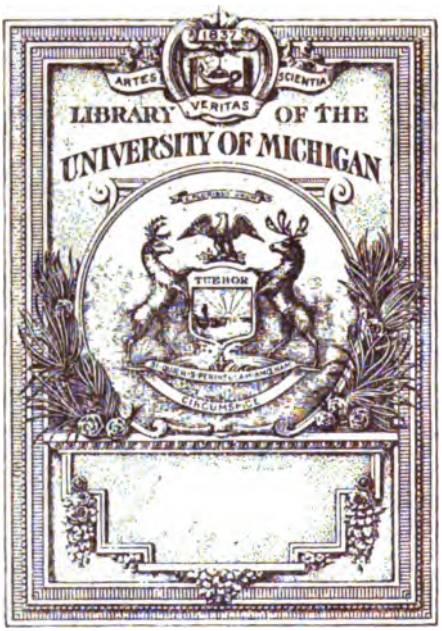
www.libtool.com.cn



Mathematics
QA
1
W8
A4

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

VERZAMELING

VAN

WISKUNDIGE VOORSTELLEN,

DOOR DE

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG(E) GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN.

EERSTE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

Te AMSTERDAM, bij

F. E. WIJMANS, Boekverkooper, in de Kalverstraat, bij de Osjessluis, N°. 181.

1820.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van P. E. BRIËT te Amsterdam.

www.libtool.com.cn

K. Bes Tilburg.

www.libtool.com.cn

NAAMLIJST

DER

www.libtool.com.cn

LEDEN

VAN HET

GENOOTSCHAP:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

Gerangschikt naar den tijd van hun Lidmaatschap,
A°. MDCCCXVI.

BESTUURDERS.

I. R. SCHMIDT, Lector in de Wiskunde, aan de Koninklijke Artillerie Genie en Marine School, te Delft.

J. C. VAN SETTEN.
KLAAS SMIT.
C. J. VAN BRUSSEL.
L. KOOPS.
H. VAN WESSEM Jz.
O. S. BANGMA, 1e Secretaris, Examinator der Stuurlieden, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten.
J. DEELEMAN BOM, 2e Secretaris.
C. TERMARS, Boekhouder.

} te Amsterdam.

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Wetenſchappelijke Vak.

U. HUGUENIN, Kolonel Directeur van de Koninklijke IJzer-Geſchutgieterij te Luik.

Zij-

Zijne Exellentie de Lieutenant-Generaal C. R. T. KRAYENHOFF, Inſpecteur Generaal der Fortificatien, en van het Corps van de Genie, Pontonniers, Mineurs en Sappeurs, en Gouverneur der Stad Amſterdam, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten.

www.libtool.com.cn

J. H. VAN SWINDEN, Hoogleeraar in de Wijsbegeerte, Wis-, Natuur- en Sterrekunde te Amſterdam, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, enz. enz.

J. H. VOET, Generaal Majoor, Commandant en Directeur der Studien aan de Koninklijke Artillerie Genie en Marine School, te Delft.

Jonkheer J. M. C. VAN UTENHOVE, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Jutphaas.

A. VAN DEN ENDE, Kommisſaris tot de Zaken van het middelbaar en lager Onderwijs; Ridder van den Nederlandſchen Leeuw; Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Haarlem.

O. S. BANGMA, (zie boven.)

J. DE GELDER, Profesſor voor de Hoogere Wiskunde, als mede voor de Astronomiſche, Hydrauliſche, Phyſiſche, Hoogere Mechaniſche en Geodeſiſche Wetenſchappen; gelijk ook in de Aardrijkskunde, aan de Koninklijke Artillerie Genie en Marine School, te Delft.

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Huishoudelijke Vak.

CHRISTOFFER MEIJLINK, te 's Hage.
M. J. ZUIDHOFF, te Veendam.
H. VAN WESSEM Jz., te Amſterdam.

Leden van de Wetenſchappelijke Commisſie.

O. S. BANGMA, (zie boven.)
J. DE GELDER, (zie boven.)

I. R. SCHMIDT, (zie boven.)
J. H. VOET, (zie boven.)
U. HUGUENIN, (zie boven.)
P. CURTEN, Directeur van het Genootſchap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam.
H. VAN WESSEM Jz., te Amſterdam.

Bibliothecaris.

H. VAN WESSEM Jz., (zie boven.)

Leden van Verdienſten der Tweede Klaſſe.

C. BREEVILT, te Hoorn.
I. R. SCHMIDT, (zie boven.)
A. L. HECTOR, te Middelburg.
A. FOCK, te Amſterdam.
P. VAN EEGHEN, Chz., te Amſterdam.
P. CURTEN, (zie boven.)

Gewone Leden.

C. BREEVILT, te Hoorn.
B. VAN HEIJNINGEN, te Amſterdam.
P. HOUTTUIN Gz., te Hoorn.
L. KOOPS, Beſtuurder te Amſterdam.
W. C. BAKKER, te Purmerland.
KLAAS SMIT, Beſtuurder te Amſterdam.
P. CALIS, te Schermer.
D. BRAUBACH, te Bremen.
C. MARTENS, te Bremen.
A. VOLKERSE, te Monnikendam.

J. KERKHOVEN, te Amſterdam.
A. HARREBOMEE, te Heemſtede.
A. HORSTMAN, te Amſterdam.
I. R. SCHMIDT, Beſtuurder, (zie boven.)
J. H. THIERMAN, te Bremen
W. J. VAN HEMERT, te Utrecht.
H. W. CASPARI, te Amſterdam.
J. C. SCHRÖDER, te Amſterdam.
J. H. NIEUWVEEN, te Leijden.
J. BUIS, te Amſterdam.
G. MOL JUNIOR, te Amſterdam.
P. JÖFFER, te Amſterdam.
H. G. WITLAGE JUNIOR, te Amſterdam.
A. L. HECTOR, te Middelburg.
H. J. BEEKMAN, te 's Hage.
H. C. SCHUSLER, te Utrecht.
H. SOMMERHAUSEN, te Amſterdam.
J. C. VAN SETTEN, Beſtuurder, te Amſterdam.
A. VAN DER SWAN, te Amſterdam.
M. H. POS, te Amſterdam.
J. EISVELD, te Groningen.
C. TERMARS, Boekhouder, te Amſterdam.
G. BUIS, te Amſterdam.
L. VAN HEUSDEN, aan den Uithoorn.
C. J. VAN BRUSSEL, Beſtuurder, te Amſterdam.
DIDDO H. WATERMAN, te Sapmeer.
M. LEMANS, te Amſterdam.
P. VAN EEGHEN CHZ., te Amſterdam.
L. C. MAZEL, te 's Hage.
J. W. KERKHOVEN, te Amſterdam.
J. H. HEEMSKERK, te Amſterdam.
W. VAN HAARST, te Sneek.
A. VAN DER SPUIJ, te 's Hage.
J. P. BAUDET, te Deventer.
M. TIELJARDT, te Amſterdam.
M. WOOD LEVENSTON, te Amſterdam.

F. J. MEAN, te Surinamen.
P. ESAU, te Aarlanderveen.
J SCHUT, te Amſterdam.
A. DAHLHAUS, te Keulen.
C. LANTZ, te Amſterdam.
R. LOBATTO, te Bruſſel.
D. MELDOLA JUNIOR, te Amſterdam.
H. J. HEIJSTERMAN, te Amſterdam.
J. DEELEMAN BOM, 2e Secretaris te Amſterdam.
A. J LUBLINK, te Amſterdam.
J. B. CANTOR, te Amſterdam.
A. F. DE PAAUW, te Amſterdam.
J. FLORIJN, Examinator der Eleves van de Marine, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Amſterdam.
S. J. MULDER, te Amſterdam.
A. D ZILLESEN, te Arnhem.
Mr. D. FRANÇOIS, te 's Hage.
A. VAN BEMMELEN, A. L. M. Philoſ. Doctor, Lector bij de Fundatie van de Vrouwe van Rijnswoude te 's Hage.
G. S. LEENEMAN, te Amſterdam.
E. A. PLANTA, te Amſterdam.
A. W. HUIDEKOPER, te Amſterdam.
A TOLLUS, Architect en Landmeter te 's Hage.
G. E. BOSWEL, te Amſterdam.
J. KONING, te Amſterdam.
D. VRIJDAG, te Amſterdam.
H. F. FIJNJE, te Delft.
J. VAN DER LINDEN, te Amſterdam.
J. A. BUIJN, te Amſterdam.
J. ARBON, Examinator der Stuurlieden te Rotterdam.
P. CURTEN. te Rotterdam, (zie boven.)
D. BURGER, te Rotterdam.
G. VAN ROOIJEN, te Rotterdam.
J. VAN DER WALLEN VAN VOLLENHOVEN, te Rotterdam.
Mr. D. J. PRESBURG, te Amſterdam.

Mr. A. HEIJTING, te Rotterdam.
P. PREIJER, te Amſterdam.
REINOUD CAREL VAN TUIJLL VAN SEROOSKERKEN, tot Hees en Leende, te Utrecht.
RIJK VAN REES, Med. Student, te Utrecht.
C. J. GLAVIMANS, Onder-Conſtructeur bij de Nederlandſche Marine, te Rotterdam.
H. P. KRETSCHMER, Directeur van het Wis- en Aardrijkskundig Inſtituut te Zutphen.
J. BRAAEX, Fabrijk- en Landmeter te Schieland.
P. DE LANGE, te Nijmegen.
B. DE JONGE MEIJERZ., te Amſterdam.
J. J. REEKERS, te Amſterdam.
J. J. BAUDELET, te Amſterdam.
A. J. DE VRIES, te Wildervank.
J. PEEREBOOM, te Amſterdam.
J. C. BEIJER, Nederduitſche Taalmeester bij de Koninkl. Artillerie en Genie School, te Delft.
J. C. HECK DE BRUIJN, te Dordrecht.
H. ROOS, te Amſterdam.
P. H. VAN DEN BERG, te Rotterdam.
J. P. VAN WALREE, te Amſterdam.

WISKUNDIGE VOORSTELLEN

MET DERZELVER

www.libtool.com.cn

ONTBINDINGEN.

I. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Twee getallen te vinden, welke tot elkander in reden ſtaan, als 1 *tot* 8, *en waarvan de ſom der cubiek-wortelen* 6 *is?*

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, C. LANTZ JR., S. J. MULDER, J. B. CANTOR en L. C. MAZEL.

Stel de getallen x^3 en $8x^3$, waarvan de cubiek-wortelen zijn x en $2x$; dus $x + 2x = 3x = 6$, en $x = 2$; derhalve $x^3 = 8$ en $8x^3 = 64$ de begeerde getallen.

II. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Er zijn twee getallen van zoodanige eigenſchap, als men het eerſte, plus den vierkanten wortel uit het tweede, multipliceert met het tweede, plus den vierkanten wortel uit het eerſte, dat er 3080 *komt; en, als men het eerſte, min den vierkanten wortel uit het tweede, multipliceert met het tweede, min den vierkanten wortel uit het eerſte, dat er* 1624 *komt; welke getallen zijn dit?* (1)

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., R. LOBATTO, S. J. MULDER, J. B. CANTOR, A. VAN DER SWAN en L. C. MAZEL.

Stel de getallen x^2 en y^2, dan is

$$(x^2 + y)(x + y^2) = x^3 + x^2y^2 + xy + y^3 = 3080$$
$$(x^2 - y)(y^2 - x) = -x^3 + x^2y^2 + xy - y^3 = 1624$$

Deze vergelijkingen bij elkander tellende, en van elkander aftrekkende, komt

$$2x^2y^2 + 2xy = 4704 \text{ en } 2x^2 + 2y^3 = 1456$$
$$\text{of } x^2y^2 + xy = 2352 \text{ en } x^3 + y^3 = 728$$

De eerſte van deze vergelijkingen oplosſende ten opzigte van xy, komt $xy = 48$; dus $x^3y^3 = 110592$. Als men nu de vergelijking

(1) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 126, N°. 16.

king $x^3 + y^3 = 728$ met x^3 vermenigvuldigt, komt $x^6 + x^3y^3 = 728x^3$; en hier aftrekkende $x^3y^3 = 110592$, dan blijft er over $x^6 = 728x^3 - 110592$, waarvan de wortels zijn $x^3 = 216$ en $x^3 = 512$; dus $x = 6$ of $x = 8$; en hieruit volgt, daar $xy = 48$ is, $y = 8$ of $y = 6$; derhalve zijn de begeerde getallen 36 en 48.

www.libool.com.cn

III. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Men vraagt naar twee getallen, waarvan de ſom gelijk is aan het product, en het verſchil gelijk aan het quotient der deeling van het kleinſte door het grootſte? (2)

OPLOSSING. Door S. J. MULDER, R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN, C. LANTZ JR., J. B. CANTOR en L. C. MAZEL.

Stel de getallen x en y, dan is $x + y = xy$ en $x - y = \frac{y}{x}$. Deze beide vergelijkingen met elkander vermenigvuldigende, komt $x^2 - y^2 = y^2$; dus $x^2 = 2y^2$ en $x = \pm y\sqrt{2}$; dus $x + y = y \pm y\sqrt{2} = xy$; waaruit volgt $x = 1 \pm \sqrt{2} = \pm y\sqrt{2}$. Deze vergelijking door $\pm \sqrt{2}$ deelende, komt $\pm \sqrt{\frac{1}{2}} + 1 = y$; derhalve zijn de gevraagde getallen $x = 1 \pm \sqrt{2}$ en $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$.

IV. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Eene Arithmetiſche progres van drie termen te vinden, waarvan de ſom der quadraten 693 en het product 3240 is? (3)

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., R. LOBATTO, S. J. MULDER, B. J. CANTOR en A. VAN DER SWAN.

Stel de begeerde progres $x - y$, x, $x + y$, dan is volgens de opgaaf,

$$\frac{3x^2 + 2y^2 = 693}{x(3x^2 + 2y^2) = 693x} \text{ en } \frac{x(x^2 - y^2) = 3240}{x(2x^2 - 2y^2) = 6480}$$

deze beide vergelijkingen bij elkander tellende, komt $5x^3 = 693x + 6480$, waarvan $x = 15$ eene wortel is, terwijl de beide andere imaginair zijn. Nu geeft $x = 15$ aan y de waarde van 3, en de progres is alzoo 12 . 15 . 18.

V.

(2) O. S. BANGMA, *Algebra, pag.* 27, N°. 14.
(3) O. S. BANGMA, *Algebra, pag.* 275, N°. 39.

V. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

www.libtool.com.cn

Van eenen driehoek ABC (Fig. 1) is gegeven, de lijn CD, welke uit het toppunt tot het midden der bazis gaat; de lijn CE, welke den tophoek midden door deelende, tot aan de bazis loopt, en de hoek DCE, welke deze twee lijnen te zamen maken; men vraagt, hierdoor den driehoek te conſtrueren?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Wijl CD, CE en ∠DCE gegeven zijn, zoo is de driehoek DCE bepaald, en dus ook de rigting van de bazis AB. Onderſtellen wij nu, dat A en B de andere hoekpunten des driehoeks zijn, dan is AD = BD, en het middelpunt des omſchrevenen cirkels van den driehoek moet alzoo in de loodlijn DH liggen. Laat dan G dit middelpunt zijn, en CE verlengd worden, tot dat zij den omſchrevenen cirkel ſnijdt in F, dan moet, omdat ∠ACF = ∠BCF is, ook boog AF = boog BF zijn; en de boog AB wordt dus door het punt F midden door gedeeld; waaruit volgt, dat het punt F in het punt zal vallen, waarin HD den omſchrevenen cirkel ſnijdt: GF moet alzoo gelijk GC zijn en ∠GCF = ∠GFC; en hieruit hebben wij de volgende eenvoudige conſtructie:

1°. Stel uit de gegevens den driehoek DEC te zamen; verleng DE ter wederzijden onbepaald, en trek door D eene onbepaalde loodlijn op DE.

2°. Verleng CE tot dat zij die loodlijn ſnijdt in F; maak ∠FCG = ∠CFG, en beſchrijf uit G als middelpunt, met GF = GC als radius, eenen cirkel, ſnijdende de verlengde DE in A en B, dan zijn dit de gevraagde hoekpunten van den driehoek.

VI. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Uit eene gegevene ſtip D, buiten de beenen van eenen voorgeſtelden hoek BAC (Fig. 2), twee lijnen te trekken, welke de beenen van dien hoek ſnijden, zoodanig, dat er door deze ſnijdingen twee driehoeken en eenen vierhoek gevormd worden, van gelijken inhoud?

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA en R. LOBATTO.

Laten DE en DF de beide lijnen zijn, ſnijdende AC in H en G, zoodanig, dat △ AGF = △ DGH = vierhoek EFGH zij; trek DI evenwijdig aan AB, en DK evenwijdig aan AC; dan is, uit de gelijkvormige driehoeken AGF en KDF,

$$KF : KD = AF : AG = \frac{AF \times KD}{KF}$$

www.libtool.com.cn

en uit de gelijkvormige driehoeken AHE en KDE,

$$KE : KD = AE : AH = \frac{AE \times KD}{KE}$$

dus $AG \times AF = \frac{AF^2 \times KD}{KF}$ en $AH \times AE = \frac{AE^2 \times KD}{KE}$

maar, omdat $\triangle$ AHE het dubbeld van $\triangle$ AGF is, zoo is $AH \times AE = 2\ AG \times AF$; bijgevolg

$$\frac{AF^2 \times KD}{KF} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{AE^2 \times KD}{KE} \text{ en } \frac{AF^2}{KF} = \tfrac{1}{2}\frac{AE^2}{KE}$$

Wijders is uit de gelijkvormige driehoeken, die in de figuur voorkomen,

$$KF : DF = AF : GF = ID : GD$$

$$\text{en } KE : DE = AE : HE = ID : HD$$

$$\text{dus } KF \times KE : DF \times DE = ID^2 : GD \times HD$$

maar $DF \times DE = 2 \times GD \times HD$, omdat $\triangle$ EDF het dubbeld van $\triangle$ HDG is; derhalve

$$KF \times KE : 2 = ID^2 : 1$$

dus $KF \times KE = 2\ ID^2 = 2\ AK^2$. Maar wij hebben boven gevonden $2\ KE \times AF^2 = KF \times AE^2$, en deze vergelijking met $KF \times KE = 2\ AK^2$ vermenigvuldigende, komt $KE^2 \times AF^2 = AE^2 \times AK^2$; dus $KE \times AF = AE \times AK$. Deze vergelijking aftrekkende van $KF \times KE = 2\ AK^2$, rest $KE \times AK = 2\ AK^2 - AE \times AK$; dus $KE = 2\ AK - AE$ of $AK + AE = 2\ AK - AE$; waaruit volgt $AE = \frac{1}{2}\ AK$, dus $KE = AE + AK = 1\frac{1}{2}\ AK$, en deze waarde van AE en van KE in $KE \times AF = AE \times AK$ ſtellende, komt $AF = \frac{1}{3}\ AK$. Hieruit volgt dan deze Conſtructie: Men trekke DI evenwijdig aan AB, tot dat dezelve AC ontmoet in I; men make $AE = \frac{1}{2}\ DI$, $AF = \frac{1}{3}\ DI$, en trekke de lijnen DE en DF, dan zal het begeerde plaats hebben.

VII. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Eenen voorgeſtelden driehoek ABC (Fig. 3), door twee lijnen AE en BD, uit de hoeken A en B tot de overſtaande zijden getogen, elkander in F ſnijdende, zoodanig te verdeelen, dat de deelen AFD, BFE en DFEC, van dezen driehoek gelijk aan elkander worden?

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA, R. LOBATTO en J. B. CANTOR.

Laat

Laat door het hoekpunt C eene lijn getrokken zijn, evenwijdig aan de bazis AB, en laten AE en BD; verlengd zijnde, deze evenwijdige ontmoeten in H en G. Aangezien nu △ ADF = △ BEF; en dus △ ADB = △ BEA is, zoo moet ook DE evenwijdig aan AB zijn; derhalve is BE : BC = BD : BG; dus BC × BD = BE × BG. Maar, omdat △ BCD het dubbeld is van △ BEF, zoo heeft men ook BC × BD = 2 BE × BF; derhalve BG = 2 BF, en dus BF = GF; waaruit volgt, dat △ GFH = △ AFB is; diensvolgens ligt het punt F in het midden tusschen de parallelen AB en GH, en daarom △ AFB = $\frac{1}{2}$ △ ACB; dus △ AFD, △ BFE en vierhoek DCEF, ieder het zesde-gedeelte van △ ACB, en △ AEC = △ AFD + DCEF = $\frac{1}{3}$ △ ACB; waaruit blijkt, dat CE en CD ieder het derde gedeelte van BC en AC moeten gemaakt worden, om aan het begeerde te voldoen.

VIII. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Op de zijden AC en BC eens voorgeſtelden driehoeks ABC (Fig. 3), twee punten D en E te vinden, zoodanig, wanneer men uit deze punten trekt twee lijnen, tot de overſtaande hoeken, als AE en BD, elkander in F ſnijdende, dat de driehoeken AFD, BFE en DCE, gelijk aan elkander worden?

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en O. S. BANGMA.

Vermits △ ADF = △ BEF en dus △ ADB = △ AEB is, moet DE evenwijdig aan AB zijn; dus BC : EC = AB : DE = BF : DF; maar BE : CE = △ BED : △ CED = △ BED : △ BEF = BD : BF; waaruit volgt BE — CE : CE = BD — DF : BF = DF : BF = CE : BC; derhalve BE — CE : CE = CE : BE + CE, en $BE^2 - CE^2 = CE^2$ of $BE^2 = 2\,CE^2$; dus BE = CE $\sqrt{2}$; dus ook AB = CH $\sqrt{2}$ en CH = AB $\sqrt{\frac{1}{2}}$ = AB × $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, wanneer namelijk CH evenwijdig aan AB getrokken is, als in het voorgaande voorſtel. Hieruit blijkt, dat CH = CG gelijk den halven diagonaal van het vierkant op AB gemaakt moet worden; en dat, tot deze punten H en G de lijnen AH en BG getrokken hebbende, het begeerde verrigt zal zijn.

IX. Voorstel.

Door Jacob de Gelder.

Welke zijn in de rekenkundige reeks: 6, 19, 32 enz. de eerste drie op elkander volgende termen, die respectivelijk een veelvoud van 3, 5 en 7 zijn?

Oplossing. Door I. R. Schmidt, R. Lobatto, J. B. Cantor en C. Lantz Jr.

De algemeene term van de opgegevene reeks is $6 + (n-1)\,13$ of $13n-7$; stellen wij nu, dat de n^{de}, $(n+1)^{de}$ en $(n+2)^{de}$ termen aan de vraag voldoen, zoo zijn deze termen $13n-7$, $13n+6$ en $13n+19$, en de formulen $\frac{13n-7}{3}$, $\frac{13n+6}{5}$ en $\frac{13n+19}{7}$ moeten geheele getallen zijn.

Voor de eerste $\frac{13n-7}{3} = 4n - 2 + \frac{n-1}{3}$ stellen wij $\frac{n-1}{3} = p$, waaruit $n = 3p+1$. Hierdoor wordt de tweede $\frac{13n+6}{5} = \frac{13(3p+1)+6}{5} = \frac{39p+19}{5} = 8p + 4 - \frac{p+1}{5}$; stellende dan $\frac{p+1}{5} = q$, is $p = 5q - 1$, en dus $n = 3p + 1 = 15q - 2$. Deze waarde van n geeft voor de derde $\frac{13n+19}{7} = \frac{13(15q-2)+19}{2} = \ldots \frac{195q-7}{7} = 26q - 1 + \frac{q}{7}$ en dus moet $q = 7r$ zijn, waaruit $n = 105r - 2$.

Nu kan r niet kleiner dan 1 genomen worden, zonder dat n negatief wordt; nemende dan $r = 1$, is $n = 103$, zoodat de 103de, 104de en 105de termen de begeerde zullen zijn; voor welke termen wij vinden 1332; 1345 en 1358, welke respectivelijk door 3, 5 en 7, deelbaar zijn.

X. Voorstel.

Door U. Huguenin.

Drie voorwerpen A, B en C (Fig. 4), welker ligging geheel onbekend is, zijn uit drie andere, in ligging onbekende, en van elkander geheel onafhankelijke punten D, E en F, zigtbaar; zoo men

nu

nu uit ieder dezer drie laatſte punten, als ſtandpunten, met behulp eener bousſole *de afwijkingen der drie eerſte punten van de noordlijn dezer* bousſole *obſerveert, vraagt men de noodige hoeken te vinden, door welke men de zes punten A, B, C, D, E en F, in eene met de natuur gelijkvormige figuur teekenen kan; veronderſtellende, dat alle deze punten in een zelfde vlak gelegen zijn, en dat er bij de onderlinge rigtingen der noordlijnen van de* bousſole, *in deze zes punten, geene afwijking plaats heeft?*

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en U. HUGUENIN.

Laten A, B en C, de drie waargenomene punten zijn; D, E en F, de drie punten, waaruit de waarneming is geſchied; en laten DN, EN′ en FN″ de noordlijnen zijn; dan hebben wij deze conſtructie voor het opgegevene voorſtel:

1°. Om dat de hoeken NDA, NDB en NDC gegeven zijn, kunnen uit een willekeurig punt D, in de lijn ND, de lijnen DR, DS en DT, onder deze hoeken getrokken worden, en dan moeten de punten A, B en C, in deze lijnen liggen.

2°. Daar de figuur ſlechts aan de natuur gelijkvormig moet zijn, kunnen wij een van die punten, bij voorbeeld A, in een van deze lijnen naar welgevallen nemen, en dus zijn reeds de punten D en A bepaald.

3°. Wijl $\angle QAR = \angle DQA + \angle NDA = \angle N'EA + NDA$, en $\angle PAR = \angle DPA + \angle NDA = \angle N''FA + \angle NDA$ is, zijn de hoeken QAR en PAR beide bekend, en de lijnen QU en PV, waarin zich de punten E en F bevinden, kunnen alzoo door A, onder deze hoeken getrokken worden.

4°. Op gelijke wijze is bekend $\angle DBE = \angle NDB - \angle N'EB$, en $\angle DCE = \angle NDC - \angle N'EC$, en ofſchoon hier door de lijnen BE en CE niet geconſtrueerd kunnen worden, om dat wij de punten B en C nog niet bepaald hebben, zoo geeft dit ons ondertuſſchen de rigting van deze lijnen BE en CE ten opzigte van de lijnen DB en DC.

5°. Laten nu uit twee willekeurige punten F′ en F″, in de gevondene AV, getrokken worden de evenwijdige lijnen F′C′ en F″C″, onder de gegevene hoeken $C'F'A = C''F''A = CFA = N''FA - N''FC$; en de evenwijdige lijnen F′B′ en F″B″, onder de gegevene hoeken $B'F'A = B''F''A = BFA = N''FA -$

$N''FB$; ſnijdende de twee eerſte parallelen de gevondene AT in C' en C'', en de twee laatſte; de gevondene AS in B' en B''.

6°. Laten verder uit B' en B'' getrokken worden, de evenwijdige lijnen $B'E'$ en $B''E''$, onder den (in n°. 4) gevondenen hoek $DB'E' = DB''E'' = DBE$; en uit C' en C'' de evenwijdige lijnen $C'E'$ en $C''E''$, onder den (in n°. 4) gevondenen hoek $DC'E' = DC''E'' = DCE$, dan verkrijgen wij de ſnijpunten E' en E''.

7°. Vereenigen wij nu de punten E' en E'' door eene lijn, ſnijdende de gevondene AU in E, dan is het begeerde punt E bepaald. Trekkende dus EB evenwijdig $E'B'$, en EC evenwijdig $E'C'$, dan zijn ook de punten B en C gevonden; en het punt F wordt bekend, door BF evenwijdig $B'F'$, of door CF evenwijdig $C'F'$ te trekken, en alles is dus bepaald.

8°. Daar dan de punten E, B en C, in hunne behoorlijke lijnen liggen, en de lijnen EB en EC met de noordlijnen de behoorlijke hoeken maken, moet nog ſlechts alleen bewezen worden, dat BF evenwijdig $B'F'$, en CF evenwijdig $C'F'$, in hetzelfde punt F van de lijn AV zullen te huis komen. Zie hier dit bewijs.

Voor de ſnijding F van de lijn BF is

$$F'F : FF'' = B'B : BB'' = E'E : EE''$$

en voor de ſnijding F van de lijn CF is

$$F'F : FF'' = C'C : CC'' = E'E : EE''$$

De lijnen BF en CF ſnijden alzoo $F'F''$ beide in dezelfde rede, namelijk als $E'E : EE''$, en komen bij gevolg in een zelfde punt F van $F'F''$ te huis.

XI. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Wanneer een beweegbaar punt, geplaatst in de pool van de as eens halven bols, zich gelijkmatig over een vierde gedeelte van den omtrek eens grooten cirkels van dezen bol, benedenwaarts beweegt, te gelijker tijd dat deze kwart omtrek eene geheele omwenteling om de as maakt, waardoor het beweegbare punt eene ſpiraalvormige lijn, van eene dubbele kromming, op de oppervlakte van dezen halven bol beſchrijft, welke haren aanvang in de pool neemt en aan den omtrek des halven bols eindigt, wordt gevraagd, den inhoud van het gedeelte der oppervlakte van dezen halven bol te vinden, hetwelk

tus-

tusschen den omtrek van deszelfs bazis en de beschrevene spiraal gelegen is?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Laat ABDE (*Fig.* 5) een halve bol zijn, van welken P de kruin of pool is, en AP een vierde gedeelte des omtreks; wanneer zich nu deze kwart cirkel PA gelijkmatig over de oppervlakte des halven bols rond beweegt, te gelijker tijd, dat een punt uit P gelijkmatig dit vierde gedeelte des cirkels doorloopt, en alzoo de spiraallijn PMFGHA op de oppervlakte des halven bols beschrijft, zoo wordt ingevolge het voorstel gevraagd, het gedeelte der oppervlakte PMFGHABDEAP van den halven bol te bepalen.

Tot dat einde stelle men, dat de kwart cirkel PA zich in PN, en het beweegbaar punt zich in M bevindt, na den spiraalbol PM beschreven te hebben; men stelle voorts, dat door den boog PN des halven bols een vlak gelegd zij, het welk, gelijk bekend is, regthoekig op de grondvlakte des halven bols staan, en deszelfs oppervlakte snijden zal in de punten I, P, M en N; voorts weet men, dat deze snede eene halve groote cirkel dezer spheer is, welke wij door IPMN *Fig.* 6, hebben voorgesteld, in welke PC de as en C het middelpunt beteekent.

Zij nu de radius des bols $= r$, en de veranderlijke hoek, der door PA en PN (*Fig.* 5) voorgestelde verticale vlakken, $= \phi$, zoo is de boog AN $= r\phi$, en daar voorts het uit P beweegbare punt, gelijkmatig een vierde gedeelte van eenen grooten cirkel moet doorloopen, terwijl het punt A eenen geheelen omtrek beschrijft, en alzoo een viermalen grooteren weg aflegt, zoo zal, wegens de vastgestelde gelijkmatige beweging, het beweegbare punt een gedeelte PM van den kwart cirkel PN (*Fig.* 6) hebben afgeloopen, het welk gelijk een vierde gedeelte van den boog AN (*Fig.* 5) is; derhalve zal PM (*Fig.* 6) $= \frac{1}{4}$ AN (*Fig.* 5) zijn, of $= \frac{1}{4} r\phi$; en dus is $\angle$PCM (*Fig.* 6) $= \frac{1}{4}\phi$.

Trekt men wijders (*Fig.* 6) MQ loodregt op PC, zoo is CQ $=$ MC *Cos.* PCM $= r$ *Cos.* $\frac{1}{4}\phi$ en PQ $= r - r$ *Cos.* $\frac{1}{4}\phi = r(1 - \text{Cos. } \frac{1}{4}\phi)$; voorts stelle men (*Fig.* 5), dat de kwart cirkel zich uit PN tot in P*n* bewogen heeft, terwijl het beweegbare punt zich in *m* bevindt, zoodanig, dat de boog N*n* een oneindig klein gedeelte van den boog AN zij, zoo is N*n* $= rd\phi$; en de beide kwart cirkels PN en P*n* vormen, op de oppervlakte der halve spheer,

eenen oneindig kleinen ſector NPn. Stelt men nu de verhouding van den radius tot den omtrek als 1 : 2π, zoo is de oppervlakte der halve ſpheer $= 2r^2\pi$, en de oppervlakte van den ſector NPn $= 2r^2\pi . \frac{d\phi}{2\pi} = r^2 d\phi$ (*zie de* GELDER, *Beginſelen der Meetkunst*, *XV ſtelling*, *pag.* 375). Voorts is de oppervlakte van het bolvormig ſegment, het welk door PM (*Fig.* 6) beſchreven wordt $= 2r\pi . PQ = 2p^2\pi (1 - Cos. \frac{1}{4}\phi)$; (*zie de XIV ſtelling van het aangehaalde werk*); en doordien MPm (*Fig.* 5) als een ſector van dit bolvormig ſegment is aan te merken, wijl de bogen PM en Pm ſlechts een oneindig klein gedeelte van elkander verſchillen, en dus als gelijk zijn aan te merken, zoo is de oppervlakte MPm $=$ het $\frac{d\phi}{2\pi}$ gedeelte van de oppervlakte $2r\pi . PQ$; gevolgelijk heeft men: oppervlakte MP$m = 2r^2\pi (1 - Cos. \frac{1}{4}\phi) . \frac{d\phi}{2\pi} = r^2 d\phi - r^2 Cos. \frac{1}{4}\phi . d\phi$; waaruit alzoo voortvloeit, dat het element van de ſpiraal-oppervlakte, NMmn $=$ ſector NPn — oppervlakte MP$m = r^2 d\phi - (r^2 d\phi - r^2 Cos. \frac{1}{4}\phi d\phi) = r^2 Cos. \frac{1}{4}\phi d\phi$ wezen zal, van het welke de integraal is: ſpiraal-oppervlakte APMN $= r^2 \int Cos. \frac{1}{4}\phi d\phi = 4r^2 \int Cos. \frac{1}{4}\phi . d\frac{1}{4}\phi = 4r^2 Sin. \frac{1}{4}\phi + C$; maar doordien voor $\phi = 0$, $Sin. \frac{1}{4}\phi = 0$, en alzoo ook C $= 0$ is, zoo is de geheele integraal, of de oppervlakte APMN $= 4r^2 Sin. \frac{1}{4}\phi = AD^2 . Sin. \frac{1}{4}\phi$.

Deze uitdrukking heeft de merkwaardige eigenſchap, dat men door dezelve niet alleen de geheele ſpiraal-oppervlakte, maar ook elk gedeelte derzelve vinden kan, zonder dat de verhouding van den radius 1 : 2π er invloed op heeft. Stelt men in onze gevondene integraal $\phi = 2\pi$, dat is gelijk den geheelen omtrek, zoo is $\frac{\phi}{4} = \frac{1}{2}\pi$, $Sin. \frac{1}{4}\phi = Sin. \frac{1}{2}\pi = Sin. 90° = 1$, en wij bekomen de geheele oppervlakte der ſpheer, welke zich tuſſchen de ſpiraal-lijn en de grondvlakte der ſpheer bevindt; namelijk PAEDBAHGFMP $= 4r^2 = AD^2$: dat is, gelijk het quadraat van den diameter des bols.

Deze eigenſchap heeft PAPPUS reeds bewezen, met behulp der leerſtellingen van ARCHIMEDES, zie *Eſſay ſur l'Hiſtoire Générale des Mathématiques par* CHARLES BOSSUT, *Tom.* 1 *pag.* 66. *Paris* 1802.

1.

1. *Aanmerking.* Als men in de gevondene ſpiraal-oppervlakte APMN $=$ AD^2 . *Sin.* $\frac{1}{4}\phi$, ſtelt $\phi = \frac{1}{2}\pi$, zoo is $\frac{1}{4}\phi = \frac{1}{8}\pi =$ 22° 30′; en doordien algemeen *Sin.* $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - 2\ Cos.\ \alpha)}$ is, zoo is, als men $\alpha = 45°$ ſtelt, *Sin.* 22° 30′ $= \frac{1}{2}\sqrt{(2 - 2\sqrt{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$; derhalve is de ſpiraal-oppervlakte APMFENA $= \frac{1}{2}$ AD^2 $\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$; of zoo men *Sin.* $\frac{1}{4}\phi =$ 22° 30′ uit de gewone Sinus-tafels neemt, vindt men de ſpiraal-oppervlakte van het eerſte quadrant der halve ſpheer $=$ 0,3826834 AD^2.

Stelt men $\phi = \pi$, zoo is $\frac{1}{4}\phi = \frac{1}{4}\pi =$ 45°, en *Sin.* 45° $= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; derhalve is de oppervlakte voor de twee eerſte kwarten der halve ſpheer, APMFGDENA $= \frac{1}{2}$ AD^2 . $\sqrt{2} =$ 0,7071068 . AD^2, en dus is de oppervlakte in het tweede kwart, EFGDE $=$ 0,3244234 . AD^2.

Stelt men eindelijk $\phi = 1\frac{1}{2}\pi$, zoo is $\frac{1}{4}\phi = \frac{3}{8}\pi =$ 67° 30′; en *Sin.* 67° 30′ $=$ *Cos.* 22° 30′ $= \frac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$; derhalve is de oppervlakte voor de drie eerſte kwarten, APMFGHBDENA $= \frac{1}{2}$ AD^2 $\sqrt{(2 + \sqrt{2})} =$ 0,9238795 . AD^2; alzoo is de oppervlakte in het derde kwart, DGHBD $=$ 0,2167727 AD^2, en als men de oppervlakte der drie kwarten van de geheele oppervlakte AD^2 aftrekt, reſt de oppervlakte voor het vierde kwart, BHAB $=$ 0,0761205 . AD^2.

2. *Aanmerking.* Wanneer men door *Fig.* 5 eenen regthoekigen kegel, van boven te zien, voorſtelt, van welken P het toppunt is, en dat eene regte lijn PA, welke de lengte van de zijde des kegels heeft, om P als draaipunt, over de oppervlakte dezes kegels gelijkmatig rondgevoerd wordt, te gelijker tijd, dat zich een punt uit P gelijkmatig over deze lijn benedenwaards naar A beweegt, zoo zal dit beweegbare punt insgelijks eene ſpiraal-lijn PMFGHA op de oppervlakte des kegels beſchrijven; doch de daaruit ontſtane oppervlakte APMFGHABDEA zal geenszins eene rationale grootheid zijn, maar het $\frac{3}{8}$ gedeelte van de ſchuinſche oppervlakte des kegels bedragen. Daar het bewijs hier van niet zwaar is, en veel overeenkomst met het voorgaande heeft, zoo zullen wij zulks den beginneren ter oefening overlaten.

XII.

XII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

www.libtool.com.cn

Zij gegeven a Arc. Cos. $\frac{a-x}{2a}$ $-$ a *Arc. Cos.* $\frac{a+x}{2a} = b$; *te vinden de waarde van* x, *als de radius* 1 *is?*

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA, U. HUGUENIN, I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Stel *Arc. Cos.* $\frac{a-x}{2a} = p$; *Arc. Cos.* $\frac{a+x}{2a} = q$ en $\frac{b}{a} = c$, dan is *Cos.* $p = \frac{a-x}{2a}$, *Cos.* $q = \frac{a+x}{2a}$, en $p - q = c$; hier uit volgt vooreerst:

$$Cos.\ q + Cos.\ p = 1 \text{ en } Cos.\ q - Cos.\ p = \frac{x}{a}$$

dus $x = a\ (Cos.\ q - Cos.\ p) = 2\ a\ Sin.\ \frac{p+q}{2}\ .\ Sin.\ \frac{p-q}{2}$

maar vermits $Cos.\ q + Cos.\ p = 2\ Cos.\ \frac{p+q}{2}\ .\ Cos.\ \frac{p-q}{2} = 1$ en $Cos.\ \frac{p-q}{2} = Cos.\ \frac{1}{2}\ c$ is, zoo heeft men $Cos.\ \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2\ Cos.\ \frac{1}{2}\ c}$ $= \frac{1}{2}\ Sec.\ \frac{1}{2}\ c$; waar door $\frac{p+q}{2}$ en vervolgens x berekend kan worden.

XIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Als r *Arc. Tang.* $\frac{r-x}{r} + r$ *Arc. Tang.* $\frac{r+x}{r} - r$ *Arc. Tang.* $\frac{r^2}{x^2} = b$ *is, vraagt men de waarde van* x *voor den radius* $= 1$ *te bepalen?*

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA, I. R. SCHMIDT, U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Stel *Arc. Tang.* $\frac{r-x}{r} = p$, *Arc. Tang.* $\frac{r+x}{r} = q$, *Arc. Tang.* $\frac{r^2}{x^2} = \phi$ en $\frac{b}{r} = c$, dan verandert de opgegevene vergelijking in $p + q - \phi = c$, of $p + q = \phi + c$.

Wij-

Wijders is, volgens de aangenomene ſtellingen, *Tang.* $p = \frac{r-x}{r}$, *Tang.* $q = \frac{r+x}{r}$ en *Tang.* $\phi = \frac{r^2}{x^2}$. Hieruit volgt *Tang.* $p +$ *Tang.* $q = 2$, *Tang.* p *Tang.* $q = \frac{r^2-x^2}{r^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2}$ en $1 -$ *Tang.* p . *Tang.* $q = \frac{x^2}{r^2}$; dus $\frac{\text{Tang. } p + \text{Tang. } q}{1 - \text{Tang. } p \text{ . Tang. } q} =$ *Tang.* $(p+q) = \frac{2r^2}{x^2} = 2$ *Tang.* ϕ, en dus $x^2 = r^2$ *Cot.* ϕ, waar door $x = \pm r \sqrt{}$ *Cot.* ϕ.

Nu hebben wij, om ϕ te bepalen, *Tang.* $(p + q) =$ *Tang.* $(\phi + c) = 2$ *Tang.* ϕ, dus $\frac{\text{Tang. } (\phi + c)}{\text{Tang. } \phi} = 2$, dus .... $\frac{\text{Tang. } (\phi + c) + \text{Tang. } \phi}{\text{Tang. } (\phi + c) - \text{Tang. } \phi} = 3 = \frac{\text{Sin. } (2\ \phi + c)}{\text{Sin. } c}$ waar uit volgt, *Sin.* $(2\ \phi + c) = 3$ *Sin.* c. Door deze vergelijking de waarde van ϕ gevonden hebbende, zal $x = \pm r \sqrt{}$ *Cot.* ϕ zijn.

Uit deze oplosſing blijkt, dat *Sin.* c op zijn grootst gelijk $\frac{1}{3}$ zijn kan, op dat x niet imaginair zal worden; dat wijders de vergelijking : *Sin.* $(2\ \phi + c) = 3$ *Sin.* c, altijd twee waarde voor ϕ oplevert; want ſtel dat men gevonden hebbe *Sin.* $(2\ \phi + c) =$ *Sin.* a, dan is ook *Sin.* $(2\ \phi + c) =$ *Sin.* $(180° - a,)$ dus $\phi = \frac{1}{2}(a - c)$ en $\phi = 90 - \frac{1}{2}(a + c)$.

XIV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

De vergelijkingen $x^3z + xz^3 = a$ *en* $x^4 + z^4 = b$ *op te losſen?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, C. LANTZ JR., B. CANTOR en R. LOBATTO.

De eerſte vergelijking kan aldus geſchreven worden: $xz(x^2+z^2) = a$; hieruit is $xz = \frac{a}{x^2+z^2}$ of $2x^2z^2 = \frac{2a^2}{(x^2+z^2)^2}$, en tellende dit bij de tweede vergelijking, komt

$$(x^2+z^2)^2 = b + \frac{2a^2}{(x^2+z^2)^2}$$

$$\text{of } (x^2+z^2)^4 - b(x^2+z^2)^2 = 2a^2$$

en door deze vierkants vergelijking op te losſen, vinden wij,

$(x^2$

$$(x^2 + z^2)^2 = \tfrac{1}{2} b \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(8 a^2 + b^2)}$$
$$\text{en } x^2 + z^2 = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2} b \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(8 a^2 + b^2)})}$$

www.libtool.com.cn

Stel dit $= m$, dan is $2xz = \frac{2a}{x^2 + z^2} = \pm \frac{2a}{m}$, en ſtellende dit $= n$, dan hebben wij $(x + z)^2 = m + n$ en $(x - z)^2 = m - n$; waaruit $x + z = \pm \sqrt{(m + n)}$ en $x - z = \pm \sqrt{(m - n)}$;

$$\text{dus } x = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(m + n)} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(m - n)}$$
$$\text{en } z = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(m + n)} \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{(m - n)}$$

Voorbeeld. Laat gegeven zijn $a = 10$ en $b = 17$, dan vinden wij $m = \pm 5$ en $n = \pm 4$, of $m = \pm 2\sqrt{-2}$ en $n = \mp 5\sqrt{-2}$.

$m = 5$ en $n = 4$ geeft ons deze vier antwoorden:

1°. $x = 1$ en $z = 4$; 2°. $x = 2$ en $z = 1$; 3°. $x = -1$ en $z = -2$; 4°. $x = -2$ en $z = -1$.

$m = -5$ en $n = -4$ geeft ons deze vier antwoorden:

5°. $x = \sqrt{-1}$ en $z = 2\sqrt{-1}$; 6°. $x = 2\sqrt{-1}$ en $z = \sqrt{-1}$; 7°. $x = -\sqrt{-1}$ en $z = -2\sqrt{-1}$; 8°. $x = -2\sqrt{-1}$ en $z = -\sqrt{-1}$.

$m = +2\sqrt{-2}$ en $n = -5\sqrt{-2}$ geeft ons deze vier antwoorden:

9°. $x = \frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$ en $z = \frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} - \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$

10°. $x = \frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} = \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$ en $z = \frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$

11°. $x = -\frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} - \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$ en $z = -\frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$

12°. $x = -\frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$ en $z = -\frac{1}{2}\sqrt{(-3\sqrt{-2})} - \frac{1}{2}\sqrt{(7\sqrt{-2})}$

$m = -2\sqrt{-2}$ en $n = +5\sqrt{-2}$ geeft ons eindelijk:

13°. $x = \frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$ en $z = \frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} - \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$

14°. $x = \frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} - \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$ en $z = \frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$

15°. $x = -\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} - \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$ en $z = -\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$

16°. $x = -\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$ en $z = -\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{-2})} - \frac{1}{2}\sqrt{(-7\sqrt{-2})}$.

XV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

De vergelijkingen $x^2z + z^2x = a$ *en* $x^2z^7 + z^2x^7 = b$ *op te losſen?*

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, C. LANTZ JR. en R. LOBATTO.

De vergelijkingen kunnen aldus geſchreven worden:

$$xz\,(x + z) = a \text{ en } x^2z^2\,(x^5 + z^5) = b$$

Deelende nu de tweede door de eerſte, komt

$$xz\,(x^4 - x^3z + x^2z^2 - xz^3 + z^4) = \frac{b}{a}$$

$$\text{of } xz\,(x + z)^4 - 5xz\,(x^3z + x^2z^2 + xz^3) = \frac{b}{a}$$

$$\text{of } xz\,(x + z)^4 - 5x^2z^2\,(x^2 + xz + z^2) = \frac{b}{a}$$

$$\text{of } xz\,(x + z)^4 - 5x^2z^2\,(x + z)^2 + 5x^3z^3 = \frac{b}{a}$$

nu is uit de eerſte $xz = \frac{a}{x + z}$, en door deze ſubſtitutie gaat de laatstgevondene vergelijking over in

$$a\,(x + z)^5 - 5a^2 + \frac{5a^3}{(x + z)^3} = \frac{b}{a}$$

of, multiplicerende alles door $4a\,(x + z)^3$,

$$4a^2\,(x + z)^6 - 4\,(5a^3 + b)\,(x + z)^3 = -20a^4$$

Deze als eene vierkants vergelijking opgelost, geeft:

$$(x + z)^3 = \frac{5a^3 + b \pm \sqrt{(5a^6 + 10a^3b + b^2)}}{2a^2}$$

$$\text{en } (x + z) = \sqrt[3]{\left(\frac{5a^3 + b \pm \sqrt{(5a^6 + 10a^3b + b^2)}}{2a^2}\right)}$$

Stel deze waarde van $x + z = m$, dan is $xz = \frac{a}{x + z} = \frac{a}{m}$, en ſtel dit $= n$, dan hebben wij $(x + z)^2 = m^2$ en $(x - z)^2 = m^2 - 4n$; dus $x - z = \pm\sqrt{(m^2 - 4n)}$; waar door $x = \frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n)}$ en $z = \frac{1}{2}m \mp \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n)}$

Voorbeeld. Zij gegeven $a = 6$ en $b = 132$, dan vinden wij $m = 3$ en $n = 2$, of $m = \sqrt[3]{\frac{20}{3}}$ en $n = 6\sqrt[3]{\frac{3}{20}}$. Door $m = 3$ en $n = 2$ vinden wij deze antwoorden: $x = 1$ en $z =$

$z = 2$ of $x = 2$ en $z = 1$. Doch, door $m = \sqrt[3]{\frac{20}{3}}$ en $n = 6\sqrt[3]{\frac{3}{20}}$ vinden wij, na herleiding, deze antwoorden:

$x = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{1}{5}\sqrt{-65})\sqrt[3]{\frac{20}{3}}$ en $z = \frac{1}{2}(1 \mp \frac{1}{5}\sqrt{-65})\sqrt[3]{\frac{20}{3}}$

en wij kunnen nog meer imaginaire antwoorden vinden, om dat m, behalve 3 en $\sqrt[3]{\frac{20}{3}}$ nog vier imaginaire waarden heeft.

XVI. VOORSTEL.

Door J. DE GELDER.

De vergelijkingen $x + 2y + z = a$, $xyz = b$, *en* $x^2 = 4y^2 + z^2$ *op te losfen?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, C. LANTZ JR., L. C. MAZEL en R. LOBATTO:

Uit de eerfte vergelijking is $a - x = 2y + z$, of quadraterende, $a^2 - 2ax + x^2 = 4y^2 + 4yz + z^2$, en trekkende hier af de derde, komt er $a^2 - 2ax = 4yz$, welke, met x vermenigvuldigd, geeft $a^2x - 2ax^2 = 4xyz = 4b$. Uit deze tweede magts vergelijking wordt gevonden

$$x = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 - 32ab)}}{4a}.$$ Stel dit $= c$

dan is de derde vergelijking $4y^2 + z^2 = c^2$ en de tweede, $yz = \frac{b}{c}$, waar door $(2y + z)^2 = c^2 + \frac{4b}{c}$ en $(2y - z)^2 = c^2 - \frac{4b}{c}$; dus $2y + z = \sqrt{(c^2 + \frac{4b}{c})}$ en $2y - z = \pm\sqrt{(c^2 - \frac{4b}{c})}$; dus

$$y = \tfrac{1}{4}\sqrt{(c^2 + \tfrac{4b}{c})} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(c^2 - \tfrac{4b}{c})}$$

$$\text{en } z = \tfrac{1}{2}\sqrt{(c^2 + \tfrac{4b}{c})} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(c^2 - \tfrac{4b}{c})}$$

Voorbeeld. Laat $a = 12$ en $b = 30$ gegeven zijn, dan vinden wij $x = 5$ of 1.

Nemende dan $c = 5$, zoo vinden wij deze twee antwoorden:

$x = 5$; $y = 2$ en $z = 3$ . . . 1ste antwoord

$x = 5$; $y = 1\frac{1}{2}$ en $z = 4$ . . . 2de antwoord

Doch, nemende $c = 1$, dan verkrijgen wij de twee volgende imaginaire antwoorden:

$x = 1$;

$x = 1 ; y = \frac{1}{4}(11 + \sqrt{-119}) ; z = \frac{1}{2}(11 - \sqrt{-119})$ . . 3de antw.
$x = 1 ; y = \frac{1}{4}(11 - \sqrt{-119}) ; z = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{-119})$ . . 4de antw.

www.libtool.com.cn

XVII. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

De vergelijkingen $x^2y + yz = a$, $x^2 + yz = b$, *en* $x^2y^2 + z = c$ *op te losfen?*

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., R. LOBATTO, J. B. CANTOR en I. R. SCHMIDT.

De twee eerfte vergelijkingen van elkander trekkende, rest $x^2(y - 1) = a - b$.

De derde met y vermenigvuldigende, komt $x^2y^3 + yz = cy$, en hier aftrekkende de eerfte vergelijking, blijft $x^2(y^3 - y) = cy - a$.

Deze uitkomst door $x^2(y - 1) = a - b$ deelende, zoo heeft men $y^2 + y = \frac{cy - a}{a - b}$, of

$$y^2 = \left(\frac{c - a + b}{a - b}\right) y - \frac{a}{a - b}$$

waaruit gevonden wordt

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{c - a + b}{a - b}\right) \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{c - a + b}{a - b}\right)^2 - \frac{a}{a - b}\right)}$$

Hierdoor y gevonden hebbende, heeft men

$$x = \sqrt{\frac{a - b}{y - 1}} \text{ en } z = c - x^2y^2$$

Voorbeeld. Laat $a = 8$, $b = 7$ en $c = 7$ gegeven zijn, vinden wij $y = 2$ of 4, en hieruit volgt $x = \pm 1$ of $\pm \sqrt{\frac{1}{3}}$, en $z = 3$ of $1\frac{2}{3}$.

XVIII. VOORSTEL.

Door J. B. CANTOR.

Op de bazis van eenen gegevenen driehoek, eenen vierhoek van eenen gegevenen inhoud, zoodanig te plaatfen, dat een der zijden van den vierhoek evenwijdig loopt aan de bazis van den driehoek; dat voorts de vierhoek éénen hoek met den driehoek gemeen hebbe, en de overige zijde van den vierhoek met de bazis des driehoeks eenen gegevenen hoek make?

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., J. B. CANTOR en R. LOBATTO. Laat AB (*Fig. 7*) de bazis en C de top van den gegevenen drie-

driehoek zijn, en laat ALKB den vierhoek verbeelden, dan is L ABK gegeven, en dus ook het punt D, waarin het verlengde van AC en BK elkander ontmoeten. Laten voorts de perpendiculairen CE en DF getrokken worden, en ſtellen wij AB $= a$, DF $= q$ en DM $= x$; dan is DF : DM $=$ AB : LK, of $q : x = a :$ LK; dus LK $= \frac{ax}{q}$. Verder is Δ ADB $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ DF $= \frac{1}{2} aq$, en Δ DLK $= \frac{1}{2}$ LK $\times$ DM $= \frac{ax^2}{2q}$. Hiervan is het verſchil, vierhoek ABKL $= \frac{1}{2} aq - \frac{ax^2}{2q}$.

Laat nu de inhoud van den vierhoek gegeven zijn, gelijk aan dien van eenen driehoek, waarvan de bazis is AB $= a$ en de hoogte $= p$, dan is $\frac{1}{2} aq - \frac{ax^2}{2q} = \frac{1}{2} ap$, waaruit volgt $q^2 - x^2 = pq$ of $x^2 = q^2 - pq = q(q-p)$ en $x = \sqrt{q(q-p)}$.

Hieruit volgt deze Conſtructie: maakt DM midden evenredig tuſſchen DF $= q$ en $q - p$, en trek door het punt M, de regte LK evenwijdig aan AB, dan zal ALKB de begeerde vierhoek zijn.

XIX. VOORSTEL.

Door J. B. CANTOR.

Een Meester gaf zijn' Scholier twee getallen te vermenigvuldigen, waarvan het eene 75 grooter dan het andere was. De Scholier hetzelve verrigt hebbende, moest er de proef op maken; namelijk met het product door den kleinſten factor te deelen: hij bevond tot quotient 227 en er bkef 113 over. De Meester in het vermenigvuldigen eene fout ontdekkende, beval hem dezelve te verbeteren; de Scholier bevond, dat hij in het multipliceren 1 had weggelaten; neen, antwoordde de Meester, gij hebt niet 1 maar 1000 weggelaten; vrage naar de twee getallen?

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., J. B. CANTOR, L. C. MAZEL, S. J. MULDER, R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

Stel het eene getal x, zoo is het andere $x + 75$, en volgens de opgaaf

$x^2 +$

$$\frac{x^2 + 75x - 1000}{x} = 227 + \frac{113}{x}$$

www.libtool.com.cn

dus $x^2 + 75x - 1000 = 227x + 113$

en $x^2 - 152x = 1113$

waaruit $x = 159$ of -7, dus $x + 75 = 234$ of 68.

XX. VOORSTEL.

Door J. B. CANTOR.

Vind eene rekenkundige en eene meetkundige reeks, ieder van drie termen, zoodanig dat de ſom der termen dezer beide reekſen 96 is; vervolgens, dat de eerſte term der meetkundige reeks tweemaal zoo groot is, als de eerſte term der rekenkundige reeks, de tweede term der meetkundige reeks, driemaal zoo groot, als de tweede term der rekenkundige reeks, en de derde term der meetkundige reeks, negenmaal zoo groot, als de derde term der rekenkundige reeks?

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., J. B. CANTOR, S. J. MULDER, L. C. MAZEL, R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

Stel de rekenkundige reeks voor, door x, $x + y$ en $x + 2y$; dan is de meetkundige reeks $2x$, $3x + 3y$ en $6x + 12y$, en de ſom van alle deze zes termen, $14x + 18y = 96$; dus $7x + 9y = 48$. Verder is in de meetkundige reeks

$$2x\,(6x + 12y) = (3x + 3y)^2 = 9\,(x + y)^2$$

of $4x^2 + 8xy = 3\,(x + y)^2 = 3x^2 + 6xy + 3y^2$

dat is $x^2 + 2xy = 3y^2$ of $(x + y)^2 = 4y^2$

dus $x + y = \pm 2y$ en $x = y$ of $x = -3y$

Door de vergelijkingen $x = y$ en $7x + 9y = 48$ vinden wij $x = 3$ en $y = 3$. Dus voor de arithmetiſche reeks : 3 . 6 . 9 en voor de geometriſche reeks : 6 . 18 . 54.

Door de vergelijkingen $x = -3y$ en $7x + 9y = 48$ vinden wij $x = 12$ en $y = -4$. Dus voor de arithmetiſche reeks : 12 . 8 . 4 en voor de geometriſche reeks : 24 . 24 . 24.

XXI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

In eene kolfbaan ligt een bol op eene gegevene plaats; men vraagt het punt van den paal te bepalen, waar tegen de bol zal moeten aangeſlagen worden, om, terug geſloten zijnde, eene rigting aan te nemen, evenwijdig aan eene gegevene regte lijn?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Het is uit de eerſte beginſelen der Natuurkunde bekend, dat,

wanneer een voortgeworpen bol door eenig ander ligchaam wordt terug geſtoten, de hoek van terugſtuiting gelijk den hoek van inval ling is: dat is; het zwaartepunt van den bol zal na den ſchok eene rigting aannemen, welke met de tangens van het raakpunt eenen hoek maakt, gelijk aan den hoek, welke de rigting van dit zwaartepunt voor den ſchok met die tangens maakte.

www.libtool.com.cn

Laat dan (*Fig.* 8) C het middelpunt des paals, A het middelpunt van den bol, en PQ de gegevene rigting na den ſchok zijn, zoo dan B het gevraagde raakpunt is, zal $\angle AA'C = \angle CA'A''$ en daarenboven $A'A''$ evenwijdig PQ moeten zijn, zoo nu uit C, met $CA' = CB + BA'$, dat is met de ſom der radien van den paal en den bol, eenen cirkel beſchreven wordt, zal bijgevolg de vraag het zelfde zijn, alsof de bol een enkel punt A was, dat de cirkel op CA' zoodanig moet raken, dat het na den ſchok evenwijdig aan PQ loopt, en hierdoor is het voorſtel herleid tot het volgende zuiver meetkunſtig problema.

Uit een gegeven punt A (Fig. 9) eene lijn AB te trekken, tot den omtrek van eenen gegevenen cirkel, zoodanig, dat, trekkende uit dit raakpunt B eene andere lijn BD, welke met den radius CB eenen hoek CBD = hoek CBA maakt, deze lijn BD evenwijdig aan eene gegevene lijn PQ zal zijn?

Laat, om dit problema op te losſen, PQ onderſteld worden door het punt A te gaan, dan blijkt het bij de eerſte beſchouwing van de figuur reeds duidelijk, dat het voorſtel voor vier bijzondere oplosſingen vatbaar is, waarvan de twee eerſte B en B' met het voorſtel van de kolfbaan in eenen eigenlijken zin overeenkomen, terwijl de twee andere B'' en B''', offchoon zij niet op den paal als een vast ligchaam kunnen worden toegepast, ondertusſchen niet alleen aan ons meetkundig problema voldoen, maar ook daarenboven op den paal toepaſſelijk zijn, wanneer dezelve als een hol ſchot wordt aangemerkt: en het blijkt dus hier reeds voorloopig uit, dat de eindvergelijking voor dit voorſtel tot de vierde magt zal moeten opklimmen.

Laat nu $AC = a$; $BC = b$; $\angle CAP = \alpha$; $\angle CAB = \phi$ en $\angle CBA = \phi'$ geſteld worden, dan hebben wij de volgende oplosſing, waarbij in aanmerking moet worden genomen, dat b gelijk is aan de ſom der radien van den paal en den bol, en dat dus deze radien r en r' ſtellende $b = r + r'$ zal zijn.

Voor-

Vooreerst hebben wij *Sin.* CAB : *Sin.* CBA = BC : AC

of *Sin.* ϕ : *Sin.* $\phi' = b : a$; waaruit *Sin.* $\phi' = \frac{a}{b}$ *Sin.* ϕ (1)

www.libtool.com.cn

Ten andere is $\angle$ CBA + $\angle$ CBD = 360° — $\angle$ ABD; dat is, omdat $\angle$ CBA = $\angle$ CBD moet zijn, 2 $\angle$ CBA = 360° — $\angle$ BAP = 360° — ($\angle$ BAC + $\angle$ CAP); of wel 2 ϕ' = 360° — (α + ϕ) waaruit ϕ' = 180° — $\frac{1}{2}$ (α + ϕ)

en *Sin* ϕ' = *Sin.* $\frac{1}{2}$ (α + ϕ) . . . . . (2)

Stellende dan de waarden van *Sin.* ϕ', in (1) en (2) gevonden, aan elkander gelijk, verkrijgen wij de vergelijking

Sin. $\frac{1}{2}$ (α + ϕ) = $\frac{a}{b}$ *Sin.* ϕ; dat is

Sin. $\frac{1}{2}\alpha$ *Cos.* $\frac{1}{2}\phi$ + *Cos.* $\frac{1}{2}\alpha$. *Sin.* $\frac{1}{2}\phi$ = $\frac{2a}{b}$ *Sin* $\frac{1}{2}\phi$. *Cos.* $\frac{1}{2}\phi$

of deelende alles door *Sin.* $\frac{1}{2}\phi$ *Cos.* $\frac{1}{2}\phi$

$$\frac{Sin.\ \frac{1}{2}\alpha}{Sin.\ \frac{1}{2}\phi} + \frac{Cos.\ \frac{1}{2}\alpha}{Cos.\ \frac{1}{2}\phi} = \frac{2a}{b};\ \text{dat is}$$

$$\frac{Cos.\ \frac{1}{2}\alpha}{Cos.\ \frac{1}{2}\phi} = \frac{2a}{b} - \frac{Sin.\ \frac{1}{2}\alpha}{Sin.\ \frac{1}{2}\phi}$$

dit gequadrateerd geeft ons

$$\frac{Cos^2.\ \frac{1}{2}\alpha}{Cos^2.\ \frac{1}{2}\phi} = \frac{4a^2}{b^2} + \frac{Sin^2.\ \frac{1}{2}\alpha}{Sn^2.\ \frac{1}{2}\phi} - \frac{4a\ Sin.\ \frac{1}{2}\alpha}{b\ Sin.\ \frac{1}{2}\phi}$$

of ſtellende 1 — *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$ in plaats van *Cos*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$

$$\frac{Cos^2.\ \frac{1}{2}\alpha}{1 - Sin^2.\frac{1}{2}\phi} = \frac{4a^2}{b^2} + \frac{Sin^2.\ \frac{1}{2}\alpha}{Sin^2.\ \frac{1}{2}\phi} - \frac{4a\ Sin.\ \frac{1}{2}\alpha}{b\ Sin.\ \frac{1}{2}\phi}$$

Dat is, wanneer wij de breuken wegmaken b^2 *Cos*^{2}. $\frac{1}{2}\alpha$. *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$ = $4a^2$ *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$ (1 — *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$) + b^2 *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\alpha$ (1 — *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$) — $4ab$ *Sin.* $\frac{1}{2}\alpha$ *Sin.* $\frac{1}{2}\phi$ (1 — *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$) welke vergelijking, door ontwikkeling en overbrenging der termen, overgaat in

$4a^2$ *Sin*^{4}. $\frac{1}{2}\phi$ — $4ab$ *Sin.* $\frac{1}{2}\alpha$. *Sin*^{3}. $\frac{1}{2}\phi$ + (b^2 — $4a^2$) . . . *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\phi$ + $4ab$ *Sin.* $\frac{1}{2}\alpha$ *Sin.* $\frac{1}{2}\phi$ — b^2 *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\alpha$ = o

dat is, door $4a^2$ deelende,

$$Sin^4.\ \tfrac{1}{2}\phi - \frac{b}{a}\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\alpha\ Sin^3.\ \tfrac{1}{2}\phi + \left(\frac{b^2}{4a^2} - 1\right) Sin^2.\ \tfrac{1}{2}\phi + \frac{b}{a}\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\alpha\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\phi - \frac{b^2}{4a^2}\ Sin^2.\ \tfrac{1}{2}\alpha = o$$

of, ſtellende kortheidshalve $\frac{b}{a} = m$ en $\frac{b}{a}$ *Sin.* $\frac{1}{2}\,a = n$, . . *Sin*^{4}. $\frac{1}{2}\,\phi - n$ *Sin*^{3}. $\frac{1}{2}\,\phi + (\frac{1}{4}\,m^2 - 1)$ *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\,\phi + n$ *Sin.* $\frac{1}{2}\,\phi - \frac{1}{4}\,n^2 = 0$ (3) door welke vergelijking de waarden van ϕ gevonden zijnde, het voorſtel is opgelost.

www.libtool.com.cn

Toepaſſing op eenige voorbeelden.

1ſte *Voorbeeld.* — Laat $a = 0$ zijn, dan ligt PQ op de lijn AC (*Fig.* 10, 11 en 12), en het is uit den aard van de zaak klaar dat B en B′, waarin PQ den cirkel ſnijdt, twee van de begeerde punten zijn. Laat ons nu zien wat onze oplosſing in dit geval geeft

$a = 0$ zijnde, is $n = \frac{b}{a}$ *Sin.* $\frac{1}{2}\,a = 0$ en de eindvergelijking (3) gaat over in

$$Sin^4.\ \tfrac{1}{2}\,\phi + \tfrac{1}{4}\,(m^2 - 1)\ Sin^2.\ \tfrac{1}{2}\,\phi = 0$$

welke reeds aantoont, dat er twee wortels gelijk o zijn, en dat dus B en B′ twee van de begeerde punten zijn.

De vergelijking door *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\,\phi$ deelende, wordt *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\,\phi = 1 - \frac{1}{4}\,m^2 = 1 - \frac{b^2}{4a^2}$ dus *Sin.* $\frac{1}{2}\,\phi = \pm \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$ welke vergelijking de twee andere punten B″ en B‴ moet aantoonen; zie hier eenige bijzondere gevallen

1ſte *Geval*, laat $b = a$ en dus A in den omtrek van den cirkel zijn, dan is *Sin.* $\frac{1}{2}\,\phi = \pm \frac{\sqrt{3a^2}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} =$ *Sin.* 60°, dus $\frac{1}{2}\,\phi = \pm 60$ en $\phi = \pm 120°$ en bijgevolg AB″ = AB‴ = AC (*Fig.* 10).

2de *Geval*, laat $a = 2b$ zijn, dan wordt *Sin.* $\frac{1}{2}\,\phi = \pm \frac{\sqrt{15b^2}}{4b} = \pm \frac{1}{4}\sqrt{15} = \pm$ 0,9682458, waardoor $\frac{1}{2}\,\phi = \pm 75°\ 31'\ 20''$ en $\phi = \pm 151°\ 2'\ 40''$ (*Fig.* 11).

3de *Geval*, $a = 3b$ zijnde, wordt *Sin.* $\frac{1}{2}\,\phi = \pm \frac{\sqrt{35b^2}}{66} = \pm \frac{1}{6}\sqrt{35} = \pm$ 0,9860133; dus $\frac{1}{2}\,\phi = \pm 80°\ 24'\ 20''$ en $\phi = \pm 160°\ 48'\ 40''$.

4de

4de *Geval*, laat $b = 2a$ zijn, dan wordt *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0$, waaruit blijkt, dat in dit geval al de vier wortels van onze vergelijking gelijk o zijn.

www.libtool.com.cn

5de *Geval*, laat $b > 2a$ zijn, dan wordt *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = \pm\frac{\sqrt{(4a^2-b^2)}}{2a}$ imaginair, en in dit geval zijn er dus geene andere oplosſingen, dan de twee wortels gelijk o, die dus de punten B en B′ gaven. Doch als b tusſchen $2a$ en a is, heeft *Sin.* $\frac{1}{2}\phi$, behalve de twee waarden gelijk o, altoos nog twee reéle waarden. Dit alles wordt ook, duidelijk door de formule *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = \pm\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}$ te conſtrueren, als wanneer men dezelfde uitkomſten verkrijgen zal (*Fig.* 12).

2de *Voorbeeld.* — Laat $a = 60°$ zijn, dan is $\frac{1}{2}a = 30°$ en *Sin.* $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$, dus $n = \frac{1}{2}m = \frac{b}{2a}$ en hierdoor verandert de eindvergelijking (3) in

$Sin^4.\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}m\,Sin^3.\frac{1}{2}\phi + (\frac{1}{4}m^2-1)\,Sin^2.\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}m\,Sin.\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{16}m^2 = 0$

welke vergelijking wij wederom op een paar gevallen zullen toepaſſen.

1ſte *Geval*, laat $a = b$ zijn, dan ligt het punt A (*Fig.* 13) in den omtrek van den cirkel en wij hebben $m = 1$, waardoor de vergelijking wordt

$$Sin^4.\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{3}{4}\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{2}\,Sin.\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{16} = 0$$

en ſtellende *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2}x$

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

ten eerſte hebben wij $x = 1$, dus *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2}$ en $\phi = 60°$. Dit antwoord is ondertusſchen zonderling, want makende $\angle$ CAB $= 60°$ en $\angle$ CBD $= \angle$ CBA, loopt BD geenszins evenwijdig aan PQ, zoo als de eisch van het voorſtel vordert: de rede van dit verſchijnſel is, dat wij ons voorſtel gebragt hebben tot de oplosſing van de vergelijking *Sin.* $\frac{1}{2}(a+\phi) = \frac{a}{b}$ *Sin.* ϕ, en ofſchoon nu onze oplosſing BD niet evenwijdig PQ doet zijn, voldoen zij echter volkomen aan deze vergelijking, want $\frac{a}{b} = 1$ en $\phi = 60°$ ſtellende, wordt deze vergelijking daar ook $a = 60°$ is, *Sin.* $60° = Sin.\ 60°$.

Om nu de andere wortels te vinden, deelen wij $x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ door $x - 1 = 0$, en wij bekomen $x^3 - 3x + 1 = 0$, waaruit wij voor x de drie volgende waarden vinden,

$x = 1{,}5320890$; $x = 0{,}3472962$ en $x = -1{,}8793552$

De eerſte $x = 1{,}5320890$ geeft *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}7660445$; $\frac{1}{2}\phi = 50°$ en $\phi = 100$; deze oplosſing geeft ons het punt B′, waarbij B′D′ evenwijdig PQ is.

De tweede, $x = 0{,}3472962$, geeft *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}1736481$; $\frac{1}{2}\phi = 170°$; en $\phi = 340°$, welke oplosſing ons het punt B″ geeft, waarin B″D″ mede evenwijdig PQ is.

De derde, $x = -1{,}8793552$, geeft eindelijk *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = -0{,}9396776$; $\frac{1}{2}\phi = 290°$ en $\phi = 220°$ en dit toont het punt B‴ aan, waarbij ook B‴D‴ evenwijdig PQ is.

2de *Geval*, ſtellende $a = 2b$ (*Fig.* 9), wordt de vergelijking

$$Sin^4.\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{4}Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{15}{16}Sin^2.\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{4}Sin.\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{64} = 0$$

of ſtellende *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{4}x$

$$x^4 - x^3 - 15x^2 + 16x - 4 = 0$$

waaruit de wortels ten naaste bij zijn:

$x = 3{,}87$; $x = -3{,}92$; $x = 0{,}4107$; $x = 0{,}6404$

dus *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}97$; *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = -0{,}98$; *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}1027$ en *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}160$.

Hieruit de waarden van ϕ opmakende en conſtruerende, zullen wij zien:

Dat de 1e waarde *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}97$ het punt B′ geeft, zijnde CAR′, zoo als dezelve door eenen geſtipten cirkelboog is aangewezen, de waarde van ϕ.

Dat de 2e waarde *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = -0{,}98$ het punt B′, waarbij CAR de waarde van ϕ is, aantoont.

Dat de 3e waarde *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}1027$ ons het punt B″ verſchaft, zijnde CAR″ alsdan de waarde van ϕ.

Dat eindelijk de 4e waarde *Sin.* $\frac{1}{2}\phi = 0{,}1601$ het punt B‴ doet kennen, waarbij CAR‴ de waarde van ϕ is.

XXII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

In eene kolfbaan zijn twee punten gegeven, nu vraagt men een punt aan den paal te vinden, zoodanig dat een bol uit het eene ge-

gegevene punt, naar dit punt des paals geſlagen, na de terugkaatſing, door het andere gegevene punt der baan gaat?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

www.libtool.com.cn

Wanneer wij hier, even als in het voorgaande voorſtel, redeneren, dan wordt dit voorſtel gemakkelijk herleid tot het volgende meetkundige problema.

„ *Een cirkel met twee punten gegeven zijnde, vraagt men een punt aan den omtrek des cirkels te vinden, zoodanig dat trekkende uit dit punt lijnen naar de twee gegevene punten, deze twee lijnen gelijke hoeken zullen maken met den radius van dit punt des omtreks.*"

Laat dan (*Fig.* 14) A en A′ de gegevene punten, en B het gevraagde punt zijn, dan moet $\angle$ ABC $=$ $\angle$ A′BC zijn. Stellende dan AC $= a$, AC′ $= b$; BC $= c$; $\angle$ ACA′ $= 2\alpha$, $\angle$ ACB $= \alpha - \phi$ en $\angle$ A′CB $= \alpha + \phi$, hebben wij in Δ ABC,

$$Tang.\ \angle \text{ ABC} = \frac{a\ Sin.\ (\alpha - \phi)}{c - a\ Cos.\ (\alpha - \phi)}$$ (DE GELDER *Meetk.*)

en in de Δ A′BC

$$Tang.\ \angle \text{ A′BC} = \frac{b\ Sin.\ (\alpha + \phi)}{c - b\ Cos.\ (\alpha + \phi)}$$

daar nu deze beide hoeken aan elkander gelijk moeten zijn, verkrijgen wij de vergelijking

$$\frac{a\ Sin.\ (\alpha - \phi)}{c - a\ Cos.\ (\alpha - \phi)} = \frac{b\ Sin.\ (\alpha + \phi)}{c - b\ Cos.\ (\alpha + \phi)}$$

of multiplicerende met het product der noemers,

$a\ Sin.\ (\alpha - \phi)\ (c - b\ Cos.\ (\alpha + \phi)) = b\ Sin.\ (\alpha + \phi)\ (c - a\ Cos.\ (\alpha - \phi))$

dat is:

$bc\ Sin.\ (\alpha + \phi) - ac\ Sin.\ (\alpha - \phi) = ab\ (Sin.\ (\alpha + \phi)\ Cos.\ (\alpha - \phi) -$

. . . . . $Cos.\ (\alpha + \phi)\ Sin.\ (\alpha - \phi))$

of $c\ (b\ Sin.\ (\alpha + \phi) - a\ Sin.\ (\alpha - \phi)) = ab\ Sin.\ ((\alpha + \phi) - (\alpha - \phi))$

hetgeen ontwikkeld zijnde, geeft

$c\ (b Sin.\alpha Cos.\phi + b\ Cos.\alpha\ Sin.\phi - a\ Sin.\alpha Cos.\phi + a\ Cos.\alpha Sin.\phi)$

$= a\ b Sin.\ 2\phi$

dat is:

$c((a+b)\ Cos.\alpha\ Sin.\phi - (a - b)\ Sin.\alpha\ Cos.\phi) = 2\ ab\ Sin.\phi\ Cos.\phi$

of wel

$Cos.\phi\ (c\ (a - b)\ Sin.\alpha + 2\ ab\ Sin.\phi) = c\ (a + b)\ Cos.\alpha\ Sin.\phi$

deze vergelijking gequadrateerd en voor $Cos^2.\phi$ geſchreven $1 - Sin^2.\phi$, wordt

$$(1 - Sin^2.\phi)(c^2(a-b)^2 Sin^2.\alpha + 4abc(a-b) Sin.\alpha Sin.\phi + 4a^2b^2 Sin^2.\phi) = c^2(a+b)^2 Cos^2.\alpha Sin^2.\phi$$

wanneer wij nu de aangewezene multiplicatien ontwikkelen, en alles naar de magten van $Sin.\phi$ ordenen, verkrijgen wij

$$4a^2b^2 Sin^4.\phi + 4abc(a-b) Sin.\alpha Sin^3.\phi + \ldots\ldots$$
$$\ldots (c^2(a-b)^2 Sin^2.\alpha + c^2(a+b)^2 Cos^2.\alpha - 4a^2b^2) Sin^2.\phi - \ldots$$
$$\ldots\ldots 4abc(a-b) Sin.\alpha Sin.\phi - c^2(a-b)^2 Sin^2.\alpha = 0$$

de coefficient van $Sin^2.\phi$ in deze vergelijking, kan aldus geſchreven worden

$$c^2(a^2+b^2) Sin^2.\alpha - 2abc^2 Sin^2.\alpha + c^2(a^2+b^2) Cos^2.\alpha + 2abc^2 Cos^2.\phi$$
$$\ldots\ldots\ldots - 4a^2b^2$$

of $c^2(a^2+b^2)(Sin^2.\alpha + Cos^2.\alpha) + 2abc^2(Cos^2.\alpha - Sin^2.\alpha) - a^2b^2$

dat is $c^2(a^2+b^2) - 4a^2b^2 + 2abc^2 Cos.2\alpha$

en hierdoor wordt onze vergelijking, door $4a^2b^2$ gedeeld zijnde,

$$Sin^4.\phi + \frac{c(a-b)}{ab} Sin.\alpha Sin^3.\phi + \left(\frac{c^2(a^2+2abCos.2\alpha+b^2)}{4a^2b^2} - 1\right) Sin^2.\phi$$
$$- \frac{c(a-b)}{ab} Sin.\alpha Sin.\phi - \frac{c^2(a-b)^2}{4a^2b^2} Sin^2.\alpha = 0 \ldots\ldots (A)$$

Door middel van deze vergelijking de vier waarden van $Sin.\phi$ gevonden hebbende, worden hierdoor de hoeken ACB en A′CB bekend, en dus zijn de punten B, B′, B″ en B‴, welke vier in getal kunnen zijn, bepaald, waardoor dan het voorſtel in het algemeen voor opgelost moet worden gehouden.

Toepaſſing op bijzondere gevallen.

1ſte *Voorbeeld.* — Laat $a = b$ zijn, (*Fig.* 15 en 16), dan is het uit den aard der zaak klaar, dat er twee punten B en B′ moeten beſtaan, waarin $\angle$ ACB $= \angle$ A′CB en dus $\phi = 0$ is; in dit geval zal dus onze vergelijking (A) twee wortels gelijk nul moeten hebben, en inderdaad gaat deze vergelijking, door de ſtelling van $a = b$ over in

$$Sin^4.\phi + \frac{(c^2(1 + Cos.2\alpha)}{2a^2} - 1) Sin^2.\phi = 0$$

welke twee wortels gelijk nul heeft.

Dee-

Deelende nu, om de twee andere wortels te vinden, door $Sin^2.\phi$, hebben wij, omdat $\frac{1 + Cos.\ 2\alpha}{2} = Cos^2.\ \alpha$ is,

www.libtool.com.cn

$Sin^2.\phi + (\frac{c^2}{a^2} Cos^2.\alpha - 1) = 0$ of $Sin.\phi = \pm \sqrt{(1 - \frac{c^2}{a^2} Cos^2.\alpha)}$

deze twee andere wortels worden dus imaginair, indien $\frac{c^2}{a^2}$ $Cos^2.\ \alpha > 1$ is, doch dit kan nooit gebeuren, wanneer de punten A en A′ buiten den cirkel liggen (*Fig.* 15), omdat alsdan $\alpha > c$ zijnde, $\frac{c\ Cos.\ \alpha}{a}$ altoos eene eigenlijke breuk en dus kleiner dan de eenheid is. Om nu te bepalen, welke de kleinſte waarde van α is ($\alpha = b$ zijnde), welke deze wortels mogelijk maakt, merken wij op, dat $\frac{c\ Cos.\ \alpha}{a} < 1$ en dus $c\ Cos.\ \alpha < a$ moet zijn. Laat dan (*Fig.* 16) A en A′ de gegeven punten verbeelden, zoodanig, dat AC = A′C is, en laten CAD CA′D′ en DD′ getrokken worden, dan is CE = CD × *Cos.* DCE = $c\ Cos.\ \alpha$ en AC = a, waaruit dan blijkt, dat de hoek DCD′ = 2α gegeven zijnde, AC niet kleiner dan CE kan zijn, zonder dat deze twee andere wortels onbeſtaanbaar worden.

Niets is nu gemakkelijker dan deze twee waarden te conſtrueren, want laat uit C, met CA als radius (*Fig.* 15 en 16), een cirkelboog beſchreven worden, ſnijdende DD′ in F en F′; zoo dan CFB″ en CF′B″′ getrokken worden, zullen B″ en B″′ de begeerde punten zijn. Want FE = FC . *Sin.* FCE = AC . *Sin.* FCE = a *Sin.* FCE en FE = $\sqrt{(FC^2 - EC^2)} = \sqrt{(a^2 - c^2\ Cos^2.\ \alpha)} = a\sqrt{(1 - \frac{c^2}{a^2} Cos^2.\ \alpha)}$ zijnde, is *Sin.* FCE = $\frac{FE}{a} = (1 - \frac{c^2}{a^2} Cos^2.\ \alpha) = Sin.\ \phi$, dus FCE = ϕ, en dus ACB″ = $\alpha - \phi$ en A′CB″ = $\alpha + \phi$, zoo als de eisch is; en dit zelfde gaat met verſchil van teekens voor het punt B″′ door.

Wanneer AC op zijn kleinst, dat is gelijk CE is, vallen de punten F en F′ beide in E, en de punten B″ en B″′ vereenigen zich in het punt B, in welk punt zich alzoo in dit geval drie oplosſingen vereenigen.

2de *Voorbeeld.* — Bijzonder moeten wij hier het geval opmerken, waarin $a = b = c$ is, en dus de beide punten A en A′ (*Fig.* 17) in den omtrek van den cirkel liggen, want dan wordt *Sin.* $\phi = \pm \sqrt{(1 - Cos^2 . \alpha)} = \pm$ *Sin.* α en dus $\phi = \pm \alpha$, waaruit blijkt, dat alsdan de punten B″ en B‴ in de punten A en A′ vallen. Dit blijkt ook bovendien uit de conſtructie van het voorgaande voorbeeld, omdat de punten F en F′ hier in D en D′ vallen.

3de *Voorbeeld.* — Stellen wij $a = b$ en $\alpha = o$ (*Fig.* 18), dan liggen de punten A, en A′ op elkander, in dit geval, *Cos.* $\alpha = 1$ zijnde, hebben wij behalve de punten B en B′, nog *Sin.* $\phi = \pm \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ of a *Sin.* $\phi = \sqrt{a^2 - c^2}$, hetgeen klaarblijkelijk de punten B″ en B‴ aantoont, gevormd door de tangenten, uit het punt A tot den cirkel getrokken.

In dit geval moet het punt A buiten den cirkel liggen, want anders is $c > a$ en *Sin.* ϕ wordt imaginair, zoodat er dan niet dan de twee punten B en B′ kunnen beſtaan.

Hiervan moet echter uitgezonderd worden het geval, waarin het punt A, offchoon binnen den cirkel liggende, in het middelpunt valt; want dan kunnen de lijnen AC en A′C beide nul zijnde, aangemerkt worden als onderling alle mogelijke hoeken te maken, en dus ook den hoek van 180°, waardoor $\alpha = 90°$ en *Cos.* $\alpha = o$, zoodat $a = o$ zijnde, *Sin.* $\phi = \sqrt{(1 - \frac{c^2}{a^2} Cos^2 . \alpha)} = \sqrt{(1 - \frac{o}{o})}$, hetwelk eene onbepaalde waarde is, en het is inderdaad klaar, dat in dit geval ieder punt van den omtrek des cirkels aan de vraag voldoet.

4de *Voorbeeld.* — Stellen wij $a = o$, zonder $a = b$ te ſtellen (*Fig.* 19), en is dus het eene punt A tuſſchen het middelpunt C en het andere punt A′ gelegen, dan wordt de vergelijking (A)

$$Sin^4 . \phi + (\frac{c^2 (a + b)^2}{4 a^2 b^2} - 1) \; Sin^2 . \phi = o$$

welke twee wortels $= o$ heeft, die de punten B en B′ aantoonen.

De twee andere wortels zijn *Sin.* $\phi = \pm \sqrt{(1 - \frac{c^2 (a + b)^2}{4 a^2 b^2})}$, wel-

welke waarden weder gemakkelijk geconſtrueerd kunnen worden, want makende CP $=$ CA $+$ CA$'$ $=$ $a + b$ en CQ $=$ CA $=$ b, en trekkende QR evenwijdig PA, is CP : CQ $=$ CA : CR; dus CR $= \frac{\text{CA} \cdot \text{CQ}}{\text{CP}} = \frac{ab}{a+b}$; beſchrijvende dan uit R, met RC als radius, eenen cirkelboog, ſnijdende den gegevenen cirkel in B$''$ en B$'''$, zullen deze de begeerde punten zijn; want CS $=$ 2 CR $= \frac{2ab}{a+b}$ zijnde, is SB$''$ $= \sqrt{(\text{CS}^2 - \text{CB}''^2)} =$ $\sqrt{(\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} - c^2)}$; maar SB$''$ $=$ CS . *Sin.* ACB$''$ zijnde, is *Sin.* ACB$''$ $= \frac{\text{SB}''}{\text{CS}} = \sqrt{(\frac{(a+b)^2}{4a^2b^2} - c^2)} : \frac{2ab}{a+b}$; dat is *Sin.* ACB$''$ $= \sqrt{(1 - \frac{c^2(a+b)^2}{4a^2b^2})} =$ *Sin.* ϕ en dus $\angle$ ACB$''$ $= \phi$, en het blijkt van zelf, dat deze twee oplosſingen niet beſtaan zullen, indien de twee cirkels elkander niet raken of ſnijden, dat is wanneer $c^2(a+b)^2 > 4a^2b^2$ of $c > \frac{2ab}{a+b}$ is.

5de *Voorbeeld.* — Stellen wij $a = 90°$ of $2a = 180°$, dan liggen (*Fig.* 20) de punten A en A$'$ weder in eene regte lijn met het middelpunt C, doch aan verſchillende zijden van hetzelve, de vergelijking is dan:

$$Sin^4.\phi + \frac{c(a-b)}{ab} Sin^3.\phi + (\frac{c^2(a-b)^2}{4a^2b^2} - 1) Sin^2.\phi - \frac{c(a-b)}{ab} Sin.\phi - \frac{c^2(a-b)^2}{4a^2b^2} = 0$$

deze vergelijking wordt 0 door *Sin.* $\phi = \pm 1$ te ſtellen, hetgeen $\phi = \pm 90°$ geeft en alzoo de punten B en B$'$ verſchaft, waarin de lijn AA$'$ den cirkel ſnijdt.

Deelende nu de vergelijking, om de overige cirkels te vinden, door $Sin^2.\phi - 1 = 0$, komt er

$$Sin^2.\phi + \frac{c(a-b)}{ab} Sin.\phi + \frac{c^2(a-b)^2}{4a^2b^2} = 0$$

$$\text{of } (Sin.\phi + \frac{c(a-b)}{2ab})^2 = 0$$

$$\text{waaruit } Sin.\phi = -\frac{c(a-b)}{2ab}$$

om

om deze waarde te conſtrueren maken wij CP = CA — CA′ = $a - b$, en op de perp. CR, nemen wij CQ = CA = a, trekkende dan A′R evenwijdig PQ, is CP . CQ = CA′ : CR of $(a - b) : a = b$: CR; dus CR = $\frac{ab}{a-b}$; laat nu op CR als middellijn een cirkel beſchreven, en RS = RS′ = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ C genomen hebbende de lijnen CS en CS′ getrokken worden, dan zijn B″ en B‴ de begeeerde punten, want dan is RS = CR *Sin.* ∠ RCS, of *Sin.* ∠ RCS = $\frac{RS}{CR} = \frac{c(a-b)}{2ab}$, en dus ∠ RCS = ϕ enz.

6de *Voorbeeld.* — In deze bijzondere gevallen konden wij de begeerde punten meetkundig conſtrueren, omdat de vergelijking zich in twee tweedemagts factoren liet ontbinden, doch in het algemeen genomen, moet de vierde magtsvergelijking opgelost, en hierdoor de waarden van ϕ gevonden worden. Stellen wij bij voorbeeld $a = 30°$, $a = 3c$ en $b = 2c$ dan wordt de vergelijking

$$Sin^4.\phi + \tfrac{1}{2} Sin^3.\phi - \tfrac{125}{144} Sin^2.\phi - \tfrac{1}{2} Sin.\phi - \tfrac{1}{15} = 0$$

wij zullen ons niet bij de oplosſing van deze vergelijking in getallen ophouden: de figuur 14 is in deze onderſtelling geteekend, en het zal, wanneer men de vier waarden van ϕ uit de vergelijking gevonden heeft, niet moeijelijk zijn, om na te gaan, bij welke der punten B, B′, B″ of B‴ ieder der waarden van ϕ moet genomen worden.

XXIII. VOORSTEL.

Door M. J. ZUIDHOF.

Twee ſchepen A en B (Fig. 21), op 28° 10′ noorder breedte liggende, zeilen te gelijk van daar, A bewesten en B beoosten het zuiden, te zamen 27 mijlen; alwaar zij naar hunne waarnemingen op gelijke breedte waren, zoodanig, dat hunne veranderde breedte 8 minuten of 2 mijlen minder was dan de gezeilde verheid van B, en zij zijn te zamen 21 mijl van hun afgevaren middagrond geweken; vrage op wat breedte zij gekomen zijn, en wat koers en verheid ieder ſchip gezeild heeft? (4)

OPLOSSING. Door M. J. ZUIDHOF en R. LOBATTO.

Stel

(4) Het laatſte Voorſtel uit J. A. VAN DAMS, *Schatkamer.*

Stel BC $=x$, AC $=27-x$ en CD $=x-2$ mijlen;
dan is $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\,AB \cdot BD$
en $AC^2 - BC^2 = AB^2 - 2\,AB \cdot BD$
of $(AC + BC)(AC - BC) = AB(AB - 2\,BD)$
maar $AC + BC = 27$, $AC - BC = 27 - 2x$ en $AB = 21$;
dus $27(27 - 2x) = 21(21 - 2\,BD)$
of $9(27 - 2x) = 7(21 - 2\,BD)$
of $243 - 18x = 147 - 14\,BD$
of $96 - 18x = -14\,BD$ en $BD = \frac{9x-48}{7}$
voorts $BC^2 - CD^2 = (BC + CD)(BC - CD) = BD^2$
dat is: $(2x-2) \times 2 = \frac{81x^2 - 864x + 2304}{49}$
of $196x - 196 = 81x^2 - 864x + 2304$
en $81x^2 - 1060x + 2500 = 0$

Hieruit is $x = 10$ of $x = 3\frac{7}{81}$. Volgens de eerſte waarde van x is BC $=10$ mijl, AC $=17$ mijl en CD $=8$ mijl $=32$ min. Deze afgetrokken van de afgevarene noorder breedte, komt 27°48′ voor de bekomene noorder breedte. Hierdoor worden de koerſen gevonden als volgt:

AC : *Rad.* = DC : *Cos.* ∠ ACD
komt 61°56′ bewesten het zuiden
BC : *Rad.* = DC : *Cos.* ∠ BCD
komt 36°52′ beoosten het zuiden

Voor de tweede waarde van x is BC $=3\frac{7}{81}$ mijl, AC $=23\frac{11}{81}$ mijl en CD $=1\frac{7}{81}$ mijl $=4\frac{23}{81}$ min. Deze van de afgevarene noorder breedte afgetrokken zijnde, komt 28°15′$\frac{43}{81}$ voor de bekomene noorder breedte. Hierdoor komt, door de bovenſtaande regels, voor den koers van A, 87°24′ bewesten het zuiden; en voor den koers van B, 69°23′ beoosten het zuiden.

XXIV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Met welk eenen ſtraal moet men uit een punt in den omtrek van eenen cirkel, wiens ſtraal gelijk de eenheid is, eenen cirkelboog beſchrijven, opdat de gegevene cirkel door denzelven in twee gelijke deelen gedeeld zij?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, en R. LOBATTO.

Laat AB $=1$ (*Fig.* 22) de ſtraal van den gegevenen cirkel en

en BD die van den gevraagden cirkelboog zijn; dan is, met BA = 1 uit B als middelpunt eenen cirkelboog beſchreven hebbende, ∠ ABD = ½ ∠ DAF en dus boog AP = ½ boog FD; ſtellende dan boog BD = y, is boog AP = ½ ($\pi - y$), en wij hebben AC = *Cos.* y; CD = *Sin.* y; BC = 1 — *Cos.* y; BE = BD = $\sqrt{(CD^2 + BC^2)} = \sqrt{2\,(1 - Cos.\ y)}$; en, daar BE : BA = boog ED : boog AP is, boog ED = $\frac{BE}{BA} \times$ boog AP = ½ ($\pi - y$) $\sqrt{2\,(1 - Cos.\ y)}$.

Nu is verder:

Sec. ADB = ½ AB × boog BD = ½ y en

Sec. BED = ½ BD × boog ED = ½ (1 — *Cos.* y) ($\pi - y$)
= ½ π — ½ y — ½ *Cos.* y ($\pi - y$)

hiervan is de ſom:

Fig. EIDQBE + △ ABD = ½ π — ½ *Cos.* y ($\pi - y$)

en trekkende hier af,

△ ABD = ½ AB × CD = ½ *Sin.* y,

houden wij over,

Fig. EIDQBE = ½ π — ½ π *Cos.* y + ½ y *Cos.* y — ½ *Sin.* y

Daar nu volgens het voorſtel deze figuur gelijk moet zijn aan een vierde van den inhoud des gegevenen cirkels, dat is, gelijk ¼ π, hebben wij deze vergelijking:

½ π — ½ π *Cos.* y + ½ y *Cos.* y — ½ *Sin.* y = ¼ π

of y *Cos.* y — *Sin.* y = π *Cos.* y — ½ π

of $\frac{y\ Cos.\ y - Sin.\ y}{2\ Cos.\ y - 1} = \frac{1}{2}\pi$ . . . . . (1)

of $\frac{Tang.\ y - y}{Sec.\ y - 2} = \frac{1}{2}\pi$ . . . . . (2)

welke transcendentale vergelijking op de volgende wijze benaderd kan worden.

Stellen wij, dat y = A eene gegiste waarde is, welke weinig van de waarheid afwijkt; zoo wij dan y = A + z ſtellen, zal z eene zeer kleine grootheid zijn, en al de magten van z zullen alzoo verwaarloosd kunnen worden, waardoor wij hebben zullen *Sin.* z = z; *Cos.* z = 1 en z^2 = 0; en dan zal de vergelijking (1) overgaan in

$$\frac{(A + z)\ Cos.\ (A + z) - Sin.\ (A + z)}{2\ Cos.\ (A + z) - 1} = \frac{1}{2}\pi$$

of,

of, wanneer wij *Sin.* (A + z) en *Cos.* (A + z) ontwikkelen, en in aanmerking nemen, dat *Sin.* z = z, *Cos.* z = 1 en $z^2 = 0$ is, in

www.libtool.com.cn

$$\frac{A\ Cos.\ A - Az\ Sin.\ A - Sin.\ A}{2\ Cos.\ A - 2\ z\ Sin.\ A - 1} = \tfrac{1}{2}\pi$$

en wanneer wij hieruit z afzonderen

$$z = Cot.\ A - \frac{\tfrac{1}{2}\pi - Sin.\ A}{Sin.\ A\ (\pi - A)}$$

en dus,

$$y = A + z = A + Cot.\ A - \frac{\tfrac{1}{2}\pi - Sin.\ A}{Sin.\ A\ (\pi - A)}$$

Indien dus A eene gegiste waarde van y is, welke niet veel van de waarheid verschilt, zal $y = A + Cot.\ A - \frac{\frac{1}{2}\pi - Sin.\ A}{Sin.\ A\ (\pi - A)}$ nog nader bij de waarheid komen, en men zal deze benadering zoo verre men wil kunnen voortzetten, door iederen keer voor A de laatstgevondene waarde van y te nemen, waardoor wij de volgende reeks van benaderde waarden zullen verkrijgen

$$y = A$$

$$y' = A + Cot.\ A - \frac{\tfrac{1}{2}\pi - Sin.\ A}{Sin.\ A\ (\pi - A)} = A'$$

$$y'' = A' + Cot.\ A' - \frac{\tfrac{1}{2}\pi - Sin.\ A'}{Sin.\ A'\ (\pi - A')} = A''$$

$$y''' = A'' + Cot.\ A'' - \frac{\tfrac{1}{2}\pi - Sin.\ A''}{Sin.\ A''\ (\pi - A'')}$$

&c. &c.

Daar het nu bij de oppervlakkigste beschouwing van de figuur blijkt, dat *Fig.* GID = *Fig.* EAI moet zijn, en dat dus de boog BD tusschen 60° en 90° moet genomen worden, en wel digter bij 60° dan bij 90°, stellen wij voor eene eerste benadering

$$y = A = 70° = 1{,}2217304$$

en dit geeft

$$y' = A' = 1{,}2358804 = 70°\,48'\,38''58$$
$$y'' = A'' = 1{,}2358970 = 70°\,48'\,42''17$$
$$y''' = A''' = 1{,}2358963 = 70°\,48'\,42''00$$

zijnde de laatste waarde zoo nabij, dat men tot eene verdere benadering Logarithmus tafelen zou behoeven, die in meer dan 7 decimalen berekend waren. Om ons van deze naauwkeurigheid te over-

overtuigen, behoeven wij de laatstgevondene waarde van y ſlechts in de vergelijking (2) te ſubſtitueren, en wij zullen vinden

www.libtool.com.cn

$$\frac{Tang.\ y - y}{Sec.\ y - 2} = 1{,}5707969$$

welke eerst in de 7^e decimaal van de waarde van $\frac{1}{2}\pi$ afwijkt.

Nemen wij dan $y = 70°\,48'\,42''$, hebben wij voor den gevraagden radius:

$$BD = \sqrt{2\,(1 - Cos.\ y)} = 2\sqrt{\frac{1 - Cos.\ y}{2}}$$

$$= 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\,y = 1{,}158728.$$

XXV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Men begeert ergens in het oppervlak van eenen bol, wiens ſtraal gelijk aan de eenheid geſteld wordt, het middelpunt van eenen anderen bol te plaatſen, welker oppervlakte den ligchamelijken inhoud van den eerſten in twee gelijke deelen verdeelt: doch, daar die tweede bol tot dat einde eene bepaalde grootte hebben moet, vraagt men: hoe groot deszelfs ſtraal genomen moet worden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Laat in de vorige figuur de cirkels de twee bollen verbeelden. Stel $BC = x$; dan is $AC = 1 - x$; $CD = \sqrt{(1 - (1 - x)^2)} = \sqrt{(2x - x^2)}$; $BD = BE = \sqrt{(BC^2 + CD^2)} = \sqrt{2x}$ en $EC = BE - BC = -x + \sqrt{2x}$.

In de oplosſing van het 74. voorſtel van het tweede deel der verzameling van voorſtellen, hebben wij aangetoond, dat, ſtellende van eenig bolvormig ſegment de dikte h, en de middellijn des bols m, de inhoud van dit bolvormig ſegment zal worden uitgedrukt door $\frac{1}{6}\pi h^2 (3m - 2h)$; paſſen wij dit nu op onze figuur toe, dan hebben wij

Bolv. ſegt. $DBD' = \frac{1}{3}\pi BC^2 (CAB - 2BC) = \frac{1}{3}\pi BC^2 (3AB - BC)$

Bolv. ſegt. $DED' = \frac{1}{3}\pi EC^2 (CBE - 2EC) = \frac{1}{3}\pi EC^2 (3BE - EC)$

en brengende hierin de gevondene waarden, komt

Bolv. ſegt $DBD' = \frac{1}{3}\pi x^2 (3 - x)$ en

Bolv. ſegt. $DED' = \frac{1}{3}\pi (-x + \sqrt{2x})^2 (3\sqrt{2x} - (-x + \sqrt{2x}))$

dat is:

Bolv. ſegt. $DBD' = \frac{1}{3}\pi (-x^3 + 3x^2)$ en

Bolv. ſegt. $DED' = \frac{1}{3}\pi (x^3 - 6x^2 + 4x\sqrt{2x})$.

waar-

waarvan de ſom is,

Bolv. ſegt. DBD′ + Bolv. ſegt. DED′ $= \frac{1}{3}\pi(-3x^2+4x\sqrt{2x})$

en daar ingevolge het voorſtel de ſom der inhouden van deze twee ſegmenten gelijk den halven inhoud van den bol, dat is gelijk $\frac{2}{3}\pi$ moet zijn, verkrijgen wij de vergelijking,

$$\frac{1}{3}\pi(-3x^2+4x\sqrt{2x}) = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{of } -3x^2+4x\sqrt{2x} = 2$$

Stellende nu den ſtraal BD $= \sqrt{2x} = y$, dan is $2x = y$ en $x = \frac{1}{2}y^2$, waardoor de vergelijking overgaat in

$$-\frac{3}{4}y^4+2y^3 = 2, \text{ dat is in}$$

$$3y^4-8y^3+8 = 0.$$

Deze vergelijking heeft eenen wortel tuſſchen 1 en 2, en eenen tuſſchen 2 en 3, terwijl de twee andere imaginair zijn. De wortel tuſſchen 2 en 3 kan ons niet dienen, wijl zij CD $= \sqrt{(2x-x^2)} = \frac{1}{2}y\sqrt{(4-y^2)}$ imaginair maakt, en wij behoeven dus alleen den wortel tuſſchen 1 en 2 te benaderen, waardoor wij vinden zullen

$$y = 1{,}2285445$$

voor den begeerden ſtraal.

XXVI. VOORSTEL.

Door JAN PAUW.

Iemand heeft een vlak driehoekig ſtuk lands ABC (Fig 23), waarvan de zijde AB doet 150, *BC* 130 *en AC* 140 *voeten, hierin maakt hij eenen cirkelronden tuin, zoo groot als mogelijk is; in het middelpunt van dezen tuin ſtelt hij eenen paal DE, en op denzelven een beeld EF, lang* 20 *voet, hetwelk men uit het hoekpunt A grooter ziet, dan uit eenig ander punt, genomen in de lijn, welke dit hoekpunt A met het middelpunt des tuins vereenigt; vrage hoe hoog de voet van dit beeld lijnregt boven den grond verheven is? als mede hoe ver men uit iederen hoek des lands van het bovenſte dezes beelds af is?*

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA, I. R. SCHMIDT en JAN PAUW.

Stel $\angle EAD = p$, $\angle FAD = q$ en $\angle FAE = r$; dan is $r = q - p$, $ED = AD \cdot Tang.\ p$, $FD = AD \cdot Tang.\ q$, $FE = FD - ED = AD\,(Tang.\ q - Tang.\ p)$, $ED \cdot FD = AD^2 \cdot Tang.\ p\ Tang.\ q$, $AD^2 + ED \cdot FD = AD^2\,(1 + Tang.\ p\ Tang.\ q)$; dus

$$\frac{FE}{AD^2 + ED \cdot FD} = \frac{AD\,(Tang.\ q - Tang.\ p)}{AD^2\,(1 + Tang.\ p\ Tang.\ q)} = \frac{Tang.\ r}{AD}$$

www.dbnl.org

waaruit volgt: $AD^2 + ED \cdot FD = AD \cdot FE \cdot Cot.\ r$

of $AD^2 = AD \cdot FE \cdot Cot.\ r - ED \cdot FD$

Deze vergelijking ten opzigte van AD oplosſende, komt

$AD = \frac{1}{2} FE \cdot Cot.\ r \pm \sqrt{(\frac{1}{4} FE^2\ Cot.\ r^2 - ED \cdot FD)}$

Hieruit blijkt, dat $\frac{1}{4} FE^2\ Cot.\ r^2$ op zijn kleinst gelijk ED . FD zijn kan, en dat dit plaats hebben zal, als r op zijn grootst is, om voor AD eene reëele waarde toe te laten; bijgevolg zal, voor de grootst mogelijke waarde van r, $\frac{1}{4} FE^2\ Cot.\ r^2 = ED \cdot FD$ of $\frac{1}{2} FE\ Cot.\ r = \sqrt{ED \cdot FD}$ zijn; dus $AD = \frac{1}{2} FE\ Cot.\ r = \sqrt{ED \cdot FD}$, of $AD^2 = ED \cdot FD$; maar $FD - ED = FE$ en $(FD + ED)^2 = FE^2$; hier bij tellende $4\ ED \cdot FD = 4\ AD^2$, komt $(FD + ED)^2 = FE^2 + 4\ AD^2$ en $FD + ED = \sqrt{(FE^2 + 4\ AD^2)}$;

dus $FD = + \frac{1}{2} FE + \sqrt{(\frac{1}{4} FE^2 + AD^2)}$

en $ED = - \frac{1}{2} FE + \sqrt{(\frac{1}{4} FE^2 + AD^2)}$

Door deze formulen nu kan al het overige gemakkelijk berekend worden; want de zijden des driehoeks ABC gegeven zijnde, AB = 150, BC = 130, en AC = 140, zoo wordt hierdoor gevonden voor den inhoud des driehoeks 8400; dezen inhoud deelende door de halve ſom der zijden, komt 40 voor den radius van het ingeſchreven rond = ID; maar $AI = \frac{1}{2}(AC + AB - BC) = 80$; dus $AD = \sqrt{(AI^2 + ID^2)} = \sqrt{8000}$. Hieruit volgt door de gevondene formulen: ED = 80 en FD = 100; dus $AF = \sqrt{(AD^2 + FD^2)} = 60\sqrt{5}$. Op gelijke wijze wordt gevonden: CI = AC − AI = 60, $CF = \sqrt{(CD^2 + FD^2)} = \sqrt{(ID^2 + CI^2 + FD^2)} = 20\sqrt{38}$, BG = AB − AG = AB − AI = 70, $BF = \sqrt{(BD^2 + FD^2)} = \sqrt{(BG^2 + GD^2 + FD^2)} = 10\sqrt{165}$.

XXVII. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

In eenen driehoek ABC (Fig. 24), die eenen hoek van 120 *graden heeft, is het vierkant op de zijde over dezen hoek gelijk de ſom der vierkanten op de zijden om dezen hoek, plus den regthoek op deze zijden: en wanneer een der hoeken* 60 *graden is, zal het vierkant op de zijde over dezen hoek gelijk zijn aan de*

ſom

som der vierkanten op de beide andere zijden, min den regthoek op deze zijden. Men vraagt naar het bewijs?

www.libool.com.cn

OPLOSSING. Door S. J. MULDER, R. LOBATTO en J. B. CANTOR.

Verleng AB tot in D, maak BD = BC, en trek DC; laat nu ∠ ABC = 120° zijn, dan is ∠ DBC = 60°, ∠ BDC + ∠ BCD = 120°, dus ∠ BDC = ∠ BCD = 60°. Laat CN loodregt op BD zijn, dan is BN = DN, omdat de driehoek BCD gelijkzijdig is. Stel AB = a, en BC = b, dan is BN = DN = $\frac{1}{2}b$ en AN = $a + \frac{1}{2}b$; dus $AN^2 = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$; hier bij gedaan $NC^2 = BC^2 - BN^2 = b^2 - \frac{1}{4}b^2$, komt $AC^2 = a^2 + ab + b^2$.

Stel voor het tweede gedeelte van het voorstel, AD = a, en DC = b, dan is ND = $\frac{1}{2}b$ en AN = $a - \frac{1}{2}b$; dus $AN^2 = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2$; hier bij gevoegd $NC^2 = DC^2 - ND^2 = b^2 - \frac{1}{4}b^2$, komt $AC^2 = a^2 - ab + b^2$.

XXVIII. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Gegeven zijnde: $x^m + y^m = a\,(x^m + y^m)$

en $x^m + y^m = b\,(x^m - y^m)$

vrage naar de waarden van x *en* y? (5)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en J. B. CANTOR.

Volgens de opgaaf is $a\,(x^m + y^m) = b\,(x^m - y^m)$, dus $(b + a)\,y^m = (b - a)\,x^m$, $y^m = \frac{b-a}{b+a} \cdot x^m$ en $y = \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot x$. Deze waarde van y overbrengende in de eerste vergelijking, komt

$$x^m\left(1 + \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{n}{m}}\right) = a\,x^m\left(1 + \frac{b-a}{b+a}\right) = \frac{2ab}{b+a}\,x^m$$

$$\text{dus } \frac{b+a}{2ab}\left(1 + \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{n}{m}}\right) = x^{m-n}$$

$$\text{waaruit } x = \left[\frac{b+a}{2ab}\left(1 + \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{n}{m}}\right)\right]^{\frac{1}{m-n}}$$

$$\text{dus } y = \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot x = \left[\frac{b-a}{2ab}\left(1 + \left(\frac{b+a}{b-a}\right)^{\frac{n}{m}}\right)\right]^{\frac{1}{m-n}}$$

Voorbeeld. Laat $a = 63$, $b = 315$, $n = 3$, en $m = 1$ zijn,

(5) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 271, N°. 21.

zijn, dan is $\frac{b-a}{b+a} = \frac{2}{3}$; $\frac{n}{m} = 3$, $\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{8}{27}$, $1 + \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{35}{27}$, $\frac{b+a}{2ab} = \frac{1}{105}$, $\frac{b+a}{2ab}\left(1+\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{1}{81}$ en $x = 9$. Voorts $\frac{b-a}{b+a} = \frac{2}{3}$, $\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{2}{3}$ en $y = \frac{2}{3}x = 6$.

www.libtool.com.cn

XXIX. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Vrage naar twee getallen, wier ſom, product, en verſchil der quadraten, aan elkander gelijk zijn? (6)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN en J. B. CANTOR.

Stel de getallen $x + y$ en $x - y$, dan is $2x = x^2 - y^2 = 4xy$; dus $y = \frac{1}{4}$; dus $2x = x^2 - \frac{1}{4}$ of $x^2 = 2x + \frac{1}{4}$; waaruit $x = 1 \pm \sqrt{1\frac{1}{4}}$; dus $x + y = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{1\frac{1}{4}}$ en $x - y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1\frac{1}{4}}$ de begeerde getallen.

XXX. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Op een vlak zijn gegeven drie punten, A, B, C en D (Fig. 25); men begeert op dit vlak de meetkundige plaats te vinden van het punt E, zoodanig, dat men hebbe $AE^2 + BE^2 = CE^2 + DE^2$?

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA en R. LOBATTO.

Deel AB midden door in G en DC in H; trek de regte GH; maak HK vierde evenredig tot GH, BG + CH en BG — CH; deel GK midden door in I; ſtel op het midden van GK, in I, eene onbepaalde loodlijn op PQ, deze zal de plaats van het punt E zijn.

BEWIJS. Trek AE, BE, CE en DE; als mede AI, BI, CI en DI; ſtel AG = BG = a, DH = CH = b, IE = p, GI = x en HI = y; dan is $HK = y - x = \frac{(a-b)(a+b)}{y+x}$; dus $y^2 - x^2 = a^2 - b^2$ en $y^2 + b^2 = a^2 + x^2$. Voorts:

$$AE^2 = IE^2 + AI^2 + 2\,AI \,.\, IE\ Cos.\ \angle\ AIQ$$
$$= IE^2 + AI^2 + 2\,AI \,.\, IE\ Sin.\ \angle\ AIG$$

maar $AI^2 = AG^2 + GI^2 - 2\,AG \,.\, GI\ Cos.\ \angle\ AGI$

en

(6) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 270, N°. 181.

en AI : *Sin.* ∠ AGI = AG : *Sin.* ∠ AIG
of AI . *Sin.* ∠ AIG = AG . *Sin.* ∠ AGI
dus $AE^2 = IE^2 + AG^2 + GI^2 + 2$ AG . IE *Sin.* ∠ AGI
$- 2$ AG . GI *Cos.* ∠ AGI
$= p^2 + q^2 + x^2 + 2\,ap$ *Sin.* ∠ AGI
$- 2\,ax$ *Cos.* ∠ AGI

Op gelijke wijze zal men hebben, door a in $-a$ te veranderen,

$BE^2 = p^2 + a^2 + x^2 - 2\,ap$ *Sin.* ∠ AGI
$+ 2\,ax$ *Cos.* ∠ AGI

dus $AE^2 + BE^2 = 2\,p^2 + 2\,a^2 + 2\,x^2$; derhalve ook $DE^2 + CE^2 = 2\,p^2 + 2\,b^2 + 2\,y^2$,
en vermits $a^2 + x^2 = b^2 + y^2$ is volgens de conſtructie van de figuur, zoo blijkt, dat

$AE^2 + BE^2 = DE^2 + CE^2$ is.

Gevolg. Wanneer AB = DC is, wordt $y - x = \frac{(a-b)\,(a+b)}{y+x}$ = o, dus moet in dat geval de loodlijn PQ op het midden van GH ſtaan; wanneer daarenboven ook GH = o is, zullen de lijnen AB en DC elkander midden door deelen, als in *Fig.* 26; en daar in dit geval GH een punt is, zal de loodlijn op het midden van GH alle mogelijke rigtingen kunnen aannemen; bijgevolg zal in dit geval het vlak, dat door de punten A, B, C en D gaat, de meetkundige plaats van het punt E zijn; hetwelk ook niet alleen *à priori* bewezen kan worden, maar nog meer: men kan bewijzen, dat elk punt E van de onbepaalde ruimte aan de vergelijking $AE^2 + BE^2 = CE^2 + DE^2$ voldoen zal. Want EI getrokkende hebbende, is

$AE^2 = AI^2 + EI^2 + 2$ AI . EI . *Cos.* ∠ EIB
$BE^2 = BI^2 + EI^2 - 2$ BI . EI . *Cos.* ∠ EIB
$DE^2 = DI^2 + EI^2 + 2$ DI . EI . *Cos.* ∠ EID
$CE^2 = CI^2 + EI^2 - 2$ CI . EI . *Cos.* ∠ EID

maar AI = BI = ½ AB en DI = CI = ½ CD zijnde, is

$AE^2 + BE^2 = \frac{1}{2}\,AB^2 + 2\,EI^2$
en $DE^2 + CE^2 = \frac{1}{2}\,CD^2 + 2\,EI^2$
dus $AE^2 + BE^2 = DE^2 + CE^2$.

Hieruit volgt dit merkwaardig voorſtel: *als men uit de vier hoeken A, B, C en D, van eenen regthoek ACBD, vier lijnen trekt*

tot eenig punt E van de onbepaalde ruimte, zal der ſom de vierkanten op twee van deze lijnen, die uit twee overſtaande hoeken van den regthoek komen, gelijk zijn aan de ſom der vierkanten op de beide andere lijnen.

www.libtool.com.cn

XXXI. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Op een vlak zijn gegeven drie punten, A, B en C, (Fig. 27), men vraagt om op dat vlak de meetkundige plaats aan te wijzen van het punt D, zoo dat men hebbe $AD^2 + BD^2 = CD^2$?

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA en R. LOBATTO.

Trek AC en BC, en voltooi op deze lijnen het parallelogram ACBE; beſchrijf uit E als middelpunt, met eenen radius $ED = \sqrt{(AC^2 + BC^2 - AB^2)}$, eenen cirkel-omtrek; deze zal de plaats van het punt D zijn.

Bewijs. Trek CE, ſnijdende AB midden door in F, en wordende zelve in het punt F midden door gedeeld, door AB. Trek ook DF; dan is

$$AD^2 = AF^2 + DF^2 - 2\,AF \,.\, DF \,.\, Cos.\, \angle\, AFD$$
$$BD^2 = BF^2 + DF^2 + 2\,BF \,.\, DF \,.\, Cos.\, \angle\, AFD$$

maar $AF = BF = \frac{1}{2} AB$, dus

$$AD^2 + BD^2 = \tfrac{1}{2} AB^2 + 2\,DF^2$$

wijders is

$$DC^2 = CF^2 + DF^2 + 2\,CF \,.\, DF \,.\, Cos.\, \angle\, DFE$$
$$DE^2 = EF^2 + DF^2 - 2\,EF \,.\, DF \,.\, Cos.\, \angle\, DFE$$

maar $CF = EF = \frac{1}{2} CE$, dus

$$DC^2 + DE^2 = 2\,CF^2 + 2\,DF^2$$

Nu is $DE^2 = AC^2 + BC^2 - AB^2$ volgens conſtruetie

dus $DC^2 = AB^2 - AC^2 - BC^2 + 2\,CF^2 + 2\,DF^2$

maar $AC^2 = AF^2 + CF^2 + 2\,AF \,.\, CF \,.\, Cos.\, \angle\, CFB$

en $BC^2 = BF^2 + CF^2 - 2\,BF \,.\, CF \,.\, Cos.\, \angle\, CFB$

dus $DC^2 = AB^2 - AF^2 - BF^2 + 2\,DF^2$

of $DC^2 = \frac{1}{2} AB^2 + 2\,DF^2$

derhalve $AD^2 + BD^2 = CD^2$.

XXXII. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

In ieder der beenen van eenen regtlijnigen hoek zijn gegeven twee ſtippen, uit welke men lijnen getrokken heeft tot eene zekere ſtip in het vlak van dien hoek: nu is de ſom der vierkanten op

de

deze vier lijnen gelijk aan een gegeven veelvoud van het vierkant op de lijn, die uit deze ſtip tot den top des hoeks getrokken is; men vraagt naar de plaats van deze ſtip?

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA en R. LOBATTO.

Laat RQS (*Fig.* 28) de gegevene hoek zijn, A en B twee puntten in QS; D en C twee punten in QR, en E een ander punt in het vlak van den hoek, zoodanig dat men hebbe

$$AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = n \cdot QE^2$$

dan is de vraag naar de plaats van het punt E.

Deel AB midden door in K en trek EK, dan is $AE^2 + BE^2 = \frac{1}{2} AB^2 + 2\,EK^2$.

Deel DC midden door in H en trek EH, dan is $CE^2 + DE^2 = \frac{1}{2} DC^2 + 2\,EH^2$. Dus

$$AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = \tfrac{1}{2}AB^2 + \tfrac{1}{2}DC^2 + 2\,EK^2 + 2\,EH^2$$

$$\text{of } n \cdot QE^2 = \tfrac{1}{2}\,AB^2 + \tfrac{1}{2}\,DC^2 + 2\,EK^2 + 2\,EH^2$$

Trek HK, deel dezelve midden door in I, en trek EI, dan is $EH^2 + EK^2 = \frac{1}{2} HK^2 + 2\,EI^2$; dus

$$n \cdot QE^2 = \tfrac{1}{2}\,AB^2 + \tfrac{1}{2}\,DC^2 + HK^2 + 4\,EI^2$$

Trek door het punt I de regte QP, EG loodregt op QP, en EF naar welgevallen, dan is $QE^2 = QG^2 + EG^2$ en $EI^2 = IG^2 + EG^2$; dus

$$n \cdot QG^2 + n \cdot EG^2 = \tfrac{1}{2}AB^2 + \tfrac{1}{2}DC^2 + HK^2 + 4\,IG^2 + 4\,EG^2,$$

$$\text{maar } QG = QF + FG \text{ en } IG = IF + FG,$$

$$\text{dus } QG^2 = QF^2 + FG^2 + 2\,QF \cdot FG$$

$$\text{en } IG^2 = IF^2 + FG^2 + 2\,IF \cdot FG$$

Hierdoor verandert de bovenſtaande vergelijking in

$$n \cdot QF^2 + n \cdot FG^2 + 2\,n \cdot QF \cdot FG + n\,EG^2 = \ldots$$

$$\ldots \tfrac{1}{2}\,AB^2 + \tfrac{1}{2}\,DC^2 + HK^2 + 4\,IF^2 + 4\,FG^2 + 4\,EG^2 + 8 \cdot IF \cdot FG$$

of, daar $FG^2 + EG^2 = EF^2$ is, in

$$n \cdot QF^2 + n \cdot EF^2 + 2\,n \cdot QF \cdot FG = \tfrac{1}{2}\,AB^2 + \ldots$$

$$\ldots \tfrac{1}{2}\,DC^2 + HK^2 + 4\,IF^2 + 4\,EF^2 + 8\,IF \cdot FG$$

daar nu het punt F naar welgevallen in PQ genomen is, zoo kunnen wij $2\,n \cdot QF \cdot FG = 8\,IF \cdot FG$ ſtellen; hieruit volgt $n \cdot QF = 4\,IF$; maar $QF = QI + IF$; dus $n \cdot QI + n\,IF = 4\,IF$, of $IF = \frac{n}{4 - n} \cdot QI$ en bijgevolg $QF = \frac{4}{n} \cdot IF = \frac{4}{4 - n}$

$\frac{4}{4-n}$. QI. Brengt men deze waarden van IF en QF in de bovenſtaande vergelijking, dan verandert dezelve in

www.libtool.com.cn

$$\frac{16n}{(4-n)^2} \cdot QI^2 + n \cdot EF^2 = \tfrac{1}{2} AB^2 + \tfrac{1}{2} DC^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + HK^2 + \frac{4n^2}{(4-n)^2} \cdot QI^2 + 4\, EF^2$$

of $(n-4)\, EF^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} DC^2 + HK^2 + \frac{4n}{n-4} \cdot QI^2$

uit deze vergelijking blijkt, dat EF voor alle punten E, dezelfde waarde zal hebben, en dat bijgevolg alle punten E gelegen zijn in den omtrek van eenen cirkel, waarvan F het middelpunt en EF de radius is.

Dit is nu de algemeene oplosſing van het voorſtel, maar er hebben bij hetzelve omſtandigheden plaats, waarvan de opmerking voor den aankomenden wiskunſtenaar nuttig kan zijn: uit de gevondene waarde voor EF blijkt, dat dezelve altijd wezenlijk zal zijn, als n grooter dan 4 is; doch n kleiner dan 4 zijnde, zal dit niet altijd plaats hebben, want dan kan EF^2 negatief en EF imaginair worden, wanneer EF nul is, moet men hebben

$$\tfrac{1}{2} AB^2 + \tfrac{1}{2} DC^2 + HK^2 + \frac{4n}{n-4} \cdot QI^2 = 0$$

en hieruit volgt

$$n = 4 \cdot \frac{\frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} DC^2 + HK^2}{\frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} DC^2 + HK^2 + 4\, QI^2}$$

dit is de kleinſte waarde, die n hebben kan, als het vraagſtuk mogelijk zal zijn, en dan is de plaats van het punt E maar eene enkele ſtip F.

Wanneer $n = 4$ is, worden QF, IF en EF oneindig, waaruit wij moeten beſluiten, dat de plaats van het punt E in dit geval eene regte lijn is, of een cirkel-omtrek van eenen oneindigen radius, en waarvan het middelpunt geplaatst is op eenen oneindigen afſtand van het punt Q. Om deze regte te vinden, merk ik aan, dat wij boven gevonden hebben, $n \cdot QG^2 + n\, EG^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} DC^2 + HK^2 + 4\, IG^2 + 4\, EG^2$, en hierin $n = 4$ ſtellende, heeft men

$$4\,(QG^2 - IG^2) = \tfrac{1}{2} AB^2 + \tfrac{1}{2} DC^2 + HK^2$$

maar $QG + IG = 2\, QG - QI$

en

$$\text{en } QG - IG = QI$$
$$\text{dus } QG^2 - IG^2 = 2\,QI \,.\, QG - QI^2$$
$$\text{en } 8\,QI \,.\, QG = \tfrac{1}{2}\,AB^2 + \tfrac{1}{2}\,DC^2 + HK^2 + 4\,QI^2$$

www.dbtoof.com.cn

Deze vergelijking geeft, voor alle punten E, dezelfde waarde voor QG, waaruit blijkt, dat in dit geval de loodlijn EG de plaats van het punt E is.

XXXIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Van eenen driehoek ABC (fig 29), waarin men eenen cirkel heeft beſchreven, is bekend: de hoek C, als mede de lijnen AD en BD, welke uit de hoekpunten A en B tot het middelpunt D des ingeſchrevenen cirkels getrokken zijn; men vraagt dezen driehoek, zoo door berekening als door conſtructie, te bepalen?

EERSTE OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Laat uit het middelpunt D des ingeſchrevenen cirkels de drie perpendiculairen DE, DF en DG, op de zijden des begeerden driehoeks ABC getrokken zijn. Stel $AD = a$, $BD = b$ en $\angle C = 2\,\alpha$, zoo is de ſom der hoeken CAB en CBA $= 180° - 2\,\alpha$, en dus de helft van deze ſom $\tfrac{1}{2}\,(CAB + CBA) = 90° - \alpha$ bekend; kende men nu ook het verſchil dezer hoeken, zoo lieten zich de hoeken dadelijk vinden; men ſtelle dit als nog onbekende verſchil $= 2\,\phi$, zoo is $\tfrac{1}{2}\,(CBA - CAB) = \phi$, en men heeft door additie en ſubſtractie, $\angle CBA = 90° - \alpha + \phi$ en $\angle CAB = 90° - \alpha - \phi$; maar doordien D het middelpunt des ingeſchrevenen cirkels is, zoo deelen de lijnen BD en AD deze hoeken midden door; derhalve

$$\angle DBA = \tfrac{1}{2}\,\angle CBA = 45° - \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \phi)$$
$$\text{en } \angle DAB = \tfrac{1}{2}\,\angle CAB = 45° - \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \phi)$$
$$\text{dus } \tfrac{1}{2}\,(DBA + DAB) = 45° - \tfrac{1}{2}\,\alpha$$
$$\text{en } \tfrac{1}{2}\,(DBA - DAB) = \tfrac{1}{2}\,\phi$$

Nu is in den driehoek ADB, $AD + BD : AD - DB =$ *Tang.* $\tfrac{1}{2}\,(DBA + DAB)$: *Tang.* $\tfrac{1}{2}\,(DBA - DAB)$; dat is

$$a + b : a - b = \textit{Tang.}\,(45° - \tfrac{1}{2}\,\alpha) : \textit{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\phi$$

gevolgelijk *Tang.* $\tfrac{1}{2}\,\phi = \dfrac{a-b}{a+b}$. *Tang.* $(45° - \tfrac{1}{2}\,\alpha)$; hetwelk eene door bekende grootheden uitgedrukte waarde is, welke zich gemakkelijk door de logarithmen laat berekenen.

Heeft men ϕ gevonden, dan zijn de hoeken DAB en DBA bekend;

kend; en daar voorts $\angle$ ADB $=$ 180° — (DBA + DAB) $=$ 180° — (90° — α) $=$ 90° + α is, heeft men door de bekende regels der driehoeksmeting: AB $= \frac{\alpha \; Sin. \; ADB}{Sin. \; DBA} = \frac{a \; Cos. \; \alpha}{Sin. \; DBA}$; DE $= a \; Sin.$ DAB; AC $=$ AB $. \frac{Sin. \; B}{Sin. \; C}$ en BC $=$ AB $. \frac{Sin \; A}{Sin. \; C}$.

De geometriſche conſtructie van dit voorſtel is niet minder eenvoudig, dan onze oplosſing. Zij *mdn* de gegevene hoek C $= 2\alpha$; men deele dezelve door *ad* in twee gelijke deelen, en rigte op *nd* de loodlijn *db*; voorts make men *da* gelijk de gegevene lijn AD $= a$, en *db* $=$ BD $= b$; men trekke *ab*, en make den hoek *dac* $=$ $\angle$ *dab*, als mede $\angle$ *dbc* $=$ $\angle$ *dba*, zoo zal het ſnijpunt *c* den begeerden driehoek *acb* bepalen.

Want $\angle$ *adn* $= \frac{1}{2} \angle$ *mdn* $= \alpha$ en $\angle$ *ndb* $= 90°$ zijnde, is $\angle$ *adb* $= 90° + \alpha$; dus $\angle$ *dab* + $\angle$ *abd* $= 180 - \angle$ *adb* $= 90 - \alpha$, waarvan het dubbeld is $\angle$ *cab* + $\angle$ *cba* $= 180° - 2\alpha = 180° - \angle$ *acb*; derhalve $\angle$ *acb* $= 2\alpha =$ den gegevenen hoek *mdn*. Trekt men voorts uit *d* op de drie zijden de perpendiculairen *de*, *df* en *dg*, zoo zijn de regthoekige driehoeken *ade* en *adf* gelijk en gelijkvormig; dus *df* $=$ *de*; maar doordien ook de regthoekige driehoeken *deb* en *dgb* gelijk en gelijkvormig zijn, is *dg* $=$ *de* $=$ *df*; gevolgelijk is *d* het middelpunt des ingeſchrevenen cirkels, van welker centrum de hoeklijnen *da* en *db* de gegevene lengte hebben; waaruit blijkt, dat de geconſtrueerde driehoek *acb* aan de vereischte bedingen voldoet.

TWEEDE OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Wijl DA en DB de hoeken A en B midden door deelen, is $\angle$ ADB $= 180° - \frac{1}{2}$ (A + B; maar $\angle$ A + $\angle$ B $= 180° -$ $\angle$ C en bijgevolg $\angle$ ADB $= 180° - (90° - \frac{1}{2}C) = 90° + \frac{1}{2}C$. Daar nu de hoek C gegeven is, is ook de hoek ADB $= 90 + \frac{1}{2}$ C bekend, en dus zijn in den driehoek ADB de zijden AD en BD, benevens de ingeſlotene hoek D gegeven; deze driehoek wordt dus zeer gemakkelijk geconſtrueerd, en door deszelfs hoeken DAB en DBA te verdubbelen, is dan ook de gevraagde driehoek geconſtrueerd.

De berekening loopt even gemakkelijk af; want in den driehoek ADB hebben wij:

1°.

1°. $\frac{1}{2}(\angle DAB + \angle DBA) = 45° - \frac{1}{2} C$

2°. *Tang.* $\frac{1}{2}(DAB - DBA) = \frac{DB - DA}{DB + DA}$ *Tang.* $\frac{1}{2}(DAB + DBA)$

www.libtool.com.cn

Hierdoor zijn de hoeken DAB en DBA, en dus ook de hoeken A en B bekend; derhalve:

3°. $AB = AD \cdot \frac{Sin.\ D}{Sin.\ DBA} = BD \cdot \frac{Sin.\ D}{Sin.\ DAB}$

$AC = AB \cdot \frac{Sin.\ B}{Sin.\ C}$ en $BC = AB \cdot \frac{Sin.\ A}{Sin.\ C}$

XXXIV. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Als uit het middelpunt D van den in eenen driehoek ABC (Fig. 29) beschrevenen cirkel, regte lijnen tot de hoekpunten A, B en C, dezes driehoeks worden getrokken, en deze lijnen AD, BD en CD, gegeven zijn, zoo vraagt men denzen driehoek te bepalen?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN, I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Laat $AD = a$, $BD = b$ en $CD = c$ gegeven zijn, en $\angle ACB = 2\phi$ gesteld worden, dan is ingevolge het voorgaande voorstel $\angle ADB = 90° + \phi$, *Cos.* $\angle ADB = -$ *Sin.* ϕ en *Sin.* $\angle ADB =$ *Cos.* ϕ; maar

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,AD \cdot BD \cdot Cos.\ \angle ADB$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab \cdot Sin.\ \phi$$

dus $AB = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cdot Sin.\ \phi)}$

voorts $AB : Sin.\ \angle ADB = AD : Sin.\ \angle DBA$

en *Rad.* $: BD = Sin.\ \angle DBA : DE$

dus $AB : BD \cdot Sin.\ \angle ADB = AD : DE$

of $AB : b\ Cos.\ a = a : DE = \frac{ab\ Cos.\ \phi}{AB}$

maar in den driehoek DFC is

Rad. $: DC = Sin.\ \angle DCF : DF$

of $1 : c = Sin.\ a : DE = c \cdot Sin.\ \phi$

derhalve $c\ Sin.\ \phi = \frac{ab\ Cos.\ \phi}{AB}$ en hierin voor AB de gevondene waarde stellende, komt

$$c\ Sin.\ a \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cdot Sin.\ a)} = ab\ Cos.\ \phi$$

of $(a^2 + b^2)\ c^2\ Sin.\ \phi^2 + 2abc^2\ Sin.\ \phi^2 = a^2 b^2\ Cos.\ \phi^2$

hier-

hierbij optellende $a^2\ b^2\ Sin.\ \phi^2 = a^2\ b^2\ Sin.\ \phi^2$, komt

$2\ abc^2\ Sin.\ \phi^3 + (a^2\ b^2 + a^2\ c^2 + b^2\ c^2)\ Sin.\ \phi^2 = a^2\ b^2$

Uit deze vergelijking laat zich nu gemakkelijk eene andere voor den radius des ingeſchreven cirkels afleiden: want den radius DE $= x$ ſtellende, heeft men $c\ Sin.\ \phi = x$ of $Sin.\ \phi = \frac{x}{c}$; als men deze waarde voor *Sin.* ϕ in de gevondene vergelijking ſubſtitueert en dezelve met c^2 vermenigvuldigt zal men bekomen,

$$2\ abcx^3 + (a^2\ b^2 + a^2\ c^2 + b^2\ c^2)\ x^2 = a^2\ b^2\ c^2$$

Voorbeeld. Zij $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{5}$ en $c = \sqrt{2}$, dan is $a^2\ b^2 = 50$, $a^2\ c^2 = 20$, $b^2\ c^2 = 10$ en $abc = 10$; dus

$$20\ x^3 + 80\ x^2 = 100$$

$$\text{of } x^3 + 4\ x^2 = 5$$

hieruit is $x = 1$ een wortel; en de vergelijking $x^3 + 4\ x^2 - 5 = 0$ door $x - 1 = 0$ deelende, komt

$$x^2 + 5\ x + 5 = 0$$

waardoor voor de beide andere wortels gevonden wordt: $x = -2\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$;

De wortel $x = 1$ is de radius van den cirkel in eenen driehoek beſchreven, waarvan de zijden gevonden worden als volgt: $AE = AF = \sqrt{(a^2 - x^2)} = 3$, $BE = BG = \sqrt{(b^2 - x^2)} = 2$, $CF = CG = \sqrt{(c^2 - x^2)} = 1$; dus $AB = AE + BE = 5$, $AC = AF + CF = 4$ en $BC = BG + CG = 3$.

De wortel $x = -2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ is de radius van den cirkel, welke twee zijden van den driehoek inwendig en de derde uitwendig aanraakt. De zijden van dezen driehoek zijn $AB = 5\sqrt{5}$, $AC = -3 + 5$ en $BC = -8 + 5\sqrt{5}$.

De wortel $x = -2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ geeft voor de zijden des driehoeks imaginaire uitdrukkingen, waaruit volgt dat deze driehoek onbeſtaanbaar is, offchoon de radius van den rakenden cirkel eene beſtaanbare waarde hebbe

XXXV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Eenen driehoek uit zijnen gegevenen inhoud, omtrek en tophoek te bepalen?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Laat ABC (*Fig.* 30) den gevraagden driehoek voorſtellen, en ſtellen wij den gegevenen hoek $C = 2a$, den omtrek $= s$ en den in-

inhoud $= m^2$; laat verder de zijden geſteld worden: AB $= x$, BC $= y$ en AC $= z$; en laat R het middelpunt zijn van den ingeſchrevenen cirkel, waaruit de perpendiculairen RT, RS en RU op de zijden zijn nedergelaten.

Om dat nu de inhoud gelijk is aan den omtrek vermenigvuldigd met den halven ſtraal des ingeſchrevenen cirkels, hebben wij, zoo wij RS $=$ RT $=$ RU $= r$ ſtellen,

$$m^2 = \tfrac{1}{2} ar \text{ en dus } r = \frac{2m^2}{a}$$

Stellen wij nu CS $=$ CT $= c$, BS $=$ BU $= p$ en AT $=$ AU $= q$, dan is CS $=$ CT $=$ RS *Tang.* $\angle$ CRS $=$ RS *Cot.* $\frac{1}{2}$ C; dat is CS $=$ CT $= r$ *Cot.* $\frac{a}{2} = \frac{2m^2}{a}$ *Cot.* $\frac{a}{2} = c$.

Verder is $c + p = y$, $c + q = z$ en $p + q = x$, en hiervan is de halve ſom $c + p + q = \frac{1}{2}(x + y + z) = \frac{1}{2} a$. Hier aftrekkende $p + q = x$, rest $c = \frac{1}{2} a - x$; dus $x = \frac{1}{2} a - c$; dat is

$$x = \tfrac{1}{2} a - \frac{2m^2}{a} \text{ Cot. } \frac{a}{2} = \frac{a^2 - 4m^2 \text{ Cot. } \frac{a}{2}}{2a}$$

waardoor de zijde AB reeds in de gegevens is uitgedrukt.

Om de andere zijden te vinden hebben wij $y + z = a - x$ $= \frac{1}{2} a + c = \frac{a^2 + 4m^2 \text{ Cot. } \frac{a}{2}}{2a}$; en daar $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ AC . BC . *Sin.* $\angle$C is, hebben wij daarenboven $m^2 = \frac{1}{2} yz \text{ Sin. } 2\frac{a}{2}$, waaruit $yz = \frac{2m^2}{\text{Sin. } 2\frac{a}{2}}$.

Door middel van deze twee vergelijkingen verkrijgen wij:

$$(y + z)^2 = (\tfrac{1}{2} a + c)^2 \text{ en } 4yz = \frac{8m^2}{\text{Sin. } 2\frac{a}{2}}$$

$$\text{dus } (y - z)^2 = (\tfrac{1}{2} a + c)^2 - \frac{8m^2}{\text{Sin. } 2\frac{a}{2}}$$

$$\text{en } y - z = \sqrt{\left[(\tfrac{1}{2} a + c)^2 - \frac{8m^2}{\text{Sin. } 2\frac{a}{2}}\right]}$$

$$\text{dus } y = \tfrac{1}{4} a + \tfrac{1}{2} c + \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[(\tfrac{1}{2} a + c)^2 - \frac{8m^2}{\text{Sin. } 2\frac{a}{2}}\right]}$$

$$\text{en } z = \tfrac{1}{4} a + \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[(\tfrac{1}{2} a + c)^2 - \frac{8m^2}{\text{Sin. } 2\frac{a}{2}}\right]}$$

Door deze formulen kunnen x, y en z, gemakkelijk berekend wor-

worden; doch willen wij den driehoek meetkunstig conſtrueren, gaan wij op de volgende wijze te werk:

Maak BD = den halven omtrek = $\frac{1}{2}a$ en ∠ BDH = den halven tophoek = a; ſtel DE loodregt op BD en maak dezelve derde evenredig tot $\frac{1}{2}a$ en m, dan is DE = $\frac{2m^2}{a}$; trek EA evenwijdig DH, dan is DA = DE. *Cot.* $a = \frac{2m^2}{a}$ *Cot.* $a = c$ en bijgevolg AB = DB — DA = $\frac{1}{2}a - c = x$, zoo dat AB de bazis van den begeerden driehoek zijn zal.

Wanneer dus op AB een cirkelſegment beſchreven wordt, dat den gegevenen tophoek $2a$ bevat, behoeft DF ſlechts derde evenredig tot $\frac{1}{2}$ AB en m genomen, en FC evenwijdig AB getrokken te worden, dan zal C of C′ het toppunt van den gevraagden driehoek zijn: want dan is DF = $\frac{2m^2}{AB}$ en △ ABC = $\frac{1}{2}$ AB × DF = m^2.

Het blijkt voor het overige, dat het voorſtel onmogelijk zal zijn, wanneer FC het cirkelſegment noch raakt, noch ſnijdt, dat is wanneer $\frac{8m^2}{Sin.\,2a}$ grooter dan $(\frac{1}{2}a + c)^2$ is.

De Heer Lobatto verwijst ons tot de *Meetk. Analyſis*, *pag.* 55 en 264, alwaar eene andere oplosſing van dit voorſtel te vinden is.

XXXVI. VOORSTEL.

Door Jacob de Gelder.

De kromme lijn, tot vergelijking hebbende $y = \frac{a^2x}{a^2 + x^2}$, *door punten te beſchrijven, derzelve ſubtangens, buigpunten, kromteſtraal en inhoud te vinden?*

Oplossing. Door R. Lobatto.

§. 1. Om de vergelijking $y = \frac{a^2x}{a^2 + x^2}$ door punten te conſtrueeren, neme men (*Fig.* 31) eene willekeurige lijn AB aan, welke wij a noemen, en rigte op dezelve, in het punt B, de loodlijn BC op, welke eene abscisſe der kromme zal voorſtellen. Uit B trekke men, op de hypothenuſe AC, de loodlijn BD, en uit D, op BC, wederom de loodlijn DE, dan zal BE de ordinaat zijn, die tot de abscisſe BC = x behoort; want BE : BC = AD : AC = $AB^2 : AC^2 = a^2 : a^2 + x^2$;

dus

dus $y : x = a^2 : a^2 + x^2$ of $y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$. Wanneer men nu deze bewerking voor elke abscis herhaalt, zal men bevinden, dat de kromme de gedaante van *Fig.* 32 verkrijgen zal, waarin het punt A, op de onbepaalde as AB, als oorsprong der coördinaten, is aangenomen.

www.libtool.com.cn

Nademaal nu x negatief zijnde, y daardoor insgelijks negatief wordt, doch in grootte dezelfde blijft, volgt hieruit, dat de kromme lijn uit twee volkomen overeenstemmende takken bestaat, waarvan de eene zich ter regterzijde boven de as, en de andere ter linkerzijde beneden dezelve uitstrekt.

§. 2. Stelt men in de gegevene vergelijking $x = 0$, dan wordt ook $y = 0$. De kromme moet derhalve de as in den oorsprong A der coördinaten snijden, zoo als ook bovendien de constructie aanduidt. Is $y = 0$, dan moet $x = 0$, of $\frac{a^2}{a^2 + x^2} = \infty$ zijn; dat is, x moet nul of oneindig groot zijn, waaruit volgt, dat beide takken van de kromme de as B′B tot asymptote hebben.

§. 3. De vergelijking $y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$ differentierende, vindt men

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^2 \times \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Stelt men hierin $x = 0$, dan wordt $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$; de tangens van het punt A maakt derhalve met de as der abscissen een' hoek van 45°. Stelt men $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, dan heeft men

$$a^2 - x^2 = 0, \text{ of } x = \pm a$$

voor het maximum of minimum der ordinaten. Het is duidelijk in te zien, dat deze waarden van x een maximum en minimum moeten opleveren; om zich echter daarvan te overtuigen, zoeke men de tweede differentiaal, welke is:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2a^2 x\,(3a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^3};$$

deze uitdrukking gaat nu, door de stelling van $x = \pm a$, over in $\mp \frac{1}{2a}$, hetgeen volkomen bevestigt, dat $x = a$ een maximum, en $x = -a$ een minimum of negatief maximum geeft.

Nu ſtemt met $x = \pm a$, overeen $y = \pm \frac{1}{2} a$; zoo men dus, aan beide zijden van het punt A, neemt $AH = AH' = a$, zullen de overeenkomſtige ordinaten HG en H'G' gelijk $\frac{1}{2} a$ en de begeerde maxima zijn.

www.libool.com.cn

§. 4. Zondert men x uit de gegevene vergelijking af, zoo vindt men:

$$x = \frac{a^2 \pm a\sqrt{(a^2 - 4y^2)}}{2y}.$$

Stelt men hierin $y = 0$, dan wordt $x = \frac{a^2 \pm a^2}{0}$. Het bovenſte teeken geeft x oneindig groot; doch het benedenſte teeken $x = \frac{0}{0}$: van welk laatſte gebroken de waarde bepaald wordt, door teller en noemer van de waarde van x te differentieren; hierdoor verkrijgt men: $\frac{2y}{\sqrt{(a^2 - 4y^2)}}$, en ſtellende hierin $y = 0$, dan wordt $x = 0$; hetgeen het gezegde in §. 2. volkomen bevestigt.

Ook deze vergelijking geeft ons de in §. 3. gevondene waarden voor het maximum van y; want het blijkt ten duidelijkſte, dat y niet grooter dan $\frac{1}{2} a$ kan zijn, zonder dat x imaginair wordt; en verder, dat met $y = \pm \frac{1}{2} a$ overeenſtemt $x = \pm a$.

Eindelijk blijkt uit deze vergelijking, dat, offchoon er voor elke abscis ſlechts eene ordinaat beſtaat, er echter met elke ordinaat twee abscisſen overeenſtemmen, welke beide poſitief of beide negatief zijn, naarmate y poſitief of negatief is.

§. 5. Om de ſubtangens te vinden, heeft men:

$$PT = \frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2} \times \frac{(a^2 + x^2)^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{x(a^2+x^2)}{a^2 - x^2}$$

of $AT = PT - x = \frac{2x^3}{a^2 - x^2}$. Om dus de Tangens, voor eenig gegeven punt M van de kromme te vinden, hebben wij, zoolang $x < a$ is, deze Conſtructie:

Verleng de ordinaat PM naar boven en maak AN gelijk de gegevene lijn a; trek PD loodregt op AN, maak $NE = AP$; trek DE en AF evenwijdig aan DE. Indien dan $AT = 2EF$ genomen wordt, dan zal TM de tangens van het punt M zijn.

Want $EF : EN = AD : DN = AP^2 : PN^2$ zijnde, hebben wij,

wij, daar EN $=$ AP $= x$ is, BF : $x = x^2 : a^2 - x^2$; dus BF $= \frac{x^3}{a^2 - x^2}$ en AT $= 2$ BF $= \frac{2x^3}{a^2 - x^2}$, zijnde het hieruit duidelijk genoeg op te maken, hoe wij moeten handelen, wanneer $x > a$ is.

www.libtool.com.cn

§. 6 Daar beide takken van de kromme de as B'B tot asymptote hebben, is het, bij de oppervlakkigste beschouwing van de figuur, klaar, dat de kromme drie buigpunten moet hebben, waarvan 'er één in A valt: ook de berekening brengt ons tot hetzelfde besluit; want $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2a^2x(3a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^3}$ kan niet o worden, dan, vooreerst in het geval $x = o$, waarmede het punt A overeenstemt, en ten anderen, in het geval van $x^2 = 3a^2$; waaruit $x = \pm a\sqrt{3}$, en hiermede komt overeen $y = \pm \frac{1}{4}a\sqrt{3}$. Nemende dus AI $=$ AI' $= a\sqrt{3}$ en makende IK $=$ I'K' $= \frac{1}{4}$ AI, zullen K en K' de twee andere buigpunten zijn.

§ 7. De algemeene formule voor den kromtestraal is . . . $\gamma = -(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2})^{\frac{3}{2}} : \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Stellende hierin de gevondene waarden van $\frac{\partial y}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, verkrijgt men

$$\gamma = \frac{[(a^2 + x^2)^4 + a^4(a^2 - x^2)^2]^{\frac{3}{2}}}{2a^2x(3a^2 - x^2)(a^2 + x^2)^3}.$$

Is nu $x = \pm a$, dan wordt $\gamma = \pm 2a$, zijnde dit de kromtestraal voor de maxima; en is $x = o$ wordt γ oneindig groot; is eindelijk $x = \pm a\sqrt{3}$, dan vindt men γ mede oneindig groot, hetgeen het bestaan der buigpunten K en K' nogmaals bevestigt.

§. 8 Om den inhoud te vinden, heeft men de volgende vergelijking:

$$I = \int y\partial x = \int \frac{a^2 x\partial x}{x^2 + a^2} = \tfrac{1}{2}a^2 \, Log.(x^2 + a^2) + C.$$

Daar nu, wanneer $x = o$ is, de inhoud mede gelijk nul moet zijn, zoo is $C = -\frac{1}{2}a^2 \, Log.a^2$. De inhoud van eenig gedeelte APMA is dus:

$$I = \tfrac{1}{2}a^2 \, [Log.(x^2 + a^2) - Log.a^2] = \tfrac{1}{2}a^2 \, Log.\frac{x^2 + a^2}{a^2}.$$

Wanneer dan $x = a$ is, is $I = \frac{1}{2}a^2 \, Log.2$, en, voor $x =$ oneindig, is tevens I oneindig groot.

XXXVII. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

www.libtool.com.cn

Op eene geheel andere wijze, dan in Voorſtel 73 van het II. Deel der Verzameling van Voorſtellen, 24 boomen te planten, die met elkander 28 regels maken, van vier boomen ieder?

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA.

Laat ABCD (*Fig.* 33) een parallelogram zijn, AC en BD de diagonalen van hetzelve; maak AI = BK = CN = DO, trek KN en IO, loopende evenwijdig met BC en AD en ſnijdende AC en BD in U, W, X en Y; dan zullen, WU en XY trekkende, deze lijnen evenwijdig loopen aan AB en CD, op dezelfde wijze, als zulks in Voorſtel 73, II. Deel der Verzameling van Voorſtellen, plaats heeft.

Laten AD en BC door WU en XY geſneden worden in Q, P, L en M. Trek AL, OA, BQ, BN, CK, CP, DI en DM elkander ſnijdende in R, T, V en S; laten deze lijnen elkander door verlenging ontmoeten in E, F, G en H; dan zullen de punten S en V in eene regte lijn vallen met F en H; want de diagonalen van het parallelogram BCNK ſnijden elkander midden door in S, en de diagonalen van het parallelogram IODA, in V; dus is S het midden van KC, en V het midden van AO; dus gaat SV door het midden van BC en AD en dus ook door het midden van LM en QP; daar dan de parallelen BC en QP door SV midden door gedeeld worden, zullen BQ, CP en SV elkander in een zelfde punt H ontmoeten. Om dezelfde reden, vallen de punten R en T in eene regte lijn met E en G.

Als men nu boomen plant in alle punten, die met letters geteekend zijn, heeft men 24 boomen en 20 regels van vier boomen ieder, te weten: AD, IO, KN, BC, AB, QL, PM, DC, AC, BD, AF, DF, BH, CH, CE, DE, AG, BG, FH en EG.

Om de overige te vinden, merk ik aan, dat de diagonalen van het parallelogram MCDP elkander midden door deelen in T; maar XP = ND = CO, dus CXPO een parallelogram, en dus gaat XO door het midden van CP, dat is te zeggen, door het punt T; om dezelfde reden, gaat NY door het punt T, MW en LX door het punt S, KU en IW door het punt R, QY en PU door het punt V. Zoo nu de punten I en K op AB, of N en O op CD zoodanig bepaald werden, dat NY door het punt A ging, zou,

om

om dezelfde reden, OX door het punt B gaan, MW door het punt A, LX door het punt D, KU door het punt D, IW door het punt C, QY door het punt C en PU door het punt B; hetwelk nog acht nieuwe regels zou opleveren van vier boomen ieder. Maar opdat NY door het punt A zal gaan, moeten de parallellen CD en XP door de punten N en Y in dezelfde reden gedeeld worden. Men moet derhalve hebben

$$CD : ND = XP : YP = ND : OD = ND : CN$$

waaruit blijkt, dat CD door het punt N in de uiterſte en middelſte reden gedeeld moet worden, en dat alsdan, de figuur zoodanig zamenſtellende als in de oplosſing gedaan is, de 24 boomen, 28 regels zullen maken van vier boomen ieder, naar den eisch van het voorſtel.

Aanmerking. Wanneer men de diagonalen regthoekig op elkander ſtelt, wordt ABCD eene ruit, en de plantagie regelmatig. Men zal insgelijks eene regelmatige figuur verkrijgen, wanneer men ABCD regthoekig maakt.

Gevolg. AD en CD zijn door de punten Q en N in de uiterſte en middelſte reden gedeeld; maar NX is evenwijdig AD, dus wordt NX door CQ in dezelfde reden gedeeld als AD door het punt Q gedeeld is, dat is te zeggen, in de uiterſte en middelſte reden. Maar MX evenwijdig ND, dus wordt NX door MD geſneden in de reden van MX tot ND, of CN tot ND, dat is, ook in de uiterſte en middelſte reden; waaruit volgt, dat MD, CQ en NX elkander in een zelfde punt doorſnijden; maar dit punt ligt in eene regte lijn met L en O; want NX is evenwijdig BC; dus zal NX door LO in dezelfde reden gedeeld worden, als BC door het punt L gedeeld is, dat is te zeggen, in de uiterſte en middelſte reden. De lijnen LO, MD, CQ en NX gaan dan door een zelfde punt. Men zal op gelijke wijze, binnen het parallelogram ABCD, nog zeven andere viervoudige ſnijpunten kunnen vormen. Wanneer men in deze punten boomen ſtelt, en de boomen uit E, F, G, H, U, W, X en Y wegneemt, heeft men insgelijks 28 regels van vier boomen ieder. In dit geval ſtaan de boomen alle binnen het parallelogram ABCD, en wanneer men hetzelve regthoekig maakt, wordt de plantagie regelmatig, zie figuur 34.

AANMERKING. Ik heb nog menigvuldige arrangementen van 24 regels gevonden, die zeer fraaije figuren opleveren.

www.dbnl.com.cn

XXXVII. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Elke vierhoek wordt door dezelfs diagonalen in vier deelen eenvormig verdeeld, dat de deelen eene geometrische eevenredigheid maken; hoe bewijst men dit?

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., en R. LOBATTO.

Laat E (*Fig.* 35) het snijpunt der diagonalen van vierhoek ABCD zijn, dan is

$\triangle ABE : \triangle EBC = AE : EC$
en $\triangle ADE : \triangle EDC = AE : EC$ } STEENSTRA, 6e. *B.* 1e. *Prop.*

waaruit volgt:

$\triangle ABE : \triangle EBC = \triangle ADE : \triangle EDC$, ST. 1e. *Prop.* 5e. *B.*

XXXIX. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Een voorgesteldeu driehoek in zes gelijke driehoeken te verdeelen, door drie lijnen, uit de hoeken tot de overstaande zijden getogen, en elkander in een punt binnen den driehoek snijdende?

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR., en R. LOBATTO.

Constructie. Laten de zijden midden door gedeeld worden in F, G en H (*Fig.* 36), en laten de deelpunten met de overstaande hoekpunten vereenigd worden; dan zal aan het begeerde voldaan zijn.

Bewijs. De lijnen AG, BH en CF snijden elkander in een zelfde punt E, en wel zoodanig, dat $FE = \frac{1}{2} EC$; $GE = \frac{1}{2} AE$ en $HE = \frac{1}{2} EB$ is (VAN SWINDEN, *Meetk.* 4e. *Boek* 10e. *Voorstel.*)

Nu is $\triangle BFC = \frac{1}{2} \triangle ABC$; omdat $BF = \frac{1}{2} AB$ is;
en $\triangle BFE = \frac{1}{3} \triangle BFC$; omdat $FE = \frac{1}{3} FC$ is,
dus $\triangle BFE = \frac{1}{6} \triangle ABC$:

en op dezelfde wijze wordt bewezen, dat ieder der overige driehoeken gelijk is aan $\frac{1}{6} \triangle ABC$.

XL. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Binnen eenen hoek ABC is een punt D gegeven; hoe zal men door dit punt twee cirkels trekken, die elkander uitwendig en tevens ieder een der beenen van den hoek aanraken?

OPLOSSING. Door J. R. SCHMIDT, R. LOBATTO en C. LANTZ JR.

CON-

CONSTRUCTIE. Laat binnen den gegeven hoek en door het gegevene punt eene lijn EF (*Fig.* 37) getrokken worden, en uit het gegevene punt de lijn DH loodregt op EF en ſnijdende de beenen in G en H; indien dan de hoeken DGC en DHA midden door gedeeld worden, zullen de ſnijpunten K en I, van deze deellijnen met de lijn EF, de middelpunten van den gevraagden cirkel zijn.

www.hbtool.com.cn

BEWIJS. Laten KL en IM regthoekig op BC en BA getrokken worden; dan is, omdat de hoeken D en L regt zijn en de hoek DGL midden door gedeeld is, KL = KD; op dezelfde wijze blijkt, dat IM = ID is. De cirkels, uit I en K, met IM en KL als radien beſchreven, raken dus de beenen in M en L, gaan beide door het punt D, en raken elkander in dit punt; omdat zij de gemeenſchappelijke raaklijn HD hebben.

AANMERKING. Daar de lijn EF, naar welgevallen, door het punt D, kan getrokken worden, zoo is het voorſtel onbepaald en laat oneindig veel antwoorden toe. Is EF loodregt op AB getrokken, vindt men het punt I door DE midden door te deelen, en is de lijn EF zoodanig getrokken, dat DH door het punt B gaat, dan worden de punten I en K bepaald, door de hoeken DBA en DBC midden door te deelen.

Eindelijk merken wij op, dat, daar het punt I, bij ieder der oplosſingen, even ver van het punt D als van de lijn AB verwijderd moet zijn, de meetkundige plaats van dit punt eene Parabool moet wezen, waarvan D het brandpunt en AB de rigtlijn is. De meetkundige plaats van het punt K is even eens eene parabool, D tot brandpunt en BC tot rigtlijn hebbende.

XLI. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Wanneer ik de rekenkundige reeks, 3, 10, 17 *enz.*, *met* 7 *opklimmende*, *onophoudelijk voortzet*, *en telkens*, *wanneer ik een' term verkrijg*, *die gelijk of grooter dan* 131 *wordt*, *er het getal* 131 *aftrek*, *en dan dit verſchil*, *als den eerſten term der reeks nemende*, *dezelve beſtendig met* 7 *doe opklimmen*, *waar ter plaatſe zal ik dan*, *na op nieuw* 131 *afgetrokken te hebben*, *dien overhouden?*

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en C. LANTZ JR.

Stel dat de n^e term van de, in het voorſtel, omſchrevene reeks de gevraagde eigenſchap bezit, en laat x het aantal malen beteeke-

men, dat men het getal 131 moet aftrekken om *één* over te houden, dan heeft men de vergelijking $3 + 7(n-1) - 131x = 1$ of $7n = 131x + 5$; waaruit $n = 19x - \frac{2x-5}{7}$.

www.libtool.com.cn

Stel $2x - 5 = 7p$ of $2x = 7p + 5$, dan vinden wij, $x = 4p + 3 - \frac{1}{2}(p+1)$, waaruit blijkt, dat voor p ieder oneven getal kan genomen worden.

Nemende dan p op zijn kleinst $= 1$, dan wordt $x = 6$, dus $n = 19x - 1 = 113$; waaruit blijkt: dat de 113e term van de reeks *één* zal zijn, en dat het getal 131 alsdan zes malen afgetrokken is.

XLII. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Men vraagt op de korstmogelijke wijze een vierkant in eene Ellips te beschrijven, en de Conſtructie uit de Algebraïſche formule af te leiden?

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR. en R. LOBATTO.

Laten de asſen AB en DE (*Fig.* 38) gelijk $2a$ en $2b$ geſteld worden, laat PP′ de zijde van het gevraagde vierkant zijn, ſtel CM $= x$ en MP $= y$, dan is $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; doch volgens het voorſtel, moet $y = x$ zijn, en wij hebben dus de vergelijking $x^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, of $(a^2 + b^2)x^2 = a^2b^2$; waaruit $x = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, welke waarde wij aldus conſtrueren.

Trek AD, en maak DF $=$ DC; trek door F, loodregt door de groote as AB, de lijn PP′, deze is de zijde van het gevraagde vierkant, waardoor hetzelve gemakkelijk voltooid kan worden.

Want AD $= \sqrt{(AC^2 + CD^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ en AD : AC $=$ DF : MC of $\sqrt{(a^2 + b^2)} : a = b :$ MD; dus MD $= \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = x$.

AANMERKING door J. R. SCHMIDT.

Dit voorſtel kan zonder analyſis nog eenvoudiger geconſtrueerd worden; want deelende de hoeken DCA en DCB midden door, en vereenigende de punten P, P′, Q en Q′, zal het gevraagde vier-

vierkant geconſtrueerd zijn; hetgeen zoo klaar is, dat het geen verder bewijs behoeft.

XLIII. VOORSTEL.

www.hbtool.com.cn

Door C. LANTZ JR.

Als, in het vlak van eene parabool CAD (Fig. 39), een punt E gegeven is, dan begeert men door dit punt eene ordinaat te trekken, zoodanig, dat dezelve door dit punt in twee deelen gedeeld worde, welke tot elkander in reden ſtaan, als twee gegevene lijnen m en n?

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR. en R. LOBATTO.

Noemen wij den top A, het brandpunt B, en zij AC de as der parabool. Trek door het gegevene punt E de ordinaat van de as DCF, en ſtel, dat de ordinaat IKH de begeerde is, laat dezelve in K midden door gedeeld zijn, dan is, GM evenwijdig aan AC trekkende, GM de middellijn van de begeerde ordinaat.

Trek verder GN loodregt op de as, en trek de normaal GL, dan is de ſubnormaal NL $=$ 2 AB (zie FLORIJN, *Beginſelen der Hoogere Meetkunde*, §. 31).

Stellende dan AB $= p$, AC $= a$, CE $= b$, en EM $= x$, dan is NL $= 2p$, GN $=$ MC $=$ EC $-$ EM $= b - x$; verder is GL $= \sqrt{(NG^2 + NL^2)} = \sqrt{[(b-x)^2 + 4p^2]}$ en DC $= \sqrt{4}$ AB $\times$ AC $= \sqrt{4ap}$ (FLORIJN §. 8).

Nu is, in de gelijkvormige driehoeken EKM en GNL,

$$NL : EM = LG : EK = NG : MK$$

of $2p : x = \sqrt{((b-x)^2 + 4p^2)} : EK = b - x : MK$

waaruit $EK = \frac{x\sqrt{((b-x)^2+4p^2)}}{2p}$ en $MK = \frac{x(b-x)}{2p}$.

Wij hebben dus, omdat IH in K midden door gedeeld is, $EK = \frac{1}{2}(EI - EH)$ en dus

$$\tfrac{1}{2}(EI - EH) = \frac{x\sqrt{((b-x)^2 + 4p^2)}}{2p}.$$

Verder is $GN^2 = 4$ AB $\times$ AN, of $(b-x)^2 = 4p \times$ AN; dus $AN = \frac{(b-x)^2}{4p}$ en BG $=$ AN $+$ AB (FLORIJN §. 18) $= \frac{(b-x)^2}{4p} + p = \frac{(b-x)^2 + 4p^2}{4p}$, dus GM $=$ AC $-$ AN $= \frac{4ap - (b-x)^2}{4p}$ en GK $=$ GM $-$ MK $= \frac{4ap - b^2 + x^2}{4p}$;

daar nu $HK^2 = 4\,GK \times BG$ is (FLORIJN §. 52), zoo hebben wij, omdat $HK = \frac{1}{2}(EI + EH)$ is,

$$\tfrac{1}{4}(EI + EH)^2 = \frac{((b-x)^2+4p^2)(4ap-b^2+x^2)}{4p^2}$$

terwijl wij boven gevonden hebben,

$$\tfrac{1}{4}(EI - EH)^2 = \frac{((b-x)^2+4p^2)\,x^2}{4p^2}.$$

Doch door het Voorſtel is gegeven $EI : EH = m : n$ of $EI + EH : EI - EH = m + n : m - n$; dat is

$$(EI + EH)^2 : (EI - EH)^2 = (m+n)^2 : (m-n)^2$$

wanneer wij dus voor $(EI + EH)^2$ en $(EI - EH)^2$ derzelver waarden ſchrijven en door $\frac{(b-x)^2+4p^2}{p^2}$ deelen, verkrijgen wij:

$$x^2 + 4ap - b^2 : x^2 = (m+n)^2 : (m-n)^2$$

of $x^2(m+n)^2 = x^2(m-n)^2 + (4ap - b^2)(m-n)^2$

dat is $x^2((m+n)^2 - (m-n)^2) = (4ap - b^2)(m-n)^2$

waaruit wij vinden:

$$x = \pm \frac{m-n}{2\sqrt{mn}} \times \sqrt{(4ap - b^2)};$$

welke waarde van x wij aldus conſtrueren.

1°. Beſchrijf op DC een' halven cirkel en maak $CO = CE$; dan is $DO = \sqrt{(CD^2 - CE^2)} = \sqrt{(4ap - b^2)}$; en bij gevolg $x = \pm \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}\,DO$; dat is $2\sqrt{mn} : m - n = DO : x$.

2°. Maak EM eene vierde evenredige tot $2VZ$, $m - n$ en DO; dan is $EM = x$, trekkende dus MG evenwijdig aan de as, aan G eene raaklijn, en door E eene ordinaat HI evenwijdig aan deze raaklijn, zal deze ordinaat de gevraagde zijn.

1e. AANMERKING. Omdat x het dubbelde teeken heeft, kan het punt M zoo wel boven als beneden het punt E genomen worden; makende dan $EM' = EM$, dan zal er eene andere lijn H'I' gevonden worden, welke eveneens aan het voorſtel voldoet.

2e. AANMERKING. Als het punt E buiten de parabool gelegen is, zullen wij, op dezelfde wijze werkende, vinden $x = \pm \frac{m+n}{2\sqrt{mn}} \cdot \sqrt{(b^2 - 4ap)}$, welke waarde even gemakkelijk te conſtrueren is.

XLIV.

XLIV. VOORSTEL.

Door C. LANTZ JR.

Men vraagt, door een punt E (Fig. 40), gelegen in het vlak van eene parabool CAD, eene ordinaat te trekken, welke door dit punt zoodanig is gedeeld, dat de regthoek uit derzelver deelen HE en EI, gelijk is aan het vierkant op eene gegevene lijn MN?

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door C. LANTZ JR. en R. LOBATTO.

Laat HI de gevraagde lijn, K derzelver midden, en B het brandpunt van de parabool zijn; dan is GK, evenwijdig aan de as AX getrokken, de middellijn van de ordinaat IH; trekkende dan EF evenwijdig aan AK, en verder BG, zoo is *Regth.* HE × EI = 4 *Regth.* FE × BG (FLORIJN §. 59): maar *Regth.* HE × EI = MN², dus 4 FE × BG = MN²; dat is FE : $\frac{1}{2}$ MN = $\frac{1}{2}$ MN : BG; en hieruit volgt deze Conſtructie.

1°. Trek EF evenwijdig aan de as AX en beſchrijf uit het brandpunt B met eenen ſtraal BG, welke eene derde evenredige is tot FE en $\frac{1}{2}$ MN eenen cirkelboog, ſnijdende de parabool in G.

2°. Trek aan het punt G eene raaklijn (FLORIJN §. 23), en trek door E eene lijn HI, evenwijdig aan deze raaklijn, dan zal HI de gevraagde ordinaat zijn.

AANMERKING. De cirkelboog uit B, met BG als radius beſchreven, ſnijdt de parabool in twee punten G en G′, en er kunnen dus ook twee lijnen HI en H′I′, door het punt E getrokken worden, welke aan de vraag beantwoorden. Deze twee oplosſingen vereenigen zich tot éene oplosſing als BG = BA wordt; doch is BG < BA, dan is het voorſtel onmogelijk.

XLV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt, hoe de waarden van n getallen x_1, x_2, x_3, *enz. tot* x_n, *door middel van de n vergelijkingen;*

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \ldots x_n (x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n) = a_1$$
$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \ldots x_n (x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n) = a_2$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \ldots x_n (x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n) = a_3$$

enz. tot

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{n-1} (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}) = a_n.$$

gevonden kunnen worden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, J. DEELEMAN BOM en R. LOBATTO.

Stel

Stel $x_1 + x_2 + x_3 + enz. \ldots . tot\ x_n = s$
en $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot enz. \ldots . tot\ x_n = p$
dan gaan de vergelijkingen over in

$\frac{p}{x_1}(s - x_1) = a_1$; $\frac{p}{x_2}(s - x_2) = a_2$; $\frac{p}{x_3}(s - x_3) = a_3$ *enz.*

tot $\frac{p}{x_n}(s - x_n) = a_n$:

waaruit gemakkelijk gevonden wordt:

$x_1 = \frac{ps}{a_1 + p}$; $x_2 = \frac{ps}{a_2 + p}$; $x_1 = \frac{ps}{a_3 + p}$; *enz.* $x_n = \frac{ps}{a_n + p}$;

en al de getallen zullen dus gevonden zijn, wanneer flechts p en s bepaald kunnen worden.

Multipliceren wij nu de waarden van x_1, x_2, x_3, *enz.* zoo verkrijgen wij:

$$p = \frac{p^n s^n}{(a_1 + p)(a_2 + p)(a_3 + p) \ldots (a_n + p)}$$

$$\text{of } s^n = \frac{p(a_1 + p)(a_2 + p)(a_3 + p) \ldots (a_n + p)}{p^n}$$

waaruit wij trekken:

$$s = \frac{\sqrt[n]{p(a_1 + p)(a_2 + p)(a_3 + p) \ldots (a_n + p)}}{p};$$

en daar s hier door in p is uitgedrukt, behoeft alzoo nog alleen p bepaald te worden.

Te dien einde nemen wij de fom der waarden van x_1, x_2, x_3 *enz.* en verkrijgen hierdoor:

$$s = ps\left(\frac{1}{a_1 + p} + \frac{1}{a_2 + p} + \frac{1}{a_3 + p} + enz. \ldots + \frac{1}{a_n + p}\right)$$

of wel, door s deelende,

$$1 = p\left(\frac{1}{a_1 + p} + \frac{1}{a_2 + p} + \frac{1}{a_3 + p} + enz. \ldots + \frac{1}{a_n + p}\right);$$

Daar nu, in deze vergelijking, niet dan de onbekende p voorkomt, kan p door middel van dezelve gevonden worden, en hierdoor zal dan s, en bij gevolg ook x_1, x_2, *enz.* bepaald wezen, waardoor het voorftel kan worden gehouden voor opgelost. Wij zullen echter den vorm van deze laatfte vergelijking een weinig nader trachten te bepalen.

Schrij-

Schrijven wij die vergelijking onder deze gedaante

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a_1+p} + \frac{1}{a_2+p} + \frac{1}{a_3+p} + enz... + \frac{1}{a_n+p} = \frac{P}{Q}$$

dan hebben wij klaarblijkelijk

$$Q = (a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)\ enz.\ldots(a_n+p)$$

en

$$\begin{aligned} P = {} & (a_2+p)(a_3+p)(a_4+p)\ enz.\ldots(a_n+p) + \ldots \\ & (a_1+p)(a_3+p)(a_4+p)\ enz.\ldots(a_n+p) + \ldots \\ & (a_1+p)(a_2+p)(a_4+p)\ enz.\ldots(a_n+p) + \ldots \\ & enz.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots \\ & (a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)\ enz.\ldots(a_{n-1}+p) \end{aligned}$$

Stellende nu de ſom van de bekende getallen a_1, a_2, a_3 *enz* tot a_n gelijk A_1; de ſom van hunne producten, twee aan twee genomen, gelijk A_2; de ſom van hunne producten, drie aan drie genomen, gelijk A_3 en zoo vervolgens, tot het product van al die getallen gelijk A_n; dan is het, uit de formatie der hooge vergelijkingen, bekend, dat wij zullen hebben:

$$\begin{aligned} Q &= (a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)\ enz.\ldots \text{ tot } (a_n+p) \\ &= p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + A_3 p^{n-3} + enz.. + A_n \end{aligned}$$

en differentieren wij deze vergelijking, verkrijgen wij, na door ∂p gedeeld te hebben, oogenblikkelijk

$$P = n p^{n-1} + (n-1) A_1 p^{n-2} + (n-2) A_2 p^{n-3} + enz.. + A_{n-1}.$$

zoodat onze vergelijking hierdoor overgaat in

$$\frac{1}{p} = \frac{n p^{n-1} + (n-1) A_1 p^{n-2} + (n-2) A_2 p^{n-3} + enz\ldots + A_{n-1}}{p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + A_3 p^{n-3} + enz\ldots + A_n}$$

dat is, in

$$p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + A_3 p^{n-3} + enz.\ldots + A_n =$$
$$n p^n + (n-1) A_1 p^{n-1} + (n-2) A_2 p^{n-2} + (n-3) A_3 p^{n-3} + enz.. + A_{n-1} p$$

of wel, in

$$(n-1) p^n + (n-2) A_1 p^{n-1} + (n-3) A_2 p^{n-2} + enz. + A_{n-2} p^2 - A_n = 0$$

waardoor p en dus het geheele voorſtel bepaald is.

Daar nu de vergelijking voor p, tot de n^e magt opklimt, laat dezelve n waarden voor p toe, en daar iedere bijzondere waarde van p eene bijzondere waarde voor s geeft, blijkt het, dat ons voorſtel, in het algemeen, voor n antwoorden vatbaar is, welke gevonden worden door het volgende ſtelſel van vergelijkingen

$$1°.\ (n-1) p^n + (n-2) A_1 p^{n-1} + (n-3) A_2 p^{n-2} + enz. + A_{n-2} p^2 - A_n = 0$$

2°.

2°. $s = \frac{\sqrt[n]{p(a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)\,enz\,..(a_n+p)}}{p}$

www.libtool.com.cn

3°. $x_1 = \frac{ps}{a_1+p}$; $x_2 = \frac{ps}{a_2+p}$; $x_3 = \frac{ps}{a_3+p}$; $x_4 = \frac{ps}{a_4+p}$ *enz.*

tot $x_n = \frac{ps}{a_n+p}$.

VOORBEELD. Laat gegeven zijn $xy(x+y) = 6$; $yz(y+z) = 30$ en $zx(z+x) = 12$; dan is, $n = 3$ en ons ſtelſel van vergelijkingen gaat over in

1°. $2p^3 + (a_1 + a_2 + a_3)p^2 - a_1 . a_2 . a_3 = 0$

2°. $s = \frac{\sqrt[3]{p(a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)}}{p}$

3°. $z = \frac{ps}{a_1+p} = \frac{\sqrt[3]{p(a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)}}{a_1+p}$

$x = \frac{ps}{a_2+p} = \frac{\sqrt[3]{p(a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)}}{a_2+p}$

$y = \frac{ps}{a_3+p} = \frac{\sqrt[3]{p(a_1+p)(a_2+p)(a_3+p)}}{a_3+p}$

nu is $a_1 = 6$; $a_2 = 30$ en $a_3 = 12$, en dus is de eerſte vergelijking

$$2p^3 + 48p^2 - 6 . 12 . 30 = 0$$
$$\text{of } p^3 + 24p^2 - 1080 = 0$$

waaruit wij deze drie waarden voor p vinden.

I°. $p = 6$; II°. $p = -15 + 3\sqrt{5}$; III° $p = -15 - 3\sqrt{5}$

welke waarden wij nu ieder in het bijzonder moeten beſchouwen.

I°. $p = 6$, geeft $s = \frac{\sqrt[3]{6 . 12 \quad 36 . 18}}{6} = 6$; waaruit $x = 1$; $y = 2$ en $z = 3$. Dit is dus het eerſte antwoord, hetwelk ook volkomen aan de vraag beantwoordt, want wij hebben

$$xy(x+y) = 1 . 2 . (1+2) = 2 . 3 = 6$$
$$yz(y+z) = 2 . 3 . (2+3) = 6 . 5 = 30$$
$$zx(z+x) = 3 . 1 . (3+1) = 3 . 4 = 12$$

II°. $p = -15 + 3\sqrt{5}$, geeft ons, $a_1 + p = -3(3-\sqrt{5})$; $a_2 + p = 3(5+\sqrt{5})$ en $a_3 + p = -3(1-\sqrt{5})$ en dus

$s =$

$$s = \frac{\sqrt[3]{3^4(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})}}{-3(5-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{240}(-2+\sqrt{5})}{-(5-\sqrt{5})}$$

www.libtool.com.cn

waaruit wij vinden

$$x = \frac{3\sqrt[3]{240}(-2+\sqrt{5})}{3(5+\sqrt{5})} = \sqrt[3]{\tfrac{8}{5}}(-20+9\sqrt{5})$$

$$y = \frac{3\sqrt[3]{240}(-2+\sqrt{5})}{-3(1-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{30}$$

$$z = \frac{3\sqrt[3]{240}(-2+\sqrt{5})}{-3(3-\sqrt{5})} = -\sqrt[3]{30}(2+\sqrt{5}).$$

Dit tweede antwoord voldoet mede volkomen aan de vereischten, want wij zullen hebben:

$$xy(x+y) = \sqrt[3]{[36(9\sqrt{5}-20)]} \times [\sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{\tfrac{8}{5}}(9\sqrt{5}-20)]$$

$$= -\sqrt[3]{1080}(20-9\sqrt{5}) + \sqrt[3]{6^3}(161-72\sqrt{5})$$

$$= -6\sqrt[3]{(100-45\sqrt{5})} + 6\sqrt[3]{(161-72\sqrt{5})}$$

$$= -6\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right) + 6\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = 6$$

$$yz(y+z) = -\sqrt[3]{[900(2+\sqrt{5})]} \times [\sqrt[3]{30} - \sqrt[3]{30}(2+\sqrt{5})]$$

$$= -\sqrt[3]{27000}(2+\sqrt{5}) + \sqrt[3]{27000}(9+4\sqrt{5})$$

$$= -30\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})} + 30\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})}$$

$$= -30\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 30\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 30$$

$$xz(x+z) = -\sqrt[3]{[36(5-2\sqrt{5})]} \times [-\sqrt[3]{30}(2+\sqrt{5}) + \sqrt[3]{\tfrac{8}{5}}(-20+9\sqrt{5})]$$

$$= \sqrt[3]{(1080\sqrt{5})} - \sqrt[3]{6^3}(-38+17\sqrt{5})$$

$$= 6\sqrt[3]{(5\sqrt{5})} - 6\sqrt[3]{(-38+17\sqrt{5})}$$

$$= 6\sqrt{5} - 6(-2+\sqrt{5}) = 12.$$

III°. $p = -15-3\sqrt{5}$ met de voorige waarde alleen in teeken verschillende, geeft ons, op dezelfde wijze,

$x =$

$x=-\sqrt[3]{\frac{9}{5}}(20+9\sqrt{5})$; $y=\sqrt[3]{30}$; $z=\sqrt[3]{30}(-2+\sqrt{5})$

welk derde antwoord, even als het tweede, aan de drie vergelijkingen getoetst kan worden.

www.libtool.com.cn

AANMERKING. Offchoon ieder getal in het algemeen n, n^e magts wortels heeft, is ondertusfchen flechts één van deze wortels beftaanbaar, wanneer n oneven, en zijn er flechts twee beftaanbaar, als n even is. Is dus n oneven, zoo als in ons aangevoerde voorbeeld, dan geeft iedere waarde van p flechts eene beftaanbare waarde voor s, doch n even zijnde, geeft iedere waarde van p twee waarden voor s, waarvan de eene pofitief en de andere negatief is. In het geval van n even, kunnen er alzoo $2n$ antwoorden voor ons voorftel beftaan, welke ondertusfchen, twee aan twee genomen, niet anders dan in de teekens zullen verfchillen; omdat s negatief nemende x_1, x_2, x_3 *enz.* alle van teeken veranderen.

XLVI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt op welke wijze, de waarden van n getallen x_1; x_2; x_3; *enz. tot* x_n; *door middel van de n vergelijkingen*

$$x_1 . x_2 . x_3 \ldots . x_n (x_1 + x_2 + x_3 + enz. \ldots . + x_n) = a_1$$
$$x_1^2 . x_2^2 . x_3^2 \ldots . x_n^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + enz. \ldots . + x_n^2) = a_2$$
$$x_1^3 . x_2^3 . x_3^3 \ldots . x_n^3 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + enz. \ldots . + x_n^3) = a_3$$

enz. tot

$$x_1^n . x_2^n . x_3^n \ldots . x_n^n (x_1^n + x_2^n + x_3^n + enz. \ldots . + x_n^n) = a_n$$

kunnen gevonden worden.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, J. DEELEMAN BOM en R. LOBATTO.

Stellen wij de fom der gevraagde getallen gelijk S_1; de fom van derzelver quadraten S_2; de fom van de derde magten S_3 en zoo vervolgens, tot de fom der n^e magten gelijk S_n.

Stellen wij verder de fom der producten 1 aan 1 van de getallen (dat is de fom der getallen zelve) gelijk s_1; de fom van hunne producten 2 aan 2 genomen s_2; de fom van derzelver producten 3 aan 3 genomen s_3 *enz.* tot de fom der producten n aan n genomen (dat is het product van al de getallen) gelijk s_n.

De opgegevene vergelijkingen gaan door deze ftelling over

in

in $s_n S = a_1$; $s_n^2 S_2 = a_2$; $s_n^3 S_3 = a_3$ *enz.* tot $s_n^n S_n = a_n$: en hieruit volgt terſtond:

www.libtool.com.cn

$$S_1 = \frac{a_1}{s_n};\ S_2 = \frac{a_2}{s_n^2};\ S_3 = \frac{a_3}{s_n^3}\ \textit{enz.}\ \text{tot}\ S_n = \frac{a_n}{s_n^n}.$$

en onze gevraagde getallen zullen de wortels zijn van de vergelijking

$$X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} - s_3 X^{n-3} + \textit{enz.} \mp s_n = 0:$$

het geheele voorſtel zal dus opgelost zijn, indien wij ſlechts in ſtaat zijn de waarden van s_1, s_2, s_3 *enz.* uittedrukken in a_1, a_2, a_3 *enz.*

Nu is volgens het theorema van GIRARD (zie DE GELDER, *Wisk. Leſen* II *Curſus* §. 755.)

$$s_1 = S_1$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2}(s_1 S_1 - S_2)$$
$$s_3 = \tfrac{1}{3}(s_2 S_1 - s_1 S_2 + S_3)$$
$$s^4 = \tfrac{1}{4}(s_3 S_1 - s_2 S_2 + s_1 S_3 - S_4)$$

enz. tot

$$s_n = \frac{1}{n}(s_{n-1} S_1 - s_{n-2} . S_2 + s_{n-3} . S_3 - \textit{enz.} \ldots \mp S_n)$$

Subſtitueren wij nu de achtervolgende waarden van s_1; s_2, s_3 *enz.* de eene in de andere, en ſtellen wij te gelijker tijd, in plaats van S_1, S_2, S_3 *enz.* de bovengevondene waarden, dan verkrijgen wij

$$s_1 = \frac{a_1}{s_n} \text{ . ſtel dit } = \frac{A_1}{s_n}.$$

$$s_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a_1 A_1 - a_2}{s_n^2}\right) \text{ . ſtel dit } \frac{A_2}{s_n^2}$$

$$s_3 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{a_2 A_2 - a_2 A_1 + a_3}{s_n^3}\right) \text{ . ſtel dit } = \frac{A_3}{s_n^3}$$

$$s_4 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{a_1 A_3 - a_2 A_2 + a_3 A_1 - a_4}{s_n^4}\right) \text{ . ſtel dit } = \frac{A_4}{s_n^4}$$

enz. tot

$$s_n = \frac{a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} + a_3 A_{n-3} - \textit{enz.} \mp a_n}{n s_n^n} \text{ . ſtel dit } = \frac{A_n}{s_n^n}.$$

Hieruit blijkt dan dat, ſtellende

$a_1 = A_1$; $\frac{1}{2}(a_1 A_1 - a_2) = A_2$; $\frac{1}{3}(a_1 A_2 - a_2 A_1 + a_3) = A_3$; $\frac{1}{4}(a_1 A_3 - a_2 A_2 + a_3 A_1 - a_4) = A_4$ *enz.* tot

$$\frac{1}{n}(a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} + a_3 A_{n-3} - enz. \ldots \pm a_n) = \pm A_n$$

www.libtool.com.cn

wij zullen hebben $s_n = \frac{A_n}{s_n^n}$, of $s_n^{n+1} = A_n$: waaruit volgt,

$s_n = \sqrt[n+1]{A_n}$, en hierdoor verkrijgen wij de volgende waarden voor s_1; s_2; s_3 *enz.*

$$s_1 = \frac{A_1}{\sqrt[2]{A_2}}; s_2 = \frac{A_2}{\sqrt[3]{A_3^2}}; s_3 = \frac{A_3}{\sqrt[4]{A_4^3}}; s_4 = \frac{A^4}{\sqrt[5]{A_5^4}}$$

enz. ..... *tot* $s_n = \frac{A_n}{\sqrt[n+1]{A_n^n}} = \sqrt[n+1]{A_n}$.

Hierdoor dan s_1; s_2; s_3 *enz.* tot s^n bepaald hebbende, zullen de gevraagde getallen de wortels zijn van de vergelijking

$$X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} - s_3 X^{n-3} + enz. \ldots \pm s_n = 0.$$

VOORBEELD. Laat gegeven zijn $xyz\,(x+y+z) = 36$; $x^2 y^2 z^2\,(x^2+y^2+z^2) = 504$ en $x^3 y^3 z^3\,(x^3+y^3+z^3) = 7776$, dan is $n = 3$, $a_1 = 36$, $a_2 = 504$ en $a_3 = 7776$. Dus $A_1 = a_1 = 36$; $A_2 = \frac{1}{2}(a_1 A_1 - a_2) = 396$ en $A_3 = \frac{1}{3}(a_1 A_2 - a_2 A_1 + a_3) = 1296$: dus $s_1 = \frac{A_1}{\sqrt[4]{A_3}} = \pm 6$; $s_2 = \frac{A_2}{\sqrt[4]{A_3^2}} = 11$ en $s_3 = \sqrt[4]{A_3} = \pm 6$: en dus zijn de getallen de wortels van de vergelijking $X^3 \mp 6X^2 + 11X \mp 6 = 0$; dat is, de getallen zijn 1, 2 en 3 of -1, -2, en -3; naarmate men de bovenste of benedenste teekens bezigt.

AANMERKING. Wanneer wij hier op dezelfde wijze als in de aanmerking op het voorgaande voorstel redeneren, blijkt het spoedig, dat n even zijnde, het voorstel slechts eene oplossing toelaat; doch dat er twee oplossingen bestaan, indien n oneven is, welke oplossingen dan ondertusschen alleen in de teekens verschillen: wij hebben dit laatste ook reeds in het bijgevoegde voorbeeld kunnen opmerken.

XLVII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Van eenen driehoek ABC (Fig. 41) is gegeven, de lijn CD, die uit den tophoek door het midden der bazis gaat; de lijn CE, die den tophoek midden door deelende, tot aan de bazis loopt, en de perpendiculair, die uit den tophoek op de bazis valt; men vraagt hierdoor den driehoek te conſtrueren?

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

CI zij de gegevene loodlijn, op de onbepaalde lijn AB opgerigt; wanneer dan uit C met de gegevene lijnen CD en CE cirkelbogen beſchreven worden, is D het midden der bazis en E het punt waarin de lijn, die den tophoek midden door deelt, de bazis doorſnijdt; hierdoor wordt dus de hoek DCE, welken de lijnen CD en CE maken, mede bekend, en wij hebben bij gevolg dezelfde gegevens als in het 5e voorſtel, zoodat wij verder de conſtructie kunnen volgen, welke aldaar is opgegeven.

XLVIII. VOORSTEL.

Er is een getal van zes cijferletters, als men hetzelve door 7 deelt, ſchiet er 2 over; wat zal er overſchieten, als men de voorſte cijfer achteraan ſtelt, en dit nieuwe getal door 7 deelt? (7)

EERSTE OPLOSSING. Door C. J. VAN BRUSSEL, C. LANTZ JR., R. LOBATTO, J. PERREBOOM en S. J. MULDER.

Stel de cijferletters x, y, z, u, v, en w, dan is het getal $100000x + 10000y + 1000z + 100u + 10v + w = 7p + 2$; omdat het door 7 gedeeld 2 moet overlaten. Doch ſtelt men de voorſte cijfer achteraan, dan is het getal

$$100000y + 10000z + 1000u + 100v + 10w + x.$$

Het eerſte getal met 10 multiplicerende, komt er $1000000x + 100000y + 10000z + 1000u + 100v + 10w = 70p + 20$ en aan beide zijden $999999x$ aftrekkende, blijft er

$$100000y + 10000z + 1000w + 100v + 10w + x = 70p + 20 - 999999x$$
$$= 7(10p - 142857x + 2) + 6,$$

waaruit blijkt, dat er, wanneer men het tweede getal door 7 deelt, 6 zal overſchieten.

TWEEDE OPLOSSING. Door J. DEELEMAN BOM en A. VAN DER SWAN.

Stel het eerſte getal $10^5 x + p$, dan verandert dit, door de voor-

(7) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 85, No. 19.

voorſte cijfer achter aan te plaatſen, in $10p + x$; ſtel nu algemeen, dat het eerſte, gedeeld door 7, overlate a, en dat er bij de deeling van het tweede door 7 overſchiete y, dan hebben wij

$$10^5 x + p = 7q + a \quad \text{en} \quad 10p + x = 7q' + y$$

De eerſte vergelijking met 10 gemultipliceerd en er de tweede aftrekkende blijft er

$$(10^6 - 1)x = 7(10q - q' + a) + 3a - y$$

dat is $7.142857\, x + y = 7(10q - q' + a) + 3a$

Daar nu de eerſte term van ieder lid der vergelijking door 7 deelbaar is, zoo volgt, dat y gelijk moet zijn aan het geen er overſchiet, wanneer men $3a$ door 7 deelt.

Is dus $a = 1$ dan is $y = 3$	is $a = 4$ dan is $y = 5$
$a = 2 \ldots . y = 6$	$a = 5 \ldots . y = 1$
$a = 3 \ldots . y = 2$	$a = 6 \ldots . y = 4$

XLIX. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

Er is een getal van zes cijferletters; als men hetzelve door 13 *deelt, ſchiet er* 3 *over; wat zal er overſchieten, als men de achterſte cijfer vooraan ſtelt, en dit nieuwe getal door* 13 *deelt?* (8)

EERSTE OPLOSSING. Door C. J. VAN BRUSSEL, C. LANTZ JR., R. LOBATTO, J. PEERBOOM en S. J. MULDER.

Stel de cijferletters x, y, z, u, v en w, dan is het getal

$$10^5 x + 10^4 y + 10^3 z + 10^2 u + 10v + w = 13p + 3,$$

omdat het, door 13 gedeeld, 3 moet overlaten.

Het nieuwe getal, door de verplaatſing van de achterſte cijfer geboren, is alzoo

$$10^5 w + 10^4 x + 10^3 y + 10^2 z + 10u + v.$$

Multiplicerende het eerſte getal met 10^5, komt er

$$10^{10} x + 10^9 y + 10^8 z + 10^7 u + 10^6 v + 10^5 w = 10^5 . 13p + 3 . 10^5$$

en van deze vergelijking aan beide zijden aftrekkende $999999\,(10^4 x + 10^3 y + 10^2 z + 10u + v)$, blijft er

$$10^5 w + 10^4 x + 10^3 y + 10^2 z + 10u + v = \ldots\ldots$$
$$-999999(10^4 x + 10^3 y + 10^2 z + 10u + v) + 10^5 . 13p + 3 . 10^5$$
$$= -13.76923(10^4 x + 10^3 y + 10^2 z + 10u + v) + 13(10^5 p + 23076) + 12,$$

waaruit blijkt, dat er, wanneer men het tweede getal door 13 deelt, 12 zal overſchieten.

TWEE-

(8) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 86, N°. 20.

TWEEDE OPLOSSING. Door J. DEELEMAN BOM en A. VAN DER SWAN.

Stellen wij het getal $10p + w$, dan verandert hetzelve, door de achterſte cijfer vooraan te plaatſen, in $10^5 w + p$; laat nu het eerſte getal door 13 gedeeld, a, en het tweede, wanneer men het door 13 deelt, y overlaten, dan hebben wij deze twee vergelijkingen

$$10p + w = 13q + a \text{ en } 10^5 w + p = 13q' + y.$$

De eerſte vergelijking met 10^5 vermenigvuldigd en en de tweede aftrekkende, blijft er

$$(10^6 - 1)\, p = 13\,(10^5 q - q' + 7692a) + 4a - y,$$

of $13 \cdot 76923p + y = 13\,(10^5 q - q' + 7692a) + 4a$;

doch het getal 13 een gemeene deeler zijnde van de eerſte termen der beide leden, zoo volgt hier uit dat het gezochte getal y gelijk zal zijn aan het overſchot der deeling van $4a$ door 13.

Is dus $a = 1$ dan is $y = 4$	is $a = 7$ dan is $y = 2$
$a = 2 \ldots y = 8$	$a = 8 \ldots y = 6$
$a = 3 \ldots y = 12$	$a = 9 \ldots y = 10$
$a = 4 \ldots y = 3$	$a = 10 \ldots y = 1$
$a = 5 \ldots y = 7$	$a = 11 \ldots y = 5$
$a = 6 \ldots y = 11$	$a = 12 \ldots y = 9$

L. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

Welke zijn de waarden van x, y, z en u in de volgende vergelijkingen: (9)

$$23\,xyzu = 236\,(xyz - xy + x) - 213$$
$$71\,xyzu = 236\,(yzu - yz + y) - 165$$
$$33\,xyzu = 236\,(zux - zu + z) - 203$$
$$29\,xyzu = 236\,(uxy - ux + u) - 207$$

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, R. LOBATTO, S. J. MULDER, C J. VAN BRUSSEL, A. VAN DER SWAN, C. LANTZ JR. en J. PEEREBOOM.

Vermenigvuldigen wij de tweede vergelijking met x, dan verkrijgen wij

$$71\,x^2yzu = 236\,(xyzu - xyz + xy) - 165\,x,$$

en hierbij de eerſte vergelijking geteld, komt er

$$xyzu$$

(9) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 88. N°. 24.

$xyzu\ (71\ x + 28) = 236\ (xyzu + x) - 165x - 213$

of $71\ x \times xyzu - 71\ x = 213\ xyzu - 213$,

www.libtool.com.cn

dat is $(xyzu - 1) \cdot 71\ x = (xyzu - 1) \cdot 213$

of wel, na door 71 gedeeld te hebben,

$$(xyzu - 1)\ (x - 3) = 0.$$

Wanneer wij nu op dezelfde wijze, y maal de derde vergelijking bij de tweede; z maal de vierde vergelijking bij de derde; en eindelijk u maal de eerste vergelijking bij de vierde tellen, zullen wij door eene zelfde bewerking vinden:

$$(xyzu - 1)\ (x - 3) = 0$$
$$(xyzu - 1)\ (y - 5) = 0$$
$$(xyzu - 1)\ (z - 7) = 0$$
$$(xyzu - 1)\ (u - 9) = 0$$

en deelende al deze vergelijkingen door $xyzu - 1$, komt er klaarblijkelijk $x = 3$; $y = 5$; $z = 7$; en $u = 9$; dat het gevraagde antwoord is.

Aanmerking. Het is opmerkenswaardig dat aan de vier laatstgevondene vergelijkingen, terstond voldaan wordt door de eenvoudige stelling van $xyzu - 1 = 0$, of $xyzu = 1$: de vier opgegevene vergelijkingen veranderen door deze stelling in

$$xyz - xy + x = 1$$
$$yzu - yz + y = 1$$
$$zux - zu + z = 1$$
$$uxy - ux + u = 1$$

Deze vergelijkingen zijn nu echter niet meer onafhankelijk van elkander, want uit de eerste en $xyzu = 1$, kunnen wij de drie andere aldus afleiden.

De eerste met u multiplicerende komt

$xyzu - xyu + xu = u$, of

$uxy - ux + u = xyzu = 1$ en dit is de vierde.

Deze weder met z multiplicerende komt

$xyzu - zux + zu = z$, of

$zux - zu + z = xyzu = 1$ en dit is de derde.

Deze nogmaals met y multiplicerende komt

$xyzu - yzu + yu = y$, of

$yzu - yz + y = xyzu = 1$ en dit is de tweede.

Hieruit volgt dat wij, $xyzu = 1$ zijnde, slechts deze twee vergelijkingen hebben.

$xyzu = 1$ en $xyz - xy + x = 1$

waaruit wij trekken

www.libtool.com.cn

$$x = \frac{1}{yz - y + 1} \text{ en } u = \frac{yz - y + 1}{yz};$$

Wij kunnen alzoo voor y en z getallen naar welgevallen aannemen, en vinden hierdoor waarden voor x en u, welke met de aangenomene waarden van y en z aan de vier opgegeyene vergelijkingen voldoen. Bij al deze oplosfingen zal echter $xyzu = 1$ zijn, en het reeds gevonden antwoord is in deze oplosfing niet begrepen.

Nemende, bij voorbeeld, $z = y = 1$, dan wordt ook $x = u = 1$, welke waarden aan de vier vergelijkingen beantwoorden.

Wij besluiten dan uit het gezegde, dat er buiten het gevonden antwoord $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$, $u = 9$, nog een oneindig aantal antwoorden bestaat, waarbij $xyzu = 1$ is, en waarin twee der getallen naar welgevallen kunnen genomen worden.

LI. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

Men begeert vier getallen te vinden, die gedorig geometrisch evenredig zijn; waarvan de vier cuben te zamen geteld, uitleveren 506880; *en wanneer men den eerſten en laatſten term te zamen telt, komt er vijfmaal de ſom der beide middelſte.* (10)

OPLOSSING. DOOR C. J. VAN BRUSSEL, R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM en C. LANTZ JR.

Stel voor de termen der gevraagde progres

$$\frac{(x-y)^2}{x+y};\ x-y;\ x+y \text{ en } \frac{(x+y)^2}{x-y};$$

dan is door het eerſte gedeelte van de opgaaf,

$$\frac{(x-y)^2}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{x-y} = 5(x+y) + 5(x-y), \text{ of}$$

$$\frac{(x-y)^3 + (x+y)^3}{x^2-y^2} = 10x, \text{ dat is}$$

$$2x^3 + 6xy^2 = 10x^2 - 10xy^2 \text{ of wel}$$

$$8y^2 = 4x^2, \text{ waaruit } y = \tfrac{1}{2}x\sqrt{2};$$

maar door het tweede gedeelte van de opgaaf, is

$$(x-y)^2$$

(10) O. S. BANGMA, *Algebra, pag.* 178. N°. 20.

$$\frac{(x-y)^6}{(x+y)^3}+(x-y)^3+(x+y)^3+\frac{(x+y)^6}{(x-y)^3}=506880$$

$$\text{of } \frac{(x-y)^3+(x+y)^3}{(x^2-y^2)^3}+2x^3+6xy^2=506880$$

$$\text{of } \frac{2x^9+72x^7y^2+252x^5y^4+168x^3y^6+18xy^8}{(x^2-y^2)^3}$$
$$+2x^3+6xy^2=506880;$$

hierin de waarde van $y^2=\frac{1}{2}x^2$ overgebragt, komt

$$\frac{2x^9+36x^9+63x^9+21x^9+\frac{9}{8}x^9}{(x^2-\frac{1}{2}x^2)^3}+5x^3=506880,$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$990x^3=506880, \text{ dus } x^3=512 \text{ en } x=8,$$

zoodat $x=8$ en $y=\frac{1}{2}x\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

Wij hebben dus voor de termen van de progres

$$\frac{(x-y)^2}{x+y}=\frac{(8-4\sqrt{2})^2}{8+4\sqrt{2}}=40-28\sqrt{2}$$
$$x-y=\ldots\ldots\ldots 8-4\sqrt{2}$$
$$x+y=\ldots\ldots\ldots 8+4\sqrt{2}$$
$$\text{en } \frac{(x+y)^2}{x-y}=\frac{(8+4\sqrt{2})^2}{8-4\sqrt{2}}=40-28\sqrt{2}.$$

LII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Vier getallen te vinden in arithmetiſche evenredigheid, zoodanig dat het product der beide eerſte, 126, *het product der beide middelſte*, 238, *en het product der beide laatſte*, 374 *is?* (11).

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM, C. LANTZ JR., R. LOBATTO en S. J. MULDER.

Stel de vier termen der evenredigheid x, $x+y$, z en $z+y$, dan heeft men de vergelijkingen

$$x^2+xy=126;\ z^2+zy=374 \text{ en } xz+yz=238.$$

Wanneer men de derde vergelijking door de eerſte deelt, dan verkrijgt men $\frac{z}{x}=\frac{17}{9}$ of $z=\frac{17}{9}x$.

Deelt men voorts de derde vergelijking door de tweede, dan komt er $\frac{x+y}{z+y}=\frac{7}{11}$ of $7z+7y=11x+11y$ en bij gevolg

(11) O. S. RANGMA *Algebra*, *pag.* 174. Nº. 1.

volg $7z = 11x + 4y$; maar $7z = \frac{119}{9}x$ dus $\frac{119}{9}x = 11x + 4y$

waaruit $4y = \frac{20}{9}x$ en $y = \frac{5}{9}x$.

De waarde van y in de vergelijking $x^2 + xy = 126$ overgebragt, komt $1\frac{5}{9}x^2 = 126$ of $x^2 = 81$, waaruit $x = 9$; dus $y = \frac{5}{9}x = 5$ en $z = \frac{17}{9}x = 17$; zoodat de gevraagde evenredigheid is 9 . 14 . 17 . 22.

LIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Vier getallen te vinden, in arithmetiſche evenredigheid, waarvan de ſom doet 50, *het product van de beide uiterſte termen* 126 *en het product der beide middelſte* 156? (12)

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, H. G. WITLAGE JZ., C. LANTZ JR., A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM, R. LOBATTO en S. J. MULDER.

Stel de termen x . y . z en u, dan hebben wij de vergelijkingen $x + y + z + u = 50$; $xu = 126$ en $yz = 156$.

Uit de eerſte vergelijking volgt, om dat $x + u = y + z$ moet zijn, $x + u = y + z = 25$.

Verder is $x - u = \sqrt{[(x+u)^2 - 4xu]} = \sqrt{121} = \pm 11$

en $y - z = \sqrt{[y+z)^2 - 4yz]} = \sqrt{1} = \pm 1$.

Eindelijk vindt men door $x + u = 25$ en $x - u = \pm 11$, $x = 18$ of 7, en $u = 7$ of 18; terwijl wij uit $y + z = 25$ en $y - z = \pm 1$ vinden $y = 13$ of 12, en $z = 12$ of 13.

De gevraagde evenredigheid kan dus, op deze vier bijzondere wijzen, geſchreven worden. 18 . 13 . 12 . 7; 18 . 12 . 13 . 7; 7, 12, 13, 18 en 7 . 13 . 12 . 18.

LIV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Vier getallen te vinden, in arithmetiſche evenredigheid, waarvan de ſom der termen doet 88, *het product der beide eerſte* 782 *en het product der beide laatſte* 210? (13)

Op-

(12) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 174. N°. 2.
(13) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 175. N°. 2.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, H. G. WITLAGE JR., S. J. MULDER, R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN en J. PEEREBOOM.

Stel de termen x, y, z en u, dan is $x + y + z + u = 2a = 88$, $xy = b = 782$ en $zu = c = 210$.

Uit de eerste vergelijking volgt, uit hoofde dat $x + u = y + z$ moet zijn, $x + u = y + z = a = 44$.

Vermenigvuldigende de waarden van $x + u$ en $y + z$, en trekkende hier af $xy + zu = b + c$, komt er $xz + uy = a^2 - (b + c)$.

Nu is $xz - uy = \sqrt{[(xz + uy)^2 - 4xyzu]}$; daar dan $xz + uy = a^2 - (b + c)$ en $4xyzu = 4bc$ is, zoo hebben wij $xz - uy = \sqrt{(a^4 - 2a^2(b + c) + (b - c)^2)} = 22$; stel dit p.

Uit $xz + uy = a^2 - (b + c)$, en $xz - uy = p$, volgt nu verder $xz = \frac{a^2 - (b + c) + p}{2}$ en $uy = \frac{a^2 - (b + c) - p}{2}$.

Deze beide laatste deelende door $xy = b$, zal er komen $z = \frac{a^2 - (b + c) + p}{2b} \times y$ en $u = \frac{a^2 - (b + c) - p}{2b} \times x$.

De eerste van deze waarden gebragt in $y + z = a$, verkrijgen wij $y + \frac{a^2 - (b + c) + p}{2b} \cdot y = a$, waaruit wij trekken

$y = \frac{2ab}{a^2 + b - c + p} = 23$, dus $z = a - \frac{2ab}{a^2 + b - c + p} = 21$.

Doch de laatste overbrengende in $x + u = a$, zoo komt er $x + \frac{a^2 - (b + c) - p}{2b} \cdot x = a$, en hieruit verkrijgen wij

$x = \frac{2ab}{a^2 + b - c - p} = 34$ en $u = a - \frac{2ab}{a^2 + b - c - p} = 10$.

De gevraagde evenredigheid is alzoo $34 . 23 . 21 . 10$.

LV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Van eene arithmetische reeks doet het product der beide eerste termen 84; *het product der beide laatste termen* 1184, *en het product der beide uiterste termen* 259; *vrage naar deze reeks?* (14)

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR, R. LOBATTO, C. LANTZ JR., J. PEEREBOOM en A. VAN DER SWAN.

Stel de eerste term x. Omdat nu het product der eerste termen

(14) O. S. BANG, *Algebra*, *pag.* 178, N°. 23.

men 84 is, is de tweede term $\frac{84}{x}$; en omdat het product der beide uiterſte 259 is, is de laatſte $\frac{259}{x}$; maar het product der beide laatſte is 1148, dus de voorlaatſte 1184 : $\frac{259}{x}$ of $\frac{32x}{7}$.

Daar nu de ſom der beide uiterſte gelijk moet zijn aan de ſom der tweede en voorlaatſte, hebben wij

$$x + \frac{259}{x} = \frac{84}{x} + \frac{32x}{7}$$

of $\frac{25}{7}x = \frac{175}{x}$; dat is $\frac{1}{7}x = \frac{7}{x}$ of $x^2 = 49$, waaruit $x = 7$, voor den eerſten term, dus is $\frac{84}{x} = 12$ de tweede term; $\frac{259}{x} = 37$ de laatſte term en $\frac{32x}{7} = 32$ de voorlaatſte term, en dus is de reeks. 7 . 12 . 17 . 22 . 27 . 32 . 37.

LVI. VOORSTEL.

Door D. S. WATERMAN.

In een cirkelſector AMC (Fig. 42) eenen gelijkzijdigen driehoek te beſchrijven, waarvan eene der zijden, evenwijdig loopt aan de koorde AC? (15)

OPLOSSING. Door D. S. WATERMAN, R. LOBATTO en C. LANTZ JR.

Laat de koorde AC, en evenwijdig aan dezelve eene willekeurige lijn FG getrokken worden. Beſchrijf op FG een' gelijkzijdigen driehoek FGH; deel den boog AC midden door in B, en trek BD en BE evenwijdig met FH en HG, wanneer dan DE getrokken wordt, zal BDE de gevraagde driehoek zijn.

Want MD : MF = MB : MH = ME : MG zijnde, is DE evenwijdig FG, en bij gevolg △ DBE gelijkvormig aan △ FHG, dat is, gelijkzijdig.

LVII. VOORSTEL.

Door D. S. WATERMAN.

In eenen gegevenen driehoek ABC (Fig. 43), eene lijn DE, even-

(15) DE GELDER, *Meetk. pag.* 172. N°. 65.

evenwijdig aan de bazis AB te trekken, zoodanig, dat DE = AD zij? (16)

EERSTE OPLOSSING. Door D. S. WATERMAN en C. LANTZ JR.

www.dbook.com.cn

Trek uit eenig punt F, in de zijde AC, FG evenwijdig aan de bazis AB; maak FG = AF en trek AGE; wanneer dan ED evenwijdig aan AB getrokken wordt, zal deze de begeerde zijn.

Want AF : FG = AD : DE; maar AF = FG, dus AD = DE.

TWEEDE OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

Laat AE den hoek BAC midden door deelen, en trek ED evenwijdig aan AB, dan is aan het begeerde voldaan.

Want ∠ DEA = ∠ EAB = ∠ EAD; dus AD = AE.

LVIII. VOORSTEL.

Door D. S. WATERMAN.

Drie punten, welke niet in dezelfde regte lijn gelegen zijn, gegeven zijnde; uit deze drie punten, als middelpunten, drie cirkels te beschrijven, die elkander onderling aanraken? (17)

OPLOSSING. Door D S. WATERMAN en R. LOBATTO.

Vereenig de drie gegevene punten, dan ontstaat er een driehoek ABC (*Fig.* 44). Deel de hoeken dezes driehoeks midden door, dan ontmoeten de deellijnen elkander in het middelpunt van den ingeschrevenen cirkel. Trek vervolgens uit dit middelpunt M, perpendiculairen op de drie zijden, dan is AD = AF, BD = BE en CF = CE. Indien dan uit A, B en C, met AD, BE en CF als radien, cirkels getrokken worden, zullen deze elkander in de punten D, E en F aanraken.

LIX. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Op de zijden, AC en BC, eens voorgestelden driehoeks, (*Fig.* 45), *twee punten, D en E, te vinden, zoodanig, dat, wanneer men trekt DE, AE en BD (de laatste elkander in F snijdende), de driehoek DFE zoo groot zij als mogelijk is?*

OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

Men kan de oplossing van dit voorstel op onderscheidene wijzen aanvatten; doch alle zullen niet eene even gemakkelijke eindvergelijking geven. De volgende oplossing nogtans, welke wij, na

(16) DE GELDER, *Meetk. pag,* 170. N°. 32.

(17) DE GELDER, *Meetk. pag.* 170. N°. 41.

na verſchillende andere beproefd te hebben, vonden, zal, gelijk wij ons vleijen, niet onder de ongemakkelijkſte en langwijligſte behooren.

www.libtool.com.cn

Men ſtelle, namelijk, de gegevene zijden des driehoeks, AB, BC en AC, achtervolgens a, b en c, en verder BE $= x$ en AD $= y$, dan is CD $= c - y$ en CE $= b - x$.

Nu is $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ AC . BC . *Sin.* C $= \frac{1}{2} bc$ *Sin.* C, en $\triangle$ CDE $= \frac{1}{2}$ CD . CE *Sin.* C $= \frac{1}{2}(b - x)(c - y)$ *Sin.* C; dus *vierhoek* ABED $= \frac{1}{2}(by + cx - xy)$ *Sin.* C.

Verder is $\triangle$ DEC : $\triangle$ DAE $=$ CD : DA $= c - y : y$,
en $\triangle$ DEC : $\triangle$ DEB $=$ CE : EB $= b - x : x$;
zoodat $\triangle$ DAE $= \frac{1}{2} y(b - x)$ *Sin.* C; en $\triangle$ DEB $= \frac{1}{2} x(c - y)$ *Sin.* C.

Eindelijk is $\triangle$ ABD : $\triangle$ AFD $=$ $\triangle$ BED : $\triangle$ DFE,
of $\triangle$ ABD + $\triangle$ BED : $\triangle$ AFD + $\triangle$ DFE $=$ $\triangle$ BED : $\triangle$ DFE,
dat is, *vierhoek* ABED : $\triangle$ ADE $=$ $\triangle$ BED : $\triangle$ DFE;
of, wanneer wij voor de drie eerſte termen de gevondene waarden ſtellen

$\frac{1}{2}(by + cx - xy)$ *Sin.* C : $\frac{1}{2} y(b - x)$ *Sin.* C $= \frac{1}{2} x(c - y)$ *Sin.* C : $\triangle$ DFE,

waaruit wij vinden

$$\triangle \text{ DFE} = \frac{xy\,(b - x)\,(c - y)\,.\,\textit{Sin.}\ \text{C}}{2\,(by + cx - xy)};$$

en daar deze inhoud op zijn mogelijkst groot moet zijn, hebben wij

$$\text{V} = \frac{(b - x)\,(c - y)\,xy}{by + cx - xy} = \textit{maximum}.$$

Differentierende deze uitdrukking, eerst ten opzigte van x en dan ten opzigte van y, komt er,

$$\frac{\partial \text{V}}{\partial x} = [(by + cx - xy)(b - 2x) - x(b - x)(c - y)]\,.\,y(c - y) = 0$$

en $$\frac{\partial \text{V}}{\partial y} = [(by + cx - xy)(c - 2y) - y(b - x)(c - y)]\,.\,x(b - x) = 0$$

zijnde in beide de gemeene noemer $(by + cx - xy)^2$ weggelaten.

De factors $y = 0$ en $(c - y) = 0$, waarmede $x = 0$ en $(b - x) = 0$ overeenſtemmen, zullen wij hier niet in aanmerking nemen, daar, bij deze waarden, de driehoek DEF gelijk 0 wordt. Deelt men dan door deze factoren, dan behouden wij

$$(by + cx - xy)(b - 2x) = x(b - x)(c - y)$$
en $$(by + cx - xy)(c - 2y) = y(b - x)(c - y)$$

en

en door deze vergelijkingen in elkander te deelen, volgt terstond

$$x : y = b - 2x : c - 2y$$

of $cx - 2xy = by - 2xy$; dat is $cx = by$, waaruit volgt

$$x : b = y : c$$

en dit geeft te kennen, dat de lijn DE, bij het maximum, evenwijdig met AB moet zijn.

Stellende nu in de eerste onzer vergelijkingen, voor y hare waarde $\frac{cx}{b}$, dan heeft men

$$(2cx - \frac{cx^2}{b})(b - 2x) = (b - x)(c - \frac{cx}{b})x$$

of, multiplicerende met b en deelende door cx,

$$(2b - x)(b - 2x) = (b - x)^2;$$

deze producten ontwikkeld en de overeenkomstige termen vereenigd zijnde, verkrijgen wij

$$x^2 - 3bx + b^2 = 0,$$

uit welke vierkants vergelijking gevonden wordt

$x = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})\, b$ en $b - x = \frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{5})\, b$,

dus $y = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})\, c$ en $c - y = \frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{5})\, c$.

Om nu te onderzoeken of deze waarden van x en y wezenlijk tot een maximum of minimum behooren, zoeken wij de waarden van $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 V}{\partial x \,.\, \partial y}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$. Indien er dan een maximum of minimum plaats zal hebben, moeten de gevondene waarden van x en y vooreerst $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \,.\, dy}\right)^2$ maken; en, ten anderen, zullen $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ hetzelfde teeken moeten hebben, en naarmate dit teeken — of + is, zal er een maximum of minimum beſtaan. (Zie La Croix, *Traité Elément. de calcul diff. pag.* 190).

Wij vinden nu uit $V = \frac{(b-x)(c-y)xy}{by + cx - xy}$, en in aanmerking nemende, dat $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, en $by = cx$ is

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{2c(b-x)}{b(2b-x)};\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{2b(b-x)}{c(2b-x)} \text{ en}$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \,.\, \partial y} = \frac{x(b-x)^2+(b-2x)^2(2b-x)}{x(2b-x)^2}$$
$$= \frac{(2b-x)(b-x)(b-3x)+b^2x}{x(2b-x)^2}.$$

www.rbtoor.com.cn

De eerſte waarde van x maakt $(b-x) = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})b$ en $2b-x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})b$, deze waarden zijn beide negatief en maken bij gevolg $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ beide negatief; doch de tweede waarde van x maakt $b-x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})b$ en $2b-x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})b$, en deze waarden beide poſitief zijnde, maken zij $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ beide negatief. De beide waarden van x zullen bij gevolg een maximum voor driehoek DEF geven, indien zij ſlechts $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ grooter maken dan $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \,.\, \partial y}\right)^2$, en wij moeten dus nog beproeven of voor beide waarden van x

$$\frac{4(b-x)^2}{(2b-x)^2} > \frac{((2b-x)(b-x)(b-3x)+b^2x)^2}{x^2(2b-x)^4},$$

dat is, of

$4x^2(2b-x)^2(b-x)^2 > ((2b-x)(b-x)(b-3x)+b^2x)^2$,

en, dat op het zelfde uitkomt, of voor beide waarden van x,

$2x(2b-x)(b-x) > (2b-x)(b-x)(b-3x)+b^2x$ is.

Maar $(2b-x)(b-x) = \frac{1}{4}(1\mp\sqrt{5})(-1\mp\sqrt{5})b^2 = b^2$, en wij behoeven alzoo nog alleen te onderzoeken of voor beide waarden van x, $2b^2x > b^2(b-3x)+b^2x$, dat is, of $2x > b-2x$, en bij gevolg, of $4x > b$ is.

Nu is $x = \frac{1}{2}(3\mp\sqrt{5})b$; en dus $4x = 2(3\mp\sqrt{5})b$. De eerſte waarde van x geeft dus klaarblijkelijk $4x > b$; voor de tweede waarde van x merken wij op, dat $\sqrt{5} = 2{,}23$ *enz.* is: bij gevolg is $4x = 2(3-\sqrt{5})b = 2 \times 0{,}77$ *enz.* $\times b = 1{,}54$ *enz.* $\times b > b$; waaruit dan blijkt dat beide waarden van x, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ grooter dan $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \,.\, \partial y}\right)^2$ maken, en dat zij alzoo beide een maximum voor $\triangle$ DEF aanwijzen.

Nemende dan het punt B zoodanig in BC, dat BC door hetzelve in de uiterſte en middelſte reden gedeeld, en BE het kleinſte dezer deelen is, dan zal $BE = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})b = x$ zijn,

en

en wanneer dus ED evenwijdig met AB getrokken wordt, zal DEF het gevraagde maximum zijn.

Om het tweede maximum van $\triangle$ DEF, dat met $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})b$ overeenſtemt, in de figuur aan te wijzen, merken wij op, dat het voorſtel in de volgende bewoordingen kan worden uitgedrukt.

Twee onbepaalde lijnen, CA en CB, gegeven zijnde, benevens een punt, in ieder van dezelve, vraagt men, uit deze twee punten, A en B, naar de overſtaande lijnen, twee lijnen, AE en BD, te trekken, zoodanig dat dezelve met de lijn DE, welke de ſnijpunten D en E vereenigt, eenen driehoek vormen, wiens inhoud een maximum of minimum is.

Het voorſtel in dezen zin opvattende, kunnen wij gemakkelijk dit tweede antwoord in de figuur aanwijzen; want verlengende BC, zoodanig dat $BE' = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \times BC$ wordt, en trekkende D'E' evenwijdig met AB, zal D'E' met AE' en BD', welke elkander in F' ſnijden, eenen driehoek D'E'F' vormen, die het tweede maximum zal zijn.

LX. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Uit de hoekpunten A en B eens gegevenen driehoeks, (Fig. 46) twee lijnen AE en BD, elkander in F ſnijdende, tot de overſtaande zijden te trekken, zoodanig dat de ſom der driehoeken AFD en BFE een maximum zij?

OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

Stellen wij alles, zoo als in het voorgaande voorſtel. Nu hebben wij aldaar gevonden

$\triangle$ DAE $= \frac{1}{2}y(b - x)$ *Sin.* C en $\triangle$ DEB $= \frac{1}{2}x(c - y)$ *Sin.* C

en nemende hiervan de ſom, verkrijgen wij

$\triangle$ DAE $+ \triangle$ DEB $= \frac{1}{2}y(b - x)$ *Sin.* C $+ \frac{1}{2}x(c - y)$ *Sin.* C

of $\triangle$ ADF $+ 2 \triangle$ DEF $+ \triangle$ BFE $= \frac{1}{2}(by + cx - 2xy)$ *Sin.* C;

wanneer wij alzoo hier aftrekken

$$2 \triangle \text{DEF} = \frac{xy\,(b - x)\,(c - y)\ \textit{Sin.}\ \text{C}}{(by + cx - xy)},$$

welke waarde wij mede in het voorgaande voorſtel gevonden hebben, zal er overblijven

$\triangle$ ADF

$$\Delta ADF + \Delta BFE = \tfrac{1}{2}(by + cx - 2xy)\ Sin.\ C - \ldots \frac{xy\,(bc - by - cx + xy)\ Sin.\ C}{(by + cx - xy)}$$

www.libtool.com.cn

welke uitdrukking zeer gemakkelijk herleid wordt tot

$$\Delta ADF + \Delta BFE = \tfrac{1}{2}\ Sin\ C.\left\{(by+cx) - \frac{2xy \cdot bc}{by+cx-xy}\right\};$$

en daar de som dezer driehoeken een *maximum* moet zijn, zoo hebben wij

$$V = by + cx - \frac{2bc \cdot xy}{by + cy - xy} = maximum.$$

Handelen wij dan even als in het voorgaande voorstel, zullen wij vinden

$$\frac{\partial V}{\partial x} = c - 2bc \cdot \frac{y\,(by + cx - xy) - xy\,(c - y)}{(by + cx - xy)^2} = 0$$

en $\frac{\partial V}{\partial y} = b - 2bc \cdot \frac{x(by + cx - xy) - xy\,(b - x)}{(by + cx - xy)^2} = 0$

of, herleidende de tellers,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = c - \frac{2b^2cy^2}{(by+cx-xy)^2} = 0;\ \text{en}\ \frac{\partial V}{\partial y} = b - \frac{2bc^2x^2}{(by+cx-xy)^2} = 0,$$

dat is, wanneer wij met de noemers vermenigvuldigen,

$$(by+cx-xy)^2 = 2b^2y^2 \text{ en } (by+cx-xy)^2 = 2c^2x^2.$$

Hieruit volgt oogenblikkelijk $by = cx$, of $b : x = c : y$, waaruit blijkt, dat DE hier, even als in het voorgaande voorstel, evenwijdig aan AB moet zijn. Verder heeft men uit dezelve $by + cx - xy = by\sqrt{2}$; en brengende hier in de waarde van cx, $2by - xy = by\sqrt{2}$ of $2b - x = b\sqrt{2}$, waaruit $x = (2 - \sqrt{2})b$, en bij gevolg $y = (2 - \sqrt{2})c$.

Wij zullen hier de tweede differentialen achter wege laten, wijl het bestaan van een maximum hier toch van zelve blijkbaar is: zijnde voor het overige de constructie voor de waarden van x en y zoo gemakkelijk, dat wij hierbij niet langer behoeven stil te staan.

LXI. VOORSTEL.

Door M. J. ZUIDHOF.

Gegeven zijnde $x - z = 12$; $(x + y + z)\,x = 299$ *en* $(x + y + z)\,(y + z) = 230$; *vraagt men* x, y *en* z, *elk bijzonder te vinden.*

OPLOSSING. Door M. J. ZUIDHOF, A. VAN DER SWAN en R. LOBATTO.

Noem de som der drie getallen s, dan is $sx = 299$ en $s(s - x) = 230$, en nemende de som dezer vergelijkingen, $s^2 = 529$, dus $s = 23$, en $x = \frac{299}{s} = 13$; maar $x - z = 12$, dus $z = x - 12 = 1$. Eindelijk is $y + z = \frac{230}{s} = 10$, dus $y = 10 - z = 9$, waardoor de begeerde getallen gevonden zijn.

LXII. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Van vijf getallen is tweemaal het eerste, driemaal het tweede, viermaal het derde en vijfmaal het vierde, altijd gelijk aan de som der vier overige; zoo nu het product dezer vijf getallen gelijk a is, vraagt men die getallen te vinden?

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

Stel de getallen x, y, z, t en u, en derzelver som s, dan is

$2x = s - x$ of $3x = s$ waaruit $x = \frac{1}{3}s$

$3y = s - y \ldots 4y = s \ldots\ldots y = \frac{1}{4}s$

$4z = s - z \ldots 5z = s \ldots\ldots z = \frac{1}{5}s$

$5t = s - t \ldots 6t = s \ldots\ldots t = \frac{1}{6}s$.

Stelt men nu om de breuken te vermijden, $s = 60v$, dan is $x = 20v$; $y = 15v$; $z = 12v$, $t = 10v$, en bij gevolg $u = s - (x + y + z + t) = 60v - 57v = 3v$, en wij hebben alzoo

$$xyztu = 3 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 15 \cdot v^5 = a$$

waaruit $v = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}\sqrt[5]{9 \cdot 25 \cdot a}$, zoo dat $x = \frac{2}{5}\sqrt[5]{225a}$; $y = \frac{1}{4}\sqrt[5]{225a}$; $z = \frac{2}{5}\sqrt[5]{225a}$; $t = \frac{1}{3}\sqrt[5]{225a}$ en $u = \frac{1}{10}\sqrt[5]{225a}$.

Voorbeeld. Nemende $a = 108000$, wordt $\sqrt[5]{225a} = 30$, dus $x = 20$; $y = 15$; $z = 12$; $t = 10$ en $u = 3$.

LXIII. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

De vergelijkingen $xy + n(x + y) = a$; $xz + n(x + z) = b$ en

en $yz + n(y+z) = c$, *gegeven zijnde; de waarde van* n, y *en* z *te vinden?*

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LORATTO.

Wanneer wij bij ieder der vergelijkingen, aan beide zijden n^2 optellen, verkrijgen wij

$$(x+n)(y+n) = a + n^2 \ldots (\alpha)$$
$$(x+n)(z+n) = b + n^2 \ldots (\beta)$$
$$(y+n)(z+n) = c + n^2 \ldots (\gamma)$$

waarvan het product is

$$(x+n)^2 . (y+n)^2 . (z+n)^2 = (a+n^2)(b+n^2)(c+n^2),$$

en trekkende aan beide zijden den vierkantswortel,

$$(x+n)(y+n)(z+n) = \pm \sqrt{(a+n^2)(b+n^2)(c+n^2)}.$$

Deelende nu deze vergelijking door de vergelijkingen (α), (β), en (γ), komt er

$$z + n = \pm \sqrt{\frac{(b+n^2)(c+n^2)}{a+n^2}}$$

$$y + n = \pm \sqrt{\frac{(a+n^2)(c+n^2)}{b+n^2}}$$

$$x + n = \pm \sqrt{\frac{(a+n^2)(b+n^2)}{c+n^2}},$$

en wij hebben, bij gevolg, voor de gevraagde getallen,

$$x = -n \pm \sqrt{\frac{(a+n^2)(b+n^2)}{c+n^2}}$$

$$y = -n \pm \sqrt{\frac{(a+n^2)(c+n^2)}{b+n^2}}$$

$$z = -n \pm \sqrt{\frac{(b+n^2)(c+n^2)}{a+n^2}}.$$

Voorbeeld. Zij gegeven $a = 14$, $b = 19$, $c = 26$ en $n = 4$, dan vindt men de twee volgende antwoorden:

Eerste antwoord $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$

Tweede antwoord $x = -9$; $y = -10$; $z = -11$

waarvan het tweede, zoo wel als het eerste, aan de drie vergelijkingen beantwoordt.

LXIV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

De vergelijkingen $x^6 - x^3y = y(x-y)$; $x^3 + y^3 = xy + x^2y^2$ *en* $x^2(x^3 + x^2 + yz + y) = x(x - z^3)$ *op te lossen?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

De tweede vergelijking geeft $x^2 - 2xy + y^2 = z^4$, waaruit $x - y = \pm z^2$, en hierdoor wordt de eerste vergelijking $z^2(z^4 - y) = \pm yz^2$ of $z^4 - y = \pm y$.

Nemende nu het bovenste teeken, zoo verkrijgen wij $z^4 = 2y$ of $y = \frac{1}{2}z^4$, en $x = y + z^2 = \frac{1}{2}z^4 + z^2$, door welke waarden in de derde vergelijking te substitueren, gevonden wordt

$$z^2(z^3 + z^2 + \tfrac{1}{2}z^5 + \tfrac{1}{2}z^4) = (\tfrac{1}{2}z^4 + z^2)(\tfrac{1}{2}z^4 + z^2 - z^2),$$

of door z^4 deelende,

$$z + 1 + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}z^2 = (\tfrac{1}{2}z^2 + 1)(\tfrac{1}{2}z^2 + 1 - z),$$

hetgeen gemakkelijk herleid worde tot

$$z^3 - 4z^2 + 2z - 8 = 0,$$

en hieruit vindt men voor z deze drie waarden:

1°. $z = 4$; 2°. $z = +\sqrt{-2}$; 3°. $z = -\sqrt{-2}$,

hetgeen ons de drie volgende antwoorden voor het voorstel oplevert:

Eerste antwoord $x = 144$; $y = 128$; $z = 4$;

Tweede antwoord $x = 0$; $y = 2$; $z = \sqrt{-2}$;

Derde antwoord $x = 0$; $y = 2$; $z = -\sqrt{-2}$

Doch nemende in $x - y = \pm z^2$ en $z^4 - y = \pm y$ het benedenste teeken, wordt $z^4 = 0$, en $z = 0$, dus $x = y$; en substituerende dit in de derde vergelijking, komt er $x = y = 0$; zoodat er nog een vierde antwoord bestaat, waarin al de getallen gelijk nul zijn.

LXV. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

Als zes personen in $5\frac{1}{3}$ *dag, een werk aannemen te maken, waarvoor zij de winst van* f 850:10:- *in* $15\frac{1}{3}$ *maand zullen genieten; hoe lang zullen dan tien personen moeten werken, om de winst van* f 1917:15:$14\frac{2}{11}$ *in* $6\frac{4}{9}$ *maanden, tegen een' interest, welke* $2\frac{1}{2}$ *maal zoo groot is, te genieten?*

OPLOSSING. Door C. J. VAN BRUSSEL, R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

De winsten zijn klaarblijkelijk in reden als het volbragte werk; doch de winst is in zamengestelde reden van kapitaal, tijd en interest, en het volbragte werk in zamengestelde reden van arbeiders en tijden; waaruit dan volgt, dat de producten van kapitaal, tijd en interest evenredig moeten zijn met de producten van arbeiders en tijden; en wij hebben alzoo deze evenredigheid:

$850\frac{1}{3}$

$$850\tfrac{1}{2} \times 1 \times 15\tfrac{7}{8} : 1917\tfrac{87}{144} \times 2\tfrac{1}{2} \times 6\tfrac{4}{5} = 6 \times 5\tfrac{1}{8} : 10 \times x$$

$$\text{of } 567 \times 23 : \frac{65205}{2} = 32 : 10x$$

www.libtool.com.cn

$$\text{dus } x = \frac{32 \cdot 65205}{2 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 567} = 8 \text{ dagen.}$$

LXVI. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

Er is eene arithmetiſche reeks van $n + 7$ termen, doende de ſom der n eerſte termen 40, de ſom der vier volgende termen 86 en de ſom der drie laatſte termen 96; vrage naar deze reeks? (18)

OPLOSSING. Door C. J. VAN BRUSSEL, R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

Stel den eerſten term x en de reden y; dan is de n^e term $x + (n - 1)\,y$; de $(n + 4)^e$ term $x + (n + 3)\,y$; en de $(n + 7)^e$ term $x + (n + 6)\,y$; zoo dat, volgens den regel voor de ſommering der arithmetiſche reekſen,

de ſom der n eerſte termen $\frac{1}{2}\,n\,(2x + (n - 1)\,y)$ of $nx + \frac{1}{2}\,n\,(n - 1)\,y = 40$;

de ſom der vier volgende termen $2((x+ny) + x + (x+3)y)$ of $4x + (4n + 6)\,y = 86$;

de ſom der drie laatſte termen $\frac{3}{2}\,(x + (n + 4)\,y) + \frac{1}{2}\,(x + (n + 6)\,y)$ of $3x + (3n + 15)\,y = 96$.

De derde met 4, en de tweede met 3 vermenigvuldigd, komt

$$12x + (12n + 60)\,y = 384$$

$$\text{en } 12x + (12n + 18)\,y = 258,$$

waarvan het verſchil is $42y = 126$ of $y = 3$.

Brengende deze waarde van y in de tweede, dan verkrijgen wij $4x + 12n + 18 = 86$ of $x = 17 - 3n$, en brengende de waarden van y en x in de eerſte vergelijking, dan wordt dezelve

$$n\,(17 - 3n) + \frac{3n\,(n - 1)}{2} = 40;$$

welke vergelijking opgelost zijnde, geeft $n = 5$; hierdoor is $n + 7 = 12$ het getal der termen; $x = 17 - 3n = 2$ de eerſte term; en daar wij voor de opklimming gevonden hebben $y = 3$, zoo is de reeks, 2.5.8.11.14.17.20.23.26.29.32.35.

LXVII.

(18) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 178. N°. 22.

LXVII. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

www.libtool.com.cn

Drie getallen te vinden, waarvan de som der cuben deelbaar is door de som der getallen? (19)

OPLOSSING. Door C. J. VAN BRUSSEL.

Stel de getallen x, y en z; dan moet $x^3 + y^3 + z^3$ deelbaar zijn door $x + y + z$. Stel de uitkomst der deeling a; dan is $x^3 + y^3 + z^3 = a(x + y + z)$. Stel verder $x = pv$, $y = qv$ en $z = rv$; dan wordt de vergelijking $(p^3 + q^3 + r^3)v^3 = a(p + q + r)v$, of door v deelende, $(p^3 + q^3 + r^3)v^2 = a(p + q + r)$. Nemende dan $v^2 = p + q + r$ wordt $a = p^3 + q^3 + r^3$ een geheel getal.

Nu moet $p + q + r$ een quadraat zijn. Stel te dien einde $p = m^2$, $q = 2mn$ en $r = n^2$; dan is $v = m + n$ en dus zijn de getallen $x = pv = m^2(m + n)$; $y = qv = 2mn(m + n)$ en $z = rv = n^2(m + n)$, waarin m en n naar welgevallen kunnen genomen worden.

Voorbeelden. Neem $m = 1$ en $n = 2$; dan is $x = 3$, $y = 12$ en $z = 12$.

Neem $m = 2$ en $n = 3$; dan is $x = 20$, $y = 60$ en $z = 45$ *enz.*

Anders. Door R. LOBATTO.

Stel voor de getallen Ax, Ay en Az; dan moet $\frac{A^2(x^3+y^3+z^3)}{A(x+y+z)}$ of $\frac{A^2(x^3+y^3+z^3)}{(x+y+z)}$ een geheel getal zijn, waaraan voldaan wordt door $A = x + y + z$ te nemen, en hierdoor worden de getallen

$$x(x+y+z);\ y(x+y+z) \text{ en } z(x+y+z).$$

Voorbeeld. Laat $x = 1$, $y = 2$ en $z = 3$ zijn; dan zijn de getallen 6 . 12 en 18 . *enz.*

Nog anders. Door R. LOBATTO.

Men stelle voor de getallen x, xy en xz; dan moet $\frac{x^2(1+y^3+z^3)}{1+y+z}$ een geheel getal zijn, en hieraan wordt voldaan door $x^2 = p(1 + y + z)$ te nemen, waardoor wij hebben

$z =$

(19) O. S. BANGMA, *Algebra*, pag. 272 N°. 27.

$z = \frac{x^2 - py - p}{p}$; x moet dus door p deelbaar zijn, en ſtellende alzoo $x = pv$, komt $z = pv^2 - p - 1$, waardoor de getallen $x = pv$; $xy = pvy$ en $xz = pv(pv^2 - y - 1)$ waarin p, v en y naar welgevallen kunnen genomen worden.

Voorbeeld. $p = 1$, $v = 3$ en $y = 3$, geeft de getallen 3 . 9 . 15;

www.libtool.com.cn

LXVIII. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

Er is eene arithmetiſche progres van vijf termen, waarvan de quadraten der termen te zamen doen 1440, *en de cuben te zamen* 28160; *vrage naar deze progres?* (20)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO, C. J. VAN BRUSSEL en A. VAN DER SWAN.

Stel voor de progres $x - 2y$, $x - y$, x, $x + y$ en $x + 2y$; dan is de ſom der quadraten $5x^2 + 10y^2 = 1440$, en die der cuben $5x^3 + 30xy^2 = 28160$. Deelende deze beide vergelijkingen door 5, bekomt men

$$x^2 + 2y^2 = 288 \text{ en } x^3 + 6xy^2 = 5632.$$

Multipliceer de eerſte met $3x$ en trek er vervolgens de tweede van af, dan blijft er $2x^3 = 864x - 5632$ of $x^3 - 432x + 2816 = 0$; en ſtellende $x = 4z$, komt $z^3 - 27z + 44 = 0$, waaruit $z = 4$, dus $x = 16$ en bij gevolg $y^2 = \frac{1}{2}(288 - x^2) = 16$, zoodat $y = 4$, waardoor de progres 8 . 12 . 16 . 20 . 24.

LXIX. VOORSTEL.

Door C. J. VAN BRUSSEL.

Men vraagt de waarde van x, y, z *en* u, *uit de volgende vergelijkingen?* (21).

$$383(x + y^2 + yz^2 + yzu^2) = 1698(xyzu - 1);$$
$$383(y + z^2 + zu^2 + zux^2) = 616(xyzu - 1);$$
$$383(z + u^2 + ux^2 + uxy^2) = 358(xyzu - 1);$$
$$383(u + x^2 + xy^2 + xyz^2) = 332(xyzu - 1).$$

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, C. J. VAN BRUSSEL, R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

Laten de vergelijkingen algemeen worden voorgeſteld door

(20) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 275, N°. 30.
(21) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 88. N°. 25.

$$n\,(x + y^2 + yz^2 + yzu^2) = a\,(xyzu - 1);$$
$$n\,(y + z^2 + zu^2 + zux^2) = b\,(xyzu - 1);$$
$$n\,(z + u^2 + ux^2 + uxy^2) = c\,(xyzu - 1);$$
$$n\,(u + x^2 + xy^2 + xyz^2) = d\,(xyzu - 1).$$

www.libtool.com.cn

De tweede met y vermenigvuldigd en van de eerſte afgetrokken, rest

$$nx\,(1 - xyzu) = (a - by)\,(xyzu - 1).$$

De derde z maal genomen en van de tweede afgetrokken, blijft er

$$ny\,(1 - xyzu) = (b - cz)\,(xyzu - 1).$$

De vierde u maal afgetrokken van de derde, geeft tot reſt

$$nz\,(1 - xyzu) = (c - du)\,(xyzu - 1).$$

En het verſchil tuſſchen de vierde en x maal de eerſte is

$$nu\,(1 - xyzu) = (d - ax)\,(xyzu - 1)$$

De vier laatſte vergelijkingen kunnen aldus geſchreven worden:

$$\left.\begin{aligned}(nx - by + a)\,(xyzu - 1) &= 0\\ (ny - cz + b)\,(xyzu - 1) &= 0\\ (nz - du + c)\,(xyzu - 1) &= 0\\ (nu - ax + d)\,(xyzu - 1) &= 0\end{aligned}\right\}\ (a)$$

welke, alle door $xyzu - 1$ gedeeld zijnde, geven $-nx + by = a$; $-ny + cz = b$; $-nz + du = c$; $-nu + ax = d$, uit welke vier eerſte magts-vergelijkingen, door de bekende regels gevonden wordt

$$x = \frac{an^3 + b^2n^2 + bc^2n + bcd^2}{abcd - n^4};$$
$$y = \frac{bn^3 + c^2n^2 + cd^2n + cda^2}{abcd - n^4};$$
$$z = \frac{cn^3 + d^2n^2 + da^2n + dab^2}{abcd - n^4};$$
$$u = \frac{dn^3 + a^2n^2 + ab^2n + abc^2}{abcd - n^4};$$

voor de begeerde getallen.

Opmerkelijk is de overeenkomst, welke de gevondene waarden met den vorm van de gegevene vergelijkingen hebben, en deze overeenkomst wordt nog ſprekender, wanneer wij in dezelve $n = 1$ ſtellen.

Nemen wij nu $n = 383$; $a = 1698$; $b = 616$; $c = 358$ en $d = 332$, dan wordt $x = 2$; $y = 4$; $z = 6$ en $u = 8$.

Aanmerking. Aan de vier vergelijkingen (a) wordt terſtond vol-

voldaan, door $xyzu - 1 = 0$ of $xyzu = 1$ te ſtellen. De vergelijkingen worden dan

$$x + y^2 + yz^2 + yzu^2 = 0 \qquad y + z^2 + zu^2 + zux^2 = 0$$
$$z + u^2 + ux^2 + uxy^2 = 0 \qquad u + x^2 + xy^2 + xyz^2 = 0$$

Doch deze zijn niet meer onafhankelijk van elkander; want uit de eerſte en $xyzu = 1$, worden de andere gemakkelijk afgeleid, even zoo als wij zulks in de aanmerking op het 50e voorſtel toonden. Wij hebben dus ſlechts de vergelijkingen $xyzu = 1$ en $x + y^2 + yz^2 + yzu^2 = 0$. Uit de eerſte is $x = \frac{1}{yzu}$ en hierdoor wordt de andere, na herleiding,

$$y^3 + z(z + u^2)y^2 + \frac{1}{zu} = 0.$$

Nemende dan z en u naar welgevallen, zullen wij altoos eene waarde voor y vinden, daar eene derde magtsvergelijking altoos ten minſte een' beſtaanbaren wortel heeft. Er beſtaat dus nog een oneindig getal antwoorden, waarbij $xyzu = 1$ is.

LXX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Vier punten, A, B, C en D (Fig. 47) gegeven zijnde, begeert men door ieder van dezelve eene regte lijn te trekken, zoodanig, dat door deze vier lijnen, een vierhoek PQRS gevormd worde, gelijkvormig met eenen gegevenen vierhoek pqrs?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Het 172e VOORSTEL. *Deel* II *der Verzameling van Voorſtellen*, ſlechts een bijzonder geval zijnde van het hier opgegevene, en de oplosſing, die wij aldaar van het eerſte gegeven hebben, gemakkelijk op het andere kunnende toegepast worden, zoo veronderſtellen wij, dat men, bij deze oplosſing, die van gezegde 172e voorſtel doorloopen hebben.

Laten dan (*Fig.* 47) A, B, C en D de gegevene punten, *pqrs* de gegevene vierhoek en PQRS de gevraagde vierhoek zijn; dan moeten de hoeken P, Q en R, in cirkel-ſegmenten liggen op AB, AD en BC beſchreven, en die de gegevene hoeken p, q en r bevatten; en wanneer dit plaats heeft, zal ook de hoek S gelijk den hoek s zijn, omdat, in iederen vierhoek de ſom der hoeken, gelijk vier regte hoeken is. Doch tot de gelijkvormigheid der vierhoeken wordt daarenboven nog vereischt,

dat PR : PQ = *pr* : *pq* zij. Wanneer dan gezegde cirkel-segmenten op AB, AD en BC beschreven zijn, komt het voorstel hierop neder: *door de punten A en B, de lijnen PR en PQ zoodanig te construeren, dat PR : PQ = pr : pq, of wel, in gegeven reden zij?*

www.libool.com.cn

Onderstellende nu, dat PR en PQ de gevraagde lijnen zijn, en trekkende P′R′ en P′Q′ zoodanig door A en B, dat ook P′R′ : P′Q′ = PR : PQ = *pr* : *pq* zij, en vereenigende het punt V, waarin de cirkels op AB en BC elkander snijden, met de punten Q, Q′, A, P, P′, B, R en R′, dan is ∠ BR′V = ∠ BRV en ∠ BP′V = ∠ BPV, omdat zij in dezelfde segmenten liggen; de driehoeken P′R′V en PRV zijn dus gelijkvormig, waaruit VP : VP′ = PR : P′R; maar PR : P′R′ = PQ : P′Q′, dus VP : VP′ = PQ : P′Q′; en daar bovendien de hoeken VPQ en VP′Q′, als in hetzelfde segment liggende, even groot zijn, is driehoek VPQ gelijkvormig met driehoek VP′Q′, en dus ∠ AQ′V = ∠ AQV; hieruit dan volgt dat de meetkundige plaats van het punt Q′ een cirkel is, welke door de bekende punten A en V gaat; de snijding Q van dezen cirkel met den cirkel, of het cirkel-segment op AC, zal dus de hoek Q van den gevraagden vierhoek zijn; en hierdoor hebben wij, voor ons voorstel, de volgende eenvoudige Constructie:

1°. Laten de punten A, B, C en D, door achtervolgende lijnen, DA, AB en BC, vereenigd worden, en op deze lijnen cirkel-segmenten beschreven worden, welke drie der hoeken *p*, *q* en *r* van den gegevenen vierhoek bevatten, snijdende de cirkels op AB en BC elkander in V.

2°. Trek door B de lijn P′R′ naar welgevallen, snijdende de cirkel-segmenten op AB en BC in P′ en R′, en trek door P′ en A de lijn P′Q′, zoodanig dat P′R′ : P′Q′ = *pr* : *pq* is.

3°. Beschrijf door de punten A, V en Q eenen cirkel, snijdende het segment op AD in Q; wanneer dan getrokken wordt de lijn QP door Q en A, de lijn PR door P en B, de lijn RS door R en C en de lijn QS door Q en D, zullen deze lijnen den begeerden vierhoek vormen.

1e. Aanmerking. — Deze oplossing geeft altoos één, doch nooit meer dan één antwoord, omdat de gevonden cirkel door A gaande, dat een punt van den cirkel op AD is, dien cirkel in een

een ander punt moet, maar in niet meer dan één ander punt kan snijden. Verder moeten wij opmerken, dat de cirkel-segmenten alle naar den zelfden kant der lijnen DA, AB en BC moeten beschreven worden, dat is, alle buitenwaarts, zoo als in *Fig.* 47, óf alle binnenwaarts, over welk geval wij nader spreken zullen; want worden deze cirkel-segmenten niet alle naar den zelfden kant beschreven, dan worden sommige der hoeken van den vierhoek PQRS, de supplementen van de hoeken des vierhoeks *pqrs*, en de vierhoeken zijn alsdan niet meer gelijkvormig.

2°. AANMERKING. Wanneer het middelpunt M van de constructie-cirkel op het middelpunt U van den cirkel op AD valt, dan liggen deze cirkels, omdat zij bovendien het punt A gemeen hebben, geheel op elkander. Ieder punt van den cirkel op AD kan dus, in dit geval, voor het punt Q genomen worden, en het voorstel heeft bij gevolg alsdan oneindig vele antwoorden.

3°. AANMERKING. Het cirkel-segment, dat den hoek *p* bevat, op AB beschreven blijvende, kunnen wij de segmenten, op AD en BC beschreven, doen verwisselen, dat is, wij kunnen het segment, dat den hoek *q* bevat, op BC, en het segment, dat den hoek *r* bevat, op AD beschrijven; en dit geeft een tweede antwoord. Daar wij nu op AD een cirkel-segment mogen stellen, dat zoowel een der hoeken *q*, *r* of *s*, als den hoek *p* bevat, en in ieder van die gevallen de andere segmenten kunnen verwisselen, verschaft ons deze aanmerking reeds 4 × 2, en dus 8 verschillende antwoorden voor ons voorstel.

4°. AANMERKING. Wij hebben de vier gegevene punten A, B, C en D, zoodanig door de lijnen DA, AB en BC vereenigd, dat er, de vierde lijn DC trekkende, een vierhoek zou ontstaan. Doch in het 172°. voorstel van het Tweede Deel der Verzameling van Voorstellen, hebben wij reeds opgemerkt, dat de vier gegevene punten op drie onderscheidene wijzen tot eenen vierhoek kunnen vereenigd worden, en hebben zulks aldaar in *Fig.* 155, 156 en 157 aangewezen. Nu geeft ons de vorige aanmerking, voor ieder van die drie combinatien, 8 antwoorden, en dit doet het getal van antwoorden op ons vraagstuk reeds tot 3 × 8, of 24 opklimmen.

5°. AANMERKING. Er zijn ondertusschen nog meer antwoorden mogelijk; want stellende (*Fig.* 48) al de cirkel-segmenten aan de an-

andere zijde der lijnen AD, AB en BC, en dus binnenwaarts, en nemende P′Q′ insgelijks aan de andere zijde van het punt P′, dat is, in het verlengde van AP′, en wel zoodanig dat R′P′ : P′Q′ = *rp* : *pq* is, dan zullen wij, door A, V en Q′ een cirkel beſchrijvende, een punt Q vinden, dat eene geheel andere oplosſing geeft, en waarop alles, wat wij in onze oplosſing voor *Fig.* 47 gezegd hebben, even toepaſſelijk is.

Daar hier nu wederom dezelfde verwisſelingen en combinatien plaats hebben, waarvan wij in de derde en vierde aanmerkingen ſpraken, geeft dit nogmaals 24 oplosſingen, en hieruit blijkt, dat ons voorſtel, in het algemeen genomen, voor 48 verſchillende antwoorden vatbaar is.

6e. AANMERKING. Dit getal van antwoorden wordt ondertuſſchen gewijzigd, door de verſchillende omſtandigheden; want de gegevens kunnen zoodanig zijn, dat, of verſcheidene dezer antwoorden met elkander overeenſtemmen, of wel juist omgekeerd, dat er een oneindig aantal antwoorden beſtaat, zoo als ons reeds in de tweede aanmerking gebleken is. Is, bij voorbeeld, de gegevene vierhoek een quadraat, dan is het klaar, dat de acht vierhoeken, waarvan wij in de derde aanmerking ſpraken, alle op elkander zullen vallen, en dus het zelfde quadraat zullen te voorſchijn brengen. Ons gevonden getal van antwoorden moet alzoo in dit geval door 8 gedeeld worden, en vermindert dus tot op 6; zijnde dit juist het zelfde getal van antwoorden, dat wij in meergemeld 172e. voorſtel, voor dit bijzonder geval gevonden hebben.

7e. AANMERKING Wanneer er, op dezelfde wijze, vijf of meer punten gegeven zijn, met eenen veelhoek van evenveel zijden, kunnen wij, door eene gelijkſoortige conſtructie, door deze punten lijnen trekken, welke eenen veelhoek vormen, die aan den gegevenen veelhoek gelijkhoekig is; maar het ſtaat dan niet meer aan ons, om dezen veelhoek gelijkvormig aan den gegevenen te maken; want het blijkt uit onze conſtructie, dat wij ſlechts twee der zijden van den gezochten veelhoek evenredig zullen kunnen maken met twee overeenkomende zijden van den gegevenen veelhoek, en dat de andere zijden, dan alle door de cirkel-ſegmenten bepaald zijnde, ons geene vrijheid meer overlaten, om aan de overige evenredigheden, welke de gelijkvormigheid zou vereiſchen,

schen, te voldoen; ten zij er bij toeval eenige bijzondere betrekking tusschen de gegevens plaats hadde, welke dit mogelijk maakte. Het voorstel, om door n gegevene punten, n lijnen te trekken, welke een n-hoek vormen, die met een' gegevenen n-hoek gelijkhoekig is, kan dus altoos worden opgelost; maar voor de gelijkvormigheid met eenen gegevenen n-hoek, zou er eene bijzondere betrekking tusschen de gegevens moeten bestaan, om de oplossing mogelijk te maken.

www.tiprool.com.cn

LXXI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer een regte kegel zoodanig door een plat vlak gesneden wordt, dat er op de oppervlakte eene Ellips ontstaat, vraagt men de vergelijking, en den loop van de kromme lijn te bepalen, waarin deze Ellips zal overgaan, wanneer de oppervlakte van den kegel tot een plat vlak ontwonden wordt?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Laat *Fig.* 49 den kegel met deszelfs Elliptische doorsnede voorstellen, van welke Ellips B en D de uiteinden der groote as zijn, en laat *Fig.* 50 de ontwinding van het oppervlak zijn, zoodanig dat de hoek $P'A'P''$ de ontwinding van éénmaal die oppervlakte is, en de lijnen $A'P'$ en $A'P''$ van *Fig.* 50 alzoo de lijn AP van *Fig.* 49 voorstellen: dan zal de lijn $A'I'$, die den hoek $P'A'P''$ midden door deelt, de lijn AI van *Fig.* 49 zijn; $A'B' = AB$ en $A'D' = A'D'' = AD$ nemende, zal B' het punt B, en D' en D'' zullen bij de ontwinding het punt D van *Fig.* 49 zijn, en de kromme $D'BD''$ zal de ontwinding verbeelden van éénmaal den omtrek van de Ellips.

Omdat nu de oppervlakte van den kegel kan begrepen worden, als oneindig veel malen over zich zelve henen gerold te zijn, zal derzelver ontwinding niet uit den enkelen hoek $P'A''P''$ bestaan; maar er zullen in die ontwinding oneindig veel zulke hoeken, als $P'A'P''$; $P'A'P'''$; $P''A'P'''$ enz. naast elkander liggen, welke alle aan elkander gelijk zullen zijn, en ieder eenen gelijken en gelijkvormigen tak van de kromme zullen bevatten.

Heeft dus de ontwondene hoek $P'A'P''$ eene meetbare betrekking tot vier regte hoeken, dan zal eene der lijnen $A'P'''$ eens wederom op de eerste $A'P'$ moeten vallen, en de kromme zal een eindig aantal takken hebben, en in zich zelve wederkeeren, om-

omdat al de volgende takken op voorgaande takken zullen vallen; doch wanneer de betrekking van hoek $P'A'P''$ tot vier regte hoeken, onmeetbaar is, dan kunnen er van de lijnen $A'P'$, $A'P''$ enz. nimmer twee op elkander vallen; het aantal takken van de kromme is dus in dit geval oneindig, en zij keert niet in zich zelve weder, dan na een oneindig aantal omwentelingen om het punt A' te hebben volbragt.

www.libtool.com.cn

Stellen wij nu, in *Fig.* 49, $AB = a$, $AD = b$; $\angle PAI = 2\alpha$, en nemen wij $AI = AI''$ voor eenheid aan; dan zal de *Boog* $P''I'P'$ gelijk zijn aan den omtrek PKIP van de bazis des kegels, en wij vinden dus de waarde van $\angle P''A'P'$ aldus: $AP = AI = 1$ en $\angle PAO = \alpha$, dus $PO = OI = Sin.\ \alpha$, en bij gevolg

$\angle P'A'P'' = Boog\ P''I'P' = Omtrek\ PKIP = 2\pi . Sin.\alpha$ ...(1).

en $\angle P'A'I' = \angle I'A'P'' = \frac{1}{2} \angle P'A'P'' = \pi\ Sin.\alpha$ ...(2).

De kromme beſtaat dus uit een eindig getal takken, indien $2\pi\ Sin.\alpha$ eene meetbare reden tot 2π heeft, dat is, wanneer $Sin.\ \alpha$ eene rationale breuk is; doch is $Sin.\alpha$ irrationaal, dan is het aantal der takken oneindig groot.

Is dus $Sin.\ \alpha = \frac{m}{n}$ eene rationale breuk, dan zal de kromme n takken hebben, en zij zal in zich zelve wederkeeren, na m omwentelingen om het punt A' te hebben gedaan. Stellen wij, bij voorbeeld, den hoek PAI van den kegel gelijk 60°; dan is $\alpha = 30°$ en $Sin.\ \alpha = \frac{1}{2}$. De kromme heeft dus in dit geval twee takken, welke te zamen ééne omwenteling om A' volbrengen. (Zie *Fig.* 51.) Stellen wij verder $Sin.\ \alpha = \frac{2}{7}$, dan heeft de kromme zeven takken, en zij doet twee omwentelingen om het punt A. (zie *Fig.* 52.)

Laat nu BD midden door gedeeld zijn in R; dan is R het middelpunt van de Ellips. Indien dan door R en door eenig willekeurig punt E, in de groote as, vlakken evenwijdig aan de bazis onderſteld worden, en wij de groote as $BD = 2m$, de kleine as $UU' = 2n$, de abscis $BE = x$ en de ordinaat $EF = y$ ſtellen, hebben wij, door de bekende eigenſchap van de Ellips,

$$y^2 = \frac{n^2}{m^2}(2mx - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

De halve aſſen m en n kunnen wij gemakkelijk in onze gege-

vens

vens a, b en α uitdrukken; want daar RS $= \frac{1}{2}$ BC $= a \; Sin. \; \alpha$ en RT $= \frac{1}{2}$ DQ $= b \; Sin. \; \alpha$ is, zoo is, daar verder RU $=$ V RS $\times$ RT is

$$z = \sqrt{ab} \; Sin^2. \; \alpha = Sin. \; \alpha \sqrt{ab}; \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

www.libtool.com.cn

en om m te vinden, hebben wij $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AB \times AD \times Cos. \; 2\alpha$ of

$$\begin{aligned} 4m^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \; . \; Cos. \; 2\alpha \\ &= (a - b)^2 + 2ab \; (1 - Cos. \; 2\alpha) \\ &= (a - b)^2 + 4ab \; Sin^2. \; \alpha \end{aligned}$$

en bij gevolg

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{(a-b)^2 + 4ab \; . \; Sin^2. \; \alpha\}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{(a-b)^2 + 4n^2\}} \; (5).$$

Laat ons nu de polaire vergelijking van onze kromme trachten te bepalen. Stellen wij, te dien einde, dat de lijn A′K′ van *Fig.* 30, AK van *Fig.* 49 zij, en stellen wij verder $\angle$ A′K′ $=$ *Boog* K′I′ $=$ *Boog* KI $= \Phi$ en A′F′ $=$ AF $=$ AG $= z$; dan hebben wij BD : BQ $=$ BE : BI, of $2m : b - a = x : BG$, dus $BG = \frac{(b-a)x}{2m}$; en daar AG $=$ AB $+$ BG is, zoo is $z = a + \frac{(b-a)x}{2m}$, waaruit wij trekken $x = \frac{2m(z-a)}{b-a}$.

Verder is AI : AG $=$ *Boog* IK : *Boog* FG, dat is, $1 : z = \Phi$: *Boog* FG, dus *Boog* FG $= z\Phi$. Laat nu HG verlengd worden, tot HL $=$ AI $= 1$ zij, en uit H, met HL als radius, een cirkelboog beſchreven worden, zoo dan door F de radius HFM en verder MN loodregt op HL of evenwijdig met FE getrokken wordt, dan is IIG : HL $=$ *Boog* FG : *Boog* ML, of $z \; Sin. \; \alpha : 1 = z\Phi$: *Boog* ML, waaruit *Boog* ML $= \frac{\Phi}{Sin. \; \alpha}$ en MN $= Sin. \; Boog \; . \; ML = Sin. \frac{\Phi}{Sin. \; \alpha}$. Daar nu MN : EF $=$ HM : HF $=$ HL : HG is, hebben wij, voor deze lijnen hare gevondene waarden ſtellende, $Sin. \frac{\alpha}{Sin. \; \alpha} : y = 1 : z \; Sin. \; \alpha$ waaruit $y = z \; Sin. \; \alpha \; . \; Sin. \frac{\alpha}{Sin. \; \alpha}$.

Wij hebben dan gevonden $x = \frac{2m(z-a)}{b-a}$ en $y = z \; Sin. \; \alpha \; . \; Sin. \frac{\Phi}{Sin. \; \alpha}$. Deze waarden overbrengende in de vergelij-

lijking (3), dat is in $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(2mx - x^2)$, verkrijgen wij

$$z^2 . Sin^2.a . Sin^2.\frac{\phi}{Sin.a} = \frac{n^2}{m^2}.\frac{2m(z-a)}{b-a}\left(2m - \frac{2m(z-a)}{b-a}\right)$$

of $z^2 . Sin^2.a . Sin^2.\frac{\phi}{Sin.a} = \frac{4n^2}{(b-a)^2}.(z-a)(b-z)$

of wel, omdat uit (4), $4n^2 = 4ab . Sin^2.a$ is

$$z^2 . Sin^2.a . Sin^2.\frac{\phi}{Sin.a} = \frac{4ab . Sin^2.a}{(b-a)^2}(z-a)(b-z)$$

of, eindelijk,

$$(b-a)^2 . z^2 . Sin^2.\frac{\phi}{Sin.a} = 4ab(z-a)(b-z) \ldots (6).$$

en dit is de polaire vergelijking van onze kromme, daar zij eene betrekking tusschen z en ϕ, dat is, tusschen $A'F'$ en den hoek $F'A'B'$ aanduidt.

Uit deze vergelijking laat zich, zonder veel moeite, ϕ in z, of wel z in ϕ uitdrukken; want om ϕ af te zonderen, hebben wij terstond

$$Sin^2.\frac{\phi}{Sin.a} = \frac{4ab(z-a)(b-z)}{(b-a)^2 z^2}$$

$$\text{of } Sin.\frac{\phi}{Sin.a} = \pm\frac{2\sqrt{ab}(z-a)(b-z)}{(b-a)z},$$

waaruit gevonden wordt

$$\frac{\phi}{Sin.a} = \pm Boog . Sin.\frac{2\sqrt{ab}(z-a)(b-z)}{(b-a)z}$$

$$\text{of } \phi = \pm Sin.a \times Boog . Sin.\frac{2\sqrt{ab}(z-a)(b-z)}{(b-a)z} \ldots (A)$$

Om z omgekeerd in ϕ uit te drukken, hebben wij deze herleiding

$$(b-a)^2 z^2 . Sin^2.\frac{\phi}{Sin.a} = 4ab(-ab+(a+b)z-z^2), \text{ dus}$$

$$z^2\left\{(b-a)^2 . Sin^2.\frac{\phi}{Sin.a} + 4ab\right\} - 4ab(a+b)z = -4a^2b^2.$$

of, daar $Sin^2.X = 1 - Cos^2.X$ is

$$z^2\left\{(b+a)^2 - (b-a)^2 Cos^2.\frac{\phi}{Sin.x}\right\} - 4ab(a+b)z = -4a^2b^2,$$

dat is

$z^2 -$

$$z^2 - \frac{4ab\,(z+b)}{(b+a)^2-(b-a)^2.Cos^2.\frac{\Phi}{Sin.\alpha}}.z = -\frac{4a^2b^2}{(b+a)^2-(b-a)^2Cos^2.\frac{\Phi}{Sin.\alpha}}$$

www.libtool.com.cn

welke vierkantsvergelijking opgelost zijnde, geeft

$$z = \frac{2ab\left\{(a+b) \mp (b-a)\,Cos.\frac{\Phi}{Sin.\alpha}\right\}}{(b+a)^2 - (b-a)^2\,Cos^2.\frac{\Phi}{Sin.\alpha}}$$

of onder en boven door den gemeenen factor deelende,

$$z = \frac{2ab}{(b+a) \mp (b-a)\,Cos.\frac{\Phi}{Sin.\alpha}} \quad \ldots\ldots (B).$$

De vergelijking (A) bevestigt alles, wat wij, in den aanvang der oplosſing, van onze kromme gezegd hebben; want, omdat, in het algemeen, voor eene zelfde waarde van p, *Boog. Sin.* p oneindig vele waarden heeft, die alle 2π tot verſchil hebben; zoo heeft voor eene zelfde waarde van α, Φ oneindig vele waarden, welke alle 2π *Sin* α, dat is, den hoek $P'A'P'$, van elkander verſchillen; en daar Φ het dubbele teeken heeft, zoo is de kromme, ter wederzijde van de as $A'I'$, op dezelfde wijze gelegen. Verder toont die vergelijking aan, dat z niet grooter dan b, en niet kleiner dan a kan zijn, zonder dat Φ onbeſtaanbaar worde, en dat de kromme dus geheel beſloten is tuſſchen de cirkels met $A'B'$ en $A'D'$ als radien beſchreven; zijnde het eindelijk uit de beſchouwing des kegels duidelijk genoeg, dat de kromme in de punten B' en D', en in al de overeenkomſtige punten, loodregt op de polaire ordinaat ſtaat.

De vergelijking (B) geeft twee verſchillende waarden voor z, welke echter wederkeerig in elkander overgaan, door de ſtelling van $\Phi = \pi\ Sin.\alpha - \Phi'$, dat is, $\Phi = \angle\ P'A'I' - \Phi'$; hieruit volgt, dat, als de eene dient, wanneer de hoeken Φ van de as $A'I'$ gerekend worden, de andere zal moeten gebezigd worden, wanneer men de hoeken Φ van de as $A'P'$ rekent. Nu geeft de eerſte, namelijk,

$$z = \frac{2ab}{(b+a)+(b-a)\,Cos.\frac{\Phi}{Sin.\alpha}},$$

voor $\phi = 0$, is $z = a$, en voor $\phi = \pi$ Sin. ϕ, $z = b$, en deze behoort dus tot de as A'T'; terwijl de andere,

www.libtool.com.cn

$$z = \frac{2ab}{(b+a) - (b-a)\,Cos.\frac{\phi}{Sin.a}}$$

welke voor $\phi = 0$, geeft $z = b$, en voor $\phi = \pi\, Sin.\, a$; $z = a$, tot de as A'P' behoort.

Wanneer $b = a$ is, gaat de vergelijking (B) over in $z = a$, onafhankelijk van de waarde van ϕ, hetgeen aantoont, dat de kromme dan een cirkel is, uit A' als middelpunt, en met a als radius beschreven. Dit volgt ook gemakkelijk uit de beschouwing van den kegel zelven; want is $a = b$, dan wordt de Ellips een cirkel, en dus moet dan ook de ontwinding een cirkel zijn.

Wij kunnen ons hier in geen verder onderzoek wegens de eigenschappen van onze kromme inlaten, daar zulks het bestek van deze oplossing verre zou te buiten gaan. Bovendien is de loop der kromme, door de vergelijking en het reeds opgenoemde, genoegzaam bepaald. Alleen zullen wij, als voorbeeld, nog aanmerken, dat voor het geval van $Sin.a = \frac{1}{2}$ en dus $\angle$ R'A'P' $= 180^{\circ}$ (*Fig.* 51), de vergelijking (B) overgaat in

$$z = \frac{2ab}{(b+a)+(b-a)\,Cos.2\phi} = \frac{2ab}{(b+a)+(b-a)(1-2\,Sin^2.\phi)}$$
$$= \frac{ab}{b-(b-a)\,Sin^2.\phi}$$

zijnde voor deze vergelijking A'I' de as. Wanneer dan A'V $= u$ en F'V' $= v$ gesteld wordt, hebben wij $u = z\ Sin.\phi$ en $v = z\ Cos.\phi$, waardoor $z = \sqrt{(u^2 + v^2)}$ en $Tang.\phi = \frac{u}{v}$ en dus $Sin^2.\phi = \frac{u^2}{u^2+v^2}$. Substitueren wij dan deze waarden, komt er voor de vergelijking van de regtstandige coördinaten, in dit geval, na behoorlijke herleiding,

$$au^2 + b\,v^2 = ab\sqrt{(u^2+v^2)} \quad \ldots \quad (C)$$

en zoo wij dezelve ten opzigte van u of v oplossen, verkrijgen wij

$$v = \pm\sqrt{\frac{-a(2u^2-ab) \pm a\sqrt{(4b(b-a)u^2+a^2b^2)}}{2b}}$$

$$\text{en } u = \pm\sqrt{\frac{-b(2v^2-ab) \pm b\sqrt{(4a(a-b)v^2+a^2b^2)}}{2a}}$$

wij

Wij hebben *Fig.* 51 geconstrueerd in de onderstelling van $b = 2a$, en alsdan is de vergelijking

$$u = \pm \sqrt{\{2\sqrt{(a^2 - v^2)} \times (\sqrt{(a^2 - v^2)} \pm a)\}}$$

welke zeer gemakkelijk te construeren is.

Wij eindigen deze oplossing met aan te merken, dat $\alpha = 90°$ of $Sin.\alpha = 1$ zijnde, de vergelijking overgaat in

$$z = \frac{2ab}{(b + a) + (b - a)\,Cos.\phi}$$

hetgeen de polaire vergelijking van eene Ellips is, welke $a + b$ tot groote en $2\sqrt{ab}$ tot kleine as heeft: dit is ook gemakkelijk uit den kegel zelven af te leiden, om dat dezelve, in dit geval, in een plat vlak overgaande, door de ontwinding niet verandert.

LXXII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer een regte kegel zodanig door een plat vlak gesneden wordt, dat er op de oppervlakte eene parabool ontstaat, vraagt men hetzelfde als in het voorgaande voorstel?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Dit Voorstel kan als een bijzonder geval van het voorgaande worden beschouwd; want wanneer de groote as BD (*Fig.* 49) evenwijdig aan AP, en dus in de rigting B*d* loopt, gaat de Ellips over in eene parabool. In dit geval nu wordt $AD = b = \infty$, en wij behoeven dus in de formulen, die wij in het vorige voorstel gevonden hebben, alleen b oneindig te nemen, om dezelve op het tegenwoordige Voorstel toepaselijk te maken.

Wijl hier AD oneindig groot is, zijn ook A′D′, A′D″ enz. van *Fig.* 50 alle oneindig, terwijl A′B′, A′B″ enz. alle gelijk blijven. De kromme zal dus in ons geval uit losse onzamenhangende takken bestaan, welke ieder geheel binnen eenen der hoeken P′A′P″ gelegen zijn, waardoor dan *Fig.* 50 overgaat in *Fig.* 53. Deze hoeken P′A′P″ zijn wederom gelijk $2 \times Sin.\alpha$, en de kromme heeft dus ook hier, een eindig of oneindig aantal takken, naarmate $Sin.\alpha$ eene rationale of irrationale breuk is.

Om de vergelijking der polaire coördinaten van de kromme, dat is, de vergelijking tusschen A′F′ $= z$ en $\angle$ F′A′B′ $= \phi$, voor ons geval te vinden, moeten wij in de vergelijkingen (A) of (B) van het voorgaande Voorstel, $b = \infty$ stellen; wijl nu

door deze ſtelling $b - z = b - a = b$ wordt, gaat de vergelijking (A) hierdoor over in

www.libtool.com.cn

$$\phi = \pm Sin.a.Boog.Sin.\frac{2\sqrt{ab^2(z-a)}}{bz}$$

dat is, onder en boven door b deelende, in

$$\phi = \pm Sin.a.Boog.Sin.\frac{2\sqrt{a(z-a)}}{z} \quad \ldots\ldots (A')$$

doch de vergelijking (B) gaat, daar $b = \infty$, $b+a=b-a=b$ maakt, over in

$$z = \frac{2ab}{b \pm b\,Cos.\frac{\phi}{Sin.a}} = \frac{2a}{1 \pm Cos.\frac{\phi}{Sin.a}} \quad \ldots\ldots (B').$$

Daar nu $1 + Cos.p = 2\,Cos^2.\frac{1}{2}p$ en $1 - Cos.p = 2.Sin^2.\frac{1}{2}p$ is, hebben wij deze twee waarden voor z:

I°. $z = \frac{a}{Cos^2.\frac{\phi}{2\,Sin.a}}$ en II°. $z = \frac{a}{Sin^2.\frac{\phi}{2\,Sin.a}}$

de eerſte van welke, even zoo als wij reeds in het voorgaande Voorſtel hebben opgemerkt, tot de as $A'I'$ behoort, terwijl de andere moet gebruikt worden, wanneer men de hoeken ϕ van de as $A'P'$ wil rekenen; want het is ook hier de eerſte die voor $\phi = o$ geeft $z = a$ en voor $\phi = \pi\ Sin\ a$, $z = \infty$.

Men zou zich echter bedriegen, wanneer men, uit dit oneindig worden van z, voor $\phi = \pi\ Sin\ a$, zou willen opmaken, dat de lijnen $A'P'$, $A'P''$ *enz.* asymptoten van onze kromme zijn. Dit toont toch in het algemeen alleen aan, dat de kromme, voor die oneindige waarde van z, eene rigting heeft evenwijdig aan $A'P'$, en dat dus de asymptote, indien namelijk de kromme er eene heeft, evenwijdig aan $A'P'$ moet zijn. Om ons van het al of niet beſtaan van zulk eene asymptote te verzekeren, moeten wij de waarde van de loodlijn $F'V'$, voor deze oneindige waarde van z berekenen: is deze afſtand $F'V'$, voor die oneindige waarde van z eindig, dan heeft de kromme eene asymptote, die evenwijdig aan $A'P'$ is, en wel op eenen afſtand van $A'P'$ ligt, die gelijk is aan die eindige waarde van $F'V'$; doch is de waarde, die $F'V'$, door de ſtelling van $z = \infty$, verkrijgt, zelve oneindig groot, dan is er geene asymptote mogelijk.

Nu

Nu is $F'V' = A'F' . Sin . V'A'F' = z . Sin . (\pi Sin\ a - \phi)$ en brengende hierin de waarde van z, wordt zij

www.libtool.com.cn

$$F'V' = \frac{a . Sin . (\pi Sin . a - \phi)}{Cos^2 . \frac{\phi}{2 Sin . a}}.$$

Stellen wij hierin dan $z = \infty$, dat is, $\phi = \pi\ Sin . a$, verkrijgen wij $F'V' = \frac{0}{0}$; en om deze onbepaalde waarde nader te bepalen, differentieren wij teller en noemer van $F'V'$, en deelen door $\partial\phi$, waardoor wij verkrijgen

$$\frac{2a Sin . a . Cos . (\pi Sin . a - \phi)}{Sin . \frac{\phi}{Sin . a}}$$

en ſtellende hierin $\phi = \pi\ Sin . a$, dan zal er komen

$$\frac{2a . Sin . a}{Sin . \pi} = \frac{2a . Sin . a}{0} = \infty;$$

waaruit dan volgt, dat de kromme geene asymptoten, evenwijdig met $A'P'$ heeft; doch dat zij zich in tegendeel hoe langs hoe meer van $A'P'$ verwijdert, en op eenen oneindigen afſtand van $A'P'$ gekomen, evenwijdig aan dezelve wordt, en hierdoor achten wij den loop der kromme, welke men verder door middel van de vergelijking door punten conſtrueren kan, genoegzaam bepaald te hebben. Dezelve is in *Fig.* 53 afgebeeld, en daar het onderzoek naar de verdere eigenſchappen ons te ver zou afleiden, moeten wij zulks tot eene nadere gelegenheid beſparen.

Voor het geval van $a = 30°$ of $Sin . a = \frac{1}{2}$, heeft de kromme ſlechts twee takken, en neemt de gedaante van *Fig.* 54 aan. De polaire vergelijking is dan $z = \frac{a}{Cos^2 . \phi}$, en om de vergelijking der regtſtandige coördinaten te vinden, ſtellen wij in (C) van het voorgaande Voorſtel $b = \infty$, waardoor wij verkrijgen zullen $y^2 = a\sqrt{(u^2 + y^2)}$ en hieruit is $u = \frac{y}{a}\sqrt{(y^2 - a^2)}$, waarvan de conſtructie van zelve in het oog loopt.

Voor het geval van $Sin . a = \frac{2}{3}$, heeft de kromme zeven gelijke takken, en neemt ten naasten bij den vorm van *Fig.* 55 aan,

terwijl voor $\alpha = 90°$, de polaire vergelijking is $z = \frac{a}{Cos^2 . \frac{1}{2}\phi}$ hetgeen de polaire vergelijking van de parabool zelve is, omdat dan de geheele kegel in een plat vlak verandert.

www.libtool.com.cn

LXXIII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt hetzelfde, als in de twee voorgaande Voorſtellen gevraagd is, wanneer het vlak den kegel zoodanig ſnijdt, dat op deszelfs oppervlakte eene hyperbool geboren wordt?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT

Ook dit voorſtel kan als een bijzonder geval van het 71e. worden aangezien; want de Ellips van *Fig.* 49 gaat over in eene hyperbool, wanneer A het zelfde blijvende, D in plaats van op AP te vallen, op derzelver verlengde, bij voorbeeld, in d' ligt, en b is alzoo in dit geval negatief. Stellen wij dus in de formulen van het 71e Voorſtel, b negatief, dan zullen al die formulen op het tegenwoordige Voorſtel toepaſselijk worden.

Indien dan *Fig.* 56 de ontwinding van de oppervlakte des kegels in ons geval voorſtelt, zal het punt B′ van *Fig.* 50, waarbij $A'B' = AB = a$ is, op de lijn A′I′ blijven liggen; doch de punten D′ en D″ van *Fig.* 50, waarbij $A''D'' = A'D' = AD = b$ is, zullen hier op het verlengde van A′P′ en A″P″ vallen, en de kromme, door de ontwinding van éénmaal het oppervlak ontſtaan, zal dus voor een gedeelte in den hoek P′A′P″, en voor een gedeelte in den tegenovergeſtelden hoek $p'A'p''$ liggen. Deze hoek $P'A'P'' = p'A'p''$ blijft ondertusſchen altoos $= 2\pi Sin.\alpha$, en de kromme heeft dus altoos een eindig of oneindig aantal takken, naarmate $Sin.\alpha$ al of niet rationaal is. Hierbij moeten wij echter opmerken, dat alhier Z′B′Z″, s′D′ en s″D″ te zamen voor éénen tak moeten gehouden worden, die den tak D′B′D″ van *Fig.* 50 vertegenwoordigt, en wij hebben in *Fig.* 56, om geene verwarring te veroorzaken, ſlechts een' van deze takken aangewezen.

Door nu in de vergelijking (A) van het 71e Voorſtel, b negatief te nemen, verkrijgen wij voor de polaire vergelijking, waarbij ϕ in z is uitgedrukt,

$$\phi = \pm Sin.\alpha . Boog.Sin. \frac{2\sqrt{ab(z+b)(z-a)}}{(a+b)z} \quad . . (A'')$$

en

en door in de vergelijking (B), b negatief te nemen,

$$z = \frac{2ab}{(b-a) \mp (b+a)\,Cos.\frac{\Phi}{Sin.a}} \quad \ldots (B')$$

www.libtool.com.cn

van welke twee waarden van z, de eerste wederom dient, wanneer wij de hoeken Φ van de as A'I', doch de tweede, wanneer wij dezelve van de as A'P' aftekenen; want de eerste geeft voor $\Phi = o$, $z = a$ en voor $\Phi = \pi\ Sin.a$, $z = -b$.

Houden wij ons dan bij de eerste waarde van z, namelijk, $z = \frac{2ab}{(b-a)+(b+a)\,Cos.\frac{\Phi}{Sin.a}}$, dan blijkt het terstond, dat z oneindig wordt, wanneer $b-a = -(b+a)\,Cos.\frac{\Phi}{Sin.a}$ is, uit welke vergelijking volgt

$$\Phi = Sin.a.Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b}.$$

Wanneer dus W'A'w' zoodanig getrokken wordt, dat $\angle$ W'A'I' $=$ $Sin\ a \times Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b}$ is, dan zal, daar $\Phi < Sin.a.Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b}$, z positief, doch $\Phi > Sin.a \times Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b}$, z negatief maakt, het gedeelte Z'B'Z'' van de kromme geheel tusschen den hoek W'A'W'' liggen, terwijl de andere gedeelten z'D' en z''D'' tusschen de hoeken p'A'w' en p''A'w'' zullen gelegen zijn.

Door middel van de lijnen W'w' en W''w'' kunnen wij daarenboven gemakkelijk de asymptoten van onze kromme lijn bepalen; want trekkende, ingevolge van hetgene wij in de oplossing van het voorgaande voorstel, over dit onderwerp gezegd hebben, F'V' loodregt op W'w', dan is F'V' $= z.Sin.\angle$ W'A'F' $= z.Sin.(\angle$ W'A'I' $- \Phi) = z.Sin.\{Sin.a.Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b} - \Phi\}$; en brengende hierin de waarde van z over, dan komt er

$$F'V' = \frac{2ab.Sin.\{Sin.a.Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b} - \Phi\}}{(b-a)+(b+a)\,Cos.\frac{\Phi}{Sin.a}}.$$

Stellen wij nu hierin $z = \frac{0}{0}$, dat is, ſtellen wij $\phi = Sin.a \times Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b}$, dan gaat deze uitdrukking over in $\frac{0}{0}$, en differentieren wij, om deze waarde te bepalen, teller en noemer, dan verkrijgen wij, na door $\partial\phi$ gedeeld te hebben,

$$\frac{2ab.Sin.a \times Cos.(Sin.a.Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b} - \phi)}{(b+a)\ Sin.\frac{\phi}{Sin.a}}$$

en ſtellende hierin $\phi = Sin.a \times Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b}$, dan zal er komen

$$\frac{2ab.Sin.a\ Cos.o}{(b+a).Sin.\{Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b}\}} = \frac{2ab.Sin.a}{(b+a)\sqrt{(1-\frac{(b-a)^2}{(b+a)^2})}}$$

$$= \frac{2ab\,Sin.a}{\sqrt{\{(a+b)^2-(a-b)^2\}}} = \frac{2ab\,Sin.a}{2\sqrt{ab}} = Sin.a.\sqrt{ab}.$$

Trekkende dan $X'x'$ en $X''x''$, evenwijdig aan $W'w'$ en $W''w''$, en op eenen afſtand, gelijk aan $Sin.a\sqrt{ab}$, van dezelve, dat is, op eenen afſtand gelijk aan de halve kleine as van de hyperbool in den kegel (zie Voorſtel 71, vergelijking (4)), dan zullen deze lijnen $X'x'$ en $X''x''$ asymptoten van onze kromme lijn zijn, en niet alleen voor den tak $Z'B'Z''$, maar ook voor de takken $z'D'$ en $z''D''$.

Het is verder klaar, dat iedere volgende hoek, hier weder gelijke takken zal voortbrengen, zoo wel in de hoeken zelve, als in de tegenovergeſtelde hoeken; en hierdoor houden wij den loop van onze kromme voor genoegzaam bepaald, daar men bovendien de bijzondere punten van dezelve, door middel van de vergelijking, gemakkelijk genoeg berekenen of conſtrueren kan.

Voor het geval van $Sin.a = \frac{1}{2}$, hebben wij, door in de vergelijking (C) van Voorſtel 71, b negatief te nemen

$$au^2 - bv^2 = -ab\sqrt{(u^2+v^2)} \quad \ldots\ldots (C')$$

waaruit volgt

$$v = \pm\sqrt{\frac{a(2u^2+ab) \pm a\sqrt{(a^2b^2+4b(a+b)u^2)}}{2b}} \text{ en}$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{b(2v^2+ab) \pm b\sqrt{(a^2b^2+4a(a+b)v^2)}}{2a}}$$

voor

voor de vergelijking der regtſtandige coördinaten. In *Fig.* 57, welke voor dit geval geteekend is, hebben wij bovendien $b = a$ onderſteld, en dan is de vergelijking

$$u = \pm V \frac{2v^2 + a^2 \pm a V(a^2 + 8v^2)}{2}.$$

De hoek W′A′I′, waarbij z oneindig wordt, is hier $Sin.a.\ Boog.Cos.\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{2}\ Boog.Cos.o = 45°$. en de lijnen W′$w'$ en W$^{II}w^{II}$ deelen alzoo de regte hoeken P′A′I′ *enz.* midden door. De kromme heeft hier verder vier asymptoten, welke op eenen afſtand A′Y $= Sin.a\ V\ ab = \frac{1}{2}\ a = \frac{1}{2}$ A′B′ van de lijnen A′W′ *enz.* verwijderd liggen, en zij verkrijgt alzoo vier volmaakt gelijke en gelijkvormige takken.

Doch voor het geval $Sin.a = \frac{8}{9}$, waarin de kromme zeven takken heeft, die zich hier onder de gedaante van 14 oneindige takken moeten vertoonen, neemt de figuur de gedaante aan van *Fig.* 58.

Eindelijk merken wij aan, dat de figuren, van *Fig.* 50 tot *Fig.* 58 ingeſloten, op eene kleinere ſchaal geteekend zijn dan *Fig.* 49, daar anders deze figuren te groot zouden geworden zijn voor de gewone form onzer platen; zulks kan toch op het wel verſtaan van onze ontbindingen geen' den minſten invloed hebben.

LXXIV. VOORSTEL.

Door J. B. CANTOR.

Hoe verdeelt men de breuk $\frac{230}{77}$ in twee andere breuken, waarvan de noemers zijn 7 en 11?

OPLOSSING. Door J. B. CANTOR, A. L. HECTOR, A. VAN DER SWAN en R. LOBATTO.

Stel de breuken $\frac{x}{7}$ en $\frac{y}{11}$, dan is $\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77}$ of $11x + 7y = 230$, waaruit $y = 32 - x - \frac{2(2x-3)}{7}$; ſtellende dus $\frac{2x-3}{7} = z$, wordt $x = 3z + 1 + \frac{z+1}{2}$; en ſtellende $\frac{z+1}{2} = n$, wordt $z = 2n - 1$, dus $x = 7n - 2$ en $y = 36 - 11n$; men kan dus n niet kleiner dan 1, en niet

grooter dan 3 zamenen, zonder dat x of y negatief wordt, en er beſtaan dus 3 antwoorden, namelijk

voor $n = 1$, $x = 5$ en $y = 25$, dus de breuken $\frac{5}{1}$ en $\frac{25}{11}$;
voor $n = 2$, $x = 12$ en $y = 14$, dus de breuken $\frac{12}{7}$ en $\frac{14}{11}$;
voor $n = 3$, $x = 19$ en $y = 3$, dus de breuken $\frac{19}{3}$ en $\frac{3}{11}$.

LXXV. VOORSTEL.

Door J. B. CANTOR.

Welke breuk is het, die in $\frac{1}{3}$ verandert, als men 1 bij den teller voegt; en in $\frac{1}{4}$, als men 1 bij den noemer vergaart?

OPLOSSING. Door J. B. CANTOR, A. L. HECTOR en A. VAN DER SWAN.

Stel de breuk $\frac{x}{y}$; dan moet volgens de voorwaarden $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$ en $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$ zijn. Of wel wij moeten hebben $3x + 3 = y$ en $4x = y + 1$; uit de eerſte is $y = 3x + 3$ en uit de tweede $y = 4x - 1$, dus is $3x + 3 = 4x - 1$ of $x = 4$ en dus $y = 4x - 1 = 15$. De gevraagde breuk is dus $\frac{x}{y} = \frac{4}{15}$.

LXXVI. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

De middellijn van eenen cirkel gegeven zijnde, begeert men eene regte lijn te conſtrueren gelijk aan den gehelen, halven, of het vierde gedeelte van den omtrek, wooddnig, dat deze conſtructie aan de evenredigheid van METIUS, *als* 113 : 355 *volkomen voldoet?* (*)

OPLOSSING. Door JACOB DE GELDER.

1. CONSTRUCTIE. Laat ACBD *Fig.* 59, een gegeven cirkel zijn. Trek twee, regthoekig op elkander ſtaande middellijnen AB en CD. Neem, uit het middelpunt te rekenen, ME = 8, MF = 7 en MG = MH = 11 gelijk en naar welgevallen genomene deelen. Trek verder de lijn EF, en EI loodregt op deze laatſte. Maar EI = GH en trek EK loodregt op FI; dan zal FK : FI = 113 : 355 zijn.

BEWOOG. Want volgens (XVI *St.* III *B.*) is, in den regthoekigen driehoek EFM, $EF^2 = FM^2 + EM^2 = 7 \times 7 + 8 \times 8 = 113$

(*) Dit voorſtel is geplaatst, II *Déel der Verzameling van Voorſtellen*, N°. 190. Men vraagt hier echter eene andere Conſtructie.

113 vierkante deelen; in den regthoekigen driehoek GMH, is $GH^2 = MG^2 + MH^2 = 11 \times 11 + 11 \times 11 = 242$ vierkante deelen $= EI^2$, en eindelijk is, in den regthoekigen driehoek FEI, $IF^2 = EI^2 + EF^2 = 242 + 113 = 355$ vierkante deelen. Nu is (zie *Gev. XXIII Stel. V, B*) FK : FI = EF^2 : $FI^2 = 113 : 355$. Men zoeke dan tot FK, FI en AM eene vierde evenredige, dan zal deze, naar de evenredigheid van METIUS, gelijk zijn aan den halven omtrek.

II. CONSTRUCTIE. *Zij, Fig. 60*, ABC de gegeven cirkel en AMC zijne middellijn; stel den straal MB loodregt op de middellijn AC en deel den straal AM in acht gelijke deelen, en neem MD = 7 van die deelen. Na AD te hebben getrokken, neme men AF = 4 van die deelen. Dit gedaan hebbende, trekke men FG loodregt op AM; voorts de lijn DG en FH evenwijdig aan DG; dan zal, AL gelijk aan driemaal den straal genomen hebbende, LH, naar de bepaling van METIUS, gelijk zijn aan den halven omtrek.

BEWOOG. In den regthoekigen driehoek AMD, is $AD^2 = AM^2 + MD^2 = 8 \times 8 + 7 \times 7 = 113$, en $AF^2 = 4 \times 4 = 16$ zijnde, geven de gelijkvormige driehoeken AFH en AGD, benevens AGF en AMD, de evenredigheden;

$$AF^2 : AD^2 = AH^2 : AG^2 = AG^2 : AM^2 = 16 : 113$$

maar AH : AG = AG : AM zijnde, zoo is ook

$$AH : AM = AH^2 : AG^2 = 16 : 113$$

$$\text{en } AH = AM \times \tfrac{16}{113}.$$

Hierbij tellende AL = 3 MA, zoo zal

$$AL + AH = LH = 3\tfrac{16}{113} \times AM \text{ of } 113\,LH = 355\,AM$$

zijn, waaruit dan volgt

$$AM : LH = 113 : 355.$$

AANMERKING. Uit de aanteekeningen op de Lijkrede, ter nagedachtenis van den beroemden NIEUWLAND, door den Hoogleeraar VAN SWINDEN uitgesproken, blijkt het, dat die beroemde Wiskundige eene dergelijke Constructie gevonden had, welke ik nimmer gezien heb en zooveel ik weet ook nimmer is bekend geworden. Het zou mogelijk zijn, nog andere Constructien te vinden; de boven medegedeelde zijn die, welke ik destijds, onmiddelijk na het lezen van boven aangehaalde lijkrede gevonden heb.

heb. Korter, maar minder naauwkeurig, en echter voor het dagelijkſche gebruik volkomen voldoende, is de volgende

CONSTRUCTIE. *Om eene regte lijn te conſtrueren, welke nagenoeg aan den halven omtrek eens gegevenen cirkels gelijk is?*

www.libtool.com.cn

Zij, *Fig.* 61, AB eene middellijn van den gegevenen cirkel. Trek BC en AD loodregt op de uiteinden van die middellijn, en maak BE = 3 BM. Beſchrijf uit A, met AM als ſtraal, eenen cirkelboog, die den omtrek des cirkels in F ſnijdt, en uit A en F, met dezelfde opening des paſſers, twee cirkelbogen, die elkander in G ſnijden; trek MG, die AD in H ſnijdt: dan zal HE zeer nabij gelijk zijn aan den halven omtrek.

BETOOG. Stel den ſtraal MB = 1; dan is AH = *Tang.* 30° = $\frac{Sin.30^\circ}{Cos.30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Indien men dan HI loodregt op BC trekt; dan is EI = $3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, en $EI^2 = 9\frac{1}{9} - 2\sqrt{3}$ en $HI^2 = 4$; nu is in den regthoekigen driehoek HEI, $HE^2 = EI^2 + HI^2 = 9\frac{1}{9} - 2\sqrt{3} + 4 = 13\frac{1}{9} - 2\sqrt{3}$; derhalve $HE = \sqrt{(13\frac{1}{9} - 2\sqrt{3})} = \sqrt{9,8692317} = 3,14154$ nagenoeg; dus iets te klein, doch evenwel veel nader dan de evenredigheid van ARCHIMEDES, welke 3,1428 *enz.* geeft, en bij ruwe berekeningen toch dagelijks gebruikt wordt.

LXXVII. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Men vraagt naar de waarde van x, y, z, u en w, in de volgende vergelijkingen: xyz = 2uw; yzu = 18wx; zuw = 8xy; uwx = 32yz en wxy = 50zu? (22)

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR, S. J. MULDER, A. VAN DER SWAN, en R. LOBATTO.

Wanneer men de eerſte der gegevene vergelijkingen met de vierde; de tweede met de vijfde; de derde met de eerſte; de vierde met de tweede en de vijfde met de derde vermenigvuldigt, en door de gelijke factoren deelt, vindt men $x^2 = 64$, $y^2 = 900$, $z^2 = 16$, $u^2 = 576$ en $w^2 = 400$, waaruit $x = 8$, $y = 30$, $z = 4$, $u = 24$ en $w = 20$.

LXXVIII.

(22) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 98, N°. 15.

LXXVIII. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Een vader overlijdende, laat drie zonen na, die verstond van zijne nagelatene goederen zooveel nemen, als zij elk meester kunnen worden. De oudste, hierdoor meer hebbende dan de beide andere, wordt besloten, dat hij aan elk van zijne broeders nog zooveel geven zou, als zij reeds hadden; doch toen had de tweede te veel, en gaf van het geld, dat hij nu had, aan elk van zijne broeders zooveel als zij hadden; toen had ondertusschen de derde te veel; en doende zoo als zijne broeders gedaan hadden, bevonden zij elk 800 guldens, en dus evenveel te hebben. Vrage hoeveel elk in den beginne genomen had?

EERSTE OPLOSSING. Door A. L. HECTOR en A. VAN DER SWAN.

Stel dat de oudste zoon x, de tweede y en de derde z guldens genomen had. Daar nu de geheele nalatenschap 3×800, dat is, 2400 guldens bedroeg, gaf de oudste zoon bij de eerste uitkeering $2400 - x$ guldens aan zijne broeders, en behield alzoo $2x - 2400$ guldens; doch dit werd door zijne broeders twee achtervolgende keeren verdubbeld, en dus is volgens de onderstelling $8x - 9600 = 800$ of $8x = 10400$, waaruit wij vinden $x = 1300$ voor het getal guldens, dat de oudste zoon genomen had.

De tweede zoon had, na de uitkeering van zijnen oudsten broeder, $2y$, en gaf aan zijne broeders $2400 - 2y$ guldens; de rest $4y - 2400$ werd door den jongsten broeder verdubbeld, en volgens de onderstelling moet dus $8y - 4800 = 800$ zijn, waaruit $8y = 5600$ en $y = 700$ guldens voor het geen de tweede genomen had.

Daar dus de eerste en tweede te zamen 2000 guldens genomen hadden, is het klaar, dat de derde $2400 - 2000$, dat is, 400 guldens genomen had, hetgeen wij ondertusschen ook op dezelfde wijze zouden kunnen vinden, als wij het voor de twee andere gevonden hebben.

TWEEDE OPLOSSING. Door A. L. HECTOR, S. J. MULDER en R. LOBATTO.

Na de laatste uitkeering had elk f 800; waarvan de twee oudste zoons elk f 400, en dus te zamen f 800, van den derden zoon ontvangen hadden.

Na

Na de tweede uitkeering had dus de oudste f 400, de tweede f 400, en de derde f 1600; waarvan de eerste f 200 en de derde f 800, en dus te zamen f 1000, van den tweeden ontvangen hadden.

Na de eerste uitkeering had dus de oudste f 200, de tweede f 1400 en de derde f 800; waarvan de tweede f 700 en de derde f 400, en dus te zamen f 1100, van den oudsten genoten hadden.

In den beginne had dus de oudste zoon f 1300, de tweede f 700 en de derde f 400.

LXXIX. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Twee getallen te vinden, waarvan: de som der vierkanten 1200 is, en waarvan het verschil der vierkanten gelijk is aan het product der getallen? (23)

OPLOSSING. Door S. J. MULDER, A. L. HECTOR, A. VAN DER SWAN, en R. LOBATTO.

Stel $1200 = 2a$, en stel voor de gevraagde getallen $\sqrt{(a+x)}$ en $\sqrt{(a-x)}$, dan is reeds aan de eerste voorwaarde voldaan, en de tweede zal worden uitgedrukt door de vergelijking $2x = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ of $4x^2 = a^2 - x^2$, waaruit $5x^2 = a^2$, dat is, $x^2 = \frac{1}{5}a^2$ en $x = \frac{1}{5}a\sqrt{5}$, zoodat de gevraagde getallen $\sqrt{a\,(1 + \frac{1}{5}\sqrt{5})}$ en $\sqrt{a\,(1 - \frac{1}{5}\sqrt{5})}$; en stellende voor a wederom de waarde 600, worden de getallen $\sqrt{(600 + 120\sqrt{5})}$ en $\sqrt{(600 - 120\sqrt{5})}$.

LXXX. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Er zijn drie weiden van gelijke hoedanigheid; de eerste groot $a = 4$ *hectares; de tweede groot* $b = 5$ *hectares; de derde groot* $c = 6$ *hectares. Een aantal van* $A = 8$ *osſen hebben in* $\alpha = 7$ *weken het gras der eerſte weide afgegeten; een aantal van* $B = 9$ *oſſen dat van de tweede weide in* $\beta = 8$ *weken: men vraagt hoe veel oſſen de derde weide in den tijd van* $\gamma = 12$ *weken zullen afeten?* (*)

Op-

(23) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 270. N°. 12.

(*) Dit vra gluk, hetwelk in de *Arithm. Univ.* NEWTONI *Probl.* XI voorkomt, is door 'sGRAVESANDE in zijne *Algebra*, *pag.* 187 *Werks.* 14 opgelost; doch men begeert hier eene andere oplosſing.

Oplossing. Door I. R. Sprenger.

Het gras, dat in ieder weide is, wanneer de osſen er in komen, moet evenredig zijn met de uitgebreidheid der weiden, en wij kunnen dus die hoeveelheid gras, in de verſchillende weiden aanwezig, uitdrukken door pa, pb en pc kilogrammes.

Stellende nu, dat het gras, dat iedere week aangroeit, tot het bij den aanvang aanwezige, gras in reden zij, als 1 tot n; dan groeit er op de eerſte weide, in a weken, $\frac{a}{n}\,pa$; op de tweede weide, in β weken, $\frac{\beta}{n}\,pb$, en op de derde weide, in γ weken, $\frac{\gamma}{n}\,pc$ kilogrammes gras.

Wanneer wij dan het aanwezige en aangegroeide gras te zamen nemen, en het aantal osſen, in de derde weide, C ſtellen, hebben wij de volgende gegevens:

A osſen eten, in a weken, $\frac{a+n}{n}\,pa$ kilogr. Gras

B . . . . . β . . . . $\frac{\beta+n}{n}\,pb$ . . . . . .

C . . . . . γ . . . . $\frac{\gamma+n}{n}\,pc$ . . . . . .

Nu moet het getal der osſen in regte reden zijn, van het gegetene gras, en in omgekeerde reden van de tijden, en wij verkrijgen bij gevolg

$$A : B = \frac{a+n}{an} \times pa : \frac{\beta+n}{\beta n} \times pb;\ \text{en}$$

$$A : C = \frac{a+n}{an} \times pa : \frac{\gamma+n}{\gamma n} \times pc$$

dat is, wij hebben de twee vergelijkingen

$$\frac{Ab(\beta+n)}{\beta} = \frac{aB(a+n)}{a} \text{ en } \frac{Ac(\gamma+n)}{\gamma} = \frac{aC(a+n)}{a}.$$

Uit de eerſte vinden wij gemakkelijk

$$n = \frac{a\beta\,(aB - bA)}{aAb - \beta Ba} = 28;$$

en uit de tweede trekken wij oogenblikkelijk

$$C = \frac{aAc(\gamma+n)}{a\gamma(a+n)}$$

en

en brengende hierin de gevondene waarde van s,

$$C = \frac{\beta B a(\gamma - a) - a A b(\gamma - \beta)}{\gamma ab(\beta - a)} \times c = 8$$

www.libtool.com.cn

voor het gevraagde aantal osſen.

GEVOLG. Het blijkt hieruit, dat de betrekking tusſchen het aantal der osſen, de grootte der weiden en de tijden, opgeſloten ligt in de volgende, zeer regelmatige vergelijking

$$ab\,C(a-\beta) + A\,bc(\beta-\gamma) + a\,B\,c(\gamma-a) = 0.$$

AANMERKING. Offchoon deze oplosſing geheel verſchillend is met die van 's GRAVESANDE, daar wij ſlechts twee vergelijkingen met twee onbekende verkrijgen, terwijl 's GRAVESANDE zeven vergelijkingen met zeven onbekenden heeft, komt nogtans de uitkomst, welke wij verkregen hebben, volkomen met de zijne overeen; waarvan men zich door het vergelijken der beide uitdrukkingen overtuigen kan. Bovendien verdient het opmerking, dat, door onze oplosſing, ook de betrekking van het aangegroeide tot het in de weiden beſtaande gras, gevonden wordt, waarvan 's GRAVESANDE niet ſpreekt.

LXXXI. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Op eene gegevene lijn eenen driehoek te beſchrijven, die eenen gegevenen tophoek heeft, en in welken eenen cirkel, van eenen gegevenen ſtraal, kan beſchreven worden.

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR en R. LOBATTO.

Laat ABC, *Fig.* 62, de gevraagde driehoek zijn, waarin AB, benevens $\angle$ C en de ſtraal DE gegeven is; dan is $\angle A + \angle B = 80° - \angle C$; en daar AD en DB de hoeken A en B midden door deelen, is $\angle ADB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - (90° - \frac{1}{2}\angle C) = 90° + \frac{1}{2}\angle C$; en hieruit volgt deze eenvouwdige

CONSTRUCTIE Beſchrijf op AB een cirkelſegment, dat eenen hoek bevat gelijk $90° + \frac{1}{2}\angle C$. Trek op eenen afſtand, gelijk den gegeven ſtraal DE, eene lijn PQ evenwijdig aan AB, ſnijdende het cirkelſegment in D. Beſchrijf uit D met DE als ſtraal eenen cirkel, en trek uit A en B raaklijnen aan denzelve, ſnijdende elkander in C; dan is ACB de gevraagde driehoek, zijnde het, uit het boven gezegde, klaar dat dezelve aan al de gevraagde vereischten voldoen zal.

AAN-

www.libtool.com.cn

Aanmerking. De lijn PQ moet het cirkelſegment in twee punten ſnijden, hetzelve in een punt aanraken, of wel geheel boven dit ſegment gelegen zijn. In het eerſte geval zijn er twee driehoeken, die de vraag beantwoorden; doch welke alleen in ſtand verſchillen. In het tweede geval is er ſlechts eene oplosſing, en dan is de driehoek gelijkbeenig; maar in het derde geval is de vraag onmogelijk. Wijl, eindelijk, IK $=$ AK *Cot.* AIK $=$ AK *Cot.* $\frac{1}{2}$ ADB $=$ $\frac{1}{2}$ AB *Cot.* $(45° + \frac{1}{4}C) = \frac{1}{4}$ AB $\times$ *Tang.* $(45° - \frac{1}{4}C)$ is, blijkt hieruit, dat het voorſtel onmogelijk wordt, zoodra DE $>$ $\frac{1}{2}$ AB . *Tang.* $(45° - \frac{1}{4}C)$ is.

LXXXII. VOORSTEL.

Door Jacob de Gelder.

In eenen gegevenen cirkel-ſector eenen regthoek van eenen gegevenen inhoud te beſchrijven; wel te verſtaan, dat twee hoekpunten van dien regthoek in den boog, en zijne twee andere hoekpunten in de ſtralen van dien ſector gelegen zijn?

Oplossing. Door A. L. Hector.

Laat ACBDA, *Fig.* 63, de gegevene cirkel-ſector zijn, dan heeft men de volgende

Constructie. Deel hoek ACB, door den ſtraal CD midden door, en beſchrijf op BC een cirkel-ſegment, dat eenen hoek bevat gelijk aan het ſupplement van den halven hoek ACB.

Beſchrijf op BC eenen regthoek BCNM gelijk de helft van den gegevenen inhoud, ſnijdende de zijde NM den boog CKB in K en *k*.

Trek uit C, door K en *k*, de ſtralen CF en C*f*, die den boog van den ſector ontmoeten in F en *f*; maak DE $=$ DF en D*e* $=$ D*f* en trek EF en *ef*; wanneer dan op EF en *ef* de regthoeken EFHG en *efhg* beſchreven worden, zullen deze ieder gelijk aan den gegevenen inhoud zijn.

Bewijs. Trek BK, dan is $\triangle$ CFH $=$ $\triangle$ CBK; want zij hebben den hoek C gemeen, den hoek CHF $=$ CKB $=$ $180° - \frac{1}{2}$ ACB en de zijden CF $=$ CB. Nu is

regth. EFHG $=$ 2 . *regth.* ILFH $=$ 4 . $\triangle$ CFH $=$ 4 $\triangle$ CKB
$=$ 4 $\times$ $\frac{1}{2}$ *regth.* CNMB $=$ 2 *regth.* CNMB;

dat is: *regth.* EFHG is gelijk aan den gegevenen inhoud, en het zelfde bewijs geldt ook voor den regthoek *efhg*.

LXXXIII. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

In eenen gegevenen cirkel-fector den grootſten regthoek te beſchrijven?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, A. L. HECTOR en R. LOBATTO.

Uit de conſtructie van het voorgaande voorſtel blijkt ten duidelijkſte, dat de regthoek, in den cirkel-fector beſchreven, op zijn grootst zal zijn, wanneer de lijn M'N' (*Fig.* 63) het cirkel-ſegment op BC beſchreven in K' aanraakt. In dit geval is $CK' = BK'$ en dus $\angle K'CB = 90° - \frac{1}{2} \angle CK'B = 90° - (90° - \frac{1}{4} \angle ACB) = \frac{1}{4} \angle ACB = \frac{1}{2} \angle DCB$. Deelende dus den hoek DCB, door den ſtraal CF', midden door, dan zal het punt F' en bijgevolg de geheele regthoek E'F'G'H' bepaald zijn.

GEVOLG. *Regth.* $E'F'H'G' = 2$ *regth.* $CN'M'B = BC^2$ *Tang.* $\frac{1}{4}$ ACB. De inhoud van den grootſten regthoek, die in den cirkel-fector beſchreven kan worden, is dus gelijk aan het vierkant van den ſtraal, vermenigvuldigd met de tangens van een vierde gedeelte van den hoek des fectors.

LXXXIV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

In een gegeven cirkel-ſegment den grootſten regthoek te beſchrijven?

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en A. L. HECTOR.

Zij ABD, *Fig.* 64. het gegeven cirkel-ſegment, en PQRS de begeerde regthoek. Men trekke de ſtralen AC, BC en SC, dan kan men den hoek BCD als bekend aannemen, en den hoek DCS als onbekend beſchouwen. Stellende dan den eerſten dezer hoeken gelijk a en den anderen gelijk ϕ, dan is, de ſtraal r noemende, $EF = CF - CE = r\,(Cos.\ \phi - Cos.\ a)$, en $FS = r\ Sin.\ \phi$, bijgevolg: *regth.* $PQRS = 2r^2 . Sin.\ \phi\,(Cos.\ \phi - Cos.\ a)$, en daar deze inhoud een maximum moet zijn, zoo hebben wij

$$y = Sin.\ \phi\,(Cos.\ \phi - Cos.\ a) = max.$$

$$\text{of } y = \tfrac{1}{2}\ Sin.\ 2\phi - Sin.\ \phi . Cos.\ a = max.$$

$$\text{en } \frac{\partial y}{\partial \phi} = Cos.\ 2\phi - Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ a = 0$$

waaruit volgt $Cos.\ 2\phi = Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi$, of $2\ Cos^2.\ \phi - 1 =$

Cos.

$Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi$ dat is: $2\ Cos^2.\ \phi - Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi = 1$, uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$Cos.\ \phi = \tfrac{1}{4}\ (Cos.\ a \pm \sqrt{(8 + Cos^2.\ a)}).$$

De eerſte van deze waarden geeft de lijn CS en dus den grootſten regthoek PQRS, welke in het ſegment ADB kan worden beſchreven; de tweede waarde, welke negatief zijnde tot eenen ſtompen hoek behoort, geeft de lijn Cs, en behoort dus tot den grootſten regthoek $pqrs$, welken het ſegment AD'B kan bevatten. Is het ſegment een halve cirkel, dan is $a = 90°$; $Cos.\ a = 0$ en $Cos.\ \phi = \pm\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, dat is: $\phi = 45°$ of $\phi = 135°$; de twee grootſte regthoeken vormen alzoo in dit geval te zamen het vierkant in den cirkel beſchreven.

Om den gevraagden regthoek door middel van de gevondene uitdrukking voor $Cos.\ \phi$ te conſtrueren, zoo hebben wij $CF = r\ .\ Cos.\ \phi = \tfrac{1}{4}\ (r\ Cos\ a \pm \sqrt{(8\ r^2 + r^2\ .\ Cos^2.\ a)}) = \tfrac{1}{4}\ r\ Cos.\ a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}\ r^2 + (\tfrac{1}{4}\ r\ Cos.\ a)^2)}$. Nemende dus $CG = \tfrac{1}{4}$ CE en $CI = \tfrac{1}{2}$ DH, dan is $GI = \sqrt{(CI^2 + GC^2)} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\ r^2 + (\tfrac{1}{4}\ r\ Cos.\ a)^2)}$ en men behoeft dus ſlechts $GF = Gf = GI$ te maken om de punten F en f te vinden, waardoor de lijnen RS en rs getrokken moeten worden.

LXXXV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

In een gegeven cirkel-ſegment eenen regthoek te beſchrijven, welke eenen gegevenen inhoud hebbe?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L HECTOR.

Alles als in het voorgaande voorſtel onderſtellende, zoo laat in *Fig. 65*; PQSR $= p^2$ gegeven zijn, dan is ingevolge de oplosſing van het voorgaande voorſtel,

$$2\ r^2\ Sin.\ \phi\ (Cos.\ \phi - Cos.\ a) = p^2$$

$$\text{of } (Cos.\ \phi - Cos.\ a)\ \sqrt{(1 - Cos^2.\ \phi)} = \frac{p^2}{2\ r^2}$$

$$\text{dat is } (Cos^2.\ \phi - 2\ Cos.\ a\ Cos.\ \phi + Cos^2.\ a)\ (1 - Cos^2.\ \phi) = \frac{p^4}{4\ r^4}$$

hetwelk gemakkelijk herleid wordt tot de vierde magtsvergelijking $Cos^4.\ \phi - 2\ Cos.\ a\ .\ Cos^3.\ \phi - Sin^2.\ a\ .\ Cos^2.\ \phi + Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi +$

$$\ldots\ldots\ldots \left(\frac{p^4}{4\ r^4} - Cos^2.\ a\right) = 0 \ldots (A)$$

welke vergelijking door hare wortels, vier verſchillende lijnen CS zal geven, die aan het vraagſtuk voldoen.

www.libtool.com.cn

De reden, waarom dit voorſtel tot den vierden graad opklimt, is hierin gelegen, dat er zoo wel in het ſegment AD'B als in het ſegment ADB twee regthoeken kunnen beſchreven worden, welke gelijk p^2 zijn. Heeft nu de vergelijking vier beſtaanbare wortels, dan zijn deze vier regthoeken ook alle mogelijk; heeft zij ſlechts twee beſtaanbare wortels, dan kunnen deze regthoeken alleen in het grootſte ſegment AD'B beſchreven worden, en zijn alle vier de wortels onbeſtaanbaar, dan is dit een bewijs dat de gegevene inhoud p^2 te groot is, om in een der ſegmenten als regthoek geconſtrueerd te kunnen worden. Dit alles zal overeenſtemmen met de volgende conſtructie.

Laat TT' den hoek van AB en DD' midden door deelen en laat ET = ET' = p genomen hebbende, eene gelijkzijdige hyperbool beſchreven worden, waarvan T en T' de toppen en AB en DD' de asymptoten zijn, dan zullen de punten S, S', s en s', waarin deze hyperbool den cirkel doorſnijdt, de begeerde punten zijn, welke de regthoeken bepalen. Want volgens de bekende eigenſchap der hyperbool is *regth.* EFSQ = TU^2, en dus *regth.* PQSR = 2 TU^2 = ET^2 = p^2, en dit geldt even zoo goed voor de drie andere regthoeken.

Snijden nu beide takken van de hyperbool den cirkel, dan beſtaan er ook vier regthoeken, welker inhoud gelijk ET^2 of p^2 is; doch ſnijdt de hyperbool alleen den cirkelboog D'A dan kunnen de gevraagde regthoeken alleen in het ſegment AD'B worden geconſtrueerd; en de vraag zal voor geen antwoord vatbaar zijn wanneer p zoo groot is, dat geen der takken van de hijperbool den cirkel kan ſnijden; eindelijk kan het ook gebeuren, dat een der takken van de hyperbool den cirkel aanraakt, en dit ſtrekt ten bewijze, dat in zulk geval de gegevene inhoud juist de inhoud van den grootſten regthoek is, welke in het ſegment, waarin dit raakpunt valt, kan beſchreven worden.

Men zal wel doen, zoo wel de vergelijking (A) als de conſtructie op een zelfde voorbeeld toe te paſſen, daar dit het verband tuſſchen beide oplosſingen ten duidelijkſte zal aantoonen: men merke echter op, dat, wanneer het op naauwkeurigheid aankomt, de berekening boven de conſtructie te verkiezen is.

Wil

Wil men de hoeken uit de vergelijking (A) doen verdwijnen, zoo ſtelle men CE $=a$ en CF $=x$, dan is $a = r\ Cos.\ \alpha$ en $x = r\ Cos.\ \phi$, dus $Cos.\ \alpha = \frac{a}{r}$ en $Cos.\ \phi = \frac{x}{r}$ en ſubſtituerende deze waarden in de vergelijking (A), dan wordt dezelve

$$x^4 - 2ax^3 - (r^2 - a^2)x^2 + ar^2x + (\tfrac{1}{4}p^4 - a^2r^2) = 0 \quad (B)$$

men kan nu voor de berekening even zoo goed de vergelijking (B) als (A) gebruiken, de poſitieve wortels zullen alsdan de waarden van EF en EF′ en de negatieve wortels die van E*f* en E*f*′ aanduiden.

Eindelijk moeten wij nog aanmerken, dat er gevallen kunnen plaats hebben, waarin een der regthoeken van het grootſte ſegment, niet volgens den eigenlijken zin kan gezegd worden *in* dit ſegment te ſtaan, zoo als; bij voorbeeld: de regthoek *r′p′q′s′* van *Fig.* 65. Deze regthoek voldoet daarom ondertusſchen even zoo goed aan de opgaaf als de drie anderen, om dat men deze opgaaf algemeener dus lezen kan: *Eenen regthoek te beſchrijven van gegevenen inhoud, en wel zoodanig, dat twee van deszelfs hoekpunten gelegen zijn in den omtrek van eenen gegevenen cirkel, terwijl de twee andere hoekpunten in eene gegevene koorde liggen.*

LXXXVI. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Op eene gegevene lijn, eenen driehoek, eenen gegevenen tophoek hebbende, te conſtrueren, zoodanig, dat de regthoek, onder het verſchil der opſtaande zijden en de ſtraal des ingeſchrevenen cirkels, een maximum zij?

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR, en R. LOBATTO.

Wanneer (*Fig.* 66.) AB de gegevene lijn en BAD de gegeven tophoek is, dan hebben wij deze

CONSTRUCTIE. Beſchrijf op AB een cirkel-ſegment, dat den gegevenen hoek BAD bevat, dan zijn de tophoeken van alle driehoeken, in dit ſegment beſchreven, aan dien gegevenen hoek gelijk; de gevraagde driehoek moet dus deszelfs toppunt in den beſchrevenen cirkelboog hebben.

Voltooi nu den cirkel en beſchrijf uit het midden F van den boog AFB met AF als ſtraal op AB eenen cirkelboog AEGB.

Beſchrijf, volgens voorſtel 84, in het ſegment AEGBA den grootſten regthoek EGHI.

Trek eindelijk uit F door E en G de lijnen FC en FC′, welke den boog ACB in C en C′ ontmoeten, dan zullen C en C′ de toppunten zijn van twee driehoeken ABC en ABC′, die beide aan het begeerde voldoen.

www.dbnl.com.cn

Bewijs. Hoek AFB $=$ 180° — C zijnde, zoo is de hoek in het segment AEGB beschreven gelijk $\frac{1}{2}$ (360° — AFB) $=$ 90° $+ \frac{1}{2}$ C, en dus is: volgens voorstel 81, EH de straal van den cirkel in driehoek ABC beschreven; omdat nu AB, AC en BC raaklijnen aan dien cirkel zijn in H, L en M, zoo is

$$BC = BM + CM = BH + CL$$

$$\text{en } AC = AL + CL = AH + CL$$

en trekkende deze vergelijkingen van elkander af, dan komt er

$$BC - AC = BH - AH = BH - BI = HI$$

en bijgevolg, aan beide zijden met EH multiplicerende

$$(BC - AC) \times EH = HI \times EH = \textit{regth.}\ EGHI.$$

voor elken stand van den driehoek ABC is dus de regthoek onder het verschil der opstaande zijden, en de straal des ingeschreven cirkels gelijk aan de regthoek HEGI; daar wij nu regthoek HEGI volgens de constructie op zijn grootst mogelijk genomen hebben, zoo zal ook de regthoek onder het verschil der opstaande zijden BC en AC en de straal HE een maximum zijn, en dit gaat even eens voor den driehoek ABC′ door.

LXXXVII. VOORSTEL.

Door O. S. Bangma.

Uit een gegeven punt C (Fig. 67) van eene in stelling gegevene regte lijn AB, zijn twee lijnen getrokken, aan denzelfden kant van AB, als CD en CE, nu begeert men uit een gegeven punt F, tusschen de beenen van den hoek DCE, twee lijnen te trekken tot AB, als FI (snijdende CD in G) en FK (snijdende CE in H), zoodanig, dat driehoek CIG gelijk driehoek CKH gelijk vierhoek FGCH worde?

Oplossing. Door O. S. Bangma en A. L. Hector.

Stellen wij, na door F de lijn DE evenwijdig aan AB getrokken te hebben, FD $= a$, FE $= b$; CI $= x$; CK $= y$ △ CGF $=$ P; △ CHF $=$ Q; △ CGI $=$ M en △ CKH $=$ N, dan is in de gelijkvormige driehoeken CHK en FHE

$$CK : FE = HK : FH = \triangle CKH : \triangle CHF$$

dat is $y : b = N : Q$ en bijgevolg $Q = \frac{b}{y} N$

Op

Op gelijke wijze is in de gelijkvormige driehoeken CGI en FGD

$$CI : FD = IG : GF = \triangle ICG : \triangle CGF$$

www.libtool.com.cn

dat is $x : a = M : P$ en hieruit is $P = \frac{a}{x} M$.

Hieruit volgt dus $P + Q = \frac{b}{y} N + \frac{a}{x} M$, doch volgens het voorſtel moet $P + Q = N = M$ zijn, en deze vergelijking gaat dus over in $1 = \frac{b}{y} + \frac{a}{x}$ dat is: in

$$xy = bx + ay \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Verder is $\triangle IFC : \triangle CFK = IC : CK$ dat is: wanneer wij de geſtelde waarden in de plaats ſchrijven

$$P + M : Q + N = x : y$$

$$\text{maar } P + M = \frac{a}{x} M + M = \frac{a + x}{x} . M$$

$$\text{en } Q + N = \frac{b}{y} N + N = \frac{b + y}{y} . N,$$

en deze waarden ſubſtituerende

$$\frac{a + x}{x} . M : \frac{b + y}{y} . N = x : y$$

of, daar $M = N$ moet zijn,

$$\frac{a + x}{x} : \frac{b + y}{y} = x : y, \text{ dat is}$$

$$a + x : b + y = x^2 : y^2$$

waaruit wij verkrijgen

$$y^2 (a + x) = x^2 (b + y) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en er blijft dus alleen over, om uit de vergelijkingen (1) en (2) x en y te bepalen.

Uit de eerſte is $y = \frac{bx}{x - a}$, dus $b + y = \frac{b(2x - a)}{x - a}$, en brengende deze waarden in de tweede over, dan wordt dezelve

$$\frac{b^2 x^2 (a + x)}{(x - a)^2} = \frac{bx^2 (2x - a)}{(x - a)} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dat is, door $\frac{bx^2}{(x - a)^2}$ deelende,

$$b(x + a) = (x - a)(2x - a)$$

hetgeen na herleiding geeft

$$2x^2 - (3a + b)x = a(b - a) \quad . \quad . \quad (4)$$

welke vierkantsvergelijking ons geeft

www.libtool.com.cn

$$x = \frac{3a + b}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 + 14ab + b^2)}$$

Zonderen wij, uit de vergelijking (1), x af, en fubſtitueren wij dezelve in (2) dan vinden wij op gelijke wijze,

$$y = \frac{3b + a}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 + 14ab + b^2)}.$$

De waarden van x en y gaan in elkander over, door a en b te verwisſelen. Dit is ook uit het bloote inzien van de figuur duidelijk. Merkwaardiger is het, dat wij uit deze waarden trekken $y - x = \frac{1}{2}(b - a)$.

Om de gevondene waarden van x en y voor de conſtructie bekwaam te maken, ſchrijven wij dezelve aldus,

$$x = \tfrac{1}{4}(3a + b) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a - b}{4}\right)^2 + ab\right)}$$

$$y = \tfrac{1}{4}(3b + a) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a - b}{4}\right)^2 + ab\right)}$$

wanneer wij nu alleen op de bovenſte teekens acht geven, hebben wij hierdoor deze

Conſtructie. Beſchrijf op DE eenen halven cirkel en ſtel FL loodregt op DE, dan is $FL^2 = ab$

Maak DM = FE en FN = $\frac{1}{4}$ FM, dan is FN = $\frac{1}{4}(a - b)$; trekkende dus NL, dan is NL = $\sqrt{\left(\left(\frac{a - b}{4}\right)^2 + ab\right)}$.

Wanneer dus CO = $\frac{1}{4}$(3FD + FE) en CP = $\frac{1}{4}$(3FE + FD) genomen wordt, zal men de punten I en K vinden, door OI = PK = NL te maken, en dan zullen FI en FK de begeerde lijnen zijn.

I Aanmerking. De benedenſte teekens geven altoos eene oneigenlijke oplosſing, want dezelve geven altoos eene der grootheden x en y poſitief en de andere negatief. Dit blijkt duidelijk wanneer men deze tweede waarden van x en y onder de volgende gedaante ſtelt

$$x = \tfrac{1}{4}(3a + b) - \tfrac{1}{4}\sqrt{\{(3a + b)^2 + 8a(b - a)\}}$$

$$y = \tfrac{1}{4}(3b + a) - \tfrac{1}{4}\sqrt{\{(3b + a)^2 + 8b(a - b)\}}$$

want

want dan ſpreekt het van zelf, dat $a > b$ zijnde y negatief en x poſitief, doch $b > a$ zijnde, y poſitief en x negatief zal zijn. De punten I′ en K′ vallen alzoo, voor deze benedenſte teekens, altoos aan denzelfden kant, dat is: beide ter regter of beide ter linkerzijde, van C. De driehoek CI′G′ blijft hier wel gelijk aan den driehoek CH′K′, doch de vierhoek, welke voor de bovenſte teekens gelijk is aan de ſom der driehoeken CGF en CHF, is hier gelijk aan het verſchil der driehoeken CG′F′ en CH′F′, en wij hebben dus hier $\triangle$ CG′I′ $=$ $\triangle$ CK′H′ $=$ $\triangle$ CG′F $-$ $\triangle$ CH′F.

www.libtool.com.cn

II Aanmerking. Wanneer $a = b$ is, gaan de formulen over in $x = y = a \pm a$, dat is $= 2a$ of $= 0$. De bovenſte teekens geven dus voor dit geval CI $=$ CK $= 2a$, doch de benedenſte teekens toonen aan, dat de punten K′ en I′ dan beide in C vallen. Beide driehoeken en de vierhoek worden alsdan voor dit laatſte geval gelijk nul.

De oplosſing $x = y = 0$, waarbij de lijnen FI en FK door het punt C gaan, gaat altoos door, wat ook a en b zijn moge. Dat wij dit antwoord bij de algemeene oplosſing niet gevonden hebben, komt hiervan daan, dat wij de vergelijking (3) door x^2 gedeeld hebben; hadden wij de factor x^2 in deze vergelijking gelaten, zouden wij voor de vergelijking (4) gevonden hebben.

$$2x^4 - (3a + b)x^3 - a(b - a)x^2 = 0$$

in welke, daar zij twee wortels gelijk nul heeft, het geval $x = 0$ en dus ook $y = \frac{bx}{x - a} = 0$ begrepen is.

LXXXVIII. Voorstel.

Door O. S. Bangma.

Twee in ſtelling gegevene lijnen IK en LM (Fig. 68.) ſnijden elkander in B; nu begeert men uit eenig punt A, binnen den hoek IBM, twee lijnen te trekken, als AC en AD, ſnijdende de eerſte BI in E en BL in C, en de tweede BM in F en BK in D, zoodanig, dat driehoek CBE gelijk driehoek DBF gelijk vierhoek AEBF worde.

Oplossing. Door R. Lobatto en A. L. Hector.

Stellen wij dat AC en AD de gevraagde lijnen zijn, en dat de lijn CD getrokken is, dan blijkt het, uit voorſtel VII van dit Deel, dat AE $= \frac{1}{2}$ AC en AF $= \frac{1}{2}$ AD moet zijn. Het

komt er dan alleen op aan, om uit A de lijnen AC en AD zoodanig te trekken, dat zij door de gegevene lijnen IK en LM, in de reden van 1 tot 2 verdeeld worden: te dien einde late men uit A, op elk der gegevene lijnen, eene loodlijn, Ap en Aq, vallen, verdeele dezelve respectievelijk in de punten p' en q', zoodanig dat $Ap' = \frac{1}{3} Ap$ en $Aq' = \frac{1}{3} Aq$ zij; trekt men nu $p'F$ evenwijdig met IK en $q'E$ evenwijdig met LM, dan zullen E en F de punten zijn, waardoor uit A de lijnen AC en AD moeten getrokken worden; want $AF : AD = Ap' : Ap = 1 : 3$ en $AE : AC = Aq' : Aq = 1 : 3$.

www.liptool.com.cn

LXXXIX. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Door een gegeven punt E (Fig. 69.) tusschen de beenen van eenen voorgestelden hoek GAH, twee lijnen te trekken, snijdende de eene AG in B en AH in F, en de andere AG in D en AH in C, zoodanig, dat driehoek EBD gelijk driehoek ECF gelijk vierhoek ADEF worde?

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR.

Trek EL en EM evenwijdig met AH en AG; maak $LB = 3\,LA$ en $MC = 3\,AM$, en trek de regte lijnen BEF en CED, dan zullen deze de begeerde zijn.

BEWOOG. Omdat ALEM een parallelogram is, zoo is $\triangle ELA = \triangle EAM$. Verder is,

$\triangle EMF : \triangle EAM = FM : AM = FE : BE = AL : LM = 1 : 3$

dus $\triangle EAM = 3 \triangle EMF$

$\triangle ELD : \triangle ELA = DL : LA = DE : EC = AM : MC = 1 : 3$

dus $\triangle ELA = 3 \triangle ELD$.

waaruit volgt $\triangle EMF = \triangle ELD$

en *vierhoek* $ADEF = 2 \triangle EAM + 2 \triangle EMF = 8 \triangle EMF = 8 \triangle ELD$

Maar $BL = 3\,AL$ zijnde is $\triangle BEL = 3 \triangle EAL = 9 \triangle EDL$, en bij gevolg $\triangle BED = 8 \triangle ELD$.

En $CM = 3\,AM$ zijnde is $\triangle ECM = 3 \triangle EMA = 9 \triangle EMF$, bij gevolg $\triangle BCF = 8 \triangle EMF$, waaruit dan eindelijk volgt

$\triangle BED = \triangle ECF =$ *vierhoek* ADEF.

XC. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT

Wanneer van twee gelijke parabolen, de eene over den omtrek van de andere rolt, en bij den aanvang der beweging de toppen

op

op elkander liggen, vraagt men, welke lijn er gedurende die omwenteling, door het brandpunt van de bewegende parabool zal beſchreven worden?

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Laat RAS (*Fig.* 70.) de bewegende parabool in den eerſten ſtand zijn, rustende met den top A op die van de vaste parabool PAQ, en laat R′A′S′ de bewegende parabool in eenigen willekeurigen ſtand verbeelden, dan is door de bepaling van het voorſtel AF = AF′ = A′F″ = ¼ *parameter*, en *Boog* AD = *Boog* A′D. Uit deze gelijkheid der bogen AD en A′D, bij gelijke parameters, volgt nu terſtond dat de voerſtralen, FD en F″D gelijk zijn, en dat, HI raaklijn van beide parabolen aan het punt D zijnde, ∠ F″DH = FDH zal zijn, en dat alzoo de hoek FDF″ door de raaklijn midden door gedeeld is. Daar nu, in de parabool, de raaklijn van eenig punt den hoek, dien de voerſtraal met het verlengde van de middellijn maakt, midden door deelt, zoo volgt hieruit, dat FD en F″D de verlengde zijn van de middellijnen, die in beide parabolen, tot het punt D behooren; en wij hebben alzoo DF″ *evenw.* AB en DF *evenw.* A′B′.

Daar dan DF″ evenwijdig aan AB en gelijk FD is, zoo is F″ een punt van de *rigtlijn* der vaste parabool; en daar dit zelfde beſluit in iederen ſtand van de bewegende parabool doorgaat, zoo volgt hieruit, dat de rigtlijn LM van de vaste parabool, de lijn zal zijn, welke door het brandpunt van de bewegende parabool doorloopen wordt.

XCI. VOORSTEL.

Door L. R. SCHMIDT.

Alles hetzelfde zijnde als in het voorgaande voorſtel, vraagt men, welke lijn er gedurende de omwenteling, door het toppunt der bewegende parabool beſchreven zal worden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Laat alles, als in de oplosſing van het vorige vraagſtuk onderſteld zijnde, AA′ getrokken worden, tot zij de verlengde DF″ ontmoet in E. Daar nu in het voorgaande vraagſtuk gebleken is, dat DF = DF″; AF = A′F″ en ∠ AFD = ∠ A′F″D is, zoo is AA′ evenwijdig met FF″; maar DE evenwijdig AB, dus FAEF″ een paralelogram, en F″E = AF = AF′ = A′F″; het punt E ligt dus onophoudelijk in de regte lijn NO, even-

wij-

wijdig aan LM, en van dezelve op eenen afſtand F′G = F′A verwijderd.

Laat nu op AG, als middellijn, eenen cirkel beſchreven worden, ſnijdende AE in K, en laat F′K getrokken worden, dan is, in de gelijkbeenige driehoeken AF′K en A′F″E, AF′ = F′K = A′F″ = F″E; en, omdat ED evenwijdig AB is, ∠ F′AK = ∠ A′EF″; de driehoeken AF′K en A′EF″ zijn dus gelijk en gelijkvormig, en bij gevolg AK = A′E.

Wanneer dus AT een der takken van onze kromme lijn is, volgt uit het bovenſtaande, voor dezelve deze eigenſchap: „ Dat „ trekkende uit eenig willekeurig punt A′ van de kromme, de „ regte AA′E, het ſtuk A′E van deze lijn, begrepen tuſſchen „ de kromme en de lijn NO, altoos gelijk zal zijn aan de koor- „ de AK, welke de cirkel op AG van dezelve afſnijdt." Dit is nu de kenſchetſende eigenſchap van de *Ciſſoide van Diocles;* en het is dus zulk eene Ciſſoide, welke door den top van de bewegende parabool beſchreven wordt; zijnde de radius AF′, van derzelver *makenden cirkel*, gelijk een vierde van den parameter der parabool.

Gevolg: Wanneer uit eenig punt F, willekeurige lijnen FF″ naar eene regte lijn LM getrokken worden, en uit de punten F″ lijnen F″A′ getrokken worden, welke alle gelijk de halve perpendiculair FF′ zijn, en welke met FF″ eenen hoek FF″A′ = F″FA maken, dan zal de plaats van het punt A′ eene Ciſſoide zijn, waarvan het punt A, dat FF′ midden door deelt, de top en ½ FF′ de ſtraal van den makenden cirkel zal zijn.

XCII. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Wanneer eene Ellips om eene andere gelijke en gelijkvormige Ellips wordt henen gerold, en bij den aanvang der beweging de uiteinden der groote aſſen op elkander liggen, begeert men de kromme lijn te bepalen, welke gedurende die beweging door de brandpunten der bewegende Ellips beſchreven wordt?

Oplossing. Door I. R. Schmidt en A. L. Hector.

Laten F en *f* (*Fig* 71.) de brandpunten der vaste, en F′ en *f*′ die van de bewegende Ellips bij den aanvang der beweging, zijn; terwijl F″ en *f*″ de brandpunten van de bewegende Ellips in eenigen willekeurigen ſtand verbeelden. Wegens de gelijk-

lijkheid der Ellipſen, en de bepaling van het voorſtel is dan *Boog* DA = *Boog* DA′ en DF = DF″. Wanneer dus DI de raaklijn van beide Ellipſen in het punt D is, dan zal ∠ FDI = ∠ F″DI zijn, en DI zal dus den hoek FDF″ midden door deelen, doch uit den aard van de Ellips maakt deze raaklijn met beide voerſtralen DF en D*f* gelijke hoeken, waaruit volgt dat DF″ het verlengde van D*f*, en D*f*″ het verlengde van DF is. Wij hebben dus F*f*″ = *f*F″ = FD + D*f* = AB, en daar dit in alle ſtanden van de bewegende Ellips doorgaat, zoo volgt hieruit ten duidelijkſte, dat het punt F′ gedurende de beweging eenen cirkel om het punt *f*, en het punt *f*″ eenen cirkel om het punt F beſchrijft; zijnde de ſtralen van deze cirkels gelijk de groote as van de gegevene Ellipſen.

Gevolg. Men kan uit deze oplosſing gemakkelijk die van voorſtel XC afleiden; want wanneer, A en F hetzelfde blijvende, het punt *f* oneindig ver van F verwijderd is, gaat de Ellips over in eene parabool; de lijnen D*f* worden dan evenwijdig aan AB, en dus middellijnen van de parabool, terwijl de cirkel uit *f* met *f*F′ = AB beſchreven, alsdan eenen oneindigen ſtraal verkrijgt, en alzoo overgaat in eene regte lijn, door het punt F′ gaande en loodregt op AF′.

XCIII. VOORSTEL.

Door I. R. Schmidt.

Alles als in het voorgaande voorſtel zijnde, vraagt men welke de vergelijking is van de lijn, die door het middelpunt van de bewegende Ellips beſchreven wordt?

Oplossing. Door I. R. Schmidt en A. L. Hector.

De middellijn B″A′ (*Fig.* 71.) worde verlengd tot zij BB′ ſnijdt in I. Omdat nu FD = F″D; ∠ DFI = ∠ DF″I; ∠ FDI = ∠ F″DI; FA = F″A′ en FC = F″C″ is, zoo is het klaar dat de raaklijn van D door het punt I gaat, dat AI = A′I en CI = C″I is; dat AA′ en CC″ evenwijdig met FF″ zijn; en dat DI de lijnen AA′, FF″ en CC″ regthoekig doorſnijdt.

Om nu de polaire vergelijking van de gevraagde kromme lijn te vinden, ſtellen wij CC″ = Z, ∠ ICC″ = ∠ IAK = ∠ IDM = ϕ; verder AM = x en MD = y; de halve groote as AC = a en de halve kleine as gelijk b; dan is, door de beken

kende eigenſchap van de Ellips $y = \frac{b}{a} V(2ax - x^2)$; en verder de ſubtangens $IM = \frac{2ax - x^2}{a - x}$; dus $IC = IC' = IM + MC = \frac{2ax - x^2}{a - x} + a - x = \frac{a^2}{a - x}$.

www.libtool.com.cn

Nu is $CH = IC \cdot Cos.\ ICH$, of $\frac{1}{2}z = \frac{a^2}{a - x} \cdot Cos.\ \phi$, en dus $z = \frac{2a^2}{a - x} \cdot Cos.\ \phi$. Verder is $MD = MI \cdot Tang.\ MID = MI \cdot Cot.\ ICH$, dat is: $y = \frac{2ax - x^2}{a - x} \cdot Cot.\ \phi$, en daar $y = \frac{b}{a} V(2ax - x^2)$ is, zoo is $\frac{b}{a} V(2ax - x^2) = \frac{2ax - x^2}{a - x} \cdot Cot.\ \phi$; hieruit is $\frac{V(2ax - x^2)}{a - x} = \frac{b}{a} \cdot Tang.\phi$, of quadraterende, $\frac{2ax - x^2}{(a - x)^2} = \frac{b^2}{a^2} Tang^2.\ \phi$; en tellende aan beide zijden de eenheid bij $\frac{a^2}{(a - x)^2} = \frac{a^2 + b^2\ Tang^2.\ \phi}{a^2}$; waaruit de wortel is $\frac{a}{a - x} = \frac{\pm V(a^2 + b^2 Tang^2.\phi)}{a}$, of wel $\frac{a^2}{a - x} = \pm V(a^2 + b^2\ Tang^2.\ \phi)$; en brengende dit over in $z = \frac{2a^2}{a - x} \cdot Cos.\ \phi$ dan komt er

$$z = \pm 2\ Cos.\ \phi \times V(a^2 + b^2\ Tang^2.\ \phi), \text{ dat is}$$

$$z = \pm 2 V(a^2\ Cos^2.\ \phi + b^2\ Sin^2.\ \phi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

voor de polaire vergelijking der kromme lijn door het middelpunt der bewegende Ellips beſchreven.

Iedere waarde van ϕ geeft dus voor z eene poſitieve en eene negatieve, doch gelijke waarde; de poſitieve moet op de lijn CH genomen worden, welke met de as AC de hoek ϕ maakt, en de negatieve moet bijgevolg genomen worden op het verlengde van HC. Dit verſchaft ons dus voor iedere waarde van ϕ twee punten C', welke even ver van C afſtaan, en hieruit volgt, dat iedere lijn, welke door het punt C gaat, door dit punt C in twee gelijke deelen wordt gedeeld. Daar bovendien z niet

van

van waarde verandert, het zij ϕ negatief dan wel positief genomen worde, zoo bestaat de kromme $C'c\ C''c'\ C'$ uit vier gelijke en gelijkvormige takken $C'c$; cC''; $C''c'$ en $c'C'$, en zij heeft C tot middelpunt.

www.hbtool.com.cn

Stellen wij $C''N = v$ en $CN = u$, dan is $z = \sqrt{(u^2+v^2)}$, $Cos.\ \phi = \frac{u}{z}$ en $Sin.\ \phi = \frac{v}{z}$, en substituerende dit in de vergelijking (α) dan zal er komen

$u^2+v^2 = 2\sqrt{(a^2u^2+b^2v^2)}$ of $(u^2+v^2)^2 = 4(a^2u^2+b^2v^2)$

dat is: $u^4+2u^2v^2+v^4-4a^2u^2-4b^2v^2 = 0$ . . (β)

voor de vergelijking der regtstandige coördinaten van onze kromme, uit welke vergelijking zoo wel u in v als v in u gemakkelijk kan worden afgezonderd.

Daar CH overal gelijk $\frac{1}{2}$ CC'' is, zoo is onze kromme lijn gelijkvormig aan de kromme lijn door het punt H beschreven, onze gevondene vergelijking is dus ook de vergelijking voor de kromme, welke geboren wordt door uit het middelpunt eener Ellips loodlijnen op al de tangenten te trekken.

Dit geeft ons een gemakkelijk middel aan de hand, om onze kromme door punten te beschrijven, want hiertoe behoeft slechts op de assen $C'C''$ en $c'c$, dat is: op de dubbelde assen der gegevene Ellips, eene Ellips beschreven te worden, indien dan uit het middelpunt C, loodlijnen op al de raaklijnen van deze Ellips getrokken worden, zullen de daaruit voortkomende punten C'' onze kromme lijn vormen. Deze Ellips is in de figuur, om geene verwarring te veroorzaken weggelaten, doch het is klaar, dat zij geheel binnen onze kromme zal liggen, en de vier punten C', C'', c en c' met dezelve gemeen zal hebben.

XCIV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Alles als in de twee voorgaande voorstellen blijvende, wordt de vergelijking gevraagd van de krommen, welke de toppen der bewegende Ellips zullen beschrijven?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Wanneer wij, van de voorgaande oplossing gebruik makende, alles als daar onderstellen, behalven dat A (*Fig.* 71.) voor pool genomen, en dus $AA' = z$ gesteld wordt, dan is $AK = AI \times Cos.\ IAK$, dat is $\frac{1}{2}z = AI \times Cos.\ \phi$; nu is $AI = CI - AC$,

en

en makende gebruik van hetgeen in de vorige oplosſing gevonden is, $AI = \frac{a^2}{a-x} - a = \frac{ax}{a-x}$; doch aldaar is gevonden $\frac{a^2}{a-x} = \pm V(a^2 + b^2\ Tang^2.\ \phi)$ en bijgevolg is $AI = \frac{ax}{a-x} = -a \pm V(a^2 + b^2\ Tang^2.\ \phi)$, waardoor wij hebben $z = 2\ AI\ .\ Cos.\ \phi = 2\ Cos.\ \phi \{-a \pm V(a^2 + b^2\ Tang^2.\ \phi)\}$, dat is:

$$z = -2a\ Cos.\ \phi \pm 2V(a^2\ Cos^2.\ \phi + b^2\ Sin^2.\ \phi) \quad . \quad (\alpha)$$

Het is klaar dat $a = b$ zijnde, de gegevene Ellipſen cirkels zijn, en dat dan de kromme moet overgaan in de gewone *Epicycloide*, welke wij in *voorſtel* 121 *van het IIe. deel der Verzameling van voorſtellen* breedvoerig behandeld hebben. En inderdaad, ſtellende $a = b$, dan verandert onze vergelijking in $z = 2a\ (1 - Cos.\ \phi)$, hetwelk dezelfde vergelijking is, die wij aldaar hebben opgegeven.

Om de vergelijking der regtſtandige coördinaten te verkrijgen, ſtellen wij $AL = u$ en $A'L = v$ dan is $z^2 = u^2 + v^2$; $Cos.\phi = \frac{u}{z}$ en $Sin.\ \phi = \frac{v}{z}$, en ſubſtituerende dit in de vergelijking (α) dan komt er

$$z = -2a\ .\ \frac{u}{z} \pm \frac{2V(a^2u^2 + b^2v^2)}{z}$$

$$\text{of } z = u^2 + v^2 = -2au \pm 2V(a^2u^2 + b^2v^2)$$

$$\text{dat is: } (u^2 + 2au + v^2)^2 = 4(a^2u^2 + b^2v^2) \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

wij zullen echter, van deze vergelijking geen verder gebruik maken, daar, hetgeen wij over deze onze kromme lijn nog meenen aan te merken, veel gemakkelijker uit de polaire vergelijking (α) is op te maken.

In de vergelijking (α) beſtaat de waarde van z uit twee deelen, waarvan het eerſte, $-2a\ Cos.\ \phi$, negatief is zoo lang $\phi < 90°$ is, doch poſitief wanneer $\phi > 90°$ wordt; het tweede deel heeft daarenboven het dubbelde teeken, waaruit volgt; *dat voor ieder hoek* $IAK = \phi$ *de punten* A' *en* A'' *gevonden worden, door* $AG = 2a\ Cos.\ \phi$ *te nemen, op het verlengde van* KA *wanneer* $\phi < 90°$ *en op* KA *zelve wanneer* $\phi > 90°$ *is; en vervolgens* $GA' = GA'' =$

$2V$

$\pm\sqrt{(a^2\,Cos^2.\,\phi + b^2\,Sin^2.\,\phi)}$ *te maken*; maar $AG = 2\,a\,Cos.\,\phi = AB$. *Cos.* GAB zijnde, is $\angle AGB$ een regte hoek, en hier uit volgt: *dat het punt G beſtendig in den cirkel op AB ligt, en dat dus deze cirkel al de lijnen $A'A''$, door A gaande, midden door deelt.*

Merken wij nu op, dat in het vorige Voorſtel gevonden is $CC'' = \pm 2\sqrt{(a^2\,Cos^2.\,\phi + b^2\,Sin^2.\,\phi)}$, en dat aldaar ϕ dezelfde waarde heeft als hier, zoo hebben wij $A''G = GA' = CC''$, en dit toont ons eene zeer merkwaardige overeenkomst aan, tuſschen de kromme lijnen door het punt A' en het punt C'' beſchreven; uit hoofde van welke betrekking de eene zeer gemakkelijk door middel van de andere kan worden geconſtrueerd. Willen wij, bij voorbeeld, onze tegenwoordige kromme lijn, door middel van die uit het vorige Voorſtel, conſtrueren, zoo behoeven wij flechts op AB eenen cirkel te beſchrijven; verder in de kromme lijn $C'cC''c'$, door C eene willekeurige lijn $C''C'$ en door A de daarmede evenwijdige $A'A''$ te trekken; nemen wij dan hierop $GA'' = GA = CC''$, of wel, trekkende CG en daarmede evenwijdig $C''A$ en $C''A'$, dan zullen A' en A'' punten van de begeerde kromme zijn.

Wij zullen hier niet verder over de eigenſchappen van onze kromme uitweiden; dezelve kunnen gemakkelijk gevonden worden, door de vergelijking (*a*) op dezelfde wijze te behandelen, als in het reeds genoemde 121e Voorſtel is aangewezen. Alleen merken wij nog aan, dat A een keerpunt is, en dat de kromme welke de top B' beſchrijft, volkomen gelijk en gelijkvormig is aan de kromme door A' beſchreven; zij ligt echter in omgekeerde rigting en heeft dus haar keerpunt in B.

Wij eindigen deze oplosſing met aan te merken, dat, verlengende AA' en fF'' tot zij elkander in E ontmoeten, $Ff : Af = F''f : Ef = AB : Ef$ en dus $Ef = \frac{AB \times Af}{Ff}$ eene conſtante grootheid is. Het punt E ligt dus beſtendig in den omtrek van eenen cirkel, uit f als middelpunt beſchreven, met eenen ſtraal welke eene vierde evenredige is tot fF, AB en Af. Deze eigenſchap is volkomen analogisch met het bewezene voor het punt E in *Fig.* 70, *Voorſtel* 91. Wij zouden zelfs de geheele oplosſing van het 91e Voorſtel, uit deze oplosſing kunnen afleiden, door den afſtand $fF = f'F'$ der brandpunten oneindig groot te ſtellen;

doch wij zullen dit als te omslagtig en tot ons oogmerk minder dienstig zijnde, achterlaten.

XCV. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Men vraagt hetzelfde, dat in de drie laatst voorgaande Voorstellen gevraagd is, in het geval, dat de gegevene lijnen, in plaats van Ellipsen, gelijke Hyperbolen zijn, welke, onder dezelfde beperking, over elkander heenen vallen.

Oplossing. Door I. R. Schmidt en A. L. Hector.

Dit Voorstel staat met de drie voorgaande in zulk eene naauwe betrekking, dat wij de oplossingen dier Voorstellen stap voor stap zullen kunnen volgen, en alleen zullen behoeven aan te toonen, welke wijziging de bijzondere eigenschappen, die wij aldaar gevonden hebben, behooren te ondergaan. Wij hebben te dien einde al de overeenkomstige punten in *Fig.* 71. en *Fig.* 72. met dezelfde letters geteekend, en zullen verder alle overeenkomstige lijnen en hoeken door dezelfde teekens aanduiden.

Laten dan TAS en TBS (*Fig.* 72.) de takken van de gegevene hyperbool zijn, en T′AS′ en T′B′S′ de takken van de bewegende hyperbool in derzelver eersten stand, terwijl T″A′S″ en T″B″S″ de bewegende hyperbool in eene willekeurige stelling verbeelden: wij bewijzen dan, even als in de voorgaande Voorstellen, dat DF = DF″ is, en dat de raaklijn DI den hoek FDF″ midden door moet deelen. Daar echter uit den aard van de hyperbool die raaklijn den hoek *f*DF der voerstralen midden door deelt, zoo valt F″ altoos op den voerstraal *f*D, en *f*″ op den voerstraal FD, waaruit volgt: $fF'' = f''F = fD - FD = AB$. *Het brandpunt F″ beschrijft dus een' cirkel om het brandpunt f, en het brandpunt f″ een' cirkel om het brandpunt F, wijnde de stralen van deze cirkels, ook hier, gelijk de groote as van de hyperbool.*

Om zich een duidelijk denkbeeld te vormen, hoe deze geheele cirkels door de brandpunten kunnen worden beschreven, moeten wij opmerken, dat ieder punt D van den tak A′S″ achtervolgens op ieder overeenkomstig punt van den tak AS komt te leggen, tot dat, bij de oneindig afgelegene punten S en S″, de asymptoten XX′ op elkander vallen, en gedurende die beweging doorloopt het brandpunt F″ den cirkelboog F′*m*; doch deze asymptoten XX′ op elkander liggende, liggen ook de oneindig af-

afgelegde punten S en S' van de evenstijdige takken $B''S'$ en RS op elkander; en dan begint, bij de voortduurende beweging, ieder punt van den tak $S'B''$ op ieder overeenkomstig punt van den tak SR te liggen, tot dat B'' op B valt, en gedurende dien tijd beschrijft het brandpunt F'' den cirkelboog nn'. Op dezelfde wijze doorloopt nu F'', gedurende de beweging van den tak $B''T''$ langs de tak BT, den cirkelboog nn', tot dat de asymptoten YY' op elkander vallen, en dus wordt eindelijk de cirkelboog $n'F'$ beschreven, terwijl de tak $A'T''$ over den tak TA heenrolt. Deze aanmerking geldt niet alleen voor de cirkels door F'' en f'' beschreven, maar moet ook dienen, om ons de zamenhang der lijnen, door de toppen en het middelpunt van de bewegende hyperbool getrokken, te doen bevatten. —

Nemen wij nu in aanmerking dat hier, even als in de twee voorgaande Voorstellen, AA' en CC'' evenwijdig zijn met FF'', en dat, de vergelijking der hyperbool $\overline{y} = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax + x^2)}$ zijnde, hier $AI = \frac{ax}{a+x}$ en $IC = \frac{bx}{a+x}$ is, zoo zullen wij, op dezelfde wijze als in de voorgaande Voorstellen werkende, vinden:

1°. Dat, stellende $CC'' = z$ en $\angle ICC'' = \phi$, wij zullen hebben

$$z = \pm p\sqrt{(a^2 Cos.^2\phi - b^2 Sin.^2\phi)} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

voor de polaire vergelijking der kromme lijn, door het middelpunt der bewegende hyperbool beschreven, de pool in het middelpunt C van de rustende hyperbool zijnde. Hieruit volgt wederom, dat iedere lijn n', door het middelpunt C gaande, door dit punt C in twee gelijke deelen wordt gedeeld, en dat de kromme uit vier volmaakt overeenkomstige takken als CC'' zal bestaan.

2°. Dat, $CN = x$ en $C''N = y$ stellende, wij voor de vergelijking van de regthoekige coördinaten, van dezelfde kromme zullen hebben

$$x^4 + 2y^2x^2 \pm 2a^2x^2 = 4a^2y^2 - 4b^2y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Deze vergelijking geeft, voor $x = 0$, ook $y = 0$, en voor $x = \pm 2a$, mede $y = 0$, en dit toont aan, dat de kromme de as in de punten C'', C en C' doorsnijdt. Zij geeft voor iedere waarde van y, begrepen tusschen $+2a$ en $-2a$, bestaanbare

waarden voor u, doch voor iedere andere waarde van u, wordt v onbeſtaanbaar. Verder blijft v hetzelfde, of u poſitief dan wel negatief genomen wordt, en iedere waarde van u geeft ſlechts twee beſtaanbare waarden voor v, die alleen van teeken verſchillen, en deze omſtandigheden zijn voldoende, om ons de loop van de kromme te doen kennen, welke bijkans de gedaante van de cijferletter 8 heeft.

Daar CH = HC′ is, hebben wij hier deze conſtructie voor onze kromme. „ Laten, uit het middelpunt C, loodlijnen CH „ op al de raaklijnen van de vaste hyperbool getrokken worden; „ indien dan deze loodlijnen verlengd worden tot CC′ = 2 CH „ zij, dan zullen hierdoor al de punten C′ van onze kromme „ ontſtaan." — De overeenkomst van dit alles, met het gevondene in Voorſtel 93 is te ſprekende, om er langer bij ſtil te ſtaan.

3°. Dat, ſtellende AA′ = a en ∠ IAA′ = ∠ ICC′ = ϕ, wij op dezelfde wijze als in het 94e Voorſtel, zullen verkrijgen

$$z = 2\,Cos.\,\phi\,(a \pm \sqrt{(a^2 - b^2\,Tang^2.\,\phi)}).$$

of $z = 2a\,Cos.\,\phi \pm 2\sqrt{(a^2\,Cos^2.\,\phi - b^2\,Sin^2.\,\phi)}$ . . (α′)

Hieruit blijkt wederom, dat AG = $2a\,Cos.\,\phi$ nemende, GA′ = GA″ = CC′ = $2\sqrt{(a^2\,Cos^2.\,\phi - b^2\,Sin^2.\,\phi)}$ zal moeten genomen worden, om de punten A′ en A″ van de kromme te verkrijgen, die door het toppunt A beſchreven wordt. Hier moet echter AG op de lijn AK zelve genomen worden, zoo lang $\phi < 90°$, doch op derzelver verlengde, indien $\phi > 90°$ is. Verder blijkt het hier even gemakkelijk, dat G altoos in den cirkel op AB gelegen is; dat dus deze cirkel al de lijnen A′A″, door het punt A gaande, in G midden door deelt, en dat dus onze kromme wederom gemakkelijk kan worden geconſtrueerd, door middel van de kromme, die het middelpunt C′ beſchrijft. Deze conſtructie is wederom geheel overeenkomſtig met die, welke wij in het 94e Voorſtel voor de Ellips gevonden hebben.

De polaire vergelijking wordt gemakkelijk herleid tot die van de regthoekige coördinaten, waarbij AL = u en A″L = v is; even als in het voorgaande Voorſtel, vinden wij hier

$$(u^2 - 2au + v^2)^2 = 4\,(a^2u^2 - b^2v^2) \quad . \quad . \quad (\beta')$$

Uit de waarde van z kan men overigens gemakkelijk opmaken, dat A een keerpunt is, en dat de polaire ordinaat zelve raak-

raaklijn van de kromme zal worden, in het geval dat $a = b\,Tang.\,\Phi$ of $Tang.\,\Phi = \frac{a}{b}$ is, hetwelk bij de punten Z en Z' plaats heeft.

www.libtool.com.cn

Het andere toppunt B' beſchrijft wederom eene kromme lijn, die met de kromme lijn, door A beſchreven, gelijk en gelijkvormig is, in eenen omgekeerden ſtand ligt, en haar keerpunt in B' heeft. Eindelijk blijft de eigenſchap, dat E eenen cirkel om *f* beſchrijft, hier even zoowel doorgaan, als in het vorige Voorſtel.

ALGEMEENE AANMERKING. — Wij kunnen van dit onderwerp niet afſtappen, zonder eene eigenſchap te hebben aangewezen, welke niet alleen toepaſſelijk is op de kromme lijnen, welke wij in dit en de vijf voorgaande Voorſtellen behandeld hebben; maar ook op alle kromme lijnen, welke geboren worden door eenig punt van eene kromme lijn, welke over eene andere gelijk- of ongelijkſoortige kromme lijn heenen rolt. Zie hier deze eigenſchap.

Wanneer (*Fig.* 73.) de kromme RS over de kromme PQ heenen rolt, en het punt A gedurende die beweging eene derde kromme lijn *rs* doorloopt, dan kan, in ieder oogenblik der beweging, het geheele vlak van de kromme RS begrepen worden eene cirkelvormige beweging om het raakpunt D te hebben, en de rigting van de kromme *rs*, door het punt A beſchreven, is bij gevolg loodregt op de lijn AD, die dit punt met het raakpunt D vereenigt; en daar in ieder punt de raaklijn dezelfde rigting als de kromme heeft, zoo volgt hieruit, dat de raaklijn *av*, van de kromme *rs* door A beſchreven, altoos loodregt op de lijn AD zal zijn.

Laat ons deze merkwaardige eigenſchap kortelijk op onze kromme lijnen toepaſſen.

1°. In *Fig.* 70, *Voorſtel* 90, is de raaklijn van ieder punt F' der lijn LM, loodregt op DF'. Dit is bovendien van zelfs duidelijk.

2°. In *Fig.* 70, *Voorſtel* 91, is de raaklijn van ieder punt A' der ciſſoide loodregt op DA.

3°. In *Fig.* 71 *en* 72, zijn de tangenten van de punten F' en *f'* der cirkels door de brandpunten beſchreven, loodregt op

BF^2 en Df^2. Dit blijkt ook uit de eigenſchap van den cirkel zelven, doch onze algemeene eigenſchap wordt er door bevestigd.

4°. In *Fig.* 71 *en* 72, is de raaklijn van ieder punt C^4 der kromme door het middelpunt beſchreven, loodregt op de lijn DC^4.

5°. In *Fig.* 71 *en* 72, is de raaklijn van ieder punt A', der kromme lijn door den top beſchreven, loodregt op DA'.

Al deze raaklijnen kunnen dus zeer gemakkelijk geconſtrueerd worden, en deze eigenſchappen der raaklijnen, zouden bij een nader onderzoek onzer krommen lijnen, van zeer veel dienst zijn.

XCVI. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Iemand gevraagd zijnde, hoe laat het was, antwoordde: de klok heeft, ſedert middag, 4½ maal zoo veel heele uren geſlagen, als tegenwoordig het uur is; vraage hoe laat het is den avond was?

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR en A. VAN DER SWAN.

Stel dat het x uren was; dan zijn de slagen, die de klok, ſedert middag, op de heele uren geſlagen heeft, gelijk aan de ſom van eene rekenkundige reeks van x termen, waarvan 1 de eerſte en x de laatſte term is; men heeft dus, volgens de onderſtelling, $\frac{x(x+1)}{2} = 4\frac{1}{2}x$, of $x + 1 = 9$, dus $x = 8$, en het was dus 8 uren in den avond.

XCVII. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Iemand gaat uit eene ſtad, en legt alle dagen 8 mijlen wegs af; ten zelfden tijde gaat een ander met hem uit dezelfde ſtad, en legt den eerſten dag 2, den tweeden dag 5, den derden dag 8, en zoo vervolgens alle dagen 3 mijlen meerder wegs af. Vrage hoe veel dagen zal de laatſte noodig hebben, om den eerſten in te halen?

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR en A. VAN DER SWAN.

Stel dat hij x dagen noodig heeft. De eerſte legt in dien tijd $8x$ mijlen af, en de tweede de ſom van de rekenkundige reeks $2 + 5 + 8 +$ enz. . . tot $3x - 1 = \frac{x(3x+1)}{2}$ mijlen. Men heeft dus de vergelijking $\frac{1}{2}x(3x + 1) = 8x$, of wel $3x + 1 = 16$, waaruit $3x = 15$ en $x = 5$, voor het begeerde aantal dagen.

XCVIII.

XCVIII. VOORSTEL.

Door R. LORATTO.

Onder alle driehoeken, welke in eenen zelfden cirkel beſchreven kunnen worden, en waarin eene der zijden tweemaal zoo groot is als eene der overige, diengenen te bepalen, welks inhoud een maximum of minimum is.

www.inbool.com.cn

ONTBINDING. Door R. LORATTO en A. L. HECTOR.

Stel (*Fig.* 74) ∠ A = x en ∠ B = y, dan is ∠ C = 180° — ($x + y$). Stellende dan de middellijn CD = m, zoo is

AC = CD × *Sin.* ADC = CD × *Sin.* ABC = m . *Sin.* y

en BC = CD × *Sin.* BDC = CD × *Sin.* BAC = m . *Sin.* x

Nu is △ ABC = ½ AC × BC × *Sin.* C, en ſubſtituerende hierin de waarden van AC × BC en C, dan komt er

△ ABC = ½ m^2 . *Sin.* x . *Sin.* y . *Sin.* ($x + y$) . . (α)

Volgens de opgaaf moet verder AC = 2 BC en bij gevolg *Sin.* y = 2 . *Sin.* x wezen. Hieruit volgt *Cos.* $y = \sqrt{(1 - Sin^2.y)} = \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)}$ en *Sin* ($x + y$) = *Sin.* x . *Cos.* y + *Cos* x . *Sin.* y = *Sin* $x \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)} + 2\,Cos.x\ Sin.x = Sin.x(2\,Cos.x + \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)})$ en hierdoor gaat de vergelijking (α) over in

△ ABC = m^2 . $Sin^3.x$ (2 *Cos.* $x + \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)}$) . . (β)

en daar de inhoud van dezen driehoek een maximum of minimum moet zijn, zoo is

$z = Sin^3.x\,(2\,Cos.x + \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)}) = max.$ of $min.$

Dit differentierende, vinden wij

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,Sin^2.x\,.\,Cos.x\,(2\,Cos.x + \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)} - \ldots$$

$$\ldots\ldots Sin^3.x\,.\left(2\,Sin.x + \frac{4\,.\,Sin\ x\,.\,Cos.x}{\sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)}}\right) = 0$$

of door $Sin^2.x$ deelende,

$$3\,Cos.x\,\{2\,Cos.x + \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)}\} = \frac{2\,Sin^2.x}{\sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)}} \times \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \{2\,Cos.x + \sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)}\}$$

welke door den gemeenen factor gedeeld, geeft

$$3\,Cos.x\,.\sqrt{(1 - 4\,Sin^2.x)} = 2\,Sin^2.x$$

$$\text{of } 9\,Cos^2.x\,.\,(1 - 4\,Sin^2.x) = 4\,Sin^4.x$$

ſtellende nu $1 - Sin^2.x$ in plaats van $Cos^2.x$, dan komt er na herleiding

$$32\,Sin^4.x - 45\,Sin^2.x + 9 = 0$$

Hieruit is $Sin^2.\ x = \frac{45 \pm \sqrt{873}}{64}$, doch daar $Sin^2.\ x$ niet grooter dan 1 kan zijn, zoo kan het benedenſte teeken alleen gelden; wij hebben dus $Sin^2.\ x = \frac{45 - \sqrt{873}}{64}$ en $Sin.\ x = \pm \frac{1}{8}\sqrt{(45 - \sqrt{873})}$. Daar echter eene negatieve ſinus tot een negatieven boog of tot eenen boog, die grooter dan 180° is, behoort, zoo kan hier het benedenſte teeken niet op onzen driehoek toepaſſelijk zijn, en wij behouden alzoo alleen

$$Sin.\ x = \tfrac{1}{8}\sqrt{(45 - \sqrt{873})} = 0{,}4913856$$

$$\text{en } Sin.\ y = 2\ .\ Sin.\ x = 0{,}9827712$$

en hieruit volgt $\angle A = x = 29°25'54''$; $\angle B = y = 79°20'56''$ en $\angle C = 180° - (x + y) = 71°13'10''$.

De hoeken gevonden zijnde, zijn ook de zijden bepaald; want wij hebben

$$BC = m\ .\ Sin.\ x = \tfrac{1}{8}\, m\sqrt{(45 - \sqrt{873})}$$

$$AC = m.2\,Sin.\ x = \tfrac{1}{4}\, m\sqrt{(45 - \sqrt{873})}$$

$$\text{en } AB = m.\ Sin.\ (x + y)$$

welke waarden gemakkelijk te conſtrueren zijn.

Er blijft dus nog alleen over, te onderzoeken of deze gevondene driehoek een maximum of minimum is. Uit de oplettende beſchouwing van het Voorſtel zelf blijkt reeds, dat hetgeen minimum kan zijn, omdat men eene der zijden zoo klein kan nemen als men wil, en dan de andere tweemaal zoo groot kan nemen; waardoor dus driehoekjes zullen ontſtaan, die zoo klein zijn als men ſlechts begeert. Dit wordt echter volkomen beſlist door de waarde te zoeken van $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; want men zal vinden, dat dezelve voor de gevondene waarde van x negatief wordt, en alzoo een maximum aanwijst.

XCIX. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Onder alle driehoeken, welke om eenen cirkel kunnen beſchreven worden, en waarin eene der zijden tweemaal zoo groot is als eene der overigen, diengenen te bepalen, welks inhond een maximum of minimum is.

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR en R. LOBATTO.

Laat ADE (*Fig.* 75.) de begeerde driehoek zijn. Stel den inhoud

houd des driehoeks I, den ſtraal des ingeſchreven cirkels r, en de zijde AD $= x$; dan is DE $= 2x$, en ſtellende AE $= y$, dan hebben wij

www.libtool.com.cn

$$I = \frac{AD+DE+AE}{2} \times r = \frac{r(3x+y)}{2} = max.\ of\ min.$$

$3x + y$ moet dus een maximum of minimum zijn, en bij gevolg $3\partial x + \partial y = 0$ zijn, waaruit volgt $\frac{\partial y}{\partial x} = -3$.

Wij kunnen den inhoud nog op eene andere wijze uitdrukken; want a, b en c de zijden van eenen driehoek zijnde, is de inhoud $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$, en wij hebben alzoo

$$I^2 = \tfrac{1}{16}(3x+y)(3x-y)(y+x)(y-x)$$

en deelende dit door $I = \frac{r(3x+y)}{2}$ komt er, na herleiding,

$$8rI = (3x-y)(y^2-x^2) = 3xy^2 - 3x^2 - y^3 + x^2y.$$

$3xy^2 - 3x^2 - y^3 + x^2y$ moet dus een maximum of minimum zijn, waaruit volgt $3y^2\partial x + 6xy\partial y - 9x^2\partial x - 3y^2\partial y + x^2\partial y + 2xy\partial x = 0$, dat is,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3y^2 + 2xy - 9x^2}{3y^2 - 6xy - x^2}$$

en ſtellende deze waarden van $\frac{\partial y}{\partial x}$ aan elkander gelijk,

$$\frac{3y^2 + 2xy - 9x^2}{3y^2 - 6xy - x^2} = -3, \text{ waaruit}$$

$$3y^2 - 9x^2 + 2xy = -9y^2 + 3x^2 + 18xy;$$

dus $12y^2 - 16xy - 12x^2 = 0$; of $3y^2 - 4xy - 3x^2 = 0$; waaruit $y = \frac{1}{3}x(2 \pm \sqrt{13})$; doch daar de zijde y hier niet negatief onderſteld kan worden, kunnen wij alleen het bovenſte teeken gebruiken, en hebben alzoo $y = \frac{1}{3}x(2+\sqrt{13})$.

De zijden AD, DE en AE ſtaan dus tot elkander in reden als de getallen $1 . 2$ en $\frac{1}{3}(2+\sqrt{13})$. Om dus de hoeken te vinden, behoeven wij deze getallen ſlechts als zijden aan te nemen, en dan vinden wij, door de bekende regels der driehoeksmeting,

$Sin.\frac{1}{2}D = \frac{1}{6}\sqrt{(4+2\sqrt{13})} = Sin.\ 33°55'$; dus $D = 67°50'$
$Sin.\frac{1}{2}A = \frac{1}{6}\sqrt{(6\sqrt{13}-6)} = Sin.\ 41°13'30''$; dus $A = 82°27'$
$Sin.\frac{1}{2}E = \frac{1}{6}\sqrt{(24-6\sqrt{13})} = Sin.\ 14°51'30''$; dus $E = 29°43'$

zijnde deze waarden in graden en minuten flechts ten naasten bij.

Wil men daarenboven nog de zijden in r uitdrukken, dan hebben wij uit het voorgaande,

$$I^2 = \frac{r^2(3x+y^2)}{4} = \frac{(9x^2-y^2)(y^2-x^2)}{16}$$

wanneer wij dit aan beide zijden door $3x+y$ deelen, en in plaats van y ftellen $\frac{1}{2}x(\sqrt{13}+2)$, dan zullen wij na behoorlijke herleiding vinden

$x^2 = \frac{8}{9}r^2(1+\sqrt{13})$, en hierdoor verkrijgen wij AD $= x = \frac{1}{3}r\sqrt{(6+6\sqrt{13})}$; DE $= 2x = r\sqrt{(6+6\sqrt{13})}$ en AE $= y = \frac{1}{2}x(\sqrt{13}+2) = \frac{1}{3}r\sqrt{(46+14\sqrt{13})}$.

Dat de gevondene driehoek een minimum is, valt zoo duidelijk in het oog, dat het niet noodig is, hiertoe de tweede differentialen te hulp te nemen.

C. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Onder alle driehoeken, welke om eenen cirkel kunnen beſchreven worden, en waarin een der hoeken het dubbelde is van een der overige, diengenen te bepalen, welks inhoud een maximum of minimum is.

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en A. L. HECTOR.

Laat (*Fig.* 75.) ADE de gevraagde driehoek zijn. Stellende dan $\angle$ D $= 2x$ en $\angle$ E $= 2y$, dan is $\angle$ A $= 180 - (2x+2y) = 2(90^\circ - (x+y))$; ſtellende dus den ſtraal des ingeſchrevenen cirkels r, dan is DR $=$ DT $= r \cdot Cot.\ x$; ER $=$ ES $= r \cdot Cot.\ y$ en AT $=$ AS $= r\ Tang.\ (x+y)$. Nu is de inhoud van den driehoek

$$I = \frac{AD+AE+DE}{2} \cdot r = \frac{2(DT+SA+CR)}{2} \cdot r$$

en brengende hierin de waarde van DT, SA en CR; dan komt er

$$I = r^2\ (Cot.\ x + Cot.\ y + Tang.\ (x+y))$$

maar volgens de opgaaf is $y = 2x$, dus $x+y = 3x$, en bij gevolg

$$I = r^2\ (Cot.\ x + Cot.\ 2x + Tang.\ 3x)$$

waaruit volgt, dat $Z = Cot.\ x + Cot.\ 2x + Tang.\ 3x$ een maximum of minimum moet zijn.

Wij kunnen deze termen eene merkwaardige herleiding laten ondergaan; want wanneer a, b en c drie boogen zijn, welke te

za-

samen 180° uitmaken, dan is (zie de Gelder; *Beginsels der Meetkunst* §. 569.)

Tang. a + *Tang.* b + *Tang.* c = *Tang.* a . *Tang.* b . *Tang.* c.

Nu zijn 90° — x; 90 — $2x$ en $3x$ te zamen gelijk aan 180°. en wij hebben dus

Tang. (90° — x) + *Tang.* (90° — $2x$) + *Tang.* $3x$ =
Tang. (90° — x) × *Tang.* (90° — $2x$) × *Tang.* $3x$

of *Cot.* x + *Cot.* $2x$ + *Tang.* $3x$ = *Cot.* x . *Cot.* $2x$. *Tang.* $3x$.

waaruit volgt

$$Z = Cot.\,x\,.\,Cot.\,2x\,.\,Tang.\,3x = \frac{Cos.\,x\;Cos.\,2x\,.\,Sin.\,3x}{Sin.\,x\,.\,Sin.\,2x\,.\,Cos.\,3x}$$

$$= \frac{Cos.\,2x}{Sin.\,2x} \times \frac{Sin.\,4x + Sin.\,2x}{Sin.\,4x - Sin.\,2x}$$

stellende hierin *Sin.* $4x$ = 2 *Sin.* $2x$. *Cos.* $2x$, en deelende, onder en boven, door *Sin.* $2x$, dan verkrijgen wij eindelijk

$$Z = \frac{Cos.\,2x}{Sin.\,2x} \times \frac{2\,Cos.\,2x + 2}{2\,Cos.\,2x - 1} = max.\ \text{of}\ minim.$$

$$\text{of } Z = Cot.\,2x \times \frac{2\,Cos.\,2x + 1}{2\,Cos.\,2x - 1} = max.\ \text{of}\ minim.$$

Dit gedifferentieerd, en $\frac{\partial Z}{\partial x}$ = 0 gesteld, vinden wij

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{4\,(2\,Cos.\,2x + 1)}{Sin^2.\,2x\,(2\,Cos.\,2x - 1)} + \frac{8\,Cos.\,2x}{(2\,Cos.\,2x - 1)^2} = 0$$

en stellende 1 — Cos^2. $2x$ in plaats van Sin^2. $2x$, herleidt zich deze vergelijking gemakkelijk tot

$$Cos^3.\,2x + Cos^2.\,2x - Cos.\,2x - \tfrac{1}{4} = \alpha.$$

De wortel uit deze vergelijking benaderende, vinden wij *Cos.* $2x$ = 0,7570685.

De twee andere wortels zijn negatief, en kunnen ons niet dienen; want *Cos.* $2x$ negatief zijnde, zou ∠ D = $2x$ grooter dan 90° en bij gevolg ∠ E = 2 ∠ D grooter dan 180°. zijn.

Uit *Cos.* $2x$ = 0,7570685 vinden wij nu ∠ D = $2x$ = 40°47′36″,82; dus ∠ E = 2 ∠ D = 81°35′13″,64 en bij gevolg ∠ A = 180° — (D + E) = 57°37′9″,54.

De hoeken bepaald zijnde, zijn ook de zijden bepaald, want wij hebben

$AD = DT + FT = r\,(Cot.\ x + Tang.\ 3x) = 4{,}507648 \times r$
$AE = AS + SE = r\,(Cot.\,2x + Tang.\ 3x) = 2{,}977042 \times r$
$DE = DR + RE = r\,(Cot.\ x + Cot.\ 2x) = 3{,}848156 \times r$

Het blijkt wederom zoo gemakkelijk, dat de hier gevondene driehoek een minimum moet zijn, dat het niet noodig is, dit door de waarde van $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ nader te onderzoeken; want hoe ſcherper de hoek D genomen wordt, des te grooter zal de inhoud van den driehoek zijn, en niets belet ons dezen hoek zoo ſcherp te maken als wij willen.

CI. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

In eenen gegevenen cirkel, eenen driehoek van gegeven inhoud en omtrek te plaatſen?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Stel de zijden van den driehoek x, y en z; den omtrek $2s$, den inhoud I en de middellijn van den omgeſchrevenen cirkel m. Stellende dan den ſtraal van den ingeſchreven cirkel r, dan is $I = sr$ en dus $r = I : s$.

Nu is, door de voorwaarden van het voorſtel, de omtrek $x + y + z = 2s$; de inhoud $\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = I = sr$, en de middellijn des ingeſchrevenen cirkels $xyz : 2I = m$.

Uit de laatſte vergelijking is $xyz = 2Im = 2srm$, en ontwikkelende de tweede, komt er, na gequadrateerd en door s gedeeld te hebben,

$$s^3 - (x+y+z)\,s^2 + (xy+xz+yz)\,s - xyz = sr^2;$$

brengende hierin de waarden van $x + y + z$ en xyz over, zoo wordt dezelve

$$-s^3 + (xy + xz + yz)\,s - 2srm = sr^2,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$xy + xz + yz = s^2 + 2rm + r^2.$$

Wij hebben alzoo van de getallen x, y en z, bekend de ſom gelijk $2s$, de ſom der producten twee aan twee genomen gelijk $s^2 + 2rm + r^2$ en het product gelijk $2srm$; waaruit volgt dat de gevraagde zijden de wortels moeten zijn van de vergelijking

$$u^3 - 2su^2 + (s^2 + 2rm + r^2)\,u - 2srm = 0$$

waardoor dus het voorſtel moet worden gehouden voor opgelost.

VOOR-

VOORBEELD. Zij gegeven $s = 21$, $m = \frac{65}{4}$ en $I = 84$; dan is $r = \frac{I}{s} = 4$, en wij verkrijgen de vergelijking

$$x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0$$

waaruit $x = 13$, 14 of 15, hetgeen dus de drie begeerde zijden zijn.

CII. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Eenen driehoek van gegevenen omtrek en grootſten inhoud, in eenen cirkel te beſchrijven.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Alles als in het voorgaande Voorſtel onderſtellende, zoo is aldaar gevonden,

$$xy + xz + yz = s^2 + 2rm + r^2; \text{ dat is}$$
$$x(y+z) + yz = s^2 + 2rm + r^2;$$

maar $y + z = 2s - x$ en $yz = \frac{2srm}{x}$, en bij gevolg

$$x(2s - x) + \frac{2srm}{x} = s^2 + 2rm + r^2$$

en rangſchikkende dit volgens de magten van r

$$r^2 - 2m \cdot \frac{s-x}{x} \cdot r = -s^2 + 2sx - x^2 = -(s-x)^2,$$

of, aan beide zijden $\frac{m^2(s-x)^2}{x^2}$ optellende,

$$\left(r - \frac{m(s-x)}{x}\right)^2 = \frac{(m^2 - x^2)(s-x)^2}{x^2},$$

waaruit gevonden wordt

$$r = \frac{s-x}{x}(m \pm \sqrt{(m^2 - x^2)}) \quad \ldots \quad (a)$$

Volgens het voorſtel moet nu I een maximum zijn; maar $I = sr$ en s conſtant zijnde, zal I een maximum zijn, wanneer r een maximum is; en wij hebben alzoo

$$r = \frac{s-x}{x}(m \pm \sqrt{(m^2 - x^2)}) = maximum$$

en dit differentierende, verkrijgen wij

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-x-(s-x)}{x^2}(m \pm \sqrt{(m^2-x^2)}) \pm \frac{s-x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{(m^2-x^2)}} = 0$$

of

of herleidende en met $x^2\sqrt{(m^2 - x^2)}$ multiplicerende,

$$= s(m\sqrt{(m^2 - x^2)} \mp (m^2 - x^2)) \mp x^3(s - x) = 0;$$

en wanneer wij hieruit $\sqrt{(m^2 - x^2)}$ afzonderen,

$$\mp sm\sqrt{(m^2 - x^2)} = x^3 - sm^2$$

hetgeen gequadrateerd en verder door x^4 gedeeld zijnde, geeft

$$x^4 - 2sm^2x + s^2m^2 = 0 \quad (\beta)$$

waarvan de wortels het begeerde moeten aanwijzen.

Het is bovendien gemakkelijk aan te tooneu, dat de gevraagde driehoek gelijkbeenig moet zijn, en dat de waarde van x uit de vergelijking (β) een der gelijke beenen zal worden; want stellende, dat bij gegeven omtrek en omgeschreven cirkel, de driehoek gelijkbeenig moest worden gemaakt, dan zouden wij hebben,

$$x + y + z = 2s \text{ en } \frac{xyz}{2\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}} = m;$$

stellende nu $y = x$, dan is uit de eerste, $2x + z = 2s$ of $z = 2(s - x)$, en substituerende deze waarden van y en z, in de tweede, komt er

$$\frac{x^2(s-x)}{\sqrt{s(s-x)^2(2x-s)}} = m;$$

dit gequadrateerd en onder en boven door $(s - x)^2$ gedeeld, geeft

$$\frac{x^4}{s(2x-s)} = m^2$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$x^4 - 2sm^2x + s^2m^2 = 0.$$

Daar dit nu juist de vergelijking (β) is, zoo volgt hieruit dat het eene Voorstel het andere in zich bevat, en dat alzoo voor het opgegevene Voorstel de driehoek niet alleen gelijkbeenig moet zijn, maar dat ook de waarde van x uit de vergelijking (β) gevonden, een der gelijke beenen zal zijn.

Wanneer dus x door middel van de vergelijking (β) gevonden is, hebben wij $y = x$ en $z = 2(s - x)$, waardoor alsdan het problema moet worden gehouden voor opgelost; wij merken echter nog op, dat de vergelijking (β), omdat in dezelve twee termen ontbreken, altoos twee oplosbaare wortels zal hebben, en dat de twee bestaanbare zullen moeten worden

ge-

getoetst aan de waarde van $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ om ons te verzekeren welke van dezelve, wezenlijk tot het maximum behoort.

www.libtool.com.cn

AANMERKING. De vergelijking (*a*) lost het volgende vraagstuk op. *Op eene gegevene lijn als basis, een' driehoek te beschrijven, waarvan den omtrek en de straal des omgeschreven cirkels gegeven is.* Ten minsten men vindt in dit geval door de vergelijking (*a*) den straal van den ingeschreven cirkel, en dan verkrijgt men de twee overige zijden y en z, door de vergelijkingen $y + z = 2s - x$ en $yz = \frac{2srm}{x}$. Het blijkt uit de vergelijking (*q*) dat de radius des ingeschreven cirkels twee verschillende waarden kan hebben, en hiervan kan men zich ook door de volgende constructie overtuigen. Men beschrijve eenen cirkel met den gegevenen straal $\frac{1}{2}m$, en stelle in denzelven de gegevene koorde x. Wanneer men dan met de twee uiteinden van die koorde als brandpunten, en met $2s - x$ als groote as eene Ellips beschrijft, dan is het klaar, dat de doorsnijding van deze ellips met den omgeschreven cirkel van den driehoek, het derde hoekpunt moet geven. Nu kan die ellips den cirkel in vier punten snijden, en in dit geval ontstaan er vier driehoeken, die aan de vraag voldoen; doch welke, twee aan twee genomen, niet anders dan in stand verschillen; in dit geval zullen beide waarden van r uit de vergelijking (*a*), y en z bestaanbaar maken, doch snijdt de ellips den cirkel slechts in twee punten, dan zal ook eene der waarden van r uit vergelijking (*a*) de waarden van y en z onbestaanbaar maken *enz.*

CIII. VOORSTEL.

Door M. J. ZUIDHOF.

Men begeert twee rationale getallen te vinden, waarvan het verschil een quadraat is; en zoodanig dat twaalfmaal het vierkant van het grootste, afgetrokken van de cubus van het kleinste, eene rationale cubus tot rest geven? (24)

OPLOSSING. Door A. L. HECTOR en M. J. ZUIDHOF.

Stel de getallen $x + y^2$ en x, dan moet $x^3 - 12(x+y^2)^2$, dat

(24) MEISNER's, *opgeloste Kunstspiegel*, *appendix* N°. 4, men begeert hier echter eene andere oplossing.

dat is $x^3 - 12x^2 - 24xy^2 - 12y^4$, eene rationale cubus zijn. Stel den wortel hiervan $x - 4$, dan vindt men

$$x^3 - 12x^2 - 24xy^2 - 12y^4 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

of $-24xy^2 - 12y^4 = 48x - 64$, dat is $(6y^2 + 12)x = 16 - 3y^4$

waaruit $x = \frac{16 - 3y^4}{6y^2 + 12}$, en ſtelt men hierin $y = 1$, dan wordt $x = \frac{13}{18}$; zoodat de gevraagde getallen worden $\frac{13}{18}$ en $\frac{31}{18}$.

Stelt men den wortel algemeener $x - ay$; dan heeft men $x^3 - 12x^2 - 24xy^2 - 12y^4 = x^3 - 3ax^2y + 3a^2xy^2 - a^3y^3$, en wanneer men hierin $12y^4 = a^3y^3$ of $y = \frac{12}{a^3}$ ſtelt, dan verdwijnen de twee uiterſte termen, en wij behouden

$$12x^2 + 24xy^2 = 3ax^2y - 3a^2xy^2$$

of door $3x$ deelende en de termen overbrengende

$$(ay - 4)x = (a^2 + 8)y^2$$

waaruit $x = \frac{a^2 + 8}{ay - 4} \times y^2 = \frac{a^4 + 8a^2}{12a^4 - 576}$.

Nemende hierin $a = 3$, dan is $y = 2\frac{1}{4}$ en $x = \frac{1377}{44}$, en de beide getallen zijn $\frac{6399}{176}$ en $\frac{5508}{176}$.

Daar men voor a eenig willekeurig getal kan nemen, kunnen wij voor dit Voorſtel een oneindig aantal antwoorden vinden. Men ziet ondertuſſchen dat, om voor x geene negatieve waarde te verkrijgen, $12a^4 > 576$ en $a > 2{,}632$ moet genomen worden.

Ook de eerſte oplosſing geeft een oneindig aantal van antwoorden, omdat men in dezelve y naar willekeur kan aannemen; doch dan moet, om niet in negatieve antwoorden te vervallen, $3y^4 < 16$ en dus $y < 1{,}5$ *enz.* genomen worden, en men kan bij gevolg voor y elke eigenlijke breuk aannemen.

CIV. VOORSTEL.

Door M. J. ZUIDHOF.

Van eenen driehoek ABC (Fig. 76.) is de baſis $BC = 2\sqrt{3}$, *de ſom der opſtaande zijden AB en AC,* $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, *en de hoek B bevat* 45°; *vrage naar de overige hoeken en zijden.* (25)

OPLOSSING. Door M. J. ZUIDHOF en A. L. HECTOR.

Om-

(25) MEISNER's, *opgeloste Kunſtſpiegel, appendix* N. 81.

Omdat $\angle B = 45°$ is, zoo is ook $\angle BAD = 45°$, en dus is $BD = AD$.

Stel de loodlijn $AD = x$, dan is ook $BD = x$ en dus $AB = \sqrt{(AD^2 + BD^2)} = x\sqrt{2}$, en $DC = BC - BD = 2\sqrt{3} - x$.

Voorts is $AC = \sqrt{(CD^2 + AD^2)} = \sqrt{((2\sqrt{3} - x)^2 + x^2)}$; dat is, $AC = \sqrt{(2x^2 - 4x\sqrt{3} + 12)}$; maar, $AB + AC = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ zijnde, zoo verkrijgen wij

$$x\sqrt{2} + \sqrt{(2x^2 - 4x\sqrt{3} + 12)} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}, \text{ of}$$
$$\sqrt{(2x^2 - 4x\sqrt{3} + 12)} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - x\sqrt{2}$$

en quadraterende

$$2x^2 - 4x\sqrt{3} + 12 = 2x^2 - 12x - 4x\sqrt{3} + 24 + 12\sqrt{3}$$

of $12x = 12 + 12\sqrt{3}$, waaruit $AD = BD = x = 1 + \sqrt{3}$.

Hierdoor vinden wij $AB = x\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ en $AC = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - AB = 2\sqrt{2}$.

Om de overige hoeken te vinden, hebben wij

$$AC : BC = \textit{Sin.}\ 45° : \textit{Sin.}\ A, \text{ dat is,}$$
$$2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \textit{Sin.}\ A$$

dus $\textit{Sin.}\ A = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \textit{Sin.}\ 60°$. zoodat $\angle A = 60°$ en bijgevolg $\angle C = 15°$.

CV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Van eenen regten kegel is de ſtraal van het grondvlak a, en de hoogte of as van den kegel is h; men vraagt hierdoor den ſtraal en den inhoud van den ingeſchrevenen bol te vinden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

TPU (*Fig. 77.*) zij een gelijkbeenige driehoek, en ZWR deszelfs ingeſchreven cirkel; wanneer dan deze geheele figuur om de as PZ omwentelt, dan beſchrijft de driehoek eenen regten kegel en de cirkel deszelfs ingeſchreven bol; de ſtraal van den ingeſchreven cirkel der doorſnede TPU zal dus te gelijkertijd de ſtraal der ingeſchreven bol van den kegel zijn. Nu is $TZ = a$ en $PZ = h$, ſtellende dan den ſtraal des ingeſchrevenen bols x, dan is, omdat de ſtraal van den ingeſchreven cirkel eens driehoeks gelijk is aan deszelfs dubbelden inhoud gedeeld door de ſom der zijden,

$$x = \frac{2ah}{2a+2\sqrt{(a^2+h^2)}} = \frac{ah}{a+\sqrt{(a^2+h^2)}} = \frac{ah(a-\sqrt{(a^2+h^2)})}{-h^2}$$
$$= \frac{a(-a+\sqrt{(a^2+h^2)})}{h} = \frac{a}{h}(-a+\sqrt{(a^2+h^2)})$$

www.libool.com.cn

voor den gevraagden ſtraal.

Stellen wij de ſchuinſche zijde des kegels TP $= b$, dan is $\sqrt{(a^2+h^2)} = b$ en $h = \sqrt{(b^2-a^2)}$, en wij hebben alzoo,

$$x = \frac{a(b-a)}{\sqrt{(b^2-a^2)}} = \frac{a\sqrt{(b-a)^2}}{\sqrt{(b^2-a^2)}} = a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$$

waardoor de gevraagde ſtraal in de radius van het grondvlak en de ſchuinſche zijde is uitgedrukt.

Daar nu, de ſtraal eens bols x zijnde, deszelfs inhoud $\frac{4}{3}x^3\pi$ is, zoo vinden wij voor den inhoud van onzen bol

$$\frac{4}{3}a^3\pi \times \frac{b-a}{b+a} \times \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}.$$

CVI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Alles als in het voorgaande voorſtel zijnde, begeert men den ſtraal en den inhoud van den omgeſchrevenen bol te vinden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Het blijkt hier, even als in het vorige Voorſtel, dat de ſtraal van den omgeſchreven cirkel des driehoeks TPU (*Fig.* 77.) te gelijkertijd de ſtraal van den bol zal zijn, welke om den kegel kan beſchreven worden, die door de omwenteling van driehoek TPU, om de as PZ, ontſtaat. Stellende nu den ſtraal van dezen bol x, dan is, omdat de ſtraal des omgeſchrevenen cirkels van eenigen driehoek gelijk is aan het halve product van twee der zijden gedeeld door de loodlijn, welke uit het overſtaande hoekpunt, op de derde zijde valt,

$$x = \frac{TP^2}{PZ} = \frac{b^2}{2h} = \frac{a^2+h^2}{2h} = \frac{b^2}{2\sqrt{(b^2-a^2)}}$$

welke drie formulen, alle den gevraagden ſtraal aangeven.

De ſtraal gevonden zijnde hebben wij voor den inhoud van den bol

$$\frac{4}{3}x^3\pi = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{b^6}{h^3} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{(a^2+h^2)^3}{h^3} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{b^6}{(b^2-a)^{\frac{3}{2}}}.$$

CVII.

CVII. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door I. R. SCHMIDT.

Binnen eenen gegevenen kegel eenen cilinder te beſchrijven, zoodanig dat deszelfs inhoud gelijk zij aan den inhoud van den bol, welke in den bovenſten resterenden kegel kan beſchreven worden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Figuur 78 ſtelle de doorſnede van kegel, cilinder en bol voor; men ſtelle AM $= a$, AB $= b$ en BM $= h$ dan is $b^2 = a^2 + h^2$. Verder ſtelle men CD, dat is, de ſtraal van het grondvlak des cilinders, gelijk x, dan is

$$\text{AM} : \text{MB} = \text{AE} : \text{CE} = \text{CD} : \text{DB}$$
$$\text{of } a : h = a - x : \text{CE} = x : \text{DB}$$

waaruit $\text{CE} = \text{DM} = \frac{h(a-x)}{a}$ en $\text{DB} = \frac{hx}{a}$.

De inhoud van den cilinder is dus $\text{CD}^2 \times \pi \times \text{DM} = \frac{hx^2(a-x)}{a} \times \pi$.

Volgens de oplosſing van het 105e Voorſtel is verder de ſtraal van den bol, welke in den kegel CFB beſchreven kan worden, gelijk $\text{CD} \times \sqrt{\frac{\text{BC} - \text{CD}}{\text{BC} + \text{CD}}}$; nu is $\text{CD} = x$, $\text{BD} = \frac{hx}{a}$ en $\text{BC} = \sqrt{(\text{BD}^2 + \text{CD}^2)} = \frac{x}{a}\sqrt{(a^2 + h^2)} = \frac{bx}{a}$ en de ſtraal van dien bol is bijgevolg gelijk $x \times \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$, waaruit dan, voor den inhoud van den ingeſchrevenen bol, volgt

$$\tfrac{4}{3}x^3\pi\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Door de uitdrukkingen dezer inhouden aan elkander gelijk te ſtellen, verkrijgen wij de vergelijking

$$\frac{hx^2(a-x)}{a} \times \pi = \tfrac{4}{3}x^3\pi \cdot \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

welke, aan beide zijden door $h\pi x^2$ gedeeld zijnde, geeft

$$a - x = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{a}{h} \cdot \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{3}{2}} \times x.$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

www.libtool.com.cn

$$x = a : (\tfrac{4}{3} \cdot \frac{a}{h} \cdot \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{\frac{3}{2}} + 1)$$

of, omdat $h = \sqrt{(b^2 - a^2)} = (b+a)^{\frac{1}{2}} \times (b-a)^{\frac{1}{2}}$ is.

$$x = a : (\tfrac{4}{3} \cdot \frac{a(b-a)}{(b+a)^2} + 1)$$

hetgeen herleid wordt tot

$$x = \frac{3a(b+a)^2}{3(b+a)^2 + 4a(b-a)} = \text{CD} = \text{EM}$$

door welke formule x dus gemakkelijk berekend kan worden.

1e. Aanmerking. Het valt niet moeijelijk deze formule te conſtrueren, want ſchrijven wij dezelve onder den vorm

$$x = \frac{3a(b+a)}{3(b+a) + 4a(b-a) : (b+a)}$$

dan loopt het van zelve in het oog, dat wij deze conſtructie hebben:

Conſtrueer eene lijn p, welke de vierde evenredige is tot $b+a$, $b-a$ en $4a$; dan is

$$x = \frac{3a(b+a)}{3(b+a) + p}$$

en x zal dus de vierde evenredige zijn tot $3(b+a) + p$, $3a$ en $b+a$.

2e. Aanmerking. Wanneer de tophoek van den kegel 60° bevat, dan is de driehoek ABG gelijkzijdig en dus $b = 2a$. In dit geval zal dus $x = \frac{27}{31}a$, dat is, CF $= \frac{27}{31}$ AG en bijgevolg ook BD $= \frac{27}{31}$ BM zijn.

CVIII. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Van eenen geknotten kegel zijn de ſtralen van het boven en beneden vlak a en b; men vraagt, welke hoogte dezelve zal moeten hebben, opdat in denzelven een bol zal kunnen worden beſchreven?

Oplossing. Door I. R. Schmidt en A. L. Hector.

Laat TSQU (*Fig.* 77.) de doorſnede van den geknotten kegel en den ingeſchrevenen bol zijn, dan is WS $=$ SY $= a$ en WT $=$ TZ $= b$, en bijgevolg ST $= a + b$; maar TO $=$

TZ

TZ — SY $= b - a$ zijnde, zoo vinden wij voor de gevraagde hoogte

$SO = \sqrt{(TS^2 - TO^2)} = \sqrt{((b+a)^2 - (b-a)^2)} = 2\sqrt{ab}$

www.hotoo.com.cn

Hieruit volgt dus, dat de hoogte middelevenredig moet zijn tusſchen de middellijnen van het boven- en benedenvlak, en dat de ſtraal van den ingeſchreven bol gelijk zal zijn aan de middelevenredige tusſchen de ſtralen van het boven- en benedenvlak.

CIX. VOORSTEL.

Door I. R SCHMIDT.

In eenen gegevenen kegel eenen cilinder te plaatſen, zoodanig dat de geheele oppervlakte van den cilinder tot de geheele oppervlakte van den kegel in gegeven reden zij?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

De ſtraal van het grondvlak des kegels zij a en de hoogte van den kegel h; indien wij dan den ſtraal van het grondvlak van den cilinder x ſtellen, dan vinden wij even als in Voorſtel 107 *Fig.* 78.

$BD = \frac{hx}{a}$ en $DM = \frac{h(a-x)}{a}$.

Nu is de ronde oppervlakte van den cilinder $2\,CD \times DM \times \pi$ of $\frac{2hx(a-x)\pi}{a}$ en voegende hierbij tweemaal het bovenvlak, dat is $2x^2\pi$, dan komt er voor de geheele oppervlakte van den cilinder $2x^2\pi + \frac{2hx(a-x)\pi}{a}$, of wel $\frac{2\pi}{a}(ahx + (a-h)x^2)$.

De ronde oppervlakte van den kegel is $2\,AM \times \pi \times \frac{1}{2}\,AB = AB \times AM \times \pi = a\pi\sqrt{(a^2+h^2)}$ en hierbij het grondvlak $a^2\pi$ optellende, komt er voor de geheele oppervlakte van den kegel $a\pi(a + \sqrt{(a^2+h^2)})$.

Daar nu de twee gevondene oppervlakten tot elkander in gegeven reden zijn, zoo ſtellen wij het oppervlak van den cilinder een n^e gedeelte van het oppervlak des kegels, en wij verkrijgen alzoo

$$\frac{2\pi}{a}(ahx + (a-h)x^2) = \frac{a\pi}{n}(a + \sqrt{(a^2+h^2)}) \quad . \quad . \quad (a)$$

dat is, na herleiding,

$$x - \frac{ah}{h-a}x = -\frac{a^2(a+\sqrt{(a^2+h^2)})}{2n(h-a)}$$

welke vierkants vergelijking, opgelost zijnde, ons geeft

$$x = \frac{ah}{2(h-a)} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{ah}{2(h-a)}\right)^2 - \frac{a^2(a+\sqrt{(a^2+h^2)})}{2n(h-a)}\right\}}$$

dat is, na herleiding,

$$x = \frac{a}{2(h-a)}\left\{h \pm \frac{1}{n}\sqrt{(n^2h^2 + 2n(a-h)(a+\sqrt{(a^2+h^2)}))}\right\}$$

AANMERKINGEN. — 1°. Zoo lang $a > h$ is, zal het gedeelte onder het worteiteeken positief, en dus het Voorstel, voor iedere waarde van n, mogelijk wezen.

2°. Is $a = h$, dan wordt x, of $= \frac{0}{0}$, of $= \infty$, doch in dit geval wordt de vergelijking (a)

$$2\pi hx = \frac{a\pi}{n}(a + \sqrt{(a^2 + h^2)})$$

en hieruit is klaarblijkelijk

$$x = \frac{a}{2nh}(a + \sqrt{(a^2 + h^2)})$$

3°. Is $h > a$ dan moet, opdat het Voorstel mogelijk zij,

$$n^2h^2 > 2n(h-a)(a + \sqrt{(a^2 + h^2)})$$

en dus $n > \frac{2(h-a)(a+\sqrt{(a^2+h^2)})}{h^2}$ wezen.

Nemende dan n op zijn kleinst, dat is, $\frac{2(h-a)(a+\sqrt{(a^2+h^2)})}{h^2}$

dan wordt $x = \frac{ah}{2(h-a)}$. Wanneer dus $h > a$ is, zal $x = \frac{ah}{2(h-a)}$ de straal van het grondvlak des ingeschreven cilinders zijn, waarvan de geheele oppervlakte een maximum is.

CX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Eenen geknotten kegel zoodanig door een vlak, evenwijdig aan de basis loopende, te snijden, dat de deelen tot elkander in gegeven reden zijn?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en A. L. HECTOR.

Laten SY $= a$ en TZ $= b$ (*Fig. 77.*) de stralen van het boven- en benedenvlak, en laat YZ $= h$ de hoogte van den geknot-

knotten kegel zijn. Onderſtellende dan dat VX de gevraagde doorſnede is, en ſtellende PX $= x$, dan is,

$b - a : h = b : PZ = a : PY$

www.libooc.com.nl

waaruit $PZ = \frac{bh}{b-a}$ en $PY = \frac{ah}{b-a}$; hierdoor verkrijgen wij

Inh. keg. $PTZ = \frac{b^3 h \pi}{3(b-a)}$; *Inh. keg.* $PSY = \frac{a^3 h \pi}{3(b-a)}$.

Verder is

Inh. keg. PYS : *Inh. keg.* PXV $=$ $PY^3 : PX^3$

dat is, wanneer wij de gevondene waarden ſubſtitueren,

$$\frac{a^3 h \pi}{3(b-a)} : \textit{Inh. keg.}\ PXV = \frac{a^3 h^3}{(b-a)^3} : x^3$$

en bij gevolg

$$\tfrac{1}{3}\pi : \textit{Inh. keg.}\ PXV = \frac{h^2}{(b-a)^2} : x^3$$

waaruit wij vinden

$$\textit{Inh. keg.}\ PXV = \frac{\pi x^3 (b-a)^2}{3h^2}$$

en trekkende hiervan kegel PYS af, dan blijft er

$$\textit{Inh. gekn. kegel}\ SYXV = \frac{\pi x^3 (b-a)^2}{3h^2} - \frac{a^3 h \pi}{3(b-a)} = \frac{x^3 \pi (b-a)^3 - a^3 h^3 \pi}{3h^2 (b-a)}$$

terwijl wij, door kegel PYS van kegel PTZ af te trekken, vinden

$$\textit{Inh. gekn. keg.}\ SYZT = \frac{(b^3 - a^3) h \pi}{3(b-a)}.$$

Stellende nu dat de deelen van den geknotten kegel tot elkander in reden moeten zijn als p tot q, dan moet de geknotten kegel SVXY tot den geknotten kegel SYZT in reden zijn als p tot $p+q$ en wij hebben alzoo

$$\frac{x^3 \pi (b-a)^3 - a^3 h^3 \pi}{3h^2 (b-a)} : \frac{(b^3 - a^3) h \pi}{3(b-a)} = p : p+q$$

waaruit wij x op de volgende wijze afleiden

$$x^3 (b-a)^3 - a^3 h^3 : h^3 (b^3 - a^3) = p : p+q$$
$$x^3 (p+q) (b-a)^3 - (p+q) a^3 h^3 = p h^3 (b^3 - a^3)$$
$$x^3 (p+q) (b-a)^3 = h^3 (p b^3 + q a^3)$$
$$x^3 = \frac{h^3}{(b-a)^3} \times \frac{p b^3 + q a^3}{p+q}$$

zoodat eindelijk

$$PX = x = \frac{h}{b-a} \times \sqrt[3]{\frac{pb^3 + qa^3}{p+q}}$$

www.libtool.com.cn

waardoor verder gevonden wordt

$$YX = \frac{h}{b-a} \times \left\{ -a + \sqrt[3]{\frac{pb^3 + qa^3}{p+q}} \right\}$$

$$\text{en } XZ = \frac{h}{b-a} \times \left\{ +b - \sqrt[3]{\frac{pb^3 + qa^3}{p+q}} \right\}.$$

VOORBEELD. — Wanneer $p = q$ is, dat is, wanneer gevraagd was om den geknotten kegel midden door te deelen, dan vindt men

$$YX = \frac{h}{b-a} \times \left\{ -a + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(a^3 + b^3)} \right\}$$

$$\text{en } XZ = \frac{h}{b-a} \times \left\{ +b - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(a^3 + b^3)} \right\}.$$

1e. AANMERKING. — Wordt $a = b$ genomen, dan gaat de geknotten kegel over in eenen cilinder. Onze formulen geven in dit geval voor YX en XZ de onbepaalde waarde $\frac{0}{0}$. Deze waarden kunnen nader bepaald worden door de hiertoe geschikte en genoegzaam bekende leerwijzen; wij zullen ons hierbij echter niet ophouden, daar het duidelijk is, dat in dit geval ZY slechts zoodanig in X moet gedeeld worden, dat $YX : XZ = p : q$ is, en dat wij bij gevolg zullen verkrijgen

$$YX = \frac{ph}{p+q} \text{ en } XZ = \frac{qh}{p+q}.$$

2e. AANMERKING. Stellende $VX = y$ dan is $h : b - a = x : y$ en bijgevolg $VX = y = \frac{b-a}{h} x = \sqrt[3]{\frac{pb^3 + qa^3}{p+q}}$.

Dit geeft ons een geschikt middel aan de hand om het opgegeven Voorstel ook meetkundig te construeren.

Laat namelijk met een willekeurige parameter m een parabool geconstrueerd worden, waarvan P de top, en PZ de as is; laat verder $PA = \frac{1}{2} m$ en AB perpendiculair op PA en gelijk $\frac{pb^3 + qa^3}{2(p+q)m^2}$ genomen worden, (welke laatste constructie te gemakkelijk is om er breedvoerig over uit te weiden); indien dan uit B met BP, als straal, een cirkel beschreven wordt, snijdende

de

de parabool in D, en men uit het ſnijpunt D de lijn DV evenwijdig aan de as PZ trekt, zal VX de begeerde deellijn zijn.

www.libtool.com.cn

Want ſtellende, kortheidshalve, $\frac{pb^3 + qa^3}{p+q} = n$, dan is, $PA = \frac{1}{2}m$ en $AB = \frac{n}{2m^2}$ en bijgevolg $BP = BD = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{n^2}{4m^4}\right)}$. Nu is, $PC = z$ en $DC = y$ ſtellende, door de eigenſchap van de parabool, $y^2 = pz$ en dus $z = \frac{y^2}{p}$, en door de eigenſchap van den cirkel

$$\left(y - \frac{n}{2m^2}\right)^2 + (z - \tfrac{1}{2}m)^2 = \left(\tfrac{1}{4}m^2 + \frac{n^2}{4m}\right)$$

dat is, wanneer wij het eerſte lid ontwikkelen, en de gelijke termen aan beide zijden weglaten,

$$y^2 - \frac{n}{m^2}y + z^2 - mz = 0$$

en brengende hierin de waarde van z,

$$y^2 - \frac{n}{m^2}y + \frac{y^4}{m^2} - y^2 = 0$$

hetgeen, wanneer wij alles door y deelen en herleiden, geeft

$$\frac{y^3}{m^2} = \frac{n}{m^2} \text{ of } y^3 = n$$

en daar $y = DC = VX$ en $n = \frac{pb^3 + qa^3}{p+q}$ is,

$$VX = \sqrt[3]{\frac{pb^3 + qa^3}{p+q}}.$$

CXI. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Men heeft eene reeks van getallen, waarvan de vier eerſte termen zijn 1357; 987; 685 *en* 451; *en waarvan de termen alzoo kleiner en kleiner worden; nu wordt gevraagd, welke term of tusſchenterm van deze reeks het kleinst mogelijk zal zijn, zoo, dat de reeks verder dan dezen term, volgens dezelfde wet voortgezet wordende, wederom zou beginnen op te klimmen. Voorts vraagt men ook, welke deze kleinſte waarde zal zijn.* (26)

Op-

(26) PAUL HALCKEN, N°. 396.

OPLOSSING. Door S. J. MULDER.

Wanneer wij de termen der opgegevene reeks van elkander aftrekken, vinden wij voor de eerſte verſchillen

$$-370;\ -302;\ -234;\ \textit{enz.}$$

en deze wederom van elkander aftrekkende, dan zijn de tweede verſchillen

$$+68;\ +68;\ \textit{enz.}$$

de opgegevene reeks is alzoo eene rekenkunſtige reeks van de tweede orde, en wij hebben bijgevolg, wanneer wij derzelver algemeenen term, dat is, de x^{de} term door y uitdrukken,

$$y = 1357 - 370\,(x-1) + 68\,.\,\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

(*Zie* J. DE GELDER. *Wiskundige leſen. Tweede curſus* §. 774).

Deze waarde van y wordt gemakkelijk herleid tot

$$y = 34x^2 - 472x + 1795$$

en wanneer wij uit deze vergelijking x in y uitdrukken, zoo vinden wij

$$x = \tfrac{118}{17} \pm \tfrac{1}{34}\sqrt{(34y - 5334)}$$

door welke formule dus bepaald wordt, de hoeveelſte term van de reeks gelijk aan eenig gegeven getal y wordt.

Zal nu x beſtaanbaar zijn, dan moet $34y > 5334$ en bijgevolg $y > 156\frac{15}{17}$ zijn. De kleinſte waarde, welke y dus hebben kan, is $156\frac{15}{17}$, hetgeen, overeenſtemmende met $x = \frac{118}{17} = 6\frac{16}{17}$, aantoont dat de kleinſte waarde van y, tuſſchen den zesde en zevenden term gelegen is, en dat deze kleinſte waarde $156\frac{15}{17}$ is.

Verkiest men echter de tuſſchentermen niet in aanmerking te nemen, maar zich alleen tot de wezenlijke termen van de opgegeven reeks te bepalen, dan doet $x = 6\frac{16}{17}$ vermoeden, dat de zevende term de kleinſte zal zijn. Om zich hiervan te overtuigen, ſtelle men in de waarde van y eerst $x = 6$ en dan $x = 7$. Voor $x = 6$, vindt men $y = 187$ en $x = 7$ geeft $y = 157$, hetgeen aantoont, dat wezenlijk de zevende term de kleinſte is.

CXII. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Twee getallen te vinden, waarvan het verſchil een quadraat is, en zoodanig dat, wanneer men dit verſchil bij het product der getal-

zullen vergaart of van hetzelve aftrekt, er in beide gevallen rationale quadraten komen? (27)

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en J. S. MULDER.

Stel het kleinſte getal x, dan kan, omdat het verſchil der getallen een quadraat moet zijn, het grootſte worden voorgeſteld door $x + y^2$; het product der getallen is alsdan $x^2 + xy^2$ en derzelver verſchil y^2, zoodat, volgens de voorwaarde van het Voorſtel, x en y nog zoodanig bepaald moeten worden, dat de formulen

$$x^2 + xy^2 + y^2 \text{ en } x^2 + xy^2 - y^2$$

beide rationale quadraten zijn.

Welke betrekking er nu, om hieraan te voldoen, tuſſchen x en y ook moge behooren plaats te hebben, kan toch y altoos als een zeker veelvoud van x worden aangemerkt, en wij mogen dus, zonder in eenige deelen aan de algemeenheid der oplosſing te kort te doen, $y = px$ ſtellen; waardoor de twee formulen, welke quadraten moeten worden, overgaan in

$$x^2 + x^2p^2 + x^2p^2 \text{ en } x^2 + x^2p^2 - x^2p^2$$

daar deze nu beide door x^2 deelbaar zijn, volgt hier uit dat,

$$1 + xp^2 + p^2 \text{ en } 1 + xp^2 - p^2$$

beide quadraten moeten zijn.

Wij ſtellen dus $1 + xp^2 + p^2 = q^2$ en $1 + xp^2 - p^2 = r^2$, en vinden, door uit beide x af te zonderen,

$$x = \frac{q^2 - p^2 - 1}{p^2} = \frac{r^2 + p^2 - 1}{p^2}$$

waaruit dan blijkt, dat $q^2 - p^2 = r^2 + p^2$ zal moeten zijn en dat wij dus nog zullen moeten voldoen aan de vergelijking $2p^2 = q^2 - r^2$.

Wij ſtellen te dien einde, $q = m + n$ en $r = m - n$, dan is $2p^2 = (m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn$ en bijgevolg $m = \frac{p^2}{2n}$.

Hierdoor wordt $q = m + n = \frac{p^2}{2n} + n$ en bijgevolg $x = \frac{q^2 - p^2 - 1}{p^2} = \frac{p^2}{4n^2} + \frac{n^2 - 1}{p^2}$ waardoor wij verder vin-

(27) PAUL HALCKEN, N°. 249.

vinden $y = px = \frac{p^2}{4n^2} + \frac{n^2 - 1}{p}$, in welke uitdrukkingen wij nu voor p en n alle geheelen en gebroken getallen naar welgevallen kunnen aannemen.

www.libtool.com.cn

1e. AANMERKING. Daar er in den loop van deze oplosſing nergens eene willekeurige bepaling gemaakt is, die het Voorſtel nader beperkt, dan tot de voorwaarden, welke in de vraag zijn opgegeven, zoo volgt hieruit, dat alle mogelijke antwoorden op het Voorſtel in deze oplosſing begrepen moeten zijn.

2e. AANMERKING. Om geheele getallen tot antwoord te verkrijgen, behoeft men ſlechts $n = 1$ en $p = 2b$ te ſtellen, want dan wordt $x = b^2$ en $y = 2b^3$, doch hierdoor wordt het Voorſtel veel naauwer beperkt, dan de opgaaf in het algemeen vordert.

VOORBEELDEN. 1°. Nemende $p = 1$ en $n = 1$, dan wordt $x = \frac{1}{4}$ en $y = \frac{1}{4}$, zoodat de getallen $\frac{1}{4}$ en $\frac{5}{16}$.

2°. Nemende $p = \frac{3}{2}$ en $n = \frac{4}{3}$, dan wordt $x = \frac{25}{64}$ en $y = \frac{15}{8}$ dus de getallen $\frac{11}{4}$ en $\frac{55}{64}$.

3°. Nemende $p = 2$ en $n = 1$, dan wordt $x = 1$ en $y = 2$ en dus de getallen 1 en 5.

4°. Nemende $p = 6$ en $n = 6$, dan wordt $x = \frac{11}{5}$ en $y = \frac{22}{3}$, zoodat de getallen $12\frac{1}{3}$ en 55, hetgeen het antwoord van HALCKEN is, en men kan op deze wijze oneindig veel andere antwoorden vinden.

CXIII. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Twee getallen te vinden, waarvan het product een quadraat is, en die nog twee rationale quadraten voortbrengen, wanneer men dit product vermeerdert of vermindert met de ſom der getallen? (28)

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en S. J. MULDER.

Wijl het product der getallen een quadraat moet zijn, ſtellen wij voor dezelve p^2x en q^2x; het product is als dan $p^2q^2x^2$ en de ſom $(p^2 + q^2)x$, waaruit dan blijkt dat de formulen

$$p^2q^2x^2 + (p^2 + q)x \text{ en } p^2q^2x^2 - (p^2 + q^2)x$$

beide rationale quadraten moeten zijn.

Om

(28) PAUL HALCKEN, N°. 250.

Om hieraan te voldoen ſtellen wij

$$p^2q^2x^2 + (p^2 + q^2)x = m^2x^2$$

en $p^2q^2x^2 - (p^2 + q^2)x = n^2x^2$

welke, beide door x gedeeld, geven

$$p^2q^2x + (p^2 + q^2) = m^2x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

en $p^2q^2x - (p^2 + q^2) = n^2x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$

Zonderen wij nu uit beide vergelijkingen x af, dan verkrijgen wij

$$x = \frac{p^2 + q^2}{m^2 - p^2q^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2q^2 - n^2}$$

en wij zullen alzoo nog moeten voldoen aan de vergelijking

$$m^2 - p^2q^2 = p^2q^2 - n^2$$

dat is, er zal in rationale getallen moeten worden voldaan aan de vergelijking

$$m^2 + n^2 = 2p^2q^2$$

of, hetgeen op het zelfde nederkomt, aan de vergelijking

$$(m + n)^2 + (m - n)^2 = 4p^2q^2.$$

De getallen $m + n$ en $m - n$ moeten dus zoodanig genomen worden, dat de ſom van hunne vierkanten een vierkant zij, en hier aan wordt, zoo als bekend is, op de algemeenſte wijze voldaan, door te ſtellen

$$(m + n) = t(r^2 - s^2) \text{ en } (m - n) = 2trs$$

want dan wordt $2pq = t(r^2 + s^2)$.

Nemen wij nu verder in aanmerking, dat, door de vergelijkingen (α) en (β) van elkander af te trekken, gevonden wordt $x = \frac{2(p^2 + q^2)}{m^2 - n^2}$ dan vinden wij de gevraagde getallen op de volgende wijzen.

Laten voor p, q, r en s getallen naar welgevallen genomen worden, en neem

$$t = \frac{2pq}{r^2 + s^2}$$

$$m = \tfrac{1}{2}t(r^2 + 2rs - s^2)$$

$$n = \tfrac{1}{2}t(r^2 - 2rs - s^2)$$

$$x = \frac{2(p^2 + q^2)}{m^2 - n^2}$$

dan zullen p^2x en q^2x rationale getallen zijn, welke aan de vraag voldoen.

Verder merken wij hier, even als in het voorgaande Voorſtel, aan,

aan, dat in deze oplosſing alle mogelijke antwoorden voor het Voorſtel moeten begrepen zijn, omdat er gedurende de oplosſing nergens willekeurige onderſtellingen gemaakt zijnde, het Voorſtel geenzints tusſchen naauwer grenzen beperkt is.

Voorbeeld. Neem $p = 1$, $q = 5$; $r = 2$ en $s = 1$, dan wordt $t = 2$, $m = 7$, $n = -1$, en $x = \frac{13}{12}$ en dus zijn de getallen $p^2x = \frac{13}{12}$ en $q^2x = \frac{325}{12}$. Zijnde dit hetzelfde antwoordt dat HALCKEN opgeeft.

AANMERKING. Men kan de waarde van t ook terſtond in die van m en n, en deze wederom in die van x ſubſtitueren. Wij verkrijgen als dan

$$m = \frac{pq\,(r^2 + 2rs - s^2)}{r^2 + s^2} \text{ en } n = \frac{pq\,(r^2 - 2rs - s^2)}{r^2 + s^2}$$

en bijgevolg

$$x = \frac{(p^2 + q^2)\,(r^2 + s^2)^2}{4p^2q^2rs\,(r^2 - s^2)}$$

En dan vindt men x terſtond, door voor p, q, r en s geheele of gebrokene getallen naar welgevallen aan te nemen. Het ſpreekt verder van zelve, dat $r > s$ genomen moet worden, omdat anders x, en dus beide gevraagde getallen, negatief zouden worden.

CXIV. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Vind drie quadraat getallen, waarvan de beide eerſte een quadraat tot ſom hebben; en zoodanig dat het derde van de twee eerſte, ieder in het bijzonder, afgetrokken zijnde, er nog twee rationale quadraten overblijven? (29)

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Stel de drie begeerde quadraten x^2, y^2 en z^2, dan moeten $x^2 + y^2$, $x^2 - z^2$ en $y^2 - z^2$ rationale quadraten zijn. Wij ſtellen $x^2 - z^2 = r^2(x - z)^2$ en $y^2 - z^2 = s^2(y - z)^2$, dan vinden wij $x + z = r^2(x - z)$ en $y + z = s^2(y - z)$ waaruit wij trekken

$$x = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \cdot z \text{ en } y = \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1} \cdot z.$$

Daar nu $x^2 + y^2$ een quadraat moet zijn, zoo blijft er nog overig, de formule

$$y^2$$

(29) PAUL HALCKEN, N°. 251.

$$\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2+\left(\frac{s^2+1}{s^2-1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

tot een rationaal quadraat te maken.

www.KNOOP.com.cn

Het blijkt met weinig moeite, dat aan deze laatste voorwaarde voldaan wordt, door $r = 2$ en $s = 3$ te nemen; want dan verandert de laatste uitdrukking in

$$(\tfrac{4}{3})^2+(\tfrac{10}{8})^2 = \tfrac{25}{9}+\tfrac{25}{16} = \tfrac{625}{144}$$

hierdoor wordt verder $x = \frac{5}{3}z$ en $y = \frac{5}{4}z$, waarin z nu naar welgevallen kan genomen worden. Nemende, bij voorbeeld, $z = \frac{12}{5}$, dan wordt $x = 4$ en $y = 3$ en dus de begeerde quadraten 9 . 16 en $\frac{144}{25}$. Dit is het antwoord, dat men bij HALCKERO vindt, en dat ook bij PANSER *pag.* 238. N°. 20. en in onze *Wiskunstige Verlustigingen* N°. 164. *Deel* II gevonden is, zonder dat daar van eenig ander antwoordt gesproken wordt.

Nemende $z = 12$, dan wordt $x = 20$ en $y = 15$ en dan zijn de quadraten 225, 400 en 144; het spreekt echter van zelve, dat bij al de verschillende antwoorden, welke op deze wijze, dat is, door voor z verschillende waarden aan te nemen, gevonden worden, de drie quadraten altijd onderling in dezelfde reden blijven. Wij zullen nu aantoonen, hoe uit dit gevonden antwoordt oneindig veel anderen kunnen gevonden worden, waarin de gezochte quadraten in eene andere betrekking tot elkander staan.

Stellende in de formule (A), welke een quadraat moet zijn, alleen $s = 3$, dan verandert dezelve in

$$\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2+\tfrac{25}{16} = \frac{16(r^2+1)^2+25(r^2-1)^2}{16(r^2-1)^2}$$

en het blijkt dus, dat $16(r^2+1)^2+25(r^2-1)^2$ nog een quadraat moet worden. Deze uitdrukking ontwikkeld zijnde, verandert in $41r^4-18r^2+41$.

Daar het nu boven gebleken is dat $r = 2$ deze uitdrukking tot een quadraat maakt, stellen wij, om eene andere waarde voor r te vinden, $r = 2+h$, waardoor de uitdrukking verandert in

$$625+1240h+966h^2+328h^3+41h^4$$

en daar dit een quadraat moet zijn, stellen wij den wortel

$$25+\alpha h+\beta h^2.$$

Dit in het vierkant gebragt, geeft

$$625+50\alpha h+(50\beta+\alpha^2)h^2+2\alpha\beta h^3+\beta^2h^4$$

waar-

waarin wij nu α en β gemakkelijk zoodanig kunnen aannemen, dat de drie eerſte termen tegen elkander verdwijnen; want hiertoe behoeven wij ſlechts te ſtellen

www.dbtoor.com.cn

$$50\alpha = 1240 \text{ en } 50\beta + \alpha^2 = 966$$

en dit geeft ons $\alpha = \frac{124}{5}$ en $\beta = \frac{2887}{625}$. Wij behouden dus nog, om h te bepalen

$$2\alpha\beta h^3 + \beta^2 h^4 = 328 h^3 + 41 h^4$$

dat is, door h^3 deelende, en h afzonderende

$$h = \frac{328 - 2\alpha\beta}{\beta^2 - 41} = -5\frac{70285}{312455}$$

en wij hebben alzoo

$$s = 3 \text{ en } r = 2 + h = -3\frac{70285}{312455}$$

en daar verder $x = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \cdot z$ en $y = \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1} z$ is, vinden wij hierdoor klaarblijkelijk wederom nieuwe antwoorden, waarbij z naar willekeur genomen kan worden.

Wij kunnen op dezelfde wijze, uit $r = 2$, ook eene nieuwe waarde van s vinden, en daar wij met deze nieuwe waarden van r en s op dezelfde wijze kunnen te werk gaan, als met de waarden $s = 3$ en $r = 2$, zoo geven deze nieuwe waarden van r en s wederom aanleiding tot het vinden van anderen; waaruit blijkt, dat wij voor het Voorſtel een oneindig aantal verſchillende antwoorden kunnen aanwijzen. Het loopt echter gemakkelijk in het oog, dat wij door deze handelwijze tot zeer groote getallen zullen geraken, en het is daarom, dat wij de berekening van x en y niet verder hebben voortgezet, daar het bovendien ons oogmerk alleen was, den weg in dezen aan te toonen.

CXV. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Iemand kocht eenige waren, maar twijfelde of hij niet te veel had; daarom liet hij de ſchalen omhangen, en bevond, dat er $\frac{p}{q}$ $(\frac{25}{44})$ *maal de gekochte waren, bij het gewigt moest gedaan worden, om evenwigt te hebben. Wanneer men nu ſtelt, dat de waren en het eerſte gewigt te zamen a* (25) *ponden uitmaakten, dan vraagt men, in welke reden de armen der balans tot elkander ſtonden?* (30)

Or-

(30) PRINZEN, *Algebra, pag.* 146. N°. 82.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Stel de lengte der armen van de balans m en n, en het ware gewigt der waren x; dan worden deze waren, wanneer dezelve aan den arm m hangen, in evenwigt gehouden door een gewigt $a - x$; en wij hebben bijgevolg

$$m : n = a - x : x \ldots\ldots (1)$$

Worden nu de waren aan den arm n opgehangen, dan moet er, om evenwigt te hebben, aan den arm m, bij het eerste gewigt $a - x$, nog $\frac{p}{q}$ maal de waren, dat is $\frac{p}{q}$ maal het ware gewigt der waren, en dus $\frac{p}{q}x$ worden bijgevoegd; en de waren worden alzoo in dit geval in evenwigt gehouden door een gewigt $a - x + \frac{p}{q}x$, dat is, door $a - \frac{q-p}{q}x$, waaruit volgt

$$m : n = x : a - \frac{q-p}{q}x \ldots\ldots (2)$$

Uit de evenredigheden (1) en (2) volgt nu onmiddelijk de evenredigheid

$$a - x : x = x : a - \frac{q-p}{q}x$$

en dit geeft ons de vergelijking

$$x^2 = a^2 - a \cdot \frac{2q-p}{q}x + \frac{q-p}{q}x^2$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$x^2 + \frac{2q-p}{p}ax = \frac{q}{p}a^2$$

welke vierkantsvergelijking ons geeft

$$x = \left\{ -\frac{2q-p}{2p} \pm \frac{\sqrt{(4q^2+p^2)}}{2p} \right\} \times a$$

voor het wezenlijke gewigt der waren, in welke uitdrukking het bovenste teeken op de eigenlijke balans toepasselijk is.

De evenredigheid $m : n = a - x : x$ gaat hierdoor over in

$$m : n = 3p + 2q \mp \sqrt{(4q^2+p^2)} : p - 2q \pm \sqrt{(4q^2+p^2)}$$

hetgeen, wanneer wij de twee laatste termen vermenigvuldigen met

$$p - 2q \mp \sqrt{(4q^2+p^2)}$$

overgaat in de evenredigheid

$$m : n = -p \pm \sqrt{(4q^2 + p^2)} : 2q$$

waardoor de betrekking der armen mede bepaald is.

1e. Aanmerking. Het blijkt uit deze laatste uitdrukking, dat het gegeven gewigt a, offchoon tot het vinden van de wezenlijke zwaarte der waren onontbeerlijk, tot het bepalen van de reden tusfchen de armen der balans niet gevorderd wordt. Wanneer dus, zoo als in de opgave van Painsen, alleen naar de betrekking van de lengte der armen gevraagd wordt, is de opgave van het gewigt a geheel overtollig.

2e. Aanmerking. Het bovenfte teeken alleen is op de wezenlijke balans toepasfelijk, omdat door hetzelve het gewigt x, benevens de armen pofitief worden. Het benedenfte teeken geeft x geheel negatief, en geeft voor de betrekking der armen

$$m : n = -(p + \sqrt{(4q^2 + p^2)}) : 2q$$

Een der armen moet dus hierbij als negatief befchouwd worden; en daar, bij de oplosfing, de armen der balans aan verfchillende zijden van het fteunpunt onderfteld zijn, zoo volgt hieruit, dat dit benedenfte teeken tot eenen hefboom behoort, waarin de magt en last aan denzelfden kant van het fteunpunt werken, waarmede dan ook de negatieve waarde van x, als naar boven werkende wanneer het gewigt $a - x$ naar beneden werkt, volkomen overeenftemt.

Voor de gegeven getallen-waarden, dat is, voor $p = 25$, $q = 44$ en $a = 25$, wordt, wanneer wij het bovenfte teeken gebruiken,

$$x = \tfrac{1}{2}(-63 + \sqrt{8369}) = 14{,}24 \text{ ℔}$$

ten naasten bij, en

$$m : n = -25 + \sqrt{8369} : 88 = 8{,}31 : 11$$

en voor het benedenfte teeken, waarbij beide armen aan dezelfde zijde van het fteunpunt zijn

$$x = -72{,}24 \text{ ℔}$$

en $m : n = -14{,}56 : 11$

CXVI. Voorstel.

Door S. J. Mulder.

In de twee vergelijkingen $x^2 - ax - b = 0$ *en* $y^2 + cy - d = 0$ *is* $a + b + c + d = 38$; *verder is bekend dat de getallen* a, b, c *en* d *eene opklimmende rekenkunftige reeks uitmaken,*

ten, en dat de som der wortels, dat is $x + y$ gelijk 10 is. Men vraagt hierdoor te vinden welke twee vergelijkingen dit zijn? (31)

OPLOSSING. Door S. J. MULDER.

www.hbtool.com.cn

Daar de getallen a, b, c en d eene rekenkunstige reeks moeten vormen, waarvan de som der termen 28 is, zoo stellen wij $a = \frac{1}{2}(19 - 3q)$; $b = \frac{1}{2}(19 - q)$; $c = \frac{1}{2}(19 + q)$; $d = \frac{1}{2}(19 + 3q)$ en hierdoor worden de twee opgegevene vergelijkingen

$$x^2 - \tfrac{1}{2}(19 - 3q)x - \tfrac{1}{2}(19 - q) = 0, \text{ en}$$
$$y^2 + \tfrac{1}{2}(19 + q)y - \tfrac{1}{2}(19 + 3q) = 0$$

en wanneer wij uit beide deze vergelijkingen q afzonderen, verkrijgen wij

$$q = \frac{19 + 19x - 2x^2}{3x + 1} \text{ en } q = \frac{-19 + 19y + 2y^2}{3 - y}$$

Daar verder $x + y = 10$ moet zijn, zoo stellen wij $x = 5 + z$ en $y = 5 - z$, waardoor de gevondene waarden van q overgaan: de eerste in

$$q = \frac{19 + 19(5 + z) - 2(5 + z)^2}{3(5 + z) + 1} = \frac{64 - z - 2z^2}{16 + 3z}$$

en de tweede in

$$q = \frac{-19 + 19(5 - z) + 2(5 - z)^2}{3 - (5 - z)} = \frac{126 - 39z + 2z^2}{z - 2}.$$

Stellen wij dan deze waarden van q aan elkander gelijk zoo hebben wij, om z te bepalen, de vergelijking

$$(z - 2)(64 - z - 2z^2) = (16 + 3z) \times (126 - 39z + 2z^2)$$

hetgeen ontwikkeld, geeft

$$\left.\begin{array}{rrrr} & 6z^3 & - 117z^2 & + 378z \\ & + & 32z^2 & - 624z + 2016 \\ + 2z^3 & + & z^2 & - 64z \\ & - & 4z^2 & - 2z + 128 \end{array}\right\} = 0$$

dat is, na de aangewezen som door 8 gedeeld te hebben

$$z^3 - 11z^2 - 39z + 268 = 0$$

waarvan de wortels zijn

$$z = 4; \; z = \tfrac{1}{2}(7 + \sqrt{317}); \; z = \tfrac{1}{2}(7 - \sqrt{317}).$$

De wortel $z = 4$ geeft $x = 5 + z = 9$ en $y = 5 - z = 1$ dus $q = \frac{-19 + 19y + 2y^2}{3 - y} = 1$, waardoor dan verder

(31) PAUL HALCKEN, N°. 143.

$a = \frac{1}{2}(19 - 3q) = 8$; $b = \frac{1}{2}(19 - q) = 9$; $c = \frac{1}{2}(19 + q) = 10$ en $d = \frac{1}{2}(19 + 3q) = 11$, zoodat dit voor de twee vergelijkingen geeft

www.libtool.com.cn

$$x^2 - 8x - 9 = 0 \text{ en } y^2 + 10y - 11 = 0$$

De twee andere waarden van z geven voor a, b, c en d zeer omſlagtige worteluitdrukkingen, waarom wij dezelve niet zullen overſchrijven.

CXVII. VOORSTEL.

Door S. J. MULDER.

Er zijn nog twee vergelijkingen, namelijk $x^2 - ax - b = 0$ *en* $y^2 + cy - d = 0$, *de ſom van* a, b, c *en* d *is* 70; *de ſom van* a *en* c *is even veel als het verſchil van* b *en* a; *de ſom van* b *en* c *is zoo veel als het verſchil van* d *en* c, *en de ſom van* x *en* y *is gelijk het quadraat van* c. *Welke vergelijkingen zijn dit?* (32)

OPLOSSING. Door S. J. MULDER.

Vooreerst hebben wij de vergelijkingen $a + b + c + d = 70$; $a + c = b - a$ en $b + c = d - c$. Uit de tweede is $a = \frac{1}{2}(b - c)$ en uit de derde $d = b + 2c$; brengende nu deze waarden in de eerſte vergelijking, dan komt er $5b + 5c = 140$ of $b + c = 28$, waaruit volgt $b = 28 - c$; $a = \frac{1}{2}(b - c) = 14 - c$ en $d = b + 2c = 28 + c$.

De vergelijkingen $x^2 - ax - b = 0$ en $y^2 + cy - d = 0$ oplosſende, vinden wij

$$x = \tfrac{1}{2}(a \pm \sqrt{(a^2 + 4b)}) \text{ en } y = \tfrac{1}{2}(-c \pm \sqrt{(c^2 + 4d)})$$

en brengende hierin de waarden van a, b en d, dan komt er

$$x = \tfrac{1}{2}(14 - c \pm \sqrt{(308 - 32c + c^2)})$$
$$y = \tfrac{1}{2}(\quad -c \pm \sqrt{(112 + 4c + c^2)})$$

en daar $x + y = c^2$ moet zijn, zoo hebben wij om c te bepalen de vergelijking

$$c^2 = 7 - c \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(308 - 32c + c^2)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(112 + 4c + c^2)}$$

dat is,

$$2c^2 + 2c - 14 = \pm \sqrt{(308 - 32c + c^2)} \pm \sqrt{(112 + 4c + c^2)}$$

of brengende beide leden in de tweede magt en deelende door 2,

$$2c^4 + 4c^3 - 26c^2 + 98 = 210 - 14c + c^2 \pm \ldots\ldots$$
$$\sqrt{(308 - 32c + c^2)}\,(112 + 4c + c^2)$$

dat

(32) PAUL HALCKEN, N°. 144.

dat is, wanneer wij alles ontwikkelen,

$$2c^4 + 4c^3 - 27c^2 - 14c - 112 = \ldots\ldots$$
$$\pm V(c^4 - 28c^3 + 292c^2 - 2352c + 34496)$$

en wanneer wij beide leden nog eens in de tweede magt verheffen en, de gelijkſlagtige termen bij elkander gevoegd hebbende, alles door 4 deelen,

$$c^8 + 4c^7 - 23c^6 - 68c^5 + 42c^4 - 28c^3 + 1488c^2 \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + 1372c - 5488 = 0$$

uit welke vergelijking gevonden wordt $c = 4$

Hieruit is dan $a = 14 - c = 10$; $b = 28 - c = 24$ en $d = 28 + c = 32$; zoodat de twee gevraagde vergelijkingen worden

$$x^2 - 10x - 24 = 0 \text{ en } x^2 + 4x - 32 = 0$$

zijnde de poſitieve wortels van deze vergelijkingen $x = 12$ en $y = 4$, hetgeen geeft $x + y = 16 = c^2$.

CXVIII. VOORSTEL.

Door I. R SCHMIDT.

Een aantal van n perſonen ſpelen te zamen, onder voorwaarde dat elk, die wint, van ieder der overige eene bepaalde ſom a zal ontvangen; en ieder, die een ſpel wint, teekent dit aan door het ſchrijven van een ſtreepje. Indien nu bij het einde van het ſpelen bevonden wordt, dat de eerſte s_1, de tweede s_2, de derde s_3 enz. tot den laatſten s_n ſtreepjes aangeſchreven heeft, vraagt men hoeveel ieder gewonnen of verloren heeft?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

De eerſte heeft s_1 ſtreepjes en moet alzoo s_1 maal a, van ieder der overige ontvangen, zijn geheele ontvangst is derhalve $(n - 1)\, s_1\, a$; doch nu moet hij ook zoo veel maal a uitkeeren als het getal van ſtreepjes bedraagt, dat al de overige perſonen te zamen hebben; ſtellende dan de ſom van al de ſtreepjes S dan moet hij, ingevolge van het boven gezegde, betalen $(S - s_1)\, a$, en zijne winst zal dus gevonden worden door $(S - s_1)\, a$ van $(n - 1)\, s_1\, a$ af te trekken, er blijft alzoo voor de winst van den eerſten over

$$(n - 1)\, s_1\, a - (S - s_1)\, a$$

dat is, de eerſte wint $(n s_1 - S)\, a$, en daar wij voor ieder der overige ſpelers op dezelfde wijze kunnen redeneren, zoo verkrijgen wij

winst of verlies van den 1ⁿ . . . . $(n s_1 - S) a$
. . . . . 2ᵉⁿ . . . $(n s_2 - S) a$
. . . . . 3ᵉⁿ . . . . $(n s_3 - S) a$
&c. &c.
. . . . . n^{de} . . . . $(n s_n - S) a$

www.libtool.com.cn

en dit zal nu winst of verlies zijn, naarmate de uitdrukkingen positief of negatief zijn.

Het blijkt van zelf, dat de som der winsten gelijk de som der verliezen moet zijn, en dat bijgevolg de som van al onze gevondene uitdrukkingen gelijk o moet wezen. Dezelve voldoen ook wezenlijk aan deze voorwaarde, want deze som is

$$\{n (s_1 + s_2 + s_3 + \&c. + s_n) - n S\} \times a$$

dat is, omdat wij voor de som van al de streepjes S gesteld hebben,

$$\{n S - n S\} \times a$$

hetgeen klaarblijkelijk gelijk nul is.

CXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wat is de waarde van x, welke de functie $\frac{x}{Log\ x}$ *tot een minimum maakt, en wat is de kleinste waarde, welke die functie, in eenig gegeven stelsel van Logarithmen, verkrijgen kan?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Stellen wij $\frac{x}{Log.x} = y$, dan is

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Log.x - \frac{m}{x} \times x}{Log^2.x} = \frac{Log.x - m}{Log^2.x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{m}{x} \times Log^2\ x - 2\ Log.x \times \frac{m}{x}\ (Log.x - m)}{Log^4.x}$$

$$= \frac{m}{x} \times \frac{Log.x - 2\ (Log\ x - m)}{Log^3.x} = \frac{m}{x} \times \frac{2m - Log\ x}{Log^3\ x}$$

waarin m het modulus van het gegeven stelsel van Logarithmen beteekent.

Stellen wij nu $\frac{\partial y}{\partial x} = o$, dan is $Log.x - m = o$, dat is

Log.

$Log.\,x = m$ en $x = a^m$, wanneer namelijk a de bazis van het ſtelſel van Logarithmen is, waartoe het modulus m behoort.

www.libtool.com.cn

Daar nu, in het algemeen $m = \frac{1}{Nep.\,Log.\,a}$ is, zoo is $Nep.\,Log.\,a = \frac{1}{m}$ en bijgevolg $a = e^{1:m}$, waaruit dan verder volgt $x = a^m = (e^{1:m})^m = e$.

Om nu te beoordeelen of $x = e$ wezenlijk y tot een minimum maakt, moeten wij onderzoeken, of deze waarde van x, de waarde van $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ poſitief maakt. Stellende dan in $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $x = e$ en $Log.\,x = m$, dan verkrijgen wij

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m}{e} \times \frac{2m - m}{m^3} = \frac{1}{em}$$

welke poſitieve waarde aantoont, dat $x = e$ wezenlijk aan het vraagſtuk voldoet. Wij hebben alzoo

$$x = e = 2{,}71828\ 18284\ enz.$$

1°. Aanmerking. In elk ſtelſel van Logarithmen heeft dan $\frac{x}{Log.\,x}$ altoos de kleinſte waarde, wanneer $x = e$ is. Deze kleinſte waarde van $\frac{Log.\,x}{x}$ verſchilt echter voor ieder verſchillend ſtelſel; want ſtellende in $\frac{x}{Log.\,x}$, $x = e$ en $Log.\,x = m$, verkrijgen wij voor die kleinſte waarde $\frac{e}{m}$; dat is, *deze kleinſte waarde is altijd gelijk aan de bazis van de Neperiaanſche Logarithmen, gedeeld door het modulus van het ſtelſel, waarin men de kleinſte waarde van* $\frac{x}{Log.\,x}$ *begeert.*

Voor de Neperiaanſche Logarithmen is dus de kleinſte waarde van $\frac{x}{Log.\,x}$ gelijk aan $\frac{e}{1}$, dat is, gelijk aan de bazis zelve, doch in het Briggiaanſche ſtelſel is dezelve gelijk aan

$$\frac{e}{m} = \frac{2{,}718281828\,4}{0{,}434294481\,9} = 6{,}259075\,2.$$

2°. Aanmerking. Men zou dus kunnen vragen, hoe groot de bazis van eenig ſtelſel van Logarithmen genomen moet worden, opdat de kleinſte waarde, welke $\frac{x}{Log\ x}$ in hetzelve verkrijgen kan, gelijk aan een gegeven getal p zij. Men zou alsdan hebben $\frac{e}{m} = p$, dus $m = \frac{e}{p}$; $Nep.\ Log.\ a = \frac{1}{m} = \frac{p}{e}$ en eindelijk $a = e^{p:e}$.

www.libtool.com.cn

CXX. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Een ſtelſel van vier regte lijnen AB, CD, EF en GH, (Fig. 79) welke in het zelfde vlak liggen, gegeven zijnde, vraagt men, eene lijn RP, evenwijdig aan eene van dezelve, bij voorbeeld, GH te trekken, zoodanig, dat de regthoek der deelen PQ en QR, waarin deze lijn RP door de drie overige gegevene lijnen AB, CD en EF geſneden wordt, een maximum zij?

Oplossing. Door I. R. Schmidt.

Stellen wij IK $= a$ en KQ $= x$, dan is IQ $= a - x$, wanneer dan verder de hoeken zoo genaamd worden als in de figuur is aangewezen, dan is

$Sin.\ \beta : x = Sin.\ \alpha$: QR, dus QR $= \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ \beta} . x$

$Sin.\ \delta : (a - x) = Sin.\ \gamma$: PQ, dus PQ $= \frac{Sin\ \gamma}{Sin.\ \delta} (a - x)$

en bijgevolg

$$PQ \times QR = \frac{Sin.\ \alpha . Sin.\ \gamma}{Sin.\ \beta\ Sin\ \delta} . x\ (a - x) = maximum$$

Daar dan $y = ax - x^2$ een maximum moet zijn, zoo hebben wij $\frac{\partial y}{\partial x} = a - 2x$ en $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2$.

Door $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ te ſtellen, vinden wij oogenblikkelijk $x = \frac{1}{2}a$ en het negatieve teeken van $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ toont aan, dat deze waarde overeenſtemt met een maximum van y.

Indien wij dus IK midden door deelen in Q, en door Q de lijn PR evenwijdig aan GH trekken, zal deze de begeerde lijn zijn.

CXXI.

CXXI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Eene parabool APFB (Fig. 80) gegeven zijnde, met eene koorde AF, getrokken uit eenig punt A, tot den top F; dan begeert men:

1°. *Een punt P in de parabool te vinden, zoodanig dat, trekkende uit hetzelve eene lijn loodregt op de as, het ſtuk PR van deze loodlijn, begrepen tuſſchen de parabool en de koorde, een maximum zij?*

2°. *Het punt P zoodanig te bepalen, dat het ſtuk PS, van de lijn, die uit dit punt evenwijdig aan de as getrokken wordt, begrepen tuſſchen de parabool en de koorde, een maximum zij?*

3°. *Het punt P op zulk eene wijze te plaatſen, dat, trekkende uit hetzelve eene loodlijn op, en eene lijn evenwijdig aan de as, deze twee lijnen, met de koorde eenen driehoek vormen, waarvan de inhoud een maximum is?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Om aan het eerſte gedeelte van het vraagſtuk te voldoen, ſtellen wij FQ $= x$ en PQ $= y$; FB $= a$ en AB $= b$, dan is FQ : FB $=$ PQ^2 : AB^2, of $x : a = y^2 : b^2$ dus $y^2 = \frac{b^2 x}{a}$ en PQ $= y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$.

Verder is FQ : RQ $=$ FB : AB en hieruit volgt RQ $= \frac{\text{FQ} \times \text{AB}}{\text{FB}} = \frac{bx}{a}$, waardoor wij verkrijgen

$$\text{PR} = \text{PQ} - \text{RQ} = b\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{bx}{a} = b\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}\right)$$

en het blijkt dus dat $\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}$, dat is $\frac{\sqrt{ax} - x}{a}$ of wel dat $\sqrt{ax} - x$ een maximum moet zijn.

Stellende dan $\sqrt{ax} - x = z$, dan hebben wij

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{2\sqrt{ax}} - 1 \text{ en } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{a}{4x\sqrt{ax}}$$

en daar $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ moet zijn, $\frac{a}{2\sqrt{ax}} = 1$, dat is $a = 2\sqrt{ax}$, of $4ax = a^2$, waaruit $x = \frac{1}{4}a$.

Wij hebben dus FQ $= \frac{1}{4}$ FB en hieruit volgt PQ $=$ TB $= y = \frac{1}{2}b$ of TB $= \frac{1}{2}$ AB; wanneer dus AB middendoor wordt gedeeld in T, en TP evenwijdig met de as FB getrokken wordt,

zal P het begeerde punt zijn; want het negatieve teeken van $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ beflist bovendien het beſtaan van het gevraagde maximum.

www.libtool.com.cn

Het punt P nu zoodanig bepaald hebbende, dat het aan het eerſte gedeelte van het vraagſtuk voldoet, zouden wij moeten overgaan tot de oplosſing der twee overige deelen van hetzelve, doch wij kunnen gemakkelijk bewijzen, dat hetzelfde punt P aan al de deelen van het vraagſtuk te gelijker tijd beantwoordt; want daar de driehoeken PRS en RFQ gelijkvormig zijn, zoo is PR : PS = RQ : QF = AB : BF = b : a en dus

$$1°.\ PS = \frac{a}{b}\ PR \text{ en } 2°.\ \triangle\ RPS = \frac{a}{2b}\ PR^2$$

Daar nu $\frac{a}{b}$ eene conſtante grootheid is, zoo volgt hieruit, dat PS en $\triangle$ RPS maxima zullen zijn, zoodra PR een maximum is; zijnde het bovendien ook klaar, dat op dit oogenblik RS een maximum zal zijn.

CXXII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Alles als in het voorgaande Voorſtel zijnde, begeert men het punt P (Fig. 81.) zoodanig te bepalen, dat de regthoek PR × P'R van de deelen, waarin de lijn PP', (regthoekig door de as tot aan de andere zijde van de parabool gaande) door de koorde AF gefneden wordt, een maximum zij?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Stellende alles zoo als in het voorgaande Voorſtel, dan is

$$PR = PQ - RQ = b\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}\right) \text{ en } P'R = PQ + RQ$$

$$= b\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{x}{a}\right), \text{ zoodat}$$

$$PR \times P'R = b^2\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(ax - x^2\right)$$

$(ax - x^2)$ moet dus een maximum zijn, en ſtellende dit gelijk z hebben wij

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a - 2x; \text{ en } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2;$$

de eerſte gelijk o ſtellende, geeft $x = \frac{1}{2}a$, en het negatieve teeken van de tweede doet ons het maximum verkennen.

Daar

Daar dus $x = \frac{1}{2}a$ is, moet FB middendoor gedeeld worden in Q en dan zal PP', loodregt in Q door FB gaande, de parabool in het gevraagde punt P ſnijden.

www.libtool.com.cn

CXXIII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Alles nogmaals zoo als in de twee voorgaande vraagſtukken gegeven zijnde, begeert men het punt P (Fig. 82) zoo te conſtrueren, dat, trekkende uit A de ordinaat AB van de as, en uit P eene lijn evenwijdig aan de as, ſnijdende de koorde AF in S en de ordinaat AB in T, de regthoek PS × PT een maximum zij?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Stellen wij AB $= b$, BF $= a$ en AT $= y$, dan is AT : AB = ST : BF, dat is $y : b = ST : a$ waaruit $ST = \frac{a}{b}y$

vervolgens hebben wij

$$AB^2 : PQ^2 = FB : FQ,$$

of $$\ldots . b^2 : (b - y)^2 = a : FQ$$

waaruit $FQ = \frac{a(b-y)^2}{b^2}$.

Verder is

$$PT = FB - FQ = a - \frac{a(b-y)^2}{b^2} = \frac{ay(2b-y)}{b^2}$$

$$PS = PT - ST = \frac{ay(2b-y)}{b^2} - \frac{ay}{b} = \frac{ay(b-y)}{b^2}$$

zoodat $PS \times PT = \frac{a^2}{b^4} \cdot y^2(b-y)(2b-y)$, en daar dit een maximum moet zijn, zoo verkrijgen wij

$$z = y^2(b-y)(2b-y) = maximum$$

dat is, wanneer wij de aangewezen multiplicatie verrigten,

$$z = y^4 - 3by^3 + 2b^2y^2 = maximum$$

dit differentierende, zoo komt er

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 9by^2 + 4b^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 18by + 4b^2$$

Wordt nu $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ geſteld, dan hebben wij de vergelijking

$4y^3 - 9by^2 + 4b^2y = 0$, of, door y deelende, $4y^2 - 9by + 4b^2 = 0$, uit welke vergelijking gevonden wordt

www.libool.com.cn

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8} \cdot b;$$ dat is $$AT = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8} \times AB.$$

Brengen wij deze waarden over in $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, dan vinden wij, na behoorlijke herleiding, $\frac{1}{8}(17 \pm 9\sqrt{17})\,b^2$, waarvan de eerste waarde positief en de laatste negatief is, hetgeen aantoont dat $y = \frac{9 + \sqrt{17}}{8} \cdot b$ een minimum, en $y = \frac{9 - \sqrt{17}}{8} \cdot b$ een maximum voor PS × PT, geeft. Maken wij dan $AT = \frac{1}{8}(9 - \sqrt{17}) \cdot AB$ en $AT' = \frac{1}{8}(9 + \sqrt{17})\,AB$, dan zal, bij het punt P, PS × PT een maximum, en bij het punt P′, P′S′ × P′T′ een minimum zijn. (*)

Om ons van het werkelijke aanwezen van dit maximum en minimum te overtuigen, zoo laat ons onderstellen dat de lijn TP, van het punt A af te rekenen, evenwijdig aan de as BF voort bewogen worde; wij zullen dan duidelijk inzien, dat de regthoek PS × PT in het punt A gelijk nul is; dat dezelve allengskens grooter wordt, totdat hij in den stand TP gekomen zijnde, en zijne grootste waarde bereikt hebbende, wederom kleiner en kleiner wordt en eindelijk, wanneer T in B valt, andermaal verdwijnt; doch in dit geval is PS × PT wel gelijk nul, maar geenszins een minimum; want wanneer PT nog verder voort beweegt, bij voorbeeld, tot in den stand P′T′, dan is P′T′ positief gebleven, doch P′S′ is negatief geworden; de regthoek PS × PT is dan, na door nul gegaan te zijn, van positief negatief en dus tonophoudelijk kleiner geworden; en hij gaat nu voort met kleiner en kleiner (dat is grooter negatief) te worden, totdat hij in den stand T′P′S′ zijne grootste negatieve waarde bereikt heeft, en dit is ons gevonden minimum. Beweegt de lijn PT nog verder voort,

(*) De waarde $AT = \frac{1}{8}(9 \pm \sqrt{17})\,AB$ laat zich gemakkelijk construeren, omdat dezelve onder den vorm $AT = \frac{9}{8}AB \mp \frac{1}{8}\sqrt{(AB)^2 + (\frac{1}{4}AB)^2}$ kan geschreven worden. Wanneer alzoo $BH = \frac{1}{8}AB$ en $BI = \frac{1}{4}AB$ genomen wordt, zal men slechts $HT = HT' = \frac{1}{8}AI$ behoeven te maken om de punten T en T′ te vinden.

voort, dan wordt de regthoek PS × PT weer minder en minder negatief, en T in A′ vallende, wordt die regthoek voor de derde maal nul; nu gaat dezelve echter, bij eene verdere voortbeweging, wederom in den positieven toestand over, omdat, voor eenen verderen stand $P''T''S''$, $P'T''$ en $P''S''$ beide negatief zijnde, derzelve product positief wordt, en dit blijft nu ook voortduren hoe ver men lijn PT ook doet voortloopen.

Er bestaat bovendien nog een tweede minimum; want wij hebben de vergelijking $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 9by^2 + 4b^2y = 0$, om y te bepalen, door y gedeeld. Deze vergelijking heeft alzoo ook den wortel $y = 0$ en daar deze waarde $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = +4b^2$ maakt, toont zij een minimum aan, welk minimum bijgevolg in het punt A, alwaar $y = 0$ is, plaats moet hebben; en in de daad, wanneer wij de lijn PT naar boven, in plaats van naar beneden, laten voortbewegen en door A laten gaan, zien wij duidelijk dat, wanneer T in A valt, de regthoek PS × PT gelijk o wordt, doch dat, T in t vallende, die regthoek wederom positief wordt, omdat ps en pt dan beide negatief zijn. Er heeft alzoo in A een wezenlijk minimum voor den regthoek PS × PT plaats, want in dit punt is PS × PT = o, terwijl voor en na dit punt, PS × PT positief en dus grooter dan o is.

Aanmerking. Men zou op dezelfde wijze nog verschillende soortgelijke problemata kunnen voorstellen, bij voorbeeld PS × ST; PT × ST; *enz.* tot een maximum of minimum te maken, welke ondertusschen alle even gemakkelijk in de oplosſing zijn, en welke wij alzoo aan het onderzoek van den lezer overlaten.

CXXIV. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Onder alle mogelijke kegels, welke dezelfde ſchuinſche zijde hebben, diengenen te bepalen, waarvan de grootſte ingeſchrevene cilinder, de grootst mogelijke oppervlakte heeft; het grond- en bovenvlak van den cilinder medegerekend zijnde?

Oplossing. Door I. R. Schmidt.

Laat (*Fig.* 78.) ABG de doorſnede van den kegel en ECF de

de doorsnede van den cilinder zijn. Stellen wij de schuinsche zijde AB $= a$, den straal AM van het grondvlak x, de hoogte BM van den kegel z en de hoogte DM van den cilinder y, dan is BM : AM $=$ BD : DC, dus DC $= \frac{\text{AM} \times \text{BD}}{\text{BM}} = \frac{x(z-y)}{z}$;

hierdoor vinden wij voor het grondvlak des cilinders $\frac{x^2(z-y)^2}{z^2} \times \pi$ en, vermenigvuldigende dit met de hoogte y, dan komt er voor den inhoud van den cilinder $\frac{x^2(z-y)^2 \times y}{z^2} \times \pi$. Om nu vooreerst te bepalen, wanneer deze inhoud op zijn grootst zal zijn, moeten wij x en z constant onderstellen, en bijgevolg moet de formule $X = (z-y)^2 \times y = z^2y - 2zy^2 + y^3$ (waarin nu z constant is) een maximum zijn; wij hebben alzoo

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 3y^2 - 4yz + z^2 = (z-y)(z-3y) = 0$$

waaruit $y = z$ of $y = \frac{1}{3}z$; en daar wij verder hebben

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 6y - 4z$$

zoo vinden wij door $y = \frac{1}{3}z$, $\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -2z$, hetgeen aanduidt, dat $y = \frac{1}{3}z$ een maximum geeft, terwijl de substitutie van $y = z$, $\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 2z$ makende, een minimum aanduidt, bij hetwelk echter de inhoud van den cilinder gelijk nul is.

Hieruit volgt dan, dat in eenigen kegel de grootste ingeschreven cilinder bepaald wordt door deszelfs hoogte, gelijk $\frac{1}{3}$ van de hoogte des kegels te nemen.

Om nu te vinden, wanneer, voor eenige gegevene schuinsche zijde a, deze grootste cilinder het grootste oppervlak zal hebben, zoo merken wij op, dat, uit $y = \frac{1}{3}z$, volgt DC $= \frac{x(z-y)}{z} = \frac{2}{3}x$;

de ronde oppervlakte van dezen grootsten cilinder is dus $\frac{4}{3}\pi x \times \frac{1}{3}z$, of $\frac{4}{9}\pi xz$, terwijl het grond- en bovenvlak ieder gelijk is aan $\frac{4}{9}x^2\pi$; de geheele oppervlakte van dezen grootsten cilinder is dus $\frac{8}{9}x^2\pi + \frac{4}{9}\pi xz$, dat is $\frac{4}{9}\pi(xz + 2x^2)$, en wij hebben dus deze twee vergelijkingen

$$Y = xz + 2x^2 = \textit{maximum}; \quad x^2 + z^2 = a^2$$

uit

Uit de eerste is $\frac{\partial Y}{\partial x} = z + 4x + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, en uit de tweede $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, en dit in $\frac{\partial Y}{\partial x}$ overgebragt, verkrijgen wij

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = z + 4x - \frac{x^2}{z} = 0$$

dat is $z^2 + 4xz - x^2 = 0$, of $(z + 2x)^2 = 5x^2$, waaruit $z = (-2 \pm \sqrt{5})\, x$.

Differentieren wij $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{z^2 + 4xz - x^2}{z}$, dan zullen wij, in aanmerking nemende dat $x^2 + 4xz - x^2 = 0$ is, vinden,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 2 \times \frac{(2z - x) + (z + 2x)\frac{\partial z}{\partial x}}{z}$$ en stellende hierin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 4 \cdot \frac{z^2 - zx - x^2}{z^2} = 4 \cdot \frac{z^2 + 4xz - z^2 - 5zx}{z^2} = -\frac{20x}{z}.$$

Stellende nu hierin $z = (-2 + \sqrt{5})\, x$ of $\frac{x}{z} = 2 + \sqrt{5}$, dan wordt $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -20\,(2 + \sqrt{5})$, en $z = (-2 + \sqrt{5})\, x$ toont alzoo een maximum aan, terwijl $z = -(2 + \sqrt{5})\, x$ of wat hetzelfde is, $\frac{x}{z} = 2 - \sqrt{5}$, geeft $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 20(-2 + \sqrt{5})$ hetgeen positief zijnde een minimum aanduidt.

Voor het gevraagde maximum van de oppervlakte moet alzoo $x = (2 + \sqrt{5})\, z$ zijn, en omdat daarenboven $x^2 + z^2 = a^2$ is, zoo verkrijgen wij hierdoor

$$z = a\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{10}}$$ voor de hoogte van den kegel, en

$$x = a\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{10}}$$ voor de radius van het grondvlak.

Stellen wij den halven tophoek van den kegel ϕ, dan is $Sin.\ \phi = \frac{x}{a} = \sqrt{\frac{1}{10}(5 + 2\sqrt{5})} = 0{,}8506492$, dus $\phi = 58°16'56''46$ en dus is de tophoek van den gevraagden kegel $116°33'52'',92$.

Men

Men zou nog kunnen vragen, hoe groot de hoek van een' sector tot zou moeten zijn welke uit den cirkel, beschreven met den straal a, zou moeten worden uitgesneden, opdat het overschietende deel, het oppervlak van onzen gevraagden kegel zou uitmaken. Om dezen hoek, welke wij ϕ' zullen stellen, te berekenen merken, wij op, dat die sector door eenen boog gemeten wordt, welke gelijk is aan den omtrek van den gegevenen cirkel, verminderd met den omtrek van de bazis des kegels, dat is, door eenen boog, welke gelijk is aan $2a\pi - 2\pi x$; merken wij verder op, dat dit de lengte des boogs voor de radius a is, dan verkrijgen wij voor den straal 1, $\phi' = 2\pi\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ en wanneer wij hierin de gevondene waarde van $\frac{x}{a}$ substitueren

$$\phi' = 2\pi \times (1 - 0{,}8506492) = 2\pi \times 0{,}1493508$$

dat is, in graden, omdat $2\pi = 360°$ is

$$\phi' = 360° \times 0{,}1493508 = 53°45'58''64.$$

CXXV. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Uit een punt aan den omtrek van eenen gegevenen cirkel zijn twee koorden getrokken van gegevene lengte: men vraagt naar eene stelkundige formule, waardoor de lengte der koorde, die den overigen cirkelboog bespant, berekend kan worden?

OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

Laten AC en BC (*Fig.* 74.) de gegevene koorden en M het middelpunt van den gegevenen cirkel zijn, dan moeten wij AB, welke den overigen boog ADB onderspant, in AC, BC en den bekenden straal uitdrukken. Te dien einde trekke men door C de middellijn CMD en uit A en B de koorden AD en BD. Stellende nu AC $= a$, BC $= b$ en CM $= r$, dan is, AB $= x$ stellende, AD $= \sqrt{(4r^2 - a^2)}$ en BD $= \sqrt{(4r^2 - b^2)}$; omdat de hoeken CAD en CBD regt zijn.

Nu is (DE GELDER, *Meetkunde*, 5^e^. *Boek*, 28^e^. *Stelling*.)

$$AB \times CD = AC \times DB + AD \times BC$$

waaruit volgt

$$AB = \frac{AC \times DB + BC \times AD}{AB},$$

dat

dat is, wanneer wij de geſtelde en gevondene waarden ſubſtitueren

$$x = \frac{a\sqrt{(4r^2 - b^2)} + b\sqrt{(4r^2 - a^2)}}{2r} \quad \ldots (\alpha)$$

www.libtool.com.cn

Gevolg. Wanneer de ſtraal $r = 1$ genomen wordt, dan is, omdat ieder hoek aan den omtrek gemeten wordt, door den halve boog, waarop hij ſtaat, en omdat ieder koorde gelijk is aan de dubbelde ſinus van den onderſpannen boog, $a = AC = 2\,Sin.\,B$; $b = BC = 2\,Sin.\,A$; $\sqrt{(4 - b^2)} = 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4}b^2)} = 2\sqrt{(1 - Sin^2.A)} = 2\,Cos.\,A$ en $\sqrt{(4 - a^2)} = 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)} = 2\sqrt{(1 - Sin^2.B)} = 2\,Cos.\,B$; eindelijk is $x = AB = 2\,Sin.\,C = 2\,Sin.\,(180^\circ - (A + B)) = 2\,Sin.\,(A + B)$, en brengende dit alles over in de vergelijking (α), dan wordt dezelve, na door 2 gedeeld te hebben,

$$Sin.\,(A + B) = Sin.\,A \times Cos.\,B + Sin.\,B \times Cos.\,A$$

hetgeen dus als een nieuw en eenvoudig bewijs voor deze bekende goniometriſche formule kan aangemerkt worden.

CXXVI. VOORSTEL.

Door Jacob de Gelder.

Te vinden uit hoeveel cijfers het product van al de natuurlijke getallen, van één *tot* duizend *ingeſloten, beſtaan zal, en welke de cijfers van de hoogſte rangen van dit product zullen zijn?*

Oplossing. Door I. R. Schmidt.

Stellen wij $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times$ *enz.* $\ldots$ *tot* $1000 = y$, dan is, wanneer wij van deze vergelijking tot de Logarithmen overgaan,

$$Log.\,1 + Log.\,2 + Log.\,3 + Log.\,4 + enz. \ldots + Log.\,1000 = Log.\,y$$

en het komt er dus op aan, om de ſom van al de Logarithmen der natuurlijke getallen, van *één* tot *duizend*, te bepalen.

Wij ſtellen ons dus voor, in het algemeen de ſom van al de Logarithmen der natuurlijke getallen, van 1 tot x, te bepalen, en wij zullen kortheidshalve deze ſom uitdrukken door $S\,Log.\,(x)$.

Daar nu deze ſom noodzakelijk eene functie van x moet zijn, zoo ſtellen wij dezelve X, en dit verſchaft ons de vergelijking

$$S\,Log.\,(x) = X \quad \ldots (1).$$

Deze formule of vergelijking moet doorgaan voor elke waarde

van x; indien wij dus $x - 1$ in plaats van x ſtellen, dan verandert X in de waarde, welke X verkrijgt door de ſubſtitutie van $x - 1$ in plaats van x, en het theorema van TAILOR leert ons, dat de vergelijking (1) alzoo overgaat in

$$S\,Log\,(x-1) = X - \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 X}{2\partial x^2} - \frac{\partial^3 X}{2\,3\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 X}{2\,3\,4\,\partial x^4} - \&c. \quad (2)$$

Trekken wij nu (2) van (1), dan verkrijgen wij, omdat de ſom van al de Logarithmen van 1 tot x, verminderd met de ſom der Logarithmen van 1 tot $x - 1$, noodzakelijk *Log.* x tot verſchil moet geven,

$$S\ Log.\ (x) - S\ .\ Log.\ (x-1) = Log.\ x$$

en wij hebben bijgevolg de vergelijking

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial^2 X}{2\partial x^2} + \frac{\partial^3 X}{6\partial x^3} - \frac{\partial^4 X}{24\partial x^4} + \frac{\partial^5 X}{120\partial x^5} - \&c. = Log.\ x \ldots (3)$$

en wanneer wij hiervan de achtervolgende differentialen nemen,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 X}{2\partial x^3} + \frac{\partial^4 X}{6\partial x^4} - \frac{\partial^5 X}{24\partial x^5} + \&c. = \frac{m}{x}$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 X}{2\partial x^4} + \frac{\partial^5 X}{6\partial x^5} - \&c. = -\frac{m}{x^2}$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{\partial^5 X}{2\partial x^5} + \&c. \ldots = \frac{2m}{x^3}$$

$$\frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \&c. = -\frac{2\cdot 3\cdot m}{x^4}$$

&c. &c.

waarin de wet van opvolging zoo duidelijk is, dat de verdere voortzetting geene andere moeite, dan het ſchrijven der termen, kan veroorzaken

Door middel van deze differentiaal-vergelijkingen, kunnen wij al de hoogere differentialen uit de vergelijking (3) op de volgende wijze doen verdwijnen.

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial^2 X}{2\partial x^2} + \frac{\partial^3 X}{6\partial x^3} - \frac{\partial^4 X}{24\partial x^4} + \frac{\partial^5 X}{120\partial x^5} - \&c. = Log.\ x$$

$$+ \frac{\partial^2 X}{2\partial x^2} - \frac{\partial^3 X}{4\partial x^3} + \frac{\partial^4 X}{12\partial x^4} - \frac{\partial^5 X}{24\partial x^5} + \&c. = \frac{m}{2x}$$

$$+ \frac{\partial^3 X}{12\partial x^3} - \frac{\partial^4 X}{24\partial x^4} + \frac{\partial^5 X}{72\partial x^5} - \&c. = -\frac{m}{12x^2}$$

$$- \frac{\partial^5 X}{720\partial x^5} + \&c. = \frac{m}{120x^4}$$

&c. &c.

waar-

www.liwoo.com.cn

waarvan de som is

$$\frac{\partial X}{\partial x} = Log.\,x + \frac{m}{2x} - \frac{m}{12x^2} + \frac{m}{120x^4} - \&c.$$

en men zal zich met gemak kunnen overtuigen dat, bij het voortzetten der eliminatie, zal gevonden worden

$$\frac{\partial X}{\partial x} = Log.\,x + \frac{m}{2x} - \frac{m}{12x^2} + \frac{m}{120x^4} - \frac{m}{252x^6} + \frac{m}{240x^8} - \&c.$$

Vermenigvuldigen wij dit met ∂x, zoo verkrijgen wij

$$\partial X = \partial x\,.\,Log.\,x + \frac{m\partial x}{2x} - \frac{m\partial x}{12x^2} + \frac{m\partial x}{120x^4} - \frac{m\partial x}{252x^6} + \frac{m\partial x}{240x^8} - \&c.$$

en bijgevolg,

$$X = \int \partial x\,Log.\,x + m\int\left(\frac{\partial x}{2x} - \frac{\partial x}{12x^2} + \frac{\partial x}{120x^4} - \frac{\partial x}{252x^6} + \frac{\partial x}{240x^8} - \&c\right)$$

nu is $\partial\,.\,x\,Log.\,x = \partial x\,Log.\,x + m\partial x$ en bijgevolg,

$$\partial x\,Log.\,x = \partial\,.\,x\,Log.\,x - m\partial x$$

zoodat $\int \partial x\,Log.\,x = x\,Log.\,x - mx$. Onze aangewezene integraal wordt alzoo

$$X = C + x\,Log.\,x - mx + \tfrac{1}{2}Log.\,x + m\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{1680x^7} + \&c.\right)$$

dat is

$$X = C + (x+\tfrac{1}{2})\,Log.\,x - m\left(x - \frac{1}{12x} + \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{1260x^5} + \frac{1}{1680x^7} - \&c.\right)$$

Om eindelijk de constante C te bepalen, merken wij op, dat voor $x = 1$; $X = S\,Log.\,(1) = Log.\,1 = 0$ moet worden, en wij hebben alzoo

$$0 = C - m\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1188} + \frac{1}{360360} - \&c.\right)$$

en dit geeft ons bijgevolg voor de gevraagde som

$$S\,Log.\,(x) = Log.\,1 + Log.\,2 + Log.\,3 + Log.\,4 + \&c. \ldots + Log.\,x$$

$$= (x+\tfrac{1}{2})\,Log.\,x - m\left(x - \frac{1}{12x} + \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{1260x^5} + \frac{1}{1680x^7} - \&c.\right)$$

$$+ m\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1188} + \&c.\right)$$

Toepassing. Stellende $x = 1000$, dan is $Log.\,x = 3$. Bekende C in decimalen vinden wij verder

$$C = 0{,}3990899$$

en nemen wij verder in aanmerking, dat voor ons ſtelſel is

$$m = 0{,}43429448 \text{ \&c.}$$

dan hebben wij de volgende berekening

www.libtool.com.cn

$$\begin{array}{rl} (x + \tfrac{1}{2})\ Log.\ x = & 3001{,}5000000 \\ -\ m\,x = & 434{,}2944819 \\ \hline & 2567{,}2055181 \\ +\ \frac{m}{12\,x} = & 0{,}0000364 \\ \hline & 2567{,}2055545 \\ C = & 0{,}3990899 \\ \hline X = & 2567{,}6046444 \end{array}$$

De ſom van al de Logarithmen van *één* tot *duizend* ingeſloten is alzoo 2567,6046444, en daar dit de Logarithmus is van het product van al de getallen, van *één* tot *duizend* ingeſloten, zoo blijkt, vooreerst, dat dit product zal beſtaan uit 2568 cijferletters, en ten tweede, dat de zeven eerſte cijfers van dit product zullen zijn 4023873.

ANDER VOORBEELD. Begeerde men de ſom aller Logarithmen tot 100000 ingeſloten, dan zou de berekening aldus komen te ſtaan:

$$\begin{array}{rl} (x + \tfrac{1}{2}) = & 500002{,}5000000 \\ -\ mx = & 43429{,}4481903 \\ \hline & 456573{,}0518097 \\ +\ \frac{m}{12\,x} = & 0{,}0000003 \\ \hline & 456573{,}0518100 \\ C = & 0{,}3990899 \\ \hline X = & 456573{,}4508999. \end{array}$$

Dit dan de ſom aller Logarithmen der natuurlijke getallen tot 100000 ingeſloten zijnde, zoo vinden wij, door den wijzer met de eenheid te verhoogen, dat het product van alle getallen van 1 tot 100000 ingeſloten uit 456574 cijfers zal beſtaan.

AANMERKING. In de twee bijgebragte voorbeelden hebben wij onze formule op de gewone tafel- of Briggiaanſche Logarithmen toegepast; daar wij echter in onze formule het modulus m onbe-

bepaald gelaten hebben, blijkt het van zelve, dat deze formule even goed op alle ſtelſels van Logarithmen toepaſſelijk is; doch dan moet in aanmerking genomen worden, dat m veranderende, ook C, welke van m afhangt, mede verandert.

CXXVII. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Wanneer p een geheel getal beteekent, dan is

$$\tfrac{1}{9} \times (2^{4p+1} - 2^{2p} - 1)$$

altijd een trigonaal of driehoekig getal. Men vraagt naar het bewijs?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Het is bekend, dat men door trigonalen of driehoekige getallen zulke getallen verſtaat, welke door het ſommeren van de termen der reeks van de natuurlijke getallen, van *één* af te beginnen, ontſtaan. De reeks der trigonalen is bijgevolg 1.3.6.10.15 &c. waarvan de algemeene term is $\frac{x\,(x+1)}{2}$, en het komt er dus op aan te bewijzen, dat de, in het vraagſtuk opgegevene, formule, indien ſlechts voor p eenig geheel getal genomen wordt, altijd een der getallen van de zoo aanſtonds opgenoemde reeks zal uitleveren. Het vraagſtuk zal dus opgelost zijn, indien wij die opgegevene formule tot den vorm $\frac{x\,(x+1)}{2}$ kunnen herleiden. Zie hier deze herleiding

$$\tfrac{1}{9} \times (2^{4p+1} - 2^{2p} - 1) = \tfrac{1}{9} \times \frac{2^{4p+2} - 2^{2p+1} - 2}{2} =$$

$$\tfrac{1}{9} \times \frac{(2^{4p+2} - 4 \times 2^{2p+1} + 4) + (3 \times 2^{2p+1} - 6)}{2} =$$

$$\tfrac{1}{9} \times \frac{(2^{2p+1} - 2)^2 + 3\,(2^{2p+1} - 2)}{2} =$$

$$\frac{\left(\frac{2^{2p+1}-2}{3}\right)^2 + \frac{2^{2p+1}-2}{3}}{2} = \frac{\left(\frac{2^{2p+1}-2}{3}\right) \times \left(\frac{2^{2p+1}-2}{3}+1\right)}{2}$$

welke laatſte herleide uitdrukking klaarblijkelijk tot den vorm $\frac{x\,(x+1)}{2}$ behoort, zijnde hier $x = \frac{1}{3}\,(2^{2p+1} - 2)$.

Om nu te bewijzen, dat onze formule voor eenige geheele positieve waarde van p altijd een der getallen van de reeks 1 . 3 . 6 . 10 . 15 *enz.* zal geven, moeten wij nog aantoonen, dat, p eenig geheel getal zijnde, $\frac{1}{3}(2^{2p}-2)$ altoos een geheel getal zal zijn.

www.libtool.com.cn

Te dien einde merken wij op, dat $2^{2p+1}-2$ aldus geschreven kan worden $2(2^{2p}-1)$; daar nu 2 niet door 3 deelbaar is, zullen wij moeten bewijzen, dat $2^{2p}-1$ altijd door 3 deelbaar zal wezen.

De verschillende waarden van 2^{2p} klimmen op, volgens eene meetkunstige reeks, waarvan ieder term in den volgenden viermaal begrepen is, indien dus 2^n-1 eene der waarden van $2^{2p}-1$ voorstelt, zal de volgende moeten worden uitgedrukt door $4\times 2^n-1$; is nu 2^n-1 door 3 deelbaar, en dus gelijk aan $3a$, dan is $2^n=3a+1$ en dus $4\times 2^n-1=4(3a+1)-1=12a+4-1=12a+3=3(4a+1)$; waaruit volgt, dat, indien eene der waarden van $2^{2p}-1$ door 3 deelbaar is, ook al de volgende zulks zullen zijn. Nu is voor $p=1$, $2^2-1=4-1=3$ door drie deelbaar, bijgevolg moeten dan ook al de waarden van $2^{2p}-1$ door drie deelbaar zijn, $2(2^{2p}-1)$, dat is, $2^{2p+1}-2$, is dus ook voor ieder geheele waarde van p door drie deelbaar; x is dus voor ieder geheele waarde van p een geheel getal, en bijgevolg geeft de opgegevene formule altoos geheele getallen, welke tot de reeks 1, 3, 6, 10, 15 *enz.* behooren.

CXXVIII. VOORSTEL.

Door S. I. MULDER.

Vindt drie getallen in eene harmonische reeks, zoodanig dat er drie quadraten komen, wanneer men bij het product dezer getallen, het product van elk twee dezer getallen addeert. (33)

OPLOSSING. Door S. I. MULDER.

Het is genoegzaam bekend, dat wanneer een zelfde getal gedeeld wordt door de termen van eene rekenkunstige reeks, de ach-

(33) PAUL HALCKEN, N°. 305.

achtervolgende quotienten eene harmonifche reeks zullen vormen. Wij ftellen alzoo de drie gevraagde getallen

$$\frac{x}{p^2 - x}; \frac{x}{q^2 - x} \text{ en } \frac{x}{r^2 - x}$$

www.libtool.com.cn

en dan zullen de getallen p en q en r zoodanig moeten genomen worden, dat p^2, q^2 en r^2 eene rekenkunftige reeks uitmaken. Hieraan wordt echter gemakkelijk voldaan door $p = m - n$, $q = m$ en $r = m + an$ te ftellen, want dan moet $q^2 = p^2 + r^2$ of $2m^2 = 2m^2 + 2(a - 1)mn + (a^2 + 1)n^2$ zijn, en hieruit volgt oogenblikkelijk $n = \frac{2(1 - a)}{1 + a^2} \times m$, waarin nu a en m naar welgevallen kunnen genomen worden. Nemende bij voorbeeld $a = \frac{1}{2}$ en $m = 5$, dan wordt $n = 4$, dus $p = 1$; $q = 5$ en $r = 7$, en het is dus klaar, dat men oneindig veel antwoorden voor p, q en r kan vinden, welke aan deze eerfte voorwaarden voldoen.

Hebbende p, q en r dan alzoo bepaald, blijft er volgens den eisch van het vraagftuk nog over, dat de volgende uitdrukkingen quadraten zijn:

$$\frac{x^3}{(p^2 - x)(q^2 - x)(r^2 - x)} + \frac{x^2}{(p^2 - x)(q^2 - x)}$$

$$\frac{x^3}{(p^2 - x)(q^2 - x)(r^2 - x)} + \frac{x^2}{(p^2 - x)(r^2 - x)}$$

$$\frac{x^3}{(p^2 - x)(q^2 - x)(r^2 - x)} + \frac{x^2}{(r^2 - x)(q^2 - x)}$$

welke uitdrukkingen zich door wezenlijke optelling gemakkelijk herleiden tot

$$\frac{x^2 r^2}{(p^2 - x)(q^2 - x)(r^2 - x)}; \frac{x^2 q^2}{(p^2 - x)(q^2 - x)(r^2 - x)}$$

en $\frac{x^2 p^2}{(p^2 - x)(q^2 - x)(r^2 - x)}$

en deze drie formulen zullen ten duidelijkfte allen quadraten zijn, indien flechts

$$(p^2 - x)(q^2 - x)(r^2 - x)$$

een rationaal quadraat is. Er blijft dus alleen nog over om

$$p^2 q^2 r^2 - (p^2 q^2 + q^2 r^2 + r^2 p^2)x + (p^2 + q^2 + r^2)x^2 - x^3 \ldots (a)$$

tot een rationaal quadraat te maken.

Maken wij hier gebruik van de leerwijze door EULER, in het tweede deel van zijne Algebra, voorgedragen en ſtellen wij alzoo dan wortel van dit quadraat $pqr - bx$, dan zal onze uitdrukking (a) gelijk moeten zijn aan

$$p^2q^2r^2 - 2pqrbx + b^2x^2$$

de eerſte termen verdwijnen van zelven, en om ook de tweede te doen verdwijnen, ſtellen wij

$$2pqrb = p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2$$

waardoor wij vinden

$$b = \tfrac{1}{2}\left(\frac{pq}{r} + \frac{qr}{p} + \frac{rp}{q}\right)$$

en er blijft dus alleen nog overig, de vergelijking

$$(p^2 + q^2 + r^2)\,x^2 - x^3 = b^2x^2$$

welke, door x^2 gedeeld zijnde, geeft

$$x = p^2 + q^2 + r^2 - b^2$$

waardoor het Voorſtel moet worden gehouden voor opgelost.

Trekken wij nu alles bij elkander, dan hebben wij tot het vinden der gevraagde getallen, het volgende ſtelſel van vergelijkingen:

1°. $n = \dfrac{2\,(1 - a)}{1 + a^2} \times m$, waarin a en m onbepaald;

2°. $p = m - n$; $q = m$ en $r = m + an$;

3°. $b = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{pq}{r} + \dfrac{pr}{q} + \dfrac{qr}{p}\right)$

4°. $x = p^2 + q^2 + r^2 - b^2$;

en dan zijn de gevraagde getallen

$$\frac{x}{p^2 - x};\ \frac{x}{q^2 - x};\ \frac{x}{r^2 - x}.$$

VOORBEELD. Nemende $a = \frac{1}{2}$ en $m = 5$, dan wordt $n = 4$ dus $p = 1$, $q = 5$ en $r = 7$; hierdoor hebben wij $b = \frac{1}{2}(\frac{5}{7} + \frac{7}{5} + 35) = \frac{1229}{70}$ en $b^2 = \frac{1687401}{4900}$; verder is $x = 1 + 25 + 49 - \frac{1687401}{4900} = -\frac{1531001}{4900}$, en bijgevolg wordt $p^2 - x = \frac{1536801}{4900}$, $q^2 - x = \frac{1442401}{4900}$ en $r^2 - x = \frac{1560001}{4900}$; de getallen zijn alzoo

$$-\frac{1531001}{1536801};\ -\frac{1531001}{1442401}\ \text{en}\ -\frac{1531001}{1560001}$$

welke getallen, ofſchoon negatief zijnde, volkomen aan het vraagſtuk beantwoorden.

CXXIX.

CXXIX. VOORSTEL.

Door S. I. MULDER.

Uit de algebraïsche uitdrukking $ax^6 - bx^5 + 63x^4 + 415x^3 - cy^2 - dx + e$ *is de derdemagts-wortel* $px^2 - qx - 6$; *men vraagt hierdoor de getallen* a, b, c, d, e, p *en* q *te bepalen?* (34)

OPLOSSING. Door S. I. MULDER.

Verheffende den gegevenen derde-magtswortel $px^2 - qx - 6$ tot de derde magt, dan verkrijgen wij $p^3x^6 - 3p^2qx^5 + (3pq^2 - 18p^2)x^4 + (36pq - q^3)x^3 + (108p - 18q^2)x^2 - 108qx - 216$.

Vergelijken wij nu de coëfficienten van deze uitdrukking met de coëfficienten van die, welke in het vraagstuk opgegeven is, dan hebben wij de vergelijkingen

$$3pq^2 - 18p^2 = 63 \text{ en } 36pq - q^3 = 415;$$

uit de tweede is $p = \frac{415 + q^3}{36q}$ dus $p^2 = \frac{172225 + 830q^3 + q^6}{1296q^2}$

en ſubſtituerende deze waarden in de eerſte, dat is, in $pq^2 - 6p^2 = 21$ dan komt er

$$\frac{415q + q^4}{36} - \frac{172225 + 830q^3 + q^6}{216q^2} = 21$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$5q^6 + 1660q^3 - 4536q^2 - 172225 = 0$$

welke vergelijking tot wortel heeft $q = 5$, waaruit dan volgt $p = \frac{415 + q^3}{36q} = \frac{415 + 5^3}{36 \times 5} = \frac{83 + 25}{36} = \frac{108}{36} = 3$. Daar dan $p = 3$ en $q = 5$ is, zoo is de gevraagde derdemagts-wortel $3x^2 - 5x - 6$. De overige onbepaalde letters worden nu gemakkelijk gevonden; want door vergelijking der overige coëfficienten is

$a = p^3 = 27$; $b = 3p^2q = 135$; $c = 108p - 18q^2 = -126$

$d = -108q = -540$ en $e = -216$

zoodat de opgegevene formule is

$$27x^6 - 135x^5 - 63x^4 + 515x^3 - 126x^2 - 540x - 216$$

hetgeen ook volkomen de derde magt is van de uitdrukking $3x^2 - 5x - 6$.

CXXX.

(34) HIDDINGA, *pag.* 64. N°. 78.

CXXX. VOORSTEL.

Door I. R SCHMIDT.

Welke betrekking moet er tusschen de termen van twee meetkunstige evenredigheden beſtaan, opdat de ſommen der overeenkomſtige termen wederom eene meetkunſtige evenredigheid zullen uitmaken?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Stellen wij voor de evenredigheden

$$a : b = c : d \text{ en } A : B = C . D$$

dan moet, volgens het Voorſtel, de volgende evenredigheid plaats hebben:

$$a + A : b + B = c + C : d + D$$

en dus zullen de evenredigheden zoodanig moeten geſteld zijn, dat voldaan worde aan de vergelijking

$$aD + Ad + AD + ad = bC + Bc + BC + bc \ldots (\alpha)$$

maar nu volgt, uit de geſtelde evenredigheden, $ad = bc$ en $AD = BC$, waarvan de ſom, dat is,

$$AD + ad = BC + bc,$$

afgetrokken van (α) tot verkennings vergelijking overlaat

$$aD + Ad = bC + Bc \ldots . (\beta)$$

en uit deze vergelijking verkrijgen wij het volgende antwoord:

De ſommen der overeenkomſtige termen van twee evenredigheden zullen eene nieuwe evenredigheid vormen, wanneer de ſom der producten, welke men verkrijgt, door den eerſten term van de eerſte evenredigheid, met den laatſten term van de tweede, en den eerſten term van de tweede evenredigheid, met den laatſten term van de tweede te vermenigvuldigen, gelijk is aan de ſom der producten, welke op dezelfde wijze uit de middelſte termen van de twee evenredigheden ontſtaan.

1e AANMERKING. Het blijkt hieruit, dat er van de acht getallen, welke de twee evenredigheden uitmaken, vijf naar welgevallen kunnen genomen worden (mits geen vier in dezelfde evenredigheid) en dat men dan altijd de drie overige kan vinden, namelijk, één door de vergelijking $ad = bc$ en de twee andere door de vergelijkingen $AD = BC$ en $Ad + aD = Bc + bC$.

Laat, bij voorbeeld, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $A = 4$ en $B = 5$ gegeven zijn, dan is $d = \frac{bc}{a} = 6$; $D = \frac{B}{A} C = \frac{5}{4} C$

en

en dit gebragt in de vergelijking $Ad + aD = Bc + bC$, komt er $24 + \frac{1}{4}C = 15 + 2C$, waaruit $C = 12$ en $D = 15$; de twee evenredigheden zijn dus $1 : 2 = 3 : 6$ en $4 : 5 = 12 : 15$ zijnde $5 : 7 = 15 : 21$, wederom eene evenredigheid.

2e. Aanmerking. Wanneer wij de algemeene vergelijkingen op dezelfde wijze als het voorgaande voorbeeld behandelen, dan verkrijgen wij $d = \frac{bc}{a}$ en $D = \frac{B}{A} \times C$; dit ſubſtituerende in de verkenningsvergelijking $Ad + aD = Bc + bC$, wordt dezelve $\frac{Abc}{a} + \frac{aBC}{A} = Bc + bC$, of $\frac{aBC}{A} - bC = Bc - \frac{Abc}{a}$, dat is $\frac{(aB - Ab)C}{A} = \frac{(aB - Ab)c}{a}$, en aan beide zijden door $aB - Ab$ deelende, $\frac{C}{A} = \frac{c}{a}$, zoodat $A : C = a : c$ is, waaruit volgt dat de beide voorgaande termen van de eerſte evenredigheid tot elkander in reden moeten zijn als de beide voorgaande termen van de tweede evenredigheid, en dit geeft dus een kenmerk aan de hand, dat nog eenvoudiger is, dan het reeds opgegevene.

3e. Aanmerking. Met dit laatſte kenmerk ſchijnen in den eerſten opſlag verſcheiden gevallen te ſtrijden. Wanneer, bij voorbeeld, de evenredigheden $2 : 4 = 6 : 12$ en $7 : 14 = 9 : 18$ genomen worden, dan maken de ſommen $9 : 18 = 15 : 30$ wederom eene evenredigheid uit, zonder dat nogtans $2 : 6 = 7 : 9$ is. Dit nu komt hiervandaan, dat in dit geval de twee geſtelde evenredigheden eene aaneengeſchakelde evenredigheid uitmaken, dat is, omdat hier $a : b = A : B$ is. Voor dit geval wordt dus $aB = Ab$ of $aB - Ab = 0$ en de vergelijking

$$\frac{(aB - Ab)C}{A} = \frac{(aB - Ab)c}{a}$$

van de vorige aanmerking gaat dus in dit geval, zonder dat $A : C = a : c$ behoeft te wezen, altijd door, daar dezelve dan verandert in de identique vergelijking $0 = 0$.

Wij beſluiten dus uit dit alles, dat de ſommen der overeenkomſtige termen van twee evenredigheden, in de twee volgende gevallen wederom eene evenredigheid zullen uitmaken.

1°. Wanneer de beide voorgaande termen van de eerſte even-

re-

redigheid in dezelfde reden zijn als de beide voorgaande van de tweede evenredigheid.

2°. Wanneer de vier redens, waaruit de twee evenredigheden zijn zamengefteld, eene aaneengefchakelde evenredigheid uitmaken.

Daar deze beide gevallen echter begrepen zijn in de algemeene verkenningsvergelijking $aD + Ad = bC + Bc$, hebben wij aan dezelve in de oplosfing de voorkeur gegeven.

CXXXI. VOORSTEL.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Men laat iemand een getal denken; hetzelve met drie *vermenigvuldigen, en dan zeggen of de uitkomst* even *of* oneven *zij; in het eerfte geval laat men hem die uitkomst door* twee *deelen, doch in het tweede geval er* één *bijvoegen, en dan de fom door* twee *deelen. Deze helft laat men hem wederom met* drie *vermenigvuldigen, en nogmaals zeggen of de uitkomst* even *of* oneven *is; is dezelve* even, *zoo laat men die nog eens halveren, doch is zij* oneven, *dan laat men andermaal* één *bijtellen en de fom halveren. Eindelijk laat men hem zeggen, hoeveel geheele malen het getal* negen *op deze laatfte helft begrepen is, doch de rest van deze deeling laat men hem voor zich behouden. De vraag is nu, hoe men eenen regel zal uitvinden, om hierdoor het getal, dat gedacht was, te kunnen raden.*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Alle getallen zijn, of door *vier* deelbaar, of zij laten, door *vier* gedeeld, *één*, *twee* of *drie* over, het gedachte getal behoort dus onder een' der vier volgende vormen,

$$4n. \quad 4n + 1. \quad 4n + 2. \quad 4n + 3.$$

Wordt dit getal nu met drie vermenigvuldigd, dan behoort het product tot een' der vormen

$$12n. \quad 12n + 3. \quad 12n + 6. \quad 12n + 9.$$

of, indien bij de onevenen, dat is bij $12n + 3$ en $12n + 9$ de eenheid gevoegd wordt, tot een' der vormen

$$12n. \quad 12n + 4. \quad 12n + 6. \quad 12n + 10.$$

deze uitdrukkingen door twee gedeeld, zoo komt er voor de eerfte helft eene der uitdrukkingen

$$6n. \quad 6n + 2. \quad 6n + 3. \quad 6n + 5.$$

wel-

welke met drie vermenigvuldigd overgaan in

$$18\,n. \quad 18\,n + 6. \quad 18\,n + 9. \quad 18\,n + 15.$$

en bij de onevene andermaal de eenheid optellende, in

$$18\,n. \quad 18\,n + 6. \quad 18\,n + 10. \quad 18\,n + 16.$$

welke door twee gedeeld voor de laatste uitkomst geven, een der vormen

$$9\,n. \quad 9\,n + 3. \quad 9\,n + 5. \quad 9\,n + 8.$$

In al deze uitdrukkingen is het getal *negen* nu juist n geheele malen begrepen, en daar men laat zeggen hoeveel malen het getal *negen* op de laatste uitkomst begrepen is, zoo wordt het getal n altijd bekend, en hieruit ziet men ten duidelijkste:

1°. Dat, wanneer beide uitkomsten, van de multiplicatie met 3, even geweest zijn, het gedachte getal gevonden wordt door het bekende getal n met 4 te vermenigvuldigen, en het gevraagde getal is alsdan $4\,n$.

2°. Dat, indien die uitkomsten den eersten keer oneven, en den tweeden keer even geweest zijn, het gedachte getal gelijk is aan viermaal het bekende getal n, vermeerderd met de eenheid, dat is, gelijk $4\,n + 1$.

3°. Dat het gedachte getal gelijk zal zijn aan viermaal het bekende quotient n vermeerderd met 2, ingevalle de eerste multiplicatie met 3 een even, en de tweede een oneven product gegeven heeft.

4°. En dat, eindelijk, viermaal het getal n vermeerderd met 3, het gedachte getal zal zijn, indien beide de uitkomsten van de multiplicatie met drie oneven waren.

Hiermede zouden wij nu het vraagstuk kunnen houden voor opgelost, daar wij voor ieder mogelijk geval den regel hebben aangewezen, om door de gegevens tot de kennis van het gedachte getal te geraken; doch bij die soort van vraagstukken, waarin men, indien ik mij zoo mag uitdrukken, met de getallen moet schijnen te tooveren, komt het er op aan, de regels zoo zamen te trekken, dat zij gemakkelijk voor het geheugen worden, en bovendien weinig berekening behoeven. Wij merken dus het volgende op.

1°. n is het bekende getal, dat gegeven wordt als het naast kleinere quotient van de deeling der laatste uitkomst door 9.

2°.

2°. Het getal is $4n$, indien de beide producten, verkregen door met 3 te vermenigvuldigen, *even* waren.

3°. Het getal is $4n+1$, indien het eerſte van deze producten *oneven* en het tweede *even* was.

4°. Het getal is $4n+2$, indien het eerſte van deze producten *even* en het tweede *oneven* was.

5°. Het getal is $4n+3$, wanneer beide deze producten *oneven* waren.

Dit in aanmerking nemende kunnen wij gemakkelijk beſluiten tot den volgenden

REGEL. 1°. *Reken voor iederen keer dat er wordt geantwoord,* EVEN, *niets.*

2°. *Schrijf, wanneer er, bij de eerſte vermenigvuldiging met drie, wordt geantwoord* ONEVEN, *één ſtreepje aan, of ſteek een' vinger op.*

3°. *Schrijf, wanneer er, bij de tweede vermenigvuldiging met drie, geantwoord wordt* ONEVEN, *twee ſtreepjes, of ſteek daarvoor twee vingers op.*

4°. *Vermenigvuldig het getal, dat bij de laatſte uitkomst, dat is, bij de deeling door 9, geantwoord wordt, met 4 en tel bij dit product het aantal aangeſchrevene ſtreepjes, of het getal der opgeſtakene vingers op, en gij zult het gedachte getal bekomen.*

Wij eindigen deze oplosſing met op ieder geval, dat kan voorkomen, een voorbeeld te geven.

1°. *Voorbeeld.* Laat, na de eerſte multiplicatie met drie, worden geantwoord *even:* dit telt niets; doch na de tweede multiplicatie *oneven:* dit telt 2; indien nu na de laatſte halvering gezegd wordt, dat *negen* zevenmaal op de uitkomst begrepen is, dan is het gedachte getal $4 \times 7 + 2$, dat is, 30.

2°. *Voorbeeld.* Indien de eerſte maal *oneven* gezegd wordt, telt het 1, en wordt nu voor de tweede maal gezegd *even*, dan blijft dit 1; is nu het gegeven quotient 5, dan is het gedachte getal $4 \times 5 + 1$, dat is, 21.

3°. *Voorbeeld.* Onderſtel dat beide keeren geantwoord wordt *even*, dan telt men niets; is dan het quotient 3, dan is het getal $4 \times 3 + 0$ of 12.

4°. *Voorbeeld.* Laat eindelijk beide keeren worden geantwoord *oneven*, dan telt men, voor den eerſten *oneven* 1, en voor den twee-

tweeden *oneven* 2, dus te zamen 3; is nu het gegeven quotient 1 dan is het gedachte getal $4 \times 1 + 3 = 7$; maar was het quotient 0, dan zou het getal geweest zijn $4 \times 0 + 3$, dat is, 3.

www.libtool.com.cn

CXXXII. VOORSTEL.

Door S. I. MULDER.

Van drie getallen, welke eene harmonische reeks uitmaken, is de som 26, *en de som van hunne vierkanten is* 244. *Welke is deze reeks?* (35)

OPLOSSING. Door L. R. SCHMIDT, S. I. MULDER en J. PEEREBOOM.

Stel de termen van de gevraagde reeks x, y en z, dan moet vooreerst, door middel van de eigenschap der harmonische reeksen, $x - y : y - z = x : z$ zijn, en dit geeft ons, vereenigd met de opgave, de drie vergelijkingen

$x + y + z = a$; $x^2 + y^2 + z^2 = b$ en $2xz = xy + yz$

De eerste in het vierkant verheven en met de tweede verminderd geeft, na door twee gedeeld te hebben,

$$xy + xz + yz = \tfrac{1}{2}(a^2 - b)$$

en tellende hierbij de derde vergelijking, namelijk

$$-xy + 2xz - yz = 0$$

dan komt er $3xz = \tfrac{1}{2}(a^2 - b)$, waaruit $xz = \tfrac{1}{6}(a^2 - b)$ en bijgevolg, $xy + yz = 2xz = \tfrac{1}{3}(a^2 - b)$, dat is, $y(x + z) = \tfrac{1}{3}(a^2 - b)$, en wij hebben alzoo nog de vergelijkingen

$x + y + z = a$; $xz = \tfrac{1}{6}(a^2 - b)$ en $y(x + z) = \tfrac{1}{3}(a^2 - b)$

Nu is uit de eerste $x + z = a - y$ en substituerende dit in de derde, dan komt er

$$y(a - y) = \tfrac{1}{3}(a^2 - b), \text{ of } y^2 - ay = -\tfrac{1}{3}(a^2 - b)$$

welke vierkantsvergelijking opgelost, geeft

$$y = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4b - a^2}{3}}$$

Stellen wij nu deze waarde van y kortheidshalve, p, dan hebben wij $x + z = \dfrac{a^2 - b}{3p}$ dus $(x + z)^2 = \dfrac{(a^2 - b)^2}{9p^2}$ en bijgevolg $x - z = \sqrt{\{(x+z)^2 - 4xz\}} = \sqrt{\left\{\dfrac{(a^2-b)^2}{9p^2} - \tfrac{2}{3}(a^2 - b)\right\}}$

dat

(35) HIDDINGA, *pag.* 74, N°. 127.

dat is, $x - z = \frac{1}{3p} \times \sqrt{\{(a^2 - b)^2 - 6p^2(a^2 - b)\}}$,

waaruit dan eindelijk gevonden wordt

www.hbook.com.cn

$$x = \frac{1}{6p}\{a^2 - b + \sqrt{(a^2 - b)(a^2 - y - 3p^2)}\}$$

$$z = \frac{1}{6p}\{a^2 - b - \sqrt{(a^2 - b)(a^2 - b - 6p^2)}\}$$

Nemende nu $a = 26$ en $b = 244$, dan wordt $y = 13 \pm 5$ dat is 8 of 18. De eerſte waarde $y = p = 8$ geeft $x = 12$ en $z = 6$ en de harmoniſche reeks is bijgevolg 12 . 8 . 6.

De tweede waarde van y namelijk $y = p = 18$, maakt $x - z = 4\sqrt{(-14)}$ en geeft dus aanleiding tot het onbeſtaanbare antwoord

$$4 + 2\sqrt{-14};\ 18;\ 4 - 2\sqrt{-14}.$$

CXXXIII. VOORSTEL.

Door S. I. MULDER.

Van eenen driehoek is gegeven de bazis 25, de loodlijn, welke uit het overſtaande hoekpunt op de bazis valt 24; en de opſtaande zijden ſtaan tot elkander in reden als 5 tot 6. Men vraagt hoe lang elk der opſtaande zijden is? (36)

OPLOSSING. Door S. I. MULDER, J. PEEREBOOM en A. VAN DER SWAN.

Stel de opſtaande zijden $5x$ en $6x$ en den halven omtrek s, dan is $s = \frac{1}{2}(25 + 11x)$. Stellende verder, den inhoud I, dan is, door de bekende formule,

$$I = \sqrt{\tfrac{1}{2}(25 + 11x) \times \tfrac{1}{2}(11x - 25) \times \tfrac{1}{2}(25 + x) \times \tfrac{1}{2}(25 - x)}$$

doch de inhoud gelijk het halve product van bazis en hoogte zijnde, zoo is ook $I = \frac{1}{2} . 25 . 24 = 300$; en dit geeft ons de vergelijking

$$\tfrac{1}{16}(121x^2 - 625)(625 - x^2) = 300^2$$

hetgeen, ontwikkeld en met 16 vermenigvuldigd zijnde, geeft

$$121x^4 - 76250x^2 = -1830625$$

welke vergelijking opgelost zijnde, geeft $x^2 = 25$ of $x^2 = \frac{73225}{121}$, dus

(36) HIDDINGA, 2e. *Verzameling*, N°. 78.

dus $x = 5$ of $x = \frac{5}{17} \sqrt{2929}$, men verkrijgt alzoo twee antwoorden; de opſtaande zijden zijn, namelijk, 25 en 30, of $\frac{85}{17} \sqrt{2929}$ en $\frac{102}{17} \sqrt{2929}$.

www.boool.com.cn

CXXXIV. VOORSTEL.

Door S. I. MULDER.

Van eenen driehoek is gegeven de inhoud gelijk 84, *en de opſtaande zijden zijn* 13 *en* 15. *Hoe groot is dan de bazis en de loodlijn?* (37)

OPLOSSING. Door S. I. MULDER, J. PEEREBOOM en A. VAN DER SWAN.

Stellende de bazis $2x$ en den inhoud I, dan is, omdat de halve omtrek alsdan $14 + x$ is,

$$I = \sqrt{(14 + x)(14 - x)(x + 1)(x - 1)} = 84$$

waarvan het vierkant is

$$(196 - x^2)(x^2 - 1) = 7056$$

hetgeen, ontwikkeld en gerangſchikt wordende, geeft,

$$x^4 - 197x^2 = -7252$$

waaruit gevonden wordt

$$x^2 = +\frac{197}{2} \pm \frac{99}{2}, \text{ dat is } x^2 = 49 \text{ of } x^2 = 148$$

en bijgevolg $x = 7$ of $x = 2\sqrt{37}$.

Nemende dus $x = 7$, dan is de bazis $2x = 14$ en dus de loodlijn $\frac{84}{7} = 12$.

Maar nemende $x = 2\sqrt{37}$, dan is de bazis $2x = 4\sqrt{37}$ en de loodlijn $\frac{84}{2\sqrt{37}} = \frac{42}{37}\sqrt{37}$.

CXXXV. VOORSTEL.

Door S. I. MULDER.

Van eenen regthoekigen driehoek is gegeven de ſchuinſche zijde gelijk a, en de drie zijden zijn gedurig evenredig. Hoe vindt men de onbekende zijden? (38)

OPLOSSING. Door S. I. MULDER.

Stel de eene regthoekszijde x, dan is de andere $\sqrt{ax}$ en wij heb-

(37) HIDDINGA, 2e. *Verzameling*, N°. 93. (38) *Idem* N°. 62.

hebben alzoo, door het Theorema van Pythagoras $x^2 + ax = a^2$ waaruit $x = \frac{1}{2}a\ (-1 + \sqrt{5})$ en dus $\sqrt{ax} = \frac{1}{2}a \times \sqrt{(-2+2\sqrt{5})}$.

www.libtool.com.cn

AANMERKING. Het blijkt uit de uitdrukking $x = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$ dat, wanneer de gegevene ſchuinſche zijde in de uiterſte en middelſte reden gedeeld wordt, het grootſte ſtuk gelijk zal zijn aan de kleinſte regthoekszijde x, en hierdoor verkrijgen wij deze conſtructie:

Deel de ſchuinſche zijde in de uiterſte en middelſte reden, beſchrijf verder op de ſchuinſche zijde eenen halven cirkel, en neem in denzelven eene koorde gelijk het grootſte deel der alzoo gedeelde ſchuinſche zijde; wanneer dan ook de andere koorde getrokken wordt, zal de gevraagde driehoek voltooid zijn.

CXXXVI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Twee punten A en B (fig. 83), bewegen zich in den omtrek van eenen zelfden cirkel, met verſchillende, doch eenparige ſnelheden, welke tot elkander in reden ſtaan als n tot m; wanneer zij nu in eenig oogenblik van hunne beweging in zulk eenen ſtand gekomen zijn, dat de boog AB, tuſſchen dezelve gelegen, eene gegevene grootte heeft; dan vraagt men hoe veel omloopen ieder der punten A en B, na dit oogenblik, om het middelpunt zal moeten doen, opdat hunne afſtand gelijk worde aan eenen anderen gegevenen boog A'B'?

Men vraagt voor dit Voorſtel eene algemeene oplosſing, welke zoo wel doorgaat, wanneer de punten in tegenovergeſtelde, als wanneer zij in dezelfde rigting bewogen worden, en welke bovendien het aantal antwoorden aanwijst, dat in ieder geval mogelijk is?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

§. 1. Stellen wij den gegevenen boog AB $= p$, den gegevenen boog A'B' $= q$ en den geheelen omtrek van den cirkel $= 1$, dan blijkt het reeds uit deze ſtelling, dat p en q, niet alleen kleiner dan 1, maar zelfs niet grooter dan $\frac{1}{2}$ kunnen onderſteld worden; omdat men, bij voorbeeld, door den afſtand van A tot B, in onze beſchouwing, nooit den boog AB'A'B'B, maar den kortſten boog AB verſtaan moet.

§. 2. Stellen wij nu, dat beide punten zich in dezelfde rig-

ting

ding ABB′ *enz.* bewegen, en ſtellen wij verder den weg AA′ dien het punt A afgeloopen heeft x, en den weg BB′ welken het punt B gelijktijdig doorloopt y, dan hebben wij, omdat de, in gelijke tijden, doorgeloopene ruimten tot elkander in reden moeten zijn als de ſnelheden, $x : y = a : m$ dat is, $mx = ny$.

§. 3. Wijl in de opgaaf niet bepaald is, of bij den afſtand $B'A' = q$ het punt B′ dan wel het punt A′ het meest voor uit moet zijn, zoo moet ieder van deze onderſtellingen eene bijzondere oplosſing geven. Dit onderſcheid hangt ondertusſchen klaarblijkelijk van het poſitieve of negatieve teeken van q af, en de beide oplosſingen moeten dus te gelijker tijd verkregen worden door aan q het dubbelde teeken te geven; $+q$ zal dus beteekenen dat het punt B′ vooruit, en $-q$ dat B′ ten opzigte van A′ achteruit is.

§. 4. Nu is $BA' = AA' - AB = x - p$ en ten anderen $BA' = BB' \mp B'A' = y \mp q$; vergelijkende dan deze twee waarden van BA′, zoo heben wij $x - p = y \pm q$, dat is, $x - y = p \pm q$.

§. 5. Door middel van de twee vergelijkingen

$mx = ny$ (§. 2.) en $x - y = p \pm q$ (§. 4.)

vinden wij gemakkelijk

$$x = \frac{n}{n-m}(p \pm q) \text{ en } y = \frac{m}{n-m}(p \pm q)$$

waardoor het Voorſtel is opgelost. Deze oplosſing heeft ondertusſchen nog de vereischte algemeenheid niet, daar zij ſlechts aantoont, wanneer *voor de eerſte maal*, aan de dubbelde vraag (§. 3.) voldaan wordt.

§. 6. Wij hebben, namelijk, tot nog toe geen acht gegeven op de omſtandigheid, dat de punten in den omtrek van eenen cirkel bewegen, en al hetgeen wij voor als nog gezegd hebben zou even toepaſſelijk zijn geweest, wanneer de beide punten in eene regte lijn bewogen werden. Bij het geval van de beweging in eene regte lijn is het van zelf klaar, dat de punten A en B, met ongelijke ſnelheden, eens eenen afſtand q bereikt hebbende, nimmer weder dien zelfden afſtand bekomen kunnen; want die afſtand wordt dan eenparig grooter en grooter, en het is alzoo gemakkelijk in te zien dat er alsdan niet meer dan de twee ge-

vondene oplosſingen mogelijk zijn. Bij de cirkelvormige beweging (of, algemeener, bij de beweging in iedere lijn, welke in zich zelve wederkeert) kan ondertusſchen zulk een afſtand q op zeer verſchillende oogenblikken worden bereikt; want offchoon het hier eveneens waar blijft, dat die afſtand regelmatig grooter en grooter wordt, zoo is het echter duidelijk, dat, wanneer het punt B′ het punt A′ den afſtand q plus eenige geheele omloopen vóór- of achteruit is, dit, alhoewel er meer of minder tijd toe gevorderd wordt, geene zigtbare verandering in den afſtand maakt, welke daarom toch altoos de grootte q zal ſchijnen te hebben. Om dus alle waarden van x en y te vinden, waarbij de punten B′ en A′ den wezenlijken afſtand q zullen hebben, moeten wij in de waarden van x en y (§. 5.) algemeen, in plaats van $\pm q$, ſtellen $\pm q + g$, waarin g dan eenig geheel getal naar welgevallen, dat is, omdat de omtrek hier de eenheid is, een geheel getal omloopen verbeeldt. De formulen voor x en y gaan hierdoor over in de volgende:

Voor het punt A . . $x = \frac{n}{n - m} (p \pm q + g)$

Voor het punt B . . $y = \frac{m}{n - m} (p \pm q + g)$

en dan moet, om voor x en y alle mogelijke waarden te verkrijgen, g achtervolgens 0, 1, 2, 3, 4 *enz.* genomen worden.

§. 7. AANMERKINGEN. 1°. p en q worden onderſteld niet grooter dan $\frac{1}{2}$ te zijn. (§. 1.)

2°. Offchoon voor g eenig getal naar welgevallen genomen kan worden, volgt hieruit echter geenszins, dat men, door g achtervolgens 1, 2, 3 enz. tot in het oneindige te ſtellen, ook altoos een oneindig aantal verſchillende antwoorden zal verkrijgen. Dit heeft alleen plaats, ingevalle de betrekking der ſnelheden onmeetbaar is; doch is die betrekking meetbaar, dan komen de twee punten, gedurende de beweging wel oneindig veel malen op eenen afſtand q van elkander te liggen, doch deze bijzondere oplosſingen komen dan ook oneindig veel malen op dezelfde punten van den cirkel, waarin A en B zich bewegen, te huis; en er zijn dan in het algemeen niet meer dan $n - m$ wezenlijk verſchillende oplosſingen, waarbij q poſitief, en $n - m$ verſchillende oplosſingen, waarbij q negatief is. (Wel te verſtaan dat

dat n en m hier geheele getallen verbeelden, hetgeen altoos plaats heeft, wanneer hunne betrekking meetbaar is). Want ſtellen wij in de formulen voor x en y (§. 6.) eerst $g = a$ en vervolgens $g = a + n - m$, dan vinden wij in het eerſte geval

$$x = \frac{n}{n-m}(p \pm q + a) \text{ en } y = \frac{m}{n-m}(p \pm q + n)$$

eenheden, dat is, omwentelingen of omloopen, maar in het tweede geval

$$x = \frac{n}{n-m}(p \pm q + a) + n \text{ en } y = \frac{m}{n-m}(p \pm q + a) + m$$

omloopen, welke twee oplosſingen op dezelfde punten van den cirkel moeten nederkomen, omdat, de ſnelheden als n tot m zijnde, de twee punten A en B wederom gelijktijdig op dezelfde plaats zullen komen, wanneer A een aantal van n, en B een aantal van m omloopen heeft volbragt. Hieruit volgt dan, dat, om al de wezenlijk verſchillende ſtanden van de twee bewegende punten te verkrijgen, waarin hunne afſtand q is, voor g alle geheele getallen van 1 tot $n - m$, of van 0 tot $n - m - 1$ moeten genomen worden.

3°. In de oplosſing is onderſteld, dat bij den aanvang der beweging het punt B vooruit was: is dus bij dien aanvang het punt B achteruit, zoo moet p als negatief beſchouwd worden.

4°. Wij hebben, gedurende de oplosſing, n grooter dan m onderſteld, en aan deze onderſtelling kunnen wij altijd voldoen, door het punt, dat de ſnelſte beweging heeft, voor het punt A te nemen.

5°. Verder hebben wij onderſteld, dat beide punten zich in dezelfde rigting bewogen; doch wanneer een der punten in tegenovergeſtelde rigting loopt, kunnen wij deszelfs ſnelheid als negatief beſchouwen, en dus moet alsdan n of m negatief genomen worden, naarmate het punt A of B in tegengeſtelde rigting beweegt. Hierbij moeten wij nog aanmerken, dat, wanneer beide bewegende punten in tegenovergeſtelde rigting loopen van die, welke wij bij de oplosſing onderſteld hebben, het niet noodig is n en m beide negatief te nemen; want dan toch loopen zij wederom beide in dezelfde rigting, en men ziet ook duidelijk, dat

de waarden van x en y dezelfde blijven, of wij daarin m en n beide positief dan wel beide negatief onderstellen: en dit in het oog houdende, blijkt het mede ten duidelijkste, dat wij, bij tegenovergestelde rigting der beweging, altijd n positief en m negatief kunnen nemen, wanneer wij hierbij slechts opmerken, dat dan het punt A ondersteld wordt de positieve beweging te hebben, en dat wij dus de positieve waarden van x en y naar den kant, volgens welken A beweegt, moeten teilen.

6°. Eindelijk moeten wij nog opmerken, dat de negatieve waarden van x en y (welke wij ondertusschen altijd vermijden kunnen) naar den tegenovergestelden kant moeten worden genomen van de onderstelde positieve beweging, en dat deze negatieve waarden dus moeten worden gehouden, als kenteekens, dat de gevraagde afstand q heeft plaats gehad bij de beweging, welke den gegevenen afstand p is voorafgegaan, en, het is alzoo uit de tweede aanmerking klaar, waarom wij die negatieve waarden van x en y altijd kunnen ontwijken.

7°. Is $n = m$, dan worden x en y beide oneindig, en het is ook uit den aard der zaak duidelijk, dat de bewegende punten dan altoos denzelfden afstand p moeten behouden, en dus nooit eenen anderen afstand q kunnen verkrijgen. Is bovendien echter ook $q = p$, dan hebben wij, $g = 0$ nemende, $x = y = \frac{0}{0}$, eene onbepaalde waarde, welke aantoont, dat alsdan de beide punten in ieder oogenblik aan de vraag beantwoorden.

8°. Dit alles in aanmerking nemende, hebben wij dan,

(α). *Wanneer de punten in dezelfde rigting loopen,*

voor A . . . $x = \frac{n}{n - m}(p \pm q + g)$ *omloopen;*

voor B . . . $y = \frac{m}{n - m}(p \pm q + g)$ *omloopen.*

(β). *Wanneer de punten in tegengestelde rigting loopen,*

voor A . . . $x = \frac{n}{n + m}(p \pm q + g)$ *omloopen;*

voor B . . . $y = \frac{m}{n + m}(p \pm q + g)$ *omloopen.*

Wij hebben voor de laatste formule het negatieve teeken weggelaten, omdat het van zelf blijkt, dat de omloopen van B hier naar

naar den tegenovergeſtelden kant van die van A moeten genomen worden.

9°. Wanneer de betrekking der ſnelheden, dat is $n : m$ onmeetbaar is, dan vervalt de geheele tweede aanmerking met al derzelver gevolgen. Voor g kan dan ieder getal naar welgevallen genomen worden, zonder dat voor dezelve eenige limiet van grootte beſtaat. Want n en m onderling onmeetbaar zijnde, kan hunne betrekking niet door geheele getallen, hoe groot ook genomen, worden uitgedrukt, en de punten A en B kunnen alzoo na eenig aantal geheele omwentelingen, nimmer wederom te gelijker tijd op eene plaats komen, waarop zij te voren gelijktijdig waren. Het getal der verſchillende oplosſingen is dus in dit geval wezenlijk oneindig groot.

Laat ons nu deze formulen op eenige voorbeelden toepaſſen.

§. 8. 1e. VOORBEELD. Te vinden, wanneer, op een gewoon uurwerk, de uur- en minuutwijzer boven of op elkander ſtaan?

Hier is (4°. *aanm.*) A de minuut- en B de uurwijzer, en dus $n = 12$ en $m = 1$. Omdat nu de wijzers te *twaalf uren* boven elkander ſtaan, kunnen wij van dit punt beginnen, en dan is $p = 0$ en $q = 0$, zoodat volgens (*a*). Voor A, $x = \frac{12}{11} g$ en voor B, $y = \frac{1}{11} g$ omloopen. Stellende nu g achtervolgens 1, 2, 3 *enz.* tot 11 (2°. *aanm.*) dan vinden wij

Min. Wijzer $x = 1\frac{1}{11}$; $2\frac{2}{11}$; $3\frac{3}{11}$ enz. tot 12 *omloopen.*

Uur-Wijzer $y = \frac{1}{11}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{3}{11}$ enz. tot 1 *omloopen.*

dat is, omdat iedere omloop van den minuutwijzer één uur duurt, de wijzers zullen te $1\frac{1}{11}$; $2\frac{2}{11}$; $3\frac{3}{11}$ *enz.* tot 12 uren, juist op elkander ſtaan

§. 9. 2e. VOORBEELD. Te vinden, wanneer de wijzers van een gewoon uurwerk in eene regte lijn zullen zijn?

Hier is weder $m = 1$ en $n = 12$, en zoo wij van den middag afrekenen $p = 0$ en $q = \frac{1}{2}$, hetgeen geeft, (zie *a*) voor A, $x = \frac{12}{11}(\pm \frac{1}{2} + g)$ en voor B, $y = \frac{1}{11}(\pm \frac{1}{2} + g)$. Stellende nu g achtervolgens 0, 1, 2, enz. tot 10, dan komt er

Min. Wijzer $x = \frac{6}{11}$; $1\frac{7}{11}$; $2\frac{8}{11}$ *enz.* tot $11\frac{6}{11}$ *omloopen.*

Uur-Wijzer $y = \frac{1}{22}$. $\frac{3}{22}$. $\frac{5}{22}$ *enz.* tot $\frac{21}{22}$ *omloopen.*

De wijzers ſtaan dus te $12\frac{6}{11}$; $1\frac{7}{11}$ enz. tot $11\frac{5}{11}$ uren juist in eene regte lijn.

De bovenſte teekens geven hier hetzelfde als de benedenſte,

omdat het op hetzelfde uitkomt, of wij zeggen dat de minuutden uurwijzer eenen halven omloop, voor- of achteruit is. In het volgende voorbeeld zullen echter de verschillende teekens onderscheidene antwoorden geven.

www.libtool.com.cn

§. 10. 3e. VOORBEELD. Wanneer maken op een gewoon uurwerk de wijzers eenen regten hoek?

Nogmaals van den middag af beginnende, is hier $n = 12$, $m = 1$, $p = 0$ en $q = \frac{1}{4}$ en wij verkrijgen voor den minuutwijzer $x = \frac{12}{11}(\pm\frac{1}{4} + g)$ en voor den uurwijzer $y = \frac{1}{11}(\pm\frac{1}{4} + g)$ omloopen. Bepalen wij ons nu alleen bij den minuutwijzer, omdat deszelfs omloopen met de gevraagde uren overeenkomen, dan geeft het bovenste teeken voor den tijd, waarop de uur- den minuutwijzer $\frac{1}{4}$ omloop achteruit is, te

$\frac{3}{11}$; $1\frac{4}{11}$; $2\frac{5}{11}$; $3\frac{6}{11}$; $4\frac{7}{11}$ enz. tot $11\frac{3}{11}$ uren.

Maar gebruiken wij het benedenste teeken, dan vinden wij voor den tijd, waarop de uurwijzer den minuutwijzer $\frac{1}{4}$ omwenteling vooruit is, te

$\frac{9}{11}$; $1\frac{1}{11}$; 3; $4\frac{2}{11}$ *enz.* tot $11\frac{8}{11}$ uren.

§. 11. 4e VOORBEELD. Indien een uurwerk zoodanig was ingerigt, dat de minuutwijzer in tegenovergestelde rigting van den uurwijzer liep, wanneer zouden dan de wijzers boven elkander staan?

Hier is (5e *aanm.*) $n = 12$, $m = -1$, $p = 0$, $q = 0$, dus voor den minuutwijzer $x = \frac{12}{13}g$ omloopen; g moet dus van 1 tot 13 genomen worden, en dit geeft ons de 13 volgende antwoorden: te

$\frac{12}{13}$; $1\frac{11}{13}$; $2\frac{10}{13}$; $3\frac{9}{13}$ *enz.* tot 12 uren.

§. 12. 5e. VOORBEELD. Wanneer zouden, in dezelfde onderstelling, de wijzers eenen hoek van 30° maken?

Nogmaals van 12 uren beginnende, is hier $n = 12$, $m = -1$; $p = 0$ en $q = \frac{1}{12}$ waardoor, voor den minuutwijzer, $x = \frac{12}{13}(\pm\frac{1}{12} + g)$; nemende nu zoo wel de benedenste als bovenste teekens, dan hebben wij voor al de oogenblikken, waarin aan de vraag voldaan wordt: te $\frac{1}{13}$; $\frac{11}{13}$; 1; $1\frac{2}{13}$; $1\frac{12}{13}$; $2\frac{2}{13}$; $2\frac{11}{13}$; $3\frac{1}{13}$; $3\frac{10}{13}$; $4\frac{3}{13}$; $4\frac{12}{13}$; $5\frac{4}{13}$; $5\frac{7}{13}$; $6\frac{5}{13}$; $6\frac{7}{13}$; $7\frac{6}{13}$; $7\frac{6}{13}$; $8\frac{7}{13}$; $8\frac{8}{13}$; $9\frac{9}{13}$; $9\frac{9}{13}$; $10\frac{10}{13}$; $10\frac{3}{13}$; 11, $11\frac{11}{13}$ en $11\frac{12}{13}$ uren.

§. 13. 6e. VOORBEELD. Onderstellende een uurwerk zoodanig in wanorde, dat de uurwijzer op de 60 of op 12 uren staan-

ſtaande, de minuutwijzer op de 15 of quart over twaalven ſtaat, en dat bovendien de minuutwijzer, offchoon in dezelfde rigting, ſlechts 5 maal zoo ſnel als de uurwijzer loopt; wanneer zullen dan de wijzers boven elkander liggen?

www.libtool.com.cn

Omdat hier de traagſte wijzer achteruit is, moet ingevolge de 3e aanmerking p als negatief beſchouwd worden, en wij hebben alzoo $n = 5$, $m = 1$; $p = -\frac{1}{4}$ en $q = 0$, waardoor gevonden wordt voor den minuutwijzer $x = \frac{5}{4}(-\frac{1}{4} + g)$ en voor den uurwijzer $y = \frac{1}{4}(-\frac{1}{4} + g)$. Nemende nu $g = 1$, 2, 3 en 4, dan vinden wij

Min. Wijzer $\frac{15}{11}$; $2\frac{8}{11}$; $3\frac{7}{11}$ en $4\frac{11}{11}$ *omloopen.*

Uurwijzer $\frac{3}{11}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{11}{16}$ en $\frac{15}{16}$ *omloopen.*

Daar nu een omloop van den uurwijzer overeenkomt met 12 uren, zoo zijn de gevraagde oogenblikken te $2\frac{1}{4}$ uur, $5\frac{1}{4}$ uur, $8\frac{1}{4}$ uur en $11\frac{1}{4}$ uur.

CXXXVII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een kapitaal c is tegen a ten honderd in het jaar op zamengeſtelden interest uitgezet; zoo nu jaarlijks eene bepaalde ſom p moet worden uitgekeerd, en op deze wijze het kapitaal in n jaren is uitgeput, vraagt men eene geſchikte handelwijze te bepalen, om a te vinden, wanneer c, p en n gegeven zijn.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Wijl $100 : a = c : \frac{ac}{100}$, zoo is $\frac{ac}{100}$ de uitdrukking voor hetgeen het kapitaal het eerſte jaar aan interest opbrengt. Is dus $p = \frac{ac}{100}$, dan zal het kapitaal altoos even groot blijven. Is $p < \frac{ac}{100}$ dan zal het kapitaal jaarlijks aangroeijen, en hieruit volgt, dat indien het capitaal na n jaren uitgeput zal zijn, p noodzakelijk grooter dan $\frac{ac}{100}$, en bijgevolg $\frac{a}{100} < \frac{p}{c}$ zal moeten wezen.

Indien er jaarlijks geene afloſſing plaats had, zou het kapi-

taal, na n jaren, zijn $(1 + \frac{a}{100})^n c$, nu vernietigt de 1e. aflosſing over n jaren $(1 + \frac{a}{100})^{n-1} p$; de tweede $(1 + \frac{a}{100})^{n-2} p$; enz.

www.libtool.com.cn

en wij hebben dus $\frac{a}{100} = x$ ſtellende,

$$(1+x)^n c - \{(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \text{enz...} + 1\} p = 0$$

dat is, wanneer wij de meetkunſtige reeks ſommeren,

$$(1 + x)^n c - \frac{(1 + x)^n - 1}{(1 + x) - 1} \times p = 0$$

of, wat hetzelfde is,

$$x (1 + x)^n c - \{ (1 + x)^n - 1 \} p = 0 \ldots (\alpha)$$

en ſtellende $1 + x = y$, dan herleidt deze vergelijking zich gemakkelijk tot

$$cy^{n+1} - cy^n - y^n p + p = 0$$

dat is, indien wij $\frac{p}{c} = r$ ſtellen, in

$$y^{n+1} - (1 + r) y^n + r = 0 \ldots (\beta)$$

Het komt er dus alleen op aan, aan te wijzen hoe uit deze vergelijking y op de geſchikſte wijze kan benaderd worden, want is y bekend, dan is $x = y - 1$ en $a = 100\, x = 100 (y - 1)$.

Dat y hier niet op de gewone wijze kan worden benaderd, loopt gemakkelijk in het oog. Zulks zou alleen kunnen plaats hebben, wanneer n een geheel getal en zeer klein was; maar is n een groot of een gebroken getal, dan worden de benaderingswijzen van *Newton*, *Budan*, of welke men dan ook verkiezen zou, volſtrekt onuitvoerbaar. Was, bij voorbeeld, $n = 14{,}2$; $r = 100000$ en $p = 10000$ gegeven, dan zouden wij hebben $r = \frac{1}{10}$ en de vergelijking zou worden

$$y^{15{,}2} - 1{,}1\, y^{14{,}2} + 0{,}1 = 0.$$

Wilden wij hieruit de gebrokene magten doen verdwijnen, dan zouden wij dezelve vooreerst ſchrijven onder den vorm

$$y^{\frac{76}{5}} - 1{,}1\, y^{\frac{71}{5}} + 0{,}1 = 0$$

en ſtellende nu $y^{\frac{1}{5}} = z$, zou dezelve overgaan in

$$z^{76} - 1{,}1\, z^{71} + 0{,}1 = 0$$

in

in welke de onuitvoerbaarheid der gewoone benaderingswijzen van zelve in het oog loopt.

Wij merken echter op, dat men in de meeste gevallen vrij naauwkeurige limieten voor y kan aanwijzen, en dat dit de benadering niet weinig bespoedigen zou; want daar $y = 1 + x$ is, moet y grooter dan 1 zijn, en daar wij boven gezien hebben, dat $\frac{a}{100} < \frac{p}{c}$ of $x < r$ moet zijn, zoo moet $y < 1 + r$ zijn. Daar nu $p < c$ is, is r meestal eene zeer kleine breuk, en y is dus begrepen tusschen de limieten 1 en $1 + r$, welke alzoo in de meeste gevallen zeer weinig van elkander verschillen. Dit aangemerkt hebbende, zullen wij trachten andere hulpmiddelen op te speuren, ten einde de voorgestelde benadering gemakkelijker te maken.

I°. Hernemen wij de vergelijking (α), en stellen in dezelve $\frac{p}{c} = r$, dan wordt zij

$$x(1+x)^n - r(1+x)^n + r = 0$$

dat is,

$$(1+x)^n (r - x) = r$$

en nemende aan beide zijden de Logarithmen,

$$n\ Log.(1+x) + Log.(r-x) = Log.\ r \quad . \quad (\gamma)$$

Ontwikkelen wij nu $Log.(1+x)$ en $Log.(r-x)$ in reeksen, dan hebben wij

$Log.(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 -$ &c. en

$$Log.(r-x) = Log.\ r - \left(\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{r^3} + \text{&c.}\right)$$

en hierdoor verandert de vergelijking (γ) in

$$n\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \text{&c.}\right)$$
$$- \left(\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{r^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{r^4} + \text{&c.}\right) = 0$$

dat is, alles door x deelende, en de gelijkslachtige termen vereenigende,

$$\left(n - \frac{1}{r}\right) - \tfrac{1}{2}\left(n + \frac{1}{r^2}\right)x + \tfrac{1}{3}\left(n - \frac{1}{r^3}\right)x^2 - \ldots$$
$$\tfrac{1}{4}\left(n + \frac{1}{r^4}\right)x^4 + \text{enz.} = 0$$

dat

dat is eindelijk, wanneer wij alles door $n - \frac{1}{r}$ deelen,

$$1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{nr^2+1}{r(nr-1)}x + \frac{1}{3}\cdot\frac{nr^3-1}{r^2(nr-1)}x^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{nr^4+1}{r^3(nr-1)}x^3 +$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{nr^5-1}{r^4(nr-1)}x^4 - \frac{1}{6}\cdot\frac{nr^6+1}{r^5(nr-1)}x^5 + enz. = 0 \ldots (\delta)$$

Deze vergelijking heeft een oneindig aantal termen; doch daar $x = \frac{a}{100}$ meestal eene kleine breuk is, zal men de waarde van x nader vinden, naarmate men meer van de termen der vergelijking in rekening brengt; en de overige verwaarloozende, zal men dus x ten naastenbij door eene vierde of vijfde magtsvergelijking kunnen vinden, in hetzelfde geval, waarin de vergelijking (β) ons eene vergelijking van de zes-en-zeventigste magt gaf.

Deze vergelijking heeft ondertusschen wederom het gebrek, dat wanneer r zeer klein is, de coëfficienten zeer groot worden, en dat men alsdan, de hoogere magten van x niet zoo gerust verwaarloozen kan, en wij zullen ons alzoo niet langer met dezelve bezig houden. Laat ons dan tot eene andere herleiding van onze vergelijking overgaan.

II°. Schrijven wij de vergelijking (δ) onder de gedaante

$$\frac{nr^2+1}{2r(nr-1)}\cdot x - \frac{nr^3-1}{3r^2(nr-1)}\cdot x^2 + \frac{nr^4+1}{4r^3(nr-1)}x^3 \; enz = 1$$

en stellen wij het eerste lid algemeen gelijk y, dan kunnen wij verder stellen

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$$

en dan vinden wij, door de bekende leerwijze van de omkeering der reeksen,

$$A = \frac{2r(nr-1)}{nr^2+1}$$

$$B = \frac{8r(nr-1)^2(nr^3-1)}{3(nr^2+1)^3}$$

$$C = \frac{4r(nr-1)^3 \times \{16(nr^3-1)^2 - 9(nr^2+1)(nr^4+1)\}}{9(nr^2+1)^5}$$

&c.

en daar $y = 1$ is, is dan verder

$$x = A + B + C + D + E + \&c.$$

Op

Op deze wijze wordt dus x geheel in de gegevens uitgedrukt, en offchoon de reeks voor x tot in het oneindige voortloopt en derzelver termen lastig zijn om voort te zetten, zal echter in de meeste gevallen r klein genoeg zijn, om door middel van drie of vier dezer termen x naauwkeurig genoeg te doen kennen.

Nemen wij, bij voorbeeld, wederom het geval van $n = 14{,}2$ en $r = \frac{p}{c} = \frac{1}{10}$, dan wordt

$$x = 0{,}073 - 0{,}031 + 0{,}007 - \&c. = 0{,}049$$

welke minder dan een duizendſte van de ware waarde verſchilt.

III°. Wij kunnen nog eenen anderen weg inſlaan, namelijk, de gevondene vergelijking (β) door middel van de Logarithmi-tafels benaderen, en deze weg komt mij vóór, de zekerſte te zijn, omdat deze op alle gevallen even gemakkelijk wordt toegepast. Schrijven wij te dien einde de vergelijking (β) onder den vorm

$$y^n (1 + r - y) = r$$

dan hebben wij

$$n \; Log. \; y + Log. \; (1 + r - y) = Log. \; r$$

nu is boven bewezen, dat y tuſſchen 1 en $1 + r$ moet invallen, en dat r in alle gevallen een gebroken is; ſtellende dus $y = 1{,}1$; $y = 1{,}2$ *enz.* zoo kunnen wij gemakkelijk door de Logarithmi-tafels beproeven of deze waarden van y het voorſte lid grooter of kleiner dan *Log.* r maken. Maakt b.v. $y = 1 + \frac{m}{10}$ dit voorſte lid grooter en $y = 1 + \frac{m+1}{10}$ dit voorſte lid kleiner dan *Log.* r, zoo moet y tuſſchen $1 + \frac{m}{10}$ en $1 + \frac{m-1}{10}$ in gelegen zijn, en op dezelfde wijze, waarop wij alsdan de tiende deelen bepaald hebben, kunnen wij ook de honderdſte deelen, duizendſte deelen enz. van den wortel vinden.

Laat ons dit nog op het bovengenoemde voorbeeld toepaſſen.

De vergelijking was hier $y^{15{,}2} - 1{,}1\, y^{14{,}2} + 0{,}1 = 0$, en gaat dus over in

$$14{,}2 \; Log. \; y + Log. \; (1{,}1 - y) = -1.$$

Omdat nu y grooter dan 1 en kleiner dan 1,1 moet zijn, ſtellen wij y achtervolgens 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; *enz.* dan hebben

ben wij de volgende berekening, waarvan wij ondertusschen alleen de uitkomsten zullen opgeven.

$y = 1{,}01$ *maakt* $14{,}2\ Log.\ y + Log.\ (1{,}1 - y) = -\ 0{,}9843939$
$y = 1{,}02$ . . . . $= -\ 0{,}9747876$
$y = 1{,}03$ . . . . $= -\ 0{,}9726134$
$y = 1{,}04$ . . . . $= -\ 0{,}9799753$
$y = 1{,}05$ . . . . $= -\ 1{,}0001419$

Het blijkt dus, dat y tusschen 1,04 en 1,05 gelegen moet zijn, en wel dichter bij 1,05 dan bij 1,04; willen wij dus de benadering verder voortzetten, zoo stellen wij y achtervolgens 1,049; 1,048 &c.

$y = 1{,}049$ *maakt* $14{,}2\ Log.\ y + Log\ (1{,}1 - y) = -\ 0{,}9974177$ waaruit volgt, dat y tusschen 1,049 en 1,050 moet begrepen zijn. Stellende dan wederom y achtervolgens 1,0499; 1,0498 &c., vinden wij

$y = 1{,}0499$ *maakt* $14{,}2\ Log.\ y + Log.\ (1{,}1 - y) = -\ 0{,}9998721$ en y moet bijgevolg tusschen 1,0499 en 1,0500 begrepen zijn. Daar 1,05 dus geen tienduizendste deel van de wezenlijke waarde van y verschilt, nemen wij $y = 1{,}05$ dus $x = 0{,}05$ en bijgevolg $a = 100\ x = 5$.

Wij eindigen deze oplossing met aan te merken, dat de vergelijking (β) altijd eenen wortel gelijk 1 heeft, omdat dezelve geschreven kan worden onder de gedaante

$$y^n\,(y - 1) - r\,(y^n - 1) = 0$$

waarin, zoo als bekend is, de tweede term altijd door $y - 1$ deelbaar is. Deze wortel behoort echter niet tot het Voorstel, want $y = 1$, zou geven $x = 0$ en dus $a = 0$, hetgeen alleen mogelijk is, in het geval van $p = \frac{c}{n}$. De reden nu, waarom wij de vergelijking (β) niet van dezen oneigenlijken factor $y - 1$ zuiveren, is hierin gelegen, dat alsdan de vergelijking wel éene magt lager zou worden, doch dat zijn dan ook al de magten y^n, y^{n-1}, y^{n-2} &c zou bevatten, en alzoo geheel ongeschikt voor de oplossing zou worden, althans in het geval, dat n eenig gebroken was.

CXXXVIII. VOORSTEL.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

www.libtool.com.cn

De polaire vergelijking van de ellips te vinden, wanneer de pool in eenig willekeurig punt is, en de hoeken van de middellijn gerekend worden, welke door dit punt gaat?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Laat A (*Fig.* 84.) de pool en C het middelpunt van de ellips zijn. Stel de halve middellijn BC, welke door de pool gaat a, en de halve toegevoegde middellijn EC gelijk b. Verder stellen wij AC $= c$, $\angle$ BCE $= \alpha$, AM $= x$, PM $= y$, AP $= z$ en $\angle$ PAM $= \phi$, en dan moet z in ϕ worden uitgedrukt.

Nu is BM $\times$ MD : $PM^2 = BC^2 : EC^2$

of . . (BC + CM) $\times$ (BC — CM) : $PM^2 = BC^2 : EC^2$

dat is $BC^2 - CM^2 : PM^2 = BC^2 : EC^2$

en brengende hier in de geſtelde waarden over

$$a^2 - (x - c)^2 : y^2 = a^2 : b^2$$

dat is . . . . . $a^2y^2 = b^2a^2 - b^2(x - c)^2$ . . . . . (1)

Verder is AP : PM $=$ *Sin.* α : *Sin.* ϕ en AP : AM $=$ *Sin.* α : *Sin.* $(\alpha + \phi)$ dat is $z : y = Sin.\ \alpha . Sin.\ \phi$ en $z : x = Sin.\ \alpha : Sin.\ (\alpha + \phi)$, waaruit $y = \frac{Sin.\ \phi}{Sin.\ \alpha} . z$ en $x = \frac{Sin.\ (\alpha + \phi)}{Sin\ \alpha} . z$, en brengende deze waarden over in de vergelijking (1) dan wordt zij

$$\frac{a^2z^2\ Sin^2.\ \phi}{Sin^2.\ \alpha} = a^2b^2 - b^2\left(\frac{z . Sin.\ (\alpha + \phi)}{Sin.\ \alpha} - c\right)^2$$

hetgeen ontwikkeld zijnde geeft

$$\frac{a^2z^2 . Sin^2.\phi}{Sin^2.\ \alpha} = a^2b^2 - \frac{b^2z^2\ Sin^2.(\alpha+\phi)}{Sin^2.\ \alpha} + \frac{2b^2cz\,Sin.\ (\alpha+\phi)}{Sin.\ \alpha} - b^2c^2$$

of, na herleiding

$$z^2 - \frac{2b^2c\ Sin\ \alpha . Sin.\ (\alpha+\phi)}{a^2Sin^2.\phi+b^2Sin^2.(\alpha+\phi)} \times z = \frac{b^2\ (a^2 - c^2)\ Sin^2.\alpha}{a^2Sin^2.\phi+b^2Sin^2.(\alpha+\phi)} . \quad (2)$$

Door middel van welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$z = \frac{b^2c\ .\ Sin.\ \alpha.\ Sin.\ (\alpha + \phi)}{a^2\ Sin^2.\ \phi + b^2\ Sin^2.\ (\alpha + \phi)} \pm \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{ab\ Sin.\ \alpha \sqrt{\{(a^2 - c^2)\ Sin^2.\phi + b^2\ Sin^2.(\alpha+\phi)\}}}{a^2\ Sin^2.\phi + b^2\ Sin^2.\ (\alpha + \phi)} . \quad (3)$$

het-

hetgeen de begeerde polaire vergelijking is, en waarmede dus het Voorſtel zou kunnen worden gehouden voor opgelost, zoo niet deze formule tot merkwaardige gevolgen aanleiding gaf.

1e. Gevolg. Wanneer het punt A, dat is, de pool in den omtrek van de Ellips ligt, dan is $c = a$; het tweede lid van de vergelijking (2) wordt dan gelijk o; die vergelijking wordt dus door z deelbaar, en geeft voor dit geval

$$z = \frac{2\,ab^2\ Sin.\ a\ .\ Sin.\ (a+\phi)}{a^2\ .\ Sin^2.\ \phi + b^2\ Sin^2.\ (a+\phi)} \quad \ldots\ldots (4)$$

hetgeen ook door de vergelijking (3) bevestigd wordt.

2e. Gevolg. Wanneer de pool in het middelpunt valt, dan is $c = o$ en dan gaat de vergelijking (3) over in

$$z = \pm \frac{ab\ Sin.\ a}{\sqrt{\left\{ a^2\ Sin^2.\ \phi + b^2\ .\ Sin^2.\ (a+\phi) \right\}}} \quad \ldots (5).$$

3e. Gevolg. Bevindt de pool zich in eene der asſen, dan is $a = 90°$, dus $Sin.\ a = 1$ en $Sin.\ (a+\phi) = Cos.\ \phi$, en dit doet de formule (3) overgaan in

$$z = \frac{b^2\,c\ Cos.\phi \pm ab\sqrt{\left\{(a^2-c^2)\ Sin^2\ \phi + b^2\ Cos^2.\phi\right\}}}{a^2\ Sin^2.\ \phi + b^2\ Cos^2\ \phi} \quad \ldots (6)$$

in welke formule a altijd de halve as verbeeldt, waarop zich de pool bevindt.

4e. Gevolg. Is de pool in het uiteinde van eene der asſen geplaatst, dan moet in (4) $a = 90°$ of in (6) $c = a$ geſteld worden, en wij verkrijgen in dit geval voor de polaire vergelijking

$$z = \frac{2\,ab^2\ Cos.\ \phi}{a^2\ Sin^2.\ \phi + b^2\ Cos^2.\ \phi} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

waarin a wederom de halve as beteekent, in welke de pool gelegen is.

5e. Gevolg. Ligt de pool in het middelpunt en de hoeken ϕ worden van eene der asſen gerekend, dan moeten wij in (5) ſtellen $a = 90°$. of in (6) $c = o$, en dit geeft ons

$$z = \pm \frac{ab}{\sqrt{(a\ Sin^2\ \phi + b^2\ Cos^2.\ \phi)}} \quad \ldots\ldots (8)$$

en hierin beteekent nu a de halve as, waarvan de hoeken ϕ gerekend worden.

6e. Gevolg. Valt de pool in een der brandpunten, dan moet a de halve groote as beteekenen, en $c^2 = a^2 - b^2$ genomen worden,

den, en bijgevolg moeten wij in (6) ſtellen $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Wij verkrijgen alsdan

$$z = \frac{b^2\sqrt{(a^2-b^2)} \times Cos.\,\phi \mp ab^2\sqrt{(Sin^2.\phi + Cos^2.\phi)}}{a^2\,Sin^2.\,\phi + b^2\,Cos^2.\,\phi}$$

of, omdat $Cos^2.\,\phi + Sin^2.\,\phi = 1$ is,

$$z = \frac{b^2\,Cos.\,\phi\sqrt{(a^2-b^2)} \mp ab^2}{a^2\,(1 - Cos^2.\,\phi) + b^2\,Cos^2.\,\phi}$$

$$= \frac{b^2\,\{Cos.\,\phi\sqrt{(a^2-b^2)} \mp a\}}{a^2 - (a^2-b^2)\,Cos^2.\,\phi}$$

$$= \frac{b^2\,\{Cos.\,\phi\sqrt{(a^2-b^2)} \mp a\}}{\{a + Cos.\,\phi\sqrt{(a^2-b^2)}\} \times \{a - Cos\,\phi\sqrt{(a^2-b^2)}\}}$$

dat is, onder en boven door $(Cos.\,\phi\sqrt{(a^2-b^2)} \mp a)$ deelende,

$$z = \frac{b^2}{\mp a - Cos.\,\phi\sqrt{(a^2-b^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

of, indien wij z in de halve groote as en de uitmiddelpuntigheid willen uitdrukken,

$$z = \frac{b^2}{\mp a - c\,Cos.\,\phi} = \frac{a^2 - c^2}{\mp a - c\,Cos.\,\phi} \quad . \quad (10)$$

en, indien wij de halve groote as 1 en de uitmiddelpuntigheid e ſtellen,

$$z = \frac{1 - e^2}{\mp 1 - e\,Cos.\,\phi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

7°. Gevolg. Is de ellips een cirkel, dan is $b = a$ en $\alpha = 90°$. en dit geeft voor een' willekeurigen ſtand van de pool

$$z = c\,Cos.\,\phi \mp \sqrt{(a^2 - c^2\,Sin^2.\,\phi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

ligt de pool bovendien in het uiteinde van den ſtraal, dan is $c = a$ en wij vinden

$$z = 2\,a\,Cos.\,\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

en ligt de pool in het middelpunt, dan is $c = 0$ en er komt

$$z = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

1°. Aanmerking. In al de afgeleide gevolgen hebben wij onderſteld, dat de pool niet buiten de ellips gelegen was; doch onze oplosſing is zoo algemeen, dat zij ook eveneens doorgaat, wanneer de Pool A buiten de ellips genomen wordt. Hierbij kunnen wij echter het volgende niet onopgemerkt laten voorbijgaan.

Zoo lang $c < a$ is, en dus de pool binnen de ellips gelegen is, blijft $a^2 - c^2$ positief, en het blijkt dus uit de formule (3), dat z in dit geval nooit onbestaanbaar kan worden.

Is $c = a$, dan toont ons de formule (4), dat wanneer de pool in den omtrek ligt, er mede geene onbestaanbare waarden voor z mogelijk zijn.

Valt echter de pool buiten de ellips, dan is $c > a$, en dan kan de formule (3) aldus geschreven worden:

$$z = \frac{b^2\ c\ Sin.\ a\ .\ Sin\ (a+\phi)}{a^2\ Sin^2.\ \phi + b^2\ Sin^2.\ (a+\phi)} \mp \ldots\ldots$$

$$\ldots \frac{ab\ Sin.\ a \sqrt{\{-(c^2-a^2)\ Sin^2.\ \phi + b^2\ Sin^2.\ (a+\phi)\}}}{a^2\ Sin^2.\ \phi + b^2\ Sin^2.\ (a+\phi)}$$

en in dit geval zal z onbestaanbaar worden, zoodra

$$(c^2 - a^2)\ Sin^2.\ \phi > b^2\ Sin^2.\ (a+\phi)$$

is, en daar uit deze vergelijking achtervolgens getrokken wordt:

$$\frac{Sin.\ (\phi+a)}{Sin.\ \phi} < \frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{b}$$

$$\frac{Sin.\ \phi\ .\ Cos.\ a + Cos.\ \phi\ .\ Sin.\ a}{Sin.\ \phi} < \frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{b}$$

$$Cot.\ \phi + Cot.\ a < \frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{b\ Sin.\ a}$$

$$Cot.\ \phi < \frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{b\ .\ Sin.\ a} - Cot.\ a$$

zoo volgt hieruit, dat $Cot.\ \phi$ niet grooter dan $\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{b\ Sin.\ a} - Cot.\ a$ kan genomen worden, zonder dat z onbestaanbaar worde, en dat dus, $Cot.\ \phi$ gelijk aan deze waarde nemende, dat is,

$$\phi = \text{Boog } Cot.\ \left(\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{b\ .\ Sin.\ a} - Cot\ a\right)$$

$$\text{en } \phi = \text{Boog } Cot.\ \left(-Cot.\ a - \frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{b\ Sin.\ a}\right)$$

nemende. die polaire ordinaten verkregen worden, welke raaklijnen aan de ellips zijn.

2e. Aanmerking. De algemeene waarde van z (*zie form.* 3) bestaat uit twee deelen, waarvan het tweede het dubbelde teeken heeft; stellende dan,

$b^2 c$

$$\frac{b^2 c \,.\, Sin.\, \alpha \,.\, Sin.\, (\alpha + \phi)}{a^2\, Sin^2.\, \phi + b^2 \,.\, Sin^2.\, (\alpha + \phi)} = p,$$

www.libtool.com.cn

en . . $$\frac{ab\, Sin.\, \alpha \sqrt{\left\{(a^2 - c^2)\, Sin^2.\, \phi + b^2\, Sin^2.\, (\alpha+\phi)\right\}}}{a^2\, Sin^2.\, \phi + b^2\, Sin^2.\, (\alpha + \phi)} = q$$

dan wordt de algemeene formule (3) voorgeſteld door $z = p \pm q$.

Indien wij dus op de lijn AP, welke met AD eenen onbepaalden hoek ϕ maakt, een ſtuk $AQ = p$, en ter wederzijden van Q, $QP = QP' = q$ nemen, dan zullen P en P′ punten van de ellips zijn; en hieruit volgt, dat, makende voor eenen hoek ϕ, $AQ = p$, het punt Q de koorde P′P altijd midden door zal deelen.

Nu is $p = \frac{b^2 c \,.\, Sin.\, \alpha \,.\, Sin\, (\alpha + \phi)}{a^2\, Sin^2.\, \phi + b^2\, Sin^2.\, (\alpha + \phi)}$

en ſtellende hierin $AC = c = 2m$ en verder $a : b = m : n$ dan geeft dit

$$p = \frac{2mn^2\, Sin\, \alpha \,.\, Sin.\, (\alpha + \phi)}{m^2\, Sin^2.\, \phi + n^2\, Sin^2.\, (\alpha + \phi)}$$

dit is, nu, ingevolge (4) de polaire vergelijking van eene ellips, van welke de pool in den omtrek ligt, en waarin de hoeken gerekend worden van den as $2m$, welke door de pool gaat. Het punt Q ligt dus ſtandvastig in den omtrek van eene ellips, waarvan $AC = 2m$ eene middellijn is; en daar verder de halve middellijnen m en n evenredig zijn met de halve middellijnen a en b en zij bovendien denzelfden hoek α bevatten, zoo volgt hieruit, dat de ellips, waarin het punt Q gelegen is, gelijkvormig is met de gegevene ellips, en hieruit trekken wij het volgend merkwaardig beſluit:

Wanneer door eenig punt A binnen of buiten eene gegevene ellips, een onbepaald aantal koorden in deze ellips getrokken worden, en deze koorden PP′ allen midden door worden gedeeld in Q, dan zal het punt Q beſtendig gelegen zijn in den omtrek van eene ellips, welke met de eerſte gelijkvormig is; waarvan de affland AC, welken het gegeven punt A van het middelpunt C heeft, eene middellijn zal zijn, en waarvan al de afmetingen tot die van de gegevene ellips in reden zullen zijn, als die affland AC tot de middellijn BD, welke door dit punt A gaat.

Het blijkt verder gemakkelijk, dat de toegevoegde middellijn

EF raaklijn van deze nieuwe ellips zal zijn, en dat, ingevalle het punt A buiten de ellips gelegen is, deze nieuwe ellips, door het midden door deelen der koorden, flechts voor een gedeelte zal geconſtrueerd worden, doch dat zij als dan door de punten zal gaan, waarin de raaklijnen, uit A tot de gegevene ellips getrokken, dezelve aanraken.

www.inbtool.com.cn

CXXXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

De kromme lijn te conſtrueren, waarvan de vergelijking is

$$x = \sqrt{(a^2 - \frac{b^2}{c^2} y^2)} + (\frac{b}{c} + 1)\sqrt{(c^2 - y^2)}$$

en de verſchillende vormen aan te wijzen, welke zij verkrijgt; naarmate de betrekkingen tuſſchen a, b en c veranderen.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

§. 1. Offchoon deze vergelijking, wanneer men uit dezelve, door magtsverheffing, de wortelteekens doet verdwijnen, tot den vierden graad behoort, is zij echter zeer gemakkelijk door punten te conſtrueren; want laat (*Fig.* 85) PQ eene onbepaalde regte lijn, en A eenig willekeurig punt in dezelve zijn, en laat uit A, met eenen ſtraal $AB = a$, eenen cirkel beſchreven worden; indien dan uit eenig punt B, in den omtrek van dezen cirkel, met den ſtraal $BC = b$, eenen cirkelboog beſchreven wordt, ſnijdende PQ in C, en men, na BC getrokken te hebben, op derzelver verlengde een ſtuk $CD = c$ neemt, dan zal D een punt van de gevraagde kromme lijn zijn.

§. 2. Om dit te betoogen, trekken wij DE en BF loodregt op PQ, dan is $AB = a$, $BC = b$ en $CD = c$; ſtellende dan $DE = y$ en $AE = x$, zoo is $CE = \sqrt{(CD^2 - DE^2)} = \sqrt{(c^2 - y^2)}$. Verder is, in de gelijkvormige driehoeken CED en BFC, $CD : CE = BC : CF$; dat is, $c : \sqrt{(c^2 - y^2)} = b : CF$; waaruit $CF = \frac{b}{c}\sqrt{(c^2 - y^2)}$, en dus $FE = FC + CE = (\frac{b}{c} + 1)\sqrt{(c^2 - y^2)}$; maar in die zelfde gelijkvormige driehoeken is $CD : DE = BC : BF$, of $c : y = b : BF$, waaruit

BF

$BF = \frac{b}{c}\,y$, en bij gevolg is $AF = \sqrt{(AB^2 - BF^2)} = \sqrt{(a^2 - \frac{b^2}{c^2}\,y^2)}$, en, daar $AE = AF + FE$ is, zoo volgt hieruit

$$x = \sqrt{(a^2 - \frac{b^2}{c^2}\,y^2)} + (\frac{b}{c} + 1)\sqrt{(c^2 - y^2)}.$$

§. 3. Deze conſtructie geeft een gemakkelijk middel aan de hand, om de kromme lijn, tot onze vergelijking behoorende, werktuigelijk te beſchrijven. Laat namelijk AB een liniaal zijn, hetwelk eene lengte a heeft en om het vaste punt A draaijen kan, en laat in B, door middel van een ſcharnier, een ander liniaal BCD met dit eerſte liniaal verbonden worden; indien zich dan in C eene pen, en in D eene potloodſtift bevindt, zoodanig dat $BC = b$ en $CD = c$ is, en men de pen C langs eene regte lijn of een liniaal PQ, door het punt A gaande, laat voort bewegen, dan is het klaar, dat in iederen ſtand van dit werktuig aan de conſtructie van §. 1. voldaan zal worden, en dat het punt D, gedurende deze beweging, alzoo de gevraagde kromme lijn moet doorloopen.

§. 4. De conſtructie van §. 1. geeft, voor ieder punt B van den cirkel met AB als ſtraal beſchreven, twee punten van de kromme lijn; want de cirkelboog, uit B met BC als ſtraal beſchreven, ſnijdt PQ in twee punten C en C′, en dit geeft alzoo ook twee verſchillende punten D en D′ van de kromme lijn. Paſſen wij deze aanmerking op ieder punt van den cirkel toe, dan verkrijgen wij, door vereeniging van al de punten D en D′, eene kromme lijn, welke uit twee verſchillende takken beſtaat, en, wanneer $b > a$ is, den vorm van *Fig.* 85 aanneemt. De werktuigelijke conſtructie van §. 3. geeft dezelfde twee takken, omdat het ſtelſel der linialen, zoo wel in den ſtand ABC′D′, als in den ſtand ABCD kan gebragt, en dan verder voortbewogen worden. — Behooren nu echter beide deze takken tot de opgegevene vergelijking? — Het volgende ſtrekke ter beantwoording van deze vraag.

Wanneer wij het bewijs, in §. 2. voor het punt D gegeven, op het punt D′ toepaſſen, dan blijft alles volkomen hetzelfde, behalve dat wij dan hebben $AE' = FA - FE'$; omdat FE'

hier naar den negatieven kant gelegen is: de vergelijking voor dit punt wordt dus

www.libtool.com.cn

$$x = V(a^2 - \frac{b^2}{c^2} y^2) - (\frac{b}{c} + 1) V(c^2 - y^2).$$

Het geheele verſchil tuſſchen deze vergelijking met de opgegevene, beſtaat dus alleen in het teeken dat voor den tweeden term van het tweede lid ſtaat, en dit ſchijnbaar verſchil valt geheel weg, wanneer wij in aanmerking nemen, dat iedere vierkantswortel zoo wel negatief als poſitief genomen kan worden, en dat wij alzoo de opgegevene vergelijking aldus behooren voor te ſtellen:

$$x = \pm V(a^2 - \frac{b^2}{c^2} y^2) \pm (\frac{b}{c} + 1) V(c^2 - y^2);$$

er moeten alzoo voor eene zelfde waarde van y vier verſchillende waarden van x beſtaan, omdat de teekens $+$ en $-$, in de vergelijking op vier verſchillende wijzen kunnen verbonden worden; en daar wij die vergelijking ook kunnen ſchrijven onder den vorm

$$x = \pm \left\{ V(a^2 - \frac{b^2}{c^2} y^2) \pm (\frac{b}{c} + 1) V(c^2 - y^2) \right\} \ldots (\alpha)$$

zoo volgt hieruit, dat de kromme, aan beide zijden van de as RS der ordinaten, op dezelfde wijze moet gelegen zijn, welke omſtandigheden door de conſtructie en door *Fig.* 85. volkomen bevestigd worden.

§. 5. Wanneer wij beide leden van onze vergelijking in het vierkant verheffen, wordt zij, na herleiding,

$$c^2 x^2 - c^2 (a^2 + (b + c)^2) + (b^2 + (b + c)^2) y^2 = \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm 2 (b + c) V(a^2 c^2 - b^2 y^2) (c^2 - y^2)$$

en verheffen wij, om het nog overgeblevene wortelteeken te doen verdwijnen, andermaal beide leden in de tweede magt, dan verkrijgen wij, na behoorlijke herleiding, de vierde magts-vergelijking

$$c^4 x^4 + 2 c^2 (b^2 + (b+c)^2) x^2 y^2 + ((b+c)^2 - b^2)^2 y^4 - \ldots$$
$$2 c^4 (a^2 + (b+c)^2) x^2 - 2 c^2 ((b+c)^2 - a^2) ((b+c)^2 - b^2) y^2 +$$
$$\ldots\ldots c^4 ((b + c)^2 - a^2)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Het is dus deze zamengeſtelde vierdemagts-vergelijking, welke wij in §. 1. hebben leeren conſtrueren, en de vergelijking (α) ſtelt, eigenlijk geſproken, niet anders dan derzelver vier wortels, dat is, de vier verſchillende takken der kromme lijn, voor.

§. 6.

§. 6. Daar x en y beide niet anders dan in evene magten in deze algemeene vergelijking voorkomen, zoo volgt hieruit, dat de kromme lijn, zoo wel ten opzigte van de as PQ als van de as RS, op dezelfde wijze gefitueerd is, en dat alzoo de takken GDQ, G'D'P, GdQ en G'd'P gelijk en gelijkvormig zijn, en alleen in den omgekeerden ftand van elkander verfchillen.

§. 7. Indien het punt D, in plaats van op het verlengde van BC genomen te worden, tusfchen B en C, of algemeener, van C af te rekenen, in de rigting CB genomen wordt, (zie *Fig.* 86) dan behoort de hieruit ontftaande kromme nog tot onze algemeene vergelijking; doch dan moet c in dezelve als negatief befchouwd worden, en zij verkrijgt als dan de gedaante

$$x = \pm \left\{ V(a^2 - \frac{b^2}{c^2} y^2) \pm (1 - \frac{b}{c}) V(c^2 - y^2) \right\}.$$

De werktuigelijke conftructie van §. 3. gaat dan even goed door; alleen met dit onderfcheid, dat dan ook de potloodftift op het liniaal BC zelf, en niet, zoo als in het eerfte geval, op deszelfs verlengde moet worden geplaatst.

§ 8. Om de punten te bepalen, waarin de kromme de as PQ doorfnijdt, ftellen wij $y = o$ en verkrijgen $x = \pm \left\{ a \pm (b + c) \right\}$, en dit geeft ons de punten P, Q, G en G'. Het fpreekt nu van zelf, dat wij in *Fig.* 86, waarin c negatief is, vinden $x = \pm (a \pm (b - c))$.

§. 9. Stellen wij $x = o$, dat is, willen wij de punten vinden, waarin de kromme de lijn RS fnijdt, dan hebben wij

$$a^2 - \frac{b^2}{c^2} y^2 = (1 + \frac{b}{c})^2 (c^2 - y^2)$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$y = \pm c V \frac{(b + c)^2 - a^2}{(b + c)^2 - b^2} \quad \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

en hieruit befluiten wij tot het volgende:

1°. Zoo lang c pofitief is, is $(b + c)^2 - b^2$ pofitief, en de gevondene waarde van y is dus beftaanbaar of onbeftaanbaar, naarmate a kleiner of grooter dan $b + c$ is. Men zou echter te voorbarig zijn, indien men hieruit zou willen opmaken, dat, a kleiner dan $b + c$ zijnde, de kromme altijd de lijn RS zou doorfnijden; want daar wij in het algemeen hebben

$$x = \pm \left\{ \sqrt{(a^2 - \frac{b^2}{c^2} y^2)} \pm (\frac{b}{c} + 1) \sqrt{(c^2 - y^2)} \right\}$$

www.libtool.com.cn

zoo is het klaar, dat tot de mogelijkheid van eene waarde voor x vereischt wordt, dat $y < c$ en $y < \frac{a}{b} c$ zij. Daar dus y niet grooter dan c kan zijn, zoo is het in de formule (γ) niet genoeg, dat $a < b + c$ zij, maar het gebroken onder het wortelteeken zal daarenboven kleiner dan de eenheid moeten zijn, omdat anders $y > c$ zou worden. Dit heeft nu plaats zoodra $a > b$ is, en wij besluiten hieruit dat, c positief zijnde, de kromme met de lijn RS geen punt gemeen kan hebben, indien niet $a > b$ en $a < b + c$ is.

In *Fig* 85, bij voorbeeld, is a wel kleiner dan $b + c$, doch de snijpunten met RS hebben geene plaats, omdat a ook kleiner dan b is; in dit geval bestaat dus de kromme uit twee bladen, welke geheel van elkander afgezonderd zijn; doch in *Fig.* 87, waarin mede c positief is, snijden deze bladen beide de lijn RS in de punten I en I', omdat aldaar $a > b$ en $a < b + c$ is.

Het volgt hieruit van zelf, dat $c = b$ zijnde, AI $= \pm c \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{3b^2}}$ wordt, doch dat alsdan $a > b$ en $a < 2b$ moet zijn, indien deze snijpunten wezenlijk zullen kunnen bestaan.

2°. Is c negatief, en schrijven wij de uitdrukking (γ) onder den vorm

$$y = \pm c \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{b^2 - (b - c)^2}}$$

dan is de noemer klaarblijkelijk positief, en y zal dus onbestaanbaar of bestaanbaar zijn, naarmate a kleiner of grooter dan $b - c$ is, en daar bovendien y wederom kleiner dan c moet zijn, zoo volgt hieruit, dat er geene snijpunten van de kromme met de lijn RS kunnen bestaan, dan wanneer $a < b$ en $a > b - c$ is. In *Fig.* 86, bij voorbeeld, waarin deze omstandigheden plaats grijpen, hebben ook deze snijpunten I en I' wezenlijk plaats; doch in *Fig.* 88, waarin c negatief en a wel grooter dan $b - c$, maar ook tevens grooter dan b is, bestaan deze snijpunten niet, en de kromme komt in dit geval ten naasten bij met *Fig.* 85. overeen.

In

In *Fig.* 89 en 90 is c negatief en grooter dan b Hetzelfde gaat ook ondertusſchen hier door; want in *Fig.* 89, waarin $a < b$, maar $a > c - b$ is, hebben de ſnijpunten I en I' plaats, terwijl zij in *Fig.* 90, waarin $a > b$ en $a > c - b$ is, niet beſtaan.

§. 10. Merkwaardig is het geval, waarin $a = b$ is. De vergelijking gaat dan over in

$$x = \pm \left\{ V(a^2 - \frac{a^2}{c^2} y^2) \pm (1 + \frac{a}{c}) V(c_1^2 - y^2) \right.$$

dat is, in

$$x = \pm \left\{ \frac{a}{c} V(c^2 - y^2) \pm (1 + \frac{a}{c}) V(c^2 - y^2) \right.$$

Het bovenſte teeken geeft $x = \pm \frac{2a + c}{c} V(c^2 - y^2)$, en het benedenſte teeken $x = \pm V(c^2 - y^2)$. De eerſte is de vergelijking van de ellips en de tweede die van den cirkel. De kromme gaat alzoo in dit geval over in een zamenſtel van eene ellips, waarvan $2a + c$ en c de halve aſſen zijn, en van eenen cirkel, waarvan c de ſtraal is. Is c negatief, dan blijft alles hetzelfde, behalve dat de halve aſſen dan $2a - c$ en c, of $c - 2b$ en c zijn, naarmate dat $2a >$ of $< c$ is. *Fig.* 91, 92 en 93 zijn voor dit geval geteekend. In *Fig.* 91 is c poſitief en kleiner dan $2a$; de halve aſſen zijn daar $AQ = 2a + c$ en $AI = c$. In *Fig.* 92. is c negatief en kleiner dan $2a$, en hier is $AQ = 2a - c$ en $AI = c$. In *Fig.* 93 eindelijk, is c negatief en grooter dan $2a$, en dan is de halve kleine as $AQ = c - 2a$, en de halve groote as $AI = c$.

De vergelijking (γ) geeft voor dit geval $AI = \pm c$, hetgeen met het reeds gezegde in het volmaakſte verband ſtaat.

§. 11. Wij verkrijgen dus hierdoor eene nieuwe werktuigelijke conſtructie voor de ellips; want het blijkt uit de vorige paragraaf, dat wij de linialen AB en BC ſlechts van dezelfde lengte te nemen hebben, en dat de potloodſtift D dan, naar willekeur in de lijn BC geſteld zijnde, altijd eene ellips doorloopen zal.

Om op deze wijze eene ellips te conſtrueren, waarvan de halve aſſen gegeven zijn, is mede zeer gemakkelijk; want het blijkt uit het bovengezegde, dat wij dan ſlechts het liniaal AB

gelijk het halve verſchil der gegevene halve aſſen behoeven te nemen, en dan de ſtift D zoodanig, op het verlengde van BC moeten plaatſen, dat CD gelijk de halve kleine as zij, en dan zal de conſtructie met *Fig.* 91. overeenkomen.

Willen wij de conſtructie van de gevraagde ellips met *Fig.* 92. doen overeenſtemmen, dan nemen wij de linialen AB en BC gelijk de halve ſom der gegevene halve aſſen, en ſtellen de potloodſtift D zoodanig in het liniaal BC zelf, dat CD gelijk de halve kleine as zij.

Eindelijk kunnen wij de beſchrijving van de ellips met *Fig.* 93. doen overeenſtemmen, door de linialen AB en BC gelijk het halve verſchil der gegevene halve aſſen te nemen, en dan de potloodſtift D op het verlengde van BC, naar de zijde van B zoodanig te plaatſen, dat CD gelijk de halve groote as zij.

§. 12. De cirkel, welke onze ellips vergezelt, is in de werktuigelijke beſchrijving van §. 3, voor het geval van $a = b$, wezenlijk mede begrepen; want $a = b$ zijnde, kan, gedurende de beweging van het punt C langs PQ, het punt C in A komen, hetgeen niet mogelijk is, wanneer $a > $ of $< b$ is; de linialen AB en BC liggen in dat oogenblik op elkander, en men kan dan, zonder het punt C te verplaatſen, beide linialen eene geheele omwenteling om het punt A laten doen, gedurende welken tijd het punt D eenen cirkel beſchrijven zal. De uitſtekende punten M en M′ van *Fig.* 85 en 88, komen meer en meer tot elkander, naarmate a en b minder van elkander verſchillen, en vallen, voor $a = b$, in elkander, zoodanig, dat de bladen QDGdQ en PD′G′d′P van *Fig.* 85, als dan overgaan in de ſtukken IPI′G′I en IQI′GI van *Fig.* 91 en 93.

Ons beſtek laat niet toe, over het vinden der raaklijnen, maxima, inhouden *enz.* bij deze oplosſing te ſpreken, en wij zijn alzoo verpligt dit tot eene nadere gelegenheid te beſparen.

CXL. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer iemand de reeks der natuurlijke getallen, van 1 *tot* 10^n *ingeſloten, moest ſchrijven, hoeveel malen zou hij dan ieder der getalmerken ſchrijven moeten?*

OPLOSSING, Door I. R. SCHMIDT.

§. 1. Wij zullen eerst het geheele aantal der cijferletters trachten te bepalen, en dan onderzoeken, hoeveel malen ieder der bijzondere getalmerken moet geschreven worden.

www.libtool.com.cn

§. 2. Om het geheele aantal der te schrijvene cijferletters te vinden, kunnen wij verschillende wegen inslaan, waarvan wij de voornaamste achtervolgens zullen voordragen.

Het eerste getal is hier 1 en het laatste is 10^n; het aantal der getallen is dus mede 10^n, en het laatste getal bestaat uit de eenheid, gevolgd van n nullen, en dus uit $n + 1$ getalmerken.

Wanneer nu al deze getallen geschreven worden, dan zijn er onder dezelve 9 welke uit één cijfer; 90 of 9.10 welke uit twee cijfers; 900 of 9.10^2 welke uit drie cijfers bestaan, en zoo vervolgens tot 9.10^{n-1} getallen, welke uit n cijfers bestaan, en dan nog het laatste getal, dat $n + 1$ cijfers bevat.

Het aantal cijferletters, in al deze getallen begrepen, is bijgevolg gelijk aan

$$1.9+2.9.10+3.9.10^2+4.9.10^3+\&c.+n.9.10^{n-1}+n+1$$

Om deze reeks te sommeren merken wij op, dat wij in het algemeen hebben

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \&c. + ar^n = \frac{a\,(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

Dit differentierende, en alles door ∂r deelende, verkrijgen wij

$$1 . a + 2 . ar + 3ar^2 + 4ar^3 + \&c. + nar^{n-1} = \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots a \times \frac{nr^{n+1} - (n+1)\,r^n + 1}{(r-1)^2}$$

Stellen wij nu $a = 9$ en $r = 10$, dan komt er

$$1.9+2.9.10+3.9\,10^2+4.9.10^3+\&c.+n.9.10^{n-1} = \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots \frac{n \cdot 10^{n+1} - (n+1)\,10^n + 1}{9}$$

en bijgevolg

$$1.9+2.9.10+3.9.10^2+4.9.10^3+\&c.+n.9.10^{n-1}+n+1 =$$
$$\frac{n.10^{n+1}-(n+1)10^n+1}{9}+n+1 = \frac{(9n-1)\,10^n+1}{9}+n+1 = \ldots$$
$$n\,(10^n + 1) - 10 \times \frac{10^{n-1} - 1}{9}.$$

en deze laatste uitdrukking stelt dus het aantal van al de te schrijvene cijferletters voor.

§. 3.

§. 3. Offchoon de differentiaalrekening ons regtſtreeks tot het ſommeren van onze reeks brengt, behoeven wij echter tot dezelve bij dit ſommeren geene toevlugt te nemen; want ſtellen wij

$$1 \cdot a + 2 \cdot ar + 3ar^2 + \&c. \ldots + nar^{n-1} = s$$

dan verkrijgen wij, door aan beide zijden met r te vermenigvuldigen,

$$ar + 2ar^2 + 3ar^3 + \&c. + (n-1)\,ar^{n-1} + nar^n = rs$$

en trekken wij hiervan de eerſte reeks af, dan blijft er over

$$-a - ar - ar^2 - ar^3 - \&c. \ldots - ar^{n-1} + nar^n = (r-1)s$$

dat is,

$$(r-1)s = nar^n - (a + ar + ar^2 + \&c. \ldots + ar^{n-1})$$

of, wanneer wij de hierin voorkomende meetkunſtige reeks ſommeren,

$$(r-1)s = nar^n - \frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ dus } s = \frac{nar^n}{r-1} - \frac{a(r^n-1)}{(r-1)^2}$$

en daar het gevraagde aantal cijferletters gelijk is aan $s + n + 1$, zoo vinden wij voor dit aantal

$$\frac{nar^n}{r-1} - \frac{a(r^n-1)}{(r-1)^2} + (n+1)$$

Stellen wij nu hierin $a = 9$ en $r = 10$, dan vinden wij

$$n \cdot 10^n - \frac{10^n - 1}{9} + n + 1$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$n\,(10^n + 1) - \frac{10^n - 10}{9}$$

en bijgevolg tot

$$n\,(10^n + 1) - 10 \times \frac{10^{n-1} - 1}{9}$$

en dit is dezelfde formule, welke wij in §. 2. gevonden hebben.

§. 4. Wij kunnen de reeks

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 10^2 + \&c. + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1} + n + 1$$

ook ſchrijven onder den vorm

$$1 \cdot (10-1) + 2(10^2 - 10) + 3(10^3 - 10^2) + 4(10^4 - 10^3) + \&c.$$
$$\ldots\ldots + n\,(10^n - 10^{n-1}) + (n+1)$$

en wanneer wij dan de gelijknamige magten van 10 vereenigen, verkrijgen wij dadelijk

$$-1 - 10 - 10^2 - 10^3 - \&c. - 10^{n-1} + n \cdot 10^n + n + 1$$

dat

dat is,

$n(10^n + 1) - (10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \&c. + 10^{n-1})$

en fommerende dan de hierin voorkomende meetkunftige reeks, hebben wij oogenblikkelijk

$$n\,(10^n + 1) - 10 \times \frac{10^{n-1} - 1}{9}.$$

§. 5. Nog gemakkelijker vinden wij het aantal van al de cijfers op de volgende wijze.

Verbeelden wij ons dat al de getallen van 1 tot 10^n onder elkander geſchreven zijn, even als of men dezelve wilde optellen, en dat er dan voor ieder getal zoo veel nullen geſchreven worden, dat zij alle even veel, en dus $n + 1$ cijfers verkrijgen. Men heeft dan klaarblijkelijk eenen regthoek van cijferletters, in welks horizontale zijden $n + 1$ cijfers zijn, terwijl de verticale zijden 10^n cijfers bevatten. Het geheele aantal cijfers, in dezen regthoek begrepen, is bijgevolg $(n + 1)\,10^n$, en hiervan behoeft nu het aantal vooraangeplaatſte nullen ſlechts afgetrokken te worden, om het begeerde aantal getalmerken over te houden.

Dit aantal nullen is nu $9 + 99 + 999 + enz.$, dat is, $(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \&c.$. tot $(10^n - 1)$, of wat hetzelfde is, $10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \&c. + 10^n - n$, en bijgevolg $\frac{10\,(10^n - 1)}{9} - n$; trekkende dit dan af van $(n + 1)\,10^n$, dan blijft er over

$$(n + 1)\,10^n - \frac{10\,(10^n - 1)}{9} + n$$

$$= n\,(10^n + 1) + 10^n - \frac{10\,(10^n - 1)}{9}$$

$$= n\,(10^n + 1) - 10\left(\frac{10^n - 1}{9} - 10^{n-1}\right)$$

$$= n\,(10^n + 1) - 10 \times \frac{10^n - 9 \cdot 10^{n-1} - 1}{9}$$

$$= n\,(10^n + 1) - 10 \times \frac{10^{n-1} - 1}{9}$$

even als boven.

§. 6. Om nu te vinden hoe dikwijls ieder der bijzondere getalmerken voorkomt, redeneren wij aldus:

Wij verbeelden ons wederom, dat al de getallen, even als of zij

zij moesten worden opgeteld, onder elkander geſchreven ſtaan, en dat bovendien al die getallen tot $n + 1$ cijfers, door middel van voorangeplaatſte nullen, zijn aangevuld. Wij hebben dan reeds in §. 5. gezien, dat dit aantal bijgevoegde nullen $\frac{10(10^n - 1)}{9}$ bedraagt.

In de achterſte verticale rij, dat is, in de kolom der eenheden, volgen de cijfers elkander regelmatig op; daar er nu 10 getalmerken zijn, en de verticale rijen uit 10^n cijfers beſtaan, komen al de getalmerken evenveel en dus 10^{n-1} malen in de kolom der eenheden voor.

De tweede kolom, of die der tientallen, bevat ieder getalmerk 10 achtervolgende keeren. De nul maakt hier geene uitzondering op, want die kolom begint met 9 nullen, en hier de nul bijgevoegd, die in 10^n de plaats der tientallen bekleedt, geeft mede 10 nullen. Het blijkt hieruit, dat ook in deze kolom ieder getalmerk evenveel malen en dus 10^{n-1} malen voorkomt.

Zoo voortgaande zullen wij zien, dat dit zelfde voor iedere kolom, tot de n^e ingeſloten, doorgaat, en dat dus, in die n kolommen te zamen, ieder cijferletter $n \cdot 10^{n-1}$ malen moet begrepen zijn.

Nu blijft ons alleen de voorſte of $(n + 1)^e$ kolom overig. Dezelve beſtaat uit $10^n - 1$ bijgevoegde nullen, en zij bevat bovendien nog éénmaal het cijfer 1. Hieruit volgt dus, dat in onzen regthoek van cijfers, de 1 zal voorkomen $n \cdot 10^{n-1} + 1$ malen, dat de 2, 3, 4 enz. tot 9 ingeſloten, ieder in dezelve zullen voorkomen $n \cdot 10^{n-1}$ malen, en de 0 eindelijk $n \cdot 10^{n-1} + 10^n - 1$ malen.

Van dit aantal nullen moet nu ondertusſchen het aantal bijgevoegde nullen worden afgetrokken, en daar dit aantal $\frac{10(10^n - 1)}{9} - n$ is, zoo komt, onder de geſchrevene getallen, ieder cijferletter zoo dikmaals voor, als in het onderſtaande tafeltje is aangewezen.

De 1 . . . . . $n \cdot 10^{n-1} + 1$ *malen.*

De 2, 3 *enz. tot* 9, *ieder* $n \cdot 10^{n-1}$ *malen.*

De 0 . . . . . $n(10^{n-1} + 1) - \frac{10^n - 1}{9}$ *malen.*

waardoor dan het Voorſtel is opgelost.

§. 7.

§. 7. Multiplicerende de tweede van deze uitdrukkingen met 8, en tellende hierbij de ſom van de eerſte en derde, dan verkrijgen wij, voor het aantal van al de getalmerken,

www.libtool.com.cn

$$n \cdot 10^{n-1} + 1 + 8 \cdot n \cdot 10^{n-1} + n\,(10^{n-1} + 1) - \frac{10^n - 1}{9}$$

dat is,

$$10 \cdot n \cdot 10^{n-1} + n - \left(\frac{10^n - 1}{9} - 1\right)$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$n\,(10^n + 1) - \frac{10\,(10^{n-1} - 1)}{9}$$

dezelfde formule, welke wij boven reeds, op vier verſchillende wijzen, bekomen hebben.

§. 8. *Voorbeeld.* Onderſtellen wij dat alle getallen tot 100000 geſchreven moesten worden; dan is $n = 5$, dus $10^{n-1} = 10000$ en $n \cdot 10^{n-1} = 50000$; de 1 zou dus 50001 maal moeten geſchreven worden, de 2, 3, 4 *enz. tot* 9, zouden ieder 50000 malen en de 0 zou 38894 malen moeten geſchreven worden. Het geheele aantal der cijferletters is alzoo

$$50001 + 8.50000 + 38894 = 488895$$

en wij vinden dit zelfde getal door middel van, in meergenoemde formule, $n = 5$ te ſtellen.

Indien men dus, door elkander, eene ſeconde tot het ſchrijven van één cijfer bezigt, en men twaalf uren daags werkt, zal men tot het ſchrijven van al de getallen, van *één* tot *honderdduizend*, 11 dagen, 3 uren, 48 minuten en 15 ſeconden behoeven.

CXLI. VOORSTEL.

Door I. R SCHMIDT.

Hetzelfde wordt gevraagd, wanneer alle achtervolgende getallen van 1 *tot* $a \times 10^n$, *waarin* a *niet grooter dan* 9 *mag zijn, moeten geſchreven worden?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

§ 1. Om het geheele aantal getalmerken te bepalen, verbeelden wij ons de getallen, even als in de oplosſing van het vorige Voorſtel, onder elkander geſchreven te zijn, behalve dat wij er ons nu geene bijgevoegde nullen bij denken, en dan is

ons

ons door het voorgaande Voorſtel bekend, dat al de getallen, van 1 tot 10^n ingeſloten, te zamen een aantal van

$$n\,(10^n + 1) - 10 \times \frac{10^{n-1} - 1}{9}$$

cijferletters hebben.

www.libtool.com.cn

De overige getallen, welke $(a - 1)\,10^n$ in aantal zijn, beſtaan ieder uit $n + 1$ cijfers, en bevatten dus te zamen een aantal cijfers, dat uitgedrukt wordt door

$$(n + 1)\,(a - 1)\,10^n.$$

Door nu deze twee uitdrukkingen bij elkander op te tellen, verkrijgen wij voor het geheele aantal der getalmerken,

$$n\,(10^n + 1) - \frac{10\,(10^{n-1} - 1)}{9} + (n + 1)\,(a - 1)\,10^n$$

en dit wordt gemakkelijk herleid tot

$$((n + 1)\,a - 1)\,10^n + n - \frac{10\,(10^{n-1} - 1)}{9} \ldots (a)$$

§. 2. Wanneer wij verder de oplosſing van het voorige Voorſtel wel begrepen hebben, zal het niet moeijelijk zijn, om ook te bepalen, hoe dikwijls iedere cijferletter in het bijzonder zal voorkomen.

Onderſtellende, namelijk, dat de getallen op de wijze als in §. 1. omſchreven is, onder elkander ſtaan, dan verkrijgen wij, vooreerst, al de zelfde getallen als in het vorige Voorſtel, en nog bovendien eenen regthoek van getallen, ter hoogte van $(a - 1)\,10^n$ en ter breedte van $n + 1$ cijfers. In ieder der verticale kolommen zijn, wanneer men de eerſte kolom aan de linkerhand niet mederekent, ieder der cijferletters evenveel, en dus $(a - 1)\,10^{n-1}$ malen begrepen, en bijgevolg in die n kolommen, ieder $n\,(a - 1)\,10^{n-1}$ malen; doch de voorſte kolom bevat de cijfers 1, 2, 3 *enz.* tot $a - 1$ ieder 10^n malen, (de cijfer 1 uitgeſloten, welke er eenmaal minder in begrepen is) doch de cijfer a bevat zij ſlechts éénmaal, en het blijkt hieruit, bij een weinig doordenken, dat bij de aantal malen in het vorige Voorſtel gevonden, zal moeten worden gevoegd

De 1 . . . . . $n\,(a-1)\,10^{n-1} + 10^n - 1$ *malen.*
De 2, 3 &c. *tot* $a - 1$ . . $n\,(a-1)\,10^{n-1} + 10^n$ *malen.*
De a . . . . . $n\,(a-1)\,10^{n-1} + 1$ *malen.*
De $a + 1$, &c. tot 9 en 0 . . $n\,(a-1)\,10^{n-1}$ *malen.*

Daar

Daar wij nu in het vorige Voorſtel gevonden hebben, dat wij, om al de getallen van 1 tot 10^n te ſchrijven, moeten ſchrijven

de 1 . . . . . $n \cdot 10^{n-1} + 1$ *malen*;
de 2, 3 &c. *tot* 9 . . $a \cdot 10^{n-1}$ *malen*;
de 0 . . . . . $n(10^{n-1}+1) - \frac{10^n-1}{9}$ *malen*;

zoo vinden wij, door voor ieder cijfer, de twee uitdrukkingen bij elkander te tellen, dat, tot het ſchrijven van alle getallen van 1 tot $a \times 10^n$ ingeſloten, zal moeten geſchreven worden:

$$\left.\begin{array}{l} \text{de } 1, 2, 3 \text{ enz. tot } a-1, an \cdot 10^{n-1} + 10^n \text{ malen}; \\ \text{de } a \ldots\ldots\ldots an \cdot 10^{n-1} + 1 \text{ malen}; \\ \text{de } a+1, a+2, \text{ enz. tot } 9, an \cdot 10^{n-1} + 1 \text{ malen}; \\ \text{de } 0 \ldots\ldots\ldots n(a \cdot 10^{n-1}+1) - \frac{10^n-1}{9} \text{ malen}; \end{array}\right\} (\beta)$$

waardoor het Voorſtel opgelost is.

§. 3. Vermenigvuldigende de eerſte uitdrukking met $a-1$, en de derde met $9-a$, en tellende die twee producten bij de ſom van de tweede en vierde uitdrukking, dan komt er

$$(a-1)(an \cdot 10^{n-1} + 10^n) + an \cdot 10^{n-1} + 1 + (9-a) \cdot an \cdot 10^{n-1} + n(a \cdot 10^{n-1} + 1) - \frac{10^n - 1}{9};$$

hetgeen ook aldus kan geſchreven worden:

$$\begin{array}{lll} (a-1)\, an \cdot 10^{n-1} + (a-1)\, 10^n + 1 - \frac{10^n - 1}{9} & & \\ + \quad 1 \cdot an \cdot 10^{n-1} & + n & \\ + (9-a) \cdot an \cdot 10^{n-1} & & \\ + \quad 1 \cdot an \cdot 10^{n-1} & & \end{array}$$

en hiervan is de ſom klaarblijkelijk

$$an \cdot 10^n + (a-1)\, 10^n + n - (\frac{10^n - 1}{9} - 1),$$

welke zeer gemakkelijk herleid wordt tot

$$((n+1)\, a - 1)\, 10^n + n - \frac{10\,(10^{n-1} - 1)}{9}$$

zijnde dit dezelfde formule (α) welke wij in §. 1 voor het aantal van al de cijferletters gevonden hebben.

§. 4. Om dit op een zeer gemakkelijk voorbeeld toe te paſſen, zullen wij onderſtellen, dat de getallen van 1 tot 30 moeten geſchreven worden. Hier is dus $n = 1$ en $a = 3$. Sub-

ſtituerende dit in onze gevondene formulen, dan wordt $10^{n-1} = 10^0 = 1$, en hierdoor vinden wij, dat de cijfers 1 en 2, ieder 13 malen, de cijfer 3, 4 malen, en de cijferletters 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 0, ieder 3 malen moeten geſchreven worden; het aantal van deze cijferletters is dus 51, en dit vinden wij ook door in (a) te ſtellen $n = 1$ en $a = 3$. Wij hebben dit eenvoudige voorbeeld uitgekozen, omdat men zich, door de getallen van 1 tot 30 wezenlijk te ſchrijven, proefondervindelijk van de waarheid onzer gegevene formulen zou kunnen overtuigen.

§ 5. AANMERKING. Het kan, na de oplosſing van dit en het voorgaande Voorſtel, niet moeijelijk zijn, dit onderzoek tot de meer algemeene formule

$$a\,10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + \text{&c.}$$

uit te breiden. Bepalen wij ons, om niet te langwijlig te worden, alleen bij het geval $a\,10^n + b\,10^{n-1}$. Hier komen nu bij de getallen, welke wij in dit Voorſtel behandeld hebben, nog $b \cdot 10^{n-1}$ andere getallen, en daar deze alle uit $n + 1$ cijfers beſtaan, is het aantal van derzelver cijfers $(n + 1)\,b \cdot 10^{n-1}$. Teilen wij dit bij de uitdrukking (a), dan vinden wij voor het aantal cijfers, begrepen in alle getallen van 1 tot $a \times 10^n + b \times 10^{n-1}$ ingeſloten,

$$((n+1)a - 1) \cdot 10^n + (n+1)\,b \cdot 10^{n-1} + n - \frac{10(10^{n-1} - 1)}{9}$$

of, wat hetzelfde is,

$$(n+1)(a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1}) - 10^n + n - \frac{10(10^{n-1} - 1)}{9}$$

en dit wordt gemakkelijk herleid tot

$$(n+1)(a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1}) + n - \frac{10(10^n - 1)}{9};$$

ſtellende dus het gegeven getal $a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} = g$, dan is het gevraagde aantal cijferletters

$$(n+1)\,g + n - \frac{10(10^n - 1)}{9} \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Om nu te vinden hoeveel malen elke cijfer in het bijzonder geſchreven moet worden, hebben wij alleen te onderzoeken, hoeveel malen iedere cijferletter in den nieuwen regthoek, van $(n + 1) \cdot b \cdot 10^{n-1}$ getalmerken voorkomt, en dan moeten de-

deze resultaten bij die van het nu opgeloste Voorstel opgeteld worden.

www.libtool.com.cn

In de voorste kolom, aan de linkerhand van dezen regthoek, wordt niet anders dan de cijfer a gevonden, en deze kolom bevat dus $b \cdot 10^{n-1}$ malen de cijfer a.

De n overige kolommen bevatten al de getallen van 1 tot $b \cdot 10^{n-1}$, met een genoegzaam aantal voorangeplaatste nullen, om al die kolommen tot n cijfers aan te vullen. Dit geeft volgens ons Voorstel,

de 1, 2 *enz. tot* $b-1$, $b(n-1)10^{n-2}+10^{n-1}$ *malen*;
de b . . . $b(n-1)10^{n-2}+1$ *malen*;
de $(b+1)$ &c. *tot* 9, $b(n-1)10^{n-2}$ *malen*;

de 0 . . . $b(n-1)10^{n-2}+(n-1)\frac{10^{n-1}-1}{9}$ *malen*;

en voor de tusschenvallende nullen

de 0 . . . $\frac{10\,(10^{n-1}-1)}{9}-(n-1)$ *malen*.

Dit alles zamenvoegende, volgt hieruit, dat vooreerst ieder cijfer zoo dikmaals zal voorkomen als onder (β) vermeld is, en dat er buitendien nog moet worden bijgevoegd

de 1 . 2 . &c. *tot* $b-1$, $b(n-1)10^{n-2}+10^{n-1}$
de b . . . $b(n-1)10^{n-2}+1$
de $b+1$ &c. *tot* 9, $b(n-1)10^{n-2}$
de 0 . . . $b(n-1)10^{n-2}+10^{n-1}-1$
} *malen* ($\frac{1}{3}$)

en daarenboven nog

de a . . . $b \cdot 10^{n-1}$

en hierdoor zal het nu gemakkelijk zijn, dit onderzoek op ieder getal van den vorm $a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} +$ &c. toe te passen.

§. 6. *Voorbeeld.* Stellen wij dat al de getallen van 1 tot 24000 moeten geschreven worden, dan is $n = 4$, $a = 2$ en $b = 4$, en wij vinden uit (β).

De 1 *en* 2 . . . 22000
De 3 12001
De 4, 5 &c. *tot* 9 . . 12000
De 0 10893
} *malen*;

en uit ($\frac{1}{3}$)

de 1 . 2 *en* 3 . . .	2200	}
de 4	1201	
de 5, 6, 7, 8 *en* 9 . .	1200	} *malen;*
de 0	2199	
de 3	4000	}

www.libtool.com.cn

en dit te zamentrekkende, volgt hieruit, dat zal moeten geschreven worden

de 1 *en* 2 *ieder* . .	24200	}
de 3	18201	
de 4	13201	} *malen;*
de 5, 6, 7, 8, *en* 9 . .	13200	
de 0	13092	}

wij hebben alzoo voor het geheele aantal van cijfers

$$2 \times 24200 + 18201 + 13201 + 5 \times 13200 + 13092 = 158894,$$

en berekenende dit geheele aantal door de formule (γ), dan vinden wij eveneens

$$5 \times 3400 + 4 - 11110 = 158894.$$

CXLII. VOORSTEL.

Door J. M. PAUW.

Van eenen driehoek ABC gegeven zijnde de lijn CD, welke eenen der hoeken C in twee gelijke deelen deelt, en de loodlijnen, welke uit de andere hoekpunten op deze lijn vallen: vraagt men den driehoek te bepalen?

OPLOSSING. Door J. M. PAUW.

Uit de gelijkvormige driehoeken ACF en BEC *Fig. 94.* volgt

$$AF : BE = CF : CE$$

derhalven is

$$AF + BE : AF - BE = CF + CE : CF - CE$$

of, wat hetzelfde is,

$$AF + BE : AF - BE = CF + CE : EF$$

Voorts is in de gelijkvormige driehoeken AFD en BED

$$AF : BE = DF : DE$$

dus $DF : DE = CF : CE$

en $DF + DE : CF + CE = DE : CE$

of $EF : CF + CE = DE : CE$

maar

maar zoo even is bewezen, dat wij hebben

$$EF : CF + CE = AF - BE : AF + BE$$

en wij verkrijgen dus

www.dbtool.com.cn

$$AF + BE : AF - BE = EC : ED$$

en hieruit volgt wederom

$$2\,AF : EC + ED = AF - BE : ED$$

of, wat hetzelfde is,

$$2\,AF : CD = AF - BE : ED$$

zoodat wij eindelijk verkrijgen

$$DE = \frac{(AF - BE) \times CD}{2 \cdot AF}$$

en dit geeft ons aanleiding tot de volgende

CONSTRUCTIE. Neem op de gegevene lijn CD, een ſtuk DE, gelijk aan de vierde evenredige tot 2 AF, AF — BE en CD. Rigt uit E de loodlijn EB op, en geef dezelve hare gegevene lengte, dan is het punt B en de rigting van de bazis bepaald. Om het hoekpunt A te vinden, vereenige men BE, en neme EG gelijk de gegevene waarde van AF; trekkende dan GA evenwijdig met CD, dan zal het hoekpunt A en dus de geheele driehoek bepaald zijn.

AANMERKINGEN. Wordt $AF = BE$, dan is $DE = 0$; en volgende nu de gegevene Conſtructie, zal men eenen gelijkbeenigen driehoek verkrijgen; en wordt $BE > AF$, dan wordt DE negatief, en men zal dus deze lijn niet van D naar C, maar op het verlengde van CD moeten uitzetten, en dan zal het overige van de Conſtructie hetzelfde blijven.

ANDERE OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

Men ſtelle $CD = a$, $BE = b$ en $AF = c$; men ſtelle verder den onbekenden hoek $ACD = DCB = \phi$, dan is $AC = c : Sin.\ \phi$ en $BC = b : Sin.\ \phi$ Verder is $\triangle ABC = \triangle ADC + \triangle DCB = \frac{1}{2} DC \times AF + \frac{1}{2} DC \times BE$, dat is

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, a\,(b + c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Maar wij hebben ook $\triangle ABC = \frac{1}{2} AC \times BC \times Sin.\ ACB$ dat is,

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} \times \frac{bc}{Sin^2.\ \phi} \times Sin.\ 2\phi \quad . \quad . \quad (2)$$

Deze twee waarden van △ ABC aan elkander gelijk ſtellende, verkrijgen wij de vergelijking

www.libtool.com.cn

$$\frac{bc}{Sin^2.\ \phi} \times Sin.\ 2\phi = a\ (b + c)$$

of, omdat $Sin.\ 2\phi = 2\ Sin.\ \phi\ .\ Cos.\ \phi$ is,

$$2bc \times \frac{Cos.\ \phi}{Sin.\ \phi} = a\ (b + c)$$

waaruit gevonden wordt

$$Cot.\ \phi = \frac{a\ (b + c)}{2\ bc}.$$

Door deze eenvoudige formule, welke zeer geſchikt voor de logarithmen is, $Cot.\ \phi$ berekend hebbende, vindt men AC en BC door de formulen

$$AC = \frac{c}{Sin\ \phi} \text{ en } BC = \frac{b}{Sin.\ \phi}$$

De twee zijden AC en BC met den ingeſlotenen hoek alzoo bekend zijnde, kan de derde zijde door de gewone oplosſing, voor dit geval der regtlijnige driehoeksmeting berekend worden.

CXLIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Uit een gegeven punt E, buiten eene gegevene parabool QAq (Fig. 95), eene lijn EM tot deze parabool te trekken, welke de kortſte is van alle lijnen, die uit dit punt E tot de parabool kunnen getrokken worden?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Zij AB, *Fig.* 95. de as van de parabool, en EM de gevraagde kortſte lijn, welke, verlengd zijnde, de as ergens in N doorſnijdt; laten voorts MP en EF loodregt op de as zijn, en ML evenwijdig met dezelve getrokken worden. Daar nu de ſtand van het punt E gegeven is, zoo ſtelle men AF $= m$ en EF $= n$; verders ſtelle men, de parameter der parabool p zijnde, AP $= x$, PM $= y$ en EM $= z$, dan is ML $=$ PF $= x - m$ en EL $=$ EF $-$ MP $= n - y$; daar nu $ME^2 = ML^2 + LE^2$ is, zoo verkrijgen wij

$$z^2 = (x - m)^2 + (n - y)^2.$$

Wijſt nu z een minimum moet zijn, zoo moet ook z^2 een mi-

minimum wezen; ſtellende dan $z^2 = v$, zoo moet $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ zijn, en wij verkrijgen alzoo

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2(x - m)\frac{\partial x}{\partial y} - 2(n - y) = 0$$

dat is, omdat $x = \frac{y^2}{p}$, en dus $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{p}$ is,

$$(\frac{y^2}{p} - m) \times \frac{2y}{p} - n + y = 0$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$y^3 - \tfrac{1}{2}p(2m - p)y - \tfrac{1}{2}np^2 = 0 \quad . \quad (\alpha)$$

en deze vergelijking zal, zoo als bekend is, drie beſtaanbare wortels of ſlechts éénen beſtaanbaren wortel hebben, naarmate de tweede term negatief of poſitief is; dat is, zij zal drie beſtaanbare wortels hebben, indien $m > \frac{1}{2}p$, en zij zal ſlechts eenen beſtaanbaren wortel hebben, indien $m < \frac{1}{2}p$. is.

Om voorts te onderzoeken of de waarden van y, door $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ verkregen, werkelijk tot een minimum behooren, moeten wij, zoo als bekend is, hiertoe de waarde van $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ te hulp roepen.

Daar wij nu gevonden hebben

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4}{p^2}\left\{ y^3 - \tfrac{1}{2}p(2m - p)y - \tfrac{1}{2}np^2 \right\}$$

zoo verkrijgen wij terſtond

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{4}{p^2}\left\{ 3y^2 - \tfrac{1}{2}p(2m - p) \right\}$$

en wij moeten dus onderzoeken of de waarden van y, gevonden door de vergelijking (α), de uitdrukking

$$y^2 - \tfrac{1}{6}p(2m - p) \quad . \quad . \quad (\beta)$$

poſitief of negatief zal maken.

Wij hebben reeds opgemerkt, dat $m < \frac{1}{2}p$ zijnde, de vergelijking (α) ſlechts eenen beſtaanbaren wortel zal hebben. In dit geval is alzoo $2m - p$ negatief, en de uitdrukking (β) bijgevolg poſitief. In dit geval moet dus die éénige beſtaanbare waarde van y een minimum zijn.

Het is thans noodig te onderzoeken of de uitdrukking (β) ook

positief zal blijven, ingevalle de vergelijking (α) drie bestaanbare wortels heeft, in welk geval $m > \frac{1}{2}p$, en dus $2m - p$ positief is. Schrijven wij te dien einde (α) en (β) onder den vorm

$$x^3 - \tfrac{1}{2}p(2m-p)y = \tfrac{1}{2}np^2 \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha')$$

$$y^2 + \tfrac{1}{6}p^2 - \tfrac{1}{3}mp \quad . \quad . \quad . \quad (\beta')$$

en merken wij op, dat, het punt E buiten de parabool liggende, het uit den aard van de zaak blijkt, dat EF grooter dan MP en dus $n > y$ is, dan is ook $\frac{1}{2}np^2 > \frac{1}{2}yp^2$ en bijgevolg

$$y^3 - \tfrac{1}{2}p(2m-p)y > \tfrac{1}{2}p^2y$$

of

$$y^3 > pmy. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Wanneer nu de vergelijking (α) drie bestaanbare wortels heeft, dan is het uit de teekens van die vergelijking openbaar, dat een van dezelve positief is, en dat de twee andere negatief zijn. De positieve wortel, dat is de positieve waarde van y, doet de uitdrukking (γ) overgaan in $y^2 > pm$, doch de negatieve waarden van y, herleiden dezelve tot $y^2 < pm$.

Voor de positieve waarde van y, $y^2 > pm$ zijnde, is ook zoo veel te meer $y^2 > \frac{1}{3}pm$, en dus ook $y^2 + \frac{1}{6}p^2 > \frac{1}{3}mp$. Hieruit volgt dus dat de positieve wortel van (α), daar zij (β) positief maakt, wederom een minimum zal aanwijzen.

Voor de negatieve waarden van y, is $y^2 < pm$; doch hieruit is in het algemeen niet te zien of (β) eene positieve, dan wel eene negatieve waarde verkrijgt: wij zullen dus de beteekenis van deze negatieve wortels op eene andere wijze trachten te bepalen.

Wanneer men uit eenig punt C, (*Fig.* 96.) als middelpunt, eenen cirkel beschrijft, welke de parabool QAq in eenig punt M doorsnijdt, zoo kan dezelve deze parabool nog in drie andere punten m, m' en M' doorsnijden; hierbij kan echter het geval plaats hebben, dat het snijpunt m in den top A valt, of ook dat de cirkel en de parabool alleen de punten M en m of M en A gemeen hebben, al hetwelk van den stand van het middelpunt C en van de grootte der straal CM afhangt.

Laten nu MP en CD loodregt op de as AB, en EC met dezelve evenwijdig zijn; voorts stelle men AD $= a$, CD $= b$, CM $= r$, MP $= y$, AP $= x$ en den parameter gelijk p, dan is CE $= x - a$, ME $= y - b$; en daar MC^2 $=$ ME^2 + CE^2

CE² is, heeft men $r^2 = (y - b)^2 + (x - a)^2$; daar nu volgens de eigenſchap der parabool $x = \frac{y^2}{p}$ is, zoo bekomen wij de vergelijking

www.libtool.com.cn

$$y^4 - p(2a - p)y^2 - 2bp^2y + p^2(a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Deze vergelijking kan vier beſtaanbare wortels, namelijk twee poſitieve en twee negatieve bevatten, of wel twee beſtaanbare en twee onbeſtaanbare. Eindelijk kan ook het geval plaats hebben dat $r^2 = a^2 + b^2$ is, en daar zij alsdan verandert in $y^4 - p(2a - p)y^2 - 2bp^2y = 0$, zoo is dan een der wortels gelijk nul; met deze waarde $y = 0$, ſtemt dan ook $x = \frac{y^2}{p} = 0$ overeen, en dit zal dus plaats hebben, wanneer m in A valt, en de cirkel alzoo door den top van de parabool gaat; zijnde het bovendien duidelijk, dat alsdan $AC^2 = AD^2 + CD^2$, dat is, $b^2 = a^2 + b^2$ zal zijn.

Voor dit geval heeft men aldus nog de vergelijking

$$y^3 - p(2a - p)y - 2bp^2 = 0$$

en vergelijkende deze, met de vergelijking (α), dat is, met

$$y^3 - \tfrac{1}{2}p(2m - p)y - \tfrac{1}{2}np^2 = 0$$

dan vinden wij, in aanmerking nemende dat de parameter in beide vergelijkingen dezelfde is,

$$2a - p = m - \tfrac{1}{2}p \text{ en } 2b = \tfrac{1}{2}n$$

waaruit men vindt

$$a = \tfrac{1}{4}(2m + p) \text{ en } b = \tfrac{1}{4}n$$

en bijgevolg

$$r^2 = a^2 + b^2 = \tfrac{1}{16}(2m + p)^2 + \tfrac{1}{16}n^2$$

waaruit wij trekken

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\{(2m + p)^2 + n^2\}}.$$

Maakt men dus, in *Fig.* 95, $AD = a = \frac{1}{4}(2m + p)$ en $DC = \frac{1}{4}n$, en beſchrijft men uit C als middelpunt, met CA als ſtraal, eenen cirkel, zoo zal deze het gezochte punt M bepalen, en bij aldien de gevondene vergelijking (α) drie beſtaanbare wortels bevat, zal die cirkel den anderen tak van de parabool nog in twee punten M′ en m' doorſnijden, in diervoege, dat MP de poſitieve, en M′P′ en $m'p'$ de negatieve wortels van de vergelijking (α) zullen voorſtellen, en dat bijgevolg EM, EM′ en

Em' de drie verſchillende waarden van x zijn, welke met deze drie waarden van y overeenſtemmen.

Het is zigtbaar, dat alleen EM het gezochte *volſtrekte minimum* kan zijn, dat is, de kortſte lijn, welke uit het punt E tot den omtrek van de parabool kan getrokken worden. De punten M′ en m' behooren ondertusſchen mede tot de maxima en minima. Trekken wij, namelijk, uit E, van EM beginnende, lijnen naar al de punten van den tak QMA, dan zullen deze lijnen hoe langs hoe grooter worden; gaan wij nu voort met uit E lijnen naar de punten van den tak AM′q te trekken, dan worden zij van A tot m' nog al grooter en grooter en bereiken in Em' hare grootſte waarde; offchoon dus Em' de langſte lijn niet is, welke uit E tot de parabool getrokken kan worden, wijl deze langſte lijn oneindig groot zou zijn, is Em' echter grooter dan hare naburige waarden, en bijgevolg een maximum; van m' tot M′ worden deze waarden van EM wederom kleiner, tot dat zij, na door het punt M′ gegaan te zijn, wederom beginnen aan te groeijen, en daar dus EM′ kleiner is dan hare naburige waarden, is zij, offchoon niet de korst mogelijke lijn, echter een wezenlijk minimum.

De drie punten M en M′ en m' hebben nog eene andere eigenſchap gemeen. Om zulks aan te toonen, zullen wij trachten de waarde van NP, *Fig.* 95, te bepalen. Hiertoe heeft men, uit hoofde van de regthoekige gelijkvormige driehoeken ELM en MPN

$$EL : ML = MP : PN$$

of

$$x - y : x - m = y : PN$$

en dus $(x-y)\,PN = y\,(x-m) = y\,(\frac{y^2}{p} - m) = \frac{y^3}{p} - my$

zoodat $p\,(x - y) \times PN = y^3 - mpy$. Subſtitueert men dit nu in de vergelijking (a), dat is in

$$y^3 - (mp - \tfrac{1}{2}p^2)\,y - \tfrac{1}{2}mp^2 = 0$$

zoo verkrijgt men

$$p\,(x - y) \times PN + \tfrac{1}{2}p^2y - \tfrac{1}{2}xp^2 = 0$$

waaruit men vindt $PN = \frac{1}{2}p$.

Daar dus PN gelijk den halven parameter is, zoo is MN de normaal van het punt M; en daar men op gelijke wijze kan aantoonen, dat ook P′N′ en $p'n'$ gelijk $\frac{1}{2}p$ zijn, zoo volgt hieruit

uit dat EM, E'M' en En', de rigtingen van de normalen aanduiden, welke uit het punt E tot de parabool kunnen getrokken worden, en dat alzoo in ons probleema ook het volgende vraagstuk is begrepen:

Uit een gegeven punt E, buiten eene gegevene parabool QAq, een normaal aan die parabool te trekken, en dat zulks op één of op drie verschillende wijze zal kunnen plaats hebben, naar dat de stand van het punt E verschillend wordt aangenomen.

Daar de normaal van eenig punt eener kromme lijn altijd loodregt is op de raaklijn van dit punt, zoo lost ons Voorstel ook het volgende op:

Uit een gegeven punt buiten eene gegevene parabool eene lijn tot eenig punt van dezelve te trekken, zoodanig dat die lijn loodregt zij op de raaklijn van dit punt der parabool.

Deze eigenschap baant ons den weg om ons Voorstel zonder behulp van de differentiaal-rekening op te losfen; want EM loodregt op de raaklijn van het punt M zijnde, welke, uitgezonderd het punt M, geheel buiten de parabool gelegen is, zoo zullen alle andere lijnen, uit E naar de paraboool getrokken, die raaklijn snijden en alzoo langer zijn dan EM. Daar nu MN de normaal, en alzoo NP $= \frac{1}{2} p$ is, zoo heeft men door de gelijkvormige driehoeken MPN en EFN, NP : PM $=$ NF : EF, dat is $\frac{1}{2} p : y = x - m + \frac{1}{2} p : n$, waaruit, daar $x = \frac{y^2}{p}$ is, de vergelijking

$$y^3 - \tfrac{1}{2} p (2m - p) y - \tfrac{1}{2} np^2 = 0$$

ontstaat, welke volmaakt overeenkomt met de vergelijking (*a*) die wij door middel van de differentiaal-rekening gevonden hebben.

CXLIV. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Door constructie de zijde van eenen cubus te vinden, welke n maal den inhoud van eenen gegevenen cubus bevat? Zijnde n eenig willekeurig geheel, gebroken of irrationaal positief getal, van den vorm $\sqrt{m}$.

Op-

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Men ſtelle de zijde van den gegevenen cubus a, en van den gevraagden cubus y, zoo moet $y^3 = na^3$ of $y^3 - na^3 = 0$ zijn. Deze is de eenigſte vergelijking welke het Voorſtel oplevert, en zij bevat, zoo als bekend is, ſlechts éénen beſtaanbaren wortel.

Wanneer men $n = 2$ aanneemt, dan is ons Voorſtel niets anders, dan het, bij de aloude meetkunſtenaars zoo beruchte Problema van de verdubbeling des teerlings, hetwelk, niet door de gemeene meetkunde ontbonden kunnende worden, hun aanleiding heeft gegeven, tot het zoeken van alstoen nog onbekende kromme lijnen, ten einde door middel van dezelve tot de oplosſing van dit Voorſtel te geraken, zoo als men dit bij verſchillende ſchrijvers vindt opgeteekend. De later uitgevondene analyſis, met hare gelukkige toepaſſing op de meetkunde, heeft geleerd, dat men tot de oplosſing van dit vraagſtuk geene vreemde kromme lijnen behoeft te hulp te roepen, en dat zulks gevoegelijk door middel van de kegelſneden geſchieden kan. Wij zullen ons algemeenere Voorſtel, door de ſnijding van eene parabool met eenen cirkel, trachten op te losſen, en alzoo onze vergelijking, daar zij van den derden graad is, met de vergelijking

$$y^3 - (2ap - p^2)\,y - 2bp^2 = 0$$

welke wij in het vorige Voorſtel, tot de oplosſing van eene derde-magts vergelijking gevonden hebben, vergelijken.

Daar nu onze vergelijking $y^3 - na^3 = 0$ is, vinden wij door vergelijking der coëfficienten, $2ap - p^2 = 0$ en $2bp^2 = na^3$. In deze twee vergelijkingen komen drie onbekende grootheden a, b en p voor, en wij kunnen dus eene van dezelve eene willekeurige waarde geven: de geſchikſte is echter die, door welke de coëfficienten der vergelijkingen, welke tot de conſtructie moeten dienen, den eenvoudigſten vorm bekomen, en zulks heeft duidelijk plaats, wanneer men den parameter der parabool $p = a$ ſtelt, want hierdoor wordt $a = \frac{1}{2}a$ en $b = \frac{1}{2}na$. Wij verkrijgen dus, hetgeen over dit onderwerp in het voorgaande Voorſtel gezegd is in aanmerking nemende, de volgende conſtructie.

Men beſchrijve, met eenen parameter gelijk a, eene parabool QAq, *Fig.* 97. van welke AB de as is; voorts neme men op de

as

as, AD $=a=\frac{1}{2}a$, ſtelle DC loodregt op de as en make dezelve gelijk $\frac{1}{2}na$; men beſchrijve eindelijk uit C als middelpunt, met CA als ſtraal, eenen cirkel, zoo zal deze de parabool in een punt M ſnijden, en dan zal de loodlijn MP, uit M op de as nedergelaten, de zijde van den gevraagden cubus zijn.

www.libtool.com.cn

Deze conſtructie volgt regtſtreeks uit de beſchouwing van het voorgaande Voorſtel; de reden waarom de ſtraal des cirkels gelijk CA moet zijn, is daar mede aangewezen; wil men zich echter nog nader overtuigen, dat de gegevene conſtructie $y^3=na^3$ maakt, zoo trekke men CE evenwijdig met AB; dan is, volgens de eigenſchap van de parabool, $MP^2=p\times AP$, of ſtellende MP $=y$ en AP $=x$, $y^2=px$ en daar $p=a$ is, $x=\frac{y^2}{a}$, verder is $MC^2=ME^2+PD^2=(MP-CD)^2+(AP-AD)^2$, nu is MP $=y$; CD $=\frac{1}{2}na$; AP $=\frac{y^2}{a}$ en AD $=\frac{1}{2}a$, dus MC $=$ AC $=\sqrt{(AD^2+DC^2)}=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}n^2a^2)}$, en deze waarden ſubſtituerende, verkrijgen wij

$$\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}n^2a=(y-\tfrac{1}{2}na)^2+(\frac{y^2}{a}-\tfrac{1}{2}a)^2$$

hetgeen ontwikkeld zijnde, geeft

$$\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}n^2a=y^2-nay+\tfrac{1}{4}n^2a^2+\frac{y^4}{a^2}-y^2+\tfrac{1}{4}a^2$$

of, wat hetzelfde is,

$$\frac{y^4}{a^2}-nay=0$$

hetgeen, met a^2 vermenigvuldigd en door y gedeeld zijnde, geeft

$$y^3-na^3=0 \text{ of } y^3=na^3.$$

Welke waarde n nu ook mag hebben, zoo ondergaan de parabool en de lijn AD hierdoor geene verandering, want de parameter blijft altijd a en de lijn AD $=\frac{1}{2}a$, doch de afſtand DC en de radius CA veranderen als n verandert, omdat DC $=\frac{1}{2}na$ is. Stelt men $n=1$, dan is DC $=\frac{1}{2}a=$ AD, en y of PM $=a\sqrt[3]{1}=a$; neemt men $n>1$ aan, zoo is DC $>\frac{1}{2}a$ en MP $>a$; maar wordt $n<1$ genomen, waardoor n eene eigenlijke breuk wordt, dan is DC $<\frac{1}{2}a$ en dus MP $<a$.

Stelt men dat n eene irrationale grootheid, als $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ of $\sqrt{m}$

$\sqrt{m}$ zij, zoo is het genoegzaam bekend, hoe men door behulp der Pythagoriſche leerſtelling, eenen regthoekigen driehoek kan beſchrijven, van welken de hypothenuza of eene der regthoeks zijden gelijk $a\sqrt{m}$ is; of wel, omdat $a\sqrt{m} = \sqrt{a} \times am$ is, kan men dit altijd conſtrueren, door eene middel-evenredige tuſſchen a en ma te zoeken. Dit gedaan zijnde, behoeft ſlechts $DC = \frac{1}{2} a\sqrt{m}$ genomen, en dan met CA een cirkelboog beſchreven te worden, om het gevraagde punt M te bepalen.

AANMERKING. Bij de artillerie wordt ſomtijds vereiſcht, om door middel van eenen, in gewigt en middellijn bekenden kogel, de middellijnen te bepalen van andere kogels, van dezelfde ſtof, en van gegeven gewigt, hetgeen de berekening alleen met de vereiſchte naauwkeurigheid kan leeren vinden; doch daar in vroegſte tijden de artilleriſten niet algemeen in de wiskunde bedreven waren, zoo heeft men in de oude artillerie-ſchriften meetkundige conſtructien opgegeven, om door dezelve de gezochte middellijnen te bepalen. Wanneer men nu deze, op welke wijze dan ook, gevondene middellijnen, voor kogels van 1, 2, 3, 4, 5 *enz.* pond gevonden had, teekende men dezelve op eene houten of koperen ſtaaf aan, welke men bij de Hollandſche Artilleriſten *Talſtok* noemde. Daar echter de gemelde conſtructien tot de elementaire geometrie behoorden, zoo ſpreekt het van zelf, dat dezelve valſch waren, en ſomtijds veel van de waarheid afweken. Indien men nu even zoo gemakkelijk en naauwkeurig eene parabool als eenen cirkel beſchrijven kon, zoo zouden wij, door onze oplosſing in ſtaat geſteld zijn om meetkunſtig eenen zoodanigen Talſtok te vervaardigen; want indien men eene parabool beſchrijft met eenen parameter a, welke gelijk is aan de middellijn van eenen kogel van één pond, en van zulke ſtof, bij voorbeeld, van ijzer of lood, waarvoor men den Talſtok wil vervaardigen, en men maakt alsdan AD gelijk de halve middellijn, dat is, gelijk $\frac{1}{2} a$, en rigt in D eene onbepaalde loodlijn op, zoo zal men, door achtervolgens $n = 2, 3, 4, 5$ enz te ſtellen, voor $CD = \frac{1}{2} na$, bekomen a, $\frac{9}{4}a$, $2a$, $\frac{25}{4}a$ *enz.*, waardoor de middelpunten C, C′, C″, C‴ *enz.* ontſtaan zullen; beſchrijft men nu uit deze, met de ſtralen CA, C′A, C″A, C‴A *enz.*, cirkels, zoo zullen dezelve de punten M, M′, M″, M‴ *enz.* van de parabool doen kennen, zoodanig, dat de loodlijnen MP, M′P′,

$M'P'$, $M''P''$, $M'''P'''$ *enz.* de middellijnen van de kogels van 2, 3, 4, 5 *enz* pond zullen zijn. Stelt men nu al deze lijnen, van een zelfde punt te beginnen, op eene houten of koperen ſtaaf, dan zal de Talſtok vervaardigd zijn. Neemt men daarentegen in de uitdrukking $CD = \frac{1}{12} na$, n gelijk $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ *enz.* zoo zal men hierdoor de middelpunten van cirkels verkrijgen, waaruit, op dezelfde wijze, punten in de paraboel zullen worden, gevonden, welke door hunne ordinaten de middellijnen der kogels van 1, 2, 3, 4 *enz.* lood zullen doen kennen.

www.libtool.com.cn

CXLV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een emmer, welke de gedaante van eenen afgeknotten kegel heeft, is uit hout zamengeſteld, waarvan de cubiekvoet 30 pond weegt, en is gevuld met vocht, waarvan het gewigt 63 pond voor iederen cubiekvoet bedraagt. Wanneer nu de middellijn van het bovenvlak des emmers buitenwerks 12, die van het benedenvlak 8 en de hoogte des emmers 16 duim is, en bovendien de dikte van het hout, zoo wel van den bodem als van de zijwanden, één duim bedraagt, dan wordt gevraagd, hoeveel deze gevulde emmer zal wegen?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Laat *Fig.* 98. de doorſnede van den halven emmer verbeelden, en laten de lijnen CB en KL loodregt op AD, en GF loodregt op AC getrokken worden; dan zijn de driehoeken AFG, CAD en KGL gelijkvormig, en wij hebben door het Voorſtel, $AD = 6$, $CE = 4$, $DE = 16$ en $FG = ME = 1$ duim, zoodat $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{((AD - CE)^2 + DE^2)} = \sqrt{(4 + 256)} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$.

Nu is in de gelijkvormige driehoeken ABC en AGF, $BC : AC = FG : AG$, of $16 : 2\sqrt{65} = 1 : AG$, dus $AG = \frac{1}{8}\sqrt{65}$, en bijgevolg $GD = AD - AG = 6 - \frac{1}{8}\sqrt{65} = \frac{1}{8}(48 - \sqrt{65})$.

In de gelijkvormige driehoeken ABC en GLK, is $BC : AB = KL : LG$, of $16 : 2 = 15 : LG$, dus $LG = \frac{15}{8}$, en bijgevolg $KM = GD - GL = \frac{1}{8}(48 - \sqrt{65}) - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}(33 - \sqrt{65})$.

De inhoud van den buitenſten geknotten kegel I ſtellende, hebben wij verder

$$\frac{1}{3} DE \times \{ AD^2 + AD \times CE + CE^2 \} \times \pi = I$$

en

en brengende hierin de waarde der lijnen, dan komt

$$I = \frac{16 \times 76}{3} \times \pi = \frac{\pi}{3 \times 64} \times 77824.$$

www.libtool.com.cn

Stellende den inhoud van den binnenſten geknotten kegel I', dan is

$$\tfrac{1}{3} DM \times \{ GD^2 + GD \times KM + KM^2 \} \times \pi = I'$$

en hierin de gevondene waarden geſubſtitueerd,

$$I' = \tfrac{5}{64}(5172 - 243 \sqrt{65})\pi = \frac{\pi}{3 \times 64} \times 77580 - 3645 \sqrt{65})$$

zoodat wij voor den cubieken inhoud van den emmer verkrijgen

$$I - I' = \frac{\pi}{3 \times 64} \times (244 + 3645 \sqrt{65})$$

Om nu het gewigt te bepalen, hebben wij voor het gewigt van het vocht, omdat de inhouden in cubieke duimen zijn uitgedrukt,

$$\frac{63\, I'}{1728} = \frac{5\, \pi}{64 \times 1728} \times \{ 325836 - 15309 \sqrt{65} \}$$

en voor het gewigt van het hout

$$\frac{30\,(I - I')}{1728} = \frac{5\, \pi}{64 \times 1728} \times \{ 488 + 7290 \sqrt{65} \}$$

en door deze twee uitdrukkingen op te tellen, verkrijgen wij voor het geheele gewigt

$$\frac{5\, \pi}{64 \times 1728} \times \{ 326324 - 8019 \sqrt{65} \}$$

Berekening in Logarithmen.

2) *Log.* 65 = 1,8129134

Log. $\sqrt{65}$ = 0,9064567

Log. 8019 = 3,9041202

4,8105769

8019 $\sqrt{65}$ = 64651,24

326324,00

a = 261672,76 —

Log. a = 5,4177585

Log. 10 π = 1,4971499

6,9149084 +

Log. n = 5,3447537 —

1,5701547

gewigt = 37,16676 *pond.*

CXLVI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

www.libtool.com.cn

Van een gewoon uurwerk, waarvan de uurwijzer volmaakt geregeld loopt, is de minuutwijzer zoodanig in wanorde, dat dezelve, offchoon eene eenparige beweging hebbende, op de 45, *of* quart voor twaalf *ſtaat, wanneer de uurwijzer volmaakt* twaalf uren *aanwijst; en dat bovendien dezelve, in plaats van twaalfmaal, ſlechts zevenmaal zoo ſnel als de uurwijzer beweegt; nu vraagt men op welke oogenblikken van den dag, deze twee wijzers even zoo volmaakt zullen overeenſtemmen, dat is, wanneer zij den tijd even zoo juist zullen aanwijzen, alsof er niets aan den minuutwijzer haperde?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Offchoon dit Voorſtel niet onmiddellijk als een bijzonder geval van Voorſtel 136 kan worden aangemerkt, omdat hier niet bekend is, welke hoek de wijzers, op het oogenblik dat zij met een geregeld uurwerk overeenſtemmen, te zamen zullen maken, en omdat dus hier q onbekend is, zoo kunnen wij echter de oplosſing, op de volgende wijze, uit die van Voorſtel 136 afleiden.

Verbeelden wij ons, dat er, behalve de gebrekkige minuutwijzer, nog een naauwkeurige minuutwijzer aan het uurwerk is aangebragt, dan is het klaar, dat wij de gevraagde oogenblikken van den dag zullen verkrijgen, indien wij ſlechts kunnen bepalen, wanneer die gebrekkige en naauwkeurige minuutwijzers juist op elkander zullen liggen, want alsdan komt de gebrekkige minuutwijzer met den naauwkeurigen minuutwijzer, en bij gevolg ook met den uurwijzer overeen.

Dit nu wordt onmiddellijk door de oplosſing van Voorſtel 136 gevonden, want wijl hier de ſnelheden tot elkander in reden zijn als 12 tot 7, en, bij den aanvang, de ſnelſte wijzer den traagſten $\frac{1}{4}$ omloop vooruit is, zoo moeten wij, in de aldaar gevondene formulen, ſtellen $n = 12$, $m = 7$, $p = -\frac{1}{4}$ en $q = 0$, waardoor wij verkrijgen

voor den gebrekkigen minuutw. $y = \frac{7}{5}(-\frac{1}{4} + g)$ *omloopen*
voor den naauwkeurigen minuutw. $x = \frac{12}{5}(-\frac{1}{4} + g)$ *omloopen*

en bij gevolg,

voor den uurwijzer . . . . . $\frac{1}{5}(-\frac{1}{4}+g)$ *omloopen*

hierin moet nu $g = 1, 2, 3, 4$ en 5 genomen worden, en daar wij, van *twaalf uren* begonnen zijnde, het getal der omloopen van den naauwkeurigen minuutwijzer, voor de gevraagde uren moeten houden, zoo verkrijgen wij hierdoor de volgende oogenblikken.

$$1\tfrac{4}{5};\ 4\tfrac{1}{5};\ 6^{3};\ 9;\ 11\tfrac{2}{5}\ \textit{uren}.$$

De oogenblikken waarop dus het uurwerk met een geregeld uurwerk overeen zal ſtemmen, zijn de volgende: 1 *uur* 48 *minuten*; 4 *uren* 12 *minuten*; 6 *uren* 36 *minuten*; 9 *uren precies*; 11 *uren* 24 *minuten*.

CXLVII. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Aan eenen hefboom van de tweede ſoort wordt met a (7) *ponden, een zekere laſt opgehouden; maar als men dezen laſt verplaatst op het magtpunt, en de magt brengt op de plaats waar eerst het laſtpunt was, zoodat de hefboom daardoor een hefboom van de derde ſoort is geworden; dan is tot dien zelfden laſt b* ($17\frac{1}{7}$) *ponden meer noodig om evenwigt te maken, dan de laſt zelf groot is. Men vraagt de zwaarte van dezen laſt te bepalen.* (39)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

ABC, *Fig.* 99, ſtelle de hefboom in de twee verſchillende toeſtanden voor, en men ſtelle de gevraagde laſt x, dan is het uit de eerſte gronden der evenwigtsleer bekend, dat de twee volgende evenredigheden plaats zullen hebben.

$$AB : AC = a : x$$
$$AB : AC = x : x + b$$

en hieruit volgt de evenredigheid:

$$a : x = x : x + b$$

dit geeft de vierkants-vergelijking $x^2 = ax + ab$, waaruit wij vinden $x = \frac{1}{2}a\left\{1 \pm \sqrt{(1+\frac{4b}{a})}\right\}$.

Stellen wij nu $a = 7$ en $b = 17\frac{1}{7}$, dan verkrijgen wij, vervolgens

(39) PRINSEN, *Algebra*, *pag.* 144 No. 81.

heer wij het bovenste teeken gebruiken, $x = \frac{7}{4} \times (1 + \sqrt{\frac{529}{49}})$ $= \frac{7}{4} \times \frac{30}{7} = 15$ pond.

www.libtool.com.cn

AANMERKING door I. R. SCHMIDT.

De tweede wortel is altijd negatief omdat $\sqrt{(1 + \frac{4b}{a})} > 1$ is, en dit toont aan, dat alsdan de last in dezelfde rigting van de magt moet werken, hetgeen echter bij eenen hefboom van de tweede of derde soort, indien er evenwigt plaats zal hebben, onmogelijk is. Dit moet ons reeds doen vermoeden dat deze wortel tot eenen hefboom van de eerste soort zal behooren. Wij zullen dit vermoeden volkomen bevestigd vinden, indien wij opmerken, dat $a : x = AB : AC$ zijnde, voor eene negatieve waarde van x, noodzakelijk een der armen AB of AC negatief moet wezen; en offchoon het nu aan ons geheel vrij ftaat, welke arm wij als de poſitieve willen beſchouwen, volgt er toch altoos uit, dat alsdan de twee armen ter wederzijden van het ſteunpunt liggen, en de hefboom alzoo een hefboom van de eerſte ſoort is.

Men zou, bij den eerſten opſlag, kunnen denken, dat deze tweede oplosſing in ſommige gevallen onmogelijk zou zijn, omdat uit de evenredigheid $a : x = x : x + b$ volgt, dat x negatief zijnde $x + b$ poſitief moet zijn; wanneer dus die negatieve waarde van x grooter dan b mogt worden, zou $x + b$ negatief, en dus deze tweede oplosſing onbeſtaanbaar zijn. Dit geval kan echter nooit plaats hebben, want de waarde van x kan geſchreven worden onder den vorm

$$x = \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{(4ab + a^2)})$$

en dus is de negatieve waarde van x

$$x = \tfrac{1}{2}(a - \sqrt{(4ab + a^2)})$$

en bijgevolg is de wezenlijke waarde van x, dat is, het gewigt dat nu in dezelfde rigting als de magt werkt,

$$-x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{(4ab + a^2)} - a)$$

daar nu $(2b + a)^2 = 4b^2 + 4ab + a^2$ is, zoo is $\sqrt{(4ab + a^2)} < 2b + a$, dus $\sqrt{(4ab + a^2)} - a < 2b$ en $\frac{1}{2}(\sqrt{(4ab + a^2)} - a) < b$; de negatieve waarde van x kan bijgevolg nooit grooter dan b worden, en $x + b$ blijft dus hier, voor de negatieve waarde van x, altijd poſitief.

CXLVIII. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

www.libtool.com.cn

Zekere rol wordt langs een hellend vlak, dat a (20) voeten lang is, met een gewigt van b (36) ponden in evenwigt gehouden. Wanneer men nu dit vlak dezelfde lengte laat behouden, maar hetzelve c $(\frac{1}{2})$ voet onder uithaalt, dan zakt het hoogſte einde eenigzins, waardoor de rol gemakkelijker tegen te houden is; indien dit nu met een gewigt van d (33,9) ponden kan geſchieden, dan vraagt men naar de zwaarte des rols? (40)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

Laat ABC, *Fig.* 100, het hellend vlak voorſtellen en AA′ het onder uitgehaalde gedeelte zijn, zoodat A′C′ de tweede ſtand van het hellend vlak is, dan is $A'C' = AC$. Stel $AB = x$, dan is $A'B = x + c$, en dus $BC^2 = AC^2 - AB^2 = a^2 - x^2$ en $(BC')^2 = (A'C')^2 - (A'B)^2 = a^2 - (x + c)^2$, verder ſtellen wij de zwaarte van de rol gelijk y.

Nu is het uit de gronden der evenwigtsleer bekend dat, wanneer de kracht evenwijdig aan de lengte van het hellend vlak werkt, er evenwigt zal zijn, wanneer de kracht tot het gewigt van het ligchaam in reden is, als de hoogte tot de lengte van het hellend vlak, en hieruit volgt, dat, bij gelijke lengten, de krachten, welke gevorderd worden, om met een zelfde gewigt, in rigtingen welke evenwijdig met de lengte van dit hellend vlak zijn, evenwigt te maken, tot elkander in reden zijn, als de hoogten van het hellend vlak. Wij hebben dus in ons geval

$$b : d = BC : BC' = \sqrt{(a^2 - x^2)} : \sqrt{(a^2 - (x + c)^2)}$$

of $b^2 : d^2 = a^2 - x^2 : a^2 - (x + c)^2$

dat is $b^2 : b^2 - d^2 = a^2 - x^2 : 2cx + c^2$.

ſtellende nu kortheidshalven $\frac{b^2}{b^2 - d^2} = p$, dan verkrijgen wij $a^2 - x^2 = 2pcx + pc^2$, of wat het zelfde is $x^2 + 2pcx = a^2 - pc^2$, uit welke vierkants-vergelijking gevonden wordt

$$x = -pc \pm \sqrt{\{a^2 + pc^2 (p - 1)\}}.$$

Voor

(40) PRINSEN, *Algebra*, pag. 146 No. 82.

Voor de opgegevene getallen is $p = \frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{1296}{146,79}$ $= 8,83$, en bijgevolg, het bovenſte teeken gebruikende, $x = 16,01$.

www.dbtool.com.cn

Om eindelijk het gewigt van de rol te bepalen, hebben wij volgens het bovengezegde

$$b : y = BC : AC = \sqrt{(a^2 - x^2)} : a$$

zoodat $y = b \times \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

Brengende nu hierin de gevondene en geſtelde waarden, dan vinden wij $y = 60$, ten naaste bij, voor het aantal ponden dat de rol weegt.

CXLIX. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Van eenen driehoek ABC is bekend de hoek B, de zijde AC, welke over dien hoek gelegen is, en de ſom AB + BC + BD van de twee zijden om den bekenden hoek en de loodlijn welke uit dit hoekpunt op de bekende zijde valt. Hoe zal men dezen driehoek bepalen?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Dit Voorſtel kan op verſchillende wijzen ontbonden worden; de volgende oplosſing komt mij voor eene der eenvoudigſte te zijn.

Men ſtelle *Fig.* 101, AB + BC + BD $= a$, AC $= b$ en $\angle$ ABC $= \alpha$, verder ſtelle men $\angle$ BCA $-$ $\angle$ BAC $= 2\phi$, dan is, omdat $\angle$ BCA + $\angle$ BAC $= 180° - \alpha$ is,

$$\angle BCA = 90° - (\tfrac{1}{2}\alpha - \phi)$$
$$\angle BAC = 90° - (\tfrac{1}{2}\alpha + \phi)$$

hieruit vinden wij

$$AB = AC \times \frac{Sin.\ \angle BAC}{Sin.\ \angle ABC} = b \times \frac{Cos.\ (\frac{1}{2}\alpha + \phi)}{Sin.\ \alpha}$$

$$BC = AC \times \frac{Sin.\ \angle BCA}{Sin.\ \angle ABC} = b \times \frac{Cos.\ (\frac{1}{2}\alpha - \phi)}{Sin.\ \alpha}$$

en bijgevolg,

$$AB + BC = b \times \frac{Cos.(\frac{1}{2}a + \phi) + Cos.(\frac{1}{2}a - \phi)}{Sin\ a}$$

$$= b \times \frac{2\ Cos\ \frac{1}{2}a \times Cos.\ \phi}{2\ Cos.\ \frac{1}{2}a \times Sin.\ \frac{1}{2}a} = b \cdot \frac{Cos\ \phi}{Sin.\ \frac{1}{2}a}$$

www.libtool.com.cn

verder heeft men

$$BD = \frac{2\ \Delta\ ABC}{AC} = \frac{AB \times BC \cdot Sin.\ a}{AC}$$

$$= b \times \frac{Cos.(\frac{1}{2}a+\phi) \times Cos.(\frac{1}{2}a-\phi)}{Sin.\ a} = \frac{1}{2}b \times \frac{Cos.\ a + Cos.\ 2\phi}{Sin.\ a}$$

$$= \frac{1}{2}b \times \frac{Cos\ a + 2\ Cos^2\ \phi - 1}{Sin\ a} = b \times \frac{Cos^2.\ \phi - Sin^2\ \frac{1}{2}a}{Sin.\ a}$$

en door deze twee uitdrukkingen op te tellen verkrijgt men de vergelijking

$$b \times \frac{Cos\ \phi}{Sin.\ \frac{1}{2}a} + b \times \frac{Cos^2.\ \phi - Sin^2.\ \frac{1}{2}a}{Sin.\ a} = a$$

of aan beide zijden met $\frac{Sin.\ a}{b}$ vermenigvuldigende

$$Cos^2.\ \phi + 2\ Cos.\ \frac{1}{2}a\ .\ Cos.\ \phi = \frac{a}{b}\ Sin.\ a + Sin^2.\ \frac{1}{2}a$$

hierbij aan beide zijden $Cos^2.\ \frac{1}{2}a$ opgeteld, komt er, na de wortel getrokken te hebben,

$$Cos.\ \phi = -\ Cos.\ \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{a}{b}\ Sin.\ a + 1)}$$

Hiervan is echter alleen het bovenste teeken bruikbaar, omdat het benedenste teeken voor $Cos.\ \phi$ eene negatieve waarde geeft, welke grooter dan de eenheid is. Wij hebben alzoo alleen

$$Cos.\ \phi = -\ Cos.^{\frac{1}{2}}\ a + \sqrt{(\frac{a}{b}\ Sin.\ a + 1)}$$

waardoor het Voorstel is opgelost.

1°. AANMERKING. Wanneer men $\angle\ ABC = a = 90°$ stelt, dan verandert dit Voorstel in het IX *Vraagstuk*, I *Deel*, I *Stukje* der *Meetkundige Analysis van Professor* J. DE GELDER, en men heeft voor dit geval

$$Cos.\ \phi = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{(\frac{a}{b} + 1)}$$

2° AANMERKING. Het is opmerkenswaardig, dat wanneer men eene der opstaande zijden des driehoeks op zich zelve wil vinden, men op eene ingewikkelde eindvergelijking nederkomt, welker op-

oplosfing zeer bezwaarlijk is. Om dit aan te toonen, zullen wij $AB = x$ als onbekende aannemen; alsdan heeft men, uit $AB + BC + BD = a$, de loodlijn $BD = a - x - BC$, en daar $AB \times BC \times Sin\ a =$ BD × AC de dubbelde inhoud des drie-hoeks is, zoo is, $BC \times x\ Sin.\ a = b\ (a - x - BC)$, waaruit $BC = \frac{b(a-x)}{b + x\ Sin.\ a}$, en bijgevolg is $BD = a - x - \frac{b\ (a-x)}{b + x\ Sin.\ a} = \frac{x\ (a-x)\ Sin.\ a}{b + x\ Sin\ a}$, wij hebben dus

$$AD^2 = x^2 - \frac{x^2(a-x)^2\ Sin^2 a}{(b + x\ Sin.\ a)^2} = \frac{x^2\ \{(b+x\ Sin\ a)^2 - (a-x)^2 Sin^2 a\}}{(b + x\ Sin.\ a)^2}$$

$$DC^2 = \frac{b^2(a-x)^2}{(b+x Sin.a)^2} - \frac{x^2(a-x)^2 Sin^2.a}{(b+x\ Sin.a)^2} = \frac{(a-x)^2(b^2 - x^2 Sin^2.a)}{(b+x\ Sin.a)^2}$$

en wij verkrijgen alzoo de vergelijking

$$\frac{x\sqrt{\{(b+x Sin.a)^2 - (a-x)^2 Sin^2.a\}}}{b + x\ Sin.\ a} + \frac{(a-x)\sqrt{(b^2 - x^2 Sin^2.a)}}{b + x\ Sin.\ a} = b$$

ſchrijft men deze onder den vorm

$$x\sqrt{\{(b+x\ Sin.a)^2 - (a-x)^2\ Sin^2.a\}} = b\ (b+x\ Sin.a) - \ldots$$
$$(a-x)\sqrt{(b^2 - x^2\ Sin^2.a)}$$

dan verkrijgt men, door twee malen te quadrateren,

$$4b^2\ (a-x)^2\ (b+x Sin\ a)^2\ (b^2 - x^2 Sin^2.a) = (b^2 - x^2)^2\ (b+x Sin.a)^4$$
$$+ 2b^2\ (a-x)^2\ (b^2 - x^2)\ (b+x\ Sin.a)^2 + (a-x)^4 b^4 \quad . \quad . \quad A)$$

welke vergelijking, al de termen ontwikkeld zijnde, tot den achtſten graad zal opklimmen.

Daar echter $(b^2 - x^2\ Sin^2.\ a) = b^2 - x^2\ (1 - Cos^2.\ a)$ $= b^2 - x^2 + x^2\ Cos^2.\ a$ is, zoo verkrijgt men door van beide leden der vergelijking (A) af te trekken

$$4\ b^2\ (a - x)^2\ (b^2 - x^2)\ (b + x\ Sin.\ a)^2$$

de volgende nieuwe vergelijking,

$$4b^2\ (a-x)^2\ (b+x Sin.\ a)^2\ x^2.\ Cos^2.\ a = (b^2 - x^2)^2\ (b+x\ Sin.\ a)^4 \ldots$$
$$- 2\ b^2\ (a-x)^2\ (b^2 - x^2)\ (b+x\ Sin.a)^2 + (a-x)^4 b^4$$

in welke nu beide leden volmaakte ſtelkundige vierkanten zijn, en waaruit dus, door het trekken der vierkantswortels verkre-gen wordt

$$2b(a-x)(b+x Sin.a)x Cos.a = \pm\{(b^2 - x^2)(b+x Sin.a) - b^2(a-x)^2\}$$

Hierbij moet nu wel opgemerkt worden, dat offchoon de laat-ſte

ste vergelijking slechts van den vierden graad is, in dezelve ondertusschen, uit hoofde van het dubbelde teeken, acht waarden voor x begrepen zijn; er is echter geen twijfel aan of het grootste gedeelte dezer wortels, welke meestal door het verdrijven der worteltеekens zijn voortgebragt, zullen of onbestaanbaar zijn, of niet regtstreeks tot ons Voorstel behooren. Voor het geval van $a = 90°$ ten minste, vervallen er reeds vier, want dan wordt $Sin.\ a = 1$ en $Cos.\ a = 0$, en de vergelijking gaat dus over in

$$0 = \pm \left\{ (b^2 - x^2)\,(b + x)^2 - b^2\,(a - x)^2 \right\}$$

en er ontstaat alzoo, voor beide de teekens, de zelfde vergelijking, namelijk

$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2b^2\,(a + b)\,x + b^2\,(a^2 - b^2) = 0$,

welke vergelijking dezelfde is welke de Heer DE GELDER op de voorheen aangehaalde plaats gevonden heeft. (*)

Deze laatste vergelijking laat zich; ingevolge de leerwijze, door den Heer DE GELDER, in zijne voortreffelijke *Wiskundige lessen tweede Cursus* §. 953 *enz.* voorgedragen, zonder veel moeite in twee vergelijkingen van den tweeden graad ontleden, zoodat men alsdan de vier waarden van x door de oplossing van deze twee vierkantsvergelijkingen verkrijgt.

3°. AANMERKING. Het is te vermoeden, dat onze algemeene vergelijking, waarin a niet gelijk 90° is, door dezelfde leerwijze, in het product van drieledige factoren zal kunnen worden ontbonden, doch het is ook zeker, dat indien dit al mogelijk is, hetzelve vele beproevingen en eenen langwijligen arbeid zal kosten.

Wij

(*) De Heer DE GELDER heeft, bij de oplossing van dit en andere Voorstellen, alleen het oogmerk gehad, om aan te toonen, hoedanig men, met behulp van de bekende eigenschappen eener figuur, en de voorwaarde der vraag, tot eene eindvergelijking komen kan, zonder daardoor de eenvoudigste oplossingen te willen geven, zoo als uit de aanmerking §. 126 der gemelde Analysis genoegzaam te zien is. Voorts blijkt ook uit de noot (12) bladz. 40, dat zijn Ed. dit Voorstel bij eene andere gelegenheid gebruiken zal, om een gewigtig punt der Meerkundige Analysis in overweging te nemen, hetgeen vermoedelijk ten deele kan bestaan, in het vergelijken van de resultaten, welke men door de verschillende oplossingen verkrijgt.

Wij zullen alzoo eenen anderen weg inslaan, en trachten eerst de loodlijn BD te bepalen, en daaruit de opstaande zijden te berekenen.

www.libtool.com.cn

Stellen wij dan BD $=$ y, dan is AB $+$ BC $=$ $a - y$ en bijgevolg $AB^2 + 2\,AB \times BC + BC^2 = a^2 - 2ay + y^2$, maar $2\,\Delta\,ABC = AC \times BD = AB \times BC$. $Sin.\ a$ zijnde, zoo is $by = AB \times BC \times Sin.\ a$, en $2\,AB \times BC = \frac{2by}{Sin.\ a}$ zoodat $AB^2 + BC^2 = y^2 - 2\left(a + \frac{b}{Sin.\ a}\right)y + a^2$ is, trekt men hiervan af $2\,AB \times BC \times Cos.\ a = \frac{2by\ Cos.\ a}{Sin.\ a}$ zoo verkrijgt men, omdat

$$AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \times Cos.\ a = AC^2$$

is, de vergelijking

$$y^2 - 2\left\{a + \frac{b\,(1 + Cos\ a)}{Sin.\ a}\right\}y + a^2 = b^2$$

of omdat $\frac{1 + Cos.\ a}{Sin.\ a} = \frac{2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\,a}{2\,Cos.\,\frac{1}{2}\,a\ .\ Sin.\,\frac{1}{2}\,a} = Cot.\,\frac{1}{2}\,a$ is

$$y^2 - 2\,(a + b\ Cot.\,\tfrac{1}{2}\,a)\,y = b^2 - a^2$$

en wanneer men deze vierkants vergelijking oplost, verkrijgt men

$$y = a + b\ Cot.\,\tfrac{1}{2}\,a \pm \sqrt{\left\{2ab\ Cot.\,\tfrac{1}{2}\,a + b^2\ Cosec^2.\,\tfrac{1}{2}\,a\right\}}$$

van welke ondertusschen alleen

$$y = a + b\ Cot.\,\tfrac{1}{2}\,a - \sqrt{\left\{2ab\ Cot.\,\tfrac{1}{2}\,a + b^2\ Cosec^2.\,\tfrac{1}{2}\,a\right\}}$$

dienen kan, omdat anders y grooter dan a, zou worden, hetgeen eene oneigenlijke oplossing zou geven.

Om de zijden AB en BC te bepalen heeft men nu uit het bovenstaande $(AB + BC)^2 = (a - y)^2$ en $4\,AB \times BC = \frac{4by}{Sin.\ a}$, en van deze twee uitdrukkingen is het verschil, $(AB - BC)^2 = (a - y)^2 - \frac{4by}{Sin.\ a}$. Wij hebben alzoo $AB + BC = (a - y)$ en $AB - BC = \pm\sqrt{\left\{(a-y)^2 - \frac{4by}{Sin.\ a}\right\}}$, en hierdoor vinden wij

$$AB = \tfrac{1}{2}(a - y) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{(a-y)^2 - \frac{4by}{Sin\ \alpha}\right\}}$$

$$BC = \tfrac{1}{2}(a - y) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{(a-y)^2 - \frac{4by}{Sin\ \alpha}\right\}}$$

www.libtool.com.cn

waarin nu y de boven opgegevene waarde heeft.

Hierdoor wordt dus, hetgeen in den aanvang van deze aanmerking, wegens de mogelijkheid om de algemeene vierde magtsvergelijking in factoren van den tweeden graad te ontbinden, gezegd is, volkomen bevestigd.

Wanneer men $\alpha = 90°$ ſtelt, dan vindt men voor den regthoekigen driehoek

$$BD = y = a + b - \sqrt{2b(a+b)}$$

$$AB = -\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{2b(a+b)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{-b(2a+b) + 2b\sqrt{2b(a+b)}\right\}}$$

$$BC = -\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{2b(a+b)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{-b(2a+b) + 2b\sqrt{2b(a+b)}\right\}}$$

CL. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Van eenen ongelijkzijdigen driehoek is bekend, de hoek ABC, de ſom der zijden AB + BC om dezen hoek, en de ſom AC + BD van de derde zijde met de loodlijn, welke uit het hoekpunt van den bekenden hoek op de derde zijde valt. Men vraagt dezen driehoek te bepalen?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Zij AB + BC $= a$, AC + BD $= b$ en $\angle$ ABC $= \alpha$; *Fig.* 101, ſtellen wij dan wederom $\angle$ ACB $-$ $\angle$ BAC $= 2\phi$, dan is, even als in het voorgaande Voorſtel,

$$\angle BAC = 90° - (\tfrac{1}{2}\alpha + \phi)$$

$$\angle ACB = 90° - (\tfrac{1}{2}\alpha - \phi).$$

Laat nu AB verlengd worden tot dat BE $=$ BC zij, dan is AE $=$ AB + BC $= a$, $\angle$ BEC $=$ $\angle$ BCE $= \tfrac{1}{2}\angle$ ABC $= \tfrac{1}{2}\alpha$, en dus $\angle$ ACE $=$ $\angle$ ACB + $\angle$ BCE $= 90° + \phi$. Hierdoor vinden wij $AC = AE \times \frac{Sin.\ \angle AEC}{Sin.\ \angle ACE} = a \times \frac{Sin.\ \frac{1}{2}\alpha}{Cos.\ \phi}$, en bijgevolg $BD = b - AC = b - \frac{a\ Sin.\ \frac{1}{2}\alpha}{Cos.\ \phi}$. Verder hebben wij

in

In de regthoekige driehoeken ABD en CBD, AB = BD : *Sin.* A en BC = BD : *Sin.* C, en fubftituerende hierin de gevondene waarden, verkrijgen wij

$$AB = (b - \frac{a\ Sin.\ \frac{1}{2}\ a}{Cos.\ \phi}) : Cos.\ (\tfrac{1}{2}\ a + \phi)$$

$$BC = (b - \frac{a\ Sin.\ \frac{1}{2}\ a}{Cos.\ \phi}) : Cos.\ (\tfrac{1}{2}\ a - \phi)$$

en daar de fom van AB en BC gelijk *a* gegeven is, verkrijgen wij de vergelijking

$$(b - \frac{a\ Sin.\ \frac{1}{2}\ a}{Cos.\ \phi})\ (\frac{1}{Cos.\ (\frac{1}{2}\ a + \phi)} + \frac{1}{Cos.\ (\frac{1}{2}\ a - \phi)}) = a$$

of wat het zelfde is

$$(b\ Cos.\ \phi - a\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\ a) \times \frac{Cos.\ (\frac{1}{2}\ a + \phi) + Cos.\ (\frac{1}{2}\ a - \phi)}{Cos.\ (\frac{1}{2}\ a + \phi) \times Cos.\ (\frac{1}{2}\ a - \phi)} = a\ Cos.\ \phi$$

welke vergelijking gemakkelijk herleid wordt tot

$$(b\ Cos.\ \phi - a\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\ a) \times \frac{2\ Cos.\ \frac{1}{2}\ a\ .\ Cos.\ \phi}{Cos^2.\ \phi - Sin^2.\ \frac{1}{2}\ a} = a\ Cos.\ \phi$$

deze vergelijking aan beide zijden door *Cos.* ϕ gedeeld en met $Cos^2.\ \phi - Sin^2.\ \frac{1}{2}\ a$ vermenigvuldigd, wordt

$$2\ Cos\ \tfrac{1}{2}\ a\ (b\ Cos.\ \phi - a\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\ a) = a\ (Cos^2.\ \phi - Sin^2.\ \tfrac{1}{2}\ a)$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$Cos^2.\ \phi - \frac{2\ b}{a}\ Cos.\ \tfrac{1}{2}\ a\ .\ Cos.\ \phi = Sin^2.\ \tfrac{1}{2}\ a - Sin.\ a$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$Cos\ \phi = \frac{b}{a}\ Cos.\ \tfrac{1}{2}\ a \pm \sqrt{\left\{\frac{b^2}{a^2}\ Cos^2.\ \tfrac{1}{2}\ a + Sin^2.\ \tfrac{1}{2}\ a - Sin.\ a\right\}}$$

en dit wordt gemakkelijk herleid tot

$$Cos.\ \phi = \frac{b}{a}\ Cos.\ \tfrac{1}{2}\ a \pm \sqrt{\left\{\frac{b^2 - a^2}{a^2}\ Cos^2.\ \tfrac{1}{2}\ a + 2\ Sin^2.\ (45^\circ - \tfrac{1}{2}\ a)\right\}}$$

1°. Aanmerking. Wanneer de driehoek regthoekig is in B, dan is $a = 90^\circ$, en dan wordt $Cos^2.\ \frac{1}{2}\ a = Cos^2.\ 45^\circ = \frac{1}{2}$ en *Sin.* $(45^\circ - \frac{1}{2}\ a) = 0$, zoodat wij dan verkrijgen

$$Cos.\ \phi = \frac{b}{2\ a}\sqrt{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{b^2 - a^2}{2\ a^2}\right\}} = \frac{b\sqrt{2} \pm \sqrt{2\ (b^2 - a^2)}}{2\ a}$$

2°. Aanmerking. Wil men eene der zijden, bij voorbeeld, AB onmiddellijk zoeken, dan verkrijgt men eene vierde magtsvergelijking. Om dit aan te toonen ftellen wij AB = *x*, en

BD

BD $=y$, dan is BC $=a-x$ en AC $=b-y$, en dus heeft men, omdat $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \times Cos.\,\alpha$ is, de vergelijking

www.libtool.com.cn

$$x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\,Cos.\,\alpha=(b-y)^2 \ldots (1)$$

Verder is $AB \times BC \times Sin.\,\alpha = AC \times BD$ en dit geeft ons voor tweede vergelijking

$$x\,(a-x)\,Sin.\,\alpha = y\,(b-y) \ldots\ldots (2)$$

de ſom van (1) en (2) nemende, verkrijgen wij

$$x^2+(a-x)^2-x(a-x)(2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)=b(b-y)$$

hieruit is

$$b-y=\frac{x^2+(a-x)^2-x(a-x)(2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)}{b}$$

en brengende deze waarde van $b-y$ over in de eerſte vergelijking, dan verkrijgen wij

$$\left\{x^2+(a-x)^2-x(a-x)(2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)\right\}^2=..$$
$$b^2(x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\,Cos.\,\alpha)$$

wanneer wij nu alles ontwikkelen, en naar de afdalende magten van x rangſchikken, dan gaat deze vergelijking over in

$$\left\{x^2(2+2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)-ax(2+2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)+a^2\right\}^2=$$
$$2b^2\left\{x^2(1+Cos.\,\alpha)-ax(1+Cos.\,\alpha)\right\}+a^2b^2$$

Wilden wij nu het eerſte lid tot de tweede magt verheffen en alles naar de magten van x ordenen, dan is het blijkbaar dat wij eene zeer zamengeſtelde vergelijking van den vierden graad zouden verkrijgen. Wij kunnen dezelve echter ontwijken, door onze vergelijking te ſchrijven onder den vorm

$$\left\{(x^2-ax)(2+2Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)+a^2\right\}^2=b^2\left\{2(x^2-ax)(1+Cos.\,\alpha)+a^2\right\}$$

of, wat het zelfde is, onder den vorm

$$\left\{(x^2-ax)+\frac{a^2}{2+2Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha}\right\}^2=\frac{b^2\left\{2(1+Cos.\,\alpha)(x^2-ax)+a^2\right\}}{(2+2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)^2}$$

en ſtellen wij hier in

$$x^2-ax=z\,;\ \frac{a^2}{2+2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha}=p \text{ en } \frac{2b^2(1+Cos.\,\alpha)}{(2+2\,Cos.\,\alpha-Sin.\,\alpha)^2}=q$$

dan gaat dezelve over in

$$(z+p)^2=qz+\frac{b^2}{a^2}p^2$$

of

of $x^2 + (2p - q)\,x = -p^2 + \frac{b^2}{a^2}p^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}p^2$

www.libtool.com.cn

waaruit gevonden wordt

$$x = x^2 - ax = \tfrac{1}{2}(q - 2p) \pm V\left\{\tfrac{1}{4}(2p - q)^2 + \frac{b^2 - a^2}{a^2}p^2\right\}$$

en uit deze nieuwe vierkants vergelijking x oplosfende

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm V\left\{\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}(q - 2p) \pm V\left(\tfrac{1}{4}(2p - q)^2 + \frac{b^2 - a^2}{a^2}p^2\right)\right\}$$

waarin p en q de waarden hebben welke boven zijn opgegeven.

3°. AANMERKING. Is de driehoek regthoekig in B en dus $\alpha = 90°$, dan is $2 + 2\,Cos.\,\alpha - Sin.\,\alpha = 1$ en $1 + Cos.\,\alpha = 1$ dus $p = a^2$ en $q = 2b^2$. De vierde magts-vergelijking wordt dan

$$(x^2 - ax + a^2)^2 = 2b^2(x^2 - ax) + a^2b^2$$

of, ontwikkeld en herleid zijnde

$$x^4 - 2ax^3 + (3a^2 - 2b^2)x^2 - (2a^3 - 2ab^2)x + a^2(a - b^2) = 0$$

hetgeen volmaakt dezelfde vergelijking is, welke mijn vriend, de Heer Profesfor DE GELDER, voor dit geval, bij de oplosfing van het VII *Vraagfluk* van zijne *Meetkundige Analyfis* I *Deel* I *Stukje* gevonden heeft, en het blijkt nu dat de wortels van deze vergelijking zijn

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm V\left\{b^2 - \tfrac{1}{4}a^2 \pm b\,V(b^2 - a^2)\right\}$$

van deze vier wortels zijn er echter maar twee regtstreeks op het Voorstel toepasselijk, namelijk

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm V\left\{b^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - b\,V(b^2 - a^2)\right\}$$

en deze drukken alsdan de waarden van AB en BC uit. De twee andere wortels namelijk

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm V\left\{b^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + b\,V(b - a^2)\right\}$$

behooren tot een Voorstel dat met het opgegevene ten naauwste verbonden is, dat is, wanneer AB — BC $= a$ en AC — BD $= b$ moest zijn, waarvan men zich gemakkelijk kan overtuigen.

Neemt men in het algemeen aan, dat AB — BC $= a$ en AC — BD $= b$ moet zijn, zonder dat $\alpha = 90°$ is, dan zal men wederom AB $= x$ en BD $= y$ ftellende, en op dezelfde wijze werkende, eene vergelijking vinden die van de vierde-magtsvergelijking, welke wij boven gevonden hebben, nergens in ver-

verſchilt, als alleen hierin, dat *Cos.* α overal het negatieve teeken voor zich heeft, en welke dus door *Cos.* ϕ van negatief poſitief te maken, geheel in de gevondene vergelijking overgaat. Het is hieruit zigtbaar dat beide Voorſtellen tot eene zelfde vergelijking voeren, en dus deze vergelijking ook de oplosſing van beide vraagſtukken in zich moet bevatten. Om echter de reden duidelijk uiteen te zetten, waarom hier bij de tweede oplosſing, *Cos.* ϕ het negatieve teeken verkrijgt, en alzoo niet volſtrekt dezelfde eindvergelijking geeft, laat het beſtek dezer oplosſing niet toe, om zulks wel te verſtaan, dient men met de leer der poſitieve en negatieve toeſtanden der figuren geheel bekend te zijn, en hierover kan men niet beter nalezen, dan de verhandeling van den Heer DE GELDER, getiteld: *Proeven over den waren aard van den poſitieven en negatieven toeſtand der grootheden in de Stelkunst, en in de toepaſsing van dezelve op de Meetkunst.*

CLI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een cirkelſector ABD Fig. 102 *gegeven zijnde, een punt E in den boog van dien ſector te vinden; zoodanig, dat vereenigende dit punt E met het uiteinde van een der ſtralen, deze koorde gelijk zij aan de lijn EC, welke uit dit punt E evenwijdig met den ſtraal AB getrokken wordt, tot dat zij den anderen ſtraal BD ontmoet in C?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Stel dat E het gevraagde punt zij, en laat de ſtraal BE getrokken worden, dan moet EC = AC en evenwijdig AB zijn. Stel dan AE = EC = x, AB = BE = BD = r; $\angle$ BAE = $\angle$ BEA = p, en $\angle$ ABE = $\angle$ BEC = q; dan is $q = 180^\circ - 2p$.

Nu is in den gelijkbeenigen driehoek ABE, $\frac{1}{2}$ AE = AB $\times$ *Cos.* p, dus *Cos.* $p = \frac{AE}{2 \cdot AB} = \frac{x}{2r}$ en dus *Sin.* $p = \ldots$

$\sqrt{(1 - Cos^2 p)} = \frac{1}{2r}\sqrt{(4r^2 - x^2)}$, en hieruit volgt

Sin.

$$Sin.\ q = Sin.\ 2p = 2\ Sin.\ p\ .\ Cos.\ p = \frac{x\sqrt{(4r^2 - x^2)}}{2r^2}$$

www.libtool.com.cn

$$Cos.\ q = -\ Cos.\ 2p = Sin^2.\ 2p - Cos^2.\ 2p = \frac{2r^2 - x^2}{2r^2}$$

Stellende nu den bekenden hoek ABD $= a$, dan is, uit hoofde dat EC en AB evenwijdig zijn, $\angle$ BCE $= 180° - a$; wanneer wij dus $\angle$ EBC $= m$ ſtellen, dan is BE : EC $=$ *Sin.* $\angle$ BCE : *Sin.* $\angle$ EBC, dat is $r : x = Sin.\ a : Sin.\ m$, waardoor $Sin.\ m = \frac{x}{r}\ Sin.\ a$.

Nu is $m = a - q$ en bijgevolg, door de bekende goniometriſche grondformule.

$$Sin.\ m = Sin.\ a\ .\ Cos.\ q - Cos.\ a\ .\ Sin.\ q$$

en ſubſtituerende hierin de gevondene waarden

$$\frac{x}{r}\ Sin.\ a = \frac{2r^2 - x^2}{2r^2}\ .\ Sin\ a - \frac{x\sqrt{(4r^2 - x^2)}}{2r^2}\ .\ Cos.\ a$$

of met $2r^2$ vermenigvuldigende; en door *Cos.* a deelende

$$2rx\ Tang\ a = (2r^2 - x^2)\ .\ Tang.\ a - x\sqrt{(4r^2 - x^2)}$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$x\sqrt{(4r^2 - x^2)} = (2r^2 - 2rx - x^2)\ Tang\ a$$

waarvan het quadraat is

$$4r^2x^2 - x^4 = (4r^4 - 8r^3x + 4rx^3 + x^4)\ Tang^2.\ a$$

dit nu volgens de magten van x rangſchikkende en alles door $Sec^2.\ a$ deelende verkrijgen wij de vierdemagts vergelijking

$$x^4 + 4rx^3\ Sin^2.\ a - 4r^2x^2\ Cos^2.\ a - 8r^3x\ Sin^2.\ a + 4r^4\ Sin^2.\ a = 0$$

door welke vergelijking x bepaald en dus het Voorſtel opgelost is.

1°. AANMERKING. Daar onze eindvergelijking van den vierden graad is, kunnen wij verwachten, dat het Voorſtel in het algemeen vier oplosſingen zal toelaten; dit heeft ook wezenlijk plaats, indien wij ſlechts in aanmerking nemen, dat het Voorſtel algemeener dus kon worden opgegeven.

In den omtrek van eenen gegevenen cirkel een punt E te vinden Fig. 103, *zoodanig dat trekkende uit dit punt een koorde AE tot eenig gegeven punt A in den omtrek, en nog eene lijn EC evenwijdig met den ſtraal AB van het gegeven punt A, het ſtuk EC van deze laatſte lijn, begrepen tusſchen het punt E en eene gegevene*

lijn

lijn PQ, door het middelpunt B gaande, gelijk aan de koorde AE zij.

Het Voorſtel in deze meer algemeene beteekenis opvattende, toont *Fig.* 103. ten duidelijkſte aan, dat er alsdan vier verſchillende punten E, E′, E″ en E‴ kunnen beſtaan, welke aan de vraag voldoen. Deze vier antwoorden zullen ondertusſchen niet altijd mogelijk zijn, want de hoek α kan zoodanig gegeven zijn dat de vergelijking twee onbeſtaanbare wortels heeft, en dan zijn er ſlechts twee punten in den omtrek, welke aan de vraag voldoen.

2°. AANMERKING. Deze vergelijking wordt geſchikter voor de berekening, indien wij dezelve in *Cos.* p uitdrukken, want daar wij gevonden hebben $Cos.\ p = \frac{x}{2r}$, zoo is $x = 2r \times Cos.\ p$, en ſubſtituerende dit in onze gevondene vergelijking, dan wordt dezelve $Cos^4.p + 2\,Cos^3.p\ Sin^2.\alpha - Cos^2p.Cos^2.\alpha - Cos.p\ Sin^2.\alpha + \frac{1}{4}\,Sin^2\alpha = 0$ welke geheel onafhankelijk van r is.

VOORBEELD. Laat $\alpha = 30°$ zijn, dan is $Sin^2.\alpha = \frac{1}{4}$ en $Cos^2.\alpha = \frac{3}{4}$, en hierdoor wordt de vergelijking van de tweede aanmerking

$$Cos^4.p + \tfrac{1}{2}\,Cos^3.p - \tfrac{3}{4}\,Cos^2.p - \tfrac{1}{4}\,Cos.p + \tfrac{1}{16} = 0$$

of wanneer wij $Cos\ p = \frac{1}{2}\,y$ ſtellen

$$y^4 + y^3 - 3y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Deze vergelijking heeft eenen wortel gelijk -1, en de drie andere zijn dus begrepen in de vergelijkieg

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

daar het nu hier op geen juiste benadering aankomt, zullen wij ons met twee decimalen vergenoegen, en dan vinden wij voor de drie wortels 0,34; 1,53 en $-1,87$, en daar $x = 2r\ Cos.p = ry$ is, vinden wij $x = 0,34\ r$, $x = 1,53\ r$, $x = -1,87\ r$ en $x = -r$. *Fig.* 103. is voor dit geval geteekend, de eerſte waarde van x geeft het punt E, de tweede het punt E′, de derde het punt E″ en de vierde het punt E‴.

ANDER VOORBEELD. Indien $\alpha = 90°$ is, dan is $Sin^2.\alpha = 1$ en $Cos^2.\alpha = 0$ de vergelijking wordt alsdan

$$x^4 + 4rx^3 - 8r^2x + 4r^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

nu is het voorſte lid juist het vierkant van $x^2 + 2rx - 2r^2$ en wij hebben dus in dit bijzonder geval

$$x^2 + 2rx - 2r^2 = 0$$

uit welke vierkants vergelijking gevonden wordt

$$x = -r \pm \sqrt{3r^2} = r(-1 \pm \sqrt{3}).$$

De tweede van deze wortels kan niet tot ons oogmerk dienen, omdat dezelve grooter dan de middellijn zijnde, geene koorde des cirkels kan zijn, er zijn hier echter twee oplossingen, omdat de wortel $x = r(-1 + \sqrt{3})$ in de vergelijking (A) tweemaal begrepen is. Offchoon nu deze beide wortels gelijk zijn, toonen zij evenwel verschillende puntén van den omtrek aan, namelijk de punten E en E′ van *Fig.* 104.

3°. AANMERKING. Wij hebben in het eerste voorbeeld gezien, dat twee der waarden van x, namelijk de koorden AE′ en AE″ negatief worden, en de figuur toont ons aan, dat deze negatieve waarden van x tot waarden van EC behooren, welke juist aan de andere zijde van de lijn PQ liggen, gelijk wij het bij de oplossing ondersteld hadden. Bij eene nadere overweging vinden wij hierin de volmaakste overeenkomst met hetgeen in de goniometrie over den positieven en negatieven toestand der koorden geleerd wordt. Het volgende Voorstel zal deze overeenkomst ten duidelijkste aantoonen.

CLII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer uit het uiteinde A (Fig. 105.) der middellijn van eenen cirkel een onbepaald aantal koorden AE getrokken wordt, en men, uit de uiteinden E van deze koorden, lijnen trekt evenwijdig met de middellijn, welke door het punt A gaat, en welke lijnen EC alle gelijk zijn aan de overeenkomstige koorden AE, dan zal het punt C gelegen zijn in eene kromme lijn, waarvan men den loop en de vergelijking vraagt te bepalen?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, R. LOBATTO en U. HUGUENIN.

Laat AM de koordelijn en AL derzelver verlengde verbeelden; wanneer wij dan, van den stand Am beginnende, deze lijn om het punt A doen rondbewegen, dan zal de koorde AE in elken stand als positief of negatief moeten beschouwd worden, naarmate zij op de lijn AM of wel op derzelver verlengde AL valt.

Dit vooraf aangemerkt hebbende, gaan wij tot de conſtructie zelve over.

In den ſtand A*m* is de koorde gelijk o, en dus ook de lijn EC gelijk o, waaruit volgt, dat het punt A zelf een punt van de kromme lijn is. Laat ons nu de lijn AM, langzaam rondhaarwegen tot dat zij van den ſtand A*m* in den ſtand AM′ komt, dan heeft het punt E het eerſte quadrant doorloopen, de koorde AE is gedurende dien tijd altijd poſitief geweest, en de lijn EC = AE moet dus ook gedurende de beweging van het punt E door dit eerſte quadrant, altijd naar den zelfden kant, dat is altijd naar boven genomen worden, en dit verſchaft ons den tak ACC′ van de kromme lijn.

Beweegt nu de lijn AM verder voort, zoodat zij van den ſtand AM′ in den ſtand AF gekomen zijnde, het punt E het tweede quadrant doorloopen heeft, dan blijft de koorde altijd nog poſitief en de voortdurende conſtructie geeft ons dan tak C′G, waarbij nu FG = AF en dus AG = 2 AF is.

Terwijl de bewegende lijn van den ſtand AF in den ſtand AM″ komt, en dus het punt E het derde quadrant doorloopt, blijft de koorde AE nog poſitief; EC moet dus nog altijd naar boven genomen worden, en wij verkrijgen den tak GC″, welke klaarblijkelijk met den tak GC′ gelijk en gelijkvormig is.

Het punt E het vierde quadrant doorloopen hebbende, is de bewegende lijn van den ſtand AM″ wederom in den ſtand *l*A*m* gekomen, doch met dit onderſcheid, dat nu A*m* op A*l* en A*l* op A*m* is komen te liggen. De koorde AE in dit vierde quadrant altijd nog poſitief gebleven zijnde, is de tak C″A, welke gedurende dien tijd gevormd is, volkomen gelijk en gelijkvormig aan den tak AC′ en zij gaat nu andermaal door A.

Beweegt de lijn AM nu nog verder voort, en doorloopt het punt E alzoo het vijfde quadrant, dan is het niet meer de lijn AM maar het verlengde AL van dezelve, dat den cirkel doorſnijdt. De koorde AE″′ is dus hier negatief, en de lijn E″′C″′ welke gelijk aan deze koorde moet zijn, moet dus ook negatief en dus naar beneden in plaats van naar boven genomen worden, en dit in aanmerking nemende, zullen wij ligtelijk inzien, dat terwijl het punt E dit vijfde quadrant doorloopt het gedeelte AC″′I van de kromme zal geboren worden.

Door

Door het zesde, zevende en achtste quadrant gaande blijft nu de koorde voortdurend negatief en het punt C doorloopt het gedeelte IAI'A, en wilde men dan de beweging nog verder voortzetten, dan zou, omdat in het negende en de drie volgende quadranten de koorde wederom positief wordt, het punt C andermaal dezelfde kromme doorloopen.

Het blijkt uit deze constructie zoo duidelijk, dat de lijnen C'I en C''I' raaklijnen in C', I, C'' en I' aan de kromme moeten zijn dat het overtollig zou wezen hier op langer te blijven stil staan Even duidelijk is het ook, dat in eene raaklijn van den tak I'AI moet zijn, en dat de raaklijn aan het punt G loodregt op AG moet wezen.

Het is ook hieruit klaar, dat de kromme in de punten C', C'', I en I'' het verste van de as AG verwijderd is; dat de afstanden van deze punten tot die as gelijk den straal AB zijn, dat deze punten van de lijn E''E', welke loodregt in B door die as gaat, op eenen afstand gelegen zijn, die gelijk is aan AE', dat is gelijk AB × $\sqrt{2}$, en dat in het algemeen elke lijn CEc, evenwijdig aan de as-zijnde, door den omtrek van den gegevenen cirkel in E wordt midden door gedeeld.

De loop van de kromme lijn alzoo genoegzaam bepaald hebbende, gaan wij over tot het zoeken van derzelver vergelijking.

Stellen wij te dien einde den straal AB = r, AN = x, NC = y, AE = EC = v en AD = z, dan is $DE^2 = AD \times DF$ of $v^2 = z(2r - z)$ en EC = DN = AN − AD, of $y = x - z$. Verder is $AE^2 = AD^2 + DE^2$, of $r^2 = z^2 + v^2$, en stellende hierin de waarde van y, dan komt $(x - z)^2 = r^2 + y^2$, waaruit $z = \frac{x^2 - y^2}{2x}$, brengende nu deze waarde van z over in $y^2 = z(2r - z)$ dan komt er

$$y^2 = \frac{x^2 - y^2}{2x} \times \left\{ 2r - \frac{x^2 - y^2}{2x} \right\}$$

of alles ontwikkelende, en naar de magten van y rangschikkende

$$y^4 + 2(x^2 + 2rx)y^2 = 4rx^3 - x^4 \quad . \quad . \quad (A)$$

en deze vergelijking ten opzigte van y oplossende,

$$y = \pm \sqrt{\left\{ -x(x + 2r) \pm 2x\sqrt{r(2x + r)} \right\}} \quad . \quad (B)$$

Deze vergelijking geeft voor $x = 0$, ook $y = 0$, en voor

$y = o$, geeft zij $x = o$ of $x = 4r$. Voor eene positieve waarde van x toont zij twee, doch voor eene negatieve waarde van x vier antwoorden voor y aan, hetgeen met de constructie volkomen overeenstemt.

www.hbtool.com.cn

Verder toont zij aan, dat x niet grooter negatief dan $\frac{1}{2} r$ kan genomen worden, want anders zou $\sqrt{r(2x + r)}$ en dus ook y onbestaanbaar worden. De punten Q en Q', waarbij deze grootste negatieve waarde van x plaats heeft, zullen alzoo gevonden worden door uit het punt R, waarin de kromme lijn den cirkel snijdt, eene lijn RQ evenwijdig met AB te trekken; want bij dit punt R is $RS = AS = AB = r$ en dus ook $SQ = r$, waaruit volgt, dat ASK een gelijkzijdige driehoek, en dus $TQ = TS = \frac{1}{2} r$ is.

De polaire vergelijking van onze kromme wordt mede gemakkelijk gevonden, want stellende $AC = z$ en $\angle NAC = \phi$ dan is, $y = z\ Sin.\ \phi$ en $x = z\ Cos.\ \phi$. Substituerende dit in de vergelijking (A) dan wordt dezelve

$$z^4 Sin^4.\phi + 2(z^2 Cos^2.\phi + 2rz\ Cos.\phi) \times z^2 . Sin^2.\phi = \ldots$$
$$4rz^3 Cos^3.\phi - z^4 Cos^4.\phi.$$

of alles door z^3 deelende,

$$z\ Sin^4.\phi + 2(z\ Cos^2.\phi + 2r\ Cos.\phi)\ Sin^2.\phi = 4r\ Cos^3.\phi - z\ Cos^4.\phi$$

en bijgevolg,

$$z(Sin^4.\phi + 2Cos^2.\phi Sin^2.\phi + Cos^4.\phi) = 4r(Cos^3.\phi - Cos.\phi.Sin^2\phi)$$

nu is $Sin^4.\phi + 2\ Cos^2.\phi.\ Sin^2.\phi + Cos^4.\phi = (Sin^2.\phi + Cos^2.\phi)^2 = 1$ en $Cos^3.\phi - Cos.\phi\ Sin^2.\phi = Cos\ \phi(Cos^2.\phi - Sin^2.\phi) = Cos\ \phi.Cos.2\phi$ en onze polaire vergelijking wordt alzoo

$$z = 4r\ .\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ 2\ \phi.\ \ .\ \ (C).$$

Den loop en de vergelijking van de kromme alzoo bepaald hebbende, houden wij ons voorstel voor opgelost. Het is ons oogmerk geenszins geweest, om uit deze gevondene vergelijking de verdere eigenschappen van onze kromme lijn na te speuren, dit toch zou het bestek van deze oplossing verre te buiten gaan. Alleen merken wij nog op, dat voor zulk een onderzoek de vergelijking (C) verre boven de vergelijking (B) zou te verkiezen zijn, deze leert ons, bij voorbeeld, terstond dat $z = o$ wordt voor $\phi = 90°$ en voor $\phi = 45°$ en het is uit deze laatste waarden terstond in te zien, dat de lijnen M'L' en M''L'' raaklijnen zijn

van

van de kromme lijn in het punt A, hetgeen uit de vergelijking (B) niet dan met veel moeite kan afgeleid worden.

AANMERKING. De kromme lijn eens geconstrueerd zijnde, wordt het voorgaande Voorstel, wanneer de hoek α gegeven is, van zelf opgelost; want de doorsnijdings-punten van de lijn, welke door B gaande met AB eenen hoek gelijk α maakt, met onze kromme lijn, geeft dan van zelve de punten C, en door uit deze punten C, lijnen evenwijdig met AB te trekken, worden de gevraagde punten E gevonden; het blijkt verder hieruit, dat de aldaar gevondene vierde magts-vergelijking vier bestaanbare wortels zal hebben, ingeval deze lijn de kromme zoodanig snijdt, dat zij door het gedeelte AIQA of AI'Q'A gaat, dat twee van deze wortels aan elkander gelijk zullen worden, indien de hoek α zoodanig gegeven is, dat de lijn PQ van *Fig.* 103 den stand BU van *Fig.* 105 aanneemt, en dat eindelijk die vergelijking twee onbestaanbare wortels hebben zal, wanneer de hoek α grooter is dan $\angle$ ABU van *Fig.* 105, en eindelijk dat α zoodanig niet genomen kan worden, dat al de wortels van deze vierde magts-vergelijking onbestaanbaar worden.

CLIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

De vergelijking $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$, *door punten te construeren, zijnde* x *de abscisſen en* y *de ordinaten, welke onderſteld worden regthoekig op elkander te ſtaan?*

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Zij XY (*Fig.* 106) de as der abscisſen en UV die der ordinaten, elkander regthoekig in den oorsprong A doorsnijdende, en nemen wij de positieve abscisſen van A naar X en de positieve ordinaten van A naar U aan, dan moeten de negatieve abscisſen van A naar Y en de negatieve ordinaten van A naar V genomen worden.

Stellen wij, in de vergelijking $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$, de abscis $x = 0$, dan komt er $by^3 = 0$, hetwelk aantoont, dat er in het punt A drie ordinaten $y = 0$ worden, en dat er dus drie takken door dit punt A moeten gaan.

Daar in de vergelijking niet dan de evene magten van x voor-

kunnen, en dezelve alzoo geene verandering ondergaat, of wij y positief dan wel negatief stellen, zoo volgt hieruit, dat de kromme lijn, voor de positieve en negatieve abscissen, dezelfde gedaante zal hebben, dat is, de vorm van de kromme lijn zal ter regter en ter linker zijde van UV volmaakt hetzelfde zijn. Dit wordt nog nader bevestigd door x uit onze vergelijking af te zonderen, want dit geeft

$$x = \pm \sqrt{\left\{ \tfrac{1}{2} ay \pm \tfrac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - 4by)} \right\}} \quad \ldots \text{(A)}$$

en hieruit blijkt dat, voor eene zelfde waarde van y, x twee gelijke doch tegengestelde waarden heeft.

Verder blijkt uit deze waarde van x, dat voor elke positieve waarde van y, x vier waarden zal verkrijgen, omdat alsdan $\sqrt{(a^2 - 4by)} < a$ zijnde, ook $\frac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - 4by)} < \frac{1}{2} ay$ zal zijn, en dus beide teekens onder het worteiteeken zullen kunnen gebezigd worden; onder deze voorwaarde echter, dat $4by < a^2$ en dus $y < \frac{a^2}{4b}$ moet zijn, omdat anders $\sqrt{(a^2 - 4by)}$ onbestaanbaar zou worden. Dit alles toont dan aan, dat zoo lang y positief en kleiner dan $\frac{a^2}{4b}$ genomen wordt, er voor x vier waarden zullen bestaan, twee ter regter en twee andere ter linker zijde van UV, welke waarden ter wederzijden van VU even groot zullen zijn, doch dat de kromme niet hooger boven YX zal kunnen klimmen dan op eenen afstand gelijk $\frac{a^2}{4b}$.

Nemen wij nu $y = \frac{a^2}{4b}$ dan vinden wij voor de waarde van x, welke tot dit hoogste punt der kromme lijn behoort, $x = \pm \sqrt{\frac{a^3}{8b}} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a}{2b}}$. Wanneer men derhalven, op eenen afstand gelijk $\frac{a^2}{4b}$, eene lijn DE evenwijdig met XY trekt, en op dezelve $FM = FM' = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{a}{2b}}$ neemt, zullen de punten M en M' de hoogste punten van de kromme lijn zijn, terwijl elke andere lijn BC, evenwijdig aan YX en tusschen YX en DE getrokken, de kromme in vier punten a, b, a' en b' zal door-

doorsnijden, waarbij $fa = fa'$ en $fb = fb'$ zal zijn, uit dit alles volgt dan ten duidelijkste, dat DE in de punten M en M' de kromme lijn zal aanraken.

www.labook.com.cn

Neemt men y negatief aan, dan verandert de vergelijking (A) in

$$x = \pm V \left\{ -\tfrac{1}{2} ay + \tfrac{1}{2} y V (a^2 + 4by) \right\}$$

hierin kan echter het bovenste teeken onder het wortelteeken niet gebezigd worden, want dan zou, alles onder het wortelteeken negatief zijnde, x onbestaanbaar worden, wij hebben dus voor y negatief alleen

$$x = \pm V \left\{ -\tfrac{1}{2} ay + \tfrac{1}{2} y V (a^2 + 4by) \right\} \ldots\ldots (B)$$

en dit toont aan, dat er, voor eene negatieve waarde van y, altijd slechts twee waarden van x zullen mogelijk zijn. Deze waarden blijven nu ondertusschen ook altijd bestaanbaar, omdat $\frac{1}{2} y V (a^2 + 4by) > \frac{1}{2} ay$ zijnde, de grootheid onder het wortelteeken altijd positief blijft, zoodat zelf voor $y = 0$, ook $x = \pm V y (-\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} V (a^2 + 4by)) = \pm V (0 \times V 0) = 0$ wordt. Hieruit volgt dus, dat de kromme beneden XY in twee gelijke doch tegengestelde takken tot in het oneindige voortloopt, welke takken zich hoe langs hoe meer van de as UV verwijderen.

Om verder te onderzoeken hoedanig het met de kromme lijn boven XY gelegen is, brenge men de vergelijking onder den vorm

$$y^3 - \frac{ax^2}{b} \cdot y + \frac{x^4}{b} = 0.$$

Wanneer men dan dezelve, volgens de leerwijze van CARDANUS, ten opzigte van y oplost, dan vindt men

$$y = \sqrt[3]{\left\{ -\frac{x^4}{2b} + V \left(\frac{x^8}{4b^2} - \frac{a^3 x^6}{27 b^3} \right) \right\}} + \sqrt[3]{\left\{ -\frac{x^4}{2b} - V \left(\frac{x^8}{4b^2} - \frac{a^3 x^6}{27 b^3} \right) \right\}} \ldots (C)$$

Nu is het bij deze formule bekend, dat zoo lang $\frac{x^8}{4b^2} < \frac{a^3 x^6}{27 b^3}$ en bijgevolg $\frac{x^2}{4} < \frac{a^3}{27 b}$ is, (in welk geval de waarde van y eene onbestaanbare vorm verkrijgt) de vergelijking drie bestaanbare wortels zal bevatten, en het blijkt uit de teekens van onze ver-

gelijking, dat alsdan twee van dezelve positief en de derde negatief zal zijn. Hieruit volgt dan, dat wanneer men eene positieve of negatieve abscis x aanneemt, waarvan het vierkant $x^2 < \frac{4a^3}{27b}$ is, hiervoor altijd drie waarden van y en dus drie ordinaten zullen bestaan, waarvan er twee boven XY en eene beneden dezelve zullen liggen, en de kromme zal dus ter wederzijden van UV uit drie takken AMS, AmS en ANR moeten bestaan, waarvan er twee boven XY vallen en eene beneden XY gelegen is.

www.libtool.com.cn

Geeft men echter de abscis x zulk eene waarde dat $x^2 > \frac{4a^3}{27b}$ is, zoo is $V\left(\frac{x^3}{4b^2} - \frac{a^3x^6}{27b^3}\right)$ bestaanbaar, en de vergelijking heeft dan, zoo als bekend is, slechts eenen bestaanbaren wortel, welke, zoo als uit het reeds gevondene ten duidelijkste blijkt, negatief moet zijn, en de beide positieve worteis worden alsdan onbestaanbaar. De kromme lijn moet dus boven YX ergens bij S en S′ ter wederzijde van VU ophouden te bestaan. Om nu te bepalen waar deze punten S en S′ gelegen zijn, zoo nemen wij voor x de grootste waarde, waarbij nog positieve ordinaten bestaan kunnen, dat is $x^2 = \frac{4a^3}{27b}$ en dus $x = \pm \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3b}}$ dan geeft de vergelijking (C) $y = -2\sqrt[3]{\frac{x^4}{2b}} = -2\sqrt[3]{\frac{8a^6}{3^6b^3}}$ $= -\frac{4a^2}{9b}$ voor de negatieve ordinaat QR. Ten einde nu de positieve ordinaten voor die zelfde waarde van x te vinden, brenge men de waarde $x^2 = \frac{4a^3}{27b}$ over in de derde magts-vergelijking $y^3 - \frac{ax^2}{b}y + \frac{x^4}{b} = 0$, dan wordt dezelve

$$y^3 - \frac{4a^4}{27b^2}y + \frac{16a^6}{27^2b^3} = 0$$

en daar nu deze vergelijking de wortel $y = -\frac{4a^2}{9b}$ bevatten moet, zoo moet dezelve door $y + \frac{4a^2}{9b}$ deelbaar zijn; deze deeling dan verrigtende is het quotient

$y^2 =$

$$y^2 - \frac{4a^2}{9b}y + \frac{4a^4}{81b^2} = (y - \frac{2a^2}{9b})^2 = 0$$

waaruit $y = \frac{2a^2}{9b}$, en hieruit volgt, dat voor de abscis AQ = AQ′ = $x = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3b}}$, behalve de negatieve ordinaat RQ = $-y = \frac{4a^2}{9b}$, nog twee gelijke ordinaten QS = $\frac{2a^2}{9b}$ beſtaan, welke de punten S en S′ aanwijzen, waarin het bovenſte deel van de kromme het verſte van de as UY verwijderd is, en, waarin zich de takken AMS en A*m*S vereenigen.

Wij hebben boven reeds gevonden, dat de punten M en M′ gevonden worden, door AP = AP′ = $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a}{2b}}$ en PM = P′M′ = $\frac{a^2}{4b}$ te nemen; tot deze waarde van AP of x behooren nu nog andere waarden van y; om deze te bepalen ſtellen wij in de vergelijking $y^3 - \frac{ax^2}{b}y + \frac{x^4}{b} = 0$, $x = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a}{2b}}$, dan wordt dezelve

$$y^3 - \frac{a^4}{8b^2}y + \frac{a^5}{64b^3} = 0$$

deze vergelijking eenen wortel PM = $y = \frac{a^2}{4b}$ hebbende, moet door $y - \frac{a^2}{4b}$ deelbaar zijn, en de deeling geeft ons

$$y^2 + \frac{a^2}{4b}y - \frac{a^4}{16b^2} = 0$$

waardoor wij voor de twee overige wortels vinden $y = \frac{a^2}{8b} \times (\sqrt{5} - 1)$ en $y = -\frac{a^2}{8b}(\sqrt{5} + 1)$. Neemt men dus Pm = P′m′ = $\frac{a^2}{8b}(\sqrt{5} - 1)$ en PN = P′N′ = $\frac{a^2}{8b}(\sqrt{5} + 1)$, zullen *m* en *m*′ punten van de bovenſte en N en N′ punten van den oneindigen benedenſten tak der kromme lijn zijn.

Men kan nu zoo veel punten van de kromme conſtrueren als

men verkiest. Wij hebben, bij voorbeeld, gezien, dat voor elke waarde van y kleiner dan $\frac{a^2}{4b}$, vier waarden van x zullen beſtaan, nemende nu $y = \frac{a^2}{8b} = Af$, dan vinden wij uit de vergelijking (A), $x = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{2a}{b}} (2 \pm \sqrt{2})$ en dit geeft ons de punten b, b', a en a'. Voor ieder van deze punten kunnen wij ook wederom de overige waarden van y berekenen; ſtellende, bij voorbeeld, in de vergelijking $y^3 - \frac{ax^2}{b} y + \frac{x^4}{b} = 0$, $x = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{2a}{b}} (2 - \sqrt{2})$, dan verandert dezelve in $y^3 - \frac{a^4 (2-\sqrt{2})}{32 b^2} y + \frac{a^6 (6 - 4\sqrt{2})}{32^2 b^3} = 0$, omdat nu deze waarde van x tot de ordinaat $y = \frac{a^2}{8b}$ behoort, zoo moet deze laatſte vergelijking door $y - \frac{a^2}{8b}$ deelbaar zijn, en daar de werkelijke deeling ons geeft $y^2 + \frac{a^2}{8b} y - \frac{a^4 (3 - 2\sqrt{2})}{64 b^2} = 0$, zoo vinden wij voor de twee andere wortels, tot de abscis $x = \pm \frac{1}{2} a \times \sqrt{\frac{2a}{b}} (2 - \sqrt{2})$ behoorende, $y = \frac{a^2}{16b} (-1 \pm \sqrt{(13 - 8\sqrt{2})})$, van welke de eene poſitief en de andere negatief is. Een diergelijk antwoord zouden wij voor de abscis $x = \pm \frac{1}{2} a \times \sqrt{\frac{2a}{b}} (2 + \sqrt{2})$ vinden.

Differentieren wij de gegevene vergelijking, dan verkrijgen wij

$$4x^3 \partial x - 2ayx\partial x - ax^2 \partial y + 3by^2 \partial y = 0$$

waaruit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4x^3 - 2axy}{ax^2 - 3by^2}.$$

Daar deze uitdrukking nu de trigonometriſche tangens is, van den hoek welke de raaklijn van eenig punt met de as der abscisſen maakt, zal dezelve veel licht over den vorm van onze kromme lijn kunnen verſpreiden. Voor het punt M of M' is $x^2 = \frac{a^2}{8b}$

en

en $y^2 = \frac{a^2}{4b}$ dus $4x^3 - 2axy = \frac{a^4}{4b}\sqrt{\frac{a}{2b}} - \frac{a^4}{4b}\sqrt{\frac{a}{2b}} = 0$, zoodat $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Stellende dus den hoek, welke de raaklijn met de as der abscisſen maakt ϕ, hebben wij hier *Tang.* $\phi = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, dus $\phi = 0$, en de raaklijn van de punten M en M' is dus evenwijdig met XY. De takken SMA en S'M'A hebben bijgevolg de holle zijde naar de as XY gekeerd.

Voor de punten S en S' hebben wij gevonden $x^2 = \frac{4a^2}{27b}$ en $y^2 = \frac{4a^3}{81b^2}$. Subſtituerende dit in $\frac{\partial y}{\partial x}$, dan wordt de noemer gelijk 0, zonder dat de teller 0 wordt, en wij verkrijgen dus *Tang.* $\phi = \frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, en $\phi = 90°$ waaruit volgt, dat SQ en S'Q' zelve raaklijnen van de punten S en S' zijn, hetgeen volkomen overeenſtemt met hetgeen wij reeds vroeger gevonden hebben, dat is, met de eigenſchap, dat in S, x hare grootſte waarde heeft.

Omdat er voor ieder waarde van x, kleiner dan $\frac{2a^2}{3b}$, drie waarden voor y beſtaan, zoo is het klaar, dat voor zulk eene waarde van x ook drie waarden voor $\frac{\partial y}{\partial x}$ gevonden moeten worden. Nemen wij tot voorbeeld de punten M en M' waarbij $x = \sqrt{\frac{a^3}{8b}}$, dan hebben wij vroeger gezien, dat tot dezelve niet alleen de waarde $y = \sqrt{\frac{a^4}{4b}}$ behoort, maar nog bovendien $y = \frac{a^2}{8b}(\sqrt{5}-1)$ en $y = -\frac{a^2}{8b}(\sqrt{5}+1)$, waarvan de eerſte tot het punt n en de tweede tot het punt N behoort. Stellen wij nu in $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{ayx^2 - 3by^2}{4x^3 - 2ayx}$, $x = \sqrt{\frac{a^3}{8b}}$ en $y = \frac{a^2}{8b}(\sqrt{5}-1)$, dan vinden wij voor de ſubtangens van het punt m, $Pt = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\sqrt{\frac{a^3}{8b}}$, en daar deze waarde kleiner dan $AP = x =$

$\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{a^3}{8b}}$ is, zoo kan men hieruit opmaken, dat in het punt m de bolle zijde van de kromme naar de lijn XY gekeerd is, en daar wij deze aanmerking kunnen toepassen op elk punt van den tak AmS, zal hieruit kunnen worden opgemaakt, dat de geheele tak AmS hare bolronde zijde naar de as XY keert, en men zal op dezelfde wijze kunnen aantoonen, dat de benedenste tak ANR altijd zijne bolronde zijde naar de as XY wendt.

www.libtool.com.cn

Om de rigting der raaklijnen in het punt A te bepalen, moeten wij in $\frac{\partial y}{\partial x}$ stellen $x = o$ en $y = o$, doch dit geeft $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{o}{o}$, en dus eene onbepaalde waarde. Wij zullen dus om deze rigting der tangenten te bepalen eenen anderen weg inslaan.

Daar de grootheden x en y veranderlijk zijn, en alzoo aangroeijen of afnemen kunnen, zoodanig ondertusschen, dat altijd $x^4 - ayx^2 + by^2 = o$ moet zijn, zoo onderstellen wij dat Δx en Δy de gelijktijdige aangroeijingen van x en y zijn, zoodat x veranderende in $x + \Delta x$, y verandert in $y + \Delta y$; onze vergelijking zal als dan veranderen in

$$(x + \Delta x)^4 - a(y + \Delta y)(x + \Delta x)^2 + b(y + \Delta y)^2 = o$$

en wanneer men de termen ontwikkelt in

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 4x^3 . \Delta x + 6x^2 (\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 \\ -ayx^2 - 2axy . \Delta x - 2ax . \Delta x . \Delta y - a . \Delta y . (\Delta x)^2 \\ \quad - ax^2 \Delta y - ay(\Delta x)^2 \\ + by^2 + 3by^2 \Delta y + 3by . (\Delta y)^2 + b(\Delta y)^3 \end{array}\right\} = o$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

De eerste verticale rij $x^4 - ayx^2 - by^2$, is het voorste lid der opgegevene vergelijking, en is dus altijd gelijk o. De tweede verticale rij wordt geheel gelijk o wanneer men x en y beide gelijk o stelt, en dit zelfde heeft ook met de derde verticale rij plaats. Wij behouden dus voor het geval van $x = o$ $y = o$ alleen de twee laatste verticale rijen namelijk

$$-a \Delta y . (\Delta x)^2 + b(\Delta y)^2 + (\Delta x)^4 = o.$$

Daar dit nu plaats moet hebben hoe klein ook de aangroeijingen Δx en Δy genomen worden, nemen wij in derzelver plaats ∂x en ∂y; in dit geval verdwijnt ∂x^4 ten opzigte van de

ove-

overige leden en wij behouden voor het geval van $x = o$ en $y = o$.

$$- a\partial y . \partial x^2 + b\, \partial y^2 = o$$

www.libtool.com.cn

daar nu deze vergelijking door ∂y deelbaar is, geeft zij vooreerst $\partial y = o$ of $\frac{\partial y}{\partial x} = o$, en ten andere $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{a}{b}$ of $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$, daar verder $\frac{\partial y}{\partial x} = Tang.\ \phi$ is, heeft $Tang.\ \phi$, voor $x = o$ en $y = o$, deze drie waarden $Tang.\ \phi = o$: $Tang.\ \phi = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ en $Tang.\ \phi = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

De eerſte waarde geeft $\phi = o$ en toont dus aan, dat de as XY zelve in het punt A raaklijn van de kromme is.

Om de twee andere waarden te conſtrueren, nemen wij in de as der abscisſen een willekeurig punt W aan, ſtellen in dit punt eene lijn WT loodregt op de as XY, en maken $WT : AW = \sqrt{a} : \sqrt{b}$, dan is $Tang.\ TAW = \frac{WT}{AW} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, en wanneer men nu $WT' = WT$ maakt, dan is $Tang.\ TAW = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; de lijnen TA en T'A zullen bijgevolg de twee andere tangenten zijn, welke in het punt A, aan de kromme kunnen worden getrokken, en hierdoor achten wij den loop van onze kromme lijn genoegzaam bepaald te hebben.

CLIV. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Wanneer door eenen bol twee cilindervormige gaten geboord zijn, van welke de middellijnen gelijk zijn aan den ſtraal des bols, en in dier voege, dat dezelve, loodregt door eenen der groote cirkels van den bol gaande, elkander volgens de middellijn des bols, welke loodregt op dien grooten cirkel ſtaat, aanraken, dan vraagt men te bepalen:

1°. *Den inhoud van het overblijvende deel des alzoo uitgeholden bols?*

2°. *De grootte der oppervlakte van dit overſchietende deel des bols?*

OP-

OPLOSSING. DOOR U. HUGUENIN.

www.libtool.com.cn

Laat *Fig.* 107 de verticale, en *Fig.* 108 de horizontale projectie van den bol met de twee, door dezelve gaande, cilinders zijn.

Laat de geheele figuur gesneden worden door een vlak, dat loodregt door de assen van de cilinders gaat, dan zal de lijn DC *Fig.* 107 de verticale en de cirkel ILHM van *Fig.* 108, de horizontale projectie van dit vlak voorstellen, en dan zullen IDHCI en CLGMC de horizontale projectien van de deelen zijn, welke de cilinders van dit cirkelvlak afsnijden.

Stel nu den straal van den bol AC = CB = r, dan is, daar F het middelpunt der projectie van den eene cilinder is, AF = FC = HF = $\frac{1}{2}r$; zij voorts in *Fig.* 107 de hoek ACD, of wel de boog welke voor den straal 1 tot dezen hoek behoort, gelijk ϕ, dan is DE = r *Sin* ϕ en CE = r *Cos.* ϕ, en dus ook in *Fig.* 108, DC = CH = r *Cos.* ϕ. Wij hebben alzoo *cirkel* AHCI = $AF^2 \times \pi = \frac{1}{4} r^2 \pi$, en *cirkel* DLID = $CD^2 \times \pi = r^2 \pi \times Cos^2. \phi$; verder is in den regthoekigen driehoek AHC, AH = $\sqrt{(AC^2 - HC^2)} = \sqrt{(r^2 - r^2 Cos^2. \phi)} = r$ *Sin.* ϕ. Wijl dan de driehoeken AHC en DEC van *Fig.* 108 en *Fig.* 107 gelijk en gelijkvormig zijn, zoo is $\angle$ ACH = $\angle$ ACD = ϕ, en bijgevolg $\angle$ AFH = 2 ϕ, waaruit dan verder volgt *Boog* DH = HC $\times$ ϕ = $r \phi$. *Cos.* ϕ, *Boog* IDH = 2 $r \phi$. *Cos.* ϕ; en de inhoud des sectors CHID = *Boog* IDH $\times \frac{1}{2}$ HC = $r^2 \phi$ $Cos^2. \phi$; trekkende hieraf driehoek CHI = $\frac{1}{2}$ $HC^2 \times$ *Sin.* HCI = $\frac{1}{2} r^2$ $Cos^2. \phi \times$ *Sin.* 2 ϕ = r^2 $Cos^3. \phi$. *Sin.* ϕ, dan blijft er over

segment IDHI = $r^2 Cos^2. \phi (\phi - Cos. \phi. Sin. \phi)$ . . . (1)

Op dezelfde wijze is *Boog* AH = FH $\times$ 2 ϕ = $r \phi$, dus *Boog* HC = $\frac{1}{2} r \pi - r \phi$ en *Boog* HCI = $r (\pi - 2 \phi)$, zoodat *sector* FHCIF = *Boog* HCI $\times \frac{1}{2}$ HF = $\frac{1}{4} r^2 (\pi - 2 \phi)$, tellende nu hierbij *driehoek* FHI = $\frac{1}{2}$ FH^2. *Sin.* IFH = $\frac{1}{8} r^2$ *Sin.* 4 ϕ dan komt er

segment HCIH = $\frac{1}{8} r^2 (2 \pi - 4 \phi + Sin. 4 \phi)$ . . . . (2)

en tellende de uitdrukkingen (1) en (2) bij elkander

Fig. IDHCI = $r^2 (\frac{1}{4} \pi -, \phi + \frac{1}{8} Sin. 4 \phi + \phi Cos^2. \phi - Cos^3. \phi Sin. \phi)$

maar $\frac{1}{8}$ *Sin.* 4 ϕ = $\frac{1}{2}$ *Sin.* 2 ϕ. *Cos* 2 ϕ. = $\frac{1}{2}$ *Sin.* ϕ *Cos* ϕ (2 $Cos^2. \phi - 1$) = $Cos^3. \phi$ *Sin* $\phi - \frac{1}{2}$ *Sin.* ϕ. *Cos.* ϕ, dus

Fig.

Fig. IDHCI $= r^2 (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\phi + \phi\, Cos^2.\phi - \frac{1}{2} Sin.\phi.Cos.\phi)$

en multiplicerende dit met 2

$2 \times$ *Fig.* IDHCI $= r^2 (\frac{1}{2}\pi - \phi + 2\phi\, Cos^2.\phi - Sin.\phi\, Cos.\phi)$

Trekkende dit eindelijk af van *cirkel* DLID $= r^2\, \pi\, Cos^2.\phi$ dan blijft er

Fig. CHLCMIC $= r^2 (\pi\, Cos^2.\phi + \frac{1}{2}\pi + \phi + Sin.\phi.Cos.\phi - 2\phi\, Cos^2.\phi)$.

Laat nu *dg*, *Fig.* 107, oneindig digt bij DG getrokken zijn, dan is D*d* de differentiaal van DE, en bijgevolg $Dd = \partial . r . Sin.\phi = r\, Cos.\phi\, \partial\phi$, en wanneer men dit met den inhoud van *Fig.* CHLCMIC vermenigvuldigt, verkrijgt men de differentiaal voor den inhoud van het gedeelte ADGB des uitgeboorden halven bols.

Stellende dus dezen inhoud I dan hebben wij

$\partial I = r^3 (\pi\, Cos^3\phi - \frac{1}{4}\pi\, Cos.\phi + \phi\, Cos\ \phi + Sin.\phi\, Cos^2\phi - 2\phi Cos^3\phi)\partial\phi$

en bijgevolg,

$$I = r^3 \left\{ \pi \int Cos^3.\phi.\partial\phi - \tfrac{1}{4}\pi \int Cos.\phi.\partial\phi + \int \phi\, Cos.\phi\ \partial\phi + \int Sin.\phi\, Cos^2.\phi.\partial\phi - 2\int \phi.Cos^2.\phi.\partial\phi \right\} + C$$

Integrerende nu de bijzondere deelen dan vindt men

$\int Cos^3.\phi.\partial\phi = \int Cos.\phi\,(1 - Sin^2.\phi)\,\partial\phi = Sin.\phi - \frac{1}{3} Sin^3.\phi$

$\int Cos.\phi.\partial\phi = Sin.\phi$

$\int \phi\, Cos.\phi.\partial\phi = \phi\, Sin\ \phi - \int Sin.\phi\ \partial\phi = \phi\, Sin.\phi + Cos.\phi$

$\int Sin.\phi\, Cos^2.\phi\partial\phi = -\frac{1}{3} Cos^3.\phi$

$\int \phi\, Cos^3\ \phi\partial\phi = \int \phi\, Cos.\phi\,(1 - Sin^2.\phi)\,\partial\phi = \phi\, Sin\ \phi + Cos.\phi -$

$\int \phi\, Cos.\phi.Sin^2.\phi\partial\phi = \phi\, Sin.\phi + \frac{2}{3} Cos.\phi - \frac{1}{3}\phi\, Sin^3.\phi + \frac{1}{5} Cos^3.\phi$

eindat namelijk

$\int \phi\, Cos.\ \phi\ .\ Sin^2.\ \phi\ \partial\ \phi = \frac{1}{3}\ \phi\ Sin^3.\phi - \frac{1}{3}\int Sin^3.\ \phi\ \partial\ \phi = \frac{1}{3}\phi$

$Sin^3.\phi + \frac{1}{3}\ Cos.\phi - \frac{1}{3}\ Cos^3.\phi$ is.

Brengende nu deze gevondene integralen over in de waarde van I, zoo verkrijgen wij.

$I = r^3 (\pi\ Sin.\phi - \frac{1}{3}\pi Sin^3.\phi - \frac{1}{2}\pi\ Sin.\phi + \phi Sin\ \phi + Cos.\phi - \frac{1}{3} Cos^3.\phi$

$- 2\phi\ Sin\ \phi - \frac{1}{3} Cos\ \phi + \frac{2}{3}\phi\ Sin^3.\phi - \frac{2}{3} Cos^3\ \phi) + C$

en wanneer men de overeenkomstige termen te zamen trekt,

$I = r^3 (\frac{1}{2}\pi Sin\ \phi - \frac{1}{3}\pi Sin^3.\phi - \phi\ Sin.\phi - \frac{1}{3} Cos.\phi - \frac{1}{3} Cos^3.\phi + \frac{2}{3}\phi\ Sin^3\ \phi)$

$+ C.$

Om de constante grootheid C te bepalen, merken wij op, dat voor $\phi = o$ ook $I = o$ moet zijn. Nu maakt $\phi = o$, ook $Sin.\phi = o$, maar $Cos.\phi = 1$, en wij hebben dus,

$o =$

$$o = r^3 \left(-\tfrac{8}{3} - \tfrac{8}{5}\right) + C$$

waaruit $C = \frac{8}{5} r^3$, zoodat wij voor de volledige of verbeterde integraal vinden

www.libtool.com.cn

$$I = r^3 \left(\tfrac{1}{2}\pi \mathit{Sin}.\phi - \tfrac{1}{3}\pi \mathit{Sin}^3.\phi - \phi \mathit{Sin}.\phi - \tfrac{1}{3}\mathit{Cos}.\phi - \tfrac{1}{5}\mathit{Cos}^3\phi + \tfrac{2}{3}\phi\ \mathit{in}^3.\phi + \tfrac{8}{5}\right)$$

en dit is nu de inhoud van het gedeelte des uitgeholden bols, begrepen tusschen de evenwijdige vlakken AB en DG.

Om eindelijk den inhoud van de helft des uitgeholden bols te vinden, moet $\phi = 90°$ gesteld worden, dat is $\phi = \frac{1}{2}\pi$, dit maakt $\mathit{Sin}\ \phi = 1$ en $\mathit{Cos}.\ \phi = o$ en geeft ons bijgevolg,

$$I = r^3 \left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{8}{5}\right) = \tfrac{8}{5} r^3$$

wanneer dus beide cilindervormige gaten uit den bol geboord zijn, zal de inhoud van het overschietende deel gelijk zijn aan $\frac{16}{5} r^3$, of wanneer wij de middellijn van den bol m stellen, gelijk aan $\frac{2}{5} m^3$, de gevraagde inhoud is dus juist twee negende deelen van den cubus, welke om den bol beschreven kan worden.

Gaan wij nu over tot het vinden, van hetgeen er, na deze uitholling, van het oppervlak des bols is overgebleven.

Men merke te dien einde op, dat de omtrek des cirkels DHLGMI (*Fig.* 108) $= 2r\pi\ \mathit{Cos}.\ \phi$ is; daar wij nu reeds vroeger gevonden hebben *Boog* IDH = *Boog* LGM $= 2r\phi\ \mathit{Cos}.\ \phi$, zoo is

Boog HL + *Boog* IM $= 2r\pi\ \mathit{Cos}.\ \phi - 4r\phi\ \mathit{Cos}.\ \phi$

vermenigvuldigt men nu de som dezer boogen met de differentiaal van den boog AD, *Fig.* 107, dat is, met $Dm = r\partial\phi$, dan verkrijgt men voor de differentiaal van het gezochte oppervlak

$$\partial O = 2r^2\ \mathit{Cos}.\ \phi\ (\pi - 2\phi)\ \partial\phi$$

en bijgevolg voor dit oppervlak,

$$O = 2r^2 \left\{ \pi \int \mathit{Cos}.\ \phi\ \partial\phi - 2 \int \phi\ \mathit{Cos}.\ \phi\ \partial\phi \right\}$$

welke waarde door het bovenstaande klaarblijkelijk wordt uitgedrukt door

$$O = 2r^2 (\pi\ \mathit{Sin}.\ \phi - 2\phi\ \mathit{Sin}.\ \phi - 2\ \mathit{Cos}.\ \phi) + C$$

daar nu deze waarde wederom verdwijnen moet voor $\phi = o$, zoo verkrijgen wij $C = 4r^2$ en bijgevolg voor de volledige integraal

$$O = 2r^2 (\pi\ \mathit{Sin}.\ \phi - 2\phi\ \mathit{Sin}.\ \phi - 2\ \mathit{Cos}.\ \phi + 2).$$

Stel-

Stellende nu $\phi = 90°$, dan verkrijgen wij voor de helft van de gevraagde oppervlakte $O = 4r^2$. De geheele gevraagde oppervlakte is alzoo $8r^2$, of indien wij de middellijn van den bol gelijk m ſtellen, dan is die oppervlakte gelijk $2m^2$, dat is: gelijk aan tweemaal het vierkant van de middellijn des bols.

www.libtool.com.cn

Daar wij gevonden hebben, voor den inhoud $\frac{2}{3}$ AB^3 en voor de oppervlakte $2\,AB^2$, zoo volgt hieruit, dat beide de merkwaardige eigenſchap bezitten, van geheel rationale vormen te zijn, op welke het getal r geenen den minſten invloed heeft.

Aanmerking. De Heer Bossut heeft deze eigenſchap des alzoo uitgeholden bols, 16 of 18 jaren geleden, in een der Franſche nieuwspapieren, zonder bewijs, bekend gemaakt, met bijvoeging, dat hij daarvan een meetkunſtig betoog gevonden had. Door de nu voorgedragene oplosſing overtuigde ik mij dadelijk van de waarheid. Naderhand heb ik, in de laatſte uitgave der wiskundige Curſus van Bossut, eene analytiſche oplosſing van dit Voorſtel gevonden, welke echter van de hier voorgedragene verſchilt.

CLV. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

De waarde van x te vinden, uit de vergelijking $\sqrt{x}\,(x+5) + \sqrt[3]{(x^2+x+7)} = 9$?

Oplossing. Door I. R. Schmidt en A. van der Swan.

Stel $\sqrt{x}\,(x+5) = y$ en $\sqrt[3]{(x^2+x+7)} = z$, dan hebben wij deze drie vergelijkingen,

$x^3 + 5x = y^2$; $x^2 + x + 7 = z^3$ en $y + z = 9$.

Uit de derde is $y = 9 - z$, en brengende dit in de eerſte vergelijking, wordt zij $x^2 + 5x = (9 - z)^2$. Trekkende hier eindelijk de tweede vergelijking af, dan blijft er, $4x - 7 = (9 - z)^2 - z^3$, waaruit $x = \frac{1}{4}((9 - z)^2 - z^3 + 7)$.

Brengende nu deze waarde van x over in de vergelijking $x^2 + 5x = (9 - z)^2$, dan verkrijgen wij eene rationale vergelijking in z, namelijk

$\frac{1}{16}((9-z)^2 - z^3 + 7)^2 + \frac{5}{4}((9-z)^2 - z^3 + 7) = (9-z)^2$.

of de gebrokene wegmakende

$\{(9-z)^2-z^2+7\}^2+20\{(9-z)^2-z^2+7\}=16(9-z)^2$

www.libtool.com.cn

ontwikkelende nu de aangewezene producten en rangschikkende alles naar de magten van z, dan verkrijgen wij de zesdemagtsvergelijking,

$$z^6-2z^5+37z^4-232z^3+504z^2-3240z+8208=0$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt $z=3$ en bijgevolg,

$$x=\frac{(9-z)^2-z^2+7}{4}=\frac{36-27+7}{4}=4$$

AANMERKING. De eindvergelijking in z heeft nog vijf andere wortels, daar het echter alleen ons oogmerk was, om aan te toonen, hoe de opgegevene vergelijking tot eene rationale vergelijking kan herleid worden, zullen wij het onderzoek, van deze overige wortels, hetgeen bovendien meer langwijlig dan belangrijk zou zijn, achterwege laten.

CLVI. VRAAGSTUK.

Door I. R. SCHMIDT.

De kromme lijn waarvan de vergelijking is $y=\pm\sqrt{\frac{a}{x}}(a^2+x^2)$ *door punten te construeren; haren loop te bepalen, en te onderzoeken of dezelve van maxima, minima, buigpunten asymptoten enz. vatbaar is.*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Laat XX′ en YY′ *Fig.* 109. de assen der coördinaten zijn, en dus A de oorsprong; laat verder AB de constante lijn a voorstellen, welke in de vergelijking voorkomt, en laat AP eene gegevene waarde van x zijn, dan hebben wij, om de overeenkomstige waarde van y te vinden, deze constructie.

Trek BP, dan is $BP=\sqrt{(AB^2+AP^2)}=\sqrt{(a^2+x^2)}$. Stel BC loodregt op PB, dan is AP : BP = BP : PC, of $x:\sqrt{(a^2+x)}=\sqrt{(a^2+x^2)}:PC$, dus $PC=\frac{a^2+x^2}{x}$.

Maak PD = AB = a, en beschrijf op CD, als middellijn, eenen cirkel, wanneer dan door P de lijn M′M, loodregt op XX′, getrokken wordt, zullen M en M′ punten van de gevraagde

de kromme lijn zijn; want $PM^2 = (PM')^2 = PC \times PD = \frac{a(a^2+x^2)}{x}$ zijnde, is $PM = PM' = y = \pm \sqrt{\frac{a}{x}(a^2+x^2)}$.

Door middel van deze conſtructie, voor een genoegzaam aantal punten, te herhalen, zal de kromme lijn geconſtrueerd kunnen worden, en zij zal den vorm verkrijgen, die in de figuur is aangewezen.

De vergelijking $y = \pm \sqrt{\frac{a}{x}(a^2+x^2)}$ toont ons, bij het eerſte inzien, de volgende eigenſchappen aan, welke alle door de opgegevene conſtructie volkomen bevestigd worden.

Wanneer x negatief genomen wordt, dan wordt y onbeſtaanbaar; de kromme lijn ligt dus geheel ter regterhand van de as YY'.

Voor elke poſitieve waarde van x beſtaan er twee gelijke doch tegengeſtelde waarden van y, de kromme lijn beſtaat dus uit twee takken, welke op dezelfde wijze boven en beneden de as XX' gelegen zijn.

Stellende $x = 0$, dan wordt $y = \pm \infty$, de as YY' is dus eene asymptoot van de kromme lijn.

Stellende $y = 0$, dan moet $a^2 + x^2 = 0$ zijn; dit geeft $x = \pm a\sqrt{-1}$, welke onbeſtaanbare waarde van x, aantoont dat de kromme lijn, de as XX' niet doorſnijdt noch aanraakt.

Nemende $x = \infty$, dan wordt $y = \pm \sqrt{\frac{a}{x}(a^2+x^2)} = \pm \sqrt{a(\frac{a^2}{x}+x)} = \pm \sqrt{\infty}$. De kromme lijn verwijdert zich alzoo, ter regterhand van de as YY', hoe langer hoe meer van de as XX', zoodat zij op eenen oneindigen afſtand van YY' gekomen zijnde, ook op eenen oneindigen afſtand van XX' verwijderd zal zijn. Hier bij is vooral merkwaardig, dat voor het geval van $x = \infty$, eigenlijk $y = \sqrt{ax}$, en dus $y^2 = ax$ wordende, onze kromme lijn meer en meer zal naderen tot eene paraboot, met a als parameter en A als top beſchreven, zoodanig, dat deze paraboot ZAZ aſymptote van onze kromme lijn zal zijn.

Zonderen wij x uit de gegevene vergelijking af, dan verkrijgen wij,

www.libtool.com.cn

$$x = \frac{y^2}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(y^2 + 2b^2)(y^2 - 2a^2)}.$$

Deze uitdrukking leert ons, dat y^2 niet kleiner dan $2a^2$ en dus y niet kleiner dan $a\sqrt{2}$ kan genomen worden, zonder dat x onbeftaanbaar wordt. De kleinst mogelijke waarde van y is alzoo $y = \pm a\sqrt{2}$, en dit geeft $x = \frac{y^2}{2a} = a$. Indien wij dus AE = AB = a nemen, en EF = EF′ = BE = $a\sqrt{2}$, maken, zal er in F een minimum en in F′ een maximum of negatief minimum voor y plaats hebben. Trekt men dus door F en F′ lijnen, evenwijdig met de as XX′, dan zullen dezelve raaklijnen, in de punten F en F′, van de kromme lijn zijn, en tusſchen deze twee raaklijnen Ll en L′l′ zal geen punt van de kromme lijn kunnen liggen.

Om voor eenige waarde AN = y, de overeenkomſtige waarde van x te conſtrueren, moet NO evenwijdig aan XX′ = $\frac{y^2}{2a}$ genomen, en dan OQ = OQ′ = $\frac{1}{2a}\sqrt{(y^4 - 4a^4)}$ gemaakt worden. Stellende dan NO = z, zoo hebben wij $z = \frac{y^2}{2a}$ of $y^2 = 2az$, en daar dit de vergelijking van eene parabool zAz′ is, $2a$ tot parameter en A tot top hebbende, zoo volgt hieruit, dat deze parabool zAz′, welke door de punten F en F′ gaat, alle koorden QQ′ der kromme lijn, welke evenwijdig met XX′ loopen, midden door zal deelen.

Hierdoor achten wij nu den loop onzer kromme lijn genoegzaam bepaald te hebben; alleenlijk moeten wij nog opmerken dat zij, om de lijn Ll te raken, hare holle, en om de parabool ZAZ′ tot aſymptote te hebben, hare holle zijde naar de as XX′ moet wenden, hetgeen onmogelijk is, indien er niet ergens ter regterhand van F een buigpunt beſtaat. Dit buigpunt zullen wij nader leeren bepalen, en wij gaan nu over tot het onderzoek der raaklijnen.

Dit

Differentierende de vergelijking $y = \pm \sqrt{\frac{a}{x}}\,(a^2 + x^2)$ dan vinden wij,

www.libtool.com.cn

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a\,(x^2 - a^2)}{2x^2} : \sqrt{\frac{a}{x}}\,(a^2 + x^2)$$

waarbij wij het dubbelde teeken hebben weggelaten, omdat het eene teeken voor den bovenſten tak VFW dienende, het andere tot den benedenſten tak V'F'W' zal behooren; daar nu deze twee takken volmaakt met elkander overeenkomen, zal het dus genoegzaam zijn, de verdere eigenſchappen alleen voor den bovenſten tak aan te wijzen.

De gevondene uitdrukking is de trigonometriſche tangens van den hoek, welke de raaklijn van eenig punt met de as XX' maakt. Voor $x = a$, wordt $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ en voor $x = 0$, wordt $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, hetgeen het beſtaan van de raaklijn L*l* en van de aſymptoot YY' bevestigt. Voor $x = \infty$ wordt eindelijk $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}a\,(1 - 0)}{\sqrt{a}\,(0 + \infty)} = 0$, hetgeen aantoont dat de kromme lijn ter regterzijde van F, meer en meer tot eene evenwijdige rigting met XX' begint te neigen, en deze evenwijdige rigting op eenen oneindigen afſtand aanneemt, hetgeen ook noodzakelijk plaats moet hebben, indien de parabool ZAZ' aſymptote van de kromme lijn zal zijn.

De uitdrukking voor de ſubtangens is

$$\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{2x\,(a^2 + x^2)}{x^2 - a^2};$$

nemende dus de lijnen, welke wij bij de conſtructie der kromme lijn gebruikt hebben, te baat, dan kunnen wij de ſubtangens op de volgende wijze conſtrueren. Maak AH = PB, trek DH en ſtel HG loodregt op HD, dan is AD : AH = AH : AG, of AD : PB = PB : AG, dat is, $a + x : \sqrt{(a^2 + x^2)} = \sqrt{(a^2 + x)}$. AG, zoodat $AG = \frac{a^2 + x^2}{a + x}$; maak PI = AG en trek AK evenwijdig met EI, dan is EP : PI = AP : PK, of EP : AG = AP

AP : PK, dat is, $x : a : \frac{a^2 + x^2}{a + x} = x : PK$, zoodat $PK = \frac{x(a^2 + x^2)}{x^2 - a^2}$. Nemende dus PT = 2 PK, ter linker of ter regterzijde van de ordinaat, naarmate het punt P ter regter of ter linkerzijde van het punt E ligt, dan zal de subtangens en dus ook de raaklijn van het punt M bepaald zijn.

www.libtool.com.cn

Gaan wij nu over om het buigpunt, waarvan wij vroeger gesproken hebben, te bepalen, en schrijven wij te dien einde onze vergelijking onder den vorm $xy^2 = a^3 + ax^2$, dan hebben wij, door dezelve in deze toestand te differentieren

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2ax - y^2}{2xy}.$$

Dit andermaal differentierende verkrijgen wij,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(a - y\frac{\partial y}{\partial x}) \times 2xy - (y + x\frac{\partial y}{\partial x})(2ax - y^2)}{2x^2y^2}$$

$$= \frac{2axy - 2axy + y^3 - (2xy^2 + 2ax^2 - xy^2)\frac{\partial y}{\partial x}}{2x^2y^2}$$

$$= \frac{y^3 - x(2ax + y^2) \times \frac{2ax - y^2}{2xy}}{2x^2y^2}$$

$$= \frac{2xy^4 - x(2ax + y^2)(2ax - y^2)}{4x^3y^3}$$

$$= \frac{2xy^4 - x(4a^2x^2 - y^4)}{4x^3y^3} = \frac{3y^4 - 4a^2x^2}{4x^2y^3}$$

daar nu voor het buigpunt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ moet zijn, hebben wij $3y^4 - 4a^2x^2 = 0$, of $y^4 = \frac{4}{3}a^2x^2$, dus $y^2 = \frac{2}{3}ax\sqrt{3}$; maar de vergelijking geeft ons $y^2 = \frac{a^3 + ax^2}{x}$ en bijgevolg hebben wij $\frac{2}{3}ax^2\sqrt{3} = a^3 + ax^2$ of $\frac{2}{3}x^2\sqrt{3} = a^2 + x^2$, dus $x^2(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1) = a^2$, en $x^2 = \frac{3a^2}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{a^2(9 + 6\sqrt{3})}{3}$, waaruit eindelijk volgt $x = a\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}$,

en

en hiermede ſtemt overeen $y^2 = \frac{3}{4} ax \sqrt{3} = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{(9 + 6\sqrt{3})}$ en $y = x \times \sqrt{\{\frac{3}{4}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})}\}}$. Makende dus $AU = a\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}$ en $UU' = a\sqrt{\{\frac{3}{4}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})}\}}$ dan zal U' het gevraagde buigpunt zijn.

Onze kromme lijn heeft nog belangrijke eigenſchappen, welke wij echter, omdat derzelver naſporing te veel plaats zou vorderen, achterwegen moeten laten.

CLVII. VOORSTEL.

Door F. P. GISIUS NANNING.

Van eenen vierhoek ABCD Fig. 110. zijn gegeven twee zijden AD en DC, welke elkander in het hoekpunt D ontmoeten, benevens de diagonaal DB, welke uit dit ontmoetingspunt D tot het overſtaande hoekpunt B loopt; indien nu daarenboven nog de hoeken B en D, waardoor de gegevene diagonaal BD loopt, gegeven zijn, vraagt men dezen vierhoek, zoo wel door berekening als door conſtructie te bepalen.

OPLOSSING. Door F. P. GISIUS NANNING.

CONSTRUCTIE. De zijden AD en DC, benevens den hoek D gegeven zijnde, kan den driehoek DAC geheel geconſtrueerd worden. Men beſchrijve nu op AC een cirkel-ſegment dat den gegevenen hoek B bevat, dan moet het punt B ergens in den omtrek van dit cirkel-ſegment gelegen zijn. Wanneer dan uit D als middelpunt, met de gegevene diagonaal DB als ſtraal, eenen cirkelboog beſchreven wordt, dan zal, omdat het punt B ook in dezen cirkelboog moet liggen, het doorſnijdingspunt B van beide cirkelbogen het vierde hoekpunt zijn, en de lijnen AB en BC getrokken hebbende, zal de vierhoek ABCD geconſtrueerd zijn.

AANMERKING. De cirkelbogen kunnen elkander in twee punten B en B' doorſnijden, en het vraagſtuk is alzoo in het algemeen, voor twee antwoorden vatbaar, dat is, er kunnen twee verſchillende vierhoeken ABCD en AB'CD onder dezelfde gegevens beſtaan. Indien deze cirkels elkander aanraken, dan is er ſlechts eene oplosſing en hebben zij geen punt gemeen, dan is het vraagſtuk onmogelijk. Eindelijk kan het ook gebeuren, dat de uit D beſchreven cirkelboog, niet den boog ABC_2 maar het

verlengde van denzelven doorsnijdt, en in dit geval heeft een der vierhoeken, of wel beide, niet den gegevenen hoek B, maar eenen hoek, welke gelijk is aan het supplement van B.

www.dbtoo.com.cn

2°. OPLOSSING. Door berekening kan ons Voorstel aldus ontbonden worden,

1°. $AC = V\{AD^2 + DC^2 - 2 . AD \times DC \times Cos. D\}$

2°. $AC : AD = Sin. D : Sin. ACD$

3°. $AC : CD = Sin. D : Sin. CAD$

laat E het middelpunt van het cirkel-segment ABC zijn en EF loodregt op AC getrokken worden, dan is $AF = FC$ en $\angle FEC = \angle B$, en derhalven

4°. $EC = EB = \frac{1}{2} AC \times Cosec. B$

5°. $\angle ECD = \angle ACD + (90° - B)$

6°. $DE = V\{DC^2 + EC^2 - 2 DC \times EC\ Cos. ECD\}$

7°. $DE : EC = Sin. ECD . Sin. EDC$

8°. $Cos. EDB = \frac{ED^2 + BD^2 - BE^2}{2 ED \times BD}$

9°. $\angle BDC = \angle EDC \pm \angle EDB$,

Hierdoor de driehoeken BDC en ADB geheel bepaald zijnde, hebben wij eindelijk genoeg om BC, AB en de hoeken A en C te berekenen. Het dubbelde teeken van N°. 9. toont verder de twee verschillende antwoorden aan, waarover in de aanmerking op de eerste oplossing gesproken is.

CLVIII. VOORSTEL.

Door F. BAUD.

Op eenen hellenden grond, is, in eene regte lijn, een dijk aangelegd, wiens kruin CFGB, Fig. III, horizontaal ligt, en eene lengte CF van l voeten, tegen eene breedte BC van b voeten heeft; de hoogte der kruin boven het terrein is aan het eene uiteinde des dijks h, en aan het andere uiteinde h' voeten; en de doceringen zijn ter wederzijden zoodanig bepaald, dat de dijk aan de eene zijde op elke voet hoogte m voeten helling, en aan de andere zijde n voeten helling, en eenen voet hoogte heeft; dat is, dat de profilen ABCD en EFGH aan de eene zijde bepaald worden door de hypothenuza HG van eenen regthoekigen driehoek HGI wiens basis het

m-voud der hoogte is, en aan de andere zijde door de hypothenuza FE eens regthoekigen driehoeks, waarvan de basis het n-voud van de hoogte is. Aan beide uiteinden C en G, is de dijk door verticale vlakken, loodregt op deszelfs strekking of alignement staande, bepaald. De grond, eindelijk, is een plat vlak, zoodanig gesteld, dat de doorsneden van de kruin des dijks en dit grondvlak, door verticale vlakken, loodregt op de strekking van den dijk staande, evenwijdige lijnen zijn. Men vraagt nu,

1°. *Den inhoud van den geheelen dijk?*

2°. *Eenig punt op deszelfs kruin te vinden, zoodanig dat het profil op dit punt, met de lengte l van den dijk vermenigvuldigd, deszelfs inhoud oplevert?*

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door F. BAUD en R. LOBATTO.

Zij ABCDEFGH de gegevene dijk, wiens kruin CF $= l$ voeten lengte, en BC $= b$ voeten breedte heeft. Laat verder ABCD en EFGH de verticale profilen aan deszelfs uiteinden zijn, waarvan de hoogten BL $= h$ en GI $= h'$ zijn; dan is

$$AL = m \times BL = mh \qquad HI = m \times GI = mh'$$
$$DM = n \times GM = nh \qquad KE = n \times FK = nh'$$

Ter bepaling van den inhoud onderstelle men, dat de kruin van den dijk, tot aan derzelver ontmoeting met den grond in NO, verlengd zij, zoo wel als de beide zijvlakken of doceringen, dan zal hierdoor een ligchaam ontstaan, dat, zoo wel afzonderlijk, als met het gegevene vereenigd, door de verticale vlakken NGI en OFK in twee driehoekige piramiden, en één driehoekig prisma kan worden verdeeld. De inhoud van het gegevene ligchaam zal dan gelijk zijn, aan de som der inhouden van het vierhoekige prisma BLMCFGIK, en der beide piramiden NHGI en OFKE vermindend met de som der inhouden van de piramiden NABL en OCMD. Gemakkelijker vinden wij echter den inhoud, door op te merken, dat, uit hoofde van de evenwijdigheid der lijnen NO, AD, BC, HE en GF, de figuren NOADBC en NOHEGF afgeknotte driehoekige prisma's zijn, en dat derzelver verschil de gevraagde inhoud is.

Nu is, NB : NB + BG $=$ BL : GI of NB : NB $+ l = h : h'$,

dus $NB \times h' = NB \times h + hl$ en $NB = \frac{hl}{h' - h}$, bijgevolg,

www.libtool.com.cn

$NG = NB + l = \frac{h'l}{h' - h}$. Hieruit volgt dus verder,

$$\textit{Driehoek } NGI = \tfrac{1}{2} NG \times GI = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h'h'l}{h' - h}$$

$$\textit{Driehoek } NBL = \tfrac{1}{2} NB \times BL = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{hhl}{h' - h}$$

wij hebben alzoo

$$\textit{Fig. } NOGPHE = \textit{Driehoek } NGI \times \tfrac{1}{3} (NO + GF + HE)$$
$$= \tfrac{1}{6} \cdot \frac{h'h'l}{h' - h} \times (3b + (m + n) h')$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h'h'}{h' - h} \times bl + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{h'h'h'}{h' - h} \cdot (m + n)$$

$$\textit{Fig. } NOBCAD = \textit{Driehoek } NBL \times \tfrac{1}{3} (NO + BC + AD)$$
$$= \tfrac{1}{6} \cdot \frac{hhl}{h' - h} \times (3b + (m + n) h)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{hh}{h' - h} \times bl + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{hhh}{h' - h} \cdot (m + n)$$

en door deze twee uitdrukkingen van elkander af te trekken, verkrijgen wij voor den inhoud van den dijk

$$I = \tfrac{1}{2} bl \times \frac{h'h' - hh}{h' - h} + \tfrac{1}{6} (m + n) \times \frac{h'h'h' - hhh}{h' - h}$$
$$= \tfrac{1}{2} bl \times (h' + h) + \tfrac{1}{6} (m + n) \times (h'^2 + h'h + h^2)$$
$$= \tfrac{1}{6} l \times \{(h'^2 + h'h + h^2)(m + n) + 3b (h' + h)\}$$

Ter beantwoording van het tweede gedeelte van de vraag, namelijk het bepalen van het punt P, zoodanig dat het profil PQRU op dit punt met de lengte van den dijk vermenigvuldigd, deszelfs inhoud oplevere, kan men de hoogte PT, van het profil op dit punt x ſtellen; alsdan is $RS = mx$ en $TU = nx$, en bijgevolg

$$\textit{Trap } QPRU = \tfrac{1}{2} PT \times (QP + RU) = \tfrac{1}{2} (m + n) x^2 + bx.$$

Het product dezer doorſnede met de lengte van den dijk moet deszelfs inhoud opleveren, en men heeft dus, ter bepaling van x, de vergelijking,

$$\tfrac{1}{2} l (m + n) x^2 + lbx = \tfrac{1}{6} l \{(h'^2 + h'h + h^2)(m + n) + 3b (h' + h)\}$$

en

die door $\frac{1}{2} l (m + n)$ deelende,

$$x^2 + \frac{2b}{m+n} x = \tfrac{1}{3}(h'^2 + h'h + h^2) + \frac{b(H+h)}{m+n}$$

en deze vierkants-vergelijking oplossende,

$$x = -\frac{b}{m+n} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{3}(H'^2 + h'h + h^2) + b \times \frac{(H'+h)(m+n)+b}{(m+n)^2}\right\}}.$$

De afstand van dit gemiddeld profil tot eenig bepaald punt, kan ligtelijk worden gevonden. Begeert men, bij voorbeeld, de afstand van het punt P, tot het ontmoetingspunt O, van de kruin des dijks met den grond, dan heeft men, FK : PT = FÖ : OP, of $H' : x = \frac{H'l}{H'-h} : OP$, waaruit $OP = \frac{lx}{H'-h}$, dat is, wanneer wij voor x de gevondene waarde substituven,

$$QP = \frac{l}{H'-h}\left\{-\frac{b}{m+n} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}(H'^2 + h'h + h^2) + b \cdot \frac{(H'+h)(m+n)+b}{(m+n)^2}\right)}\right\}.$$

De toepassing der positieve waarde van x is gemakkelijk en door middel van dezelve, zal het punt P en het profil op dit punt, ligt berekend kunnen worden.

Ten aanzien der negatieve waarde van x, merke men op, dat de hoogte door $-x$ aangeduid, van het horizontale vlak NOFG, of de kruin des dijks, tot het, beneden hetzelve liggend, grondvlak gerekend is, en derhalve elke negatieve waarde van deze hoogte, aan de andere zijde der lijn NO moet worden gezocht, alwaar het verlengde grondvlak, na het horizontale in NO ontmoet te hebben, zich boven hetzelve verheft. Met den afstand OP of VX is het bijna even zoo gelegen dezelve van X naar V gerekend zijnde, zal de negatieve waarde in de rigting van X naar V' moeten genomen worden. Eindelijk moet bij de berekening van het profil, voor de negatieve waarde van x, in aanmerking genomen worden, dat het profil in het algemeen kan worden beschouwd, als te bestaan uit de som der beide driehoeken RQU en QPU, welke beide de hoogte VW hebben, en dus de uitdrukking voor den inhoud van het profil kan worden voorgesteld door

$$\tfrac{1}{2}(RU + QP) \times VW. \quad \ldots \ldots 5$$

Zien wij thans welke verandering deze formule ondergaat voor het profil, met de negatieve waarde van x overeenkomende.

De

De bazis RU des eenen driehoeks wordt in het eerſte profil bij V, van R naar U gerekend; in het tweede profil bij V′ ligt dezelve in eene tegengeſtelde rigting, en moet derhalve, ten opzigte van het eerſte profil als negatief beſchouwd worden. De lijnen QP en Q′P′ daarentegen behouden in beide profilen dezelfde rigting, en eindelijk is de hoogte van het tweede profil ten opzigte van het eerſte negatief. De formule voor het profil, gaat dus bij V′ over in

$$\tfrac{1}{2}(-R'U' + Q'P') \times -W'V'$$
$$= \tfrac{1}{2}(R'U' - Q'P') \times W'V' = \Delta R'U'Q' - \Delta U'Q'P'$$

en daar beide deze driehoeken het gedeelte U′Q′Y gemeen hebben, wordt de inhoud van dit profil hier eigenlijk

$$\Delta R'U'Y' - \Delta Q'P'Y$$
$$= \tfrac{1}{2} R'U' \times W'Y - \tfrac{1}{2} Q'P' \times V'Y.$$

De te ſubſtituerene waarden voor R′U′, W′Y, Q′P′ en V′Y kunnen voor dit tweede geval op de volgende wijze bepaald worden, waarbij wij nu de gevondene negatieve waarde van x als poſitief in rekening brengen. In *Fig.* 112 heeft men

$U'R' = aP' + Q'd - Q'P' = nx + mx - b = (m+n)x - b$

verder is $Ud : dP' = bQ' : Q'P'$, of $x : nx = bQ : b$, dus $bQ' = \frac{b}{n}$, en op dezelfde wijze is $cP' = \frac{b}{m}$.

Nu is $bQ' : Q'P' = YV' : Q'P' - Q'V'$ en $cP' : P'Q' = YV' : Q'V'$, dat is $\frac{b}{n} : b = YV' : b - Q'V'$ en $\frac{b}{m} : b = YV' : Q'V'$, en bijgevolg, hebben wij $n \times YV' = b - Q'V'$ en $m \times YV' = Q'V'$, zoodat $n \times YV' = b - m\,YV'$, of $(m+n) \times YV' = b$, waaruit $YV' = \frac{b}{m+n}$, en dus $W'Y = W'V' - YV' = x - \frac{b}{m+n} = \frac{(m+n)x - b}{m+n}$; daar wij nu voor den inhoud van dit tweede profil gevonden hebben $\frac{1}{2} R'U' \times W'Y - \frac{1}{2} Q'P' \times V'Y$, zoo verkrijgen wij, door voor de lijnen R U′, W′Y, Q′P′ en V′Y de gevondene waarden te ſtellen, voor den inhoud van dit tweede profil,

$$x\left\{\frac{(m+n)x}{2} - b\right\}$$

waar-

waarin nu voor x de tweede waarde als positief beschouwd, dat is:

$$x = \frac{b}{m+n} + V\left\{\frac{1}{3}(h^2+hH+H^2)+b.\frac{(H+h)(m+n)+b}{(m+n)^2}\right\}$$

moet worden gesubstitueerd.

VOORBEELD. Zij $l = 600$, $b = 20$, $h = 10$, $H = 15$, $m = 3$ en $n = 2$ voeten, dan wordt de formule voor den inhoud,

$$I = 100\left\{(225+150+100)\times 5+60\times 25\right\}$$
$$= 100\,(5\times 475+60\times 25) = 100\,(2375+1500)$$
$$= 387500 \textit{ cubieke voeten.}$$

De formule voor x geeft

$$x = -4 \pm V\left(\frac{475}{3}+\frac{500}{5}+\frac{400}{25}\right) = -4 \pm V\,274{,}333$$
$$= -4 \pm 16{,}563$$

dat is $x = 12{,}563$ of $x = -20{,}563$.

Het gemiddeld profil wordt, voor de positieve waarde van x,

$$x\left\{\frac{(m+n)x}{2}+b\right\} = 12{,}563\times\left\{\frac{5\times 12{,}563}{2}+20\right\}$$
$$= 12{,}563\times 51{,}4075 = 645{,}832.$$

en dit vermenigvuldigd met $l = 600$, geeft voor den inhoud 387499,454, hetgeen minder dan eenen cubieken voet van den waren inhoud verschilt.

Voor de negatieve waarde van x verkrijgen wij, het bovengezegde in aanmerking nemende,

$$x\left\{\frac{(m+n)x}{2}-b\right\} = 20{,}563\times\left\{\frac{5\times 20{,}563}{2}-20\right\} = 645{,}832$$

even als boven.

CLIX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Een welgesteld landman wordt door vele onheilen in het ongeluk gedompeld; van zijne talrijke kudde, waarbij hij nog tweemaal zoo veel kocht, als hij had, worden door eenen ongelukkigen brand, die zijne gansche woning vernielde, 30 beesten verteerd; aan de

veepest verliest hij de $\frac{2}{5}$ van al wat hem na den brand was overgebleven; terwijl eindelijk, van dit hem nog overblijvend gedeelte, 7 beesten door hagel gedood worden, zoodat hij nu slechts 23 stuks behield. Hoe groot was zijne kudde voor hij den aankoop deed?

www.boeken.com.cn

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., J. PEEREBOOM, A. VAN DER SWAN en R. LOBATTO.

Stel dat de kudde beſtond uit x beesten, dan was dezelve na den aankoop groot $3x$ beesten; na den brand, waarbij hij 30 ſtuks verloor, bleven hem nog $3x - 30$ beesten, hiervan verloor hij door veepest de $\frac{2}{5}$ en behield dus nog $\frac{3}{5}x - 6$ ſtuks vee, waarvan hem nogmaals 7 beesten door hagel gedood werden, en hij dus $\frac{3}{5}x - 13$, of volgens het Voorſtel, 23 beesten overbleef; wij hebben dus de vergelijking $\frac{3}{5}x - 13 = 23$, of $\frac{3}{5}x = 36$, zoodat $3x = 5 \cdot 36$ en dus $x = 5 \cdot 12 = 60$ ſtuks vee.

CLX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Als men van drie getallen, het verſchil der vierkanten van de beide eerſte deelt door het derde, komt er 27, en als men de ſom der vierkanten van de beide eerſte deelt door het derde, dan komt er 123. Wat zal er uitkomen, wanneer men het product van de beide eerſte deelt door het derde? (41)

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., R. LOBATTO, J. PEEREBOOM en A. VAN DER SWAN.

Stel de getallen x, y en z, dan is gegeven $\frac{x^2 - y^2}{z} = 27$ en $\frac{x^2 + y^2}{z} = 123$; deze vergelijkingen optellende en aftrekkende, komt er, na door 2 gedeeld te hebben, $\frac{x^2}{z} = 75$ en $\frac{y^2}{z} = 48$; deze twee uitdrukkingen vermenigvuldigende, komt

(41) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 98, N°. 13.

er $\frac{x^2y^2}{z^2} = 75 \cdot 48 = 25 \cdot 144$, waarvan de vierkantswortel is $\frac{xy}{z} = 5 \cdot 12 = 60$ voor het begeerde quotient.

www.libtool.com.cn

AANMERKING. *Door* R. LOBATTO. Wijl het problema slechts twee vergelijkingen doch drie onbekenden bevat, is hetzelve onbepaald, en men kan een der onbekenden, bij voorbeeld, z naar welgevallen aannemen, en daardoor de twee anderen x en y bepalen; wil men nu voor x, y en z geheele rationale getallen hebben, zoo merke men op dat $x^2 = 75z$ en $y^2 = 48z$ zijnde, $x = 5\sqrt{3z}$ en $y = 4\sqrt{3z}$ is; nemende dus $z = 3p^2$, en voor p eenig geheel getal, dan zal aan het begeerde voldaan zijn, want dan is $z = 3p^2$; $x = 15p$ en $y = 12p$.

Stellende, bij voorbeeld, $p = 1$, dan is $x = 15$, $y = 12$ en $z = 3$; nemende $p = 2$, dan is $x = 30$, $y = 24$ en $z = 12$ *enz.*

CLXL. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Zoek twee getallen, wiens vierkanten te zamen doen 585, *en zoo men het product der getallen addeert tot de som der getallen, dat er* 285 *komt?* (42)

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE Jr., R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN en J. PEEREBOOM.

Stel de getallen x en y, dan is $x^2 + y^2 = 585$ en $xy + x + y = 285$. De laatste vergelijking met 2 vermenigvuldigende en bij dit product de eerste optellende verkrijgen wij

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 1155$$

of wat hetzelfde is,

$$(x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 1156$$

en trekkende men van beide zijden de vierkants-wortel

$$x + y + 1 = \pm 34$$

zoodat $x + y = 33$ of $x + y = -35$. Stellen wij dit kortheidshalven $x + y = p$.

Trek-

(42) O. S. BANOMA, *Algebra*, *pag.* 269. N°. 9.

Trekkende nu van $2x^2 + 2y^2 = 1170$, af $(x + y)^2 = p^2$ dan blijft er over $(x - y)^2 = 1170 - p^2$, en bijgevolg is $(x - y) = \pm \sqrt{(1170 - p^2)}$, en daar $x + y = p$ is, zoo verkrijgen wij

www.libtool.com.cn

$$x = \tfrac{1}{2} p \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(1170 - p^2)}$$
$$y = \tfrac{1}{2} p \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{(1170 - p^2)}.$$

Nemen wij nu $p = 33$, dan is $\sqrt{(1170 - p^2)} = 9$ en dit geeft ons $x = 21$ en $y = 12$ of $x = 12$ en $y = 21$.

Nemen wij echter $p = -35$, dan wordt $\sqrt{(1170 - p^2)} = \sqrt{-55}$ en dit geeft het onbeſtaanbare antwoord

$$x = \tfrac{1}{2}(-35 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-55}) \; ; \; y = \tfrac{1}{2}(-35 \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{-55})$$

Er is dus ſlechts een beſtaanbaar antwoord op het Voorſtel; de gevraagde getallen zijn namelijk 12 en 21.

CLXII. VOORSTEL.

Door O. S. BANGMA.

Eenen gegevenen driehoek ABC, Fig. 113, te verdeelen in zeven ſtukken, door drie lijnen, AD, BE en CF, uit de hoekpunten tot de overſtaande zijden getrokken; zoodanig dat de vier driehoeken AGE, BHF, CID en GHI, gelijk aan elkander worden; en dat ook de drie vierhoeken AFHG, ADIH en CEGI gelijk aan elkander worden?

OPLOSSING. Door O. S. BANGMA.

Stel $\triangle$ AGE $=$ $\triangle$ BHF $=$ $\triangle$ CID $=$ $\angle$ GHI $= x$, en *vierh.* AFHG $=$ *vierh.* BDIH $=$ *vierh.* CEGI $= y$; dan is

$$\text{AB} \times \text{EB} : \text{FB} \times \text{HB} = \triangle \text{ ABE} : \triangle \text{ FBH}$$
$$= 2x + y : x$$

maar wij hebben

$$\text{EB} : \text{HB} = \triangle \text{ CBE} : \triangle \text{ CBH} = 2(x+y) : x+y = 2 : 1$$

en bijgevolg,

$$2 \text{ AB} : \text{FB} = 2x + y :$$
$$\text{of } 2 \text{ AB} : 2 \text{ AB} - \text{FB} = 2x + y : x + y$$
$$\text{dat is AB} : 2 \text{ AB} - \text{FB} = 2x + y : 2x + 2y$$
$$= \triangle \text{ BCF} : \triangle \text{ ACF}$$
$$= \text{BF} : \text{AF}$$
$$\text{dus AB} : \text{BF} = 2 \text{ AB} - \text{BF} : \text{AF}$$

of

of AB — BF : BF = 2 AB — BF — AF : AF
dat is AF : BF = AB : AF.

Hieruit blijkt, dat AB in de uiterſte en middelſte reden geſneden moet worden, door het punt F. Op gelijke wijze zullen BC en AC, door de punten D en E in de uiterſte en middelſte reden moeten worden geſneden, en hierdoor is dan de conſtructie openbaar.

www.libtool.com.cn

CLXIII. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Wanneer men de jaren mijner beide kinderen te zamen telt, is de ſom een quadraat, welks wortel het verſchil hunner jaren is; terwijl het verſchil der quadraten van hunne jaren wederom een quadraat is, waarvan de wortel 8 *uitmaakt. Hoe oud zijn zij dan?*

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN en R. LOBATTO.

Stel de jaren x en y, dan is, door het voorſtel, $\sqrt{(x+y)} = x-y$, en $\sqrt{(x^2-y^2)} = 8$, bijgevolg $x+y = (x-y)^2$ en $x^2-y^2 = 64$. De eerſte van deze vergelijkingen, met $x-y$ vermenigvuldigd, geeft $x^2-y^2 = (x-y)^3$, en dus $(x-y)^3 = 64$, waaruit $x-y = 4$, en dus $x+y = (x-y)^2 = 16$, zoodat $2x = 20$ en $2y = 12$, en bijgevolg $x = 10$ en $y = 6$.

ANDERE OPLOSSING. Door J. PEEREBOOM, R. VAN WIJK Jz., en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel de jaren der kinderen $x+y$ en $x-y$, dan is $\sqrt{2x} = 2y$ en $\sqrt{4xy} = 8$, of $2x = 4y^2$ en $4xy = 64$. De eerſte dezer vergelijkingen door 2 deelende, bekomt men $x = 2y^2$, en dit in de vergelijking $4xy = 64$ gebragt, heeft men $8y^3 = 64$, of $y^3 = 8$, waaruit $y = 2$, en $x = 2y^2 = 8$; zoodat de gevraagde jaren zijn $x+y = 10$ en $x-y = 6$.

CLXIV. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Wanneer van drie gedurig meetkundig evenredige getallen, ieder getal bijzonder in 625 *wordt gedeeld, zijn deze drie quotienten*

te zamen geteld, gelijk aan de som der drie getallen; terwijl het product van het tweede en derde 625 maken het eerste of kleinste getal is. Welke zijn die getallen?

www.bibliotheek.nl

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN, J. PEERBOOM, R. LOBATTO, H. VAN KRAAIJENOORD en R. VAN WIJK Jz.

Stel de gevraagde getallen x, xy en xy^2, dan is door de voorwaarden van het voorstel,

$$\frac{625}{x} + \frac{625}{xy} + \frac{625}{xy^2} = x + xy + xy^2 \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$x^2y^2 = 625x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke ook aldus kunnen geschreven worden,

$$\frac{625\,(y^2 + y + 1)}{xy^2} = x\,(y^2 + y + 1) \quad . \quad . \quad (3)$$

en $$xy^2 = 625 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deelende nu (3) door $y^2 + y + 1$ komt er $625 = x^2y^2$, dus $xy = 25$, of $x = \frac{25}{y}$, en substituerende dit in (4), dan verkrijgen wij $25y^2 = 625$, dus $y^2 = 25$ en $y = 5$, waardoor $x = \frac{25}{y} = 5$, en de gevraagde getallen zijn alzoo 5, 25 en 125.

CLXV. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Eene rekenkunstige reeks van drie termen is zodanig, dat de eerste term vermenigvuldigd met den tweeden, en dit product geteld bij het vierkant van den derden, er komt 74; en dat het vermenigvuldigde van den tweeden en derden 40 uitmaakt. Welke zijn die termen?

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN, K. LOBATTO, J. PEERBOOM, R. VAN WIJK Jz. en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel de termen x, $x + y$ en $x + 2y$, dan is door het voorstel

$$x\,(x + y) + (x + 2y)^2 = 74$$

en $$(x + y)\,(x + 2y) = 40$$

dat is, alles ontwikkelende,

$$2x^2 + 5xy + 4y^2 = 74 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 40 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nemende nu (2) tweemaal, en trekkende hiervan (1) af, dan blijft er $xy = 6$ en dus $y = \frac{6}{x}$, hetwelk in (2) gesubstitueerd zijnde, geeft

$$x^2 + 18 + \frac{72}{x^2} = 40$$

dat is $x^4 + 18x^2 + 72 = 40x^2$

of $x^4 - 22x^2 + 72 = 0$

uit welke vierkants-vergelijking gevonden wordt

$$x^2 = 18 \text{ of } x^2 = 4$$

en dus $x = \pm 3\sqrt{2}$ of $x = \pm 2$

Nemende nu $x = 2$, dan is $y = \frac{6}{x} = 3$; en de getallen zijn 2, 5 en 8.

Nemende $x = -2$, dan is $y = \frac{6}{x} = -3$, en de getallen worden -2, -5 en -8.

Indien wij $x = 3\sqrt{2}$ nemen, dan is $y = \frac{6}{x} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ en dan zijn de gevraagde getallen $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ en $5\sqrt{2}$.

Stellen wij eindelijk $x = -3\sqrt{2}$, dan wordt $y = -\sqrt{2}$, en wij verkrijgen voor de getallen $-3\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$ en $-5\sqrt{2}$.

CLXVI. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Van eenen ſcherphoekigen driehoek ACB, Fig. 114, wordt de baſis AB, door de loodlijn CD, die uit den top C op dezelve wordt nedergelaten, zoodanig in twee ongelijke deelen AD en DB gedeeld, dat het kleinſte deel DB dan de zijde CB grenst; wanneer nu de ſom der zijde CB en der gemelde deelen AD en DB gelijk 17, de ſom van derzelver quadraten gelijk 105 en de ſom hunner cuben gelijk 701 is, zoo vraagt men naar de zijden van den driehoek?

OPLOSSING. Door R. van Wijk Jz, R. Lobatto, H. G. Witlage Jr., J. Peereboom en A. van der Swan.

Stel BC $= x$; BD $= y$ en AD $= z$, dan hebben wij deze drie vergelijkingen,

$$x + y + z = 17 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 105 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 791 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Brengende (1) in het vierkant, en trekkende hiervan af de vergelijking (2), verkrijgen wij, na door twee gedeeld te hebben,

$$xy + xz + yz = 92 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Multiplicerende (1) en (2) en trekkende van het product af de vergelijking (3) dan blijft er

$$xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z = 1084 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en vermenigvuldigende (1) en (4) dan verkrijgen wij,

$$xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z + 3xyz = 1564 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en deelende het verschil van (6) en (5) door drie, dan komt er

$$xyz = 160 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De vergelijkingen (1), (4) en (7) doen dus de som, de som der producten twee aan twee en het product der drie getallen x, y en z kennen; en deze getallen moeten alzoo de wortels zijn van de vergelijking,

$$X^3 - 17X^2 + 92X - 160 = 0$$

en daar de wortels van deze vergelijking zijn 4, 5 en 8, zoo zijn dit ook de waarden van x, y en z.

Er blijft nu alleen over, te onderzoeken, welke dezer getallen voor x, y en z moeten genomen worden. Het voorstel zegt dat DB $<$ AD en dus $y < z$ moet zijn. De figuur toont bovendien ten duidelijkste aan, dat BD $<$ BC en dus $y < x$ moet genomen worden; doch er is niets dat ons zegt of BC $>$ of $<$ AD, dat is, of $x >$ of $< z$ moet zijn. Dit geeft ons derhalven deze twee antwoorden,

$$1^\circ. \quad x = 8; \; y = 4 \text{ en } z = 5$$
$$2^\circ. \quad x = 5; \; y = 4 \text{ en } z = 8.$$

Voor de eerste is BC $= x = 8$; AB $= y + z = 9$ en AC $= \sqrt{\{AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BD\}} = \sqrt{73}$.

Het tweede antwoord is BC $= x = 5$; AB $= y + z = 12$ en AC $= \sqrt{\{AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BD\}} = \sqrt{73}$.

CLXVII.

CLXVII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

www.dbtbibliotheek.nl

Zoek twee getallen, welker quadraten te zamen 1553 *uitmaken, en zoodanig dat derzelver som, afgetrokken van derzelver product, het verschil* 681 *zij?* (43)

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., J. PEEREBOOM, R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN, H. VAN KRAAIJENOORD en R. VAN WIJK JZ.

Stel de getallen $x + y$ en $x - y$, dan zijn de vergelijkingen $2x^2 + 2y^2 = 1553$ en $x^2 - y^2 - 2x = 681$. Wanneer deze laatste vergelijking met twee vermenigvuldigd wordt, komt er $2x^2 - 2y^2 - 4x = 1362$; hierbij de eerste tellende, komt $4x^2 - 4x = 2915$, of $4x^2 - 4x + 1 = 2196$, waaruit $2x - 1 = \pm 54$, en dus $2x = 55$, of $2x = -53$, zoodat $x = 27\frac{1}{2}$ of $x = -26\frac{1}{2}$.

Uit de vergelijking $2x^2 + 2y^2 = 1553$, heeft men verder $y^2 = \frac{1}{2}(1553 - 2x^2)$, en dus $y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1553 - 2x^2)}$ Laat ons nu zien welke antwoorden hieruit ontstaan.

Nemende $x = 27\frac{1}{2}$, dan is $y = \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \pm 4\frac{1}{2}$, en of wij hier het bovenste of benedenste teeken gebruiken, vinden wij in beide gevallen, voor de gevraagde getallen 23 en 32.

Het tweede antwoord $x = -26\frac{1}{2}$ gebruikende, vinden wij $y = \pm \sqrt{\frac{9 \times 33}{4}} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{33}$, en voor beide teekens van y geeft dit voor de getallen $-26\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{33}$ en $-26\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, welken even goed als de voorgaande aan het vraagstuk beantwoorden.

CLXVIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Zoek twee getallen welker som is 13, *en zoodanig dat, zoo men de*

(43) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 289. N°. 11.

de ſom hunner cuben, met de cubus van het kleinſte vermenigvuldigt, het product 79625 zij? (44)

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., J. PEEREBOOM, A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, R. VAN WIJK JZ. en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel het kleinſte der gevraagde getallen x, dan is het grootſte $13 - x$, en wij hebben de vergelijking,

$$((13 - x)^3 + x^3) \times x^3 = 79625,$$

of $(2197 - 507x + 39x^2) \times x^3 = 79625$

dat is $39x^5 - 507x^4 + 2197x^3 - 79625 = 0$

of alles door 13 deelende,

$$3x^5 - 39x^4 + 169x^3 - 6125 = 0$$

Hieruit vindt men $x = 5$, en dus zijn de getallen 5 en 8.

CLXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Van een vierhoek, waarvan twee overſtaande hoeken regt zijn, is gegeven een der overige hoeken, benevens de twee zijden om dien gegevenen hoek. Men vraagt de twee overige zijden te bepalen?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Laat NMKL, *Fig.* 115, de vierhoek zijn, waarin N en K de regte hoeken. Stel de gegevene zijden NL en LK gelijk n en m, en de bekende hoek L gelijk α; trek de diagonalen NK en LM, dan liggen de punten N en K in den omtrek van den cirkel op LM beſchreven, en LK is alzoo ook de middellijn des omgeſchrevenen cirkels van den driehoek NLK.

Omdat nu de middellijn van den omgeſchrevenen cirkel eens driehoeks, gelijk is aan het product der zijden, gedeeld door tweemaal den inhoud van den driehoek, zoo zullen wij, NK $= p$ ſtellende, hebben

$$LM = \frac{mnp}{2 \triangle NLK}$$

waar $p = \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \cos. \alpha)}$ en $\triangle NLK = \frac{1}{2} mn \times \sin. \alpha$, bij gevolg,

$$LM =$$

(44) STRABBE, *Inleiding enz. pag.* 256. N°. 214

$$LM = \frac{mn\sqrt{(m^2+n^2-2mn\,Cos.\,a)}}{nm\,Sin.\,a} = \frac{\sqrt{(m^2+n^2-2mn\,Cos.\,a)}}{Sin.\,a}$$

www.libtool.com.cn

Hieruit vinden wij dus,

$$MK = \sqrt{(LM^2-m^2)} = \sqrt{\left(\frac{m^2+n^2-2mn\,Cos.\,a}{Sin^2.\,a}-m^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2\,Cos^2.\,a-2mn.\,Cos.\,a+n^2}{Sin^2.\,a}}$$

$$= \pm\frac{m\,Cos.\,a-n}{Sin.\,a}$$

en op dezelfde wijze vindt men

$$MN = \pm\frac{n\,Cos.\,a-m}{Sin.\,a}.$$

Wij moeten in deze formulen het bovenſte of benedenſte teeken gebruiken, naarmate de tellers poſitief of negatief worden.

Andere Oplossing. Door R. Lobatto.

Laat alles geſteld worden zoo als in de voorgaande oplosſing, en ſtellen wij bovendien $\angle$ MLN $= \frac{1}{2}a+\phi$ en $\angle$ MLK $= \frac{1}{2}a-\phi$, dan is AC $= m\,Sec.\,(\frac{1}{2}a-\phi) = n\,Sec.\,(\frac{1}{2}a+\phi)$ waaruit volgt,

$$Cos.\,(\tfrac{1}{2}a-\phi) : Cos.\,(\tfrac{1}{2}a+\phi) = m : n$$

of, $Cos.\,(\frac{1}{2}a-\phi)+Cos.\,(\frac{1}{2}a+\phi) : Cos.\,(\frac{1}{2}a-\phi)-Cos.\,(\frac{1}{2}a+\phi)$

$$\ldots\ldots\ldots = m+n : m-n$$

dat is $\quad Cot.\,\frac{1}{2}a : Tang.\,\phi = m+n : m-n$

en bij gevolg $\quad Tang.\,\phi = \frac{m-n}{m+n}\times Cot.\,\frac{1}{2}a.$

Verder heeft men

$$MK = CK \times Tang.\,MLK = m \times Tang.\,(\tfrac{1}{2}a-\phi)$$

$$= m \times \frac{Tang.\,\frac{1}{2}a - Tang.\,\phi}{1+Tang.\,\frac{1}{2}a\times Tang.\,\phi}$$

en ſtellende in den noemer voor $Tang.\,\phi$ de gevondene waarde

$$MK = m\times\frac{Tang.\,\frac{1}{2}a-Tang.\,\phi}{1+\frac{m-n}{m+n}} = \tfrac{1}{2}(m+n)(Tang.\,\tfrac{1}{2}a-Tang.\,\phi)$$

$$= \tfrac{1}{2}(m+n)\left(\frac{Sin.\,\frac{1}{2}a}{Cos.\,\frac{1}{2}a}-\frac{Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi}\right) = \frac{(m+n)\,Sin.\,(\frac{1}{2}a-\phi)}{2\,Cos.\,\frac{1}{2}a.\,Cos.\,\phi}$$

en op dezelfde wijze vinden wij,

$$MN = n \times Tang\ (\tfrac{1}{2}a + \phi) = \frac{(m+n)\ Sin.\ (\tfrac{1}{2}a + \phi)}{2\ Cos.\ \tfrac{1}{2}a\ .\ Cos.\ \phi}.$$

www.libtool.com.cn

Wij verkrijgen alzoo dit ſtelſel van vergelijkingen,

1°. $Tang.\ \phi = \frac{m-n}{m+n} \times Cos.\ \frac{1}{2}a$

2°. $\Omega = \frac{m+n}{2\ Cos.\ \frac{1}{2}a \times Cos.\ \phi}$

3°. $MK = \Omega \times Sin.\ (\frac{1}{2}a - \phi)$; $NM = \Omega \times Sin.\ (\frac{1}{2}a + \phi)$.

Deze oplosſing is zeer geſchikt tot de berekening door logarithmen.

CLXX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

In een cirkelvormig ſtuk land ſtaan drie baken A, B en C, Fig. 116, wanneer men nu in de rigting of rooilijn van de baken A en B, de ſtukken AD en BE meet, begrepen tuſſchen de baken A en B en den omtrek van den cirkel, en men deze afſtanden vindt a en d roeden; verder in de rigting van de baken A en C, op gelijke wijze te werk gaande, meet AF = b en CG = e roeden; en eindelijk in de rigting van de baken B en C, op dezelfde wijze gemeten wordt, BI = c en CH = f roeden, dan vraagt men; 1°. hierdoor de onderlinge afſtanden van de drie baken te berekenen, en 2°. den ſtraal en den inhoud van het ſtuk land te vinden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Stel de drie gevraagde afſtanden AB = x, AC = y en BC = z; dan is, volgens de bekende eigenſchap van den cirkel, DA × AE = FA × AG; HC × CI = GC × CF en IB × BH = EB × BD; dit geeft ons de volgende vergelijkingen,

$$a\ (x + d) = b\ (y + e)$$
$$f\ (z + c) = e\ (y + b)$$
$$c\ (z + f) = d\ (x + a)$$

welke, ontwikkeld zijnde, geven

$$ax + ad = by + be$$
$$fz + cf = ey + be$$
$$cz + cf = dx + da$$

af

of wat het zelfde is,

$$ax - by = be - ad \quad \ldots\ldots (1)$$
$$cy - fz = cf - be \quad \ldots\ldots (2)$$
$$cz - dx = ad - cf \quad \ldots\ldots (3)$$

www.libtool.com.cn

Wij hebben dus drie vergelijkingen met drie onbekenden, waaruit wij x, y en z, op de volgende wijze vinden.

Uit de derde is,

$$z = \frac{dx + ad - cf}{c}$$

brengende deze waarde van z over in de tweede, dan komt er

$$y = \frac{fx + cf - be}{e}$$
$$= \frac{dfx + adf - cf^2 + c^2f - bce}{ce}$$

en deze waarde van y in de eerste overgebragt, verkrijgt men

$$x = \frac{by + be - ad}{a}$$
$$= \frac{bdfx + abdf - bef^2 + bc^2f - b^2ce + bce^2 - acde}{ace}$$

waaruit dan gemakkelijk gevonden wordt,

$$x = \frac{abdf - bef^2 + bc^2f - b^2ce + bce^2 - acde}{ace - bdf}.$$

Op dezelfde wijze kan men ook y en z vinden, en deze waarden van x, y en z, kunnen aldus geschreven worden,

$$AB = x = \frac{ad\,(bf - ce) + be\,(e^2 - f^2 + cf - be)}{ace - bdf}$$

$$AC = y = \frac{be\,(fd - ac) + af\,(c^2 - d^2 + ad - cf)}{ace - bdf}$$

$$BC = z = \frac{cf\,(db - ea) + de\,(a^2 - b^2 + eb - ad)}{ace - bdf}$$

waardoor aan het eerste gedeelte van de vraag voldaan is.

Wij kunnen nu ook de koorden DE, FG en HI gemakkelijk berekenen; want wij hebben $DE = a + d + x$; $FG = b + e + y$ en $HI = c + f + z$, dat is, wanneer wij hierin de waarden van x, y en z brengen, en de tellers behoorlijk herleiden,

$$DE = \frac{(a^2 - b^2)\,ce + (c^2 - d^2)\,bf + (e^2 - f^2)\,bc}{ace - bdf}$$

$$FG = \frac{(e^2 - f^2)\,ac + (a^2 - b^2)\,fd + (c^2 - d^2)\,eb}{ace - bdf}$$

$$HI = \frac{(c^2 - d^2)\,ae + (e^2 - f^2)\,db + (a^2 - b^2)\,dc}{ace - bdf}.$$

www.dbnl.com.cn

De afſtanden der baken en de lengten der koorden berekend hebbende, kunnen wij het tweede gedeelte van het vraagſtuk gemakkelijk oplosſen.

Trekken wij te dien einde, uit het middelpunt M, de loodlijnen MN en MK, dan hebben wij eenen vierhoek MNAK, waarin de hoeken N en K regt zijn. In deze vierhoek kunnen wij, omdat x, y en z gevonden zijn, als bekend aanmerken,

$$NA = NF - FA = \tfrac{1}{2}(y + e - b)$$
$$KA = KD - DA = \tfrac{1}{2}(x + d - a)$$
$$Cos.\ A = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}$$

en wanneer wij door deze formulen NA, AK en $\angle$ A berekend hebben, dan is door het voorgaande vraagſtuk,

$$MK = \pm \frac{AK \times Cos.\ A - AN}{Sin.\ A}$$

en bij gevolg de gevraagde ſtraal,

$$ME = \sqrt{(AK^2 + MK^2)}$$

waardoor dan ook de inhoud van den cirkel, dat is, $ME^2 \times \pi$ bekend wordt.

1°. Aanmerking. Tellen wij de vergelijkingen (1), (2) en (3) bij elkander, dan verkrijgen wij,

$$(a - d)\,x + (e - b)\,y + (c - f)\,z = 0$$

dat is,

$$(DA - BE) \times AB + (GC - AF) \times CA + (BI - CH) \times BC = 0$$

hetgeen eene zeer merkwaardige eigenſchap van den cirkel is.

2°. Aanmerking. Indien de baken A, B en C, in plaats van binnen den cirkel, buiten dezelve geplaatst waren, zie *Fig.* 117, zou de oplosſing weinig van de opgegevene verſchillen; want ſtellende hier wederom $AB = x$, $AC = y$ en $BC = z$, dan zijn de drie vergelijkingen,

$$a\,(x - d) = b\,(y - e)$$
$$f\,(z - c) = e\,(y - b)$$
$$c\,(z - f) = d\,(x - a)$$

Wij zullen bij dit geval niet langer ſtil ſtaan, omdat deze ver-

ge-

gelijkingen niets anders zijn, dan de vergelijkingen (1), (2) en (3), waarin alle lijnen a, b, c, d, e en f, in plaats van positief, negatief geworden zijn. Men zal dus van al de overige formulen der gegevene oplossing gebruik kunnen maken, indien men de gegevene grootheden a, b, c, d, e en f, in dezelve slechts van teeken doet veranderen.

Opmerkelijk is het dat de vergelijking van de 1°. aanmerking, door deze substitutie volstrekt geene verandering ondergaat, en dat de eigenschap des cirkels, door die vergelijking uitgedrukt, bij gevolg algemeen is, of de punten A, B en C binnen, dan wel buiten den cirkel gelegen zijn.

CLXXI. VOORSTEL.

Door H. VAN WESSEM Jz.

Van vier soorten van koopwaren, het pond van 12, 20, 25 *en* 36 *stuivers, moeten* 4000 *pond voor* 4000 *gulden ingekocht worden. Men vraagt op hoeverlei wijzen deze inkoop geschieden kan?*

OPLOSSING. Door H. VAN WESSEM Jz.

Men stelle w pond van 12, x pond van 20, y pond van 25 en z pond van 36 stuivers, dan is

$$w + x + y + z = 4000$$
$$12w + 20x + 25y + 36z = 80000$$

en trekkende 12 maal de eerste van de tweede vergelijking af, dan blijft er,

$$8x + 13y + 24z = 32000$$

dus $$8x = 32000 - 24z - 13y$$

of $$x = 4000 - 3z - y - \tfrac{5}{8}y$$

waaruit volgt, dat y noodzakelijk door 8 moet deelbaar zijn. Stellende dan $y = 8p$, dan hebben wij,

$$y = 8p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$x = 4000 - 3z - 13p \quad (2)$$

en omdat $w = 4000 - (x + y + z)$ is,

$$w = 2z + 5p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wanneer nu voor p en z geheele getallen genomen worden, dan zullen ook y, x en w geheele getallen zijn; doch deze waar-

waarden van p en z moeten nu nog zoo bepaald worden, dat w, x, y en z daarenboven positief zijn.

Voor eerst is het klaar, dat p niet kleiner dan 1 mag genomen worden, want nemende $p = 0$ of p negatief, dan zou ook y gelijk nul of negatief worden. De kleinste waarde van p is alzoo $p = 1$.

Ten anderen merken wij op, dat, p en z positief nemende, ook y en w positief zullen zijn, en dat bij gevolg de overige bepalingen, ten opzigten van p en z, alleen uit de vergelijking (2) kunnen getrokken worden.

Deze vergelijking (2) geeft ons $x + 3z = 4000 - 13p$; wij zien hieruit dat $13p$ kleiner dan 4000 en dus $p < 307\frac{9}{13}$ moet zijn, waaruit volgt dat de grootste waarde, welke voor p mag worden genomen, is $p = 307$. Wij mogen alzoo voor p nemen al de achtervolgende getallen van 1 tot 307 ingesloten.

Dit aangetoond hebbende doet ons die zelfde vergelijking (2), voor ieder waarde van p, het aantal der mogelijke waarden van z kennen, dat is, het aantal antwoorden dat met die waarde van p overeenstemt, voor $p = 307$, bij voorbeeld wordt de vergelijking (2),

$$x = 9 - 3z$$

en hieruit blijkt, dat voor $p = 307$, z geen andere waarden kan hebben als 1 en 2; want $z = 3$ nemende zou $x = 0$ worden. Wanneer dan $p = 307$ is kunnen er slechts 2 antwoorden bestaan.

Op deze wijze vinden wij het volgende tafeltje:

$p = 307$, *geeft* $x = 9 - 3z$, *dus*	2 *antwoorden.*
$p = 306$ . . $x = 22 - 3z$ . .	7 . . . . .
$p = 305$ . . $x = 35 - 3z$ . .	11 . . . . .
$p = 304$ . . $x = 48 - 3z$ . .	15 . . . . .
$p = 303$ . . $x = 61 - 3z$ . .	20 . . . . .
$p = 302$ . . $x = 74 - 3z$ . .	24 . . . . .
$p = 301$ . . $x = 87 - 3z$ . .	28 . . . . .
$p = 300$ . . $x = 100 - 3z$ . .	33 . . . . .
&c. &c.	&c.

$p =$

$p = 4 \ldots x = 3948 - 3z \ldots 1315 \ldots\ldots$

$p = 3 \ldots x = 3961 - 3z \ldots 1320 \ldots\ldots$
$p = 2 \ldots x = 3974 - 3z \ldots 1324 \ldots\ldots$
$p = 1 \ldots x = 3987 - 3z \ldots 1328 \ldots\ldots$

www.libtool.com.cn

In deze reeks van antwoorden merken wij op dat elke twee termen, waar tusschen een sterretje geplaatst is met 5 opklimmen, terwijl de opklimming van al de overige 4 is. Dit leert ons dat het getal der antwoorden uit de som van drie rekenkunstige reeksen bestaat, welke alle met 13 opklimmen, namelijk uit de reeksen

2, 15, 28, *enz.* . . . *tot* 1315
7, 20, 33, *enz.* . . . *tot* 1320
11, 24, 37, *enz.* . . . *tot* 1324

welke reeksen allen uit 102 termen bestaan, en dat bij de som dezer reeksen nog zal moeten worden geteld het getal 1328 dat met $p = 1$ overeenstemt.

Daar deze reeksen alle met 13 opklimmen en evenveel termen hebben, zullen de sommen der overeenkomstige termen, wederom eene rekenkunstige reeks van 102 termen uitmaken, namelijk de reeks,

20, 59, 98 *enz.* . . . *tot* 3959

doch deze klimt nu met 39 op.

De som dezer reeks is alzoo

$$(20 + 3959) \times \tfrac{1}{2} \times 102 = 202929$$

en tellende hierbij 1328 komt er, voor het aantal wijzen waarop de inkoop geschieden kan 204257.

CLXXII. VOORSTEL.

Door H. VAN WESSEM JZ.

Een koopman had bij eenen fabrikant, voor 180 *dukaten, eenige stukken laken gekocht, die hij bij eenen zijner correspondenten had laten liggen, om denzelve, bij eene goede gelegenheid, over te zenden. Voor dat het laken afgezonden kon worden, stierf de koopman plotselijk, en na eenigen tijd zond de correspondent* 10 *stukken. Men wist niet of dit getal overeenkomstig de waarheid ware; maar*

men herinnerde zich, dat de overledene gezegd had, wanneer hij den aankoop eenen dag vroeger had gedaan, dat hij als dan voor denzelfden prijs drie ſtukken meer, en het ſtuk drie dukaten goedkooper had kunnen koopen. Hoeveel ſtukken waren er werkelijk geweest? (45)

OPLOSSING DOOR H. VAN WESSEM JZ., R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN en J. PEEREBOOM.

Het wezenlijke getal der ſtukken zij x, dan is $\frac{180}{x}$ de prijs van een ſtuk; maar ingevolgen het voorſtel kan men den prijs van ieder ſtuk ook door $\frac{180}{x+3}+3$ uitdrukken, derhalve heeft men

$$\frac{x}{180} = \frac{180}{x+3} + 3$$

of met $x(x+3)$ vermenigvuldigende

$$180(x+3) = 180x + 3x(x+3)$$

dat is $180x + 540 = 180x + 3x^2 + 9x$

of $3x^2 + 9x - 540 = 0$

dat is $x^2 + 3x - 180 = 0$

uit welke vierkants-vergelijking gevonden wordt $x = 12$ of $x = -15$.

De tweede waarde van x negatief zijnde is hier niet geldig; en het aantal der aangekochte ſtukken is dus 12.

CLXXIII. VOORSTEL.

Door H. VAN WESSEM JZ.

Twee kooplieden hebben te zamen eene ſom van a gulden ingelegd; A laat zijn aandeel gedurende den tijd t, en B het zijnen gedurende den tijd t' ſtaan. Indien een ieder nu aan kapitaal en interest dezelfde ſom s krijgt, dan verlangt men den inleg van elken koopman te weten? (46)

OPLOSSING. Door H. VAN WESSEM JZ. en R. LOBATTO.

Stel de inleg van A gelijk x, dan zal de inleg van B zijn $a - x$.

(45) *Auswahl von Algebraiſchen und Geometriſchen Aufgaben zur Selbſtübung.*

(46) *Idem.*

$a - x$. Daar nu A de som s verkrijgt, zoo is zijne winst gedurende den tijd t, gelijk aan $s - x$, en dewijl B dezelfde som bekomt, zoo is zijne winst gedurende den tijd t' gelijk aan $s - a + x$. Daar nu de winsten tot elkander in zamengestelde reden moeten staan van de kapitalen en tijden, zoo is,

$$s - x : s - a + x = tx : t' (a - x)$$

en daar het product der middelste gelijk dat der uiterste is

$$tx (s - a + x) = t' (a - x) (s - x)$$

$$\text{of } t(s-a)x + tx^2 = t'as - t'(s+a)x + t'x^2$$

$$\text{dat is } (t-t')x^2 + (t(s-a) + t'(s+a))x = t'as$$

$$\text{of } x^2 + \frac{(t+t')s - (t-t')a}{t-t'}x = \frac{t'as}{t-t'}$$

uit welke vierkants-vergelijking gevonden wordt,

$$x = -\frac{(t+t')s - (t-t')a}{2(t-t')} \pm \sqrt{\left\{\frac{ast'}{t-t'} + \left(\frac{(t+t')s - (t-t')a}{2(t-t')}\right)^2\right\}}$$

dat is na herleiding,

$$x = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{t+t'}{t-t'}\cdot s \pm \frac{\sqrt{\{(t+t')^2 s^2 + (t-t')^2(a^2 - 2as)\}}}{2(t-t')}$$

voor de inleg van A, en hierdoor wordt

$$a - x = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{t+t'}{t-t'}\cdot s \mp \frac{\sqrt{\{(t+t')^2 s^2 + (t-t')^2(a^2 - 2as)\}}}{2(t-t')}$$

voor den inleg van B.

Voorbeeld. Laat gegeven zijn $a = 100$, $t = 3$, $t' = 2$ en $s = 99$, dan is $t + t' = 5$ en $t - t' = 1$ en bij gevolg

$$x = 50 - \frac{5.99}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(25.99^2 + 100(100 - 2.99))}$$

$$= -\tfrac{395}{2} \pm \tfrac{5}{2}\sqrt{(99^2 - 4.98)} = -\tfrac{395}{2} \pm \tfrac{485}{2}$$

$$= 45 \text{ of } -440.$$

De eerste waarde kan ons hier alleen dienen, en de inleg van den eersten koopman was alzoo 45 gulden, terwijl de inleg van den tweeden 55 gulden was.

CLXXIV.

CLXXIV. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door J. PEEREBOOM.

Twee perſonen, vader en zoon, over hunnen ouderdom ſprekende, bevinden, dat de jaren des vaders ſtaan tot die des zoons, als 5 tot 1; en dat, wanneer men het vierkant van de jaren des zoons aftrekt van de cubus zijner jaren, er een quadraat overblijft, wiens wortel met 2 vermenigvuldigd, gelijk aan des vaders jaren plus 10 is. Vrage naar den ouderdom van ieder?

OPLOSSING. Door J. PEEREBOOM, A. VAN DER SWAN en R. LOBATTO.

Stel de jaren des zoons x, dan zijn die des vaders $5x$, en dan moet volgens het voorſtel de volgende vergelijking plaats hebben,

$$x^3 - x^2 = \left(\frac{5x + 10}{2}\right)^2$$

dat is, wanneer men, alles ontwikkeld zijnde, de vergelijking met 4 vermenigvuldigt,

$$4x^3 - 4x^2 = 25x^2 + 100x + 100$$

en dit geeft ons de volgende vergelijking,

$$4x^3 - 29x^2 - 100x - 100 = 0$$

Deze vergelijking heeft eene wortel gelijk 10, en dit geeft $x = 10$ voor den ouderdom van den zoon en dus $5x = 50$ voor den ouderdom van den vader.

De andere wortels van deze vergelijking zijn onbeſtaanbaar, en er is dus maar een antwoord mogelijk.

CLXXV. VOORSTEL.

Door J. PEEREBOOM.

Zoek twee getallen, waarvan het product a (12) is, en zoodanig dat het verſchil van hunne cuben ſtaat tot de cubus van hun verſchil als p (13) tot q (4). (47)

Or-

(47) A. Fr. STRABBE, *Inleiding enz. pag.* 272. N°. 47.

OPLOSSING. Door J. PEERBOOM, R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

www.libtool.com.cn

Stel de getallen $x + y$ en $x - y$, dan is gegeven $x^2 - y^2 = a$ en $6x^2y + 2y^3 : 8y^3 = p : q$, dat is: de twee eerſte termen door $2y$ deelende,

$$3x^2 + y^2 : 4y^2 = p : q$$

of, omdat het verſchil der termen van de eerſte reden tot dat der termen van de tweede reden ſtaat als de beide volgende,

$$3(x^2 - y^2) : p - q = 4y^2 : q$$

dat is, daar $x^2 - y^2 = a$ is,

$$3a : p - q = 4y^2 : q$$

dus $4y^2 = \frac{3aq}{p - q}$, en $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3aq}{p - q}}$, waaruit dan volgt $x = \sqrt{(a + y^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(4p - q)}{p - q}}$. De gevraagde getallen zijn dus,

$$x + y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a(4p - q)}{p - q}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3aq}{p - q}}$$

$$x - y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a(4p - q)}{p - q}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3aq}{p - q}}$$

Nemende nu $a = 12$, $p = 13$ en $q = 4$, dan is $p - q = 9$ en $4p - q = 48$, en bijgevolg $\sqrt{\frac{3aq}{p - q}} = \sqrt{\frac{144}{3}} = \sqrt{36} = 4$ en $\sqrt{\frac{a(4p - q)}{p - q}} = \sqrt{\frac{12 \times 48}{9}} = \sqrt{4 \times 16} = 8$, zoodat de getallen, $x + y = 6$ en $x - y = 2$.

CLXXVI. VOORSTEL.

Door J. PEERBOOM.

Vind twee getallen, zoodanig dat wanneer men hunne ſom vermenigvuldigt met het grootſte, er 100 maal het kleinſte; en wanneer men hunne ſom vermenigvuldigt met het kleinſte, er 64 maal het grootſte komt?

OPLOSSING. Door J. PEERBOOM, R. LOBATTO en A. VAN DER SWAN.

Stel de getallen x en y, dan is $x(x + y) = 100y$ en

$y(x+y) = 64x$; deze vergelijkingen door elkander deelende komt $\frac{x}{y} = \frac{100}{64} \cdot \frac{y}{x}$, dus $64x^2 = 100y^2$, $8x = 10y$ en $4x = 5y$; dat is $x = \frac{5}{4}y$. Brengende dit nu in de eerste vergelijking, dan komt er $\frac{5}{4}y(\frac{5}{4}y + y) = 100y$, of $\frac{5}{4}y \times \frac{9}{4}y = 100y$, dus $\frac{45}{16}y = 100$ en $y = \frac{100 \times 16}{5 \times 9} = \frac{320}{9} = 35\frac{5}{9}$ en dus $x = \frac{5}{4}y = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9}$.

CLXXVII. VOORSTEL.

Door H. F. BAKKER.

Men vraagt eene meetkunstige en eene rekenkunstige reeks in geheele getallen, en zoodanig, dat de eerste en laatste term, benevens de reden of exponent van de eerste reeks, ieder in het bijzonder, gelijk zijn aan den eersten en laatsten term, benevens het verschil der termen van de tweede reeks?

OPLOSSING. Door H. F. BAKKER.

Stel de eerste term in beide reeksen gelijk a; het verschil der termen in de laatste en het quotient der termen in de eerste reeks, beide r; het getal der termen van de meetkunstige reeks n en het getal der termen van de rekenkunstige reeks m; dan is de laatste term van de meetkunstige reeks ar^{n-1} en de laatste term van de rekenkunstige reeks $a + (m-1)r$, en wij verkrijgen alzoo, omdat deze twee laatste termen aan elkander gelijk moeten zijn, de vergelijking,

$$ar^{n-1} = a + (m-1)r$$

of

$$ar^{n-1} - (m-1)r = a$$

dat is

$$ar^{n-2} - (m-1) = \frac{a}{r}$$

daar nu, volgens de opgaaf, a, r, n en m geheele getallen moeten zijn, zoo is het eerste lid van deze vergelijking een geheel getal, en dus moet a door r deelbaar zijn, dat is a moet een veelvoud van r zijn.

Stellen wij dan $a = sr$, dan wordt de laatste vergelijking

$$ar^{n-1} - m + 1 = s$$

waar

waaruit wij trekken

$$m = s\,(r^{n-1} - 1) + 1$$

Wij kunnen alzoo voor s, r en n willekeurige geheele getallen aannemen, en dan hebben wij,

$$a = sr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$m = s\,(r^{n-1} - 1) + 1 \quad (2)$$

waardoor dan beide reeksen geheel bepaald zullen zijn.

Voorbeeld. Nemen wij $s = 5$, $r = 2$ en $n = 3$, dan is $a = 10$ en $m = 5\,(2^2 - 1) + 1 = 16$ en de twee reeksen worden,

10 . 20 . 40

16 . 12 . 14 . 16 . 18 . enz. . . . . tot 40.

Aanmerking. Wij kunnen bij dit voorstel nog meer voorwaarden voegen; willen wij, bij voorbeeld, dat de eerste term gegeven zij, dan behoeven wij voor r slechts eene factor van de gegevene waarde van a te nemen. Stel dat $a = 6$ gegeven was, dan kunnen wij voor r nemen, 2, 3 of 6. Nemende $r = 2$ dan is $s = 3$, en nemende dan $n = 2$, dan wordt $m = 4$, en de reeksen worden 6; 12 en 6; 8, 10, 12.

Voegen wij hier nog bij dat het getal der termen van de meetkunstige reeks gelijk moet zijn, aan den eersten term van beide reeksen, dan behoeft n slechts gelijk a of sr genomen te worden, zoodat wij dan hebben,

$$a = sr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$m = s\,(r^{a-1} - 1) + 1 \quad \ldots \quad (2)$$

Stellen wij, om hier van een voorbeeld te geven dat $a = n = 6$ moest zijn; nemen wij dan $r = 2$, dan is $s = 3$ en $m = 3\,(2^5 - 1) + 1 = 94$, en wij verkrijgen alzoo voor de meetkunstige reeks,

6 . 12 . 24 . 48 . 96 . 192

en voor de rekenkunstige reeks

6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . enz.

waarvan de 94e term mede 192 is.

CLXXVIII. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door I. R. SCHMIDT.

In eenen driehoek, waarvan de zijden a, b en c zijn, is een cirkel beſchreven, en in dezen cirkel eenen tweeden driehoek, waarvan de zijden met die van den eerſten driehoek evenwijdig loopen. Men vraagt: 1°. de zijden van dezen tweeden driehoek te berekenen; 2°. dezen tweeden driehoek in den gegevenen cirkel te conſtrueren?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Zij ABC *Fig.* 118. de gegevene en A′B′C′ de gevraagde driehoek. Uit de evenwijdigheid der zijden blijkt het dat deze twee driehoeken gelijkvormig zijn, en daar de zijden van den eenen driehoek zijn a, b en c, kunnen wij derhalven voor de overeenkomſtige zijden van den gevraagden driehoek ſtellen ax, bx en cx.

Nu is het klaar dat de ſtraal des ingeſchrevenen cirkels, van den eerſten driehoek, gelijk moet zijn aan die van den omgeſchrevenen cirkel des tweeden driehoeks. De laatſte is gelijk $\frac{abc\,x^3}{4\,\Delta\,A'B'C'}$ en de eerſte is gelijk $\frac{2\,\Delta\,ABC}{a+b+c}$, en wij hebben dus,

$$\frac{abc\,x^3}{4\,\Delta\,.\,A'B'C'} = \frac{2\,\Delta\,ABC}{a+b+c}$$

maar $\Delta\,ABC : \Delta\,A'B'C' = a^2 : a^2x^2 = 1 : x^2$, dus $\Delta\,A'B'C' = x^2 \times \Delta\,ABC$, en bij gevolg

$$\frac{abc\,.\,x}{4\,\Delta\,ABC} = \frac{2\,\Delta\,ABC}{a+b+c}$$

waaruit volgt,

$$x = \frac{8\,(\Delta\,ABC)^2}{abc\,(a+b+c)}$$

maar $\Delta\,ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$ en hierdoor wordt,

$$x = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2\,abc}$$

waardoor wij dan voor de gevraagde zijden vinden,

$$B'C' = ax = \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}{2\,bc}$$

www.libtool.com.cn

$$A'C' = bx = \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}{2\,ac}$$

$$A'B' = cx = \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}{2\,ab}.$$

Men kan deze zijden ook gemakkelijk in de hoeken van den gegevenen driehoek, en in den ſtraal van den ingeſchrevenen cirkel uitdrukken; want ſtellende deze ſtraal gelijk r, dan is $r = \frac{2 \triangle ABC}{a+b+c}$ en dus $x = \frac{4 \triangle ABC}{abc} \times r$, en hierdoor wordt,

$$ax = \frac{4 \triangle ABC}{bc} \times r = \frac{2 \triangle ABC}{\frac{1}{2} bc \,.\, Sin.\ A} \times r\ Sin.\ A$$

$$= \frac{2 \triangle ABC}{\triangle ABC} \times r\ Sin.\ A = 2\,r\ Sin.\ A$$

en wij vinden alzoo,

$$B'C' = 2\,r\ Sin.\ A;\ A'C' = 2\,r\ Sin.\ B;\ A'B' = 2\,r\ Sin.\ C.$$

Om den gevraagden driehoek in den gegevenen cirkel te conſtrueren, is ons de volgende conſtructie de gemakkelijkſte voorgekomen.

Laat MD loodregt op AB zijn, dan zal zij ook loodregt op $A'B'$ ſtaan, en dan zal $\angle B'MD = \angle B'C'A' = \angle BCA$ moeten zijn. Dit geeft ons deze eenvoudige conſtructie.

Trek MD loodregt op AB, en maak $\angle CMB' = \angle C$, dan is B' een punt van den gevraagden driehoek. Trekkende dan $B'C'$ en $B'A'$ evenwijdig met BC en BA en vereenigende de punten B' en A', dan zal de driehoek beſchreven zijn.

De overeenkomst van deze conſtructie met de laatſte formulen, welke wij voor de drie zijden gevonden hebben, loopt van zelf in het oog.

Aanmerking. Willen wij den inhoud van $\triangle A'B'C'$ in bekenden uitdrukken, dan is het door het bovenſtaande klaar dat wij hebben,

$$\triangle A'B'C' = x^2 \triangle ABC = \frac{64\,(\triangle ABC)^3}{a^2 b^2 c^2\,(a+b+c)^2}$$

willen wij dezen inhond in r en de hoeken A, B en C uitdrukken, dan vinden wij, op dezelfde wijze a.s boven werkende

$$\Delta A'B'C' = 2r^2 \times Sin.\ A \times Sin.\ B \times Sin.\ C$$

www.libtool.com.cn

CLXXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer buiten eenen halven hollen bol, en wel aan de uitgeholde zijde van denzelven, eenig lichtend punt geplaatst is, zal hierdoor in die halve bolvormige holte eene ſlagſchaauw ontſtaan; nu vraagt men, vooreerst, den vorm van de kromme lijn te bepalen, welke deze ſlagſchaduw zal begrenzen, en ten andere; de horizontale en verticale projectie van deze grenslijn door conſtructie te vinden; aannemende dat het verticale vlak evenwijdig is aan het voorvlak van den halven bol, dat is, aan het vlak, hetwelk dezen halven bol bepaalt?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Laat in *Fig.* 119, XY de doorſnede van de twee vlakken van projectie zijn. Zij ACBDA de verticale projectie van den halven bol, dan is A′E′B′A′ deszelfs horizontale projectie, en A′M′B′ is de projectie van het voorvlak op het horizontale vlak. Stel verder dat P en P′ de verticale en horizontale projectie van het ſchtrende punt verbeelden, en dat P zoodanig geplaatst is, dat de lichtſtraal PM, welke door het middelpunt gaat, evenwijdig loopt aan het horizontale vlak, hetgeen altijd geoorloofd is, omdat wij het horizontale vlak, terwijl wij het loodregt op het verticale laten blijven, zoodanig kunnen doen draaijen, dat het aan deze lichtſtraal evenwijdig wordt.

Al de lichtſtralen, welke uit het lichtende punt langs den omtrek van het voorvlak van den halven bol gaan, vormen klaarblijkelijk eenen ſcheven kegel met cirkelronde bazis, van welken kegel, de hoeken CPD en A′P′B′ de verticale en horizontale projectie voorſtellen. De grenslijn der ſchaduw zal alzoo de gemeene doorſnede van dit kegelvlak met het oppervlak van den halven bol zijn, en het zal er dus op aankomen deze gemeene doorſnede door conſtructie te vinden, of liever, om de horizontale en verticale projectie van deze gemeene doorſnede te conſtrueren.

Het

Het gezegde kegelvlak doorſnijdt niet alleen onzen halven bol, maar zou ook, indien de bol voltooid was, zijne andere helft doorſnijden. Wij zullen alzoo hier het geheele oppervlak van den bol in aanmerking nemen, daar ons dit het onderzoek wegens den vorm van de gevraagde doorſnede gemakkelijker zal maken, en het is hierom dat wij ook in de horizontale projectie eenen geheelen cirkel geteekend hebben.

www.libtool.com.cn

Om nu de gevraagde projectien van de doorſnede van het kegelvlak met het oppervlak van den bol te conſtrueren, verbeelden wij ons dat beide deze vlakken doorſneden worden door eenig plat vlak, evenwijdig aan het verticale vlak en dus aan het voorvlak van den halven bol zijnde; dan zal de horizontale projectie van dit vlak eene lijn GH zijn, welke evenwijdig met XY is.

Dit vlak doorſnijdt het kegelvlak en het oppervlak van den bol volgens het beloop van cirkels, waarvan de ſtralen gelijk zijn aan I′K′ en L′N, en de punten waarin de omtrekken van deze cirkels elkander doorſnijden, zijn klaarblijkelijk punten van de gevraagde doorſnede. De verticale projectie van den cirkel, waarin dit regtſtandige vlak het oppervlak van den bol ſnijdt, heeft het punt M tot middelpunt, en deze projectie is alzoo een cirkel uit M met ML = NL′ als ſtraal beſchreven. De verticale projectie van den cirkel, waarin dit zelfde regtſtandige vlak het kegelvlak doorſnijdt, heeft het punt K tot middelpunt, en deze projectie is alzoo een cirkel, uit K als middelpunt met KI = K′I′ als ſtraal beſchreven. Hieruit volgt dus, dat de punten O, waarin deze cirkels elkander ſnijden, twee punten zijn, van de verticale projectie der gemeene doorſnede van het kegelvlak met het oppervlak van den bol, en dat het punt O′ waarin de loodlijn, uit O op XY getrokken, de lijn GH ſnijdt, een punt der horizontale projectie van deze gemeene doorſnede zal zijn.

De gevraagde conſtructie komt dus hier op neder. Trek eene willekeurige lijn GH, ſnijdende MM′, P′A′, P′M′ en den cirkel A′E F′B′ in N, I′, K′ en L′. Trek I′I, L′L en KK′ loodregt op PQ; beſchrijf uit M en K, met ML en KI als ſtralen, cirkelbogen ſnijdende elkander in O en trek OO′ loodregt op GH; dan zullen OO punten van de verticale, en O′ zal een

punt van de horizontale projectie zijn, van de grenslijn der ſchaduw.

Door middel van deze conſtructie voor een genoegzaam aantal lijnen GH te herhalen, zal men zoo veel punten van de verticale en horizontale projectie kunnen vinden, als men noodig oordeelt, om er met zekerheid die projectien, uit den hand te kunnen doortrekken. Wij zullen, voor de eerſte, de kromme lijn FCOEODF verkrijgen, waarvan de punten F en E gevonden worden door middel van de lijnen GH, die door F en E gaan, en de conſtructie zal ons, op de overtuigendſte wijze doen zien, dat de punten F en E loodregt boven F' en E' moeten liggen. De kromme lijn FCOEODF, gelijkt veel op eene ellips, terwijl de horizontale projectie $F'O'E'$ niet van eene regte lijn te onderſcheiden is. Wij mogen hieruit voor als nog geenszins beſluiten dat de projectien van de ſlagſchaduw wezenlijk eene regte lijn en eene ellips zullen zijn, doch wij zullen nu overgaan om den aard en de eigenſchappen van deze lijnen nader te onderzoeken.

Om de vergelijking van de horizontale projectie $F'O'E'$ te bepalen, trekken wij MO, KO en $M'L'$, en wij ſtellen $\angle PP'A' = \alpha$, $\angle PP'M' = \beta$, $M'A' = M'L' = r$, $M'N = x$ en $NO' = MR = y$; dan is $NL' = MO = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, en $MK = NK' = M'N$. *Tang.* $NM'K' = M'N \times$ *Tang.* $PP'M' = x$ *Tang.* β. Verder is $M'S = A'M'$. *Tang* . $SA'M' = A'M' \times$ *Cot* $PP'A' = r$ *Cot.* α, en dus $NS = r$ *Cot.* $\alpha - x$, waardoor $I'N = NS \times$ *Tang.* $\alpha = r - x$ *Tang.* α, en bij gevolg $OK = KI = K'I' = K'N + NI' = r + x$ (*Tang.* β — *Tang.* α).

Eindelijk is $KO^2 = KM^2 + OM^2 + 2\,MK \times RM$, en ſtellende hierin de gevondene waarden, dan verkrijgen wij de vergelijking,

$$\left\{r+x\,(Tang.\beta - Tang.\alpha)\right\}^2 = x^2 Tang^2.\beta + r^2 - x^2 + 2xy\,Tang.\beta$$

ontwikkelende nu het eerſte lid, dan gaat r^2 aan beide kanten weg, en alles wordt door x deelbaar, waardoor wij hebben,

$$2r(Tang.\beta - Tang.\alpha) + x(Tang.\beta - Tang.\alpha)^2 = x\,Tang^2.\beta - x + 2y\,Tang\,\beta$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$x\,(Sec^2.\alpha - 2\,Tang.\alpha.Tang\,\beta) - 2y\,Tang.\beta + 2r(Tang.\beta - Tang.\alpha) = 0$$

daar nu in deze vergelijking x en y niet dan in de eerſte magt voor-

voorkomen, is het de vergelijking van eene regte lijn. De horizontale projectie is alzoo eene regte lijn, en daar wij bij de conſtructie hebben opgemerkt, dat de punten F′ en E′, punten van deze projectie zijn, zoo is dezelve de lijn F′E′ zelf.

Daar nu de horizontale projectie der gemeene doorſnede van het kegelvlak met het oppervlak van den bol eene regte lijn is, zoo is deze gemeene doorſnede noodzakelijk gelegen in een plat vlak; maar deze gemeene doorſnede is ook gelegen in het oppervlak van den bol; het is dus de doorſnede van een plat vlak met het oppervlak van den bol, en bij gevolg is deze gemeene doorſnede een cirkel; de verticale projectie van deze doorſnede, dat is van de grenslijn der ſchaduw moet dus noodzakelijk eene ellips zijn.

Het gedeelte COEOD van deze ellips is de verticale projectie van de grenslijn der ſchaduw in den halven hollen bol, en het gedeelte E′C′ van de lijn E′F′ is de horizontale projectie van deze grenslijn.

De kennis van den aard onzer projectien, maakt derzelver conſtructie veel gemakkelijker. De horizontale projectie wordt namelijk gevonden, door eenvoudig de lijn E′F′ te trekken, door de punten E′ en F′, waarin de geprojecteerde ligtſtralen die door de punten A′ en B′ gaan, de horizontale projectie van den bol doorſnijden

De ellips zal mede veel gemakkelijker dan door de opgegevene conſtructie kunnen worden daargeſteld, indien wij ſlechts derzelver aſſen kunnen aanwijzen. Nu volgt uit de gegevene conſtructie dat alle lijnen OO loodregt op PQ ſtaan, en door dezelve worden midden door gedeeld; FE is alzoo de kleine as, en deze wordt, zoo als reeds is aangemerkt, gevonden door uit de punten F′ en E′ loodlijnen op PQ te trekken. Deelende dan FE midden door in T, dan is T het middelpunt, en bijgevolg VV de groote as. Er blijft dus niet meer over dan de lengte van deze groote as te bepalen.

Te dien einde merken wij op, dat FT = TE zijnde ook F′V′ = V′E′ moet zijn. Deelende dan F′E′ midden door in V′, trekkende V′W evenwijdig met XY en beſchrijvende uit M, met UW als ſtraal, eenen cirkelboog, dan zal deze de onbepaalde loodlijn

lijn door T gaande in de gevraagde punten V doorſnijden. Wij hebben alzoo,

$$VT^2 = VM^2 - TM^2 = UW^2 - V'U^2 = (UW+UV')(WU-UV')$$
$$= V'W \times V'W' = F'V' \times V'E' = V'E'^2$$

bijgevolg VT = V′E′, en hieruit blijkt dat de groote as VV = F′E′ is.

www.libtool.com.cn

Beide asſen op deze wijze door eene allereenvoudigſte conſtructie bepaald hebbende, is niets gemakkelijker dan de ellips zelve te conſtrueren. Het blijkt verder, dat deze ellips den cirkel ACBDA, in de punten C en D, welke met het punt C′ overeenſtemmen zal aanraken, en dat VV = E′F′ de middellijn van den kleinen cirkel des bols zal zijn, volgens welke het kegelvlak het oppervlak van den bol doorſnijdt.

Trekken wij nu alles te zamen, dan komt ons geheele beſluit hierop neder.

1°. Het kegelvlak, dat langs den cirkel ACBDA gaat, en dus het oppervlak van den bol in dezen grooten cirkel doorſnijdt, heeft ook nog met dit oppervlak van den bol eenen kleinen cirkel gemeen, en deze is de grenslijn van de ſchaduw.

2°. Trek de lijn E′F′, deze is de horizontale projectie van deze grenslijn.

3°. Trek F′F en E′E loodregt op PQ. Deel F′E′ midden door in V′; trek V′V loodregt op PQ en maak TV aan wederzijde gelijk F′V′. Beſchrijf op de asſen FE en VV eene ellips deze zal de verticale projectie van de grenslijn der ſchaduw zijn.

AANMERKING. Wanneer het lichtende punt op eenen oneindigen afſtand geplaatst is, zoo als bij voorbeeld, bij het zonnelicht plaats heeft, dan gaat het kegelvlak over in een cilindervlak. De gegevene conſtructie gaat dan even goed door, doch de figuur neemt de gedaante aan van *Fig.* 120. De lijn E′F′ wordt dan eene middellijn, het punt V′ valt in M′, het middelpunt T van de ellips valt alzoo in M, en de groote as VV wordt nede eene middellijn. De wezenlijke grenslijn der ſchaduw zal alzoo in dit geval een groot cirkel van den bol zijn.

CLXXX. VOORSTEL.

Door F. BAUD.

www.libtool.com.cn

Twee overwelfde gangen, van gelijke breedte en lengte, ſnijden elkander regthoekig door; de bogen der gewelven zijn halve cirkels, waarvan de middellijnen gelijk zijn aan de breedte der gangen (voutes en plein cintre). Men begeert, ter uitvoering van eenig werk aan de gewelven, derzelver inwendige oppervlakte te kennen, en geeft te dien einde de lengte der gangen gelijk a en derzelver breedte gelijk b.

OPLOSSING. Door F. BAUD.

Eene bloote beſchouwing van Figuur 121 is genoegzaam om in te zien, dat men ſlechts van de ſom der oppervlakten van beide halve cilinders, die gedeelten behoeft af te trekken, welke door de ontmoeting worden bedekt, om hierdoor de begeerde oppervlakte te bekomen.

De beide halve cilinders ABDCG en KLMNG ſnijden elkander volgens de ellipſen EGI en HGF, welke de beide diagonalen van het vierkant EFHI tot horizontale projectie hebben, en derhalve gelegen zijn in verticale vlakken door deze diagonalen gaande; het zijn nu de gedeelten, tusſchen deze verticale vlakken begrepen, welke van de ſom der oppervlakken van de beide halve cilinders moeten worden afgetrokken.

In den eerſten cilinder ABCDG worden, door de ontmoeting met den tweeden KLMNG, de ſtukken HGIO en EGFO weggenomen. De cilinder KLMNG verliest op gelijke wijze de ſtukken IGFO en HEGO. Deze alle onderling gelijk zijnde, bepaalt zich de afgetrokkene oppervlakte tot het viervoud der kromme oppervlakte van een dezer ſtukken.

Ten einde den inhoud van deze kromme oppervlakte te bepalen, onderſtelle men, dat de cilinder ABCDG, op eene willekeurige hoogte PQ $= x$, door een horizontaal vlak gefnede worde, dan zal de doorſnede ST van dit vlak met de kromme oppervlakte gelijk zijn aan de koorde RU.

Stelt men nu de ſtraal van den cirkel door welke de bogen bepaald zijn gelijk r, dan is $r = \frac{1}{2} b$, en de koorde RU $=$ ST

$ST = 2\sqrt{(r^2 - x^2)}$. De differentiaal van GIFG is verder gelijk aan ST vermenigvuldigd met de differentiaal van den boog GVX, of liever van deszelfs gedeelte XV; doch dit gedeelte VX is blijkbaar gelijk aan den boog DR en dus gelijk den boog, waarvan de Sinus is QP of x, zoodat $WV = \partial$. *Boog Sin.* $x = \frac{r\partial x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$. Stellende dan het oppervlak $GFIG = O$, dan is $\partial O = \frac{r\partial x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \times 2\sqrt{(r^2 - x^2)} = 2r\partial x$, en dit integrerende $O = 2rx$, welke integraal geen verbetering behoeft, omdat zij aan de voorwaarde voldoet van voor $x = o$ te verdwijnen.

Stellende nu $x = r$, dan vinden wij voor het geheele oppervlak GFIG, $2r^2 = \frac{1}{2}b^2$, en de som der aftetrekkene oppervlakken is alzoo $2b^2$.

Daar nu de som der oppervlakken van beide halve cilinders wordt uitgedrukt door $ab\pi$, zoo is de gezochte oppervlakte,

$$O' = ab\pi - 2b^2 = b(a\pi - 2b)$$

waardoor dan het voorstel is opgelost.

AANMERKING. De gegevene oplossing bevat te gelijk die van een ander voorstel, om namelijk de oppervlakte van een kruisgewelf (*voute en arc de cloitre*) te bepalen, waarmede een vierkant gebouw HEFI overdekt is. Het blijkt uit onze oplossing dat deze oppervlakte wordt uitgedrukt door $2b^2$, dat is door het dubbeld van de horizontale projectie van het gewelf.

CLXXXI. VOORSTEL.

Door S. I. MULDER.

Een trapezium midden door te deelen, door eene lijn, evenwijdig zijnde met de twee evenwijdige zijden?

OPLOSSING. Door S. I. MULDER en R. LOBATTO.

Laat in figuur 122, ACDB het trapezium en EF de gevraagde lijn zijn; dan moet EF zoodanig bepaald worden, dat *vierh.* EC F = *vierh.* AEFB zij. Laten nu de zijden AC en DB verlengd worden tot zij elkander ontmoeten in G, dan moet alzoo

$$\Delta GEF - \Delta GCD = \Delta GAB - \Delta GEF$$

en bijgevolg $2 \times \Delta GEF = \Delta GAB + \Delta GCD$ zijn, en daar de driehoeken GCD, GEF en GAB, gelijkvormig zijnde, tot elkander in reden zijn als CG^2, EG^2 en AG^2, zoo volgt hieruit, dat wij zullen moeten hebben $2 \times GE^2 = AG^2 + CG^2$; en hieraan wordt voldaan door de volgende conſtructie.

www.libtool.com.cn

Stel GH loodregt op AG en maak dezelve gelijk CG, trekkende dan AH, dan is $AH^2 = AG^2 + CG^2$.

Deel AH midden door in K en ſtel $KI = AK$ loodregt op AH, trekkende dan AI, dan is $AI^2 = 2\,AK^2 = \frac{1}{2}\,AH^2$ en dus $2\,AI^2 = AH^2 = AG^2 + CG^2$.

Makende dus $GE = AI$ en trekkende EF evenwijdig AB, dan zal EF de begeerde deellijn zijn.

Aanmerking. Omdat de driehoeken CGD, EGF en AGB ook tot elkander in reden zijn als CD^2, EF^2 en AB^2, zoo volgt op dezelfde wijze dat de lengte van de lijn EF gevonden zal worden door de formule $EF^2 = \frac{1}{2}\,(AB^2 + CD^2)$.

CLXXXII. VOORSTEL.

Door Jacob de Gelder.

Uit het middelpunt A van eenen gegevenen cirkel, worden verſchillende ſtralen AF getrokken, en op dezelve, van het middelpunt A af te rekenen, de deelen AP gelijk genomen aan n maal de Sinus van den dubbelden boog BF, begrepen tuſſchen den ſtraal AF en eenen ſtandvastigen ſtraal AB. Hoedanig zal nu de loop en hoedanigheid zijn der kromme lijn, welke door de vereeniging van de punten P geboren wordt, en hoe vindt men de raaklijnen, inhoud enz. van deze kromme lijn.

Oplossing. Door I. R. Schmidt.

Dit Voorſtel heeft zulk eene naauwe overeenkomst met Voorſtel 200 van het tweede deel der *Verzameling van Voorſtellen*, dat het genoegzaam zal zijn dit onderlinge verband aan te wijzen, om te doen zien dat beide kromme lijnen dezelfde eigenſchappen

pen bezitten, en in het wezen der zaak niet van elkander onderscheiden zijn.

Gezegde Voorstel 200 verschilt namelijk met het opgegevene nergens anders in, als dat aldaar n gelijk 1 is, en dus *Fig.* 123, AP′ gelijk de Sinus van den dubbelden boog BF moet genomen worden, terwijl in ons geval AP gelijk n maal die Sinus, en dus gelijk n maal AP′ moet worden gemaakt. Indien dus de kromme lijn AIANALAKA van genoemde Voorstel 200 geconstrueerd is, zullen al de lijnen AP′ slechts zoodanig in P moeten gedeeld worden dat overal AP′ : AP = 1 : n zij, en dan zal hierdoor de gevraagde kromme lijn mede geconstrueerd zijn.

Het blijkt alzoo uit de XIVe *Stelling* IVe *Boek* der *Beginselen der Meetkunst* van *Professor* J. DE GELDER, dat onze kromme lijn volmaakt gelijkvormig zal zijn aan de kromme lijn van gezegde Voorstel 200, en dat alzoo, welke waarde n ook hebbe moge, zulks alleen invloed op de grootte, maar geenszins op de gedaante van de kromme lijn kan hebben; al de eigenschappen, welke wij voor de kromme lijn van meergenoemde Voorstel 200 hebben opgegeven, zijn hier bijgevolg even toepasselijk, en het zou eene noodelooze herhaling zijn dezelve hier andermaal op te geven, om welke reden wij dan, tot het trekken der raaklijnen, het vinden van den inhoud enz., tot meergemelde Voorstel verwijzen.

De polaire vergelijking, welke aldaar was $\nu = a\ Sin.\ 2\ \phi$, is alhier $\nu = na\ Sin.\ 2\ \phi$, en stellen wij AB′ $= na = a'$, dan is hier de vergelijking $\nu = a'\ Sin.\ 2\ \phi$; de overeenkomst dezer vergelijkingen doet ons bijgevolg het zelfde besluit wegens de identiteit der kromme lijnen opmaken, omdat die vergelijkingen niet anders dan in de waarde van de constante lijn a verschillen.

CLXXXIII. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Uit twee gegevene punten A en B, worden twee cirkelbogen CED en CFD. Fig. 124, *met AE en BF als straalen beschreven: de lijn AB in de punten E en F snijdende; nu begeert men in de vlakke figuur, welke tusschen deze cirkelbogen begrepen is, den grootsten regthoek GHKI te beschrijven?*

Op-

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Trekken wij de ſtralen AH en BG en ſtellen wij AH = AE = a, BG = BF = b, AB = c en GF = HM = x, dan is BL = $\sqrt{(BG^2 - GL^2)} = \sqrt{(b^2 - x^2)}$ en AM = $\sqrt{(AH^2 - HM^2)}$ = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Verder is AM + BL = AB + ML en bijgevolg ML = AM + BL − AB = $\sqrt{(a^2 - x^2)} + \sqrt{(b^2 - x^2)} - c$, zoodat *regthoek* GHKI = $2 \times LM \times GL = 2x\sqrt{(a^2 - x^2)} + 2x \cdot \sqrt{(b^2 - x^2)} - 2cx$; daar nu deze regthoek een maximum moet wezen, moet ook de helft van deze regthoek een maximum zijn, en wij hebben alzoo,

$$z = x\sqrt{(a^2 - x^2)} + x\sqrt{(b^2 - x^2)} - cx = maximum$$

en deze uitdrukking differentierende

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b^2 - 2x^2}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} + \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - c = 0$$

dat is,

$$\frac{b^2 - 2x^2}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} + \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = c \quad \ldots \quad (1)$$

Stellende nu AM = y, dan is $a^2 - x^2 = y^2$, dus $x^2 = a^2 - y^2$, $a^2 - 2x^2 = 2y^2 - a^2$, $b^2 - x^2 = b^2 - a^2 + y^2$ en $b^2 - 2x^2 = b^2 - 2a^2 + 2y^2$, en ſubſtituerende dit in de vergelijking (1), dan wordt dezelve,

$$\frac{b^2 - 2a^2 + 2y^2}{\sqrt{(b^2 - a^2 + y^2)}} + \frac{2y^2 - a^2}{y} = c$$

of

$$\frac{b^2 - 2a^2 + 2y^2}{\sqrt{(b^2 - a^2 + y^2)}} = c - \frac{2y^2 - a^2}{y}$$

en deze vergelijking tot de tweede magt verheffende,

$$\frac{4y^4 + 4(b^2 - 2a^2)y^2 + (b^2 - 2a^2)^2}{b^2 - a^2 + y^2} = c^2 - \frac{2c(2y^2 - a^2)}{y} + \frac{(2y^2 - a^2)^2}{y^2}$$

welke aan beide zijden met $y^2(b^2 - a^2 + y^2)$ vermenigvuldigd, verandert in,

$$4y^6 + 4(b^2 - 2a^2)y^4 + (b^2 - 2a^2)^2 y^2 = c^2 y^2 (y^2 - a^2 + b^2) - 2cy(2y^2 - a^2)(y^2 - a^2 + b^2) + (2y^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2 + b^2).$$

Ontwikkelende nu al de aangewezene producten, en rangſchikkende alles volgens de afdalende magten van y, dan verkrijgen wij

$$4cy^5 - c^2y^4 - 2c(3a^2 - 2b^2)y^3 - (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)y^2 + 2a^2c(a^2 - b^2)y + a^4(a - b^2) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Deze vergelijking zal door hare wortels, in ieder bijzonder ge-

geval, de waarde van y of AM doen kennen, welke tot het gevraagde maximum behoort. Daar deze vergelijking echter vijf verſchillende wortels kan toelaten, ſpreekt het van zelf, dat deze wortels alle aan de tweede differentiaal coëfficient $\partial^2 z : \partial x^2$ zullen moeten worden getoetst, ten einde met zekerheid te kunnen beoordeelen, welke van dezelve tot een maximum of minimum behooren.

www.libtool.com.cn

Beperken wij het Voorſtel alleen tot den grootſten regthoek, welke in het ſtuk DFCED kan worden beſchreven, dan is het klaar dat er ſlechts een maximum zal kunnen beſtaan; doch het Voorſtel, zoo als wij het hebben opgelost, moet in eene ruimeren zin worden opgevat, en kan als dan in de volgende bewoordingen worden opgegeven. *Twee cirkels ſnijden elkander in de punten C en D, nu vraagt men onder alle regthoeken, waarvan twee der hoekpunten G en K in den omtrek van den eenen, en de twee andere hoekpunten H en I in den omtrek van den anderen cirkel gelegen zijn, diengeene te bepalen waarvan de inhoud een maximum of minimum is*, en het Voorſtel in deze meer algemeene beteekenis opvattende, zal men, met een weinig oplettenheid, gemakkelijk inzien, dat er als dan meer dan één maximum kan beſtaan. Wij zullen ons in deze beſchouwing niet verder verdiepen, maar dezelve aan den lezer overlaten, te meer omdat wij in het 123e Voorſtel een ſoortgelijk voorbeeld uitvoerig behandeld hebben.

Onze algemeene vergelijking (2) wordt in ſommige gevallen veel eenvoudiger. Stellen wij, bij voorbeeld, dat beide cirkels even groot zijn, en dus $a = b$ is, dan is $a^2 - b^2 = 0$, en dan wordt de vergelijking (2)

$$4y^2 - cy - 2a^2 = 0$$

en deze vierkants-vergelijking oplosſende,

$$AM = y = \tfrac{1}{8} c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{64} c^2 + \tfrac{1}{2} a^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Is $a + b = c$, dat is raken de cirkels elkander, dan wordt de vergelijking (2), na dezelve door c gedeeld te hebben,

$$4y^3 - (a+b)y^2 - 2(3a^2 - 2b^2)y^2 + 2(a-b).aby^2 + 2a^2(a^2 - b^2)y + a^4(a-b) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

deze heeft eene wortel $y = a$, welke tot het raakpunt der twee cirkels behoort, de overige wortels zijn begrepen in de vergelijking

$$4y^6+(3a-b)y^5-(3a^2+ab-4b^2)y^4-(3a^3-a^2b-4ab^2)y$$
$$-(a^4-a^3b)=0.$$

Wanneer de twee cirkels hetzelfde middelpunt hebben, dan is $c=0$, en dan wordt de vergelijking (2),

$$-(a^2-b^2)(a^2+b^2)y^2+x^4(a^2-b^2)=0$$

waaruit gevonden wordt

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Is $c=0$ en bovendien $a=b$, dan vallen de cirkels geheel op elkander, en de vraag is dan, om in eenen cirkel den grootsten regthoek te beschrijven. Door in (6) te stellen $a=b$, vinden wij voor dit geval

$$y=\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$$

en dit geeft het vierkant in den cirkel beschreven, hetgeen ook uit andere gronden bekend is.

CLXXXIV. VOORSTEL.

Door JACOB DE GELDER.

Hoe zal men, op de middellijn AB (Fig. 125.) van eenen gegevenen halven cirkel ABCD twee punten E en F gegeven zijnde, uit die punten twee lijnen ED en FC, elkander in G snijdende, tot aan den omtrek in D en C kunnen trekken, zoodanig, dat de regthoeken EG × GD en FG × GC onderling gelijk en gegeven zijn?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Zij AE $=a$, EF $=b$, en FC $=c$, en de overige lijnen zoo als in de figuur is aangewezen, dan moet volgens het Voorstel $xz=yv=p^2$ zijn. Men verlenge DE en CF tot aan den omtrek in H en I, dan is volgens de bekende eigenschap des cirkels

$$HE\times ED=AE\times EB, \text{ dus } HE=\frac{AE\times EB}{ED}=\frac{a(b+c)}{x+z}$$

$$FE\times FC=FB\times FA, \text{ dus } FI=\frac{FB\times FA}{FC}=\frac{c(a+b)}{y+v}$$

en bijgevolg is,

$$HG = \frac{a\,(b+c)}{x+z} + z$$

www.libtool.com.cn

en $$GI = \frac{(a+b)\,c}{y+v} + y$$

maar volgens diezelfde eigenſchap is HG × GD = IG × CG, en brengende hier in de waarden, dan komt er

$$\left\{\frac{a\,(b+c)}{x+z} + x\right\} \times z = \left\{\frac{c\,(a+b)}{y+v} + y\right\} \times v$$

en wanneer men hiervan aftrekt $xz = yv$, dan blijft er over

$$\frac{a\,b+c)\,z}{x+z} = \frac{c\,(a+b)\,v}{y+v}.$$

Nu volgt uit $xz = yv = p^2$ terſtond $z = \frac{p^2}{x}$ en $v = \frac{p^2}{y}$, en ſubſtituerende dit in de laatſte vergelijking, dan wordt zij

$$\frac{a\,(b+c)\,p^2}{x\,(x+z)} = \frac{c\,(a+b)\,p^2}{y\,(y+v)}$$

of door p^2 deelende, en herleidende,

$$a\,(b+c)\,.\,y\,(y+v) = c\,(a+b)\,.\,x\,(x+z)$$

en nemende wederom in aanmerking, dat $xz = yv = p^2$ is.

$$a\,(b+c)\,(y^2+p^2) = c\,(a+b)\,(x^2+p^2)$$

en hieruit vindt men gemakkelijk

$$y^2 = \frac{c\,(a+b)}{a\,(b+c)}\,.\,x^2 + \frac{b\,(c-a)}{a\,(b+c}\,.\,p^2 \quad \ldots \quad (a)$$

Kon men nu nog zulk eene eenvoudige uitdrukking voor y^2 bekomen, zoo zou de oplosſing zeer gemakkelijk worden, doch ofſchoon de vier punten E, C, D en F, uit hoofde van de gelijkheid der regthoeken xz en yy, in den omtrek van eenen cirkel gelegen zijn, en de in den cirkel beſchrevene vierhoeken bijzondere eigenſchappen hebben, zoo geven dezelve voor dit geval veel te ingewikkelde formulen; wij zullen dus onze toevlugt nemen tot de polaire vergelijking,

$$ED = x + z = \tfrac{1}{2}(b+c-a)\,Cos.\,\phi \pm \sqrt{\left\{a(b+c) + \tfrac{1}{4}(b+c-a)^2\,Cos^2.\,\phi\right\}}$$

zie de oplosſing van Voorſtel CXXXVIII van dit deel, vergelijking (12).

Subſtitueren wij in deze polaire vergelijking $Cos.\,\phi = \frac{b^2+x^2-y^2}{2bx}$, dan wordt zij,

$x +$

$$x + z = \tfrac{1}{2}(b + c - a) \cdot \frac{b^2 + x^2 - y^2}{2bx} \ldots\ldots$$

www.libtool.com.cn

$$= V\left\{a(b+c) + \tfrac{1}{4}(b+c-a)^2 \cdot \frac{(b^2+x^2-y^2)^2}{4b^2x^2}\right\}$$

waaruit

$$z = \frac{b+c-a}{4b} \cdot \frac{(b^2+x^2-y^2)}{x} - x \ldots\ldots$$

$$= V\left\{a(b+c) + \left(\frac{b+c-a}{4b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2+x^2-y^2}{x}\right)^2\right\}$$

en vermenigvuldigende dit met x

$$xz = p^2 = \frac{b+c-a}{4b}(b^2+x^2-y^2) - x^2 \ldots\ldots$$

$$= V\left\{a(b+c)x^2 + \left(\frac{b+c-a}{4b}\right)^2 (b^2+x^2-y^2)^2\right\}$$

Subſtitueren wij hierin de waarde van y^2, gevonden in (d), dan is,

$$x^2 - y^2 = x^2 - \frac{c(a+b)}{a(b+c)}x^2 - \frac{b(c-a)}{a(b+c)} \cdot p^2$$

$$= -\frac{b(c-a)}{a(b+c)} \cdot (x^2 + p^2)$$

en hierdoor wordt onze vergelijking,

$$p^2 = \frac{b+c-a}{4b} \cdot \left\{b^2 - \frac{b(c-a)}{a(b+c)}(x^2+p^2)\right\} - x^2 \ldots$$

$$= V\left\{a(b+c)x^2 + \frac{(b+c-a)^2}{16b^2} \cdot \left(b^2 - \frac{b(c-a)}{a(b+c)}(x^2+p^2)\right)^2\right\}$$

en bij gevolg,

$$= V\left\{a(b+c)x^2 + \tfrac{1}{16}(b+c-a)^2 \cdot \left(b - \frac{c-a}{a(b+c)}(x^2+p^2)\right)^2\right\}$$

$$= x^2 + p^2 - \tfrac{1}{4}(b+c-a)\left(b - \frac{c-a}{a(b+c)} \cdot (x^2+p^2)\right)$$

waarvan het quadraat is,

$$a(b+c)x^2 + \tfrac{1}{16}(b+c-a)^2\left(b - \frac{c-a}{a(b+c)}(x^2+p^2)\right)^2 = \ldots\ldots$$

$$(x^2+p^2)^2 - \tfrac{1}{2}(b+c-a)(x^2+p^2)\left(b - \frac{c-a}{a(b+c)} \cdot (x^2+p^2)\right) +$$

$$\tfrac{1}{16}(b+c-a)^2 \cdot \left(b - \frac{c-a}{a(b+c)} \cdot (x^2+p^2)\right)^2$$

en wanneer wij de gelijke termen aan beide kanten weglaten,

$$a(b+c)x^2 = (x^2+p^2)^2 - \tfrac{1}{2}(b+c-a)(b(x^2+p^2) - \frac{c-a}{a(b+c)}(x^2+p^2)^2)$$

multiplicerende nu alles met $2a(b+c)$, dan komt er,

$$2a^2(b+c)^2x^2 = 2a(b+c)(x^2+p^2)^2 + (c-a)(b+c-a)(x^2+p^2)^2 - ab(b+c)(b+c-a)(x^2+p^2)$$

Dit alles ontwikkelende en volgens de magten van x rangschikkende, verkrijgt men

$$\left.\begin{array}{l} 2a(b+c)x^4 + 4ap^2(b+c)x^2 + 2a(b+c)p^4 \\ +b(c-a)x^4 + 2bp^2(c-a)x^2 + b(c-a)p^4 \\ +(c-a)^2x^4 + 2p^2(c-a)^2x^2 + (c-a)^2p^4 \\ \quad - ab(b+c)^2x^2 - ab(b+c)^2p^2 \\ \quad + a^2b(b+c)x^2 + a^2b(b+c)p^2 \\ \quad - 2a^2(b+c)^2x^2 \end{array}\right\} = 0$$

dat is na behoorlijke herleiding der coefficienten,

$$\left\{a^2+c^2+b(a+c)\right\}x^4 + 2\left\{a^2+c^2+b(a+c)\right\}p^2x^2 - ab(b+c)(b+c-a)x^2 - 2a^2(b+c)^2x^2 + \left\{a^2+c^2+b(a+c)\right\}p^4 - ab(b+c)(b+c-a)p^2 = 0$$

en deelende alles door $a^2+c^2+b(a+c)$

$$x^4 + \left\{2p^2 - \frac{ab(b+c)(b+c-a)}{a^2+c^2+b(a+c)} - \frac{2a^2(b+c)^2}{a^2+c^2+b(a+c)}\right\}x^2 = -p^4 + \frac{ab(b+c)(b+c-a)}{a^2+c^2+b(a+c)}\cdot p^2.$$

Stellende nu kortheidshalve $\frac{ab(b+c)(b+c-a)}{a^2+c^2+b(a+c)} = 2f^2$ en $\frac{2a^2(b+c)^2}{a^2+c^2+b(a+c)} = 2g^2$, dan is onze vergelijking

$$x^4 + (2p^2 - 2f^2 - 2g^2)x^2 = -p^4 + 2f^2p^2$$

en wanneer wij het voorste lid tot een volkomen quadraat maken,

$$x^4 + 2(p^2-f^2-g^2)x^2 + (p^2-f^2-g^2)^2 = (f^2+g^2)^2 - 2g^2p^2$$

waaruit gevonden wordt

$$x^2 = f^2+g^2-p^2 \pm \sqrt{((f^2+g^2)^2 - 2g^2p^2)}$$

en bijgevolg,

$$x = \pm\sqrt{\left\{f^2+g^2-p^2 \pm \sqrt{((f^2+g^2)^2 - 2g^2p^2)}\right\}}$$

Hierdoor x gevonden hebbende, hebben wij

$$y = \pm\sqrt{\left\{\frac{c(a+b)}{a(b+c)}x^2 + \frac{b(c-a)}{a(b+c)}\cdot p^2\right\}}$$

en

en verder $s = \frac{p^2}{x}$ en $s = \frac{p^2}{y}$, waardoor dan alles bepaald is.

Wij zien hieruit verder dat het vraagſtuk in het algemeen voor vier antwoorden vatbaar is, welke echter twee aan twee zoodanig met elkander overeenkomen, dat zij alleen in de teekens verſchillen, en dat alzoo de twee eerſte in den bovenſten, en de twee andere in den benedenſten halven cirkel zullen moeten plaats hebben.

1°. Aanmerking. Indien de punten E en F even ver van het middelpunt ſtaan, dan is het klaar dat x en y aan elkander gelijk moeten worden. In dit geval is $a = c$, en onze formulen geven ons alsdan,

$$x = y = \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2 - p^2 \pm \sqrt{\left(\left(\frac{2a+b}{2}\right)^4 - 2a^2(a+b)^2p^2\right)}\right\}}.$$

2°. Aanmerking. Zijn de punten E en F in de uiteinden der middellijn gelegen, dan is $a = c = 0$ en dan is b de middellijn. Onze formulen geven voor dit geval,

$$x = y = \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}b^2 - p^2\right\}}.$$

CLXXXV. VOORSTEL.

Door U. Huguenin.

Drie voorwerpen A, B en C, Fig. 126, welker ligging geheel onbekend is, zijn uit drie andere, in ligging onbekende en geheel van elkander onafhankelijke punten D, E en F zigtbaar; zoo men nu uit ieder dezer drie laatſte punten, als ſtandpunten, met behulp eener Bouſole, de afwijking der drie eerſte punten van de noordlijn der Bouſole obſerveert, vraagt men, uit deze negen gegevens de noodige hoeken te vinden, door welke men de zes punten A, B, C, D, E en F, in eene met de natuur gelijkvormige figuur teekenen kan; onderſtellende dat alle deze punten in een zelfde vlak gelegen zijn, en dat er bij de onderlinge zigtingen der noordlijnen van de Bouſole, in deze zes punten geene afwijking plaats heeft?

De Heer L. R. Schmidt, *heeft in Voorſtel X van dit Deel eene meetkunſtige conſtructie van dit Voorſtel gegeven: hier wordt gevraagd de noodige hoeken door berekening te vinden?*

OPLOSSING, Door U. HUGUENIN.

Men ſtelle NZ, N'Z' en N''Z'', reſpectievelijk de noordlijnen der Bousſole, in de drie ſtandpunten D, E en F te zijn, terwijl nz, n'z' en n''z'' de noordlijnen der waargenomene punten A, B, en C verbeelden; dan zijn deze zes noordlijnen evenwijdig, omdat in het Voorſtel onderſteld is, dat er in deze zes punten geene onderlinge afwijking plaats heeft.

Laat nu de waargenomene afwijkingshoeken der ſtandpunten A, B en C, met de noordlijn der bousſole zijn,

$$NDA = zAD = m \; ; \; NDB = n \; ; \; NDC = l$$
$$N'EA = zAE = m' \; ; \; N'EB = n' \; ; \; N'EC = l'$$
$$N''FA = zAF = m'' \; ; \; N''FB = n'' \; ; \; N''FC = l''$$

dan worden hierdoor de volgende hoeken bekend,

$$ADB = n - m = \alpha \; ; \; AEB = n' - m' = \gamma$$
$$BDC = l - n = \beta \; ; \; BEC = l' - n' = \delta$$
$$AFB = n'' - m'' = \mu$$
$$BFC = l'' - n'' = \nu$$

voorts heeft men ook nog bekend,

$$DCE = l - l' = \lambda \; ; \; ECF = l' - l'' = \omega$$
$$EAF = nAF - nAE = (180° - m'') - (180° - m') = m' - m'' = \varepsilon$$
$$DAE = nAE - nAD = (180° - m') - (180° - m) = m - m' = \tau$$

De beide laatſte hoeken laten zich ook nog op eene andere wijze bepalen; want omdat in de driehoeken AHE en CHF, de hoeken bij H gelijk zijn, zoo heeft men $\angle EAH + \angle AEH = \angle HCF + \angle HFC$, en dus is $\angle EAF = \angle HCF + \angle HFC - \angle AEH = \varepsilon + \mu + \nu - \gamma - \delta$, en op gelijke wijze is $\angle DAE = \angle GCE + \angle GEC - \angle ADG = \lambda + \gamma + \delta - \alpha - \beta$; en hieruit volgt alzoo, wanneer de afwijkingshoeken met de noordlijnen wel geobſerveerd zijn, dat alsdan zal moeten zijn $\varepsilon = \alpha + \mu + \nu - \gamma - \delta$ en $\tau = \gamma + \delta + \lambda - \alpha - \beta$. Deze uitdrukkingen kunnen derhalve dienen om de graad der naauwkeurigheid van de waargenomene hoeken te beproeven.

Men ſtelle nu de onbekende hoeken $BAE = \phi$ en $BCE = \psi$, zoo is $BAD = \phi + \tau$; $BAF = \phi - \varepsilon$; $BCD = \psi - \lambda$ en $BCF = \psi + \omega$. Voorts leveren de verſchillende driehoeken der figuur de volgende evenredigheden op.

Sin.

$$Sin.\ ADB : Sin.\ BAD = AB : BD$$
$$Sin.\ BCD : Sin.\ BDC = BD : BC$$
$$Sin.\ BEC : Sin.\ BCE = BC : BE$$
$$Sin.\ BAE : Sin.\ AEB = BE : AB$$
$$Sin.\ AFB : Sin.\ BAF = AB : BF$$
$$Sin.\ BCF : Sin.\ BFC = BF : BC$$

www.libool.com.cn

vermenigvuldigt men de vier eerſte evenredigheden, dan vindt men,

$$Sin.\ ADB \times Sin.\ BCD \times Sin.\ BEC \times Sin.\ BAE : Sin.\ BAD \times Sin.\ BDC \times Sin.\ BCE \times Sin.\ AEB = 1 : 1$$

en ſtellende hierin de waarden der hoeken,

$$Sin.\alpha\ Sin.(\psi - \lambda).Sin.\delta.Sin.\phi = Sin.(\phi + \tau).Sin.\beta.Sin.\phi.Sin.\gamma. \quad (I)$$

Vermenigvuldigt men daarentegen de vier laatſte evenredigheden, dan verkrijgt men,

$$Sin.\ BEC \times Sin.\ BAE \times Sin.\ AFB \times Sin.\ BCF : Sin.\ BCE \times Sin.\ AEB \times Sin.\ BAF \times Sin.\ BFC = 1 : 1$$

en hierin de waarde der hoeken ſtellende,

$$Sin.\delta.Sin.\phi.Sin.\mu.Sin.(\psi + \omega) = Sin.\psi Sin.\gamma.Sin.(\phi - \sigma)Sin.\gamma. \quad (II)$$

Uit de vergelijking (I) heeft men,

$$\frac{Sin.(\psi - \lambda)}{Sin.\psi} = \frac{Sin.\beta}{Sin.\alpha} \cdot \frac{Sin.\gamma}{Sin.\delta} \cdot \frac{Sin.(\phi + \tau)}{Sin.\phi}$$

maar men heeft

$$\frac{Sin.(\psi - \lambda)}{Sin.\psi} = \frac{Sin.\psi\,Cos.\lambda - Cos.\psi.Sin.\lambda}{Sin.\psi} = Cos.\lambda - Sin.\lambda Cos.\psi$$

en bijgevolg is,

$$Cos.\lambda - Sin.\lambda\,Cot.\psi = \frac{Sin.\beta}{Sin.\alpha} \cdot \frac{Sin.\gamma}{Sin.\delta} \cdot \frac{Sin.(\phi + \tau)}{Sin.\phi}$$

en hieruit is,

$$Cot.\psi = Cot.\lambda - \frac{Sin.\beta.Sin.\gamma}{Sin.\alpha.Sin.\delta.Sin.\lambda} \cdot \frac{Sin.(\phi + \tau)}{Sin.\phi}$$

en latende $\frac{Sin.(\phi + \tau)}{Sin.\phi}$ dezelfde herleiding ondergaan,

$$Cot.\psi = Cot.\lambda - \frac{Sin.\beta\ Sin.\gamma}{Sin.\alpha.Sin.\delta.Sin.\lambda} \cdot (Cos.\tau + Sin.\tau.Cot.\phi)$$

De vergelijking (II) op dezelfde wijze behandelende, verkrijgen wij vooreerſt

$$\frac{Sin.(\psi + \omega)}{Sin.\psi} = \frac{Sin.\gamma}{Sin.\delta} \cdot \frac{Sin.\tau}{Sin.\mu} \cdot \frac{Sin.(\phi - \sigma)}{Sin.\phi}$$

en deze geeft alsdan verder,

$$Cot.\psi = \frac{Sin.\gamma\ Sin.\tau}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.\varphi} (Cos.\varphi - Sin.\varphi . Cot.\phi) - Cos.\varphi$$

en door deze twee waarden van $Cot.\psi$ aan elkander gelijk te ſtellen, verkrijgen wij eene vergelijking, waarin alleen de onbekende hoek ϕ voorkomt, namelijk,

$$\frac{Sin.\gamma . Sin.\tau . Cos.\varphi}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.\varphi} - \frac{Sin.\gamma . Sin.\tau . Sin.\varphi}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.\varphi} . Cot.\phi - Cot.\varphi =$$

$$Cot.\lambda = \frac{Sin.\beta . Sin.\gamma . Cos.\tau}{Sin.\alpha . Sin.\delta . Sin.\lambda} - \frac{Sin.\beta . Sin.\gamma . Sin.\tau}{Sin.\alpha . Sin.\delta . Sin.\lambda} . Cot.\phi.$$

en hieruit vinden wij,

$$Cot.\phi = \frac{Cot.\varphi + Cot.\lambda - \frac{Sin.\beta . Sin.\gamma . Cos.\tau}{Sin.\alpha . Sin.\delta . Sin.\lambda} + \frac{Sin.\gamma . Sin.\tau . Cos.\varphi}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.\varphi}}{\frac{Sin.\beta . Sin.\gamma}{Sin.\alpha . Sin.\delta} \frac{Sin.\tau}{Sin.\lambda} - \frac{Sin.\gamma . Sin.\tau . Sin.\varphi}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.\varphi}}$$

omdat nu $Cot.\varphi + Cot.\lambda = \frac{Sin.(\varphi + \lambda)}{Sin.\varphi . Sin.\lambda}$ is, verandert deze vergelijking in,

$$Cot.\phi = \frac{\frac{Sin.(\varphi+\lambda)}{Sin.\varphi . Sin.\lambda} - \frac{Sin.\beta . Sin.\gamma . Cos.\tau}{Sin.\alpha . Sin.\delta . Sin.\lambda} + \frac{Sin.\gamma . Sin.\tau . Cos.\varphi}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.\varphi}}{\frac{Sin.\beta . Sin.\gamma . Sin.\tau}{Sin.\alpha . Sin.\delta . Sin.\lambda} - \frac{Sin.\gamma . Sin.\tau . Cos.\varphi}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.\varphi}}$$

of wanneer men teller en noemer vermenigvuldigt met $\frac{Sin.\varphi . Sin.\lambda}{Sin.(\varphi+\lambda)}$,

en verder ſtelt

$$\frac{Sin.\beta . Sin.\gamma . Sin.\varphi}{Sin.\alpha . Sin.\delta . Sin.(\varphi+\lambda)} = P \text{ en } \frac{Sin.\gamma . Sin.\lambda . Sin.\tau}{Sin.\delta . Sin.\mu . Sin.(\varphi+\lambda)} = Q$$

dan wordt de vergelijking

$$Cot.\phi = \frac{1 - P\ Cos.\tau + Q\ Cos.\varphi}{P\ Sin.\tau - Q\ Sin.\varphi} \quad \ldots\ldots (a)$$

Deze formule is voor de berekening zeer geſchikt; heeft men echter eene nauwkeurige Sinus-tafel voor de ſtraal gelijk 1, zoo laat onze gevondene waarde van $Cot.\phi$ zich nog iets korter voor de berekening uitdrukken: men deele namelijk teller en noemer van (a) door $-Q . Sin.\varphi$, zoo heeft men, omdat $\frac{Cos.\varphi}{Sin.\varphi} = Cot.\varphi$ is,

Cot.

$$Cot.\ \Phi = \frac{Cot.\ \varepsilon + \frac{P\ .\ Cos.\ \tau}{Q\ Sin.\ \varepsilon} - \frac{1}{Q\ Sin.\ \varepsilon}}{1 - \frac{P\ Sin.\ \tau}{Q\ Sin.\ \varepsilon}}$$

www.libtool.com.cn

maar $\frac{P}{Q\ Sin.\ \varepsilon} = \frac{Sin.\ \beta\ .\ Sin.\ \alpha\ .\ Sin.\ \mu}{Sin.\ \alpha\ .\ Sin.\ \lambda\ .\ Sin.\ \nu\ .\ Sin.\ \varepsilon}$ en $\frac{1}{Q\ .\ Sin.\ \varepsilon} = \frac{Sin.\ \delta\ .\ Sin.\ \mu\ .\ Sin.\ (\alpha + \lambda)}{Sin.\ \gamma\ .\ Sin.\ \lambda\ .\ Sin.\ \nu\ .\ Sin.\ \varepsilon}$; ſtelt men dus $\frac{Sin.\ \mu}{Sin\ \lambda\ Sin.\nu.Sin\ \varepsilon} = A$; $\frac{Sin\ \alpha.Sin\ \beta}{Sin.\ \alpha} = B$ en $\frac{Sin\ \delta.Sin.(\alpha+\lambda)}{Sin.\ \gamma} = C$

zoo verkrijgt men

$$Cot.\ \Phi = \frac{Cot\ \varepsilon + A \times B\ Cos.\ \tau - A \times C}{1 - A \times B\ Sin.\ \tau} \ldots\ldots (b)$$

hetwelk de uitdrukking is, die den Heer SCHULZE, in zijn *Taſchenbuch der Mathematick* gegeven heeft, en waarbij ſlechts drie verſchillende producten te berekenen zijn, terwijl men er bij de eerſte formule (*a*) vier berekenen moet.

Wij zullen een zelfde voorbeeld naar deze beide formulen berekenen. Tot dit einde ſtelle men: dat, door de voorheen bepaalde waarnemingen der afwijkingen van de noordlijnen, en de aangewezene reductien, de volgende hoeken bekend geworden zijn,

$\alpha = 24°30'$; $\beta = 18°45'$; $\gamma = 24°$; $\delta = 16°45'$;
$\mu = 29°45'$; $\nu = 19°30'$; $\lambda = 21°30'$ en $\alpha = 20°$.

dan is $\alpha + \lambda = 41°30'$; $\varepsilon = 28°30'$ en $\tau = 19°$, en men heeft voor de berekening van formule (*a*)

Log. Sin. α = 9,6177270—10	Log. Sin. δ = 9,4596884—10
Log. Sin. δ = 9,4596884—10	Log. Sin. μ = 9,6956712—10
L. S. $(\omega+\lambda)$ = 9,8212646—10	L. S. $(\omega+\lambda)$ = 9,8212646—10
* = 8,8986800—10	* * = 8,9766242—10
Log. Sin. β = 9,5070991—10	Log. Sin. γ = 9,6093133—10
Log. Sin. γ = 9,6093133—10	Log. Sin λ = 9,5540754—10
Log. Sin. ω = 9,5340517—10	Log. Sin. ν = 9,5234953—10
= 8,6504642—10	= 8,6968840—10
* = 8,8986800—10	* * = 8,9766242—10
Log. P = 9,7517842—10	Log. Q = 9,7202598—10
Log. Sin. φ = 9,5126419—10	Log. Sin φ = 9,6786629—10
Log. P Sin. φ = 9,2644261—10	Log. Q. Sin. φ = 9,3989227—10
P. Sin. τ = 0,1838341	Q Sin. φ = 0,2505663
Log. P = 9,7517842—10	Log. Q = 9,7202598—10
Log. Cos. τ = 9,9756701—10	Log. Cos φ = 9,9438985—10
Log. P Cos τ = 9,7274543—10	Log. Q Cos. φ = 9,6641583—10
P Cos. τ = 0,5338931	Q Cos. φ = 0,4614857

$$\text{Cot. } \Phi = \frac{1 - 0{,}5338931 - 0{,}4614857}{0{,}1838341 - 0{,}2505663} = -\frac{46212}{667322}$$

Log. 46212 = 4,6647548

Log. 667322 = 5,8243354

Log. Cos. Φ = 8,8404194 —

Φ = 93°57′41″,06

Ter

Ter berekening van de formule (*b*) heeft men

Log. Sin. λ = 9,5640754—10	*Log.* AB = 0,3528615
Log. Sin. γ = 9,5234953—10	*Log. Sin.* ε = 9,5126419—10
Log. Sin. ε = 9,6786629—10	*Log.* AB *Sin.* ε = 9,8655034—10
8,7662336—10	AB . *Sin.* ε = 0,7336743
Log. Sin. μ = 9,6956712—10	
Log. A = 0,2294376	*Log. Sin.* β = 9,4596884—10
	L. S. $(\psi+\lambda)$ = 9,8212646—10
Log. Sin. β = 9,5070992—10	9,2809530—10
Log. Sin. ψ = 9,5340517—10	*Log. Sin.* γ = 9,6093133—10
9,0411509—10	*Log.* C = 9,6716397—10
Log. Sin. α = 9,6177270—10	*Log.* A = 0,2294376
Log. B = 9,4234239—10	*Log.* AC = 0,6010773
Log. A = 0,2294376	AC = 3,9909600
Log. AB = 0,3528615	*Log. Cot.* ε = 0,2652356
Log. Cos. ε = 9,9756701—10	*Cot.* ε = 1,8417709
Log. AB *Cos.* ε = 0,3285316	
AB *Cos.* ε = 2,1307454	

en bijgevolg,

$$\text{Cot. } \Phi = \frac{1{,}8417709 + 2{,}1307454 = 3{,}9909600}{1 - 0{,}7336743}$$

$$= -\frac{0{,}0184437}{0{,}2663257} = -0{,}0692524$$

zoodat $\Phi = 93°57'41'',57$, welke waarde met de bovengevondene slechts $0'',51$ of iets meer dan eene halve seconde verschilt.

Om de overige hoeken onzer figuur te vinden, moet men nog ψ berekenen, door middel van de formule,

$$\text{Cot. } \psi = \frac{\text{Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varepsilon}{\text{Sin. } \beta \text{ . Sin. } \mu \text{ . Sin. } \psi} \cdot \frac{\text{Sin.}(\Phi - \varepsilon)}{\text{Sin. } \Phi} - \text{Cot. } \psi$$

waarin nu Φ bekend is. Daar wij echter voor Φ twee verschillende waarden gevonden hebben, welke met elkander $0'',51$ verschillen, zoo nemen wij een midden uit dezelve, en stellen alzoo $\Phi = 93°57'41'',30$. Dit aangenomen hebbende, is $\Phi - \varepsilon = 93°57'.41'',30 - 28°30' = 65°27'41'',30$, en men heeft dus, om ψ te vinden, de volgende berekening;

Log.

Log. Sin. γ =	9,6093133—10
Log. Sin. ν =	9,5234953—10
L. S. $(\phi - \varepsilon)$ =	9,9588897—10
	9,0916983—10
* =	8,6883724—10
Log. p =	0,4033259
p =	2,5311964

Log. Sin. δ =	9,4596884—10
Log. Sin. μ =	9,6956712—10
Log. Sin. ω =	9,5340517—10
Log. Sin. ϕ =	9,9989611—10
* =	8,6883724—10
p =	2,5311964
Cot. ω =	2,7474774
Cot. ψ =	-0,2162810 (—

hieruit is ψ = 102°12′14″,44, en bijgevolg,

ζ ABC = 360° — $(\phi + \psi + \gamma + \delta)$ = 123°5′4″,26.

Omdat de hoeken σ en τ, door de waargenomene hoeken bij D, E en F, namelijk door α, β, γ, δ, μ en ν, zonder behulp der noordlijnen kunnen worden gevonden, als de hoeken λ en ω bij C bekend zijn, zoo volgt hier uit, dat men dit Voorstel zonder bousfole kan oplosfen, mits dat men in C de ſtandpunten D, E en F kan zien, en dus de hoeken λ en ω meten kan. De Heer SCHULZE heeft ons Voorſtel, in zijn meergemeld *Taſchenbuch* werkelijk alzoo voorgedragen. Mijne oplosfing is op beide metingswijzen toepasſelijk, en toont tevens aan, hoe voordeelig de meting met de bousfole zoude zijn, wanneer dezen hoekmeter eenen grooteren graad van naauwkeurigheid kon worden gegeven, waaraan echter zeer te twijfelen is.

De Heer LAMBERT, welke dit Voorſtel, voor zoo veel mij bewust is, het eerst heeft voorgedragen (zie zijne *Beyträge zum gebrauche der Mathematick. Erster Band, Pag.* 78), heeft aldaar mede eene geometriſche conſtructie van hetzelve gegeven, welke wij echter, daar zij veel omſlagtiger is, dan die, welke de Heer SCHMIDT in Voorſtel X van dit Deel gegeven heeft, achterwege laten.

CLXXXVI. VOORSTEL.

Door H. VAN WESSEM Jz.

Iemand vraagde: hoe lang is wel de Hoogeſluis, welke te Amſterdam over den Amſtel ligt? Hij kreeg tot antwoord: wanneer men 671 *voet bij hare lengte optelt, dan zal de cubiekwortel uit deze ſom* 5 *meer zijn, dan de cubiekwortel uit het verſchil, dat men ver-*

verkrijgt, wanneer men 444 voet van hare lengte aftrekt. Hoeveel zal men nu voor hare lengte vinden?

www.dbnl.org

OPLOSSING. Door H. VAN WESSEM Jz., J. PEEREBOOM, R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN, H. FORKES BAKKER, R. VAN WIJK en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel de lengte der sluis gelijk x voeten, en stel $671 = a$, $444 = b$, en $5 = c$, dan hebben wij in het algemeen deze vergelijking,

$$\sqrt[3]{(x+a)} = c + \sqrt[3]{(x-b)}$$

of stellende $\sqrt[3]{(x-b)} = y$, dan is $x - b = y^3$, dus $x = y^3 + b$ en bijgevolg,

$$\sqrt[3]{(y^3+a+b)} = c + y$$

waarvan de derde magt is,

$$y^3 + a + b = c^3 + 3c^2y + 3cy^2 + y^3$$

dat is, na herleiding de vierkants-vergelijking,

$$y^2 + cy = \frac{a+b}{3c} - \frac{c^2}{3}$$

waaruit wij vinden,

$$y = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{3c} - \frac{c^2}{12}\right)}$$

en bijgevolg de gevraagde lengte,

$$x = b + \left\{-\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{3c} - \frac{c^2}{12}\right)}\right\}^3$$

brengende nu hier de gegevene waarde van a, b en c, dan komt er,

$$x = 444 + \left\{-\tfrac{5}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1115}{15} - \tfrac{25}{12}\right)}\right\}^3 = 444 + \left\{-\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\right\}^3$$

dat is $x = 444 + 216 = 660$ of $x = 444 - 1331$, de tweede waarde kan hier echter niet in aanmerking komen, omdat zij eene negatieve lengte voor de sluis zou geven, en de sluis is alzoo 660 voeten lang.

CLXXXVII. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Van vijf getallen, welke eene rekenkunstige reeks uitmaken, die met

met zes opklimt, is de som der termen een quadraat: men vraagt welke de kleinste geheele positieve getallen zijn, die aan deze voorwaarden voldoen?

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, H. FOKKES BAKKER, J. PEEREBOOM, R. VAN WIJK en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel voor de getallen $x - 12$, $x - 6$, x, $x + 6$ en $x + 12$, dan is de som $5x$ en deze moet dus een quadraat zijn, waaraan voldaan wordt door $x = 5y^2$ te nemen; de reeks wordt hierdoor,

$$5y^2 - 12,\ 5y^2 - 6,\ 5y^2,\ 5y^2 + 6,\ 5y^2 + 12.$$

Zullen nu deze getallen positief zijn, dan kan y niet kleiner dan 2 genomen worden, want anders zou $5y^2 - 12$ negatief worden; nemende dus $y = 2$ dan worden de getallen,

$$8 \ . \ 14 \ . \ 20 \ . \ 26 \ . \ 32$$

CLXXXVIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Wanneer de jaren van vier kinderen achtervolgens met een gelijk getal opklimmen; de som hunner jaren bovendien 36, en derzelver product 5760 is, vraagt men naar ieders ouderdom?

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., R. LOBATTO, J. PEEREBOOM, A. VAN DER SWAN, H. FOKKES BAKKER, R. VAN WIJK en H. VAN KRAAIJENOORD.

Omdat de som der termen 36 moet zijn, zoo stellen wij voor de reeks $9 - 3y$, $9 - y$, $9 + y$ en $9 + 3y$, en wij behoeven dan nog alleen te voldoen aan de vergelijking,

$$(81 - y^2)(81 - 9y^2) = 5760$$

of door 9 deelende,

$$(81 - y^2)(9 - y^2) = 640$$

dat is $$y^4 - 90y^2 + 89 = 0$$

Hieruit is $y^2 = 45 \pm \sqrt{(45^2 - 89)} = 45 \pm 44$, dat is, $y^2 = 1$ of $y^2 = 89$ en bijgevolg $y = 1$ of $y = \sqrt{89}$. Het tweede antwoord is hier echter niet toepasselijk, omdat $\sqrt{89} > 9$ zijnde, de ouderdom der twee eerste kinderen hierdoor

door negatief zou worden. Wij hebben dus $y = 1$ en bijgevolg zijn de gevraagde jaren 6, 8, 10 en 12.

www.libtool.com.cn

CLXXXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Boven eene onbepaalde lijn PQ (Fig. 127) zijn twee punten A en B in stelling gegeven. Men vraagt nu de meetkunstige plaats te bepalen van eenig punt R, zoodanig gesteld, dat wanneer men uit de gegevene punten A en B, door het punt R, regte lijnen trekt, de gegevene lijn PQ in F en E doorsnijdende, het stuk EF van de gegevene lijn, eene bepaalde lengte hebbe?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Uit de opgave blijkt terstond, dat niets gemakkelijker is, dan onze kromme lijn door punten te construeren; want nemen wij EF gelijk aan hare gegevene waarde, en trekken wij AF en BE, elkander in R doorsnijdende, dan is R een punt van de gevraagde meetkunstige plaats, en op deze wijze kan men zoo veel punten vinden als men goedvindt.

Om de vergelijking van de kromme lijn te bepalen, trekken wij de loodlijnen AC, BD en RO, en deelen CD midden door in M. Stellen wij nu $AC = a$, $BD = b$, $CM = MD = c$, $EF = d$, $MO = x$ en $OR = y$, dan is vooreerst $CO = c + x$ en $DO = c - x$, en wij hebben verder,

$$AC - RO : CO = RO : OF$$

en

$$BD - RO : OD = RO : OE$$

en hierin de gestelde waarden substituerende,

$$a - y : c + x = y : OF$$

en

$$b - y : c - x = y : OE$$

en bijgevolg $OF = \frac{y(c+x)}{a-y}$ en $OE = \frac{y(c-x)}{b-y}$. Daar nu de som dezer twee lijnen gelijk d moet zijn, zoo hebben wij de vergelijking,

$$\frac{y(c+x)}{a-y} + \frac{y(c-x)}{b-y} = d. \quad . \quad . \quad . \quad (x)$$

Dit is dus de vergelijking onzer kromme lijn, doch om derzelver aard beter te leeren kennen, moeten wij deze vergelijking nader ontwikkelen.

Ver-

Vermenigvuldigende alles met het produet der noemers, dan verkrijgen wij

$$y\{(b-y)(c+x)+(a-y)(c-x)\}=d(a-y)(b-y)$$

$$\text{of } y\{bc+bx-cy-xy+ac-ax-cy+xy\}=d(a-y)(b-y)$$

$$\text{dat is } y\{(a+b)c+(b-a)x-2cy\}=d(a-y)(b-y)$$

$$\text{of } (b-a)x+(a+b-2y)c=\frac{d(a-y)(b-y)}{y}$$

$$\text{en } x=\frac{d}{b-a}\times\frac{(a-y)(b-y)}{y}-\frac{c}{b-a}\times(a+b-2y)$$

welke vergelijking, daar zij klaarblijkelijk van den tweeden graad is, tot eene der kegelsneden behoort.

Nemende $y=o$, dan is $x=\infty$. Hieruit volgt dat PQ eene der asymptoten is, en bijgevolg is de kromme eene hyperbool.

Nemende $y=a$ dan wordt $x=-c$, maar $y=b$, maakt $x=+c$. De punten A en B zijn dus punten van de hyperbool.

Uit de bekende eigenschap van de hyperbool volgt nu verder, dat men de andere asymptote gemakkelijk construeren kan; want door $EF=d$ te maken, en de lijnen AF en BE te trekken, vinden wij een punt R van de hyperbool, daar nu A en B mede punten van de hyperbool zijn, en PQ eene van derzelver asymptoten is, zoo behoeven wij slechts EB en FA te verlengen, tot dat $AF'=RF$ en $BE'=RE$ is, en dan zullen F' en E' punten van de andere asymptote zijn, en hierdoor is nu de andere asymptote benevens het middelpunt bepaald, waardoor dan verder de hyperbool gemakkelijker kan worden geconstrueerd, dan door de eerst opgegevene constructie, welke uit den aard van het vraagstuk voortvloeide.

Gevolg. Hieruit volgt deze merkwaardige eigenschap van de hyperbool.

Wanneer in eene hyperbool, (*Fig.* 128) *twee vaste punten A en B naar welgevallen worden aangenomen, en men uit deze punten regte lijnen AR en BR door eenig willekeurig punt R van de hyperbool trekt, tot dat zij eene der asymptoten in E en F ontmoeten,*

dan

dan zal, waar dit derde punt R ook genomen mage worden, het stuk EF altijd even groot zijn.

Men kan deze eigenschap der hyperbool, ook gemakkelijk zonder behulp van het voorgaande bewijzen, want laat AC, BD en RO evenwijdig met YQ getrokken worden. Stel voor de vaste punten A en B de coördinaten QC $=a$, AC $=b$, QD $=c$ en BD $=d$, en voor het veranderlijke punt R, de coördinaten QO $=x$ en OR $=y$, dan is door de eigenschap van de hyperbool $ab=cd=xy$. Verder is,

$$AC-RO : OC = RO : OF$$

en

$$BD-RO : OD = RO : OE$$

of

$$b-y : x-a = y : OF$$

en

$$d-y : x-c = y : OE$$

zoodat $OE=\frac{y(x-c)}{d-y}$ en $OF=\frac{y(x-a)}{b-y}$, waaruit

$$EF=\frac{y(x-c)}{d-y}-\frac{y(x-a)}{b-y}$$

Nu is $y=\frac{ab}{x}=\frac{cd}{x}$, dus $d-y=\frac{d(x-c)}{x}$ en $(b-y)=\frac{b(x-a)}{x}$, en bijgevolg,

$$EF=y\left\{(x-c)\times\frac{x}{d(x-c)}-(x-a)\times\frac{x}{b(x-a)}\right\}$$

$$=y\left(\frac{x}{d}-\frac{x}{b}\right)=xy\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)=ab\left(\frac{b-d}{bd}\right)$$

$$=\frac{a(b-d)}{d}$$

en dus is EF eene constante grootheid.

Voor de lijn E′F′ zal het zelfde plaats hebben. Om dit te bewijzen, trekken wij RK evenwijdig met XQ, dan is, wanneer wij BL en AM mede evenwijdig aan XQ trekken, volgens de bekende eigenschap der hyperbool, BB′ $=$ RE en AF′ $=$ RF, dus E′L $=$ RO $=$ KQ en F′M $=$ OR $=$ KQ, en bijgevolg F′K $=$ AC $=b$ en E′K $=$ BD $=d$, zoodat E′F′ $=$ F′K $-$ E′K $=b-d$, en dus mede eene constante lijn is. De opgenoemde eigenschap is dus nu in het algemeen bewezen.

AANMERKING. Is in Fig. 127, $a=b$, dan is altijd de punt

ten A en B even ver van PQ gelegen, dan wordt de plaats van het punt R eene regte lijn, evenwijdig met PQ, want dan gaat de vergelijking (a) over in

$$y(c+x)+y(c-x)=d(b-y)$$

of $2cy=bd-dy$, dat is: $y(2c+d)=bd$ en bijgevolg, $y=\frac{bd}{2c+d}$, welke bepaalde waarde van y eene regte lijn aanduidt, evenwijdig met PQ, en van dezelve op eenen afstand gelijk $\frac{bd}{2c+d}$ verwijderd.

CXC. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Eene onbepaalde lijn PQ, (Fig. 129), met een punt C in, en twee punten A en B buiten dezelve, gegeven zijnde, vraagt men de meetkunstige plaats van eenig punt R te bepalen, hetgeen zoodanig geplaatst moet zijn, dat wanneer men door hetzelve, uit de gegevene punten A en B, regte lijnen trekt, snijdende de gegevene lijn PQ in de punten F en E, de afstanden EC en FC van deze snijpunten tot het gegevene punt C, in reden staan als twee gegevene lijnen p en q?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Trekken wij AC, en evenwijdig met dezelve BD en RM, dan zullen wij, indien wij stellen AC $=a$, BD $=b$, CD $=c$, CM $=x$ en MR $=y$, de volgende evenredigheden hebben.

$$a-y:x=y:\text{MF}$$
$$b-y:c-x=y:\text{ME}$$

dus $\text{MF}=\frac{xy}{a-y}$ en $\text{ME}=\frac{(c-x)y}{b-y}$, en door deze uitdrukkingen op te tellen,

$$\text{EF}=y\left\{\frac{a}{a-y}+\frac{(c-x)}{(b-y)}\right\}$$
$$=y\left\{\frac{(b-a)x-cy+ac}{(a-y)(b-y)}\right\}$$

verder is $\text{CF}=\text{CM}+\text{MF}=x+\frac{xy}{a-y}=\frac{ax}{a-y}$; door

www.libtool.com.cn

dit volgens het Voorstel, CE : CF = p : q moet zijn; zoo is CF — CE : q — p = CF : q, of EF : q — p = CF : q, en dus is EF = $\frac{q-p}{q}$ × CF; wij hebben dus de vergelijking,

$$y \times \frac{(b-a)\,x - cy + ac}{(a-y)(b-y)} = \frac{q-p}{q} \times \frac{ax}{a-y}$$

of $(b-a)\,xy - cy^2 + acy = \frac{q-p}{q} \times ax\,(b-y)$

en hierdoor verkrijgen wij,

$$\left(b - \frac{p}{q}\,a\right) xy - cy^2 + acy - \frac{q-p}{q}\,abx = 0$$

welke vergelijking van den tweeden graad zijnde, tot eene der kegelsneden behoort.

Zonderen wij uit deze vergelijking de waarde van x af, dan vinden wij,

$$x \left\{ y\left(b - \frac{p}{q}\,a\right) - \frac{q-p}{q}\,ab \right\} = cy^2 - acy$$

en bijgevolg,

$$x = \frac{cy\,(y-a)}{y\left(b - \frac{p}{q}\,a\right) - \frac{q-p}{q}\,ab} \quad \ldots\ldots (b)$$

Deze waarde van x wordt oneindig, wanneer de noemer gelijk 0 is, dat is: wanneer wij hebben $y\left(b - \frac{p}{q}\,a\right) = \frac{q-p}{q}\,ab$, dat is: $y\,(qb - pa) = (q-p)\,ab$, of $y = \frac{(q-p)\,ab}{qb-pa}$.

Nemende dus op CA een stuk CN gelijk $\frac{(q-p)\,ab}{qb-pa}$, daar boven als deze waarde positief, doch naar beneden, op het verlengde van AC, als die waarde negatief is, en trekkende door N de lijn HH′ evenwijdig aan PQ, dan zal dezelve eene asymptote van onze kromme zijn, en het blijkt hieruit, dat onze kromme lijn eene hyperbool is, omdat de hyperbool de eenige kegelsnede is, welke voor asymptoten vatbaar is.

De waarde van x uit de vergelijking (a) wordt gelijk 0, wanneer $y = 0$ en wanneer $y = a$ is; en dit toont aan, dat de punten C en A beide punten van de hyperbool zijn.

Stellende in (*a*) $y = b$, dan wordt $x = c$, en bijgevolg gaat de hyperbool ook door het punt B.

www.libtool.com.cn

Het is gemakkelijk onze kromme lijn naar aanleiding van de opgaaf door punten te conſtrueren; want trekkende eene willekeurige lijn BE en nemende CE : CF $= p : q$, dan zal men ſlechts de lijn AF behoeven te trekken, om door derzelver ſnijding met BE, het punt R van de hyperbool te vinden. Hoe gemakkelijk ondertuſſchen deze conſtructie ook ſchijnen moge, wordt zij echter in de uitvoering zeer lastig, omdat de lijnen AF en BE elkander weldra onder zulke ſcherpen hoeken beginnen te doorſnijden, dat men, zelfs bij de naauwkeurigſte conſtructie, op de juistheid der ſnijpunten niet meer kan ſtaat maken. Gemakkelijker zal het dus zijn, dat wij de andere aſymptoot trachten te bepalen, want deze gevonden hebbende, zoo kennen wij ook het middelpunt en dus de rigting der aſſen, waardoor wij dan, omdat bovendien de drie punten A, B en C der hyperbool bekend zijn, de hyperbool door de bekende regels gemakkelijk kunnen conſtrueren.

Deze tweede aſymptoot wordt nu gemakkelijk in de figuur geconſtrueerd, want omdat IIH′ eene der aſymptoten is, en A en C punten van de hyperbool zijn, behoeven wij ſlechts CN′ = AN te maken, en dan is N′ een punt van de tweede aſymptoot. Om dezelfde rede zal men nog een punt van deze tweede aſymptoot vinden door CB te trekken en BK′ = CK te maken. Trekkende dan door N′ en K′ de onbepaalde lijn LL′, dan is deze de tweede aſymptoot, en hierdoor is dan ook het middelpunt T bepaald.

Aanmerking. Wanneer $qb = pa$ en dus $q : p = a : b$ is, dan wordt $qb - ap = 0$, en dus CN = ∞. In dit geval verkrijgt dus de aſymptoot HH′ eenen oneindigen afſtand van PQ, en dit geeft te kennen, dat in dit geval de hyperbool overgaat in eene parabool. Onze vergelijking (*a*) bevestigt dit volkomen; want dezelve wordt in de onderſtelling van $qb = pa$ of $q = \frac{pa}{b}$

$$x = \frac{cy\,(y - a)}{-ap\,(a - b)} \times \frac{pa}{b} = \frac{cy\,(y - a)}{b\,(b - a)}.$$

dus

dat is: $cy^2 - acy = b(b-a)x$ of $y^2 - ay = \frac{b(b-a)}{c}x$

waaruit $(y - \frac{1}{2}a)^2 = \frac{b(b-a)}{c}x + \frac{1}{4}a^2$, welke vergelijking klaarblijkelijk tot een parabool behoort, waarvan de as evenwijdig loopt met de lijn PQ.

www.libtool.com.cn

Gevolg. Men kan hieruit tot deze eigenschap van de hyperbool besluiten. *Wanneer uit eenig punt C van eene hyperbool eene lijn PQ evenwijdig met eene der asymptoten HH' getrokken wordt, en verder twee vaste punten A en B in deze hyperbool worden aangenomen, dan zal, door welk veranderlijk punt R, in den omtrek van de hyperbool, men de lijnen ARF en BRE ook trekken moge, altijd CE en CF in dezelfde reden zijn.*

CXCI. VOORSTEL.

Door J. Peereboom.

Drie personen A, B en C hebben te deelen 380 *guldens, waarvan C, wiens deel het grootst zal zijn,* 100 *gulden meer moet hebben dan A, welke het minste ontvangt. Wanneer nu hunne deelen in eene meetkunstige reden opklimmen, vraagt men hoeveel ieder ontvangen zal?* (48)

Oplossing. Door J. Peereboom, H Foekes Bakker, A. van der Swan, R. Lobatto, R. van Wijk en H. van Kraaijenoord.

Stel het deel van A gelijk x, dan is, dat van C gelijk $x + 100$, en dus, dat van B gelijk $280 - 2x$, zoodat volgens het Voorstel is,

$$x : 280 - 2x = 280 - 2x : x + 100$$

en dit geeft de vergelijking,

$$78400 - 1120x + 4x^2 = x^2 + 100x$$

dat is: herleidende en met 3 vermenigvuldigende,

$$9x^2 - 3660x - 235200 = 0$$

waaruit gevonden wordt $x = 80$ of $x = 326\frac{2}{3}$.

Het tweede antwoord $x = 326\frac{2}{3}$, offchoon eene oplossing van

(48) A. B. Strabbe, *Inleiding tot de Math. Wetensch. pag.* 272. N°. 48.

van ons Voorstel zijnde, is echter niet toepasselijk op de vraag, in dien zin waarin dezelve is opgegeven; want $x = 326\frac{2}{3}$ het deel van A zijnde, zou het deel van C zijn $x + 100$ of $426\frac{2}{3}$ en dus zou het derde deel, dat is: het deel van B klaarblijkelijk negatief worden.

Nemen wij dan $x = 80$ voor het deel van A, dan is het deel van B gelijk $280 - 2x = 120$, en dat van C is $x + 100$ of 180 gulden.

CXCII. VOORSTEL.

Door J. PEEREBOOM.

Vier getallen te vinden in eene rekenkunstige reeks, van welke de som der vierkanten van de twee middelste gelijk a (369), *en de som der vierkanten van de twee uiterste gelijk b* (405) *is?* (49)

OPLOSSING. Door J. PEEREBOOM, R. LOBATTO, H. FOEKES BAKKER, A. VAN DER SWAN, R. VAN WIJK en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel voor de getallen $x - 3y$, $x - y$, $x + y$ en $x + 3y$, dan hebben wij deze twee vergelijkingen,

$$(x - y)^2 + (x + y)^2 = a$$

en

$$(x - 3y)^2 + (x + 3y)^2 = b$$

dat is; na ontwikkeling,

$$2x^2 + 2y^2 = a$$

en

$$2x^2 + 18y^2 = b$$

Door deze twee vergelijkingen van elkander af te trekken, heeft men terstond $16y^2 = b - a$ en bijgevolg $y = \frac{1}{4}\sqrt{(b-a)}$; en door de tweede van negenmaal de eerste af te trekken, verkrijgen wij $16x^2 = 9a - b$, waaruit $x = \frac{1}{4}\sqrt{(9a - b)}$. De gevraagde getallen zijn dus,

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(9a-b)} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(b-a)};\ \tfrac{1}{4}\sqrt{(9a-b)} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(b-a)}$$
$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(9a-b)} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b-a)};\ \tfrac{1}{4}\sqrt{(9a-b)} + \tfrac{3}{4}\sqrt{(b-a)}$$

Stellen wij in plaats van a en b de gegevene waarden 369 en 405, dan is $\sqrt{(b-a)} = \sqrt{36} = 6$ en $\sqrt{(9a-b)} = \sqrt{(3321 - 405)} = \sqrt{2916} = 54$, en dan worden de getallen 9, 12, 15 en 18.

CXCIII.

(49) *Idem*, *pag.* 274, N°. 54.

CXCIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

www.libtool.com.cn

In eenen gegevenen driehoek ABC (Fig. 130) eene lijn DE, van gegevene lengte, zoodanig, uit eenig punt D van de zijde AB, tot eenig punt E van de zijde BC te trekken, dat, trekkende uit de punten D en E, lijnen DG en EF, evenwijdig met de derde zijde AC van den gegevenen driehoek; de regthoek FE × DG gelijk werde aan den regthoek onder de lijn DE en eene gegevene lijn p.

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Stel DE $= a$, $\angle$ BAC $= \alpha$ en $\angle$ ACB $= \beta$, dan is $\angle$ ABC $= 180° - (\alpha + \beta)$. Stel voorts den onbekenden hoek EDG $=$ DEF $= \phi$, dan is $\angle$ FDE $= \alpha - \phi$, en $\angle$ DEG $= 180° - (\beta + \phi)$.

Nu is in driehoek DEG, $DG = \frac{Sin.\ DEG}{Sin.\ DGE} \times DE = \frac{Sin.\ (\beta + \phi)}{Sin.\ \beta} \times a$, en in den driehoek DEF, is $FE = \frac{Sin.\ FDE}{Sin.\ DFE} \times DE = \frac{Sin.\ (\alpha - \phi)}{Sin.\ \alpha} . a$, en bijgevolg verkrijgen wij de vergelijking,

$$DG \times FE = \frac{Sin.\ (\alpha - \phi)\ .\ Sin.\ (\beta + \phi)}{Sin.\ \alpha\ .\ Sin.\ \beta} \times a^2 = ap$$

dat is:

$$Sin.\ (\alpha - \phi)\ .\ Sin.\ (\beta + \phi) = \frac{p}{a}\ .\ Sin.\ \alpha\ .\ Sin.\ \beta$$

Daar nu volgens de bekende goniometrische formulen,

$$Sin.\ (\alpha - \phi)\ Sin.\ (\beta + \phi) = \tfrac{1}{2} Cos. \{(\alpha - \phi) - (\beta + \phi)\} - \tfrac{1}{2} Cos. \{(\alpha - \phi) + (\beta + \phi)\}$$
$$= \tfrac{1}{2} Cos.\ (\alpha - \beta - 2\phi) - \tfrac{1}{2} Cos.\ (\alpha + \beta)$$
$$= \tfrac{1}{2} Cos.\ (\beta - \alpha + 2\phi) - \tfrac{1}{2} Cos.\ (\beta + \alpha)$$

en $Sin.\ \alpha\ .\ Sin.\ \beta = \frac{1}{2} Cos.\ (\beta - \alpha) - \frac{1}{2} Cos.\ (\beta + \alpha)$ is, zoo verandert onze vergelijking in,

$$\tfrac{1}{2} Cos.\ (\beta - \alpha + 2\phi) - \tfrac{1}{2} Cos.\ (\beta + \alpha) = \frac{p}{a} \left(\tfrac{1}{2} Cos.\ (\beta - \alpha) - \tfrac{1}{2} Cos.\ (\beta + \alpha)\right)$$

dat is in,

$$Cos.(\beta - \alpha + 2\phi) = \frac{p}{a} Cos.(\beta - \alpha) + \frac{a-p}{a} Cos.(\beta + \alpha)$$

www.libtool.com.cn

waardoor de hoek $\beta - \alpha + 2\phi$ en bijgevolg ook de hoek ϕ bekend is.

Daar nu in het algemeen de bogen A en $360° - A$ dezelfde Cosinus hebben, zoo hebben wij hierdoor deze twee oplosſingen,

I°. $Cos.(\beta - \alpha + 2\phi) = \frac{p}{a} Cos.(\beta - \alpha) + \frac{a-p}{a} Cos.(\beta + \alpha)$

II°. $Cos.(360° - \beta + \alpha - 2\phi) = \frac{p}{a} Cos.(\beta - \alpha) + \frac{a-p}{a} Cos.(\beta + \alpha)$

waardoor dan ook in het algemeen twee hoeken ϕ gevonden worden, die aan de vraag beantwoorden.

Stellende dan kortheidshalve,

$$\frac{p}{a} Cos.(\beta - \alpha) + \frac{a-p}{a} Cos.(\beta + \alpha) = Cos. A$$

dan hebben wij,

I° . . . . . $Cos.(\beta - \alpha + 2\phi) = Cos. A$

II° . . . . . $Cos.(360° - \beta + \alpha - 2\phi) = Cos. A$

en bijgevolg worden de twee waarden van ϕ,

I° . . . . . $\phi = \frac{1}{2}(A + \alpha - \beta)$

II° . . . . . $\phi = 180° - \frac{1}{2}(A + \beta - \alpha)$

VOORBEELD. Zij $\alpha = 60°$; $\beta = 75°$ en $\frac{p}{a} = \frac{1}{3}$; dan is $Cos. A = \frac{1}{3} Cos. 15° + \frac{2}{3} Cos. 135° = -0{,}1494293 = Cos. 98°36'$ ten naaste bij, dus $A = 98°36'$ en bijgevolg wordt de eerſte waarde van ϕ,

$$\phi = \frac{1}{2}(98°36' + 60° - 75°) = 41°48'$$

terwijl de tweede waarde van ϕ geeft,

$$\phi = 180° - \frac{1}{2}(98°36' + 75° - 60°) = 122°12'.$$

Deze hoeken alzoo gevonden hebbende, is het zeer gemakkelijk de figuur te conſtrueren. Want voor de eerſte waarde van ϕ make men, *Fig.* 131, $\angle HAC = \phi = 41°48'$, en $AI = a$, voorts trekke men IE evenwijdig met AB en ED evenwijdig met AH, dan is ADEI een parallelogram, en de begeerde lijn $DE = AI = a$.

Voor de tweede waarde van ϕ, make men de $\angle H'AC = \phi = 122°12'$; en $AI' = a$, trekke $I'E'$ evenwijdig met AB,

en

en E'D' evenwijdig met AI', dan is dit de tweede lijn E'D', welke aan de vraag beantwoordt, en wij zullen alsdan hebben,

$$DG \times EF = D'G' \times E'F' = ap$$

het is verder zigtbaar, dat deze twee antwoorden of oplosſingen eene in alle deelen tegenovergeſtelde ligging in den driehoek ABC hebben.

www.hbtool.com.cn

1°. AANMERKING. Wanneer men vindt,

$$\frac{p}{a} Cos.(\beta - \alpha) + \frac{a - p}{a} Cos.(\beta + \alpha) > \pm 1$$

zoo zijn de gegevens van het Voorſtel met elkander onbeſtaanbaar, dat is: het Voorſtel laat geen mogelijk antwoord toe. Vindt men daarentegen,

$$\frac{p}{a} Cos.(\beta - \alpha) + \frac{a - p}{a} Cos.(\beta + \alpha) = -1$$

zoo is de hiertoe behoorende hoek A = 180°, en de twee hoeken ϕ worden in dit geval,

$\phi = 90° - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ en $\phi = 90° - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

dat is: de twee waarden van ϕ worden dan aan elkander gelijk, en er is dus in dit geval ſlechts één antwoord. Het zelfde heeft ook plaats wanneer men vindt,

$$\frac{p}{a} Cos.(\beta - \alpha) + \frac{a - p}{a} Cos.(\beta + \alpha) = +1$$

want dan wordt A = o, of A = 360°, waardoor men, in beide gevallen, vindt,

$\phi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, en $\phi = 180° + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Wanneer nu $\angle$ HAC = $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ is, zoo valt, voor de tweede waarde van ϕ, het punt H' in het verlengde van HA, en onder de lijn AC; het punt I' valt dus op I, en hieruit blijkt, dat er, onder deze bepalingen, mede ſlechts een antwoord beſtaat.

2°. AANMERKING. Dit Voorſtel kan dienen om uit eenen gegevenen willekeurigen kegel, eene ellips te ſnijden, van welke de bepaalde lijnen DE = a en p, de groote as en de parameter zijn. Indien namelijk ABC de aſſen driehoek is, welke regthoekig op het grondvlak van eenigen ſcheven kegel, met cirkelvormige bazis, ſtaat, en welke dus het oppervlak volgens de langſte en kortſte der ſchuinſche zijden BA en BC doorſnijdt; en men voorts door DE een vlak laat gaan dat loodregt op het

vlak ABC ſtaat, dan zal dit vlak de begeerde ellips uit den gegevenen kegel ſnijden; want men kan gemakkelijk bewijzen, dat, bij zulk eene elliptiſche ſnede, de parameter der ellips zal zijn $p = \frac{FE \times DG}{DE} = \frac{FE \times DG}{a}$, en dat alzoo in dit geval $FE \times DG = ap$ zal moeten zijn, waaraan door ons Voorſtel is voldaan Hier uit blijkt dan nu ook, dat er, uit zulk eenen gegevenen kegel, twee zoodanige ellipſen zullen kunnen worden geſneden, want een vlak door D'E' loodregt op ABC brengende, zal deze tweede ellips voortbrengen, omdat ook voor deze ellips $p = \frac{F'E' \times D'G'}{D'E'}$, en dus $FE' \times D'G' = ap$ zal moeten zijn.

www.dbtool.com.cn

CXCIV. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Door een in ſtelling gegeven punt, binnen de beenen van eenen gegevenen hoek ABC, Fig. 132, eene regte lijn DPE van gegevene lengte te trekken?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Laat $ED = d$ de gevraagde lijn zijn, welke door het gegevene punt P moet worden getrokken; daar nu de ſtand van het punt P, benevens de hoek CBA gegeven is, zoo trekken wij door P eene lijn GF zoodanig, dat FBG een gelijkbeenige driehoek zij, en dan ſtelle men $PF = a$, $PG = b$ en $\angle BGP = \angle BFP = \alpha$ de bekende, terwijl men $\angle FPD = \angle EPG = \phi$ als onbekende aanneemt. Men heeft door deze ſtelling $\angle PDF = (\alpha - \phi)$ en $\angle BEP = (\alpha + \phi)$ of wel $\angle GEP = 180° - (\alpha + \phi)$.

Voorts heeft men in den driehoek FDP,

$$Sin.\ (\alpha - \phi) : Sin.\ \alpha = a : PD, \text{ dus } PD = \frac{a\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha - \phi)}$$

en in driehoek EPG heeft men,

$$Sin.\ (\alpha + \phi) : Sin.\ \alpha = b : EP, \text{ dus } EP = \frac{b\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha + \phi)}$$

en

en hierdoor ontstaat de vergelijking,

$$\frac{a\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha+\phi)} + \frac{b\ .\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha+\phi)} = d$$

of, met den gemeenen noemer vermenigvuldigende,

$a\,Sin\,\alpha\,Sin\,(\alpha+\phi)+b\,Sin.\alpha\,Sin.\,(\alpha-\phi) = d\,.\,Sin.\,(\alpha+\phi)\,Sin.\,(\alpha-\phi)$,

en ontwikkelende $Sin.\ (\alpha+\phi)$ en $Sin.\ (\alpha-\phi)$,

$$\left.\begin{array}{l} a\,Sin^2.\,\alpha\,Cos.\,\phi + a\,Sin.\,\alpha\,.\,Cos.\,\alpha\,.\,Sin.\,\phi - d\,Cos^2.\,\phi \\ + b\,Sin^2.\,\alpha\,Cos\,\phi - b\,Sin.\,\alpha\,.\,Cos.\,\alpha\,.\,Sin.\,\phi + d\,Cos^2.\,\alpha \end{array}\right\} = 0$$

dat is:

(A) $d\ Cos^2.\,\phi - (a+b)\ Sin^2.\,\alpha\ .\ Cos.\,\phi - d\ Cos^2.\,\alpha = -$
$(b-a)\ Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha\,Sin.\,\phi$.

Stellen wij nu $\sqrt{(1 - Cos^2.\,\phi)}$ in plaats van $Sin.\ \phi$ en brengen beide leden der vergelijking (A) in het vierkant, verkrijgen wij, al de termen naar de afdalende magten van $Cos.\ \phi$ rangschikkende,

$$d^2\,Cos^4.\,\phi - 2\,(a+b)\,d\,Sin^2.\,\alpha\,Cos^3.\,\phi + (a+b)^2\,Sin^4.\,\alpha\,Cos^2.\,\phi$$
$$- 2\,d^2\,Cos^2.\,\alpha\,Cos^2.\,\phi + 2\,d\,(a+b)\,Sin^2.\,\alpha\,Cos^2.\,\alpha\,Cos.\,\phi + d^2\,Cos^4.\,\alpha$$
$$= -(b-a)^2\,Sin.\,\alpha^2\,Cos.\,\alpha^2\,Cos^2.\,\phi + (b-a)^2\,Sin.\,\alpha^2\,Cos.\,\alpha^2.$$

Vereenigende nu de gelijkslachtige termen en deelende alles door d^2, dan verkrijgen wij de vierde magts-vergelijking,

$$Cos^4.\,\phi - \frac{2\,(a+b)}{d}\,Sin^2.\,\alpha\,.\,Cos^3\,\phi - \ldots\ldots$$
$$\frac{2\,d^2\,Cos^2.\,\alpha - (a+b)^2\,.\,Sin^4.\,\alpha - (b-a)\,.\,Sin^2.\,\alpha\,.\,Cos^2.\,\alpha}{d^2} \times Cos^2.\,\phi$$
$$+ \frac{2\,(a+b)}{d}\,Sin^2.\,\alpha\,.\,Cos^2.\,\alpha\,.\,Cos.\,\phi + \frac{d^2\,Cos^4.\,\alpha - (b-a)^2\,Sin^2.\,\alpha\,.\,Cos^2.\,\alpha}{d^2}$$
$$= 0\ \ldots\ldots\ldots\ (B)$$

Deze vierde magts-vergelijking toont aan, dat ons Voorstel, in het algemeen, voor vier verschillende antwoorden vatbaar is, en dit heeft ook werkelijk plaats; want wij kunnen dit Voorstel onder deze meer algemeene bewoordingen opgeven. *Twee lijnen AA' en CC', Fig. 133, elkander in B snijdende, benevens eenig punt P, in stelling gegeven zijnde, vraagt men door dit punt eenige lijn PDE te trekken, zoodanig dat het stuk DE, dat van deze lijn, door de twee gegevene lijnen AA' en CC', afgesneden wordt van eene gegevene lengte d zij?* en het is klaar, dat in dezen zin, de lijnen DPE, dPe, PD'E en Pd'e' even goed aan het vraagstuk kunnen voldoen, wanneer DE, de, D'E' en d'e' even groot en gelijk

d zijn. Wanneer men onze oplosſing ook op eene der overige lijnen toepast, zal men tot dezelfde eindvergelijking komen. Laat, om zulks voor de lijn E'D'P aan te toonen, dezelve verlengd worden tot in p, en $\angle FPp = \phi$ worden geſteld, dan is $PD'F = \phi - a$ en $PE'G = 180° - (\phi + a)$; hierdoor vindt men $PD' = \frac{a\ Sin.\ a}{Sin.\ (\phi - a)}$ en $PE' = \frac{b\ Sin.\ a}{Sin.\ (a + \phi)}$, en omdat voor dit geval $D'E' = PE' - PD' = d$ is, zoo heeft men,

$$\frac{b\ Sin.\ a}{Sin.\ (a + \phi)} - \frac{a\ Sin.\ a}{Sin.\ (\phi - a)} = d$$

maar $(\phi - a) = -(a - \phi)$, dus is $Sin.\ (\phi - a) = -Sin.\ (a - \phi)$ en derhalve verandert deze vergelijking in,

$$\frac{b\ Sin.\ a}{Sin.\ (a + \phi)} + \frac{a\ Sin.\ a}{Sin.\ (a - \phi)} = d$$

even zoo als bij onze eerſte oplosſing gevonden is.

Het is opmerkenswaardig, dat, offchoon onze gevondene vierdemagts-vergelijking, in het algemeen, niet in twee vergelijkingen van den tweeden graad kan worden ontbonden, zij ondertusſchen in eene tweede magts-vergelijking verandert, in het geval dat P in het midden van FG gelegen is, dat is wanneer het punt P in de lijn gelegen is, welke den gegevenen hoek ABC midden door deelt: voor dit geval is namelijk $a = b$ en $(b - a) = o$, en al de leden van de eindvergelijking, waar in $b - a$ als factor voorkomt verdwijnen uit dezelve, waardoor zij dan verandert in,

$$Cos^4.\ \phi - \frac{4a}{d}\ Sin^2.\ a.\ Cos^3.\ \phi - \frac{2\ d^2\ Cos^2\ a - 4\ a^2\ Sin^4.\ a}{d^2}\ Cos^2.\ \phi$$

$$+ \frac{4a}{d}\ Sin^2.\ a\ Cos^2.\ a\ Cos.\ \phi + Cos^4.\ a = o$$

Het eerſte lid van deze vergelijking is juist het vierkant van,

$$Cos^2.\ \phi - \frac{2a}{d}\ Sin^2.\ a\ Cos.\ \phi - Cos^2.\ a$$

en wij hebben alzoo voor dit geval,

$$Cos^2.\ \phi - \frac{2a}{d}\ Sin^2.\ a\ Cos.\ \phi - Cos^2.\ a = o$$

waar-

waaruit gemakkelijk gevonden wordt,

$$Cos.\ \phi = \frac{a}{d}\ Sin^2.\ a \pm \sqrt{\left\{\frac{a^2}{d^2}\ Sin^4.\ a + Cos^2.\ a\right\}} \quad . \quad (C)$$

zijnde de eene positief en de andere negatief; omdat in alle gevallen $\sqrt{\left\{\frac{a^2}{d^2}\ Sin^4.\ a + Cos^2.\ a\right\}}$ grooter dan $\frac{a}{d}\ .\ Sin^2.\ a$ is.

Uit de bovengevondene vergelijking (A) zou men dadelijk tot deze eindvergelijking gekomen zijn, wanneer men in dezelve $b = a$ en $b - a = o$ gesteld had.

De positieve wortel bepaalt de rigting van de lijn DE *Fig.* 133, wanneer men namelijk in deze figuur het punt P in het midden van FG onderstelt; en de negatieve wortel, tot eenen boog in het tweede quadraat behoorende, bepaalt de rigting van de lijn PD'E'. Voorts bepaalt onze formule ook de rigtingen van de lijnen *de* en P*d'e'*, omdat *Cos.* ϕ te gelijker tijd *Cos.* $(-\phi)$ is, en dat alzoo, (wel te verstaan wanneer P in het midden van FG ligt) *de* en P*d'e'* slechts aan de andere zijde van FG, onder gelijke hoeken als DE en PD'E behoeven genomen te worden.

Wanneer wij $\angle$ ABC $= 90°$ stellen, dan is $\angle$ BFG $= \angle$ BGF $= a = 45°$, dus *Sin.* $a =$ *Cos.* $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Stellen wij nu daarenboven $a = b$, dan behoeven wij slechts in (C) te stellen *Sin.* $a =$ *Cos.* $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en wij verkrijgen,

$$Cos.\ \phi = \frac{a}{2d} \pm \sqrt{\left\{\frac{a^2}{4d^2} + \frac{1}{2}\right\}} = \frac{1}{2d}\left\{a \pm \sqrt{(a^2 + 2d^2)}\right\}.$$

Het Voorstel verandert in dit geval, in het Voorstel, dat door NEWTON in zijn *Arithmetica universalis* is opgelost, namelijk in dit: *Wanneer ABC Fig.* 134. *een regte hoek en BMPN een quadraat is, door het punt P eene lijn DE te trekken, welke in lengte gegeven is.* Onze oplossing leert ons, dat tot de mogelijkheid der vier antwoorden, de beide formulen $a + \sqrt{(a^2 + 2d^2)}$ en $a - \sqrt{(a^2 + 2d^2)}$ niet grooter dan $2d$ mogen zijn, omdat anders *Cos.* ϕ grooter dan de eenheid zou worden. Het laatste heeft altijd plaats; want, omdat $\sqrt{(a^2 + 2d^2)} > a$ is, zoo is $a - \sqrt{(a^2 + 2d^2)}$ negatief, en de negatieve cosinus, met deze waarde overeenstemmende, is dus eigenlijk *Cos.* $\phi = -\frac{\sqrt{(a^2 + 2d^2)} - a}{2d}$;

nu is klaarblijkelijk $a^2 + 2d^2 < a^2 + 4ad + 4d^2$ of $a^2 + 2d^2 < (a + 2d)^2$, dus $\sqrt{(a^2 + 2d^2)} < a + 2d$ en $\sqrt{(a^2 + 2d^2)} - a < 2d$, zoodat $Cos.\ \varphi < -1$, dat is: de cosinus tot deze tweede waarde behoorende zal altijd mogelijk zijn, en het is ook uit den aard der zaak klaar genoeg, dat d niet zoo groot of zoo klein genomen kan worden, dat de oplosſingen D'E' en $d'd$ van *Fig.* 134. onmogelijk zoude worden. Met de eerſte waarde $a + \sqrt{(a^2 + 2d^2)}$ is het anders gelegen: zal dezelve gelijk aan of kleiner dan $2d$ zijn, dan vindt men gemakkelijk, dat a gelijk of grooter dan $2a$ moet zijn, en dit ſtemt wederom volkomen met de figuur 134. overeen, omdat derzelver bloote beſchouwing ons leert, dat de oplosſingen DE en *de* onmogelijk worden, zoodra d kleiner dan FG, dat is: kleiner dan $2a$ gegeven wordt.

Steit men de zijde van het quadraat BN $=$ PN $= b$, de gegevene lijn ED $= d$ en BD $= y$, dan verkrijgt men de volledige vierde magts-vergelijking,

$$y^4 - 2by^3 + (2b^2 - d^2)y^2 + 2bd^2y - b^2d^2 = 0.$$

Steit men daarentegen ND $= x$ en men behoudt dezelfde bekenden, dan vindt men de wederkeerige vierde magts-vergelijking,

$$x^4 + 2bx^3 + (2b^2 - d^2)x^2 + 2b^3x + b^4 = 0 \quad (a)$$

welke zoo als bekend is, door middel der vierkants vergelijkingen kan worden opgelost.

Om deze vergelijking echter te ontwijken, ſtelt Newton dat de lijn ED in K midden door is gedeeld, en neemt vervolgens KP $= z$ voor onbekend aan, waardoor EP $= \frac{1}{2}d + z$ en DP $= \frac{1}{2}d - z$ wordt, en hierdoor verkrijgt hij de vergelijking,

$$z^4 - (2b^2 + \tfrac{1}{2}d^2)z^2 = \tfrac{1}{2}b^2d^2 - \tfrac{1}{16}d^4$$

waaruit gevonden wordt,

$$z = \pm\sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 \pm b\sqrt{(b^2 + d^2)}\right\}}$$

waar-

(a) Dat deze vergelijking tot de wederkeerige behoort, ziet men, door de termen te deelen door de reeks 1, b, b^2, b^3, b^4; want dan verkrijgt men, $x^4 + 2x^3 + (2 - \frac{d^2}{b^2})x^2 + 2x + 1$, waarin $x = \frac{z}{b}$ is.

waardoor de vier afſtanden PK, PK', PK'' en PK''' van het midden der lijnen DE, *de*, D'E' en *d'e'* tot het punt P bepaald zijn.

www.libtool.com.cn

Deze fraaije oplosſing, welke zeker de eenvoudigſte is, die zonder behulp der goniometrie gevonden kan worden, geeft ondertuſſchen veel zamengeſtelder reſultaat, dan het reſultaat dat wij boven voor dit geval gevonden hebben; en de voorrang van de trigonometriſche oplosſing loopt nog meer in het oog, wanneer wij in aanmerking nemen, dat het Voorſtel van NEWTON ſlechts een zeer bijzonder geval is van het algemeene Voorſtel, dat wij hebben opgelost.

CXCV. VOORSTEL.

Door H. VAN WESSEM Jz.

Een ſtuurman met zijn ſchip in zee zijnde, en noordwest aanliggende, ontdekt aan den gezigteinder, in het weſtzuidwest van zich, een ander ſchip, insgelijks onder zeil zijnde, hetwelk hij na verloop van eenige uren, terwijl beide hunne koerſen vervolgen, in het noordoost ten oosten, wederom aan den gezigteinder uit het oog verliest. Nu is de vraag, als de kortſte afſtand, tuſſchen deze beide ſchepen op eene halve mijl is geſchat geworden, op welk eenen afſtand zij elkander ontdekt, of uit het gezigt verloren hebben. (50)

OPLOSSING. DOOR H. VAN WESSEM Jz.

De ſtuurman zij met zijn ſchip in A, *Fig.* 135. Noordwest aanliggende, en ontdekke Weſtzuidwest van zich het andere ſchip in C; voorts zij hij in B gekomen, toen hij het ſchip in D uit het gezigt verloor, dan is CD de gezeilde koers van het tweede ſchip; het is vervolgens duidelijk, dat de ſtuurman het ſchip, op eenen zelfden afſtand van zich ontdekt en uit het gezigt verloren moet hebben, en dat dus BD = AC moet zijn. Om nu tot de waarde van deze gevraagde afſtanden BD = AC te maken, onderſtelle men AE gelijk en evenwijdig aan BD te zijn, en

(50) O. S. BANGMA, *Kort Begrip der Stuurmanskunst*, *Voorſt.* 151.

en trekke DE, dan zal ook DE gelijk en evenwijdig aan AB zijn; verder trekke men CE.

Omdat nu onderſteld wordt, dat ieder der ſchepen zich met eene gelijkmatige ſnelheid beweegt, welke ſnelheid echter voor ieder der ſchepen verſchillend kan zijn, zoo volgt hieruit, dat zij in gelijke tijden een evenredig deel van hunnen weg zullen afleggen, dat is: wanneer de ſtuurman, bij voorbeeld, $\frac{1}{4}$ van zijnen weg AB heeft afgelegd en dus in F gekomen is, zal het andere ſchip ook $\frac{1}{4}$ van zijnen weg CD hebben doorloopen, en het zal zich alzoo in G bevinden, en in het algemeen zal, wanneer de ſchepen zich op eenig oogenblik in F en G bevinden AF : AB = CG : CD zijn.

Dit opgemerkt hebbende, trekke men GH evenwijdig aan *AB*, en dus ook met DE, en vereenige de punten A en H, dan is driehoek CGH gelijkvormig met driehoek CDE en bijgevolg,

$$CG : GH = CD : DE$$

of, omdat DE = AB is,

$$CG : GH = CD : AB$$

maar volgens het boven gezegde is,

$$CG : AF = CD : AB$$

en dus is AF = GH, waaruit dan volgt, dat AHGF een parallelogram is, en deze eigenſchap zal doorgaan voor al de *punten F en G*, waarin zich de beide ſchepen gelijktijdig bevinden.

Daar dan AH = FG gelijk de afſtand der beide ſchepen in eenig oogenblik van hunnen weg is, zoo zal deze afſtand op zijn kleinst zijn, wanneer AH de kleinst mogelijke waarde heeft, dat is, wanneer AH den ſtand *Ah* loodregt op CE verkrijgt, en daar deze kortſte afſtand gelijk eene halve mijl gegeven is, zoo hebben wij *Ah* = *gf* = $\frac{1}{2}$ mijl.

Volgens de opgaaf is verder ∠ WAC = 22°30′ dus ∠ NAC = 112°30′, maar AE evenwijdig met BD zijnde, zoo is, volgens de opgaaf, ∠ NAE = 56°15′, en bijgevolg is ∠ CAE = 168°45′ en ∠ CA*h* = 84°22′30″, dat is, gelijk $7\frac{1}{2}$ ſtreken.

Wij hebben dus in den regthoekigen driehoek CA*h* bekend, *Ah* = $\frac{1}{2}$ mijl en ∠ CA*h* = 84°22′30″, en dus vinden wij AC = *Ah* × *Sec.* ∠ CA*h* = $\frac{1}{2}$ *Sec.* 84°22′30″ = $\frac{1}{2}$ × 10,202298 = 5,101149′, de ſchepen hebben elkander alzoo, op eenen afſtand van 5,101149 mijlen, ontdekt en uit het gezigt verloren.

Wil

Wil men in plaats van AC bij benadering te vinden, derzelver waarde door eene algebraïsche formule uitdrukken, dan kan men op de volgende wijze te werk gaan. Wij hebben gevonden $AC = \frac{1}{2} \times Sec.\ 84^{\circ}22'30'' = \frac{1}{2}\ Sec. \cdot 7\frac{1}{2}$ *ſtreeken* $= \frac{1}{2}\ Coſec.\ \frac{1}{2}$ *ſtreek*; omdat 8 ſtreeken juist een quadrant of 90° uitmaken: Het zal er dus alleen op aan komen eene algebraïſche uitdrukking te vinden voor $Coſec.\ \frac{1}{2}$ *ſtreek*; dat is voor $Coſec.\ \frac{1}{16} \cdot 90°$. Daar nu in het algemeen $Sin.\ 2a = 2\ Sin.\ a\ Cos.\ a$ en $Cos.\ 2a = 2\ Cos^2.\ a - 1$, en dus $2\ Cos^2.\ a = 1 + Cos.\ 2a$ is; zoo hebben wij,

$$Sin.\ y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{2}y$$
$$Sin.\ \tfrac{1}{2}y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{4}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{4}y$$
$$Sin.\ \tfrac{1}{4}y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{8}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{8}y$$
$$Sin.\ \tfrac{1}{8}y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{16}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{16}y$$

en door deze vier uitdrukkingen te vermenigvuldigen,

$$Sin.\ y = 2^4\ Sin.\ \tfrac{1}{16}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{2}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{4}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{8}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{16}y$$

en bijgevolg, omdat $Coſec.\ \frac{1}{16}y = \frac{1}{Sin.\ \frac{1}{16}y}$ is,

$$Coſec.\ \tfrac{1}{16}y = \frac{2^4}{Sin.\ y} \cdot Cos.\ \tfrac{1}{2}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{4}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{8}y \cdot Cos.\ \tfrac{1}{16}y \ldots (A)$$

Wij hebben verder,

$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{2}y = 1 + Cos.\ y$$
$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{4}y = 1 + Cos.\ \tfrac{1}{2}y$$
$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{8}y = 1 + Cos.\ \tfrac{1}{4}y$$
$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{16}y = 1 + Cos.\ \tfrac{1}{8}y$$

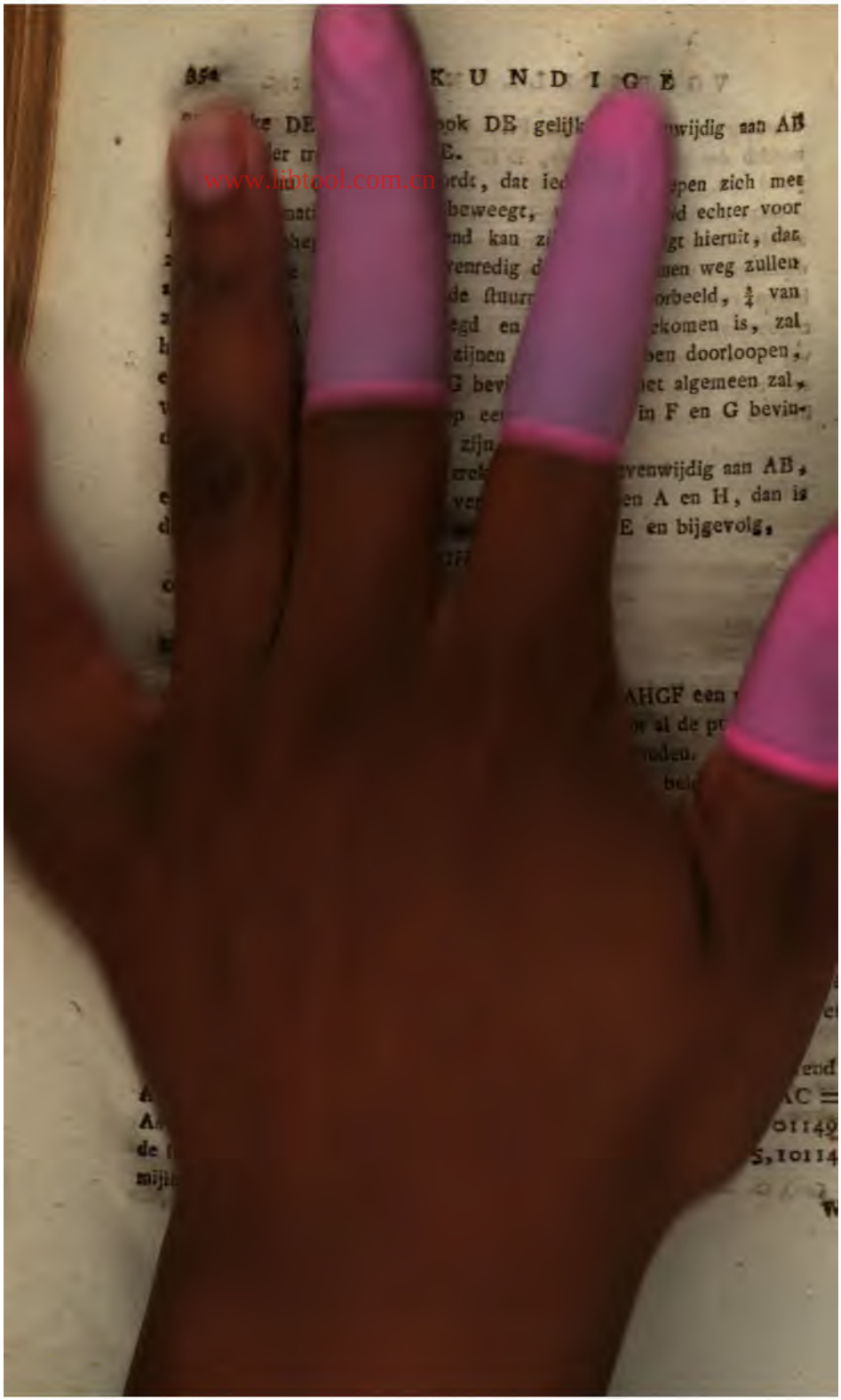
deze met 2 vermenigvuldigd en de vierkants wortels getrokken, komt er,

$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y = \sqrt{(2 + 2 \cdot Cos.\ y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y = \sqrt{(2 + 2 \cdot Cos.\ \tfrac{1}{2}y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y = \sqrt{(2 + 2 \cdot Cos.\ \tfrac{1}{4}y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{16}y = \sqrt{(2 + 2 \cdot Cos.\ \tfrac{1}{8}y)}$$

en wanneer wij deze laatſte formulen in elkander ſubſtitüeren, verkrijgen wij,

$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y = \sqrt{(2 + 2\ Cos.\ y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\ Cos.\ y)})}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\ Cos.\ y)})})}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{16}y = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\ Cos.\ y)})})})}$$

www.libtool.com.cn



Wil men in plaats van AC bij benadering te vinden, derzelver waarde door eene algebraïsche formule uitdrukken; dan kan men op de volgende wijze te werk gaan. Wij hebben gevonden $AC = \frac{1}{2} \times Sec.\ 84°22'30'' = \frac{1}{2}\ Sec.\ .\ 7\frac{1}{2}$ *ſtreeken* $= \frac{1}{2}\ Cosec.\ \frac{1}{2}$ *ſtreek*; omdat 8 ſtreeken juist een quadrant of 90° uitmaken: Het zal er dus alleen op aan komen eene algebraïsche uitdrukking te vinden voor $Cosec.\ \frac{1}{2}$ *ſtreek*; dat is voor $Cosec.\ \frac{1}{16}\ .\ 90°$. Daar nu in het algemeen $Sin.\ 2a = 2\ Sin.\ a\ Cos.\ a$ en $Cos.\ 2a = 2\ Cos^2.\ a - 1$, en dus $2\ Cos^2.\ a = 1 + Cos.\ 2a$ is, zoo hebben wij,

$$Sin.\ y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y$$
$$Sin.\ \tfrac{1}{2}y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{4}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y$$
$$Sin.\ \tfrac{1}{4}y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{8}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y$$
$$Sin.\ \tfrac{1}{8}y = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{16}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{16}y$$

en [illegible] vier uitdrukkingen te vermenigvuldigen,

$$= 2^4\ Sin.\ \tfrac{1}{16}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{16}y$$

,, omdat $Cosec.\ \frac{1}{16}\ y = \frac{1}{Sin.\ \frac{1}{16}\ y}$ is,

$$\tfrac{1}{16}y = \frac{2^4}{Sin.\ y}\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{16}y\ \ldots\ (A)$$

den verder,

$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{2}y = 1 + Cos.\ y$$
$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{4}y = 1 + Cos.\ \tfrac{1}{2}y$$
$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{8}y = 1 + Cos.\ \tfrac{1}{4}y$$
$$2\ Cos^2.\ \tfrac{1}{16}y = 1 + Cos.\ \tfrac{1}{8}y$$

met 2 vermenigvuldigd en de vierkants wortels getrok[illegible] komt er,

$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y = \sqrt{(2 + 2\ .\ Cos.\ y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y = \sqrt{(2 + 2\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y = \sqrt{(2 + 2\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{16}y = \sqrt{(2 + 2\ .\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y)}$$

en wanneer wij deze laatſte formulen in elkander ſubſtitüeren, verkrijgen wij,

$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{2}y = \sqrt{(2 + 2\ Cos.\ y)}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{4}y = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\ Cos.\ y)})}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{8}y = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\ Cos\ y)})})}$$
$$2\ Cos.\ \tfrac{1}{16}y = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\ Cos.\ y)})})})}$$

CXCVII. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door H. G WITLAGE JR.

Vier perſonen A, B, C en D hebben elk een zeker aantal guldens; wanneer men het aantal guldens van A en C ieder afzonderlijk met een getal m, en het aantal guldens van B en D ieder afzonderlijk met een getal n vermenigvuldigt, dan zal, welke getallen men ook voor m en n neme, het product voor C altijd grooter of kleiner dan het product voor D zijn, naarmate het product voor A grooter of kleiner dan dat voor B is. Verder is de ſom van het geld van A, B en D gelijk 110 gulden; de ſom der vierkanten van het aantal guldens van A en D is gelijk 4000; en het aantal guldens van B, vermenigvuldigd, met het aantal guldens van B plus 60 is gelijk aan tweemaal het product van het aantal guldens van B en C, opgeteld met 300. Vrage naar het aantal guldens van ieder?

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., J. PEEREBOOM, R. LOBATTO en H. FOKKES BAKKER.

Stel het aantal guldens van A, B, C en D achtervolgens x, y, z en v.

Uit de opgegevene bepaling dat, $mx > \text{of} < ny$ zijnde, ook $mz > \text{of} < nv$ moet zijn, wat ook voor m en n genomen mag worden, volgt, dat $xy = yz$ moet zijn; want was $xy > \text{of} < yz$ dan zou ook $mx \times nv > \text{of} < mz \times ny$ zijn, en wanneer dan m en n zoodanig genomen werden dat $mz = ny$ was, zou $ny > \text{of} < mx$ zijn, hetgeen tegen de bepaling zou ſtrijden dat $mz > \text{of} < nv$ moet wezen naarmate $mx > \text{of} < ny$ is. Wij beſluiten dan uit de bepaling dat $xy = yz$ of $x : y = z : v$ moet zijn, dat is, de getallen x, y, z en v moeten eene meetkunſtige evenredigheid uitmaken.

Door de overige voorwaarden van het Voorſtel hebben wij deze drie vergelijkingen,

$$x + y + v = 110 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$x^2 + v^2 = 4000 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$y^2 + 60y = 2yz + 300 \quad \ldots (3)$$

uit

uit de eerſte vinden wij,

$$(x + y)^2 = (110 - y)^2$$

en trekkende hier af de tweede, blijft er,

$$2xy = 8100 - 220y + y^2$$

of, omdat $xy = yz$ is,

$$2yz = 8100 - 220y + y^2$$

maar uit (3) vinden wij,

$$2yz = y^2 + 60y - 300$$

ſtellende dus deze twee waarden van $2yz$ aan elkander gelijk, dan komt er,

$$60y - 300 = 8100 - 220y$$

waaruit $280y = 8400$ en dus $y = 30$.

Verder is uit (3), $z = \frac{y^2 + 60y - 300}{2y}$, en daar $y = 30$ gevonden is zoo is $z = 40$.

Eindelijk hebben wij nu, omdat $y = 30$ is, $x + y = 110 - y = 80$, daar nu $x^2 + y^2 = 4000$ is, zoo is $x - y = \sqrt{\{2(x^2 + y^2) - (x + y)^2\}} = \sqrt{(8000 - 6400)} = \sqrt{1600} = \pm 40$, waaruit volgt $x = \frac{1}{2}(80 \pm 40) = 60$ of 20, en $y = \frac{1}{2}(80 \mp 40) = 20$ of 60, waardoor wij dan deze twee antwoorden verkrijgen,

$x = 60$, $y = 30$, $z = 40$ en $y = 20$

of $x = 20$, $y = 30$, $z = 40$ en $y = 60$.

CXCVIII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Door een gegeven punt A, wordt een onbepaald aantal lijnen getrokken, ſnijdende twee gegevene lijnen XX' en YY' (Fig. 136) in C en D; wanneer nu, op elke dezer lijnen, het ſtuk CD midden door gedeeld wordt in P, dan vraagt men naar de meetkunſtige plaats van het punt P?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Trek AE en AF evenwijdig met XX' en YY'. Stel $AE = BF = a$, en $AF = BE = b$; trek verder PM evenwijdig met XX' en ſtel $BM = x$, en $PM = y$, dan is, omdat CD

in P midden door gedeeld is, BD $=$ $2x$ en BC $=$ $2y$. Verder is CF : AF $=$ EA : ED, dat is $2y - a : b = a : 2x - b$, waaruit gevonden wordt $(2y - a)(2x - b) = ab$, hetgeen de vergelijking van eene hyperbool is. De meetkunstige plaats van het punt P is dus eene hyperbool.

Wij kunnen de gevondene vergelijking ook aldus schrijven $(y - \frac{1}{2}a)(x - \frac{1}{2}b) = \frac{1}{4}ab$. Deelende nu AF en AE midden door in G en H, en trekkende door deze deelpunten de lijnen KK′ en LL′ evenwijdig met XX′ en YY′, en snijdende elkander in I, dan zal, stellende IN $= t$ en NP $= u$, gevonden worden, IN $=$ BM $- \frac{1}{2}$ AF en NP $=$ MP $- \frac{1}{2}$ AE, dat is, $t = x - \frac{1}{2}b$ en $u = y - \frac{1}{2}a$, waaruit volgt $tu = \frac{1}{4}ab$, of stellende IH $= \frac{1}{2}b = c$ en HA $= \frac{1}{2}a = d$, dan wordt de vergelijking $tu = cd$.

Hieruit volgt dat KK′ en LL′ de asymptoten van de hyperbool zijn, en dat I derzelver middelpunt is, alsmede dat A en B de uiteinden van eenen diameter AB zijn. De hyperbool kan dus zeer gemakkelijk geconstrueerd worden.

Gevolg. Indien door het uiteinde B van eenen der diameters eener hyperbool, lijnen XX′ en YY′ evenwijdig met de asymptoten getrokken worden, en men door het andere uiteinde A van dezen diameter, eene willekeurige lijn trekt, snijdende deze lijnen XX′ en YY′ in C en D, dan zal het stuk CD, door den omtrek van de hyperbool, altijd in P midden door gedeeld zijn.

CXCIX. VOORSTEL.

Door I. R. Schmidt.

Wanneer uit eenig willekeurig punt A, Fig. 137, buiten eene parabool, twee raaklijnen AB en AC aan dezelve getrokken worden, tot in de raakpunten B en C, en men aan eenig willekeurig punt P van de parabool eene derde raaklijn trekt, snijdende de raaklijnen AB en AC in F en E, dan zal, waar dit punt P ook in de parabool genomen worde, altijd regthoek AE × AF $=$ regthoek FB × EC zijn. Vrage naar het bewijs?

Oplossing. Door I. R. Schmidt en R. Lobatto.

Laat BC getrokken en in D midden door gedeeld worden, dan

dan is, volgens de bekende eigenſchap van de paraboo', AD eene middellijn, dat is AD is eveuwijdig aan d: as, waaruit dan verder volgt dat AS = SD is, en dat, trekkende PR evenwijdig aan BC, ook QS = SR zal zijn.

www.libool.com.cn

Stel nu AB = p, AC = q, AS = SD = a, BD = DC = b, QS = SR = x, RP = y, ∠ PQR = ϕ, ∠ RQE = ∠ PQA = ϕ' en verder zoo als in de figuur is aangewezen, dan is door de bekende trigonometriſche formulen vooreerst, in de driehoeken ABD en ADC

$$Tang.\ m = \frac{b\ .\ Sin.\ a}{2a - b\,Cos.\ a};\ Tang.\ n = \frac{b\ Sin.\ a}{2a + b\,Cos\ a}$$

en in den driehoek PQR,

$$Tang.\ \phi = \frac{y\ .\ Sin.\ a}{2x - y\,Cos.\ a},\ \text{dus}\ Tang.\ \phi' = \frac{y\ Sin.\ a}{y\,Cos.\ a - 2x}$$

maar door de eigenſchap van de parabool is $x : a = y^2 : b^2$, dus $x = \frac{ay^2}{b^2}$, en bijgevolg wordt,

$$Tang.\ \phi = \frac{y\ Sin.\ a}{\frac{2ay^2}{b^2} - y\,Cos.\ a} = \frac{b^2\ Sin\ a}{2ay - b^2\ Cos.\ a}$$

$$\text{en}\ Tang.\ \phi' = \frac{b^2\ Sin.\ a}{b^2\,Cos.\ a - 2ay}.$$

Door welke formule men den hoek berekenen kan, welke de raaklijn van eenig punt P met eene gegevene middellijn SD maakt.

Men vindt hierdoor verder $Cot.\ \phi = \frac{2ay - b^2\ Cos.\ a}{b^2\ Sin.\ a}$

en $Cot.\ \phi' = \frac{b^2\ Cos.\ a - 2ay}{b^2\ Sin.\ a}$.

Om AF en BF te berekenen hebben wij, in de driehoeken AQF en AQE,

$$Sin.\ (m + \phi') : Sin.\ \phi' = (a - x) : AF$$

en $$Sin.\ (n + \phi) : Sin.\ \phi = (a - x) : AE$$

waaruit $AF = \frac{(a - x)\ Sin.\ \phi'}{Sin.\ (m + \phi')}$ en $AE = \frac{(a - x)\ Sin.\ \phi}{Sin.\ n + \phi)}$

of wanneer wij de eerſte breuk boven en onder door $Sin.\ \phi'$, en de tweede door $Sin.\ \phi$ deelen,

$$AF = \frac{a - x}{Sin.\ m\ (Cot.\ \phi' + Cot.\ m)}$$

en $$AE = \frac{a - x}{Sin.\ n\ (Cot.\ \Phi + Cot.\ n)}.$$

Nu is $p : Sin.\ a = b : Sin.\ m$ en $q : Sin.\ n = b : Sin.\ n$ en dus $Sin.\ m = \frac{p}{b}\ Sin.\ a$ en $Sin.\ n = \frac{q}{b}\ Sin.\ a$, en daar $x = \frac{ay^2}{b^2}$ is; zoo is $(a - x) = \frac{a\ (b^2 - y^2)}{b^2}$. Deze waarden ſubſtituerende verkrijgen wij,

$$AF = \frac{a\ (b^2 - y^2)\ p}{b^3\ Sin.\ a\ (Cot.\ \Phi' + Cot.\ m)}$$

en $$AE = \frac{a\ (b^2 - y^2)\ q}{b^3\ Sin.\ a\ (Cot.\ \Phi + Cot.\ n)}$$

brengende nu hier in de waarde van $Cot.\ \Phi$, $Cot.\ \Phi'$, $Cot.\ m$ en $Cot.\ n$, dan komt er,

$$AF = \frac{a\ (b^2 - y^2)\ p}{b^3\ Sin.\ a \left\{ \frac{b^2\ Cos.\ a - 2ay}{b^2\ Sin.\ a} + \frac{2a - b\ Cos.\ a}{b\ Sin.\ a} \right\}}$$

$$= \frac{a\ (b^2 - y^2)\ p}{b\ (2ab - 2ay)} = \frac{(b + y)\ p}{2b}$$

$$AE = \frac{a\ (b^2 - y^2)\ q}{b^3\ Sin.\ a \left\{ \frac{2ay - b^2\ Cos.\ a}{b^2\ Sin.\ a} + \frac{2a + b\ Cos.\ a}{b\ Sin.\ a} \right\}}$$

$$= \frac{a\ (b^2 - y^2)\ q}{b\ (2ab + 2ay)} = \frac{(b - y)\ q}{2b}.$$

Hieruit vinden wij verder,

$$FB = AB - AF = p - \frac{(b + y)\ p}{2b} = \frac{(b - y)\ p}{2b}$$

en $$CE = AC - AE = q - \frac{(b - y)\ q}{2b} = \frac{(b + y)\ q}{2b}.$$

Multiplicerende nu AF en AE dan vinden wij,

$$AF \times AE = \frac{(b^2 - y^2)\ pq}{4b^2}$$

en multiplicerende FB en CE, dan vinden wij insgelijks,

$$FB \times CE = \frac{(b^2 - y^2)\ pq}{4b^2}$$

waaruit wij dan beſluiten dat $AF \times AE = FB \times CE$ is.

GEVOLGEN. 1°. Wij hebben in den loop van deze oplosſing niet

niet alleen de opgegevene ſtelling bewezen, maar wij hebben ook bovendien de ſtukken AF, FB, AE en EC, waarin de raaklijnen AB en AC door de raaklijn EF verdeeld worden, berekend: dit geeft aanleiding tot de volgende evenredigheden,

$$BC : AB = CD + PR : AF$$
$$BC : AB = CD - PR : FB$$
$$BC : AC = CD + PR : CE$$
$$BC : AC = CD - PR : AE$$

2°. Trekkende PV evenwijdig met AD, dan is $CV = CD + PR$ en $BV = CD - PR$, hieruit en uit het voorgaande gevolg, blijkt dan, dat, trekkende FV en EV, FV evenwijdig met AC en VE evenwijdig met AB zal zijn. AFVE is dus een parallelogram.

3°. Wanneer dan AB en AC raaklijnen van eene parabool zijn, en B en C de raakpunten, dan zal, wanneer uit eenig punt V van de koorde BC, getrokken worden de lijnen VF en VE evenwijdig met AC en AB, de lijn EF eene raaklijn van de parabool zijn. en het raakpunt P zal gevonden worden door VP evenwijdig te trekken met de lijn AD, welke uit A door het midden van BC getrokken wordt.

AANMERKING. Wanneer het punt P niet op het gedeelte BSC van de parabool, maar in het verlengde van dezelve gelegen is, dan gaat de ſtelling even goed door. Het bewijs dat wij gegeven hebben is zoo gemakkelijk op dit geval toe te paſſen dat wij het kortheidshalve agterwege zullen laten; alleen merken wij nog aan dat het punt V dan niet op de koorde BC, maar op derzelver verlengde zal vallen.

CC. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt eene parabool te conſtrueren, welke twee gegevene regte lijnen, elk in een gegeven punt, aanraakt?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Laat AB en AC *Fig.* 137. de gegevene raaklijnen en B en C de gegevene raakpunten zijn. Trek BC en deel dezelve midden door in D dan is AD eene middellijn van de parabool. Neem in BC een willekeurig punt V en trek VF en VE evenwijdig

met AC en AB, dan zal, ingevolge het derde Gevolg van het voorgaande Voorſtel, EF eene raaklijn van de parabool zijn; en VP evenwijdig AD trekkende is P een punt van de gevraagde parabool. Door middel van deze conſtructie op een genoegzaam aantal punten V, zoo wel op het verlengde van BC als op BC zelve genomen, toe te paſſen, vindt men zoo veel punten P van de parabool als men begeert, door welke dan de parabool gemakkelijk getrokken kan worden.

www.hbtool.com.cn

Men kan deze conſtructie ook op de volgende wijze inrigten; men deele AB en AC, *Fig.* 138, in een zelfde aantal gelijke deelen, teekene de deelpunten op AC, van C te beginnen, aan door 1, 2, 3 enz, en de deelpunten op AB van A te beginnen mede met 1, 2, 3, enz. vereenigende dan al de deelpunten die met dezelfde cijfers geteekend zijn, dan zullen al die vereenigingslijnen raaklijnen van de parabool zijn, omdat *overal* aan de vergelijking voldaan zal zijn, welke in het voorgaande Voorſtel bewezen is. Deze raaklijnen zullen door hunne onderlinge ſnijding eenen veelhoek om de parabool vormen, welke meer en meer tot de parabool zelve zal naderen, naarmate er meer deelpunten in AB en AC genomen zijn; zoodanig dat men, wanneer dit aantal punten vrij aanmerkelijk is, de parabool bijna niet meer zal behoeven te trekken. Wil men echter de raakpunten zelve bepalen, dan kan dit geſchieden door hetgeen wij in de voorgaande conſtructie hebben aangemerkt.

Het is verder klaar, dat de vereeniging der punten geteekend met 0, met — 1 enz. als mede die geteekend met 8, met 9 enz. op dezelfde wijze raaklijnen geven, welke den verderen *loop* van de parabool bepalen.

AANMERKING. Men kan ook nog deze conſtructie voor ons opgegevene vraagſtuk geven.

Trek BC, *Fig.* 139, deel dezelve midden door in D en trek AD, dan is AD eene middellijn tot de ordinaat BC behoorende. Deel dan AD midden door in E, dan is, omdat op elke middellijn de ſubtangens gelijk aan het dubbel van de abscis is, E een punt van de parabool, en wel de oorſprong van de middellijn ED, en omdat de koorde CD evenwijdig is aan de raaklijn van de oorſprong C, zoo zal FF′, evenwijdig aan BC, de parabool in het punt E aanraken.

Daar

Daar dan EF en FC wederom raaklijnen van de parabool in de punten E en C, en EF′ en F′B raaklijnen in de punten E en B zijn, zoo behoeven wij deze constructie slechts te herhalen, dat is EC en EB te trekken, FH en F′H′ evenwijdig aan AD te maken en FI en F′I′ midden door te deelen, waardoor wij dan de punten G en G′ van de parabool zullen vinden.

Deze constructie kan men naar welgevallen voortzetten, want trekkende door G en G′ de lijnen KK′ en K″K‴, zijn dezelve wederom raaklijnen, en dit geeft ons vier nieuwe punten L, L′, L″ en L‴. Bij eene volgende herhaling zullen wij acht nieuwe punten van de parabool vinden, dan zestien enz.

CCI. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Aan iemand, die een huis gekocht heeft, wordt gevraagd voor hoeveel? Hij antwoordt: het getal guldens dat ik er voor betaald heb is een honderdhoekig getal, dat gelijk is aan viermaal de som der tweede en derde magten van deszelfs wortel opgeteld met tweemaal die wortel. Vrage naar den prijs?

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM, H. FOKKE BAKKER, R. VAN WIJK en H. VAN KRAAIJENGORD.

De algemeene formule voor de veelhoekige getallen, waarvan x de wortel en m het aantal hoeken beteekend, is $\frac{1}{2}x \times \{(m-2)x-(m-4)\}$. Voor een honderdhoekig getal is dus deze formule $\frac{1}{2}x(98x-96)$ of $49x^2-48x$. Stellende dus de wortel van het aantal guldens, dat het huis gekost heeft x, dan hebben wij naar aanleiding van de opgaaf, de vergelijking,

$$4x^3+4x^2+2x=49x^2-48x$$

of door x deelende en herleidende,

$$4x^2-45x+50=0$$

en wij hebben dus de vierkantsvergelijking,

$$x^2-\tfrac{45}{4}x+\tfrac{50}{4}=0$$

waaruit wij vinden,

$$x=$$

$$x = \tfrac{45}{8} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{45}{8} \times \tfrac{4}{8} - \tfrac{50}{4}\right\}} = \tfrac{45}{8} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{(45^2 - 50 \times 16)}$$
$$= \tfrac{45}{8} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{1225} = \tfrac{45}{8} \pm \tfrac{35}{8} = 10 \text{ of } 1\tfrac{1}{4}.$$

www.libtool.com.cn

Nemende dus $x = 10$, dan is de prijs van het huis $49x^2 - 48x = 4480$ gulden, maar nemende $x = \frac{7}{4}$, dan vinden wij voor de prijs van het huis $49x^2 - 48x = 16\frac{9}{16}$ gulden, welke twee antwoorden beide aan de vraag voldoen.

CCII. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Twee getallen te vinden, welke, wanneer het kleinſte afgetrokken wordt van het vierkant van het grootſte, of het grootſte geteld bij het vierkant van het kleinſte, in beide gevallen het getal 111 *voortbrengen?*

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, H. FOLKES BAKKER en J. PEEREBOOM.

Stel het grootſte getal x en het kleinſte y, dan is $x^2 - y = x + y^2 = 111$. Hieruit vindt men terſtond $x^2 - y^2 = x + y$, of door $x + y$ deelende, $x - y = 1$, dat is $x = y + 1$. Brengende nu deze waarde van x over in de vergelijking $x + y^2 = 111$, komt er $y^2 + y - 110 = 0$, uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt, $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + 110)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{21}{2} = 10$ of -11.

Nemende nu $y = 10$, dan is $x = 111 - y^2 = 11$, en dan zijn de gevraagde getallen 10 en 11.

Nemende daarentegen $y = -11$, dan is $x = 111 - y^2 = -10$, en dan zijn de getallen -10 en -11.

CCIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Uit een gegeven punt A, Fig 140, *in den omtrek van eenen gegevenen cirkel, eene koorde AG in dien cirkel te trekken, welke den omtrek van eenen anderen, in denzelven beſchrevenen doch niet concentrieken cirkel ſnijdt, in de punten E en F, en wel zoodanig, dat het gedeelte FG dezer koorde eene gegevene lengte hebbe?*

OP-

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Zij A het punt in den eerſten cirkel, van welke C het middelpunt en AB de diameter is, laat voorts D het middelpunt van den tweeden gegevenen cirkel zijn en de regte lijn ADK tot aan den omtrek getrokken worden, dan is de middellijn IK, zoo wel als AB, AI en den hoek BAK bekend. Men onderſtelle nu, dat AEFG de gevraagde koorde zij, dan moet FG de, in het Voorſtel gegevene, lengte hebben, welke wij a zullen ſtellen. Voorts zij AD $=b$, AB $=d$ en DI $=$ DK $=r$, dan is AK $=b+r$ en AI $=b-r$. Eindelijk ſtelle men $\angle$ BAK $=\alpha$ en de onbekende $\angle$ BAG $=\phi$, dan is $\angle$ DAG $=\alpha+\phi$, en wanneer men DH loodregt op AG getrokken en de punten B en G vereenigd heeft, dan is, volgens de eigenſchap des cirkels, EH $=$ HF en $\angle$ AGB $=90°$, derhalve is AG $= d\,Cos.\,\phi$, AH $= b\,Cos.\,(\alpha+\phi)$, AF $=$ AG $-$ FG $= d\,Cos.\,\phi - a$, EH $=$ HF $=$ AF $-$ AH $= d\,Cos.\,\phi - a - b\,Cos.\,(\alpha+\phi)$, en AE $=$ AH $-$ EH $= 2b\,Cos.\,(\alpha+\phi) - d\,Cos.\,\phi + a$.

Nu is, volgens de eigenſchap des cirkels, AE $\times$ AF $=$ AI $\times$ AK, en wanneer men hier in de gevondene en geſtelde waarden ſubſtitueert, verkrijgt men de vergelijking,

$$\{2b\,Cos.\,(\alpha+\phi) - d\,Cos.\,\phi + a\} \times \{d\,Cos.\,\phi - a\} = (b-r)(b+r)$$

of, de producten ontwikkelende,

$$2bd.\,Cos.\,\phi.\,Cos.\,(\alpha+\phi) - 2ab\,Cos.\,(\alpha+\phi) - d^2\,Cos^2.\,\phi + \ldots.$$
$$2ad.\,Cos.\,\phi - a^2 = b^2 - r^2$$

en hierdoor verkrijgt men,

$$2bd\,Cos\,\alpha.\,Cos^2.\,\phi - 2bd\,Sin.\,\alpha.\,Sin.\,\phi.\,Cos.\,\phi - 2ab\,Cos.\,\alpha\,Cos.\,\phi + 2ab\,Sin\,\alpha.\,Sin.\,\phi - d^2\,Cos^2.\,\phi + 2ad\,Cos.\,\phi - a^2 = b^2 - r^2$$

of na verdere herleiding,

$$(2bd\,Cos\,\alpha - d^2)\,Cos^2.\,\phi + 2a\,(d - b\,Cos.\,\alpha)\,Cos.\,\phi - (a^2 + b^2 - r^2) = 2b\,Sin.\,\alpha\,(d\,Cos.\,\phi - a)\,Sin.\,\phi \quad \ldots\ldots \text{(A)}.$$

Verheft men deze vergelijking tot het vierkant, en men ſubſtitueert in dezelve $1 - Cos^2.\,\phi$ in plaats van $Sin^2.\,\phi$, en 1 voor $Sin^2.\,\alpha + Cos^2.\,\alpha$, zoo zal men, na door de coëfficient van $Cos^4.\,\phi$ gedeeld te hebben, verkrijgen

$$Cos^4.\,\phi - \frac{4a\,(d^2 - 3bd\,Cos.\,\alpha + 2b^2)}{d\,(4b^2 - 4bd\,Cos\,\alpha + d^2)} \times Cos^3.\,\phi \times \ldots.$$

2

$$\frac{2\left\{2a^2(d-bC.a)^2-2b^2S^2.a(d^2-a^2)+(a^2+b^2-r^2)(d^2-2bdC.a)\right\}}{d^2(4b^2-4bd\,Cos.a+d^2)}\times$$

www.libtool.com.cn

$$Cos^2.\Phi-4a\frac{\left\{(a^2+b^2-r^2)(d-bCos.a)-2b^2dSin^2.a\right\}}{d^2(4b^2-4bd\,Cos.a+d^2)}\times Cos.\Phi+$$

$$\frac{(a^2+b^2-r^2)^2-4a^2b^2\,Sin^2.a}{d^2(4b^2-4bd\,Cos.a+d^2)}=0\quad\ldots\ldots\quad(B).$$

Deze vierdemagtsvergelijking, welke naarmate van de betrekking, welke er tusschen de gegevens plaats heeft, vier bestaanbare, twee bestaanbare en twee onbestaanbare, of wel vier onbestaanbare wortels kan hebben, schijnt zich door geene der bekende kunstgrepen in twee factoren van den tweeden graad te laten ontbinden; zijn echter a, b, d, α en r in getallen gegeven, dan kan men door deze vergelijking de waarde van Φ berekenen, en dan zal de rigting van de gevraagde koorde bepaald zijn; waardoor men dan nu dit Voorstel in het algemeen voor opgelost kan houden.

Bij de beschouwing van onze figuur zou men misschien kunnen denken, dat het onmogelijk is, dat er voor dit Voorstel in eenig geval vier bestaanbare antwoorden kunnen zijn, doch nemen wij in aanmerking, dat b, d, r en α alle mogelijke waarden kunnen hebben, dan is het klaar, dat in onze oplossing ook die gevallen begrepen zijn, waarin de twee gegevene cirkels elkander snijden, raken of zelfs geheel buiten elkander gelegen zijn; en indien wij voor zulke gevallen figuren ontwerpen, zal het zeer gemakkelijk zijn zich te overtuigen dat er werkelijk voor dezelve, in bijzondere omstandigheden, vier verschillende antwoorden kunnen bestaan.

Zeer opmerkelijk is het geval waarin de lijn AD door het middelpunt C van den tweeden cirkel gaat, want in dit geval is $\angle$ BAK $= \alpha = 0$, dus $Sin.\,\alpha = 0$ en $Cos.\,\alpha = 1$. Hierdoor verdwijnen al de termen waar in $Sin.\,\alpha$ als factor voorkomt en onze algemeene vergelijking (B) verandert in,

$$Cos^4.\Phi-\frac{4a\left(d^2-3bd+2b^2\right)}{d\left(d^2-4bd+4b^2\right)}Cos^3.\Phi+\ldots$$

$$\frac{2\left\{2a^2(d-b)^2+(a^2+b^2-r^2)(d^2-2bd)\right\}}{d^2(d^2-4bd+4b^2)}Cos^2.\Phi-$$

$$\frac{4a(a^2+b^2-r^2)(d-b)}{d^2(d^2-4bd+4b^2)}\,Cos.\,\phi+\frac{(a^2+b^2-r^2)^2}{d^2(d^2-4bd+4b^2)}=0$$

dat is, de coëfficienten herleidende, in,

$$Cos^4\,\phi-\frac{4a(d-b)}{d(d-2b)}Cos^3\,\phi+\frac{4a^2(d-b)^2+2a^2(d-2b)(a^2+b^2-r^2)}{d^2\,(d-2b)^2}\times$$

$$Cos^2\,\phi-\frac{4a(d-b)(a^2+b^2-r^2)}{d^2\,(d-2b)^2}Cos.\,\phi+\frac{(a^2+b^2-r^2)^2}{d^2(d-2b)^2}=0$$

welke vergelijking volmaakt het quadraat is van de vergelijking,

$$Cos^2.\,\phi-\frac{2a(d-b)}{d(d-2b)}Cos.\,\phi+\frac{a^2+b^2-r^2}{d(d-2b)}=0.$$

Deze vierkantsvergelijking vind men ook onmiddellijk uit de vergelijking (A), wanneer men in dezelve *Sin.* $a = 0$ en *Cos.* $a = 1$ ſtelt, en men vindt voor hare wortels,

$$Cos.\,\phi=\frac{a(d-b)}{d(d-2b)}\pm V\left\{\frac{a^2(d-b)^2}{d^2(d-2b)^2}-\frac{a^2+b^2-r^2}{d(d-2b)}\right\}$$

$$=\frac{a(d-b)}{d(d-2b)}\pm V\left\{\frac{a^2b^2}{d^2(d-2b)^2}-\frac{b^2-r^2}{d(d-2b)}\right\}$$

Deze formule geeft voor *Cos.* ϕ twee verſchillende waarden, doch neemt men in aanmerking, dat de bogen ϕ en $-\phi$ dezelfde Coſinus hebben, dan blijkt het, dat wij vier antwoorden door deze formule vinden, welke echter twee aan twee, zoodanig met elkander overeenkomen, dat zij ter wederzijden van AB gelijke hoeken maken.

Wanneer men de gevondene waarde van *Cos.* ϕ met d vermenigvuldigt, verkrijgt men,

$$AG = d\,Cos.\,\phi=\frac{a(d-b)}{d-2b}\pm V\left\{\frac{a^2b^2}{(d-2b)^2}-\frac{d(b^2-r^2)}{d-2b}\right\}$$

en als men hiervan $FG = a$ aftrekt, blijft er,

$$AF=\frac{ab}{d-2b}\pm V\left\{\left(\frac{ab}{d-2b}\right)^2-\frac{d(b^2-r^2)}{d-2b}\right\}.$$

Deze formule, welke iets eenvoudiger is dan die voor *Cos.* ϕ, laat zich op de volgende wijze conſtrueren.

Beſchrijf uit het middelpunt D, *Fig.* 141, van den tweeden cirkel, met DB als ſtraal, eenen halven cirkel LMB en ſtel AM loodregt op AB, dan is $AB = d$ en $AL = 2BD - AB = 2(d-b) - d = d - 2b$, zoodat $AM^2 = AB \times AL = d(d-2b)$. Verder beſchrijve men op AD eenen halven cir-

cirkel, welke den halven cirkel IFK in eenig punt N snijdt, en men trekke AN en ND, dan is $AN^2 = AD^2 - DN^2 = b^2 - r^2$. Vervolgens make men AP = NA, en trekke, na MB getrokken te hebben PQ evenwijdig met MB, zoo heeft men $AM^2 : AB^2 = AP^2 : AQ^2$, of $d(d - 2b) : d^2 = b^2 - r^2 : AQ^2$ waaruit $AQ^2 = \frac{d(b^2 - r^2)}{d - 2b}$. Maakt men nu DR = AL $= d - 2b$, en trekke men door Q en R onbepaalde lijnen, loodregt op AB, dan make men verder $RS = a$, dat is gelijk de begeerde lijn FG, trekke door D en S de regte lijn DST, het verlengde van MA in T doorsnijdende, en dan heeft men $DR : RS = DA : AT$ of $d - 2b : a = b : AT$, zoodat $AT = \frac{ab}{d - 2b}$. Wanneer men nu uit T, met TA als radius, eenen halven cirkel beschrijft, welke de loodlijn, uit Q op AB getrokken, snijdt in U en V, dan zullen QU en QV de gezochte waarden van AF en AF′ zijn; want zoo men TY loodregt op de koorde UV trekt, dan is $UY = YV = \sqrt{(TU^2 - TY^2)} = \sqrt{(AT^2 - AQ^2)} = \sqrt{\left\{\left(\frac{ab}{d - 2b}\right)^2 - \frac{d(b^2 - r^2)}{d - 2b}\right\}}$, en derhalven is,

$$QV = QY + YV = \frac{ab}{d - 2b} + \sqrt{\left\{\left(\frac{ab}{d - 2b}\right)^2 - \frac{d(b^2 - r^2)}{d - 2b}\right\}}$$

en $QU = QY - YU = \frac{ab}{d - 2b} - \sqrt{\left\{\left(\frac{ab}{d - 2b}\right)^2 - \frac{d(b^2 - r^2)}{d - 2b}\right\}}$.

Beschrijft men dus, uit A als middelpunt, met QV en QU als stralen, cirkelboogjes, welke den omtrek des cirkels INK snijden in F en F′, en men trekt uit A door F en F′ de lijnen AFG en AF′G′, zoo zullen deze aan het Voorstel beantwoorden, in dier voege dat $FG = F'G' = a$ zal zijn.

Deze constructie is dezelfde, welke men in de *Algebra* van G. Kinkhuisen (1661) vindt, alwaar dit bijzonder geval is opgelost.

Indien de twee cirkels elkander in het punt A aanraken, dan is bovendien nog $r = b$, en in dit geval wordt onze formule zeer eenvoudig, want dan gaat zij over in,

$$AF = \frac{2ab}{d - 2b}$$

waar-

waarvan de conſtructie zoo gemakkelijk is, dat wij bij dezelve niet langer behoeven ſtil te ſtaan.

www.libtool.com.cn

CCIV. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Uit eenen gegevenen ſcheefhoekigen kegel, de grootst-mogelijke parabool te ſnijden?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Zij AQCP, *Fig.* 142, de cirkelvormige grondvlakte des kegels, en D het middelpunt van dezelve; zij voorts BD de as des kegels, welke eenen ſcheven hoek met het grondvlak maakt, en laat BE de perpendiculair zijn, welke uit den top op het grondvlak valt; ſtelt men zich nu voor, dat door BD en BE een plat vlak gebragt wordt, zoo zal hetzelve de oppervlakte des kegels volgens BP en BQ en het grondvlak volgens de lijn PDEQ ſnijden, welke laatſte eene middellijn van het grondvlak zal zijn. Het vlak BPQ zal daarenboven regthoekig op het grondvlak ſtaan en zal alzoo de regtſtandige aſſen-driehoek van den kegel zijn.

Laat door de as BD des kegels nog een ander vlak ABC worden gebragt, het oppervlak volgens AB en BC, en het grondvlak volgens de middellijn AC doorſnijdende, dan zal dit vlak mede een aſſen-driehoek zijn, welke ondertuſſchen het grondvlak onder eenen ſcheven hoek zal doorſnijden. Laat dan, in het grondvlak, EF loodregt op de middellijn AC worden getrokken, dan zal, uit hoofde der loodregte ſtand van BE, de lijn BF mede loodregt op AC wezen, en $\angle$ BFE zal de ſtandhoek der aſſen-driehoek ABC met het grondvlak zijn.

Beſchouwt men nu den kegel als bekend, dan is de ſtraal AD $=$ DC $=$ PD $=$ DQ $=$ a benevens de ſtandhoek BDQ $=$ α van de as, als mede de as BD $=$ b gegeven, doch de $\angle$ QDC een veranderlijke hoek zijnde, ſtellen wij dezelve $\angle$ QDC $=$ ϕ, en dan hebben wij, BE $=$ b *Sin.* α; DE $=$ b *Cos.* α; EF $=$ DE . *Sin.* ϕ $=$ b *Cos.* α . *Sin.* ϕ, DF $=$ DE $\times$ *Cos.* ϕ $=$ b *Cos.* α . *Cos.* ϕ en BF $=$ $\sqrt{(BD^2 - DF^2)}$ $=$ $\sqrt{(b^2 - b^2\ Cos^2.\alpha\ .\ Cos^2.\phi)}$ $=$ $b\sqrt{(1 - Cos^2.\alpha\ .\ Cos^2.\phi)}$;

maar $BE = BF \times Sin.\ BFE$, dus $Sin.\ BFE = \frac{BE}{BF}$, dat is,
www.libtool.com.cn
$Sin.\ BFE = \frac{b\ .\ Sin.\ a}{b\sqrt{(1 - Cos^2.\ a\ .\ Cos^2.\ \phi)}}$; ſtellende dan dezen ſtandhoek $BFE = \lambda$ dan hebben wij $Sin.\ \lambda = \frac{Sin.\ a}{\sqrt{(1 - Cos^2.\ a\ Cos^2.\ \phi)}}$.

Verder hebben wij $AB^2 = AF^2 + BF^2 = (a + b\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ a)^2 + b^2\ (1 - Cos^2.\ a\ .\ Cos^2.\ \phi) = a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi$, waaruit $AB = \sqrt{\{a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi\}}$, en op dezelfde wijze is $BC^2 = FC^2 + BF^2 = (a - b\ Cos.\ a\ Cos.\ \phi)^2 + b^2\ (1 - Cos^2.\ a\ Cos^2.\ \phi) = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi$, dus $BC = \sqrt{\{a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ a\ Cos.\ \phi\}}$ en wij hebben bijgevolg,

$$Sin.\ BAC = \frac{BF}{AB} = \frac{b\sqrt{(1 - Cos^2.\ a\ .\ Cos^2.\ \phi)}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ a\ Cos.\ \phi)}}$$

en $Sin.\ BCA = \frac{BF}{BC} = \frac{b\sqrt{1 - Cos^2.\ a\ .\ Cos^2.\ \phi)}}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ a\ .\ Cos.\ \phi)}}$.

Daar wij nu vooraf niet weten aan welke ſchuinſche zijde de gevraagde parabool evenwijdig, of in welke aſſen-driehoek haar diameter gelegen moet zijn, zoo onderſtelle men, dat deze diameter in den aſſen driehoek ABC ligt, welke wij toch, uit hoofde van den veranderlijken hoek ϕ mede als veranderlijk moeten beſchouwen.

Men ſtelle dan, dat in den aſſen-driehoek ABC, *Fig.* 143, de lijn GK evenwijdig met de zijde AB getrokken zij, en dat voorts MN de middellijn AC van het grondvlak regthoekig doorſnijde in G, dan zal een vlak, dat door KG en MN gebragt wordt, de ronde oppervlakte van den kegel volgens het beloop van eene parabool MKN doorſnijden, van welke, zoo als genoegzaam bekend is, KG een diameter zal zijn, tot de ordinaten MG = GN behoorende, welke met dezen diameter ſcheve hoeken MGK en NGK zullen maken.

Om nu den hoek MGK der Coördinaten te bepalen, ſtelle men zich voor, dat G het middelpunt van eenen bol zij, dan zullen de vlakken MGK, MGC en KGC, op het oppervlak van dien bol, eenen bolvormigen driehoek *abc*, *Fig.* 144, bepalen, waar-

van

van wij de zijden, over de hoeken a, b en c geplaatst, door A, B en C zullen uitdrukken.

www.libtool.com.cn

In dezen drieboek is nu bekend C $=$ ∠ MGD $=$ 90°; A $=$ ∠ KGD $=$ ∠ BAC en ∠ b gelijk aan den ſtandhoek λ, welke wij boven bepaald hebben, en dus kan B, dat is, de gevraagde hoek der coördinaten berekend worden door de formule

$Cos.\ B = Cos.\ A \times Cos.\ C + Sin.\ A \times Sin.\ C : Cos.\ b$

(zie J. de Gelder, *Beginſelen der Meetkunst*, 2e. deel, pag. 449, §. 1120).

Nu is gevonden C $=$ 90°, dus $Cos.\ C = 0$ en $Sin.\ C = 1$;

A $=$ BAC, dus $Sin.\ A = \frac{b\sqrt{(1 - Cos^2.\alpha\, Cos^2.\phi)}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\alpha\ Cos.\phi)}}$ en

bijgevolg $Cos.\ A = \sqrt{(1 - Sin^2.\ A)} = \frac{a + b\ Cos.\alpha\ .\ Cos.\phi}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\alpha\ Cos.\phi)}}$;

en omdat gevonden is $Sin.\ \lambda = \frac{Sin.\alpha}{\sqrt{(1 - Cos^2.\alpha\ .\ Cos^2.\phi)}}$;

zoo hebben wij $Cos.\ \lambda = Cos.\ b = \frac{Cos.\alpha\ .\ Sin.\phi}{\sqrt{(1 - Cos^2.\alpha\ Cos^2.\phi)}}$;

deze waarde ſubſtituerende in de gevondene waarde van $Cos.\ B$, zoo vinden wij,

$$Cos.MGK = Cos.B = \frac{b\sqrt{(1 - Cos^2.\alpha\ .\ Cos^2.\beta)}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\alpha\ Cos.\phi)}} \times \frac{Cos.\alpha\ .\ Sin.\phi}{\sqrt{(1 - Cos^2.\alpha\ .\ Cos^2.\phi)}}$$

$$= \frac{b\ Cos.\alpha\ .\ Sin.\phi}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\alpha\ .\ Cos.\phi)}}$$

en bijgevolg,

$$Sin.\ MGK = \sqrt{\left\{1 - \frac{b^2\ Cos^2.\alpha\ .\ Sin^2.\phi}{a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\alpha\ Cos.\phi}\right\}}$$

Stelt men nu, *Fig.* 143, GD $= x$, dan is MG^2 $=$ AG $\times$ GC $= a^2 - x^2$. Voorts is door de gelijkvormigheid der drie hoeken ABC en GKC, AC : AB $=$ GC : GK en GK $=$ $\frac{GC \times AB}{AC} = \frac{a + x}{2a}\sqrt{\left\{a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\alpha\ .\ Cos.\phi\right\}}$.

Daar nu de inhoud van het parallelogram, hetwelk uit MN en GK onder den hoek MGK kan worden beſchreven, gelijk is aan MN $\times$ GK $\times$ *Sin.* MGK, en de inhoud van het parabolisch ſegment MKN gelijk is aan $\frac{2}{3}$ van gezegde parallelogram, zoo hebben wij,

Inh. Parab. segt. MKN $=\frac{2}{3}$ MN × GK × *Sin.* MGK

$$=\tfrac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{(a^2-x^2)}}{1}\times\frac{a+x}{2a}\sqrt{\{a^2+b^2+2ab\,Cos.\,a\,Cos.\,\phi\}}\times$$

$$\sqrt{\{1-\frac{b^2\,Cos^2.\,a\,.\,Sin^2.\,\phi}{a^2+b^2+2ab\,Cos.\,a\,.\,Cos.\,\phi}\}}.$$

dat is na herleiding,

$$Inh.Par.MKN=\frac{2}{3a}(a+x)\sqrt{(a^2-x^2)}\times\sqrt{\{a^2+b^2+2ab\,Cos.a\,Cos.\phi-}$$

$$\ldots\ldots\ldots b^2\,Cos^2.\,a\,.\,Sin^2.\,\phi\}$$

welke formule bijgevolg een maximum moet zijn.

Stellen wij nu deze functie z, dan moet, voor het maximum $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ gelijk o zijn, of wel, omdat de beide factoren $(a+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$ en $\sqrt{\{a^2+b^2+2ab\,Cos.\,a\,Cos.\,\phi - b^2\,Cos^2.\,a\,.\,Sin^2.\,\phi\}}$ ieder slechts eene van de veranderlijke grootheden x en ϕ bevatten, moet in dit geval ieder van deze factoren een maximum zijn. Differentieert men den factor $(a+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$ dan verkrijgt men, na door ∂x gedeeld en de uitkomst gelijk o gesteld te hebben,

$$\sqrt{(a^2-x^2)}+(a+x)\,.\,\frac{-x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=o$$

dat is $(a^2-x^2)=x\,(a+x)$

of, door $(a+x)$ deelende, $a-x=x$, waaruit $x=\frac{1}{2}a$.

De andere factor $\sqrt{(a^2+b^2+2ab\,Cos.\,a\,Cos.\,\phi - b^2\,Cos^2.\,a\,Sin^2.\,\phi)}$ wordt klaarblijkelijk een maximum als $\phi=o$ is, want dan wordt $Cos.\,\phi=1$ en dus het gedeelte $a^2+b^2+2ab\,Cos.\,a\,Cos\,\phi$ op zijn grootst, terwijl het andere deel $b^2\,Cos^2.\,a\,Sin^2.\,\phi$ hierdoor gelijk o wordt. Wij kunnen dit ook door differentiaal rekening vinden, want differentierende het vierkant van dezen factor, dan vinden wij, na door $\partial\phi$ gedeeld en het quotient gelijk o gesteld te hebben. $-2ab\,Cos\,a\,Sin\,\phi - 2b^2\,Cos^2.\,a\,.\,Sin.\,\phi\,.\,Cos.\,\phi=o$, of door $-2b\,Cos.\,a$ deelende en herleidende, $a\,Sin.\,\phi+b\,Cos.\,a\,Sin.\,\phi\,.\,Cos\,\phi=o$, dat is $Sin.\,\phi\,(a+b\,Cos.\,a\,Cos.\,\phi)=o$, hergeen door $a+b\,Cos.\,\phi\,Cos.\,a$ gedeeld, mede geeft $Sin.\,\phi=o$ en dus $\phi=o$.

Daar

Daar dus $\phi = 0$ en $x = \frac{1}{3} a$ moet zijn, zoo valt de driehoek ABC op de asſen-driehoek PBQ, welke regthoekig op het grondvlak ſtaat, waarvoor dan ook $\angle$ MGK $= 90°$ wordt; omdat *Sin.* $\phi = 0$ zijnde *Sin.* MGK $=$ . . . . . .

$$V\left\{1 - \frac{b^2\ Cos^2.\ a\ Sin^2.\ \phi}{a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ a\ Cos.\ \phi}\right\} = V\ 1 = 1 \text{ wordt.}$$

Verder blijkt hieruit dat de inhoud van de grootſte parabool gemakkelijk bepaald kan worden; want wij hebben ſlechts in de algemeene formule, die wij voor den inhoud van de parabool MKN gevonden hebben, $x = \frac{1}{2} a$ en $\phi = 0$ te ſtellen, waardoor wij voor dezen grootſten inhoud verkrijgen,

$$\frac{2}{3a} \times \tfrac{3}{4} a\ V\ \tfrac{3}{4} a^2 \times V\ (a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ a)$$

dat is na herleiding,

$$\tfrac{1}{2} a\ V\ 3\ (a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ a)$$

Voorts blijkt het uit deze formule, dat de lijn KG evenwijdig met de langſte zijde AB moet worden getrokken, want voor het tegenovergeſtelde geval zou a grooter dan $90°$ zijn, en dan zou de formule voor den inhoud eigenlijk worden $\frac{1}{2} a\ V\ 3\ (a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ a)$, welke inhoud klaarblijkelijk kleiner dan de voorgaande is, offchoon echter deze parabool wederom de grootſte zou zijn van al de paraboolen, welke evenwijdig met dezelve uit den kegel kunnen worden geſneden.

Is de kegel regt, dan is $a = 90°$ en dan wordt de inhoud van de grootſte parabool $\frac{1}{2} a\ V\ 3\ (a^2 + b^2)$.

Laten wij a en b dezelfde waarde behouden, dan is het klaar, dat de formule $\frac{1}{2} a\ V\ 3\ (a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ a)$ grooter en grooter wordt naarmate a afneemt. Wanneer dus de ſtraal van de bazis en de lengte van de as onveranderd blijven, zal de inhoud van de grootſte parabool grooter worden naarmate de kegel ſchuiner is, of minder hoogte heeft. Wordt deze hoogte 0, dat is, valt de top op het grondvlak, dan is $a = 0$ en *Cos.* $a = 1$ en wij vinden in dit oneigenlijk geval, voor den inhoud de formule $\frac{1}{2} a\ (a + b)\ V\ 3$.

CCV. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door J. DE GELDER.

De kromme lijn, welker vergelijking is $y = x\,Log.\,x$, *door punten te beſchrijven, en derzelver buigpunten, kromteſtraal en inhoud te vinden?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Om tot de conſtructie der gegevene vergelijking te geraken, onderſtellen wij de voornaamſte eigenſchappen der logarithmiſche kromme bekend te zijn.

Laat dan XX′ en YY′, *Fig.* 145, de aſſen der coördinaten verbeelden, elkander regthoekig in X doorſnijdende, en laat XA = XB de eenheid voorſtellen; indien dan BC = a de bazis van het logarithmiſch ſtelſel is, dan zal men de logarithmiſche lijn ZAZ′ kunnen conſtrueren, en ſtellende voor dezelve XD = x en DC = z dan zal derzelver vergelijking zijn $z = Log.\,x$ of $x = a^z$.

De gemakkelijkſte conſtructie voor deze logarithmiſche kromme komt mij voor de volgende te zijn. Maak XB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = &c. = XA = 1, en trek door de punten B_3, B_1, B_2, &c. onbepaalde lijnen regthoekig op XY′. Maak verder *Fig.* 146, MN = XA = 1, NO = BC = a en trek door M en O de onbepaalde lijn MOP. Maak $MN_1 = NO^1$; $MN_2 = N_1O_1$; $MN_3 = N_2O_2$; &c. dan is $NO = a$; $N_1O_1 = a^2$; $N_2O_2 = a^3$ &c. Nemende dan, in *Fig.* 145, BC = NO; $B_1C_1 = N_1O_1$; $B_2C_2 = N_2O_2$ &c., dan zullen C, C_1, C_2 &c. punten van de logarithmiſche kromme zijn, dat is van de kromme tot de vergelijking $z = Log.\,x$ behoorende, en op deze wijze vindt men zoo veel punten van den tak AZ′ als men verkiest.

De tak AZ wordt op dezelfde wijze geconſtrueerd. Men make namelijk $Xb = bb'$ &c. = 1. Men neme, in *Fig.* 146, $Mn = MN$; $Mn_1 = no$, $Mn_2 = n_1o_1$ &c., en verder, in *Fig.* 145, $bc = no$; $b_1c_1 = n_1o_1$ &c. dan is $bc = \frac{1}{a}$; $b_1c_1 =$

$\frac{1}{e^0}$ &c., en de punten c; c_1; c_2 &c. zullen wederom punten van de logarithmiſche kromme zijn.

www.libtool.com.cn

Men kan verder zoo veel tuſſchenpunten van deze logarithmiſche kromme vinden als men verkiest, door op te merken, dat de rekenkunſtige middenevenredige tuſſchen twee logarithmen, de logarithmus is van de meetkunſtig middenevenredige der getallen waartoe die logarithmen behooren. Deelende dus, bij voorbeeld, BB_2 midden door in B^1, en makende B^1C^1 middenevenredig tuſſchen BC en B_1C_1, dan zal C^1 wederom een punt van de logarithmiſche kromme zijn.

De logarithmiſche kromme alzoo, zeer nauwkeurig geconſtrueerd hebbende, kan dezelve ons dienen om de gegevene vergelijking $y = x\ Log.\ x$ door punten te conſtrueren; want daar wij voor de logarithmiſche kromme hebben $z = Log.\ x$, zoo is $y = xz$; nemende dus $z = 0, 1, 2, 3$, &c. dan wordt $y = 0, x, 2x, 3x$ &c. en hieruit volgt, dat nemende $DE = XD$; $D_1E_1 = 2XD_1$; $D_2E_2 = 3XD_2$ &c. de punten A, E, E_1, E_2 &c. punten van de gevraagde kromme lijn zullen zijn.

Nemende $z = 0, -1, -2, -3$ &c., dan wordt $y = 0, -x, -2x, -3x$, &c. Wanneer dus $de = Xd$; $d_1e_1 = 2Xd_1$; $d_2e_2 = 3Xd_2$ &c. genomen wordt, dan zullen e, e_1, e_2, &c. mede punten zijn van de lijn $y = x\ Log.\ x$.

Deze conſtructie wordt ook gemakkelijk op de tuſſchenpunten toegepast; want uit $y = xz$ volgt algemeen $1 : z = x : y$. Nemende dus eenig willekeurig punt D^1 in XX^1, en trekkende DE^1 loodregt op XX^1 en ſnijdende de logarithmiſche kromme in C^1, dan zal, indien wij D^1E^1 vierde evenredig maken tot AX, DC^1 en XD^1, het punt E^1 een punt van de gevraagde kromme zijn.

Door middel van deze conſtructie, op een aanmerkelijk aantal punten toe te paſſen, zal de geheele loop van de gevraagde kromme lijn $XYAEV^1$ zigtbaar worden. Deze conſtructie zal doen zien, dat de kromme lijn de logarithmiſche kromme in het punt A aanraakt, dat zij ergens in Y een minimum voor y heeft, en dat zij meer en meer tot het punt X nadert. Het punt waar in de kromme lijn de as YY' ſnijdt, kan echter door onze con-

ſtructie niet gevonden worden, want dezelve zou in dit geval geven $1 : -\infty = 0 : y$. Wij moeten deze eigenſchappen, welke alleen door de conſtructie zigtbaar gevonden zijn, echter aan de berekening ter toetſe brengen, om op dezelve met eenige zekerheid te kunnen vertrouwen.

www.libtool.com.cn

Stellen wij $x = XA = 1$, dan wordt $y = 1 \times Log. 1 = 0$, het punt A is dus werkelijk een punt van de kromme lijn. Voor alle poſitieve waarde van x grooter dan 1 wordt $y = x\ Log.\ x$ altijd poſitief, en grooter en grooter naarmaten x grooter genomen wordt, zoo dat eindelijk $x = \infty$ ook $y = \infty$ maakt. De tak AV verwijderd zich dus meer en meer van de beide aſſen XX′ en YY′ en loopt tot in het oneindige voort.

Is x poſitief, maar kleiner dan AX, dat is kleiner dan 1, dan is $Log.\ x$ negatief en dus ook $y = x\ Log.\ x$ negatief, voor al deze waarden zal dan de kromme ter linkerzijde van XX′ moeten liggen, zoo als zulks de figuur aanwijst.

Is $x = 0$ dan wordt $y = 0 \times Log.\ 0 = -0 \times \infty$. Om deze waarde te bepalen ſchrijven wij de waarde van y onder den vorm $y = \frac{Log.\ x}{\frac{1}{x}}$, dan veranderd dezelve door $x = 0$ te ſtellen in $y = \frac{\infty}{\infty}$; differentierende dan teller en noemer, dan komt er, na door ∂x gedeeld te hebben $\frac{\frac{m}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$ of $-mx$, waarin m het modulus beteekent, dat tot de bazis a behoort, en ſtellende nu $x = 0$, dan vinden wij, dat de waarde van $x = 0$ ook $y = 0$ maakt, en dat X dus een punt van de gevraagde kromme lijn is.

Differentieren wij de gegevene vergelijking $y = x\ Log.\ x$ dan vinden wij $\partial y = x \times \frac{m\partial x}{x} + \partial x$, $Log.\ x$ of $\frac{\partial y}{\partial x} = m + Log.\ x$, waarin m het modulus beteekent, dat tot de bazis a behoort. Deze uitdrukking is, zoo als genoegzaam bekend is, de tangens van den hoek, welke de raaklijn van eenig punt met de as XX′ der

der abscisſen maakt. Stellende dan dezen hoek ϕ, dan is *Tang.* $\phi = m + Log.\ x$. Voor $x = 0$ is *Log.* $x = \infty$ en dus *Tang.* $\phi = \infty$, waaruit $\phi = 90°$. De tangens van het punt X is dus loodregt op XX′ en hieruit volgt, dat de as YY′ de kromme lijn in het punt X aanraakt. Stellen wij in de uitdrukking voor *Tang.* ϕ, $x = XA = 1$, dan is *Log.* $x = 0$ en *Tang.* $\phi = m$. De raaklijn AQ van het punt A maakt dus met XX′ eenen hoek XAQ, waarvan de tangens gelijk is aan het modulus; maar AX $= 1$ zijnde, zoo is XQ $=$ *Tang* $\angle$ XAQ en dus is XQ gelijk het modulus m : nemende nu in aanmerking, dat in de logarithmiſche kromme ZAZ′, de ſubtangens op de as YY′ overal, gelijk aan het modulus is (*), zoo blijkt hieruit dat de raaklijn AQ van de kromme XVAV′ te gelijker tijd raaklijn is van de logarithmiſche kromme ZAZ′ en dat deze twee kromme lijnen elkander alzoo in het punt A aanraken.

Stellende in de formule voor *Tang.* ϕ, x oneindig groot, dan wordt *Tang.* ϕ mede oneindig groot, en dus $\phi = 90°$. De tak AV′, nadert dus bij V′ meer en meer tot den evenwijdigen ſtand met YY′, maar om dat $x = \infty$ ook $y = \infty$ maakt, verkrijgt zij deze evenwijdige ſtand niet dan op eenen oneindigen afſtand van beide de aſſen, uit dit alles blijkt dat de oneindige tak AV′ voor geene regtlijnige aſymptoten vatbaar is.

De ſubtangens op de as XX′ is gelijk $\frac{y\partial x}{\partial y}$. Nu is $\frac{\partial y}{\partial x} = m + Log.\ x$, dus $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{m + Log.\ x}$ en bijgevolg $\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{x\ Log.\ x}{m + Log.\ x}$ of gelijk $\frac{y}{m + Log.\ x}$. Verder is voor eenig willekeurig punt E_2, de lijn $QB_2 = QX + XB_2 = m + Log.\ x$. De ſubtangens op de as XX′ voor eenig punt E_2 van de kromme is dus eene vierde evenredige tot QB_2, XD_2 en XB_2; trekken.

(*) Dit blijkt aldus. De ſubtangens op de as YY′ rekenende, is deze gelijk $\frac{x\partial x}{\partial x}$. Nu is $x = Log.\ x$, dus $\partial x = \frac{m\partial x}{x}$. en bijgevolg $\frac{x\partial x}{\partial x} = m$.

hende dus QC_2 en XI evenwijdig met QC_2, dan zal B_2I de lengte van deze ſubtangens zijn.

www.libtool.com.cn

De ſubtangens op de as YY' wordt uitgedrukt door $\frac{x\partial y}{\partial x}$, en daar $\frac{\partial y}{\partial x} = m + Log.\ x$ is, zoo is deze ſubtangens $\frac{x\partial y}{\partial x} = x\ (m + Log.\ x)$. Deze ſubtangens wordt mede gemakkelijk geconſtrueerd; want zij is vierde evenredig tot 1, x en $m + Log.\ x$, dat is voor een bepaald punt E_2 is zij vierde evenredig tot AX, XD_2 en QB_2.

De uitdrukking $\frac{x\partial y}{\partial x} = x\ (m + Log.\ x)$ wordt o, wanneer $x = 0$ en wanneer $Log.\ x = -m$ is, de eerſte waarde $x = o$ toont het punt A aan, doch de tweede $Log.\ x = -m$, bewijst dat $Log.\ x = -m$ zijnde, de tangens loodregt op YY' zal ſtaan, en dat bijgevolg y alsdan haar grootſte negatieve waarde SV zal bereikt hebben; het punt V wordt dus gevonden door QR loodregt op YY' te ſtellen, tot zij de logarithmiſche kromme in R ſnijdt en dan RS evenwijdig met YY' te trekken, het ſnijpunt V van deze lijn met onze kromme, zal dan het minimum VS der kromme lijn aanduiden. De waarde van x en y welke met dit minimum overeenſtemmen zijn $x = e^{-m} = \frac{1}{e^m}$ en $y = x\ Log.\ x = -\frac{m}{e^m}$.

Hieruit volgt nog dat, trekkende SH evenwijdig met AQ en HV loodregt op YY', het punt V de grootſte waarde der negatieve ordinaat y of VS zal bepalen; want dan is AX : XQ = SX : VS of 1 : $-m$ = RQ : VS; maar RS = QX = $-m$ = $Log.$ XS zijnde, zoo is XS = QR = $e^{-m} = \frac{1}{e^m}$ en bijgevolg $VS = -\frac{m}{e^m}$.

Uit $\frac{\partial y}{\partial x} = m + Log.\ x$, volgt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m}{x}$, en daar deze uitdrukking niet gelijk o kan worden, zoo volgt hieruit dat de kromme lijn geen buigpunten heeft.

Stel-

Stellende de kromte ſtraal K, dan hebben wij $K = -\frac{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -(1+(m+Log.\,x)^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{x}{m}$. Voor eenig willekeurig punt E_2 van de kromme is dus de kromteſtraal, niet op het teeken lettende, $\left(AX_2 + QB_2^2\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{XD^2}{QB}$. Welke waarde gemakkelijk te conſtrueren is. In het punt A is de kromteſtraal $\frac{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{m}$.

Om den inhoud van eenig ſtuk AD_2E_2 te vinden, hebben wij $I = \int y\partial x = \int x\partial x\ Log.\ x$. Om deze formule te integreren merken wij op, dat $\partial . pq = p\partial q + q\partial p$ zijnde, $pq = \int p\partial q + \int q\partial p$ is, en dat men bijgevolg in het algemeen heeft $\int p\partial q = pq - \int q\partial p$. Paſſen wij dit op onze formule toe dan vinden wij,

$$I = \int x\partial x\ Log.\ x = \tfrac{1}{2}\int Log.\ x.\partial . x^2 = \tfrac{1}{2}x^2\ Log.\ x - \tfrac{1}{2}\int x^2 . \partial Log.\ x$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\ Log.\ x - \tfrac{1}{2}\int mx\partial x = \tfrac{1}{2}x^2\ Log.\ x - \tfrac{1}{4}mx^2 + C$$

nemen wij nu deze integraal van $x = XA = 1$ tot $x = XD_2$ dan moet zij voor $x = 1$ verdwijnen en wij hebben dus $o = -\frac{1}{4}m + C$ of $C = \frac{1}{4}m$, waaruit dan volgt voor den inhoud van eenig ſtuk AD_2E_2A,

$$I = \tfrac{1}{2}x^2\ Log.\ x - \tfrac{1}{4}mx^2 + \tfrac{1}{4}m.$$

Voor $x = o$, wordt, omdat alsdan $x^2\ Log.\ x$ mede gelijk o is, $I = \frac{1}{4}m$ dat is, de inhoud van het ſtuk AVXA is gelijk een vierde van den regthoek onder $AX = 1$ en $XQ = m$.

De inhoud van eenig ſtuk XAE_2K is gelijk $xy - I = x^2 \times Log.\ x - \frac{1}{2}x^2\ Log.\ x + \frac{1}{4}mx^2 - \frac{1}{4}m = \frac{1}{2}x^2\ Log.\ x + \frac{1}{4}mx^2 - \frac{1}{4}m$, welke mede voor $x = 1$ of $y = o$ verdwijnt en voor $x = o$ geeft $-\frac{1}{4}m$.

CCVI. VOORSTEL.

Door J. DE GELDER.

De kromme lijn, welker vergelijking is $x^n = y$, door punten te beſchrijven, derzelver loop te onderzoeken, en haren inhoud te vinden?

Om

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Uit de opgegevene vergelijking volgt terſtond $y\ Log.\ x = Log.\ p$. Stellen wij nu de bazis van het logarithmiſch ſtelſel a, het modulus m, en de logarithmus van p in dit ſtelſel gelijk b, dan hebben wij $y\ Log.\ x = b$, of $y = \frac{b}{Log.\ x}$.

Laat nu, in *Fig.* 147, ZAZ′ de logarithmiſche kromme verbeelden, van welke wij in de oplosſing van het voorgaande Voorſtel, de conſtructie voor de aſſen XX¹ en YY¹ hebben opgegeven, dan is XA = XB = BB₁ &c. = 1 en BC = a, en dan is verder voor eenig willekeurig punt C¹, de coördinaten XD¹ = x en D¹C¹ = z ſtellende, $z = Log.\ x$, indien dan MN = b de waarde van *Log.* p voorſtelt, zullen wij de vergelijking $y = \frac{b}{Log.\ x}$, dat is, $y = \frac{b}{z}$ door punten moeten conſtrueren.

Wanneer D¹C¹ = z = o is, dan wordt $y = \frac{b}{z} = \infty$; de lijn R²R, door A loodregt op XX¹ getrokken, is dus eene aſymptote van de gevraagde kromme lijn.

Voor D¹C¹ = $z = \infty$, wordt $y = \frac{b}{z} =$ o; *en hieruit* volgt, dat XX¹ mede eene aſymptote van de gevraagde kromme lijn VV² is.

Stellen wij D¹C² = z achtervolgens 1, 2, 3, 4 *enz.* dan wordt y achtervolgens $b, \frac{1}{2}b, \frac{1}{3}b, \frac{1}{4}b$ *enz.* makende dus DE = MN = b; $D_1E_1 = \frac{1}{2}$ MN = $\frac{1}{2}b$, $D_2E_2 = \frac{1}{3}$ MN = $\frac{1}{3}b$ *enz.* dan zullen E, E_1, E_2, E_3 *enz.* punten van de gevraagde kromme zijn. Dit toont genoegzaam aan, dat de tak VV² geheel binnen den regten hoek X¹AR gelegen is, en dat X¹A en AR, aſymptoten zijn; even zoo als wij boven reeds hebben aangemerkt.

Nemen wij D¹C² = z achtervolgens gelijk $-1, -2, -3$ *enz.* dan vinden wij y achtervolgens gelijk $-b, -\frac{1}{2}b, -\frac{1}{3}b$ *enz.* Makende dus *de* = MN = b; $d_1e_1 = \frac{1}{2}b$; $d_2e_2 = \frac{1}{3}b$, *enz.* dan zullen e, e_1, e_2, e_3 *enz.* mede punten van onze kromme lijn zijn, en deze kromme lijn heeft dus nog eenen tweeden tak WX, wel-

welke mede R^1R tot asymptote heeft, en in het punt X eindigt, omdat $x = o$ geeft $z = Log.\ x = -\infty$ en bijgevolg $y = \frac{b}{z} = \frac{b}{-\infty} = o$.

www.libtool.com.cn

Het is ook gemakkelijk voor eenige willekeurige abscis x de overeenkomstige ordinaat y te vinden, want $y = \frac{b}{z}$ zijnde, is $z : 1 = b : y$. Indien dus XD^1 eenige willekeurige abscis is, dan zal de overeenkomstige ordinaat D^1E^1, de vierde evenredige zijn tot D^1C^1, XA en MN. Dit achten wij genoeg om zoo veel punten van de gevraagde kromme lijn te vinden als men verkiest, en bijgevolg den geheelen vorm van dezelve zich duidelijk voor oogen te kunnen stellen.

Uit $y\ Log.\ x = b$ volgt $Log.\ x\ .\ \partial y + y\ .\ \frac{m\partial x}{x} = o$; dus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{my}{x\ Log.\ x} = -\frac{m}{x\ Log\ x} \times \frac{b}{Log.\ x} = -\frac{mb}{x\ .\ Log^2.\ x}.$$

verder volgt hieruit,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} = -mb\ .\ \frac{-\partial .\ x\ Log^2.\ x}{x^2\ Log^4.\ x} = mb\ .\ \frac{(Log^2.\ x + 2\ Log.\ x\ .\ m)\ \partial x}{x^2\ Log^4.\ x}$$

zoodat wij verkrijgen,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{mb\ (Log.\ x + 2\ m)}{x^2\ Log^3.\ x}$$

Door nog eens te differentieren, vinden wij,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = mb.\ \frac{m\partial x\ .\ x\ Log^3 x - (Log.\ x + 2m)\ (2x\partial x\ .\ Log^3 x + 3Log^2.\ x\ .\ mx\partial x)}{x^4\ Log^6.\ x}$$

$$= mb.\ \frac{m\ Log\ x - (Log.\ x + 2\ m)\ (2\ Log.\ x + 3\ m)}{x^3\ Log^4.\ x}\ .\ \partial x$$

en wij hebben dus,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -mb\ .\ \frac{2\ Log^2.\ x + 6m\ Log.\ x + 6m^2}{x^3\ Log^4.\ x}.$$

Stellende nu den hoek, welke de raaklijn van eenig punt der kromme lijn met de as XX^1 maakt, gelijk ϕ, dan is, $Tang.\ \phi = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{mb}{x\ Log^2.\ x}$. Voor $x = \infty$ geeft dit $Tang.\ \phi = o$, dus $\phi = o$, en dit toont aan, dat alsdan de tangens evenwijdig met XX^1 loopt, hetgeen met het reeds gevondene, dat namelijk

XX^1

XX^1 asymptote van de kromme lijn is volmaakt overeenkomstig.

Nemende $x = 1$ dan wordt *Tang.* $\phi = \frac{mb}{0} = \infty$, dus $\phi = 90°$ en dit bevestigt het bestaan van de asymptote R_1R. Stellen wij eindelijk $x = 0$ dan wordt *Tang.* ϕ mede oneindig en dus $\phi = 90°$. Want dan gaat *Tang.* ϕ over in *Tang.* $\phi = -\frac{mb}{0 \,.\, Log^n.\, 0} = -\frac{mb}{0 \times -\infty^n}$. Wij leeren hieruit dat XY^1 in het punt X raaklijn van den tak WX is.

Daar R^1A asymptote, en Y^1X raaklijn van den tak WX is, zoo moet deze tak eerst hare bolronde zijde naar R^1A en vervolgens naar Y^1X wenden, en deze tak moet dus noodzakelijk een buigpunt hebben. Om hetzelve te bepalen stellen wij $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, en vinden *Log.* $x + 2m = 0$, of *Log.* $x = -2m$, en daar deze waarde van x, de derde differentiaal-coëfficient $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ doet overgaan in $-\frac{b}{8mx^3}$, en dus dezelve niet gelijk 0 maakt, zoo bestaat er een buigpunt voor *Log.* $x = -2m$ of $x = -2m$; nemende dus XP $= 2$XQ $= 2m$, en stellende PH loodregt op XP, dan zal de lijn HG, evenwijdig met Y^1X getrokken, de kromme lijn in het buigpunt O doorsnijden, en om dit punt O nog nader te bepalen zullen wij door onze algemeene constructie hebben GH : AX = MN : GO.

Om de subtangens voor eenig punt der kromme lijn te bepalen, zoo hebben wij $\frac{y\partial x}{\partial y} = -\frac{x\ Log.\ x}{m}$. Het negatieve teeken van deze subtangens toont alleen aan, dat dezelve niet van D^1 naar den oorsprong X moet gerekend worden, zoodis bij het vinden der formule $\frac{y\partial x}{\partial y}$ is ondersteld geworden, doch van D^1 naar X^1. Derzelver constructie is bovendien zeer gemakkelijk, want makende $XQ^1 = XQ$, trekkende Q^1D^1, en evenwijdig met dezelve C^1S, dan is D^1S de subtangens en E^1S de tangens van het punt E^1; want dan is $XQ^1 : XD^1 = D^1C^1 : D^1S$ of $m : x = Log.\ x : D^1S$, waaruit $D^1S = \frac{x\ Log.\ x}{m}$.

Het

Het blijkt uit de beſchouwing van de figuur, dat onze kromme lijn met de logarithmiſche kromme twee punten T en T^1 gemeen heeft. Dezelve worden gemakkelijk bepaald; want voor die punten moet $y = z$ zijn, en daar $y = \frac{b}{z}$ of $yz = b$ is, zoo is voor die punten $y^2 = z^2 = b$ en dus $y = z = \pm \sqrt{b}$. Nemende nu XU = MN en beſchrijvende op bU eenen halven cirkel, XX^1 ſnijdende in K dan is $XK^2 = Xb \times XU = 1 \times b$ dus $XK = \sqrt{b}$; de punten T en T^1 liggen dus ter wederzijden op eenen afſtand gelijk XK van de lijn XX^1 verwijderd. Terwijl wij voor de afſtanden welke deze punten van de lijn YY^1 hebben vinden $a\sqrt{b}$ en $\frac{1}{a\sqrt{b}}$. Hieruit volgt dan verder dat de regthoek onder de afſtanden welke de punten T en T^1 van de lijn YY^1 hebben, gelijk is aan het vierkant beſchreven op XA.

De formule voor de kromteſtraal is, zoo als bekend is $\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{\partial x^2}{\partial^2 y}$. Voor onze kromme is dezelve dus,

$$\left(1 + \frac{m^4 b^4}{x^2\, Log^4.\, x}\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{x^3\, Log^3\, x}{mb\,(Log.\, x + 2m)}$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$\frac{(x^2\, Log^4.\, x + m^2 b^2)^{\frac{3}{2}}}{mbx\, Log^3.\, x\,(Log.\, x + 2m)}.$$

Om den inhoud te berekenen hebben wij, daar $y = \frac{b}{Log.\, x}$ is, $1 = \int y \partial x = \int \frac{b \partial x}{Log.\, x} = b \int \frac{\partial x}{Log.\, x}$. Deze integraal is aan zeer veel zwarigheden onderworpen. Door geen der bekende kunstgrepen ſchijnt dezelve door middel van logarithmen of cirkelbogen te kunnen worden uitgedrukt. Verſchillende middelen zijn er ondertuſſchen om dezelve in eene oneindige reeks uit te drukken. Stellende bij voorbeeld $x = 1 + v$ dan is $\partial x = \partial v$ en $Log.\, x = Log.\,(1 + v) = m\,(v - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{3} v^3 - \text{enz.})$ en bijgevolg,

$$\int \frac{\partial x}{Log.\, x} = \int \frac{1}{v - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{3} v^3 - \frac{1}{4} v^4 + \text{enz.}} \cdot \partial v$$

=

$$= \int \left\{ \frac{\partial y}{y} + \tfrac{1}{2}\partial y + \tfrac{1}{6} y \partial y - \tfrac{1}{180} y^3 \partial y + \tfrac{1}{1680} y^4 \partial y \text{ enz.} \right\}$$

www.libtool.com.cn

$$= C + \frac{1}{m} Log. y + \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{12} y^2 - \tfrac{1}{720} y^4 + \tfrac{1}{3600} y^5 + \text{enz.}$$

$$= C + \frac{1}{m} Log.(x-1) + \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{12}(x-1)^2 - \tfrac{1}{720}(x-1)^4 + \text{enz.}$$

ſtellende echter dat deze integraal voor $x = o$ verdwijnen moet; dan wordt $C = -\frac{1}{m} Log.(-1) + \frac{1}{2} - enz.$ en dus onbeſtaanbaar, waardoor voor de overige gevallen niets gevonden wordt; en ſtellende, dat zij voor $x = 1$ verdwijnen moet, dan wordt; omdat $Log. o = \infty$ is, $C = \infty$ en ook hierdoor wordt voor de overige gevallen niets bepaalds gevonden. De groote EULER eenen anderen weg volgende, heeft gevonden,

$$\int \frac{\partial x}{Log. x} = C + Log. Log. x + \frac{Log. x}{1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{Log^2. x}{1.2} +$$

$$\tfrac{1}{3} \cdot \frac{Log^3. x}{1.2.3} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{Log^4. x}{1.2.3.4} + \text{enz.}$$

in welke formule de Neperiaanſche logarithmen bedoeld zijn. Ofſchoon nu deze reeks regelmatiger is dan de boven gevondene, heeft zij echter het zelfde gebrek, van namelijk, in de onderſtelling, dat zij voor $x = o$ verdwijnen moet, te geven $C = \infty$, en in de onderſtelling dat zij voor $x = 1$ verdwijnen moet, mede $C = \infty$.

Wel verre dus van dat deze reekſen ons den inhoud van eenig ſtuk onzer kromme lijn zouden doen kennen; is het veeleer onze kromme lijn, die tot eenige duidelijke kennis van de waarde der integraal $\int \frac{\partial x}{Log. x}$ kan doen geraken. Want wanneer onze kromme lijn, door de boven opgegevene conſtructie zuiver geconſtrueerd is, zal men door uitmeting der in- en omgeſchrevene veelhoeken tot den inhoud van eenig ſtuk $D^1C^1C_2D_2D^2$ ten naasten bij kunnen geraken, en dit zal dan de waarde van $\int \frac{\partial x}{Log. x}$ genomen, van $x = XD_2$ tot $x = XD^2$ voorſtellen. Even zoo zal men ten naasten bij, door uitmeting der in- en omgeſchrevene veelhoeken, limiten voor den inhoud van eenig ſtuk XOGA vin-

den,

den, en hierdoor zal $\int \frac{\partial x}{Log.\ x}$, genomen van $x = 0$ tot $x = XG$, ten naaste bij bekend worden. Indien men eindelijk op deze of eenige andere wijze, benaderde tafels voor de verschillende waarden van $\int \frac{\partial x}{Log.\ x}$ zamenstelde, zouden hierdoor eene menigte van integralen bekend worden, welke tot $\int \frac{\partial x}{Log.\ x}$ kunnen worden herleid.

CCVII. VOORSTEL.

Door J. DE GELDER.

De kromme lijn, waarvan de vergelijking is, $x^x = y$, door punten te beschrijven, derzelver loop te verklaren, en haren inhoud te vinden?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Uit de vergelijking $y = x^x$ volgt terstond $Log.\ y = x\ Log.\ x$. Stellende nu wederom de bazis van het logarithmisch stelsel $= a$, dan hebben wij deze constructie door punten.

Laat, *Fig.* 148., XX^1 en YY^1 de asfen der abscisfen en ordinaten zijn. Stel $XA = XB = 1$ en $BC = a$, en laat met deze gegevens, volgens Voorstel CCV, niet alleen de logarithmische kromme ZAZ^1, maar ook de kromme XKAV beschreven worden, waarvan de vergelijking is $z = x\ Log.\ x$.

Om nu, voor eenige abscis $XP = x$, de overeenkomstige ordinaat PT te vinden, trekken wij vooreerst PQ loodregt op XX^1 tot zij de kromme XKAV snijdt in Q, verder trekke men QR evenwijdig met XX^1, en de logarithmische kromme in R snijdende; eindelijk trekke men RS loodregt op XX^1; wanneer dan $PT = XS$ genomen wordt, dan zal T een punt van de gevraagde kromme lijn zijn. Omdat namelijk $XP = x$ is, zoo is $SR = PQ = z = x\ Log.\ x$; maar R een punt van de logarithmische kromme zijnde, zoo is $SR = Log.\ XS = Log.\ PT = Log.\ y$, en wij hebben bijgevolg, deze twee waarden van SR aan elkander gelijk stellende, $Log.\ y = x\ Log.\ x$.

De conſtructie blijft dezelfde, welk punt P van de lijn XX^1 men als voetpunt van de ordinaat PT ook aanneme; voor het punt p, bij voorbeeld, trekke men wederom pq loodregt op XX^1, qr evenwijdig aan XX^1 en rs loodregt op XX^1; verder neme men $pt = Xs$, en t zal een punt van de kromme lijn zijn. De conſtructie voor een aanmerkelijk aantal punten herhalende komt de geheele lijn BLB^1TT^1 ten voorſchijn.

Wanneer P in X valt, dat is: wanneer $x = o$ is, dan valt Q mede in X; R en S vallen dan beide in A, en bijgevolg wordt alsdan XS gelijk XA gelijk 1. Nemende dus $XB = 1$ dan zal B het punt zijn, waarin de kromme lijn de as YY^1 ontmoet. Dit blijkt ook uit de vergelijking $y = x^x$, want ſtellende in dezelve $x = o$ dan wordt $y = o^o = 1$.

Verder blijkt, zoo wel uit de conſtructie als uit de vergelijking, vooreerst dat $x = 1$ zijnde, ook $y = AB^1 = 1$ is, en ten andere dat, voor elke waarde van x, y poſitief zal zijn, en dus de kromme alzoo geheel ter regterzijde van de as XX^1 zal gelegen zijn. Want voor $x = 1$ wordt $y = 1^1 = 1$, en voor elke poſitieve waarde van x is $y = x^x$ noodzakelijk mede poſitief. Negatieve waarden van x kunnen hier niet aangenomen worden, omdat $Log.\ y = x\ Log.\ x$ zijnde, $Log.\ y$, door de onderſtelling van x negatief, onbeſtaanbaar zou worden; dan alsdan $Log.\ x$ onbeſtaanbaar is.

Differentieren wij de vergelijking $Log.\ y = x\ Log.\ x$, dan vinden wij $\frac{mdy}{y} = Log.\ x \cdot dx + mdx$, dus $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} \cdot y \times (Log.\ x + m) = \frac{1}{m} \cdot x^x\ (Log.\ x + m)$.

Om nu te bepalen waar de kromme lijn het meeste tot de as XX^1 nadert, dat is: wanneer de functie x^x een minimum wordt, zoo ſtellen wij $\frac{dy}{dx} = o$, en hierdoor vinden wij of $x^x = o$, of $Log.\ x + m = o$. Daar nu x niet kleiner dan o kan zijn, is x^x altijd poſitief, en de factor x^x kan dus niet gelijk o zijn, doch de factor $Log.\ x + m$ wordt gelijk o wanneer $Log.\ x = -m$ is, en het punt L, waarbij y een minimum is, wordt alzoo gevonden door $Log.\ x = -m$ te nemen. Vergelijken wij dit met hetgeen in Voorſtel CCV voor de kromme lijn LV ge-

voon-

vonden is, dan zullen wij zien, dat dit punt L juist overeenkomt met het minimum K van deze lijn XAV¹; want ook voor dit punt K was *Log.* $x = -m$.

www.libtool.com.cn

Voor dit minimum L is dan *Log.* $x = -m$ en dus $x = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Nu is in het algemeen $m = \frac{1}{Nep.\ Log.\ a}$; dus *Nep. Log.* $a = \frac{1}{m}$ en dus $a = e^{\frac{1}{m}}$ waaruit volgt $a^m = e$, zoodat voor het punt L gevonden wordt $x = XI = \frac{1}{a^m} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2,71828} = 0,36788 \times XA$, en $IL = x^x = 0,36788^{0,36788} \times XA = 0,69220 \times XA$.

Wanneer wij $x = 0$ nemen, dan wordt $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{m} \cdot 0^0 \times (Log.\ 0 + m) = 0 \times \infty$. Daar dit nu de tangens is van den hoek welke de raaklijn van het punt B met de lijn XX^1 maakt, zoo is deze hoek gelijk 90°, en bijgevolg is XX^1 raaklijn van de kromme in het punt B.

De subtangens op de as XX^1 is $\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{m}{Log.\ x + m}$. Deze subtangens is dus gemakkelijk te construeren, want zij is de vierde evenredige tot *Log.* $x + m$, m en 1, dat is: de subtangens van het punt T is vierde evenredig tot Q^1W, Q^1X en AX. Hieruit volgt verder, dat de tangens van het punt B^1 door X zal gaan.

Onze kromme lijn is voor geene buigpunten vatbaar, want uit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{m} x^x (Log.\ x + m)$, vinden wij $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{m} x^x \left\{(Log.\ x + m)^2 + \frac{m^2}{x}\right\}$. Bestond er nu een buigpunt, dan zou $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ moeten zijn, en daar x^x niet gelijk 0 kan worden, zou $(Log.\ x + m)^2 + \frac{m^2}{x} = 0$ moeten zijn, en wij zouden dus moeten hebben *Log.* $x = -m \pm m\sqrt{-\frac{1}{x}}$. Nu

is x voor onze kromme lijn altijd positief en dus $\sqrt{-\frac{1}{x}}$ onbestaanbaar, waaruit dan volgt dat $(Log.\ x+m)^2+\frac{m^2}{x}=\sigma$ met geene bestaanbare waarde van x kan overeenstemmen, en dat er alzoo geen buigpunt bestaan kan. De kromme lijn blijft dus naar de zijde van T^t altijd hare holle zijde naar YY^r keeren, en neemt meer en meer eene rigting aan, welke evenwijdig aan YY^s is, omdat voor $x=\infty$, $\frac{\partial y}{\partial x}=\infty$ wordt, en bijgevolg de raaklijn van dit oneindig afgelegen punt gehouden moet worden loodregt op XX^1 te staan.

Voor den inhoud hebben wij $I=\int y\partial x=\int x^x\partial x$, welke formule geene eindige integraal toelaat. Om voor dezelve eene oneindig voortloopende reeks te vinden, zoo ontwikkele men x^x in eene reeks, dan heeft men,

$$x^x=1+x\,Log.\,x+\frac{x^2\,Log^2.x}{1.2}+\frac{x^3\,Log^3.x}{1.2.3}+\frac{x^4\,Log^4.x}{1.2\ 3\ 4}+enz.$$

in welke reeks al de logarithmen, de natuurlijke of Neperiaansche logarithmen verbeelden.

Hieruit is nu klaarblijkelijk,

$$(A)\ \int x^x\partial x=x+\int x\partial x\,Log.x+\tfrac{1}{2}\int x^2\partial x\,Log^2.x+\tfrac{1}{6}\int x^3\partial x Log^3.x+\tfrac{1}{24}\int x^4\partial x.\,Log^4.x+enz.$$

waarin al de termen van den vorm $\int x^n\partial x\,Log^n.x$ zijn, en wij moeten dus aanwijzen, hoe zulk eene formule kan worden geïntegreerd.

Omdat in het algemeen $\int p\,.\,\partial q=pq-\int q\partial p$ is, zoo is $\int x^n\partial x\ Log^n.x=\frac{1}{n+1}\int Log^n x\,.\,\partial.x^{n+1}=\frac{x^{n+1}\,Log^n.x}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\partial\,.\,Log^n.\,x$, dat is: wij hebben,

$$\int x^n\partial x\ Log^n.x=\frac{x^{n+1}\,Log^n.\,x}{n+1}-\frac{n}{n+1}\int x^n\partial x\,.\,Log^{n-1}.x$$

op dezelfde wijze is dus,

$$\int x^n\partial x\,Log^{n-1}.x=\frac{x^{n+1}\,Log^{n-1}.x}{n+1}-\frac{n-1}{n+1}\int x^n\partial x.\,Log^{n-2}.x$$

$$\int x^n\partial x\,Log^{n-2}.x=\frac{x^{n+1}\,Log^{n-2}.x}{n+1}-\frac{n-2}{n+1}\int x^n\partial x.\,Log^{n-3}.x$$

en zoo vervolgens.

Sub-

Subſtituerende nu deze uitdrukkingen in elkander, dan verkrijgen wij de algemeene formule,

$$\int x^n \partial x \, Log^n.x = x^{n+1}\left\{\frac{Log^n.x}{n+1} - \frac{n\,Log^{n-1}.x}{(n+1)^2} + \frac{n-(n1)\,Log^{n-2}.x}{(n+1)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)\,Log^{n-3}.x}{(n+1)^4} + \text{enz.}\right\}$$

welke formule uit een eindig getal termen beſtaat, wanneer n een geheel poſitief getal is.

Nemende nu in deze formule n achtervolgens gelijk 1, 2, 3 *enz.*, dan verkrijgen wij,

$$\int x \partial x \, Log.\, x = x^2\left(\frac{Log\ x}{2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$\int x^2 \partial x \, Log^2.x = x^3\left(\frac{Log^2.x}{3} - \frac{2.Log.\,x}{3^2} + \frac{2.1}{3^3}\right)$$

$$\int x^3 \partial x \, Log^3.x = x^4\left(\frac{Log^3.x}{4} - \frac{3.Log^2.x}{4^2} + \frac{3.2.Log.x}{4^3} - \frac{3.2.1}{4^4}\right)$$

&c.

en wanneer wij deze gevondene integralen in de formule (A) ſubſtitueren, komt er na herleiding,

$$I = \int x^x \partial x = x\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{4^4} + \frac{x^4}{5^5} - \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{x^2\ Log.\ x}{1}\left(\frac{1}{2^1} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{4^3} - \frac{x^3}{5^4} + \frac{x^4}{6^5} - \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{x^3\ Log^2.\ x}{1\ ,\ 2}\left(\frac{1}{3^1} - \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^3} - \frac{x^3}{6^4} + \frac{x^4}{7^5} - \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{x^4\ Log^3.\ x}{3\ .\ 2\ .\ 1}\left(\frac{1}{4^1} - \frac{x}{5^2} + \frac{x^2}{6^3} - \frac{x^3}{1^4} + \frac{x^4}{8^5} - \text{&c.}\right)$$
$$+ \text{&c.}$$

welke integraal voor $x = o$ verdwijnt, en alzoo den inhoud van eenig ſtuk XPTB'LBX bij nadering doet kennen.

Stellen wij $x = 1$, dan hebben wij voor den inhoud van het ſtuk XAB'LBX de volgende merkwaardige reeks,

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \text{&c.}$$

welke zeer ſterk convergeert, en door haren eenvoudigen vorm zeer opmerkelijk is. Vergenoegen wij ons met 5 decimalen, dan vinden wij voor den inhoud van dit ſtuk 0,78343, dat is: de inhoud van het ſtuk XBLB'AX is gelijk 0,78343 × XA².

Voor eenig ander ſtuk, moet in aanmerking genomen worden, dat de logarithmen, welke in de laatst gevondene formule voorkomen de Neperiaanſche logarithmen zijn, welke met het modulus m moeten worden vermenigvuldigd om tot de gewoone logarithmen, tot de bazis a behoorende, te worden terug gebragt. Wilden wij, bij voorbeeld: den inhoud van het ſtuk XDEB'LBX berekenen, waarbij $x = a$ is, dan is *Nep. Log.* $a = \frac{1}{m}$ en de formule voor den inhoud zou dus worden,

$$I = a\left(1 - \frac{a}{2^2} + \frac{a^2}{3^3} - \frac{a^3}{4^4} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{a^2}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3^2} + \frac{a^2}{4^3} - \frac{a^3}{5^4} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{a^3}{2.m^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{4^2} + \frac{a^2}{5^3} - \frac{a^3}{6^4} + \&c\right)$$
$$+ \frac{a^4}{2.3.m^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{5^2} + \frac{a^2}{6^3} - \frac{a^3}{7^4} + \&c.\right)$$
$$+ \&c.$$

welke wederom bij benadering kan gevonden worden, zoodra a en dus ook m in getallen gegeven is.

CCVIII. VOORSTEL.

Door J. DE GELDER.

De kromme lijn, welker vergelijking is $y = Log.\ Log.\ x$ *(dat is* y *gelijk aan den logarithmus van den logarithmus van* x*) door punten te beſchrijven, derzelver ſubtangens, buigpunten, kromteſtraal en den inhoud te vinden?*

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT.

Laat in *Fig.* 149, ZAZ' wederom de logarithmiſche kromme zijn, geconſtrueerd op de aſſen XX' en YY', met XA = XB als eenheid en BC = a als bazis, dan wordt de ordinaat PT van de gevraagde kromme, met eenige willekeurige abscis XP overeenſtemmende, aldus geconſtrueerd.

Trek PQ loodregt op XX' en ſnijdende de logarithmiſche kromme in Q, dan is PQ = *Log.* XP = *Log.* x. Maak XR = PQ, en trek Rŝ loodregt op XX' tot zij de logarithmiſche

sche kromme snijdt in S, dan is RS = *Log.* XR = *Log.* PQ = *Log. Log. x.* Nemende dus PT = RS zal T een punt van de gevraagde kromme lijn zijn.

www.hptool.com.cn

Deze constructie is zoo eenvoudig, dat men door dezelve op een genoegzaam aantal punten toe te passen, de gevraagde kromme lijn zeer gemakkelijk zal construeren. Men vindt slechts eenen tak V'DV, welke meer en meer tot de lijn MM' nadert, die door het punt A gaat, en deze tak snijdt de as XX' in een punt D, waarbij XD = BC = *a* is; want het punt P in D vallende is PQ = DC = 1, het punt R valt dus in A en RS wordt gelijk o, waaruit dan volgt, dat voor dit punt ook PT gelijk o moet zijn. Valt P in A dan wordt PQ = o, R valt dus in K en RS wordt gelijk — ∞. PT moet dus mede gelijk = ∞ zijn, en hieruit blijkt dat MM' asymptote van de kromme is. Wordt *x* oneindig groot genomen, dan is ook PQ en RS en bijgevolg PT oneindig groot, de kromme verwijdert zich dus bij V' meer en meer van de as XX' en derzelver afstand van deze as wordt op het laatst oneindig groot. Nemen wij eindelijk *x* kleiner dan 1, dat is; nemen wij P tusschen X en A, dan wordt PQ negatief, XR zou dus mede negatief en bijgevolg R op het verlengde van XX' moeten genomen worden; doch dan wordt RS onbestaanbaar en hieruit volgt, dat er beneden MM' geene punten van de kromme lijn kunnen bestaan.

Al de eigenschappen, welke wij uit de constructie hebben afgeleid, en welke den loop van de kromme lijn genoegzaam kenbaar maken, worden door de vergelijking $y = Log. Log. x$ volkomen bevestigd, *x* kleiner dan 1 maakt *Log. x* negatief en dus $y = Log. Log. x$ onbestaanbaar. $x = 1$ maakt $y = Log. Log. 1 = Log. o = -\infty$ en dus is MM' eene asymptote, $x = a$ geeft $y = Log. Log. a = Log. 1 = o$, de kromme snijdt dus de as in het punt D, en $x = o$ geeft $y = Log. \infty = \infty$.

De figuur toont ons aan, dat de gevraagde kromme lijn de logarithmische kromme in twee punten N en N' doorsnijdt. Om deze punten te bepalen merken wij op, dat aldaar $y = Log. Log. x = Log. x$ en bijgevolg $Log. x = x$ moet zijn, hieruit volgt dan, dat voor deze punten, de abscis en ordinaat van de logarithmische kromme even groot moeten zijn. Deelende dus den

hoek XX'Y midden door, dan zal de deellijn XK de logarithmiſche kromme in de gevraagde punten N en N' doorſnijden. Raakt deze lijn XK de logarithmiſche kromme, dan zal ook onze kromme lijn de logarithmiſche kromme in dit zelfde punt aanraken, en wanneer *a* zoodanig gegeven mogt zijn, dat de lijn XK de logarithmiſche lijn niet doorſneed noch aanraakte, dan zou ook onze kromme lijn met de logarithmiſche kromme geen punt gemeen hebben.

www.libtool.com.cn

Differentieren wij de vergelijking $y = Log.\ Log.\ x$, dan is $\partial y = \frac{m \times \partial . Log.\ x}{Log.\ x} = \frac{m^2 \partial x}{x\ Log.\ x}$ of $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m^2}{x\ Log\ x}$. Voor $x = 0$ wordt dus $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, en de oneindige tak DV' neigt dus meer en meer tot het parallelismus met de as XX'. Voor $x = a$ wordt $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m^2}{1 \times a}$, en daar dit met het punt D overeenſtemt, zoo ſnijdt onze kromme de as XX' onder eenen hoek, waarvan de tangens gelijk is aan $\frac{XO^2}{XA \times XD}$.

De ſubtangens op de as XX' is gelijk aan de uitdrukking $\frac{y \partial x}{\partial y} = \frac{y\ .\ x\ Log.\ x}{m^2} = \frac{x\ .\ Log.\ x \times Log.\ .\ Log.\ x}{m^2}$. Het is echter gemakkelijker de ſubtangens op de as YY' te conſtrueren, want dezelve is $\frac{x \partial y}{\partial x} = \frac{m^2}{Log.\ x}$, en dezelve is dus de derde evenredige tot *Log. x* en *m*. Om dan de tangens aan eenig punt T' te trekken, maken wij HI derde evenredig tot P'Q' en XO, en dan zal IT' de gevraagde raaklijn zijn.

De beſchouwing van onze figuur is genoegzaam, om ons aan te toonen dat er in dezelve geene buigpunten beſtaan. Om ons hiervan ondertusſchen te overtuigen differentieren wij $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m^2}{x\ Log.\ x}$ en wij vinden $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{m^2\ (Log.\ x + m)}{x^2\ Log^2.\ x}$. Deze uitdrukking nu kan niet gelijk o worden als in het geval van $Log.\ x = -m$, doch dit maakt $y = Log.\ Log.\ x = Log.\ (-m)$ en dus y onbeſtaanbaar, waaruit dan volgt, dat er geene buigpunten in de kromme beſtaan.

De

De formule voor de kromteſtraal is,

$$\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{\partial x^2}{\partial^2 y} = \left(1+\frac{m^4}{x^2\,Log^2.\,x}\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{x^2\,Log^2.\,x}{m^2\,(Log.x+m)}$$

welke zich gemakkelijk laat herleiden tot,

$$\frac{(x^2\,Log^2.\,x+m^4)^{\frac{3}{2}}}{m^2\,x\,Log.\,x\,(Log.\,x+m)}$$

waarvan wij de conſtructie, als meer omſlagtig dan moeilijk zijnde, zullen achterwege laten.

Om den inhoud te bepalen, zouden wij de waarde van $I = \int y\partial x = \int Log.\,Log.\,x\,.\,\partial x$ moeten vinden. Wij ſtuiten hier echter op dezelfde zwarigheden, als die, waarvan wij in het Voorſtel CCVI geſproken hebben, omdat onze integraal op de volgende wijze, tot de integraal $\int \frac{Log.\,x}{\partial x}$ te herleiden is.

Daar in het algemeen $\int p\,.\,\partial q = pq - \int q\,.\,\partial p$ is, hebben wij,

$$\int Log.\,Log.\,x\,.\partial x = x\,Log.\,Log.\,x - \int x\,.\partial.(Log.\,Log.\,x)$$

$$= x\,Log.\,Log.\,x - \int x\,.\,\frac{m\,.\partial\,.\,Log.\,x}{Log.\,x}$$

$$= x\,Log.\,Log.\,x - \int x\,.\,\frac{m^2\partial x}{x\,.\,Log.\,x}$$

$$= x\,Log.\,Log.\,x - m^2\int \frac{\partial x}{Log.\,x}$$

en wij moeten ons dus hier beroepen op hetgeen wij in gemelde Voorſtel CCVI over de formule $\int \frac{Log.\,x}{\partial x}$ hebben aangemerkt.

CCIX. VOORSTEL.

Door J. E. DUIJVENÉ.

Twee punten A en B benevens eene regte lijn PQ in ſtelling gegeven zijnde (Fig. 150), begeert men in deze lijn een punt R te vinden, zoodanig, dat trekkende uit dit punt R, lijnen RA en RB tot de gegevene punten A en B, de ſom dezer lijnen een minimum zij?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Laat uit een der punten, bij voorbeeld B, BS loodregt op

PQ getrokken worden, en trek, na ST = TB genomen te hebben, de lijn AT, snijdende PQ in R, dan zal R het gevraagde punt zijn.

www.libtool.com.cn

Bewijs. Laat uit eenig willekeurig punt R′ in PQ, de lijnen R′A, R′B en R′T getrokken worden, dan zal, omdat BS=ST is, ook RB = RT en R′B = R′T zijn. Nu is AR′ + TR′ > AT, dat is, AR′ + TR′ > AR + TR, en daar TR′ = BR′ en TR = BR is, zoo is AR′ + BR′ > AR + BR. Daar nu dit bewijs doorgaat, waar het punt R′ ook geplaatst worde, zoo volgt hieruit dat R het begeerde punt is.

CCX. Voorstel.

Door J. E. Duijvené.

Hetzelfde gegeven zijnde als in het voorgaande vraagstuk, begeert men het punt R zoo te bepalen, dat het verschil der lijnen RA en RB een maximum zij?

Oplossing. Door I. R. Schmidt en R. Lobatto.

Laat A en B, *Fig.* 151, de twee gegevene punten en PQ de gegevene lijn zijn. Trek door B de loodlijn BS op PQ, en maak ST = SB, indien dan AT getrokken wordt, welker verlengde PQ snijdt in R, dan zal R het gevraagde punt zijn.

Bewijs. Want voor eenig ander punt R′, is AR′ — R′T < AT of AR′ — R′T < AR — RT; daar nu R′T = R′B en RT = RB is, zoo is ook AR′ — R′B < AR — RB en dus is, in het punt R, de waarde van AR — RB op haar grootst mogelijk.

CCXI. Voorstel.

Door J. van Wijk Rz.

Drie schepen A, B en C zijn bij elkander, op 42°42′ noorder breedte; van daar zeilt A zoo veel westen het zuiden als B beoosten het zuiden, C zeilt tusschen A en B, 50 mijlen, en zij komen alle op eenerlei breedte, zoo, dat het verschil der lengte tusschen A en C is 7°, en tusschen C en B, 3°; wanneer nu het verschil der lengte gaat tot de afwijking van het middagrond, als

4 tot 3, vraagt men op welke breedte zij gekomen zijn, en welken koers en verheid ieder gezeild heeft? (52)

www.libtool.com.cn

ONTLOSSING. Door J. VAN WIJK Rz.

Zij D *Fig.* 152, het punt, waar de drie schepen lagen, en A, B en C de plaats, waarop zij gekomen zijn, dan is AD = BD en AE = EB. Verder is AC = 7°, BC = 3°, en DC = 50 mijlen, dus AB = AC + BC = 10° en EC = $\frac{1}{2}$ (AC—BC) = 2°. Om de waarde van AB en CE in mijlen uit te drukken, hebben wij volgens het Voorstel AB = 10° = $\frac{2}{3}$ × 10 × 15 = 100 mijlen en CE = 2° = $\frac{2}{3}$ × 2 × 15 = 20 mijlen, en bijgevolg, AC = AE + EC = $\frac{1}{2}$ AB + EC = 70 mijlen, en BC = $\frac{1}{2}$ AB — EC = 30 mijlen.

In dan regthoekigen Driehoek DEC is DE = $\sqrt{(DC^2 - CE^2)}$ = $\sqrt{(2500 - (\frac{45}{2})^2)}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{7975}$ = 44,65 mijlen, dit door 15 gedeeld om graden te verkrijgen, geeft ten naaste bij DE = 2°59′, hetgeen van de afgevarene breedte afgetrokken, voor de bekomene Noorder breedte geeft 39°43′.

Om de gezeilde verheid van A en B te vinden, hebben wij AD = BD = $\sqrt{(DE^2 + EB^2)}$ = $\sqrt{(DC^2 - EC^2 + EB^2)}$ = $\sqrt{(50^2 - (\frac{45}{2})^2 + (\frac{225}{\pi})^2)}$ = $\frac{1}{4}\sqrt{(40^2 + 45^2 - 18^2)}$ = 71,8 mijlen.

Eindelijk is CE = DC × *Sin.* EDC en EB = DB × *Sin.* EDB, dus *Sin.* EDC = $\frac{CE}{DC}$ = 0,45 = *Sin.* 26°45′ en *Sin.* ADE = *Sin.* BDE = $\frac{EB}{DB}$ = $\frac{225}{287,2}$ = 0,783 = *Sin.* 51°34′.

De koers van C is dus 26°45′ beoosten het zuiden of 4°15′ oostelijker als zuid zuidoost, terwijl de koersen van A en B zijn 51°34′ bewesten en beoosten het zuiden.

CCXII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Drie schepen A, B en C zijn bij elkander, op 39°43′ noorder breedte, en zeilen van daar; A zeilt 71,8 mijlen, zoo veel bewesten

(52) J. VAN DAM, *Nieuwe Hoornsche Schatkamer. Besluit Questien*, N°. 44.

ten als B beoosten het noorden; C zeilt tusschen beide, en zij komen alle op eenerlei breedte, zoo, dat het verschil der lengte tusschen A en C is 7°, en tusschen C en B is 3°. Wanneer nu het verschil der lengte staat tot de afwijking van het middagrond als 4 tot 3, vraagt men op welke breedte zij gekomen zijn, en welken koers en verheid ieder gezeild heeft? (53)

OPLOSSING. Door J. VAN WIJK Rz.

In *Fig.* 153, zij D het afgevaren punt, dan is AC = 7°, BC = 3° en AD = 71,8 mijlen. Omdat nu ∠ ADE = ∠ EDB is, zoo is BD = AB en AE = EB, dus is ook BD = 71,8 mijlen, en dit is de gezeilde verheid van B.

Verder is AB = AC + BC = 10° = $\frac{3}{4}$ × 10 × 15 = 112$\frac{1}{2}$ mijlen, en CE = $\frac{1}{2}$ (AC — BC) = 2° = $\frac{1}{4}$ × 2 × 15 = 22$\frac{1}{2}$ mijlen, dus AC = $\frac{1}{2}$ AB + EC = 78$\frac{3}{4}$ mijlen, en BC = $\frac{1}{2}$ AB — EC = 33$\frac{3}{4}$ mijlen.

Om de bekomene breedte te vinden is DE = $\sqrt{(AD^2 - AE^2)}$ = $\sqrt{((71{,}8)^2 - (\frac{225}{4})^2)}$ = 44,65 mijlen, hetgeen door 15 gedeeld geeft 2°59′ voor de veranderde breedte; de bekomene noorder breedte is alzoo 42°42′.

De gezeilde verheid van C is DC = $\sqrt{(DE^2 + EC^2)}$ = $\sqrt{((44{,}65)^2 + (\frac{45}{2})^2)}$ = 50 mijlen ten naaste bij.

Eindelijk is CE = DC . *Sin.* EDC en BE = DB . *Sin.* EDB, dus,

$$\textit{Sin. EDC} = \frac{CE}{DC} = 0{,}45 = \textit{Sin. } 26°45'$$

$$\textit{Sin. BDE} = \textit{Sin. ADE} = \frac{EB}{DB} = 0{,}783 = \textit{Sin. } 51°34';$$

de gezeilde koers van C is dus 26°45′ beoosten het noorden, of 4°15′ oostelijker dan noord noordoost, terwijl de koers van A en B is, 51°34′ bewesten en beoosten het noorden, dat is: A heeft gezeild 6°34′ westelijker dan noordwest en B heeft gezeild 6°34′ oostelijker dan noordoost.

CCXIII.

(53) *Idem*, N°. 45.

CCXIII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

www.libtool.com.cn

Drie ſchepen A, B en C bij elkander zijnde op 46°10′ noorder breedte en 2° lengte, zeilen van daar; A bewesten en B beoosten het zuiden, zoodanig dat zij eenen hoek maken van 75°45′. C zeilt tusſchen A en B, 85 mijlen. Zij komen alle op eenerlei breedte, zoo, dat het verſchil der lengte tusſchen A en C is 8°, en tusſchen C en B is 3°. Het verſchil der lengte ſtaat tot de afwijking van het middagrond als 11 tot 8. Vrage op welke breedte en lengte zij gekomen zijn, en welken koers en verheid ieder gezeild heeft? (54)

OPLOSSING. Door J. VAN WIJK Rz.

Zij D *Fig.* 154, het afgevaren punt, en laat de ſchepen gekomen zijn in A, B en C, dan is AC = 8° = $\frac{8}{11}$ × 8 × 15 = 87$\frac{3}{11}$ mijlen, en BC = 3° = $\frac{8}{11}$ × 3 × 15 = 32$\frac{8}{11}$ mijlen, zoodat AB = AC + BC = 120 mijlen.

Laat nu G het middelpunt zijn van eenen cirkel, door de punten A, B en D gaande, dan is AG = BG = DG en ∠ AGF = ∠ BGF = ∠ ADB = 75°45′, dus ∠ GAF = ∠ GBF = 14°15′; verder is AF = FB = $\frac{1}{2}$ AB = 60 mijlen, en wij hebben dus GF = HE = AF × *Tang.* GAF = 60 × *Tang.* 14°15′ = 15 mijlen ten naaste bij, en DG = AG = GB = AF × *Sec.* GAF = 60 × *Sec* 14°15′ = 62 mijlen na genoeg.

Stellen wij nu DH = x, dan is EF = GH = $\sqrt{(DG^2 - x^2)}$ = $\sqrt{(3844 - x^2)}$; zoodat EC = FC + EF = AC − AF + EF = 87$\frac{3}{11}$ − 60 + $\sqrt{(3844 - x^2)}$ = 27$\frac{3}{11}$ + $\sqrt{(3844 - x^2)}$.

Maar DE = DH + GF = x + 15 zijnde, zoo is ook CE = $\sqrt{(DC^2 - DE^2)}$ = $\sqrt{(85^2 - (x + 15)^2)}$ = $\sqrt{(-x^2 - 30x + 7000)}$.

Stellende nu de gevondene waarden van CE aan elkander gelijk, dan verkrijgen wij de vergelijking,

27$\frac{3}{11}$ + $\sqrt{(3844 - x^2)}$ = $\sqrt{(-x^2 - 30x + 7000)}$

of 27$\frac{3}{11}$ = $\sqrt{(-x^2 - 30x + 7000)}$ − $\sqrt{(3844 - x^2)}$.

en

(54) *Idem*, N°. 46.

en brengende dit in het vierkant, dan hebben wij, het gebroken $\frac{24}{121}$, tegen de groote getallen verwaarloozende,

$$2x^2 + 30x = 10100 =$$
$$\sqrt{(4x^4 + 120x^3 = 43376x^2 = 4612800x + 107632000)}$$

brengende dit andermaal in het vierkant, dan verkrijgen wij, na de gelijke termen aan beide zijden weggelaten te hebben,

$$3876x^2 = 144720x = 5612000$$

waaruit wij ten naaste bij vinden,

$$HD = x = 61\tfrac{1}{4}$$

en bijgevolg $DE = x + 15 = 76\frac{1}{4}$ mijlen, hetgeen tot graden gemaakt, voor de veranderde breedte geeft 5°5′. Dit van de afgevarene breedte afgetrokken, komt er voor de bekomene breedte 41°5′.

Men heeft nu verder $EC = \sqrt{(DC^2 = DE^2)} = 37\frac{5}{11}$, waaruit dan volgt $BE = BC + EC = 70\frac{4}{11}$ en $AE = AC = EC = 49\frac{8}{11}$.

Om dan de gezeilde verheid van A en B te vinden, heeft men

$$AD = \sqrt{(AE^2 + ED^2)} = 91 \text{ mijlen, en}$$
$$BD = \sqrt{(BE^2 + ED^2)} = 103\tfrac{6}{10} \text{ mijlen.}$$

Er blijft dus niets over dan het vinden der koersen, en het bepalen der lengten. Hiertoe hebben wij,

$$Sin.\ EDC = \frac{EC}{DC} = 37\tfrac{5}{11} : 85 = Sin.\ 26°9'$$

het schip C heeft dus gezeild 26°9′ beoosten het zuiden,

$$Sin.\ EDA = \frac{AE}{AD} = 49\tfrac{8}{11} : 91 = Sin.\ 33°7';$$

de koers van het schip C was dus 33°7′ bewesten het zuiden,

$$BDE = ADB - EDA = 42°38'$$

zoodat B gezeild heeft 42°38′ beoosten het zuiden.

Om de lengte te vinden moeten wij, daar de lengte van het punt D gegeven is, EA, EC en EB tot graden herleiden; hiertoe hebben wij,

$$AE = \tfrac{28}{8} \times \tfrac{1}{11} \times 49\tfrac{8}{11} = 4°24'$$
$$CE = \tfrac{11}{8} \times \tfrac{1}{15} \times 37\tfrac{5}{11} = 3°26'$$
$$BE = \tfrac{28}{8} \times \tfrac{1}{15} \times 70\tfrac{4}{11} = 6°26'$$

Daar nu het punt D of E op 2° lengte ligt, zoo is de bekomene lengte van $B = 6°26' + 2° = 8°26'$; de bekomene lengte van $C = 3°26' + 2° = 5°26'$; de bekomene lengte van A =

360°

$360° - 2°24' = 357°26'$, waardoor al het gevraagde gevonden is.

www.libtool.com.cn

CCXIV. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Indien de lengte van drie lijnen gegeven is, welke den tophoek van eenen driehoek in vier gelijke deelen verdeelen, zoo vraagt men om den driehoek te conſtrueren, als mede naar de formulen, om de zijden te berekenen. (55)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO en J. NICOLAIJ.

Stel dat ABC, *Fig.* 155, de gevraagde driehoek zij, in welken de lijnen BD $= a$, BD' $= b$ en BD'' $= c$ den tophoek B in vier gelijke deelen verdeelen.

Stellen wij nu AB $= x$, BC $= y$, en $\angle$ ABC $= 4\phi$, dan hebben wij,

$$\triangle ABD + \triangle DBD' = \triangle ABD'$$
$$\triangle DBD' + \triangle D'BD'' = \triangle DBD''$$
$$\triangle D'BD'' + \triangle D''BC = \triangle D'BC$$

en omdat de inhoud van elken driehoek gelijk is aan het halve product van twee zijden vermenigvuldigd met den ſinus van den ingeſlotenen hoek,

$$ax\ Sin.\ \phi + ab\ Sin.\ \phi = bx\ Sin.\ 2\phi$$
$$ab\ Sin.\ \phi + bc\ Sin.\ \phi = ac\ Sin.\ 2\phi$$
$$bc\ Sin.\ \phi + cy\ Sin.\ \phi = by\ Sin.\ 2\phi$$

en daar $Sin.\ 2\phi = 2\ Sin.\ \phi \times Cos.\ \phi$ is, verkrijgen wij, alles door $Sin.\ \phi$ deelende,

$$a\ (x + b) = 2bx\ .\ Cos.\ \phi$$
$$b\ (a + c) = 2ac\ .\ Cos.\ \phi$$
$$c\ (b + y) = 2by\ .\ Cos.\ \phi$$

uit de middelſte vinden wij terſtond,

$$Cos.\ \phi = \frac{b\ (a + c)}{2ac}$$

waar-

(55) J. DE GELDER, *Handl. tot de Oefen. en wetenſch. Meetk. pag.* 172. *Vraagſt.* C.

waardoor ϕ en dus ook 4ϕ, dat is de hoek ABC berekend kan worden.

De twee andere vergelijkingen geven ons gemakkelijk,

www.ifbtool.com.cn

$$x = \frac{ab}{2b\ Cos.\ \phi - a}$$

$$y = \frac{cb}{2b\ Cos.\ \phi - c}$$

en brengende hierin de waarde van *Cos.* ϕ over,

$$x = \frac{a^2 bc}{b^2 (a + c) - a^2 c} = AB$$

$$y = \frac{abc^2}{b^2 (a + c) - ac^2} = CB$$

De zijden AB en CB, benevens den ingeslotenen hoek ABC *alzoo* bepaald zijnde, vinden wij AC op de gewone wijze, dat is: wij hebben,

$$AC = \sqrt{\{AB^2 + BC^2 - 2\ AB \times BC\ .\ Cos.\ 4\phi\}}$$

Om den driehoek te conſtrueren, merke men op, dat alles gevonden is, wanneer men ſlechts den hoek ϕ conſtrueren kan; want deze bekend zijnde, behoeft men ſlechts, vijf lijnen te trekken, welke met elkander dezen hoek maken, en op de twee middelſten de gegevene waarde van a en c uit te zetten; wanneer dan door de uiteinde D en D' dezer lijnen eene regte lijn getrokken wordt, zal deze met de twee buitenſte den driehoek bepalen.

Nu hebben wij gevonden *Cos.* $\phi = \frac{b\ (a + c)}{2\ ac}$. Beſchrijvende dus op BD $= a$, *Fig.* 156, eenen halven cirkel, en nemen wij de koorde BD' vierde evenredig tot c, b, en $\frac{1}{2}(a + c)$, dan zal DBD' de gevraagde hoek ϕ wezen. Want trekkende DD' dan is, omdat $\angle$ D' regt is, BD' $=$ BD *Cos.* ϕ, dus *Cos.* $\phi = \frac{BD'}{BD}$. Nu is BD $= a$ en BD' $= \frac{b\ (a + c)}{2c}$, dus *Cos.* $\phi = \frac{b\ (a + c)}{2\ ac}$. Waardoor dan nu alles gevonden is.

AANMERKING. *Door* I. R. SCHMIDT.

Ter bepaling van de betrekking, welke er tuſſchen de gegevens a, b en c beſtaan moet, ten einde het vraagſtuk niet onmo-

ge-

gelijk wonde, hebben wij vooronsst, dat Cos. $\varphi < 1$; en dus $\frac{b(a+c)}{2ac} < 1$, dat is, dat $b < \frac{2ac}{a+c}$ zijn moet.

www.libtool.com.cn

Ten anderen merken wij op, dat $\angle ABC$ kleiner dan 180° zijnde, φ kleiner dan 45°, en bijgevolg Cos. $\varphi > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ moet zijn. Dit geeft ons $\frac{b(a+c)}{2ac} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en bijgevolg $b > \frac{ac}{a+c} \cdot \sqrt{2}$.

Hieruit volgt dan, dat, a en c gegeven zijnde, tot de mogelijkheid van het Voorstel gevorderd wordt, dat b begrepen is tusschen de limiten $\frac{ac}{a+c} \times \sqrt{2}$ en $\frac{ac}{a+c} \times 2$.

CCXV. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Men vraagt de n^de differentiaal van $y = \frac{a+x}{\sqrt{x}}$?

OPLOSSING. DOOR R. LOBATTO.

De gegevene vergelijking differentierende hebben wij,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\sqrt{x} - \frac{a+x}{2\sqrt{x}}\right) : x = \frac{x-a}{2 \cdot x\sqrt{x}}.$$

Dit wederom differentierende komt er,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2x\sqrt{x} - 3(a-x)\sqrt{x}}{4x^2} = \frac{3x-a}{4x^2\sqrt{x}}$$

Zoo voortgaande zullen wij de volgende differentialen verkrijgen,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a-x}{2x\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +\frac{3a-x}{4x^2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\frac{3}{2^3} \cdot \frac{5a-x}{x^3\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = +\frac{3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{7a-x}{x^4\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5} \cdot \frac{9a-x}{x^5\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial^6 y}{\partial x^6} = +\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} \cdot \frac{11a-x}{x^6\sqrt{x}}$$

&c. &c.

De wet, welke in deze achtereenvolgende differentiaalen heerscht, loopt zoo gemakkelijk in het oog, dat wij terstond zullen mogen besluiten, dat men in het algemeen heeft,

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-3)}{2^n} \cdot \frac{(2a-x)^{\frac{1}{2}}}{x^n \sqrt{x}}$$

dienende het bovenste teeken, als n even, en het benedenste, als n oneven is.

Wij moeten hier bij nog opmerken, dat alleen de eerste differentiaal, van deze wet uitgesloten is, want voor dit geval $n = 1$, en dus oneven zijnde, zouden wij, daar $2n - 3$ hier gelijk -1 is, door de algemeene formule verkrijgen,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{-1}{2} \cdot \frac{a-x}{x\sqrt{x}} = +\frac{a-x}{2x\sqrt{x}}$$

en dus zou dezelve het tegengestelde teeken verkrijgen.

CCXVI.

Door H. van Wesem Jz.

Een regthoek, waarvan de basis 7 voet, en de hoogte 5 voet is, moet zoodanig vergroot worden, dat hij 100 vierkante voeten bevat, daarbij moet echter de vergrooting der basis driemaal zoo veel bedragen als die der hoogte. Men vraagt hoor de zijden van den nieuwen regthoek? (56)

Oplossing. Door H. van Wesem Jz., A. van der Swan, R. Lobatto, R. van Wijk Jz., H. van Kraaijenoord en H. F. Bakker.

De vergrooting der basis zij x voeten, dan is de vergrooting der hoogte $\frac{1}{3}x$, en de zijden van den nieuwen regthoek zijn dus $7 + x$ en $5 + \frac{1}{3}x$; dit geeft alzoo de vergelijking,

$$(7 + x)(5 + \tfrac{1}{3}x) = 100$$

of $$35 + 7\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}x^2 = 100$$

dat is $$x^2 + 22x = 300 - 105 = 195$$

waaruit $$x = -11 \pm \sqrt{316} = -11 \pm 2\sqrt{79}$$

de eerste waarde van x is hier alleen in den opgegevenen zin te gebruiken, daar de andere, de beide zijden van den nieuwen regthoek negatief maakt.

(56) *Auswahl &c.*

No.

Nemen wij dan $x = -11 \pm 2\sqrt{79} = 6{,}776$ voeten, dan worden de zijden van den nieuwen regthoek, $7 + 6{,}776 = 13{,}776$ voeten; en $5 + 2{,}259 = 7{,}259$ voeten. Het product van beide is 99,9999841 en dus nagenoeg 100.

www.libtool.com.cn

CCXVII. VOORSTEL.

Door H. VAN WESSEM Jz.

Drie winkeliers verkoopen laken. A heeft 27 ellen, B heeft 34 ellen, en C heeft 41 ellen. Niemand verkoopt de el duurder dan de anderen, en toen zij hun laken verkocht hadden, bevonden zij ellen evenveel ontvangen te hebben. De vraag is hoe zich dit kan hebben toegedragen, en hoeveel zij ontvangen kunnen hebben? (57)

OPLOSSING. Door H. VAN WESSEM Jz., A. VAN DER SWAN, R. VAN WIJK Jan en H. VAN KRAAYENOORD.

Het vraagstuk is niet mogelijk, ten zij men aanneme, dat de winkeliers onderscheidene malen over het laken verkocht hebben. Men stelle derhalve voor den prijs van eene elle op den eersten dag n, en op den tweeden dag m. Vervolgens stelle men, dat A op den eersten dag hebbe verkocht x ellen, dat B verkocht hebbe y ellen, en C op dien eersten dag z ellen, dan hebben zij op den tweeden dag verkocht $27 - x$, $34 - y$ en $41 - z$ ellen, hierdoor vindt men voor de geheele ontvangst van A,

$$mx + n(27 - x) = (m - n)x + 27n$$

voor de geheele ontvangst van B,

$$my + n(34 - y) = (m - n)y + 34n$$

en voor de geheele ontvangst van C,

$$mz + n(41 - z) = (m - n)z + 41n.$$

Daar nu, volgens het Voorstel, deze drie uitdrukkingen aan elkander gelijk moeten zijn, zoo hebben wij deze twee vergelijkingen,

$$(m - n)x + 27n = (m - n)y + 34n$$

en

$$(m - n)y + 34n = (m - n)z + 41n.$$

Uit de eerste is,

$$x = y + \frac{7n}{m - n} \quad \ldots \quad (\alpha)$$

en

(57) *Auswahl 8e.*

en uit de tweede vindt men,

$$y = z + \frac{7n}{m-n} \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

www.libtool.com.cn

en hieruit volgt nog,

$$x - y = y - z = \frac{7n}{m-n}$$

waaruit blijkt, dat z, y en x in eene rekenkunstige reeks moeten opklimmen, waarvan het verschil $\frac{7n}{m-n}$ is.

Daar nu voor m en n alle mogelijke getallen kunnen genomen worden, en men bovendien z naar welgevallen nemen kan, slechts zorgende, dat z, y en x respectievelijk kleiner blijven dan 41, 34 en 27, zoo blijkt hieruit, dat ons Voorstel zeer onbepaald is, en dat er oneindig veel antwoorden op hetzelve bestaan.

Willen wij alles in gehéele getallen hebben, dan blijkt uit (α) en (β), dat voor m en n zulke getallen behooren aangenomen te worden, dat $\frac{7n}{m-n}$ een geheel getal zij. Hieraan kan ondertusschen meêr op oneindig veel wijzen voldaan worden; want stellende $m = n + p$, dan is,

$$\frac{7n}{m-n} = \frac{7n}{p}$$

en n naar welgevallen genomen hebbende, behoeft voor p slechts een deeler van $7n$ genomen te worden.

Nemen wij, bij voorbeeld $n = 1$, en $p = 1$, dan is $m = 2$, en $\frac{7n}{m-n} = 7$, zoodat,

$$y = z + 7 \text{ en } x = y + 7 = z + 14.$$

en nu kunnen wij $z = 1, 2, 3$ &c. tot 13 nemen, omdat $z = 14$, $x = 28$ en dus te groot zou maken.

Nemen wij tot een ander voorbeeld $n = 6$ gulden, en dat p een factor van $7n$ of 42 moet zijn, $p = 7$, dan is $m = n + p = 13$ gulden, en $\frac{7n}{m-n} = 6$, waardoor $y = z + 6$, en $x = z + 12$, nemende dan $z = 1$, dan is $y = 7$ en $x = 13$, en wij hebben,

$$1 \times 13 + 40 \times 6 = 13 + 240 = 253 \text{ gulden}$$
$$7 \times 13 + 27 \times 6 = 91 + 162 = 253 \text{ gulden}$$
$$13 \times 13 + 14 \times 6 = 169 + 84 = 253 \text{ gulden}$$

in dit geval zouden zij dus alle 253 gulden ontvangen.

CCXVIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE Jr.

Voor x en y zulke getallen te vinden, dat de formulen x^2+x+y en y^2+x+y, rationale quadraten worden? (58)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO, H. G. WITLAGE Jr., H. VAN KRAAIJENOORD en R. VAN WIJK Jz.

Stel $x^2+x+y=(x+p)^2$ en $y^2+x+y=(y+q)^2$ dan heeft men,

$$x+y=2px+p^2 \quad \ldots \quad (1)$$

en

$$x+y=2qy+q^2 \quad \ldots \quad (2)$$

dat is, de eerste met q en de tweede met p vermenigvuldigende,

$$q(x+y)=2pqx+p^2q$$

en,

$$p(x+y)=2pqy+pq^2$$

hiervan is de som,

$$(p+q)(x+y)=2pq(x+y)+pq(p+q),$$

uit welke vergelijking gevonden wordt,

$$x+y=\frac{pq(p+q)}{p+q-2pq}$$

nu is uit (1) en (2),

$$x=\frac{(x+y)-p^2}{2p} \text{ en } y=\frac{(x+y)-q^2}{2q}$$

en brengende, hierin de gevondene waarde van $x+y$ komt er,

$$x=\frac{q^2+(2q-1)p^2}{2(p+q-2pq)}$$

en

$$y=\frac{p^2+(2p-1)q^2}{2(p+q-2pq)}$$

waarin p en q naar welgevallen kunnen genomen worden.

VOORBEELDEN. Nemende $q=\frac{1}{2}$ en $p=\frac{1}{3}$, dan zijn de getallen $x=\frac{1}{4}$ en $y=\frac{1}{4}$.

No.

(5) O. S. RANGMA, *Algebra*, *pag.* 261, N°. 19.

Nemende $p = \frac{1}{3}$ en $q = 1$, dan worden de getallen $x = \frac{7}{9}$ en $y = \frac{1}{9}$, *enz.*

www.libtool.com.cn

CCXIX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee getallen te vinden, waarvan de ſom der cuben deelbaar is door de ſom der quadraten? (59)

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., R. LOBATTO, R. VAN WIJK JZ., H. F. BAKKER en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel de getallen x en y, dan moet $x^3 + y^3$ deelbaar zijn door $x^2 + y^2$, en bijgevolg moet $x^3 + y^3 = n(x^2 + y^2)$ zijn, waarin n een geheel getal verbeeldt. Men ſtelle $x = rz$ en $y = tz$, dan verandert deze vergelijking in,

$$(r^3 + t^3)\, z^3 = n\,(r^2 + t^2)\, z^2$$

of door z^2 deelende in,

$$(r^3 + t^3)\, z = n\,(r^2 + t^2)$$

nemende nu $n = r + t^2$ dan is $z = r^2 + t^2$, en dan is

$$x = r\,(r^2 + t^2) \text{ en } y = t\,(r^2 + t^2)$$

VOORBEELDEN. Nemende $r = 1$ en $t = 2$, dan is $x = 5$ en $y = 10$, en wij hebben,

$$\frac{5^3 + 10^3}{5^2 + 10^2} = \frac{1125}{125} = 9 = 1^2 + 2^2$$

Nemende $r = 2$ en $t = 3$, dan is $x = 26$ en $y = 39$, *enz.*

CCXX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee getallen te vinden, waarvan de ſom der cuben deelbaar is door het product der getallen? (60)

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE JR., R. LOBATTO, H. F. BAKKER, R. VAN WIJK JZ. en H. VAN KRAAIJENOORD.

Stellende de getallen x en y, dan moet $x^3 + y^3$ door xy deelbaar, en dus $\frac{x^3 + y^3}{xy} = n$ een geheel getal zijn. Stellen wij

(59) *Idem*, *pag.* 261. N°. 15. (60) *Idem*, *pag.* 261. N°. 16.

nu $x = rz$ en $y = tz$, dan is $\frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{(r^3 + t^3)\,z^3}{rt\,z^2} = \frac{(r^3 + t^3)\,z}{rt} = n$. Nemende dus $z = rt$, dan is $n = t^3 + r^3$, en bijgevolg zijn de getallen $x = r^2t$ en $y = rt^2$. Waarin voor r en t alle gehele getallen kunnen genomen worden.

VOORBEELDEN. Nemende $r = 1$ en $t = 2$ dan is $x = 2$ en $y = 4$.

Nemende $r = 2$ en $t = 3$, dan is $x = 18$ en $y = 12$ enz.

CCXXI. VOORSTEL.

Door F. BAUD.

Een horizontaal liggende balk, met deszelfs uiteinden in muren bevestigd, is zoodanig belast, dat op een bepaald punt van denzelven, waarvan de afstand tot het uiterste van den balk gelijk a gegeven is, eene loodregte drukking gelijk P wordt uitgeoefend. Men wil dit punt door middel van eenen schoor ondersteunen, waarvan de breedte gelijk b is, en vraagt onder welken hoek dezelve onder den balk moet worden geplaatst, en welke dikte hij zal moeten hebben, op dat deszelfs wederstandbiedende kracht in evenwigt met de uitgeoefende drukking zij, en bovendien de schoor den kleinst mogelijken inhoud hebbe?

OPLOSSING. Door F. BAUD.

Figuur 157 stelle den balk met den ondersteunenden schoor voor, en B zij het gegeven punt, waarop de kracht P loodregt werkt, en, waarin de schoor BC moet worden aangebragt.

Het is een algemeen vereischte van alle bouwkunstige zamenstellen, dat in dezelve, de noodige sterkte, op de minst kostbare wijze moet worden verkregen. Ter voldoening van de eerste bepaling, moet in ons geval, de schoor BC de genoegzame wederstandbiedende kracht hebben, om aan de uitgeoefende drukking op denzelven te kunnen wederstaan. Daar tevens de prijs van het hout nagenoeg in de reden van deszelfs inhoud is, moet de schoor den kleinst mogelijken inhoud hebben, om aan het tweede vereischte te voldoen.

Volgens de opgaave hebben wij nu: den afstand AB = a, de

breedte van den ſchoor gelijk b, de verticale drukking op het punt B gelijk P; ſtellen wij nu de dikte van den ſchoor gelijk x, en den hellingshoek ABC $= \phi$, dan is de lengte van den ſchoor BC $= \frac{AB}{Cos.\ \phi} = \frac{a}{Cos.\ \phi}$, deszelfs inhoud I $= \frac{abx}{Cos.\ \phi}$, en de drukking door de verticale belasting van het punt B_1 in de rigting van den ſchoor uitgeoefend gelijk $\frac{P}{Sin.\ \phi}$.

www.libtool.com.cn

Volgens EYTELWEIN, *Statik feſter körper* 2er *Theil* §. 498, wordt de terugwerkende kracht of vastheid van den ſchoor, voorgeſteld door de formule,

$$Q = x^2 e^2 . \frac{bx^2}{BC^2}$$

in welke formule $x^2 e^2$ een ſtandvastige coefficient is, van de veerkracht der houtſoort afhangende.

Subſtitueert men in deze formule de waarde van BC, dan verandert dezelve in,

$$Q = x^2 . e^2 . \frac{bx^2\ Cos^2.\ \phi}{a^2}$$

en de ſtandvastige grootheid $x^2 e^2 . \frac{b}{a^2} = n$ ſtellende, verkrijgt men,

$$Q = nx^2\ Cos^2.\ \phi$$

In geval van evenwigt tuſſchen de terugwerkende kracht van den ſchoor, en de uitgeoefende drukking op denzelven is derhalve,

$$nx^2\ Cos^2.\ \phi = \frac{P}{Sin.\ \phi}$$

dus $$x^2 = \frac{P}{n\ Sin.\ \phi\ .\ Cos^2.\ \phi}$$

en $$x = \sqrt[3]{\frac{P}{n\ Sin.\ \phi\ Cos^2.\ \phi}}$$

Deze waarde van x in de gevondene formule voor den inhoud ſubſtituerende, komt er,

$$I = \frac{abx}{Cos.\ \phi} = \frac{ab}{Cos.\ \phi} \times \sqrt[3]{\frac{P}{n\ Sin.\ \phi\ .\ Cos^2.\ \phi}}$$

Ingevolge van de tweede voorwaarde moet deze uitdrukking een minimum zijn, en dus moet dan ook,

$$\frac{s^3}{a^2 b^2 P} = \frac{1}{Sin.\ \phi\ .\ Cos^6.\ \phi}$$

een minimum wezen, omdat a, b, P en s conſtante grootheden zijn.

Nu wordt deze uitdrukking klaarblijkelijk een minimum wanneer $Sin.\ \phi\ .\ Cos^6.\ \phi$ een maximum is, en wij behoeven alzoo alleen de functie,

$$z = Sin\ \phi\ .\ Cos^6.\ \phi$$

tot een maximum te maken.

Hiertoe hebben wij, de gegevene uitdrukking differentierende,

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = Cos^6.\ \phi - 5\ Sin^2.\ \phi\ .\ Cos^4.\ \phi = 0$$

dat is, $Cos^4.\ \phi\ (Cos^2.\ \phi - 5\ Sin^2.\ \phi) = 0.$

Aan deze vergelijking wordt vooreerst voldaan, door $Cos.\ \phi = 0$, dat is, $\phi = 90^0$ te nemen, deze waarde van ϕ zou ondertuſchen geenen ſchoor, maar eenen verticalen ſtijl onder het te onderſteunen punt te kennen geven, en wel eenen ſtijl van eene oneindige dikte, omdat $Cos.\ \phi = 0$, $z = 0$=0 maakte, deze waarde van ϕ kan alzoo hier niet in aanmerking komen.

Stellen wij integendeel den anderen factor gelijk nul, dan hebben wij, $Cos^2.\ \phi - 5\ Sin^2.\ \phi = 0$, dat is $Cos.\ \phi = 5\ Sin^2.\ \phi$, en door $Sin^2.\ \phi$ deelende, $Cos^2.\ \phi = 5$, dat is $Cos.\ \phi = \sqrt{5} = 2{,}23607$, en bijgevolg $\phi = 24^0\ 5'\ 40''$.

Om te onderzoeken of deze waarde wezenlijk een maximum voor z aanwijst, differentieren wij de functie $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ andermaal en vinden,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = -4\ Sin.\ \phi\ Cos^5.\ \phi\ (Cos^2.\ \phi - 5\ Sin^2.\ \phi) + .$$
$$Cos^6.\ \phi\ (-2\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi - 10\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi)$$

en voor het geval $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$, dat is, voor den factor $Cos^2.\ \phi - 5\ Sin^2.\ \phi = 0$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = Cos^6.\ \phi\ (-2\ Sin.\ \phi\ .\ Cos.\ \phi - 10\ Sin.\ \phi\ .\ Cos.\ \phi)$$
$$= -12\ Sin.\ \phi\ .\ Cos^6.\ \phi.$$

daar nu $\phi = 24^0\ 5'\ 40''$, en dus in het eerſte quadrant is, zijn

Sin. ϕ en *Cos.* ϕ beide positief. De waarde van $\phi = 24°5'40''$ maakt dus $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}$ negatief, en bijgevolg z een maximum, zoodat voor deze waarde van ϕ, I een minimum wordt.

www.libtool.com.cn

Wij besluiten dan hieruit, dat tot de oplossing van ons Vorstel moet zijn $\phi = 24°5'40''$

en $$x = \sqrt[3]{\frac{P}{n \, Sin.\, \phi \, . \, Cos^2.\, \phi}} = \sqrt[3]{\frac{2P}{n \, Sin.\, 2\,\phi \times Cos.\, \phi}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2P}{n \, Sin.\, 48°11'20'' \times Cos.\, 24°5'40''}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{P}{0{,}30428 \times n}} = 1{,}486766 \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$$

CCXXII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Eene kromme lijn, waarvan de vergelijking tusschen de regthoekige coördinaten x en y gegeven is, wordt om de as der abscissen x rond bewogen, en het vlak van deze kromme lijn brengt alzoo een omwentelingsligchaam voort. De digtheid van dit ligchaam is bij iedere doorsnede, regthoekig door de omwentelings as gaande, verschillende, en stellende de digtheid op eenig punt van de as gelijk z, dan is de wet volgens welke deze digtheid verandert door eene vergelijking tusschen z en x gegeven. Men vraagt eene algemene formule te vinden, door welke het middelpunt van zwaarte van zulk een ligchaam kan bepaald worden, en deze formule op eenige voorbeelden toe te passen.

OPLOSSING. *Door* I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Stel dat de abscis x met ∂x aangroeit, dan is de aangroeijing van het omwentelings ligchaam $y^2 z \, \partial x$, daar nu de digtheid bij het uiteinde der ordinaat z gelijk is aan z, zoo is de massa van deze aangroeijing, welke met het gewigt evenredig is, gelijk $z y^2 z \, \partial x$, en hieruit volgt dat de geheele massa, of wel het geheele gewigt van dit omwentelings ligchaam zal worden uitgedrukt door $\pi \int y^2 z \, \partial x$.

Het middelpunt van zwaarte moet klaarblijkelijk gelegen zijn op de as van het omwentelings-ligchaam. Nemen wij nu het

vlak

vlak, dat door den oorſprong der abscisſen regthoekig op deze as ſtaat, als vlak der momenten aan; dan is het moment van de differentiaal des ligchaams gelijk aan de maſſa van deze differentiaal, vermenigvuldigd met deszelfs afſtand van het vlak der momenten, en bijgevolg gelijk $x\,xy^2z\,\partial x$, de ſom der momenten wordt alzoo uitgedrukt door $\int xy^2z\,\partial x$.

Stellen wij nu den afſtand van het gevraagde middelpunt van zwaarte tot den oorſprong der abscisſen gelijk Z, dan is deze afſtand gelijk de ſom der momenten, gedeeld door de ſom der gewigten, dat is, door het geheele gewigt van het omwentelingsligchaam, waaruit dan volgt: dat dit middelpunt van zwaarte zal worden bepaald door de formule,

$$Z = \frac{\int xy^2z\,\partial x}{\int y^2z\,\partial x}$$

Zijn nu y en z beide, door middel van eenige vergelijking in x uitgedrukt, dan zijn teller en noemer beide functien van x, en beide integralen zijn dus bepaalbaar, waardoor dan nu het Voorſtel, in het algemeen moet worden gehouden voor opgelost.

1°. VOORBEELD. Onderſtellen wij, dat het ligchaam een kegel is; dat de digtheid aan den top is d en aan de bazis d', en dat de aangroeijing der digtheid evenredig is met de aangroeijing der abscis; ſtellende dan den halven tophoek van den kegel a, dan is $y = x\,Tang.\,a$. Stellende verder de geheele hoogte van den kegel h, dan is $z = d + \frac{d'-d}{h}.x$, en hierdoor verkrijgen wij,

$$Z = \int\left\{x^3 Tang^2.a\left(d+\frac{d'-d}{h}x\right)\partial x\right\} : \int x^2 Tang^2.a\left(d+\frac{d'-d}{h}x\right)\partial x$$

$$= \int\left\{dx^3\partial x + \frac{d'-d}{h}x^4\partial x\right\} : \int\left(dx^2\partial x + \frac{d'-d}{h}x^3\partial x\right)$$

$$= \left\{\tfrac{1}{4}dx^4 + \frac{d'-d}{5h}.x^5\right\} : \left\{\tfrac{1}{3}dx^3 + \frac{d'-d}{4h}x^4\right\}$$

$$= \tfrac{3}{5}x \times \frac{5hd + 4(d'-d)x}{4hd + 3(d'-d)x}$$

welke integraal geene verbetering noodig heeft, omdat zij voor $x = o$ verdwijnt.

Voor den geheelen kegel is $x = h$ en dit geeft ons,

$$Z =$$

$$Z = \tfrac{3}{4} h \times \frac{d + \frac{4}{3} d'}{d + d'}$$

GEVOLGEN. Is $d' = o$, dan wordt $Z = \frac{3}{4} h$ en de plaatsing van het zwaartepunt is in dit geval onafhankelijk van de digtheid aan het grondvlak.

Is $d' = o$, dat is, neemt de digtheid evenredig af tot dat zij aan de bazis verdwijnt, dan vinden wij $Z = \frac{3}{5} h$.

Is eindelijk $d = d'$, dat is, heeft de kegel overal dezelfde digtheid, dan vinden wij $z = \frac{3}{4} h$, zoo als uit andere gronden bekend is.

2°. VOORBEELD. Laat de omwentelende kromme eene parabool zijn, en ſtellen wij dat de digtheid aan den top o is, en toeneemt in dezelfde reden als de vierkanten der abscisſen x, dan is $y^2 = px$, en ſtellende de hoogte van het geheele ligchaam h, en de digtheid aan het grondvlak gelijk 1, dan is $z = \frac{x^2}{h^2}$. Hierdoor vinden wij,

$$Z = \frac{\int x \times px \times \frac{x^2}{h^2} \partial x}{\int px \times \frac{x^2}{h^2} \partial x} = \frac{\int x^4 \partial x}{\int x^3 \partial x} = \frac{\frac{1}{5} x^5}{\frac{1}{4} x^4}$$

dat is,

$$Z = \tfrac{4}{5} x$$

en bijgevolg voor het geheele ligchaam, $x = h$ ſtellende $Z = \frac{4}{5} h$.

3°. VOORBEELD. Stellen wij dat de digtheid z altijd evenredig is met de ordinaat y, dan verandert onze formule in,

$$Z = \frac{\int xy^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}$$

Is in deze onderſtelling de kromme eene parabool, dan is $y^2 = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ en hierdoor wordt $Z = \frac{4}{7} x$. Wel te verſtaan indien voor $x = o$, ook $Z = o$ moet zijn.

4°. VOORBEELD. Stellen wij dat, wat ook de vergelijking der omwentelende kromme zijn mag, de digtheid altijd in omgekeerde van de abscis x is, dan is $z = \frac{a}{x}$, en hierdoor wordt onze formule,

$$Z =$$

$$z = \frac{\int y^2 \partial x}{\int \frac{y^2}{x} \partial x}.$$

www.libtool.com.cn

Is in dit geval de voortbrengende kromme eene parabool, en $y^2 = px$, dan vinden wij,

$$z = \frac{\int x \partial x}{\int \partial x} = \frac{1}{2} x.$$

5°. VOORBEELD. Stellen wij dat de vergelijking der omwentelende kromme gegeven zijnde, de digtheid overal in omgekeerde reden van de vierkanten der abscissen is, dan gaat onze algemeene formule over in,

$$z = \frac{\int \frac{y^2}{x} . \partial x}{\int \frac{y^2}{x^2} . \partial x}.$$

Nemen wij hier wederom de parabool tot voorbeeld, dan verkrijgen wij, omdat $y^2 = px$ is,

$$z = \frac{\int \partial x}{\int \frac{\partial x}{x}} = \frac{x}{Log.\ x}.$$

6°. VOORBEELD. Stellen wij, in het algemeen de digtheid in omgekeerde reden van het vierkant der ordinaat y, dan is $z = \frac{a^2}{y^2}$, en dan wordt de algemeene formule,

$$z = \frac{\int x \partial x}{\int \partial x} = \frac{1}{2} x.$$

Dit geval is bijzonder merkwaardig, omdat in hetzelve de plaatsing van het zwaartepunt geheel onafhankelijk is van den vorm der omwentelende kromme lijn. Wat deze kromme lijn ook zijn mag, zal altijd, het zwaartepunt op de helft van de as liggen.

CCXXIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Van de oude kerks toren te Amsterdam, die 240 voet hoog is, is het steenwerk juist de helft van de geheele hoogte; zoo men nu op eenen zelfden tijd, twee lighamen van gelijke grootte en zwaarte,

te,

te, van de ſpits, en van den binnenkant van het ſteenwerk, door hunne eigene zwaarte laat nedervallen, en zij in de eerſte ſeconde $15\frac{5}{8}$ *voet doorloopen, vraagt men, hoeveel tijd het eene ligchaam eerder op den grond zal zijn dan het andere?*

OPLOSSING. Door R. LOBATTO, H. G. WITLAGE Jr., H. F. BAKKER, A. VAN DER SWAN, H. VAN KRAAIJENOORD en R. VAN WIJK Jz.

Het is in de Mechanica bekend, dat, wanneer een vrijvallend ligchaam in de eerſte ſeconde eene lengte g doorloopt, hetzelve na den tijd van t ſeconden eene lengte zal doorloopen, uitgedrukt door de formule gt^2. Nu is in dit Voorſtel $g = 15\frac{5}{8}$ en de hoogte van den val 240, dus $15\frac{5}{8}\, t^2 = 240$, of $t^2 = \frac{240}{15\frac{5}{8}} = \frac{48}{3\frac{1}{8}} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 6}{25}$ dus $t = \frac{8}{5}\sqrt{6} = 3{,}919$ ſeconde.

Voor het tweede ligchaam is de valhoogte 120, dus $t = \sqrt{\frac{120}{15\frac{5}{8}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8 \cdot 3}{25}} = \frac{8}{5}\sqrt{3} = 2{,}771$; en het verſchil in tijd is derhalve $t - t' = 3{,}919 - 2{,}771 = 1{,}148$

Het tweede ligchaam zal derhalve ruim éene ſeconde eerder op den grond komen dan het tweede.

CCXXIV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE Jr.

Indien de twee ligchamen, waarvan in het voorgaande Voorſtel geſproken is, niet te gelijker tijd beginnen te vallen; maar, dat op het oogenblik, waarop het ligchaam, hetwelk van de ſpits valt, den bovenkant van het ſteenwerk bereikt, het andere ligchaam van dezen bovenkant begint te vallen, dan vraagt men, hoeveel ſeconden het eene ligchaam vroeger op den grond zal komen, dan het andere?

OPLOSSING. Door R. LOBATTO, H. G. WITLAGE Jr., H. F. BAKKER, A. VAN DER SWAN, H. VAN KRAAIJENOORD en R. VAN WIJK Jz.

Het blijkt uit de Oplosſing van het voorgaande Voorſtel, dat wanneer het eerſte ligchaam den bovenkant van het ſteenwerk bereikt heeft, hetzelve alsdan nog 1,148 ſeconde noodig heeft, om

op

op den grond te komen; het tweede ligchaam valt in dien tijd van 2,771 seconde, en dus komt het eerste ligchaam 2,771 — 1,148, dat is, 1,623 seconden vroeger op den grond dan het tweede.

CCXXV. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

De Heer LA CROIX *heeft, in zijn* Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral, *eene algemeene formule gegeven voor de Integraal van* $\frac{x^n dx}{(x^2+\beta^2)^q}$, *welke volgens de afdalende magten van* $\frac{1}{x^2+\beta^2}$ *voortgaat.* (*Zie* pag. 117. Edition de 1806). *Men vraagt om insgelijks eene zoodanige formule te vinden voor* $\int (x^2+A)^q \partial x$, *waarin de exponent q onophoudelijk met de eenheid vermindert, en hieruit onder andere* $\int \frac{\partial\phi}{\cos^2\phi}$, $\int \cos\phi \partial\phi$, *enz. af te leiden?*

OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

Men stelle te dien einde,

$$\int (x^2+A)^q \partial x = Bx(x^2+A)^q + C\int (x^2+A)^{q-1}\partial x$$

en differentiere deze vergelijking dan vindt men,

$$(x^2+A)^q \partial x = B(x^2+A)^q \partial x + 2qBx^2(x^2+A)^{q-1}\partial x + C(x^2+A)^{q-1}\partial x$$

of, na door $(x^2+A)^{q-1}\partial x$ gedeeld te hebben,

$$x^2+A = (2q+1)Bx^2 + AB + C$$

en door vergelijking der coefficienten,

$$(2q+1)B = 1 \text{ en } AB + C = A$$

waaruit wij vinden,

$$B = \frac{1}{2q+1} \text{ en } C = A(1-B) = \frac{2qA}{2q+1}$$

en deze waarden in onze gestelde vergelijking substituerende,

$$\int (x^2+A)^q \partial x = \frac{1}{2q+1} x(x^2+A)^q + \frac{2qA}{2q+1}\int (x^2+A)^{q-1}\partial x$$

op dezelfde wijze heeft men dan nu ook,

$$\int(z^2+A)^{q-1}\partial z = \frac{1}{2q-1}z(z^2+A)^{q-1} + \frac{2(q-1)A}{2q-1}\int(z^2+A)^{q-2}\partial z$$

www.libtool.com.cn

$$\int(z^2+A)^{q-2}\partial z = \frac{1}{2q-3}z(z^2+A)^{q-2} + \frac{2(q-2)A}{2q-3}\int(z^2+A)^{q-3}\partial z$$

$$\int(z^2+A)^{q-3}\partial z = \frac{1}{2q-5}z(z^2+A)^{q-3} + \frac{2(q-3)A}{2q-5}\int(z^2+A)^{q-4}\partial z$$

&c. &c.

tot dat men, indien q een geheel positief getal is, gekomen zal zijn op,

$$\int(z^2+A)^{q-q}\partial z = \int\partial z = z.$$

Substituëren wij nu de gevondene integralen in elkander, dan vinden wij de volgende formule,

$$\int(z^2+A)^q\partial z = z\left\{\frac{1}{2q+1}(z^2+A)^q + \frac{2qA}{(2q+1)(2q-1)}(z^2+A)^{q-1} + \right.$$

$$\cdots + \frac{4q\cdot(q-1)A^2}{(2q+1)(2q-1)(2q-3)}(z^2+A)^{q-2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{8q(q-1)(q-2)A^3}{(2q+1)(2q-1)(2q-3)(2q-5)}(z^2+A)^{q-3} + \cdots$$

$$\left.\text{&c.} \cdots + \frac{2^q A^q \cdot 1\cdot 2\cdot 3 \text{ &c.} \cdots q}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \text{ &c.} (2q+1)}\right\}.$$

waardoor aan het eerste gedeelte van de vraag voldaan is. Hierbij moeten wij nog aanmerken dat de laatste term alleen plaats heeft ingevalle q een geheel positief getal is, terwijl in alle overige gevallen de reeks tot in het oneindige voortloopt.

Stellen wij in deze formule $2q = n$, of $q = \frac{1}{2}n$, dan wordt $(z^2+A)^q$ voor deze waarde $(z^2+A)^{\frac{1}{2}n}$ dat is $\sqrt{(z^2+A)^n}$, en onze formule verandert hierdoor in,

$$\int\sqrt{(z^2+A)^n}\partial z = z\left\{\frac{1}{n+1}\sqrt{(z^2+A)^n} + \frac{nA}{(n+1)(n-1)}\sqrt{(z^2+A)^{n-2}} + \right.$$

$$\cdots \frac{n(n-2)A^2}{(n+1)(n-1)(n-3)}\sqrt{(z^2+A)^{n-4}} + \cdots$$

$$\left.\cdots \frac{n(n-2)(n-4)A^3}{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}\sqrt{(z^2+A)^{n-6}} + \text{&c.}\right\}.$$

welke reeks, indien n een geheel even getal is, zal moeten worden voortgezet tot den term,

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots n\cdot A^{\frac{1}{2}n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(n+1)}\cdot z$$

en

en indien n een geheel positief getal is, tot den term,

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (n+1)} \cdot A^{\frac{n-1}{2}} \cdot \int V(z^2+A) \cdot \partial z$$

www.libool.com.cn

Uit deze laatste formule kan gemakkelijk de waarde van eenige goniometrische integraal-formulen worden afgeleid.

Men stelle namelijk $z = Tang.\ \phi = \frac{Sin.\ \phi}{Cos.\ \phi}$ en $A = 1$, is $\partial z = \frac{\partial \phi}{Cos^2.\ \phi}$, en onze formule verandert, omdat $V(z^2+A)^n = V(Tang^2.\ \phi + 1)^n = V(Sec^2.\ \phi)^n = Sec^n.\ \phi = \frac{1}{Cos^n.\ \phi}$ is, in,

$$\int \frac{\partial \phi}{Cos.^{n+2}\phi} = Tang.\ \phi \left\{ \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{Cos^n.\phi} + \frac{n}{(n+1)(n-1)} \cdot \frac{1}{Cos.^{n-2}\phi} + \right.$$
$$\left. \frac{n\,(n-2)}{(n+1)\,(n-1)\,(n-3)} \cdot \frac{1}{Cos.^{n-4}\phi} + \text{&c.} \right\}$$

voortgaande tot $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \text{ &c.} \ldots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n+1} Tang.\ \phi$, wanneer n even, of tot $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \text{ &c.} \ldots n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n+1} \int \frac{\partial \phi}{Cos.\ \phi}$, wanneer n oneven is.

Stellen wij nu in de laatste formule n in plaats van $n+2$, dan verandert dezelve eindelijk in,

$$\int \frac{\partial \phi}{Cos^n.\phi} = Sin.\phi \left\{ \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{Cos.^{n-1}\phi} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)} \times \frac{1}{Cos.^{n-3}\phi} + \right.$$
$$\left. \frac{(n-2)\,(n-4)}{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)} \times \frac{1}{Cos.^{n-5}\phi} + \text{&c.} \right\}$$

tot $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \text{enz. } n-2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \text{enz. } n-1} \times Tang.\ \phi$, wanneer n even, of tot $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \text{&c.} \cdot (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \text{&c.} \cdot (n-1)} \cdot \int \frac{\partial \phi}{Cos.\ \phi}$, wanneer n oneven is.

Deze formule is dezelfde, welke de Heer HUGUENIN in de Oplosfing van Voorstel 160, van het tweede Deel der *Verzameling van Voorstellen*, volgens eenen anderen weg verkregen heeft. Stellen wij in deze formule $90° - \phi$ in plaats van ϕ, dan wordt, omdat alsdan *Cos.* ϕ verandert in *Sin.* ϕ en $\partial\phi$ in $-\partial\phi$,

onze formule $\int \frac{\partial\phi}{Sin.^n.\ \phi}$ en wij zullen dan ook dezelfde reeks verkrijgen, welke de Heer HUGUENIN, in gemelde Oplosſing heeft opgegeven.

www.libtool.com

Men ſtelle in onze algemeene formule verder $z = Sin.\phi \times \sqrt{-1}$, en $A = 1$, dan is $\sqrt{(z^2 + A)} = \sqrt{(1 - Sin^2.\ \phi)} = Cos.\phi$ en $\partial z = Cos.\ \phi.\partial\phi\sqrt{-1}$, de formule $\int \sqrt{(z^2+A)}\partial z$ verandert hierdoor in,

$$\sqrt{-1}.\int Cos.^{n+1}\phi.\partial\phi = Sin.\phi.\sqrt{-1}.\left\{\frac{1}{n+1}Cos.^n.\phi + \frac{n}{(n+1)(n-1)}\right.$$

$$\left. Cos.^{n-2}\phi + \frac{n\ (n-2)}{(n+1)\ (n-1)\ (n-3)}\ Cos.^{n-4}\phi + \&c.\right\}$$

gaande deze formule tot $\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 3 \ldots n+1}\ Sin.\ \phi\sqrt{-1}$ als n even, maar tot $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot n+1}\ \phi.\sqrt{-1}$, als n oneven is.

Deze vergelijking, door $\sqrt{-1}$ gedeeld, en n in plaats van $n+1$ geſteld hebbende, geeft,

$$\int Cos.^n.\phi\,\partial\phi = Sin.\phi\left\{\frac{1}{n}.Cos.^{n-1}\phi + \frac{n-1}{n(n-2)}Cos.^{n-3}\phi + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)\ (n-3)}{n\ (n-2)\ (n-4)}\ Cos.^{n-5}\phi + \&c.\right\}$$

tot $\frac{2 \cdot 4 \cdot (n-1)}{1 \cdot 3 \ldots n}.\ Sin.\ \phi$ of tot $\frac{1 \cdot 3 \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \ldots n}.\phi$, naarmate n oneven of even is.

Hieruit volgt, door $90° - \phi$ in plaats van ϕ te ſtellen, waardoor $\partial\phi$ verandert in $-\partial\phi$, en $Cos.\ \phi$ in $Sin.\ \phi$.

$$\int Sin.^n.\phi\,\partial\phi = -Cos.\phi\left\{\frac{1}{n}Sin.^{n-1}\phi + \frac{n-2}{n(n-2)}.Sin.^{n-3}\phi + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)\ (n-3)}{n\ (n-2)\ (n-4)}.\ Sin.^{n-5}\phi + \&c.\right\}$$

tot $-\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot n-1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n}\ Cos.\ \phi$ of tot $-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5\ (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n}.\phi$ naarmate n oneven of even is.

Eindelijk merken wij nog op dat voor de voorgaande reekſen

$$\int \frac{\partial\phi}{Cos.\ \phi} = Log.\ Cot.\ (45° - \tfrac{1}{2}\phi)$$

CCXXVI. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door R. LOBATTO.

Men vraagt de integraal van de algemeene differentiaal formule $\partial x \cdot \sqrt{(A + Bx^n)}$?

OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

$\int \partial x \cdot \sqrt{(A + Bx^n)} = \sqrt{B} \int \sqrt{(\frac{A}{B} + x^n)} \cdot \partial x$. Stellende nu $\frac{A}{B} = A'$, dan is $\int \partial x \sqrt{(A + Bx^n)} = \sqrt{B} \times \int \sqrt{(A' + x^n)}\, \partial x$.

Vergelijken wij nu deze formule met $\int (x^n + A)^q \partial x$, welke wij in het voorgaande vraagstuk behandeld hebben, dan is $q = \frac{1}{2}$, $A = A'$, dus $B = \frac{1}{2}$ en $C = \frac{1}{2} A'$, waardoor,

$$\int \sqrt{(A' + x^n)}\, \partial x = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(A' + x^n)} + \tfrac{1}{2} A' \int \frac{\partial x}{\sqrt{(A' + x^n)}}.$$

Voorts stelle men $\sqrt{(A' + x^n)} = x + y$, dan is $y^n + 2yx = A'$, dus $x = \frac{A' - y^n}{2y}$; $x + y = \frac{A' + y^n}{2y}$, en $\partial x = -\frac{A' + y^n}{2y^n} \cdot \partial y$, waaruit volgt,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A' + x^n)}} = \int \frac{\partial x}{x + y} = -\int \frac{\partial y}{y} = -Log\, y = .Log. \frac{1}{y},$$

$$= Log. \frac{1}{-x + \sqrt{(A' + x^n)}} = Log. \frac{x + \sqrt{(A' + x^n)}}{A'}$$

en hierdoor verkrijgen wij,

$$\int \partial x \sqrt{(A' + x^n)} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(A' + x^n)} + \tfrac{1}{2} A' Log. \frac{x + \sqrt{(A' + x^n)}}{A'},$$

waaruit dan, met $\sqrt{B}$ multiplicerende en $\frac{A}{B}$ in plaats van A' stellende, eindelijk volgt,

$$\int \partial x \sqrt{(A + Bx^n)} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(A + Bx^n)} + \frac{A}{2\sqrt{B}} \cdot Log.$$

$$\cdots \left\{ x \sqrt{B} + \sqrt{(A + Bx^n)} \right\} + C.$$

CCXXVII. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door R. LOBATTO.

Men vraagt om de integraal van $\partial x \,.\, V\frac{x-1}{x}$, *door middel van het voorgaande vraagſtuk, te vinden?*

OPLOSSING. Door R. LOBATTO.

Men ſtelle $x = y^2$, dus $\partial x = 2y\partial y$ en $V\frac{x-1}{x} = \frac{1}{y}V(y^2-1)$, dan verandert de opgegevene formule in,

$$\int \partial x \,.\, V\frac{x-1}{x} = 2\int \partial y\, V(y^2-1)$$

vergelijkende nu deze uitdrukking met $\int \partial x\, V(A+Bx^2)$, waarvan wij in het voorgaande vraagſtuk de waarde hebben opgegeven, dan is $x = y$, $B = 1$ en $A = -1$, waardoor, $\int \partial y V(y^2-1) = \frac{1}{2}yV(y^2-1) - \frac{1}{2}Log.(y+V(y^2-1))$ en bijgevolg,

$$\int \partial x \,.\, V\frac{x-1}{x} = yV(y^2-1) - Log.(y+V(y^2-1))$$

en daar $y = Vx$ is,

$$\int \partial x \,.\, V\frac{x-1}{x} = Vx(x-1) - Log.(Vx+V(x-1)).$$

CCXXVIII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een cirkel met twee punten P en Q gegeven zijnde, vraagt men door die punten eenen anderen cirkel te beſchrijven, den eerſten in twee punten doorſnijdende, en wel zoodanig, dat de koorde welke de twee ſnijpunten vereenigt, met de lijn, welke door de twee gegevene punten gaat, eenen gegevenen hoek maakt?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT, J. VAN DER STOK en R. LOBATTO.

Vereenig de twee gegevene punten P en Q. *Fig.* 158. Deel

PQ

PQ midden door in B, en ſtel in B eene loodlijn CD op PQ, dan zal het middelpunt O van den gevraagden cirkel ergens op de lijn CD moeten liggen. Onderſtel verder, dat het Voorſtel opgelost, en dat RS de koorde zij, welke de ſnijpunten vereenigt; indien dan RS verlengd wordt, tot dat zij QP in M en CD in F ſnijdt, dan zijn de regthoekige driehoeken MBF en OGF gelijkvormig; maar, AE loodregt op CD trekkende, zijn de driehoeken OGF en OAE mede gelijkvormig, dus zijn dan ook de driehoeken BMF en OAE gelijkvormig, en bijgevolg is ∠ OAE het complement van den gegevenen hoek M, en derhalve AH loodregt op QP trekkende, ∠ OAH gelijk den gegevenen hoek M. Hierdoor hebben wij deze Conſtructie.

CONSTRUCTIE. Stel CD loodregt op het midden van PQ; trek AH loodregt op PQ, en maak ∠ OAH gelijk den gegevenen hoek M, dan zal O het middelpunt en dus OP de ſtraal van den gevraagden cirkel zijn.

AANMERKINGEN. 1°. De hoek M, kan aan beide zijden van de loodlijn AH worden geſteld, zoodanig dat ∠ L'AH = ∠ OAH = ∠ M is. Het verlengde van L'A ſnijdt CD in een ander punt O', en dit is het middelpunt van eenen tweeden cirkel welke aan het vraagſtuk voldoet, en waarbij ∠ S'MI = ∠ SMI = ∠ M is. Is nu ∠ OAH = ∠ HAL', dan is, omdat ∠ OAE het complement van ∠ OAH en ∠ OAO' het ſupplement van ∠ OAL' is, ook ∠ OAE = ∠ O'AE en dus AO' = AO, waardoor de tweede oplosſing van ons vraagſtuk gemakkelijk gevonden wordt als de eerſte geconſtrueerd is.

2°. Wanneer de gegevene hoek gelijk nul is, dat is wanneer de koorde RS evenwijdig met PQ moest zijn, dan is het vraagſtuk onmogelijk, want dan zou AO evenwijdig aan CD worden; deze onmogelijkheid houdt echter op, wanneer CD door het middelpunt A gaat, want dan kan elk punt van CD voor het middelpunt O genomen worden.

3°. Is de gegevene hoek regt, dan valt O in E en dan is er ſlechts één antwoord.

4°. Het ſpreekt van zelf dat ons Voorſtel in veel gevallen onmogelijk kan worden. De Conſtructie maakt deze gevallen kenbaar, daar zulks plaats heeft wanneer de cirkel uit O met OP als ſtraal beſchreven, den gegevenen cirkel ſnijdt noch raakt; om

de betrekking, welke er tusschen de gegevens moet bestaan, door eene vergelijking uit te drukken, stellen wij $\angle M = \angle OAH = \alpha$, $BP = QB = a$, $BE = b$, $AE = c$ en $AL = d$; dan is $OE = EO' = c\ Cot.\ \alpha$, $AO = AO' = \frac{c}{Sin.\ \alpha}$, $BO = b - c\ Cot.\ \alpha$; $BO' = b + c\ Cot.\ \alpha$, $OP = V\left\{(b - c\ Cot.\ \alpha)^2 + a^2\right\}$ $O'P = V\left\{(b + c\ Cot.\ \alpha)^2 + a^2\right\}$; $OL = O'L'' = \frac{c}{Sin.\ \alpha} - d$; $OL' = O'L''' = \frac{c}{Sin.\ \alpha} + d$. Zal nu de koorde RS kunnen bestaan, dan moet OK of OP grooter dan OL en kleiner dan OL' zijn en dit geeft ons,

$$V\left\{(b - c\ Cot.\ \alpha)^2 + a^2\right\} > \frac{c}{Sin.\ \alpha} - d$$

en $$V\left\{(b - c\ Cot.\ \alpha)^2 + a^2\right\} < \frac{c}{Sin.\ \alpha} + d$$

voor de mogelijkheid der koorde R'S verkrijgen wij op dezelfde wijze, de verkenningsvergelijkingen,

$$V\left\{(b + c\ Cot.\ \alpha)^2 + a^2\right\} > \frac{c}{Sin.\ \alpha} - d$$

$$V\left\{(b + c\ Cot.\ \alpha)^2 + a^2\right\} < \frac{c}{Sin.\ \alpha} + d$$

3°. Eindelijk merken wij aan, dat, indien er twee oplossingen bestaan, de koorden RS en R'S', of wel derzelver verlengde, door een zelfde punt M van de lijn QP zullen gaan. Dit is bewezen in het 14e. Voorstel 1e. Deel der *Verzameling van Voorstellen.*

CCXXIX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee getallen te vinden, zoodanig, dat, als men van elk derzelve, van hunne som, en van hun verschil een gegeven getal a afrekt, de overblijfsels vier rationale quadraten zijn? (61)

Op-

(61) A. B. STRABBE, *Inleiding enz. pag.* 252. N°. 30.

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE Jr., en R. van WIJK Jz.

Stel de getallen x en y, dan moeten de uitdrukkingen $x - a$; $y - a$; $x + y - a$; $x - y - a$ alle rationale quadraten zijn. Stellen wij $x - a = b^2$ en $y - a = c^2$, of $x = b^2 + a$ en $y = c^2 + a$, dan is aan de twee eerste vereischten voldaan, en dan moeten de formulen,

$$x + y - a = b^2 + c^2 + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$x - y - a = b^2 - c^2 - a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

nog rationale quadraten zijn.

Stel den wortel uit het tweede quadraat $b - c$, dan is,

$$b^2 - c^2 - a = b^2 - 2bc + c^2$$

of $$2bc = 2c^2 + a$$

waaruit $$b = \frac{2c^2 + a}{2c}$$

Deze waarde van b overbrengende in $b^2 + c^2 + a$, dan ziet men, dat,

$$a^2 + 8ac^2 + 8c^4$$

nog een quadraat moet zijn.

Stel den wortel hiervan $a + 3c^2$; dan hebben wij,

$$a^2 + 8ac^2 + 8c^4 = a^2 + 6ac^2 + 9c^4$$

dus $2ac^2 = c^4$ of $a = \frac{c^2}{2}$.

VOORBEELD. Stel $c = 4$, dan is $a = 8$, en $b = 5$, zoodat $x = b^2 + a = 33$ en $y = c^2 + a = 24$, de gevraagde getallen.

AANMERKING. Door I. R. SCHMIDT. Deze oplossing heeft het ongemak, dat men voor a geen getal naar welgevallen kan nemen, hetgeen toch zou moeten, indien, volgens de opgaaf a een gegeven getal zal zijn. Dit ongemak kan men op de volgende wijze ontwijken.

Men stelle om de formulen (1) en (2) tot quadraten te maken;

$$b^2 + c^2 + a = (r + s)^2$$

en $$b^2 - c^2 - a = (r - s)^2$$

dan is door optelling $2b^2 = 2r^2 + 2s^2$ of $b^2 = r^2 + s^2$, en dit in de eerste substituerende,

$$r^2 + s^2 + c^2 + a = (r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$$

waaruit $r = \frac{c^2 + a}{2s}$.

www.libtool.com.cn

Hierdoor wordt nu $b^2 = r^2 + s^2$, overgebragt tot,

$$b^2 = \frac{c^4 + 2ac^2 + a^2 + 4s^4}{4s^2}$$

waaruit blijkt dat $c^4 + 2ac^2 + a^2 + 4s^4$ nog een rationaal quadraat moet zijn.

Stellen wij de wortel hiervan $c^2 + 2s^2$, dan verkrijgen wij $2ac^2 + a^2 = 4c^2s^2$, of $s^2 = \frac{2ac^2 + a^2}{4c^2}$, en $2ac^2 + a^2$ moet dus nog een quadraat zijn.

De wortel hiervan $a + pc$ ſtellende, komt er, ter bepaling van c, de vergelijking $2ac^2 = p^2c^2 + 2apc$; waaruit $c = \frac{2a}{2a - p^2}$, en wij vinden dus x en y door de volgende vergelijkingen,

$$c = \frac{2a}{2a - p^2}\,;\; s = \frac{a + pc}{2c}\,;\; b = \frac{c^2 + 2s^2}{2s}$$

$$x = b^2 + a\,;\; y = c^2 + a$$

waarin nu a elk gegeven getal kan zijn, en bovendien p naar welgevallen genomen kan worden.

CCXXX. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Er waren twee ſchepen A en B bij elkander, op 48° noorderbreedte en 342° lengte; van daar zeilt A zoo veel bezuiden het westen, als B beoosten het zuiden, tot dat zij beide komen op 43° noorderbreedte; indien nu de verheden, welke deze twee ſchepen gezeild hebben, te zamen 250 mijlen beloopen, en de afwijking van het middengrond ſtaat tot het verſchil in lengte als 7 : 10, vraagt men naar den koers en de verheid, die ieder ſchip gezeild heeft, als ook op welke lengte zij gekomen zijn? (62)

OP-

(62) J. VAN RAM. *Nieuwe Hoornſche Schatkamer. Deſſait queſtien*, N°. 49.

OPLOSSING. Door J. VAN WIJK Rz.

Laat C *Fig.* 159 het punt zijn, van waar de twee schepen vertrokken; dan is, volgens het vraagstuk $\angle$ WCA $=$ $\angle$ DCB; tellende hier bij $\angle$ ACD aan beide zijden op, dan komt er $\angle$ DCB $+$ $\angle$ ACD $=$ $\angle$ WCA $+$ $\angle$ ACD of $\angle$ ACB $=$ $\angle$ WCD $=$ 90°.

Het verschil in breedte is CD $=$ 48° $-$ 43° $=$ 5° $=$ 5 $\times$ 15 $=$ 75 mijlen. Stellende nu, omdat AC $+$ CB $=$ 250 mijlen moet zijn, AC $=$ 125 $-$ x en BC $=$ 125 $+$ x, dan is,

$$AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2)} = \sqrt{(31250 + 2x^2)}$$
$$AD = \sqrt{(AC^2 - CD^2)} = \sqrt{(10000 - 250x + x^2)}$$
$$BD = \sqrt{(BC^2 - CD^2)} = \sqrt{(10000 + 250x + x^2)}$$

Daar nu AB $=$ AD $+$ BD is, zoo hebben wij de vergelijking,

$$\sqrt{(10000+250x+x^2)}+\sqrt{(10000-250x+x^2)}=\sqrt{(31250+2x^2)}$$

of quadraterende,

$$20000 + 2x^2 + 2\sqrt{(10000 + 250x + x^2)}$$
$$(10000 - 250x + x^2) = 31250 + 2x^2$$

dat is,

$$\sqrt{(100000000 - 42500x^2 + x^4)} = 5625$$

of andermaal quadraterende en herleid,

$$x^4 - 42500x^2 = -68359375$$

waaruit x $=$ 41 ten naaste bij, en hieruit volgt voor het aantal mijlen, AC $=$ 84, BC $=$ 166, de gevraagde verheden; en verder AB $=$ 186, AD $=$ 38 en BD $=$ 148.

Om de gevraagde koersen te vinden is AD $=$ DC $\times$ *Tang.* ACD, dus *Tang.* ACD $=$ *Tang.* OCB $=$ $\frac{AD}{DC}$ $=$ $\frac{38}{75}$, waaruit men vindt ACD $=$ OCB $=$ 26° 52′, zoodat A gezeild heeft 26° 52′ bewesten het zuiden, en B evenveel bezuiden het oosten.

Om eindelijk de bekomene lengten te vinden, hebben wij in graden,

$$AD = \tfrac{19}{7} \times 38 \times \tfrac{1}{15} = 3°37'$$
$$BD = \tfrac{19}{7} \times 148 \times \tfrac{1}{15} = 14°6'$$

Daar nu de afgevarene lengte 342° was, zoo verkrijgen wij voor de bekomene lengte van A, 342° $-$ 3° 37′, dat is 338° 23′, en voor de lengte van B, 342° $+$ 14° 6′ of 356° 6′.

CCXXXI. VOORSTEL.

Door J. van Wijk Rz.

www.libtool.com.cn

Er waren twee ſchepen A en C bij elkander in B, op 50° noorderbreedte en 351° lengte. Van daar zeilt A bewesten en C beoosten het zuiden tot dat zij beide komen op 44° noorderbreedte; bevinden alsdan dat het ſchip C, 48 mijlen meerder gezeild heeft en 7° 3′ meer in lengte veranderd is dan het ſchip A. Wanneer nu de afwijking van het middagrond tot het verſchil der lengte in reden is, als 15 tot $22\frac{1}{11}$, vraagt men welken koers en welke verheid ieder gezeild heeft en op welke lengte zij gekomen zijn? (63)

OPLOSSING. Door J. van Wijk Rz.

Het verſchil in breedte is *Fig.* 160, BD = 50° — 44° = 6° = 6 × 15 = 90 mijlen.

Het verſchil tuſſchen DC en DA is, in graden 7° 3′, en dus in mijlen, DC — AD = $\frac{7}{120}$ × 15 × $\frac{32}{47}$ = 72 mijlen; omdat 15 : $22\frac{1}{11}$ = 32 : 47 is.

Stellen wij nu AB = x, dan is BC = x + 48, dus AD = $\sqrt{(AB^2 - BD^2)}$ = $\sqrt{(x^2 - 8100)}$ en DC = $\sqrt{(BC^2 - BD^2)} = \sqrt{((x+48)^2 - 8100)} = \sqrt{(x^2+96x-5796)}$; en daar DC — AD = 72 is, zoo geeft dit,

$\sqrt{(x^2 + 96x - 5796)} - \sqrt{(x^2 - 8100)} = 72$

of $\sqrt{(x^2 + 96x - 5796)} = 72 + \sqrt{(x^2 - 8100)}$

dus $x^2 + 96x - 5796 = x^2 - 2916 + 144\sqrt{(x^2 - 8100)}$

of $96x - 2880 = 144\sqrt{(x^2 - 8100)}$

dat is $2x - 60 = 3\sqrt{(x^2 - 8100)}$

of wel $4x^2 - 240x + 3600 = 9x^2 - 72900$

of $5x^2 + 240x = 76500$

dus $x^2 + 48x = 15300$

waaruit $x = 102$.

Wij hebben dus AB = 102, BC = 150, AD = 48 en CD = 120 mijlen.

Ter berekening der koerſen hebben wij BD = AB *Cos.* ABD = BC

(63) J. A. van Dam, *Nieuwe Hoornſche Schatkamer, Beſluit Queſtien*, N°. 49.

$= BC \times Cos.\ CBD$, dus $Cos.\ ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{90}{102} = \frac{15}{17}$ en

$Cos.\ CBD = \frac{BD}{BC} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$, waaruit $\angle ABD = 28°\,4'$ en $\angle CBD = 53°\,8'$; en dus heeft A gevaren zuidwest ten zuiden $5°\,41'$ zuidelijk, en C heeft gestuurd zuidoost ten oosten $3°\,7'$ zuidelijk.

www.libtool.com.cn

Om de bekomene lengtens te vinden, hebben wij in graden,

$$AD = \frac{47}{52} \times 48 \times \frac{1}{15} = 4°\,42'$$
$$DC = \frac{47}{52} \times 120 \times \frac{1}{15} = 11°\,45'.$$

Daar nu de afgevarene lengte was $351°$, zoo verkrijgen wij, voor de bekomene lengte van A, $351° - 4°\,42'$, dat is $346°\,18'$, en voor de bekomene lengte van C, $351° + 11°\,45' - 360°$, dat is, $2°\,45'$.

CCXXXII. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Drie ſcholieren, op eene koſtſchool, krijgen elk een ſtuk laken, om er een kleed van te laten maken; na hetzelve gemeten te hebben, ontdekken zij, dat, indien men de helft van het ſtuk des tweeden en derden voegde bij dat des eerſten, dit ſtuk 12 ellen lang zou zijn; als ook, dat wanneer men een derde van het ſtuk van den eerſten en derden bij dat des tweeden voegde, dit ſtuk ook 12 ellen zou bevatten, en wanneer men een vierde van het ſtuk des eerſten en tweeden bij dat van het derde voegde, dit laatſte ſtuk mede de lengte van 12 ellen zou hebben. Men vraagt naar de lengte van ieder ſtuk? (64)

OPLOSSING. Door H. VAN KRAAIJENOORD, A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, G. J. SARLET, R. VAN WIJK Jz. en M.r B. JUNG.

Stel de lengte van het eerſte ſtuk x, van het tweede y en van het derde z, dan zijn de vergelijkingen,

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 12$$
$$y + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}z = 12$$
$$z + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y = 12$$

(64) BARBAUX, *Arithmétique Complète*, *Pag.* 476. N°. 26.

of de gebrokene verdrijvende,

$$2x + y + z = 24$$
$$3y + x + z = 36$$
$$4z + x + y = 48$$

www.libtool.com.cn

de twee eerſte van elkander aftrekkende, blijft er $2y - x = 12$, en de derde van viermaal de eerſte aftrekkende, blijft er $7x + 3y = 48$; en dus hebben wij nu twee vergelijkingen met twee onbekende.

Tellende de laatſte van deze twee vergelijkingen, bij zevenmaal de eerſte, dan komt er $17y = 132$, dus $y = 7\frac{13}{17}$, waardoor $x = 2y - 12 = 3\frac{8}{17}$ en $z = 24 - 2x - y = 9\frac{8}{17}$.

CCXXXIII. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Men vraagt de algemeene vergelijking,

$$(Ax + By)\,\partial x + (Cx + Dy)\,\partial y = 0,$$

waarin A, B, C en D, *conſtante grootheden zijn te integreren?*

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN en R. LOBATTO.

Deze vergelijking, ten opzigte der veranderlijke grootheden *Homogeen* of *gelijkſlagtig* zijnde, zoo laat dezelve eene afzondering, van de veranderlijke grootheden toe. Men ſtelle namelijk $y = xz$, waardoor $\partial y = z\partial x + x\partial z$ is, en dan wordt de vergelijking,

$$(Ax + Bxz)\,\partial x + (Cx + Dxz)\,(z\partial x + x\partial z) = 0$$

Na dezelve door x gedeeld te hebben, laat zij zich gemakkelijk brengen tot den vorm,

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{(C + Dz)\,\partial z}{Dz^2 + (B + C)\,z + A} = 0$$

of wel tot de volgende,

$$\frac{\partial x}{x} + \tfrac{1}{2} \times \frac{2\,Dz\partial z + (B+C)\partial z}{Dz^2 + (B+C)z + A} - \tfrac{1}{2}\,\frac{(B - C)\,\partial z}{Dz^2 + (B+C)z + A} = 0$$

waarvan de integraal is,

$$L.x + \tfrac{1}{2}L.\left\{Dz^2 + (B+C)z + A\right\} - \tfrac{1}{2}(B - C)\int \frac{\partial z}{Dz^2 + (B+C)z + A} = C$$

of de logarithmen vereenigende,

Log.

$$Log.\left\{x\sqrt{(Dz^2+(B+C)z+A)}\right\}-\tfrac{1}{2}(B-C)\int\frac{\partial z}{Dz^2+(B+C)z+A}=C'$$

www.libtool.com.cn

en in plaats van z de waarde $\frac{y}{x}$ fubſtituerende,

$$Log\sqrt{\left\{Dy^2+(B+C)xy+Ax^2\right\}}-\tfrac{1}{2}(B-C)\int\frac{\partial z}{Dz^2+(B+C)z+A}=C.$$

De integraal van den laatſten term kan eene Logarithmiſche, Algebraïſche of Goniometriſche functie zijn, hetgeen van de waarde der coëfficienten afhangt. Om dit te onderzoeken ſtelle men,

$$z=u-\frac{B+C}{2D}$$

dan wordt,

$$\frac{\partial z}{Dz^2+(B+C)z+A}=\frac{1}{D}\times\frac{\partial z}{z^2+\frac{B+C}{D}z+\frac{A}{D}}$$

$$=\frac{1}{D}\times\frac{\partial u}{u^2-\frac{(B+C)^2}{4D^2}+\frac{A}{D}}$$

Is nu $-\frac{(B+C)^2}{4D^2}+\frac{A}{D}$ negatief, dan zal de integraal door eene Logarithmiſche functie kunnen worden uitgedrukt; in het tegenovergeſtelde geval zal de integraal Goniometrisch zijn, en is deze uitdrukking gelijk o, dan wordt de integraal Algebraïsch. Wij zullen in deze bijzondere gevallen de integraal van de opgegevene differentiaal vergelijking trachten te bepalen.

1°. Geval. Wanneer $-\frac{(B+C)^2}{4D^2}+\frac{A}{D}$ negatief is, kunnen wij dezelve door $-g^2$ voorſtellen, en dan is,

$$\frac{\partial z}{z^2+\frac{(B+C)}{D}z+\frac{A}{D}}=\frac{\partial u}{u^2-g^2}=-\frac{1}{2g}\left\{\frac{\partial u}{u+g}-\frac{\partial u}{u-g}\right\}$$

en dit integrerende,

$$\int\frac{\partial z}{z^2+\frac{(B+C)}{D}z+\frac{A}{D}}=-\frac{1}{2g}\left\{Log.(u+g)-Log.(u-g)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2g}Log.\frac{u+g}{u-g}.$$

maar

maar $g^2 = \frac{(B+C)^2}{4D^2} - \frac{A}{D}$ zijnde, is $g = \frac{\sqrt{\{(B+C)^2 - 4AD\}}}{2D}$ en derhalve is,

www.libtool.com.cn

$$-\frac{1}{2g} Log.\frac{u+g}{u-g} = \frac{-D}{\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}} . Log. \frac{2Du+\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}{2Du-\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}$$

ftellende nu voor u de waarde $z + \frac{B+C}{2D}$, en dus $2Du = 2Dz + (B+C)$, dan verkrijgen wij,

$$\int \frac{\partial z}{Dz^2 + (B+C)z + A} = \frac{1}{D} \int \frac{\partial z}{z^2 + \frac{(B+C)}{D} z + \frac{A}{D}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}} . Log. \frac{2Dz+(B+C)+\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}{2Dz+(B+C)-\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}$$

ftelt men hierin $\frac{y}{x}$ in plaats van z, en vermenigvuldigt teller en noemer met x, dan komt er,

$$-\tfrac{1}{2}(B-C) \int \frac{\partial z}{Dz^2 + (B+C)z + A} = \ldots.$$

$$+\frac{B-C}{2\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}} . Log. \frac{2Dy+(B+C)x+x\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}{2Dy+(B+C)x-x\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}$$

De integraal van de geheele vergelijking wordt dus, voor dit geval, indien wij de conſtante grootheid door *Log* P uitdrukken,

$$Log. \sqrt{\{Dy^2 + (B+C)xy + Ax^2\}} + \frac{B-C}{2\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}} \times \ldots.$$

$$Log. \frac{2Dy+(B+C)x+x\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}{2Dy+(B+C)x-x\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}} = Log.\ P$$

welke formule wij ook aldus kunnen ſchrijven,

$$Log. \left\{(Dy^2 + (B+C)xy + Ax^2)^{\frac{1}{2}} \times \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \left(\frac{2Dy+(B+C)x+x\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}{2Dy+(B+C)x-x\sqrt{\{(B+C)^2-4AD\}}}\right)^{\frac{B-C}{\sqrt{((B+C)^2-4AD)}}} \right\} = Log.P$$

wij

wij kunnen dus, van de logarithmen tot de getallen overgaan, en dan verkrijgen wij, voor de integraal der opgegevene vergelijking, indien wij alles tot de tweede magt verheffen,

$$\left\{Dy^2 + (B+C)\,xy + Ax^2\right\} \times \left\{\frac{2Dy+(B+C)x+x\sqrt{\left\{(B+C)^2-4AD\right\}}}{2Dy+(B+C)x-x\sqrt{\left\{(B+C)^2-4AD\right\}}}\right\}^{\frac{B-C}{\sqrt{((B+C)^2-4AD)}}} = P^2$$

waarin nu P^2 eene conſtante grootheid is, welke uit den aard van het vraagſtuk, waaruit de vergelijking is ontſtaan, moet worden bepaald.

2°. Geval. Is $-\frac{(B+C)^2}{4D^2}+\frac{A}{D}$ poſitief, en ſtellen wij dit g^2, dan is,

$$\frac{\partial z}{z^2+\frac{(B+C)}{D}z+\frac{A}{D}} = \frac{\partial u}{u^2+g^2} = \frac{1}{g^2}\cdot\frac{\partial u}{1+\frac{u^2}{g^2}}$$

en ſtellende $u = gv$, en dus $\partial u = g\partial v$,

$$\int\frac{\partial z}{z^2+\frac{B+C}{D}z+\frac{A}{D}} = \frac{1}{g}\int\frac{\partial v}{1+v^2} = \frac{1}{g}\,Boog\,Tang.\,v$$

$$= \frac{1}{g}\,Boog\,T.\frac{u}{g} = \frac{2D}{\sqrt{\left\{4AD-(B+C)^2\right\}}}\,Boog\,T.\frac{2Dz+B+C}{\sqrt{\left\{4AD-(B+C)^2\right\}}}$$

$$= \frac{2D}{\sqrt{\left\{4AD-(B+C)^2\right\}}}\cdot Boog\,Tang.\frac{2Dy+(B+C)x}{x\sqrt{\left\{4AD-(B+C)^2\right\}}}$$

Voor dit geval is dus de geheele integraal der vergelijking,

$$Leg.\sqrt{\left\{Dy^2+(B+C)xy+Ax^2\right\}} - \frac{B-C}{\sqrt{\left\{4AD-(B+C)^2\right\}}}\times$$

$$Boog\,Tang.\frac{2Dy+(B+C)x}{x\sqrt{\left\{4AD-(B+C)^2\right\}}} = C'.$$

3°. Geval. Is $-\frac{(B+C)^2}{4D^2}+\frac{A}{D}$ gelijk nul, dat is, $4AD = (B+C)^2$, dan is,

z^2+

$$\frac{\partial z}{z^2 + \frac{B+C}{D} z + \frac{A}{D}} = \frac{\partial u}{u^2} = u^{-2} \partial u$$

www.libtool.com.cn

en dit integrerende,

$$\int \frac{\partial z}{z^2 + \frac{B+C}{D} z + \frac{A}{D}} = -u^{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{2D}{2Dz + B + C}$$

en ſtellende $\frac{y}{x}$ in plaats van z,

$$\int \frac{\partial z}{Dz^2 + (B+C) z + A} = -\frac{2x}{2Dy + (B+C) x}$$

zoodat de geheele integraal in dit geval wordt,

$$Leg. V \left\{Dy^2 + (B+C) xy + Ax^2\right\} \frac{(B-C) x}{2Dy + (B+C) x} = C'$$

AANMERKING. Deze drie verſchillende integralen verkrijgen den eenvoudigſten vorm en worden aan elkander gelijk, wanneer $B = C$ is, want dan is $B - C = o$, waardoor de laatſte term verdwijnt, zoodat als dan de integraal wordt,

$$Dy^2 + 2Bxy + Ax^2 = C'$$

voor het overige blijkt uit de oplosſing dat de verſchillende gevallen, alleen hiervan afhangen, of $(B + C)^2$ gelijk grooter of kleiner dan $4AD$ is.

Eindelijk moeten wij nog opmerken, dat door de logarithmen in deze oplosſing voorkomende, overal de Neperiaanſche moeten worden verſtaan, daar wij anders het modulus mede in rekening hadden moeten brengen.

CCXXXIV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE Jr.

Twee getallen te vinden, waarvan de ſom der quadraten een cubus is? (65)

OPLOSSING. Door H. G. WITLAGE Jr., R. LOBATTO en R. VAN WIJK Jz.

Stel de twee getallen x en y, dan moet volgens het Voorſtel $x^2 +$

(65) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 261. N°. 17.

$x^2 + y^2$ een cubus zijn. Stel den wortel ny, dan is $x^2 + y^2 = n^3y^3$, en dus $x^2 = n^3y^3 - y^2 = y^2(n^3y - 1)$, zoodat $x = y\sqrt{(n^3y - 1)}$, waaruit blijkt dat $n^3y - 1$ een quadraat moet zijn.

Stellende dan $n^3y - 1 = p^2$ dan is $y = \frac{p^2 + 1}{n^3}$, en bijgevolg $x = py = \frac{p(p^2 + 1)}{n^3}$, in welke formulen voor n en p alle getallen naar welgevallen kunnen worden genomen.

VOORBEELDEN. Nemen wij $n = 1$ en $p = 1$, dan wordt $x = 2$ en $y = 2$.

Nemende $n = 1$ en $p = 2$, dan zullen wij vinden $x = 10$ en $y = 5$.

Neemt men $n = 1$ en $p = 3$, dan zal men verkrijgen $x = 30$ en $y = 10$.

Wordt $n = \frac{1}{2}$ en $p = \frac{3}{2}$ genomen, dan komt er $x = 39$ en $y = 26$. *enz.*

ANDERE OPLOSSING. Door M. B. JUNG.

Stellen wij de getallen px en qx, dan moet $(p^2 + q^2)x^4$ een cubus zijn; stellende den wortel rx, dan is $(p^2 + q^2)x^2 = r^3x^3$ of $p^2 + q^2 = r^3x$, dus $x = \frac{p^2 + q^2}{r^3}$, waardoor de getallen $px = \frac{p(p^2 + q^2)}{r^3}$ en $qx = \frac{q(p^2 + q^2)}{r^3}$, in welke voor p, q en r getallen naar willekeur kunnen worden aangenomen.

CCXXXV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Voor x en y zulke getallen te vinden, dat de formulen $x^2 - x - y$ en $y^2 - x - y$ quadraten worden? (66)

OPLOSSING. Door R. LOBATTO, H. G. WITLAGE JR., R. VAN WIJK JZ. en M. B. JUNG.

Stellen wij $x^2 - x - y$ of $x^2 - (x + y) = (x - m)^2$

en $y^2 - x - y$ of $y^2 - (x + y) = (y - n)^2$

dan

(66) *Idem, pag.* 271. N°. 19.

dan vinden wij uit de eerste vergelijking,

$$x = \frac{m^2 + (x+y)}{2m}$$

www.libtool.com.cn

en uit de tweede vergelijking,

$$y = \frac{n^2 + (x+y)}{2n}$$

door deze waarden van x en y op te tellen vindt men,

$$x + y = \frac{m^2 n + n^2 m + (m+n)(x+y)}{2mn}$$

dat is, na behoorlijke herleiding,

$$\{2mn - (m+n)\}(x+y) = mn(m+n)$$

waaruit,

$$x + y = \frac{mn(m+n)}{2mn - (m+n)}$$

en bijgevolg hebben wij,

$$x = \frac{m^2 + (x+y)}{2m} = \frac{(2n-1)m^2 + mn}{4mn - 2(m+n)}$$

$$y = \frac{n^2 + (x+y)}{2n} = \frac{(2m-1)n^2 + mn}{4mn - 2(m+n)}$$

VOORBEELDEN. Nemende $m = 1$ en $n = 2$, dan is $x = \frac{5}{6}$ en $y = \frac{1}{6}$.

Nemende $m = 2$ en $n = 3$, dan is $x = \frac{29}{14}$ en $y = \frac{11}{14}$. enz.

CCXXXVI. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Voor x en y zulke getallen te vinden, dat de formulen $xy + x + y$ en $xy - x - y$ quadraten worden? (67).

OPLOSSING. Door R. LOBATTO, H. G. WITLAGE JR., M. B. JUNG en R. VAN WIJK JZ.

Men stelle $xy + x + y = p^2 x^2$ en $xy - (x+y) = q^2 x^2$ dan heeft men, door optelling en aftrekking,

$$2xy = (p^2 + q^2)x^2 \quad \ldots (1)$$

$$2(x+y) = (p^2 - q^2)x^2 \quad \ldots (2)$$

uit

(67) *Idem*, *pag.* 273. N°. 28.

uit de eerſte vindt men terſtond $y = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)\,x$, en bremgende deze in de tweede,

$$2x + (p^2 + q^2)\,x = (p^2 - q^2)\,x^2;$$

waaruit volgt,

$$x = \frac{2 + p^2 + q^2}{p^2 - q^2}$$

en dus

$$y = \frac{(p^2 + q^2)(2 + p^2 + q^2)}{2\,(p^2 - q^2)}$$

VOORBEELD. Neemende $p = 3$ en $q = 1$, dan vinde men $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 7\frac{1}{2}$.

CCXXXVII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Men ſtelle zich een ligchaam BACDB *voor*, Fig. 161, *hetwelk aan twee zijden begrensd is, door regthoekig op elkander ſtaande parabolen* BAC *en* BDC; *waarvan* A *en* D *de toppen, en* AE *en* DE *de aſſen zijn, welke aſſen ongelijk van lengte kunnen zijn, regthoekig op elkander ſtaan, en* BE = EC *tot gemeenſchappelijke regthoekige ordinaten hebben. Voorts is dit ligchaam alzodanig gevormd, dat, wanneer men door de aſſen* AE *en* BD *een plat vlak laat gaan, welk vlak, in gevolge het reeds gezegde, loodregt op beide parabolen* BAC *en* BDC *zal zijn, de doorſnede van dit vlak, met het oppervlak van het ligchaam, wederom eene halve parabool* EAD *is, van welke* A *de top,* AE *de as en* ED *eene regthoekige ordinaat zal zijn; zoo als ook, dat in het algemeen elk vlak* AEFA, *door de as* AE *gaande, en dus loodregt op het vlak van de parabool* BDC *ſtaande, eene halve parabool* AEF *op de oppervlakte voortbrengt, waarvan* A *de top,* AE *de as en* AF *eene regthoekige ordinaat is?*

Dit ligchaam aldus bepaald hebbende, vraagt men de vergelijking van de kromme lijn, die men op het oppervlak verkrijgt, wanneer het ligchaam geſneden wordt, door een vlak dat evenwijdig met het grondvlak BDC *is?*

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Laat IHK eene doorſnede zijn, welke evenwijdig met het grondvlak BDC is, dat de parabool BAC in IK doorſnijdt, en de as AE

in G ontmoet, dan ſnijdt dit vlak de halve parabool ADE volgens de lijn GH, en dan is, uit den aard van het Voorſtel, IK evenwijdig met BC en GH evenwijdig met ED. Laat nu het ligchaam door een ander vlak AFE, door de as AE gaande, geſneden worden, zoo is AEF eene halve parabool, ſnijdende de vlakken IHK en BDC wegens de evenwijdige ordinaten GM en EF. Daar nu ∠ MGH = ∠ FED de ſtandhoek van de vlakken EAF en EAD is, zoo zullen, ML en FN loodregt op GH en ED getrokken wordende, GH, EC, ML en NF onderling evenwijdig zijn, zoodanig dat GML en EFN gelijkvormige driehoeken zullen zijn.

Nu heeft men in de halve parabolen EAC, EAF en EAD,

$$AG : AE = GK^2 : EC^2$$
$$AG : AE = GM^2 : EF^2$$
$$AG : AE = GH^2 : ED^2$$

en hieruit volgt

$$GK^2 : EC^2 = GM^2 : EF^2 = GH^2 : ED^2$$

en dus is ook

$$GK : EC = GM : EF = GH : ED.$$

maar uit de gelijkvormige driehoeken GML en EFN volgt

$$GM : EF = LM : NF = GL : EN$$

en dus hebben wij

$$GK : EC = ML : FN = GL : EN = GH : ED$$

hieruit volgt terſtond

$$GK^2 : LM^2 = EC^2 : NF^2$$

en $GH : LH = ED : ND.$

maar omdat BCD eene parabool is, zoo is

$$EC^2 : NF^2 = ED : ND$$

en uit de drie laatſte evenredigheden is dan ook

$$GK^2 : LM^2 = GH : LH$$

waaruit dan blijkt, dat IHK mede eene parabool is. Alle doorſneden, evenwijdig met het grondvlak gaande, vormen dus op het oppervlak parabolen, en zijn daarenboven met het grondvlak gelijkvormig, omdat GK : EC = GH : ED is.

CCXXXVIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

www.libtool.com.cn

Hetzelfde ligchaam, dat in het voorgaande Voorſtel bepaald is, gegeven zijnde, vraagt men, de kromme lijn te bepalen, welke op het oppervlak ontſtaat, wanneer dit ligchaam geſneden wordt, door een vlak, dat evenwijdig is met het opſtaande zijvlak BAC?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Zij POQ. Fig. 162, de met BAC evenwijdige ſnede, zoo zal dezelve de halve parabool ADE in OR, en het grondvlak in PQ doorſnijden, en dan zal OR evenwijdig met AE, en PQ evenwijdig met BC en bovendien PR = RQ wezen. Men ſtelle voorts, dat IHK eene doorſnede evenwijdig met het grondvlak, en dus, volgens het voorgaande Voorſtel, eene parabool zij. Dit vlak ſnijde het vlak POQ volgens de lijn ST, het vlak ADE volgens GH en het vlak BAC volgens IK, dan is het gemakkelijk in te zien, dat de lijnen GH, OR en ST, elkander regthoekig in een zelfde punt U moeten doorſnijden, en dat SU = UT zal zijn; waaruit dan verder blijkt dat OR de as en O de top van de kromme lijn POQ zal wezen.

Men ſtelle AE = a, ED = b, BE = EC = c, ER = GU = VO = f. Voorts ſtelle men de abscis OU = x, en de ordinaat SU = UT = y, dan heeft men in de halve parabool ADE,

$$ED^2 : VO^2 = AE : AV = \frac{AE \times VO^2}{ED^2} = \frac{af^2}{b^2}.$$

Hierdoor is,

$$AG = AV + OU = x + \frac{af^2}{b^2}$$

verder is in de parabool BAC,

$$AE : AG = BE^2 : IG^2 = \frac{AG \times BE^2}{AE}$$

waaruit volgt,

$$IG = V\left\{\frac{c^2}{a}x + \frac{c^2 f^2}{b^2}\right\}$$

verder is in de parabool ADE,

$$AE : AG = ED^2 : GH^2 = \frac{AG \times ED^2}{AE}$$

en hieruit volgt,

www.boek.com.cn

$$GH = V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)$$

dus $$UH = GH - GU = -f + V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)$$

Eindelijk hebben wij in de parabool KHI,

$$GH : UH = IG^2 : IU^2$$

en ſtellende hierin de gevondene waarden,

$$V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) : -f + V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2 f^2}{b^2} : y^2$$

daar nu de derde term kan worden geſchreven, onder de gedaante $\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)$, zoo kunnen wij de beide voorgaande termen door $V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)$ deelen, en hebben dus,

$$y^2 : -f + V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) = \frac{c^2}{b^2} V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) : y^2$$

waaruit volgt,

$$y^2 = \frac{c^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) - \frac{c^2 f}{b^2} V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)$$

en hieruit den vierkantswortel trekkende,

$$y = \pm \frac{c}{b} V\left\{\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) - f V\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)\right\} \ldots (1)$$

hetgeen de vergelijking van de kromme lijn PQQ is, en waardoor dus het Voorſtel kan worden gehouden voor opgelost.

Onderzoeken wij tot welken graad deze vergelijking opklimt, dan moeten wij dezelve van wortelteekens zuiveren. Schrijven wij dezelve tot dat einde onder den vorm,

$$\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{b^2 x}{a} + f^2\right) - y^2 = \frac{c^2 f}{b^2} V\left(\frac{b^2 x}{a} + f^2\right)$$

dan hebben wij door magtsverheffing,

$$y^4 - \frac{2c^2}{b^2}\left(\frac{b^2 x}{a} + f^2\right) y^2 + \frac{c^4}{b^4}\left(\frac{b^4 x^2}{a} + \frac{2b^2 f^2 x}{a} + f^4\right) = \frac{c^4 f^2}{b^4}\left(\frac{b^2 x}{a} + f^2\right)$$

wel-

welke vergelijking zich herleiden laat tot,

$$y^4 - 2c^2\left(\frac{x}{a}+\frac{f^2}{b^2}\right)y^2 + \frac{c^4}{a^2}x^2 + \frac{c^4f^4}{ab^2}\cdot x = 0 \ldots (2)$$

www.library.com.cn

en onze vergelijking is dus in het algemeen van den vierden graad.

Zonderen wij uit deze vergelijking y wederom af, dan vinden wij,

$$y = \pm\sqrt{\left\{c^2\left(\frac{x}{a}+\frac{f^2}{b^2}\right) \pm \frac{c^2f}{b}\sqrt{\left(\frac{x}{a}+\frac{f^2}{b^2}\right)}\right\}}$$

hetgeen wij ook aldus kunnen schrijven,

$$y = \pm c\sqrt{\left\{\left(\pm\frac{f}{b}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}+\frac{f^2}{b^2}\right)}\right)\times\sqrt{\left(\frac{x}{a}+\frac{f^2}{b^2}\right)}\right\}}$$

Daar nu $\sqrt{\left(\frac{x}{a}+\frac{f^2}{b^2}\right)}$ klaarblijkelijk grooter is dan $\frac{f}{b}$ zoo blijkt hieruit, dat de grootheid onder het wortelteeken altijd positief is, en dat elke waarde van x alzoo vier bestaanbare waarden voor y zal geven, en dit toont verder aan, dat de krommelijn, welke tot deze algemeene vergelijking (2) behoort, vier takken zal hebben, welke met deze vier verschillende waarden van y overeenkomen. Daar echter in het ligchaam zelve, door de doorsnijding POQ, niet meer dan de twee takken PO en OQ ontstaan, zou men kunnen vragen, welke dezer vier waardijen tot onze krommelijn POQ bekomen; doch schrijven wij de waarde van y aldus,

$$y = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\left\{\left(\frac{b^2}{a}x+f^2\right)\pm f\sqrt{\left(\frac{b^2}{a}x+f^2\right)}\right\}}$$

dan zien wij dat dezelven uit deze twee bijzondere kromme lijnen bestaat, namelijk

$$y = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\left\{\left(\frac{b^2}{a}x+f^2\right)+f\sqrt{\left(\frac{b^2}{a}x+f^2\right)}\right\}} \ldots (\alpha)$$

en $y = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\left\{\left(\frac{b^2}{a}x+f^2\right)-f\sqrt{\left(\frac{b^2}{a}x+f^2\right)}\right\}} \ldots (\beta)$

en daar nu de tweede volkomen overeenkomt met de vergelijking (1), die wij onmiddelijk uit de figuur gevonden hebben, zoo is het klaar dat deze alleen op de kromme lijn POQ toepasselijk kan zijn.

De tweede (β) voldoet ook alleen aan de voorwaarde, welke de kromme lijn POQ kenmerken, want zij geeft voor $x = 0$,

ook $y = \pm \frac{c}{b} V (f^2 - f^2) = o$; en ſtellen wij $x = OR = VE = AE - AV = a - \frac{af^2}{b^2} = \frac{a}{b^2} (b^2 - f^2)$, dan vinden wij $\frac{b^2}{a} x + f^2 = b^2$, en dus geeft (β) alsdan $y = \pm \frac{c}{b} V (b^2 - bf)$, hetgeen juist de waarde van RP $=$ RQ is; want ER $= f$ zijnde, is DR $= b - f$, en daar $BE^2 : PR^2 = DE : DR$ of $c^2 : PR^2 = b : b - f$ is, zoo is $PR^2 = \frac{c^2}{b} (b - f)$ en dus PR $= \pm \frac{c}{b} V (b^2 - bf)$.

De tweede waarde van y, door middel van de vergelijking (α) voorgeſteld, voldoet niet aan deze voorwaarde, maar geeft voor $x = o$, $y' = \pm \frac{c}{b} V 2 f^2 = \pm \frac{c}{b} f . V 2$. De kromme lijn door deze vergelijking voorgeſteld heeft dus haren top niet O, en om dezen top te bepalen ſtellen wij in (α), $y' = o$, waardoor wij vinden,

$$\left(\frac{b^2}{a} x + f^2\right) = -f V \left(\frac{b^2}{a} + f^2\right)$$

of quadraterende en herleidende,

$$\frac{b^4}{a^2} x^2 + \frac{b^2 f^2}{a} x = o$$

hetgeen door $\frac{b^4}{a^2} x$ gedeeld zijnde geeft $x = -\frac{af^2}{b^2}$. De abſciſ x heeft dus, voor $y' = o$ eene negatieve waarde, en moet derhalve in eene tegengeſtelde rigting boven O, worden uitgezet naar W, en dit punt W vindt men door de as RO naar boven te verlengen en uit A eene lijn AW evenwijdig met ED te trekken, want dan is $OW = AV = \frac{af^2}{b^2}$; dit punt W is dus de top van de tweede kromme lijn, en nemende x grooter negatief, zullen wij ook bevinden dat y' onbeſtaanbaar wordt.

Om te doen zien welke de geometriſche beteekenis van deze tweede krommelijn in de figuur is, behoeven wij alleen op te merken, dat de uitdrukking (β) overgaat in (α), door eenvoudig

f ne-

f negatief te ſtellen, en dat deze tweede kromme lijn dus niets anders kan zijn, dan de kromme lijn welke op het oppervlak ontſtaat, door het ligchaam (*Fig.* 163) te doorſnijden door een vlak P′O′Q′, mede aan BAC evenwijdig loopende; doch op eenen afſtand ER′ ter linkerzijde van hetzelve gelegen, welke gelijk is, aan den afſtand ER op welke het vlak POQ ter regterzijde van dit vlak BAC gelegen is. De vorming van het ligchaam, in de opgaaf beſchreven, toont toch ten duidelijkſte aan, dat het ligchaam, dat wij in *Fig.* 162 beſchouwd hebben, ſlechts een ſtuk is van het geheele ligchaam, dat op deze wijze wordt voortgebragt. Het kromme oppervlak is toch op de volgende wijze ontſtaan: er zijn twee onbepaalde parabolen XAX′ en YDY′ *Fig.* 163, welke regthoekig op elkander ſtaan, en de ordinaat BC gemeen hebben; uit het punt E, waarin de aſſen elkander ſnijden, is een onbepaald aantal lijnen EQ, ED, EP′ *enz.* getrokken, en op deze lijnen als ordinaten, en de conſtante abscis AE, zijn zoo veel verſchillende halve parabolen AD*d*, AQ*q*, AP′*p*′ *enz.* geconſtrueerd; al deze parabolen te zamen genomen vormen het kromlijnig oppervlak van ons ligchaam, dat zich alzoo, beneden de parabool YDY′ en ter linkerhand van de parabool XAX′, tot in het oneindige uitſtrekt. De vorming van ons ligchaam op deze meer algemeene wijze omſchreven hebbende, is het klaar, dat, ter linkerzijde van het vlak XAX′, al de toppen O′, in eene zelfde regtlijn AA′ moeten liggen, welke met DR′ evenwijdig loopt, want al de doorſneden S′HT′, evenwijdig met BDC loopende, zijn, zoo als wij in het voorgaande Voorſtel bewezen hebben, parabolen, en deze loopen met beide hunne takken, tot in het oneindige over de oppervlakte van het ligchaam voort. De parameter van de parabool S′HT′ is gelijk $\frac{IG^2}{HG} = \frac{IG}{HG} \times IG$, maar IG : HG = BE : ED = c : b zijnde, is de parameter van de parabool S′HT′ = $\frac{c}{b}$. IG. Valt nu H in A, dat is, gaat de horizontale doorſnede door het punt A, dan wordt deze parameter o, omdat alsdan IG = o wordt, en de parabool S′HT′ gaat dan over in eene oneindige regte lijn AA′, welke in A haren oorſprong neemt.

Aanmerking. Dit Voorſtel is ontleend uit de *Mathematiſche*

oefeningen van FRANCISCUS VAN SCHOOTEN, *Amst.* 1659. *pag.* 443. *enz.*, welke hetzelve heeft overgenomen van J. HUDDE, om daermede aan te toonen, dat men uit een ligchaam eene kromme lijn snijden kan, welke tot een hooger geslacht dan de kegelsneden behoort. Hij heeft echter niets dan het stuk van ons ligchaam beschouwd, dat wij in *Fig.* 161 en 162 hebben voorgesteld, en alzoo de vier waarden van y niet in het ligchaam kunnen aanwijzen; onze meer algemeene beschouwing doet dus den aard en den vorm van dit gebogen oppervlak veel duidelijker kennen.

CCXXXIX. VOORSTEL.

Door U HUGUENIN.

Het zelfde ligchaam gegeven zijnde, dat wij in de twee voorgaande vraagstukken behandeld hebben, vraagt men deszelfs inhoud te bepalen?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Den inhoud, welke wij ons hier voorstellen te bepalen, *is* die, welke van het bepaalde ligchaam BACDA *Fig.* 161, door het vlak IHK, evenwijdig aan het grondvlak gaande, wordt afgesneden; dezen inhoud gevonden hebbende, zal hierdoor de inhoud van het bepaalde stuk BACDB gemakkelijk berekend worden.

Stellen wij wederom AE $= a$, ED $= b$, BE $=$ CE $= c$, de parameter van de parabool AC gelijk p en AG $= x$, dan is, in de parabool BAC, IG $= \sqrt{px}$, en voor de halve parabool ADE heeft men, AE : AG $=$ ED^2 : GH^2, of $a : x = b^2$: GH^2, dus GH $= b\sqrt{\frac{x}{a}}$, daar verder de inhoud van de parabolische vlakte IHK gelijk is aan $\frac{2}{3} \times$ IK $\times$ GH, zoo hebben wij voor dezen inhoud,

$$Par.\ \text{IKH} = \tfrac{2}{3} \times 2\sqrt{px} \times b\sqrt{\frac{x}{a}} = \tfrac{4}{3} bx\sqrt{\frac{p}{a}}$$

maar daar BE$^2 = p \times$ AE of $c^2 = pa$ is, zoo is $\frac{p}{a} = \frac{c^2}{a^2}$ en dit geeft ons,

$$Par.\ \text{IKH} = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{bc}{a} \cdot x$$

Men

Men ſtelle nu, dat onder IKH, eene andere evenwijdige ſnede, oneindig digt bij IKH, doorga, zoo is de afſtand dezer beide vlakken gelijk ∂x, en men verkrijgt alzoo voor de differentiaal van den inhoud des ligchaams,

$$\partial I = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot x \cdot \partial x$$

waarvan de integraal is,

$$I = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{bc}{a^2} \times \tfrac{1}{2} x^2 = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot x^2$$

welke integraal geene verbetering noodig heeft; omdat zijn, naar behooren, voor $x = o$, verdwijnt.

De gevondene uitdrukking $\frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot x^2$ ſtelt dus den inhoud voor van het ſtuk AIKHA; om den geheelen inhoud ABDCA te vinden, moet dus $x = a$ genomen worden, en dit geeft ons,

$$\textit{Inhoud } \text{ABDCA} = \tfrac{1}{3} abc = \tfrac{1}{3} ab \times c$$

dat is,

$$\textit{Inhoud } \text{ABDCA} = \tfrac{1}{3} \cdot \text{AE} \times \text{ED} \times \text{BC}$$

de geheele inhoud is dus een derde van het regthoekig parallelopipedum, hetwelke uit de lijnen AE, ED en BC wordt zoo men geſteld.

CCXL. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Men begeert den inhoud te vinden van het vlak POQ, Fig. 162, dat in het ligchaam, waarvan in de voorgaande vraagſtukken geſproken is, evenwijdig met de parabool BAC loopt?

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Stellen wij alles zoo als in Voorſtel CCXXXVIII, namelijk AR $= a$, ED $= b$, BE $=$ EC $= c$, ER $=$ VO $=$ GU $= f$, OU $= x$ en SU $=$ UG $= y$, dan hebben wij aldaar gevonden,

$$y = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\left\{\left(\frac{b^2}{a^2} x + f^2\right) - f \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} x + f^2\right)}\right\}}$$

en bijgevolg,

ST

$$ST = 2y = \frac{2c}{b} V\left\{\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) - fV\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)\right\}$$

Men ſtelle, dat op eenen oneindig kleinen afſtand eene andere ordinaat, evenwijdig met ST, getrokken zij, zoo is de uitdrukking voor de differentiaal, van den inhoud van het vlak SOU, indien wij dezen inhoud door V uitdrukken,

$$\partial V = 2y\partial x = \frac{2c}{b}\partial x . V\left\{\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right) - fV\left(\frac{b^2}{a}x + f^2\right)\right\}$$

welke uitdrukking wij ook aldus kunnen ſchrijven,

$$\partial V = 2c . \partial x . V\left\{\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b}V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right)\right\}$$

om deze uitdrukking te integreren, ſtelle men, $\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} = z^2$, dan is $x = a\left(z^2 - \frac{f^2}{b^2}\right)$ en dus $\partial x = 2az\partial z$, waardoor onze formule verandert in,

$$\partial V = 2c . 2az\partial z . V\left(z^2 - \frac{f}{b}z\right)$$

en, indien men $\frac{f}{b} = 2k$ ſtelt, in,

$$\partial V = 4ac . z\partial z . V(z^2 - 2kz)$$

ſtellen wij voorts $z = u + k$, dan is $\partial z = \partial u$ en,

$$V(z^2 - 2kz) = V\{(u+k)^2 - 2k(u+k)\} = V(u^2 - k^2)$$

waardoor,

$$\partial V = 4ac(u + k)\partial u . V(u^2 - k^2)$$
$$= 4acu\partial u V(u^2 - k^2) + 4ack\partial u V(u^2 - k^2)$$

en hieruit volgt,

$$V = 4ac\int u\partial u V(u^2 - k^2) + 4ack\int \partial u V(u^2 - k^2) \ldots (a)$$

Nu is voor de eerſte integraal klaarblijkelijk,

$$\int u\partial u V(u^2 - k^2) = \tfrac{1}{3}(u^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}$$

Om de tweede integraal te vinden kan men verſchillende wegen inſlaan, wij zullen ons hier tot een der eenvoudigſte bepalen.

Stellen wij $V(u^2 - k^2) = u - y$, dan is $u = u - V(u^2 - k^2)$, hierdoor is verder $u^2 - k^2 = u^2 - 2uy + y^2$, of $2uy = k^2 + y^2$, waardoor $u = \frac{y^2 + k^2}{2y}$ en $\partial u = \frac{1}{2} . \frac{y^2 - k^2}{y^2} . \partial y$, zoodat,

∂u,

$$\partial u \,.\, V(u^2 - k^2) = \partial u \,.\, (u - v) = \tfrac{1}{2}\partial v \,.\, \frac{v^2 - k^2}{v^2} \,.\, \left(\frac{v^2 + k^2}{2v} - v\right).$$

www.libtool.com.cn

$$= -\tfrac{1}{4}\partial v \,.\, \frac{(v^2 - k^2)^2}{v^3}$$

$$= -\tfrac{1}{4} v \partial v + \tfrac{1}{2} k^2 \,.\, \frac{\partial v}{v} - \tfrac{1}{4} \,.\, k^4 \,.\, \frac{\partial v}{v^3}$$

en hieruit volgt terſtond,

$$\int \partial u \, V(u^2 - k^2) = -\tfrac{1}{8} v^2 + \tfrac{1}{2} k^2 \, Log. \, v + \frac{k^4}{8 v^2}$$

$$= \tfrac{1}{8} \,.\, \frac{k^4 - v^4}{v^2} + \tfrac{1}{2} k^2 \,.\, Log. \, v.$$

Nu is $v(u + V(u^2 - k^2)) = (u - V(u^2 - k^2))(u + V(u^2 - k^2)) =$
$u^2 - (u^2 - k^2) = k^2$, dus $\frac{k^2}{v} = u + V(u^2 - k^2)$, en bijgevolg is,

$$\frac{k^4 - v^4}{v^2} = \frac{k^4}{v^2} - v^2 = (u + V(u^2 - k^2))^2 - (u - V(u^2 - k^2))^2$$

$$= 4u \, V(u^2 - k^2)$$

waaruit dan volgt, dat wij hebben,

$$\int \partial u \, V(u^2 - k^2) = \tfrac{1}{2} u \, V(u^2 - k^2) + \tfrac{1}{2} k^2 \, Log. \, (u + V(u^2 - k^2))$$

Brengen wij nu de gevondene integralen over in de vergelijking (a), dan komt er

$$V = 4ac \times \tfrac{1}{3}(u^2 - k^2)^{\frac{3}{2}} + 4ack \times \tfrac{1}{2} u \, V(u^2 - k^2) + \ldots$$
$$4ack \times \tfrac{1}{2} k^2 \, Log. \, (u - V(u^2 - k^2))$$

$$= \tfrac{4}{3} ac(u^2 - k^2)^{\frac{3}{2}} + 2acku(u^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} + 2ack^3 \, Log. \, (u - V(u^2 - k^2))$$

waarbij nog eene conſtante moet worden gevoegd.

Nu is $u = z - k = z - \frac{f}{2b} = -\frac{f}{2b} + V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right)$,

dus is $u^2 - k^2 = \frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b} V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right)$, en dit ſubſtituerende komt er,

$$V = \tfrac{4}{3} ac \,.\, \left\{\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b} V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

$$ac \frac{f}{b} \left\{\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b} V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{-\frac{f}{2b} + V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right)\right\} +$$

$$\frac{acf^3}{4b^3} Log. \left\{-\frac{f}{2b} + V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right) + V\left\{\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b} V\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2}\right)\right\}\right.$$

Om

Om de constante C te bepalen, welke nog bij deze integraal moet worden gevoegd, merken wij op, dat de inhoud verdwijnen moet voor $x = o$, en dit geeft ons,

$$C + 2ack^3 \; Log. \frac{f}{2b} = o$$

waaruit volgt $C = - 2ack^3 \; Log. \frac{f}{2b}$, waardoor dan onze verbeterde integraal wordt,

$$V = \tfrac{1}{3} ac \left\{ \frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b} \sqrt{\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} \right)} \right\}^{\frac{3}{2}} \times \ldots$$

$$\ldots \left\{ 4 \left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} \right) - \frac{f}{b} \sqrt{\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} \right)} - \frac{3f^2}{3b^2} \right\} + \ldots$$

$$\frac{acf^3}{4b^3} Log. \left\{ \frac{f}{2b} + \sqrt{\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} \right)} - \sqrt{\left\{ \frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b} \sqrt{\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} \right)} \right\}} \right\} -$$

$$\frac{acf^3}{4b^3} Log. \frac{f}{2b}.$$

Willen wij hierdoor den inhoud van het geheele vlak POQ bepalen, dan is $x = a - a \frac{f^2}{b^2}$ en dus $\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} = 1$, waardoor wij verkrijgen,

$$V = \tfrac{1}{3} ac \left(1 - \frac{f}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \times \left(4 - \frac{f}{b} - \frac{3f^2}{b^2} \right) - \ldots$$

$$\frac{acf^3}{4b^3} \left\{ Log. \left(1 - \frac{f}{2b} + \sqrt{\left(1 - \frac{f}{b} \right)} \right) - Log. \frac{f}{2b} \right\}$$

Stelt men $f = o$, dan valt de snede POQ op BAC, en de gevondene inhoud moet alzoo, in dit geval, veranderen in die van de parabool BAC, en werkelijk vindt men, door $f = o$ te stellen, voor onzen inhoud $\frac{2}{3} ac = \frac{2}{3} a \times 2c = \frac{2}{3}$ AE $\times$ BC, hetwelk juist de inhoud van de parabool BAC is.

Hadden wij den inhoud van het vlak P'O'Q *Fig.* 163. willen berekenen, dan zouden wij gevonden hebben,

$$\partial V = 2c \partial x \sqrt{\left\{ \frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} + \frac{f}{b} \sqrt{\left(\frac{x}{a} + \frac{f^2}{b^2} \right)} \right\}}$$

welke op dezelfde wijze kan behandeld worden, als wij, in den loop van deze oplossing, voor den inhoud van het vlak OPQ, hebben aangewezen.

CCXLI. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door U. HUGUENIN.

De vergelijking $4y^2 - x^2 - 12x + 36 = \pm 2(2y + x)\sqrt{(36 - x^2)}$ *door punten te conſtrueren, alsmede de groetſte ordinaten en buigpunten te bepalen, aannemende dat x en y regthoekig op elkander ſtaande coördinaten zijn?*

OPLOSSING. Door U. HUGUENIN.

Wanneer wij de opgegevene vergelijking van worteltekens zuiveren en volgens de magten van y rangſchikken, dan verandert dezelve in,

$$\left.\begin{array}{l} 16y^4 - 288y^2 - 576xy + 5x^4 + 24x^3 + 1296 \\ \quad - 8x^2y^2 + 16x^3y - 72x^2 - 864x \\ \quad - 96xy^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots (1)$$

Het is meer dan waarſchijnelijk, dat deze vergelijking, voor elke bijzondere waarde van x, vier verſchillende waarden van y bevat; zulks is blijkbaar voor $x = 0$, wijl de vergelijking voor dit geval overgaat in

$$16y^4 - 288y^2 + 1296 = 0,$$

dat is, na herleiding, in $(y^2 - 9)^2 = 0$, eene vergelijking welke twee gelijke wortels $y = 3$, en twee andere gelijke wortels $y = -3$ bevat. Hoezeer men nu ook, voor elke andere waarde van x, door de oplosſing van eene vierdemagts vergelijking, de overeenkomſtige waarden van y kan vinden, zoude het echter bezwaarlijk zijn, langs dien weg, de natuur der kromme lijn, welke tot deze vergelijking behoort, volledig te leeren kennen. Wij zullen dus beproeven of het mogelijk zij, x en y van elkander af te zonderen, en wij beginnen alzoo met de opgegevene vergelijking te ſchrijven onder eenen vorm

$$4y^2 \mp 4y\sqrt{(36 - x^2)} + (36 - x^2) = 12x \pm 2x\sqrt{(36 - x^2)}$$

en dan blijkt terſtond, dat het eerſte lid het ſtelkundig vierkant is van $2y \pm \sqrt{(36 - x^2)}$, waardoor wij hebben

$$2y \mp \sqrt{(36 - x^2)} = \sqrt{\{12x \pm 2x\sqrt{(36 - x^2)}\}}$$

Het tweede lid, laat mede eene vierkants-worteltrekking toe, om-

omdat $(12x)^2 - (2x\sqrt{(36 - x^2)})^2 = 4x^4$ een rationaal quadraat is; door de bekende leerwijze vinden wij voor den wortel

www.libtool.com.cn

$$\sqrt{\{12x \pm 2x\sqrt{(36 - x^2)}\}} = \pm\sqrt{(6x + x^2)} \pm \sqrt{(6x - x^2)}$$

en hierdoor verkrijgen wij dan eindelijk,

$$2y = \pm\sqrt{(6x - x^2)} \pm \sqrt{(6x + x^2)} \pm \sqrt{(36 - x^2)} \quad (2)$$

Uit deze vergelijking blijkt dadelijk, dat x niet negatief, en niet grooter positief dan 6 kan zijn, daar alsdan y onbestaanbaar zou worden; voorts blijkt uit het dubbelde teeken, van elken term, dat voor iedere waarde welke men aan x geeft en welke tusschen o en 6 begrepen is, er vier verschillende waarden van y zullen plaats hebben, want stelt men kortheidshalve $\sqrt{(6x - x^2)} = A$; $\sqrt{(6x + x^2)} = B$ en $\sqrt{(36 - x^2)} = C$, dan heeft men,

$$2y = \pm A \pm B \pm C$$

en hieruit ontstaan de vier wortels,

$$2y = A + B + C$$
$$2y = -A + B + C$$
$$2y = A - B + C$$
$$2y = A + B - C$$

en op dezelfde wijze heeft men ook,

$$2y = -A - B - C$$
$$2y = A - B - C$$
$$2y = -A + B - C$$
$$2y = -A - B + C.$$

Welke vier laatste wortels, gelijk zijn aan de vier eerste, doch met het tegengestelde teeken, en dit toont dus aan, dat de kromme lijn, welke tot deze vergelijking behoort, uit twee volmaakt gelijke, doch tegengestelde deelen bestaat.

Ten einde den vorm der kromme lijn te leeren kennen, stelle men in de drie wortelgrootheden A, B en C, achtervolgens x gelijk o, 1, 2, 3, 4, 5 en 6, en berekene derzelver waarden, zoo ontstaat hieruit het volgende tafeltje:

www.libtool.com.cn

x	$\sqrt{(6x-x^2)}$	$\sqrt{(6x+x^2)}$	$\sqrt{(36-x^2)}$	$A+B+C$
0	0,0000000	0,0000000	6,0000000	6,0000000
1	2,2360680	2,6457513	5,9160798	10,7978991
2	2,8284271	4,0000000	5,6568543	12,4852814
3	3,0000000	5,1961524	5,1961524	13,3923048
4	2,8284271	6,3245553	4,4721359	13,6251183
5	2,2360680	7,4161985	3,3166248	12,9688813
6	0,0000000	8,4852814	0,0000000	8,4852814

Deelt men nu de in de laatste kolom opgegevene getallen door 2, en trekt men van deze helften, achtervolgens de daarmede overeenstemmende waarden van A, B en C af, dan verkrijgt men de vier eerste waarden van y, namelijk,

	Waarden van y			
x	$\frac{1}{2}(A+B+C)$	$\frac{1}{2}(-A+B+C)$	$\frac{1}{2}(A-B+C)$	$\frac{1}{2}(A+B-C)$
0	3,0000000	3,0000000	3,0000000	— 3,0000000
1	5,3989495	3,1628815	2,7531982	— 0,5171303
2	6,2426407	3,4142136	2,2426407	0,5857864
3	6,6966524	3,6966524	1,5005000	1,5005000
4	6,8125591	3,9841320	0,4880038	2,3404132
5	6,4844406	4,2482726	— 0,9317579	3,1678158
6	4,2426407	4,2426407	— 4,2426407	4,2426407

Men stelle nu, dat XY *Fig.* 164, de lijn der abscissen zij, en O de oorsprong der abscissen, voorts neme men op eene willekeurig aangenomene schaal $x = (0;1) = 1$; $x = (0;2) = 2$ enz. tot $x = (0;6) = 6$, en trekke door de punten 0, 1, 2, 3, 4, 5 en 6 onbepaalde lijnen, welke XY regthoekig doorsnijden; vervolgens make men, ingevolge het laatste berekende tafeltje, voor de verschillende waarden van y

0, A = 3,0000000	0, A = 3,0000000	0, A = 3,0000000	0, A′ = −3,00000
1, B = 5,3989495	1, *b* = 3,1628815	1, β = 2,7531982	1, H = −0,51731
2, C = 6,2426407	2, *c* = 3,4142136	2, γ = 2,2426407	2, I = +0,58578
3, D = 6,6966524	3, *d* = 3,6966524	3, δ = 1,5005000	3, δ = +1,5005
4, E = 6,8125591	4, *e* = 3,9841320	4, ε = 0,4880038	4, K = 2,3404
5, F = 6,4844406	5, *f* = 4,2483726	5, φ = −0,9317579	5, L = 3,1678
6, G = 4,2426407	6, *g* = 4,2426407	6, G′ = −4,2426407	6, G = 4,2426

Zoo men voorts de punten A, B, C, D, E, F en G, door eene kromme lijn verbindt, zal deze den eerſten poſitieven tak onzer figuur voorſtellen, terwijl de lijn, welke door A, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* en G getrokken wordt, de tweede poſitieve tak, de lijn, welke door A, β, γ, δ, ε, φ en G′ gaat, de derde, en de lijn, die door A′, H, I, ϑ, K, L en G loopt, de vierde poſitieve tak zal zijn, en hieruit blijkt, dat de vier eerſte *wortels* of waarden van *y*, tot vier verſchillende takken der kromme lijn behooren. Maakt men voorts in eene tegengeſtelde rigting 1 B′, 2 C, 3 D′ *enz.* gelijk 1 B, 2 C, 3 D *enz.*, alsmede 1 *b*′, 2 *c*′, 3 *d*′ *enz.* gelijk 1 *b*, 2 *c*, 3 *d enz.*, en zoo met de overige takken, dan ontſtaan, door de verbinding van al *deze nieuwe* punten, de takken A′B′C′D′E′F′G′; A′*b*′*c*′*d*′*e*′*f*′G′; A′β′γ′δ′ε′φ′G′ en AH′I′ϑ′K′L′G′, welke de vier tegengeſtelde waarden van *y* bepalen.

Uit deze conſtructie blijkt, dat voor $x = 0$, drie poſitieve ordinaten $y = 0$ A = 3 plaats hebben; welke tot drie verſchillende takken behooren, die zich in een zelfde aanvangspunt A vereenigen, terwijl daarentegen de vierde tak, onder de lijn der abscisſen in A′ op eenen afſtand o A′ = 3 aanvangt, en van daar opwaarts klimmende, zich in het punt G, met den eerſten en tweeden tak vereenigt, op den afſtand van 6, G = 4,2426407 boven de lijn der abscisſen. De derde poſitieve tak loopt van A, boven de lijn der abscisſen, naar G′ beneden dezelve, en vereenigt zich aldaar met den eerſten, tweeden en vierden tak der tegengeſtelde wortels; daarentegen heeft de derde negatieve tak zijnen oorſprong in A′, en gaat opwaarts naar het punt G, boven de lijn der abscisſen, waar zich dezelve met den eerſten, tweeden

den en vierden positieven tak vereenigt. Eindelijk, wijl de derde en vierde positieve tak, een gelijke ordinaat 3 β, voor dezelfde abscis 03 hebben, zoo snijden deze takken elkander in β, hetgeen ook met den derden en vierden negatieven tak, voor dezelfde abscis in β' plaats heeft; en daar voorts deze zelfde takken, zich onder en boven de lijn der abscisfen bevinden, zoo moeten zij dezelve in eenig punt doorsnijden.

www.libtool.com.cn

Om deze snijpunten te bepalen, stellen wij in de vergelijking (1), $y = 0$, hetgeen ons geeft,

$$5x^4 + 24x^3 - 72x^2 - 864x + 1296 = 0.$$

Daar nu, ten gevolge der teekens, deze vergelijking 2 positieve en 2 negatieve wortels kan bevatten, en er echter geene negatieve waarden voor x kunnen plaats hebben, zoo bevat dezelve flechts 2 positieve beftaanbare wortels, welke men vindt door voor x achtervolgens te ftellen 0, 1, 2, 3, 4, 5 en 6, waaruit blijken zal, dat dezelve tusfchen 1 en 2 en tusfchen 4 en 5 gelegen zijn. Wanneer men nu deze wortels benadert, dan verkrijgt men voor den eerften wortel $x = 1{,}4336$, en voor den tweeden $x = 4{,}3938$. Neemt men dus, op de lijn der abscisfen, 0 U $= 1{,}4336$ en 0 V $= 4{,}3938$, zoo blijkt uit den loop des derden en vierden taks, dat de vierde door U en de derde door V zal gaan, en daar voorts de vier negatieve of tegengeftelde takken, volmaakt met de positieve overeenkomen, zoo volgt hieruit, dat de vierde en de derde negatieve tak insgelijks door de punten U en V zullen gaan, om welke reden men dan de punten U en V, zoo wel als de punten β en β' *dubbele* punten van onze kromme lijn noemen kan. Op gelijke wijze kunnen wij de punten A, A'; C en C' *vierdubbele* punten der kromme lijn noemen, omdat zich, in elk dezer punten, vier takken van onze kromme lijn vereenigen.

Wanneer men de vergelijking (2) differentieert, verkrijgt men de uitdrukking,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{3-x}{2\sqrt{(6x-x^2)}} \pm \frac{3+x}{2\sqrt{(6x+x^2)}} \mp \frac{x}{2\sqrt{(36-x^2)}}$$

$$= \pm\frac{3-x}{2A} \pm \frac{3+x}{2B} \mp \frac{x}{2C}$$

deze uitdrukking is alzoo, voor

www.libtool.com.cn

den 1en tak . . . $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3-x}{2A} + \frac{3+x}{2B} - \frac{x}{2C}$

den 2en tak . . . $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3-x}{2A} + \frac{3+x}{2B} - \frac{x}{2C}$

den 3en tak . . . $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3-x}{2A} - \frac{3+x}{2B} - \frac{x}{2C}$

den 4en tak . . . $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3-x}{2A} + \frac{3+x}{2B} + \frac{x}{2C}$.

Deze uitdrukking ſtelt nu de trigonometriſche tangens voor, van den hoek, welke de raaklijn van eenig punt met de as der abscisſen maakt. Om dus te onderzoeken, hoedanig het met de raaklijn der takken in het punt A gelegen is, ſtelle men $x = o$, waardoor $A \doteq B = o$ en $C = 6$ wordt, daar nu $x = o$, voor al de takken den laatſten term $\frac{x}{2C} = o$ maakt, zoo wordt $\frac{\partial y}{\partial x}$, voor

den eerſten tak . . . . $\frac{3}{0} + \frac{3}{0} = +\infty$

den tweeden tak . . $-\frac{3}{0} + \frac{3}{0} = o$

den derden tak . . . . $\frac{3}{0} - \frac{3}{0} = o$

den vierden tak . . . . $\frac{3}{0} + \frac{3}{0} = \infty$

hetgeen aantoont, dat de raaklijn van den eerſten en vierden tak, loodregt op de lijn der abscisſen ſtaat, doch dat de raaklijn van den tweeden en derden tak, met de lijn der abscisſen evenwijdig loopt. Wordt derhalve AT evenwijdig met XY getrokken, zoo is dezelve raaklijn van den tweeden en derden tak in A, en daar oA de kleinſte ordinaat voor den tweeden, en de grootſte ordinaat voor den derden tak is, zoo is de raaklijn tuſſchen deze twee takken gelegen, hetgeen aantoont dat A een keerpunt is. Wanneer men wijders, in de uitdrukking $\frac{\partial y}{\partial x}$, de teekens der termen verandert, en dan $x = o$ ſtelt, zoo verkrijgt men hetzelfde reſultaat met tegengeſtelde teekens, in dier voege, dat, als men door A', eene lijn A'T', evenwijdig met XY trekt, deze de raaklijn van den tweeden en derden negatieven tak in A' zal zijn, zoodat ook A' een keerpunt is.

Stel

Stelt men, in de voor $\frac{\partial y}{\partial x}$ gevondene waarden, $x = 6$, zoo verkrijgt men de rigtingen van de raaklijnen voor het punt G. Men vindt namelijk, voor

www.kitool.com.cn

den 1^en^ *tak* $-\frac{8}{6} + \frac{9}{12\sqrt{2}} - \frac{6}{6} = -\infty$

den 2^en^ *tak* $+\frac{8}{6} + \frac{9}{12\sqrt{2}} - \frac{6}{6} = -\infty$

den 3^en^ *tak* $-\frac{8}{6} - \frac{9}{12\sqrt{2}} - \frac{6}{6} = -\infty$

den 4^en^ *tak* $-\frac{8}{6} + \frac{9}{12\sqrt{2}} + \frac{6}{6} = +\infty$

omdat $\frac{6}{6}$ altijd als het dubbeld van $\frac{8}{6}$ moet worden beſchouwd, en dus $\frac{9}{12\sqrt{2}}$, tegen deze oneindige waarden, verdwijnt. Hieruit blijkt dan, dat de raaklijnen van al de punten G, zoo wel als die van de vier punten G′, loodregt op de as XY ſtaan.

Om voorts de grootſte of kleinſte ordinaten te bepalen, ſtelle men de waarde, voor $\frac{\partial y}{\partial x}$ gevonden, gelijk o, uit welke vergelijking

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\frac{3-x}{2\sqrt{(6x-x^2)}} \pm \frac{3+x}{2\sqrt{(6x+x^2)}} \mp \frac{x}{2\sqrt{(36-x^2)}} = 0,$$

wanneer men uit dezelve de worteltekens doet verdwijnen, na behoorlijke herleiding gevonden wordt

$$5x^6 - 216x^4 - 216x^3 + 2916x^2 = 0,$$

dat is, door x^2 deelende,

$$5x^4 - 216x^2 - 216x + 2916 = 0,$$

Daar nu ons Voorſtel geene negatieve waarden voor x toelaat, zoo heeft deze vergelijking twee poſitieve en twee onbeſtaanbare wortels, en wanneer men den eerſten door benadering zoekt, dan verkrijgt men $x = 3{,}8246$ en $x = 5{,}75168$.

Voor $x = 3{,}8246$, vindt men verder

$$A = \sqrt{(6x - x^2)} = 2{,}88445$$
$$B = \sqrt{(6x + x^2)} = 6{,}12986$$
$$C = \sqrt{(36 - x^2)} = 4{,}62307$$

waaruit volgt, dat de vier ordinaten y, voor dit punt van de as, aan de vier verschillende takken zijn,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\ A + B + C) &= 6{,}81969\\
\tfrac{1}{2}(-A + B + C) &= 3{,}93424\\
\tfrac{1}{2}(\ A - B + C) &= 0{,}68883\\
\tfrac{1}{2}(\ A + B - C) &= 2{,}19562
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Deze vier ordinaten zijn ondertusschen niet alle als maxima of minima te beschouwen; want wanneer men $x = 3{,}8246$, in de waarde van $\frac{\partial y}{\partial x}$, voor de verschillende takken gevonden, substitueert, zal men bevinden, dat alleen voor den eersten tak

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3 - x}{2A} + \frac{3 + x}{2B} - \frac{x}{2C} = \ldots$$

$$- \frac{0{,}8246}{2 \times 2{,}88445} + \frac{6{,}8246}{2 \times 6{,}12986} - \frac{3{,}8246}{2 \times 4{,}62307} = \ldots$$

$$- 0{,}14294 + 0{,}55666 - 0{,}41364 = 0{,}00008$$

en dus ten naaste bij gelijk o wordt, terwijl de drie overige waarden van $\frac{\partial y}{\partial x}$, voor deze waarde van x, niet gelijk o zullen worden. Maakt men dus $oP = x = 3{,}8246$ en $PM = \frac{1}{2}(A + B + C) = 6{,}81969$, zoo is deze de grootste ordinaat, welke tot het punt M des eersten positieven taks behoort, en op dezelfde wijze $PM' = PM$ nemende, zal PM' de grootste ordinaat des eersten negatieven taks zijn, zijnde de overige ordinaten van het punt P geen maxima noch minima, omdat voor dezelve $\frac{\partial y}{\partial x}$ niet gelijk o wordt.

Voor den tweeden wortel $x = 5{,}75168$ vinden wij

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{(6x - x^2)} = 1{,}195097\\
B &= \sqrt{(6x + x^2)} = 8{,}222375\\
C &= \sqrt{(36 - x^2)} = 1{,}708252.
\end{aligned}$$

De vier ordinaten, welke tot deze abscis behooren, zijn dus

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\ A + B + C) &= 5{,}562862\\
\tfrac{1}{2}(-A + B + C) &= 4{,}367765\\
\tfrac{1}{2}(\ A - B + C) &= -\ 2{,}659513\\
\tfrac{1}{2}(\ A + B - C) &= 3{,}854610
\end{aligned}$$

Stelt men voorts, deze waarden van x in de vier verschillende uit-

uitdrukkingen van $\frac{\partial y}{\partial x}$, zoo vindt men dat alleen de tweede,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3-x}{2A} + \frac{3+x}{2B} - \frac{x}{2C} = \ldots\ldots$$

$$\frac{2,75168}{2 \times 1,195097} + \frac{8,75168}{2 \times 8,222375} - \frac{5,75168}{2 \times 1,708252} = \ldots$$

$$1,151237 + 0,532186 - 1,683490 = -0,000067$$

en dus ten naaste bij gelijk o wordt, de tweede positieve en negatieve tak hebben dus een maximum, dat gevonden wordt, door $OQ = x = 5,75168$ en $QN = QN' = y = 2,367765$ te nemen; terwijl de overige ordinaten tot het punt Q behoorende, noch maxima noch minima aanwijzen.

Ten einde nu nog te onderzoeken, of bij de verschillende takken onzer kromme lijn ook buigpunten plaats hebben, differentiere men de vergelijking,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{3-x}{2\sqrt{(6x-x^2)}} \mp \frac{3+x}{2\sqrt{(6x+x^2)}} \mp \frac{x}{2\sqrt{(36-x^2)}}$$

andermaal, en stelle ∂x standvastig, dan zal men verkrijgen,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp \frac{9}{2(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{9}{2(6x+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{36}{2(36-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

stellende deze uitdrukking gelijk o, en doende uit dezelve de wortel-uitdrukkingen, door magtsverheffing verdwijnen, dan verkrijgt men, na herleiding,

$$65x^6 - 288x^5 + 216x^4 - 3456x^3 + 11664x^2 = 0$$

en als men door x^2 deelt,

$$65x^4 - 288x^3 + 216x^2 - 3456x + 11664 = 0$$

Deze vergelijking heeft twee onbestaanbare wortels, en de bestaanbare zijn begrepen tusschen 3 en 4 en tusschen 4 en 5. Wanneer men dezelve door benadering zoekt, zal men vinden $x = 3,2859$ en $x = 4,2589$ ten naaste bij. Deelt men onze vergelijking door $(x - 3,2859)(x - 4,2589)$, dan verkrijgt men tot quotient, na door 65 gedeeld te hebben;

$$x^2 + 3,114x + 12,825 = 0$$

welke klaarblijkelijk twee onbestaanbare wortels heeft.

Voor den eersten wortel $x = 3,2859$ vindt men

$$A = \sqrt{(6x - x^2)} = 2,986345$$
$$B = \sqrt{(6x + x^2)} = 5,523876$$
$$C = \sqrt{(36 - x^2)} = 5,020245$$

d's zijn voor deze abscis de ordinaten, in de vier verſchillende takken,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\ A + B + C) &= 6{,}770203\\
\tfrac{1}{2}(-A + B + C) &= 3{,}783858\\
\tfrac{1}{2}(\ A - B + C) &= 1{,}246387\\
\tfrac{1}{2}(\ A + B - C) &= 1{,}749958
\end{aligned}$$

www.libool.com.cn

Daar nu de gevondene uitdrukking voor $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, gelijk o moet worden, wanneer men in dezelve $x = 3{,}2859$ ſubſtitueert, zoo kan men daardoor ontdekken, bij welke takken een buigpunt plaats heeft; en daar men door deze ſubſtitutie vinde,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp 0{,}168963 \mp 0{,}026698 \mp 0{,}142265$$

zoo is het duidelijk, dat alleen,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -0{,}168963 + 0{,}026698 + 0{,}142265$$

en $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +0{,}168963 - 0{,}026698 - 0{,}142265$$

gelijk o worden. Dat nu deze uitdrukkingen alleen tot den tweeden tak, boven en beneden XY, kunnen behooren, blijkt hieruit, dat voor dezen tweeden tak, boven gevonden is,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-(3-x)}{2\sqrt{.6x - x^2)}} + \frac{3+x}{2\sqrt{(6x + x^2)}} - \frac{x}{2\sqrt{(36 - x^2)}}$$

waarvan de differentiaal is,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{9}{2(6x - x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{2(6x + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{18}{(36 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en het is dus deze tweede tak, welke voor $x = 3{,}2859$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$ maakt. De ordinaat, tot het buigpunt behoorende, is dus $y = \frac{1}{2}(-A + B + C) = 3{,}783858$.

Voor den tweeden wortel $x = 4{,}2589$ vindt men $A = 2{,}723081$, $B = 6{,}609963$ en $C = 4{,}226320$, dus heeft men, voor de vier ordinaten, met deze abscis overeenſtemmende,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\ A + B + C) &= 6{,}779682\\
\tfrac{1}{2}(-A + B + C) &= 4{,}056601\\
\tfrac{1}{2}(\ A - B + C) &= 0{,}169719\\
\tfrac{1}{2}(\ A + B - C) &= 2{,}553362
\end{aligned}$$

Berekent men, ingevolge deze waarde van x, de waarde van $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, dan vindt men,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp 0{,}2228593 \mp 0{,}0155817 \mp 0{,}238443$$

welke alleen gelijk o wordt, voor de teekens,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0{,}2228593 + 0{,}0155817 - 0{,}238443$$

of $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -0{,}2228593 - 0{,}0155817 + 0{,}238443$$

omdat deze waarden gelijk $\mp$ 0,000002 en dus ten naaste bij gelijk o zijn. Even als voor den voorgaanden wortel, zien wij hier, dat deze waarden tot den vierden positieven en negatieven tak behooren, en dat dus de ordinaten voor de buigpunten in deze takken zijn $\mp \frac{2}{3}(A + B - C) = \mp 2{,}553362$.

Uit dit onderzoek blijkt dan, dat alleen bij de tweede en vierde positieve en negatieve takken, buigpunten kunnen plaats hebben. Maakt men hier voor oR $= x =$ 3,2859 en oS $= x =$ 4,2589 en men laat door de punten R en S loodlijnen op XY gaan, zoo zullen de ordinaten RW $=$ RW′ $= y = \mp$ 3,783858 de buigpunten W en W′ en de ordinaten SZ $=$ SZ′ $= y = \mp$ 2,553362 de buigpunten Z en Z′ bepalen.

Uit het volgende tafeltje, hetwelk ik voor de ordinaten aan de vier verschillende takken berekend heb, zal men duidelijk zien, dat voor de abscis $x =$ 3,8246 de ordinaat $y =$ 6,819690, aan den eersten positieven tak alleen een maximum is, en dat de ordinaten 3,93424; 0,68883; 2,19562 van den tweeden, derden en vierden tak geen maxima zijn; zoo als ook uit dit tafeltje blijkt, dat voor $x =$ 5,752, alleen de ordinaat $y =$ 4,3743 van den tweeden tak, een maximum is, terwijl de ordinaten welke, met deze waarde van x, in den eersten, derden en vierden tak overeenstemmen, geen maxima zijn.

TAFEL *voor de ordinaten y in de vier positieve takken.*

www.libtool.com.cn

abscisſen x	*Eerſte tak* $\frac{1}{6}(A+B+C)$	*Tweede tak* $\frac{1}{6}(-A+B+C)$	*Derde tak* $\frac{1}{6}(A-B+C)$	*Vierde tak* $\frac{1}{6}(A+B-C)$
3	6,696652	3,696652	1,500500	1,500500
3,2	6,747309	3,753983	1,321446	1,671879
3,2859	6,770203	3,783858 **	1,246387	1,749958
3,5	6,799530	3,840135	1,033248	1,926145
3,75	6,817594	3,912847	0,770901	2,133846
3,8246	6,819690 *	9,93424	0,68883	2,19562
4	6,812559	3,984132	0,488004	2,340413
4,2589	6,779681	4,056601	0,169719	2,553363 **
4,5	6,72062	4,12186	—0,15324	2,75199
5	6,484441	4,248373	—0,931758	3,167816
5,752	5,5548	4,3743 *	—2,6695	3,84763
5,9	5,11949	4 350949	—3,260078	4,028192
6	4,242641	4,242641	—4,242641	4,242641

De getallen met * geteekend toonen de máxima en die met ** geteekend de buigpunten aan.

Daar de tweede tak AWG zich, bij het buigpunt, weinig kromt, heb ik denzelven in *Fig.* 165, op eene grootere ſchaal geteekend, en de abscisſen, op de horizontale raaklijn AT, uitgezet, waardoor men ziet dat *dWc* bijna eene regte lijn is.

Om de rigting der raaklijnen, voor de beide buigpunten te bepalen, heeft men, volgens het voorgaande, voor de rigting der raaklijnen van den tweeden tak,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3-x}{2\sqrt{(6x-x^2)}} + \frac{3+x}{2\sqrt{(6x+x^2)}} - \frac{x}{2\sqrt{(36-x^2)}}$$

daar nu voor het buigpunt, van dezen tweeden tak, $x = 3,2859$ is, zoo is $\sqrt{(6x-x^2)} = 2,986345$; $\sqrt{(6x+x^2)} = 5,523816$ en $\sqrt{(36-x^2)} = 5,020245$, en men heeft dus,

∂y

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0,2859}{2 \times 2,986345} + \frac{6,2859}{2 \times 5,593816} - \frac{3,2859}{2 \times 5,082245}$$
$$= 0,0478679 + 0,5689816 - 0,3274640$$
$$= 0,2893855 = \mathit{Tang.}\ 16°8'22''8.$$

www.bibliotheek.com.cn

Trekt men nu, door het punt W *Fig.* 165, eene lijn tt', welke met Wω eenen hoek $tW\omega$ maakt gelijk $90° - 16°8'22''8 = 73°51'37''2$, zoo zal tt' het holronde en bolronde gedeelte des taks AWN alleen in het punt W aanraken.

Voor het buigpunt Z aan den vierden positieven tak, is $x = 4,2589$, en de uitdrukking voor de rigting van dezelver raagens is,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3 - x}{2\sqrt{(6x - x^2)}} + \frac{3 + x}{2\sqrt{(6x + x^2)}} + \frac{x}{2\sqrt{(36 - x^2)}}$$
$$= -\frac{1,2589}{2 \times 2,723081} + \frac{7,2589}{2 \times 6,609963} + \frac{4,2589}{2 \times 4,226320}$$
$$= -0,2311517 + 0,5490850 + 0,5038543$$
$$= 0,8217876 = \mathit{Tang.}\ 39°24'46''6.$$

De lijn rr', welke in Z de kromme lijn aanraakt, maakt dus met XY eenen hoek van $39°24'46''6$.

Aanmerking. Door I. R. Schmidt.

Wij kunnen niet nalaten om bij deze oplossing nog eene gemakkelijke constructie te voegen, door welke, voor elke waarde van x, de vier overeenkomstige waarden van y, zonder berekening, meetkunstig gevonden worden.

In den loop van de voorgaande oplossing is gevonden

$$y = \pm \tfrac{1}{2} A \pm \tfrac{1}{2} B \pm \tfrac{1}{2} C$$

waarin $A = \sqrt{(6x - x^2)}$; $B = (6x + x^2)$ en $C = \sqrt{(36 - x^2)}$. Laat nu op XY $= 6$, *Fig.* 166, eenen cirkel beschreven worden dan is, voor eenige willekeurige abscis XP $= x$, PQ $= \sqrt{XP \times PY} = \sqrt{x(6 - x)} = \sqrt{(6x - x^2)} = A$.

Beschrijven wij verder uit X als middelpunt, met XY $= 6$ als straal, eenen cirkel, dan is voor de abscis XP $= x$, de ordinaat PS $= \sqrt{(XS^2 - XP^2)} = \sqrt{(36 - x^2)} = C$.

Beschrijvende eindelijk eene gelijkzijdige hyperbool XRZ, waarvan X de top en XY de rigting van de as is, en in welke de

de beide asſen gelijk 6 zijn, dan is voor de abscis XP, de overeenkomſtige ordinaat $PR = \sqrt{x(x+6)} = \sqrt{(6x+x^2)} = B$.

Is dus XP eene gegevene abscis van de voorgeſtelde kromme lijn, dan zullen de vier overeenkomſtige waarden van de ordinaat y zijn,

$$y = \tfrac{1}{2}(PQ + PR + PS)$$
$$y = \tfrac{1}{2}(-PQ + PR + PS)$$
$$y = \tfrac{1}{2}(PQ - PR + PS)$$
$$y = \tfrac{1}{2}(PQ + PR - PS)$$

en hierdoor kan men voor elke abscis de vier ordinaten zeer gemakkelijk bepalen, en bijgevolg de geheele kromme lijn, door punten conſtruëren, deze conſtructie zal al de gevondene eigenſchappen van onze kromme lijn volkomen bevestigen.

CCXLII. VOORSTEL.

Door I. R SCHMIDT.

Eene parabool te conſtrueren, welke eene gegevene lijn in een gegeven punt aanraakt, en bovendien door twee gegevene punten gaat?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en U. HUGUENIN.

PQ *Fig.* 167, zij de gegevene lijn, C het gegeven raakpunt en A en B de gegevene punten, door welke de parabool moet gaan.

Indien ons de hoek Φ bekend was, welke de middellijn CE, van het raakpunt C, met de raaklijn CQ maakt, benevens de parameter p tot deze middellijn CE behoorende, dan zou alles gevonden zijn, want dan is hieruit het brandpunt en de top zeer gemakkelijk te bepalen. Trachten wij dan dezen hoek Φ en den parameter p van de middellijn CE te vinden.

Trekken wij AA′ en BB′ loodregt op PQ, dan zijn de lijnen AA′ en BB′, benevens de ſtukken GA′ en GB′ bekend. Wij ſtellen alzoo $AA' = a$, $BB' = a'$; $A'C = b$ en $B'C = b'$.

Onderſtellen wij nu, dat CE de middellijn van het punt C is, en trekken wij A′D evenwijdig met CE en AE evenwijdig met PQ. Stellende dan $CE = x$ en $AE = y$, dan is $y^2 = px$.

Ver-

Verder is $AD = y - b$. Nu is in den regthoekigen driehoek $AA'D$, $AD = A'D \times Cos.\ \phi$ en $AA' = A'D \times Sin.\ \phi$, zoodat wij hebben $y - b = x.\ Cos.\ \phi$ en $a = x.\ Sin.\ \phi$.

Uit de tweede vergelijking is $x = \frac{a}{Sin.\ \phi}$ en dit in de eerste brengende, komt er $y = b + x\ Cos.\ \phi = b + a.Cot.\ \phi$; deze waarden van x en y overgebragt in de vergelijking $y^2 = p\,x$, verkrijgt men

$$(a\ Cot.\ \phi + b)^2 = \frac{a}{Sin.\ \phi} \cdot p \ldots\ldots (1).$$

Op dezelfde wijze voor het punt B te werk gaande, zullen wij vinden,

$$(a'\ Cot.\ \phi + b')^2 = \frac{a'}{Sin\ \phi} \cdot p \ldots\ldots (2)$$

zoodat wij twee vergelijkingen hebben, om de twee onbekende grootheden ϕ en p te bepalen.

Deelen wij onze twee vergelijkingen door elkander, dan verdwijnt p, en wij hebben ter bepaling van ϕ de vergelijking

$$\frac{(a\ Cos.\ \phi + b)^2}{(a'\ Cos.\ \phi + b')^2} = \frac{a}{a'}$$

of aan beide zijden den wortel trekkende,

$$\frac{a\ Cot.\ \phi + b}{a'\ Cot.\ \phi + b'} = \sqrt{\frac{a}{a'}}$$

en hieruit de waarde van $Cot.\ \phi$ afzonderende,

$$Cot.\ \phi = -\frac{b - b'\sqrt{\frac{a}{a'}}}{a - a'\sqrt{\frac{a}{a'}}} = -\frac{b\sqrt{a'} - b'\sqrt{a}}{a\sqrt{a'} - a'\sqrt{a}}$$

Hierdoor ϕ bepaald hebbende, wordt p gevonden door de vergelijking,

$$p = \frac{(a\ Cos.\ \phi + b)^2 \cdot Sin.\ \phi}{a}$$

Heeft men den hoek ϕ en den parameter p bekend, dan kan de middellijn CE getrokken worden. Maakt men dan $\angle PCF = \angle ECQ = \phi$, dan gaat CF door het brandpunt, nemende dan $CF = \frac{1}{4}p$, dan zal F het brandpunt zijn. De lijn PF, evenwijdig aan CE, is alsdan de as, en trekkende CM loodregt op PF

PF en deelende PM midden door in T, dan is T de top. Waardoor dan de geheele parabool bepaald is.

Er blijft dus alleen nog over, aan te toonen hoe de waarde van ϕ en p, door middel van onze opgegevene formulen, geconstrueerd kunnen worden.

www.libtool.com.cn

I. Constructie van ϕ. *Fig.* 168.

1°. *Trek door* C *eene onbepaalde loodlijn* DD', *maak* CE $=$ BB' *en* CF $=$ AA', *en beschrijf op* FE *eenen halven cirkel; snijdende* PQ *in* G.

2°. *Trek* EG, *en trek* B'I *loodregt op* EG, *snijdende* DD' *in* K. *Maak* A'L $=$ CK *en* CM $=$ CG $-$ CF; *trek* LM, *en* CN *evenwijdig* LM, *dan zal* CN *de middellijn van het raakpunt zijn, dat is, men zal hebben* $\angle$ QCN $= \phi$.

Bewijs. CG $= \sqrt{\text{CF} \times \text{CE}} = \sqrt{\text{AA}' \times \text{BB}'} = \sqrt{aa'} = a\sqrt{\frac{a'}{a}}$. Omdat verder de driehoeken CGE, B'GI en B'CK gelijkvormig zijn, zoo is CE : CG $=$ B'C : CK, en dus is $\text{CK} = \frac{\text{B'C} \times \text{CG}}{\text{CE}} = \frac{b'\sqrt{aa'}}{a'} = b'\sqrt{\frac{a}{a'}}$

Eindelijk is $\text{CL} = \text{CA}' - \text{A'L} = b - b'\sqrt{\frac{a}{a'}}$ en $\text{CM} = \text{CG} - \text{CF} = a\sqrt{\frac{a}{a'}} - a$, dus *Cot.* QCN $=$ *Cot.* CLM $= \frac{b - b'\sqrt{\frac{a}{a'}}}{a\sqrt{\frac{a}{a'}} - a} = \frac{b - b'\sqrt{\frac{a}{a'}}}{a - a\sqrt{\frac{a}{a'}}} =$ *Cot.* ϕ, waardoor onze constructie bewezen is.

II. Constructie van p. *Fig.* 168.

Trek AN *evenwijdig met* PQ, *en zoek een derde evenredige tot* CN *en* AN *deze zal de parameter* p *van de middellijn zijn.*

Bewijs. Want NA $=$ RN $+$ AR $=$ CR *Tang.* RCN $+$ A'C $= a$ *Cot.* $\phi + b$, en CN $=$ CR *Sec.* RCN $= a$ *Cosec.* $\phi = \frac{a}{\text{Sin. } \phi}$, dus $p = \frac{\text{NA}^2}{\text{CN}} = \frac{(a \text{ Cot. } \phi + b)^2 \cdot \text{Sin. } \varphi}{a}$.

Het

Het is ook bovendien klaar, dat p de derde evenredige tot CN en AN moet zijn, omdat A een punt van de parabool zijnde CN en AN coördinaten van de middellijn CN zijn.

AANMERKING. Er bestaat nog eene tweede parabool, welke aan ons Voorstel voldoet. Want omdat $\sqrt{\frac{a}{a'}}$, zoo wel negatief als positief kan genomen worden, zoo hebben wij voor eene tweede waarde van ϕ,

$$Cot.\ \phi = -\frac{b + b'\sqrt{\frac{a}{a'}}}{a + a'\sqrt{\frac{a}{a'}}}.$$

Indien men de voorgaande constructie met oplettendheid heeft gevolgd, dan kan de constructie, van deze tweede waarde, geen zwarigheid ontmoeten; het eenigste verschil is, dat hier $A'L' = CM$, en $CM' = CG + CF$ moet genomen worden en dan zal $\angle CL'M' = 180° - \phi$ zijn. Makende dus $\angle PCN' = \angle CL'M'$, dan is CN' de middellijn van deze tweede parabool, welke twee de parabool wij in de figuur, om geen verwarring te veroorzaken, hebben weggelaten.

CCXLIII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

In eenen driehoek ABE Fig. 169, waarvan de zijden $AB = a$, $AE = p$ en $BE = q$ gegeven zijn, is eene lijn CD getrokken, van eenig punt C in de zijde AE, tot eenig punt D, in de zijde BE, en hierdoor wordt een vierhoek ABDC gevormd, waarvan de zijde $AC = b$ gegeven is, doch de zijden BD en DC onbekend zijn. Stellen wij nu, dat de lengte der zijden, van denen vierhoek, onveranderd blijve; dan kunnen wij, ondertusschen de punten A en B als vaste punten, doch C en D als veranderlijke punten aannemen, en alzoo de zijden AC en BD, om de punten A en B doen bewegen. De vierhoek zal hierdoor verschillende gedaanten aannemen, en in gevolge van deze verschillende gedaanten, zullen de lijnen AE en BD, welke zich eerst in het punt E vereenigde, verschillende standen verkrijgen. Indien nu de vierhoek ABDC, zulk eenen stand ABD'C' aanneemt, dat de zijden

den BD′ en AC′ aan elkander evenwijdig loopen, en dat op dit oogenblik de hoek BAC′ gelijk aan eenen gegevenen hoek β wordt, zoo vraagt men, door deze bepalingen, de lengte van de onbekende zijden BD en CD te vinden?

www.libool.nl

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

In den driehoek AEB is bekend $AB = a$, $AE = p$ en $BE = q$, ſtellen wij dus $a + p + q = 2s$, dan worden de hoeken α en γ berekend, door de formulen,

$$Cos.\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{pq}} \text{ en } Cos.\ \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s-q)}{ap}}.$$

Trekken wij nu de diagonalen BC en BC′, dan hebben wij,

$$C'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ \beta$$
$$CB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ \gamma$$

en deze van elkander aftrekkende,

$$C'B^2 - CB^2 = 2ab\ (Cos.\ \gamma - Cos.\ \beta)$$

Stellen wij nu $BD = BD' = x$ en $DC = D'C' = y$, dan hebben wij, de hoeken D en D′ gelijk ϕ en ϕ' ſtellende,

$$C'B^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ Cos.\ \phi'$$
$$CB^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ Cos.\ \phi$$

en deze twee van elkander aftrekkende,

$$C'B^2 - CB^2 = 2xy\ (Cos.\ \phi - Cos.\ \phi')$$

en ſtellende de twee waarden van $C'B^2 - CB^2$ aan elkander gelijk, en deelende door 2,

$$xy\ (Cos.\ \phi - Cos.\ \phi') = ab\ (Cos.\ \gamma - Cos.\ \beta) \quad . \quad (1)$$

Nu is $y\ Cos.\ \phi = DC \times Cos.\ \phi = DR = x - BR = x - (BE - ER) = x - (q - EC \times Cos.\ \alpha) = x - (q - (p - b)\ Cos\ \alpha)$, ſtellende dus $q - (p - b)\ Cos.\ \alpha = m$, dan is $y\ Cos.\ \phi = x - m$.

Verder is $y\ Cos.\ (180^\circ - \phi') = C'D' \times Cos.\ C'D'R' = D'R' = BR' - BD' = AC' + BK - BD' = b + a\ Cos.\ (180^\circ - \beta) - x = b - a\ Cos.\ \beta - x$, bijgevolg $y\ Cos.\ \phi' = x - (b - a\ Cos\ \beta)$, en ſtellende $b - a\ Cos.\ \beta = n$, dan wordt dit $y\ Cos.\ \phi' = x - n$.

Daar dan $y\ Cos.\ \phi = x - m$ en $y\ Cos.\ \phi' = x - n$ is, zoo is $y\ (Cos.\ \phi - Cos.\ \phi') = n - m$, en hierdoor verandert de vergelijking (1) in,

$$x\ (n - m) = ab\ (Cos.\ \gamma - Cos.\ \beta)$$

waar-

waaruit gevonden wordt,

$$x = \frac{ab\ (Cos.\ \gamma - Cos\ \beta)}{n - m}.$$

www.libtool.com.cn

Wanneer x op deze wijze berekend is, kunnen wij y op verſchillende wijzen bepalen. Uit de vergelijkingen $x^2 + y^2 - 2xy\ Cos\ \phi = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ \gamma$, en $y\ Cos.\ \phi = x - m$, volgt bij voorbeeld,

$$y^2 - x^2 + 2mx = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ \gamma$$

en hieruit verkrijgen wij,

$$y = V\left\{x^2 - 2mx + a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ \gamma\right\}$$

op dezelfde wijze vinden wij uit den vierhoek ABD'C',

$$y = V\left\{x^2 - 2nx + a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ \beta\right\}$$

uit den driehoek DEC volgt,

$$y = V\left\{(q-x)^2 + (p-b)^2 - 2(q-x)(p-b)\ Cos.\ \alpha\right\}$$

en het zou niet moeijelijk zijn, om nog meer wegen aan te wijzen, waardoor y gevonden kan worden, wanneer x bekend is

Gevolg. Trekken wij de formulen ter berekening van x te zamen, dan vinden wij, dat x bepaald wordt door het volgende ſtelſel van vergelijkingen,

$$1°.\ a + p + q = 2s$$

$$2°.\ Cos.\ \tfrac{1}{2}\gamma = V\frac{s(s-q)}{ap}$$

$$3°.\ Cos.\ \tfrac{1}{2}\alpha = V\frac{s(s-n)}{pq}$$

$$4°.\ m = q - (p-b)\ Cos.\ \alpha$$

$$5°.\ n = b - a\ Cos.\ \beta$$

$$6°.\ x = \frac{ab\ (Cos.\ \gamma - Cos.\ \beta)}{n - m}$$

terwijl men de tweede waarde, welke wij voor y gevonden hebben, gemakkelijk kan herleiden tot,

$$7°.\ y = V\left\{(x-n)^2 + a^2\ Sin^2.\ \beta\right\}$$

waardoor dan ons Voorſtel is opgelost.

CCXLIV. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door R. van Wijk Jz.

Twee getallen te vinden, welke 4 van elkander verschillen en waarvan de som der vierkanten met zesmaal het grootste opgeteld, het getal 160 oplevert? (68)

Oplossing. Door R. van Wijk Jz., M. B. Jung, A. van der Swan, R. Loratto en G. J. Sarlet.

Stel het eene getal x, dan is het andere $x + 4$, en dit geeft ons de vergelijking,

$$x^2 + (x + 4)^2 + 6\,(x + 4) = 160$$

of, ontwikkeld en volgens de magten van x gerangschikt,

$$2\,x^2 + 14\,x + 40 = 160$$

hetgeen door 2 gedeeld en herleid, geeft

$$x^2 + 7\,x = 60$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt,

$$x = -\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{(60 + \tfrac{49}{4})} = -\tfrac{7}{2} \pm \tfrac{17}{2}.$$

Wij hebben dus voor de gevraagde getallen deze twee antwoorden. Vooreerst $x = 5$ en $x + 4 = 9$, en ten andere $x = -12$ en $x + 4 = -8$.

CCXLV. VOORSTEL.

Door R. van Wijk Jz.

Drie personen hebben te zamen 30 gulden te deelen, de tweede ontvangt 4 gulden meer dan de eerste, en de som der vierkanten van de drie deelen is 332. Hoeveel moet elk ontvangen? (69)

Op-

(68) A. van Bemmelen, *Lesfen over de Algebra of Stelkunst, 2e deel, pag.* 90. N°. 13.

(69) *Idem*, N°. 14.

OPLOSSING. Door R. VAN WIJK Jz., A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, M. B. JUNG en G. J. SARLET.

www.libtool.com.cn

Stel dat de eerste ontvangt x gulden, dan ontvangt de tweede $x + 4$, en de derde $26 - 2x$ gulden; dit geeft ons de vergelijking,

$$x^2 + (x + 4)^2 + (26 - 2x)^2 = 332$$

dit ontwikkeld en herleid komt er,

$$x^2 - 16x + 60 = 0$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt,

$$x = 8 \pm \sqrt{(64 - 60)} = 8 \pm 2.$$

Wij verkrijgen alzoo twee verschillende antwoorden, de eerste ontvangt namelijk $x = 6$, de tweede $x + 4 = 10$ en de derde $26 - 2x = 14$ gulden, of de eerste ontvangt $x = 10$, de tweede $x + 4 = 14$ en de derde $26 - 2x = 6$ gulden.

CCXLVI. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Van twee reeksen, eene rekenkunstige en eene meetkunstige, elk van 4 termen, zijn de eerste termen aan elkander gelijk; de tweede term der meetkunstige reeks bevat $1\frac{1}{2}$ maal de tweede term der rekenkunstige reeks; en de derde term der rekenkunstige reeks $2\frac{1}{4}$ maal in den derden term der rekenkunstige reeks begrepen. Indien nu nog bekend is, dat de som der uiterste termen van de meetkunstige reeks gelijk 81 is, vraagt men de termen van deze beide reeksen te vinden?

OPLOSSING. Door A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, M. B. JUNG en R. VAN WIJK Jz.

Stel de rekenkunstige reeks x, $x + y$, $x + 2y$ en $x + 3y$, en de meetkunstige reeks x, xz, xz^2 en xz^3, dan is aan het eerste vereischte voldaan, dat namelijk de eerste termen, van beide reeksen, gelijk moeten zijn, en het Voorstel geeft verder aanleiding tot de vergelijkingen,

$$xz = 1\tfrac{1}{2}(x+y) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$xz^2 = 2\tfrac{2}{3}(x+2y) \quad . \quad . \quad (2)$$
$$x + xz^3 = 81 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

www.libtool.com.cn

Uit de eerſte dezer drie vergelijkingen, vinden wij gemakkelijk $x = \frac{3y}{2z-3}$, en uit de tweede $x = \frac{24y}{5z^2-12}$; deze twee waarden van x aan elkander gelijk ſtellende, komt er

$$\frac{3y}{2z-3} = \frac{24y}{5z^2-12}$$

of door $3y$ deelende,

$$\frac{1}{2z-3} = \frac{8}{5z^2-12}$$

en vermenigvuldigende dit met $(2z-3)(5z^2-12)$, dan komt er na herleiding,

$$5z^2 - 16z + 12 = 0$$

deze vergelijking oplosſende vinden wij $z = 2$ of $z = 1\frac{1}{5}$.

Nemen wij de eerſte waarde $z = 2$, dan is uit de derde vergelijking $x = \frac{81}{1+z^3} = 9$, en uit de eerſte $y = \frac{2xz - 3x}{3} = 3$, en dan zijn de reekſen,

Rekenk. reeks 9 . 12 . 15 . 18
Meetk. reeks 9 . 18 . 36 . 72.

Nemen wij de tweede waarde van z, namelijk $z = \frac{6}{5}$, dan is $x = \frac{81}{1+z^3} = \frac{10125}{341}$ en $y = \frac{2xz - 3x}{3} = -\frac{2025}{341}$, waardoor wij, tot tweede antwoord verkrijgen,

Rek. Reeks $\frac{10125}{341}, \frac{8100}{341}, \frac{6075}{341}, \frac{4050}{341}$

Meetk. Reeks $\frac{10125}{341}, \frac{12150}{341}, \frac{14580}{341}, \frac{17496}{341}$

welke twee verſchillende antwoorden, beide aan al de vereiſchten van het Voorſtel voldoen.

CCXLVII. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Een gezelſchap van jonge lieden heeft ergens 8 gulden en 15 ſtuivers verteerd, waaraan zij gelijkelijk moeten betalen; doch daar

er zich onder hen twee vrouwen bevinden, welke van de betaling zijn uitgeſloten, zoo wordt het aandeel van elk der overige hierdoor met 10 *ſtuivers vermeerderd. Hoeveel perſonen zijn er geweest? en hoeveel moest elk betalen?* (70)

www.libtool.com.cn

OPLOSSING. Door H. VAN KRAAIJENOORD, G. J. SARLET, R. LOBATTO, R. VAN WIJK Jz., A. VAN DER SWAN en M. B. JUNG.

Stel dat er waren x perſonen, dan zouden zij, indien er geene vrouwen onder hen geweest waren, elk hebben moeten betalen $\frac{175}{x}$ ſtuivers; doch daar er twee vrouwen in het gezelſchap zijn, zoo zijn er ſlechts $x - 2$ perſonen om de vertering te voldoen, en elk betaalt dus $\frac{175}{x-2}$ ſtuivers; daar dit nu 10 ſtuivers meer moet bedragen, dan de eerstgevondene waarde, zoo verkrijgen wij de vergelijking,

$$\frac{175}{x} + 10 = \frac{175}{x-2}$$

of met het product der noemers vermenigvuldigende,

$$175(x-2) + 10x(x-2) = 175x$$

hetgeen, ontwikkeld zijnde, geeft,

$$175x - 350 + 10x^2 - 20x = 175x$$

dat is, na verplaatſing der termen,

$$10x^2 - 20x = 350$$

of door 10 deelende,

$$x^2 - 2x = 35$$

uit welke vergelijking $x = 7$ of $x = 5$.

De tweede wortel kan hier niet in aanmerking komen, omdat het aantal der perſonen niet negatief kan zijn, en wij hebben dus alleen $x = 7$, dat is, er zijn 5 mannen en twee vrouwen geweest.

Het blijkt hieruit dat de ſom van f 8 . 15, door vijf perſonen betaald wordende, elk van dezelve hiertoe f 1 . 15 heeft moeten bijdragen.

CCXLVIII.

(70) A. VAN BEMMELEN, *Leſſen over de Algebra of Stelkunst, III deel, pag.* 90. N°. 11.

CCXLVIII. VOORSTEL.

www.libtool.com.cn

Door I. R. SCHMIDT.

Een cirkel, met twee punten P en Q binnen denzelven, gegeven zijnde, Fig 170, vraagt men door die punten eenen anderen cirkel te beſchrijven, zoodanig dat de koorde RS, welke de twee cirkels gemeen hebben, eene middellijn van dien anderen cirkel is?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Trek PQ en deel dezelve midden door in B, dan zal het middelpunt van den gevraagden cirkel in de lijn CD moeten liggen, welke door B loodregt op PQ getrokken wordt. Stel dat O dit middelpunt en RS de gemeene koorde is, en laat getrokken worden AE, AO, AS en OP; indien wij dan ſtellen AE $= a$, EB $= b$, PB $= BQ = c$, AS $= d$ en, BE midden door gedeeld hebbende in M, MO $= x$, dan is OE $= x + \frac{1}{2}b$ en OB $= x - \frac{1}{2}b$, dus $OP^2 = OR^2 = OS^2 = (x - \frac{1}{2}b)^2 + c^2$, en $AO^2 = (x + \frac{1}{2}b)^2 + a^2$, zoodat $AS^2 = d^2 = OA + OS^2 = (x + \frac{1}{2}b)^2 + a^2 + (x - \frac{1}{2}b)^2 + c^2$, dat is, na ontwikkeling,

$$2x^2 + \tfrac{1}{4}b^2 + a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 + c^2 = d^2$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt,

$$x = \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}(d^2 - (a^2 + c^2)) - \tfrac{1}{4}b^2\right\}}$$

Hier uit volgt deze Conſtructie.

Deel PQ *midden door in* B *en trek, door* B, *de lijn* CD *loodregt op* PQ. *Maak* EF $=$ BP *en trek* AF, *dan is* $AF = \sqrt{(a^2 + c^2)}$.

Trek FG *loodregt op* AF, *dan is* $FG = \sqrt{(d^2 - a^2 - c^2)}$ *beſchrijvende dus op* FG *eenen halven cirkel en ſtellende, uit het middelpunt* H, HI *loodregt op* FG, *dan is* $FI^2 = \frac{1}{2}(d^2 - (a^2 + c^2))$.

Deel BE *midden door in* M, *en beſchrijf uit* M, *met* FI *als ſtraal, eenen halven cirkel, ſnijdende* PQ *in* N, *dan is* $BN = \sqrt{BK \times BL} = \sqrt{(FI - \frac{1}{2}b)(FI - \frac{1}{2}b)} = \sqrt{(FI^2 - \frac{1}{4}b^2)} = \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}(d - (a^2 + c^2)) - \tfrac{1}{4}b^2\right\}} = x$.

Ne-

Nemende dus MO = MO′ = BN *dan zullen* O *en* O′ *de middelpunten zijn, van twee cirkels, die aan de vraag beantwoorden, en dan zullen* OP *en* O′P *de ſtralen dezer cirkels zijn.*

www.vhboom.com

AANMERKING. Indien de punten P en Q binnen den gegevenen cirkel liggen, dan is dit vraagſtuk altijd mogelijk, want trekkende AT en AU, dan is $AU^2 = AT^2 + TU^2$, of $d^2 = b^2 + (a+c+QU)^2 = b^2+a^2+c^2+2ac+2(a+c)QU+QU^2$; hieruit blijkt, dat alsdan $d^2 > a^2+b^2+c^2$ en dus $\frac{1}{2}d^2 > \frac{1}{2}(a^2+c^2)+\frac{1}{2}b^2$ is, en dat alzoo zoo veel te meer $\frac{1}{2}d^2 > \frac{1}{2}(a^2+c^2)+\frac{1}{4}b^2$ zal zijn, waaruit volgt: dat, zoolang P en Q binnen den gegevenen cirkel liggen, het gedeelte onder het wortelteeken altijd poſitief zal zijn.

CCXLIX. VOORSTEL.

Door I. R SCHMIDT.

Een cirkel met twee punten P en Q, Fig. 171, binnen of buiten denzelven, gegeven zijnde, vraagt men door deze twee punten eenen anderen cirkel te beſchrijven, zoodanig dat de koorde RS, welke aan beide cirkels gemeen is, eene middellijn van den gegevenen cirkel zij?

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Trek PQ en deel dezelve midden door in B; trek verder door B eene onbepaalde lijn CD, loodregt op PQ, dan moet het middelpunt, van den gevraagden cirkel, zich op deze lijn CD bevinden. Stel dat O dit middelpunt zij, trek AE loodregt op CD en ſtel AE = *a*, BE = *b*, BP = BQ = *c* en AR = AS = *d*. Deel BE midden door in M en ſtel MO = *x*, dan is $BO = \frac{1}{2}b - x$ en $EO = \frac{1}{2}b + x$; dus $AO^2 = (\frac{1}{2}b+x)^2 + a^2$ en $OR^2 = OP^2 = AO^2 + AR^2 = (\frac{1}{2}b+x)^2 + a^2 + d^2$, maar $OP^2 = OB^2 + BP^2 = (\frac{1}{2}b-x)^2 + c^2$, en deze twee waarden van OP^2 aan elkander gelijk ſtellende,

$$(\tfrac{1}{2}b+x)^2 + a^2 + d^2 = (\tfrac{1}{2}b-x)^2 + c^2$$

of, wanneer wij alles ontwikkelen,

$$2bx = c^2 - (a^2 + d^2)$$

waaruit gevonden wordt,

$$x = \frac{c^2 - (a^2 + d^2)}{2b}$$

hetgeen gemakkelijk te conſtrueren is.

www.kitoobaan.cn

AANMERKINGEN. 1°. Dit Voorſtel tot den eerſten graad loopende, is altijd mogelijk, hoe de punten P en Q ook, ten opzigte van den gegevenen cirkel, geplaatst zijn.

2° Indien $c^2 > a^2 + d^2$ is, dan moet MO naar den kant van het punt B genomen worden, doch MO moet naar den kant van E genomen worden, indien $c^2 < a^2 + d^2$ is, want dan wordt x negatief en kan geſchreven worden onder den vorm $x = -\frac{a^2 + d^2 - c^2}{2b}$. Is eindelijk $c^2 = a^2 + d^2$ dan wordt $x = 0$, en dan valt het punt O in M.

3°. Liggen de punten P en Q in den omtrek van den gegevenen cirkel, dan is $a = 0$, en $d^2 - c^2 = b^2$, zoodat $x = -\frac{1}{2}b$ wordt; het punt O valt dan in A, en de gevraagde cirkel valt dan geheel op den gegevenen cirkel.

4°. Liggen eindelijk P, Q en A in eene regte lijn, dan wordt $b = 0$, en bijgevolg $x = \infty$, de gevraagde cirkel wordt in dit geval eene regte lijn welke door de punten P en Q gaat.

CCL. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een cirkel en twee punten P en Q gegeven zijnde, Fig. 172, vraagt men door die punten eenen anderen cirkel te laten gaan, den eerſten in twee punten R en S doorſnijdende, zoodanig dat de koorde RS, welke de ſnijpunten vereenigt, van gegevene lengte zij.

OPLOSSING. Door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

Trek PQ en deel dezelve midden door in B, trek door B de lijn CD loodregt op PQ, en deel, na AE loodregt op CD getrokken te hebben, BE midden door in M. Laat O het mid-

del-

delpunt van den gevraagden cirkel zijn en ſtel $AE = a$, $BM = ME = b$, $BP = BQ = c$, $AR = d$ en $RH = HS = e$, dan is, $MO = x$ ſtellende, $BO = b - x$, $EO = b + x$; $OP^2 = OR^2 = OB^2 + BP^2 = (b - x)^2 + c^2$, en $AO^2 = OE^2 + AE^2 = (b + x)^2 + a^2$. Nu is $HA = \sqrt{(AR^2 - RH^2)} = \sqrt{(d^2 - e^2)}$ en $HO = \sqrt{(OR^2 - HR^2)} = \sqrt{\{(b - x)^2 + c^2 - e^2\}}$ en daar $AH = AO - OH$ is, verkrijgen wij de vergelijking,

$$\sqrt{\{(b+x)^2+a^2\}} - \sqrt{\{(b-x)^2+c^2-e^2\}} = \sqrt{(d^2-e^2)} \quad (\alpha)$$

of quadraterende en overbrengende,

$$2x^2+2b^2+a^2+c^2-d^2 = 2\sqrt{\{(b+x)^2+a^2\}} \times \{(b-x)^2+c^2-e^2\}$$

dat is, wanneer wij andermaal quadrateren,

$$\{2x^2+(a^2+2b^2+c^2-d^2)\}^2 = 4\{(b+x)^2+a^2\} \times \{(b-x)^2+c^2-e^2\}$$

wanneer nu alles ontwikkeld wordt, dan verdwijnt x^4 en x^3, en wij verkrijgen na behoorlijke herleiding,

$$x^2 + \frac{2(a^2+c^2-e^2)b}{4b^2-d^2+e^2}\,x = \frac{4b^2(d^2-e^2)+4a^2(c^2-e^2)-(a^2+c^2-d^2)^2}{4(4b^2-d^2+e^2)}.$$

Stellende dus,

$$\frac{(a^2+e^2-c^2)\,b}{4b^2-d^2+e^2} = p$$

en

$$\frac{4b^2(d^2-e^2)+4a^2(c^2-e^2)-(a^2+c^2-d^2)^2}{4(4b^2-d^2+e^2)} = q^2$$

dan behouden wij nog,

$$x^2 + 2px = q^2$$

waaruit wij vinden,

$$x = -p \pm \sqrt{(p^2+q^2)}.$$

Aanmerkingen. 1°. De formule voor x kan gemakkelijk geconſtrueerd worden, indien men ſlechts vooraf de waarden van p en q conſtrueert; daar deze conſtructie meer langwijlig dan moeijelijk is, zullen wij dezelve achterwege laten.

2°. Het Voorſtel laat klaarblijkelijk twee antwoorden toe, en wordt onmogelijk wanneer $e > d$ is.

3°. Wordt $d = e$, dan gaat dit Voorſtel over in het voorgaande, en wij vinden dan ook werkelijk,

$$x^2 - \frac{c^2-(a^2+d^2)}{2b}\,x + \frac{(c^2-(a^2+d^2))^2}{16b^2} = 0$$

dat

dat is $\left\{x - \frac{c^2 - (a^2 + d^2)}{4b}\right\}^2 = 0$

waaruit $x = \frac{c^2 - (a^2 + d^2)}{4b}$

www.libtool.com.cn

hetgeen, wanneer wij in het oog houden, dat b hier slechts de helft is, van hetgeen b in het voorgaande Voorstel beteekende, volkomen met de aldaar gevondene waarde van x overeenstemt.

4°. Is $e = 0$, dan gaat het Voorstel over in het volgende: „*een cirkel te construeren welke door twee gegevene punten gaat en eenen gegevenen cirkel aanraakt*," onze formulen veranderen alsdan in,

$$p = \frac{(a^2 - c^2)\,b}{4b^2 - d^2}$$

$$q^2 = \frac{4b^2d^2 + 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - d^2)^2}{4(4b^2 - d^2)}$$

$$x = -p \pm \sqrt{(p^2 + q^2)}$$

5°. Willen wij, in plaats van MO $= x$, den hoek EAO $= \phi$ berekenen, dan hebben wij OE $=$ AE $\times$ *Tang.* ϕ of $(b + x) = a\,Tang.\,\phi$, dus $(b + x)^2 = a^2\,Tang^2.\,\phi$ en $(b+x)^2 + a^2 = a^2\,Sec^2.\,\phi$, zoodat $\sqrt{\{(b + x)^2 + a^2\}} = a\,Sec.\,\phi$. Verder is hieruit $b - x = 2b - a\,Tang.\,\phi$, zoodat $\sqrt{\{(b-x)^2+c^2-e^2\}} = \sqrt{\{(2b - a\,Tang.\phi)^2+c^2-e^2\}}$; brengende nu deze waarden in de vergelijking (*a*), dan wordt dezelve,

$a\,Sec.\,\phi - \sqrt{(a^2 - e^2)} = \sqrt{\{(2b - a\,Tang.\phi)^2+c^2-e^2\}}$

af, beide leden tot de tweede magt verheffende,

$a^2\,Sec^2.\,\phi - 2a\,Sec.\,\phi\,\sqrt{(a^2 - e^2)} + (a^2 - e^2) = \ldots$

$a^2\,Tang^2.\,\phi - 4ab\,Tang.\,\phi + 4b^2 + c^2 - e^2$

daar nu $-e^2$ in beide leden verdwijnt, en $a^2\,(Sec^2.\,\phi - Tang^2.\,\phi) = a^2$ is, zoo verkrijgen wij, na door 4 *ab* gedeeld te hebben,

$$Tang.\,\phi - Sec.\,\phi\,\frac{\sqrt{(a^2 - e^2)}}{2b} = \frac{4b^2 + e^2 - a^2 - d^2}{4ab}$$

stellende dus $\frac{\sqrt{(a^2 - e^2)}}{2b} = m$ en $\frac{4b^2 + e^2 - a^2 - d^2}{4ab} = n$, dan komt er,

Tang

$$Tang.\ \phi - m\ Sec.\ \phi = n$$

dat is, $$\frac{Sin.\ \phi}{Cos.\ \phi} - m \times \frac{1}{Cos.\ \phi} = n$$

www.liptool.com.cn

en met $Cos.\ \phi$ multiplicerende,

$$Sin.\ \phi - n\ Cos.\ \phi = m$$

ſtellende nu $n = Tang.\ \mu = \frac{Sin.\ \mu}{Cos.\ \mu}$, dan verandert deze vergelijking in,

$$Sin.\ \phi\ Cos.\ \mu - Sin.\ \mu\ Cos.\ \phi = m\ Cos.\ \mu$$

dat is, $$Sin.\ (\phi - \mu) = m\ Cos.\ \mu$$

waaruit wij twee verſchillende waarden van ϕ vinden, namelijk

1°. . . $\phi = \mu + Boog\ Sin.\ \{m\ Cos.\ \mu\}$

2°. . . $\phi = 180° - \mu - Boog\ Sin.\ \{m\ Cos.\ \mu\}$

ons geheele ſtelſel van vergelijkingen ter berekening van ϕ is aldus,

1°. . . $m = \frac{V\ (d^2 - e^2)}{2b}$

2°. $Tang.\ \mu = \frac{4b^2 + e^2 - a^2 - d^2}{4ab}$

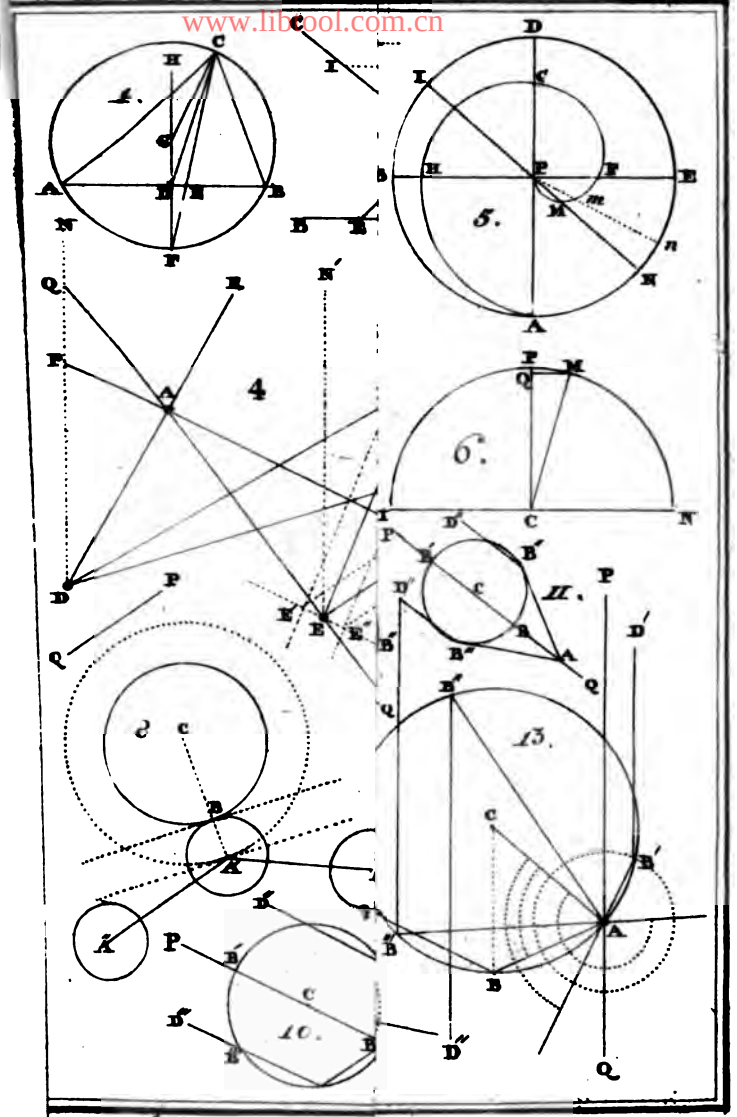
$$= \frac{(2b + a)\ (2b - a) - 4b^2m^2}{4ab}$$

3°. . $\phi = \mu + Boog\ Sin.\ (m\ Cos.\ \mu)$

4°. . $\phi = 180° - \mu - Boog\ Sin.\ (m\ Cos.\ \mu)$

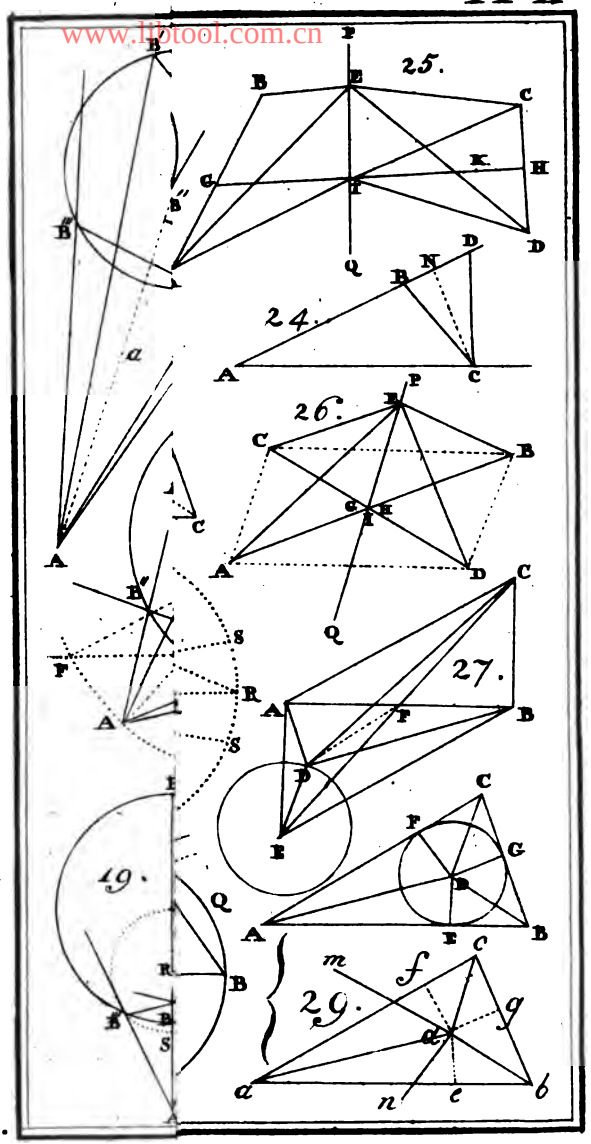
www.libtool.com.cn

www.libpool.com.cn



www.libtool.com.cn

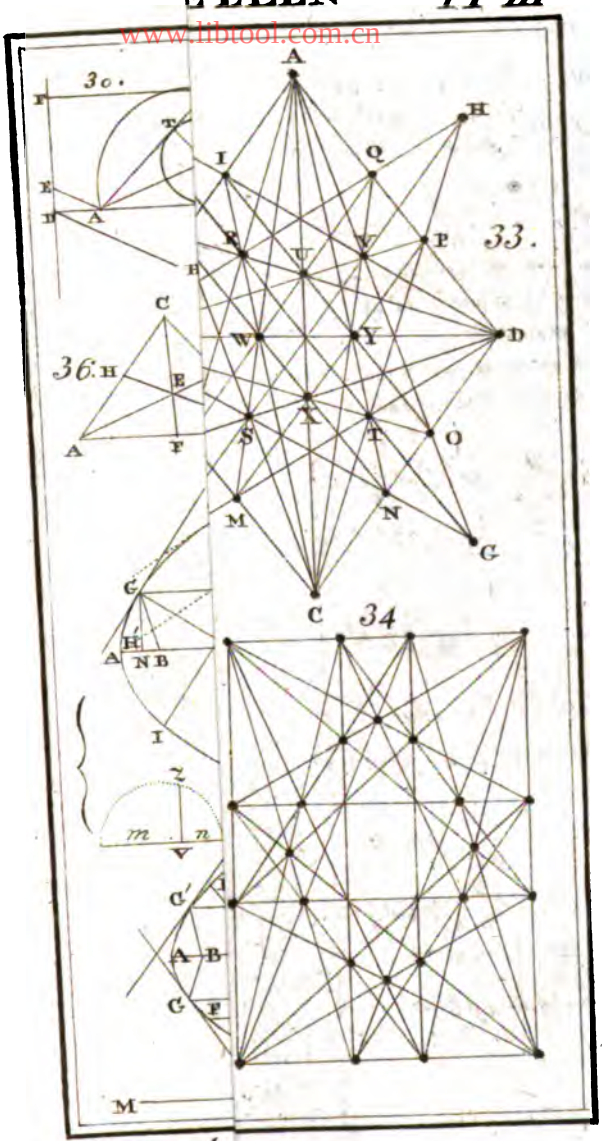
www.libtool.com.cn



IDeel

www.libtool.com.cn

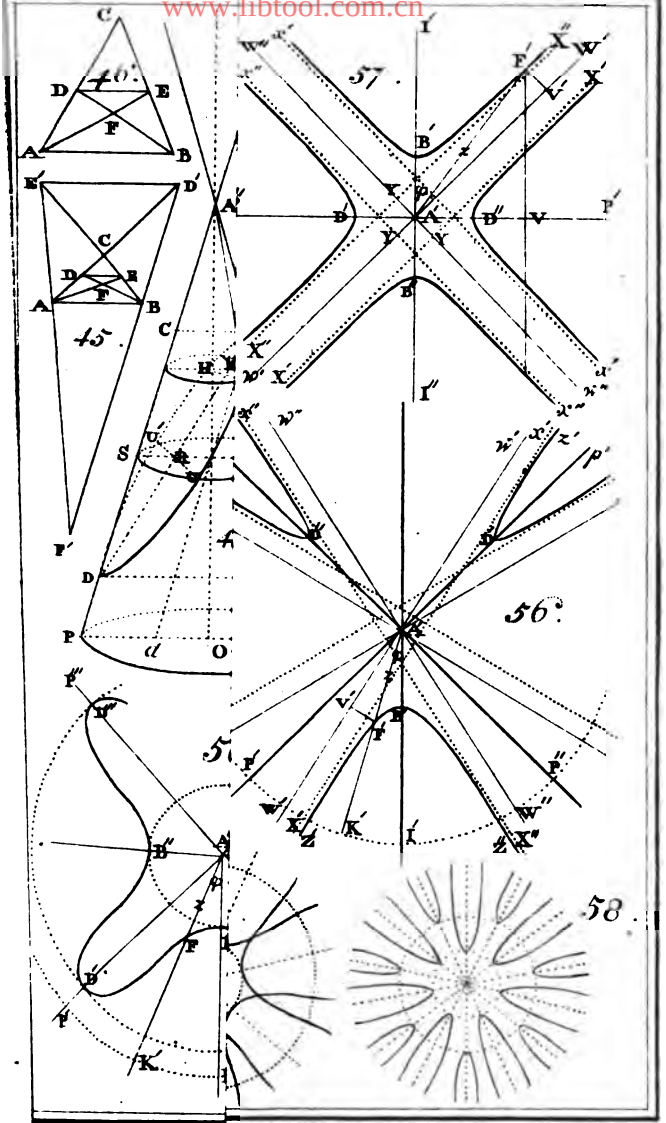
www.libtool.com.cn



I Deel

www.libtool.com.cn

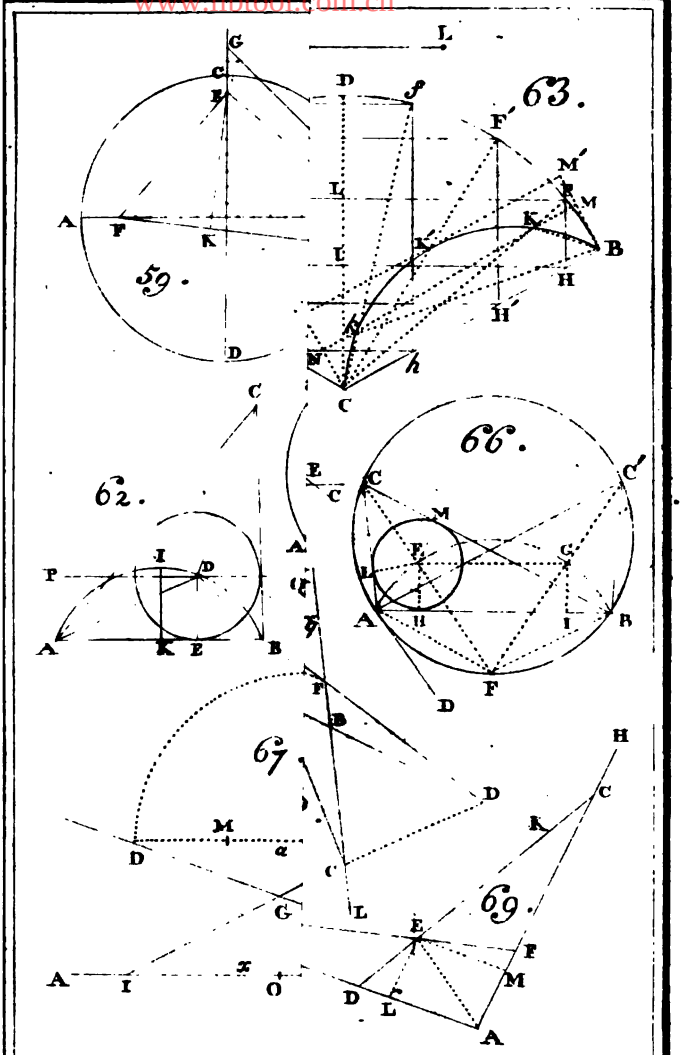
www.libtool.com.cn



I Deel

www.libtool.com.cn

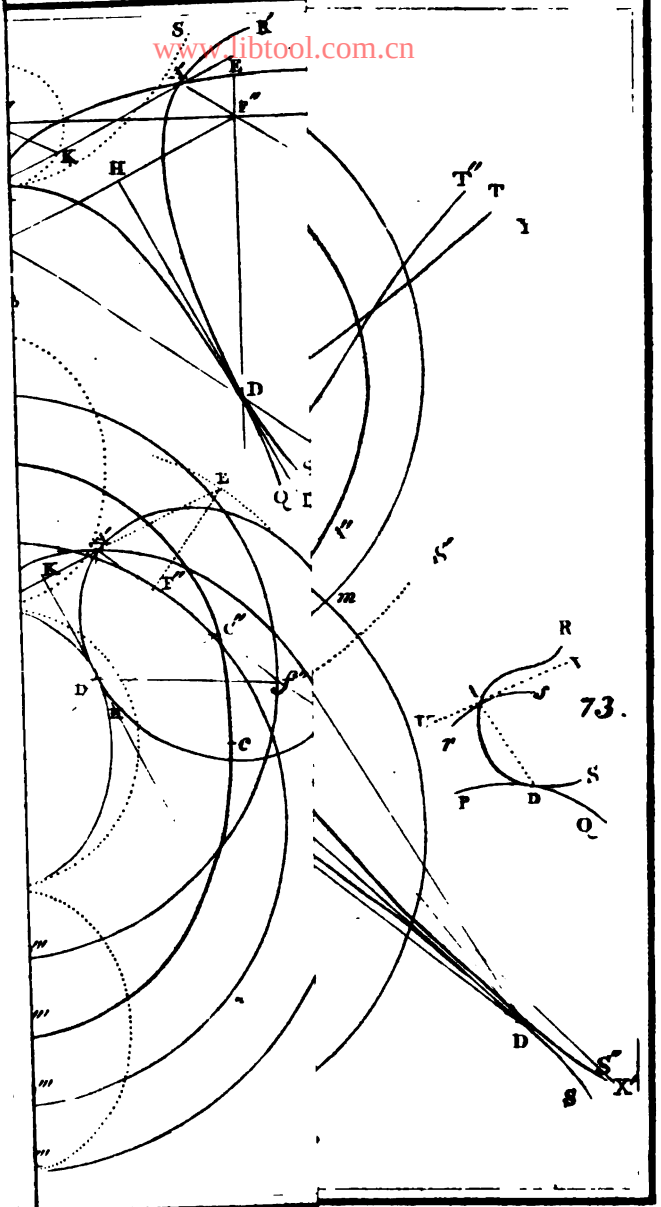
www.libtool.com.cn



IDecl

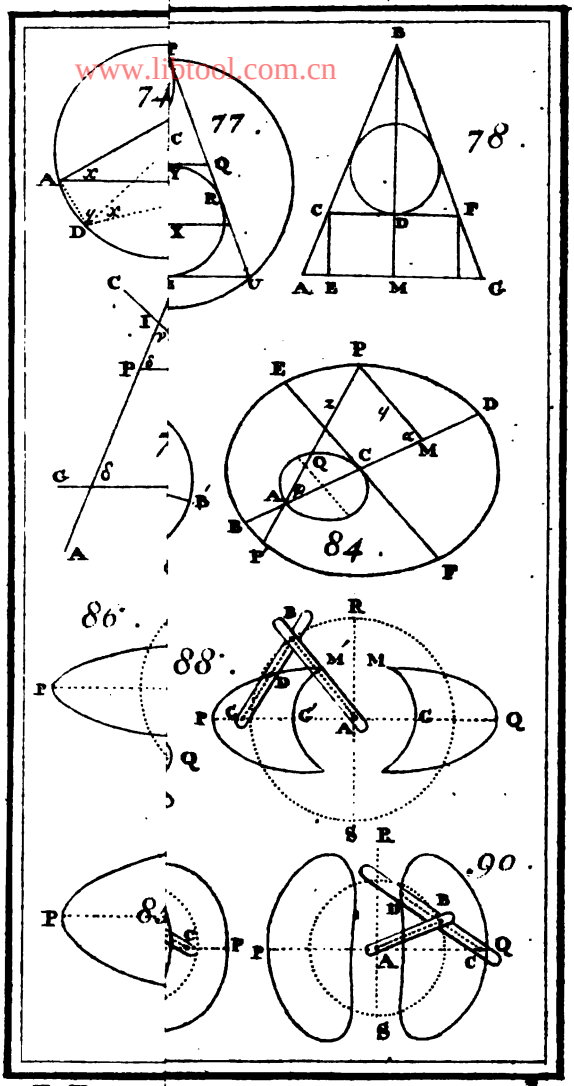
www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn



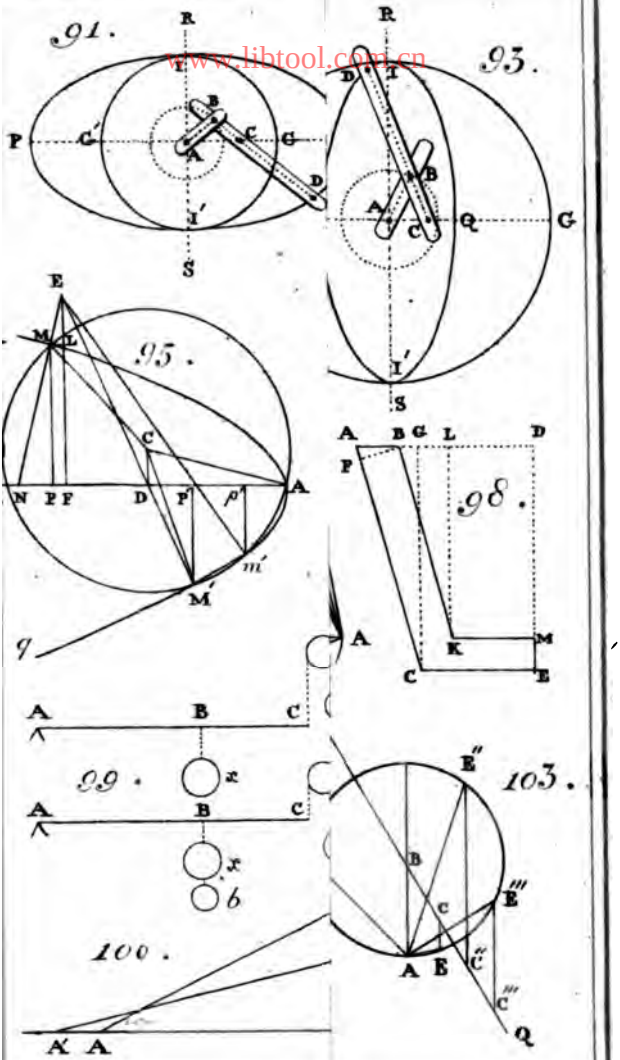
www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn



www.libtool.com.cn

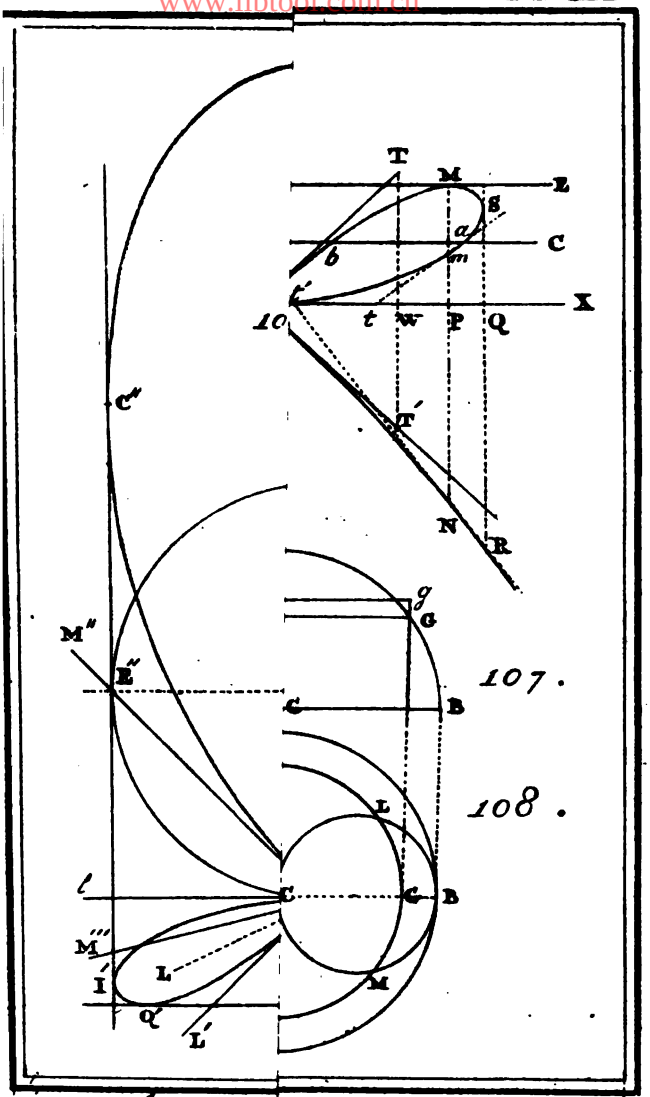
www.libtool.com.cn



Deel.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn



107.

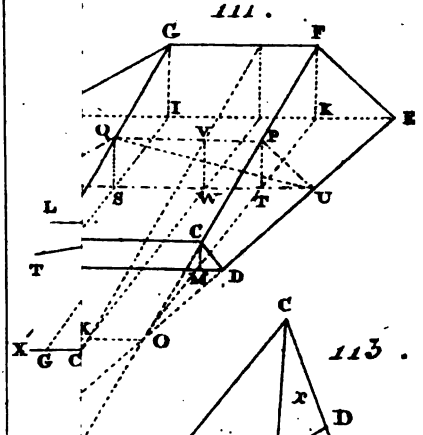
108.

I Deel.

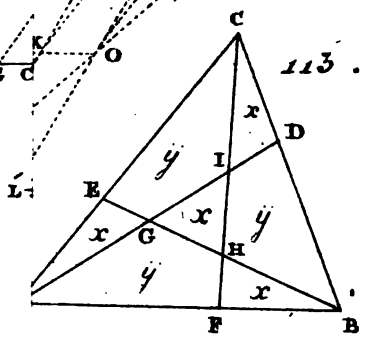
www.libtool.com.cn

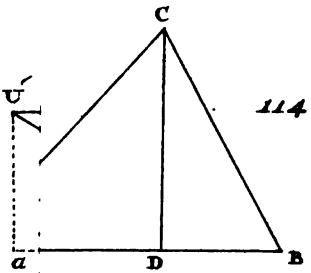
www.libtool.com.cn

111.



113.



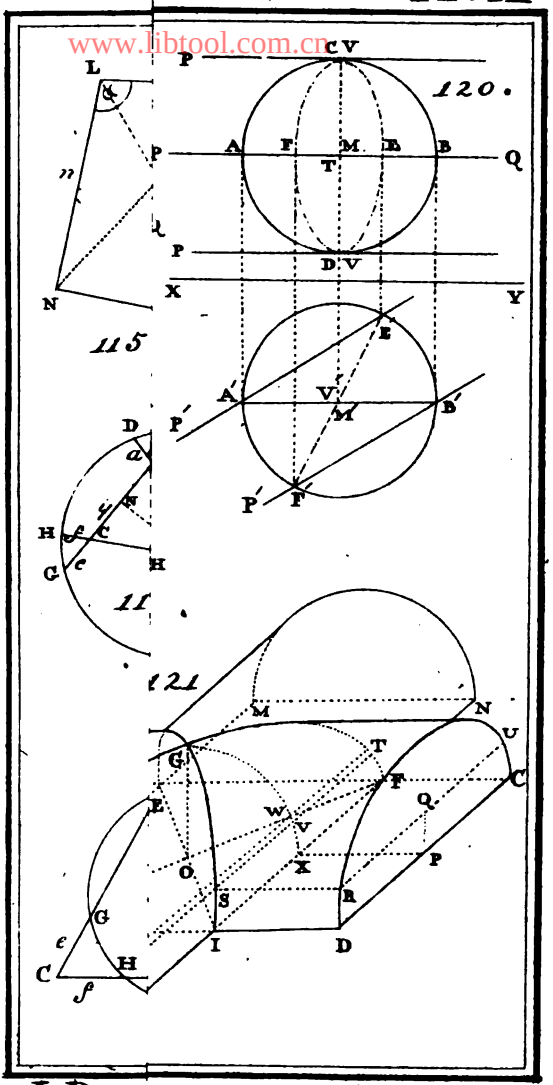


114.

I I

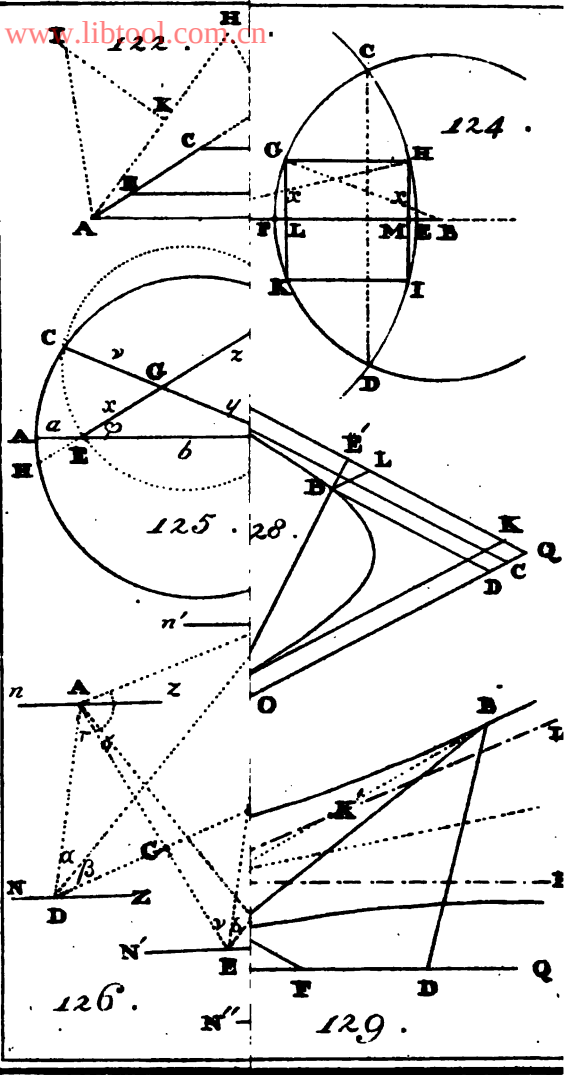
www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn



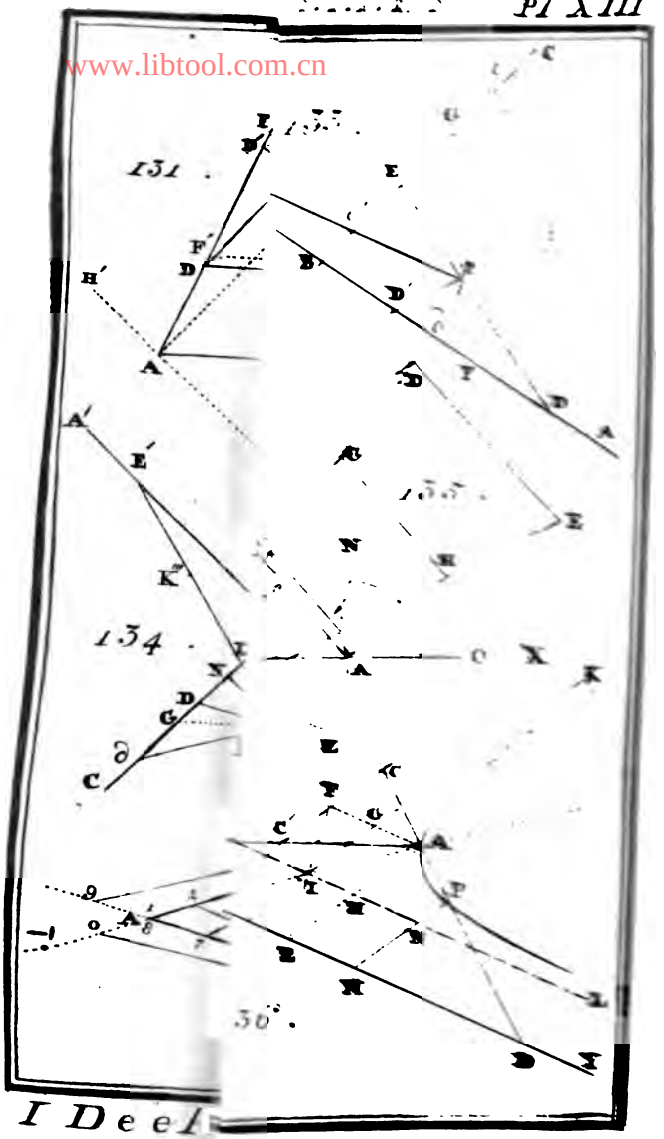
www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn



www.libtool.com.cn

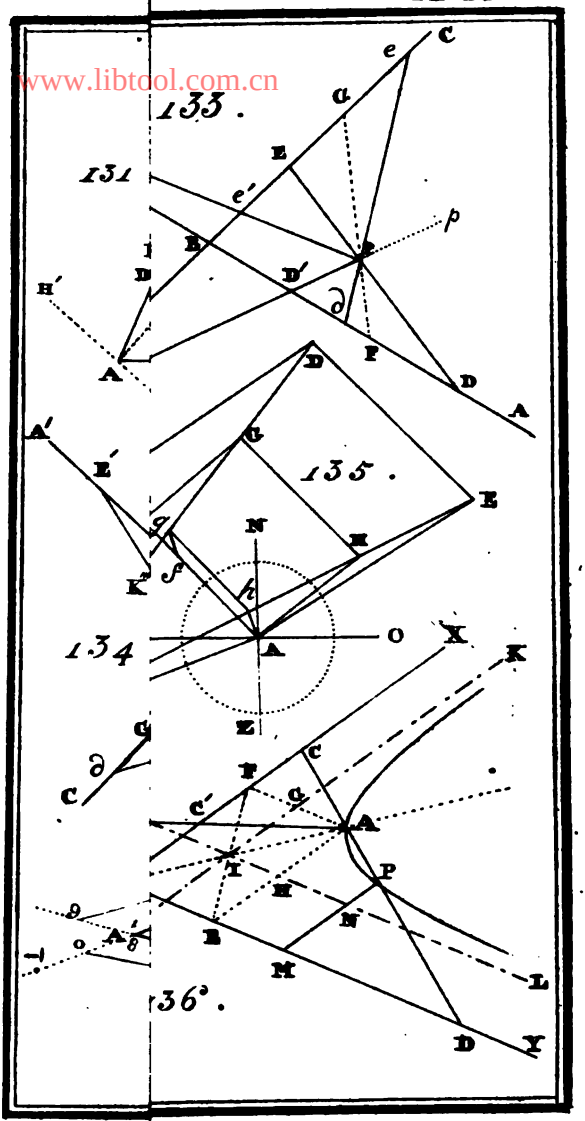
www.libtool.com.cn



I Deel

www.libtool.com.cn

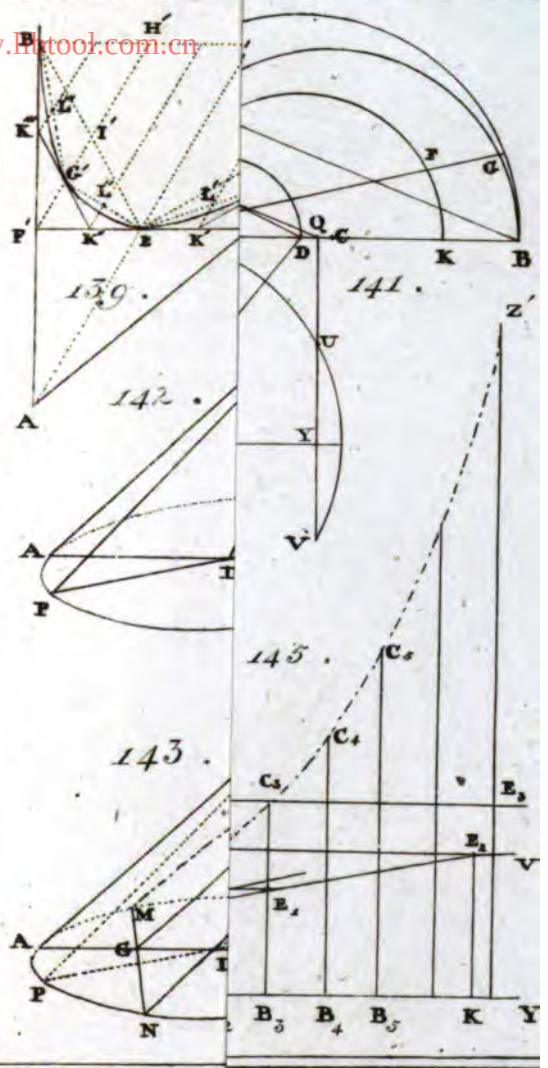
www.libtool.com.cn



I De

www.libtool.com.cn

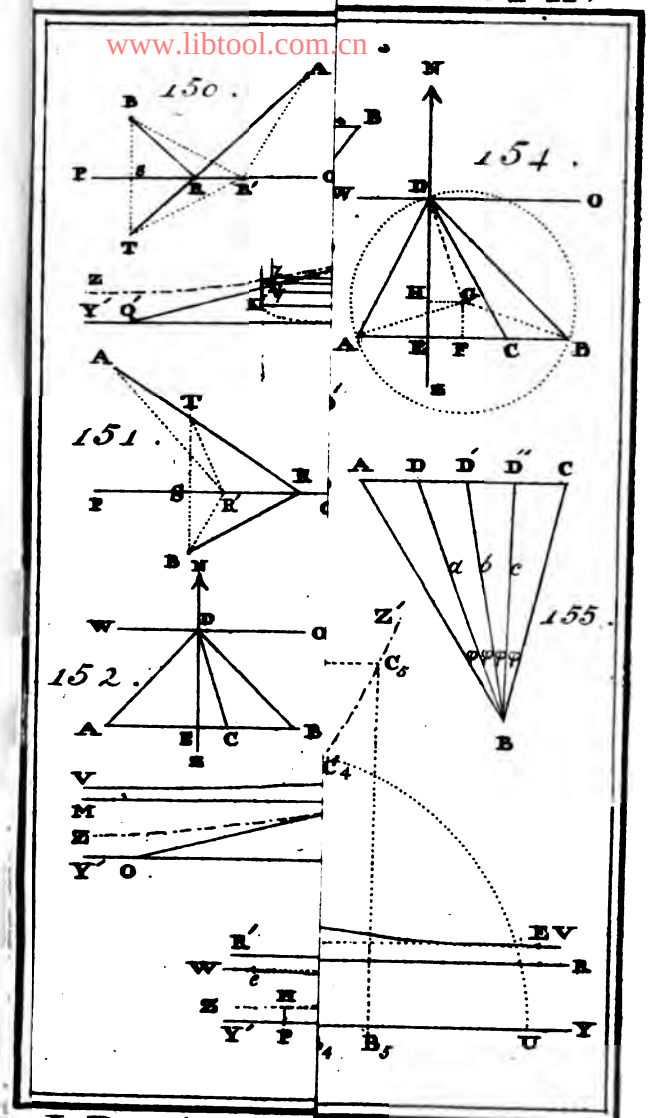
www.Patook.com.cn



I Deel

www.libtool.com.cn

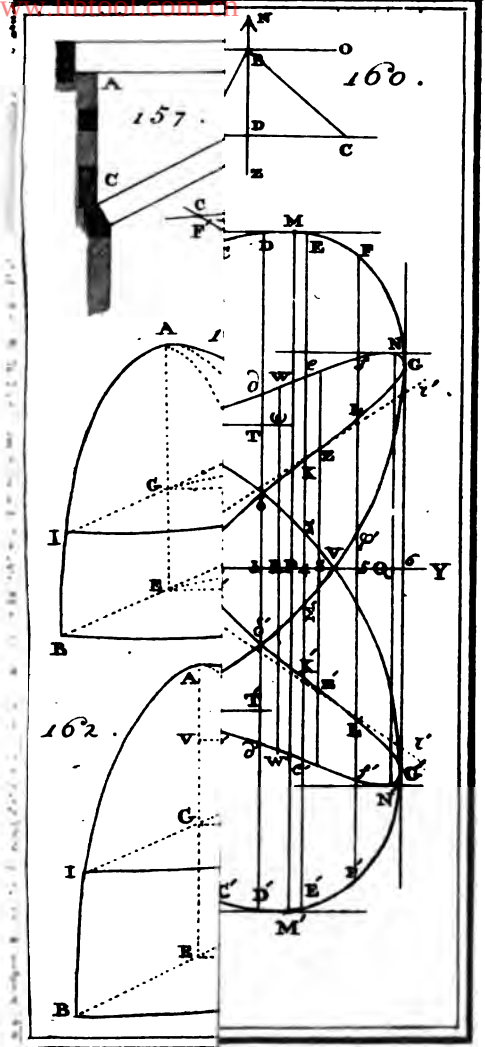
www.libtool.com.cn



I Deel

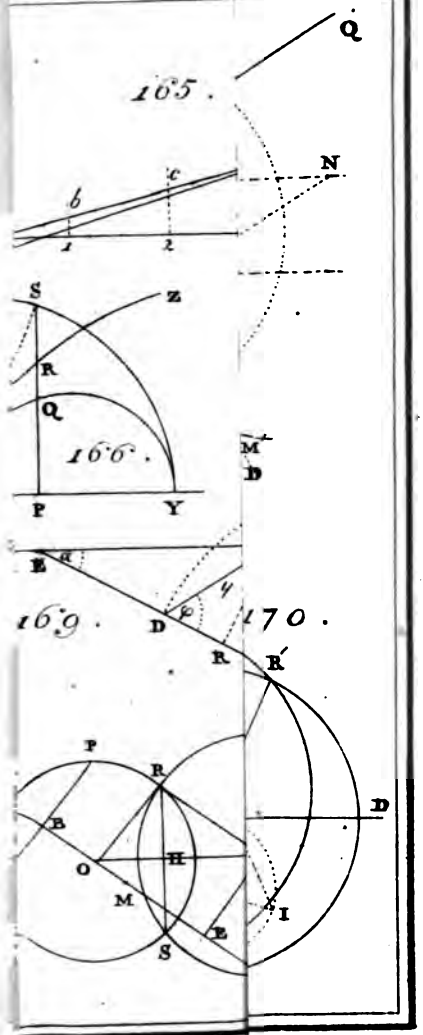
www.libtool.com.cn

www.libnl.com.cn



www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn



el

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn