.22.59,49	+0,87	14.54.1,7	-1,7	419 W ₂ , H. 10.	

Positions apparentes de la planète.

Dates. 1891.	T. moyen de Toulouse.			R app.			Log. fact. parall.	⊙ app.
	h	m	s	h	m	s		
MARS 3.....	10.24.	5		10.45.40,68			$\bar{1},250n$	11.52.36.
3.....	11. 7.39			10.45.38,99			$\bar{2},992n$	11.52.49.
3.....	11.26.33			10.45.38,28			$\bar{2},796n$	11.52.57.
4.....	8.46.32			10.44.48,88			$\bar{1},506n$	12. 0. 5,
5.....	10.36.25			10.43.48,86			$\bar{1},142n$	12. 8.44,
6.....	9.24. 2			10.42.58,42			$\bar{1},404n$	12.16.18,
12.....	10.10.18			10.37.32,61			$\bar{1},099n$	13. 2. 8,
19.....	9.30.12			10.31.49,77			$\bar{1},145n$	13.49.17,
29.....	11. 1.32			10.25. 5,12			$\bar{1},090$	14.42.55,
30.....	11.23.48			10.24.31,62			$\bar{1},247$	14.47.19.
31.....	9.44. 6			10.24. 3,69			$\bar{1},086n$	14.51. 0,
AVRIL 2.....	9.30.23			10.23. 4,92			$\bar{2},135n$	14.58.42,

ÉLÉMENTS ET ÉPHÉMÉRIDE DE LA PLANÈTE (312) CHARLOIS (28 :

PAR M. MASSON,

Calculateur au Bureau des Longitudes.

A l'aide de trois observations, faites à Nice les 28 ao 29 septembre, que M. Charlois m'a obligeamment commu j'ai déduit, en négligeant l'aberration et la parallaxe, les provisoires suivants :

28,0 août 1891. T. moy. de Paris.

M.....	72.10.48,76	} Équin. moyen 1891,0
π	267. 9.25,33	
Q.....	7.29. 3,95	
i	8.59. 7,2	
φ	9.29.33,62	
μ	761",2889	
$\log a'$	0,4456381	

L'éphéméride approchée donnée ci-dessous suffira po encore quelque temps la planète.

Dates.	R app.	(⊙) app.	log ρ .	l
	h m s			
Nov. 9.....	23.51.13,0	+ 0.25.47	0,3220	
11.....	50. 54,1	28. 18	3271	

Dates.	Rapp. h m s	⊙ app.	log p.	T. d'aberr. m s
Nov. 13.....	23.50.40,9	+ 0.31.19	0,3323	17.52
15.....	50.33,5	34.49	3376	18. 5
17.....	50.31,7	38.48	3429	18
19.....	50.35,5	43.16	3482	32
21.....	50.44,7	48.11	3535	45
23.....	50.59,3	53.34	3589	19. 0
25.....	51.19,3	59.24	3643	14
27.....	51.44,6	1. 5.42	3697	29
29.....	52.14,9	12.27	3751	43
1.....	52.50,3	19.38	3805	58
3.....	53.30,7	27.15	3859	20.13
5.....	54.15,9	35.17	3912	28
7.....	55. 5,8	43.45	3966	43
9.....	56. 0,2	52.36	4019	59
11.....	56.58,9	2. 1.50	4072	21.14
Déc. 13.....	58. 1,8	11.28	4125	30
15.....	59. 8,9	21.27	4177	45
17.....	0.20,0	31.47	4228	22. 1
19.....	1.35,0	42.28	4279	16
21.....	2.53,7	53.28	4330	32
23.....	4.16,1	3. 4.48	4380	47
25.....	5.41,9	16.28	4429	23. 3
27.....	7.11,1	28.26	4478	18
29.....	8.43,6	40.41	4526	34
31.....	0.10.19,3	+ 3.53.14	0,4574	23.50

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

HEELIGER (H.). — UEBER ZUSAMMENSTÖSSE UND THEILUNGEN PLANETARISCHER MASEN. Munich, 1891; in-4°, 24 pages.

Le rôle que les collisions de masses cosmiques peuvent jouer dans une foule de phénomènes accessibles à l'observation commence à préoccuper sérieusement les astronomes. Nos lecteurs connaissent, par un résumé très complet (*Bull.*, t. VII, p. 255), les recherches sur lesquelles se fonde l'hypothèse météoritique de M. Lockyer; ils connaissent également les

recherches de M. G. Darwin sur les conditions mécaniques d'un essaim de météorites, où l'on trouve une ingénieuse application des principes de la théorie cinétique des gaz (*Bull.*, t. VI, p. 325). Aujourd'hui, nous avons sous les yeux un important travail de M. H. Seeliger sur les collisions et les divisions de masses planétaires, dont nous devons nous borner à donner un court aperçu.

M. Seeliger se propose de déterminer l'influence que les chocs répétés de matières cosmiques peuvent exercer sur le mouvement d'une planète. Il commence par établir les équations différentielles du mouvement d'un corps céleste qui rencontre un courant continu de masses planétaires. Il est entendu qu'après le choc les masses qui se sont rencontrées restent réunies, et qu'il y a lieu d'appliquer le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.

Les forces perturbatrices qui interviennent ici dépendent, en premier lieu, de l'accroissement de la masse du corps considéré, et en second lieu de la vitesse relative des matières cosmiques par rapport à son centre de gravité. S'il s'agit de la Terre et des essaims météoriques qu'elle rencontre dans son orbite, leur vitesse relative peut être facilement calculée, à la condition de négliger l'attraction de la Terre; mais il n'est pas évident *a priori* qu'elle puisse être négligée, et M. Seeliger n'introduit cette simplification qu'après avoir rigoureusement démontré qu'elle est permise. En admettant encore une distribution uniforme des radiants héliocentriques, ce qui revient à dire que les météores viennent indifféremment de toutes les régions du système solaire, il trouve que les perturbations qui dépendent des vitesses relatives peuvent être assimilées à l'influence d'un milieu résistant. Il s'y ajoute les termes proportionnels au temps, qui proviennent de l'accroissement continu de la masse terrestre; mais l'accélération séculaire due à cette cause est tout à fait négligeable à côté de celle qui résulte de l'influence des chocs. Cette dernière a pour valeur $0^{\circ}, 12. t^2$, en supposant que la quantité de poussière cosmique que la Terre reçoit dans le cours d'un siècle ($t = 1$) représente une couche de 1^{mm} d'épaisseur et d'une densité égale à la densité moyenne.

Pour la Lune, le calcul n'est pas aussi simple. L'accroissement des masses de la Terre et la Lune produirait, dans la longitude moyenne de la Lune, le terme $0^{\circ}, 9. t^2$, comme l'avait déjà trouvé Oppolzer (*Bull.*, t. p. 109). Mais le choc des météores donnerait naissance à un terme dix fois plus considérable, $9^{\circ}, 2. t^2$ d'après M. Seeliger, tandis que Oppolzer n'avait trouvé que $0^{\circ}, 26$, parce qu'il croyait qu'il suffisait de tenir compte des poussières contenues dans le volume que la Lune balaye dans son mouvement relatif autour de la Terre. L'accélération apparente due au ralentissement de la rotation de la Terre donnerait encore $0^{\circ}, 7$,

sorte que l'accélération totale peut être évaluée à environ $11''$ au lieu de $2''$. Pour expliquer une accélération de $6''$, il suffirait donc d'un dépôt séculaire d'un demi-millimètre; mais c'est encore beaucoup trop, comme l'ont fait voir M. Braun (*Bull.*, t. I, p. 212) et M. J. Kleiber (*Bull.*, t. II, p. 303).

On trouverait encore, dans la résistance apparente qui résulte du choc des poussières cosmiques, une explication des irrégularités constatées dans le mouvement de la comète d'Encke.

La division d'une masse planétaire, à la suite d'une explosion ou d'un phénomène analogue, peut être traitée par les mêmes formules, en donnant à la masse qui se sépare le signe négatif. L'observation ne nous a fait connaître de phénomènes de ce genre que dans les comètes, et le calcul devient ici plus simple, parce qu'il est permis de faire abstraction de la masse cométaire.

On sait que Bessel a déjà signalé le trouble que les émanations qui forment les queues doivent apporter dans le mouvement des comètes. Il est certain que ces émanations sont provoquées par une force qui a son siège dans le Soleil, et que leur intensité s'accroît à mesure que la comète s'en approche, le maximum se manifestant quelque temps après le passage du périhélie. M. Seeliger fait voir que, dans ces conditions, la réaction qui résulte de la formation des queues doit donner lieu à un terme qui représente, non pas une accélération, mais une retardation, c'est-à-dire une diminution séculaire de la longitude moyenne, à moins d'admettre que les émanations sont plus actives avant le périhélie qu'après, hypothèse qui ne se concilie guère avec ce que nous apprend l'observation. Il ne paraît donc pas possible d'attribuer à cette cause l'accélération du mouvement de la comète d'Encke, comme l'ont voulu faire quelques astronomes. L'absence de perturbations périodiques sensibles, dues à ces émanations, prouve d'autre part que les nébulosités qui se détachent d'une comète ne représentent qu'une fraction infime de la masse du noyau, déjà si faible elle-même. C'est une conclusion qui s'accorde d'ailleurs avec tout ce que nous savons de ces astres. Une étude complète du mouvement de la comète de Biéla offrirait sans doute quelque intérêt à ce point de vue, en permettant d'approfondir davantage quelques-unes des questions que soulèvent les comètes à noyaux multiples.

ANNALEN DER STERNWARTEN IN LEIDEN, herausgegeben von D^r H.-G. van de Sande Bakhuyzen. — Band V und VI. Haag, 1890, in-4°.

Nous avons sous les yeux les tomes V et VI des *Annales* de l'Observatoire de Leyde, publiées par l'éminent directeur de l'Observatoire M. H.-G. van de Sande Bakhuyzen.

Le tome V renferme la seconde moitié des observations de la zone comprise entre 30° et 35° de déclinaison, dont la première moitié est contenue dans le tome IV, qui a paru en 1875. Les observations sont au nombre de 9954; en les ajoutant aux 10395 précédemment publiées, on arrive au total de 20349, qui représente à fort peu près le nombre d'observations prévu (1), de sorte qu'il reste très peu de chose à faire pour compléter le programme qu'il avait arrêté.

Les observations contenues dans le tome V se répartissent sur 133 soirées, qui tombent entre le 1^{er} juin 1872 et le 30 mai 1876; on a observé, en moyenne, 75 étoiles par soirée. Les observateurs qui ont tour à tour participé au travail sont MM. Valentiner, E.-F. et H.-G. van de Sande Bakhuyzen, Haga, Kapteyn. L'instrument a été souvent retourné. Les erreurs instrumentales ont été déterminées avec soin, assez fréquemment pour qu'il fût possible d'établir avec certitude les *éléments de réduction*, indiqués à la suite de chaque jour, et les *tables de réduction*, fondées sur ces éléments. Les positions (ascensions droites et déclinaisons pour 1875,0) que l'on trouve dans les deux dernières colonnes des zones reposent essentiellement sur l'état de la pendule et le point équatorial du cercle, fournis par les étoiles de repère; mais l'on a tenu compte, dans les réductions, des changements de l'azimut de la lunette et du point nadiral, qui se déduisaient des déterminations régulières du nadir et de l'azimut des mires. Il paraît que ces changements avaient pour cause principale une légère torsion, due à l'échauffement inégal du pilier près duquel se trouvait l'observateur chargé de la lecture des microscopes. La méthode de réduction employée à Leyde a été longuement exposée dans l'Introduction du tome IV des *Annales*. Elle témoigne du soin consciencieux avec lequel ce vaste travail a été exécuté.

Le tome VI, qui avait paru avant le tome V, a une préface qui nous renseigne sur les fréquents changements survenus dans l'état du personnel depuis vingt ans, et qui n'ont pas peu contribué à retarder les travaux en cours d'exécution; il faut ajouter à ces causes de retard l'obligation imposée au directeur de l'Observatoire de consacrer un

(1) 20500 observations de 10250 étoiles.

partie de son temps au nivellement de précision des Pays-Bas. Parmi les changements matériels signalés dans la préface, il faut mentionner la reconstruction de la salle méridienne, dont le toit devenait un réservoir de chaleur sous l'action des rayons solaires; diverses réparations et modifications que MM. Repsold ont fait subir au cercle méridien; l'acquisition d'un réfracteur de 0^m,27, dont l'objectif sort des ateliers de MM. Clark et fils, d'un chercheur de 0^m,16, de Schræder, d'un appareil micrométrique destiné à mesurer les épreuves du passage de Vénus, etc. Le service de vérification des instruments de la marine hollandaise, qui avait pris, peu à peu, une extension gênante pour les travaux astronomiques, a été heureusement séparé de l'Observatoire, qui dispose maintenant des salles construites pour ce service.

L'introduction du tome VI, qui remplit 129 pages, contient un exposé détaillé des éléments de réduction, applicables aux observations méridiennes qui ont été faites à Leyde depuis 1861, et qui, en dehors des zones, comprennent plusieurs séries importantes, déjà publiées, d'une manière plus ou moins complète, dans les premiers volumes des *Annales*, sous la direction de F. Kaiser. Les deux premiers Chapitres sont consacrés à l'étude des vis micrométriques des microscopes de lecture (inégalités des vis, valeur d'un tour, corrections de la moyenne de quatre microscopes). Le Chapitre III donne quelques détails sur les déterminations du nadir, qui se font à l'aide d'un bain de mercure très peu profond (l'épaisseur de la couche de mercure ne dépasse pas 2^{mm}, le diamètre du vase de cuivre étant de 0^m,35). On prend la moyenne d'une observation directe du fil réfléchi et d'une observation faite avec un prisme à réflexion totale, placé devant l'oculaire. Dans le Chapitre suivant, il est question de la réduction d'un fil horizontal à la moyenne des deux fils, les étoiles étant toujours bissectées par l'un des fils. Le Chapitre V est consacré à la réduction au méridien. Les Chapitres VI et VII contiennent de nouvelles recherches sur les erreurs de division, la flexion, etc.; les deux derniers expliquent la manière dont on a calculé la réfraction et la réduction à l'équinoxe moyen. L'introduction se termine par l'exposé détaillé des méthodes de réduction, appliquées aux observations qui forment le corps du volume (p. 1-412).

Ces observations sont : 1° les distances zénithales de 162 étoiles fondamentales, observées par MM. Kam et Hennekeler, de 1863 à 1868; 2° celles des quatre étoiles α , δ , λ Petite Ourse et 51 (Hévélius) Céphée, observées par MM. Kam, Hennekeler, Kampf, Valentiner, Becker, E. van de Sande Bakhuyzen; enfin 3° celles de 116 étoiles, qui, avec 86 déjà comprises parmi les fondamentales, forment une liste de 202 étoiles, observées à Leyde pour les besoins de l'Association géodésique internationale. Les résultats de ces dernières observations avaient été déjà donnés dans le

tome II des *Annales*; mais il a paru nécessaire de les soumettre à une nouvelle réduction.

Quelques fragments détachés du tome VII (Mémoires de M. Bakhuyzen sur la planète Mars et sur la détermination de l'équation personnelle absolue des passages) ont été déjà mis au jour; on voit donc que les publications de l'Observatoire de Leyde se succèdent maintenant avec une rapidité qui témoigne du zèle et de l'énergie de son directeur.

R. R.

HARKNESS (W.). — THE SOLAR PARALLAX AND ITS RELATED CONSTANTS, INCLUDING THE FIGURE AND DENSITY OF THE EARTH (*Washington observations for 1885*; Appendice III, 169 pages).

Jusqu'ici on a déterminé la parallaxe solaire comme si c'était une constante indépendante, et l'on a obtenu une masse de valeurs discordantes, toutes plus ou moins affectées par des erreurs constantes et dont aucune ne s'impose. Mais la parallaxe solaire n'est pas une constante indépendante. Au contraire, elle est liée à la parallaxe de la Lune, aux constantes de précession et nutation, à l'inégalité parallactique de la Lune...; il faudrait donc la déterminer simultanément avec toutes ces quantités, par la méthode des moindres carrés, qui paraît susceptible, plus que toute autre, d'éliminer les erreurs constantes. Tel est l'objet de M. Harkness dans son important Mémoire.

Un premier travail d'ensemble montre qu'il est nécessaire de faire figurer dans les équations de condition, outre les dix quantités d'abord envisagées, l'aplatissement de la Terre et la masse de la Lune déduite des marées. Ce second travail de *polissage* commence à la page 121 et conduit aux résultats adoptés pages 138 et suivantes.

Les remarques finales doivent retenir l'attention.

La Table XVII, p. 127 (ou, sous une forme équivalente, la Table XX), montre, par l'indication des erreurs probables provenant des différentes sources ce qu'il faut faire pour accroître la précision des constantes. Ainsi l'on voit que l'erreur probable de l'aplatissement de la Terre provient presque également des erreurs probables des valeurs observées de la parallaxe lunaire et de l'aplatissement, et que ce sont les seules. Pour ce qui concerne la parallaxe lunaire, il serait désirable que plusieurs observatoires suivissent la Lune au méridien pendant deux ou trois ans et dans les deux hémisphères; une erreur probable de $0^{\prime\prime},03$ sur la parallaxe répond à une incertitude d'une unité dans le dénominateur de l'aplatissement terrestre. M. Nobile a été conduit, par d'autres raisons, à

signaler de telles observations comme désirables (*Bulletin*, VIII, 178).

Quant à la constante de l'aplatissement, les expériences du pendule et la théorie de la précession et de la nutation donnent une valeur peu différente de $\frac{1}{100}$; le résultat déduit des perturbations lunaires est incertain entre d'assez larges limites, et les arcs géodésiques donnent $\frac{1}{293,5}$. Il est certain que l'erreur probable de la constante de l'aplatissement serait beaucoup diminuée en la faisant dépendre uniquement des deux premières théories. Aujourd'hui de nouvelles déterminations de la gravité, dans le voisinage de l'équateur et des pôles, sont parmi les desiderata pour perfectionner notre connaissance de la figure de la Terre. Des expériences dans les latitudes moyennes ne seraient d'aucune utilité pour ce but.

Dans la pensée de l'auteur, les arcs géodésiques, tout au moins ceux qu'on possède, ne peuvent pas conduire à une bonne valeur de l'aplatissement; il serait désirable qu'un arc de méridien fût mesuré aux États-Unis ayant son centre vers 35° de latitude. Avec nos ressources présentes, le mieux est de déterminer la valeur de l'aplatissement avec le pendule, au moyen de la précession et de la nutation ainsi que des perturbations de la Lune.

Malheureusement, ajoute M. Harkness, en donnant à sa pensée une généralité qui prêterait à des critiques, aucune valeur de l'aplatissement ne peut être déduite soit des expériences du pendule, soit de la théorie de la précession et de la nutation, sans faire quelque hypothèse sur la constitution intérieure de la Terre. Malgré les difficultés qui se présentent, eu égard à la rigidité de la Terre sous l'action des forces qui engendrent la précession, la nutation et les marées, l'idée d'une couche relative mince, reposant en équilibre hydrostatique sur un substratum plus dense, est confirmée par assez de faits pour devenir très plausible. Si on l'adopte, cela sous-entend nécessairement l'emploi de la méthode de condensation pour la réduction des déterminations pendulaires; mais il n'est pas certain que le résultat numérique d'Helmert dépende essentiellement de cette méthode, parce que Unferdinger est arrivé à peu près au même résultat au moyen d'une méthode totalement différente.

Après les desiderata les plus importants, concernant la parallaxe lunaire et l'aplatissement de la Terre, M. Harkness signale successivement :

De nouvelles déterminations des constantes de l'aberration et de la nutation, à obtenir par autant de méthodes différentes que possible (l'auteur rappelle qu'on ne possède pas encore de théorie satisfaisante de l'aberration fondée sur l'hypothèse des ondulations).

Une discussion des observations solaires, accumulées depuis un demi-

siècle, en vue d'obtenir le coefficient de l'inégalité lunaire du mouvement de la Terre.

De nouvelles déterminations de la parallaxe solaire au moyen des observations de Mars, pendant son opposition, en 1892, et aussi au moyen des observations des petites planètes convenables pour cet objet.

La mesure de quelques-uns des grands arcs renfermés dans le programme du *Coast and Geodetic Survey* devrait être terminée le plus tôt possible.

L'utilité du travail de M. Harkness est encore augmentée par une *Bibliographie* contenant la liste des travaux consultés pour l'élaboration du Mémoire, et allant jusqu'à l'année 1890. Quelques lacunes s'y rencontrent : ainsi il n'est pas question du Mémoire de M. Tisserand [*Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du Soleil (Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, t. XV)*], Quoiqu'il en soit, la disposition de la liste bibliographique permet aisément les additions et rendra de bons services aux travailleurs.

O. C.

THE ASTRONOMICAL JOURNAL.

N° 226-240.

Hill (G.-W.), Stockwell (J.-N.). — Sur la variation séculaire du mouvement du périhélie lunaire.

La question soulevée par M. Stockwell dans le n° 220 (*Bulletin*, t. VII, p. 139) motive d'abord une réponse de M. Hill, qui reproche à M. Stockwell d'avoir passé sous silence les travaux de Delaunay et de n'avoir pas cherché la cause de la discordance entre les résultats antérieurs et les siens. M. Hill conclut en donnant le calcul approché des termes en question, et retrouvant à fort peu près le nombre de Delaunay.

Dans les n° 231 et 233 de l'*Astronomical Journal*, M. Stockwell défend la méthode proposée par lui, et il va jusqu'à affirmer qu'il a prouvé la fausseté des solutions des professeurs Adams et Hill. Mais un examen sommaire suffit à infirmer la valeur des objections de M. Stockwell. Il reproche à M. Adams de prendre comme expression de l'excentricité variable e' de l'orbite de la Terre

$$e' = e'_0 + ft,$$

au lieu de prendre l'expression donnée par la théorie générale des variations séculaires

$$e' = \Sigma x \cos(A + \alpha t);$$

mais il est clair qu'il n'y a pas de différence à faire entre les deux dans l'intervalle de temps qu'on a à considérer; et la contradiction dont parle M. Stockwell entre l'hypothèse faite par M. Hill d'une valeur constante de $\frac{d.e'^2}{dt}$ et celle de M. Adams $\frac{de'}{dt} = f = \text{const.}$ n'existe pas.

Dans un dernier article (n° 240), M. Stockwell parle de la rectification de la chronologie au moyen des anciennes éclipses.

Hall (Asaph). — Observations des satellites de Mars, en 1890. Observations de l'étoile double μ' Hercule.

Cinq observations de Phobos et six de Déimos.

Les observations de μ' Hercule, couple serré, s'étendent de 1880 à 1890 : p a varié dans l'intervalle de $125''$; la période est sans doute inférieure à 50^{ans} .

Boss (Lewis). — Positions de 465 étoiles de comparaison déterminées à Albany. — Observations de la comète c 1890 (Denning).

Ce sont presque exclusivement des étoiles de comparaison ayant servi pour la grande comète de septembre 1882 (neuf autres étoiles ont été employées aux observations de Polymnie). Les ascensions droites sont dues à M. Boss et les déclinaisons à M. Egbert. Pour huit étoiles, dont sept appartiennent au Catalogue de Lalande, on a pu conclure des mouvements propres non indiqués jusqu'ici.

Quatre observations de la comète Denning.

Yendell (Paul S.). — Sur les éléments de Y Cygne. Observations d'étoiles variables.

M. Yendell trouve que ses observations et celles de M. Chandler exigent, pour Y Cygne, l'addition d'un terme périodique, d'une période de 2^{ans} environ.

Voici la liste des étoiles variables étudiées par M. Yendell : W Vierge, R, S et T Grande Ourse, X Cygne (avec une étude détaillée des variations secondaires), Y Ophiuchus, X Hercule (nouvelle variable de Gore), U^h Aigle, RR Cygne, T Hercule, X, W, Y, V et U Sagittaire (variables à courte période), U Gémeaux, U Orion, R Écu, S Sagittaire, T Petit Renard.

Sawyer (Edwin F.). — Observations d'étoiles variables en 1889-90. — Les Léonides de novembre 1890.

Étoiles variables observées : T et U Monocéros, R Écu, R Gouronne, 36 (U. A.) Balaine, ζ Hercule, γ Cygne.

Six météores observés le 14 novembre sur lesquels trois appartiennent aux Léonides.

Oudemans (J.-A.-C.). — Lettre à l'Éditeur.

Au sujet d'une étoile occultée par Mars, le 2 novembre 1890, et faisant partie de la liste du D^r Berberich (*Astr. Nachr.*, 2937). M. Oudemans communique les circonstances d'observations pour les principaux Observatoires des deux Amériques.

Annonce télégraphique de la redécouverte de la comète de d'Arrest.

Elle a été retrouvée par M. Barnard à l'Observatoire Lick, le 6 octobre. L'éphéméride de M. Leveau s'accordait de très près avec la position observée.

Searle (Rév. G.-M.). — Éléments et Éphémérides de comètes.

Éphéméride corrigée de la comète de d'Arrest (en appliquant des corrections provisoires à l'anomalie moyenne et au nœud); éléments et éphéméride de la comète 1890 IV (e 1890); éléments elliptiques provisoires de la comète périodique 1890 VII (f 1890).

Keeler (James E.). — Observations des satellites de Mars, à l'Observatoire Lick.

Observations (Déimos 2 soirées, Phobos 5) faites avec la lunette de 36^{po}, en éteignant l'éclat de Mars au moyen d'une petite règle de verre enfumé presque en contact avec le micromètre et parallèle aux fils; les distances des satellites ont été prises par rapport aux deux bords de la planète pour éliminer l'erreur systématique de bissection du disque de Mars.

La fin de la Communication de M. Keeler concerne les éclipses des satellites. Il n'y a pas de doute que, pendant une opposition favorable, avec une hauteur suffisante de Mars, une longue série d'éclipses peut être observée déterminant avec plus de précision que le micromètre les positions des satellites. Pour cet objet, une éphéméride comme celle de M. Marth, dans laquelle les éclipses sont prédites, est

indispensable. M. Keeler cite trois observations d'éclipses obtenues dans des conditions atmosphériques médiocres.

www.libtool.com.cn

Poor (Ch.-Lane). — Note sur l'action de Jupiter, en 1886, sur la comète 1889 V (Brooks).

Barnard (E.-E.). — Réobservations de la comète 1889 V.

Chandler (S.-C.). — Sur l'état présent des problèmes concernant la comète de Lexell. — Perturbations de la comète 1889 V, par Jupiter, en 1922. — Orbites définitives des compagnons de cette même comète.

M. Ch. Lane Poor a repris le calcul des éléments de la comète 1889 V pour obtenir leurs valeurs définitives; il a ensuite calculé, en arrière, les perturbations par Jupiter, jusqu'au moment de la sortie, le 17 octobre 1886, de la sphère d'activité, l'hyperbole jovicentrique et l'ancienne ellipse avant l'entrée dans la sphère d'activité.

Ce travail important vient compléter la première esquisse donnée par M. Chandler (*Bulletin*, t. VII, p. 34), dont les lignes principales ne sont que peu altérées.

M. Barnard a retrouvé la comète le 21 novembre 1890, c'est-à-dire huit mois après son abandon par les observateurs comme en dehors de la limite de visibilité. A l'époque des observations si importantes de M. Barnard, la comète était aux distances respectives 3,09 et 3,55 de la Terre et du Soleil; c'est, suivant lui, l'objet le plus faible qu'il ait jamais vu dans le ciel. La comète a été aussi observée le 20 décembre et le 12 janvier.

Profitant des belles observations de M. Barnard (du 21 et 22 nov.), M. Chandler corrige les éléments de M. Ch. Lane Poor de manière que ces observations soient représentées; il cherche ensuite à préciser la marche de la comète à travers le système de Jupiter; elle a sans doute été désagrégée à ce moment sous l'influence perturbatrice de Jupiter et peut-être du quatrième satellite, comme tend à le prouver le fait que, d'après M. Bredichin, les orbites des compagnons coupent l'orbite de la comète à l'endroit où celle-ci se trouvait, en 1886, au voisinage de Jupiter.

Quant à l'identité avec la comète de Lexell, M. Chandler ne voit pas une raison suffisante dans la différence des durées de révolution ($28^{\text{ans}}, 18$ suivant M. Poor, au lieu de 27^{ans}) pour écarter la supposition d'identité; il faudrait pousser un peu en arrière le calcul des perturbations.

M. Chandler étudie dans les nos 236 et 237 de l'*Astronomical Journal* les orbites des compagnons de la comète, en introduisant des perfectionnements notables dans le calcul des éphémérides différentielles des noyaux. La discussion conduit d'abord à cette conséquence importante, que la force cause de la séparation des composantes A et C, quelle que soit sa nature, a agi dans le plan de l'orbite de la comète et n'a pas amené de changement dans ce plan ou dans la forme de la section conique, mais seulement dans sa grandeur et dans la direction du grand axe. Il y a beaucoup moins d'observations du noyau B que du noyau C. M. Chandler se borne à conclure, en s'appuyant sur les seules observations de M. Barnard, que les éléments absolus de B sont loin d'être bien déterminés comme ceux de C; la coïncidence des orbites de B et A n'est pas contredite par les mesures; l'indétermination pourra être levée au retour de la comète en 1896, si B est visible.

Pour le compagnon E, M. Chandler renvoie le lecteur au travail de M. Bredichin (*Astr. Nach.*, t. CXXIII). Quant à D, il n'a été mesuré qu'une seule fois à l'Observatoire Lick, le 4 août 1889.

Barnard (E.-E.). — Sur la redécouverte de la comète périodique de d'Arrest.

M. Barnard a retrouvé la comète le 6 octobre, mais, chose remarquable, sans la chercher. Après bien des soirées infructueuses, depuis le 14 avril, il avait renoncé à cette recherche. Il faut que l'éclat calculé de la comète ait subi des changements imprévus, car il aurait dû la voir certainement, étant donnée la précision de l'éphéméride de M. Leveau.

Chandler (S.-C.). — Éphéméride de S Machine pneumatique. — Sur la période de U Orion.

La première des deux variables jouit de cette propriété que 1200 périodes font exactement 389 jours.

M. Chandler critique la valeur de la période de 373 jours assignée par M. Gore à U Orion; il communique des observations non employées par M. Gore dans son article des *Monthly Notices (Bulletin)*, t. VII, p. 366) et suggère qu'il doit y avoir pour cette variable, comme pour d'autres de la même classe, un terme périodique dans les éléments [(voir une réponse de M. Gore (n° 238)].

Barnard (E.-E.). — Observations de comètes. Découverte de la comète α 1891.

☉ c 1890 (Denning), nombreuses observations en juillet, août, sep-

tembre et octobre; * b 1890 (Coggia), 17 obs. en juillet et août; * f 1890 (Zona), observ. en novembre, décembre et janvier; * f 1890 (Spitaler), observ. en décembre et janvier.

M. Barnard signale un changement remarquable dans l'éclat de la * Zona vers la fin de novembre.

La * a 1891 a été trouvée par M. Barnard le 29 mars; le jour suivant M. Denning, de Bristol, la rencontrait indépendamment.

Elkin (W.-L.). — Sur la réfrangibilité relative de la lumière de Mars et des étoiles.

Cet article résume des recherches entreprises à la demande du Prof. Newcomb. Mars ayant une couleur rouge, la réfraction doit être, en principe, moindre pour lui que pour les étoiles; si la différence est sensible, les déterminations de la parallaxe solaire au moyen de Mars peuvent en être affectées. En fait, cette différence doit être fort petite, de l'ordre des erreurs des mesures héliométriques elles-mêmes.

Frisby (E.). — Observations de comètes faites à l'Observatoire naval.

* D'Arrest, * f 1890 (Zona), * a 1891 (Barnard).

Wendell (O.-C.). — Observations de comètes à l'Observatoire de Cambridge.

* e 1890 (Zona). * f 1890 (Spitaler).

Howe (Herbert A.). — Corrections à l'*Astronomie* de Chauvenet.

Liste assez étendue d'*errata* de la dernière (5^e) édition.

Chandler (S.-C.). — Contributions à la connaissance des inégalités des périodes des étoiles variables.

Les variations de χ Cygne sont mieux représentées en introduisant dans les éléments un terme périodique; mais ce n'est encore qu'une première approximation.

Thome (John M.). — La *Durchmusterung* de Cordoba.

M. Thome annonce que les cinq dernières années ont été consacrées, à l'Observatoire de Cordoba, à l'extension de la *Durchmusterung* du

professeur Schönfeld; que plus d'un million d'observations ont été obtenues d'étoiles entre -22° et -42° , qui ont toutes été réduites à l'époque commune de 1875,0. La revision finale de la région entière sera achevée dans quelques mois.

La lunette employée est un petit équatorial de $12^{\text{cm}},5$ d'ouverture et de $1^{\text{m}},68$ de longueur focale, construit par Alvan Clark et fils et muni d'un oculaire grossissant 15 fois; il montre, par une belle soirée, les étoiles de $10^{\text{m}},5$ sur champ noir. L'échelle de verre est partagée en intervalles de $10'$ sur une largeur maximum de $80'$, permettant l'observation de zones larges d'un degré seulement.

Les passages sont enregistrés électriquement sur un chronographe de Hipp qui est dans une pièce voisine. Celui qui est chargé d'enregistrer les observations est assis à une table dans une pièce au-dessous de la coupole, avec le chronomètre à interruption électrique à ses côtés; il note la lecture de l'échelle et les grandeurs comme les donne à haute voix l'observateur, et aussi les heures du commencement et de la fin des zones (longues en moyenne d'une heure) avec des repos intermédiaires tous les 15 ou 20 passages pour éviter les erreurs. Les notes sont prises avec une plume à réservoir directement sur les feuilles de réduction. Les constantes de réduction sont déterminées, bien entendu, au moyen d'étoiles repères.

Les Tableaux placés à la fin de l'importante Notice de M. Thome montrent que l'échelle des grandeurs de Cordoba ne diffère pas de celle de Schönfeld et aussi que les erreurs probables des positions obtenues n'excèdent pas les limites ordinaires dans ce genre d'observations.

M. Thome cite des zones renfermant plus de 1200 étoiles.

Rees (J.-K.) et Jacoby (H.). — Observations de la comète *e* (Zona).

Hagen (John G.). — Observations d'étoiles variables.

Étude détaillée des courbes de S Persée et de T Bélier.

Observations de R et U Baleine, R Corbeau, W, V et S Virgatus, R Ophiuchus, R et S Sagittaire, T et S Verseau.

Ferrel (W.). — Sur la solution donnée par Laplace des équations des marées.

L'auteur se propose d'éclaircir certains points d'un travail antérieur (*Bulletin*, t. VII, p. 29) et d'examiner la convergence des séries dans les expressions des marées.

Jacoby (Harold). — Sur la réduction des mesures astrophotographiques. — Sur la correction des mesures photographiques à cause de la réfraction.

Chandler (S.-C.). — Sur la correction de réfraction dans les mesures photographiques. — Sur le calcul rigoureux de la réfraction différentielle.

Jacoby (Harold). — Sur les réfractions photographiques.

Nous n'insistons pas sur le premier article de M. Jacoby, dont il sera sans doute spécialement parlé dans le *Bulletin* de la Carte du Ciel.

Dans le second, l'auteur, ayant en vue le calcul de l'influence de la réfraction sur les positions relatives des étoiles d'un cliché, montre comment les formules connues de Bessel peuvent être remplacées par d'autres rapportées au centre du cliché et susceptibles d'être réduites en Tables.

M. Chandler indique (n° 238) des formules plus simples que celles de M. Jacoby et n'entraînant que des erreurs insignifiantes.

Dans le n° 239, M. Chandler donne un résumé substantiel des méthodes pour le calcul de la réfraction différentielle dans les divers cas qui peuvent se présenter, que l'on ait affaire à des mesures héliométriques ou photographiques; il relève quelques erreurs de Chauvenet et de Brünnow; il termine par des remarques sur l'influence de la réfraction dans l'orientation du fil polaire des lunettes équatoriales. [Cf. les articles de M. Gruy sur ce sujet (*Bulletin*, t. V, p. 91 et 193.).]

Reeman (Rev. A.). — Conjonction des satellites de Jupiter lors du passage du plan de l'orbite par la Terre.

Observations de la comète *d* 1890 (d'Arrest) et de la comète *e* 1890 (Zona) faites à l'Observatoire Leander Mc Cormick.

Serman (O.-T.). — Sur les discordances entre les Tables solaires et les positions observées de 1800 à 1886.

D'après l'auteur, on pourrait rattacher ces discordances à l'action des taches solaires et de la lumière zodiacale. Mais il faudrait d'abord évidemment bien s'assurer de la réalité des discordances en question.

Paul (H.-M.). — Observations de S Machine pneumatique.

Parkhurst (Henry M.). — Sur la période de U Poissons.

Howard (Charles P.). — Orbite du compagnon de Sirius.

Éléments de l'orbite obtenus graphiquement et comparaison avec les observations. On rapprochera de cet article celui de M. Barnham (*Bulletin* t. VIII, p. 411.)

Updegraff (M.). — Observations de la comète *e* 1890 (Zosma) faites à l'Observatoire de l'Université du Missouri.

Chandler (S.-C.). — Sur l'orbite de la comète 1887IV

Réflexions touchant une nouvelle détermination de l'orbite par M. Abetti qui critiquait à tort, paraît-il, les calculs antérieurs de M. Muller.

Updegraff (M.). — Méthode pour déterminer la collimation d'une lunette méridienne portative.

L'auteur estime, à tort il nous semble, que la détermination de la collimation n'est guère possible avec le bain de mercure et le niveau; elle est sujette à difficultés quand on retourne l'instrument. Il propose une méthode où la collimation résulte de la comparaison des passages d'étoiles horaires et polaires dans les deux positions de l'instrument.

Townley (S.-D.). — Observations de l'étoile variable U Poissons.

Jacoby (Harold). — Sur le calcul des positions des étoiles par les observations de latitude par la méthode Talcott.

On réduit les observations pour chaque couple d'étoiles en partant de la moyenne des déclinaisons des deux étoiles au commencement de l'année et appliquant une correction à la latitude obtenue.

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT. 25^e année, fascicule III. Leipzig, 1890.

Nous trouvons, en tête de ce fascicule, une Notice nécrologique sur Carl Adolph. Né en 1838, Adolph avait été attaché successivement, de 1859 à 1864, aux Observatoires de Gœttingue, de Poulkova et de Kœnigsberg; il entra ensuite dans la carrière de l'enseignement, et il était professeur à l'école technique d'Elberfeld lorsqu'il fut adjoint, comme assistant de M. Valentiner, à l'une des expéditions envoyées en Chine pour y observer le passage de Vénus (1874). Depuis 1877, il était professeur au gymnase de Sorau. Il est mort le 3 janvier 1890.

M. C.-V.-L. Charlier a consacré un compte rendu très étendu (37 pages) aux travaux suivants, qui procèdent des nouvelles théories de M. Gyldén.

P. Harzer, *Untersuchungen* . . . (Recherches sur un cas particulier du problème des trois corps), 1886.

M. Brendel, *Om Användningen* . . . (Application de la théorie des perturbations absolues), 1889.

H. Masal, Formules et tables pour le calcul des perturbations absolues, 1889.

M. Charlier a formulé diverses critiques qui ont provoqué des réponses de la part de MM. Gyldén, Brendel et Harzer. Les lecteurs du *Bulletin* connaissent d'ailleurs les travaux dont il s'agit ici, par l'analyse qu'en a donnée M. Callandreau (*Bull.*, VII, p. 470-497). Nous pouvons donc nous dispenser d'y revenir.

M. B. Peter rend compte du tome I des publications de l'Observatoire Kuffner, qui est dirigé par M. N. Herz. Nous en avons déjà parlé ici même (*Bull.*, t. VI, p. 211 et 264.) Le Tome II des *Observations astronomiques faites par B. d'Engelhardt* (Dresde, 1890) est l'objet d'un autre compte rendu.

Le fascicule se termine par des éphémérides d'étoiles variables, qui avaient été préparées comme d'habitude par M. Schoenfeld, et par un nouveau Rapport de M. Kapteyn sur les travaux entrepris en vue d'un inventaire (*Durchmusterung*) du ciel austral. Il s'agit du progrès des mesures micrométriques des épreuves obtenues par M. Gill, à l'Observatoire du Cap. Au mois de juin 1890, on avait mesuré 521 clichés contenant 555,350 positions; le travail était donc fait aux trois quarts. En même temps, on poussait activement la réduction des positions mesurées. La comparaison de ces positions avec celles du Catalogue de M. Gould a fait ressortir l'exactitude de ce Catalogue. R.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
t. CXII, n^{os} 22-26, et t. CXIII, n^{os} 1-15.

Crova (A.). — Analyse de la lumière diffusée par le ciel.

Faye (H.). — Sur les courants de déversement qui donnent naissance aux cyclones.

D'après M. le D^r Hann, les cyclones et les anticyclones ne sont dus à certaines conditions locales de température et de pression, ont leur origine dans les mouvements généraux de l'atmosphère occasionnés par l'opposition du froid des pôles et de la chaleur équatoriale. Ces vues ont été critiquées par M. Ferrel dans le journal anglais *Nature*. M. Faye établit que les cyclones, mais non les anticyclones, sont bien un phénomène dynamique, où les circonstances locales ont sans influence, mais dépendant des mouvements généraux de l'atmosphère.

Callandreau (O.). — Sur la théorie des étoiles filantes.

La théorie astronomique des étoiles filantes considère ces astres comme de petites comètes se mouvant par essaims dans l'espace, et ces essaims proviendraient de la décomposition plus ou moins complète de comètes, par suite de l'influence perturbatrice d'une des grosses planètes. M. Callandreau applique à l'orbite d'un flux d'étoiles filantes, le critérium de M. Tisserand (voir *Bulletin*, VI, p. 292) qui donne une relation entre les éléments de la comète avant la perturbation et les éléments de la même comète après cette perturbation; il déduit de là l'explication de certaines particularités mises en évidence par l'observation, notamment du déplacement vers l'est du point radiant des Perséides pendant la période d'activité.

Lowy. — Méthode pour la détermination des coordonnées équatoriales des centres des clichés constituant la Carte du Ciel.

Résumé d'un Mémoire qui sera publié dans le *Bulletin du Comité international de la Carte photographique du Ciel*, et analysé lorsque cette publication aura paru.

Trouvelot (E.-L.). — Phénomène lumineux extraordinaire observé sur le Soleil.

Le matin du 17 juin 1891, à 10^h 16^m temps moyen de Paris, M. Trouvelot a observé sur le bord occidental du Soleil, vers 285° d'angle de position, une tache extrêmement lumineuse, éblouissante, sous-tendant sur le limbe un arc de 3°, et qui se distinguait à première vue des facules, même les plus brillantes.

Une minute plus tard une autre tache analogue, mais moins lumineuse, apparaissait un peu au nord de la précédente et s'étendait sur un arc de 5° à 6°.

L'examen fait ensuite au spectroscope montra que cette région était le siège d'un phénomène très remarquable, quoique la période de plus grande activité parût être déjà passée : il s'en échappait comme des bombes volcaniques extra-incandescentes, qui s'élançaient dans les hauteurs à 2' ou 3' au-dessus de la chromosphère, où elles restaient comme suspendues, et apparaissaient comme des globules éblouissants sur un fond lumineux rougeâtre.

Ces globules furent bientôt remplacés par des filaments nombreux et fort brillants qui s'élevaient à une plus grande hauteur. En outre, les déplacements considérables de diverses raies accusaient d'énormes vitesses dans le sens du rayon visuel. A midi l'éruption était moins violente, mais les jets lumineux étaient encore brillants et très élevés; le lendemain 18 juin, à 9^h 30^m, l'énergie de la protubérance était encore forte.

Fényi (Jules). — Vitesse énorme d'une protubérance solaire, observée le 17 juin 1891.

Le soir du même jour où M. Trouvelot avait observé les phénomènes qui viennent d'être décrits, M. Fényi en notait aussi de très remarquables au même point de la surface solaire, où se trouvait un groupe de taches en train de se développer et qui allaient passer derrière le Soleil : une colline de 18" de haut, d'un éclat éblouissant, était le siège d'une éruption, dont l'extrême violence se traduisait par d'énormes déplacements des raies : la vitesse suivant le rayon visuel était d'environ 800^{km} par seconde; le déplacement de la masse dans le sens du rayon du Soleil était de près de 500^{km}, soit une vitesse totale d'au moins 1000^{km}, même en négligeant la troisième composante, qui est incertaine.

Ce qui est digne de remarque, c'est que, lorsque la même tache reparut au bord oriental le 1^{er} juillet, cette région solaire était encore très agitée. Comme la composante suivant le rayon visuel surpasse beaucoup, à elle seule, le potentiel du Soleil, nous pouvons conclure, dit M. Fényi, que le Soleil peut encore projeter dans l'espace céleste des masses qui ne le

rejoindront jamais. « Ces observations démontrent également qu'il est impossible, d'après les théories modernes, d'expliquer les mouvements grandioses qui s'opèrent dans l'atmosphère du Soleil, par un écoulement de gaz provenant de l'intérieur du globe.

» Ces considérations nous conduisent à admettre des forces autres que les mouvements atomiques pendant l'expansion des gaz. Pourquoi ne pas avoir recours aux forces électriques, bien connues par les expériences faites, et qui pourtant produisent dans la nature des effets mystérieux, soit par leur apparition prompte et inattendue, comme dans les boules de feu, soit par leur puissance illimitée dans les tempêtes ? »

André (Ch.). — Contribution à l'étude de l'électricité atmosphérique.

On admet généralement qu'il existe pour l'électricité atmosphérique une variation diurne normale, correspondant à un temps calme et à un état de ciel serein. Cependant les observations faites à Lyon depuis 1884, avec l'électromètre enregistreur de M. Mascart, et discutées par M. André, sont en contradiction avec cette manière de voir.

Tisserand (F.). — Sur l'inégalité lunaire à longue période due à l'action de Vénus, et dépendant de l'argument $l + 16l - 8l$.

Cette inégalité très importante a été découverte par Hansen, puis confirmée par les calculs de Delaunay, qui a négligé les puissances de l'inclinaison de l'orbite de Vénus supérieures à la seconde. M. Tisserand montre que les termes qui contiennent en facteur la quatrième puissance de l'inclinaison peuvent avoir une influence sensible et diminuer le coefficient de l'inégalité en question du dixième de sa valeur, soit 1,6 environ.

Meunier (Stanislas). — Sur une pluie de pierrailles calcaires récemment survenue dans le département de l'Aube.

Ces pierres paraissent avoir été apportées d'une distance d'au moins 150^{km}.

Marchand (Ém.). — Observations des taches et des facules solaires, faites à l'équatorial Brunner (0^m, 18) de l'Observatoire de Lyon, pendant le premier semestre de l'année 1891.

Tacchini (P.). — Résumé des observations solaires faites à l'Observatoire du Collège romain pendant le deuxième trimestre de 1891.

Tacchini (P.). — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain, pendant le premier semestre 1891.

Ricco (A.). — Variations périodiques en latitude des protubérances solaires

Il résulte de ces quatre Notes que l'activité solaire, manifestée par le nombre et l'étendue des taches et des facules, est dans une période d'augmentation rapide. Le nombre mensuel de jours sans taches a continué de diminuer rapidement, et il est nul depuis le mois d'avril. Les taches sont aujourd'hui plus fréquentes dans l'hémisphère nord que dans l'hémisphère sud; leurs latitudes sont généralement comprises entre $\pm 20^\circ$ et $\pm 30^\circ$; mais, dans l'ensemble, elles se rapprochent de l'équateur.

La distribution des facules suit une marche presque identique : en moyenne leur nombre et leur étendue s'accroissent rapidement; les zones de $\pm 20^\circ$ à $\pm 30^\circ$ restent encore les plus riches, mais celles de $\pm 10^\circ$ à $\pm 20^\circ$ en renferment presque autant; d'ailleurs, pour les facules, l'hémisphère nord est à peine plus riche que l'hémisphère sud. Le parallélisme des taches et des facules se maintient jusque dans les minima relatifs.

Mais, pour les protubérances, la loi de distribution est toute différente : les zones les plus riches sont celles de $\pm 40^\circ$ à $\pm 50^\circ$ et elles sont plus fréquentes dans l'hémisphère austral; l'opposition se conserve dans les maxima ou minima secondaires, ce qui prouverait que la relation entre les taches et les protubérances n'est pas aussi intime qu'on l'a supposé autrefois. Cependant, il résulte des observations faites à Palerme, pendant les onze années 1880-1890, que l'oscillation des latitudes des protubérances suit la même loi que la loi connue de l'oscillation des latitudes des taches, et qui consiste en ce que, pendant la période undécennale de l'activité solaire, les taches se rapprochent graduellement de l'équateur jusqu'à l'époque du minimum; puis les taches commencent à reparaitre aux hautes latitudes, pour descendre de nouveau vers l'équateur pendant le cycle suivant. Seulement les protubérances sont toujours plus éloignées de l'équateur d'environ 14° .

Mouches. — Observations des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, pendant le

deuxième semestre de l'année 1890 et le premier trimestre de l'année 1891.

Deux de ces observations ont été faites par M. Barré, et les autres par M. Callandreau.

Mouchez. — Troisième réunion du Comité international de la Carte du ciel. Présentation des procès-verbaux.

Voir page 461 de ce volume.

Flammarion (C.). — Disparition apparente presque totale des satellites de Jupiter, le 15 juillet 1891.

Labatut. — L'absorption et la photographie des couleurs.

Janssen (J.). — Note sur un projet d'Observatoire au Mont-Blanc.

À la suite d'une ascension faite en 1890 au sommet du Mont-Blanc, M. Janssen avait proposé d'ériger un observatoire sur ce sommet. Grâce au concours de M. Bischoffsheim, du prince Rolland Bonaparte, du baron de Rothschild et de M. Eiffel, on a pu commencer les études préliminaires, pour se rendre compte de l'épaisseur de la croûte de glace qui recouvre le sommet. Ces travaux ont été confiés à un ingénieur suisse, M. Imfeld. Comme un sondage profond au sommet du Mont-Blanc aurait présenté des difficultés sérieuses et même des dangers, M. Imfeld compte réaliser ce sondage en pratiquant une galerie horizontale dans la glace même et dans laquelle les travailleurs seront à l'abri.

Mascart. — Sur le retard des impressions lumineuses.

Charpentier (Aug.). — Analyse chromoscopique de la lune blanche.

Deslandres (H.). — Recherches nouvelles sur l'atmosphère solaire.

Ces recherches ont été faites à l'Observatoire de Paris à l'aide du sidérostas de Foucault, d'un objectif de 12 pouces et d'un spectroscopie photographique à un, deux ou trois prismes de flint léger; les deux verres de l'objectif avaient été séparés de manière à obtenir l'achromatisme pour les rayons chimiques.

Malgré la faiblesse de la dispersion, M. Deslandres a obtenu photographiquement les raies permanentes de la chromosphère du bleu et du violet, mais avec des intensités très différentes de celles que donne l'œil, car les raies H et K du calcium, qui sont extrêmement faibles à l'œil, se sont montrées, sur les épreuves photographiques, beaucoup plus intenses et plus longues que les raies de l'hydrogène.

Une raie permanente voisine de H et notée par Young comme appartenant à un élément inconnu a été identifiée avec une raie de l'hydrogène, et, dans la partie ultra-violette invisible, il a été reconnu deux raies permanentes nouvelles, qui correspondent aux deux premières raies de l'hydrogène de la série stellaire de M. Huggins.

« Mais, ajoute M. Deslandres, le résultat le plus frappant est la prédominance marquée des raies attribuées au calcium. Les vapeurs correspondantes s'élèveraient donc plus haut que l'hydrogène, ce qui renverse les idées reçues sur la composition de l'atmosphère solaire. Ce résultat étonne moins lorsqu'on remarque que ces raies H et K sont les plus larges du spectre normal du Soleil et doivent donc se trouver très fortes dans la couche absorbante. Il est, d'ailleurs, en accord avec la grande extension de ces mêmes raies que montrent les photographies du spectre de la couronne faites pendant les éclipses de 1882, 1883, 1886, par MM. Abney et Schuster.

« Une autre propriété de ces raies brillantes du calcium, importante au point de vue pratique, est la possibilité de les obtenir avec une très faible dispersion. La grande largeur du fond noir sur lequel elles se projettent leur assure cet avantage et même explique jusqu'à un certain point leur grande extension. Avec les raies de l'hydrogène, au contraire, la découverte des protubérances a été, comme on sait, arrêtée pendant deux ans par la dispersion insuffisante des appareils. »

Enfin M. Deslandres termine sa Note par la description d'un dispositif qui permettra d'enregistrer d'une manière continue la forme et la vitesse des masses incandescentes à la surface du Soleil.

Sévert (Dom *Et.*). — Remarques sur les conditions dynamiques du développement des queues cométaires.

On sait, depuis les recherches de E. Roche, que, sous l'influence de l'attraction du Soleil, l'atmosphère d'une comète est nécessairement limitée dans ses états successifs, et qu'alors le fluide qui constitue cette atmosphère doit s'écouler par les deux sommets de son grand axe, pour former deux queues opposées, et dirigées à peu près l'une vers le Soleil et l'autre à l'opposé. Cependant l'observation ne constate ordinairement

que la queue opposée au Soleil. Quelles sont donc les circonstances qui favorisent la disparition de la queue antérieure?

Ce serait d'abord la température plus élevée qui règne dans la région de la queue antérieure et qui l'épanouirait par dilatation, en vertu de l'expansibilité des gaz. En outre, si la comète est périodique, elle se meut dans une orbite remplie des épaves laissées dans les passages précédents. Il en résulte une sorte de milieu résistant qui joue un très grand rôle dans les explications, nécessairement vagues, de l'auteur.

Marre (Aristide). — La Condamine est né, non pas le 28 janvier 1701, mais le 27 janvier.

Un extrait des registres de la paroisse Saint-Roch, à Paris, conservé au greffe de l'État civil, au Palais de Justice, indique, en effet, que Charles-Marie de la Condamine a été baptisé dans cette paroisse le 28 janvier, et qu'il était né la veille.

Bosscha. — Études relatives à la comparaison du mètre international avec le prototype des Archives.

Færster. — Remarques sur le prototype international du mètre.

M. Bosscha s'est demandé si le mètre étalon international est bien identique, à zéro, au mètre des Archives, ainsi que l'a proclamé une résolution de la Conférence générale des Poids et Mesures, et si les équations métriques des étalons nationaux reproduisent la longueur du prototype avec toute la précision que l'on peut exiger. De la discussion des nombres obtenus il résulte, dit-il, que « le mètre international et les étalons nationaux, tels qu'ils sont définis par les équations sanctionnées par la Conférence générale des Poids et Mesures, représentent une unité de longueur sensiblement différente du mètre des Archives. Ils sont plus courts d'environ 2^u,6, c'est-à-dire d'environ un quatre-cent-millième de leur longueur. »

M. Bosscha s'est demandé également si le mètre des Archives, dans son état actuel (mètre à bouts), permet d'opérer des comparaisons assez précises pour qu'il soit possible d'en déduire une unité de longueur invariable, au degré d'exactitude réclamé pour les recherches de haute précision, c'est-à-dire compris entre le millièmième et le demi-millièmième, le micron et le demi-micron. La réponse affirmative résulte de quatre comparaisons du mètre n° 23 avec celui des Archives à 16^o,44, et dans lesquelles l'ajustement des organes de comparaison avait été changé, ainsi que les observateurs, les grossissements des microscopes, etc. Les

quatre différences ainsi obtenues sont les suivantes : 1^{re}, 53, 1^{re}, 26, 1^{re}, 78 et 1^{re}, 01. Ainsi, dit-il, « après un siècle d'existence, le mètre des Archives permet encore d'en déduire une unité de longueur invariable, avec toute la précision requise dans les mesures d'un prototype. A ce titre, il mérite d'être conservé, non seulement comme monument historique, mais aussi comme instrument scientifique de premier ordre. » Enfin il critique la manière dont on a conduit les expériences destinées à donner les équations des divers mètres.

Sans entrer dans la discussion scientifique de la question, M. Fœrster, président du Comité international des Poids et Mesures, répond à la Note de M. Bosscha que, depuis la Conférence générale de 1889, *le seul représentant légal de l'unité fondamentale du système métrique, reconnu par tous les pays ayant adhéré à la convention du Mètre, est le prototype international en platine iridié, déposé au Bureau international des Poids et Mesures.* D'ailleurs, lorsqu'il s'agit de comparer le prototype international, qui est un mètre à traits, avec un mètre à bouts tel que celui des Archives, le degré d'exactitude auquel on peut parvenir ne permet pas d'établir sûrement des équations aussi faibles que celles qui figurent dans le Mémoire de M. Bosscha. Aussi « le Comité international des Poids et Mesures conclut que, dans l'intérêt de l'invariabilité et de l'unité des Poids et Mesures, il n'est pas admissible de faire dépendre, de corrections incertaines et incessantes, la base du système métrique, maintenant définie matériellement par le prototype international. »

izeau. — Remarques sur l'influence que l'aberration de la lumière peut exercer sur les observations des protubérances solaires par l'analyse spectrale.

On admet généralement que les protubérances solaires sont dues à de vastes éruptions gazeuses dans lesquelles domine l'hydrogène, et qui s'élèvent rapidement à des hauteurs parfois énormes au-dessus de la surface solaire, pour y revenir au bout de quelques heures. Il se produit donc là des mouvements dont les vitesses sont égales et parfois bien supérieures à celles des planètes dans leurs orbites, et en particulier à celle de la Terre; de sorte qu'on est conduit à rechercher dans quelles limites peuvent ici intervenir les lois bien connues de l'aberration.

Il en sera encore de même si, au lieu d'admettre que les protubérances résultent du transport matériel de l'hydrogène et des vapeurs métalliques rendus visibles par leurs hautes températures, on les considère comme un développement extraordinaire de phénomènes électriques,

analogues à nos orages et à nos aurores boréales. Ce qui donne à cette dernière hypothèse un degré spécial de probabilité, « c'est, dit M. Fizeau, l'intervention constante de l'électricité dans les expériences où l'on observe les raies de l'hydrogène.

» Malgré des tentatives nombreuses, l'hydrogène brûlant ou échauffé, comprimé ou dilaté, ne paraît pas avoir montré jusqu'ici ses raies caractéristiques sans l'emploi de l'électricité sous forme d'étincelle, de courant ou d'effluve.

» Or les protubérances sont constamment teintées de rosé, par les raies multiples de l'hydrogène et particulièrement par la prédominance de la raie rouge C. De plus on a souvent signalé dans les protubérances la rapidité des changements de forme, les brusques modifications d'éclat, l'aspect rubané, ondulé, interrompu, avec des parties contournées complètement isolées et séparées du bord solaire. Toutes ces apparences s'accordent sans difficulté avec l'hypothèse électrique et surtout avec les phénomènes variés que présentent les aurores boréales... A ce point de vue, qui paraît être adopté aujourd'hui par plusieurs physiciens et astronomes, on doit considérer les apparences lumineuses des protubérances non comme dues à des transports de matière, mais comme résultant de la propagation non instantanée de phénomènes électriques à travers des masses gazeuses, qui peuvent avoir leurs mouvements propres, mais ne les imposent pas aux phénomènes électriques et lumineux. »

Faye (H.). — Sur les discussions récentes au sujet des cyclones.

Mouchez. — Présentation du deuxième volume du Catalogue de l'Observatoire de Paris.

Ce volume, qui renferme les étoiles de six heures à douze heures d'ascension droite, a été préparé comme le premier, par M. Gaillot, assisté de M. Bossert.

Mouchez. — Présentation de la première partie des « Observations de nébuleuses et d'amas stellaires, par M. G. Bigourdan ».

Ce travail sera analysé prochainement.

Landerer (J.-J.). — Sur l'éclipse partielle du premier satellite de Jupiter par l'ombre du deuxième.

Aymonnet. — Relation entre l'indice de réfraction d'un corps, sa densité, son poids moléculaire et son pouvoir diathermane.

Trouvelot (E.-L.). — Chute d'une protubérance solaire dans l'ouverture d'une tache.

Après avoir décrit ce phénomène, qu'il est difficile d'attribuer au hasard, M. Trouvelot ajoute : « Mes observations spectroscopiques m'ont appris que, parmi les taches qui traversent le limbe solaire, il en est qui sont le siège d'éruptions violentes et qui lancent à de grandes hauteurs des jets de matières incandescentes, tandis qu'il en est d'autres qui ne montrent aucune activité et traversent le limbe sans montrer la plus petite trace d'éruption. Au point de vue de l'activité, les taches solaires peuvent donc se diviser en deux classes : celles qui montrent des traces d'activité et celles qui en paraissent dépourvues. L'étude des taches faite à ce point de vue pourrait, il semble, conduire à des résultats intéressants. »

Stroobant (P.). — Recherches expérimentales sur l'équation personnelle dans les observations de passage.

Ces recherches ont été faites à l'Observatoire de Paris, de janvier à juin 1891, à l'aide de l'appareil de M. Wolf, décrit dans les *Annales de l'Observatoire (Mémoires, tome VIII)*; M. Stroobant a étudié successivement l'influence du sens du mouvement, du mode d'enregistrement (méthode électrique ou méthode de l'œil et de l'oreille), de l'éclaircissement du champ, etc. Voici le résumé des résultats qu'il a obtenus pour son équation personnelle, considérée comme positive quand le passage est noté trop tard.

Étoiles. — La méthode de l'œil et de l'oreille n'est guère inférieure à l'enregistrement électrique. L'équation personnelle a une très faible valeur négative qui est un peu plus prononcée lorsque le mouvement est inverse, et qui, en valeur absolue, est un peu plus forte dans la méthode de l'œil et de l'oreille.

Éclaircissement du champ. — Il est sans influence marquée.

Disques. — Pour des disques de diverses grandeurs correspondant aux diamètres apparents de la Lune et de diverses planètes, l'équation personnelle est très différente suivant le bord observé, car on trouve — 0^o,14 pour le bord précédent et + 0^o,03 pour le bord suivant.

Variation de l'équation personnelle. — Elle est surtout prononcée au début des expériences; après deux mois environ d'exercice, on trouve sensiblement les mêmes résultats en des jours différents. Lorsqu'on prolonge les expériences pendant un certain nombre d'heures consécutives, il y a une tendance de plus en plus marquée à enregistrer le passage de plus en plus tôt.

Appréciation de l'erreur personnelle par l'observateur lui-même.

— Lorsque les expériences étaient faites par la méthode électrique, on a fréquemment noté que l'enregistrement avait eu lieu trop tôt ou trop tard. Sur 82 de ces remarques, il s'est trouvé 69 estimations justes et 13 fausses seulement : il est donc important de tenir compte de ces remarques.

Équation décimale. — Dans les observations par la méthode de l'œil et de l'oreille, l'observateur a une tendance à choisir certains dixièmes de préférence à d'autres : pour M. Stroobant, les dixièmes 0, 2, 3 sont les plus fréquents, tandis que 9 et 8 sont les plus rares. Il a constaté qu'il a également une équation décimale pour les mesures linéaires, car dans le relevé des bandes du chronographe les dixièmes 0 et 5 dominent beaucoup, tandis que les dixièmes 9 et 1 sont les plus rares.

Éclipse partielle de Soleil du 6 juin 1891. Observations par MM. Charlois, Colomas, Gonnessiat, Javelle, Le Cadet, Léotard, Perrotin.

Comète Swift (1889 VI). — Éléments elliptiques par M. Hind.

Comète Brooks (1890 II). — Observations par MM. Picart, Rayet.

Comète Spitaler (1890 VII). — Éléments elliptiques par M. Hind.

Comète périodique Wolf. — Observations par MM. Bigourdan, Cosserat, Le Cadet, Rambaud, Sy.

Comète Tempel-Swift. — Observations par M^{lle} Klumpke, M. Bigourdan.

Planète découverte par M. Charlois, le 16 mai 1891. Observations par M. Charlois.

Planète découverte par M. Charlois, le 11 juin 1891. Observations par MM. Charlois, Rambaud, Sy et M^{lle} Klumpke.

Planète découverte par M. Charlois, le 28 août 1891. Observations par MM. Charlois, Sy.

Planète découverte par M. Palisa, le 30 août 1891. Observations par M. Cosserat.

Planètes découvertes par M. Charlois, les 1^{er}, 8 et 11 septembre.
Observations par M. Charlois.

G. B.

SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DU PACIFIQUE.

VOLUME II.

Publication n° 8.

Holden (E.-S.). — Éclipse du 21 décembre 1889.

Depuy (A.-B.). — Société astronomique de Camden, N. J.

Leuschner (A.-O.). — Éléments de la comète Brooks (19 mars 1890).

Stringham (I.). — Critérium sur la continuité des fonctions à une variable réelle.

Pierson (W.-M.). — La couleur stellaire est-elle un indice de l'âge des étoiles?

L'examen approfondi de 188 étoiles doubles étudiées par MM. Holden, Gore, Burnham, Young et Webb a conduit M. Pierson aux remarques suivantes :

1° Lorsque les composantes d'un système binaire sont de même grandeur, elles ont invariablement la même couleur.

2° Lorsqu'elles diffèrent l'une de l'autre par leur grandeur, elles diffèrent aussi par leur couleur, le rapport des couleurs étant à peu près le même que celui des grandeurs.

3° Lorsque la différence des grandeurs est considérable, la composante la plus faible est d'une couleur plus voisine de la région bleue du spectre que la composante plus brillante.

Une question se pose : De ces deux composantes, de même origine, si l'on admet l'hypothèse nébulaire de Laplace, et placées dans des conditions identiques, laquelle est la plus âgée? Est-ce l'étoile rouge, est-ce l'étoile bleue?

En admettant que les lois de la chaleur et du refroidissement des corps s'appliquent aux systèmes binaires, on serait conduit à dire que la composante la plus faible ne peut être à une température plus élevée que la composante plus brillante; celle-ci devra donc se trouver à un état

nébulaire moins avancé. S'il en était ainsi, l'observation des étoiles doubles conduirait à penser que plus une étoile est froide, plus sa couleur tire sur le violet, d'où il résulterait, par extension, que les étoiles rouges quelconques sont plus jeunes que les étoiles bleues.

Michaelson (A.-A.). — Note sur la définition, le pouvoir de séparation et la précision des télescopes et des microscopes.

Notes de l'Observatoire Lick.

Liste des observations de comètes faites au mont Hamilton.

Instruments nouveaux acquis par l'Observatoire Lick.

Parmi ces instruments se trouvent :

Deux spectroscopes destinés, l'un à l'observation des objets faibles tels que les aurores, la lumière zodiacale; l'autre à l'étude des étoiles variables; ce dernier peut s'adapter au grand réfracteur de 36 pouces.

Une lentille Willard et une lentille Dallmeyer montées l'une à côté de l'autre, avec lesquelles M. Barnard prendra des photographies de la voie lactée.

Un grand oculaire périscopique en verre d'Iéna pouvant s'adapter au grand réfracteur.

Un thermomètre enregistreur de MM. Richard frères de Paris.

Observation de l'occultation de Mars par la Lune.

Observation de l'occultation de Japetus par Saturne faite au réfracteur de 36 pouces par MM. Holden et Keeler (figure dans le texte.)

La tache blanche signalée en 1889 par M. Terby semble être due à de mauvaises conditions atmosphériques. Il paraît aujourd'hui certain que, dans les conditions les plus favorables, on ne peut observer un objet aussi faible que Japetus à travers la division de Cassini. Avec un grossissement de 1400 M. Keeler a pu voir, par moments, la nouvelle division dans l'anneau extérieur. M. Barnard a cherché à apercevoir ce satellite avec la lunette de 12 pouces, mais il n'a pu en soupçonner la moindre trace.

Leuschner (A.-O.). — Occultations d'étoiles par la Lune.

Barnard (E.-E.). — Photographies de la lumière cendrée de la Lune faites avec l'équatorial de 12 pouces et des plaques Secc 26, l'âge de la Lune étant de 21,9.

On obtient des détails très fins avec une pose de 40 à 70 secondes.

Burnham (S.-W.). — Observations du compagnon de Sirius.

Publication n° 9.

Meyer (M.-W.). — Die Urania Gesellschaft.

(Figures dans le texte, voir *Bulletin*, t. V, p. 548.)

Holden (E.-S.). — La Photographie astronomique à l'Observatoire Lick.

En parlant de la Photométrie photographique, M. Holden remarque qu'il semble résulter des recherches faites au mont Hamilton que, pour une lumière d'intensité donnée et pour des durées d'exposition très courtes, l'opacité D du précipité d'argent varie plus rapidement que le temps T. Pour des expositions plus longues, il y a à peu près proportionnalité entre D et T; pour des poses plus longues encore, la proportionnalité entre D et T cesse d'exister bien avant que les halos se produisent. Les limites entre lesquelles D varie en raison directe de T semblent ne pas être les mêmes pour les lumières d'intensité différente.

Keeler (J.-E.). — Sur l'aberration chromatique du réfracteur de 36 pouces.

Il existe pour tout réfracteur une certaine relation, $F = \varphi(\lambda)$, entre les longueurs d'onde de la lumière et les distances focales correspondantes. La représentation graphique de cette relation, appelée *courbe des couleurs*, a été étudiée, pour le réfracteur du mont Hamilton, par M. Keeler, puis comparée à celle que M. Vogel avait obtenue pour le réfracteur de 27 pouces de l'Observatoire de Vienne. La comparaison de ces courbes montre que l'aberration chromatique du réfracteur Lick est plus faible que celle de l'instrument de Vienne, fait qui tient surtout à ce que le rapport $\frac{\text{distance focale}}{\text{ouverture de l'objectif}}$ est égal à 19 dans le premier cas et à 15 seulement dans le second.

Searle (G.-M.). — Les planètes sont-elles habitées?

Stringham (I.). — Sur les fonctions hyperbo-elliptiques.

Clerke (Miss A.-M.). — Le système de ζ Cancer.

L'auteur donne un aperçu historique de ce système et expose les conclusions d'un travail de M. Seeliger. (Voir *Bulletin*, t. IV, p. 81.)

Notes de l'Observatoire Lick.

Leuschner (A.-O.). — Constantes du cercle méridien de l'Observatoire Lick.

Burnham (S.-W.). — Valeur du tour de vis micrométrique du réfracteur de 36 pouces.

Holden (E.-S.) et *Schaeberle (J.-M.)*. — Angles de positions de deux faibles bandes d'Uranus observées le 13 avril 1890.

Publication n° 40.

Weinek (L.). — Dessins de la Lune.

Kirkwood (D.). — Sur l'âge des comètes périodiques.

Updegraff (M.). — Quelques notes sur l'Astronomie dans l'Amérique du Sud.

Cet article contient des indications intéressantes sur les observatoires de Cordoba, de la Plata, de Santiago et sur l'expédition scientifique envoyée en février 1889 par l'Observatoire du Collège d'Harvard dans l'Amérique du Sud pour y continuer le travail photographique commencé à Cambridge. L'expédition, dirigée par M. S.-G. Bailey, a installé son observatoire à une altitude de 2027^m environ, au sommet d'une montagne située à 13^{km} au nord de Chosica (Pérou). Parmi les nombreux instruments astronomiques et météorologiques dont elle dispose se trouvent une lunette photographique et un photomètre méridien respectivement de 8 et 6 pouces d'ouverture avec lesquels elle prendra quatre séries de clichés du ciel austral de -15° à -90° de déclinaison. Les deux premières séries de clichés, dont les durées de pose seront de 10 et de 60 minutes, contiendront les spectres des étoiles les plus brillantes et ceux de toutes les étoiles jusqu'à la 8^e grandeur. Les clichés des deux autres séries formeront des cartes stellaires de toutes les étoiles jusqu'à la 10^e et la 14^e grandeur inclusivement; les durées d'exposition de ces deux séries seront encore de 10 et de 60 minutes. Pendant les quatre premiers mois de leur séjour au mont Harvard, les astronomes de Cambridge ont pu faire plus de 1200 clichés et 26000 mesures d'éclat. De septembre à octobre le ciel a été si peu favorable aux observations astronomiques que M. Bailey, laissant la direction des instruments à l'un de ses assistants, a parcouru avec son frère les côtes du Pérou, de la

Bolivie, du Chili, faisant partout de nombreuses observations météorologiques. Le 6 janvier 1891, ils se sont installés dans la Pampa centrale (désert d'Atacama), à 136^{km} d'Antofagasta, à une altitude de 1382^m, et ils y ont fait de nombreuses observations avec le photomètre méridien qui leur a été envoyé du Pérou. Le ciel de la Pampa est d'une transparence remarquable; on peut en juger par les mesures d'éclat de 890 étoiles faites en quatre soirées. Les brouillards semblent y être inconnus; la Pampa servira probablement de station centrale à l'expédition pendant son séjour dans l'Amérique du Sud.

euschner (A.-O.). — Errata du traité de la détermination des orbites des comètes et des planètes par Th. d'Oppolzer.

euschner (A.-O.). — Éléments de la comète Coggia (18 juillet 1890) et de la comète Denning (23 juillet 1890).

Schmidt (R.). — Sur un moyen de développer notre connaissance des astéroïdes.

Dans cette notice, extraite de *die Natur*, M. Schmidt fait un appel à l'Amérique du Nord pour qu'elle détourne le coup fatal qui menace de frapper la théorie des petites planètes. L'étendue considérable de ce travail a obligé la rédaction du *Berliner Jahrbuch* à limiter ses efforts à quatre catégories de planètes comprenant :

1^o Celles qui s'approchant beaucoup de la Terre conviennent à la détermination de la parallaxe du Soleil;

2^o Celles qui s'approchant de Jupiter sont utiles dans la détermination de la masse de cette planète;

3^o Celles dont la période de révolution est à peu près commensurable avec celle de Jupiter. Les orbites de ces planètes sont d'une grande importance dans la théorie des perturbations absolues;

4^o Celles qui présentent un éclat considérable et qui sont par conséquent précieuses dans les recherches photométriques.

M. Schmidt demande si l'on ne pourrait pas organiser aux États-Unis un bureau de calculs qui se chargerait de la théorie des petites planètes que le *Berliner Jahrbuch* se voit obligé d'abandonner?

Sarnard (E.-E.). — Sur les photographies de la voie lactée faites à l'Observatoire Lick en 1889.

Avec une lentille à portrait de 6 pouces d'ouverture et de 31 pouces

de distance focale, M. Barnard a pu prendre trois photographies de différentes régions de la voie lactée; la durée d'exposition la plus longue a été de 5 heures 10 minutes. La photographie représentant la région de la voie lactée qui se trouve dans la constellation du Verseau est particulièrement intéressante : la voie lactée y est reproduite telle qu'elle nous apparaît à l'œil nu, avec ses myriades d'étoiles et ses nuages blanchâtres d'une structure toute particulière.

Hill (C.-B.). — Passage noir du 4^e satellite de Jupiter.

Notes de l'Observatoire Lick.

La médaille Donohoe a été décernée à M. W.-F. Denning pour sa découverte de la comète *c* 1890.

Barnard (E.-E.). — Observations faites du 26 avril au 2 août 1890 de cinq petites taches situées près du bord nord de la bande équatoriale de Jupiter.

Holden (E.-S.), Schaeberle (J.-M.), Keeler (J.-E.). — Observations de taches blanches sur le terminateur de Mars, faites les 5 et 6 juillet 1890.

Holden (E.-S.), Campbell (W.-W.). — Photographies de Vénus, de Mercure et de Véga faites pendant le jour avec le grand réfracteur dont l'ouverture avait été réduite à 33, 15, 8 et 4 pouces, la durée d'exposition étant de 0^s,13.

Barnard (E.-E.). — Sur le passage noir du 4^e satellite de Jupiter observé le 13 août 1890 à l'Observatoire Lick, à l'équatorial de 12 pouces.

Sur les expériences photographiques faites avec le réfracteur de 36 pouces.

Les photographies prises de l'étoile quadruple d'ε Lyre et les mesures des disques photographiques montrent qu'à l'aide du réfracteur et de l'excellent appareil de mesure de l'Observatoire Lick on pourra photographier et mesurer, d'une manière très rapide, toutes les étoiles doubles dont les composantes, assez brillantes, ont à peu près le même éclat et sont au moins à 2" ou 3" l'une de l'autre. Les étoiles doubles très serrées et d'éclats très différents devront être observées directement.

Sur les parallaxes des nébuleuses.

En réduisant convenablement la durée d'exposition, on peut présenter l'image photographique d'une nébuleuse sous l'aspect d'une étoile de la

9° ou de la 10^e grandeur qui pourra se pointer aisément. M. Holden pense qu'une série de négatifs pris pendant le courant d'une même année, toujours avec la même durée d'exposition, fournirait un moyen de déterminer la parallaxe des nébuleuses.

Keeler (J.-E.). — Sur l'aberration chromatique du réfracteur de 30 pouces de Poulkova.

La courbe des couleurs relative au réfracteur de Poulkova a été comparée, par M. Keeler, à celles des réfracteurs de Vienne ou du Mont Hamilton. Ces courbes ne diffèrent pas sensiblement les unes des autres.

L'Observatoire Lick est entré en possession d'une installation complète d'éclairage électrique qu'elle doit à la générosité de la Compagnie Edison.

Publication n° 44.

Keeler (J.-E.). Sur la vitesse des nébuleuses planétaires dans la direction du rayon visuel (voir *Bulletin*, t. VIII, p. 130).

Des observations spectroscopiques, faites avec le réfracteur de 36 pouces, à la demande du D^r Huggins, de la nébuleuse d'Orion, puis des nébuleuses G.C 4234 et 4373, il semble résulter que les raies du spectre des nébuleuses sont des images parfaitement monochromatiques de la fente, s'élargissant et se rétrécissant avec la dimension de celle-ci. La raie la plus brillante du spectre observée dans différentes conditions a toujours présenté l'apparence propre à une lumière émise par un gaz à une température et une pression peu élevées, et non celle d'un reste de cannelure. Pour les deux nébuleuses G.C 4234 et 4373, la principale raie spectrale, tout en tombant au delà du bord le moins réfrangible de Mg, occupait dans les spectres de ces nébuleuses des positions tellement différentes, que M. Keeler en a conclu à un déplacement radial rapide de l'une ou de l'autre nébuleuse.

Avec un excellent spectroscopie de Brashear, adapté au réfracteur de 36 pouces, il a étudié un certain nombre de nébuleuses planétaires. Les vitesses dont seraient animés ces objets dans la direction du rayon visuel sont de -50 à $+62^{\text{km}}$ à la seconde.

Keeler (J.-E.). — Sur la longueur d'onde de la deuxième raie du spectre des nébuleuses.

Il résulte des études des spectres des nébuleuses G.C 7027 et 4373 que la deuxième raie des spectres des nébuleuses éprouve le même déplacement que la première, et que ces deux raies ont la même origine. La

longueur d'onde de la deuxième raie serait de 4957,7. Cette valeur diffère peu de celles trouvées autrefois par d'Arrest (4956,6), par M. Copeland (4958,0) et M. le Dr Huggins (4957,0).

Keeler (J.-E.). — Vitesse radiale d'Arcturus.

L'étude de la raie D du spectre d'Arcturus montre que la vitesse radiale de cette étoile est, non de 80^{km}, valeur admise jusqu'ici, mais de 6^{km},4. Cette valeur s'accorde avec celle obtenue par M. Vogel. La moyenne des mesures des raies spectrales d'Arcturus, faites à Potsdam du 5 octobre 1888 au 23 mai 1890, donne pour la vitesse radiale d'Arcturus — 7^{km},1 ± 0,3. Les observations faites à Lick du 10 avril 1890 au 15 août 1890 donnent — 6^{km},9.

Keeler (J.-E.). — Aspect de Jupiter en 1889.

Hill (C.-B.). — Observations du passage du IV^e satellite Jupiter sur le disque de la planète.

Instruments astronomiques en cours de construction aux États-Unis.

Notes de l'Observatoire Lick.

Barnard (E.-E.). — Passage sombre du III^e satellite de Jupiter sur disque de la planète.

M. Barnard remarque que, pendant leur passage sur la planète, les satellites III et IV présentent fréquemment l'aspect de taches sombres; le satellite I a souvent une teinte foncée; le satellite II, au contraire, n'a jamais été vu sombre.

Keeler (J.-E.). — Passages sombres du I^{er} satellite de Jupiter.

Keeler (J.-E.). — Explication probable des passages sombres des satellites de Jupiter.

On a constaté que :

1° Dans les passages ordinaires, les satellites paraissent brillants près du bord du disque de Jupiter et qu'on les perd de vue dans les régions centrales de la planète;

2° Les satellites paraissent quelquefois plus sombres que les régions du disque de Jupiter sur lesquelles ils se trouvent projetés. Sur le fond du ciel, ils paraissent très brillants;

3° Les passages sombres sont plus nombreux pour les satellites extérieurs que pour les satellites intérieurs;

4° Ces phénomènes sont irréguliers.

Dans l'opinion de M. Keeler on pourrait, dans une certaine mesure, expliquer ces faits d'observation en admettant que les satellites soient des corps froids et durs, d'un faible pouvoir réfléchissant, entourés d'une atmosphère contenant de la vapeur d'eau.

Holden (E.-S.). — Sur l'explication des passages sombres des satellites de Jupiter.

Pour M. Holden, le phénomène des passages sombres des satellites de Jupiter sur le disque de la planète s'expliquerait par la différence des pouvoirs réfléchissants des astres en question. On peut définir l'*albedo* ou pouvoir réfléchissant d'un corps par le rapport

$$\frac{\text{Lumière réfléchie par l'unité de surface}}{\text{Lumière reçue par l'unité de surface}}$$

Or la lumière reçue par Jupiter et ses satellites étant la même pour l'unité de surface, on peut considérer l'*albedo* comme proportionnel à l'éclat intrinsèque de ces astres, savoir à

$$0,62; 0,22; 0,27; 0,14; 0,08.$$

Représentons l'éclat intrinsèque d'un satellite par a ; l'éclat intrinsèque du fond du ciel étant inférieur à a , le satellite paraîtra brillant sur un fond obscur.

Supposons maintenant que le satellite soit projeté sur le bord du disque de Jupiter dont l'éclat est A .

Si

$a > A$, le satellite paraîtra brillant sur fond obscur.

$a = A$, le satellite sera invisible.

$a < A$, le satellite paraîtra sombre,

pourvu toutefois que le diamètre angulaire du satellite paraisse assez grand dans la lunette employée.

Les diamètres angulaires des satellites étant environ

$$1'',08 \text{ I}; 0'',91 \text{ II}; 1'',54 \text{ III}; 1'',28 \text{ IV},$$

III et IV paraîtront plus fréquemment sombres que I et II.

Cette explication, ajoute M. Holden, n'est pas nouvelle : c'est en principe celle de Klein (*Astr. Nachr.*, 2014), de M. Young (*General Astronomy*, § 624).

M. Holden a fait des déterminations de l'éclat intrinsèque de quelques

régions du disque de Jupiter. Il s'est servi pour cela d'une reproduction sur papier d'une image agrandie de la planète et d'une reproduction photographique, également sur papier, d'une échelle photométrique soigneusement construite par M. Burnham.

En laissant de côté les causes d'erreurs, la comparaison des teintes montre que, au point de vue photographique, l'éclat intrinsèque de certaines régions du disque de Jupiter est au moins 13 fois plus grand que l'éclat des bords. Pour l'œil, la différence entre les éclats intrinsèques est loin d'être aussi grande, mais pour les éclats extrêmes elle est certainement de 10 unités. Or les satellites de Jupiter, notamment le IV^e dont l'*albedo* est 0,08, paraissent souvent brillants près des bords de la planète; cette remarque permet d'obtenir des valeurs approchées de l'éclat des différentes régions de Jupiter. En prenant les valeurs numériques des *albedos* pour les mesures des éclats intrinsèques, on peut admettre, d'après ce qui précède, que l'éclat du bord de Jupiter est 0,07; l'éclat de la région centrale serait donc 0,70. Ces estimations ne sont pas éloignées de la vérité, puisque on a trouvé pour l'éclat moyen de Jupiter 0,62.

L'échelle photométrique montre que certaines régions de Jupiter ne sont que 3 ou 4 fois plus brillantes que les régions du bord : les éclats intrinsèques de ces régions peuvent donc être représentés par 0,21 ou 0,28.

Sur ces régions, le II^e satellite serait invisible, le contraste n'étant pas assez grand pour le faire paraître ou brillant ou sombre. Sur les régions les plus lumineuses, de l'éclat 0,70 ou d'un éclat plus grand encore, les satellites paraîtraient certainement sombres. En observant II avec des instruments convenables on le verra probablement aussi sous la forme d'une tache noire.

Note sur l'opposition de Mars 1890.

Sur l'avenir de la photographie stellaire.

Extrait d'une lettre écrite en 1857, par G.-P. Bond à W. Mitchell.

Holden (E.-S.). — Relation entre les couleurs et les grandeurs des étoiles doubles.

Sur un météore brillant vu en septembre 1890.

L'Association astronomique d'Angleterre.

Liste de quelques étoiles de comparaison observées au cercle méridien de l'Observatoire Lick.

Note nécrologique sur le capitaine R.-S. Floyd, ancien président du comité Lick.

D. KLUMPKÉ.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VIII; 1891.

RECUEILS PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

American Journal of Science. 1890. — 220.

Astronomical Journal, n^{os} 226-240. — 538.

Astronomische Nachrichten, n^{os} 3001-3056. — 31, 91, 140, 179, 266, 315, 418, 521.

Bulletin du Comité international photographique. — 362, 461.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXI, CXII et CXIII. — 83, 166, 357, 468, 548.

Journal de l'Association astronomique d'Angleterre, oct. 1890. — 137.

Monthly Notices of the Royal astronomical Society, t. L, LI. — 121, 303, 395.

Observatory, sept. 1899-juin 1891. — 127, 301, 472.

Publications de la Société astronomique du Pacifique, t. II. — 559.

Sidereal Messenger, nov. 1889-déc. 1890. — 210.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 25^e année. — 207, 547.

www.libtool.com.cn

TABLE DES MATIÈRES.

(Dans cette Table, on a indiqué en chiffres **GRAS** les pages des articles originaux, tant pour les Mémoires que pour les observations, les variétés, etc., et on a indiqué en caractères ordinaires les pages des analyses, des Mémoires, observations et indications quelconques signalés dans d'autres publications.)

Pages.	Pages.
Aberration de la lumière :	<i>Arcs de parallèle :</i>
— Détermination de sa constante. 357 et 358	— Formules pour le calcul de leur longueur..... 178
— Sur la possibilité de déterminer la constante de l'aberration en s'affranchissant des variations de la latitude..... 140	Voir aussi <i>Bases, Géodésie.</i>
— Sur l'influence que l'aberration de la lumière peut exercer sur les observations des protubérances solaires par l'analyse spectrale..... 555	Association géodésique :
<i>Aberration chromatique du grand réfracteur de l'observatoire Lick..... 561</i>	— Comptes rendus de la réunion de 1889..... 172
— du grand réfracteur de l'Observatoire de Poulkova..... 565	Astéroïdes. Voir Planètes (petites).
Actinométrie :	Astronomie :
— Résultats d'observations actinométriques..... 171 et 360	— L'Astronomie dans l'Amérique du Sud..... 562
— Détermination de la constante solaire..... 472	— L'Astronomie météorique aux États-Unis..... 135
Algol. Voir Étoiles variables.	— Traité par Chauvenet; errata.. 543
Analyse spectrale. Voir Spectroscopie.	— Traité par C. Wolf..... 512
Annuaire astronomique (sur un) utilisé par Ptolémée.... 88	— Traité par B. Wolf..... 512
Arcs de méridien :	— Traité d'Oppolzer (détermination des orbites, t. II); errata. 125 et 563
— Sur leur mesure..... 220	— Astronomical Lessons, par Gore. 302 et 480
<i>Arc du Pérou :</i>	— Celestial motions, par Lynn... 480
— État des pyramides élevées aux extrémités de la base boréale. 166	Atmosphère :
	— Dispersion produite par l'atmosphère : sur une méthode de mesure..... 170 et 364
	— Ses mouvements au-dessus des nuages..... 217
	Attraction :
	— Ses lois dans les systèmes stellaires..... 218
	— des montagnes..... 116

	Pages.		Pages.
Aurore boréale :		Comètes :	
— Son origine solaire.....	210	— Observations... 33, 184, 271,	
Bain de mercure :		316, 320, 423 et	522
— Effet des trépidations terrestres.	211	— Non cataloguées.....	302 et 478
Bases :		— Sur la recherche des comètes à	
— Histoire des appareils à mesurer		Bristol.....	301
les bases.....	169	— Sur les grandes perturbations	
— boréale de l'arc du Pérou; état		des comètes périodiques....	
des pyramides.....	166	147, 191 et 225	
— Nouvelle base de Villejuif; sa		— Sur l'âge des comètes périodi-	
mesure.....	469	ques.....	562
Bibliographie :		— Capture des comètes périodi-	
— Parallaxes d'étoiles.....	217	ques.....	476
— Spectres.....	137	— Liaison des comètes avec les	
— Étoiles doubles.....	480	météores.....	139
Boules de feu.....	84	— Sur la relation apparente qui	
Bureau central météorologique.		existe entre la longitude héli-	
Annales.....	469	ocentrique du périhélie et	
Carte photographique du ciel....		le temps du passage au pé-	
85, 406, 472, 477 et	548	rihélie.....	34 et 13
— Sur la distribution du travail.	468	— Phénomènes d'apparence comé-	
— Observatoires participants....		taire.....	38, 96, 320 et 5
466 et	468	— Queues cométaires; théorie...	
Voir <i>Photographie astrono-</i>		143 et	53
<i>mique.</i>		Comètes de 1890.....	94
Catalogues :		Comète d'Encke.	
— de Leyde (zones).....	404	— Elle est retrouvée.....	24
— de Munich.....	403	— Éléments et éphéméride. 354 et	24
— de Paris.....	556	Comète de d'Arrest.....	
— Comparaisons de catalogues...		— Elle est retrouvée.....	540 et 5
408, 413 et	421	— Observations... 32, 91, 543 et	5
— Remarques et errata pour divers		— Éléments et éphémérides.....	54
catalogues.....	180 et 181	Comète de Brorsen.	
— de 918 orbites d'essaims d'étoiles		— Recherche infructueuse.....	96
filantes.....	414	Comète de Winnecke.	
Cercle méridien :		— Recherches infructueuses.....	421
— Mesure directe de sa flexion par		— Éphéméride pour 1891. 91 et	268
ses propres microscopes.....	67	Comète 1891 V = Tempel,-Swift	
Chronométrie :		(1869 III-1880 IV).	
— (Congrès de) en 1889.....	224	— Observations.....	558
Collimateurs du cercle méridien		— Orbite et éphémérides. 185 et	422
de Poulkova; influence de la		Comète 1891 II = Wolf (1884 III).	
température.....	111	— Elle est retrouvée.....	419
Collimation :		— Observations.....	503 et 558
— Sa détermination dans une lu-		— Éléments et éphémérides.....	
nette méridienne portative..	576	271, 521 et	525
		Comète 1857 III.	
		— Orbite.....	419
		Comète 1873 VII.....	24
		Comète 1882 II.....	513

	Pages.		Pages.
<i>Comète</i> 1887 IV.		<i>Comète</i> 1890 VII = <i>f</i> 1890 (Spitaler, novembre 16).	
— Orbite définitive.....	92 et 546	— Éléments et éphémérides. 37,	
<i>Comète</i> 1888 V.		540 et 558	
— Observations.....	125	— <i>Phénomène</i> cométaire vu à	
<i>Comète</i> 1889 I.....	94	Grahamstown en oct. 1890..	
— Éléments et éphémérides.....	143	38 et 96	
— Observations.....	125 et 320	<i>Comète</i> 1891 I = <i>a</i> 1891 (Barnard,	
<i>Comète</i> 1889 II.....	94	mars 29).	
— Observations.....	125	— Découverte.. 271, 478, 542 et 543	
<i>Comète</i> 1889 IV.		— Éléments et éphémérides.....	271
— Observations.....	125	— Observations.....	353 et 543
<i>Comète</i> 1889 V.....	94 et 213	Coordonnées :	
— Sur son orbite.....	92	— Sur la transformation des coor-	
— Observations.....	125 et 541	données sphériques rectangu-	
— Éléments et éphémérides.....	37	laires.....	183
— Orbites des compagnons.....	541	Couleurs stellaires :	
— Action de Jupiter sur cette co-		— Relation avec l'âge des étoiles.	559
mète en 1886; son identité		Coupole :	
avec la comète de Lexell de		— Nouvelle coupole pour l'Obser-	
1770.....	541	vatoire de Greenwich.....	416
<i>Comète</i> 1889 VI.		Couronne solaire. Voir Soleil.	
— Observations.....	125	Cyclone :	
<i>Comète</i> 1890 I = 1889 <i>g</i> (Borrelly,		— Sur les courants de déverse-	
1889 décembre 12).	94	ment qui donnent naissance	
— Observations.....	125	aux cyclones.....	548 et 556
<i>Comète</i> 1890 II = 1890 <i>a</i> (Brooks,		Dépression constatée au centre	
mars 19).....	94 et 125	de l'Asie.....	468
— Observations. 90, 125, 172 et		Dispersion atmosphérique :	
Errata à ses observations.....	304	— Sa mesure.....	364
— Éléments et éphémérides. 316 et		Durchmusterung :	
559		— de Cordoba.....	543
<i>Comète</i> 1890 III = 1890 <i>b</i> (Coggia,		— du Cap.....	547
juillet 18).....	94	Éclairs :	
— Observations.....	90 et 543	— Identité de leur structure avec	
— Éléments et éphémérides.....	563	les décharges des machines	
<i>Comètes</i> 1890 IV = <i>e</i> 1890 (Zona,		d'induction.....	84
novembre 15).....	95	— Éclairs allant à la rencontre	
— Sa découverte.....	36	l'un de l'autre.....	85
— Observations. 26, 75, 91, 160,		— Spectre de l'éclair.....	217
172, 543, 544, 545 et		Éclipses :	
546		— Anciennes éclipses.....	133
— Sur sa visibilité.....	36	<i>Éclipses de Lune</i>	528
— Éléments et éphémérides.....		— du 23 mai 1891.....	527
37, 127, 320 et 540			
<i>Comète</i> 1890 VI = <i>c</i> 1890 (Denning,			
juillet 23).....	95		
— Observations.....	90 et 543		
— Éléments et éphémérides.....	563		
<i>Comète</i> 1890 VII = <i>f</i> 1890 (Spi-			
taler, novembre 16).....	95		
— Sa découverte.....	36		
— Observations.....	26, 75 et 543		

	Pages.		Pages.
<i>Éclipses de Soleil</i>	528	<i>Erreurs d'observation :</i>	
— Questions qu'elles soulèvent...	223	— Sur les répartitions les plus probables des erreurs d'observation.....	521
— Sur les grains de Bailey.....	214		
— du 21-22 décembre 1889... 131, 214 et	559	Étoiles :	
— du 16-17 juin 1890.....	125	— The System of the Stars. 113 et	131
— du 6 juin 1891.....	525 et 558	— Systèmes stellaires; sur leur loi d'attraction.....	218
<i>Éclipses historiques</i>	478	— Sur les couleurs des étoiles, en relation avec leur âge.....	559
<i>Électricité atmosphérique</i>	550	— Mouvements d'étoiles suivant le rayon visuel déduits d'observations spectroscopiques. 304 et	566
Éphémérides astronomiques :		— Sur la distance moyenne des étoiles dont la vitesse radiale est connue.....	
— <i>Connaissance des Temps</i> ; errata.....	31	— Mouvements propres.... 132, 371, 414 et	527
<i>Éphémérides nautiques</i>	224	— Tableau synoptique des mouvements propres supérieurs à 0",5 (supplément).....	375
<i>Équation d'Euler</i> . Solution approchée pour les orbites paraboliques.....	215	— Parallaxes stellaires. 217, 317 et	419
<i>Équations différentielles</i> qui déterminent un système de points; sur leur intégration. 38		— Photographies d'étoiles en plein jour.....	564
— linéaires à coefficients périodiques; sur leur intégration. 49		— Grandeurs photographiques des étoiles.....	467
— Réduction à la forme canonique. 87		— Enregistrement photographique des passages d'étoiles.....	213
<i>Équation personnelle :</i>		— Sur le calcul des positions des étoiles quand on les emploie pour la méthode de Talcott. 546	
— Appareil pour la détermination de l'équation personnelle absolue dans les observations de passages.....	405	<i>Étoiles colorées</i> 138 et	139
— dans les observations de passages..... 167 et	557	— Relation entre les couleurs des étoiles et leur âge.....	559
— dans les comparaisons photométriques.....	111	— Étoiles rouges nouvelles.....	139
— Sur l'équation décimale.....	558	<i>Étoiles doubles</i> 218, 408 et	411
Équatoriaux :		— Découvertes par l'étude de leurs spectres.....	318 et 422
— Méthode très simple pour leur orientation.....	362	— A mouvement propre... 132, 272, 303 et	417
— Contrôle électrique de leur mouvement d'horlogerie.....	124	— Orbites..... 125, 136, 408 et	546
Errata :		— Leur détermination d'après la vitesse radiale. 216, 302 et	401
— A l' <i>Astronomie</i> de Chauvenet. (5 ^e édition).....	543	— Grandes excentricités de leurs orbites.....	302 et 47
— Au tome II du <i>Bahnbestimmung</i> d'Oppolzer... 125 et	563	— Catalogue d'orbites.....	48
— A une liste d'étoiles à spectres remarquables.....	270	— Relation entre les couleurs et	
Erreurs personnelles.			
Voir <i>Equation personnelle</i> .			

	Pages.		Pages.
<i>Étoiles doubles :</i>		<i>Étoiles à spectres remarquables..</i>	
les grandeurs des étoiles doubles.....	568	37, 91, 266, 268, 270, 524, 525 et	526
— Mesures... 133, 137, 143, 210, 212, 216, 217, 266, 411, 423, 523, 525, 539 et	560	— Nouveau type de spectres stellaires.....	268
— Mesures par le spectroscopie photographique. 142, 216, 302 et	409	Fils de quartz pour les micromètres.	212
— Mesures photographiques.....	564	Flexion des fils micrométriques.	97
— Parallaxes..... 129, 216 et	302	<i>Flexion du limbe d'un cercle méridien</i>	67
— 2 Lyre n'est pas double.. 122, 170, 268 et	303	Fonction perturbatrice :	
— Théorie des étoiles doubles... 269		— Tables pour son calcul dans le cas des petites planètes.....	422
— Étoiles doubles invisibles.....	411	— Remarques sur les dérivées de la fonction perturbatrice....	526
<i>Étoiles multiples :</i>		Voir <i>Mécanique céleste.</i>	
— Sur leur théorie... 252, 525 et	561	<i>Fonctions à une variable réelle; critérium sur leur continuité.</i>	559
<i>Étoiles filantes</i>	91	<i>Fonctions hyperbo-elliptiques</i>	561
— Sur la période météorique du mois de novembre 1890. 90 et	91	<i>Fonctions de Bessel.</i> 523, 524 et	528
— Étoiles filantes doubles.....	211	Gadolinium :	
— Catalogue de 918 orbites d'essaims.....	414	— Spectre électrique de son chlorure.....	84
— Perséides; observations. 141 et	478	Gaz :	
— Sur la théorie des étoiles filantes.....	548	— Constitution de leurs molécules. 360	
<i>Étoiles guides pour la photographie</i>	131 et 462	Géodésie. Voir <i>Arcs, Bases, Méridiens, Parallèles, Terre.</i>	
<i>Étoiles historiques :</i>		Géographie :	
— de Tycho; examen de sa région. 219		— Manuel pour la détermination des positions géographiques. 480	
— Nouvelle de l'an 1006.....	318	Globe de feu peint par Raphaël. 469	
<i>Étoiles occultées :</i>		— Sur les globes électriques ou boules de feu.....	84
— Par des planètes.....	34	Grains de Bailey dans les éclipses de Soleil	214
— Par la Lune. 270, 304, 419 et	560	Grandeurs photographiques des étoiles	179 et 416
— Phénomènes qui les accompagnent.....	89	Gradient :	
<i>Étoiles de repère pour les photographies de la Carte du ciel.</i> 468		— Sur le gradient appliqué à la prévision du temps.....	472
<i>Étoiles variables</i> .. 91, 125, 133, 138, 139, 141, 218, 302, 423, 526, 540, 542, 543, 544 et	546	Gravité. Voir <i>Pesanteur.</i>	
— à longue période.....	419	Halos	471
— Nouvelles.. 37, 91, 181, 266 et	526	Voir <i>Optique atmosphérique.</i>	
— Éléments..... 539, 542 et	546	Horizon artificiel (nouvel)	213
— Sur leurs spectres.....	123	Impressions lumineuses :	
— Éphémérides.....	547	— Sur leur retard.....	552
— Sur la plus ancienne observation d'Algol.....	271	Indice de réfraction :	
<i>Étoiles à raies brillantes</i>	131	— Sa relation avec le poids molé-	

	Pages.		Pages.
culaire, la densité et le pouvoir diathermane d'un corps.	536	Lumière :	
Instruments astronomiques en construction aux États-Unis.	566	— Blanche; son analyse chromoscopique	552
— Historiques d'Astronomie.....	133	— Analyse de la lumière diffusée par le ciel.....	471 et 548
Interpolation :		— Forme la plus économique de la lumière.....	221
— Études sur les formules d'.....	425	— Zodiacale; son spectre.....	223
273, 325, 376 et		— Antizodiacale; sur une cause secondaire possible.....	37
Jupiter. Voir <i>Planètes (grosses).</i>		Lune	138
Képler (problème de). Voir <i>Problème.</i>		— Observations.....	420
		— Notes séléographiques..	132, 302 et 477
Latitude :		— Éphémérides pour les observations physiques.....	306 et 416
— Sa variabilité.....	86 et 360	— Cirques, cratères; sur leur formation.....	222
— Sur un appareil qui donnerait les variations de la latitude.	180	— Nouvelle rainure.....	528
— Sur les variations diurnes de la latitude.....	423	— Dessins.....	306 et 562
— Sa variabilité annuelle; coopération de divers observatoires pour l'étudier.....	91 et 527	— Vues photographiques.....	306
— Cette variabilité serait causée par l'inégalité de réfraction dans les marées atmosphériques.....	88	— Grande vue photographique projetée.....	137
— Explication de cette variabilité.	88, 92 et 93	— Photographie de la lumière cendrée.....	560
— Nouvel instrument pour la détermination du temps et de la latitude.....	267	— Occultation de Jupiter par la Lune, le 3 septembre 1889..	210
— de l'Observatoire de Berlin; variations.....	270	— Occultations d'étoiles par la Lune.....	270, 304, 419 et 560
— de l'Observatoire de Greenwich; sur ses variations réelles ou apparentes.....	122 et 407	— Projection des étoiles sur le bord brillant dans les occultations.	89
— de l'Observatoire de Palerme..	269	— Loi suivant laquelle la somme des distances de la Lune à deux étoiles varie en fonction du temps.....	469
— de l'Observatoire de Poulkova, déduite de passages dans le premier vertical.....	269	— Note sur l'état actuel de la théorie de la Lune.....	481
— de l'Observatoire de Washburn; ses variations.....	315	— Sur la théorie de la Lune de Hansen.....	38
Léonides	540	— Comparaison des observations de Greenwich (1847-1861) aux Tables de Burckhardt et de Hansen.....	304
Logarithmes (Tables de) à 8 décimales.....	161 et 168	— Sur l'inégalité lunaire à longue période due à l'action de Vénus et dépendant de l'argument $l \pm 16l' - 8l''$	550
		— Sur le mouvement du périégée lunaire.....	470 et 535
Longitudes :			
— de Brindisi.....	34		
— Paris-Greenwich.....	305 et 306		

	Pages.		Pages.
Lune :		Mercure. Voir <i>Planètes (grosses)</i> .	
— Relation entre les culminations lunaires et les tremblements de terre.....	513	Mers :	
Voir <i>Éclipses de Lune</i> .		— L'oscillation de leur niveau peut intervenir dans la variation des latitudes.....	93
Lunette horizo-zénithale.....	5	Méridien :	
Magnétisme terrestre :		— Sur le choix d'un premier méridien.....	87
— Déterminations magnétiques..	166 et 222	— Méridien neutre de Jérusalem-Nyanza.....	87 et 471
— Anomalie magnétique.....	361	Mesures :	
— Relation du magnétisme terrestre avec les tremblements de terre.....	168	— Modernes; sur leur précision..	215
Marées :		— Par les longueurs d'onde.....	220
— Sur leur prédiction.....	303	Météores	138 et 210
— Leur influence sur le mouvement de la Terre.....	93	— Leur liaison avec les comètes..	139
— Sur la solution des équations des marées par Laplace.....	544	— Leur masse.....	221
Mars. Voir <i>Planètes (grosses)</i> .		— Sur la période météorique du mois de novembre 1890.....	90
Matières cosmiques :		— Météores télescopiques.....	301
— Influence de leurs chocs sur la marche d'une planète.....	531	Voir <i>Étoiles filantes</i> .	
Mécanique céleste	523	Météorites	210
— Traité de.....	85	— Hypothèse météoritique de M. Lockyer..	255
— Sur le problème des trois corps.	12 et 522	Voir <i>Étoiles filantes, Météores</i> .	
— Application de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton à la détermination de l'orbite d'un point soumis à l'attraction d'un sphéroïde homogène.....	423	Météorologie. 221, 469, 470, 471,	472
— Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un système de points.....	522	— Influence des taches solaires...	210
— Mouvement d'un système de points : sur l'intégration des équations différentielles qui en déterminent le mouvement..	38	Mètre :	
— Sur quelques applications des théories concernant les solutions particulières périodiques du problème des trois corps.....	49	— Sur le prototype des Archives et sur le prototype international.....	554
Voir <i>Équations différentielles, Fonction perturbatrice, Perturbations, Problème des trois corps</i> .		Micromètre :	
		— Éclairage d'un micromètre....	214
		— Usage des fils de quartz pour les micromètres.....	212
		— Circulaire; nouvelle forme....	422
		— A réticule; nouvelle forme....	422
		— Sur la théorie du micromètre à double image.....	35
		— Sur le micromètre à double image de Wellmann.....	32
		Milieu résistant :	
		— Sur son existence.....	211
		Mires méridiennes :	
		— Sur leur transformation.....	321

	Pages.		Pages
Miroir de télescope :		Observatoires :	
— Sur son travail.....	218	— Bâle.....	207
Montagnes (Sur l'attraction des).	116	— Berlin.....	207
Mont-Blanc :		— Birr Castle.....	400
— Ascension scientifique au Mont-Blanc.....	83	— Bonn.....	208
— Observatoire du Mont-Blanc...	552	— Breslau.....	208
Mouvements d'horlogerie des équatoriaux; système de contrôle électrique.....	124	— Cambridge (Angleterre).....	397
Mouvements propres des étoiles. Voir Etoiles.		— Cambridge (États-Unis). Voir Harvard College.	
Nébuleuses :		— Cap.....	396
— Nouvelles. 33, 127, 130, 143 et	360	— Carleton College.....	134 et 218
— Observations.....	556	— Catane.....	32
— Spectres.....	137 et 565	— Cincinnati.....	509
— Observations de spectres.....	417	— Copenhague (Nielsen).....	135
— Catalogue.....	33	— Crowborough (M. Roberts)...	304
— Leurs vitesses radiales. 130 et	565	— Dresde (M. d'Engelhardt)....	208
— Sur leurs parallaxes.....	564	— Dunsink.....	397
— Photographies de nébuleuses..	85	— Dusseldorf.....	208
— Causes de variations apparentes d'éclat.....	476	— Ealing (M. Common).....	399
— Sur une nébuleuse variable... 171 et	272	— Édimbourg.....	396
— Variable de Hind dans le Tau-reau.....	126 et 417	— Glasgow.....	397
Nébuleuse d'Andromède; sur sa variabilité.....	304	— Göttingue.....	208
Nébuleuse de la Lyre.....	85	— Gotha.....	208
Nébuleuse d'Orion.....	211	— Greenwich.....	395
Nébuleuse qui entoure ζ Orion...	271	— Halifax (M. Crossley).....	399
Nébuleuse des Pléiades. 143, 268 et	316	— Harvard College.....	468 et 509
Nébulosités dans la région du Cygne.....	504	— Histoire.....	223
Neptune. Voir Planètes (Grosses).		— Hérény.....	209
Niveau :		— Kalocsa.....	209
— Son usage dans les instruments portatifs.....	219	— Kew.....	397
Nutation initiale.....	524	— Kiel.....	209
Observations méridiennes.....	215 et 320	— Königsberg.....	209
Observations diverses.....	32	— Kremsmunster.....	209
Observatoires :		— Leipzig.....	209
— Notes sur quelques observa-toires d'Amérique.....	475	— Leyde.....	478 et 534
		— Lick.....	213, 566 et 561
		— Liverpool.....	398
		— Madison (Washburn). Voir Washburn.	
		— Madras.....	480
		— Melbourne.....	400
		— Milan.....	209
		— Mont-Blanc.....	83 et 552
		— Nasmyth (James).....	139
		— Natal.....	400
		— O'Gyalla.....	480
		— Oxford (Radcliffe).....	398
		— Oxford (Université).....	398
		— Paris.....	400

	Pages.		Pages.
<i>servatoires :</i>		Passages (observations de) :	
Organisation des recherches spectroscopiques à Paris..	87	— Leur observation par la photographie	213
Pékin	364	— Sur leurs erreurs systématiques ou personnelles.....	557
Potsdam	208	— Essais sur le nouveau procédé d'observation de passages de M. J. Repsold.....	418
Prague.....	209	— Sur l'équation décimale.....	558
Rome (Vatican).....	477	Voir <i>Équation personnelle</i> .	
Rousdon (M. Peck).....	400	Pendule :	
Rugby (Temple).....	398	— Observations.....	222
Rungsdorf	183	— Sur la résistance de l'air et de différents gaz au mouvement du pendule.....	167
San Fernando.....	468	— Mémoires sur le pendule.....	171
Sidney.....	401	— Horizontal	31
Slough	212	— Isochrone	167
Stockholm.....	209	— de Foucault; sur son mouvement.....	84 et 469
Stonyhurst.....	398	<i>Pendules astronomiques :</i>	
Strasbourg.....	209	— Interrupteur de circuit pour pendules.....	213
Tulse Hill (M. Huggins).....	399	Perséides	141
Washburn.....	219	— Leur radiant	478
Washington, Observatoire naval	134	Perturbations (Sur la théorie des). Voir <i>Mécanique céleste</i> .	
Observatoire Smithsonian ...	476 et 522	<i>Perturbations</i> absolues des planètes intérieures.....	526
Windsor (N.-S.-W.) (M. Tebbut).....	401 et 476	Pesanteur :	
Wolsingham.....	135 et 399	— Sa détermination.....	177
occultations par la Lune.		— Méthode graphique.....	359
de planètes.....	34	Voir <i>Pendule</i> .	
Voir à <i>Jupiter Planètes (Grosses)</i> .		Phénomènes astronomiques (premiers) observés en Angleterre.....	138
d'étoiles.....	270, 304, 419 et 560	Photographie :	
Phénomènes qui accompagnent ces occultations.....	89	— Remarques sur la préparation des plaques sensibles.....	468
Optique atmosphérique	471	<i>Photographie</i> astronomique, céleste.....	124, 127, 216 et 461
pratique. Traité.....	480	— Lunettes photographiques anglaises.....	137
Miroirs de télescope; sur leur travail.....	218	— Carte du ciel..	407, 467, 472, 477 et 548
Parallaxe annuelle :		— Bulletin du comité international.....	360, 362 et 552
d'étoiles.....	408 et 419		
Listes.....	217 et 317		
Leur détermination par des observations chronographiqués au cercle méridien ...	479		
Parallaxe solaire et les constantes avec lesquelles elle est en relation	536		
Parallèle :			
Sur la mesure du 52 ^e parallèle en Europe.....	172		

	Pages.		Pag
Photographie :		Photomètre, photométrie :	
— Procès-verbaux de la réunion du comité international permanent en 1891.....	461	— Revision photométrique de la Durchmusterung.....	4
— Sur la loi des diamètres des images photographiques d'étoiles.....	35, 363 et 467	— Sur la comparaison des aires et des points lumineux en photométrie.....	1
— Grandeurs stellaires photographiques.....	363	— Sur une équation personnelle qui se manifeste dans les comparaisons photométriques des étoiles.....	1
— Clichés types.....	363	Pierres (chute de).....	5
— Plaques; leur orientation....	462	Planètes :	
— Emploi de la photographie pour l'enregistrement des passages.	213 et 215	— Les planètes sont-elles habitées? 5	
— Avenir de la photographie stellaire.....	568	— Planètes occultées par la Lune. 2	
— Réseaux employés dans la carte photographique du ciel, leur examen.....	468	Voir <i>Occultations</i> .	
— Mode d'impression des réseaux sur les plaques.....	461	Planètes (Grosses) :	
— Choix des étoiles guides.....	462	— MERCURE.	
— Photographie de planètes et d'étoiles en plein jour.....	564	— » Son diamètre.....	3
— Influence des ondulations atmosphériques.....	131	— » Passage de Mercure sur le Soleil.....	5
— La photographie astronomique à l'Observatoire de Lick....	561	— » Passage sur le Soleil le 9 mai 1891..	251, 470, 471 et 5
— Appareil parallaxique pour la mesure des clichés d'étoiles.	362 et 363	— » Sa photographie en plein jour.....	5
<i>Photographie des couleurs.....</i>	<i>168 et 572</i>	— » Sur le mouvement de son périhélie.....	2
— des protubérances solaires. 35,	526	— » Sur sa rotation.....	1
— de la Voie lactée.....	93, 420 et 563	— VÉNUS.....	1
— de la Lune; grande photographie projetée.....	137	— » Étoiles occultées par Vénus.....	
— de spectres d'étoiles doubles..	142	— » Résultats des observations des passages sur le Soleil de 1761 et 1769.....	4
— de nébuleuses.....	85	— » Rotation.....	87 et 1
— Sur la photographie d'étoiles pendant le jour.....	564	— » Sa photographie en plein jour.....	5
Photomètres, photométrie.		— » Sur l'inégalité lunaire à longue période due à l'action de Vénus et dépendant de l'argument $l + 16l' - 8l''$. 3	
— Photomètre à prisme.....	124	— TERRE. Voir ce mot.	
— Photométrie méridienne.....	302	— MARS.	
— Photométrie photographique..	179, 467 et 526	— » Observations physiques.	218, 219, 319 et 5
— Photométrie stellaire..	404 et 467	— » Canaux.....	139 et 21
		— » Taches.....	139 et 21
		— » Conjonction avec Sa-	

	Pages.		Pages.
Planètes (Grosses) :		Planètes (Grosses) :	
— MARS :		— JUPITER :	
turne le 19 septembre 1889.	211	parente presque totale, le	
» Occultation d'une étoile		15 juillet 1891.	552
par Mars.	540	— » Étude des phéno-	
» Sa masse.	169	mènes qui accompagnent	
» Photographie de sa sur-		leurs passages et leurs	
face.	216	occultations; emploi des	
» Réfrangibilité relative		écrans.	89
de sa lumière et de celle		— » Le premier satellite	
des étoiles.	543	vu double.	525
» Ses satellites; observa-		— » Éclipse partielle du	
tions.	539 et 540	premier satellite par l'om-	
— JUPITER :		bre du deuxième.	556
» Observations physi-		— » Passage sombre du	
ques. 132, 138, 139, 220,		troisième satellite.	566
564 et 566	566	— » Passages du qua-	
» Mesures sur des pho-		trième satellite.	566
tographies de Jupiter.	414	— » Passage sombre du	
» Tache rouge.	124,	quatrième satellite.	564
131, 137, 138 et 478	478	— SATURNE :	
» Conjonction de la		— » Remarques sur un	
tacherouge avec des taches		dessin de M. A. Hall.	478
noires.	132 et 133	— » Observations physi-	
» Sa masse.	169	ques.	522 et 525
» Sa rotation.	513	— » Conjonction avec Mars	
» Occultations d'étoiles		le 19 septembre 1889.	211
par Jupiter.	34	» Occultations d'étoi-	
» Occultation de Jupi-		les par Saturne.	34
ter par la Lune.	210 et 214	— » <i>Anneaux</i> . Sur leur	
» Action de Jupiter sur		stabilité.	211
la comète Brooks 1889 V.	541	— » Courbure de l'ombre	
» Coordonnées hélioc-		de Saturne sur les anneaux.	216
centriques de Jupiter tirées		— » <i>Satellites</i> . Observa-	
des Tables de Le Verrier		tions.	94
(suite et fin). 77, 402 et 457	457	— » Éphémérides.	122
» <i>Satellites</i>	138	— » <i>Satellite</i> Titan, son	
» Sur leur mode d'ob-		diamètre.	523
servation.	138	— » <i>Satellite</i> Hypérior;	
» Leurs passages som-		sur sa libration.	507
bres.	564, 566 et 567	— URANUS :	
» Explication de ces		— » Ses bandes.	562
passages sombres.	566 et 567	— » Éphémérides pour ses	
» Observations de phé-		satellites.	306
nomènes divers.	219,	— NEPTUNE :	
304 et 416	416	— » Éphémérides.	122
» Sur leurs conjonc-		— » Photographie de Nep-	
tions.	132 et 545	tune et de son satellite.	417
» Leur disparition ap-			

	Pages.		Pages.
Planètes (Petites) :		Planètes (Petites) :	
— Sur un moyen de développer notre connaissance des asté- roïdes	563	— (245) <i>Véra</i> . Observations.....	295
— Découvertes	182 et 266	— (247) <i>Eucrate</i> . Éléments et éphémérides	316
— Observations.. 32, 33, 88, 171, 181, 182, 183, 271, 320, 423, 522, 528 et	551	— (250) <i>Bettina</i> . Éléments et éphé- mériide.....	528
PETITES PLANÈTES DE 1890.....	94	— (253) <i>Mathilde</i> . Éléments et éphéméride.....	91
— (3) <i>Junon</i> . Orbite.....	411	— (254) <i>Augusta</i> . Observations..	73
— (6) <i>Hébé</i> . Éléments et éphé- mériides.....	37	— (258) <i>Tyché</i> . Observations... » Éléments et éphé- mériide.....	456 523
— (11) <i>Parthénope</i> . Éléments et éphémérides.....	37	— (261) <i>Prymno</i> . Observations..	73
— (12) <i>Victoria</i> . Observations.. 304 et	411	— (265) <i>Anne</i> . Éléments	14
— (24) <i>Thémis</i> . Observations .. 160 et	181	— (266) <i>Aline</i> . Éléments et éphé- mériide.....	23
— » Perturbations absolues produi- tes par Mars et Jupiter	183	— (267) <i>Tirsa</i> . Observations	23
— (61) <i>Danaé</i> . Éphémérides ...	527	— (272) <i>Antonie</i> . Observations..	7
— (65) <i>Maximiliana</i> . Observa- tions	26	— (279) <i>Thulé</i> . Observations....	7
— (76) <i>Fréïa</i> . Observations	455	— (283) <i>Emma</i>	14
— (80) <i>Sapho</i> . Observations... 304 et	411	— » Observations....	45
— » Perturbations... ..	414	— (284) <i>Amélie</i>	14
— (82) <i>Alcmène</i> . Éphéméride ..	527	— » Observations....	73
— (86) <i>Sémélé</i> . Observations... ..	455	— (285) <i>Regina</i>	14
— (147) <i>Protogénie</i> . Observations	455	— (287) <i>Nephtis</i> . Observations..	74
— (149) <i>Méduse</i> , est retrouvée..	528	— (288) <i>Glauke</i> . Découverte.....	96
— (173) <i>Ino</i> . Éphéméride.....	393	— » Observations... ..	456
— (178) <i>Bélisane</i> . Observations..	455	— » Éphémérides ...	394 et 526
— (180) <i>Garumna</i> . Observations.	73	— (289) <i>Nenetta</i>	144
— (181) <i>Eucharis</i> . Observations.	456	— » Découverte.....	96
— (208) <i>Lacrymosa</i> . Observa- tions.....	294 et 353	— » Observations... ..	295
— (226) <i>Weringia</i> . Éphéméride..	524	— (290) <i>Bruna</i>	144
— (241) <i>Germania</i> . Éléments et éphéméride.....	32	— » Découverte.....	96
		— » Orbite	419
		— (291) <i>Alice</i>	144
		— » Découverte.....	96
		— (292) <i>Ludovica</i>	144
		— » Découverte....	96

Planètes (Petites) :	Pages	Planètes (Petites) :	Pages
— (293) <i>Brasilia</i>	144	— (301) <i>Bavaria</i> . Sa découverte..	36
— » Découverte.....	96	— » Découverte... ..	96
— » Éléments et éphé-		— » Observations... ..	74
mériques.....	297	— (302) <i>Clarisse</i> . Observations..	
— (294) <i>Félicie</i>	144	172, 183 et	295
— » Découverte.....	96	— » Elle a été très voi-	
— » Observations... ..	74	sine de (298) et de	
— » Éléments et éphé-		(300).....	184
mériques.....	459	— (303) <i>Joséphine</i> . Découverte..	184
— (295) <i>Thérèse</i>	144	— » Observations... ..	
— » Découverte... ..	96	172 et	295
— » Éléments et éphé-		— » Éléments et éphé-	
mériques.....	33	mériques... ..	271 et
— (296) <i>Phaëtuse</i> . Découverte... ..	96	— (304) <i>Olga</i> . Découverte.....	184
— » Éléments et éphé-		— » Observations... ..	
mérique... ..	206 et	295, 353 et	361
— (297) <i>Cœcilia</i> . Éléments et éphé-		— » Éléments et éphé-	
mérique.....	33	mérique.....	271
— » Découverte.....	96	— (305) » Découverte... ..	184
— » Observations... ..	74 et	— » Observations... ..	
— (298) <i>Baptistine</i>	183	172, 295 et	456
— » Éléments et		— » Éléments et éphé-	
éphéméride.....	33	mériques.....	419
— » Elle est retrou-		— (306) <i>Unitas</i> . Découverte... ..	184
vée.....	36	— » Observations... ..	
— » Découverte.....	96	172, 295 et	529
— » Observations... ..	74	— » Éléments et éphé-	
— » Elle a été très voi-		mérique.....	419
sine de (300) et de		— (307) » Découverte... ..	184
(302).....	184	— » Observations... ..	
— (299) <i>Thora</i> . Découverte.....	96	172, 296, 353 et	456
— » Éléments et éphé-		— » Éléments.....	423
mériques... ..	33 et	— (308) » Découverte... ..	184
— » Observations... ..	74	— » Observations... ..	
— (300) <i>Géraldine</i> . Découverte..	96	296, 456 et	460
— » Observations... ..	74	— » Éléments et éphé-	
— » Éléments et éphé-		mérique... ..	419
mériques. 33, 184 et	504	— (309) <i>Fraternitas</i> . Observa-	
— » Elle a été très voi-		tions.....	296
sine de (298) et de		— » Éléments et éphé-	
(302).....	184	mérique.....	419
		— (310) » Découverte... ..	422
		— » Observations... ..	
		352 et	456

TABLE DES MATIERES

	Pages.
Planètes (Petites) :	
» Éléments.....	528
- (311) Découverte.....	123
» Observations ...	457 et 558
» Éléments et éphéméride.....	530
- (312) Observations ..	558
- (313) <i>Chaldea</i> . Observations..	558
- (314) Découverte.....	559
- (316) Découverte.....	559
Plaques photographiques :	
- Remarques sur leur préparation.....	468
Voir <i>Photographie</i> .	
Poussières :	
- Propriétés spectroscopiques de différentes poussières	136
Pouvoir de séparation des télescopes et des microscopes.....	560
Précision des télescopes et des microscopes	560
Pression barométrique (sur la) à Naples à des altitudes différentes.....	168
Prix d'Astronomie distribués. 90, 136, 252 et	564
Prix proposés..... 90 et	272
Problème de Képler :	
- Solutions simples approchées.....	144
- Tables pour sa solution.....	191
Problème des trois corps (sur le). 12, 34, 40, 268, 316 et	509
Voir <i>Mécanique céleste</i> .	
Quartz (usage des fils de) pour les micromètres.....	212
Radiants d'étoiles filantes.....	133
Réfraction :	
- Sur sa correction dans les mesures micrométriques.....	545
- Sur sa correction dans les mesures photographiques.....	545
Réseaux, mode d'impression sur les plaques de la Carte du	461

	Page
Révélateur recommandé pour les clichés de la Carte du ciel..	468
Satellites :	
- Sur le caractère des orbites que les satellites des planètes décrivent autour du Soleil....	36 et 31
Voir <i>Planètes</i> .	
Saturne. Voir Planètes (Grosses).	
Séismes :	
- Sur leur répartition saisonnière.....	172 et 5
- Sur leur répartition horaire...	5
Sextant :	
- Avantages relatifs du sextant et du théodolite de voyage..	1
Sismographe rectangulaire.....	40 et
Sociétés astronomiques :	
- Association astronomique d'Angleterre.....	1
- Ses diverses sections.....	1
- Société astronomique de Camden N. J.....	59
- Die Urania Gesellschaft.....	61
Soleil :	
- Phénomène lumineux extraordinaire observé sur le Soleil.	4
- Sur l'augmentation de son activité.....	1
Activité relative des deux hémisphères.....	1
- Atmosphère solaire, nouvelles recherches.....	5
- Statistiques des phénomènes solaires, résumés d'observations. 123, 166, 168, 170, 171, 270, 301, 470, 550 et	5
- Sur les mouvements qui s'observent à la surface du Soleil.	127
- <i>Rotation</i> 137, 269 et	121
- <i>Taches</i> . Détermination de leurs coordonnées héliographiques.....	138
- " Taches de haute latitude.....	137

	Pages.		Pages.
Soleil :		Spectroscopie :	
— <i>Taches.</i> Loi de variation des latitudes des taches solaires.....	551	— Vitesses radiales données par le spectroscope.....	304
— " Spectre des taches...	126	— Spectres de nébuleuses... 137, 417 et	565
— " Influences météorologiques des taches solaires.....	310	— Propriétés spectroscopiques de différentes poussières.....	136
— <i>Protubérances solaires.</i> Hauteur.....	87	— Sur la photographie des extrémités du spectre solaire. Extrémité violette.....	89
— " Ascension rapide, vitesses énormes. 88 et	549	— Extrémité rouge.....	123
— " Sur leur photographie.	93	Système de points :	
— " Procédé pour les photographier. 35, 93 et	420	— Sur l'intégration des équations différentielles qui en déterminent le mouvement.....	38
— " Résultats.....	526	Tables de logarithmes à 8 décimales.....	161 et 168
— " Loi de variation de leurs latitudes....	551	Télescope :	
— " Chute d'une protubérance dans l'ouverture d'une tache...	557	— Sur la construction des miroirs de télescopes.....	218
Spectre. Sur sa limite ultraviolette.....	89	Température :	
— " Ce que l'on gagne en s'élevant.....	89	— Son influence sur les lectures des collimateurs du cercle méridien de Poulkova.....	111
— " Influence de l'altitude. 123 et	178	— Température à Marseille.....	168
Parallaxe du soleil.....	129	Tempêtes.....	88
Couronne solaire.....	132	Temps :	
— " Sur sa théorie. 222 et	265	— Nouvel instrument pour la détermination du temps et de la latitude.....	267
Théorie. Sur les discordances entre les tables solaires et les positions observées de 1800 à 1886.....	545	Terre :	
Voir Éclipses de Soleil.		— Sur sa rigidité.....	221
Spectroscopie.....	218 et 220	— <i>Rotation</i> , serait produite par l'action électro-dynamique du Soleil..	88
— Nouvelle méthode pour la recherche des bandes faibles dans les spectres de bandes.	361	— " Argument de Ptolémée contre cette rotation.....	217
— Traité de spectroscopie astronomique.....	27	— <i>Croûte terrestre.</i> Relation entre sa déformation actuelle et les densités moyenne des terres et des mers.....	90
— Observations d'étoiles doubles par le spectroscope. 142, 216 et	302	— <i>Géodésie.</i> Sur l'hypothèse du sphéroïde sur la for-	
— Index de spectres.....	137		
— Spectre du Soleil. 123, 138, 179 et	526		
— Spectre des taches solaires....	126		
— Spectres stellaires. 37, 170 et	220		
— Nouveau type de spectres stellaires.....	268		

	Pages.		Pag
Terre :		Tornados	88 et
mation de la croûte		Tremblements de terre. Voir à	
terrestre.....	166	<i>Terre (Tremblements)</i> .	
— <i>Géodésie.</i> De la mesure du 52 ^e		Trois corps (Problème des)....	
parallèle en Europe.	172	<i>Voir Mécanique céleste.</i>	12 et 5
— " Réflexions géodési-		Trombes	
ques.....	178	Univers sidéral :	
— <i>Tremblements de terre.</i> 87 et	360	— Sur sa structure.....	217 et 2
— " Sur la répartition sai-		Uranus. Voir <i>Planètes (Grosses)</i> .	
sonnière des séismes.		Vénus. Voir <i>Planètes (Grosses)</i> .	
172 et	513	Verticale. Voir <i>Latitude</i> (Variations de la).	
— " Répartition horaire,		— Sur un moyen de constater les	
diurne-nocturne....	513	variations temporaires de la	
— " Relation avec les cul-		verticale.....	2
minations lunaires.	513	Vis micrométriques :	
— " Variation magnétique		— Sur la construction des longues	
pendant le tremble-		vis micrométriques.....	4
ment de terre du 15		Voie lactée :	
janvier 1891, en Al-		— Sur les photographies qui en	
gérie.....	168	ont été faites à l'Observatoire	
Théodolite :		Lick en 1889.....	5
— Avantages relatifs du sextant		Volcans	1
et du théodolite de voyage..	135		
Théorème (Sur un) de M. Tisse-			
rand.....	145		



TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS.

A

. 272.
) . 32, 92, 423.
) DE W.). 468, 472.
) .). Notice nécrologique, 547.
(Th.). 91, 527.
KS. 216.
318.
H.). 172.
) .). 89, 550.
) . 88.
T.). 420.
. 556.

B

) (T.-W.). 133, 217.
(O.). Éphéméride de la comète
Lincke, 354.
(B.). 85, 172.
(-W.). 223.
) (H.-G. VAN DE S.). 405, 407.
DE). 33, 143, 182, 524, 526.
(E.-E.). 32, 143, 144, 210, 211,
, 525, 541, 542, 560, 563, 564,
N.-L.). 219.
) .). 89.
) 6.
NN. 424.
ER (J.). 32, 92, 181, 316.
. 267.
E.). 418.
G.-F.). 221.
L.). 178.
Y (A.). 513.
) (A.). 33, 34, 37, 142, 143,
, 271, 419, 528
A.). 359.
(F.). 36, 316.

MM.

BIGELOW (F.-H.). 132, 214, 222.
BIGOURDAN (G.). 90, 171, 360, 558. Co-
mètes et planètes de 1890. 94.
BONSDORFF (A.). 177.
BOOTH (D.). 478.
BOQUET (F.). 89. Sur la flexion des fils
micrométriques (en commun avec
M. Hamy), 97.
BORRELLY (A.). 266. Observations de
planètes et de comètes, 353.
Boss (Lewis). 539.
BOSSCHA. 554.
BOSSERT (J.). 422. Note sur la comète
1873 VII (avec M. Schulhof), 24. —
Orbite de la comète Tempel-Swift
(1869 III, 1880 IV). 185. — Détermi-
nation des mouvements propres des
étoiles du Catalogue de l'Observa-
toire de Paris, 369.
BOWDITCH. Notice, 136.
BRASHEAR (J.-A.). 215.
BRAUN (C.). 93.
BREDICHIN. 424.
BRILLOUIN (M.). 360.
BRUCE (Miss). 136.
BRYANT (R.). 414.
BURNHAM (S.-W.). 126, 132, 143, 210,
216, 219, 303, 408, 411, 423, 523, 560,
562.

C

CALLANDREAU (O.). 89, 171, 548. Sur
quelques applications des théories
concernant les solutions particulières
périodiques du problème des trois
corps et l'intégration des équations
différentielles linéaires à coefficients
périodiques, 49.
CAMPBELL (W.-W.). 564.

MM.

CAMPHAUSEN (G.-L.). Notice nécrologique, 183.
 CAPUS (G.). 470.
 CASPARI. 224.
 CHANDLER (S.-C.). 541, 543, 543, 545, 546.
 CHARLIER (C.-V.-L.). 547.
 CHARLOIS. 172, 182, 266, 294, 422, 558, 559. — Éléments de (293), 297. — Éléments et éphéméride de (294), 459. — Observations de petites planètes et de comètes, 73, 455.
 CHARPENTIER (A.). 552.
 CHRISTIE (W.-H.-M.). 416, 462, 468.
 CLEAN (Mc), 123.
 CLERKE (Miss). 113, 129, 131, 137, 561.
 COAKLEY (G.-W.). 211.
 COGGIA. Observations de planètes et de comètes, 160.
 COLLEY (R.). 360.
 COLOMAS. 558.
 COMSTOCK (G.-C.). 212, 315.
 CONIEL (J.). Coordonnées héliocentriques de Jupiter tirées des Tables de Le Verrier (*suite*), 77, 102, 157. — Éléments provisoires de la planète (26), 206. — Éphémérides de recherche de (26) pour 1892, 298; de (300) pour 1891, 504.
 COPELAND (R.). 522.
 CORNU (A.). 89, 127, 471.
 CORTIE. 123, 477.
 COSSERAT (E.-M.-P.). 172, 558. Observations de planètes, 529.
 COURTY (F.). 90, 91.
 CROVA. 360, 471, 548.
 CRULS (L.). 469.

D

DARWIN (G.). 136, 303.
 DAUBREE. 460.
 DEFFORGES. 121, 167, 177, 306.
 DENNING (W.-F.). 127, 130, 132, 301, 476, 478, 480.
 DENZA (P. F.). 90, 91.
 DEPUY (A.-B.). 559.
 DERRECAIGAIX. 168, 469.

MM.

DESLANDRES (H.). 87, 170, 361, 552.
 DEWAR. 136.
 DOBERCK (W.). 137, 266.
 DONNER (A.-S.). 480.
 DOUBIAGO (D.). 527.
 DOUMET-ADANSON. 88.
 DOWNING (A.-M.-W.). 138, 408, 411.
 DREYER (J.-L.-E.). 38, 478.
 DUKE (P.-F.). 132.
 DUNER (N.-C.). 91, 363, 423, 522, 526.

E

EASTMAN (J.-R.). 135.
 EBERT (H.). 222, 223.
 EDGECOMB (D.-V.). 212.
 EGINITIS (D.). 471.
 ELGER (T.-G.-E.). 132, 302, 477.
 ELKIN (W.-L.). 135, 543.
 ENGELHART (D'). 94, 181, 527.
 ESMIOL (E.). 118, 174. Observations de planètes, 460.
 ESPIN (Rév.). 123, 135, 139, 181, 266, 526.

F

FABRICIUS (David et Jean). Souscription pour l'érection d'un monument commémoratif, 91.
 FABRY (L.). Éphéméride de (173), 393. Observations de comètes, 503.
 FAYE (H.). 84, 88, 166, 471, 548, 556.
 FENYI (Jules). 36, 87, 88, 524, 549.
 FERREL (W.). 544.
 FIZEAU. 555.
 FLAMMARION (C.). 552.
 FLEMING. 268.
 FLOYD (R.-S.). 568.
 FOERSTER (W.). 554.
 FOLIE (F.). 122, 524.
 FOWLER (A.). 122.
 FRANKE (J.-H.). 183.
 FRANKS (W.-S.). 139.
 FRANZ (J.). 474.
 FREEMANN (A.). 132, 545.
 FRISBY (E.). 134, 543.
 FROST (E.-B.). 213.

MM.

G

- GAILLOT (A.). 86, 360.
 GALLE (J.-G.). 320.
 GAUTIER (E.). Notice nécrologique, 267.
 GAUTIER (P.). 362, 468, 470.
 GÉDÉONOF. 270.
 GERRISH (W.-P.). 213.
 GILL (D.). 129, 131, 473, 547.
 GLABENAPP (VON). 90.
 GLEDHILL (J.). 411.
 GONNESSIAT (F.). 167.
 GORE (J.-E.). 125, 133, 302, 411, 478, 480.
 GRAM (J.-P.). 254.
 GREEN (A.-H.). 135, 139.
 GRUEY (L.-J.). Lunette horizonto-zénithale, 5. — Sismographe rectangulaire, 10, 72. Mesure directe de la flexion du limbe d'un cercle méridien par ses propres microscopes, 67. — Transformation des mires méridiennes, 321.
 GUILBERT (G.). 472.
 GUYOU (E.). 224.

H

- HACKENBERG. 144.
 HAERDTL (E. DE). 91, 255, 268.
 HAGEN (J.-G.). 544.
 HALE (George). 35, 420, 526.
 HALL (Asaph). 211, 478, 539.
 HALL (A. Junior). 135.
 HAYY (M.). Sur un théorème de M. Tisserand, 145. — Sur la flexion des fils micrométriques (en commun avec M. Boquet), 97.
 HARKNESS (W.). 135, 536.
 HARRIS HANCOCK, 217.
 HARRISSON (John), 477.
 HARZER (P.). 268, 269, 271, 320, 522.
 HAYN. 525.
 HAYNALD (Cardinal L. DE). Notice nécrologique, 524.
 HAZEN (H.-A.), 217.
 HELMERT (F.-R.). 92, 116.
 HENRY (Paul). 467, 468.
 HENRY (Prosper). 170, 364, 468.
 HERZ (N.). 182, 423, 524.
 HILL. 210.
 HILL (C.-B.). 364, 566.

MM.

- HILL (G.-V.). 538.
 HIND (J.-R.). 127, 558.
 HOLDEN (E.-S.). 559, 561, 562, 564, 567, 568.
 HOUGH (G.-W.). 214.
 HOWARD (Ch.-P.). 546.
 HOWE (H.-A.). 211, 543.
 HUGGINS (M^{me} M.-L.). 131.
 HUTCHINS (C.-C.). 212, 221.

I

- IBRAHIM ESMATT. 251.
 INNES (R.-T.-A.). 476.

J

- JACOBY (H.). 544, 545, 546.
 JANSSSEN (J.). 83, 470, 552.
 JEANNEL (G.). 90.
 JONES (G.-S.). 218.
 JOHNSON (Rév.). 138, 302, 478.

K

- KALBMAYER. 270.
 KAPTEYN (J.-C.). 362, 363, 479, 547.
 KAZINE (M.). 360.
 KEELER (J.-E.). 124, 130, 210, 540, 561, 564, 565, 566.
 KIAER (H.-I.). 34, 143.
 KIRKWOOD (D.). 562.
 KLEIBER (J.). 414, 420.
 KLUMPKE (Miss). 91, 172, 361, 558.
 KNOPF. 37, 91, 423.
 KNORRE (V.). 32.
 KNOTT (G.). 133, 302.
 KÖNIG (R.). 419.
 KONKOLY (N. DE). 480.
 KOWALCZYK. 528.
 KREUTZ (H.). 424, 513, 524.
 KRUEGER (A.). 317, 419.
 KUSTNER (F.). 140.

L

- LABATUT. 552.
 LA CONDAMINE. 554.
 LAMEY (Dom). 88.
 LAMP (E.). 93, 183, 271.
 LANDERER (J.-J.). 536.
 LANGLEY (S.-P.). 137, 221, 424, 476, 522.

MM.

- LAPLACE. Œuvres. 469.
 LASKA. 514.
 LAUSSEDAT (A.). 169.
 LE CADET. 558.
 LECKY (R.-J.). 133.
 LECOQ DE BOISBAUDRAN. 84.
 LEHMANN-FILHES (R.). 316, 521.
 LEOTARD (J.). 168.
 LEUSCHNER (A.-O.). 210, 550, 560, 562, 563.
 LEVEAU (G.). 198.
 LINDEMANN (Ed.). 111.
 LIPPMANN (G.). 168.
 LIVEING. 136.
 LOCKYER. 255.
 LÖWY (M.). 357, 358, 548.
 LOOMIS (E.). Notice, 216.
 LOVERING (J.). 136.
 LUTHER (R.). 37, 316, 419, 526, 527.
 Éphéméride de ²⁸⁸, 394.
 LUTHER (W.). 32, 527.
 LYMAN (C.-S.). Notice, 218.
 LYNN (W.-T.). 133, 135, 478, 480.

M

- MANN (N.-M.). 218.
 MARCHAND (E.). 166, 171, 550.
 MARCUSE (A.). 270.
 MARRE (A.). 554.
 MARTH (A.). 121, 122, 306, 411, 416.
 MASCART. 499, 552.
 MASSON. Éléments et éphémérides de ³¹², 530.
 MAUNDER (E.-W.). 123, 130, 134, 137, 304.
 MAW (W.-H.). 133.
 MAYER (M.-W.). 591.
 MEISSEL. 523, 528.
 MEUNIER (St.). 550.
 MICHELSON (A.-A.). 220, 500.
 MICHKINE (N.). 360.
 MILLOSEWICH (E.). 32, 182, 266, 524.
 MITCHELL (Maria). Notice, 219.
 MITCHELL (O.-M.). Notice, 211.
 MONCK (W.-H.-S.). 132, 130, 210, 216.
 MONNICHMYER (C.). 183, 598.
 MONTESSUS (DE). 175, 213.

MM.

- MOUCHEZ (E.). 85, 88, 171, 360, ~~468~~
 477, 551, 552, 556.
 MOUREAUX. 168.

N

- NAEGAMVALA (K.-D.). 417.
 NASMYTH (James). Son observatoire. 139
 NEWALL (H.-F.). 475.
 NEWCOMB (S.). 491.
 NEWTON (H.-A.). 216.
 NIELSEN (M.-V.). 135.
 NOBILE (A.). 178, 130, 424.
 NOGÈS (A.-F.). 87.
 NYRÉN (M.). 111.

O

- ŒRTEL (K.). 421.
 OPPENHEIM (S.). 419.
 OPPERT (J.). 88.
 OUDEMANS (J.-A.-C.). 540.

P

- PACKER (D.). 218.
 PALISA (J.). 36, 182, 266, 528.
 PARKHURST (H.-M.). 218, 546.
 PAUL (H.-M.). 546.
 PECHULE. 52.
 PERCHOT (I.). 470.
 PERROTIN. 87.
 PERRY (le P.). Mémorial, 136.
 PETER (B.). 547.
 PETERS (C.-F.-W.). 144.
 PETERS (C.-H.-F.). Notice biographique. 219.
 PETR. 269.
 PHILLIPS. 167.
 PHYTHIAN (R.-L.). 135.
 PIAZZI SMITH (C.). 210.
 PICART (L.). 90, 91, 172, 558.
 PICKERING (E.-C.). 33, 37, 91, 220, 268, 318, 423, 468, 475, 509, 524, 525, 526.
 PICKERING (W.-H.). 211, 214, 216, 218.
 PIERSON (W.-M.). 559.
 PLESSMANN (J.). 139, 141, 266.
 PLUMMER (J.-I.). 125.
 PLUMMER (W.-E.). 132, 472.
 POGSON. 480.
 POINCARÉ (H.). Sur le problème des trois corps, 12.

M.

EL (A.). 36c.
 R (Ch. Lane). 541.
 LE (J.-U.). 477.
 RO (F.). 271, 419.
 TER (J.-G.). 211, 219, 272, 509.
 STON (E.-D.). 220, 222.
 TCHARD (C.). 268, 408, 416, 419, 467.
 SEUX (P.). 357, 358.
 JAZON. 468.

R

DAU (R.). 86. Études sur les formules
 d'interpolation, 273, 325, 376, 425.
 BAUD (C.). 91, 558. Observations de
 anètes et de comètes, 26, 352.
 BAUT (A.-A.). 303, 304, 409.
 ET (G.). 90, 172, 558.
 EUR-PASCHWITZ, 31.
 S (J.-K.). 544.
 AUX. 91.
 BOLD (J.). 418.
 AL. 469.
 O (A.). 32, 551.
 ENPART. 320.
 HIE (J. jr.). 219.
 ERTS (Isaac). 304, 417, 472.
 IEUX (A.). 90.
 ANITH, 37.
 KER. 271.
 IEL. 364.
 IEL (H.-C.). 124, 127, 468.

S

ER (H.). 217.
 RIK (A.). 91, 523.
 ORD (T.-H.). 215, 219.
 LIEF. 171, 472.
 FER (E.-F.). 540.
 EBERLE (J.-M.). 265, 562, 564.
 INER (J.). 37, 270, 362, 467, 526.
 APARELLI. 90.
 IDT (R.). 563.
 INFELD (E.). 318, 547. Notice nécro-
 logique, 317.
 ADER. 32.
 LHOF (L.). Note sur la comète
 13 VII (avec M. Bossert), 24. — Sur
 grandes perturbations des comètes
 iodiques, 147, 191, 225.

MM.

SCHULTZ (E.). 423.
 SCHUR (W.). 180, 317, 525.
 SEARLE. 37.
 SEARLE (Rév. G.-M.). 540, 561.
 SÉE (T.-J.-J.). 218, 302, 473.
 SEELIGER (H.). 424, 525, 530.
 SEMNOLA (E.). 168.
 SEYDLER (A.). Notice nécrologique, 524.
 SHERMAN (O.-T.). 545.
 SIDGREAVES (W.). 301.
 SIFFERT (Dom ET.). 553.
 SOUILLART (C.). 127.
 SPARRE (DE). 84.
 SPITALER. 37, 272, 320.
 SPITTA (E.-J.). 124.
 STANLEY WILLIAMS (A.). 131, 132, 139,
 414, 478, 525.
 STECHERT. 525.
 STOCKWELL (J.-N.). 538.
 STEINHEIL (A.). 480.
 STONE (E.-J.). 304.
 STRINGHAM (I.). 559, 561.
 STROOBANT (P.). 557.
 STRUVE (H.). 507.
 STRUVE (L.). 271.
 SWIFT (Lewis). 33, 211, 214, 219, 220.
 SY (F.). 91, 558. Observations de pla-
 nètes et de comètes, 352.

T

TACCHINI (P.). 166, 168, 470, 551.
 TATLOK (J. jr.). 213, 476.
 TAYLOR (A.). 131.
 TEBBUTT (J.). 125, 181, 184, 411, 416,
 419.
 TENNANT (général). 125, 134.
 THACKERAY (W.-G.). 413, 414.
 THIELE. 254.
 THOME (J.-M.). 182, 543.
 THOMPSON (A.-W.). 138.
 THRAEN. 269, 521, 525.
 TILLO (A. DE). 361, 469.
 TISSERAND (F.). 85, 145, 469, 550. Note
 sur l'état actuel de la théorie de la
 Lune, 481.
 TODD (David P.). 223.
 TONDINI. 87, 471.
 TOWNLEY (S.-D.). 546.
 TRÉCUL. 85.

MM.

TRÉPIED (C.). 467, 468.
 TROUVELOT (E.-L.). 84, 548, 557.
 TURNER (H.-H.). 305.
 TYCHO-BRAHE. Sa vie, 38.

U

UPDEGRAFF (M.). 546, 562.

V

VALENTINER (H.). 254.
 VAUX (G. DE). 166.
 VENUKOF. 172.
 VERY (F.-W.). 221, 424.
 VINIGRA (J.). 468.
 VOGEL (H.-C.). 142, 183, 268, 303, 422.
 VOIT (E.). 480.

W

WALDO (F.). 221.
 WANACH (B.). 269.
 WANDT (Th.). 38, 522.
 WATTS (D^r). 137.
 WAUGH (W.-R.). 132, 139.
 WEBB (J.). 139.

MM.

WEEDER (M.-A.). 210.
 WEILER. 316, 522, 526.
 WEINER (L.). 528, 562.
 WEISS (E.). 180, 521.
 WELLMANN (V.). 35, 422.
 WENDEL (O.-C.). 215, 543.
 WEYER. 34, 36, 317.
 WHITNEY (Miss M.-W.). 212.
 WILSING. 421.
 WILSON (H.-C.). 134, 213.
 WINTERHALTER. 134.
 WISLICENUS (W.). 319, 480.
 WOLF (C.). 171, 467, 512.
 WOLF (Max). 35, 179, 271, 363, 524.
 WOLF (R.). 169, 171, 267, 512, 525.

Y

YENDEL (P.-S.). 539.
 YOUNG. 90.

Z

ZENGER (C.-V.). 88.
 ZONA. 37, 269.

ERRATA.

Page 297, ligne 30, au lieu de : $i = 15^{\circ} 15' 17''$, 5, lisez : $i = 15^{\circ} 15' 17''$, 5.
 360, 18, voir p. 362, voir p. 461.
 172, 2, précision, prévision.

FIN DU TOME VIII.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

JAN 5 1938

www.libtool.com.cn



www.libtool.com.cn