

www.libtool.com.cn

Sci 905.80



Harvard College Library

FROM

Prof. F. W. Egge

SCIENCE CENTER LIBRARY



www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Sci 905.80

(Bayern - ... f)

AMERICAN SCIENCE SERIES
PRACE
MATEMATYCZNO-FIZYCZNE,

WYDAWANE

przy współdziałaniu

WŁ. GOSIEWSKIEGO, WŁ. NATANSONA, A. WITKOWSKIEGO i K. ŻORAWSKIEGO

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

TOM XVII.

WARSZAWA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

Druk Józefa Sikorskiego, Warecka 14.

1906.

WYDAWNICTWA
Redakcyi „PRAC MATEMATYCZNO - FIZYCZNYCH“
i Redakcyi „WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH“.
(Warszawa, Marszałkowska 117).

Do nabycia we wszystkich księgarniach:

PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE:

- Tom I*, 8-ka większa, str. VI, 223 i 4 nl. 1888; z rysunkami. Cena rs. 2.
Tomu I-go zeszyt 1; 8-ka większa, str. 244, 1890; z rysunkami. Cena rs. 2.
Tomu II-go zeszyt 2; 8-ka większa, str. X i 286. 1890. Cena rs. 2 kop. 40.
Tom III, 8-ka większa, str. 243. 1892. Z rysunkami. Cena rs. 2.
Tom IV, 8-ka większa, z rysunkami, str. 234. 1893. Cena rs. 2.
Tom V, 8-ka większa, z rysunkami, str. 239. 1894. Cena rs. 2.
Tom VI, 8-ka większa z rysunkami, str. 255. 1895. Cena rs. 2.
Tom VII, 8-ka większa z rysunkami, str. 260. 1896. Cena rs. 2.
Tom VIII, 8-ka większa str. 247, 1897. Cena rs. 2.
Tom IX, 8-ka większa str. 280. 1898. Cena rs. 2.
Tom X, 8-ka większa. str. 306. 1899--1900. Cena rs. 2 kop. 40.
Tom XI, 8-ka większa, str. 262. 1900. Cena rs. 2 kop. 40.
Tom XII, 8-ka większa str. 303. 1901. Cena rubli 3.
Tom XIII, 8-ka większa str. 400. 1902. Cena rs. 4.
Tom XIV, 8-ka większa str. 300, 1903. Cena rs. 3.
Tom XV, 8-ka większa, str. 205. 1904. Cena rb. 2 kop. 40.
Tom XVI, 8-ka większa, str. 270. Cena rb. 3 kop. 60.
Tom XVII, 8-ka większa, str. 262. Cena rb. 3 kop. 60.
Tom XVIII (w druku).

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE:

- T. I. 1897. 8°, str. 217. Cena rubli 3.
T. II. 1898. 8°, str. 275. " "
T. III. 1899. 8°, str. 308. " "
T. IV. 1900. 8°, str. 278. " "
T. V. 1901. 8°, str. 287. " "
T. VI. 1902. 8, str. 365. " "
T. VII. 1903, 8°, str. 326 " "
T. VIII. 1904, 8°, str. 342 " "
T. IX. 1905. 8°, str. 251 " "
T. X. 1906 (w druku). " "
- S. Dickstein.** KANONY LOGARYTMÓW Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 30, z 6 tablicami. 1890. Cena rs. 1.
S. Dickstein. TABLICA LOGARYTMÓW Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 15, z 1 tablicą. 1890. (Wydanie mniejsze). Cena kop. 20.
Wił. Natanson. WSTĘP DO FIZYKI TEORETYCZNEJ. 8-ka, str. XII i 458; z drzeworytami w tekście. 1890. Cena rs. 4; w oprawie angielskiej rs. 4 kop. 50.
S. Dickstein. POJĘCIA I METODY MATEMATYKI. Tom I. Część pierwsza. Teoria działań. 1891. 8-ka, str. VI i 268. Cena rs. 2 kop. 50.
S. Dickstein. MATEMATYKA I Rzeczywistość. 1893. 8-ka, str. 40. 1893. Cena kop. 30.
GEOMETRYA MARCINA KRÓLA, pierwszy raz z rękopisu z XV-go wieku, wydana przez L. Birkenmajera. 1895. 8-ka, str. IX, 82. Cena rs. 1.

Dalej ciąg na stronie 3-ej.

www.libtool.com.cn

PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

PRACE
MATEMATYCZNO - FIZYCZNE

WYDAWANE

przy współudziale

WŁ. GOSIEWSKIEGO, WŁ. NATANSONA, A. WITKOWSKIEGO i K. ŻORAWSKIEGO

PRZES

S. DICKSTEINA.

TOM XVII.

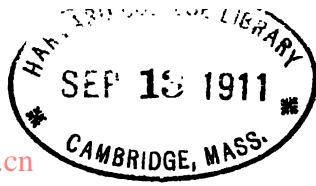
WARSZAWA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

Druk Józefa Sikorskiego, Warecka 14.

—
1906.

Sci 905.80



~~232~~
www.libtool.com.cn

List of
Prof. F. W. Wood

BOUND SEP 12 1913

TREŚĆ TOMU XVII-go. — TABLE DES MATIÈRES DU TOME XVII ¹⁾.

	<i>str.</i>
C21, R8eδ. T. Levi - Civita. Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires. (Badanie szczególnych rozwiązań układów różniczkowych i o ruchach umiejscowionych)	1— 40
O3, 5. K. Żora wski. Ueber Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen. (O własnościach krzywiznowych ciągłych zbiorów elementów liniowych)	41— 76
I11c. W. Sierpiński. O pewnym zagadnieniu z Rachunku funkcji asymptotycznych. Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques	77—118
J4d. G. A. Miller. Groups generated by two operators which transform each other into the same power. (O grupach utworzonych przez dwa operatory przekształcające się wzajemnie na jedną potęgę).	119—122
H8a. A. Przeborski. O całkach nieanalitycznych równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Sur les intégrales non analytiques des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre	123—128
S4b. G. Doborzyński. Hypoteza van der Waalsa o stanach odpowiednich. Ueber die van der Waals'che Hypothese der übereinstimmenden Zustände	129—222

¹⁾ Les indications en caractères gras correspondent à la classification adoptée par le Congrès de Bibliographie mathématique de 1889.

D3bα. G. Mittag-Leffler. O przedstawieniu analitycznem jednoznacznej gałęzi funkcji analitycznej. Przekład S. Dicksteina. Nota IV.	
Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Traduit par S. Dickstein. Note IV	223—258
H8a. A. Przeborski. O całkach nieanalitycznych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Sur les intégrales non analytiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.	259—264
Czasopisma, książki i broszury, nadesłane do Redakcyi „Prac matematyczno-fizycznych.	
Ouvrages reçus par la Rédaction	265—268

T. LEVI-CIVITA.

**SUR LA RECHERCHE DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES
DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
ET SUR LES MOUVEMENTS STATIONNAIRES.**

**(BADANIE SZGZEGÓLNYCH ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW RÓŻNICZKOWYCH
I O RUCHACH UMIEJSCOWIONYCH).**

PRÉFACE.

Une invitation cordiale de M. Dickstein me donne occasion d'exposer, sous forme simplifiée et complétée, des recherches, qui ont formé objet de plusieurs notes, parues dans les *Rendiconti dei Lincei* (1901 et 1905).

Le point de départ de ces notes avait été une généralisation de la méthode, dite *ignoration of coordinates* par les auteurs anglais, généralisation prêtant elle-même à d'intéressantes applications dynamiques.

J'ai reconnu plus récemment qu'il ne s'agit point de propriétés, appartenant exclusivement aux équations de la dynamique, mais de conséquences d'un principe général embrassant tout système différentiel ordinaire.

Je ferai ici jouer au principe son rôle naturel au commencement de la recherche. C'est un principe assez élémentaire, qui devient intuitif, si on le présente sous forme géométrique.

Imaginons en effet les solutions d'un système différentiel quelconque représentées par des courbes d'un espace à un nombre convenable de dimensions.

Appelons, suivant l'usage, *invariante* toute variété (de n'importe quel nombre de dimensions) formée par un assemblage de courbes intégrales.

Il est bien clair que la partie commune à deux variétés invariantes est encore une variété invariante. Il en est de même en particulier pour les éventuelles intersections d'une variété V avec elle-même, c'est-à-dire pour la sous-variété W , lieu des points doubles de V .

La connaissance d'une variété invariante V entraîne celle de W . (On n'a à effectuer, pour définir W , que des opérations algébriques). W est en général bien plus restreinte que V , et la détermination des courbes intégrales, qui en sont les génératrices, dépend par conséquent d'opérations analytiques beaucoup moins élevées.

Voilà la remarque évidente, qui se traduit dans une règle commode pour la construction des solutions particulières des systèmes différentiels.

Dans le présent mémoire, je développerai d'abord cette règle (Chap. I), en déduisant comme corollaires (Chap. II) les résultats plus précis qu'on peut établir pour les systèmes canoniques. Je passerai ensuite aux applications (Chap. III), et j'ajouterai enfin (Chap. IV) quelques réflexions critiques pour faire ressortir aussi le côté qualitatif de la question et prévenir des possibles malentendus.

Si l'on veut se former une idée plus précise de chaque chapitre, on n'a qu'à jeter un coup d'œil sur la table des matières.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES, S'APPLIQUANT À TOUT SYSTÈME DIFFÉRENTIEL.

§ 1. Préliminaires.

Soit

$$(S) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

un système différentiel quelconque, les X_i étant censées fonctions uniformes et holomorphes de leurs arguments dans le domaine, auquel se rapportent nos considérations.

Convenons d'appeler déplacements virtuels et de désigner par δx_i des accroissements infiniment petits des x_i , compatibles avec les équations différentielles (S), c'est-à-dire tels que les $x_i + \delta x_i$ satisfont à (S), dès qu'il en est ainsi pour les x_i .

On tire de cette définition

$$(1) \quad \frac{d \delta x_i}{dt} = \delta X_i = \sum_1^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \delta x_j,$$

où l'on doit naturellement entendre par x_i une solution de (S).

Les (1) sont, d'après M. Poincaré, les équations aux variations du système donné (S). On peut évidemment les écrire

$$\frac{d \delta x_i}{dt} = \delta \frac{dx_i}{dt},$$

ce qui met au jour la propriété caractéristique des déplacements virtuels d'être permutable avec l'opération $\frac{d}{dt}$.

Il s'ensuit plus généralement, pour une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$

$$\frac{d}{dt} \delta f = \delta \frac{df}{dt},$$

où la dérivation par rapport à t doit se faire, cela va sans dire, d'après (S) et (1); notamment l'écriture $\frac{df}{dt}$ remplace

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i.$$

A toute solution $x_i(t)$ des équations (S) on peut subordonner un système ∞^n de déplacements virtuels, restant arbitraires ceux qui se rapportent à une valeur (particulière, mais d'ailleurs quelconque) de t . C'est ce qui résulte du fait que les δx_i sont les intégrales des équations (1)

§ 2. Étude d'un cas simple.

Ceci posé, soit

$$(2) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$$

une relation invariante par rapport au système (S), ce qui veut dire, comme on sait, que $\frac{dH}{dt}$ s'annule: ou bien identiquement, auquel cas on aurait

affaire à une véritable intégrale (la constante étant incluse dans H); ou bien, en vertu de la relation elle même. On suppose naturellement qu'il s'agit d'une relation uniforme, c'est-à-dire qu' on puisse en tirer une au moins des x comme fonction uniforme des autres et de t dans le champ envisagé. Je vais établir le théorème suivant:

a) Posons

$$(3) \quad \delta H = 0$$

pour tous les déplacements virtuels, c'est-à-dire

$$(3') \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Si le système (2), (3) [sous forme explicite (2), (3')] est compatible, il est nécessairement invariant vis-à-vis de (S).

Démonstration. L'hypothèse que la relation (2) est invariante se traduit dans une identité de la forme

$$(4) \quad \frac{dH}{dt} = \mu H,$$

μ étant une fonction holomorphe ¹⁾.

On a aussi (quels que soient $t, x_i, \delta x_i$)

$$\frac{d}{dt} \delta H = \delta \frac{dH}{dt}.$$

Remplaçons-y, au lieu de δH , sa valeur

$$\sum_i^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i,$$

¹⁾ Pour le constater, considérons pour un moment H comme variable indépendante à la place d'une des x (ce qui est évidemment permis, d'après la résolubilité de $H=0$), et pensons au développement de $\frac{dH}{dt}$ en série de puissances de H . Comme $\frac{dH}{dt}$ doit s'annuler avec H , il n'y aura pas dans le développement le terme indépendant de H , ce qui justifie bien la formule (4).

A la vérité cette dernière conclusion pourrait être en défaut pour les valeurs particulières des x , qui annulent à la fois toutes les $\frac{\partial H}{\partial x_i}$, valeurs essentielles pour notre recherche. Nous conviendrons cependant, pour éviter toute difficulté, de nous borner aux cas où μ reste holomorphe même pour les dites valeurs.

et μH au lieu de $\frac{dH}{dt}$; il vient

$$(5) \quad \sum_1^n \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \delta x_i = - \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{d \delta x_i}{dt} + H \delta \mu + \mu \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Lorsqu'on tient compte des (2) et (3')¹⁾, le second membre s'annule, et il reste

$$\sum_1^n \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \delta x_i = 0.$$

La relation devant subsister pour tout déplacement virtuel, il s'ensuit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

C. Q. F. D.

Il convient d'ajouter :

a') Si (2) est une véritable intégrale, $\frac{dH}{dt}$ s'annule identiquement, et les équations (3') sont invariantes à elles seules.

C'est ce qui résulte de (5), dès que $\mu = 0$.

Remarque. Les x_i sont au nombre de n , tandis que les équations (2), (3') sont au nombre de $n+1$. Leur compatibilité apparaît de la sorte comme une circonstance exceptionnelle. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas a'). On n'a alors à envisager que les équations (3'), qui sont au nombre de n comme les x_i ; la (2) se trouve nécessairement satisfaite par un choix convenable de la constante arbitraire.

§ 3. Extension du résultat.

Considérons plus généralement $m+1$ équations

$$(I) \quad H=0, \quad F_1=0, \quad F_2=0, \dots, F_m=0,$$

formant un système invariant vis à vis de (S). On suppose, bien entendu, que H, F_1, F_2, \dots, F_m soient uniformes, holomorphes et indépendantes dans le domaine envisagé. Dans cette hypothèse on peut, sans nuire à la généralité, se servir de F_1, F_2, \dots, F_m comme variables indépendantes à la place de m des x : de x_1, x_2, \dots, x_m par exemple.

¹⁾ Ceci revient à se rapporter à des valeurs des x , qui vérifient à la fois les (2), (3') pour une valeur quelconque de t . C'est justement ici qu'intervient la condition de compatibilité, mentionnée dans l'énoncé du théorème.

Avec ces nouvelles variables

$$F_1, F_2, \dots, F_m, x_{m+1}, \dots, x_n,$$

le système (S) prend la forme

$$(S') \quad \begin{cases} \frac{dF_r}{dt} = \Xi_r, & (r = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{dx_j}{dt} = \Xi_j, & (j = m+1, \dots, n) \end{cases} \cdot$$

où les $\Xi(F_1, F_2, \dots, F_m, x_{m+1}, \dots, x_n, t)$ se comportent analytiquement par rapport à leurs arguments comme les X (par rapport aux anciennes variables).

L'invariance des (I) implique que les $\frac{dH}{dt}, \frac{dF_1}{dt}, \dots, \frac{dF_m}{dt}$ s'annulent en vertu des équations (I) elles mêmes, ce qui se traduit par des identités de la forme suivante :

$$(6) \quad \frac{dH}{dt} = MH + \sum_1^m M_r F_r,$$

$$(7) \quad \frac{dF_r}{dt} = N_r H + \sum_1^m N_{rs} F_s, \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

où l'on doit entendre par M, M_r, N_r, N_{rs} des fonctions holomorphes ¹⁾.

Ceci posé, convenons de représenter par \bar{f} ce qui devient une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, lorsqu' on la réduit au moyen des relations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, F_m = 0,$$

c'est-à-dire, en ayant égard à l'expression de f par rapport aux nouvelles variables, lorsqu' on donne la valeur 0 aux m premières.

L'identité (6) permet d'affirmer que

$$\bar{H} = 0,$$

est une relation invariante par rapport au système réduit

$$(S) \quad \frac{dx_j}{dt} = \bar{\Xi}_j, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

¹⁾ Pour la justification, voir la note de la page 4. On n'a qu'à généraliser d'une façon bien évidente.

En effet, explicitons d'abord l'expression de $\frac{dH}{dt}$, rapportée au système (S), ou, ce qui revient au même, au système (S'). Elle est

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial H}{\partial x_j} \Xi_j.$$

En y faisant

$$F_r = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

et en tenant compte des (6), (7), on en tire :

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \Xi_j = \bar{H} \left\{ \bar{M} - \sum_1^m \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial F_r} \right) \bar{N}_r \right\}.$$

Le premier membre n'est que la dérivée de \bar{H} par rapport à t , calculée d'après (S), le second membre contient \bar{H} en facteur.

C'est justement ce qu'il s'agissait de constater.

Appliquons maintenant le théorème a).

Il nous dit que le système

$$\bar{H} = 0, \quad \delta \bar{H} = 0,$$

c'est-à-dire, sous forme explicite,

$$\bar{H} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

est invariant vis-à-vis de (\bar{S}).

On peut interpréter différemment cette conclusion en revenant à (S). Voici l'énoncé qu'on en tire :

b) Associons au système (I) les équations en termes finis provenant de la condition :

$$(II) \quad \delta H = 0$$

(pour tout déplacement compatible avec $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_m = 0$).

Le système, qui en résulte (dès qu'il n'implique pas de contradiction), est encore invariant vis-à-vis de (S).

Démonstration. Gardons toujours les variables $F_1, F_2, \dots, F_m, x_{m+1}, \dots, x_n$. Tout d'abord il est bien clair que les équations

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

provenant de (II), peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

puisqu'on doit tenir compte de

$$F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0.$$

Posons, pour abrégier l'écriture :

$$H_j = \frac{\partial H}{\partial x_j},$$

d'où

$$\bar{H}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j}.$$

On a les identités :

$$\frac{dH_j}{dt} = \sum_1^m \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \left\{ \frac{\partial H_j}{\partial t} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \Xi_i \right\},$$

où la dérivation $\frac{d}{dt}$ a été explicitée d'après le système (S'), équivalent à (S), à un changement de variables près.

Pour $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$, la quantité entre parenthèses se présente comme la dérivée $\frac{d\bar{H}_j}{dt}$ de \bar{H}_j , calculée d'après (\bar{S}). Or, si l'on tient compte aussi de

$$H = 0,$$

$$H_j = 0, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

les quelles, à cause de $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$, se réduisent à

$$\bar{H} = 0,$$

$$\bar{H}_j = 0, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

On reconnaît que

$$\frac{dH_j}{dt} = 0 .$$

C'est ce qui résulte de l'invariance de

$$\bar{H} = 0 ,$$

$$\bar{H}_j = 0 \quad (j = m+1, \dots, n)$$

vis-à-vis de (S).

D'autre part le premier terme

$$\sum_1^m \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt}$$

s'annule aussi, en vertu des (7), dès que les équations (I) sont vérifiées.

En définitive tout $\frac{dH_j}{dt}$ s'annule d'après (I) et (II).

C. Q. F. D.

Comme au n° précédent, on en tire un corollaire :

b') Si, parmi les (I), il y a des véritables intégrales — au nombre de k , par exemple — le système, comprenant les autres $m-k$ équations (I) et les (II), est invariant à lui seul.

La condition de compatibilité porte dans ce cas sur $n+1-k$ équations, au lieu que sur $n+1$, comme il arrive en général.

§ 4. Solutions particulières stationnaires — justification de cet appellatif.

Rapportons nous au dernier énoncé b'), qui embrasse évidemment les trois autres : le théorème b) pour $k=0$; le théorème a) pour $m=k=0$, et son corollaire a') pour $m=0, k=1$.

Les $n+1-k$ équations (par hypothèse, compatibles) pourront ne pas être toutes indépendantes. Supposons qu'il y en ait $n+1-k-k'$ distinctes ($k' \geq 0$).

On peut imaginer d'en tirer autant des x . Après cela, en réduisant en conformité le système (S), on trouve, pour définir les autres x , un système différentiel d'ordre $k+k'-1$. Mais on connaît déjà k intégrales de ce système restreint [celles, qui proviennent, moyennant la réduction indiquée,

des intégrales, figurant par hypothèse parmi les (I)]. Il ne reste partant qu'à effectuer une opération d'ordre $k'-1$ pour obtenir $\infty^{k+k'-1}$ solutions du système donné (S).

Il est bien naturel de les appeler stationnaires par rapport à la fonction H , qui intervient dans leur définition, puisque, pour une quelconque d'entre elles, on a $\delta H = 0$. La valeur de H est donc maximum ou minimum, ou plus exactement stationnaire parmi celles, qu'elle prend (pour une même valeur de t) sur une quelconque des autres solutions de (S), également situées sur la variété $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$.

§ 5. Remarque sur la construction effective des solutions stationnaires.

D'après le n^o précédent, un système invariant (I) étant donné, on doit avant tout expliciter les équations provenant de

$$(II) \quad \delta H = 0$$

(pour tout déplacement compatible avec $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$).

Au point de vue purement théorique, il nous a été commode de régarder préalablement les F comme variables indépendantes et d'explicitier les (II) sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

Ce n'est pas en général la meilleure façon de procéder dans les cas concrets. Il convient au contraire (comme dans la théorie des maxima et minima relatifs) d'avoir recours aux multiplicateurs de Lagrange. On est ainsi conduit à remplacer (II) par la condition équivalente

$$\delta H + \sum_1^m \lambda_r \delta F_r = 0$$

(pour tout déplacement virtuel), c'est-à-dire

$$(III) \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_1^m \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les λ_r désignent des indéterminées.

Leur élimination des (III) donnerait des relations entre les x (et t), qui, en système avec (I), reviennent aux (I), (II) du n^o 3.

On peut donc considérer les équations (III) comme résultant de deux groupes, dont l'un $(III)_1$, composé de m équations, définit les multiplicateurs λ , tandis que l'autre $(III)_2$, pris ensemble avec (I), équivaut aux (II).

D'après cela il est bien clair que, en dérivant ces équations (III), on n'obtient en substance rien de nouveau, à cause de leur invariance.

Appelons (Λ) l'ensemble des m équations définissant les dérivées des paramètres λ . Ce qu'on vient de dire peut être énoncé sous la forme suivante:

Les équations (I), (III) sont invariantes par rapport au système différentiel (I), (Λ) .

En effet la dérivation des (I), (III), faite d'après (S), (Λ) , ne conduit à aucune relation (entre les x , les λ et t) distincte de (I), (III).

Ceci posé, imaginons de réduire notre nouveau système (S), (Λ) moyennant les équations (I), (III).

Pour se rendre compte du résultat, il suffit ici encore de penser les (III) comme résultant des deux groupes $(III)_1$, $(III)_2$.

Quant aux x , tout se passe évidemment comme si l'on réduisait le système donné (S) moyennant les relations (I), $(III)_2$, c'est-à-dire (I), (II). Il ne reste, après cela, que les relations $(III)_1$ définissant les λ . Les (Λ) en sont, par construction, une pure conséquence et deviennent partant des identités lorsqu'on les réduit au moyen des équations $(III)_1$ elles-mêmes.

En résumant, sous forme de règle, il convient de retenir :

1-0 La recherche des solutions stationnaires peut se faire en éliminant d'abord les λ des (III) et en réduisant en conformité le système différentiel (S).

2-0 Il n'est pas nécessaire toutefois d'éliminer d'avance les λ . Au contraire, il est en général plus commode de commencer par dériver les (III), ce qui fournit les $\frac{d\lambda}{dt}$ [le système, qu'on a appelé (Λ)], et pas d'autres relations en termes finis. On déterminera ensuite les solutions particulières du système (S), (Λ) (d'ordre $n+m$), qui satisfont aux relations invariantes (I), (II). On aura de la sorte, en se débarrassant enfin des λ , les expressions des x , qui appartiennent aux solutions stationnaires cherchées.

§ 6 Stabilité.

Une solution stationnaire Σ_0 d'un système différentiel (S) étant donnée, envisageons une seconde solution Σ , appartenant, comme Σ_0 , à la variété

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0,$$

et d'ailleurs quelconque.

Appelons Δx_i les différences des valeurs prises par les x_i sur Σ et sur Σ_0 respectivement, pour une même valeur de t .

Nous dirons que Σ_0 est une solution stable si, pour tout nombre positif ε , si petit qu'il soit, on peut assigner un autre nombre positif η , tel qu'on ait (pour une valeur réelle quelconque de t)

$$(8) \quad |\Delta x_i| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dès qu'on prend pour Σ des valeurs initiales satisfaisant aux conditions

$$(9) \quad |\Delta x_i| < \eta. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire s'il existe un nombre fini ε , tel que, parmi les Σ satisfaisant initialement aux inégalités (9), il en ait une au moins sur laquelle, pour quelque valeur de t , les (8) ne sont pas toutes remplies (et cela si petit qu'on prenne η), la solution Σ_0 sera dite instable.

Il importe de remarquer que, si $H = \text{const}$ est une intégrale du système (S), la stabilité (au sens relatif, qu'on vient de préciser) est un caractère qualitatif ¹⁾.

Il suffit en effet que $\delta^2 H$ (calculée avec la même relativité que δH) soit, tout le long de Σ_0 , une forme quadratique définie, par rapport aux $n - m$ différentielles, qui restent indépendantes sur la variété $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$, pour qu'on puisse appliquer le raisonnement classique de Dirichlet et en déduire la stabilité de la solution, dont il s'agit.

Lorsque $\delta^2 H$ n'est pas définie, la considération de l'intégrale $H = \text{const}$ ne donne, à elle seule, aucun renseignement. Il faudrait alors s'adresser au système (S) et avoir recours à la méthode de M. Liapounoff ²⁾.

¹⁾ Tandis qu'en général elle est une circonstance tout à fait exceptionnelle.

On peut consulter à ce propos, outre les recherches classiques de M. Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles :

T. Levi-Civita: „Sopra alcuni criteri di instabilità“. *Annali di Matematica*. Ser. 3. T. V. 1901.

R. Cigala: „Sopra un criterio di instabilità“, *ibidem*. T. XI. 1904.

²⁾ „Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas, où la fonction des forces n'est pas un maximum“. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5ème Série. T. IH. 1897.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES CANONIQUES — MOUVEMENTS STATIONNAIRES — MOUVEMENTS
À LA ROUTH.

§ 1. Compléments relatifs aux systèmes de forme canonique¹⁾.

Prenons en particulier, pour (S), un système de forme canonique

$$(1) \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

la fonction caractéristique H étant indépendante de t .

Supposons en outre d'envisager un système invariant

$$(2) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, F_m = 0 \quad (m < n)$$

de relations en involution, également indépendantes de t (et distinctes de $H = \text{const}$).

Comme $H = \text{const}$ est une intégrale de (1), on peut l'associer aux (2), et, en posant

$$(3) \quad \delta H = 0$$

[pour tout déplacement compatible avec (2)], on est assuré, d'après les résultats du chapitre précédent, que le système simultané (2), (3) est invariant vis-à-vis de (1).

Les hypothèses particulières, faites à l'égard de (1), (2) (forme canonique, indépendance de t , involution) permettent d'ajouter que la condition (3) ne peut donner lieu à plus que $2(n-m)$ relations distinctes entre les p et les x , tandis qu'en général elle en donnerait $2n-m$.

Première démonstration.

On le prouve très simplement en s'appuyant sur la nature de la condition (3), qui est invariante vis-à-vis de tout changement de variables (biuniforme et régulier). On y peut donc envisager comme variables, à la place des x, p , $2n$ leurs combinaisons indépendantes quelconques.

¹⁾ Les conclusions se rapportant aux systèmes canoniques ont été retrouvées et généralisées par M. Burgatti, d'après un point de vue entièrement différent. Voyez sa note dans les Rendiconti del Lincei du 20 Avril 1902.

Pour les fixer d'une façon convenable, on part de la remarque suivante:

Dire que les relations (2) sont en involution signifie simplement que les parenthèses de Poisson

$$(F_r, F_s) \quad (r, s = 1, 2, \dots, m)$$

s'annulent, en vertu des (2) elles-mêmes. Mais il est toujours loisible d'attribuer aux équations (2) une forme équivalente

$$(2') \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_m = 0,$$

telle qu'on ait identiquement

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0. \quad (r, s = 1, 2, \dots, m)$$

Ceci posé, on prendra d'abord pour variables $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ et $n-m$ autres fonctions indépendantes

$$\varphi_j \quad (j = m+1, \dots, n)$$

en involution entre elles et avec les premières, ce qui est bien possible, et dans une infinité de manières.

Il est encore possible d'associer à ces fonctions φ , n conjuguées

$$\psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(déterminées à une constante près) telles que la transformation entre les p_i, x_i , et les φ_i, ψ_i soit de contact ¹⁾.

Le système (1), à la suite d'une telle transformation, reste canonique avec la même fonction caractéristique H (exprimée, bien entendu, par les φ, ψ).

Ayant alors

$$(1') \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

l'invariance des (2) [plus précisément, celle des équivalentes (2')] se traduit dans ce fait analytique que

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \psi_m}$$

s'annulent toutes en vertu des (2').

¹⁾ Voir, pour toutes ces assertions, l'ouvrage de M. Goursat „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre“, ou le second volume de la „Theorie der Transformationsgruppen“ par Lie-Engel.

Ceci posé, il est bien clair que la condition (3) n'entraîne plus que $2(n-m)$ relations entre $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \dots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, savoir

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_j} = 0, \quad (j = m+1, \dots, n)$$

le trait superposé indiquant qu' on a posé $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = 0$, c'est-à-dire qu' on tient compte des (2).

C. Q. F. D.

Seconde démonstration.

Je vais indiquer aussi une démonstration directe, qui n'exige aucun emprunt à la théorie des transformations de contact. J'ajouterai toutefois — pour éviter une petite discussion — la restriction non essentielle que les m relations données (2) (indépendantes par hypothèse) soient résolubles par rapport à m des $p: p_1, p_2, \dots, p_m$ par exemple.

On peut alors prendre les (2) sous forme résolue, en les supposant préalablement remplacées par

$$(2'') \quad p_r = f_r(p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

Les différences $p_r - f_r$ sont encore en involution, d'après un lemme bien connu ¹⁾, dès qu' il en était ainsi des F .

Posons, pour deux fonctions quelconques U, V ,

$$\{U, V\} = \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial p_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial p_j} \right).$$

Les conditions

$$(p_r - f_r, p_s - f_s) = 0$$

se réduisent à

$$(4) \quad \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\} = 0. \quad (r, s = 1, 2, \dots, m)$$

J'ai employé le signe $=$ pour mettre en évidence qu' il s'agit d'une identité: il n'y a plus en effet à tenir compte des (2''), puisqu' il n'y a pas de p_r ($r = 1, 2, \dots, m$) dans les premiers membres des (4).

Il nous faut exprimer aussi que les relations (2') sont invariantes.

¹⁾ Goursat, loc. cit. §. 62. Ce n'est qu' une forme particulière des (2').

En formant, d'après (1), $\frac{dp_r}{dt}$, $\frac{df_r}{dt}$, on est conduit aux égalités

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_r}{\partial x_s} = 0, \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

qui doivent subsister en conséquence des (2").

Appelons ici encore \bar{H} ce qui devient H lorsqu'on tient compte des relations invariantes données, c'est-à-dire, en ayant égard à la forme résolue (2"), lorsqu'on y remplace chaque p_r par f_r .

Les dérivées de cette fonction $\bar{H}(p_{m+1}, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont évidemment liées à celles de H par les formules

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = \frac{\partial H}{\partial x_j} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \end{array} \right. ; \quad (j=m+1, \dots, n)$$

$$(7) \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} = \frac{\partial H}{\partial x_r} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_r} \quad (r=1, 2, \dots, m)$$

Les (6) donnent immédiatement

$$\{\bar{H}, f_r\} = \{H, f_r\} - \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \{f_r, f_s\},$$

d'où, en ajoutant aux (7):

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} + \{H, f_r\} = \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \left[\frac{\partial f_s}{\partial x_r} - \{f_r, f_s\} \right].$$

D'après (4) et (5), il reste (identiquement, tout p_r ayant disparu)

$$(8) \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} + \{\bar{H}, f_r\} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, m)$$

Ceci posé, remarquons que la condition (3) équivaut évidemment à

$$\delta \bar{H} = 0$$

(sans aucune liaison, désormais) c'est-à-dire, sous forme explicite, aux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = 0; \quad (j = m+1, m+2, \dots, n) \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} = 0. \quad (r = 1, 2, \dots, m) \end{array} \right.$$

Les m dernières sont bien une conséquence des autres $2(n-m)$, d'après (8).
C. Q. F. D.

§ 2. Rappel des recherches de M. Routh.

Considérons un système matériel holonome, à liaisons indépendantes du temps; appelons x_1, x_2, \dots, x_n les paramètres indépendantes fixant la position du système, et supposons, avec M. Routh, que la force vive T (fonction quadratique des $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$, dont les coefficients sont en général des fonctions des x) soit indépendante de quelques unes des x : de x_1, x_2, \dots, x_m par exemple.

Si le potentiel U des forces appliquées est également indépendant de x_1, x_2, \dots, x_m , les équations du mouvement admettent ∞^{2m} solutions particulières très simples, pour lesquelles x_1, x_2, \dots, x_m (les coordonnées ignorées, selon l'expression des anglais) sont des fonctions linéaires du temps, tandis que les autres coordonnées x_{m+1}, \dots, x_n demeurent constantes. On le met au jour très simplement en introduisant les moments cinétiques p_i (ou variables conjuguées aux x_i) d'après les positions

$$(9) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial x'_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et en se rapportant à la forme canonique des équations du mouvement. La fonction caractéristique n'est autre chose que l'énergie totale

$$H = T - U,$$

en y supposant, bien entendu, remplacées les x' par leurs expressions, en fonction des p et des x , tirées des (9).

T et U étant par hypothèse indépendantes de x_r ($r = 1, 2, \dots, m$), il en sera de même de H , et les équations du mouvement pourront être partagées en trois groupes, comme il suit:

$$(10) \quad \frac{dp_r}{dt} = 0; \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

$$(11) \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad (j = m+1, m+2, \dots, n)$$

$$(12) \quad \frac{dx_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_r}. \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

Le premier est immédiatement intégrable et donne

$$p_r = p_r^0 \quad (p_r^0 \text{ constante arbitraire});$$

le second, en y posant $p_r = p_r^0$, vient à dépendre seulement des inconnues p_j, x_j ; c'est donc un système d'ordre $2(n-m)$, apte à les déterminer. Dès qu'on l'ait intégré, la détermination des x_r , d'après (12), se fait par quadratures.

Ceci en général.

Mais il est bien clair qu'on a une solution particulière des (11), en prenant pour p_r, x_j des valeurs constantes vérifiant les $2(n-m)$ équations

$$(13) \quad \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \quad (j = m+1, \dots, n)$$

(si tant est qu'elles soient compatibles). Il s'en suivra des valeurs également constantes pour les seconds membres des (12), d'où, pour les x_r , des fonctions linéaires de t .

Voilà les solutions annoncées, qui, en définitive, dépendent bien de $2m$ constantes arbitraires: les p_r^0 et les valeurs initiales des x_r .

D'après (13), on a, pour ces solutions particulières:

$$\delta H = 0,$$

compatiblement avec les conditions

$$p_r = p_r^0. \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

A cause de cette propriété de l'énergie totale, M. Routh a appelé stationnaires les mouvements correspondants.

§ 3. Mouvements stationnaires en général—Mouvements à la Routh.

On aperçoit bien nettement dans ce qu'on vient de dire l'origine des recherches plus générales, dont il est question dans le présent mémoire.

Tout d'abord, en se plaçant avec M. Routh au point de vue, pour ainsi dire, énergétique, on se trouve amené à généraliser ses considérations sur les systèmes holonomes, rappelées tout à l'heure. Il suffit pour cela de remplacer l'hypothèse des coordonnées ignorées, c'est-à-dire de l'existence d'intégrales de la forme particulière $p_r = p_r^0$, par les conditions (2).

Mais il y a lieu de profiter des intégrales connues, pour la recherche de solutions particulières, sans rendre stationnaire l'énergie totale, et même sans qu'il s'agisse de systèmes de forme canonique.

C'est ce que montrent les résultats du chapitre I.

D'après cela, je conviendrai (en étendant la définition de M. Routh) d'appeler stationnaire tout mouvement d'un système matériel, qui soit représenté par une solution stationnaire (au sens analytique abstrait envisagé jusqu'ici).

Comme définition il n'y a naturellement rien à objecter, mais on pourrait craindre de perdre en intérêt mécanique ce qu'on gagne en extension, dès que l'énergie ne demeure plus stationnaire.

Il n'en est rien, comme on le verra au dernier chapitre par l'examen critique des circonstances, qui ont principale influence sur le degré de simplicité d'un mouvement.

Il serait toutefois déraisonnable de méconnaître l'importance toute spéciale du cas de M. Routh et de sa première généralisation: soit pour leurs applications nombreuses; soit pour le plus grand nombre de constantes, dont dépendent les mouvements correspondants (voir le § suivant); soit enfin pour la forme particulière des conditions de stabilité.

Je propose partant d'appeler cette catégorie de mouvements stationnaires mouvements à la Routh.

En définitive ils sont caractérisés par les hypothèses suivantes:

1-0 Il s'agit de systèmes holonomes, à liaisons indépendantes du temps, soumis à des forces, dérivant d'un potentiel. Les équations du mouvement ont alors la forme canonique (1), H étant l'énergie totale.

2-0 Le système de relations invariantes

$$(2) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, F_m = 0,$$

d'où l'on part pour rendre H stationnaire, est en involution, et lui aussi, indépendant de t .

D'après la remarque du § 1, on est assuré que la condition (3) (tant qu'il y a compatibilité) conduit à un ensemble de ∞^m , au moins, mouvements à la Routh.

L'arbitrariété augmente naturellement lorsque quelques-unes des (2) sont des véritables intégrales. Au cas plus favorable (et d'ailleurs plus important), où elles seraient toutes des intégrales, on aura précisément ∞^{2m} de tels mouvements.

Remarque.

Théoriquement on peut toujours par une transformation de contact se réduire au cas typique de M. Routh, où les premiers membres des relations invariantes données jouent le rôle de coordonnées ignorées. C'est ce qu'on a fait dans la première démonstration du § 1. Il ne faut pas en conclure toutefois que notre règle, se rapportant à un système quelconque de paramètres (canoniques ou non), soit dépourvue d'intérêt.

En effet le côté essentiel de nos considérations réside précisément dans la possibilité d'assigner certaines classes de solutions par des moyens simples (plus simples que l'intégration complète du système donné): en somme, par l'intégration d'un système réduit d'ordre $m-1$ (au lieu que $2n$).

Or la transformation de contact (qui reconduirait à la forme linéaire de M. Routh) dépend en général d'opérations analytiques d'ordre bien plus élevé que $m-1$. Elle n'est donc pas admissible comme instrument de calcul, bien qu'il soit parfaitement légitime et même convenable de s'en servir comme instrument de démonstration.

En ligne pratique il y a lieu d'ajouter une autre remarque:

Certains problèmes de dynamique comportent de variables, pour ainsi dire, naturelles (telles que les composantes de la rotation p, q, r , et les cosinus directeurs de la verticale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, pour un solide pesant mobile autour d'un point fixe; u, v, w, p, q, r pour un solide au sein d'un liquide; etc.). Dans ces cas, même si l'on connaîtrait d'avance une transformation conduisant aux variables φ_i, ψ_i du § 1, il y a avantage à l'éviter sous le double aspect de la simplicité des calculs et de la spontanéité des interprétations.

§ 4. Règle de Dirichlet—Liapounoff.

Pour les mouvements à la Routh il y a lieu de poser la question de la stabilité sous la forme plus restreinte que voici ¹⁾:

Rapportons-nous aux variables φ_i, ψ_i du § 1 (première démonstration).

Sur la variété invariante

$$(2') \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m = 0$$

on a aussi

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1} = \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = \dots = \frac{\partial H}{\partial \psi_m} = 0,$$

de façon que H ne dépend plus que $2(n-m)$ arguments φ_j, ψ_j ($j=m+1, \dots, n$).

Il est alors naturel de ne se préoccuper pas de $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, qui jouent le rôle de coordonnées ignorées et de poser la question de la stabilité seulement à l'égard des autres $2(n-m)$ paramètres φ_j, ψ_j ²⁾.

La simple inspection de $\delta^2 H$ (dans le cas général, où elle est irréductible comme forme quadratique des différentielles $\delta\varphi_j, \delta\psi_j$) permet de décider sans ambiguïté si la solution, dont il s'agit, est stable ou instable.

¹⁾ C'est justement la forme adoptée par M. Routh. On arriverait d'ailleurs aux mêmes conclusions en acceptant la définition proposée récemment par M. M. Klein et Sommerfeld dans leur „Theorie des Kreisels“. Chap. V, § 6.

²⁾ En fixant — il est presque inutile de le dire — à l'égard de $\Delta\varphi_j, \Delta\psi_j$ les mêmes conditions, indiquées pour les Δx_i dans la définition du chapitre précédent, § 6.

On a en effet la règle de Dirichlet-Liapounoff:

Pour la stabilité il faut et il suffit que $\delta^2\bar{H}$ soit une forme définie.

C'est sans doute une forme de stabilité, où les variables q_i, ψ_i , auxquelles nous nous rapportons, jouent un rôle particulier. On peut toutefois reconnaître si cette stabilité existe ou n'existe pas, sans qu'il soit nécessaire une transformation préalable de variables, pour passer des x_i, p_i primitives aux q_i, ψ_i . Il suffit pour cela de remarquer que, tout changement de variables entraînant une substitution linéaire entre leurs différentielles, la caractéristique de la forme quadratique δ^2H n'en reste pas altérée. Si l'on suppose donc de se rapporter à l'expression de δ^2H en variables quelconques, on n'aura qu'à vérifier:

1-0 si la caractéristique est précisément $2(n-m)$, auquel cas on pourra, dans une infinité de manières (par des opérations algébriques élémentaires réelles), réduire δ^2H à une forme équivalente Q ne dépendant plus que de $2(n-m)$ arguments;

2-0 si la forme réduite Q est ou n'est pas définie.

C'est ce qui arrivera aussi pour δ^2H par rapport aux variables $\delta q_j, \delta \psi_j$. En effet les formes réduites Q sont toutes équivalentes dans le domaine réel, c'est à dire transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, réelle. Elles sont donc en particulier, toutes à la fois, définies ou indéfinies. Évidemment l'expression de δ^2H au moyen des $\delta q_j, \delta \psi_j$ n'est autre qu'une réduite particulière.

CHAPITRE III.

EXEMPLES DE MOUVEMENTS À LA ROUTH.

§ 1. Corps solide suspendu par un de ses points.

a) Solide pesant dans le cas général. On a, avec les notations usuelles,

$$H = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0),$$

et on connaît (en dehors de l'intégrale des forces vive $H = \text{const}$ et de l'identité géométrique $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$) la seule intégrale des aires pour les plans horizontaux

$$(1) \quad Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.}$$

Appelons, pour abrégé, G_3 son premier membre (moment des quantités de mouvement par rapport à la verticale ascendante du point fixe Ω).

Dans un mouvement à la Routh on doit avoir $\delta H = 0$, pour tout système d'accroissements de $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ satisfaisant à la condition $G_3 = \text{const}$, et naturellement aussi à $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Posons donc

$$\delta H - \omega \delta G_3 - \lambda (\gamma_1 \delta \gamma_1 + \gamma_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \gamma_3) = 0,$$

ω et λ étant les multiplicateurs, à priori indéterminés.

Il vient sous forme explicite

$$(2) \quad p = \omega \gamma_1, \quad q = \omega \gamma_2, \quad r = \omega \gamma_3;$$

$$(3) \quad Px_0 - \omega Ap - \lambda \gamma_1 = 0, \quad Py_0 - \omega Bq - \lambda \gamma_2 = 0, \quad Pz_0 - \omega Cr - \lambda \gamma_3 = 0.$$

En réduisant, d'après (2), les formules de Poisson

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p,$$

on reconnaît avant tout que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des constantes. Cela signifie que la verticale du point de suspension Ω occupe une position fixe par rapport au corps. Les mouvements en question se réduisent donc à des rotations autour de la verticale de Ω ; et à des rotations uniformes, puisque, d'après (1) et (2),

$$\omega (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = \text{const},$$

et par suite l'auxiliaire ω ($|\omega|$ est évidemment la vitesse angulaire) reste constante.

Ces rotations uniformes sont bien connues. Elles ont été étudiées par M. S t a u d e ¹⁾. Pour retrouver ses conclusions, on n'a qu'à discuter les équations (3). En y remplaçant p, q, r par leurs valeurs (2), elles s'écrivent

$$(3') \quad (\lambda + \omega^2 A) \gamma_1 = Px_0, \quad (\lambda + \omega^2 B) \gamma_2 = Py_0, \quad (\lambda + \omega^2 C) \gamma_3 = Pz_0,$$

d'où, en éliminant λ et ω^2 ,

$$\begin{vmatrix} \gamma_1, & A\gamma_1, & x_0 \\ \gamma_2, & B\gamma_2, & y_0 \\ \gamma_3, & C\gamma_3, & z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

¹⁾ „Über permanente Rotationsachsen“, Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. 113. 1894.

C'est l'équation d'un cône quadrique de sommet Ω , lieu (dans le corps) des possibles axes permanents de rotation.

Ce cône passe par les arêtes du trièdre des coordonnées (c'est à dire par les axes principaux d'inertie, relatifs au sommet), puisque le déterminant s'annule lorsqu'on y remplace $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Réciproquement — on le vérifie sans peine — toute génératrice de ce cône, dès qu'on la suppose dirigée verticalement, est bien un axe permanent de rotation. Il lui correspond une vitesse angulaire, qui résulte en général déterminée univoquement, d'après les équations (3').

La discussion des cas particuliers (dégénération du cône, indétermination de ω , etc.), qui peuvent se présenter pour des distributions spéciales de la masse du corps (c'est à dire pour des valeurs nulles de quelques-unes des quantités $B-C, C-A, A-B, x_0, y_0, z_0$) nous entraînerait trop loin. Il vaut mieux de s'en rapporter au mémoire cité de M. S t a u d e.

Il resterait toutefois à former les conditions de stabilité, dont M. S t a u d e ne s'est pas occupé. Je ne m'en occuperai pas non plus, en me contentant de signaler la question, qui n'exige d'ailleurs que quelque développement matériel de calcul.

b) Cas de Lagrange.

On a

$$A = B,$$

$$x_0 = y_0 = 0, \quad (z_0 > 0)$$

et les expressions de H et de G_3 deviennent respectivement

$$H = \frac{1}{2} \{ A(p^2 + q^2) + Cr^2 \} + Pz_0\gamma_3,$$

$$G_3 = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3.$$

Il existe dans ce cas la troisième intégrale

$$r = r_0 \quad (r_0 \text{ constante}),$$

qui est bien en involution avec

$$G_3 = \text{const. } ^1)$$

¹⁾ On a en effet, en supposant d'adopter comme variables canoniques les angles d'Euler $\mathfrak{S}, \varphi, \psi$ et leurs conjuguées $p_\mathfrak{S}, p_\varphi, p_\psi$:

$$G_3 = p_\psi, \quad r = p_\varphi,$$

d'où $(G_3, r) = 0$.

On doit s'attendre, d'après le chapitre précédent, à ∞^4 mouvements à la Routh. Il est aisé de les caractériser. Écrivons la condition de stationnariété sous la forme

$$\delta H - \omega \delta G_3 - A \lambda (\gamma_1 \delta \gamma_1 + \gamma_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \gamma_3) = 0$$

(ω, λ indéterminées), en y considérant $\delta r = 0$, à cause de l'intégrale $r = r_0$. Elle donne

$$\begin{cases} p = \omega \gamma_1, \\ q = \omega \gamma_2; \\ \omega p + \lambda \gamma_1 = 0, \\ \omega q + \lambda \gamma_2 = 0; \\ C \omega r_0 + A \lambda \gamma_3 = P z_0. \end{cases}$$

Le second groupe, en y remplaçant p et q par leurs valeurs $\omega \gamma_1, \omega \gamma_2$, devient

$$(\omega^2 + \lambda) \gamma_1 = 0, \quad (\omega^2 + \lambda) \gamma_2 = 0,$$

d'où, ou bien

$$1-0 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0;$$

ou bien

$$2-0 \quad \lambda = -\omega^2.$$

Dans le premier cas les cosinus directeurs de la verticale restent constants ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \pm 1$) et le mouvement se réduit à une rotation uniforme (les composantes de la vitesse angulaire étant $p = 0, q = 0, r = r_0$) autour de l'axe de symétrie de l'ellipsoïde d'inertie, dirigé verticalement.

C'est ce qui arrive (rigoureusement en théorie, très prochainement en pratique) pour une toupie, lorsqu'on prend soin que l'axe soit dirigé verticalement au moment de la mise en marche (toupie dormante).

Dans le second cas, il reste, en se débarassant de λ ,

$$(4) \quad \begin{cases} p = \omega \gamma_1, \\ q = \omega \gamma_2, \\ C \omega r_0 = A \omega^2 \gamma_3 + P z_0. \end{cases}$$

Ces valeurs, introduites dans l'intégrale des aires, donnent

$$A\omega^2 - G_3\omega + Pz_0\gamma_3 = 0.$$

En multipliant par $A\omega^2$ et remplaçant $A\omega^2\gamma_3$ par sa valeur $C\omega r_0 - Pz_0$, il vient

$$(5) \quad A^2\omega^4 - AG_3\omega^3 + Pz_0Cr_0\omega - P^2z_0^2 = 0,$$

ce qui montre que l'auxiliaire ω est une constante non nulle¹⁾.

Il s'en suit, d'après la troisième des (4), que γ_3 aussi est une constante: l'axe de symétrie du corps (plus généralement de son ellipsoïde d'inertie) décrit donc un cône circulaire autour de la verticale.

Mais on peut aller plus avant et reconnaître complètement la nature du mouvement, d'après les équations (4).

En les écrivant

$$\begin{aligned} p &= \omega\gamma_1 + 0, \\ q &= \omega\gamma_2 + 0, \\ r_0 &= \omega\gamma_3 + \left(\frac{A-C}{C} \omega\gamma_3 + \frac{Pz_0}{C\omega} \right), \end{aligned}$$

on met en évidence que la rotation instantanée du corps est la résultante de deux composantes constantes: l'une autour de la verticale (ascendante), mesurée (en valeur et signe) par ω ; l'autre autour de l'axe de symétrie, mesurée par

$$\frac{A-C}{C} \omega\gamma_3 + \frac{Pz_0}{C\omega} = r_0 - \omega\gamma_3.$$

Il s'agit donc de précessions régulières. Leur ensemble dépend bien de quatre constantes: r_0 et G_3 (ou, si l'on veut, $\omega \leq 0$ et γ_3); la valeur initiale de γ_1 (ou de γ_2 , ou même, si l'on veut, de l'angle d'Euler φ); enfin la valeur initiale de l'angle de précession ψ , lié aux variables $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par la relation

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G_3 - Cr_0\gamma_3}{A(1-\gamma_3^2)},$$

¹⁾ En effet le terme tout connu $-P^2z_0^2$ est négatif. L'équation (5) n'a donc aucune racine nulle; d'ailleurs elle admet toujours deux racines réelles au moins.

qui se réduit à

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega.$$

Pour voir s'il y a stabilité, les variables p, q, \dots, γ_3 , si commodes pour l'étude du mouvement, ne sont pas les plus indiquées. On arrive plus rapidement au but, en ayant recours, avec M. M. Klein et Sommerfeld¹⁾, aux angles d'Euler ϑ, φ, ψ et à leurs dérivées.

Le résultat très simple est le suivant:

Les précessions régulières sont toujours stables. Les rotations autour de l'axe de symétrie, dirigé verticalement, le sont aussi, si le centre de gravité tombe au dessous du point fixe; dans le cas contraire (où rentre en particulier la toupie dormante) il y a stabilité alors et alors seulement que la vitesse angulaire r_0 , autour de l'axe de symétrie, est assez grande, c'est-à-dire

$$r_0^2 > 4 Pz_0.$$

c) Cas d'Euler.

A, B, C étant quelconques, le moment des forces appliquées, par rapport au point fixe Ω , est nul. L'énergie est alors purement cinétique, et l'on a

$$H = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Le moment résultant G des quantités de mouvement, par rapport à Ω , reste constant (en valeur et direction).

La constance de la valeur absolue donne lieu à l'intégrale

$$G^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const.}$$

Cherchons d'abord les mouvements à la Routh auxquels elle donne lieu, et posons en conformité

$$\delta H - \frac{1}{2} \lambda \delta G^2 = 0,$$

en désignant le multiplicateur par $-\frac{1}{2} \lambda$.

Il s'en suit, en développant,

$$(1 - A\lambda)p = 0, \quad (1 - B\lambda)q = 0, \quad (1 - C\lambda)r = 0.$$

¹⁾ „Theorie des Kreisels“. Chap. V. § 7, page 354 et suivantes.

Dans le cas général, où A, B, C sont distincts, ces équations exigent évidemment que deux des composantes p, q, r soient nulles.

La troisième est alors nécessairement constante, d'après $H = \text{const}$ (ou $G = \text{const}$), et d'ailleurs arbitraire. Les mouvements en question sont donc (toutes et seules) les rotations uniformes autour des axes principaux d'inertie. Fixons le troisième, par exemple, et éliminons r de H , en le tirant de

$$G^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2.$$

Il vient

$$H = \frac{1}{2C} \{ A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 - G^2 \},$$

d'où (p et q ayant la valeur zéro pour les rotations autour du troisième axe)

$$\delta^2 H = \frac{1}{C} \{ A(C-A) \delta p^2 + B(C-B) \delta q^2 \}.$$

C'est une forme définie, pourvu que $C-A$ et $C-B$ aient même signe. On en tire la conclusion bien connue :

Les rotations autour du grand et du petit axe de l'ellipsoïde d'inertie sont stables; celles, qui correspondent à l'axe moyen, sont instables.

Examinons maintenant plus de près s'il y a d'autre profit à tirer des intégrales, admises par le problème, qui nous occupe.

Comme on l'a déjà remarqué, le moment G est constant, non seulement en valeur, mais en direction aussi. En le projetant sur les trois axes fixes ξ, η, ζ (qu' on peut d'ailleurs choisir arbitrairement) on obtient les trois intégrales (des aires):

$$G_1 = Ap a_1 + Bq a_2 + Cr a_3 = \text{const},$$

$$G_2 = Ap \beta_1 + Bq \beta_2 + Cr \beta_3 = \text{const},$$

$$G_3 = Ap \gamma_1 + Bq \gamma_2 + Cr \gamma_3 = \text{const},$$

$a_1, a_2, \dots, \gamma_3$ désignant comme d'habitude les cosinus directeurs de ξ, η, ζ par rapport aux axes principaux d'inertie.

Il est bien connu que les expressions canoniques de G_1, G_2, G_3 ne sont point en involution entre elles, mais qu' il en est ainsi pour le couple formé avec

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2$$

et une quelconque des G_i ($i = 1, 2, 3$).

Au couple

$$G^2 = \text{const}, \quad G_3 = \text{const},$$

on peut faire correspondre, d'après la position

$$\delta H - \omega \delta G_3 - \frac{1}{2} \lambda \delta G^2 - \mu (\gamma_1 \delta \gamma_1 + \gamma_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \gamma_3) = 0$$

(ω , λ et μ indéterminées), ∞^4 mouvements à la Routh: lesquels?

Il suffit d'expliciter, pour reconnaître qu'on est justement reconduit aux rotations envisagées tout à l'heure. En surplus l'intervention des variables γ_1 , γ_2 , γ_3 donne lieu aux conséquences suivantes:

1-0 L'axe de rotation est dirigé dans l'espace suivant la droite γ_1 , γ_2 , γ_3 (axe fixe des ζ). Comme il peut être choisi arbitrairement, ceci revient à dire que la direction dans l'espace de l'axe de rotation peut être fixée d'avance d'une façon quelconque.

Il s'en suit que l'ensemble des rotations envisagées dépend bien de 4 constantes: deux pour fixer l'orientation dans l'espace de l'axe de rotation (qui est un de trois axes d'inertie); et deux pour fixer la valeur constante de la vitesse angulaire et la position initiale du corps autour de l'axe.

2-0 Le critère de stabilité (telle qu'on doit l'entendre pour un mouvement à la Routh, d'après la définition du chap. préc. § 4) est bien celui qu'on a tiré tout à l'heure, en tenant compte seulement de $G^2 = \text{const}$.

C'est évident, dès qu'on pense que G_3 dépend aussi de la direction γ_1 , γ_2 , γ_3 , tandis que H et G contiennent seulement p , q , r .

L'expression trouvée pour $\delta^2 H$ est déjà une forme réduite Q (à $2(3-2) = 2$ arguments); il est donc inutile de la transformer davantage en se servant de $G_3 = \text{const}$.

Faisons remarquer, en terminant, qu'il n'y a pas d'autre manière (essentiellement distincte de celle qu'on vient de discuter) de combiner les intégrales des aires pour en tirer des mouvements à la Routh.

§ 2. Problème plan des trois corps.

Soient P_0 , P_1 , P_2 les trois corps; m_0 , m_1 , m_2 leurs masses; x_1 , y_1 ; x_2 , y_2 les coordonnées de P_1 , P_2 par rapport à P_0 (plus précisément par rapport à un système d'axes de direction invariable, ayant l'origine en P_0); p_1 , q_1 ; p_2 , q_2 les composantes (par rapport aux mêmes axes) des quantités de mouvement absolu de P_1 , P_2 .

Convenons de désigner par

$$r_1, \quad r_2, \quad \Delta$$

les trois distances

$$\overline{P_0 P_1} = V \overline{x_1^2 + y_1^2},$$

$$\overline{P_0 P_2} = V \overline{x_2^2 + y_2^2},$$

$$\overline{P_1 P_2} = V \overline{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

et supposons (comme il est toujours permis sans altérer les équations différentielles du mouvement) que le centre de gravité du système P_0, P_1, P_2 reste immobile.

La somme des quantités de mouvement des trois points P_0, P_1, P_2 est alors nulle, et il en résulte que

$$-(p_1 + p_2), \quad -(q_1 + q_2)$$

sont les composantes de la quantité de mouvement de P_0 .

On a ainsi, pour les vitesses absolues de P_0, P_1, P_2 , les composantes

$$-\frac{1}{m_0} (p_1 + p_2), \quad -\frac{1}{m_0} (q_1 + q_2);$$

$$\frac{p_1}{m_1}, \quad \frac{q_1}{m_1};$$

$$\frac{p_2}{m_2}, \quad \frac{q_2}{m_2},$$

d'où l'expression suivante de l'énergie cinétique du système:

$$T = \frac{1}{2m_0} \{ (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 \} + \frac{1}{2} \sum_i^2 \frac{1}{m_i} (p_i^2 + q_i^2).$$

Il s'en suit encore que les composantes $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}$ de la vitesse relative de P_i ($i = 1, 2$), par rapport à P_0 , ont les expressions:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m_i} + \frac{1}{m_0} (p_1 + p_2), \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} + \frac{1}{m_0} (q_1 + q_2). \end{array} \right. \quad (i = 1, 2)$$

On a d'autre part le potentiel newtonien

$$(7) \quad U = f \left\{ \frac{m_0 m_1}{r_1} + \frac{m_0 m_2}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta} \right\}$$

(f constante de l'attraction universelle). L'énergie totale H du système est donc

$$(8) \quad H = T - U = \frac{1}{2m_0} \{p_1 + p_2\}^2 + (q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2} \sum_i^2 \frac{1}{m_i} (p_i^2 + q_i^2) - U.$$

On sait que les équations du mouvement peuvent être présentées sous forme canonique avec quatre degrés de liberté, H pour fonction caractéristique,

$$x_1, \quad y_1, \quad x_2, \quad y_2,$$

$$p_1, \quad q_1, \quad p_2, \quad q_2,$$

comme couples de variables conjuguées ¹⁾. Mais nous n'aurons pas à expliciter les équations différentielles. Il va nous suffire de remarquer qu'elles admettent, en dehors de $H = \text{const}$, l'intégrale des aires, relative au plan du mouvement (qui est d'ailleurs la seule intégrale connue). Cette intégrale, en supposant de prendre comme pôle fixe la position occupée par P_0 à l'instant envisagé, s'écrit

$$(9) \quad G = \sum_i^2 (x_i q_i - y_i p_i) = \text{const}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier très simplement les ∞^2 mouvements à la Routh de notre système, provenant de

$$\delta H - \omega \delta G = 0$$

(ω multiplicateur indéterminé), ce qui se traduit, d'après (8) et (9) dans les huit équations:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{p_i}{m_i} + \frac{1}{m_0} (p_1 + p_2) = -\omega y_i, \\ \frac{q_i}{m_i} + \frac{1}{m_0} (q_1 + q_2) = \omega x_i; \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \omega q_i = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y_i} - \omega p_i = 0. \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

¹⁾ Poincaré „Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps“. Acta Mathematica. T. 21. 1897; ou bien „Leçons de mécanique céleste“. T. 1. Paris 1905. № 26.

En tenant compte des (6), les équations (10) se réduisent simplement à

$$(10') \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\omega y_i, \\ \frac{dy_i}{dt} = \omega x_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

L'interprétation cinématique de ces formules est bien évidente :

Les deux points P_1, P_2 tournent autour de P_0 avec la même vitesse angulaire ω .

Il s'en suit en particulier que les trois distances r_1, r_2, Δ , c'est-à-dire la configuration des trois corps demeure invariable pendant le mouvement. Pour la déterminer, on n'a qu'à tenir compte des (11).

En remplaçant, dans les équations (10), $\omega p_i, \omega q_i$ par leurs valeurs, tirées des (11), il vient

$$(11 a) \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{m_i}{m_0} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + m_i \omega^2 x_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

$$(11 b) \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} + \frac{m_i}{m_0} \left(\frac{\partial U}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_2} \right) + m_i \omega^2 y_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

les (11 b) se déduisant des (11 a) par le changement matériel de x en y .

Sous forme développée, en tenant compte de l'expression (7) de U , j'écrirai les (11 a), comme il suit :

$$(12) \quad \begin{cases} \left[f \left(\frac{m_0 + m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{\Delta^3} \right) - \omega^2 \right] x_1 + f m_2 \left[\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right] x_2 = 0, \\ f m_1 \left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right] x_1 + \left[f \left(\frac{m_0 + m_2}{r_2^3} + \frac{m_1}{\Delta^3} \right) - \omega^2 \right] x_2 = 0, \end{cases}$$

en les envisageant comme deux équations linéaires en x_1, x_2 , qui, à cause des (11 b), doivent d'ailleurs être vérifiées aussi par y_1, y_2 .

On est ainsi conduit à distinguer deux cas :

1-0 Les deux systèmes de solutions $x_1, x_2; y_1, y_2$ sont distincts, c'est-à-dire le déterminant $x_1 y_2 - x_2 y_1$, ou, si l'on veut, l'aire du triangle $P_0 P_1 P_2$, ne s'annule pas).

2-0 Les deux solutions coïncident (ce qui veut dire: P_0, P_1, P_2 en ligne droite).

Premier cas. Les équations (12), admettant par hypothèse deux solutions distinctes, leurs quatre coefficients doivent être tous identiquement nuls.

Ceci donne d'abord

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{\Delta^3}, \quad \frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{\Delta^3},$$

c'est-à-dire

$$r_1 = r_2 = \Delta,$$

après quoi les deux autres conditions se réduisent simplement à

$$(13) \quad \omega^2 = \frac{fM}{\Delta^3} \quad (M = m_0 + m_1 + m_2).$$

On en conclut que le triangle $P_0 P_1 P_2$ (invariable, comme on l'avait déjà remarqué) est équilatéral et que la vitesse angulaire ω est une constante, liée à la longueur Δ du côté du triangle par la relation (13).

Ces solutions dépendent bien de deux constantes arbitraires: la dimension Δ du triangle équilatéral (qui détermine moyennant (13) la vitesse de rotation; ou vice-versa); et l'orientation initiale du triangle par rapport à une direction fixe.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, le centre de gravité des trois corps P_0, P_1, P_2 ayant été supposé fixe, leur mouvement absolu est une rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de ce point.

Second cas. Prenons l'axe des x dirigé suivant la droite, où se trouvent (à l'instant envisagé) les trois corps P_0, P_1, P_2 . On a alors $y_1 = y_2 = 0$, et il n'y a plus à se préoccuper des y .

Voyons ce qu'il arrive des x . On peut supposer, sans nuire évidemment à la généralité de la discussion, que P_0 soit situé entre P_1 et P_2 et que $P_0 P_1$ soit la direction positive de l'axe des x .

On aura

$$r_1 = x_1, \quad r_2 = -x_2, \quad \Delta = x_1 - x_2 = r_1 + r_2,$$

et les équations (12) s'écriront:

$$(12') \quad \begin{cases} r_1 \omega^2 = f \left[\frac{m_0 + m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{(r_1 + r_2)^2} - \frac{m_2}{r_2^2} \right], \\ r_2 \omega^2 = f \left[\frac{m_0 + m_2}{r_2^2} + \frac{m_1}{(r_1 + r_2)^2} - \frac{m_1}{r_1^2} \right], \end{cases}$$

d'où, en éliminant ω^2 et en chassant les dénominateurs,

$$\begin{vmatrix} r_1 & (m_0+m_1)r_2^2(r_1+r_2)^2 + m_2r_1^2r_2^2 - m_2r_1^2(r_1+r_2)^2 \\ r_2 & (m_0+m_2)r_1^2(r_1+r_2)^2 + m_1r_1^2r_2^2 - m_1r_2^2(r_1+r_2)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est homogène de cinquième degré en r_1, r_2 . En divisant par r_1^5 , en posant

$$\frac{r_2}{r_1} = A,$$

et en réduisant, on obtient l'équation de Lagrange

$$(14) \quad (m_0+m_1)A^5 + (2m_0+3m_1)A^4 + (m_0+3m_1)A^3 \\ - (m_0+3m_2)A^2 - (2m_0+3m_2)A - (m_0+m_2) = 0,$$

qui admet une racine positive et une seule, comme le montrent les signes des coefficients.

Le rapport des distances étant ainsi déterminé, les deux équations (12') donnent nécessairement pour ω^2 une même valeur. En les additionnant on obtient cette valeur sous la forme symétrique

$$\omega^2(r_1+r_2) = f \left\{ \frac{m_0}{r_1^2} + \frac{m_0}{r_2^2} + \frac{m_1+m_2}{(r_1+r_2)^2} \right\},$$

qui met en évidence la réalité de ω .

Ici encore on a en définitive ∞^2 solutions, demeurant arbitraires une des distances et l'orientation initiale de la droite $P_2P_0P_1$.

Stabilité. Sans insister davantage, je me bornerai à rappeler les résultats, dus, comme on sait, à Liouville¹⁾ et à M. Routh²⁾.

Le second cas (corps alignés) est toujours instable.

Le premier (triangle équilatéral) peut être stable ou instable suivant le rapport des masses; la condition de stabilité étant

$$M^2 > 27(m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2).$$

¹⁾ Extrait d'un mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps". Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. VII. 1842.

²⁾ „On Laplace's three particles". Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VI. 1875.

Elle est bien satisfaite lorsqu' une des masses (soit m_0) est prépondérante sur les deux autres (étant par exemple $\frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0} < \frac{1}{54}$).

Si au contraire les trois masses diffèrent peu, il y a assurément instabilité.

§ 3. Renseignements bibliographiques.

On trouve d'autres exemples de mouvements à la Routh dans les ouvrages de cet auteur et notamment dans l'Advanced Part de son traité de dynamique (cinquième édition, London: Macmillan. 1905; traduction allemande, Leipzig: Teubner. 1898).

A signaler encore:

T. Levi-Civita „Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kovalevski“. Rendiconti dei Lincei, 5 Mai, 1 et 16 Juin 1901.

G. Picciati „Sui moti stazionari di sistemi olonomi, soggetti a forze conservative in casi particolari“. Atti dell' Istituto Veneto. T. LXI. 1902.

A. Viterbi „Sui moti stazionari spontanei di un solido immerso in un liquido indefinito“, ibidem. T. LXII. 1903.

CHAPITRE IV.

REMARQUES CRITIQUES.

§ 1. Exemple élémentaire.

Soit P un point matériel, mobile dans le plan sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel.

Les petites oscillations du point autour d'une position d'équilibre stable, peuvent être définies (après un choix convenable des axes des coordonnées) par les équations caractéristiques des mouvements harmoniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_2^2 y = 0, \end{array} \right.$$

ω_1 et ω_2 étant deux constantes (réelles), qui dépendent de la nature de la force.

Les intégrales de ces équations sont

$$(1) \quad \begin{cases} x = A \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y = B \cos(\omega_2 t + \beta), \end{cases}$$

avec les quatre constantes A, α, B, β , qui doivent être déterminées par les conditions initiales.

Supposons qu'on les ait fixées d'une façon quelconque, et considérons la correspondante trajectoire du mouvement, c'est-à-dire la courbe C représentée paramétriquement par les (1).

Elle reste toujours à l'intérieur du rectangle formé par les droites $x = \pm A, y = \pm B$; mais sa nature est essentiellement différente selon que ω_1 et ω_2 sont ou ne sont pas commensurables entre eux.

Dans le premier cas la courbe C est fermée et algébrique.

Lorsque au contraire le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est irrationnel, la courbe est transcendente et passe aussi près que l'on veut d'un point quelconque intérieur au rectangle ¹⁾. Pratiquement elle remplit le rectangle.

On voit ainsi que, pour $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nombre rationnel, l'élimination de t entre les (1) donne lieu à une liaison, qu'on peut voir (je veux dire mettre en évidence par quelque moyen expérimental), entre les positions, qui seront successivement occupées par le mobile.

Dans le second cas il n'y a plus de relation physiquement saisissable. Au point de vue pratique les choses se passent comme s'il n'existait aucune relation.

§ 2. Relations uniformes en général.

Des conclusions analogues s'appliquent aux mouvements des systèmes, dont la position et (par conséquent) la distribution des vitesses dépendent d'un nombre fini de paramètres: soient x_1, x_2, \dots, x_n .

Supposons ces paramètres accessibles à l'expérience (d'une façon d'ailleurs quelconque), et envisageons les équations finies d'un mouvement du système:

$$(2) \quad x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

¹⁾ Voyez par exemple Appell „Traité de Mécanique rationnelle“. T. I, page 488 (de la seconde édition).

les φ_i étant bien entendu des fonctions uniformes et régulières pendant la durée de ce mouvement.

L'exemple, indiqué tout à l'heure, montre qu' en général l'élimination de t ne donnera pas lieu à $n-1$ relations effectives (c'est-à-dire vérifiables en dehors de l'analyse mathématique), mais seulement à un certain nombre, qui peut même être nul.

Pour donner à cette remarque une forme précise, il suffit d'avoir recours à une notion, acquise à la science depuis Gauss et Jacobi, mais beaucoup mieux appréciée à la suite des recherches mémorables de M. Poincaré sur le problème des trois corps. Je fais allusion à la notion de relations uniformes¹⁾, et je vais la rappeler.

Soit généralement un système de $m \leq n$ relations

$$(2) \quad F_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

entre x_1, x_2, \dots, x_n .

Supposons qu'elles soient vérifiées par des valeurs particulières $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ des x ; en langage géométrique plus compréhensif, au point P_0 .

On dit que le système (3) est uniforme au voisinage de P_0 , s'il existe un domaine D autour de ce point, jouissant de la propriété suivante:

Dès qu' on se donne arbitrairement les valeurs de $n-m$ des x (avec la seule condition qu'elles appartiennent au domaine D) les valeurs des autres m restent déterminées par les équations (3) d'une façon unique.

D'après cette définition, les remarques précédentes reviennent à dire que, parmi les relations entre les x , provenant des (2), il y a lieu de considérer tout particulièrement celles qui peuvent former un système uniforme. Supposons qu' il y en ait m ($\leq n-1$) indépendantes, et pas davantage.

Ce nombre m mesure, à un certain sens, le degré de netteté du mouvement. Le mouvement réussit d'autant mieux caractérisé que m s'approche de $n-1$.

Quant aux autres $n-m-1$ relations indépendantes, fournies par l'élimination de t , elles échappent complètement à l'intuition, soit géométrique, soit mécanique.

§ 3. Systèmes mécaniques usuels. Raison de l'intérêt de leurs mouvements stationnaires.

¹⁾ Jacobi les appelait analytiques. On peut voir à ce propos une intéressante note historique de M. Schlesinger „Ueber den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi“. Bibliotheca Mathematica. B. VI. 1905.

Les paramètres, dont on sert ordinairement pour fixer l'état de mouvement (position et vitesse) d'un système matériel sont des longueurs et des angles.

Désignons en général par l un paramètre quelconque de la première sorte, par λ un paramètre quelconque de la seconde. Les nombres l sont naturellement déterminés d'une façon unique pour un état de mouvement donné; les λ le sont au contraire à moins de multiples entiers de 2π .

Il arrive presque toujours, dans les problèmes naturels, qu'on peut s'arranger de façon que la force vive et plus généralement les intégrales (ou relations invariantes) connues dépendent algébriquement des l , et des fonctions trigonométriques des λ . Les premiers membres se présentent alors comme fonctions algébriques des l et des $e^{i\lambda}$, et il est bien clair (d'après le Chap. I) que toute condition de stationnariété résulte elle-même algébrique dans les l , $e^{i\lambda}$.

Les solutions stationnaires vérifient partant un système de relations uniformes ¹⁾ entre les paramètres physiquement accessibles, l et grandeurs géométriques ²⁾ des angles λ ; tandis que, en général, pour les autres solutions du problème, il n'existe pas de relations uniformes ou il en existe un nombre moindre.

C'est ici la véritable origine de l'intérêt, présenté par les mouvements stationnaires, qu'on rencontre dans les applications concrètes. Ils possèdent des caractères de simplicité et de netteté, qui les mettent en évidence parmi les autres mouvements possibles et les rendent aussi précieux comme points de repère pour aborder l'étude du cas général.

Nous avons ainsi analysé au point de vue qualitatif la nature des mouvements stationnaires. On peut se demander s'il n'y a rien de quantitatif contribuant à les distinguer. A première vue on serait tenté à le croire en ayant égard aux opérations analytiques, d'où ils ressortent. Mais il est aisé de se convaincre qu'il n'en est rien.

On vérifie en effet sans peine, pour un système différentiel quelconque, que toute solution, donnée d'avance, peut être considérée comme stationnaire (suivant la définition du Chap. I), dès qu'on ait effectué un changement de variables convenable (régulier et biunivoque au voisinage de quelque système de valeurs, appartenant à la solution donnée).

Il y a même plus.

¹⁾ A des systèmes de valeurs exceptionnelles près (points multiples) au voisinage desquelles on a un nombre fini de branches. Ceci n'influe d'ailleurs pas les considérations, qui suivent dans le texte.

²⁾ Je dis grandeurs géométriques, parce que les nombres λ présentent au contraire l'indétermination de multiples entiers de 2π .

Plaçons nous dans le cas typique de M. Routh, où l'on a affaire à un système canonique

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

H étant indépendant de t .

Un mouvement quelconque, défini par ce système, peut acquérir tous les caractères formels d'un mouvement à la Routh. Il suffit pour cela d'avoir recours à une transformation convenable ¹⁾.

Padoue, septembre 1905.

Voyez ma note „Sui moti stazionari dei sistemi olonomi“. Rendiconti del Lincei. 17 Avril. 1901.

TABLE DES MATIÈRES.

	<i>Page</i>
Préface	1— 2

CHAPITRE I.

Considérations générales s'appliquant à tout système différentiel.

§ 1. Préliminaires	2— 3
§ 2. Étude d'un cas simple	3— 5
§ 3. Extension du résultat	5— 9
§ 4. Solutions particulières stationnaires — justification de cet appellatif	9— 10
§ 5. Remarque sur la construction effective des solutions stationnaires	10— 11
§ 6. Stabilité	11— 12

CHAPITRE II.

Systèmes canoniques — Mouvements stationnaires — Mouvements à la Routh.

§ 1. Compléments relatifs aux systèmes de forme canonique	13— 17
§ 2. Rappel des recherches de M. Routh	17— 18
§ 3. Mouvements stationnaires en général — Mouvements à la Routh	18— 20
§ 4. Règle de Dirichlet-Liapounoff.	20— 21

CHAPITRE III.

Exemples de mouvements à la Routh.

§ 1. Corps solide suspendu par un de ses points.	
a) Solide pesant dans le cas général	21— 23
b) Cas de Lagrange	23— 26
c) Cas d'Euler	26— 28
§ 2. Problème plan des trois corps	28— 34
§ 3. Renseignements bibliographiques	34—

CHAPITRE IV.

Remarques critiques.

	<i>Page</i>
§ 1. Exemple élémentaire	34—35
§ 2. Relations uniformes en général	35—36
§ 3. Systèmes mécaniques usuels — Raison de l'intérêt de leurs mouvements stationnaires	36—38

K. ŻORAWSKI,

Über Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen.

(O WŁASNOŚCIACH KRZYWIZNOWYCH CIĄGŁYCH ZBIORÓW
ELEMENTÓW LINIOWYCH).

Die Untersuchung der Krümmungseigenschaften eines jeden geometrischen Gebildes besteht in der Betrachtung gewisser Halbgeraden, welche bei jeder euklidischen Bewegung ihre Lage in Bezug auf das Gebilde nicht ändern, und in der Betrachtung gewisser Grössen, deren Werte bei jeder euklidischen Bewegung dieselben bleiben. Betrachtet man eine Schar von Linienelementen, welche längs einer Raumcurve liegen, dieselbe aber im allgemeinen nicht tangieren, so können die Krümmungseigenschaften dieses Gebildes in zwei Kategorien eingeteilt werden. Zur ersten Kategorie können alle solche Krümmungseigenschaften mitgezählt werden, welche von der Wahl der Raumcurve abhängig, dagegen von der Wahl der Schar von Linienelementen unabhängig sind, welche also die Krümmungstheorie der Raumcurven ausmachen; zur zweiten Kategorie hingegen alle diejenigen, welche von der Wahl der Schar von Linienelementen nicht unabhängig sind. Mit den letzten Eigenschaften beschäftigte sich A o u s t, der für die genannten Scharen gewisse Grössen wie „courbure inclinée“, „flexion inclinée“ etc. und gewisse mit denselben eng verbundene Halbgeraden definiert und auf die Theorie der krummlinigen Coordinaten in Anwendung gebracht hat ¹⁾.

¹⁾ C. R., t. 57, p. 217—219. 1863. Annali di matematica. Ser. I, t. 6, p. 65—87. 1864; Ser. II, t. 2, p. 39—64. 1868—1869; Ser. II, t. 3, p. 55—69. 1869—1870. Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque. Paris 1869.

In der vorliegenden Abhandlung beabsichtigen wir einerseits, einige der genannten Betrachtungen von A o u s t in einer Form darzustellen, die den heutzutage gebräuchlichen Ausführungen der Differentialgeometrie näher angepasst wäre, andererseits aber gewisse den genannten nahe stehende und unseres Wissens neue Betrachtungen zu entwickeln.

Die Grundlage dieser Theorie ist eine unmittelbare Verallgemeinerung der Krümmungstheorie von Raumcurven. Insbesondere besitzen in dieser Theorie die Formeln von F r e n e t eine unmittelbare Geltung, sobald man nur die in denselben vorkommenden Grössen zweckmässig deutet. Die Nummer 1 vorliegender Abhandlung enthält eine Darstellung dieses Gegenstandes und soll die eben genannten Umstände deutlich hervorheben. Dabei benutzen wir nicht die Benennungen von A o u s t, sondern wir ersetzen in sämtlichen Benennungen der Krümmungstheorie von Raumcurven das Wort „Raumcurve“ durch den Ausdruck „Schar von Linien-elementen“.

Die Nummer 2 enthält eine Zusammenstellung der flächentheoretischen Fundamentalformeln, die in der Folge gebraucht werden.

In der Nummer 3 werden die Betrachtungen der Nummer 1 auf zwei in einer Fläche gelegene Curvenscharen in Anwendung gebracht. Diese Entwicklungen unterscheiden sich von den entsprechenden Entwicklungen von A o u s t hauptsächlich dadurch, dass die A o u s t'schen sich meistens auf Curvenscharen beziehen, welche gleichzeitig als Coordinatenlinien auf der Fläche angenommen werden, während wir alle hier zugehörigen Formeln unter Zugrundelegung anderer Curvenscharen als Coordinatenlinien aufstellen. Ferner, soweit es uns bekannt ist, kommen diejenigen Betrachtungen, welche in der Nummer 3 über die der Torsion analoge Grösse angestellt werden, in dieser Abhandlung überhaupt zum ersten Male vor.

Die Nummer 4 enthält eine Anwendung der allgemeinen Entwicklungen der Nummer 1 auf die Schar der Normalen der Fläche und man kommt in dieser Weise zu solchen Ausführungen, die mit den bekannten Betrachtungen über unendlich benachbarte Normalen gleichbedeutend sind.

In der Nummer 5 bieten wir endlich eine Anwendung der Entwicklungen der Nummer 1 auf die Theorie der zweifach unendlichen Curvenscharen. Diese Anwendung bildet unseres Wissens einen neuen Beitrag zu dieser Theorie.

Es möge noch hinzugefügt werden, dass wir uns in diesen Betrachtungen darauf beschränkt haben, hauptsächlich die analytische Seite derselben zu behandeln. Auf diese Weise beschäftigen wir uns nicht mit den wichtigen geometrischen Bestimmungen von Krümmungsmittelpunkten, wie dies für verschiedene Krümmungen von den Herren A. V o s s und R. v. L i-

Hien thal getan worden ist; auch auf die mannigfachen Contingenzwinkel, welche in den Schriften von Aoust behandelt werden, gehen wir hier explicite gar nicht ein.

1. Es seien x, y, z Cartesi'sche Coordinaten des Punktes im ebenen dreifachen Raume. Man betrachte in diesem Raume eine Curve:

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

die keine Minimalcurve ist und man setze voraus, dass durch jeden Punkt t dieser Curve ein Linienelement hindurchgeht, dessen Richtungscosinus in Bezug auf die Axen x, y, z die folgenden sind:

$$(2) \quad \alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \quad \gamma = \gamma(t).$$

Diese Grössen, welche die identische Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

befriedigen, sollen im allgemeinen von t abhängig sein, d. h. die betrachteten Linienelemente sollen im allgemeinen nicht eine und dieselbe Richtung besitzen. Ferner diese Grössen (2) werden im allgemeinen als verschieden von den Richtungscosinus der Tangente der Curve (1) vorausgesetzt, d. h. die Gleichungen (2) definieren im allgemeinen eine, von der Schar der Linienelemente der Curve (1) verschiedene Schar von Linienelementen.

Diese Schar von Linienelementen wollen wir kurz als Schar L bezeichnen.

Es sei s die Bogenlänge der Curve (1) und man bezeichne für dieselbe:

$$\frac{dx}{ds} = a(t), \quad \frac{dy}{ds} = b(t), \quad \frac{dz}{ds} = c(t).$$

Wir bilden den Ausdruck:

$$(3) \quad K = \sqrt{\sum \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2},$$

wo die Summe Σ auf drei Axen erstreckt werden soll und nennen die Grösse K die Krümmung der Schar L .

Wenn diese Krümmung K von Null verschieden ist, so definieren die Formeln:

$$(4) \quad \frac{d\alpha}{ds} = Kl, \quad \frac{d\beta}{ds} = Km, \quad \frac{d\gamma}{ds} = Kn$$

die Richtungscosinus l, m, n einer Richtung, welche keinem Linienelemente von der Länge Null gehören kann. Die Halbgerade durch den Punkt t , welche diese Richtung besitzt, wollen wir positive Hauptnormale der Schar L nennen. Man hat:

$$\sum a l = 0,$$

d. h. das Linienelement und die Hauptnormale der Schar L stehen in demselben Punkte t senkrecht aufeinander.

Die Formeln:

$$(5) \quad \varphi = \beta n - \gamma m, \quad \psi = \gamma l - \alpha n, \quad \sigma = \alpha m - \beta l$$

definieren für den Punkt t die Richtungscosinus einer Richtung, welche auf das Linienelement und die Hauptnormale der Schar L im Punkte t senkrecht steht. Die Halbgerade, welche durch den Punkt t geht und die eben definierte Richtung besitzt, wollen wir als positive Binormale der Schar L bezeichnen. Man möge dabei bemerken, dass

$$\begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \varphi & \psi & \sigma \end{vmatrix} = +1$$

d. h. dass der Dreikant des Linienelementes, der positiven Hauptnormalen und der positiven Binormalen der Schar L mit dem Dreikante der positiven Halbaxen x, y, z congruent ist.

Es ist leicht die Grössen p, q, r so zu berechnen, dass die Formeln:

$$\frac{dl}{ds} = p\alpha + ql + r\varphi,$$

$$\frac{dm}{ds} = p\beta + qm + r\psi,$$

$$\frac{dn}{ds} = p\gamma + qn + r\sigma$$

gelten. Man erhält nämlich:

$$p = \sum a \frac{dl}{ds} = - \sum l \frac{da}{ds} = -K,$$

$$q = \sum l \frac{dl}{ds} = 0,$$

$$r = \sum \varphi \frac{dl}{ds}$$

und wenn man noch die Bezeichnung:

$$(6) \quad -\sum \varphi \frac{dl}{ds} = \sum l \frac{d\varphi}{ds} = S$$

einführt, so wird man diese Formeln in der Form:

$$(7) \quad \frac{dl}{ds} = -Ka - S\varphi, \quad \frac{dm}{ds} = -K\beta - S\psi, \quad \frac{dn}{ds} = -K\gamma - S\sigma$$

darstellen können. Auf dieselbe Weise kann man die Richtigkeit der Formeln:

$$(8) \quad \frac{d\varphi}{ds} = Sl, \quad \frac{d\psi}{ds} = Sm, \quad \frac{d\sigma}{ds} = Sn$$

beweisen.

Die Grösse S wollen wir Torsion der Schar L benennen.

Man bemerke, dass wenn die Schar L aus lauter parallelen Linien-
elementen besteht, so ist identisch $K=0$. Wenn $K \neq 0$, so bildet das
identische Bestehen der Beziehung $S=0$ die notwendige und hinreichende
Bedingung dafür, dass alle Linienelemente der Schar L einer Ebene
parallel seien.

Zweitens wollen wir einige Bemerkungen über die Vorzeichen an-
schliessen. Wenn $K \neq 0$, so ist sie im reellen Falle eine positive Grösse.
Wenn $K \neq 0$, so sind: Hauptnormale, Binormale und Torsion vollständig
bestimmt. Wählt man in diesem Falle statt der Richtung a, β, γ die
entgegengesetzte und lässt die Richtung a, b, c unverändert, so bleibt die
Richtung der positiven Binormalen unverändert, die Richtung der positiven
Hauptnormalen geht in die entgegengesetzte über und die Torsion verän-
dert ihr Vorzeichen. Nimmt man ferner statt der Richtung a, b, c die
entgegengesetzte und lässt a, β, γ unverändert, so gehen die Richtungen
der positiven Hauptnormalen und der positiven Binormalen in die entge-
engesetzte über und die Torsion verändert das Vorzeichen. Wenn endlich
sowohl die Richtung a, β, γ wie auch die Richtung a, b, c in entgegen-
gesetzte übergehen, so bleibt die Richtung der positiven Hauptnormalen
und der Wert von S unverändert und die Richtung der positiven Binormalen
geht in die entgegengesetzte über.

Es sei endlich hervorgehoben, dass im Falle wenn a, β, γ Richtungs-
cosinus der Linienelemente der Curve (1) von der Länge ds sind, so
sind die hier definierten Grössen K und S die Krümmung und die Torsion
der Curve (1) und die hier definierten Halbgeraden: positive Hauptnor-
male und positive Binormale der Schar L , werden zu Halbgeraden: posi-

tiver Hauptnormalen und positiver Binormalen der Curve (1). Dabei gehen die drei Gruppen von Formeln (4), (7) und (8) in die Formeln von Frenet in der Theorie der Raumcurven über. In diesem Sinne bilden diese Betrachtungen eine Verallgemeinerung der Krümmungstheorie von Raumcurven und die Formeln (4), (7) und (8) eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet.

2. Wir werden diese Betrachtungen in erster Linie auf Flächentheorie anwenden. Bei den Rechnungen, die wir ausführen werden, wollen wir die allgemeinen Parameterlinien benutzen, jedoch um mit Grössen zu rechnen, die zwar von der Wahl der Parameterlinien, nicht aber von der Wahl der Parameter selbst abhängig sind, werden wir die Differentiationen nach Bogenlängen der Parameterlinien in Anwendung bringen. In Folge dessen werden wir die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fläche und die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie in einer solchen Form benutzen, dass diese Gleichungen bis auf die Bezeichnungen mit Gleichungen übereinstimmen, welche sich in gewissen Arbeiten der Herren A. Voss und R. v. Lilienthal befinden ¹⁾. Andererseits ist es im diesem Zusammenhange bequem, in den Formeln, die sich auf die allgemeine Flächencurve beziehen, die Richtung dieser Curve in Bezug auf die Parameterlinien durch gewisse Richtungscoefficienten zu bestimmen. Wegen der Entwicklungen, die in der Folge dargestellt werden sollen, stellen wir hier die auf diese Gegenstände sich beziehenden Formeln zusammen.

Es sei eine Fläche:

$$(9) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

und man setze zunächst voraus, dass alle in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen reell sind. Wir wollen die Fundamentalgrössen erster Ordnung mit E, F, G bezeichnen. Wenn man die Bogenlängen der Curven $v = \text{const}, u = \text{const}$; mit s_1 beziehungsweise mit s_2 bezeichnet und die Annahme macht, dass diese Bogenlängen in denselben Richtungen wie u , beziehungsweise v wachsen, so hat man für beliebige Function f von u und v die Formeln:

$$(10) \quad \frac{df}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{df}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Mögen die positiven Halbtangenten der Parameterlinien die Richtungen der wachsenden Bogenlängen besitzen und der positive Sinn der Drehung

¹⁾ Münchner Berichte 1892, p. 247—278. Mathematische Annalen Bd. 42, p. 505—525. Siehe auch Encyclopädie der math. Wissensch. Bd. III, p. 161.

in der Tangentialebene sei derjenige, in welchem die positive Halbtangente der Curve $v = \text{const}$ nach einer Drehung, die kleiner als zwei rechte Winkel ist, mit der positiven Halbtangente der Curve $u = \text{const}$ zusammenfällt. Bei dieser Festsetzung wird durch diese Drehung ein positiver Winkel $\theta < \pi$ gebildet, für welchen die Formeln gelten:

$$(11) \quad \cos \theta = \frac{F}{\sqrt{E} \sqrt{G}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E} \sqrt{G}}.$$

Die Richtungscosinus X, Y, Z der positiven Flächennormalen sollen dann durch die Formel:

$$(12) \quad X = \operatorname{cosec} \theta \left(\frac{dy}{ds_1} \frac{dz}{ds_2} - \frac{dy}{ds_2} \frac{dz}{ds_1} \right)$$

und analoge Formeln bestimmt werden.

Neben den Parameterlinien werden wir auf der Fläche die orthogonalen Trajectorien derselben in Betrachtung ziehen. Für dieselben nehmen wir diejenigen unendlich kleine Bögen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ und diejenigen Halbtangenten als positiv an, welche aus den positiven unendlich kleinen Bögen ds_1 und ds_2 und aus den positiven Halbtangenten der Parameterlinien durch positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$ hervorgehen. Demnach haben wir:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{df}{d\sigma_1} &= -\cotg \theta \frac{df}{ds_1} + \operatorname{cosec} \theta \frac{df}{ds_2}, \\ \frac{df}{d\sigma_2} &= -\operatorname{cosec} \theta \frac{df}{ds_1} + \cotg \theta \frac{df}{ds_2}. \end{aligned}$$

Wir gehen jetzt zu Beziehungen über, in denen Aufeinanderfolgen der Operationen (10) und (13) auftreten. Sind τ und τ' zwei beliebige der betrachteten Bogenlängen, so wollen wir folgende Bezeichnungsweise annehmen:

$$(14) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{df}{d\tau} \right) = \frac{d^2 f}{d\tau^2}, \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{df}{d\tau'} \right) = \frac{d^2 f}{d\tau d\tau'}.$$

Benutzt man nun zuerst die Bezeichnungen:

$$(15) \quad p_1 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}$$

so erhält man die wichtige Beziehung:

$$(16) \quad \frac{d^2 f}{ds_2 ds_1} - \frac{d^2 f}{ds_1 ds_2} = p_1 \frac{df}{ds_1} + p_2 \frac{df}{ds_2}.$$

Wenn man ferner die weiteren Bezeichnungen:

$$(17) \quad q_1 = \frac{p_1 + p_2 \cos \theta}{\sin \theta}, \quad q_2 = \frac{p_2 + p_1 \cos \theta}{\sin \theta},$$

$$g_1 = q_1 - \frac{d\theta}{ds_1}, \quad g_2 = q_2 + \frac{d\theta}{ds_2}$$

annimmt und statt der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung D, D', D'' die Größen:

$$(18) \quad n_1 = \frac{D}{E}, \quad m = \frac{D'}{\sqrt{E} \sqrt{G}}, \quad n_2 = \frac{D''}{G}$$

einführt, so wird man folgende drei Gruppen von Beziehungen hinschreiben können:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{ds_1^2} = g_1 \frac{dx}{d\sigma_1} + n_1 X, \quad \frac{d^2 x}{ds_1 ds_2} = q_1 \frac{dx}{d\sigma_2} + m X, \\ \frac{d^2 x}{ds_2 ds_1} = q_2 \frac{dx}{d\sigma_1} + m X, \quad \frac{d^2 x}{ds_2^2} = g_2 \frac{dx}{d\sigma_2} + n_2 X; \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{ds_1} = \operatorname{cosec} \theta \left(n_1 \frac{dx}{d\sigma_2} - m \frac{dx}{d\sigma_1} \right), \\ \frac{dX}{ds_2} = \operatorname{cosec} \theta \left(m \frac{dx}{d\sigma_2} - n_2 \frac{dx}{d\sigma_1} \right); \end{array} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{ds_1 d\sigma_1} = -g_1 \frac{dx}{ds_1} + (m \operatorname{cosec} \theta - n_1 \cotg \theta) X, \\ \frac{d^2 x}{ds_2 d\sigma_1} = -q_2 \frac{dx}{ds_1} + (n_2 \operatorname{cosec} \theta - m \cotg \theta) X, \\ \frac{d^2 x}{ds_1 d\sigma_2} = -q_1 \frac{dx}{ds_2} + (m \cotg \theta - n_1 \operatorname{cosec} \theta) X, \\ \frac{d^2 x}{ds_2 d\sigma_2} = -g_2 \frac{dx}{ds_2} + (n_2 \cotg \theta - m \operatorname{cosec} \theta) X. \end{array} \right.$$

Zu jeder dieser Gruppen von Beziehungen gehören ausser den angegebenen noch diejenigen, welche aus den angegebenen dadurch hervorgehen, dass man statt der Grössen x, X die Grössen y, Y und z, Z hineinsetzt. Die Gleichungen der ersten Gruppe, d. h. die Gleichungen (19) und die denselben analogen Gleichungen werden eben nach Voss die partiellen Differentialgleichungen der Fläche genannt.

Die Integrabilitätsbedingungen der partiellen Differentialgleichungen der Fläche, d. h. die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie kann man mit Benutzung unserer Bezeichnungen in folgender Form angeben. Die Gauss'sche Beziehung kann entweder in der Form:

$$(22) \quad n_1 n_2 - m^2 = \sin \theta \left(\frac{dg_1}{ds_2} - \frac{dq_2}{ds_1} - p_1 g_1 - p_2 q_2 \right),$$

oder in der Form:

$$(22') \quad n_1 n_2 - m^2 = \sin \theta \left(\frac{dq_1}{ds_2} - \frac{dg_2}{ds_1} - p_1 q_1 - p_2 g_2 \right),$$

dargestellt werden, weil die Beziehung:

$$\frac{d(q_1 - g_1)}{ds_2} - \frac{d(g_2 - q_2)}{ds_1} = p_1 (q_1 - g_1) + p_2 (g_2 - q_2)$$

besteht. Die Mainardi — Codazzi'schen Relationen sind die folgenden:

$$(23) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dn_1}{ds_2} - \frac{dm}{ds_1} &= n_1 (p_1 - q_2 \cotg \theta) + m (g_1 \cotg \theta \\ &\quad + q_2 \operatorname{cosec} \theta + p_2) - n_2 g_1 \operatorname{cosec} \theta, \\ \frac{dn_2}{ds_1} - \frac{dm}{ds_2} &= n_1 g_2 \operatorname{cosec} \theta - m (g_2 \cotg \theta \\ &\quad + q_1 \operatorname{cosec} \theta + p_1) - n_2 (p_2 - q_1 \cotg \theta). \end{aligned} \right\}$$

Nun wollen wir noch einige Worte über die allgemeine Flächencurve hinzufügen, die wir zuerst als eine reelle Curve auf einer reellen Fläche voraussetzen. Hat man eine solche Curve:

$$(24) \quad u = u(\cdot), \quad v = v(\cdot)$$

wo s die Bogenlänge der Curve bezeichnet, so werden wir zur Bestimmung der Richtung der positiven Halbtangente der Curve die Coefficienten:

$$(25) \quad \lambda = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \quad \mu = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}$$

benutzen. Diese Coefficienten befriedigen die Relation:

$$(26) \quad \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos \theta = 1$$

und ist f eine Function der Parameter u und v , so bekommt man:

$$(27) \quad \frac{df}{ds} = \lambda \frac{df}{ds_1} + \mu \frac{df}{ds_2}.$$

Wenn man ferner mit ω denjenigen Winkel bezeichnet, welchen die positive Halbtangente der Curve mit der positiven Halbtangente der Curve $r = \text{const}$ einschliesst, so hat man die Ausdrücke:

$$(28) \quad \lambda = \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin \theta}, \quad \mu = \frac{\sin \omega}{\sin \theta},$$

aus welchen sich durch Differentiation die Formeln:

$$(29) \quad \begin{aligned} d\lambda &= \bar{\lambda} (d\omega - d\theta) - \cotg \theta \cdot \lambda d\theta, \\ d\mu &= \bar{\mu} d\omega - \cotg \theta \cdot \mu d\theta \end{aligned}$$

ergeben, wo $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ die Richtungscoefficienten derjenigen Richtung in der Tangentialebene sind, welche mit der positiven Halbtangente der allgemeinen Curve den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet.

Was die Krümmungen der Flächencurve anbelangt, so wollen wir, um in Bezug auf die Vorzeichen eine bestimmte Wahl zu treffen, die folgende Definition annehmen. Wir setzen voraus, dass die positive in der Tangentialebene der Fläche gelegene Halbnormale der Curve so gewählt ist, dass das Trieder der positiven Halbtangente der Curve, der erwähnten positiven Halbnormalen und der positiven Flächennormalen mit dem Trieder der positiven Halbaxen x, y, z congruent ist. Betrachtet man alsdann die Krümmung der Flächencurve, als einen Vector, der die Richtung der positiven Hauptnormalen besitzt, so werden die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung, sowohl der Grösse wie dem Vorzeichen nach, als rechtwinkelige Projectionen dieses Vectors auf die früher erwähnte in der Tangentialebene liegende positive Halbnormale beziehungsweise auf die positive Flächennormale definiert. Wir bezeichnen diese geodätische Krümmung mit g und diese Normalkrümmung mit n . Man betrachte ferner die Normalebene der Curve und man bezeichne in derselben denjenigen Sinn der Drehung als positiv, in welchem man die positive Flächennormale drehen muss, um vermöge einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ zu der früher erwähnten in

der Tangentialebene liegenden positiven Halbnormalen zu gelangen. Bei dieser Festsetzung wollen wir mit Ω denjenigen positiven Winkel benennen, den die positive Hauptnormale mit der positiven Flächennormalen bildet. Wenn wir ausserdem die Krümmung und Torsion mit K und S und zuletzt die geodätische Torsion mit τ bezeichnen, so gelangt man zur Reihe von Formeln:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} n = K \cos \Omega = n_1 \lambda^2 + 2m \lambda \mu + n_2 \mu^2, \\ g = K \sin \Omega = g_1 \lambda + g_2 \mu + \frac{d\omega}{ds}, \\ K = \sqrt{n^2 + g^2}, \\ S = \frac{d\Omega}{ds} + \tau = \frac{1}{K^2} \left(n \frac{dg}{ds} - g \frac{dn}{ds} \right) \\ \quad - [n_1 \lambda \lambda + m (\lambda \bar{\mu} + \mu \bar{\lambda}) + n_2 \mu \bar{\mu}]. \end{array} \right.$$

Wir haben die in dieser Nummer vorhandenen Definitionen und Formeln unter der Voraussetzung der Realität angegeben und bemerken dabei, dass alle in diesen Formeln vorhandenen Quadratwurzeln als positiv angenommen werden sollen. Diese Betrachtungen können natürlich nicht sämtlich auf die Fälle, in welchen die Voraussetzung der Realität nicht zutrifft, angewendet werden. Sobald man aber annimmt, dass für die Fläche die Discriminante $EG - F^2$ nicht identisch Null ist und dass die Curven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ keine Minimalcurven sind, so können dennoch alle auf die Fläche sich beziehenden Formeln auch in imaginären Fällen in Anwendung gebracht werden, wo für jede der vorhandenen Quadratwurzeln ein bestimmter und immer derselbe der beiden möglichen Werte angenommen werden muss. Wenn man ferner voraussetzt, dass die Flächencurve keine Minimalcurve ist, so können auch in Fällen, in welchen die Realitätsvoraussetzungen nicht stattfinden, die für die Flächencurve angegebenen Formeln benutzt werden, wobei für die Quadratwurzeln dieselbe Bemerkung gelten muss.

3. Es seien zwei Curvenscharen auf der Fläche vorgelegt, die wir als erste und zweite unterscheiden wollen. Wir setzen voraus, dass keine dieser Curvenscharen eine Schar von Minimalcurven ist. Längs jeder Curve der zweiten Curvenschar hat man eine Schar von Linienelementen der Curven der ersten Schar und längs jeder Curve der ersten Curvenschar hat man eine Schar von Linienelementen der Curven der zweiten Schar. Wir wollen die Scharen von Linienelementen der ersten Categorie als Scharen (1, 2) und die Scharen von Linienelementen der zweiten Categorie als Scharen (2, 1) bezeichnen. Diese Scharen von Linienelementen bieten Beispiele für

die Scharen L , mit welchen wir uns in der Nummer 1 beschäftigt haben. Wir haben unter 1. für diese Scharen einige Grössen und Richtungen definiert. Wir wollen diese Grössen und Richtungen für die Scharen (1, 2) und (2, 1) mit denselben Buchstaben bezeichnen, wie wir dies unter 1. getan haben, diesen Buchstaben jedoch die Indices (1, 2), beziehungsweise (2, 1) beifügen. In den Rechnungen, die nun folgen sollen, werden auch Grössen vorkommen, welche sich nur auf die Curven der ersten oder nur auf die der zweiten unserer Curvenscharen beziehen. Den Buchstaben, die jene Grössen bezeichnen, sollen in der Folge die Indices (1) beziehungsweise (2) beigefügt werden.

Eine auf der Fläche gelegene Curvenschar kann durch die Richtungscoefficienten der positiven Halbtangenten der Curven der Schar bestimmt werden. Es seien also:

$$\lambda^{(1)}, \mu^{(1)} \text{ und } \lambda^{(2)}, \mu^{(2)}$$

die Richtungscoefficienten für die erste und für die zweite Curvenschar. Diese Richtungscoefficienten sind im allgemeinen Functionen von u und v . Differentiationen nach den Bogenlängen unserer Curvenscharen werden dann durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds^{(1)}} &= \lambda^{(1)} \frac{df}{ds_1} + \mu^{(1)} \frac{df}{ds_2}, \\ \frac{df}{ds^{(2)}} &= \lambda^{(2)} \frac{df}{ds_1} + \mu^{(2)} \frac{df}{ds_2} \end{aligned}$$

bestimmt, wo f eine Function von u, v bedeutet.

Man betrachte nun die Richtungscosinus der positiven Halbtangente der Curven der ersten Curvenschar, d. h. die Grössen:

$$\alpha^{(1)} = \frac{dx}{ds^{(1)}}, \quad \beta^{(1)} = \frac{dy}{ds^{(1)}}, \quad \gamma^{(1)} = \frac{dz}{ds^{(1)}},$$

und suche zuerst, die Unbekannten $h, n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right) &= h \frac{dx}{ds^{(1)}} + g^{(1,2)} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} + n^{(1,2)} X, \\ \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dy}{ds^{(1)}} \right) &= h \frac{dy}{ds^{(1)}} + g^{(1,2)} \frac{dy}{d\sigma^{(1)}} + n^{(1,2)} Y, \\ \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dz}{ds^{(1)}} \right) &= h \frac{dz}{ds^{(1)}} + g^{(1,2)} \frac{dz}{d\sigma^{(1)}} + n^{(1,2)} Z \end{aligned}$$

zu bestimmen, wo $d\sigma^{(1)}$ das Linienelement bezeichnet, welches in der Tangentialebene gelegen ist und mit dem Linienelemente $ds^{(1)}$ den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Man ersieht sofort, dass sich die folgenden Werte ergeben:

$$h = \sum \frac{dx}{ds^{(1)}} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right) = 0,$$

$$g^{(1,2)} = \sum \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right),$$

$$n^{(1,2)} = \sum X \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right).$$

Aus diesen Formeln können nun für $g^{(1,2)}$ und $n^{(1,2)}$ Ausdrücke abgeleitet werden, welche lauter Grössen enthalten, die von der Wahl des rechtwinkligen Coordinatensystems x, y, z unabhängig sind. Zu dem Zwecke beachte man, dass die Grösse:

$$\frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right) = \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\lambda^{(1)} \frac{dx}{ds_1} + \mu^{(1)} \frac{dx}{ds_2} \right)$$

in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right) &= \lambda^{(1)} \left(\lambda^{(2)} \frac{d^2x}{ds_1^2} + \mu^{(2)} \frac{d^2x}{ds_2 ds_1} \right) + \mu^{(1)} \left(\lambda^{(2)} \frac{d^2x}{ds_1 ds_2} \right. \\ &\quad \left. + \mu^{(2)} \frac{d^2x}{ds_2^2} \right) + \frac{dx}{ds_1} \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} + \frac{dx}{ds_2} \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} \end{aligned}$$

dargestellt werden kann, und wenn man die Relationen (19) in Anwendung bringt und bedenkt, dass aus (13) die Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds_1} &= \cotg \theta \frac{dx}{d\sigma_1} - \operatorname{cosec} \theta \frac{dx}{d\sigma_2}, \\ \frac{dx}{ds_2} &= \operatorname{cosec} \theta \frac{dx}{d\sigma_1} - \cotg \theta \frac{dx}{d\sigma_2} \end{aligned}$$

folgen, so kommt man auf die folgende Formel:

$$(31) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right) &= [n_1 \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\lambda^{(1)} \mu^{(2)} + \mu^{(1)} \lambda^{(2)}) + n_2 \mu^{(1)} \mu^{(2)}] X \\ &+ \left[\lambda^{(1)} (g_1 \lambda^{(2)} + q_2 \mu^{(2)}) + \cotg \theta \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} + \operatorname{cosec} \theta \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} \right] \frac{dx}{d\sigma_1} \\ &+ \left[\mu^{(1)} (q_1 \lambda^{(2)} + g_2 \mu^{(2)}) - \operatorname{cosec} \theta \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} - \cotg \theta \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} \right] \frac{dx}{d\sigma_2} \end{aligned} \right.$$

Analoge Formeln existieren für die Axen y und z . Aus diesen Formeln folgt zunächst:

$$(32) \quad n^{(1,2)} = n_1 \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\lambda^{(1)} \mu^{(2)} + \mu^{(1)} \lambda^{(2)}) + n_2 \mu^{(1)} \mu^{(2)1}.$$

Wenn man ferner mit $\omega^{(1)}$ den Winkel bezeichnet, welchen die positive Halbtangente der Curvenschar 1 mit der positiven Halbtangente der Curve $v = \text{const}$ bildet, und die Formeln (29) in Anwendung bringt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cotg \theta \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} + \text{cosec } \theta \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} &= \lambda^{(1)} \frac{d\omega^{(1)}}{ds^{(2)}}, \\ -\text{cosec } \theta \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} - \cotg \theta \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} &= \mu^{(1)} \left(\frac{d\omega^{(1)}}{ds^{(2)}} - \frac{d\theta}{ds^{(2)}} \right). \end{aligned}$$

Es lassen sich demnach die zweite und dritte Zeile der Formel (31) in der Form:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} \left[\lambda^{(2)} \left(g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} \right) + \mu^{(2)} \left(q_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} \right) \right] \frac{dx}{d\sigma_1} \\ + \mu^{(1)} \left[\lambda^{(2)} \left(q_1 - \frac{d\theta}{ds_1} + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} \right) + \mu^{(2)} \left(g_2 - \frac{d\theta}{ds_2} + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} \right) \right] \frac{dx}{d\sigma_2} \end{aligned}$$

darstellen. Beachtet man jetzt die Formeln (17) und die Formel:

$$\frac{dx}{d\sigma^{(1)}} = \lambda^{(1)} \frac{dx}{d\sigma_1} + \mu^{(1)} \frac{dx}{d\sigma_2},$$

so ergibt sich:

$$(33) \quad g^{(1,2)} = \left(g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} \right) \lambda^{(2)} + \left(q_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} \right) \mu^{(2)}.$$

Wir haben also constatirt, dass wenn man unter $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ die Ausdrücke (32) und (33) versteht, so bekommt man die Formel:

$$(34) \quad \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right) = n^{(1,2)} X + g^{(1,2)} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}}$$

und die zu derselben analogen Formeln für die Axen y und z . Mit Hilfe

¹⁾ Diese Formel ist bis auf die Bezeichnungen mit der Formel (6), p. 47. *Annali di mat. Serie II. Tomo II* von Acoust identisch.

derselben kann nun auf Grund der Formel (3) der Ausdruck für die Krümmung der Schar (1, 2) gebildet werden:

$$K^{(1,2)} = \sqrt{(n^{(1,2)})^2 + (g^{(1,2)})^2}.$$

Es liegt ferner nahe, die Grössen $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ mit den Benennungen Normal und geodätische Krümmung der Schar (1, 2) zu belegen.

Die Normalkrümmung ist symmetrisch in Bezug auf die Richtungscoefficienten der Scharen 1 und 2, d. h. es findet die Beziehung statt:

$$n^{(1,2)} = n^{(2,1)}.$$

Wenn man diese Grösse für positive Richtungen der Scharen $v = \text{const}$ und $u = \text{const}$ berechnet, so ergibt sich der Coefficient m .

In Bezug auf die geodätische Krümmung $g^{(1,2)}$ möge man bemerken, dass wenn man mit $\omega^{(2)}$ denjenigen Winkel bezeichnet, welchen die positive Halbtangente der Curvenschar 2 mit der positiven Halbtangente der Curvenschar $v = \text{const}$ bildet, und mit $g^{(2)}$ die geodätische Krümmung der Curvenschar 2 benennt, so kommt man leicht auf die Formel:

$$g^{(1,2)} = g^{(2)} - \frac{d(\omega^{(2)} - \omega^{(1)})}{d^{(2)}} \cdot 1)$$

Man beachte ferner, dass wenn man für positive Richtungen der Curvenscharen 1 und 2 die positiven Richtungen der Curvenscharen $v = \text{const}$, beziehungsweise $u = \text{const}$ annimmt und $g^{(1,2)}$ berechnet, so bekommt man q_2 und dass wenn man für positive Richtungen der Curvenscharen 1 und 2 die positiven Richtungen der Curvenscharen $u = \text{const}$, beziehungsweise $v = \text{const}$ annimmt und $g^{(1,2)}$ berechnet, so bekommt man q_1 .

Im Falle, wenn gleichzeitig:

$$n^{(1,2)} = 0, \quad g^{(1,2)} = 0$$

ist, so verbindet jede Curve der Curvenschar 2 solche Linienelemente der Curvenschar 1, die einander parallel sind. Die erste dieser Gleichungen besagt, dass die Curvenscharen 1 und 2 mit einander conjugiert sind. Man bemerke, dass wenn gleichzeitig:

$$(35) \quad n^{(1,2)} = 0, \quad g^{(1,2)} = 0, \quad g^{(2,1)} = 0,$$

1) Diese Formel ist bis auf die Bezeichnungswaise mit der Formel (14), p. 75. Annali di mat. Serie I. Tomo VI von Aoust gleichbedeutend.

jede Curve der Curvenschar 2 parallele Linienelemente der Curvenschar 1 und jede Curve der Curvenschar 1 parallele Linienelemente der Curvenschar 2 verbindet. Demnach sind die Beziehungen (35) im Falle, wenn die Scharen 1 und 2 voneinander verschieden sind, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass diese Scharen zwei miteinander conjugierte Scharen von congruenten und gleichgestellten Curven auf einer Translationsfläche sind.

Wenn dagegen die Scharen 1 und 2 miteinander identisch sind, so besagen die Beziehungen (35), dass diese Scharen geradlinige Erzeugende einer Regelfläche sind.

Wenn die Krümmung $K^{(1,2)}$ von Null verschieden ist, so existiert die positive Hauptnormale der Schar (1, 2). Die Richtungscoefficienten derselben werden durch die Formel:

$$(36) \quad K^{(1,2)} l^{(1,2)} = n^{(1,2)} X + g^{(1,2)} \frac{dx}{ds^{(1)}}$$

und die ihr analogen Formeln bestimmt sein. Diese Formeln bilden in unserem Falle die Gruppe (4) der verallgemeinerten Formeln von Frenet.

Hier wollen wir noch einige Bemerkungen über die Formeln (32) und (33) einschalten. Führt man nämlich die Bezeichnungen:

$$(37) \quad \begin{aligned} n^{(1,u)} &= n_1 \lambda^{(1)} + m \mu^{(1)}, & n^{(1,v)} &= m \lambda^{(1)} + n_2 \mu^{(1)}, \\ g^{(1,u)} &= g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1}, & g^{(1,v)} &= g_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2}, \end{aligned}$$

ein, so kann man die Formeln (32) und (33) in der kürzeren Form darstellen:

$$(38) \quad \begin{aligned} n^{(1,2)} &= n^{(1,u)} \lambda^{(2)} + n^{(1,v)} \mu^{(2)}, \\ g^{(1,2)} &= g^{(1,u)} \lambda^{(2)} + g^{(1,v)} \mu^{(2)}. \end{aligned}$$

Die Grössen (37) sind die Normal und geodätischen Krümmungen der Curvenschar 1 in Bezug auf die Parameterlinien. Wenn die Curvenschar 1 unveränderlich bleibt und wenn man anstelle der Curvenschar 2 verschiedene Curvenscharen auf der Fläche nimmt, so verändern sich in den Formeln (38) nur die Richtungscoefficienten $\lambda^{(2)}$ und $\mu^{(2)}$. Dabei bleiben die Grössen $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ im Allgemeinen nicht constant.

Die Grösse $n^{(1,2)}$ ist dann und nur dann von der Wahl der Curvenschar 2 unabhängig, wenn gleichzeitig:

$$n^{(1,u)} = n_1 \lambda^{(1)} + m \mu^{(1)} = 0, \quad n^{(1,v)} = m \lambda^{(1)} + n_2 \mu^{(1)} = 0$$

ist. Man sieht sofort ein, dass dies nur für die Schar der Haupttangentialcurven auf einer abwickelbaren Fläche der Fall ist.

Damit die Grösse $g^{(1,2)}$ von der Wahl der Curvenschar 2 unabhängig sei, müssen die Gleichungen:

$$g^{(1,u)} = g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} = 0, \quad g^{(1,v)} = g_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} = 0$$

bestehen. Die Integrabilitätsbedingung dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{dg_1}{ds_2} - \frac{dq_2}{ds_1} - p_1 g_1 - p_2 q_2 = 0,$$

es folgt also aus der Gleichung (22), dass die Fläche eine abwickelbare sein muss. Wählt man nun die Parameter u, v in der Weise, dass das Quadrat des Linienelementes die Form:

$$du^2 + dv^2$$

annimmt, so wird die Curvenschar 1 die Gleichungen:

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial v} = 0$$

befriedigen müssen. Es besteht somit die Curvenschar 1 aus Curven, die gleichzeitig geodätisch und geodätisch parallel sind, d. h. aus Curven, welche in eine Schar von parallelen Geraden übergehen, sobald man die Fläche auf die Ebene abwickelt.

In allen anderen Fällen, sobald die Curvenschar 2 variiert, variieren auch die Grössen $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$.

Jede von diesen Grössen hat die Form:

$$f = A\lambda^{(2)} + B\mu^{(2)},$$

wo A und B nur von der Curvenschar 1 abhängig sind. Bezeichnet man mit $\omega^{(2)}$ den Winkel der positiven Halbtangente der Curve der Schar 2 mit der positiven Halbtangente der Curve $v = \text{const}$, so bekommt man:

$$\frac{df}{d\omega^{(2)}} = A\bar{\lambda}^{(2)} + B\bar{\mu}^{(2)},$$

wo $\bar{\lambda}^{(2)}, \bar{\mu}^{(2)}$ diejenige Richtung ist, die mit der Richtung $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}$ den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Daraus folgt, dass im Falle, wenn A und B reel sind, ein Maximum ev. ein Minimum für diejenige Curvenschar 2 eintritt,

welche durch orthogonale Trajectorien derjenigen Curvenschar 2 gebildet wird, die das Verschwinden der Function f herbeiführt. Die Richtungscoefficienten dieser, dem Maximum ev. dem Minimum entsprechender Curvenschar sind:

$$\lambda^{(2)} = \frac{A \operatorname{cosec} \theta - B \cotg \theta}{\varepsilon \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}}, \quad \mu^{(2)} = \frac{B \operatorname{cosec} \theta - A \cotg \theta}{\varepsilon \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Der Wert des Maximums ev. des Minimums ist also:

$$f = \varepsilon \operatorname{cosec} \theta \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}.$$

Wenn $\varepsilon = +1$, so tritt das Maximum, wenn $\varepsilon = -1$, das Minimum von f ein.

Die Grösse $n^{(1,2)}$ ist Null, sobald die Curvenscharen 1 und 2 miteinander conjugiert sind. Also tritt in reellem Falle das Maximum ev. das Minimum der Grösse $n^{(1,2)}$ für diejenige Curvenschar 2 ein, deren Curven orthogonale Trajectorien der mit der Curvenschar 1 conjugierten Schar sind. Wenn speziell die Curvenschar 2 für diese besonderen Werte mit der Curvenschar 1 zusammenfällt, so hat man den Nullwert von $n^{(1,2)}$ für die Haupttangentialcurven und den Maximal ev. Minimalwert von $n^{(1,2)}$ für Krümmungslinien.

Analoges gilt auch von der geodätischen Krümmung $g^{(1,2)}$. Wenn speziell die Curvenschar 2 mit der Curvenschar 1 zusammenfällt, so tritt der Nullwert von $g^{(1,2)}$ für eine Schar der geodätischen Linien und der Maximal beziehungsweise Minimalwert von $g^{(1,2)}$ für eine Schar von Curven ein, welche orthogonale Trajectorien einer Schar von geodätischen Linien bilden.

Wenn man nun auf die Formeln (36) zurückkommt, so erhält man aus denselben auf Grund der Formeln (5) die Richtungscosinus der positiven Binormalen der Schar (1, 2). Diese Richtungscosinus werden durch die Formel:

$$(39) \quad K^{(1,2)} \lambda^{(1,2)} = g^{(1,2)} X - n^{(1,2)} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}}$$

und analogen Formeln bestimmt sein. Wenn man ferner die in der Nummer 1 dargelegte Begriffsbildung weiter führt, so kommt man auf die Torsion der Schar (1, 2), die durch die Formel:

$$S^{(1,2)} = \sum l^{(1,2)} \frac{d\lambda^{(1,2)}}{ds^{(2)}}$$

definiert wird. Sobald diese Grösse eingeführt ist, können schon alle verallgemeinerten Frenet'schen Formeln angegeben werden. Es hat keinen Zweck darauf hier des näheren einzugehen, aber es dürfte von Interesse sein eine Darstellung von $S^{(1,2)}$ zu bekommen, in welcher keine Grössen vorkommen, die von der Wahl des rechtwinkligen Systems x, y, z abhängig wären.

Differenziert man die Formeln (39) nach $s^{(2)}$, so folgt:

$$(40) \quad \frac{dK^{(1,2)}}{ds^{(2)}} \lambda^{(1,2)} + K^{(1,2)} \frac{d\lambda^{(1,2)}}{ds^{(2)}} = \frac{dg^{(1,2)}}{ds^{(2)}} X - \frac{dn^{(1,2)}}{ds^{(2)}} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \\ + g^{(1,2)} \frac{dX}{ds^{(2)}} - n^{(1,2)} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \right).$$

Aber die Anwendung der Formeln (20) und (21) liefert:

$$\frac{dX}{ds^{(2)}} = \operatorname{cosec} \theta \left[(n_1 \lambda^{(2)} + m \mu^{(2)}) \frac{dx}{d\sigma_2} - (m \lambda^{(2)} + n_2 \mu^{(2)}) \frac{dx}{d\sigma_1} \right], \\ \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \right) = \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} \frac{d\sigma_1}{d\sigma_1} + \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} \frac{d\sigma_2}{d\sigma_2} - \lambda^{(1)} (g_1 \lambda^{(2)} + g_2 \mu^{(2)}) \frac{d\sigma_1}{d\sigma_1} \\ - \mu^{(1)} (g_1 \lambda^{(2)} + g_2 \mu^{(2)}) \frac{d\sigma_2}{d\sigma_2} + \operatorname{cosec} \theta [(m - n_1 \cos \theta) \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + (n_2 - m \cos \theta) \lambda^{(1)} \mu^{(2)}] \\ + (m \cos \theta - n_1) \mu^{(1)} \lambda^{(2)} + (n_2 \cos \theta - m) \mu^{(1)} \mu^{(2)}] X$$

und anderseits bekommt man leicht die Formeln:

$$\sum \frac{dx}{ds_1} l^{(1,2)} = -\mu^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta, \\ \sum \frac{dx}{ds_2} l^{(1,2)} = \lambda^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta, \\ \sum \frac{dx}{d\sigma_1} l^{(1,2)} = \bar{\mu}^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta, \\ \sum \frac{dx}{d\sigma_2} l^{(1,2)} = -\bar{\lambda}^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta,$$

wo $\bar{\lambda}^{(1)}$ und $\bar{\mu}^{(1)}$ die Richtungskoeffizienten derjenigen Richtung in der Tangentialebene bezeichnen, welche mit der positiven Halbtangente der

Curve der Schar 1 den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Es folgt also aus der Gleichung (40) und analogen Gleichungen:

$$\begin{aligned} (K^{(1,2)})^2 S^{(1,2)} &= n^{(1,2)} \frac{dg^{(1,2)}}{ds^{(2)}} - g^{(1,2)} \frac{dn^{(1,2)}}{ds^{(2)}} \\ &- ((g^{(1,2)})^2 + (n^{(1,2)})^2) [n_1 \bar{\lambda}^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\bar{\mu}^{(1)} \lambda^{(2)} + \bar{\lambda}^{(1)} \mu^{(2)}) + n_2 \bar{\mu}^{(1)} \mu^{(2)}] \\ &- g^{(1,2)} n^{(1,2)} [\bar{\mu}^{(1)} \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} - \bar{\lambda}^{(1)} \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} - \lambda^{(1)} \mu^{(1)} ((q_1 - g_1) \lambda^{(2)} + (g_2 - q_2) \mu^{(2)})]. \end{aligned}$$

Differenziert man aber die Relation (26) nach $s^{(2)}$, so überzeugt man sich, dass die Summe der Glieder, die in den letzten eckigen Klammern enthalten sind, gleich Null ist. Demnach gelangt man zur Formel:

$$\begin{aligned} S^{(1,2)} &= \frac{1}{(K^{(1,2)})^2} \left(n^{(1,2)} \frac{dg^{(1,2)}}{ds^{(2)}} - g^{(1,2)} \frac{dn^{(1,2)}}{ds^{(2)}} \right) \\ &- [n_1 \bar{\lambda}^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\bar{\mu}^{(1)} \lambda^{(2)} + \bar{\lambda}^{(1)} \mu^{(2)}) + n_2 \bar{\mu}^{(1)} \mu^{(2)}]. \end{aligned}$$

Wenn man den Winkel, welchen die positive Hauptnormale der Schar (1, 2) mit der positiven Flächennormalen bildet, mit $\Omega^{(1,2)}$ bezeichnet und in demselben Sinne als positiv betrachtet, wie den in der Nummer 2 behandelten Winkel Ω , und wenn man die Bezeichnung einführt:

$$\tau^{(1,2)} = - [n_1 \bar{\lambda}^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\bar{\mu}^{(1)} \lambda^{(2)} + \bar{\lambda}^{(1)} \mu^{(2)}) + n_2 \bar{\mu}^{(1)} \mu^{(2)}],$$

wobei es nahe liegt die Grösse $\tau^{(1,2)}$ die geodätische Torsion der Schar (1, 2) zu nennen, so bekommt man für die Grösse $S^{(1,2)}$ den einfachen Ausdruck:

$$(41) \quad S^{(1,2)} = \frac{d\Omega^{(1,2)}}{ds^{(2)}} + \tau^{(1,2)}.$$

Zuvörderst wollen wir einige Bemerkungen in Bezug auf die hier eingeführte geodätische Torsion $\tau^{(1,2)}$ einschalten. Man betrachte die Curvenschar 1 und die Curvenschar 1', für welche die positive Halbtangente mit der positiven Halbtangente der Curvenschar 1 den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ bildet. Man sieht sogleich, dass

$$\tau^{(1,2)} = n^{(1',2)},$$

d. h. dass die geodätische Torsion der Schar 1 und die Normalkrümmung der Schar 1' in Bezug auf dieselbe Curvenschar 2 einander gleich sind. Daraus folgt unmittelbar, dass $\tau^{(1,2)}$ dann und nur dann von der Wahl der Curvenschar 2 unabhängig ist, wenn die Fläche eine abwickelbare Fläche ist und wenn die Schar 1 aus orthogonalen Trajectorien der Schar der Haupttangencurven gebildet wird; der Wert von $\tau^{(1,2)}$ ist in diesem Falle beständig Null. Falls die Grösse $\tau^{(1,2)}$ mit der Curvenschar 2 variiert, so ist sie gleich Null, wenn die Schar der orthogonalen Trajectorien der Curvenschar 1 und die Curvenschar 2 mit einander conjugiert sind und speziell, im Falle des Zusammenfallens der Curvenscharen 1 und 2, wenn sie aus Krümmungslinien bestehen. Im reellen Falle kann man nach dem Maximum ev. Minimum von $\tau^{(1,2)}$ bei Veränderung der Curvenschar 2 fragen und man sieht, dass dies für diejenige Curvenschar 2 eintritt, die mit der Curvenschar 1 conjugiert ist. Wenn das Maximum ev. Minimum für den Fall eintritt, in welchem die Curvenscharen 1 und 2 zusammenfallen, so bestehen dieselben aus Haupttangencurven. Man frage zuletzt, in welchen Fällen die Beziehung:

$$\tau^{(1,2)} = \tau^{(2,1)}$$

besteht. Diese Beziehung kann so dargestellt werden:

$$(n_1 + n_2 - 2m \cos \theta) (\lambda^{(1)} \mu^{(2)} - \lambda^{(2)} \mu^{(1)}) = 0;$$

also, wenn die Fläche keine Minimalfläche ist, so besteht diese Beziehung nur in dem Fall, wenn die Curvenscharen 1 und 2 zusammenfallen; dagegen im Falle einer Minimalfläche besteht diese Beziehung für beliebige Curvenscharen 1 und 2.

Wenn wir jetzt zur Formel (41) übergehen, so ist leicht zu sehen, dass aus ihr Eigenschaften abgelesen werden können, die den bekannten Joachimsthal'schen Sätzen über ebene Krümmungslinien analog sind. Wir wollen dahin einigen, wenn alle Linienelemente der Curvenschar 1, die entlang einer und derselben Curve der Schar 2 gelegen sind, einer Ebene parallel sind und wenn eine solche Eigenschaft für jede Curve der Schar 2 stattfindet, d. h. wenn für diese Curvenscharen $S^{(1,2)} = 0$ ist, zu sagen dass die Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 die Eigenschaft *A* besitzt. Ferner, wenn der Winkel der Hauptnormalen der Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 mit der Flächennormalen längs einer und derselben Curve der Schar 2 unverändert bleibt und wenn dies für jede Curve der Schar 2 stattfindet, d. h. wenn für diese Curvenscharen $\frac{d\Omega^{(1,2)}}{ds^{(2)}} = 0$, so sagen wir, dass die Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 die Eigenschaft *B* besitzt. Ist endlich die Curvenschar 2 mit den orthogo-

nalen Trajektorien der Curvenschar 1 conjugiert, d. h. ist $r^{(1,2)} = 0$, so nenne man diese Eigenschaft die Eigenschaft *C*. Man erhält also folgenden Satz: Besitzt die Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 irgend welche zwei der Eigenschaften *A*, *B*, *C*, so besitzt sie in Bezug auf die Curvenschar 2 auch die dritte dieser Eigenschaften.

B e m e r k u n g. Bei der Darstellung der in dieser Nummer durchgeführten Betrachtungen haben wir immer von den Eigenschaften zweier auf der Fläche gelegenen Curvenscharen gesprochen, vermöge derer auf der Fläche unendlich viele Scharen *L* definiert waren. Es leuchtet ein, dass die meisten unserer Entwicklungen und Sätze auf eine einzige auf der Fläche gelegene Schar *L* bezogen werden können, worauf wir indessen nicht näher eingehen.

4. Als ein anderes Beispiel einer Schar von Linienelementen betrachte man auf einer Fläche die Gesamtheit der Linienelemente, deren Punkte auf der Fläche liegen und deren Richtungen die der positiven Flächennormalen in diesen Punkten sind. Längs einer jeden Flächencurve, die keine Minimalcurve ist, hat man eine Schar *L* der genannten Linienelemente. Wir wollen jetzt diese Scharen *L* in Betrachtung ziehen. Dabei werden wir für die Fläche und die Flächencurve die in der Nummer 2 besprochenen Bezeichnungen benutzen; für die genannte Schar *L* werden wir die in der Nummer 1 eingeführten Grössen mit den dort benutzten Buchstaben bezeichnen, aber dieselben mit einem Striche versehen.

Die Richtungscosinus unserer Linienelemente sind *X*, *Y*, *Z* und wir bestimmen zuerst die Grössen *h*, *p*, *q* aus den Gleichungen:

$$\frac{dX}{ds} = hX + p \frac{dx}{ds} + q \frac{dx}{d\sigma},$$

$$\frac{dY}{ds} = hY + p \frac{dy}{ds} + q \frac{dy}{d\sigma},$$

$$\frac{dZ}{ds} = hZ + p \frac{dz}{ds} + q \frac{dz}{d\sigma},$$

wo *ds* den unendlich kleinen Bogen der betrachteten Flächencurve und *dσ* den unendlich kleinen Bogen bedeutet, der mit *ds* den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$h = \sum X \frac{dX}{ds} = 0, \quad p = \sum \frac{dX}{ds} \frac{dx}{ds}, \quad q = \sum \frac{dX}{ds} \frac{dx}{d\sigma}$$

und wenn man beachtet, dass

$$\frac{dx}{ds} = \lambda \frac{dx}{ds_1} + \mu \frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{dx}{d\sigma} = \lambda \frac{dx}{d\sigma_1} + \mu \frac{dx}{d\sigma_2}$$

und dass auf Grund der Formeln (20):

$$(42) \quad \frac{dX}{ds} = \operatorname{cosec} \theta \left\{ \lambda \left(n_1 \frac{dx}{d\sigma_2} - m \frac{dx}{d\sigma_1} \right) + \mu \left(m \frac{dx}{d\sigma_2} - n_2 \frac{dx}{d\sigma_1} \right) \right\},$$

so ergibt sich:

$$p = -(n_1 \lambda^2 + 2m \lambda \mu + n_2 \mu^2) = -n,$$

$$q = -[n_1 \lambda \bar{\lambda} + m(\lambda \bar{\mu} + \mu \bar{\lambda}) + n_2 \mu \bar{\mu}] = \tau.$$

Man bekommt also die Formel:

$$\frac{dX}{ds} = \tau \frac{dx}{d\sigma} - n \frac{dx}{ds}$$

und die zu derselben analogen Formeln.

Auf Grund dieser Formeln kann die Krümmung unserer Schar L gebildet werden und es ergibt sich:

$$K' = \sqrt{n^2 + \tau^2}.$$

Wenn gleichzeitig

$$n = 0, \quad \tau = 0,$$

so ist diese Krümmung gleich Null, was aber der ganzen Flächencurve entlang nur für Curven der Fall ist, die gleichzeitig Haupttangentencurven und Krümmungslinien sind.

Wenn die Krümmung K' von Null verschieden ist, so existieren die positive Hauptnormale und die positive Binormale der Schar L , deren Richtungscosinus durch die Formeln:

$$(43) \quad \nu' = \frac{1}{K'} \left(\tau \frac{dx}{d\sigma} - n \frac{dx}{ds} \right),$$

$$\varphi' = -\frac{1}{K'} \left(\tau \frac{dx}{ds} + n \frac{dx}{d\sigma} \right)$$

und die analogen Formeln bestimmt werden. Diese Halbgeraden liegen in der Tangentialebene. Man bezeichne die Richtungskoeffizienten der positiven Binormalen mit λ'_B, μ'_B und man suche sie zu bestimmen. Es ist leicht zu ersehen, dass

$$\varphi' = \frac{1}{K'} \left(Y \frac{dZ}{ds} - Z \frac{dY}{ds} \right)$$

und dass aus der Formel (42) und analogen Formeln folgt:

$$\varphi' = \frac{\operatorname{cosec} \theta}{K'} \left\{ (m\lambda + n_2\mu) \frac{dx}{ds_1} - (n_1\lambda + m\mu) \frac{dx}{ds_2} \right\}.$$

Es ergeben sich also die Werte:

$$\lambda'_B = \frac{m\lambda + n_2\mu}{K' \sin \theta}, \quad \mu'_B = -\frac{n_1\lambda + m\mu}{K' \sin \theta}$$

und man überzeugt sich leicht, dass die Beziehung:

$$n_1 \lambda \lambda'_B + m (\lambda \mu'_B + \mu \lambda'_B) + n_2 \mu \mu'_B = 0$$

besteht. Die Richtung der Binormalen unserer Schar L ist also mit der Richtung der zugehörigen Flächencurve conjugiert.

Die eben durchgeführten Betrachtungen bilden eine veränderte Fassung einiger von den gewöhnlichen Entwicklungen, die in der Flächentheorie über unendlich benachbarte Normalen angestellt werden. Wir brauchen daher auf die Eigenschaften der Krümmung K' nicht näher einzugehen und wir wenden uns zur Aufstellung des Ausdruckes für die Torsion S' , welcher, wie wir sehen werden, gewissen Betrachtungen von O. Bonnet nahe steht.

Für diese Torsion haben wir die Formel:

$$S' = \sum l' \frac{d\varphi'}{ds},$$

wenn man also die Formeln (43) in Anwendung bringt, so bekommt man zuerst:

$$S' = -\frac{1}{K'} \sum \left(\tau \frac{dx}{d\sigma} - n \frac{dx}{ds} \right) \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{K'} \right) \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{n}{K'} \right) \frac{dx}{d\sigma} + \frac{\tau}{K'} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) + \frac{n}{K'} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right) \right\}.$$

Es sollen nun die Ausdrücke:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) \text{ und } \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)$$

umgestaltet werden. Zu dem Behufe brauchen wir jedoch bloss die Formel (34) anzuwenden. Und zwar nehme man zuerst in dieser Formel:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda, \quad \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu,$$

so folgt:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) = nX + g \frac{dx}{d\sigma};$$

wenn man ferner annimmt:

$$\lambda^{(1)} = \bar{\lambda}, \quad \mu^{(1)} = \bar{\mu}; \quad \lambda^{(2)} = \lambda, \quad \mu^{(2)} = \mu,$$

so gewinnt man ohne weiteres die Formel:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right) = -\tau X - g \frac{dx}{ds}.$$

Auf Grund dieser Formeln kommen wir nun leicht auf den Ausdruck:

$$S' = \frac{n}{K'} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{K'} \right) - \frac{\tau}{K'} \frac{d}{ds} \left(\frac{n}{K'} \right) - g.$$

Dieser Ausdruck kann noch vereinfacht werden. Man bezeichne mit Ω' denjenigen Winkel in der Tangentialebene, welchen die positive Binormale der Schar L mit der positiven Halbtangente der Flächencurve bildet. Man hat dann:

$$\cos \Omega' = -\frac{\tau}{K'}, \quad \sin \Omega' = -\frac{n}{K'},$$

folglich:

$$(44) \quad S' = -\frac{d\Omega'}{ds} - g.$$

Auf Grund dieser Formel können wir einige Bemerkungen anschliessen, welche jenen am Schlusse der vorigen Nummer analog sind. Man sieht nämlich, dass wenn die Flächencurve irgend welche zwei von den Eigenschaften besitzt: 1) $S' = 0$, d. h. dass die in den Punkten der Flächencurve aufgestellten Flächennormalen einer und derselben Ebene parallel sind; 2) $\frac{d\Omega'}{ds} = 0$, d. h. dass in allen Punkten der Flächencurve das Li-

nienlement derselben mit dem conjugierten Linienelemente constanten Winkel bildet; 3) $g=0$, d. h. dass die Flächencurve geodätisch ist; so besitzt sie auch die dritte dieser Eigenschaften. Dieser Satz ist mit einem Satze gleichbedeutend, der von O. B o n n e t aufgestellt worden ist ¹⁾.

5. Ausser den obigen flächentheoretischen Betrachtungen, wollen wir noch die Krümmungseigenschaften der einfach unendlichen Scharen von Linienelementen auf zweifach unendliche Curvenscharen in Anwendung bringen.

Es sei eine zweifach unendliche Curvenschar durch die von x, y, z abhängigen Functionen a, β, γ definiert, welche Richtungscosinus der Linienelemente dieser Curvenschar sind. Man betrachte ferner eine zweite Curvenschar, deren Linienelemente ds die Richtungscosinus a, b, c besitzen, die gleichfalls Functionen von x, y, z sind. Wir wollen die erste die Curvenschar Γ und die zweite die Curvenschar C nennen und solche Scharen L in Betrachtung ziehen, deren jede aus denjenigen Linienelementen der Curvenschar Γ besteht, welche einer Curve der Curvenschar C entlang gelegen sind. Wir setzen voraus, dass die in Betracht kommenden Linienelemente der ersten und der zweiten Curvenschar reell sind und wir mögen die unter 1 eingeführten Bezeichnungen benutzen.

Wir haben:

$$\frac{da}{ds} = \frac{\partial a}{\partial x} a + \frac{\partial a}{\partial y} b + \frac{\partial a}{\partial z} c$$

und die analogen Formeln. Für die Krümmung K der Schar L ergibt sich also die Formel:

$$K^2 = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial x} a + \frac{\partial a}{\partial y} b + \frac{\partial a}{\partial z} c \right)^2.$$

Wenn man jetzt die kürzeren Bezeichnungen:

$$k_{11} = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2, \quad k_{22} = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right)^2, \quad k_{33} = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right)^2$$

$$k_{23} = k_{32} = \sum \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial z},$$

$$k_{31} = k_{13} = \sum \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial x},$$

$$k_{12} = k_{21} = \sum \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y}$$

¹⁾ Journal de mathematiques. 2-me serie Tome V. 1860, p. 168.

einführt, so erhält man für K^2 die Formel:

$$K^2 = k_{11} a^2 + k_{22} b^2 + k_{33} c^2 + 2k_{23} bc + 2k_{31} ca + 2k_{12} ab.$$

Wir wollen die Richtung der Linienelemente der Curvenschar C auf ein solches von x, y, z abhängiges rechtwinkeliges Trieder beziehen, dass in diesem Ausdrucke nur Glieder vorkommen, welche Quadrate der Richtungs-
cosinus der Linienelemente der zweiten Curvenschar enthalten.

Zu dem Zwecke muss zuerst die Gleichung

$$(45) \quad \begin{vmatrix} k_{11} - \omega & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - \omega & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

für ω gelöst werden. Es ist leicht zu sehen, dass sie stets eine Wurzel besitzt, die gleich Null ist. Es besteht in der That die identische Beziehung:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

man hat also identisch:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

und auch:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Vielfachheit dieser verschwindenden Wurzel hängt von den Eigenschaften der Minoren und der Elemente der Determinante Δ ab. Man bezeichne mit Δ_{ik} das algebraische Komplement desjenigen Elementes der Determinante Δ , welches in der i -ten Zeile und k -ten Colonne gelegen ist und man gebrauche für die Minoren der Determinante Δ^2 die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \delta' &= k_{22} k_{33} - k_{23}^2, & \delta'' &= k_{33} k_{11} - k_{31}^2, & \delta''' &= k_{11} k_{22} - k_{12}^2, \\ \epsilon' &= k_{12} k_{31} - k_{11} k_{23}, & \epsilon'' &= k_{23} k_{12} - k_{22} k_{31}, & \epsilon''' &= k_{31} k_{23} - k_{33} k_{12}. \end{aligned}$$

Zwischen den Minoren der Determinanten Δ und denjenigen der Determinante Δ^2 hat man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta' &= \sum_1^3 \delta' \Delta_{i1}^2, & \delta'' &= \sum_1^3 \delta'' \Delta_{i2}^2, & \delta''' &= \sum_1^3 \delta''' \Delta_{i3}^2, \\ \varepsilon' &= \sum_1^3 \delta' \Delta_{i2} \Delta_{i3}, & \varepsilon'' &= \sum_1^3 \delta'' \Delta_{i3} \Delta_{i1}, & \varepsilon''' &= \sum_1^3 \delta''' \Delta_{i1} \Delta_{i2}. \end{aligned}$$

Wenn man nun die Eigenschaften der Gleichung (45) in Erinnerung bringt und die angeführten Beziehungen zwischen den Elementen und Minoren der Determinanten Δ und Δ^2 berücksichtigt, so gelangt man zu dem Schlusse, dass die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) einfach ist, sobald nicht alle Minoren 2-ten Grades der Determinante Δ gleich Null sind, dass ferner diese Wurzel zweifach ist, sobald alle diese Minoren, jedoch nicht alle Elemente der Determinante Δ gleich Null sind, dass endlich diese Wurzel dreifach ist, sobald alle Elemente der Determinante Δ gleich Null sind.

Wir werden in der Folge drei Fälle auseinander halten, jenachdem die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) im Allgemeinen einfach, zweifach oder dreifach ist. Der dritte Fall stellt kein Interesse dar, weil in diesem Falle die erste Curvenschar aus parallelen Geraden besteht.

Wir setzen zunächst voraus, dass die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) im Allgemeinen einfach ist. Die übrigen Wurzeln der Gleichung (45) sind bekanntlich reell und genügen der Gleichung:

$$\omega^2 - (k_{11} + k_{22} + k_{33})\omega + \delta' + \delta'' + \delta''' = 0$$

d. h. besitzen die Werte:

$$\omega = \frac{1}{2} \left[k_{11} + k_{22} + k_{33} \pm \sqrt{(k_{11} + k_{22} + k_{33})^2 - 4(\delta' + \delta'' + \delta''')} \right].$$

Da diese beiden Wurzeln reell sind, so hat man

$$(k_{11} + k_{22} + k_{33})^2 - 4(\delta' + \delta'' + \delta''') \geq 0$$

und da in diesem Falle die beiden Summen:

$$k_{11} + k_{22} + k_{33} \quad \text{und} \quad \delta' + \delta'' + \delta'''$$

im Allgemeinen von Null verschiedene positive Werte besitzen, so sind die beiden Wurzeln positiv, abgesehen von den Ausnahmestellen in welchen sie verschwinden können. Wir wollen diese Wurzeln mit ω_1 und ω_2

bezeichnen und voraussetzen, dass z. B. $\omega_1 \geq \omega_2$ ist. Wenn wir noch die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) ω_3 nennen, so können wir sagen, dass zur Ausführung der gewünschten Transformation von K^2 die Richtungscosinus

$$a_i, b_i, c_i \quad (i=1, 2, 3)$$

der Linienelemente dreier Curvenscharen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} k_{11}(a_i - \omega_i) + k_{12}b_i + k_{13}c_i &= 0, \\ k_{21}a_i + k_{22}(b_i - \omega_i) + k_{23}c_i &= 0, \\ k_{31}a_i + k_{32}b_i + k_{33}(c_i - \omega_i) &= 0, \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$$

bestimmt werden müssen. Für $i=3$ ergeben diese Gleichungen eine vollständig bestimmte Curvenschar; für $i=1, 2$, in dem Fall, wenn $\omega_1 > \omega_2$ ist, ergeben sich zwei ebenfalls vollständig bestimmte Curvenscharen, die zu der früher genannten senkrecht stehen; ist dagegen $\omega_1 = \omega_2$, dann bekommt man alle Curvenscharen, welche zu der dem Index 3 entsprechenden Curvenschar senkrecht stehen. Im ersten Falle hat man also drei zu einander senkrechte Curvenscharen; im zweiten können unter den erhaltenen Curvenscharen drei auf einander senkrecht stehende gewählt werden. Diese drei Curvenscharen wollen wir kurz als Curvenscharen 1, 2, 3 bezeichnen und ihre Halbtangenten, die durch die Richtungscosinus a_i, b_i, c_i bestimmt sind als positiv annehmen. Die Krümmungen der Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ , welche längs der Curvenscharen 1, 2, 3 gelegen sind, sind augenscheinlich gleich den Functionen: $\sqrt{\omega_1}$, beziehungsweise $\sqrt{\omega_2}$ und 0.

Wenn man jetzt die Richtungscosinus der Curvenschar C in Bezug auf die positiven Halbtangenten der Curvenscharen 1, 2, 3 mit a', b', c' bezeichnet, so hat man:

$$\begin{aligned} a' &= a_1 a + b_1 b + c_1 c, \\ b' &= a_2 a + b_2 b + c_2 c, \\ c' &= a_3 a + b_3 b + c_3 c, \end{aligned}$$

also auch:

$$\begin{aligned} a &= a_1 a' + a_2 b' + a_3 c', \\ b &= b_1 a' + b_2 b' + b_3 c', \\ c &= c_1 a' + c_2 b' + c_3 c' \end{aligned}$$

und die Formel für K^2 nimmt die einfache Form an:

$$(46) \quad K^2 = \omega_1 a'^2 + \omega_2 b'^2.$$

Um uns über die Veränderlichkeit von K^2 bei variablen a', b', c' Rechenschaft zu geben, denken wir uns das Coordinatensystem X, Y, Z , dessen Anfangspunkt im Punkte x, y, z gelegen ist und dessen positive Halbaxen positive Halbtangenten der durch den Punkt x, y, z gehenden Curven der Curvenschar 1, 2, 3 sind; ferner schreiben wir in diesem Coordinatensystem die Gleichung desjenigen Kegels von Linienelementen a', b', c' , für welchen $K^2 = p$ ist. Diese Gleichung lautet:

$$(\omega_1 - p) X^2 + (\omega_2 - p) Y^2 = p Z^2.$$

Für $p < 0$ definiert diese Gleichung kein reelles Linienelement und ist $p = 0$, so ergibt sich $X = Y = 0$ d. h. das Linienelement der Curvenschar 3. Nimmt man zuerst $\omega_1 > \omega_2$ an, so hat man für $p = \omega_1$ nur das Linienelement der Curvenschar 1; für andere Werte von p betrachte man die Schnittpunkte des Kegels mit einer zur XY -Ebene parallelen Ebene; ist $\omega_2 < p < \omega_1$, dann bekommt man eine Hyperbel mit der reellen Achse, welche der X -Achse parallel ist, bei $0 < p < \omega_2$ eine Ellipse und bei $p = \omega_2$ zwei zur Y -Achse parallele Geraden. Wenn zweitens $\omega_1 = \omega_2$ ist, so hat man für $p = \omega_1$ die XY -Ebene und betrachtet man wieder die Schnittpunkte des Kegels mit einer zur XY -Ebene parallelen Ebene, so ergibt sich für $0 < p < \omega_1$ ein Kreis. Wenn $p > \omega_1$ ist, so besitzt der Kegel in beiden Fällen keine reellen Linienelemente.

Wir schreiten jetzt zur Bestimmung der Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen und der positiven Binormalen der Schar L . Zu dem Zwecke beachte man, dass wenn man mit ds_i die Linienelemente bezeichnet, deren Richtung durch die Cosinus a_i, b_i, c_i definiert ist, so erhält man für jede Funktion f von x, y, z die Formel:

$$(47) \quad \frac{df}{ds} = a' \frac{df}{ds_1} + b' \frac{df}{ds_2} + c' \frac{df}{ds_3}.$$

Da aber die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen durch die Formel:

$$l = \frac{1}{K} \frac{da}{ds}$$

und die zu derselben analogen Formeln bestimmt sind, und auf Grund der früheren Bestimmungen α, β, γ längs jeder Curve der Curvenschar 3

dieselben Werte besitzen, so ergibt sich für die positive Hauptnormale die Formel:

$$l = \frac{1}{K} \left(a' \frac{da}{ds_1} + b' \frac{da}{ds_2} \right)$$

und die ihr analogen Formeln. Wir wollen noch mit:

$$l_1, m_1, n_1$$

$$l_2, m_2, n_2$$

die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen der Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ bezeichnen, die längs der Curven der Curvenscharen 1 und 2 gelegen sind. Dann wird man l, m, n folgendermassen ausdrücken können:

$$(48) \quad \begin{aligned} l &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1} a' l_1 + \sqrt{\omega_2} b' l_2), \\ m &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1} a' m_1 + \sqrt{\omega_2} b' m_2), \\ n &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1} a' n_1 + \sqrt{\omega_2} b' n_2). \end{aligned}$$

Wenn man ferner mit

$$\varphi_1, \psi_1, \sigma_1$$

$$\varphi_2, \psi_2, \sigma_2$$

die Richtungscosinus der positiven Binormalen derjenigen Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ bezeichnet, die längs der Curven der Curvenscharen 1, 2 gelegen sind, so wird man für die Richtungscosinus der positiven Binormalen der Scharen L die Formeln erhalten:

$$(49) \quad \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1} a' \varphi_1 + \sqrt{\omega_2} b' \varphi_2), \\ \psi &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1} a' \psi_1 + \sqrt{\omega_2} b' \psi_2), \\ \sigma &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1} a' \sigma_1 + \sqrt{\omega_2} b' \sigma_2). \end{aligned}$$

Bildet man nun die Summe der Quadrate von l, m, n , so kommt man auf die Beziehung:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

welche besagt, dass die den Curvenscharen 1, 2 entsprechende Hauptnormalen zu einander senkrecht stehen. Bedenkt man aber, dass alle hier in Betracht kommenden Haupt und Binormalen in der Normalebene des Linien-elementes der Curvenschar Γ gelegen sind, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varepsilon l_2, & \psi_1 &= \varepsilon m_2, & \sigma_1 &= \varepsilon n_2, \\ \varphi_2 &= \eta l_1, & \psi_2 &= \eta m_1, & \sigma_2 &= \eta n_1,\end{aligned}$$

wo ε und η unbestimmte Vorzeichen bedeuten, die wir sogleich bestimmen können. Aus diesen Relationen folgt nämlich:

$$\varepsilon = -\eta = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \end{vmatrix},$$

wo die erhaltene Determinante entweder $+1$ oder -1 gleich ist. Wir können immer voraussetzen, dass die Vorzeichen der Richtungscosinus α_1, b_1, c_1 und α_2, b_2, c_2 so gewählt worden sind, dass diese Determinante gleich $+1$ ist. Dann hat man $\varepsilon = +1$ und die Formeln:

$$(50) \quad \begin{aligned}l_2 &= \varphi_1, & m_2 &= \psi_1, & n_2 &= \sigma_1, \\ \varphi_2 &= -l_1, & \psi_2 &= -m_1, & \sigma_2 &= -n_1.\end{aligned}$$

Man nehme ferner in der Normalebene des Linien-elementes der Curvenschar Γ denjenigen Sinn der Drehung als positiv an, in welchem man jede positive Hauptnormale der Curvenschar Γ um $\frac{\pi}{2}$ drehen muss um zur entsprechenden positiven Binormalen dieser Curvenschar zu gelangen. Wenn man also mit Ω den Winkel bezeichnet, welchen die positive Hauptnormale l, m, n mit der positiven Hauptnormalen l_1, m_1, n_1 bildet, so wird man die Formeln:

$$(51) \quad \begin{aligned}l &= l_1 \cos \Omega + \varphi_1 \sin \Omega, \\ \varphi &= \varphi_1 \cos \Omega - l_1 \sin \Omega\end{aligned}$$

und die ihnen analogen Formeln erhalten. Vergleicht man diese Formeln unter Berücksichtigung von (50) mit den früheren Formeln (48) und (49), so folgt:

$$(52) \quad \cos \Omega = \frac{a' \sqrt{\omega_1}}{K}, \quad \sin \Omega = \frac{b' \sqrt{\omega_2}}{K}.$$

Auf diese Weise sind die Richtungscosinus der Haupt und Binormalen jeder Schar L durch den bezüglichen Winkel Ω und die Richtungscosinus der Haupt und Binormalen derjenigen Schar von Linienelementen der Curvenschar Γ bestimmt worden, welche längs der entsprechenden Curve der Curvenschar 1 gelegen sind.

Wir wollen nun die Formel für die Torsion der Schar L aufstellen. Wendet man die Formel (6) an und benutzt die Beziehungen (51), so kommt man auf den Ausdruck:

$$S = -\frac{d\Omega}{ds} + \cos^2 \Omega \sum l_1 \frac{d\varphi_1}{ds} - \sin^2 \Omega \sum \varphi_1 \frac{dl_1}{ds}$$

folglich mit Hilfe von (47) auf den Ausdruck:

$$S = -\frac{d\Omega}{ds} + a' \sum l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_1} + b' \sum l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_2} + c' \sum l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_3}.$$

Hier sind

$$\sum l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_1} = S_1$$

und

$$\sum l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_2} = -\sum \varphi_2 \frac{dl_2}{ds_2} = S_2.$$

Torsionen derjenigen Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ , die längs der bezüglichen Curven der Curvenscharen 1 und 2 gelegen sind. Was nun den Ausdruck:

$$\sum l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_3} = R$$

anbetrifft, so denke man sich längs der Curve der Curvenschar 3 die Schar von Linienelementen, welche die Richtung der positiven Binormalen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ besitzen und beachte, dass diese Schar von Linienelementen, falls sie nicht alle einander parallel sind, ihre von Null verschiedene Krümmung und ihre positive Hauptnormale besitzt. Betrachtet man diese Krümmung als einen Vector mit der Richtung der genannten positiven Hauptnormalen, so ist R die rechtwinkelige Projection dieses Vectors auf die positive Hauptnormale l_1, m_1, n_1 . Besteht die betrachtete Schar aus parallelen Linienelementen, so ist R gleich Null.

In Folge der eingeführten Bezeichnungen bekommt man die Formel

$$(53) \quad S = -\frac{d\Omega}{ds} + S_1 a' + S_2 b' + R c'.$$

Diese Formel gibt Anlass zu ähnlichen Bemerkungen, die wir am Schlusse der Nummern 3 und 4 gemacht haben. Wenn für die Curvenschar C die Grösse S gleich Null ist, so besitzt jede Curve der Curvenschar C die Eigenschaft solche Linienelemente der Curvenschar Γ zu verbinden, welche einer Ebene parallel sind. Wenn für die Curvenschar C die Beziehung $\frac{d\Omega}{ds} = 0$ besteht, so ist der von der positiven Hauptnormalen l, m, n mit der positiven Hauptnormalen l_1, m_1, n_1 gebildete Winkel, eine Grösse, welche längs einer Curve der Curvenschar C einen konstanten Wert besitzt. Endlich ist die Gleichung:

$$S_1 a' + S_2 b' + R c' = 0$$

eine Pfaff'sche Differentialgleichung für die Linienelemente der Curvenschar C . Wenn die Curvenschar C in Bezug auf die Curvenschar Γ zwei der genannten Eigenschaften besitzt, so besitzt sie auch die dritte dieser Eigenschaften.

Die durchgeführten Betrachtungen beziehen sich auf den Fall, wo die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) im allgemeinen einfach ist. Ist diese Wurzel im allgemeinen zweifach, d. h. sind alle Minoren zweiten Grades aber nicht alle Elemente der Determinante Δ gleich Null, so gestalten sich diese Betrachtungen bedeutend einfacher. In diesem Falle existiert eine derartige Function $\Phi(x, y, z)$, die sich nicht auf eine Constante reduziert, dass

$$a = a[\Phi(x, y, z)], \quad \beta = \beta[\Phi(x, y, z)], \quad \gamma = \gamma[\Phi(x, y, z)]$$

sind. Wir erhalten somit:

$$\frac{da}{ds} = \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \frac{da}{d\Phi}$$

und es folgt für K^2 der Wert:

$$K^2 = \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \sum \left(\frac{da}{d\Phi} \right)^2.$$

Man betrachte nun die orthogonalen Trajectorien der Flächenschar:

$$\Phi(x, y, z) = \text{const.}$$

Es können folgende Richtungscosinus der positiven Halbtangente dieser Trajectorien genommen werden:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Bezeichnet man also den Cosinus des Winkels, welchen diese positive Halbtangente mit der positiven Halbtangente der Curve C bildet, mit a' so wird:

$$a' = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2}} \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

und führt man noch die Bezeichnung:

$$\omega_1 = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 \sum \left(\frac{da}{d\Phi}\right)^2$$

ein, so ergibt sich für K^2 die Formel:

$$(54) \quad K^2 = \omega_1 a'^2.$$

Man ersieht ferner, dass wenn man die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen und Binormalen derjenigen Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ , die längs der orthogonalen Trajectorien der Flächenschar $\Phi(x, y, z) = \text{const}$ gelegen sind l_1, m_1, n_1 beziehungsweise $\varphi_1, \psi_1, \sigma_1$ nennt, so ergeben sich die Formeln:

$$l_1 = \frac{\frac{da}{d\Phi}}{\sqrt{\sum \left(\frac{da}{d\Phi}\right)^2}}, \quad \varphi_1 = \frac{\beta \frac{d\gamma}{d\Phi} - \gamma \frac{d\beta}{d\Phi}}{\sqrt{\sum \left(\frac{da}{d\Phi}\right)^2}}$$

und die ihnen analogen Formeln. Die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen und Binormalen der Schar L sind dann

$$l = \varepsilon l_1, \quad m = \varepsilon m_1, \quad n = \varepsilon n_1$$

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1, \quad \psi = \varepsilon \psi_1, \quad \sigma = \varepsilon \sigma_1$$

wobei $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, jenachdem a' positiv oder negativ ist.

Für die Torsion der Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ ,

die längs der betrachteten orthogonalen Trajektorien liegen, bekommt man die Formel:

$$S_1 = - \frac{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2}}{\sum \left(\frac{d\alpha}{d\Phi}\right)^2} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{d\alpha}{d\Phi} & \frac{d\beta}{d\Phi} & \frac{d\gamma}{d\Phi} \\ \frac{d^2\alpha}{d\Phi^2} & \frac{d^2\beta}{d\Phi^2} & \frac{d^2\gamma}{d\Phi^2} \end{vmatrix}$$

und für die Torsion der Schar L die Formel:

$$(55) \quad S = S_1 a'.$$

W. SIERPIŃSKI.
O PEWNEM ZAGADNIENIU
Z RACHUNKU FUNKCYJ ASYMPTOTYCZNYCH.

Pod tytułem powyższym ukazała się w „Journal für reine und angewandte Mathematik“ (T. 126, zeszyt 4) praca G. Woronoja, zajmująca się nieznaną przedtem metodą obliczania wartości asymptotycznej funkcji liczbowej

$$\sum_{n > 0}^{n < x} E \frac{x}{n},$$

gdzie $E x$ oznacza liczbę całkowitą, czyniącą zadość warunkom:

$$x - 1 < E x \leq x.$$

Antor dowiódł nowego twierdzenia, dotyczącego tej sumy: „Funkcja $x(\lg x + 2C - 1)$, gdzie C jest stałą Eulera, przedstawia funkcję liczbową

$\sum_{n > 0}^{n < x} E \frac{x}{n}$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji

$\sqrt[3]{x} \lg x$ i dodaje, iż metoda, którą się w tym celu posługuje, może być stosowana do badania wartości asymptotycznych rozmaitych sum podwójnych.

Praca niniejsza ma na celu zastosowanie metody Woronoja do obliczenia wartości asymptotycznej funkcji liczbowej

$$\sum_{n > 0}^{n < \sqrt{x}} E \sqrt{x - n^2}.$$

Miejscami powtarzamy prawie dosłownie całe ustępy z wymienionej rozprawy *Woronoja*, co uważaliśmy za stosowniejsze, niż podawać odsyłacze, gdyż w ten sposób praca nasza sama w sobie przedstawia pewną całość, zaznajamiającą czytelnika z nową i płodną metodą badania wartości asymptotycznych sum podwójnych na łatwym przykładzie, który też sam przez się przedstawia pewien interes naukowy.

W S T Ę P.

Niech

$$F(x) = \sum_{(S)} f(m, n)$$

gdzie dowolna funkcja $f(m, n)$ zmiennych całkowitych m i n ma wartości w zupełności określone w obszarze (S) , wyznaczonym przez nierówność

$$(S) \dots m^2 + n^2 \leq x, \text{ gdzie } x \geq 1.$$

W przypadku najprostszym, gdy $f(m, n) = 1$, funkcja $F(x)$ może być przedstawiona w postaci

$$F(x) = 1 + 4 \sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} E \sqrt{x - n^2}.$$

Stosując znane twierdzenie geometryczne *Lejeune-Dirichleta*¹⁾ o zależności pomiędzy polem figury płaskiej a liczbą punktów siatkowych wewnątrz niej zawartych, z łatwością znajdziemy na $F(x)$ wyrażenie asymptotyczne

$$\pi x,$$

i nadto jeśli założymy:

$$F(x) = \pi x + r(x),$$

¹⁾ *Dirichlet. Recherches etc. § 1. Patrz też: Vorles. über Zahlenthe. von Dirichl. herausg. von Dedekind. Braunschweig 1871. Supplem. III.*

to reszta $r(x)$ czyni zadość nierówności

$$|r(x)| < A\sqrt{x},$$

przy wszelkiem $x \geq 1$, gdzie A oznacza pewną stałą.

Dowodzenie tego twierdzenia polega na tej prostej uwadze, iż zbiór punktów o spólrzędnych całkowitych (prostokątnych) m i n , czyniących zadość nierówności

$$m^2 + n^2 \leq x,$$

przedstawia punkty o spólrzędnych całkowitych, leżące wewnątrz koła oraz na okręgu koła, zakreślonego promieniem \sqrt{x} około początku spólrzędnych.

W pracy niniejszej dowodzimy następującego nowego twierdzenia o funkcji $F(x)$: „Funkcja πx przedstawia funkcję liczbową $F(x)$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji $\sqrt[3]{x}$ ”.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

PRZEKSZTAŁCENIE ZASADNICZE SUMY $\sum_{(S)} f(m, n)$, ($S \dots m^2 + n^2 \leq x$).

1. Oznaczmy przez (S) zbiór punktów o spólrzędnych całkowitych m, n , czyniących zadość nierówności

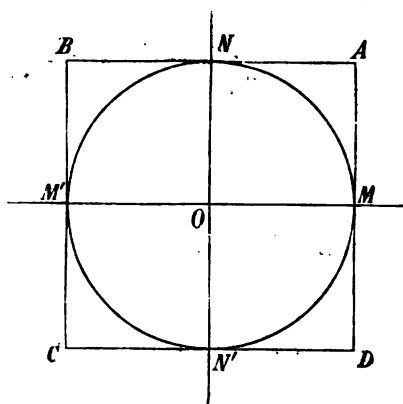
$$(S) \dots m^2 + n^2 \leq x.$$

Około koła, wyznaczonego przez równanie

$$m^2 + n^2 = x,$$

opiszmy kwadrat $ABCD$, którego boki są równoległe do osi spólrzędnych.

Oznaczmy przez (S_*) zbiór punktów o spólrzędnych całkowitych, które znajdują się na kwadracie $ABCD$ i wewnątrz niego; przez (S_I) , (S_{II}) , (S_{III}) , (S_{IV}) oznaczmy odpowiednio zbiory punktów o spólrzędnych całkowitych, które leżą wewnątrz trójkątów krzywoliniowych MAN , NBM' ,



$M'CN'$ i $N'DM$ oraz na ich bokach, wyłączając punkty, leżące na kole $MNM'N'M$.

Te pięć obszarów będą określone przez nierówności:

$$\begin{aligned} (S_*) \dots & -\sqrt{x} \leq m \leq \sqrt{x}, \quad -\sqrt{x} \leq n \leq \sqrt{x} \\ (S_I) \dots & 0 < m \leq \sqrt{x}, \quad 0 < n \leq \sqrt{x}, \quad m^2 + n^2 > x, \\ (S_{II}) \dots & -\sqrt{x} \leq m < 0, \quad 0 < n \leq \sqrt{x}, \quad m^2 + n^2 > x, \\ (S_{III}) \dots & -\sqrt{x} \leq m < 0, \quad -\sqrt{x} \leq n < 0, \quad m^2 + n^2 > x, \\ (S_{IV}) \dots & 0 < m \leq \sqrt{x}, \quad -\sqrt{x} \leq n < 0, \quad m^2 + n^2 > x. \end{aligned}$$

Wpływa stąd, iż jeśli $f(m, n)$ posiada określone znaczenie w obszarze (S_*) , to

$$\sum_{(S)} f(m, n) = \sum_{(S_*)} f(m, n) - \sum_{(S_I)} f(m, n) - \sum_{(S_{II})} f(m, n) - \sum_{(S_{III})} f(m, n) - \sum_{(S_{IV})} f(m, n)$$

lub też

$$\sum_{(S)} f(m, n) = \sum_{(S_*)} f(m, n) - \sum_{(S_I)} [f(m, n) + f(-m, n) + f(-m, -n) + f(m, -n)].$$

Dość będzie przeto (przy dowolnej funkcji f) obliczyć tylko sumy:

$$\sum_{(S_*)} f(m, n), \quad \sum_{(S_I)} f(m, n).$$

Kładąc $f(m, n) = 1$, otrzymamy:

$$(*) \quad \sum_{(S)} 1 = \sum_{(S_*)} 1 - 4 \sum_{(S_I)} 1 = (2E\sqrt{x} + 1)^2 - 4 \sum_{(S_I)} 1.$$

PRZEKSZTAŁCENIE SUMY $\sum_{(S_I)} f(m, n)$.

2. Na kole, wyznaczonym przez równanie

$$m^2 + n^2 = x$$

weźmy k punktów P_1, P_2, \dots, P_k o współrzędnych μ_i, ν_i ($i = 1, 2, \dots, k$), czyniących zadość warunkom:

$$\begin{aligned} & \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_k > 0 \\ \text{oraz} & 0 < \nu_1 < \dots < \nu_{k-1} < \nu_k. \end{aligned}$$

Poprowadźmy styczne do koła w obranych punktach oraz w punktach P_0 i P_{k+1} , leżących na osiach współrzędnych.

Oznaczmy punkty przecięcia się sąsiednich stycznych przez Q_0, Q_1, \dots, Q_k . W ten sposób utworzymy $k+1$ trójkątów krzywoliniowych $P_i Q_i P_{i+1}$ ($i=0, 1, \dots, k$) oraz wielokąt $A Q_0 Q_1 \dots Q_k$.

Oznaczmy przez (S_i) zbiór punktów trójkąta krzywoliniowego $P_i Q_i P_{i+1}$ ($i=0, 1, \dots, k$), należących do obszaru (S_i) (a więc z wyłączeniem punktów łuku $P_i P_{i+1}$); przez (Σ) oznaczmy zbiór punktów wielokąta $A Q_0 Q_1 \dots Q_k$ z wyłączeniem punktów linii łamanej $Q_0 Q_1 \dots Q_k$.

Obszar (S_i) podzieliłiśmy w ten sposób na $k+2$ oddzielne obszary $(S_0), (S_1), \dots, (S_k)$ oraz (Σ) ; wypływa stąd oczywista tożsamość:

$$\sum_{(S_j)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S_i)} f(m, n) + \sum_{(\sigma)} f(m, n).$$

Obszary $(S_0), (S_1), \dots, (S_k)$ wyznaczmy przez nierówności:

$$(S_i) \dots \begin{cases} \mu_{i+1} \mu_i + \nu_{i+1} \nu_i < m \mu_i + n \nu_i \leq x \\ \mu_i \mu_{i+1} + \nu_i \nu_{i+1} < m \mu_{i+1} + n \nu_{i+1} \leq x, \quad m^2 + n^2 > x, \end{cases}$$

zwracając uwagę na równania stycznych i równanie koła.

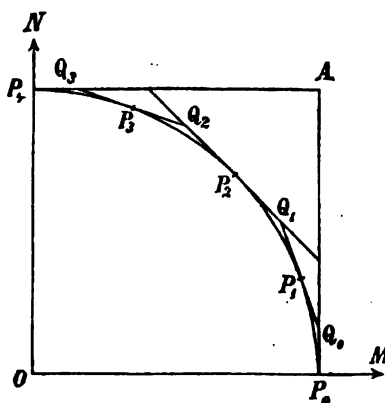
Co się zaś tyczy obszaru (Σ) , to wyznaczmy go, podzieliwszy wielokąt $A Q_0 Q_1 \dots Q_k$ na k trójkątów, utworzonych przez $k+2$ styczne do koła.

Zbudowanie tych trójkątów oraz ich określenie analityczne zależne jest od obioru punktów P_1, P_2, \dots, P_k na kole.

ALGORYTM DLA OBIORU PUNKTÓW P_1, P_2, \dots, P_k NA KOLE.

3. Twierdzenie pomocnicze. Niech t będzie liczbą dowolną, czyniącą zadość warunkowi

$$t \geq 2.$$



Przypuśćmy, iż wszystkie układy dwóch liczb całkowitych dodatnich a i b , czyniących zadość nierówności

$$a^2 + b^2 \leq t$$

i nie mających wspólnego dzielnika, tworzą szereg ułamków:

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \dots > \frac{a_k}{b_k}.$$

Kładąc:

$$a_0 = 1, b_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad a_{k+1} = 0, b_{k+1} = 1,$$

będziemy mieli:

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Weźmy cztery liczby ≥ 0 :

$$\alpha', \beta' \quad \text{oraz} \quad \alpha'', \beta'',$$

związane równaniem

$$\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta' = 1;$$

wyływa stąd:

$$\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha''}{\beta''}.$$

Kładąc:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' \quad \text{oraz} \quad \beta = \beta' + \beta'',$$

utworzymy szereg ułamków, przyczem:

$$\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha''}{\beta''}.$$

tudzież

$$\alpha' \beta - \alpha \beta' = 1, \quad \alpha \beta'' - \alpha'' \beta = 1.$$

W ten sam sposób możemy między ułamkami

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \text{ i } \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{lub też} \quad \frac{\alpha}{\beta} \text{ i } \frac{\alpha''}{\beta''}$$

wstawić nowe ułamki i t. d.

Przypuśćmy, żeśmy wstawili w ten sposób s ułamków między ułamkami $\frac{a'}{\beta'}$ i $\frac{a''}{\beta''}$; otrzymamy szereg ułamków:

$$(*) \quad \frac{a'}{\beta'} > \frac{a_1}{\beta_1} > \dots > \frac{a_s}{\beta_s} > \frac{a''}{\beta''}.$$

Oznaczając

$$a' = a_0, \beta' = \beta_0 \quad \text{oraz} \quad a'' = a_{s+1}, \beta'' = \beta_{s+1},$$

będziemy mieli:

$$(**) \quad a_i \beta_{i+1} - a_{i+1} \beta_i = 1. \quad (i = 0, 1, \dots, s)$$

W razie, jeżeli

$$a^2 + \beta'^2 \leq t, \quad a''^2 + \beta''^2 \leq t \quad \text{oraz} \quad (a' + a'')^2 + (\beta' + \beta'')^2 \leq t,$$

możemy utworzyć szereg (*) w ten sposób, iżby zachowane były nierówności:

$$a_i^2 + \beta_i^2 \leq t \quad (i = 0, 1, \dots, s+1)$$

oraz

$$(a_i + a_{i+1})^2 + (\beta_i + \beta_{i+1})^2 > t. \quad (i = 0, 1, \dots, s)$$

Przypuszczając to, przyjmijmy:

$$a' = 1, \beta' = 0 \quad \text{oraz} \quad a'' = 0, \beta'' = 1.$$

Szereg Fareya ułamków (*) jest w tym razie szeregiem

$$(***) \quad \frac{a_0}{b_0} > \frac{a_1}{b_1} > \dots > \frac{a_k}{b_k} > \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}.$$

Aby to pokazać, rozpatrzmy jakikolwiek ułamek $\frac{a_i}{\beta_i}$, należący do szeregu (*) ($i = 1, 2, \dots, s$). Z założenia $a_i^2 + \beta_i^2 \leq t$ i na podstawie równania (**) liczby całkowite a_i i β_i nie posiadają wspólnego dzielnika. Wypływa stąd, iż ułamek $\frac{a_i}{\beta_i}$ należy do szeregu (***)

Przypuśćmy teraz, iż istnieje ułamek $\frac{a}{b}$ wśród szeregu ułamków (***), nie należący do szeregu (*). W tym ostatnim znajdziemy dwa ułamki sąsiednie $\frac{a_v}{\beta_v}$ i $\frac{a_{v+1}}{\beta_{v+1}}$, czyniące zadość warunkom:

$$\frac{a_v}{\beta_v} > \frac{a}{b} > \frac{a_{v+1}}{\beta_{v+1}};$$

wypływa stąd:

$$a_r b - \beta_r a > 0 \quad \text{oraz} \quad a \beta_{r+1} - b a_{r+1} > 0$$

lub też, co wychodzi na to samo:

$$a_r b - \beta_r a \geq 1 \quad \text{oraz} \quad a \beta_{r+1} - b a_{r+1} \geq 1.$$

Dodając te nierówności, pomnożywszy je odpowiednio przez a_{r+1} i a_r , dostaniemy:

$$a (a_r \beta_{r+1} - a_{r+1} \beta_r) \geq a_r + a_{r+1},$$

a więc wskutek (***) będzie:

$$a \geq a_r + a_{r+1}.$$

W tenże sam sposób znajdziemy:

$$b \geq \beta_r + \beta_{r+1},$$

skąd

$$a^2 + b^2 \geq (a_r + a_{r+1})^2 + (\beta_r + \beta_{r+1})^2,$$

czyli

$$a^2 + b^2 > t,$$

co przeczy założeniu.

A więc dowiedliśmy tożsamości szeregow (***), i (*). Równania (***) mogą być w tym przypadku napisane tak:

$$a_t b_{t+1} - a_{t+1} b_t = 1. \quad (t=0, 1, \dots, k)$$

Wniosek. Wstawiając według wskazanego wyżej sposobu między liczbami $\frac{1}{0}$ i $\frac{0}{1}$ wszystkie ułamki $\frac{a}{\beta}$, czyniące zadość warunkowi

$$a^2 + \beta^2 \leq t,$$

otrzymamy wszystkie układy liczb dodatnich całkowitych a i b , nie posiadających wspólnego dzielnika i czyniących zadość nierówności:

$$a^2 + b^2 \leq t.$$

4. Rozpatrzmy bliżej przypadek $t = 25$.

Utwórzmy sumy kwadratów liczb całkowitych, dodatnich, względnie pierwszych, nie przewyższające 25:

$$1^2+1^2, 1^2+2^2, 1^2+3, 1^2+4^2, 2^2+1^2, 2^2+3^2, 3^2+1^2, 3^2+2^2, 3^2+4^2, 4^2+1^2, 4^2+3^2.$$

W ten sposób utworzymy szereg ułamków:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \frac{4}{3}.$$

Porządkując je według wielkości, otrzymamy szukany szereg ułamków:

$$\frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$$

Utworzymy tenże szereg w inny sposób. Wstawimy między ułamkami $\frac{1}{0}$ i $\frac{0}{1}$ ułamek $\frac{1}{1}$; między ułamkami $\frac{1}{0}$ i $\frac{1}{1}$ wstawimy ułamek $\frac{2}{1}$, a między ułamkami $\frac{1}{1}$ i $\frac{0}{1}$ ułamek $\frac{1}{2}$; utworzymy w ten sposób szereg F a r e y a:

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{1}.$$

Wstawiając odpowiednie ułamki między sąsiednimi ułamkami tego szeregu, utworzymy szereg F a r e y a:

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0}{1}.$$

Nie możemy już wstawiać ułamków pomiędzy ułamkami sąsiednimi

$$\frac{3}{1}, \frac{2}{1}; \frac{2}{1}, \frac{3}{2}; \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

gdyż wstawione ułamki $\frac{a}{b}$ nie czyniłyby zadość warunkowi

$$a^2 + b^2 \leq 25.$$

Wstawivszy ułamki pomiędzy pozostałymi ułamkami, otrzymamy ostatecznie szukany szereg F a r e y a:

$$\frac{1}{0}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0}{1}.$$

5. Algorytm. Obierzmy punkty P_1, P_2, \dots, P_k na kole, określonym przez równanie

$$m^2 + n^2 = x,$$

oznaczając przez

$$\mu_i = \frac{a_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \quad \text{oraz} \quad \nu_i = \frac{b_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$$

spółrzędne μ_i i ν_i punktu P_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Ponieważ punkty koła P_0 i P_{k+1} leżą na osiach współrzędnych, mamy:

$$\mu_0 = \sqrt{x}, \nu_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \mu_{k+1} = 0, \nu_{k+1} = \sqrt{x}.$$

Wypływa stąd, że współrzędne tych punktów również mogą być wyznaczone przy pomocy ogólnych wzorów na μ_i i ν_i , gdyż wyżej oznaczyliśmy

$$a_0 = 1, b_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad a_{k+1} = 0, b_{k+1} = 1.$$

PRZEKSZTAŁCENIE SUMY $\sum_{(n)} f(m, n)$.

6. Na podstawie wprowadzonego algorytmu każdy ułamek szeregu Fareya

$$(1) \quad \frac{1}{0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}, \frac{0}{1}$$

wyznacza jeden punkt P_i ($i = 0, 1, \dots, k+1$) na kole, a więc i jedną styczną do koła, poprowadzoną w punkcie P_i .

Przypomnijmy, żeśmy utworzyli szereg Fareya (1) przy pomocy następujących po sobie wstawiań. Przypuśćmy, żeśmy wstawiali ułamki w następującym porządku:

- 1) między ułamekami $\frac{a_1'}{\beta_1'}$ i $\frac{a_1''}{\beta_1''}$ wstawiliśmy ułamek $\frac{a_1}{\beta_1}$
- 2) " " $\frac{a_2'}{\beta_2'}$ i $\frac{a_2''}{\beta_2''}$ " " $\frac{a_2}{\beta_2}$
- ...
- k) " " $\frac{a_k'}{\beta_k'}$ i $\frac{a_k''}{\beta_k''}$ " " $\frac{a_k}{\beta_k}$

Szereg ułamków

$$\frac{a_1}{\beta_1}, \frac{a_2}{\beta_2}, \dots, \frac{a_k}{\beta_k}$$

różni się od szeregu ułamków

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$$

tylko porządkiem wyrazów.

Każda para ułamków $\frac{a_i'}{\beta_i'}$ i $\frac{a_i''}{\beta_i''}$, jak również wstawiony ułamek $\frac{a_i}{\beta_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), należy do szeregu Fareya (1); trzy te ułamki określają przeto trzy styczne do kła.

Oznaczmy trójkąt, utworzony przez te trzy styczne, symbolem

$$\left[\frac{a_i'}{\beta_i'}, \frac{a_i''}{\beta_i''} \right]. \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Zbiór k trójkątów

$$\left[\frac{a_1'}{\beta_1'}, \frac{a_1''}{\beta_1''} \right], \left[\frac{a_1'}{\beta_1'}, \frac{a_2''}{\beta_2''} \right], \dots, \left[\frac{a_k'}{\beta_k'}, \frac{a_k''}{\beta_k''} \right]$$

tworzy wielokąt $AQ_0Q_1 \dots Q_k$. By tego dowieść, dość rozpatrzyć wielokąt, odpowiadające rozmaitym wartościom t .

Gdy t zmienia się w granicach

$$2 \leq t < 5,$$

odpowiedni szereg Fareya będzie:

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}$$

i wielokąt AQ_0Q_1 jest w tym razie trójkątem, oznaczonym przez symbol $\left[\frac{1}{0}, \frac{0}{1} \right]$.

Zmieniając t w granicach

$$5 \leq t < 10,$$

otrzymamy szereg Fareya

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{1}$$

i wielokąt $AQ_0Q_1Q_2Q_3$ składa się w tym razie z trzech trójkątów

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{0}{1} \right], \left[\frac{1}{0}, \frac{1}{1} \right], \left[\frac{1}{1}, \frac{0}{1} \right].$$

Gdy t zmienia się w granicach

$$10 \leq t < 13,$$

powinniśmy do tych trójkątów dołączyć jeszcze dwa:

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{2}{1} \right] \text{ oraz } \left[\frac{1}{2}, \frac{0}{1} \right]$$

dla utworzenia nowego wielokąta $AQ_0Q_1 \dots Q_5$ i t. d.

7. Oznaczyliśmy wyżej przez (Σ) zbiór punktów wielokąta $AQ_0Q_1 \dots Q_k$ z wyłączeniem punktów linii łamanej $Q_0Q_1 \dots Q_k$ (patrz art. 2-gi).

Oznaczmy przez (Σ_i) zbiór punktów trójkąta $\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}, \frac{\alpha_i''}{\beta_i''} \right]$ z wyłączeniem punktów stycznej, odpowiadającej ułamkowi $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$.

Podzielimy w ten sposób obszar (Σ) na k oddzielnych obszarów $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \dots, (\Sigma_k)$, a więc będziemy mieli tożsamość:

$$(2) \quad \sum_{(o)} f(m, n) = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma_i)} f(m, n).$$

Biorąc pod uwagę równania stycznych do koła, tworzących trójkąt $\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}, \frac{\alpha_i''}{\beta_i''} \right]$, wyznaczmy obszar (Σ_i) przy pomocy następujących nierówności:

$$(\Sigma_i) \dots m\alpha_i' + n\beta_i' \leq \sqrt{x(\alpha_i'^2 + \beta_i'^2)}, \quad m\alpha_i'' + n\beta_i'' \leq \sqrt{x(\alpha_i''^2 + \beta_i''^2)}$$

oraz

$$m\alpha_i + n\beta_i > \sqrt{x(\alpha_i^2 + \beta_i^2)}. \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

WZÓR ZASADNICZY NA PRZEKSZTAŁCENIE SUMY $\sum_{(S_I)} f(m, n)$.

8. Przedstawiliśmy wyżej sumę $\sum_{(S_I)} f(m, n)$ w postaci:

$$\sum_{(S_I)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S_I)} f(m, n) + \sum_{(\sigma)} f(m, n).$$

Na mocy równości (2) otrzymamy wzór:

$$\sum_{(S_I)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S_i)} f(m, n) + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma_i)} f(m, n).$$

Obszar (S_i) ($i=0, 1, \dots, k$) określiliśmy przez nierówności:

$$\begin{aligned} \mu_{i+1} \mu_i + \nu_{i+1} \nu_i &< m \mu_i + n \nu_i \leq x \\ \mu_i \mu_{i+1} + \nu_i \nu_{i+1} &< m \mu_{i+1} + n \nu_{i+1} \leq x, \quad m^2 + n^2 > x. \quad (i=0, 1, \dots, k) \end{aligned}$$

Jeżeli przypomnimy, żeśmy założyli:

$$\mu_i = \frac{a_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad \nu_i = \frac{b_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad (i=0, 1, \dots, k+1)$$

to przedstawimy nierówności poprzedzające w postaci:

$$(1) \quad (S_i) \dots \begin{cases} (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} < m a_i + n b_i \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}, \\ (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_i^2 + b_i^2}} < m a_{i+1} + n b_{i+1} \leq \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}, \\ m^2 + n^2 > x. \quad (i=0, 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

9. Sumy $\sum_{(S_i)} f(m, n)$ oraz $\sum_{(\sigma_i)} f(m, n)$ mogą być przedstawione w innej postaci przy pomocy przekształcenia zmiennych m i n .

Położmy:

$$(2) \quad m a_i + n b_i = m' \quad \text{oraz} \quad m a_{i+1} + n b_{i+1} = n'.$$

Na mocy warunku

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1$$

równania poprzedzające dają nam:

$$(3) \quad \begin{aligned} m &= m' b_{i+1} - n' b_i, \\ n &= -m' a_{i+1} + n' a_i. \end{aligned}$$

Równania (2) i (3) tworzą odpowiedniość jednoznaczna pomiędzy układami (m, n) zmiennych całkowitych m i n , oraz układami (m', n') zmiennych całkowitych m' i n' .

Oznaczmy przez (S'_i) zbiór układów (m', n') , odpowiadający jednoznacznie obszarowi (S_i) .

Nierówności (1), określające obszar (S_i) , przejdą na mocy (2) i (3) na nierówności:

$$(I) \quad (S'_i) \dots \begin{cases} (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} < m' \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}, \\ (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_i^2 + b_i^2}} < n' \leq \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}, \\ (m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x, \end{cases}$$

określające odpowiedni obszar (S'_i) .

Na mocy (3) suma $\sum_{(S_i)} f(m, n)$ może być przedstawiona w postaci:

$$\sum_{(S_i)} f(m, n) = \sum_{(S'_i)} f(m' b_{i+1} - n' b_i, -m' a_{i+1} + n' a_i). \quad (i=0, 1, \dots, k)$$

W tenże sam sposób, kładąc:

$$m \alpha_i' + n \beta_i' = m' \quad \text{oraz} \quad m \alpha_i'' + n \beta_i'' = n',$$

na zasadzie nierówności dla (Σ_i) , określimy przez nierówności:

$$(II) \quad (\Sigma_i') \dots \begin{aligned} m' &\leq \sqrt{x(\alpha_i'^2 + \beta_i'^2)}, \quad n' \leq \sqrt{x(\alpha_i''^2 + \beta_i''^2)}, \\ m' + n' &> \sqrt{x(\alpha_i^2 + \beta_i^2)} \end{aligned}$$

obszar (Σ_i') , odpowiadający jednoznacznie obszarowi (Σ_i) ; suma $\sum_{(\sigma_i')} f(m, n)$ przedstawi się w postaci:

$$\sum_{(\sigma_i')} f(m, n) = \sum_{(\sigma_i'')} f(m' \beta_i'' - n' \beta_i', -m' \alpha_i'' + n' \alpha_i'). \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

Łącząc razem otrzymane rezultaty, dostajemy następujące twierdzenie zasadnicze:

Twierdzenie. Suma $\sum_{(S_P)} f(m, n)$ może być przedstawiona w postaci:

$$\begin{aligned}
 \sum_{(S_P)} f(m, n) &= \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S'_i)} f(m' b_{i+1} - n' b_i, -m' a_{i+1} + n' a_i) \\
 (*) \quad &+ \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(S'_i)} f(m' \beta_i'' - n' \beta_i', -m' a_i'' + n' a_i')
 \end{aligned}$$

gdzie obszary (S'_i) ($i=0, 1, \dots, k$) oraz (Σ'_i) ($i=1, 2, \dots, k$) określone są przez nierówności (I) i (II).

ZASTOSOWANIE METODY DIRICHLETA DO PRZEKSZTAŁCENIA SUMY

$$\sum_{(S'_i)} f(m' b_{i+1} - n' b_i, -m' a_{i+1} + n' a_i).$$

10. Rozważmy elipsę, określoną przez równanie

$$(m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 = x$$

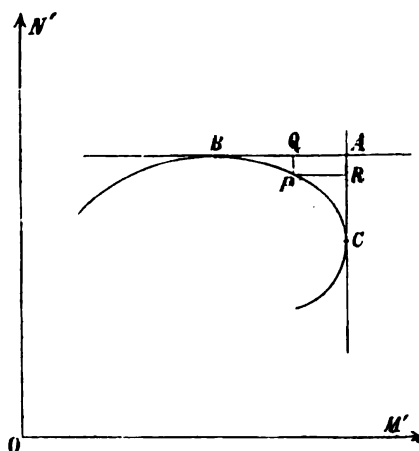
w spólrzędnych prostokątnych OM' i ON' .

Z punktu A o spólrzędnych

$$\sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)} \text{ i } \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}$$

poprowadźmy dwie styczne AB i AC do elipsy. Styczne te będą równoległe do osi spólrzędnych. Punkty trójkąta krzywoliniowego ABC , mające spólrzędne całkowite, tworzą obszar (S'_i) , jeśli wyłączymy punkty łuku BPC elipsy.

Weźmy na elipsie punkt dowolny P , którego spólrzędne μ' i ν' czynią zadość warunkom:



$$\sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)} \geq \mu' > (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}},$$

$$\sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)} \geq \nu' > (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_i^2 + b_i^2}}.$$

Punkt P będzie się w tym razie znajdował na elipsie między punktami B i C .

Poprowadźmy z punktu P dwie równoległe PR i PQ do osi współrzędnych; utworzymy w ten sposób prostokąt $AQPR$ oraz dwa czworokąty krzywoliniowe $AQPC$ i $ARPB$.

Oznaczmy przez $(S'_{0,i})$ zbiór punktów prostokąta $AQPR$, należących do obszaru (S'_i) , z wyłączeniem punktów, leżących na bokach PQ i PR ; przez $(S'_{1,i})$ i $(S'_{2,i})$ oznaczmy odpowiednio zbiory punktów czworokątów krzywoliniowych, należących do obszaru (S'_i) : przez $(S'_{1,i})$ — czworokąt $AQPC$, wyłączając punkty na bokach PQ i PC ; przez $(S'_{2,i})$ — czworokąt $ARPB$, wyłączając punkty na bokach PR i PB . Trzy te obszary będą określone przez nierówności:

$$(1) (S'_{0,i}) \dots \mu' < m' \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}, \quad \nu' < n' \leq \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)},$$

$$(2) (S'_{1,i}) \left\{ \begin{array}{l} \mu' < m' \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}, \quad (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_i^2 + b_i^2}} < n' \leq \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)} \\ (m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x, \end{array} \right.$$

$$(3) (S'_{2,i}) \left\{ \begin{array}{l} (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} < m' \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}, \quad \nu' < n' \leq \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)} \\ (m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x \end{array} \right.$$

przy $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

11. Obszary $(S'_{1,i})$ i $(S'_{2,i})$ mogą być określone przez prostsze nierówności.

Mnożąc obie części nierówności

$$(m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x$$

przez $a_i^2 + b_i^2$, przedstawimy otrzymaną w ten sposób nierówność w postaci:

$$(4) \quad [(a_i^2 + b_i^2) n' - m' (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})]^2 > x (a_i^2 + b_i^2) - m'^2.$$

W ostatniej nierówności liczba

$$(a_i^2 + b_i^2) n' - m' (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})$$

jest dodatnia. W samej rzeczy, na mocy (2) mamy nierówności:

$$\begin{aligned} (a_i^2 + b_i^2) n' &> (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)} \\ - (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) m' &\geq - (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}. \end{aligned}$$

Dodając te nierówności, znajdujemy:

$$(a_i^2 + b_i^2) n' - (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) m' > 0.$$

Wypływa stąd, że nierówność (4) może być zastąpiona przez prostszą nierówność

$$(a_i^2 + b_i^2) n' - (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) m' > \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2) - m'^2},$$

lub też, co na jedno wychodzi:

$$n' > \frac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) m' + \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2) - m'^2}}{a_i^2 + b_i^2}.$$

Zważywszy, iż funkcya

$$\frac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) m' + \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2) - m'^2}}{a_i^2 + b_i^2}$$

ciągle się zmniejsza w granicach

$$(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} < m' \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}$$

i posiada minimum

$$(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_i^2 + b_i^2}},$$

wnioskujemy, iż nierówności (2), określające obszar (S'_{1i}), mogą być zastąpione przez nierówności:

$$(S'_{1i}) \left\{ \begin{array}{l} \mu' < m' \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)} \\ \frac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) m' + \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2) - m'^2}}{a_i^2 + b_i^2} < n' \leq \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)} \end{array} \right.$$

W tenże sam sposób określimy obszar (S'_{1i}) przy pomocy nierówności:

$$(S'_{1i}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) n' + \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2) - n'^2}}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2} < m' \leq \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)} \\ \nu' < n' \leq \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}. \end{array} \right.$$

Na mocy określenia obszarów (S'_{0i}) , (S'_{1i}) i (S'_{2i}) mieć będziemy wzór:

$$\begin{aligned} \sum_{(S'_{1i})} f(m'b_{i+1} - n'b_i, -m'a_{i+1} + n'a_i) &= \sum_{(S'_{1i})} f(m'b_{i+1} - n'b_i, -m'a_{i+1} + n'a_i) \\ (*) & \\ + \sum_{(S'_{2i})} f(m'b_{i+1} - n'b_i, -m'a_{i+1} + n'a_i) &- \sum_{(S'_{0i})} f(m'b_{i+1} - n'b_i, -m'a_{i+1} + n'a_i). \end{aligned}$$

12. Spółrzędne μ' i ν' punktu P na elipsie związane są przez równanie tejże:

$$(\mu'b_{i+1} - \nu'b_i)^2 + (-\mu'a_{i+1} + \nu'a_i)^2 = x.$$

Dalej rozpatrywać będziemy tylko te wartości μ' i ν' , dla których suma $\mu' + \nu'$ jest minimum. W tym celu powinniśmy założyć:

$$\mu' = (a_i c_i + b_i \partial_i) \sqrt{\frac{x}{c_i^2 + \partial_i^2}} \quad \text{oraz} \quad \nu' = (a_{i+1} c_i + b_{i+1} \partial_i) \sqrt{\frac{x}{c_i^2 + \partial_i^2}}$$

gdzie $c_i = a_i + a_{i+1}$, $\partial_i = b_i + b_{i+1}$.

CZĘŚĆ DRUGA.

OBLICZENIE WARTOŚCI PRZYBLIŻONEJ FUNKCYI LICZBOWEJ, PRZEDSTAWIONEJ PRZEZ SUMĘ $1 + 4 \sum_{\substack{n < \nu \\ n > 0}} E \sqrt{x - n^2}$.

13. Celem naszych badań jest obliczenie dla wielkich wartości x funkcji liczbowej $F(x)$, przedstawionej przez sumę

$$F(x) = \sum_{(S)} f(m, n)$$

w najprostszym przypadku, gdy

$$f(m, n) = 1.$$

Uskuteczniając sumowanie względem zmiennej całkowitej m w obszarze (S) , określonym przez nierówność:

$$m^2 + n^2 \leq x, \quad \text{gdzie} \quad x > 0$$

(nb to na jedno wychodzi, przez nierówności:

$$-\sqrt{x-n^2} \leq m \leq \sqrt{x-n^2}, \quad n^2 \leq x, \quad \text{gdzie } x > 0,$$

przedstawimy funkcję $F(x)$ w postaci:

$$F(x) = 2 \sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > -\sqrt{x}}} E \sqrt{x-n^2} + 2E\sqrt{x} + 1 = 1 + 4 \sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} E \sqrt{x-n^2}.$$

Wzory (*) artykułów 1^{go} i 9^{go} prowadzą do nowego wyrażenia funkcji $F(\cdot)$:

$$F(x) = \sum_{(n)} 1 = (2E\sqrt{x} + 1)^2 - 4 \sum_{t=0}^{t=k} \sum_{(n', t)} 1 - 4 \sum_{t=1}^{t=k} \sum_{(n', t)} 1$$

gdzie suma $\sum_{(n', t)} 1$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m' i n' , czyniących zadość nierównościom:

$$\begin{aligned} (a_t a_{t+1} + b_t b_{t+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{t+1}^2 + b_{t+1}^2}} &< m' \leq \sqrt{x(a_t^2 + b_t^2)}, \\ (a_t a_{t+1} + b_t b_{t+1}) \sqrt{\frac{x}{a_t^2 + b_t^2}} &< n' \leq \sqrt{x(a_{t+1}^2 + b_{t+1}^2)}, \\ (m' b_{t+1} - n' b_t)^2 + (-m' a_{t+1} + n' a_t)^2 &> x. \end{aligned} \quad (t = 0, 1, \dots, k)$$

Suma $\sum_{(n', t)} 1$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m' i n' , czyniących zadość nierównościom:

$$m' \leq \sqrt{x(\alpha_i'^2 + \beta_i'^2)}, \quad n' \leq \sqrt{x(\alpha_i''^2 + \beta_i''^2)}, \quad m' + n' > \sqrt{x(\alpha_i^2 + \beta_i^2)},$$

gdzie

$$\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i'' \quad \text{oraz} \quad \beta_i = \beta_i' + \beta_i''. \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

14. Niech a, b, a', b' będą liczby całkowite ≥ 0 , związane warunkiem

$$ab' - a'b = 1.$$

Wprowadźmy dwa symbole:

$$s \left(\begin{matrix} a, & b \\ a', & b' \end{matrix} \right) \quad \text{oraz} \quad \sigma \left(\begin{matrix} a, & b \\ a', & b' \end{matrix} \right),$$

określając je w następujący sposób:

O k r e ś l e n i e. Symbol $s \left(\begin{smallmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{smallmatrix} \right)$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m i n , czyniących zadość nierównościom :

$$(aa' + bb') \sqrt{\frac{x}{a'^2 + b'^2}} < m \leq \sqrt{x(a^2 + b^2)},$$

$$(aa' + bb') \sqrt{\frac{x}{a^2 + b^2}} < n \leq \sqrt{x(a'^2 + b'^2)},$$

$$(mb' - nb)^2 + (-ma' + na)^2 > x.$$

Symbol $\sigma \left(\begin{smallmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{smallmatrix} \right)$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m i n , czyniących zadość nierównościom :

$$m \leq \sqrt{x(a^2 + b^2)}, \quad n \leq \sqrt{x(a'^2 + b'^2)}, \quad m + n > \sqrt{x(c^2 + \partial^2)}$$

gdzie

$$c = a + a' \quad \text{oraz} \quad \partial = b + b'.$$

Przy pomocy wprowadzonych symbolów przedstawimy funkcję $F(x)$ w postaci:

$$F(x) = (2E\sqrt{x} + 1)^2 - 4 \sum_{i=0}^{i=k} s \left(\begin{smallmatrix} a_i, & b_i \\ a_{i+1}, & b_{i+1} \end{smallmatrix} \right) - 4 \sum_{i=1}^{i=k} \sigma \left(\begin{smallmatrix} a_i', & \beta_i' \\ a_i'', & \beta_i'' \end{smallmatrix} \right).$$

PRZEKSZTAŁCENIE SYMBOLU $s \left(\begin{smallmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{smallmatrix} \right)$.

15. Metoda, wyłożona w art. 10—12, może nam służyć do przekształcenia symbolu $s \left(\begin{smallmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{smallmatrix} \right)$.

Oznaczmy czasowo przez (S_0) liczbę układów (m, n) , czyniących zadość nierównościom (porówn. art. 10, nierówn. 1):

$$(S_0) \left\{ \begin{array}{l} (ac + b\partial) \sqrt{\frac{x}{c^2 + \partial^2}} < m \leq \sqrt{x(a^2 + b^2)} \\ (a'c + b'\partial) \sqrt{\frac{x}{c^2 + \partial^2}} < n \leq \sqrt{x(a'^2 + b'^2)}. \end{array} \right.$$

Przez (S_1) oznaczmy liczbę układów (m, n) czyniących zadość nierównościom:

$$(S_1) \begin{cases} (ac + b\partial) \sqrt{\frac{x}{c^2 + \partial^2}} < m \leq \sqrt{x(a^2 + b^2)} \\ \frac{(aa' + bb')m + \sqrt{x(a^2 + b^2)} - m^2}{a^2 + b^2} < n \leq \sqrt{x(a'^2 + b'^2)} \end{cases}$$

(porówn. art. 10, nierówn. (1)) i, na koniec przez (S_2) — liczbę układów (m, n) , czyniących zadość nierównościom:

$$(S_2) \begin{cases} \frac{(aa' + bb')n + \sqrt{x(a'^2 + b'^2)} - n^2}{a'^2 + b'^2} < m \leq \sqrt{x(a^2 + b^2)} \\ (a'c + b'\partial) \frac{x}{c^2 + \partial^2} < n \leq \sqrt{x(a'^2 + b'^2)} \end{cases}$$

(porówn. art. 10, nierówn. (3)).

Na mocy wzoru (*) z art. 11-go będziemy mieli:

$$s \left(\begin{matrix} a, & b \\ a', & b' \end{matrix} \right) = (S_1) + (S_2) - (S_0).$$

Oznaczmy dla skrótienia:

$$\mu = (ac + b\partial) \sqrt{\frac{x}{c^2 + \partial^2}}, \quad \nu = (a'c + b'\partial) \sqrt{\frac{x}{c^2 + \partial^2}}, \quad \eta = \sqrt{x(a^2 + b^2)}, \quad z = \sqrt{x(a'^2 + b'^2)}$$

$$\varphi(m) = \frac{(aa' + bb')m + \sqrt{x(a^2 + b^2)} - m^2}{a^2 + b^2}, \quad \psi(n) = \frac{(aa' + bb')n + \sqrt{x(a'^2 + b'^2)} - n^2}{a'^2 + b'^2}.$$

Nierówności (S_0) , (S_1) oraz (S_2) przedstawiają się w prostszej postaci:

$$\begin{aligned} (S_0) \dots & \mu < m \leq \eta, & \nu < n \leq z, \\ (S_1) \dots & \mu < m \leq \eta, & \varphi(m) < n \leq z, \\ (S_2) \dots & \psi(n) < m \leq \eta, & \nu < n \leq z. \end{aligned}$$

Na mocy tych nierówności z łatwością otrzymamy:

$$(S_0) = (E\eta - E\mu)(Ez - E\nu),$$

$$(S_1) = \sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} [Ez - E\varphi(m)] = Ez(E\eta - E\mu) - \sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} E\varphi(m),$$

$$(S_2) = \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} [E\eta - E\psi(n)] = E\eta(Ez - E\nu) - \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} E\psi(n),$$

a więc:

$$s \left(\begin{matrix} a, b \\ a', b' \end{matrix} \right) = E\eta Ez - E\mu Ev - \sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} E\varphi(m) - \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} E\psi(n).$$

16. Wprowadźmy funkcję okresową

$$r_0(u) = r_0(u+1),$$

określoną przez równanie:

$$r_0(u) = Eu - u + \frac{1}{2}.$$

Na mocy tego wzoru mieć będziemy nierówność

$$(*) \quad |r_0(u)| \leq \frac{1}{2}$$

dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej u .

Przy pomocy funkcji $r_0(u)$ przedstawimy sumę

$$\sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} E\varphi(m) + \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} E\psi(n)$$

w następującej postaci:

$$\sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} \left[\varphi(m) - \frac{1}{2} \right] + \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} \left[\psi(n) - \frac{1}{2} \right] + \sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} r_0[\varphi(m)] + \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} r_0[\psi(n)].$$

Na mocy (*) mamy nierówność:

$$\left| \sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} r_0[\varphi(m)] + \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} r_0[\psi(n)] \right| \leq \frac{1}{2} (E\eta - E\mu + Ez - E\nu) \leq \frac{1}{2} (\eta + z - \mu - \nu + 2),$$

a więc możemy napisać równość następującą:

$$\begin{aligned} - \sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} E\varphi(m) - \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} E\psi(n) &= - \sum_{\substack{m < \eta \\ m > \mu}} \varphi(m) - \sum_{\substack{n < z \\ n > \nu}} \psi(n) + \frac{1}{2} (E\eta + Ez - E\mu - E\nu) \\ &\quad + \frac{\vartheta}{2} (\eta + z - \mu - \nu + 2), \quad \text{gdzie } |\vartheta| \leq 1. \end{aligned}$$

Podstawiając znaleziony wzór w wyrażenie na $s\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right)$ oraz zastępując symbole E ich wyrażeniami przez funkcję r_0 , z łatwością otrzymamy:

$$s\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right) = -\sum_{\substack{m < \eta \\ m > u}} \varphi(m) - \sum_{\substack{n < z \\ n > v}} \psi(n) + \eta s - \mu v + r_0(\eta) s + r_0(z) \eta \\ - r_0(\mu) v - r_0(v) \mu + r_0(\eta) r_0(z) - r_0(\mu) r_0(v) + \frac{\vartheta}{2} (\eta + z - \mu - v + 2),$$

gdzie $|\vartheta| \leq 1$.

17. Wzór, któryśmy otrzymali, doprowadza nas do obliczenia sumy

$$-\sum_{\substack{m < \eta \\ m > u}} \varphi(m) - \sum_{\substack{n < z \\ n > v}} \psi(n),$$

gdzie $\varphi(m)$ i $\psi(n)$ są dwie funkcje algebraiczne.

Wzór sumacyjny Eulera, uogólniony przez Sonina¹⁾, posłuży nam do tego.

Według wzoru Sonina suma

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} f(n)$$

wyraża się:

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} f(n) = \int_a^b f(u) du + r_0(b) f(b) - r_0(a) f(a) - \int_a^b r_0(u) df(u)$$

dla jakichbądź dodatnich wartości granic sumowania a i b , jeżeli tylko funkcja $f(u)$ posiada pochodną ciągłą w granicach $a < u < b$.

Funkcje $\varphi(u)$ i $\psi(u)$, na mocy wzorów art. 15-go, są w zupełności określone odpowiednio w granicach

$$\mu < u < \eta \quad \text{oraz} \quad v < u < z$$

lecz pochodne ich stają się nieskończenie wielkie (co do wartości bezwzgl.) przy $u = \eta$ i $u = z$.

¹⁾ Sonin: „O pewnej całce określonej, zawierającej funkcję liczebną $[x]$ “ (Warsz. Wiadomości Uniwersyteckie za rok 1885. № 3, po rosyjsku).

Jednakże, przedstawiając sumę $\sum_{m > \mu}^{m \leq \eta} \varphi(m)$ w postaci:

$$\sum_{m > \mu}^{m < \eta} \varphi(m) = \sum_{m > u}^{m < \eta - \varepsilon} \varphi(m) + \sum_{m > \eta - \varepsilon}^{m < \eta} \varphi(m),$$

gdzie ε jest liczbą dowolnie małą, wyrażając pierwszą z sum strony prawej według wzoru S o n i n a i przechodząc następnie do granicy przy $\varepsilon = 0$ (przyczem należy rozważyć oddzielnie przypadki całkowitego i niecałkowitego η), znajdziemy, iż wyrażenie na sumę $\sum_{m > u}^{m \leq \eta} \varphi(m)$ otrzymuje się także, jak przy bezpośrednim stosowaniu wzoru S o n i n a, a mianowicie:

$$\sum_{m > \mu}^{m < \eta} \varphi(m) = \int_u^{\eta} \varphi(u) du + r_0(\eta) \varphi(\eta) - r_0(\mu) \varphi(\mu) - \int_u^{\eta} r_0(u) d\varphi(u)$$

i również:

$$\sum_{n > v}^{n \leq z} \psi(n) = \int_v^z \psi(u) du + r_0(z) \psi(z) - r_0(v) \psi(v) - \int_v^z r_0(u) d\psi(u)$$

i wzór art. 16-go na $s\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right)$ daje nam:

$$\begin{aligned} s\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right) &= - \int_u^{\eta} \varphi(u) du - \int_v^z \psi(u) du + \eta z - \mu v + r_0(\eta) [z - \varphi(\eta)] \\ &+ r_0(z) [\eta - \psi(z)] + r_0(\eta) r_0(z) - r_0(\mu) r_0(v) + \int_u^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) \\ &+ \int_v^z r_0(u) d\psi(u) + \frac{\vartheta}{2} (\eta + z - \mu - v + 2) \quad \text{gdzie } |\vartheta| \leq 1. \end{aligned}$$

WARTOŚĆ PRZYBLIŻONA SYMBOLU $s\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right)$.

18. Przypuśćmy, iż liczby całkowite dodatnie lub równe zeru a, b, a', b' , związane przez równanie

$$ab' - a'b = 1$$

spełniają warunki:

$$a^2 + b^2 \leq t, \quad a'^2 + b'^2 \leq t, \quad \text{oraz} \quad c^2 + \partial^2 > t,$$

gdzie

$$c = a + a', \quad \partial = b + b'.$$

Uskuteczniając w ostatnim wzorze artykułu poprzedzającego dwa pierwsze całkowania, znajdziemy:

$$\begin{aligned} -\int_{\mu}^{\eta} \varphi(u) du - \int_{\nu}^z \psi(u) du &= \frac{x}{2(c^2 + \partial^2)} - \frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + \partial^2)}} \\ &+ \frac{x}{2(c^2 + \partial^2)} - \frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)(c^2 + \partial^2)}}, \end{aligned}$$

a po redukcji:

$$-\int_{\mu}^{\eta} \varphi(u) du - \int_{\nu}^z \psi(u) du = \frac{x}{c^2 + \partial^2} - \frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}}.$$

Podstawiając te rezultaty we wzór wspomniany i zauważwszy, iż

$$\eta s - \mu v = -\frac{x}{c^2 + \partial^2} + x \left[\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} - (aa' + bb') \right],$$

$$s - \varphi(\eta) = \sqrt{\frac{x}{a^2 + b^2}} \left[\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} - (aa' + bb') \right],$$

$$\eta - \psi(z) = \sqrt{\frac{x}{a'^2 + b'^2}} \left[\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} - (aa' + bb') \right],$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} s \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right) &= -\frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}} \\ &+ \left[\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} - (aa' + bb') \right] \left[x + r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a^2 + b^2}} + r_0(z) \sqrt{\frac{x}{a'^2 + b'^2}} \right] \\ &+ r_0(\eta) r_0(z) - r_0(\mu) r_0(\nu) + \int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) + \int_{\nu}^z r_0(u) d\psi(u) \\ &+ \frac{\vartheta}{2} (\eta + s - \mu - \nu + 2) \quad \text{gdzie} \quad |\vartheta| \leq 1. \end{aligned}$$

19. Rozważmy obecnie całkę określoną

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u).$$

Na mocy wzoru na funkcję φ (art. 15), mamy:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) = \int_{\mu}^{\eta} r_0(u) \left[\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{u}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} \right] du.$$

Wprowadźmy funkcję okresową

$$r_1(u) = r_0(u + 1),$$

określoną przez wzór

$$r_1(u) = \int_0^u r_0(u) du - \frac{1}{12}.$$

Dla funkcji $r_1(u)$ otrzymamy wyrażenie:

$$r_1(u) = -\frac{(u - Eu)^2}{2} + \frac{u - Eu}{2} - \frac{1}{12}.$$

Wypływa stąd, iż funkcja $r_1(u)$ jest ciągłą i czyni zadość nierówności

$$|r_1(u)| \leq \frac{1}{12}$$

dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej u ; mamy też nierówność

$$(1) \quad |r_1(u) - r_1(v)| \leq \frac{1}{8}$$

dla wszelkich rzeczywistych wartości zmiennych u i v .

Przy pomocy funkcji $r_1(u)$ przedstawimy naszą całkę określoną w postaci:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} [r_1(\eta) - r_1(\mu)] - \frac{1}{a^2 + b^2} \int_{\mu}^{\eta} r_0(u) \frac{u}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} du.$$

Weźmy liczbę ξ , czyniącą zadość warunkom

$$\mu < \xi < \eta.$$

Mieć będziemy oczywistą tożsamość:

$$(*) \quad \int_{\mu}^{\eta} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} = \int_{\mu}^{\xi} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} + \int_{\xi}^{\eta} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}}.$$

Do całki

$$\int_{\xi}^{\eta} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}}$$

zastosować możemy pierwsze twierdzenie o wartości średniej, gdyż funkcja $\frac{u}{\sqrt{\eta^2 - u^2}}$ pozostaje dodatnią w granicach całkowania; otrzymamy:

$$\int_{\xi}^{\eta} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} = \vartheta M \int_{\xi}^{\eta} \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}}, \quad \text{gdzie } |\vartheta| < 1,$$

oraz M oznacza granicę wyższą wartości bezwzględnych funkcji $r_0(u)$.

Ponieważ funkcja dodatnia $\frac{u}{\sqrt{\eta^2 - u^2}}$ zmienia się wciąż w tym samym kierunku w granicach całki $\int_{\mu}^{\xi} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}}$, całka zaś $\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) du$ przedstawia funkcję ciągłą zmiennej u , mieć będziemy:

$$\int_{\mu}^{\xi} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} = \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 - \mu^2}} \int_{\mu}^{\tau} r_0(u) du + \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} \int_{\tau}^{\xi} r_0(u) du,$$

$$\text{gdzie } \tau = \mu + \vartheta(\xi - \mu), \quad \text{przy } 0 < \vartheta < 1$$

na mocy drugiego twierdzenia o wartości średniej.

Podstawiając wzory otrzymane w tożsamość (*) i zważywszy, iż $M \leq \frac{1}{2}$, znajdziemy:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} = \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\eta^2 - \xi^2} + \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 - \mu^2}} [r_1(\tau) - r_1(\mu)] + \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} [r_1(\xi) - r_1(\tau)]$$

Równość ta na mocy (1) może być przedstawiona tak:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} = \frac{\vartheta}{2} \left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2} + \frac{1}{4} \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} \right) + \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 - \mu^2}} [r_1(\tau) - r_1(\mu)],$$

gdzie $|\vartheta| < 1$.

Kładąc $\xi = \sqrt{\eta^2 - \frac{1}{4}\eta^2}$, otrzymamy:

$$\sqrt{\eta^2 - \xi^2} + \frac{1}{4} \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\eta} + \sqrt{\eta - \frac{1}{4}} \right) < \sqrt{\eta}.$$

A więc:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) \frac{u du}{\sqrt{\eta^2 - u^2}} = \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\eta} + \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 - \mu^2}} [r_1(\tau) - r_1(\mu)], \quad \text{gdzie } |\vartheta| < 1.$$

Podstawiając znaleziony rezultat we wzór na $\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u)$, któryśmy otrzymali wyżej, i zważywszy, iż

$$\frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 - \mu^2}} = ac + b\vartheta,$$

po zredukowaniu otrzymamy:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} r_1(\eta) + r_1(\mu) - \frac{ac + b\vartheta}{a^2 + b^2} r_1(\tau) + \frac{\vartheta}{2} \sqrt[4]{\frac{x}{(a^2 + b^2)^3}},$$

lub też:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} r_1(\eta) + r_1(\mu) - r_1(\tau) - \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} r_1(\tau) + \frac{\vartheta}{2} \sqrt[4]{\frac{x}{(a^2 + b^2)^3}}$$

co ostatecznie doprowadza do wzoru:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} r_1(\eta) + \vartheta \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{12} \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{x}{(a^2 + b^2)^3}} \right],$$

gdzie $|\vartheta| < 1$.

¹⁾ Przypomnijmy, iż $\eta = \sqrt{x(a^2 + b^2)}$, a więc przy $x \geq 1$ i całkowitych nie równych jednocześnie zeru a i b , będzie $\eta \geq 1$.

Ponieważ:

$$(aa' + bb')^2 \div (ab' - a'b)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

oraz

$$a'^2 + b'^2 \leq t,$$

mieć będziemy:

$$\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} < \sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{\frac{t}{a^2 + b^2}},$$

a więc:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u) d\varphi(u) = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} r_1(\eta) + \vartheta \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{t}{a^2 + b^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{(a^2 + b^2)^3}} \right],$$

gdzie $|\vartheta| < 1$.

Również otrzymamy wzór:

$$\int_{\nu}^z r_0(u) d\psi(u) = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} r_1(z) + \vartheta' \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{t}{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{(a'^2 + b'^2)^3}} \right],$$

gdzie $|\vartheta'| < 1$.

20. Zbadajmy obecnie sumę $\eta + z - \mu - \nu$. Na mocy wzorów artykułu 15-go otrzymamy:

$$\eta + z - \mu - \nu = \sqrt{x(a^2 + b^2)} + \sqrt{x(a'^2 + b'^2)} - (ac + b\partial) \sqrt{\frac{x}{c^2 + \partial^2}} - (a'c' + b'\partial) \sqrt{\frac{x}{c'^2 + \partial'^2}}$$

lub też:

$$\eta + z - \mu - \nu = \sqrt{x} (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2} - \sqrt{c^2 + \partial^2}).$$

Lecz:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2} - \sqrt{c^2 + \partial^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} - aa' - bb')}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2} + \sqrt{c^2 + \partial^2}} < \frac{2(\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} - aa' - bb')}{\sqrt{c^2 + \partial^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} - (aa' + bb') \\ &= \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} + aa' + bb'} \leq \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}}. \end{aligned}$$

Tożsamość zaś:

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} \sqrt{1 - \frac{1}{(a'^2+b'^2)(c^2+d^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(a'^2+b'^2)(c^2+d^2)}} \sqrt{1 - \frac{1}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}},$$

daje nam

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} < \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \right],$$

a więc:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a'^2+b'^2} - \sqrt{c^2+d^2} < \frac{2}{c^2+d^2} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \right]$$

i ponieważ z założenia

$$c^2 + d^2 > t,$$

możemy ostatecznie napisać:

$$\eta + s - \mu - \nu = 2\vartheta \frac{\sqrt{x}}{t} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \right), \text{ gdzie } |\vartheta| < 1.$$

Podstawiając to wyrażenie we wzór na $s \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right)$ z art. 18-go i zważywszy, iż $|r_0(\mu) r_0(\nu)| \leq \frac{1}{4}$, dojdziemy do następującego ważnego wzoru:

$$s \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right) = -\frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} + \left[\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} - (aa'+bb') \right] \left[x+r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}} + r_0(\varepsilon) \sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}} \right] + r_0(\eta) r_0(\varepsilon) + \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} r_1(\eta) + \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} r_1(\varepsilon) + \vartheta [R(a^2+b^2) + R(a'^2+b'^2)],$$

gdzie $|\vartheta| < 1$,

funkcja zaś $R(u)$ określa się przez równanie:

$$R(u) = \frac{5}{8} + \left(\frac{\sqrt{x}}{t} + \frac{\sqrt{t}}{12} \right) \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{x}{u^3}}.$$

PRZEKSZTAŁCENIE SYMBOLU $\sigma \left(\begin{matrix} a, b \\ a', b' \end{matrix} \right)$.

21. Według określenia z art. 14-go symbol $\sigma \left(\begin{matrix} a, b \\ a', b' \end{matrix} \right)$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m i n , czyniących zadość nierównościom:

$$m \leq \sqrt{x(a^2+b^2)}, \quad n \leq \sqrt{x(a'^2+b'^2)}, \quad m+n > \sqrt{x(c^2+d^2)},$$

gdzie

$$c = a + a' \quad \text{oraz} \quad d = b + b'.$$

Oznaczając przez skrócenie:

$$\eta = \sqrt{x(a^2+b^2)}, \quad z = \sqrt{x(a'^2+b'^2)}, \quad \xi = \sqrt{x(c^2+d^2)},$$

mieć będziemy nierówności:

$$m \leq \eta, \quad n \leq z, \quad m+n > \xi$$

i z łatwością znajdziemy:

$$\sigma \left(\begin{matrix} a, b \\ a', b' \end{matrix} \right) = \frac{1}{2} (E\eta + Ez - E\xi) (E\eta + Ez - E\xi + 1).$$

Przy pomocy funkcji okresowej $r_0(u)$, wprowadzonej w art. 16-ym, przedstawimy ten wzór w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma \left(\begin{matrix} a, b \\ a', b' \end{matrix} \right) &= \frac{1}{2} (\eta + z - \xi)^2 + (\eta + z - \xi) [r_0(\eta) + r_0(z) - r_0(\xi)] \\ &+ r_0(\eta)r_0(z) - r_0(z)r_0(\xi) - r_0(\xi)r_0(\eta) + \frac{1}{2}r_0^2(\eta) + \frac{1}{2}r_0^2(z) + \frac{1}{2}r_0^2(\xi) - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcję okresową $r_1(u)$ (art. 19) i zważywszy, iż

$$r_0^2(u) = -2r_1(u) + \frac{1}{12},$$

otrzymamy wzór:

$$\begin{aligned} \sigma \left(\begin{matrix} a, b \\ a', b' \end{matrix} \right) &= \frac{1}{2} (\eta + z - \xi)^2 + (\eta + z - \xi) [r_0(\eta) + r_0(z) - r_0(\xi)] \\ &+ r_0(\eta)r_0(z) - r_0(z)r_0(\xi) - r_0(\xi)r_0(\eta) - r_1(\eta) - r_1(z) - r_1(\xi). \end{aligned}$$

22. Twierdzenie. Niech symbol $\tau \left(\begin{smallmatrix} a, b \\ a', b' \end{smallmatrix} \right)$ będzie określony przez równanie:

$$\begin{aligned} \tau \left(\begin{smallmatrix} a, b \\ a', b' \end{smallmatrix} \right) = & -\frac{x}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{V(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} \\ & + \left[V(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) - (aa'+bb') \right] \left[x+r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}} + r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}} \right] \\ & + r_0(\eta) r_0(x) + \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} r_1(\eta) + \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} r_1(x). \end{aligned}$$

Będziemy mieli tożsamość:

$$\sigma \left(\begin{smallmatrix} a, b \\ a', b' \end{smallmatrix} \right) = \tau \left(\begin{smallmatrix} a, b \\ a', b' \end{smallmatrix} \right) - \tau \left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c, \partial \end{smallmatrix} \right) - \tau \left(\begin{smallmatrix} c, \partial \\ a', b' \end{smallmatrix} \right)$$

przy wszelkich całkowitych ≥ 0 wartościach liczb $a, b, a', b', c, \partial$, związanych warunkiem

$$aa' - ab = 1.$$

Aby dowieść tego twierdzenia, należy tylko zwrócić uwagę na tożsamości:

$$\operatorname{arc} \sin \frac{1}{V(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{V(a^2+b^2)(c^2+\partial^2)} + \operatorname{arc} \sin \frac{1}{V(a'^2+b'^2)(c^2+\partial^2)},$$

(na mocy tożsamości art. 20-go).

Następnie:

$$\begin{aligned} & V(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) - V(a^2+b^2)(c^2+\partial^2) - V(c^2+\partial^2)(a'^2+b'^2) \\ & - (aa'+bb') + (ac+b\partial) + (ca'+\partial b') = \frac{1}{2} (V(a^2+b^2) + V(a'^2+b'^2) - V(c^2+\partial^2))^2 \\ & \quad \text{(spółczynnik przy } x), \\ & V(a'^2+b'^2) - \frac{aa'+bb'}{V(a^2+b^2)} - V(c^2+\partial^2) + \frac{ac+b\partial}{V(a'^2+b'^2)} = V(a^2+b^2) + V(a'^2+b'^2) - V(c^2+\partial^2) \\ & \quad \text{(spółczynnik przy } Vx r_0(\eta)), \\ & V(a^2+b^2) - \frac{aa'+bb'}{V(a'^2+b'^2)} - V(c^2+\partial^2) + \frac{ca'+\partial b'}{V(a^2+b^2)} = V(a^2+b^2) + V(a'^2+b'^2) - V(c^2+\partial^2) \\ & \quad \text{(spółczynnik przy } Vx r_0(x)), \\ & -V(a'^2+b'^2) + \frac{ca'+\partial b'}{V(c^2+\partial^2)} - V(a^2+b^2) + \frac{ac+b\partial}{V(c^2+\partial^2)} = -V(a^2+b^2) - V(a'^2+b'^2) + V(c^2+\partial^2) \\ & \quad \text{(spółczynnik przy } Vx r_0(\xi)), \\ & \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} - \frac{ac+b\partial}{a^2+b^2} = -1; \quad \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} - \frac{ca'+\partial b'}{a'^2+b'^2} = -1 \\ & \quad \text{(spółcz. przy } r_1(\eta)) \quad \quad \text{(spółcz przy } r_1(z)) \end{aligned}$$

oraz

$$-\frac{a'c+b'\partial}{c^2+\partial^2} - \frac{ac+b\partial}{c^2+\partial^2} = -1$$

(spólcz. przy $r_1(\xi)$).

WARTOŚĆ PRZYBLIŻONA SUMY $1 + 4 \sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} E \sqrt{x-n^2}$.

23. Widzieliśmy w art. 14-ym, iż funkcja $F(x)$, przedstawiona przez sumę

$$1 + 4 \sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} E \sqrt{x-n^2},$$

może być napisana w postaci:

$$(*) \quad F(x) = (2E\sqrt{x} + 1)^2 - 4 \sum_{i=0}^{i=k} s \left(\begin{matrix} a_i & , & b_i \\ a_{i+1} & , & b_{i+1} \end{matrix} \right) - 4 \sum_{i=1}^{i=k} \sigma \left(\begin{matrix} a_i' & , & \beta_i' \\ a_i'' & , & \beta_i'' \end{matrix} \right).$$

Na mocy twierdzenia art. poprzedzającego mieć będziemy:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=k} \sigma \left(\begin{matrix} a_i' & , & \beta_i' \\ a_i'' & , & \beta_i'' \end{matrix} \right) = \sum_{i=1}^{i=k} \tau \left(\begin{matrix} a_i' & , & \beta_i' \\ a_i'' & , & \beta_i'' \end{matrix} \right) - \sum_{i=1}^{i=k} \left[\tau \left(\begin{matrix} a_i' & , & \beta_i' \\ a_i & , & \beta_i \end{matrix} \right) + \tau \left(\begin{matrix} a_i & , & \beta_i \\ a_i'' & , & \beta_i'' \end{matrix} \right) \right],$$

gdzie

$$\alpha_i = a_i' + a_i'' \quad \text{oraz} \quad \beta_i = \beta_i' + \beta_i'' \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

Zajmiemy się przekształceniem strony drugiej tego równania. W tym celu przypomnijmy sobie w jaki sposób utworzyliśmy w art. 3-im szereg Fareya

$$(2) \quad \frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}},$$

gdzie

$$a_0 = 1, b_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad a_{k+1} = 0, b_{k+1} = 1.$$

Oznaczając $\alpha_1' = 1, \beta_1' = 0$ oraz $\alpha_1'' = 0, \beta_1'' = 1$, wstawiliśmy między liczbami $\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ i $\frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$ ułamek $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, następnie wybraliśmy jedną z dwóch par ułamków

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$$

i oznaczając ją przez $\frac{a_2'}{\beta_1'}$, $\frac{a_1''}{\beta_2''}$ wstawiliśmy między temi ułamekami ułamek $\frac{a_2}{\beta_2}$ i t. d.

W ten sposób uskuteczniłmy k następujących po sobie wstawień:

- 1) pomiędzy ułamekami $\frac{a_1'}{\beta_1'}$ oraz $\frac{a_1''}{\beta_1''}$ wstawiliśmy $\frac{a_1}{\beta_1}$,
- 2) " " $\frac{a_2'}{\beta_2'}$ " $\frac{a_2''}{\beta_2''}$ " $\frac{a_2}{\beta_2}$,
- ...
- k) " " $\frac{a_k'}{\beta_k'}$ " $\frac{a_k''}{\beta_k''}$ " $\frac{a_k}{\beta_k}$.

Utwórzmy szereg:

$$(3) \quad \left(\frac{a_1'}{\beta_1'}, \frac{a_1''}{\beta_1''} \right), \left(\frac{a_2'}{\beta_2'}, \frac{a_2''}{\beta_2''} \right), \dots \left(\frac{a_k'}{\beta_k'}, \frac{a_k''}{\beta_k''} \right)$$

i rozważmy parę

$$\frac{a_v'}{\beta_v'} \text{ i } \frac{a_v''}{\beta_v''}$$

ułamków, zawartych w tym szeregu.

Pomiędzy wybranymi ułamekami wstawiliśmy, według założenia. ułamek $\frac{a_v}{\beta_v}$ i otrzymaliśmy w ten sposób dwie pary sąsiednich ułamków.

$$(4) \quad \frac{a_v'}{\beta_v'}, \frac{a_v}{\beta_v} \text{ oraz } \frac{a_v}{\beta_v}, \frac{a_v''}{\beta_v''}.$$

Jeżeli, wstawiając dalej, wstawiliśmy nowy ułamek między $\frac{a_v'}{\beta_v'}$ i $\frac{a_v}{\beta_v}$, para ta musi należeć do szeregu (3) i możemy założyć:

$$\frac{a_v'}{\beta_v'} = \frac{a_i'}{\beta_i'} \text{ oraz } \frac{a_v}{\beta_v} = \frac{a_i''}{\beta_i''}.$$

Jeżeli zaś, przeciwnie, nie wstawiliśmy między ułamekami $\frac{a_v'}{\beta_v'}$ i $\frac{a_v}{\beta_v}$ ułamku $\frac{a_v' + a_v}{\beta_v' + \beta_v}$, wówczas para $\frac{a_v'}{\beta_v'}, \frac{a_v}{\beta_v}$ nie będzie należała do szeregu (3); znajdzie się ona w szeregu Fareya i możemy w tym razie przyjąć:

$$\frac{a_v'}{\beta_v'} = \frac{a_i}{b_i}, \quad \frac{a_v}{\beta_v} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}.$$

W ten sam sposób zbadamy drugą parę ułamków (4). Ponieważ szereg Fareya (2) utworzony jest przy pomocy następujących po sobie wstawiań, przeto wszystkie $k+1$ ułamki sąsiednie

$$(5) \quad \left(\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}\right), \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right), \dots, \left(\frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$

znajdą się pomiędzy $2k$ parami ułamków:

$$(6) \quad \left(\frac{a_1'}{\beta_1'}, \frac{a_1}{\beta_1}\right), \left(\frac{a_1}{\beta_1}, \frac{a_1''}{\beta_1''}\right), \left(\frac{a_2'}{\beta_2'}, \frac{a_2}{\beta_2}\right), \left(\frac{a_2}{\beta_2}, \frac{a_2''}{\beta_2''}\right), \dots, \left(\frac{a_k'}{\beta_k'}, \frac{a_k}{\beta_k}\right), \left(\frac{a_k}{\beta_k}, \frac{a_k''}{\beta_k''}\right).$$

Wnioskujemy stąd, iż w ostatnim szeregu znajduje się $k-1$ par ułamków, nie należących do szeregu (5); na zasadzie tego, cośmy rzekli wyżej, te $k-1$ par ułamków będą należały do szeregu (3). Lecz pierwsza para ułamków szeregu (3) jest niczem innym, jak parą $\left(\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right)$, która nie należy do szeregu (6), przeto wszystkie $k-1$ par ułamków

$$(7) \quad \left(\frac{a_2'}{\beta_2'}, \frac{a_2''}{\beta_2''}\right), \left(\frac{a_3'}{\beta_3'}, \frac{a_3''}{\beta_3''}\right), \dots, \left(\frac{a_k'}{\beta_k'}, \frac{a_k''}{\beta_k''}\right)$$

szeregu (3) znajdują się wśród par szeregu (6).

A więc dowiedliśmy, iż zbiór par ułamków, należących do szeregów (5) i (7) różni się od szeregu (6) tylko porządkiem wyrazów.

Wyprowadzamy stąd następującą ważną tożsamość:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \left[\tau\left(\frac{a_i'}{\beta_i'}, \frac{\beta_i}{\beta_i}\right) + \tau\left(\frac{a_i}{\beta_i}, \frac{\beta_i''}{\beta_i''}\right) \right] = \sum_{i=2}^{i=k} \tau\left(\frac{a_i'}{\beta_i'}, \frac{\beta_i'}{\beta_i''}\right) + \sum_{i=0}^{i=k} \tau\left(\frac{a_i}{\beta_i}, \frac{b_i}{b_{i+1}}\right).$$

Podstawiając ten rezultat do wzoru (1), znajdziemy:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \sigma\left(\frac{a_i'}{\beta_i'}, \frac{\beta_i''}{\beta_i''}\right) = \tau\left(\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right) - \sum_{i=0}^{i=k} \tau\left(\frac{a_i}{\beta_i}, \frac{b_i}{b_{i+1}}\right)$$

i wzór (*) przyjmuje postać:

$$F(x) = (2EV\bar{x} + 1)^2 - 4\tau\left(\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right) - 4 \sum_{i=0}^{i=k} \left[s\left(\frac{a_i}{\beta_i}, \frac{b_i}{b_{i+1}}\right) - \tau\left(\frac{a_i}{\beta_i}, \frac{b_i}{b_{i+1}}\right) \right];$$

24. Na mocy wzoru, wyprowadzonego w art. 20-ym na funkcję s oraz określenia funkcji τ (art. 22) mieć będziemy:

$$s\left(\begin{matrix} a_i & b_i \\ a_{i+1} & b_{i+1} \end{matrix}\right) - \tau\left(\begin{matrix} a_i & b_i \\ a_{i+1} & b_{i+1} \end{matrix}\right) = \vartheta [R(a_i^2 + b_i^2) + R(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)],$$

gdzie $|\vartheta| < 1$ oraz $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Na mocy wzoru na $\tau\left(\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}\right)$ (art. 22) będzie:

$$\tau\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) = -\frac{\pi}{4} x + x + 2\sqrt{x} r_0(\sqrt{x}) + r_0^2(\sqrt{x}),$$

a więc po zredukowaniu:

$$F(x) = \pi x - 4\vartheta \sum_{i=0}^{i=k} [R(a_i^2 + b_i^2) + R(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)].$$

Zważywszy, iż $a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 = a_0^2 + b_0^2$, możemy jeszcze napisać:

$$F(x) = \pi x - 8\vartheta \sum_{i=0}^{i=k} R(a_i^2 + b_i^2), \quad \text{gdzie } |\vartheta| < 1.$$

25. Zbadajmy teraz sumę:

$$\sum_{i=0}^{i=k} R(a_i^2 + b_i^2).$$

Na mocy założenia z art. 3-go liczby całkowite dodatnie a_i i b_i ($i = 1, 2, \dots, k$) nie mają wspólnego dzielnika i czynią zadość nierówności:

$$a_i^2 + b_i^2 \leq t. \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Ponieważ funkcja $R(u)$ jest dodatnia, wnioskujemy stąd, iż suma

$$\sum_{i=1}^{i=k} R(a_i^2 + b_i^2)$$

nie przewyższa sumy podwójnej

$$\sum_{(\tau)} R(m^2 + n^2),$$

gdzie obszar sumowania (τ) jest wyznaczony przez nierówności

$$(\tau) \quad m > 0, \quad n > 0 \quad \text{oraz} \quad m^2 + n^2 \leq t.$$

Wprowadzając funkcję liczebną $\tau(n)$, oznaczającą liczbę rozkładów liczby n na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, będziemy mieli:

$$\sum_{(r)} R(m^2 + n^2) \leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{n \leq t \\ n > 1}} \tau(n) R(n)$$

skąd, zważywszy, iż $R(a_0^2 + b_0^2) = R(1)$ oraz $\tau(1) = 4$, z łatwością wnioskujemy:

$$\sum_{i=0}^{i=t} R(a_i^2 + b_i^2) \leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{n \leq t \\ n > 0}} \tau(n) R(n).$$

W ten sposób otrzymujemy na zasadzie wzoru na $F(x)$ z art. poprzedzającego:

$$F(x) = \pi x + 2\vartheta \sum_{\substack{n \leq t \\ n > 0}} \tau(n) R(n), \quad \text{gdzie } |\vartheta| < 1.$$

26. Zbadajmy obecnie sumę

$$\sum_{\substack{n \leq t \\ n > 0}} \tau(n) R(n)$$

czyli, na mocy równania na $R(u)$ z art. 20-go:

$$\frac{5}{8} \sum_{\substack{n \leq t \\ n > 0}} \tau(n) + \left(\frac{\sqrt{x}}{t} + \frac{\sqrt{x}}{12} \right) \sum_{\substack{n \leq t \\ n > 0}} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{x}}{2} \sum_{\substack{n \leq t \\ n > 0}} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}}.$$

Wystarczy dla nas określić rząd względem t każdej z tych trzech sum dla wielkich wartości t .

Co się tyczy sumy $\sum_{\substack{n \leq t \\ n > 0}} \tau(n)$, to na zasadzie oczywistej tożsamości

$$\sum_{\substack{n \leq t \\ n \geq 0}} \tau(n) = F(t),$$

oraz wzoru

$$F(t) = \pi t + r(t),$$

w którym $r(t)$ jest rzędu nie przewyższającego rzędu wielkości \sqrt{t} (patrz Wstęp), znajdziemy, iż jest ona funkcją rzędu wielkości t .

Dla obrachowania dwóch pozostałych sum użyjemy tożsamości

$$\sum_{\substack{n < t \\ n > 1}} \tau(n) f(n) = \pi \int_1^t f(u) du + r(t) f(t) - r(1) f(1) - \int_1^t r(u) f'(u) du,$$

którą z łatwością sprawdzić możemy, zastępując w ostatniej całce $r(u)$ przez $F(u) - \pi u$, rozkładając całkę

$$\int_1^t F(u) f'(u) du$$

na szereg całek

$$\int_1^2 + \int_2^3 + \dots + \int_{Et-1}^{Et} + \int_{Et}^t$$

i zważywszy, iż w granicach każdej z nich $F(u)$ pozostaje stałym.

W ten sposób znajdziemy, iż suma $\sum_{\substack{n < t \\ n > 0}} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}$ jest względem t rzędu równego rzędowi wielkości \sqrt{t} , suma zaś $\sum_{\substack{n < t \\ n > 0}} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}}$ — rzędu wielkości $\sqrt[4]{t}$.

A więc, oznaczając przez ξ wielkość skończoną dla wszelkich wartości t większych od pewnej stałej granicy, możemy napisać:

$$\sum_{\substack{n < t \\ n > 0}} \tau(n) R(n) = \xi \left(t + \sqrt{\frac{x}{t}} + \sqrt[4]{tx} \right).$$

Kładąc $t = \sqrt[3]{x}$ i przyjmując pod uwagę wzór na $F(x)$ z art. poprzedzającego, dochodzimy do następującego twierdzenia:

Funkcja πx przedstawia funkcję liczebną $F(x)$, a więc i sumę $4 \sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} \sqrt{x-n^2}$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji $\sqrt[3]{x}$.

SUR UN PROBLÈME DU CALCUL DES FONCTIONS ASYMPTOTIQUES

(RÉSUMÉ).

Nous nous proposons de calculer la valeur asymptotique de la somme

$$\sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} E \sqrt{x-n^2}$$

en désignant par $E x$ l'entier le plus grand, ne dépassant pas x . La méthode de M. Voronoï¹⁾ nous sert à ce but.

Désignons par $F(x)$ le nombre des systèmes des nombres entiers m et n vérifiant l'inégalité

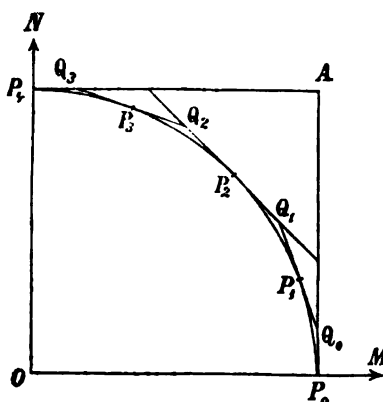
$$m^2 + n^2 \leq x \text{ où } x \geq 1.$$

Nous aurons l'égalité évidente

$$F(x) = 1 + 4 \sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} E \sqrt{x-n^2}.$$

Géométriquement $F(x)$ représente le nombre des points, ayant les coordonnées entières m et n et se trouvant à l'intérieur et sur la circonférence du cercle, défini par l'équation $m^2 + n^2 = x$.

Pour le calculer il suffit de trouver le nombre des points ayant les coordonnées entières et appartenant au triangle curviligne MAN , formé par l'arc MN du cercle et par les tangentes MA et NA , parallèles aux axes des coordonnées. Le triangle MAN nous partagerons en $2k+1$ triangles curvilignes et rectilignes par des tangentes au cercle, menées aux k points P_i choisis sur l'arc MN . Pour le choix de ces points nous sert l'algorithme suivant:



¹⁾ Voronoï. Sur un problème du calc. des fonct. asympt. Journ. f. r. und ang. Math. Bd. 126, h. 4.

Soit t un paramètre arbitraire ≥ 2 . Supposons que tous les systèmes des nombres entiers positifs a et b , vérifiant l'inégalité

$$a^2 + b^2 \leq t.$$

et n'ayant pas de diviseur commun, forment une suite des fractions

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \dots > \frac{a_k}{b_k}.$$

Les points $P_i(\mu_i, \nu_i)$ sur le cercle nous choisissons, en posant

$$\mu_i = \frac{a_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \quad \text{et} \quad \nu_i = \frac{b_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

Nous calculons ensuite les triangles obtenus. Pour chaque triangle nous exécutons un changement des variables m et n après lequel ses deux côtés sont parallèles aux axes des coordonnées. Pour calculer ces nouveaux triangles curvilignes et rectilignes nous introduisons deux symboles $s\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right)$ et $\sigma\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right)$ en les définissant comme suit:

Le symbole $s\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right)$ représente le nombre des systèmes des nombres entiers m et n vérifiant les inégalités

$$(aa' + bb') \sqrt{\frac{x}{a'^2 + b'^2}} < m \leq \sqrt{x(a^2 + b^2)},$$

$$(aa' + bb') \sqrt{\frac{x}{a^2 + b^2}} < n \leq \sqrt{x(a'^2 + b'^2)},$$

$$(mb' - nb)^2 + (-ma' + na)^2 > x,$$

où a, b, a', b' sont des nombres entiers non négatifs liés par la relation

$$ab' - a'b = 1.$$

Le symbole $\sigma\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right)$ représente le nombre des systèmes des valeurs entières des variables m et n , vérifiant les inégalités:

$$m \leq \sqrt{x(a^2 + b^2)}, \quad n \leq \sqrt{x(a'^2 + b'^2)}, \quad m + n > \sqrt{x(c^2 + \delta^2)}$$

où $c = a + a'$, $\delta = b + b'$.

Pour le symbole $s \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right)$ nous trouvons l'expression :

$$s \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right) = -\frac{x}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} \\ + \left[\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} - (aa'+bb') \right] \left[x+r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}} + r_0(z) \sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}} \right] \\ + r_0(\eta) r_0(z) + \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} r_1(\eta) + \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} r_1(z) + \vartheta [R(a^2+b^2) + R(a'^2+b'^2)],$$

où $|\vartheta| < 1$,

en désignant pour abrégé

$$\eta = \sqrt{x(a^2+b^2)}, \quad z = \sqrt{x(a'^2+b'^2)}, \quad r_0(u) = Eu - u + \frac{1}{2}, \quad r_1(u) = \int_0^u r_0(u) du - \frac{1}{12},$$

$$R(u) = \frac{5}{8} + \left(\frac{\sqrt{t}}{t} + \frac{\sqrt{t}}{12} \right) \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{x}{u^3}}.$$

Pour le symbole $\sigma \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right)$ nous trouvons la formule:

$$\sigma \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right) = \frac{1}{2} (\eta + z - \xi)^2 + (\eta + z - \xi) [r_0(\eta) + r_0(z) - r_0(\xi)] \\ + r_0(\eta) r_0(z) - r_0(z) r_0(\xi) - r_0(\xi) r_0(\eta) - r_1(\eta) - r_1(z) - r_1(\xi)$$

où $\xi = \sqrt{x(c^2+d^2)}$.

Cette expression nous permet de démontrer l'égalité:

$$\sigma \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right) = \tau \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right) - \tau \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right) - \tau \left(\frac{c}{a'}, \frac{d}{b'} \right)$$

où

$$\tau \left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \right) = -\frac{x}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} \\ + \left[\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} - (aa'+bb') \right] \left[x+r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}} + r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}} \right] \\ + r_0(\eta) r_0(z) + \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} r_1(\eta) + \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} r_1(z).$$

A l'aide des symboles introduits nous représentons le nombre des systèmes des nombres entiers m et n , vérifiant les inégalités :

$$0 < m \leq \sqrt{x}, \quad 0 < n \leq \sqrt{x}, \quad m^2 + n^2 > x,$$

c'est à dire le nombre des points du triangle MAN , sous la forme

$$\tau \left(\begin{matrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{matrix} \right) - \sum_{i=0}^{i=k} \left[s \left(\begin{matrix} a_i, b_i \\ a_{i+1}, b_{i+1} \end{matrix} \right) - \tau \left(\begin{matrix} a_i, b_i \\ a_{i+1}, b_{i+1} \end{matrix} \right) \right]$$

ce qui donne :

$$F(x) = \pi x - 4 \mathfrak{S} \sum_{i=0}^{i=k} [R(a_i^2 + b_i^2) + R(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)], \quad \text{où } |\mathfrak{S}| < 1.$$

En posant le paramètre t , qui entre dans l'expression $R(u)$, et qui restait arbitraire jusqu'ici, égal à $\sqrt[3]{x}$, nous trouvons :

$$F(x) = \pi x + O(\sqrt[3]{x}).$$

Ainsi, en appliquant la méthode de M. Voronoï nous avons démontré le théorème suivant :

„La fonction πx représente la fonction numérique $F(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $\sqrt[3]{x}$ “.

G. A. MILLER,

GROUPS GENERATED BY TWO OPERATORS WHICH
TRANSFORM EACH OTHER INTO THE SAME POWER.

(O GRUPACH UTWORZONYCH PRZEZ DWA OPERATORY PRZEKSZTAŁ-
CAJĄCE SIĘ WZAJEMNIE NA TĘ SAMĄ POTĘGĘ).

~~~~~

If a group is generated by a single operator it is cyclic and its properties are comparatively elementary, but the groups generated by two operators include an infinite number of different types and their structures are so different that very little has been done towards a useful classification. When the orders of the two generators and that of their product are represented by  $l, m, n$  respectively, the group is completely determined by these numbers provided two of them are equal to 2; or one is 2, the other 3 while the third is one of the three numbers 3, 4, 5<sup>1)</sup>. Several other special cases have been discussed quite recently<sup>2)</sup>. The present article is devoted to the special case noted in the heading, which presents several results of unusual interest.

Let  $t_1, t_2$  be any two operators such that

$$t_1^{-1} t_2 t_1 = t_2^a \quad \text{and} \quad t_2^{-1} t_1 t_2 = t_1^a.$$

From these conditions it follows that the commutator of these operators  $t_1^{-1} t_2^{-1} t_1 t_2 = t_1^{a-1} = t_2^{1-a}$ , is commutative with  $t_1, t_2$  and hence the commutator subgroup of the group  $(G)$ , generated by  $t_1, t_2$  is composed of invariant operators under  $G$ . The number of the operators generated by  $t_1$ , which are invariant under  $t_2$  divides  $a-1$ . Since the order of the quotient group of the group generated by  $t_1$  with respect to these invariant operators

---

<sup>1)</sup> American Journal of Mathematics, vol. 24 (1902), p. 96; American Mathematical Monthly, vol. 11 (1904), p. 184. It should be observed that the conditions  $a^2=1, b^2=1, ba=a^2b^2$ ; Netto. Journal für reine und angewandte Mathematik, vol. 128 (1904), p. 255, are equivalent to  $l=3, m=3, n=2$ . Several other groups discussed by Netto in this article are well known but the author fails to give any references.

<sup>2)</sup> Archiv der Mathematik und Physik, vol. 9 (1905), p. 6; Netto, loc. cit.

must also divide  $\alpha - 1$  <sup>1)</sup> it follows that  $(\alpha - 1)^2$  is a multiple of the orders of  $t_1, t_2$ . In particular, two distinct operators cannot transform each other into their squares. In fact, if two operators transform each other into their squares each of these operators is the identity. In what follows it will be assumed that  $t_1, t_2$  are distinct and that neither of them is the identity.

When  $\alpha = 3$ , the orders of  $t_1, t_2$  must divide 4. When one of these operators is of order two, it must be commutative with the other and hence each one is of order two. In this case  $G$  is clearly the well known four group. In the other possible case each of the operators  $t_1, t_2$  is of order 4. If  $t_1^2 = t_2^{-2} = t_2^2$  it follows that  $G$  is the quaternion group. In other words, the quaternion group is the only non-abelian group which is generated by two operators which transform each other into their third powers. From the same considerations it follows that the quaternion group is the only non-abelian group which is generated by two operators which transform each other into their inverses. These two definitions of the quaternion group are of especial interest in view of the fact of the prominent place which this group occupies in mathematical literature. The results may also be stated as follows. If two distinct operators transform each other either into their inverses or into their third powers, they generate the four group if they are commutative, but if they are not commutative they must always generate the quaternion group.

The results of the preceding paragraph can be extended directly to the general case in which  $\alpha - 1$  is an prime number. Let  $p$  represent this prime number. Since the orders of  $t_1, t_2$  divide  $p^2$  and since it is impossible that one of these orders is  $p$  when the other is  $p^2$ , it follows that  $G$  is either the abelian group of order  $p^2$  and of type  $(1, 1)$  or it is of order  $p^3$  and conformal with the abelian group of type  $(2, 1)$  whenever  $p > 2$  <sup>2)</sup>. The case when  $p = 2$  was considered above. Although this group is well known it seems desirable to exhibit some of its properties which are especially useful in what follows.

It is clear that this  $G$  contains operators of order  $p^2$  which transform  $t_2$  into any arbitrary power  $\beta \equiv 1 \pmod{p}$ . Let  $s$ , be such an operator; that is, let  $s_1^{-1} t_2 s_1 = t_2^\beta = t_2^{\beta-1} t_2$ . Hence  $s^{-1} t_2^\gamma s = t_2^{\gamma(\beta-1)} t_2^\gamma$ , or  $t_2^{-\gamma} s_1 t_2^\gamma = t_2^{\gamma(1-\beta)} s_1$ . That is,  $\gamma$  can be so chosen that  $t_2^{\gamma(1-\beta)} s_1$  is any

<sup>1)</sup> Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 6 (1900) p. 337.

<sup>2)</sup> As such a group is known to exist the existence proof is omitted, Cf. Burnside, Theory of groups of finite order. 1897, p. 75.

power  $\delta \equiv 1 \pmod{p}$  of  $s_1$ . In other words,  $G$  contains two operators of order  $p^2$  which transform each other into any arbitrary powers  $\beta, \delta$  which are congruent to unity modulo  $p$ . In particular, these powers may have the values  $\beta = \delta = p + 1$ . Moreover,  $G$  is completely defined by the fact that it is generated by two non-commutative operators which transform each other into the  $p + 1$  powers, as was observed above. The numbers  $\beta, \delta$  define a non-abelian group only when each of them is equal to  $p + 1$ . In all other cases there is more than one non-abelian group which is generated by two operators which transform each other into their  $\beta, \delta$  powers respectively. The same remark applies clearly to abelian groups generated by two such operators.

When  $\alpha - 1 = p^m$ , where  $p$  is a prime, the orders of  $t_1, t_2$  must divide  $p^{2m}$  and hence  $G$  is of order  $p^m$ . If the order of  $t_1$  exceeds  $p^m$  the order of  $t_2$  must also exceed  $p^m$ . In fact,  $t_1, t_2$  are necessarily of the same order whenever they are non-commutative and  $\alpha - 1 = p^m$ . This interesting fact results directly from the fact that

$$t_1^{-1} t_2^{-1} t_1 t_2 = t_1^{\alpha-1} = t_2^{1-\alpha} \neq 1^1).$$

When  $t_1, t_2$  are commutative they may have different orders. In this case these orders are arbitrary divisors of  $p^m$ .

When the order of  $t_1, t_2$  is  $p^{m+1}$  and  $G$  is of order  $p^{m+2}$ ,  $G$  is conformal with the abelian group of type  $(m + 1, 1)$  except when  $m = 1$  and  $p = 2$ , as noted above. This  $G$  contains pairs of operators of order  $p^m$  which transform each other into any arbitrary powers  $\beta, \delta$  which are congruent to unity modulo  $p^m$ , and it is generated by any such pair provided the operators are non-commutative. It is completely defined by the facts that it is generated by two non-commutative operators which transform each other into their  $p^m + 1$  power and that its order does not exceed  $p^{m+2}$ . The number of the distinct groups which are generated by two operators of order  $p^{m+1}$  which transform each other into their  $p^m + 1$  power is  $m$  and the orders of these groups are respectively  $p^{m+2}, p^{m+3}, \dots, p^{2m+1}$ . The group of cogredient isomorphisms of each one of these groups is of order  $p^2$ , and all of these group with the single exception mentioned above are conformal with abelian groups generated by two operators.

When the order of  $t_1, t_2$  is  $p^{m+2}$ ,  $m > 1$ , the order of  $G$  may have any one of the following  $m-1$  values:  $p^{m+4}, p^{m+5}, \dots, p^{2m+2}$ . There is

<sup>1)</sup> From these relations it follows that if two non-commutative operators, whose orders are powers of the same prime, transform each other into their  $\beta, \delta$  powers respectively, these operators must be of the same order whenever  $\beta - 1, \delta - 1$  are divisible by the same highest power of this prime.

only one  $G$  of each of these orders and the group of cogredient isomorphisms of all of these  $G_s$  is of order  $p^4$ . Moreover, all of these groups are conformal with abelian groups generated by two operators <sup>1)</sup>. Continuing this process it is easy to see that  $t_1, t_2$  may generate any one of  $1 + 2 + \dots + m - 1 + m$  non-abelian groups and that all of these groups are conformal with abelian groups having just two generators, except when  $p = 2$  and  $m = 1$ . All of them contain two operators of highest order which transform each other into their  $\beta, \delta$  powers, where  $\beta, \delta$  are arbitrary numbers satisfying the condition that they are congruent to unity modulo  $p^m$ .

The preceding considerations can readily be applied to the case when  $a - 1$  is not some power of a prime. From the fact that the commutators of  $G$  are invariant it follows that  $G$  is the direct product of its Sylow subgroups. Hence the number of the distinct  $G_s$  is equal to the product of the numbers of distinct Sylow subgroups. Since these Sylow subgroups are conformal with abelian groups except when one is the quaternion group, it follows that  $G$  is always conformal with an abelian group except when its Sylow subgroup whose order is a power of 2 is the quaternion group. In this case  $G$  is the direct product of the quaternion group and a group which is conformal with an abelian group.

When  $a - 1 = 2^{m_0} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_\lambda^{m_\lambda}$  these are just

$$1 \cdot 2^{a+1} m_0 m_1 m_2 \dots m_\lambda (m_0 + 1) (m_1 + 1) (m_2 + 1) \dots (m_\lambda + 1)$$

groups which are generated by two operators transforming each other into their  $a$  power and which involve only non-abelian Sylow subgroups. In all of these groups the operators which transform each other into their  $a$  power are of the same order. There is one and only one such group of order  $2^{m_0+2} p_1^{m_1+2} \dots p_\lambda^{m_\lambda+2}$  and the order of each of the others is divisible by this number.

The necessary and sufficient condition that a Sylow subgroup of order  $p_\beta^\gamma$ , contained in a group which is generated by two operators which transform each other into their  $a$  power, be abelian is that  $\gamma < m_\beta + 1$  the order of each of its two generators be less than  $p_\beta^{m_\beta+1}$ . The number of such groups which have one or more than one abelian Sylow subgroups can readily be obtained from the number of those in which the Sylow subgroups are non-abelian, since an abelian Sylow subgroup has not to satisfy any condition except that it has only two generators and that the order of each of these divides  $p^m$ .

<sup>1)</sup> Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 7 (1901), p. 351.



A. PRZEBORSKI

## O CAŁKACH NIEANALITYCZNYCH

### równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.



Jednym z najważniejszych i najtrudniejszych pytań Analizy jest pytanie o charakterze całek równań różniczkowych. Znane jest twierdzenie C a u c h y'ego, że wszelkie równanie różniczkowe

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

gdzie  $F$  jest funkcją analityczną argumentów w pewnym obszarze ( $\epsilon$ ), ma w tym obszarze tylko całki analityczne. Także wszelki układ równań różniczkowych jednoczesnych

$$\frac{dy_1}{dx} = \omega_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \frac{dy_2}{dx} = \omega_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \dots \frac{dy_n}{dx} = \omega_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

gdzie  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  są funkcje analityczne w pewnym obszarze ( $\epsilon$ ), ma zawsze w tym obszarze tylko całki analityczne. Inaczej rzecz się ma z równaniami o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

W artykule niniejszym zastanawiam się wyłącznie nad jednym równaniem różniczkowym liniowym o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$(1) \quad A_0(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_0} + A_1(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \dots \\ + A_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = A_n(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

gdzie  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  są funkcje analityczne w pewnym obszarze ( $\epsilon$ ), przyczem zakładamy, że dla punktów tego obszaru funkcja  $A_0(x_0, x_1, \dots, x_n)$  nie jest równa zeru.

Znane jest twierdzenie Z. K o w a l e w s k i e j o istnieniu całek tego równania, analitycznych w obszarze  $(\epsilon)$ .

Zbadajmy, czy nie można znaleźć całki równania (1) nieanalitycznej w tym obszarze?

Całkę ogólną równania (1) znajdziemy, całkując układ równań zwyczajnych

$$\frac{dx_1}{dx_0} = \frac{A_1(x_0, x_1, \dots, x_n)}{A_0(x_0, x_1, \dots, x_n)}, \quad \frac{dx_2}{dx_0} = \frac{A_2(x_0, x_1, \dots, x_n)}{A_0(x_0, x_1, \dots, x_n)} \dots \frac{dx_n}{dx_0} = \frac{A_n(x_0, x_1, \dots, x_n)}{A_0(x_0, x_1, \dots, x_n)}.$$

Równania te posiadają zawsze układ całek

$$L_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = c_1, \quad L_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = c_2 \dots L_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = c_n,$$

gdzie  $c_1, c_2 \dots c_n$  są stałe dowolne,  $L_1, L_2, \dots, L_n$  — funkcje analityczne w obszarze  $(\epsilon_1)$ , zawartym w  $(\epsilon)$ , czyniące zadość warunkowi, że jacobian

$$(2) \quad D = \frac{\partial(L_1, L_2, L_3 \dots L_n)}{\partial(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)}$$

w tym obszarze nie jest zerem.

Jeżeli przez  $\omega(L_2, L_3, \dots, L_n)$  oznaczymy funkcję dowolną ciągłą, mającą pochodne cząstkowe rzędu pierwszego względem  $L_2, L_3 \dots L_n$ , to równanie

$$(3) \quad I_1 - \omega(L_2, L_3, \dots, L_n) = 0$$

będzie całką ogólną równania (1) pod warunkiem, że funkcja  $\omega$  jest wybrana tak, że

$$(4) \quad \frac{\partial L_1}{\partial x_n} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial \omega}{\partial L_k} \frac{\partial L_k}{\partial x_n} \neq 0$$

w obszarze  $(\epsilon)$ .

Rozwiązując równanie (3) względem  $x_n$ , znajdziemy całkę równania (1) w postaci:

$$(5) \quad x_n = P(x_0, x_1 \dots x_{n-1}).$$

Postaramy się dowieść, że jeżeli  $\omega$  nie jest funkcją analityczną, to całka (5) będzie też nieanalityczną całką równania (1).

Założmy więc, że funkcja  $P$  jest funkcją analityczną w obszarze  $(\epsilon_1)$ , zawartym w  $(\epsilon)$ .

Oznaczmy przez  $\lambda_k(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  funkcje analityczne w obszarze  $(\varepsilon_1)$ , które otrzymamy podstawiając w funkcje  $L_k$  zamiast  $x_n$  jego wartość (5), t.j.

$$(6) \quad \lambda_k(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv L_k(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Podstawiając w równanie (3) zamiast  $x_n$  jego wartość (5) i mając na uwadze, że wyrażenie (5) jest rozwiązaniem równania (3), otrzymamy t o z s a m o ś ć:

$$(7) \quad \lambda_1(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - \omega(\lambda_2(x_0, \dots, x_{n-1}), \lambda_3(x_0, \dots, x_{n-1}) \dots \lambda_n(x_0, \dots, x_{n-1})) \equiv 0.$$

Nietrudno dowieść, że z układu równań

$$(8) \quad \lambda_2(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \lambda_2, \lambda_3(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \lambda_3, \dots, \lambda_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \lambda_n$$

można wyznaczyć  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  jako funkcje analityczne względem  $x_0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .

Istotnie, by tego dowieść, dość jest pokazać, że jacobian

$$\Delta = \frac{\partial(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}$$

nie jest zerem w obszarze  $(\varepsilon_1)$ .

Na mocy wzoru (6) otrzymujemy:

$$(9) \quad \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial L_k}{\partial x_i} + \frac{\partial L_k}{\partial x_n} \frac{\partial P}{\partial x_i};$$

( $k = 1, 2, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Prócz tego na podstawie wzoru (3) mamy:

$$(10) \quad \frac{\partial L_1}{\partial x_i} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial \omega}{\partial L_k} \frac{\partial L_k}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L_1}{\partial x_n} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial \omega}{\partial L_k} \frac{\partial L_k}{\partial x_n} \right) \equiv 0.$$

Przyjmując pod uwagę warunek (4) i podstawiając w wyrażenie na  $\Delta$  zamiast  $\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i}$  i  $\frac{\partial P}{\partial x_i}$  ich wartości, wyznaczone z (9) i (10), znajdziemy, że

$$\Delta = \frac{(-1)^{n+1} D}{\frac{\partial L_1}{\partial x_n} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial \omega}{\partial L_k} \frac{\partial L_k}{\partial x_n}},$$

gdzie  $D$  jest jacobianem (2), nierównym zeru w obszarze  $(\varepsilon)$ .

W ten sposób dowiedliśmy, że wyznaczone z układu (8) funkcje  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  są funkcjami analitycznymi argumentów  $x_0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .

Podstawiając wartość na  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  w tożsamości (7), otrzymamy tożsamość:

$$(11) \quad \lambda_1^*(x_0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \equiv \omega(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n),$$

gdzie przez  $\lambda_1^*(x_0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  oznaczyliśmy funkcję analityczną, którą otrzymamy, rugując z funkcji  $\lambda_1$  za pomocą równań (8) wielkości  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , tak, że

$$\lambda_1^*(x_0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \equiv \lambda_1(x_0, x_1(x_0, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \dots, x_n(x_0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)).$$

Teraz okażemy, że funkcja  $\lambda_1^*$  nie zależy od  $x_0$ . W tym celu wystarczy dowieść, że funkcje  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  są zależne.

W rzeczy samej, wyrażenie

$$\left( \frac{\partial L_1}{\partial x_n} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial \omega}{\partial L_k} \frac{\partial L_k}{\partial x_n} \right) \Delta_1,$$

gdzie:

$$\Delta_1 = \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)}{\partial(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}$$

na mocy związków (9) i (10) wyraża się jako suma algebraiczna wyznaczników, tożsamościowo równych zeru, mianowicie wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x_0} & \frac{\partial L_1}{\partial x_0} & \frac{\partial L_2}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial L_n}{\partial x_0} \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \frac{\partial L_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial L_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \frac{\partial L_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial L_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

i wyznaczników:

$$\frac{\partial \omega}{\partial L_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_k}{\partial x_0} & \frac{\partial L_1}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x_0} & \frac{\partial L_k}{\partial x_0} & \frac{\partial L_{k+1}}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial L_n}{\partial x_0} \\ \frac{\partial L_k}{\partial x_1} & \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial L_k}{\partial x_1} & \frac{\partial L_{k+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial L_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial L_k}{\partial x_n} & \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial L_k}{\partial x_n} & \frac{\partial L_{k+1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial L_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

( $k = 2, 3, \dots, n$ )

Wnioskujemy stąd, że funkcja  $\lambda_1^*$  nie zależy od  $x_0$ , a więc tożsamość (11) może być napisana w postaci:

$$\omega(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \equiv \lambda_1^*(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n),$$

a że funkcja  $\lambda_1^*$  jest funkcją analityczną, więc i funkcja  $\omega$ , równa jej tożsamościowo, jest funkcją analityczną.

W ten sposób założenie, że całka

$$x_n = P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

równania (1), wyznaczona z równania (3), jest funkcją analityczną, doprowadza nas do koniecznego wniosku, że funkcja  $\omega$  musi być analityczną.

A więc, jeżeli w całce ogólnej (3) założymy, że funkcja  $\omega$  nie jest analityczną, to rozwiązując równanie (3) względem  $x_n$ , otrzymamy całkę nieanalityczną naszego równania (1).

W ten sposób dowiedliśmy następującego twierdzenia:

Wszelkie równanie różniczkowe liniowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, którego współczynniki są funkcjami analitycznymi w pewnym obszarze  $(\varepsilon)$ , oprócz całek analitycznych, ma zawsze całki nieanalityczne w obszarze  $(\varepsilon_1)$ , zawartym w  $(\varepsilon)$ .

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

G. DOBORZYŃSKI,

## HYPOTEZA van der WAALSA O STANACH ODPOWIEDNICH.

### ROZDZIAŁ I.

#### UWAGI OGÓLNE O HYPOTEZIE van der WAALSA.

1. Hypoteza gra doniosłą rolę w nauce: stara się ona znaleźć cechy wspólne w różnych napozór zjawiskach i poddać je prawom ogólnym. Tem się różni od pewnika, że nie zasadza się na dostatecznym materiale doświadczalnym, aby niezbitcie mogła być dowiedziona. Sprawdzenie hipotezy jest oceną jej wartości. Nawet błędne hipotezy mogą być ważne, gdyż wskazują drogę doświadczeniom; na gruzach błędnej hipotezy powstaje inna, doskonalsza. Tym sposobem tworzenie hipotez posuwa wiedzę naprzód, a empiryczne ich sprawdzanie jest niezbędnym etapem w rozwoju nauki.

Hypoteza van der Waals'a jest ważna z powodu swego syntetycznego charakteru: wskazuje analogiczne własności fizyczne chemicznie różnych ciał. Twierdzi ona, że pod względem zależności ciśnień, temperatur i objętości wszystkie ciała zachowują się jednako, jeśli przyjmujemy jednostki miary tych wielkości dla każdego ciała odmienne, równe ciśnieniu, temperaturze i objętości krytycznym. Wielkości te, w powyższy sposób mierzone, noszą nazwę ciśnień, temperatur i objętości zredukowanych. Równanie charakterystyczne, dające w analitycznej postaci zależność ich wzajemną, zwie się również zredukowanym. Hypoteza więc daje się streścić w tych słowach: równanie charakterystyczne zredukowane wszystkich ciał jest jednakie.

Van der Waals ogłosił swą hipotezę w r. 1880. Wyprowadził ją z wynalezionego przez siebie równania charakterystycznego płynów. Równanie to lepiej niż równanie Mariotte-Gay-Lussaca odpowiada

rzeczywistości, nie jest jednak ściśle odzwierciedleniem istotnej zależności między ciśnieniem  $p$ , objętością  $v$  i temperaturą  $T^1$ ). Ma postać następującą:

$$(1) \quad \left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT.$$

Równanie (1) zawiera trzy stałe (parametry):  $a$ ,  $b$  i  $R$ , dla każdego ciała różne. Jest 3-go stopnia względem zmiennej  $v$ :

$$(1^*) \quad v^3 - \left( b + \frac{RT}{p} \right) v^2 + \frac{a}{p} \cdot v - \frac{ab}{p} = 0.$$

Na izotermach, niższych od krytycznej, w istocie pewnym ciśnieniom odpowiadają trzy objętości. Na izotermie krytycznej te trzy wartości zlewają się w jedną w punkcie krytycznym, dla którego równanie (1\*) daje trzy jednakowe pierwiastki  $v$ . Izotermy wyższe od krytycznej dają na całej rozciągłości jedną wartość  $v$  dla każdego  $p$ .

Van der Waals w ten sposób doprowadził swe równanie do kształtu zredukowanego, że wyraził parametry  $a$ ,  $b$  i  $R$  przez elementy punktu krytycznego:  $p_k$ ,  $v_k$  i  $T_k$ ; wówczas równanie (1) zawiera tylko stosunki  $\frac{v}{v_k}$ ,  $\frac{p}{p_k}$  i  $\frac{T}{T_k}$ . Spółrzędne punktu krytycznego dają się obliczyć za pomocą wprowadzenia warunkowych równań, charakteryzujących jego cechy, mianowicie: że jest on punktem przegięcia izoterm, w którym styczna jest równoległa do osi odciętych; równania te są:  $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$  i  $\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$ . Istnieje droga prostsza do tego samego celu, którą wybrał van der Waals. Oparł się on na tej własności punktu krytycznego, że w nim wszystkie trzy pierwiastki  $v$  równania (1\*) muszą być równe. Mamy w naszym przypadku, według znanego twierdzenia:

$$(2) \quad v^3 - \left( b + \frac{RT_k}{p_k} \right) v^2 + \frac{a}{p_k} \cdot v - \frac{ab}{p_k} = (v - v_k)^3,$$

a zatem:

$$(3) \quad 3v_k = b + \frac{RT_k}{p_k}, \quad (4) \quad 3v_k^2 = \frac{a}{p_k} \quad \text{i} \quad (5) \quad v_k^3 = \frac{ab}{p_k},$$

t. j.:

$$(6) \quad v_k = 3b, \quad (7) \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad (8) \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

<sup>1)</sup> Przez  $v$  rozumiemy objętość właściwą, t. j. objętość jednostki masy,  $T$  oznacza temperaturę bezwzględną.



Na mocy tych równań  $b$ ,  $a$  i  $R$  dadzą się wyrazić przez:  $p_k$ ,  $v_k$  i  $T_k$ .  
Równanie (6) daje:

$$(6^*) \quad b = \frac{v_k}{3}.$$

Równanie (7) wobec (6\*) określa  $a$ :

$$(7^*) \quad a = 3 p_k v_k^2.$$

Nakoniec równanie (8), gdy zużytkujemy (6\*) i (7\*), daje:

$$(8^*) \quad R = \frac{8 p_k v_k}{3 T_k}.$$

Jeżeli znalezione wyrażenia na  $a$ ,  $b$  i  $R$  podstawimy do równania (1), otrzymamy:

$$(9) \quad \left[ \frac{p}{p_k} + 3 \left( \frac{v_k}{v} \right)^2 \right] \left( \frac{v}{v_k} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{T}{T_k}.$$

Rolę właściwych dla każdego ciała parametrów odgrywają tu elementy krytyczne:  $p_k$ ,  $v_k$  i  $T_k$ . Przytem równanie (9) zawiera tylko stosunki:  $\frac{v}{v_k}$ ,  $\frac{p}{p_k}$  i  $\frac{T}{T_k}$ ; dochodzimy zatem do hipotezy van der Waalsa. Jeżeli za jednostki ciśnienia objętości i temperatur przyjmiemy  $p_k$ ,  $v_k$  i  $T_k$ , a nowe zmienne t. zw. „zredukowane” oznaczymy przez  $\pi$ ,  $\gamma$  i  $\mathfrak{D}$ , tak, że:

$$(10) \quad \pi = \frac{p}{p_k}, \quad \gamma = \frac{v}{v_k}, \quad \mathfrak{D} = \frac{T}{T_k},$$

tedy z równania (9) znikną parametry specyficzne każdego ciała, nowe zaś równanie:

$$(11) \quad \left( \pi + \frac{3}{\gamma^2} \right) \left( \gamma - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \mathfrak{D},$$

będzie się stosowało do wszystkich ciał bez różnicy.

2. Nie należy mniemać, ażeby hipoteza van der Waalsa była nierozłącznie związana z jego równaniem. Byłoby to dla niej okolicznością zgubną, gdyż samo równanie nie odpowiada zjawiskom rzeczywistości; ilustruje to porównanie izotermy krytycznej według równania van der Waalsa z izotermą krytyczną, otrzymaną z doświadczeń (Fig. 1).

Figurę tę podaje Daniel Berthelot<sup>1)</sup>. Izoterma krytyczna przedstawiona jest na niej w zmiennych zredukowanych, lecz nie na zwykłym diagramacie  $(\pi, \gamma)$ , a na diagramacie ściśliwości  $(\pi\gamma, \pi)$ ; linia ciągła oznacza rezultaty doświadczeń, linia przerywana rezultaty obliczeń według równania (11). Wprowadzenie zmiennych zredukowanych jest niezależne od równania van der Waals'a, w ogóle od kształtu równania charakterystycznego, natomiast zależy od liczby parametrów tego równania.

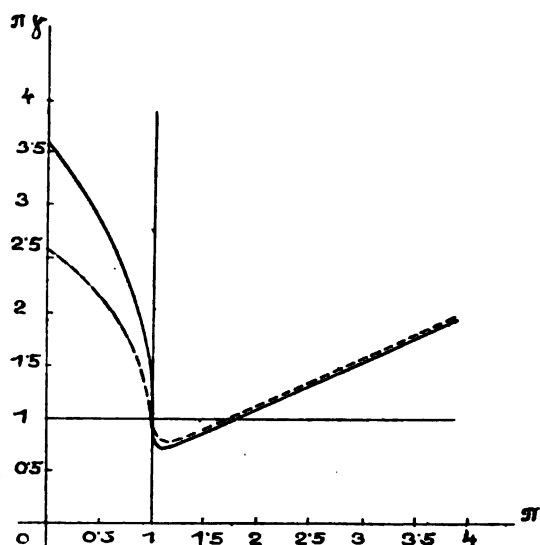


Fig. 1.

Dopiero w 13 lat po ogłoszeniu hipotezy van der Waals'a dowiódł<sup>2)</sup> G. Meslin, że redukcja równania charakterystycznego jest możliwa, o ile zawiera ono tyleż parametrów ile zmiennych, więc trzy. Wówczas możliwe jest zastąpienie tych parametrów przez pewne wartości zmiennych, określone za pomocą dwu dodatkowych równań warunkowych. Nowe równanie w ten sposób zmienione zawierać będzie tylko stosunki zmiennych do owych szczególnych wartości. Jeżeli zatem wprowadzimy zamiast zmiennych pierwotnych te stosunki, wszelkie parametry, mające dla ciał

<sup>1)</sup> Quelques remarques sur l'équation caractéristique des fluides. 1900. Livre jubilaire à H. A. Lorentz. Fig. 1.

<sup>2)</sup> „Sur l'équation de van der Waals et la démonstration du théorème des états correspondants“. Comptes Rendus. 1893, tom 116, str. 135 i 136.

różnych różne wartości, znikną z równania; będzie więc ono wyrażało zależność owych stosunków, będzie równaniem charakterystycznym zredukowanym.

W istocie, biorąc pod uwagę jakiegokolwiek równanie charakterystyczne o trzech parametrach:  $l$ ,  $m$  i  $n$ :

$$(12) \quad f(p, v, T, l, m, n) = 0$$

i wprowadzając dodatkowe równania, określające punkt krytyczny:

$$(13) \quad \frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad \text{i} \quad (14) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0,$$

znajdziemy z tego układu trzech równań, jeżeli go rozwiążemy względem parametrów:  $l$ ,  $m$  i  $n$ , trzy wzory:

$$(15) \quad \begin{cases} l = \varphi_1(p_k, v_k, T_k), \\ m = \varphi_2(p_k, v_k, T_k), \\ n = \varphi_3(p_k, v_k, T_k). \end{cases}$$

Podstawiając te wartości do równania (12), nadamy mu kształt:

$$(16) \quad F_0(p, v, T, p_k, v_k, T_k) = 0.$$

Równanie (16) zawierać będzie tylko stosunki:  $\frac{p}{p_k}$ ,  $\frac{v}{v_k}$  i  $\frac{T}{T_k}$ . W przeciwnym razie, gdybyśmy zwiększyli  $s$  razy jednostkę miary jednej ze zmiennych, do równania (16) wszedłby zmienny parametr  $s$ , co jest przeciwne założeniu, że zarówno w równaniu (12), jak w równaniu (16), prócz 6-ciu wyszczególnionych w nich wielkości zmiennych i parametrów wchodzić mogą wielkości tylko bezwzględnie stałe. Zatem równanie (16) może być przedstawione w innej postaci:

$$(17) \quad F\left(\frac{p}{p_k}, \frac{v}{v_k}, \frac{T}{T_k}\right) = 0.$$

Wprowadzając zmienne zredukowane według (10), otrzymamy równanie charakterystyczne zredukowane:

$$(18) \quad F(\pi, \gamma, \vartheta) = 0.$$

Hypoteza van der Waalsa nie jest więc związana z równaniem (1) i upadek tegoż nie może służyć za argument przeciw samej hipotezie. Oczywiście nie tylko taki kształt, jaki podają równania (13) i (14), muszą

mieć równania warunkowe: punkt krytyczny nie może być uważany za jedyne źródło jednostek miar zmiennych:  $p$ ,  $v$  i  $T$ , redukujących równanie charakterystyczne do postaci (18).

Władysław N a t a n s o n już w roku 1889 podniósł<sup>1)</sup> fakt, że redukować równanie charakterystyczne mogą nietylko współrzędne punktu krytycznego, ale i każdego innego punktu na diagramacie  $(p, v)$ , byleby był określony bądź przez specjalne równania warunkowe, bądź przez stosunek do innego punktu wyróżniającego się, np. punktu krytycznego. G. M e s l i n w roku 1893 podał kilka przykładów punktów, określonych przez własności analityczne. Punktem takim będzie punkt przegięcia izotermy, mającej w nim styczną, nachyloną pod kątem  $45^\circ$  lub punkt na takiej izotermy, której styczna w punkcie przegięcia będzie równoległa do pewnego danego kierunku, mający nadto styczną, zawierającą z powyższą styczną pewien dany kąt. Daniel Berthelot w r. 1903 wskazał<sup>2)</sup> cztery punkty, wyróżniające się swymi własnościami fizycznymi, które równie dobrze, jak krytyczny mogą służyć za źródło jednostek, redukujących równanie charakterystyczne.

3. P. C u r i e otrzymuje<sup>3)</sup> równanie zredukowane drogą odmienną, mianowicie wychodzi z ogólnej zasady jednorodności równań między wielkościami fizycznymi. Posiłkuje się jednak przy swych wywodach równaniem van der W a a l s a i to stanowi ich niższość od wywodów M e s l i n a. Rozumuje w następujący sposób. Ponieważ równanie van der W a a l s a musi być jednorodne, możemy określić wymiar każdego z parametrów.

Rozwiążmy w tym celu równanie (1) względem  $p$ :

$$(1^{**}) \quad p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}.$$

W równaniu (1<sup>\*\*</sup>) wyrazy mają wymiar jednakowy, zatem:  $a$  ma wymiary  $pv^2$ ,  $b$  ma wymiary  $v$ ,  $R$  ma wymiar  $\frac{pv}{T}$ . Zamiast więc parametrów  $a$ ,  $b$  i  $R$  można wprowadzić do równania (1) nowe parametry  $p_0$ ,  $v_0$  i  $T_0$ , któreby miały wymiary  $p$ ,  $v$ ,  $T$ . Wystarczy w tym celu założyć:

$$(19) \quad b = Bv_0, \quad a = Ap_0v_0^2, \quad R = C \frac{p_0v_0}{T_0}.$$

<sup>1)</sup> Comptes Rendus 1889. 9. XII— „Sur les températures, les pressions et les volumes caractéristiques“ i „Wstęp do fizyki teoretycznej“ 1890, str. 304—309.

<sup>2)</sup> „Sur la notion des états correspondants et sur divers points correspondants remarquables“. Bulletin des séances de la Société française de physique 1903, str. 36—52.

<sup>3)</sup> „Quelques remarques relatives à l'équation réduite de van der Waals“. Archives des sciences physiques et naturelles 1891, (3), t. 26, str. 13—20.

Odwrotnie :

$$(20) \quad v_0 = \frac{1}{B} \cdot b, \quad p_0 = \frac{B^2}{A} \cdot \frac{a}{b^2}, \quad T_0 = \frac{BC}{A} \cdot \frac{a}{bR}.$$

$A, B$  i  $C$  są stałymi bezwymiarowymi, które określają równania (19), jeżeli  $a, b$  i  $R$  są wyrażone za pomocą  $p_0, v_0$  i  $T_0$ . Gdy podstawimy wartości (19) do równania (1\*\*), możemy być pewni, że w nowym równaniu będą tylko stosunki:  $\frac{v}{v_0}, \frac{p}{p_0}, \frac{T}{T_0}$ , ponieważ, aby równanie było jednorodne w różnych wyrazach  $v$  i  $v_0, p$  i  $p_0, T$  i  $T_0$  muszą wchodzić w takim samym stopniu, zatem musi być możliwe podzielenie całego równania przez tak dobrane wyrażenie, złożone z  $p_0, v_0$  i  $T_0$ , iżby po podzieleniu pozostały tylko stosunki:  $\frac{v}{v_0}, \frac{p}{p_0}$  i  $\frac{T}{T_0}$ . W istocie otrzymujemy:

$$p = \frac{C \frac{p_0 v_0}{T_0} \cdot T}{v - B v_0} - \frac{A p_0 v_0^2}{v^2},$$

które daje :

$$(21) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{C \frac{T}{T_0}}{\frac{v}{v_0} - B} - \frac{A}{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}.$$

Wprowadzając zmienne zredukowane :

$$(22) \quad \frac{p}{p_0} = n_p, \quad \frac{v}{v_0} = n_v, \quad \frac{T}{T_0} = n_T,$$

znajdziemy ogólny kształt zredukowanego równania, bez względu na to, jakich wartości zmiennych użyjemy za redukujące :

$$(23) \quad n_p = \frac{C n_T}{n_v - B} - \frac{A}{n_v^2}.$$

Równanie (1\*\*) innego płynu, o innych stałych  $a', b'$  i  $R'$ , da się sprowadzić do postaci (23) o tych samych wartościach  $A, B$  i  $C$ , gdyż możemy zawsze znaleźć odpowiednie wielkości  $p_0', v_0'$  i  $T_0'$ , które sprawdziłyby równania analogiczne do równań (20).

Jeżeli za  $p_0, v_0$  i  $T_0$  przyjmiemy elementy krytyczne płynu, wówczas równania (19) będą miały postać znanych już równań: (6\*), (7\*) i (8\*), które oznaczmy przez (19\*):

$$(19^*) \quad b = \frac{1}{3} v_k, \quad a = 3 p_k v_k^2, \quad R = \frac{8}{3} \cdot \frac{p_k v_k}{T_k}.$$

Wielkości  $A, B, C$  przyjmą wówczas wartości:

$$(24) \quad A = 3, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{8}{3}.$$

Równanie (23) będzie miało znaną formę

$$(23^*) \quad n_p = \frac{8}{3} \cdot \frac{n_r}{n_o - \frac{1}{3}} - \frac{3}{n_o^2},$$

identyczną z równaniem (11).

Zakładając inne wartości  $A, B$  i  $C$ , otrzymamy nowe kształty równania zredukowanego. Np. kładąc:

$$(24^*) \quad A = B = C = 1,$$

znajdziemy:

$$(23^{**}) \quad n_p = \frac{n_r}{n_o - 1} - \frac{1}{n_o^2}.$$

Aby  $v_0, p_0$  i  $T_0$  odpowiadały stanowi fizycznemu rzeczywistemu, muszą one czynić zadość równaniu (1\*\*), czyli:

$$(1^{***}) \quad p_0 = \frac{RT_0}{v_0 - b} - \frac{a}{v_0^2}.$$

Wówczas i wielkości  $A, B$  i  $C$  muszą być związane pomiędzy sobą. W istocie, podstawivszy (20) do (1\*\*\*), otrzymamy:

$$\frac{B^2}{A} \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{R \cdot \frac{BC}{A} \cdot \frac{a}{bR}}{\frac{1}{B} \cdot b - b} - \frac{aB^2}{b^2},$$

czyli:

$$(25) \quad (1 + A)(1 - B) = C.$$

Dla punktu zatem leżącego na którejkolwiek izotermie diagramatu ( $pv$ ), którego spólrzędne mają służyć za jednostki ciśnienia, objętości i temperatur, redukujące równanie van der Waalsa według wzoru (20), musi istnieć zależność (25).

4. Meslin dowiódł zatem, iż hipoteza van der Waalsa byłaby koniecznym wynikiem związku między ciśnieniem, objętością i temperaturą płynów, gdyby istniała pewność, że równanie charakterystyczne nie posiada

więcej parametrów niż trzy. Ponieważ nie mamy dowodów na to, więc i sama hipoteza przez powyżej przytoczone roztrząsania dowiedziona nie jest. Sprawdzenie jej empiryczne pozostaje niezbędnem.

## ROZDZIAŁ II.

### SPRAWDZANIE DOŚWIADCZALNE HYPOTEZY van der WAALSA.

1. Sprawdzaniem empirycznym hipotezy van der Waals'a zajmowało się wielu uczonych. Sam van der Waals sprawdzał ją za pomocą danych doświadczalnych, jakie podczas ogłoszenia jej t. j. w r. 1880 istniały. Główne sprawdzenia przeprowadził on co do krzywych zależności objętości granicznych cieczy i pary od ciśnień i od temperatur i krzywej zależności ciśnień nasycenia od temperatur. Krzywe te, z których pierwsze noszą również nazwę krzywych granicznych (na diagramacie  $(p, v)$  i  $(v, t)$ ), a druga może być krótko nazwana krzywą nasycenia, stosują się do elementów stanu nasycenia; dając zależność pomiędzy dwoma elementami, mogą być dogodnie użyte do sprawdzenia hipotezy. Krzywe te, jako charakterystyczne, muszą być odpowiednie u wszystkich ciał; tymczasem z pośród izoterm, gdyby chodziło o użycie ich do sprawdzania hipotezy van der Waals'a, musielibyśmy wyszukiwać odpowiednie, co prawie nigdy nie jest możliwe, doświadczenia bowiem tyczą się zwykle kilkunastu izoterm każdego ciała. Z tych względów krzywe graniczne i krzywa nasycenia były często roztrząsane przez van der Waals'a i przez innych uczonych w celu sprawdzenia jego hipotezy.

Linie graniczne można wyrazić przez następujące wzory:

$$(26) \quad \begin{cases} W = F_1(P), \\ w = F_2(P), \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} W = G_1(\tau), \\ w = G_2(\tau), \end{cases}$$

w których  $W$  oznacza objętość graniczną pary nasyconej,  $w$  objętość graniczną cieczy,  $P$  ciśnienie nasycenia,  $\tau$  punkt wrzenia (temperaturę).

Linie nasycenia przedstawiają zależności następujące między ciśnieniami a temperaturami:

$$(28) \quad \begin{cases} P = H_1(\tau), \\ \tau = H_2(P). \end{cases}$$

Jeżeli zastosujemy do równania charakterystycznego:

$$(29) \quad f(p, v, T) = 0,$$

wyobrażenia przestrzenne, symbolizować ono będzie powierzchnię krzywą t. zw. powierzchnię izoterm; izotermi będą przecięciami tej powierzchni przez płaszczyzny, równoległe do płaszczyzny współrzędnych  $(p, v)$ , w odległościach, równych temperaturom izoterm. Równania (26), (27) i (28) charakteryzują tę samą krzywą na powierzchni izoterm, którą nazwać można krzywą skraplania, ponieważ na powierzchni przez nią ograniczonej zachodzi zjawisko skraplania; poza nią istnieje albo ciecz jednolita albo gaz jednolity. Rzutem tej krzywej na płaszczyznę  $(p, v)$  będzie krzywa graniczna, określona przez równania (26), rzutem jej na płaszczyznę  $(t, v)$  — krzywa graniczna (27), rzutem na płaszczyznę  $(p, t)$  — krzywa nasycenia (28).

Stosując prawo stanów odpowiednich do objętości granicznych pary nasyconej i cieczy, ciśnien nasycenia i temperatur wrzenia, i oznaczając powyższe wielkości zredukowane do stanu krytycznego przez  $F, \psi, \Pi$  i  $\theta$ , tak, że do równań (10) przybędą:

$$(10 a) \quad \Pi = \frac{P}{p_k}, \quad \theta = \frac{\tau}{T_k}, \quad F = \frac{W}{v_k}, \quad \psi = \frac{w}{v_k},$$

łatwo nadać (26), (27) i (28) kształt zredukowany przy pomocy równań (15) i (10 a):

$$(26^*) \quad \begin{cases} F = \Phi_1(\Pi) \\ \psi = \Phi_2(\Pi) \end{cases}, \quad (27^*) \quad \begin{cases} F = \Gamma_1(\theta) \\ \psi = \Gamma_2(\theta) \end{cases}, \quad (28^*) \quad \begin{cases} \Pi = X_1(\theta) \\ \theta = X_2(\Pi) \end{cases}.$$

Równania (26\*), (27\*) i (28\*) powinny być jednakowe dla wszystkich ciał według hipotezy van der W a a l s a.

2. Van der W a a l s sprawdzał swą hipotezę przedewszystkiem co do krzywej nasycenia wyrażonej przez (28\*). Jeżeliby prawo o stanach odpowiednich było prawdziwe, wówczas dla różnych ciał jednakowym temperaturom zredukowanym odpowiadałyby jednakowe ciśnienia nasycenia zredukowane i naodwrot: przy jednakowych ciśnieniach zredukowanych powinniśmy otrzymać jednakowe zredukowane punkty wrzenia. Van der W a a l s porównywa najpierw: bezwodnik siarkowy  $\text{SO}_2$  i eter (tlenek etylu)  $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ . Dane co do stanu krytycznego, jak i krzywej nasycenia czerpie z doświadczeń Z a j o n c z e w s k i e g o <sup>1)</sup>. Dla  $\text{SO}_2$  przyjmuje elementy krytyczne:  $p_k = 78.9$  atm.,  $T_k = 428.4^\circ$ ; dla  $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$   $p_k = 36.9$  atm.,  $T_k = 463^\circ$ . Z tablic tego badacza bierze ciśnienia nasycenia  $P$  w różnych temperaturach  $\tau$ , w odstępach 10-u stopni; szuka ich wartości zredukowa-

<sup>1)</sup> Izwiestja Kiewskawo Unlwersiteta rok 1878; № 4. str. 21; № 8, str. 29. Wiedemann's Beiblätter, t. III. 1879, str. 741.



nych  $\Pi$  i  $\theta$ ; następnie wylicza, jakie wartości ma ciśnienie eteru, odpowiadające tym samym  $\Pi$ ; znajduje drogą interpolacji z tablic Zajoncze wskiego temperatury wrzenia przy tych ciśnieniach; w końcu oblicza wartości zredukowane punktów wrzenia  $\theta$ ; powinny one być równe poprzednio znalezionym temperaturom zredukowanym bezwodnika siarkowego. W istocie 11 prób daje wartości prawie równe, jak to wykazują pierwsza i ostatnia kolumny następującej tablicy.

| Bezwodnik siarkowy SO <sub>2</sub> |        |       |       | Eter (C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O <sup>1)</sup> |        |          |
|------------------------------------|--------|-------|-------|--------------------------------------------------------------------|--------|----------|
| $\theta$                           | $\tau$ | $P$   | $\Pi$ | $P$                                                                | $\tau$ | $\theta$ |
| 0.987                              | 423    | 71.45 | 0.906 | 33.45                                                              | 456.3  | 0.986    |
| 0.964                              | 413    | 60    | 0.760 | 28.4                                                               | 444.9  | 0.963    |
| 0.941                              | 403    | 49.97 | 0.633 | 23.4                                                               | 435.2  | 0.940    |
| 0.918                              | 393    | 41.56 | 0.527 | 19.4                                                               | 425    | 0.918    |
| 0.894                              | 383    | 33.95 | 0.480 | 15.9                                                               | 414.4  | 0.895    |
| 0.871                              | 373    | 27.82 | 0.350 | 13                                                                 | 403.7  | 0.872    |
| 0.848                              | 363    | 22.47 | 0.285 | 10.5                                                               | 393.1  | 0.849    |
| 0.825                              | 353    | 18.09 | 0.229 | 8.46                                                               | 383.4  | 0.828    |
| 0.801                              | 343    | 14.31 | 0.181 | 6.69                                                               | 273.6  | 0.807    |
| 0.777                              | 333    | 11.09 | 0.141 | 5.18                                                               | 363    | 0.784    |
| 0.754                              | 323    | 8.43  | 0.107 | 3.94                                                               | 352.8  | 0.762    |

Van der Waals stosował również metodę graficzną; podał dla czterech ciał: CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, (C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)<sub>2</sub>O i C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>Cl (chlerek etylu) szeregi punktów zredukowanej krzywej nasycenia; jeżeli hipoteza jest słuszna, krzywe według równania (28\*) muszą być identyczne.

Danych doświadczalnych dostarczają badania: Regnaulta, Zajoncze wskiego, Andrewsa i Faradaya. Próba ta jest pełniejsza od poprzedniej; ponieważ jednak van der Waals nie wykreślił krzywej, nie jest ona wykończona: trudno sądzić z samych tylko danych liczbowych, o ile krzywe nasycenia są zgodne.

Jeżeli uzupełnimy próbę, wykreślając krzywe, zobaczymy, że nie stwierdzają one ściśle hipotezy o stanach odpowiednich: jedynie krzywe dwutlenku siarki i chlorku etylu zlewają się z sobą i tylko na pewnej przestrzeni; krzywa chlorku etylu w niższej części odbiega ku osi ciśnień od krzywej SO<sub>2</sub>; krzywa eteru nie zgadza się z krzywą SO<sub>2</sub>, nie o tyle jednak, ażeby tej niezgodności nie można było wyjaśnić błędami doświadczalnymi;

<sup>1)</sup> „Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes“. Lipsk 1899. Drugie wydanie. Część I, str. 141. Niema tam 2-ej, 4-ej i 6-ej kolumny, które dodałem.

natomiast krzywa  $\text{CO}_2$ , bez względu na różnice w doświadczeniach różnych obserwatorów przedstawia kształt odmienny od krzywej eteru i dwutlenku siarki.

W mniejszym zakresie sprawdzał van der Waals swe prawo i co do krzywych (27\*). Z równań (27\*) wynika, że różnica  $F - \psi$  musi być pewną funkcją wielkości  $\theta$ :

$$(30) \quad F - \psi = \Gamma(\theta),$$

a wobec (10 a):

$$(30^*) \quad \frac{W - w}{v_k} = \Gamma(\theta).$$

Dla różnych ciał przy jednakowym  $\theta$  i  $(F - \psi)$  czyli  $\frac{W - w}{v_k}$  musi być jednakowe; stąd:

$$(31) \quad \frac{W' - w'}{v_{k'}} = \frac{W'' - w''}{v_{k''}},$$

gdzie  $W', w', v_{k'}$  i  $W'', w'', v_{k''}$  oznaczają objętości graniczne i krytyczne dwu różnych ciał; przy jednakowej temperaturze zredukowanej powinny więc zachodzić stosunki (31), albo też:

$$(31^*) \quad \frac{W' - w'}{W'' - w''} = \frac{v_{k'}}{v_{k''}} = \alpha.$$

Stosunek  $\alpha$  musi być stały, niezależny od zmian wielkości  $\theta$ . Van der Waals oblicza według tablic Zenera dla sześciu temperatur eteru i tyluż wody, które odpowiadają sześciu jednakowym temperaturom zredukowanym, wartości  $(W - w)$ ; okazuje się, że stosunek  $\alpha$  jest prawie stały: waha się między 1.37 i 1.35<sup>1)</sup>. Należy atoli zauważyć, że van der Waals brał dla wody temperaturę krytyczną, wyższą od znanych z doświadczeń wartości. Temperatury, przy których obliczał stosunek  $\alpha$ , dajmy na to:  $t'$  i  $t''$ , są z założenia odpowiednie, zatem:

$$\frac{t' + 273}{t'' + 273} = \frac{T_{k'}}{T_{k''}}.$$

Jeżeli na  $t'$  i  $t''$  przyjmiemy wartości z pierwszego szeregu tablicy, mianowicie  $0^\circ$  i  $118^\circ$ , otrzymamy:

$$\frac{T_{k'}}{T_{k''}} = \frac{273}{391} = 0.6982.$$

<sup>1)</sup> „Die Continuität... etc.“, str. 145.

Temperatura krytyczna eteru  $T_k'$  wynosi według Zajonczewskiego  $463^\circ$ , według Avenarius'a  $464.05^\circ$  lub  $469.2^\circ$  według Ramsay'a i Younga  $467^\circ$  lub  $467.4^\circ$ , według Galicy'na  $464.8$ , według Ramsay'a  $468.5$ , według Batelli'ego  $470^\circ$ . Jeżeli weźmiemy najniższą:  $T_k' = 463$ , otrzymamy dla wody:  $T_k'' = \frac{463}{0.6982} = 663.1^\circ$ . Jest to wartość wyższa od doświadczalnych:  $T_k''$  wynosi według Nadieżdina  $631.1^\circ$ , według Batelli'ego  $637.3^\circ$ , według Cailleteta i Collardeau  $638^\circ$ , według Straussa  $643^\circ$ . Gdybyśmy brali dla eteru wyższe wartości  $T_k'$ , niż  $463^\circ$ , otrzymalibyśmy jeszcze wyższe wartości  $T_k''$ , niż  $663.1^\circ$ . Okoliczność ta osłabia znaczenie powyższego sprawdzenia.

Nadto van der Waals wciągnął do sprawdzania hipotezy współczynnik rozszerzalności:

$$(32) \quad \alpha_p = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot ^1)$$

Równanie charakterystyczne zredukowane, rozwinięte względem objętości  $\vartheta$ , daje:

$$(33) \quad \gamma = f(\pi, \vartheta);$$

po uwzględnieniu równań (10), możemy napisać:

$$(33^*) \quad \frac{v}{v_k} = f(\pi, \vartheta);$$

stąd zaś:

$$(34) \quad \frac{1}{v_k} \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial f(\pi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial T}.$$

Oznaczmy:

$$(35) \quad \frac{\partial f(\pi, \vartheta)}{\partial \vartheta} = f'(\pi, \vartheta).$$

Zważywszy, że według równań (10):

$$(10) \quad \vartheta = \frac{T}{T_k},$$

zatem:

$$(10^*) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial T} = \frac{1}{T_k},$$

<sup>1)</sup> „Die Continuität. . etc.“, str. 162, 163, 167 i 168.

możemy i tę wielkość wprowadzić do równania (34); wówczas:

$$(34^*) \quad \frac{1}{v_k} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{1}{T_k} \cdot f'(\pi, \vartheta).$$

Dzieląc (34\*) przez (33\*), znajdziemy wyrażenie na współczynnik:

$$(36) \quad \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{1}{T_k} \cdot \frac{f'(\pi, \vartheta)}{f(\pi, \vartheta)} = \alpha_p.$$

Z ostatniego równania (36) wynika prawo następujące: współczynniki rozszerzalności różnych ciał w stanach odpowiednich są odwrotnie proporcjonalne do temperatury krytycznej bezwzględnej. W istocie, jeżeli oznaczymy współczynniki rozszerzalności dwóch ciał w stanach odpowiednich przez  $\alpha_p'$  i  $\alpha_p''$ , temperatury krytyczne tych ciał przez  $T_k'$  i  $T_k''$ , tedy na podstawie założenia, wzór (36) przyjmie postać:

$$(37) \quad \begin{cases} \alpha_p' = \frac{1}{T_k'} \cdot C \\ \alpha_p'' = \frac{1}{T_k''} \cdot C \end{cases},$$

gdzie  $C$  oznacza funkcję  $\frac{f'(\pi, \vartheta)}{f(\pi, \vartheta)}$ , dla obydwu ciał jednaką. Stąd otrzymamy:

$$(37^*) \quad \alpha_p' \cdot T_k' = \alpha_p'' \cdot T_k''.$$

W tej postaci (37\*) sprawdzał van der Waals prawo, posilkując się wzorami empirycznymi; skutek tego wyniki zależą nie tylko od doskonałości prawa, lecz także od ścisłości wzorów. Znalazł on, że dla siarczku węgla, chlorku etylu, chloroformu, dla etylowego estru kwasu mrówkowego, metylowego estru kwasu octowego, etylowego estru kwasu octowego, dla eteru zwyczajnego iloczynny  $\alpha_p \cdot T_k$  nie są równe w stanach odpowiednich, ale są proporcjonalne do pewnych zbliżonych do siebie liczb. Jedynie  $\text{SO}_2$  daje liczbę, różniącą się znacznie od innych. Liczby te są: siarczek węgla 1560, chlorek etylu 1536, chloroform 1534, ester etylowy kwasu mrówkowego 1547, ester metylowy kwasu octowego 1514, ester etylowy kwasu octowego 1530, eter zwyczajny 1513, dwutlenek siarki 1610. Inny szereg liczb, oznaczających stosunki między iloczynami ( $\alpha_p \cdot T_k$ ) dla różnych ciał, otrzymał van der Waals mniej zgodny: eter 1524, ester etylowy kwasu mrówkowego 1558, ester etylowy kwasu octowego 1577, benzol 1594, ester metylowy kwasu octowego 1605,  $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$  (aceton) 1634, chlorek etylu 1575. Jak widzimy, rezultaty badań nad prawdziwością prawa o stanach odpowiednich co do współczynnika rozszerzalności są wątpliwe;

liczby powyższe mogłyby raczej świadczyć przeciw niemu; jednakże ze względu, że zostały one wyprowadzone za pomocą wzorów empirycznych, nie można uważać ich za miarodajne.

Wszystkie zatem sprawdzania wyżej przytoczone są wątpliwe, albo też świadczą przeciw słuszności hipotezy. Nawet pozorna zgodność krzywej eteru z krzywą bezwodnika siarkowego według próby van der Waals a okazała się nieściśłą zwłaszcza przy niskich ciśnieniach. Z powodu nieściśłości pozytywne sprawdzenia hipotezy, przedsięwzięte przez jej twórcę, nie były w stanie niezbitcie jej stwierdzić; z powodu niedoprowadzenia do końca negatywnie nie mogły jej obalić.

3. W roku 1891 E. Mathias przedsięwziął <sup>1)</sup> nowe sprawdzenia hipotezy van der Waals a, biorąc za ich przedmiot gęstości pary nasyconej i cieczy. Opiera się on również na wzorach empirycznych, co wprowadza do jego badań niepożądany element, obniżający ich wartość.

Z podanych przez Cailleteta i Mathias a wzorów empirycznych, wyrażających zależność gęstości pary nasyconej  $\Delta$  od temperatury  $t$  (Celsiusza), np.:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{dla SO}_2 & \Delta = 1.0019 - 0.00334 t - 0.07887 \sqrt{t_k - t} \\ \text{„ C}_4\text{H}_4 & \Delta = 0.1987 - 0.0019364 t - 0.03604 \sqrt{t_k - t} \\ \text{„ (C}_2\text{H}_5)_2\text{O} & \Delta = 0.514 - 0.001492 t - 0.03606 \sqrt{t_k - t} \\ \text{„ ClH} & \Delta = 0.5984 - 0.00374 t - 0.07585 \sqrt{t_k - t} \end{array} \right.$$

wyprowadza Mathias nowe wzory, operujące wielkościami zredukowanymi <sup>2)</sup>. Ponieważ gęstości są odwrotnościami objętości właściwych, zatem, oznaczając przez  $\delta_k$  gęstość ciała w stanie krytycznym, mamy stosunki:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \frac{1}{W} \\ \delta_k = \frac{1}{v_k} \end{array} \right.$$

Na mocy tego pierwsze z równań (26\*) daje:

$$(40) \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = E_1(\theta).$$

<sup>1)</sup> „Remarques sur le théorème des états correspondants“. Annales de Toulouse 1891. Journal de Physique (3) tom I, str. 53—73.

<sup>2)</sup> 1-szy z tych wzorów jest ważny od  $t = 75^\circ$  do  $t_k = 156^\circ$ ; 2-gi od  $t = -30^\circ$  do  $t_k = 9.2^\circ$ ; 3-ci od  $t = 140^\circ$  do  $t_k = 189.5^\circ$ .

Z równania (40) wnosimy, że wyrażenia (38) staną się identyczne dla wszystkich ciał, jeżeli wprowadzimy do nich zamiast zwykłych gęstości i temperatur, zredukowane. W istocie, jeżeli zamiast  $t$  podstawimy do (38) jego wartość z równania:

$$(11^* a) \quad \frac{t + 273^0}{t_k + 273^0} = \theta,$$

podzielimy obie strony równań (38) przez  $\delta_k$  i zużytkujemy dla  $t_k$  i  $\delta_k$  następujące wartości:

|                                                 |                                        |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|
| SO <sub>2</sub>                                 | $\delta_k = 0.52$ , $t_k = 15.6^0$ ,   |
| C <sub>4</sub> H <sub>4</sub>                   | $\delta_k = 0.21$ , $t_k = 9.2^0$ ,    |
| (C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O | $\delta_k = 0.26$ , $t_k = 189.5^0$ ,  |
| HCl                                             | $\delta_k = 0.462$ , $t_k = 51.25^0$ , |
| CO <sub>2</sub>                                 | $\delta_k = 0.45$ , $t_k = 31^0$ ,     |
| NO                                              | $\delta_k = 0.41$ , $t_k = 38.8^0$ ;   |

otrzymamy szereg równań:

$$(38^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{SO}_2 \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = 2.755 (1 - \theta - 1.140 \sqrt{1 - \theta} + [0.579]^2), \\ \text{C}_4\text{H}_4 \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = 2.60 (1 - \theta - 1.108 \sqrt{1 - \theta} + [0.576]^2), \\ (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O} \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = 2.65 (1 - \theta - 1.124 \sqrt{1 - \theta} + [0.579]^2), \\ \text{ClH} \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = 2.62 (1 - \theta - 1.126 \sqrt{1 - \theta} + [0.579]^2), \\ \text{CO}_2 \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = 2.87 (1 - \theta - 1.130 \sqrt{1 - \theta} + [0.579]^2), \\ \text{NO} \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = 2.85 (1 - \theta - 1.124 \sqrt{1 - \theta} + [0.580]^2). \end{array} \right.$$

Równania powyższe (38\*) wykazują podobieństwo wzajemne, tak, że można utworzyć postać ogólną zredukowaną, która odpowiada mniej więcej wszystkim ciałom badanym, a mianowicie:

$$(41) \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = 2.75 (1 - \theta - 1.124 \sqrt{1 - \theta} + [0.579]^2),$$

dla gęstości cieczy  $\delta$  (granicznej) muszą istnieć równania analogiczne do (39) i (40):

$$(39 \text{ a}) \quad \delta = \frac{1}{w} \quad \text{i} \quad (40 \text{ a}) \quad \frac{\delta}{\delta_k} = E_2(\theta).$$

Dla bezwodników: węglowego i siarkowego znajduje M a t h i a s:

$$(42)^1) \quad \begin{cases} \text{CO}_2 & \frac{\delta}{\delta_k} = 2.364 (\theta - 0.569 + 1.655 \sqrt{1 - \theta}) \\ \text{SO}_2 & \frac{\delta}{\delta_k} = 2.367 (\theta - 0.569 + 1.655 \sqrt{1 - \theta}) \end{cases}$$

Analogia jest tu jeszcze większa niż w równaniach (38\*):

A n d r e j e w <sup>2)</sup> podał dla gęstości cieczy SO<sub>2</sub> odmienne nieco równanie, a M a t h i a s znalazł podobne dla amoniaku NH<sub>3</sub>:

$$(43)^3) \quad \begin{cases} \frac{\delta}{\delta_k} = 4.171 (1 - 0.5185 \theta - 0.0229 \theta^2) \\ \frac{\delta}{\delta_k} = 4.175 (1 - 0.5185 \theta - 0.0229 \theta^2) \end{cases}$$

Równania (38\*), (42) i (43) odpowiadają rzeczywistości z bardzo znacznym przybliżeniem według sprawdzeń M a t h i a s a.

Wszystkie jednak powyższe sprawdzenia, nie mogą mieć znaczenia decydującego, gdyż opierają się na wzorach empirycznych, z natury rzeczy tylko przybliżonych. Prócz tego rodzaju rachunków M a t h i a s stosował inne. Do sprawdzenia zależności (40 a) używał on metody podobnej do tej, jaką posiłkował się van der W a a l s do sprawdzenia zależności (27\*); lecz zamiast gęstości krytycznych brał za redukujące inne gęstości, odpowiednie względem siebie. Wł. N a t a n s o n już wykazał, że własność redukowania równania charakterystycznego posiadają wszystkie ciśnienia temperatury i objętości, odpowiednie między sobą. To też M a t h i a s przyjął za redukujące gęstości porównywanych ciał, mianowicie bezwodników węglowego i siarkowego, które odpowiadają tej samej temperaturze zredukowanej zwykłej (do temperatury krytycznej); temperaturę zredukowaną przyjął taką, jaka odpowiada temperaturze zwykłej 20° C. dla dwutlenku węgla, ponieważ

<sup>1)</sup> 1-szy z tych wzorów jest ważny od  $t=34^\circ$  do  $t=21^\circ$ ; 2-gi od  $t=90^\circ$  do  $t_k=156^\circ$ .

<sup>2)</sup> Annales de Chimie et de Physique (3), t. LVI, str. 317. 1859.

<sup>3)</sup> 1-szy z tych wzorów jest ważny w granicach temperatury od  $-10^\circ$  do  $+40^\circ$ ; 2-gi od  $-25^\circ$  do  $+21^\circ$ .

przy tej temperaturze na gęstość tego ciała podają różni badacze mniej więcej jednakową wartość: od 0.751 do 0.755. *Mathias* przy 7 jednakowych temperaturach zredukowanych (zwykłych) znajduje gęstości zredukowane (do owych specjalnych wartości). Te gęstości zredukowane powinny być identyczne według hipotezy *van der Waals*a; nie okazują się takimi, próba więc ma wynik ujemny. W analogiczny sposób porównywał *Mathias* tlen z bezwodnikiem siarkawym; ponieważ gęstości tlenu ciekłego obliczał za pomocą wzoru *Wróblewskiego*, więc te zestawienia nie mają charakteru empirycznego sprawdzenia.

Nadto stosował *Mathias* do gęstości metodę, której *van der Waals* użył przy sprawdzaniu równania (30\*). Według równania (40 a), jeżeli temperatura zredukowana  $\theta$  dwóch ciał jest jednakowa, muszą być jednakowymi i zredukowane gęstości cieczy tych ciał w tej temperaturze  $\frac{\delta}{\delta_k}$ ; zatem:

$$(44) \quad \frac{\delta'}{\delta_k'} = \frac{\delta''}{\delta_k''}.$$

Innymi słowy: stosunek gęstości dwóch ciał, odpowiadający jednakowym temperaturom zredukowanym, nie zależy od tych temperatur i jest równy stosunkowi gęstości krytycznych:

$$(45) \quad \frac{\delta'}{\delta''} = \frac{\delta_k'}{\delta_k''} = \beta.$$

*Mathias* znajduje dwie wartości  $\beta$  azotu i  $\text{SO}_2$ ; wynoszą one 1.737 i 1.735; różnica nie jest większa od błędów doświadczalnych.

Tę samą metodę zastosował *Mathias* przy porównaniu amoniaku (według doświadczeń *Andrejewa*) z bezwodnikiem siarkowym. Stosunek  $\beta$ , obliczony z czterech seryj danych, okazał się prawie stały: waha się między 2.181 i 2.176.

Powyższym dwóm metodom trudno jest cokolwiek zarzucić, jednak pierwsza daje wyniki na niekorzyść hipotezy, druga wprowadzie daje wyniki dodatnie, została jednak zastosowana w szczupłych granicach.

4. Właściwe sprawdzenie hipotezy *van der Waals*a wykonał dopiero <sup>1)</sup> *Sydney Young* w r. 1898 na podstawie doświadczeń własnych lub dokonanych wspólnie z *Williamem Ramsa'em*. Sprawdzał on prawdziwość hipotezy na podstawie krzywej skraplania zredukowanej i zreduko-

<sup>1)</sup> „On the generalizations of *van der Waals*, regarding corresponding Temperatures, Pressures and Volumes“. *Philosophical Magazine* (V), t. 33, str. 153 185.



wanych krzywych granicznych; mianowicie, o ile następujące zależności są jednakie dla 12 ciał badanych:

$$(28^* a) \quad \Pi = X_1(\theta), \quad (28^* b) \quad \theta = X_2(\Pi),$$

$$(27^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = I_1(\theta) \\ \psi = I_2(\theta) \end{array} \right. , \quad (26^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \Phi_1(\Pi) \\ \psi = \Phi_2(\Pi) \end{array} \right. .$$

Metody używał takiej samej jak van der Waals i Mathias. W celu sprawdzenia równań (28\* a) i (27\*) obliczał szereg temperatur odpowiednich owych 12 ciał; dla każdej temperatury zredukowanej otrzymywał 12 odrębnych dla każdego ciała temperatur odpowiednich. Następnie drogą interpolacji obliczał z tablic doświadczalnych ciśnienia nasycenia, z objętości cieczy i pary nasyconej przy tych temperaturach. W końcu sprawdzał, o ile te wielkości wykazują stały wzajemny stosunek przy różnych  $\theta$ . Podobnie przy sprawdzaniu równań (28\* b) i (26\*) obliczał szeregi ciśnień odpowiednich, wyszukiwał punkty wrzenia, objętości graniczne cieczy i pary przy tych ciśnieniach i podawał stosunek wzajemny tych wielkości dla różnych ciał przy zmiennem  $\Pi$ . Zestawiał następujące ciała; benzol  $C_6H_6$  i jego pochodne: fluorobenzol  $C_6H_5F$ , chlorobenzol  $C_6H_5Cl$ , bromobenzol  $C_6H_5Br$  i jodobenzol  $C_6H_5I$ <sup>1)</sup>; czterochlorek węgla  $CCl_4$  i chlorek cyny  $SnCl_4$ <sup>2)</sup> i kwas octowy  $CH_3COOH$ <sup>3)</sup>; alkohol etylowy  $C_2H_5OH$ ; eter, czyli tlenek etylu  $(C_2H_5)_2O$ ; alkohol metylowy  $CH_3OH$  i alkohol propylowy  $C_3H_7OH$ <sup>4)</sup>. Young używał nie objętości właściwych cieczy i pary t. j. objętości, jakie zajmuje jednostka masy danego ciała, lecz objętości molekularnych, t. j. objętości takich, jakie zajmuje tyle jednostek masy (gramów) danego ciała ile wynosi jego ciężar cząsteczkowy. Przy obliczaniu więc stosunków objętości cząsteczkowych otrzymamy w rezultacie iloczyn

<sup>1)</sup> „On the vapour-pressures and specific volumes of benzene and its halogen derivatives“. *Journal of the Chemical Society* 1889, t. 55, str. 486, 521 i „The molecular volumes of the saturated vapours of benzene and of its halogen derivatives“. *Transactions of the Chem. Soc.* 1891, str. 125—139.

<sup>2)</sup> „On the vapour-pressures and molecular volumes of carbon tetrachloride and stannic chloride“. *Trans. Chem. Soc.* 1891, str. 911—936.

<sup>3)</sup> „On the vapour-pressures and molecular volumes of acetic acid“. *Trans. Chem. Soc.* 1891, str. 903—911.

<sup>4)</sup> Doświadczenia nad temi ciałami są zebrane w pracy: „On evaporation and dissociation“, umieszczonej w rocznikach: *Philosophical Transactions of the Royal Society*, mianowicie, część II „A study of the thermal properties of alcohol“, tyczy się alkoholu etylowego i znajduje się w roczniku 1886. I, str. 123—156, tab. 3—7, część III „A study of the thermal properties of ethyl oxide“, tyczy eteru 1887 A, str. 57—93, t. 178, tab. 6—10, część V „A study etc... of methyl alcohol“ 1887 A, t. 178, str. 313—334, tab. 14—18, część VIII „A study etc... of propyl alcohol“ 1889 A, str. 137—158, tab. 3—7

stosunku objętości właściwych dwu ciał przez stosunek ich ciężaru drobinowego. Ażeby wprowadzić jednolitość w porównywaniu różnych ciał, Young przyjmuje za medium comparationis fluorobenzol, uważając to ciało za typowe. Stosunki objętości, ciśnień i temperatur wszystkich innych ciał oblicza względem fluorobenzolu.

Rezultaty przedstawia Young na 22 tablicach. W I-ej podaje wartości elementów krytycznych dla ciał, badanych przez siebie<sup>1)</sup>. Za pomocą tych danych oblicza wartości zredukowane. Dla fluorobenzolu przyjmuje szereg ciśnień, wyrażonych w milimetrach słupa rtęciowego; oblicza ich wartości zredukowane i szuka ciśnień odpowiednich przyjętemu szeregowi innych ciał. Tablica II podaje te ciśnienia odpowiednie. Tablice IV, VI i VIII zawierają punkty wrzenia, objętości graniczne cieczy i pary przy tych ciśnieniach odpowiednich, wyliczone drogą interpolacji z tablic doświadczalnych. Tablice X, XII i XIV podają stosunki tych punktów wrzenia, objętości granicznych cieczy i pary różnych ciał do takich samych wielkości fluorobenzolu. Według hipotezy stosunki te powinny być równe. Siedm ostatnich tablic służy do sprawdzenia równań (28\* b) i (26\*).

Do sprawdzenia równań (27\* a) i (27\*) służy 7 innych tablic. Tablica III podaje temperatury odpowiednie ciał badanych. Autor dowolnie przyjmuje szereg temperatur fluorobenzolu, do których następnie za pomocą tablicy I-ej wylicza temperatury odpowiednie innych ciał. Ten szereg temperatur fluorobenzolu przyjmuje Young w ten sposób, że może on posłużyć do nowego sprawdzenia hipotezy van der Waals'a. Bierze on za ten szereg temperatur punkty wrzenia fluorobenzolu przy poprzednio wybranym szeregu ciśnień tego ciała, uwidocznionym w tablicy II-ej. Jeżeliby prawo stanów odpowiednich było prawdziwe, tablica III powinna wskazywać te same temperatury, jak tablica IV dla fluorobenzolu i dla wszystkich innych ciał. W istocie widzimy znaczne różnice. Tak samo miarodajne dla prawdziwości hipotezy van der Waals'a powinno być porównanie tablic II-ej i V-ej, które powinny być identyczne; tablica II podaje ciśnienia odpowiednie, tablica V ciśnienia nasycenia przy odpowiednich temperaturach. W rzeczywistości liczby są nader odmienne o wiele więcej niż na tablicach III-ej i IV-ej. Tablice V, VII i IX wskazują ciśnienia nasycenia, objętości cieczy i pary nasyconej przy odpowiednich temperaturach, tablice XI, XIII i XV podają stosunki tych wielkości u różnych ciał do takich samych wielkości fluorobenzolu. Young wnioskuje: 1) że dla pochodnych benzolu stałość stosunków na tablicach od X-ej do XV-ej włącznie jest prawie doskonała, zatem hipoteza van

<sup>1)</sup> Elementy krytyczne chloro-, bromo- i jodobenzolu podaje Young nie z doświadczeń, lecz z obliczeń.

der W a a l s a sprawdza się dla nich w wysokim stopniu przybliżenia, o ile będziemy porównywali te ciała z fluorobenzolem; 2) co do benzolu, czterochlorku węgla, chlorku cyny i eteru, hipoteza van der W a a l s a jest grubym przybliżeniem do prawdy; odstępstwa od stałości stosunków są za duże, ażeby je można było przypisać błędom doświadczalnym; 3) do trzech alkoholów i kwasu octowego prawo stanów odpowiednich nie stosuje się; odstępstwa od stałości stosunków objętości cząsteczkowych cieczy przy ciśnieniach i temperaturach odpowiednich nie są jednak bardzo znaczne. W ogóle zgodność jest większa przy ciśnieniach odpowiednich, aniżeli przy temperaturach.

W innej pracy <sup>1)</sup> Y o u n g podaje szereg danych dla krzywych (28\*b) i (26\*), t. j. zredukowanych temperatur i objętości granicznych cieczy i pary w zależności od zredukowanych ciśnień nasycenia. Przytem stosuje wielkości:  $\theta$ ,  $P$  i  $v$  12 ciał badanych do tego samego szeregu wartości  $H$ ; co umożliwia ocenę zgodności bez wykreslania krzywej. Tablice, zawierające rezultaty tych obliczeń, są więc analogiczne do pierwszej tabelki porównawczej van der W a a l s a, tyczącej się bezwodnika siarkowego i eteru. Omawiane tablice wykazują znaczne różnice między ciałami; np. przy ciśnieniu zredukowanym  $H = 0.00059$ , punkt wrzenia zredukowany czterochlorku węgla jest  $\theta = 0.4748$ , gdy alkohol propylowy ma  $\theta = 0.5579$ ; różnice tak znaczne podają w wątpliwość prawo van der W a a l s a; bez wykreślenia atoli krzywych trudno sądzić o przyczynie nieprawidłowości: mogą one pochodzić od niedokładności w oznaczeniu elementów krytycznych lub ciśnień nasycenia przy różnych temperaturach lub od nieściśłości hipotezy. Tablice, wykazujące stosunki objętości granicznych cieczy w temperaturach odpowiednich do objętości krytycznych dają wartości zgodniejsze; tablice, zawierające podobne stosunki objętości granicznych pary w temperaturach odpowiednich są dowodem niezgodności różnych ciał pod tym względem, zwłaszcza grupy eteru i fluorobenzolu z grupą alkoholów i kwasem octowym.

W innej pracy <sup>2)</sup> Y o u n g podaje dalszy ciąg przytoczonej tablicy, mianowicie oblicza owe stosunki przy takich samych ciśnieniach zredukowanych dla 10 dalszych ciał. Są niemi estry kwasów tłuszczowych: mrówczan metylu  $H. COOCH_3$  (ester metylowy kwasu mrówkowego), mrówczan etylu  $H. COOCH_2. CH_3$  (ester etylowy kwasu mrówkowego), octan metylu  $CH_3. COOCH_3$  (ester metylowy kwasu octowego), mrówczan

<sup>1)</sup> „Note on the Generalizations of van der Waals regarding corresponding Temperatures, Pressures and Volumes“. Philosophical Magazine 1894, t. 33, str. 1—7.

<sup>2)</sup> „The vapour-pressures, molecular volumes, and critical constants of ten of the lower esters“ by S. Young and G. L. Thomas Trans. Chem. Soc. 1893, str. 1191—1262.

propylu  $H \cdot COO [CH_2]_2 CH_3$  (ester propylowy kwasu mrówkowego), octan etylu  $CH_3 \cdot COO CH_2 \cdot CH_3$  (ester etylowy kwasu octowego), czyli eter octowy, propionian metylu  $CH_3 \cdot CH_2 \cdot COO CH_3$  (ester metylowy kwasu propionowego), octan propylu  $CH_3 \cdot COO [CH_2]_2 CH_3$  (ester propylowy kwasu octowego), propionian etylu  $CH_3 \cdot CH_2 \cdot COO CH_2 \cdot CH_3$  (ester etylowy kwasu propionowego), masłan metylu  $CH_3 [CH_2]_2 COO CH_3$  (ester metylowy kwasu masłowego), izomasłan metylu  $(CH_3)_2 CH \cdot COO CH_3$  (ester metylowy kwasu izomasłowego). Dane doświadczalne do obliczeń zawarte są w tej samej pracy. Nadto w pracy, tyczącej się dwuizopropylu i dwuizobutyłu <sup>1)</sup>, Young oblicza analogiczną tablicę dla izopentanu <sup>2)</sup>, pentanu normalnego, dwuizopropylu, hexanu normalnego, dwuizobutyłu i oktanu normalnego.

Tablice Younga świadczą, że dla 28 ciał badanych przez niego samego lub wspólnie z Ramsay'em, Thomasem i Fortey'em, krzywe nasycenia są niezgodne, ale nie pozwalają wnioskować o przyczynie tej niezgodności; pochodzi ona może: 1) z niedokładności obliczeń punktów wrzenia przy różnych ciśnieniach lub ciśnień nasycenia w różnych temperaturach, 2) z niedokładności temperatur i ciśnień krytycznych, 3) z nieścisłości hipotezy van der Waals'a. Ażeby zbadać przyczynę niezgodności, wykreśliłem te krzywe. Najcharakterystyczniejsze z nich przedstawiłem na figurze 5. Dyskusję ich odkładam do następnego rozdziału.

5. Krzywe nasycenia zredukowane kilkunastu ciał obliczał również Tadeusz Estreicher <sup>3)</sup>. Zwłaszcza ważne jest obliczenie krzywych dwusiarczku węgla i alkoholu izobutyłowego. Obliczenia Estreichera dotyczą się zredukowanej krzywej nasycenia w jej najniższej części: najwyższe ciśnienie zredukowane, do którego dochodzą, wynosi  $\Pi = 0.02304$  (na krzywej alkoholu izobutyłowego). Tę ostatnią krzywą przedstawiłem na figurze 5.

6. Powyższe sprawdzania opierały się na danych krytycznych; wartość więc wyników była zależna od dokładności pomiarów elementów krytycznych. Skądinąd wiemy, że istnieją znaczne różnice w podanych przez

<sup>1)</sup> „Vapour-pressures, specific volumes, and critical constants of di-isopropyl and di-isobutyl“, przez Sydney Younga wspólnie z Emilem C. Fortey'em. Trans. Chem. Soc. 1900, t. 77, str. 1126—1144.

<sup>2)</sup> Izopentan: The thermal properties of isopentane. Proceedings of the physical Society of London 1894—95, str. 602—657. Dane pentanu normalnego: The vapour-pressures, spec. vol., and crit. const. of normal pentane, with a note on the critical point. Trans. Chem. Soc. 1897, str. 446—457.

<sup>3)</sup> „O ciśnieniach nasycenia tlenu“. Rozprawy Akademii Umiejętności w Krakowie. Wydział mat.-przyrodniczy. Serja II. Tom X. 1896, str. 140—157.

różnych eksperymentatorów wartościach tych elementów; ważną zatem rzeczą jest znaleźć metody sprawdzenia hipotezy, do których znajomość elementów krytycznych nie byłaby potrzebna.

Taką metodę podał w roku 1896 E. H. A m a g a t <sup>1)</sup>. Prawo o stanach odpowiednich głosi, iż sieć zwykła izoterm jakiegokolwiek ciała różni się od sieci izoterm zredukowanych tylko skalą ciśnień i objętości. Ponieważ sieć zredukowana ma być dla wszystkich ciał identyczna, przeto siatki izoterm dwóch ciał różnić się powinny tylko skalami ciśnień i objętości. Zwiększając lub zmniejszając odpowiednio skale rzędnych i odciętych możemy zatem doprowadzić siatki do koincydencji. A m a g a t oparł swą metodę sprawdzania na tej właśnie zasadzie. Przy praktycznem jej przeprowadzeniu zużytkował prawo rzutowania, mianowicie, że rzucając figurę płaską na płaszczyznę nierównoległą do jej płaszczyzny, otrzymamy obraz podobny, lecz w skróceniu. Jeżeli wyobrazimy sobie figurę, wykreśloną na płaszczyźnie  $(p', v')$  i następnie tę płaszczyznę wraz z figurą umieścimy w systemacie spólrzędnych  $p, v, z$  w ten sposób, by środek diagramatu  $(p', v')$  leżał w środku spólrzędnych systemu  $(p, v, z)$ , oś  $v'$  na płaszczyźnie  $(v, z)$  i oś  $p$  na płaszczyźnie  $(p, z)$  tak, aby zawierały z osiami  $v$  i  $p$  pewne kąty, to rzutując figurę daną na płaszczyznę  $(p, v)$ , otrzymamy figurę podobną, różniącą się tylko skalą od pierwszej. Jeżeli figurę nakreśloną na diagramacie  $(p', v')$  będzie sieć izoterm pewnego ciała  $(p', v')$ , a na płaszczyźnie  $(p, v)$  będzie nakreślona sieć izoterm innego ciała  $(p'', v'')$ , wówczas zmieniając odpowiednio kąty  $pop'$  i  $vov'$ , powinniśmy znaleźć takie położenie diagramatu  $(p', v')$ , by rzut siatki  $(p', v')$  na płaszczyznę  $(p, v)$  pokrył siatkę  $(p'', v'')$ . Oczywiście pokrycie to nie może być takie, by każda izoterma jednej siatki upadła na parną izotermę drugiej, albowiem izotermy bywają zwykle wykreślane nie przy temperaturach przypadkowych. Chodzi o to, by izotermy jednej i drugiej siatki można było uważać za jednolitą sieć.

A m a g a t posługuje się nie zwykłym diagramatem  $(p, v)$  lecz diagramatem ściśliwości  $(pv, p)$ , co jednak sytuacji rzeczy istotnie nie zmienia. Do rzutowania jednej siatki na drugą używał A m a g a t sposobu optycznego. Fotografował eksperymentalne sieci na małych kwadracikach szklanych, których boki wynosiły od 1 do 2 cm.. Umieszczał przed obiektywem lunety obiedwie siatki. Jedna mogła się obracać w swej płaszczyźnie i przesuwac w kierunku pionowym i poziomym, druga obracać około obydwu osi. Pierwszą ustawiamy tak, by punkt zerowy jej upadał na środek spólrzędnych drugiej i by osi odpowiednie obydwu sieci pokrywały się wzajemnie. Drugą manipulujemy w ten sposób, by siatki upadały jedna na drugą, tworząc sieć wspólną. Do obserwowania sieci służył okular lunety.

<sup>1)</sup> „Vérification d'ensemble de la loi des états correspondants de van der Waals“. Comptes Rendus 1896, t. 123, str. 80–85.

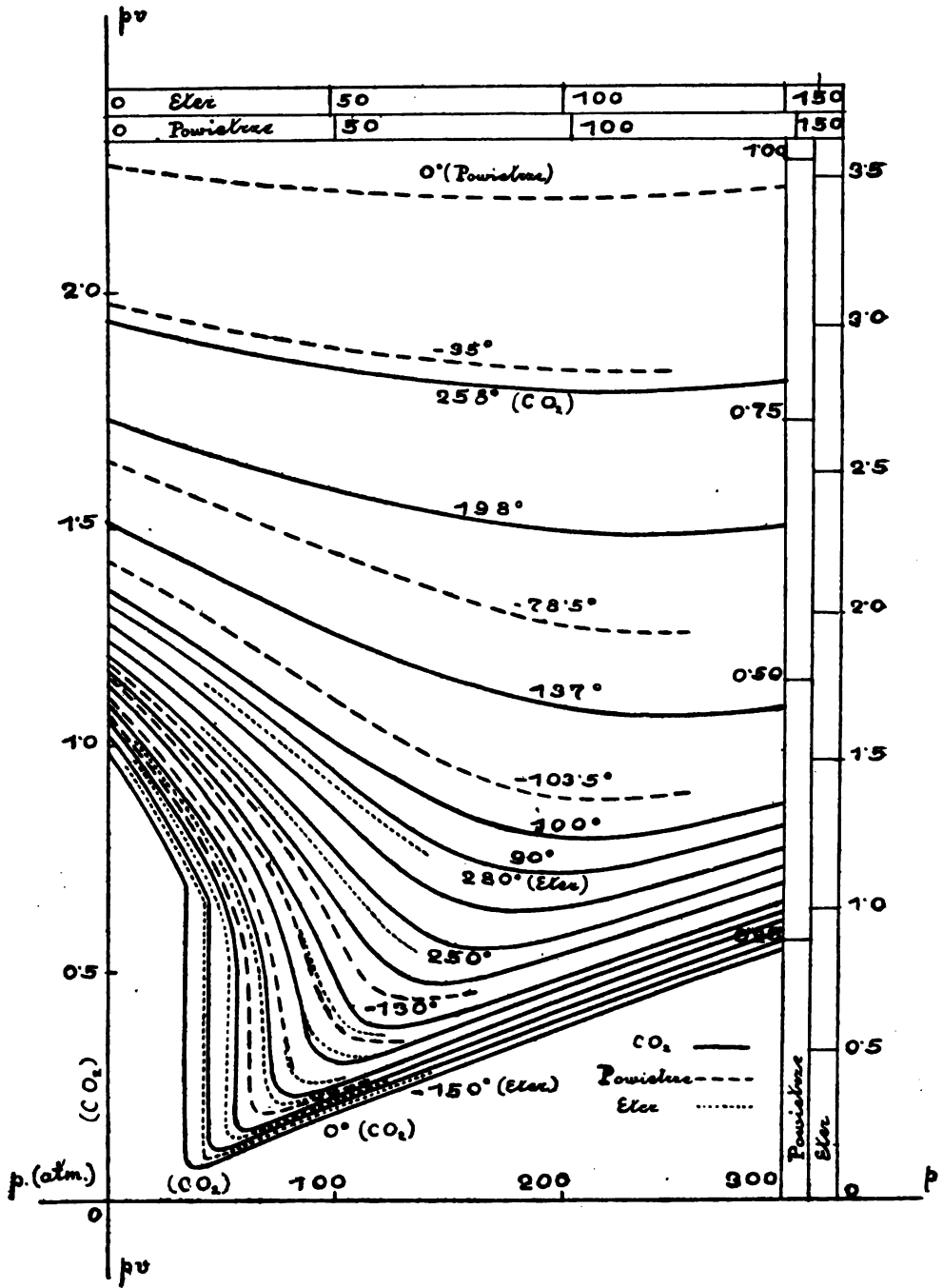


Fig. 2.

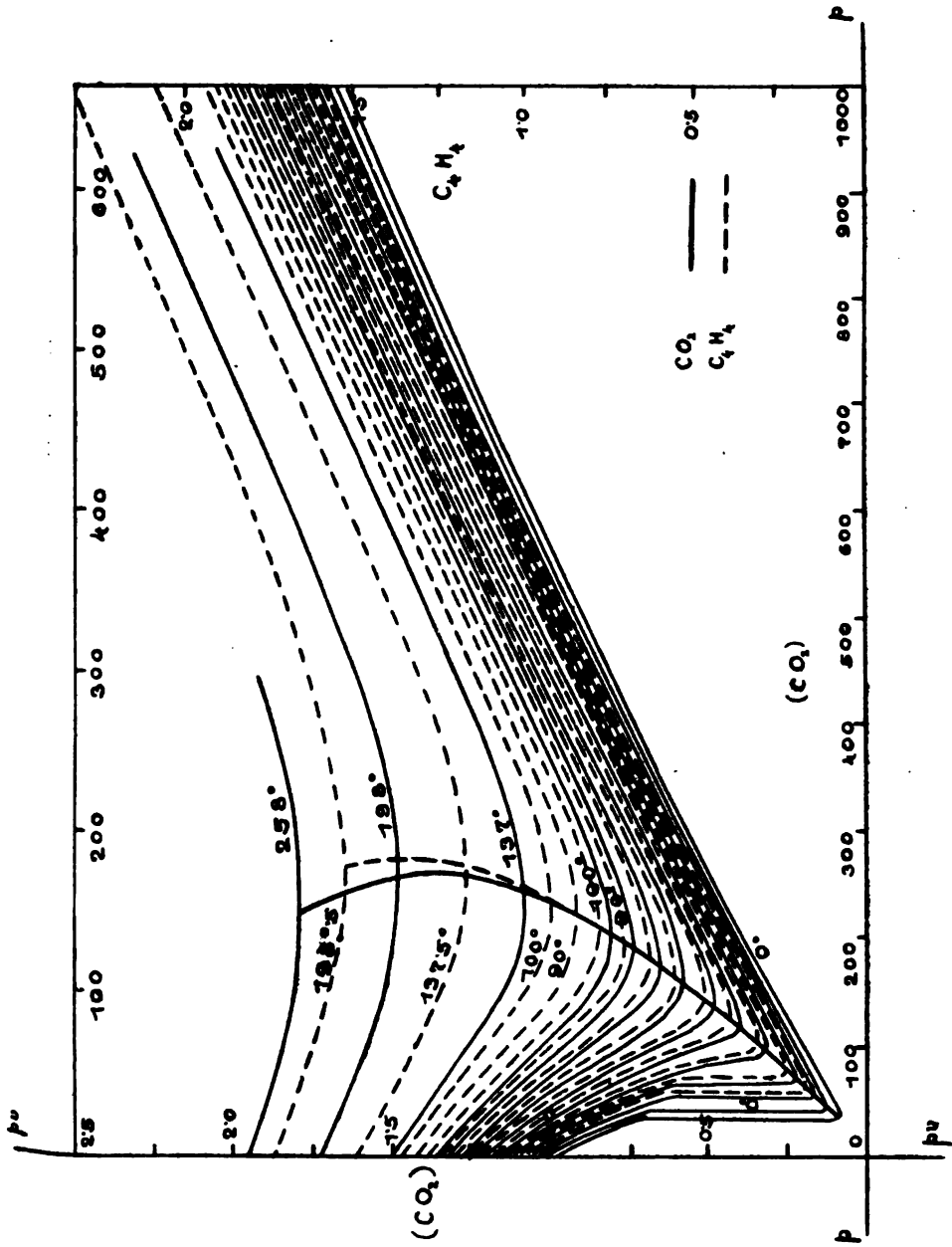


Fig. 3.

Używał on siatek małych, ażeby uczynić promienie świetlne, służące do rzutowania, możliwie równoległymi. A magat porównywał siatki izoterm bezwodnika węglowego, etylenu, eteru i powietrza. Izoterm  $\text{CO}_2$  i  $\text{C}_2\text{H}_4$  dostarczyły jego własne badania, sięgające ciśnień aż do 1000 atmosfer; dane dla eteru wziął A magat z doświadczeń Ramsaya i Younga (między  $150^\circ$  i  $180^\circ$ ), dla powietrza z doświadczeń Witkowskiego (między  $0^\circ$  i  $150^\circ$ ). Siatki, nałożone jedna na drugą, A magat podaje w zwiększonej reprodukcji. Ze względu na różny zakres doświadczeń wykonanych nad etylenem, powietrzem i bezwodnikiem węglowym, wszystkie siatki nie mogły być przedstawione na jednym diagramacie.

Na jednym diagramacie (Fig. 2) podaje autor nałożone sieci  $\text{CO}_2$ ,  $(\text{C}_2\text{H}_3)_2\text{O}$  i powietrza; na drugim (Fig. 3) sieci  $\text{CO}_2$  i  $\text{C}_2\text{H}_4$ .

Kształt tych skombinowanych sieci izoterm robi wrażenie jednej sieci wspólnej. Jedynie krzywe najmniejszości iloczynu  $pv$  na drugim diagramacie rozchodzą się cokolwiek, co jednak wobec trudności obliczenia tych najmniejszości i wielkiego wpływu na ich położenie błędów doświadczalnych nie może, jak twierdzi A magat, być poczytywane za odstępstwo udowodnione; przeto można, według niego uważać hipotezę van der Waals'a za stwierdzoną dla 4-ch ciał powyższych z dokładnością, odpowiadającą dokładności doświadczeń.

Należy zauważyć, że opis wykonania doświadczenia, wzięty z pracy A magata prawie dosłownie, nie jest dokładny. Nasuwają się wątpliwości co do przeprowadzenia rzutowania optycznego. Porównywając dwie siatki, możemy napotkać dwie okoliczności: 1) albo obiedwie skale jednej, więc zarówno objętości, jak ciśnień, są większe niż skale drugiej, 2) albo jedna większa, druga mniejsza. W pierwszym przypadku do koincydencji powinno doprowadzić obracanie około osi tylko drugiej siatki o większych skalach celem skrócenia ich. Ta siatka atoli nie może być wykreślona na takim samym diagramacie, jak pierwsza, t. j. kąt między osiami ciśnień i objętości drugiej siatki nie może być równy takiemuż kątowi pierwszej. Jeżeli więc kąt między osiami pierwszej sieci jest prosty, kąt drugiej musi być rozwarty lub ostry; jeżeli kąt między osiami pierwszej sieci jest rozwarty lub ostry, kąt drugiej nie może być równy kątowi drugiej. A magat przy porównywaniu sieci eteru z powietrzem musiał zatem mieć sieć eteru, wykreśloną na diagramacie o skośnych osiach, albo też sieć powietrza wraz ze zrzutowaną siecią eteru otrzymywał na diagramacie o osiach skośnych. Podobnie przy porównywaniu  $\text{CO}_2$  i eteru. Gdy natomiast jedna ze skal pierwszej sieci jest większa od odpowiedniej skali drugiej sieci, druga mniejsza, wówczas nie wystarcza manipulowanie jedną z sieci; obie muszą się obracać około różnych osi; wynika z tego, że i pierwsza sieć musi posiadać zdolność obracania się około osi, co u A magata zaznaczone nie



jest. W tym przypadku obie dwie sieci powinny być wykreślone na prostokątnym diagramacie. Tak np. musiał postępować A m a g a t przy porównaniu  $\text{CO}_2$  z powietrzem i  $\text{CO}_2$  z etylenem.

7. Pomysł odmiennej metody, acz na tych samych zasadach opartej, powziął<sup>1)</sup> w roku 1896 C. R a v e a u. Sprawdzania dokonywał on przez

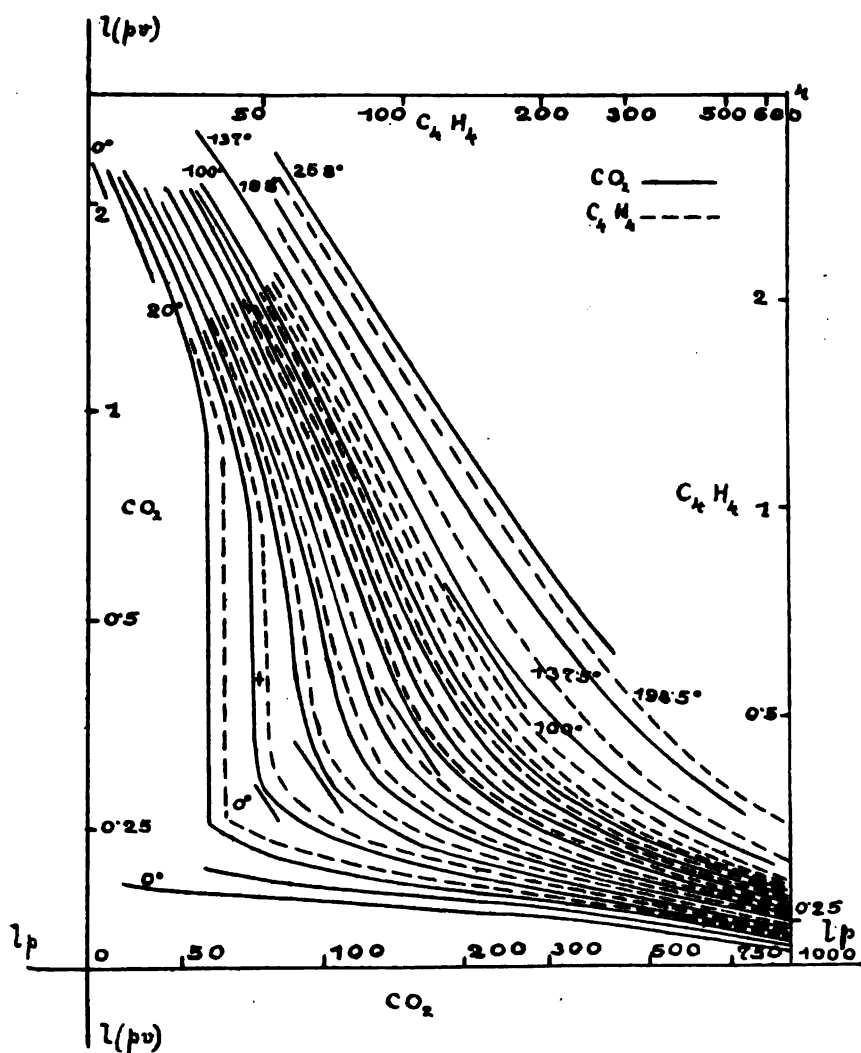


Fig. 4.

<sup>1)</sup> „Sur la vérification du théorème des états correspondants“. Comptes rendus 1896, t. 123, str. 100—101.

nakładanie siatek izoterm, lecz nakładanie to osiągał za pomocą przesuwania, a nie rzutowania. Jeżeli siatki izoterm ciał odrębnych różnią się między sobą tylko skalą ciśnień i objętości, można z jednej siatki otrzymać drugą, mnożąc jej ciśnienia i objętości przez pewne stałe współczynniki. Zamiast objętości i ciśnień biorąc logarytmy tych wielkości, otrzymamy siatki izoterm logarytmowych. Z siatki takiej jednego ciała powinniśmy otrzymać siatkę innego przez dodanie do wszystkich rzędnych i odciętych dwu stałych wielkości. Jeżeli zatem mamy sieci logarytmowe izoterm kilku ciał, to przesuwając równolegle wzdłuż osi odciętych i rzędnych, powinniśmy je doprowadzić do koincydencji. Tą metodą sprawdził<sup>1)</sup> Raveau hipotezę van der Waalsa co do bezwodnika węglowego i etylenu. Sieci logarytmowe tych ciał, nałożone przez przesuwanie, sprawiają w istocie wrażenie jednej sieci Fig. 4<sup>2)</sup>.

8. Zdawałoby się, że badania Amagata i Raveau poświadczają, iż prawo van der Waalsa jest ściśle, że odstępstwa od niego zaobserwowane przez Younga, pochodzą z niedokładności przyjętych ciśnień, temperatur i objętości krytycznych. Trzeba się było jednak przekonać czy i inne ciała prócz czterech, które badali Amagat i Raveau są równie zgodne, o ile przy sprawdzaniu będziemy się obchodzili bez elementów krytycznych. Przedewszystkiem należało sprawdzić, jak się zachowują w tym względzie ciała z którymi eksperymentowali Young i Ramsay.

Sprawdzenia hipotezy stanów odpowiednich co do tych ciał bez pomocy danych krytycznych dokonała w roku 1900 p. Krystyna Meyer<sup>3)</sup>. Określała ona wartości ciśnień i temperatur odpowiednich przez redukcję nie do punktu krytycznego, a do innego punktu odpowiedniego na powierzchni izoterm. Takimi punktami odpowiednimi będą punkta linii granicznej, w których stosunki objętości granicznych pary do objętości granicznych cieczy są jednakowe. Dowieść tego łatwo na podstawie równań (26\*) i (27\*). Ponieważ dwie wielkości  $F$  i  $\psi$  według (26\*) są funkcjami innej

<sup>1)</sup> „La loi des états correspondants et l'équation caractéristique des fluides”. Journal de Physique (3), t. 6, str. 432—439.

<sup>2)</sup> Jednostki ciśnień stanowią atmosfery. Dla objętości obrano jednostki 100 razy większe niż jednostki Amagata t. j. takie, przy jakich wartość iloczynu ( $p v$ ) dla każdego gazu byłaby 100 przy temperaturze 0° i pod ciśnieniem 1 atm.; jednostki te są dla jednakowych mas gazu w stosunku odwrotnym do ciężarów molekularnych. Punkt krytyczny oznaczony jest na diagramacie krzyżykiem według doświadczeń Amagata nad CO<sub>2</sub>. Dla wykazania zmian iloczynu ( $p v$ ), wykreślono w kilku punktach diagramatu kawałki prostych o równaniu  $p v = \text{stałej}$ .

<sup>3)</sup> „Ueber korrespondierende Zustände der Stoffe”. Zeitschrift für physikalische Chemie 1900, t. 32, str. 1—38.

wielkości  $\Pi$ , a według (27\*) wielkości  $\theta$ , zatem ich iloraz musi być funkcją jednej i drugiej:

$$(46) \quad \frac{F}{\psi} = \Phi_0(\Pi) = \Gamma_0(\theta).$$

Podstawiając do tych równań (46) wartości  $F$  i  $\psi$  według (10 a), otrzymamy ich formę nową:

$$(47) \quad \frac{W}{w} = \Phi_0(\Pi) = \Gamma_0(\theta).$$

Zatem dla dwu różnych ciał przy równych ciśnieniach nasycenia zredukowanych lub temperaturach zredukowanych stosunek  $\frac{W}{w}$  musi być jednakowy; naodwrot więc równość stosunków  $\frac{W}{w}$  dla dwu ciał przy pewnych temperaturach i pewnych ciśnieniach nasycenia świadczy, że te temperatury i te ciśnienia są odpowiednie. Ponieważ zaś wszystkie temperatury i ciśnienia odpowiednie są w stanie zredukować równanie charakterystyczne, więc też i temperatury lub ciśnienia, przy których stosunek  $\frac{W}{w}$  jest jednakowy, należy uważać za redukujące. Za temperatury i ciśnienia redukujące przyjmuje pani Meyer te, przy których stosunek  $\frac{W}{w}$  wynosi 100. Oblicza ona dla ciał badanych przez Younga stosunek  $\frac{W}{w}$  w różnych temperaturach i następnie znajduje drogą interpolacji temperatury, przy których ten stosunek wynosi 100. Temperatury te i ciśnienia nasycenia przy tych temperaturach powinny zredukować krzywe nasycenia. Okazuje się, że zredukowane w ten sposób krzywe nasycenia wcale identyczne nie są. Nadto następstwo krzywych o ile się je wykreśli, jest takie same jak następstwo krzywych, zredukowanych do danych krytycznych. Zatem prawo van der Waalsa nie jest ściśle dla ciał badanych przez Younga nawet wówczas, jeżeli przy sprawdzaniu nie będziemy wcale wprowadzali ciśnień i temperatur krytycznych.

## ROZDZIAŁ III.

## STOSOWANIE PRAWA van der WAALSA DO KLASYFIKACYI CIAŁ.

1. W poprzednim rozdziale widzieliśmy, że rachunki Younga, Krystyny Meyer, Amagata, Raveau wykazały, iż nie wszystkie ciała w równym stopniu podlegają prawu o stanach odpowiednich. Krzywe zredukowane jednego ciała często zgadzają się lepiej z krzywami pewnego drugiego ciała niż z krzywami innego trzeciego. Już Young podzielił ciała, dla których sprawdzał hipotezę van der Waalsa na grupy według stopnia, w jakim prawo to do nich stosuje się. Okazało się, że grupa alkoholów nie zgadza się z innymi ciałami. Young postanowił zbadać, czy alkohole są wzajemnie względem siebie zgodne co do krzywych nasyceń i krzywych granicznych. W tym celu szukał on stosunków temperatur, objętości molekularnych granicznych pary i cieczy alkoholów etylowego i propylowego do metylowego, alkoholu propylowego do etylowego przy ciśnieniach odpowiednich; podobnie wyliczał stosunki ciśnień nasyceń, objętości granicznych pary i cieczy tych samych ciał przy temperaturach odpowiednich. Okazało się, że przy ciśnieniach odpowiednich stosunki są prawie stałe, zatem prawo van der Waalsa stosuje się ściśle do alkoholów między sobą. Przy temperaturach odpowiednich zgodność jest o wiele mniejsza<sup>1)</sup>. Można by więc 12 ciał, z którymi pierwotnie eksperymentował Young, podzielić na dwie grupy, wewnątrz których prawo stanów odpowiednich zwłaszcza przy ciśnieniach jest ściśle. Do pierwszej grupy należą: benzol, cztery jego pochodne, eter, czterochlorek węgla i chlorek cyny; do drugiej alkohole: metylowy, etylowy i propylowy; kwas octowy stoi odosobniony lecz zbliża się do alkoholów.

2. Mathias również starał się podzielić ciała na pewne grupy, w których obrębie prawo stanów odpowiednich byłoby słuszne. Użył on odkrytego w roku 1886<sup>2)</sup> przez siebie i Cailleteta prawa średnicy prostoliniowej. Prawo to orzeka, że średnia arytmetyczna gęstości granicznych pary i cieczy jest funkcją liniową temperatury; gdy wykreślimy krzywą zależności gęstości pary nasyconej i gęstości granicznej cieczy od temperatury w ten sposób, aby gęstości były rzędnymi, temperatury odciętami i oznaczymy środki cięciw pionowych tej krzywej, utworzą one prostą „średnicę”, pochyloną pod pewnym kątem do osi  $x$ -ów.

<sup>1)</sup> Tablice XVIII i XIX, tomu 33, seryj 5, Philosophical Magazine 1892.

<sup>2)</sup> „Recherches sur les densités des gaz liquéfiés et des leurs vapeurs saturées“ - Comptes Rendus 1886, t. CII, str. 1202-1207.

Cailletet i Mathias odkryli to prawo, badając gęstości pary nasyconej i gęstości graniczne cieczy bezwodnika podazotawego  $N_2O$ , etylenu  $C_2H_4$  i bezwodnika węglowego  $CO_2$ . Mathias następnie sprawdził to prawo na podstawie doświadczeń Younga dla 12 ciał, obejmujących pierwszą seryę doświadczeń tego badacza <sup>1)</sup>. Okazało się, że jest ono ściśle dla wszystkich ciał badanych z wyjątkiem alkoholów. Te ostatnie związki, a także i woda, posiadają średnicę cokolwiek krzywą. Nadto S. Young i G. L. Thomas sprawdzali o ile stosuje się ono do 5-u estrów, mianowicie: mrówczanu metylowego i etylowego, octanu metylowego i etylowego i propionianu metylowego <sup>2)</sup>. Okazało się, że średnica tych ciał jest z wielkiem przybliżeniem prostoliniowa.

W ogóle prawo to jest prawie zupełnie ściśle względem ciał, nieulegających polimeryzacji ani dysocjacji.

Prawo średnicy prostolinijnej napiszemy:

$$(48) \quad \frac{\Delta + \delta}{2} = a\tau + \beta,$$

gdzie  $\Delta$  oznacza gęstość pary nasyconej,  $\delta$  gęstość graniczną cieczy,  $\tau$  temperaturę,  $a$  jest współczynnikiem kątowym średnicy,  $\beta$  odcinkiem jej na osi gęstości.

Mathias i Cailletet zaproponowali użycie tego prawa do obliczania gęstości krytycznej <sup>3)</sup>. Wiemy, że w stanie krytycznym ciała obie gęstości graniczne pary i cieczy stają się równe; równanie (48) przyjmuje dla punktu krytycznego postać:

$$(49) \quad \delta_k = aT_k + \beta.$$

Do obliczenia współczynników  $a$  i  $\beta$  wystarcza mieć dwa punkty średnicy, czyli znać gęstości pary i cieczy graniczne przy dwu różnych temperaturach. Znając  $a$  i  $\beta$  oraz  $T_k$ , możemy obliczyć  $\delta_k$ . W cytowanej pracy <sup>4)</sup> oblicza Mathias gęstość krytyczną 12-u ciał Younga. Young tą samą drogą <sup>5)</sup> znalazł gęstość krytyczną owych ciał w swej pracy o oznaczaniu objętości

<sup>1)</sup> „Sur la densité critique et la théorie des états correspondants”. Annales de Toulouse 1892, t. VI, str. 1—34.

<sup>2)</sup> „On the Determination of the Critical Density”. Phil. Trans. 1892, t. XXXIV, str. 507—510.

<sup>3)</sup> Comptes Rendus: tom CII, str. 1202; tom CIV, str. 1563.

<sup>4)</sup> „Sur la densité critique... etc.”. Annales de Toulouse 1892, t. VI, str. 1—34. Comptes Rendus 1892, t. CXV, str. 35.

<sup>5)</sup> „On the Determination of the Critical Volumes”. Philosophical Magazine 1892, t. XXXIV, str. 503—505.

krytycznych i otrzymał zgodne z Mathiasem rezultaty. Nadto w przytoczonej pracy Young i Thomas znaleźli tą drogą gęstość krytyczną 5 estrów. Ten sposób oznaczania gęstości krytycznej okazał się jednym z najdokładniejszych i był wielokrotnie stosowany. Young użył go do wyznaczenia krytycznych objętości molekularnych:  $m v_k = \frac{m}{\delta_k}$  przy redukowaniu krzywych granicznych.

Prawa średnicy prostoliniowej użył Mathias<sup>1)</sup> do sprawdzenia hipotezy van der Waals'a. Z równań (48) i (49) łatwo wyrugować stałą  $\beta$ ; otrzymamy wówczas:

$$(50) \quad \frac{\delta + \Delta}{2} - \delta_k = a (\tau - T_k).$$

Równaniu (50) możemy nadać postać zredukowaną:

$$(50^*) \quad \delta_k \left( \frac{\delta + \Delta}{2 \delta_k} - 1 \right) = a T_k \left( \frac{\tau}{T_k} - 1 \right).$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$(10 a) \quad \frac{\tau}{T_k} = \theta,$$

i rozwiążmy równanie (50\*) względem wielkości  $\frac{\delta + \Delta}{2 \delta_k}$ ; otrzymamy:

$$(51) \quad \frac{\delta + \Delta}{2 \delta_k} = 1 - \frac{a T_k}{\delta_k} (1 - \theta).$$

Mathias oznacza przez  $a$  współczynnik przy  $(1 - \theta)$ :

$$(52) \quad \frac{-a T_k}{\delta_k} = a,$$

zatem (51) przybiera postać:

$$(53) \quad \frac{\delta + \Delta}{\delta_k} = 2 [1 + a (1 - \theta)].$$

Stosownie do hipotezy van der Waals'a, według równań:

$$(40 a) \quad \frac{\delta}{\delta_k} = E_2(\theta) \quad \text{i} \quad (40) \quad \frac{\Delta}{\delta_k} = E_1(\theta),$$

<sup>1)</sup> „Sur la densité critique... etc.“. Annales de Toulouse 1892, t. VI, str. 1—34  
Comptes Rendus 1892, t. CXV, str. 35.

gęstość pary nasyconej i gęstość graniczna cieczy zredukowana jest jednakową dla wszystkich ciał funkcją zredukowanej temperatury. Wynika stąd, że i suma obydwu gęstości zredukowanych musi być identyczną dla wszystkich ciał funkcją temperatury zredukowanej:

$$(40b) \quad \frac{\delta + \Delta}{\delta_r} = E(\theta).$$

Ponieważ w równaniu (53) jedynie współczynnik  $a$  skupia w sobie wielkości zależne od natury ciała, przeto według hipotezy van der Waals'a, aby warunek (40 b) mógł być spełniony,  $a$  musi być wielkością dla wszystkich ciał jednakową. Mathias oblicza wartości  $a$  dla 12-u ciał Young'a, nadto dla bezwodnika siarkawego  $\text{SO}_2$ , bezwodnika węglowego  $\text{CO}_2$  i chlorowodoru  $\text{HCl}$ , znajduje jednak różne liczby, co wykazuje raz jeszcze, że prawo stanów odpowiednich nie jest ściśle. Ten współczynnik  $a$  służy Mathiasowi za podstawę podziału ciał na grupy, wewnątrz których prawo omawiane należy uważać za prawie ściśle. Jedna grupa wykazuje dla współczynnika  $a$  mniej więcej stałą wartość 0.9518; druga posiada wartość  $a$ , wynoszącą przeciętnie 1.050; do żadnej z tych grup nie można zaliczyć bezwodnika węglowego, którego  $a$  wynosi 0.858, i chlorowodoru o wartości  $a$  znacznie większej niż 1:

| Grupa I                         |        | Grupa II                           |        | Grupa III     |       |
|---------------------------------|--------|------------------------------------|--------|---------------|-------|
| Ciało                           | $a$    | Ciało                              | $a$    | Ciało         | $a$   |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ | 1.0234 | $\text{C}_6\text{H}_5\text{Fl}$    | 0.9165 | $\text{CO}_2$ | 0.858 |
| $\text{SO}_2$                   | 1.0534 | $\text{CCl}_4$                     | 0.9181 |               |       |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ | 1.0575 | $\text{C}_6\text{H}_6$             | 0.9359 |               |       |
| $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$ | 1.0673 | $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$    | 0.9557 |               |       |
|                                 |        | $\text{C}_6\text{H}_5\text{I}$     | 0.9572 |               |       |
|                                 |        | $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ | 0.9600 |               |       |
|                                 |        | $\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$    | 0.9639 |               |       |
|                                 |        | $\text{CH}_3\text{COOH}$           | 0.9647 |               |       |
|                                 |        | $\text{SnCl}_4$                    | 0.9945 |               |       |

W innej pracy Mathias podaje  $a$ <sup>1)</sup>, obliczone dla szeregu ciał różnego składu chemicznego. Wartości  $a$  są bardzo różne:

<sup>1)</sup> „La loi du diamètre rectiligne et les lois des états correspondants“. Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 3-a serya, tom II 1889, str. 1–28.

| Ciało       | $a$    | Ciało             | $a$    | Ciało             | $a$   |
|-------------|--------|-------------------|--------|-------------------|-------|
| Azot        | 0·6813 | Dwusiarczek węgla | 0·9537 | Izomasłan metylu  | 1·045 |
| Chlor       | 0·7675 | Hexan             | 0·9666 | Octan metylu      | 1·049 |
| Tlen        | 0·8000 | Mrówczan metylu   | 0·997  | Propionian metylu | 1·055 |
| Izopentan   | 0·8923 | Amoniak           | 0·002  | Octan etylu       | 1·061 |
| Brom        | 0·8964 | Heptan            | 1·0135 | Masłan metylu     | 1·074 |
| Dekan norm. | 0·9277 | Mrówczan etylu    | 1·021  | Octan propylu     | 1·088 |
| Pentan      | 0·9307 | Mrówczan propylu  | 1·025  | Propionian etylu  | 1·090 |

Young podaje cokolwiek odmienne wartości dla kilkunastu ciał, z którymi eksperymentował sam lub wspólnie z Ramsay'em i Thomasem:

| Ciało                              | $a$   | Ciało                    | $a$   |
|------------------------------------|-------|--------------------------|-------|
| $\text{CCl}_4$                     | 0·899 | $\text{CH}_3\text{COOH}$ | 0·993 |
| $\text{C}_6\text{H}_6$             | 0·921 | Mrówczan metylu          | 0·997 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{F}$     | 0·932 | Mrówczan etylu           | 0·021 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$    | 0·953 | Propionian metylu        | 1·021 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$    | 0·957 | $\text{CH}_3\text{OH}$   | 1·030 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{I}$     | 0·957 | Octan metylu             | 1·047 |
| $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ | 0·972 | Octan etylu              | 1·055 |
| $\text{SnCl}_4$                    | 0·988 |                          |       |

Z powyższego wynika możliwość grupowania ciał według kształtu równania charakterystycznego zredukowanego. Wprawdzie samego kształtu nie znamy, ale możemy się przekonać, czy do danych ciał stosuje się to samo równanie zredukowane, czy różne. Ciała, mające jednakowe równanie zredukowane, stanowią jedną grupę. Magat zaznacza<sup>1)</sup>, że prawo van der Waals'a staje się tym sposobem narzędziem nowej klasyfikacji ciał.

3. Young wprowadził inną wielkość  $b$  przy sprawdzaniu prawa van der Waals'a, której można również użyć do klasyfikacji ciał na grupy. Jest nią stosunek teoretycznej objętości krytycznej  $v_0$  do rzeczywistej  $v_k$ . Przez  $v_0$  rozumie się objętość, jaką zajmowałoby ciało przy temperaturze krytycznej, gdyby prawo Gay-Lussaca—Mariotte'a było ściśle:  $v_0 = \frac{R T_k}{p_k}$ , przeto mamy  $b = \frac{v_0}{v_k} = \frac{R \cdot T_k}{p_k v_k}$ . Wielkość ta powinna być dla wszystkich ciał jednaka, gdyby prawo van der Waals'a

<sup>1)</sup> „Statique expérimentale de fluides“. Congrès International de Physique. Rapports, tom I, 1900, str. 551—582.



było ściśle. Okazuje się, że tak nie jest. Young <sup>1)</sup> podał  $b$  dla 22 ciał z którymi eksperymentował. Wartości te wynoszą:

| Ciało                              | $b$  | Ciało            | $b$  | Ciało                           | $b$  |
|------------------------------------|------|------------------|------|---------------------------------|------|
| $\text{CCl}_4$                     | 3·65 | Octan metylu     | 3·87 | Propionian metylu               | 3·94 |
| $\text{C}_6\text{H}_6$             | 3·71 | Izomasłan metylu | 3·87 | Octan etylu                     | 3·95 |
| $\text{SnCl}_4$                    | 3·76 | Mrówczan etylu   | 3·88 | $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ | 4·02 |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$    | 3·77 | Octan propylu    | 3·90 | $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$ | 4·02 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{I}$     | 3·88 | Masłan metylu    | 3·90 | $\text{CH}_3\text{OH}$          | 4·52 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Fl}$    | 3·79 | Propionian etylu | 3·92 | $\text{CH}_3\text{COOH}$        | 5·00 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$    | 3·80 | Mrówczan metylu  | 3·93 |                                 |      |
| $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ | 3·83 | Mrówczan propylu | 3·94 |                                 |      |

Dieterici <sup>2)</sup> obliczał również  $b$  dla tych 22 ciał, nadto dla dwóch węglowodorów; wartości jego różnią się nieco od znalezionych przez Younga. Próbował przytem podzielić ciała na grupy według wartości  $b$ . Pierwsza z nich obejmuje 10 ciał, zbliżonych do benzolu i eteru;  $b$  wynosi dla nich przeciętnie 3·75. Druga również 10 ciał, estry kwasów tłuszczowych, które okazują  $b$  równe przeciętnie 3·9. Do trzeciej zaliczył alkohole i kwas octowy; wartości  $b$  w tej grupie okazują znaczne różnice od 4·02 do 5·00:

| Grupa I                            |       | Grupa II          |       | Grupa III                       |      |
|------------------------------------|-------|-------------------|-------|---------------------------------|------|
| Ciało                              | $b$   | Ciało             | $b$   | Ciało                           | $b$  |
| $\text{CCl}_4$                     | 3·67  | Mrówczan propylu  | 3·87  | $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ | 4·02 |
| $\text{C}_6\text{H}_6$             | 3·74  | Izomasłan metylu  | 3·87  | $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$ | 4·02 |
| $\text{SnCl}_4$                    | 3·74  | Mrówczan etylu    | 3·89  | $\text{CH}_3\text{OH}$          | 4·52 |
| $\text{C}_3\text{H}_8$ , Izopentan | 3·765 | Propionian metylu | 3·91  | $\text{CH}_3\text{COOH}$        | 5·00 |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Fl}$    | 3·79  | Masłan            | 3·91  |                                 |      |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$    | 3·80  | Mrówczan          | 3·93  |                                 |      |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{I}$     | 3·80  | Propionian etylu  | 3·93  |                                 |      |
| $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ | 3·815 | Mrówczan propylu  | 3·945 |                                 |      |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$    | 3·82  | Octan metylu      | 3·95  |                                 |      |
| $\text{C}_6\text{H}_{14}$ Hexan    | 3·83  | Octan etylu       | 3·95  |                                 |      |

<sup>1)</sup> „Note on the Generalizations of van der Waals“. Phil. Mg. tom XXXVII, 1894, str. 1—8.

<sup>2)</sup> „Ueber den kritischen Zustand“. Annalen der Physik 1899, t. 69, str. 685—705.

Natanson<sup>1)</sup> już w roku 1895 obliczył stosunek  $\frac{b}{R}$  dla 6-ciu ciał: CO<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>4</sub>, SO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>O, (C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)<sub>2</sub>O, N<sub>2</sub>. Wyraził ten stosunek  $\frac{b}{R} = \frac{T_k}{p_k v_k}$  w jednostce:  $\frac{\text{stopień}}{\text{dyna/cm}^2 \cdot \text{cm}^3}$ . Z wartości stosunku  $\frac{b}{R}$ , podanych przez Natansona, możemy otrzymać wartości  $b$ , mnożąc przez  $R$ . Dieterici podaje  $R = 85434 \cdot g = 82893 \cdot 10^3$ , wyrażoną w jednostce:  $\frac{\text{dyna/cm}^2 \cdot \text{cm}^3}{\text{stopień}}$ . Uzupełnioną w ten sposób tablicę Natansona przytaczam:

| Ciało                                           | $\frac{b}{R}$ | $b$   |
|-------------------------------------------------|---------------|-------|
| N <sub>2</sub> O                                | 0·389         | 3·225 |
| C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>                   | 0·424         | 3·515 |
| (C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O | 0·430         | 3·564 |
| CO <sub>2</sub>                                 | 0·4344        | 3·601 |
| SO <sub>2</sub>                                 | 0·436         | 3·614 |
| N <sub>2</sub>                                  | 0·47          | 3·896 |

Dla eteru otrzymał Natanson wartość odmienną od podanej przez Younga i Dieterici'ego. Dieterici<sup>2)</sup> obliczył niezależnie wartości  $b$  dla reszty pięciu ciał innych i dla tlenu. Wartości te przytaczam:

|                               | $b$  | $b$              |      |
|-------------------------------|------|------------------|------|
| N <sub>2</sub> O              | 3·19 | N <sub>2</sub> { |      |
| C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> | 3·42 |                  | 3·92 |
| CO <sub>2</sub>               | 3·61 |                  | 4·66 |
| SO <sub>2</sub>               | 3·62 | O <sub>2</sub> { |      |
|                               |      |                  | 4·77 |
|                               |      | 4·85             |      |
|                               |      | 5·00             |      |

4. Klasyfikacją ciał na grupy zajmował się również H a p p e l<sup>3)</sup>. Porównał on rtęć i ciecze, należące do grupy benzolu i eteru, między sobą i z odkrytymi przez R a m s a y'a gazami: argonem, kryptonem i xenonem. Rtęć porównywa z grupą benzolu na podstawie równania krzywej nasycenia

<sup>1)</sup> „O temperaturze krytycznej wodoru“. Rozprawy Akademii Umiejętności. Serya II, tom VII, 1895, str. 374—383.

<sup>2)</sup> „Ueber den kritischen Zustand“. Annalen der Physik 1899, t. 69, str. 685—705.

<sup>3)</sup> „Bemerkungen zum Gesetz der korrespondierenden Zustände und zur Zustandsgleichung“. Annalen der Physik 1904. Serya IV, t. 13, zeszyt 2, str. 340—352.

zredukowanej, równania czysto empirycznego, które podaje van der Waals<sup>1)</sup>, mianowicie:

$$(54) \quad -v^0 \frac{P}{p_k} = f \frac{T_k - \tau}{\tau}.$$

Ze znanych doświadczeń Younga i Ramsaya<sup>2)</sup>, Happel oblicza, iż wartość  $f$ , która według van der Waalsa powinna być stała i jednakowa dla wszystkich ciał, nie jest ani jednakowa dla pięciu ciał grupy eteru t. j. eteru, benzolu, fluorobenzolu, czterochloru węgla i chloru cyny, ani stała dla jednego ciała; waha się ona między 3·061 i 2·778. Ponieważ wahania są niewielkie, można przyjąć wielkość na  $f$  średnią, przybliżoną<sup>3)</sup>.

Young i Regnault podają wartości ciśnienia nasycenia rtęci w temperaturach 280° i 410° C.<sup>3)</sup>, mianowicie:

| $t$  | $\tau$ | $P$     |       |        |
|------|--------|---------|-------|--------|
| 280° | 553°   | 155·17  | 157·8 | 156·5  |
| 410° | 683°   | 1853·73 | 180·1 | 1832·4 |

Podstawiając wartości:  $f$ ,  $\tau$  i  $P$  do równania (54), otrzymamy dwa równania o dwóch niewiadomych, z których dadzą się obliczyć  $T_k$  i  $p_k$ . Happel otrzymuje dla  $T_k$  wartość 1009°, dla  $p_k$  — 44700<sup>m</sup>/m, czyli 59 atm. Są to wartości zbyt małe, gdyż według badań pary rtęci przez Cailleteta, Collardeau i Rivière'a<sup>4)</sup> w temperaturze znacznie wyższej, wynoszącej 1153°, której odpowiada ciśnienie nasycenia 162 atm., rtęć znajduje się jeszcze daleko od stanu krytycznego. W analogiczny sposób porównywa autor rtęć z grupą gazów atmosferycznych. Z doświadczeń Ramsaya i Traversa<sup>5)</sup> oblicza  $f$  dla argonu, kryptonu i ksenonu; wartość  $f$  waha się między 2·46 i 2·16. Za pomocą wzoru (54) i danych, dotyczących się rtęci, według cytowanych badaczy, mianowicie:

| $\tau$ | $P$       |
|--------|-----------|
| 1153°  | 162 atm., |
| 873°   | 223 atm., |

<sup>1)</sup> „Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes“. Wydanie 2-gie 1889, str. 138 i 158.

<sup>2)</sup> Badał również zmienność tej funkcji T. Estreicher w cytowanej pracy: „O ciśnieniach nasycenia tlenu“.

<sup>3)</sup> Young: Transactions of the Chemical Society, tom 59, 1891, str. 620,  $t$  oznacza temperaturę zwykłą,  $\tau$  — temperaturę bezwzględną,  $P$  — ciśnienie nasycenia w millimetrach słupa rtęciowego.

<sup>4)</sup> Comptes Rendus, tom 130, 1900, str. 1585.

<sup>5)</sup> „The experimental study of gases“. Londyn 1901.

znajduje H a p p e l, że dla rtęci dane krytyczne wynoszą:  $T_k = 1370^\circ$  i  $p_k = 456$  atm., które są prawdopodobniejsze. Można więc powiedzieć, że prawo stanów odpowiednich zachowuje swe znaczenie dla rtęci i gazów atmosferycznych, dla rtęci zaś i grupy eteru nie sprawdza się. Wywodom H a p p e l a możnaby zarzucić, że opierają się na wzorze van der W a a l s a, który sam nie jest ścisły. H a p p e l przytacza również wartości zredukowanych ciśnień nasyceń w zależności od temperatur zredukowanych dla argonu, ksenonu i kryptonu, obliczone według doświadczeń R a m s a y'a i T r a v e r s a; dane te umożliwiają wykreślenie krzywych nasyceń zredukowanych tych gazów; dokonałem tego na figurze 5. Krzywe okazują się dość zgodne. Natomiast porównanie ich z krzywami grupy eteru okazuje rażąco sprzeczności między obiema grupami. Wydzielenie nowej grupy gazów atmosferycznych jest zasługą H a p p e l a. Co do rtęci, którą zalicza do tej grupy, niepodobna jest stwierdzić słuszności tego wniosku wobec braku danych krytycznych dla rtęci.

6. Usiłowania M a t h i a s a, Y o u n g a i H a p p e l a, zmierzające do podziału ciał na grupy, wewnątrz których prawo van der W a a l s a byłoby słuszne, zostały uwieńczone dość pomyślnym skutkiem; dlatego pragnąłem przekonać się za pomocą wykreślenia zredukowanych krzywych nasyceń, czy i inne dotychczas zbadane ciała nie dadzą się podzielić na grupy i zarazem sprawdzić, czy pozorne stwierdzenie hipotezy o stanach odpowiednich przez van der W a a l s a, M a t h i a s a, A m a g a t a i R a v e a u nie pochodziło stąd, że ci badacze porównywali między sobą ciała, należące do jednej grupy. Gdyby ciała, przez tych badaczy uznane za zgodne, okazały się należącymi do grup różnych, świadczyłoby to o niedostatecznej dokładności ich rachunków lub doświadczeń; wykreślenie bowiem bezpośrednio krzywych charakterystycznych zredukowanych przenosi dokładnością inne metody sprawdzania, nie komplikując go przez wpływ niezależnych od teorii van der W a a l s a hipotez, wzorów, założeń i t. p., i daje rezultaty najbardziej namacalne; dla tego też N a t a n s o n tak wielką wagę przywiązywał do obliczania elementów termodynamicznych zredukowanych: on to, jak zaznacza A m a g a t <sup>1)</sup>, głównie zalecał redukcję izoterm, jako najlepszą metodę sprawdzenia prawa o stanach odpowiednich.

Jako podstawę sprawdzeń obrałem krzywą prężności par nasyconych dla tego, że z jednej strony temperatury i ciśnienia krytyczne są z pomiędzy danych krytycznych najpewniejsze, z drugiej zaś danych co do zależności ciśnień nasyceń od temperatur dostarczają doświadczenia różnych badaczy najobficiej. Krzywe większości ciał, których do sprawdzeń

<sup>1)</sup> Congrès Int. de Physique, Rapports, tom I. 1900, str. 574.

użyłem, są odtworzone na figurze 5-ej. Nie jest to pierwotna tablica, tej odtworzyć nie mogłem z powodu zbyt zagmatwanego rysunku, powstałego skutkiem skrzyżowania się wielkiej liczby krzywych. Dokładność wykreślenia ciśnień i temperatur zredukowanych sięga do 3-ej cyfry dziesiętnej. Odpowiada ona mniej więcej dokładności doświadczeń Younga. Rzadko bowiem (jedynie w pobliżu punktu krytycznego) przy tej samej temperaturze otrzymywał on, powtarzając doświadczenie, ciśnienia nasycenia tak różne, by powodowały różnicę w ciśnieniu zredukowanym o jedność na trzecim miejscu; zwykle różnica nie przekraczała czwartej cyfry. Uważałem zatem dokładność moich wykreszeń za wystarczającą.

Przedewszystkiem chodziło mi o zbadanie, jak się zmienia kształt krzywej nasycenia tego samego ciała, przy zmianie wartości elementów krytycznych. W tym celu, biorąc te same dane dla zależności ciśnień nasycenia od temperatur, wyrażonej przez wzór:

$$(28) \quad P = H_1(\tau),$$

przyjmowałem dane krytyczne tego samego ciała według kilku autorów i obliczałem tyleż seryj danych do krzywej nasycenia zredukowanej, wyrażonej przez równanie:

$$(28^*) \quad \Pi = X_1(\theta).$$

W ten sposób na figurze 5-ej wykreśliłem 3 krzywe benzolu; dane zależności (28) pochodzą od Younga; dane krytyczne brałem raz według Younga, drugi raz według Zajonczeńskiego, trzeci według Ramsay'a. Ponieważ Young zwykle powtarza doświadczenia kilkakrotnie, zmieniając ilość (masę) ciała lub aparat do mierzenia ciśnień i przy jednakowych temperaturach cokolwiek różne otrzymuje ciśnienia nasycenia, przeto brałem zwykle wartość średnią, lecz nie ze wszystkich danych, tylko z dwu skrajnych.

Dane krytyczne benzolu <sup>1)</sup>.

|       | według Younga         | według Zajonczeńskiego | według Ramsay'a       |
|-------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| $T_k$ | 561.5° abs            | 553.6°                 | 564.7°                |
| $P_k$ | 36395 <sup>m</sup> /m | 37620 <sup>m</sup> /m  | 45980 <sup>m</sup> /m |

<sup>1)</sup> Young: Trans. Chem. Soc., t. XV. 1899, str. 507. Zajonczeński: Wied. Beibl., t. III. 1879, str. 741. Ramsay: Proc. Roy. Soc., t. XXXI. 1880, str. 194.

Dane co do ciśnień nasycenia <sup>1)</sup> i rezultaty obliczeń.

| Zależność            |                                   | Zależność     |        | $II = X_1(\theta)$     |        |                 |        |
|----------------------|-----------------------------------|---------------|--------|------------------------|--------|-----------------|--------|
| $P = H_1(\tau)$      |                                   | według Younga |        | według Zajonczeńskiego |        | według Ramsay'a |        |
| $\tau$               | $P$                               | $\theta$      | $\Pi$  | $\theta$               | $\Pi$  | $\theta$        | $\Pi$  |
| 263 <sup>3</sup> abs | 14·97 <sup>m</sup> / <sub>m</sub> | 0·4681        | 0·0004 | 0·4751                 | 0·0004 | 0·4657          | 0·0003 |
| 273                  | 26·54                             | 0·4862        | 0·0007 | 0·4931                 | 0·0007 | 0·4834          | 0·0006 |
| 283                  | 45·19                             | 0·5040        | 0·0012 | 0·5112                 | 0·0012 | 0·5012          | 0·0010 |
| 293                  | 74·13                             | 0·5218        | 0·0020 | 0·5293                 | 0·0020 | 0·5189          | 0·0016 |
| 303                  | 117·45                            | 0·5396        | 0·0032 | 0·5473                 | 0·0031 | 0·5367          | 0·0026 |
| 313                  | 180·2                             | 0·5574        | 0·0049 | 0·5654                 | 0·0048 | 0·5543          | 0·0039 |
| 323                  | 268·3                             | 0·5752        | 0·0074 | 0·5834                 | 0·0071 | 0·5720          | 0·0058 |
| 333                  | 388·51                            | 0·5930        | 0·0107 | 0·6015                 | 0·0103 | 0·5897          | 0·0084 |
| 343                  | 548·16                            | 0·6109        | 0·0151 | 0·6196                 | 0·0146 | 0·6074          | 0·0119 |
| 353                  | 755                               | 0·6287        | 0·0207 | 0·6376                 | 0·0201 | 0·6251          | 0·0164 |
| 363                  | 1008·5                            | 0·6465        | 0·0277 | 0·6557                 | 0·0268 | 0·6458          | 0·0219 |
| 373                  | 1335·5                            | 0·6643        | 0·0367 | 0·6738                 | 0·0355 | 0·6605          | 0·0290 |
| 383                  | 1739                              | 0·6821        | 0·0478 | 0·6918                 | 0·0462 | 0·6782          | 0·0378 |
| 393                  | 2230                              | 0·6999        | 0·0613 | 0·7099                 | 0·0593 | 0·6959          | 0·0485 |
| 403                  | 2815                              | 0·7177        | 0·0773 | 0·7280                 | 0·0748 | 0·7137          | 0·0612 |
| 413                  | 3520                              | 0·7355        | 0·0967 | 0·7460                 | 0·0936 | 0·7314          | 0·0766 |
| 423                  | 4335                              | 0·7533        | 0·1191 | 0·7641                 | 0·1152 | 0·7490          | 0·0943 |
| 433                  | 5300                              | 0·7711        | 0·1456 | 0·7821                 | 0·1409 | 0·7668          | 0·1153 |
| 443                  | 6384                              | 0·7889        | 0·1754 | 0·8002                 | 0·1697 | 0·7845          | 0·1388 |
| 453                  | 7617                              | 0·8068        | 0·2093 | 0·8132                 | 0·2025 | 0·8022          | 0·1657 |
| 463                  | 9045·5                            | 0·8246        | 0·2485 | 0·8363                 | 0·2404 | 0·8199          | 0·1967 |
| 473                  | 10649·5                           | 0·8424        | 0·2926 | 0·8544                 | 0·2831 | 0·8376          | 0·2316 |
| 483                  | 12454                             | 0·8602        | 0·3422 | 0·8725                 | 0·3310 | 0·8553          | 0·2709 |
| 493                  | 14493                             | 0·8780        | 0·3982 | 0·8905                 | 0·3853 | 0·8730          | 0·3152 |
| 503                  | 16827·5                           | 0·8958        | 0·4624 | 0·9086                 | 0·4473 | 0·8907          | 0·3660 |
| 513                  | 19353                             | 0·9136        | 0·5317 | 0·9267                 | 0·5144 | 0·9084          | 0·4209 |
| 523                  | 22180                             | 0·9314        | 0·6094 | 0·9447                 | 0·5896 | 0·9261          | 0·4824 |
| 533                  | 25329                             | 0·9492        | 0·6958 | 0·9628                 | 0·6731 | 0·9439          | 0·5507 |
| 543                  | 28850·5                           | 0·9670        | 0·7927 | 0·9808                 | 0·7669 | 0·9616          | 0·6257 |
| 553                  | 32779                             | 0·9849        | 0·9007 | 0·9989                 | 0·8713 | 0·9793          | 0·7129 |
| 557·3                | 34594                             | 0·9925        | 0·9505 |                        |        | 0·9869          | 0·7524 |
| 559·1                | 35436                             | 0·9957        | 0·9736 |                        |        | 0·9801          | 0·7707 |
| 561                  | 36226                             | 0·9991        | 0·9954 |                        |        | 0·9934          | 0·7879 |
| 561·5                | 36395                             | 1·            | 1·     |                        |        | 0·9943          | 0·7915 |

} Większe niż  
jedność

<sup>1)</sup> Young: loc. cit., str. 501, 492 i 493.

Wykreślone krzywe benzolu okazują wspólny początek u dołu i coraz większą rozbieżność ku górze. Kształt ich jest podobny. Jednakże dane Younga co do ciśnień nasycenia nie są w zgodzie z danymi krytycznymi Zajonczeńskiego i Ramsaya; krzywe, według tych danych wykreślone, nie kierują się ku punktowi krytycznemu, gdzie  $\Pi = 1$  i  $\theta = 1$ , są natomiast w zgodzie z danymi krytycznymi Younga, bo odpowiednia krzywa zmierza do punktu o współrzędnych 1/1.

W ogóle dowodem, że dane zależności (28) są w zgodzie z pewnymi danymi krytycznymi, jest dążność krzywej nasycenia zredukowanej ku punktowi 1/1. Opierając się na tem, porównywałem kształt dwóch krzywych jednego ciała takich, by dane co do zależności (28) były w zgodzie z danymi krytycznymi, krótko mówiąc normalnych; jeśli dane dla nich pochodzą od dwu badaczy. Tak postąpiłem z eterem. Zużytkowałem w tym celu doświadczenia Younga i Battelli'ego <sup>1)</sup>.

Krzywa nasycenia eteru według Younga i Ramsaya.

Dane krytyczne.

$$T_k = 467.4^{\circ} \text{ abs}, \quad p_k = 27060^{\text{m}}/\text{m} = 35.61 \text{ atm.}$$

| Zależność $P=H_1(\tau)$ |                       | Zależność $\Pi=X_1(\theta)$ |        | Zależność $P=H_1(\tau)$ |                        | Zależność $\Pi=X_1(\theta)$ |        |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------------|--------|-------------------------|------------------------|-----------------------------|--------|
| $\tau$                  | $P$                   | $\theta$                    | $\Pi$  | $\tau$                  | $P$                    | $\theta$                    | $\Pi$  |
| 255.27 <sup>o</sup> abs | 73.65 <sup>m</sup> /m | 0.5461                      | 0.0027 | 383 <sup>o</sup> abs    | 6081.5 <sup>m</sup> /m | 0.8194                      | 0.2247 |
| 262.67                  | 110.65                | 0.5620                      | 0.0041 | 388                     | 6775.5                 | 0.8301                      | 0.2504 |
| 272.93                  | 184.1                 | 0.5839                      | 0.0068 | 393                     | 7515.5                 | 0.8408                      | 0.2777 |
| 284.96                  | 361.4                 | 0.6097                      | 0.0117 | 398                     | 8309                   | 0.8515                      | 0.3071 |
| 290.19                  | 392.9                 | 0.6209                      | 0.0145 | 403                     | 9165                   | 0.8622                      | 0.3387 |
| 300.64                  | 593.05                | 0.6432                      | 0.0219 | 408                     | 10071                  | 0.8729                      | 0.3722 |
| 313                     | 921                   | 0.6696                      | 0.0340 | 413                     | 11049.5                | 0.8836                      | 0.4083 |
| 318                     | 1085.5                | 0.6804                      | 0.0401 | 418                     | 12123                  | 0.8943                      | 0.4480 |
| 323                     | 1275.5                | 0.6910                      | 0.0471 | 423                     | 13287.5                | 0.9050                      | 0.4910 |
| 328                     | 1491                  | 0.7017                      | 0.0551 | 428                     | 14510                  | 0.9157                      | 0.5362 |
| 333                     | 1735                  | 0.7124                      | 0.0641 | 433                     | 15783.5                | 0.9264                      | 0.5833 |
| 338                     | 2004.5                | 0.7231                      | 0.0741 | 438                     | 17194.5                | 0.9373                      | 0.6354 |
| 343                     | 2303                  | 0.7338                      | 0.0851 | 443                     | 18670                  | 0.9478                      | 0.6899 |
| 348                     | 2638.5                | 0.7445                      | 0.0975 | 448                     | 20205.5                | 0.9585                      | 0.7467 |
| 353                     | 2971.5                | 0.7552                      | 0.1098 | 453                     | 21733                  | 0.9692                      | 0.8031 |
| 358                     | 3389                  | 0.7659                      | 0.1252 | 458                     | 23646                  | 0.9799                      | 0.8738 |
| 363                     | 3832                  | 0.7766                      | 0.1416 | 463                     | 25558                  | 0.9906                      | 0.9445 |
| 368                     | 4326                  | 0.7873                      | 0.1599 | 465                     | 26329                  | 0.9948                      | 0.9730 |
| 373                     | 4856                  | 0.7980                      | 0.1795 | 466                     | 26801.5                | 0.9970                      | 0.9904 |
| 378                     | 5444                  | 0.8087                      | 0.2012 | 467.4                   | 27060                  | 1.                          | 1.     |

<sup>1)</sup> Younga doświadczenia prowadzone wspólnie z Ramsay'em są zawarte w cytowanej pracy o eterze: Phil. Trans., t. 178. 1887, str. 57 - 93. Battelli podał rezultaty

## Krzywa nasycenia eteru według Batelli'ego.

## Dane krytyczne.

$$T_k = 470^\circ \text{ abs}, \quad p_k = 27184^{\text{m}}/\text{m} = 35768 \text{ atm.}$$

| Zależność $P=H_1(\tau)$ |                      | Zależność $II=X_1(\theta)$ |        | Zależność $P=H_1(\tau)$ |                      | Zależność $II=X_1(\theta)$ |        |
|-------------------------|----------------------|----------------------------|--------|-------------------------|----------------------|----------------------------|--------|
| $\tau$                  | $P$                  | $\theta$                   | $II$   | $\tau$                  | $P$                  | $\theta$                   | $II$   |
| 244.59 <sup>o</sup> abs | 36.3 <sup>m</sup> /m | 0.5204                     | 0.0013 | 330.22 <sup>o</sup> abs | 1612 <sup>m</sup> /m | 0.7026                     | 0.0593 |
| 251.78                  | 56.2                 | 0.5357                     | 0.0021 | 351.94                  | 2976                 | 0.7488                     | 0.1095 |
| 260.34                  | 94.3                 | 0.5539                     | 0.0035 | 372.33                  | 4852                 | 0.7923                     | 0.1785 |
| 267.76                  | 140                  | 0.5675                     | 0.0051 | 403.20                  | 9188                 | 0.8579                     | 0.3380 |
| 275.92                  | 210.6                | 0.5871                     | 0.0077 | 431.85                  | 15316                | 0.9188                     | 0.5634 |
| 279.84                  | 251                  | 0.5954                     | 0.0092 | 444.40                  | 18536                | 0.9455                     | 0.6819 |
| 281.42                  | 270                  | 0.5988                     | 0.0099 | 456.15                  | 22452                | 0.9705                     | 0.8259 |
| 283.68                  | 297                  | 0.6036                     | 0.0109 | 465.25                  | 25383                | 0.9899                     | 0.9337 |
| 287.04                  | 343.6                | 0.6107                     | 0.0126 | 470                     | 27184                | 1                          | 1      |
| 299.53                  | 568                  | 0.6373                     | 0.0209 |                         |                      |                            |        |

Krzywe są zbieżne u góry i dołu, okazują kształt cokolwiek odmienny, są najbardziej odległe od siebie mniej więcej w punkcie największej krzywizny. Przedstawiłem te dwa przypadki z tego powodu, że one oraz ich kombinacje wyczerpują możliwe niezgodności między krzywymi różnych ciał, pochodzącymi z niedokładności doświadczeń. Gdy zachodzą inne jakies nieprawidłowości w tożsamości krzywych, musimy je złożyć na karb nieściśłości samego prawa. Tą drogą, jak sądzę, możnaby przekonać się w jakim stopniu prawo stosuje się, do jakich ciał i jak się te ciała grupują podług zgodności krzywych:

$$(28^*) \quad II = X_1(\theta).$$

Przy wykreślaniu krzywych użytkowałem obliczenia van der Waals'a, Young'a, Estreichera i Happla, nadto korzystałem z własnych obliczeń. Na pierwotnych dwu tablicach, z których przytoczona figura 5-ta jest wyciągiem, przedstawiłem krzywe 4-ch ciał, obliczonych przez van der

swych badań w pracy p. t.: „Sulle proprietà termiche del vapore. Parte I. Studio del vapore d'etere rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac". Torino 1889, str. 72, 61. Dane krytyczne eteru obserwowali jeszcze: Zajonczevski, którego liczby wynoszą:  $T_k = 463^\circ$  i  $p_k = 36.9$  atm. (Wied. Beibl., t. III. 1879, str. 741); Avenarius, który znalazł wartości:  $T_k = 464.05$  (Bulletin de l'Academie de S-Petersbourg, t. XXII. 1877);  $T_k = 462.5$  (Tamże) i  $T_k = 469.2^\circ$  (Pog Ann., t. CLI. 1874, str. 303); W. Ramsay znalazł:  $T_k = 468.5$ ,  $p_k = 40$  atm. (Proc. Roy. Soc., t. XXXI: 1880, str. 194); O. Strauss podał wartość  $T_k = 468.5$  (J. Soc. Ph. Ch. russe, t. XIV. 1880, str. 207); B. Gallieyn znalazł:  $T_k = 464.8$  (Wied. Ann., t. XLI. 1890).



Waalsa, 4-ch ciał przez Happela, 6 ciał z tych, które obliczył Estreicher, 28 obliczonych przez Younga i 16 obliczonych przez siebie. Ponieważ niektóre z tych ciał obliczano kilkakrotnie, więc ogółem przedstawiłem 53 ciała. O ile kilku badaczy eksperymentowało z danym ciałem, starałem się zużytkować rezultaty wszystkich badań. Z danych niektórych badaczy nie mogłem korzystać z powodu, iż nie tworzyły one ciągłej krzywej, tak się rzecz miała np. z danymi Olszewskiego dla selenowodoru, metanu i propanu, z danymi Hainlena dla propanu, Wróblewskiego dla tlenu i azotu, Faradaya dla amoniaku, Villarda dla etylenu. Obliczałem też na nowo niektóre z ciał, umieszczonych w tablicach Younga, mianowicie (prócz benzolu i eteru, których tablice przytoczyłem) fluorobenzol, chlorobenzol i czterochlorek węgla; nadto z pomiędzy związków, obrachowanych przez van der Waalsa CO<sub>2</sub> i SO<sub>2</sub>.

Tablice obliczonych przezemnie ciał, przytaczam niżej <sup>1)</sup>.

Fluorobenzol <sup>2)</sup> C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>F. Dane krytyczne.

$$T_k = 559.55^\circ \text{ abs}, \quad p_k = 33912^{\text{m}}/\text{m} = 44.61 \text{ atm.}$$

| $\tau$      | $P$                  | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$ | $P$     | $\theta$ | $\Pi$  |
|-------------|----------------------|----------|--------|--------|---------|----------|--------|
| 255.15° abs | 6.15 <sup>m</sup> /m | 0.4560   | 0.0002 | 433    | 4830    | 0.7738   | 0.1424 |
| 263.55      | 12                   | 0.4710   | 0.0004 | 443    | 5842    | 0.7913   | 0.1723 |
| 273.15      | 21.05                | 0.4882   | 0.0006 | 453    | 7009    | 0.8096   | 0.2067 |
| 283.65      | 37.5                 | 0.5069   | 0.0011 | 463    | 8377    | 0.8274   | 0.2470 |
| 292.5       | 59                   | 0.5222   | 0.0017 | 473    | 9899.5  | 0.8453   | 0.2919 |
| 303.6       | 89                   | 0.5426   | 0.0029 | 483    | 11619   | 0.8632   | 0.3426 |
| 312.15      | 143.4                | 0.5578   | 0.0042 | 493    | 13547.5 | 0.8811   | 0.3995 |
| 321.1       | 206.25               | 0.5738   | 0.0061 | 503    | 15734   | 0.8989   | 0.4640 |
| 332.6       | 320.2                | 0.5944   | 0.0094 | 513    | 18162   | 0.9168   | 0.5356 |
| 344         | 480                  | 0.6148   | 0.0142 | 523    | 20911.5 | 0.9347   | 0.6166 |
| 353.7       | 659.8                | 0.6321   | 0.0195 | 533    | 23972   | 0.9526   | 0.7069 |
| 363         | 881.5                | 0.6487   | 0.0260 | 543    | 27369   | 0.9704   | 0.8070 |
| 373         | 1177                 | 0.6666   | 0.0347 | 548    | 29200   | 0.9793   | 0.8610 |
| 383         | 1542                 | 0.6845   | 0.0455 | 552.95 | 31204   | 0.9882   | 0.9201 |
| 393         | 1989.5               | 0.7023   | 0.0587 | 553.6  | 31451   | 0.9894   | 0.9274 |
| 403         | 2530                 | 0.7202   | 0.0746 | 556.3  | 32569   | 0.9942   | 0.9604 |
| 413         | 3172                 | 0.7381   | 0.0935 | 558.7  | 33608   | 0.9985   | 0.9910 |
| 423         | 3929.5               | 0.7560   | 0.1159 | 559.55 | 33912   | 1.       | 1.     |

<sup>1)</sup> Dane zawarte w nawias [ ] nie zgadzają się z ogólnym przebiegiem krzywej.

<sup>2)</sup> Trans. Chem. Soc., t. LV. 1889, str. 508, 490, 493, 494 i 495.

Chlorobenzol <sup>1)</sup> C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>Cl. Dane krytyczne. $T_k = \text{od } 632.2^{\circ} \text{ abs} - \text{do } 632.45^{\circ} \text{ abs}, p_k = \text{od } 33926^{\text{m/m}} - \text{do } 33998^{\text{m/m}}$ 

| $\tau$      | P                   | $\theta$ | $\Pi$   | $\tau$ | P      | $\theta$ | $\Pi$   |
|-------------|---------------------|----------|---------|--------|--------|----------|---------|
| 275.95° abs | 3.15 <sup>m/m</sup> | 0.4364   | 0.0001  | 423    | 1209   | 0.66895  | 0.03555 |
| 283.15      | 5.05                | 0.4478   | 0.00015 | 433    | 1536.5 | 0.68475  | 0.04525 |
| 292.6       | 8.45                | 0.4627   | 0.0002  | 443    | 1920   | 0.70055  | 0.05655 |
| 303.3       | 15.8                | 0.4797   | 0.0005  | 453    | 2372   | 0.71645  | 0.06985 |
| 311.95      | 24.8                | 0.4933   | 0.0007  | 463    | 2906   | 0.73225  | 0.0856  |
| 320         | 36.4                | 0.5061   | 0.0011  | 473    | 3529.5 | 0.74805  | 0.1039  |
| 331.65      | 61.45               | 0.5245   | 0.0018  | 483    | 4229   | 0.76385  | 0.12455 |
| 346.05      | 111.5               | 0.5473   | 0.0033  | 483.7  | 4282   | 0.76495  | 0.12605 |
| 357.2       | 170.85              | 0.5649   | 0.0050  | 493    | 5052   | 0.77965  | 0.14875 |
| 363         | 280.35              | 0.5741   | 0.0061  | 503    | 5990.5 | 0.79545  | 0.1764  |
| 373         | 292.75              | 0.5899   | 0.0086  | 513    | 7062.5 | 0.8112   | 0.20795 |
| 383         | 402.55              | 0.6057   | 0.0119  | 523    | 8266   | 0.8271   | 0.24335 |
| 393         | 542.8               | 0.6215   | 0.0160  | 533    | 9636.5 | 0.8430   | 0.2837  |
| 403         | 718.95              | 0.63735  | 0.02115 | 543    | 11181  | 0.8588   | 0.32925 |
| 413         | 939.5               | 0.65315  | 0.02765 |        |        |          |         |

Czterochlorek węgla <sup>2)</sup> CCl<sub>4</sub>. Dane krytyczne. $T_k = 556.15^{\circ} \text{ abs}, p_k = 34180^{\text{m/m}} = 44.97 \text{ atm.}$ 

| $\tau$     | P                    | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$ | P       | $\theta$ | $\Pi$  |
|------------|----------------------|----------|--------|--------|---------|----------|--------|
| 254.9° abs | 11.25 <sup>m/m</sup> | 0.4583   | 0.0003 | 373    | 1457.5  | 0.1707   | 0.0426 |
| 263.7      | 19.4                 | 0.4742   | 0.0006 | 383    | 1877    | 0.6887   | 0.0549 |
| 273.07     | 33                   | 0.4910   | 0.0010 | 393    | 2377    | 0.7066   | 0.0695 |
| 281.9      | 52.45                | 0.5069   | 0.0015 | 403    | 3002.5  | 0.7246   | 0.0878 |
| 293.1      | 90.3                 | 0.5270   | 0.0026 | 413    | 3725    | 0.7426   | 0.1090 |
| 302.6      | 137.15               | 0.5441   | 0.0040 | 423    | 4557    | 0.7606   | 0.1333 |
| 311.6      | 197.5                | 0.5603   | 0.0058 | 433    | 5538.5  | 0.7786   | 0.1620 |
| 322.6      | 302.7                | 0.5801   | 0.0089 | 443    | 6639.5  | 0.7965   | 0.1942 |
| 334.25     | 458                  | 0.6010   | 0.0134 | 453    | 7899.5  | 0.8145   | 0.2311 |
| 342.55     | 602.2                | 0.6159   | 0.0176 | 463    | 9314    | 0.8325   | 0.2725 |
| 350.15     | 769.5                | 0.6296   | 0.0225 | 473    | 10935.5 | 0.8505   | 0.3199 |
| 363        | 1111                 | 0.6527   | 0.0325 | 483    | 12763.5 | 0.8685   | 0.3734 |
| 493        | 14791                | 0.8865   | 0.4327 | 543    | 28990.5 | 0.9764   | 0.8482 |
| 503        | 17058                | 0.9044   | 0.4991 | 553    | 32831   | 0.9943   | 0.9605 |
| 513        | 19632.5              | 0.9224   | 0.5744 | 556.05 | 34128   | 0.9998   | 0.9985 |
| 523        | 22412                | 0.9404   | 0.6557 | 556.15 | 34181   | 1.       | 1.     |
| 533        | 25527                | 0.9584   | 0.7468 |        |         |          |        |

<sup>1)</sup> Trans. Chem. Soc., t. LV. 1889, str. 518, 490, 495 i 496.<sup>2)</sup> Trans. Chem. Soc. 1891, str. 929, 914, 916, 917 i 922. Prócz Younga poszukiwali temperatury i ciśnienia krytycznych czterochloru węgla jeszcze następujący badacze.



Bezwodnik węglowy CO<sub>2</sub>.

## Serya I.

Dane krytyczne ciśnienia według Andrews'a, temp. według Amagata.

$$T_k = 304.35^\circ \text{ abs}, \quad p_k = 77 \text{ atm.}$$

Według Cailleteta.

| $\tau$               | P         | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$ | P     | $\theta$ | $\Pi$  |
|----------------------|-----------|----------|--------|--------|-------|----------|--------|
| 193 <sup>7</sup> abs | 1.00 atm. | 0.6341   | 0.0137 | 219    | 5.46  | 0.7196   | 0.0743 |
| 199                  | 1.55      | 0.6539   | 0.0158 | 223    | 6.80  | 0.7327   | 0.0939 |
| 203                  | 2.08      | 0.6670   | 0.0285 | 229    | 8.72  | 0.7524   | 0.1196 |
| 209                  | 3.10      | 0.6867   | 0.0425 | 233    | 10.25 | 0.7656   | 0.1406 |
| 213                  | 3.90      | 0.6999   | 0.0535 | 239    | 12.70 | 0.7853   | 0.1742 |

## Serya II i III.

Dane krytyczne według E. Amagata<sup>1)</sup>.

$$T_k = 304.35^\circ \text{ abs}, \quad p_k = 72.9 \text{ atm.}$$

Według Regnaulta.

Według Faradaya.

| $\tau$           | P          | $\theta$                       | $\Pi$  | $\tau$                 | P         | $\theta$ | $\Pi$  |
|------------------|------------|--------------------------------|--------|------------------------|-----------|----------|--------|
| 248 <sup>0</sup> | 17.12 atm. | 0.8149                         | 0.2223 | 193.7 <sup>0</sup> abs | 1.14 atm. | 0.6364   | 0.0156 |
| 253              | 19.93      | 0.8313                         | 0.2588 | 202.4                  | 2.28      | 0.6650   | 0.0313 |
| 258              | 23.14      | 0.8477                         | 0.3005 | 213.6                  | 4.60      | 0.7012   | 0.0631 |
| 263              | 26.76      | 0.8642                         | 0.3475 | 227.5                  | 8.38      | 0.7475   | 0.1218 |
| 268              | 30.84      | 0.8806                         | 0.4005 | 242.4                  | 15.45     | 0.7964   | 0.2119 |
| 273              | 35.40      | 0.8970                         | 0.4597 | 255.2                  | 22.84     | 0.8385   | 0.3133 |
| 278              | 40.47      | 0.9134                         | 0.5256 | 268                    | 33.15     | 0.8806   | 0.4547 |
| 283              | 46.05      | 0.9299                         | 0.5981 | 273                    | 38.50     | 0.8970   | 0.5281 |
| 288              | 52.17      | 0.9463                         | 0.6775 |                        |           |          |        |
| 293              | 58.84      | 0.9627                         | 0.7641 |                        |           |          |        |
| 298              | 66.07      | 0.9791                         | 0.8580 |                        |           |          |        |
| 303              | 73.84      | 0.9956                         | 0.9590 |                        |           |          |        |
| 308              | 82.17      |                                |        |                        |           |          |        |
| 313              | 91.03      | } Większe niż }<br>} jedność } |        |                        |           |          |        |
| 318              | 100.41     |                                |        |                        |           |          |        |

Nadieżdin  $T_k = 631.1$  (Kiewer Untw. Unters., t. 6. 1885, str. 32 lub Wied. Beibl., t. 9. 1885, str. 721); Cailletet wraz z Collardeau  $T_k = 638$ ,  $p_k = 200.5$  atm. (Comp. Ren., t. CIII. 1886, str. 379) i O. Strauss  $T_k = 643$ ,  $p_k = 195.5$  atm. (J. Soc. Ph. Ch. russe, t. XIV. 1880, str. 510).

<sup>1)</sup> Prócz Amagata dane krytyczne CO<sub>2</sub> wyznaczali: Andrews  $T_k = 308.92^\circ \text{ abs}$ ,  $p_k = 77$  atm. (Trans. of Roy. Soc., t. 166. 1876, str. 421); J. Dewar  $T_k = 304.9$ ,  $p_k = 77$  (Phil. Mag., ser. 5, t. XVIII. 1885, str. 210) i J. Chappuis  $T_k = 304.4$ . Dane co do ciśnienia nasycenia według Cailleteta: Arch. de Genève, t. 66. 1878, str. 16; według Regnaulta: Mém. de l'Acad., t. 26. 1862, str. 535; według Faradaya: Phil. Trans. t. 113. I. 1845, str. 155.

Bezwodnik siarkawy <sup>1)</sup> SO<sub>2</sub>.

Dane krytyczne według Zajonczewskiego.

$$T_k = 428.4^\circ \text{ abs}, \quad p_k = 78.9 \text{ atm.}$$

Według Blümcke'go.

Według Zajonczewskiego.

| $\tau$     | $P$       | $\theta$ | $\Pi$   | $\tau$   | $P$       | $\theta$ | $\Pi$  |
|------------|-----------|----------|---------|----------|-----------|----------|--------|
| 253.5° abs | 0.60 atm. | 0.5917   | 0.0076  | 323° abs | 8.43 atm. | 0.7540   | 0.1068 |
| 261.5      | 0.95      | 0.6108   | 0.0120  | 333      | 11.09     | 0.7773   | 0.1406 |
| 273        | 1.51      | 0.6372   | 0.0191  | 343      | 14.31     | 0.8006   | 0.1814 |
| 308        | 5.45      | 0.7189   | 0.0691  | 353      | 18.09     | 0.8240   | 0.2293 |
| 319.7      | 7.55      | 0.7463   | 0.0957  | 363      | 22.47     | 0.8473   | 0.2848 |
| 338        | 12.83     | 0.7890   | 0.1626  | 373      | 27.82     | 0.8707   | 0.3526 |
| [360.5     | 17.12     | 0.8415   | 0.2170] | 393      | 41.56     | 0.9174   | 0.5267 |
| 371.2      | 26.96     | 0.8665   | 0.3417  | 423      | 71.45     | 0.9874   | 0.9056 |

Według Picteta.

Według Regnaulta.

|          |           |        |         |     |      |        |        |
|----------|-----------|--------|---------|-----|------|--------|--------|
| 243° abs | 0.36 atm. | 0.5672 | 0.0046  | 243 | 0.39 | 0.5672 | 0.0049 |
| [248     | 0.55      | 0.5789 | 0.0070] | 248 | 0.49 | 0.5789 | 0.0062 |
| 253      | 0.61      | 0.5906 | 0.0076  | 253 | 0.63 | 0.5906 | 0.0080 |
| 258      | 0.76      | 0.6022 | 0.0096  | 258 | 0.80 | 0.6022 | 0.0101 |
| 263      | 1.00      | 0.6139 | 0.0127  | 263 | 1.00 | 0.6139 | 0.0127 |
| 268      | 1.25      | 0.6256 | 0.0158  | 268 | 1.25 | 0.6256 | 0.0158 |
| 273      | 1.51      | 0.6371 | 0.0191  | 273 | 1.53 | 0.6372 | 0.0194 |
| 278      | 1.90      | 0.6489 | 0.0241  | 278 | 1.87 | 0.6489 | 0.0237 |
| 283      | 2.35      | 0.6606 | 0.0298  | 283 | 2.26 | 0.6606 | 0.0286 |
| 288      | 2.78      | 0.6723 | 0.0353  | 288 | 2.72 | 0.6723 | 0.0345 |
| 293      | 3.30      | 0.6839 | 0.0418  | 293 | 3.24 | 0.6839 | 0.0411 |
| 298      | 3.80      | 0.6956 | 0.0481  | 298 | 3.84 | 0.6956 | 0.0487 |
| 303      | 4.60      | 0.7073 | 0.0583  | 303 | 4.52 | 0.7073 | 0.0573 |
| 308      | 5.30      | 0.7189 | 0.0672  | 308 | 5.28 | 0.7189 | 0.0669 |
| 313      | 6.20      | 0.7306 | 0.0786  | 313 | 6.15 | 0.7306 | 0.0779 |
| 318      | 7.20      | 0.7423 | 0.0913  | 318 | 7.11 | 0.7423 | 0.0901 |
| 323      | 8.30      | 0.7540 | 0.1052  | 323 | 8.19 | 0.7540 | 0.1038 |

Według Faradaya.

|       |       |        |        |     |       |        |        |
|-------|-------|--------|--------|-----|-------|--------|--------|
| 255.2 | 0.725 | 0.0092 | 0.0092 | 328 | 9.38  | 0.7656 | 0.1189 |
| 265.8 | 1.12  | 0.0142 | 0.0142 | 333 | 10.69 | 0.7773 | 0.1355 |
| 269.7 | 1.33  | 0.0169 | 0.0169 | 338 | 12.11 | 0.7890 | 0.1535 |
| 277.4 | 1.78  | 0.0226 | 0.0226 |     |       |        |        |
| 296.1 | 3.28  | 0.0416 | 0.0416 |     |       |        |        |
| 305.2 | 4.35  | 0.0551 | 0.0551 |     |       |        |        |
| 310.8 | 5.16  | 0.0654 | 0.0654 |     |       |        |        |

<sup>1)</sup> Dane krytyczne według Zajonczewskiego: Izwiestja Kiewskawo Uniwersyteta. 1878. № 4, str. 21. № 8, str. 29 lub Wied. Beibl., t. 3. 1879, str. 741. Ladenburg

Bezwodnik podazotowy <sup>1)</sup> N<sub>2</sub>O.

Dane krytyczne według Villarda.

$$T_k = 311.8^{\circ} \text{ abs}, \quad p_k = 77.5 \text{ atm.}$$

## Według Regnaulta.

| $\tau$ | $P$   | $\theta$      | $\Pi$  | $\tau$ | $P$   | $\theta$ | $\Pi$  |
|--------|-------|---------------|--------|--------|-------|----------|--------|
| 248    | 20.95 | 0.7954        | 0.2665 | 227.4  | 6.89  | 0.7293   | 0.0889 |
| 253    | 23.14 | 0.8114        | 0.2986 | 241.3  | 12.04 | 0.7739   | 0.1554 |
| 258    | 25.9  | 0.8274        | 0.3342 | 255.2  | 19.34 | 0.8185   | 0.2496 |
| 263    | 28.96 | 0.8435        | 0.3737 | 269.1  | 28.90 | 0.8630   | 0.3729 |
| 268    | 32.34 | 0.8595        | 0.4173 | 274.7  | 33.40 | 0.8810   | 0.4310 |
| 273    | 36.08 | 0.8755        | 0.4656 |        |       |          |        |
| 278    | 40.21 | 0.8916        | 0.5188 |        |       |          |        |
| 283    | 44.76 | 0.9076        | 0.5775 |        |       |          |        |
| 288    | 49.77 | 0.9237        | 0.6422 |        |       |          |        |
| 293    | 55.30 | 0.9397        | 0.7136 |        |       |          |        |
| 298    | 61.38 | 0.9557        | 0.7920 |        |       |          |        |
| 303    | 68.03 | 0.9718        | 0.8778 |        |       |          |        |
| 308    | 75.36 | 0.9878        | 0.9724 |        |       |          |        |
| 313    | 83.37 | większe niż 1 |        |        |       |          |        |

## Według Cailleteta.

|     |       |        |        |
|-----|-------|--------|--------|
| 181 | 1.00  | 0.5805 | 0.0129 |
| 183 | 1.10  | 0.5869 | 0.0142 |
| 189 | 1.40  | 0.6061 | 0.0181 |
| 193 | 1.90  | 0.6190 | 0.0245 |
| 199 | 2.60  | 0.6382 | 0.0335 |
| 203 | 3.15  | 0.6511 | 0.0406 |
| 209 | 4.20  | 0.6703 | 0.0542 |
| 213 | 5.05  | 0.6831 | 0.0652 |
| 219 | 6.32  | 0.7024 | 0.0815 |
| 223 | 7.63  | 0.7152 | 0.0984 |
| 229 | 9.60  | 0.7344 | 0.1239 |
| 233 | 11.02 | 0.7473 | 0.1422 |
| 239 | 13.19 | 0.7665 | 0.1702 |

## Według Faradaya.

|        |      |        |         |
|--------|------|--------|---------|
| [185.8 | 1.00 | 0.5959 | 0.0129] |
| 199.8  | 1.77 | 0.6405 | 0.0228  |
| 213.6  | 3.58 | 0.6851 | 0.0462  |

znalazł temperaturę krytyczną  $T_k = 432^{\circ} \text{ abs}$  (Ber. d. d. chem. Ges., t. 11. 1878, str. 818.; Drion  $T_k = 430$  (Ann. chim. phys., t. [3] 56. 1859, str. 221); Clark  $T_k = 430$  (Phil. Mag., s. 5, t. 10. 1880, str. 149); Schuck  $T_k = 428$  (Journ. d. Soc. russe phys. chem., t. 13. 1881, str. 229 lub Wied. Beibl., t. 6. 1882, str. 86); Cailletet i Mathias  $T_k = 429$  (Com. Ren., t. 104. 1887, str. 1563). Dane co do ciśnień nasycenia według Blümcke'go znajdują się w Wied. Ann., t. 34. 1888, str. 10; według Picteta Arch. de Gén., t. 13. 1885, str. 212 lub Wied. Beibl., t. 11. 1887, str. 629; według Faradaya, Regnaulta i Zajonczewskiego loc. cit.

<sup>1)</sup> Przez Villarda znaleźli dane krytyczne N<sub>2</sub>O następujący uczeni: J. Dewar  $T_k = 308.4$ ,  $p_k = 75 \text{ atm.}$  (Phil. Mag., ser. 5, t. XVIII, str. 210) i W. J. Janssen  $T_k = 309.4$ ,  $p_k = 73.07$  (Wied. Beibl., t. II. 1878, str. 136). Dane co do ciśnień nasycenia według wszystkich 3-ch autorów znajdują się loc. cit.

Chlor<sup>1)</sup> Cl<sub>2</sub>.

## Dane krytyczne.

$$T_k = 419^\circ \text{ abs}, \quad p_k = 93.5 \text{ atm.}$$

| $t$                  | $P$                  | $\theta$ | $\Pi$  | $t$ | $P$   | $\theta$ | $\Pi$  |
|----------------------|----------------------|----------|--------|-----|-------|----------|--------|
| 185 <sup>0</sup> abs | 37.5 <sup>m</sup> /m | 0.4415   | 0.0005 | 273 | 3.66  | 0.6516   | 0.0391 |
| 188                  | 45                   | 0.4487   | 0.0006 | 278 | 4.25  | 0.6635   | 0.0454 |
| 193                  | 62.5                 | 0.4606   | 0.0009 | 283 | 4.95  | 0.6754   | 0.0529 |
| 198                  | 88                   | 0.4726   | 0.0012 | 288 | 5.75  | 0.6834   | 0.0615 |
| 203                  | 118                  | 0.4845   | 0.0017 | 293 | 6.62  | 0.6993   | 0.0708 |
| 208                  | 159                  | 0.4964   | 0.0022 | 298 | 7.63  | 0.7112   | 0.0816 |
| 213                  | 210                  | 0.5084   | 0.0029 | 303 | 8.75  | 0.7231   | 0.0936 |
| 218                  | 275                  | 0.5203   | 0.0039 | 308 | 9.95  | 0.7351   | 0.1064 |
| 223                  | 350                  | 0.5322   | 0.0049 | 313 | 11.50 | 0.7470   | 0.1230 |
| 228                  | 445                  | 0.5441   | 0.0062 | 323 | 14.70 | 0.7709   | 0.1572 |
| 233                  | 560                  | 0.5561   | 0.0079 | 333 | 18.60 | 0.7948   | 0.1989 |
| 238                  | 705                  | 0.5680   | 0.0099 | 343 | 23    | 0.8186   | 0.2460 |
| 240.6                | 760                  | 0.5742   | 0.0107 | 353 | 28.4  | 0.8425   | 0.3037 |
| 243                  | 1.20 atm.            | 0.5800   | 0.0128 | 363 | 34.5  | 0.8664   | 0.3690 |
| 248                  | 1.50                 | 0.5919   | 0.0160 | 373 | 41.7  | 0.8902   | 0.4460 |
| 253                  | 1.84                 | 0.6038   | 0.0197 | 383 | 50.8  | 0.9141   | 0.5433 |
| 258                  | 2.23                 | 0.6158   | 0.0238 | 393 | 60.4  | 0.9379   | 0.6460 |
| 263                  | 2.63                 | 0.6277   | 0.0281 | 403 | 71.6  | 0.9618   | 0.7658 |
| 268                  | 3.14                 | 0.6396   | 0.0336 |     |       |          |        |

<sup>1)</sup> Wszystkie dane według Kniettscha; znajdują się w Lieb. Ann., t. 259. 1890, str. 100. Prócz niego dane krytyczne chloru wyznaczył: Dewar  $T_k = 414^\circ \text{ abs}$ ,  $p_k = 83.9 \text{ atm}$ . (Phil. Mag., ser. 5, t. XVIII. 1885, str. 210) i Ladenburg  $T_k = 421$  (Ber. d. d. chem. Ges., t. 11. 1884, str. 818).

Chlorowódór<sup>1)</sup> HCl.

Dane krytyczne:

temperatura wedł. Vincenta i Chappuisa, ciśnienie wedł. Ansdella.

$$T_k = 324.5^\circ \text{ abs; } p_k = 86 \text{ atm.}$$

| Według Faradaya'a. |       |          |         | Według Ansdella. |       |          |         |
|--------------------|-------|----------|---------|------------------|-------|----------|---------|
| $\tau$             | $P$   | $\theta$ | $\Pi$   | $\tau$           | $P$   | $\theta$ | $\Pi$   |
| 199.7              | 1.80  | 0.6154   | 0.0209  | 277              | 29.8  | 0.8536   | 0.3465  |
| 205.2              | 2.38  | 0.6324   | 0.0277  | 282.25           | 33.9  | 0.8698   | 0.3942  |
| 210.8              | 3.11  | 0.6496   | 0.0363  | 286.8            | 37.75 | 0.8838   | 0.4390  |
| 227.5              | 6.30  | 0.7011   | 0.0732  | 291.1            | 41.8  | 0.8971   | 0.4860  |
| 238.6              | 9.22  | 0.7353   | 0.1072  | 295              | 45.75 | 0.9091   | 0.5320  |
| 244.1              | 10.92 | 0.7522   | 0.1270  | 299.75           | 51    | 0.9237   | 0.5930  |
| 249.7              | 12.81 | 0.7695   | 0.1491  | 306.4            | 58.85 | 0.9447   | 0.6843  |
| 255.2              | 15.04 | 0.7864   | 0.1749  | 312.4            | 66.95 | 0.9627   | 0.7785  |
| [269.1             | 23.08 | 0.8293   | 0.2684] | 317.8            | 75.2  | 0.9793   | 0.8744  |
| [277.4             | 30.67 | 0.8549   | 0.3566] | 321              | 80.8  | 0.9892   | 0.9395  |
|                    |       |          |         | [322.4           | 84.75 | 0.9935   | 0.9855] |
|                    |       |          |         | 323.56           | 85.33 | 0.9966   | 0.9922  |

Acetylen C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>.

Dane krytyczne według Ansdella.

$$T_k = 300.05 \text{ abs, } p_k = 68 \text{ atm.}$$

| Według Villarda. |       |          |        | Według Cailleteta. |       |                 |         |
|------------------|-------|----------|--------|--------------------|-------|-----------------|---------|
| $\tau$           | $P$   | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$             | $P$   | $\theta$        | $\Pi$   |
| 183              | 0.69  | 0.6099   | 0.0101 | 274                | 48    | 0.9132          | 0.7059  |
| 188              | 1.00  | 0.6266   | 0.0147 | 283                | 63    | 0.9432          | 0.9265  |
| 192              | 1.25  | 0.6399   | 0.0184 | 291                | 83    | } większe niż 1 |         |
| 203              | 2.22  | 0.6765   | 0.0326 | 298                | 94    |                 |         |
| 213              | 3.55  | 0.7099   | 0.0522 | 304                | 103   |                 |         |
| 223              | 5.3   | 0.7432   | 0.0779 |                    |       |                 |         |
| 233              | 7.7   | 0.7765   | 0.1132 |                    |       |                 |         |
| 249.2            | 13.2  | 0.8305   | 0.1941 |                    |       |                 |         |
| 273              | 26.05 | 0.9098   | 0.3831 |                    |       |                 |         |
| 278.8            | 30.3  | 0.9291   | 0.4456 |                    |       |                 |         |
| 284.5            | 34.8  | 0.9481   | 0.5118 |                    |       |                 |         |
| 288              | 37.9  | 0.9598   | 0.5573 |                    |       |                 |         |
| 293.2            | 42.8  | 0.9771   | 0.6294 |                    |       |                 |         |
|                  |       |          |        | Według Ansdella.   |       |                 |         |
|                  |       |          |        | 250                | 11.01 | 0.8332          | 0.1619  |
|                  |       |          |        | 263                | 17.06 | 0.8765          | 0.2509  |
|                  |       |          |        | [273               | 21.53 | 0.9098          | 0.3166] |
|                  |       |          |        | 286.5              | 32.77 | 0.9548          | 0.4819  |
|                  |       |          |        | 293.15             | 39.76 | 0.9770          | 0.5847  |
|                  |       |          |        | 304.6              | 56.20 | } większe niż 1 |         |
|                  |       |          |        | 309.9              | 67.96 |                 |         |

<sup>1)</sup> Vincent i Chappuis znaleźli nadto ciśnienie krytyczne:  $p_k = 96 \text{ atm.}$  (Journ. de Phys. (2), t. V. 1886, str. 58), a Ansdell temperaturę kryt.  $T_k = 324.25^\circ \text{ abs}$  (Chem. News., t. 41. 1880, str. 75). Próż tego wyznaczył Dewar:  $T_k = 325.3^\circ$ ,  $p_k = 86$  (loc. cit.) i Sacerdote z Leduc'em:  $T_k = 325$ ,  $p_k = 83$ . Dane co do ciśnień nasycenia obu autorów znajdują się loc. cit.



E t y l e n <sup>1)</sup> C<sub>2</sub>H<sub>4</sub>.

Dane krytyczne według Dewara.

$$T_k = 283.1^{\circ} \text{ abs}, \quad p_k = 51 \text{ atm.}$$

Według Olszewskiego.

| $\tau$ | $P$                 | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$ | $P$       | $\theta$ | $\Pi$   |
|--------|---------------------|----------|--------|--------|-----------|----------|---------|
| 122.6  | 9.8 <sup>m</sup> /m | 0.4331   | 0.0002 | 165    | 441       | 0.5828   | 0.0114  |
| 125    | 12                  | 0.4415   | 0.0003 | 168    | 546       | 0.5934   | 0.0141  |
| 134    | 31                  | 0.4733   | 0.0008 |        |           |          |         |
| 141    | 56                  | 0.4981   | 0.0014 |        |           |          |         |
| 143.3  | 72                  | 0.5062   | 0.0019 | 221.9  | 9.14 atm. | 0.7838   | 0.1792  |
| 147    | 107                 | 0.5193   | 0.0028 | 227.4  | 11.1      | 0.8032   | 0.2176  |
| 151    | 146                 | 0.5334   | 0.0038 | [230   | 13.46     | 0.8124   | 0.2639] |
| 157.5  | 246                 | 0.5563   | 0.0063 | 241.3  | 17.75     | 0.8524   | 0.3480  |
| 162    | 346                 | 0.5722   | 0.0089 | 249.7  | 22.94     | 0.8820   | 0.4498  |
|        |                     |          |        | 255.2  | 26.9      | 0.9014   | 0.5274  |

Według Faradaya'a.

Tlenek azotu <sup>2)</sup> NO.

Dane krytyczne według Olszewskiego.

$$T_k = 179.5^{\circ} \text{ abs}, \quad p_k = 71.2 \text{ atm.}$$

| $\tau$ | $P$   | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$ | $P$  | $\theta$ | $\Pi$  |
|--------|-------|----------|--------|--------|------|----------|--------|
| 96.5   | 0.024 | 0.5376   | 0.0003 | 163    | 31.6 | 0.9081   | 0.4439 |
| 106    | 0.182 | 0.5905   | 0.0026 | 168    | 41   | 0.9359   | 0.5758 |
| 135    | 5.4   | 0.7521   | 0.0758 | 172.1  | 49.9 | 0.9588   | 0.7008 |
| 144    | 10.6  | 0.8022   | 0.1489 | 175.5  | 57.8 | 0.9777   | 0.8118 |
| 154    | 20    | 0.8579   | 0.2809 |        |      |          |        |

<sup>1)</sup> Dane Dewara znajdują się loc. cit. Prócz niego znaleźli van der Waals  $T_k = 282.2$ ,  $p_k = 58$  (Wied. Beibl., t. 4. 1880, str. 704) lub (Continuität... str. 100); Callletot  $T_k = 286$  (Com. Ren., t. 94. 1882, str. 1224); L. Bleekrode  $T_k = 282.2$  (Journ. de phys. ser. 2, t. IV. 1885, str. 115). Dane Faradaya'a znajdują się loc. cit.

<sup>2)</sup> Wszystkie dane znajdują się w Com. Ren., t. C. 1885, str. 940.

A m o n i a k <sup>1)</sup> NH<sub>3</sub>.

Dane krytyczne według Vincenta i Chappuis'a.

$$T_k = 404^{\circ} \text{ abs, } p_k = 113 \text{ atm.}$$

Według Picteta.

Według Regnaulta.

Od  $\tau = 243^{\circ}$  do  $\tau = 303^{\circ}$  tak samo jak u Picteta

| $\tau$           | P         | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$ | P     | $\theta$ | $\Pi$  |
|------------------|-----------|----------|--------|--------|-------|----------|--------|
| 243 <sup>o</sup> | 1·14 atm. | 0·6015   | 0·0101 | 308    | 13·25 | 0·7624   | 0·1173 |
| 248              | 1·45      | 0·6139   | 0·0128 | 313    | 15·26 | 0·7747   | 0·1350 |
| 253              | 1·83      | 0·6262   | 0·0162 | 318    | 17·48 | 0·7871   | 0·1547 |
| 258              | 2·28      | 0·6386   | 0·0202 | 323    | 19·95 | 0·7995   | 0·1765 |
| 263              | 2·82      | 0·6510   | 0·0249 | 328    | 22·66 | 0·8119   | 0·2005 |
| 268              | 3·45      | 0·6634   | 0·0305 | 333    | 25·63 | 0·8242   | 0·2268 |
| 273              | 4·19      | 0·6757   | 0·0371 | 338    | 28·9  | 0·8366   | 0·2558 |
| 278              | 5         | 0·6881   | 0·0442 | 343    | 32·47 | 0·8490   | 0·2873 |
| 283              | 6·02      | 0·7005   | 0·0533 | 348    | 36·35 | 0·8615   | 0·3217 |
| 288              | 7·12      | 0·7129   | 0·0630 | 353    | 40·59 | 0·8738   | 0·3592 |
| 293              | 8·4       | 0·7252   | 0·0743 | 358    | 45·17 | 0·8861   | 0·3997 |
| 298              | 9·8       | 0·7376   | 0·0867 | 363    | 50·14 | 0·8985   | 0·4437 |
| 303              | 11·44     | 0·7500   | 0·1012 | 368    | 55·52 | 0·9109   | 0·4913 |
| 308              | 13·08     | 0·7624   | 0·1158 | 373    | 61·32 | 0·9233   | 0·5426 |
| 313              | 15·29     | 0·7747   | 0·1353 |        |       |          |        |
| 318              | 17·38     | 0·7871   | 0·1538 |        |       |          |        |
| 323              | 19·98     | 0·7995   | 0·1768 |        |       |          |        |

Według Blümcke go.

|       |       |        |        |
|-------|-------|--------|--------|
| 254·5 | 1·91  | 0·6300 | 0·0169 |
| 273   | 4·22  | 0·6757 | 0·0373 |
| 307   | 12·8  | 0·7599 | 0·1133 |
| 336·5 | 28·04 | 0·8329 | 0·2481 |

<sup>1)</sup> Dane krytyczne loc. cit. Nadto znalazł Dewar:  $T_k = 403$ ,  $p_k = 115$  (loc. cit.).  
Dane co do ciśnienia nasycenia loc. cit.

Siarkowodór <sup>1)</sup> H<sub>2</sub>S.

Dane krytyczne według Olszewskiego.

$$T_k = 373 \text{ abs, } p_k = 88.7 \text{ atm.}$$

| Według Regnaulta. |       |          |        | Według Faradaya.     |       |          |        |
|-------------------|-------|----------|--------|----------------------|-------|----------|--------|
| $\tau$            | $P$   | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$               | $P$   | $\theta$ | $\Pi$  |
| 248               | 4.93  | 0.6649   | 0.0556 | 199.7                | 1.02  | 0.5354   | 0.0115 |
| 253               | 5.83  | 0.6783   | 0.0657 | 205.2                | 1.09  | 0.5501   | 0.0123 |
| 258               | 6.84  | 0.6917   | 0.0771 | 214.1                | 1.50  | 0.5740   | 0.0169 |
| 263               | 8.01  | 0.7051   | 0.0903 | 227.5                | 2.35  | 0.6099   | 0.0265 |
| 268               | 9.30  | 0.7185   | 0.1048 | 241.9                | 3.95  | 0.6485   | 0.0445 |
| 273               | 10.80 | 0.7319   | 0.1218 | 244.1                | 4.24  | 0.6544   | 0.0478 |
| 278               | 12.48 | 0.7453   | 0.1407 | 254.1                | 5.90  | 0.6812   | 0.0665 |
| 283               | 14.34 | 0.7587   | 0.1617 | 255.2                | 6.10  | 0.6842   | 0.0688 |
| 288               | 16.38 | 0.7721   | 0.1847 | 269.7                | 9.36  | 0.7230   | 0.1055 |
| 293               | 18.62 | 0.7855   | 0.2099 | 283                  | 14.14 | 0.7587   | 0.1594 |
| 298               | 21.07 | 0.7989   | 0.2375 | 284.1                | 14.60 | 0.7617   | 0.1646 |
| 303               | 23.73 | 0.8123   | 0.2675 | Według Olszewskiego. |       |          |        |
| 308               | 26.62 | 0.8257   | 0.3001 | 273                  | 10.25 | 0.7319   | 0.1156 |
| 313               | 29.72 | 0.8391   | 0.3351 | 291.2                | 16.95 | 0.7807   | 0.1911 |
| 318               | 32.83 | 0.8525   | 0.3701 | 323                  | 35.66 | 0.8659   | 0.4020 |
| 323               | 36.60 | 0.8659   | 0.4126 | 325                  | 37.17 | 0.8713   | 0.4191 |
| 328               | 40.38 | 0.8793   | 0.4552 |                      |       |          |        |
| 333               | 44.39 | 0.8927   | 0.5005 |                      |       |          |        |
| 338               | 48.63 | 0.9062   | 0.5482 |                      |       |          |        |
| 343               | 53.10 | 0.9196   | 0.5986 |                      |       |          |        |

Etan <sup>2)</sup> C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>.

Dane krytyczne według Hainlena.

$$T_k = 307.5 \text{ abs, } p_k = 50 \text{ atm.}$$

Według Olszewskiego.

|     |        |        |        |       |      |        |        |
|-----|--------|--------|--------|-------|------|--------|--------|
| 130 | 1 atm. | 0.5874 | 0.0200 | 296.5 | 40.4 | 0.9642 | 0.8080 |
| 273 | 23.8   | 0.8878 | 0.4760 | 302   | 46.7 | 0.9821 | 0.9340 |

<sup>1)</sup> Dane krytyczne: Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział mat.-przyrodniczy. 1890, t. XX, str. 282—286. Prócz Olszewskiego znaleźli: Dewar  $T_k = 373.2$ ,  $p_k = 92$  (loc. cit.); Leduc i Sacerdote:  $T_k = 373$ ,  $p_k = 90$ . Dane co do ciśnień nasycenia loc. cit.

<sup>2)</sup> Dane krytyczne: Adolf Hainlen „Ueber Propan und Aethan im flüssigen Zustande“ Liebigs Ann., t. 282. 1894, str. 229—245. Prócz niego znaleźli: Olszewski  $T_k = 307$ ,  $p_k = 50.2$  (Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział mat.-przyrodniczy, t. XX. 1890, str. 12—17); Dewar  $T_k = 308$ ,  $p_k = 45.2$  (loc. cit.) i J. P. Kuenen  $T_k = 305.16$ ,  $p_k = 48.86$ . Dane co do ciśnień nasycenia loc. cit.

Tlen <sup>1)</sup> O<sub>2</sub>.

Dane krytyczne według Wróblewskiego.

$$T_k = 155 \text{ abs, } p_k = 50 \text{ atm.}$$

Według Morrisa, W. Traversa, Geor. Sentera i Adr. Jaqueroda.

| $\tau$ | $P$                 | $\theta$ | $\Pi$  | $\tau$ | $P$ | $\theta$ | $\Pi$  |
|--------|---------------------|----------|--------|--------|-----|----------|--------|
| 77·17  | 150 <sup>m</sup> /m | 0·4979   | 0·0039 | 85·47  | 450 | 0·5573   | 0·0132 |
| 82·19  | 300                 | 0·5303   | 0·0079 | 90·70  | 800 | 0·5852   | 0·0210 |

Azot <sup>2)</sup> N<sub>2</sub>.

Dane krytyczne według Olszewskiego.

$$T_k = 127 \text{ abs, } p_k = 35 \text{ atm.}$$

Według Fischera i Alta.

|       |                    |        |        |       |     |        |        |
|-------|--------------------|--------|--------|-------|-----|--------|--------|
| 62·48 | 86 <sup>m</sup> /m | 0·4920 | 0·0032 | 75·44 | 600 | 0·5940 | 0·0226 |
| 67·80 | 200                | 0·5339 | 0·0075 | 77·33 | 760 | 0·6089 | 0·0286 |
| 71·46 | 350                | 0·5629 | 0·0132 |       |     |        |        |

Wodór <sup>3)</sup> H<sub>2</sub>.

Dane krytyczne według J. Dewara.

$$T_k = 32^\circ \text{ abs, } p_k = 19·4 \text{ atm.}$$

Według Traversa, Sentera i Jaqueroda.

|       |                    |        |        |       |     |        |        |
|-------|--------------------|--------|--------|-------|-----|--------|--------|
| 14·11 | 50 <sup>m</sup> /m | 0·4409 | 0·0034 | 18·35 | 400 | 0·5734 | 0·0271 |
| 15·14 | 100                | 0·4731 | 0·0068 | 19·03 | 500 | 0·5947 | 0·0339 |
| 15·95 | 150                | 0·4984 | 0·0102 | 20·60 | 800 | 0·6438 | 0·0543 |
| 17·11 | 250                | 0·5347 | 0·0170 |       |     |        |        |

<sup>1)</sup> Dane krytyczne: Stzb. d. Wien. Akad., t. 91. 1885, str. 696 i 709. Nadto K. Olszewski  $T_k = 154·2$ ,  $p_k = 50·8$  (Com. Ren., t. 100. 1885, str. 350) i J. Dewar  $T_k = 160$ ,  $p_k = 50$  (loc. cit.). Dane co do ciśnień nasycenia: Phil. Trans., t. 200 A. 1902, str. 105).

<sup>2)</sup> Dane krytyczne podał Olszewski: Comptes Rendus, t. XCIII 1884, str. 914. Dalej Wróblewski: a)  $T_k = 127^\circ \text{ abs}$ ,  $p_k = 35 \text{ atm}$ . (Comptes Rendus, t. 99. 1884, str. 133); b)  $T_k = 127$ ,  $p_k = 33$  (Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, t. 91. 1885, str. 696 i 709); c)  $T_k = 128$ ,  $p_k = 33·6$  (Stzb. d. Wien. Ak. d. Wiss. 1885; d)  $T_k = 126·5$  (Stzb. d. Wien. Ak. d. Wiss., t. 97. 1888, str. 378). Dane co do ciśnień nasycenia zawarte są w Münchener Berichte 1902, str. 113—151 lub w Annalen der Physik, serya 4, t. 9. 1902, str. 1149—1185.

<sup>3)</sup> Dane krytyczne podał Dewar w roku 1889. Dane co do ciśnień nasycenia: Philosophical Transactions of the Royal Society, t. 200 A. 1902, str. 105.

Fluorek metylu <sup>1)</sup> CH<sub>3</sub>F.

Dane krytyczne według Collie'go.

$$T_k = 317.9 \text{ abs}, p_k = 62 \text{ atm.}$$

| $t$ | $P$                               | $\theta$ | $\Pi$  | $t$ | $P$   | $\theta$ | $\Pi$  |
|-----|-----------------------------------|----------|--------|-----|-------|----------|--------|
| 268 | 11365 <sup>m</sup> / <sub>m</sub> | 0.8430   | 0.2412 | 298 | 28840 | 0.9374   | 0.6121 |
| 273 | 14696                             | 0.8588   | 0.3118 | 303 | 32756 | 0.9531   | 0.6952 |
| 278 | 17740                             | 0.8745   | 0.3765 | 308 | 36204 | 0.9689   | 0.7683 |
| 283 | 20091                             | 0.8902   | 0.4264 | 313 | 40496 | 0.9846   | 0.8594 |
| 288 | 23003                             | 0.9059   | 0.4882 | 318 | 46010 | > 1      |        |
| 293 | 25621                             | 0.9217   | 0.5437 |     |       |          |        |

Chlorek metylu <sup>2)</sup> CH<sub>3</sub>Cl.

Dane krytyczne według J. P. Kuenena.

$$T_k = 416^\circ \text{ abs}, p_k = 65.98 \text{ atm.}$$

Według Regnaulta.

|     |            |        |        |     |      |        |        |
|-----|------------|--------|--------|-----|------|--------|--------|
| 243 | 0.762 atm. | 0.5841 | 0.0115 | 283 | 3.51 | 0.6803 | 0.0532 |
| 253 | 1.16       | 0.6082 | 0.0176 | 293 | 4.83 | 0.7043 | 0.0732 |
| 263 | 1.72       | 0.6322 | 0.0261 | 303 | 6.50 | 0.7284 | 0.0985 |
| 273 | 2.49       | 0.6563 | 0.0377 | 308 | 7.49 | 0.7404 | 0.1135 |

Cyan <sup>3)</sup> (CN)<sub>2</sub>.

Dane krytyczne według Dewara.

$$T_k = 397 \text{ abs}, p_k = 61.7 \text{ atm.}$$

Według Faradaya'a.

Według Chappuis'a i Rivière'a.

|       |      |        |        |       |      |        |        |
|-------|------|--------|--------|-------|------|--------|--------|
| 255.2 | 1.25 | 0.6428 | 0.0203 | 252.3 | 0.99 | 0.6355 | 0.0160 |
| 260.8 | 1.35 | 0.6569 | 0.0219 | 273   | 2.37 | 0.6876 | 0.0384 |
| 266.3 | 1.89 | 0.6708 | 0.0306 | 278   | 2.83 | 0.7002 | 0.0459 |
| 283   | 3.28 | 0.7128 | 0.0532 | 283   | 3.38 | 0.7128 | 0.0548 |
| 296.3 | 4.79 | 0.7463 | 0.0776 | 288   | 4.04 | 0.7254 | 0.0655 |
| 312.4 | 7.50 | 0.7866 | 0.1216 |       |      |        |        |

<sup>1)</sup> Dane fluorku metylu: Journal of the Chemical Society, t. 55. 1889, str. 110.<sup>2)</sup> Dane krytyczne podał J. P. Kuenen w roku 1893. Dalej: C. Vincent i J. Chappuis  $T_k = 414.5^\circ \text{ abs}$  i  $p_k = 73 \text{ atm.}$  (Com. Ren, t. CIII. 1886, str. 379). Dane co do ciśień nasycenia według Regnaulta zawarte są w Mémoires de l'Académie, t. 26. 1862, str. 535.<sup>3)</sup> Dane krytyczne Dewara loc. cit. Dane co do ciśień nasycenia według Faradaya'a: Philosophical Transactions of Royal Society, t. 113, I. 1845, str. 155; według Chappuis'a i Rivière'a: Comptes Rendus, t. CIV. 1887, str. 1504.

Z 53-ch ciał, których krzywe wykreśliłem na figurze 5-ej, odtworzyłem tylko zredukowane krzywe nasycenia 24-ch najbardziej charakterystycznych.

Wykreslenie okazało przede wszystkim, że nie wszystkie ciała badane posiadają wspólną krzywą; następnie dało podstawy do klasyfikacji ciał, chociaż nie tak ściśle, jakby się można było spodziewać.

Linie nasycenia zredukowane nie tylko rozbiegają się ku górze, co możnaby wyjaśnić źle przyjętymi danymi krytycznymi, nie tylko rozchodzą się w miejscu największej krzywizny, co możnaby złożyć na karb niedokładności doświadczeń nad zależnością ciśnień nasycenia od temperatury, ale nie zaczynają się w jednym miejscu, co nie da się wyjaśnić błędami doświadczalnymi, lecz dowodzi, iż prawo van der Waals'a ściśle nie jest.

Możnaby zapytać, czy w istocie krzywe wszystkich ciał przy zmianie elementów krytycznych nie rozchodzą się również i u dołu. Zbadaliśmy to tylko względem benzolu; uogólnienie do wszystkich ciał może być błędne. Rozważmy rzecz teoretycznie. Przypuśćmy, że ciśnienie i temperatura krytyczna ciała  $p_k, T_k$  nie są pewne, że są o  $\pm \Delta p_k$  i  $\pm \Delta T_k$  większe lub mniejsze. Oznaczmy ciśnienie nasycenia i punkty wrzenia zredukowane do elementów  $T_k$  i  $p_k$  przez  $\theta$  i  $\Pi$ , zaś zredukowane do elementów  $T_k \pm \Delta T_k, p_k \pm \Delta p_k$  przez  $\theta'$  i  $\Pi'$ , różnice  $\theta - \theta'$  i  $\Pi - \Pi'$  niech będą  $\Delta \theta$  i  $\Delta \Pi$ . Wartości tych różnic przy najmniejszych  $\theta$  i  $\Pi$  wyjaśniają, czy krzywe, obliczane przy nieznacznie różnych elementach krytycznych, schodzą się u dołu lub nie i jak dalece się schodzą lub rozbiegają. Różnice te będą:

$$(55) \quad \begin{cases} \Delta \Pi = \Pi - \Pi' = \frac{P}{p_k} - \frac{P}{p_k \pm \Delta p_k} = \frac{\pm P \cdot \Delta p_k}{p_k (p_k \pm \Delta p_k)} = \frac{\pm \Pi \cdot \Delta p_k}{p_k \pm \Delta p_k}, \\ \Delta \theta = \theta - \theta' = \frac{\tau}{T_k} - \frac{\tau}{T_k \pm \Delta T_k} = \frac{\pm \tau \cdot \Delta T_k}{T_k (T_k \pm \Delta T_k)} = \frac{\pm \theta \cdot \Delta T_k}{T_k \pm \Delta T_k}; \end{cases}$$

są zatem: 1) wprost proporcjonalne do wartości zredukowanych ciśnień i temperatur, 2) wprost proporcjonalne do różnic w elementach krytycznych, 3) odwrotnie proporcjonalne do zmienionych elementów krytycznych.

Pierwsza reguła orzeka, że zredukowane krzywe nasycenia tego samego ciała przy różnych elementach krytycznych więcej powinny się rozchodzić ku górze, gdzie są wysokie  $\Pi$  i  $\theta$ , niż na dole gdzie są niskie  $\Pi$  i  $\theta$ . W istocie tak się zachowują krzywe benzolu. Zmiana  $\Delta T_k$  ma nierównie większy wpływ na zmianę  $\Delta \theta$ , aniżeli zmiana  $\Delta p_k$  na zmianę  $\Delta \Pi$ , a to z tego powodu, że wartości  $\Pi$  schodzą do najniższych (np.  $\Pi = 0.0001$ ), gdy najmniejsze wartości  $\theta$  leżą między 0.4 a 0.6. Pierwszy z przykładów (55) głosi, że już przy  $\Pi = 0.001$  różnica  $\Delta \Pi$  ma wartość mniejszą niż dokładność wykreślenia (0.001), gdyż  $\frac{\Delta p_k}{p_k \pm \Delta p_k}$  musi być ułamkiem wła-

ściwym. Stąd wniosek, że niedokładność w wyznaczeniu ciśnienia krytycznego nie wpływa w sposób mogący się ujawnić na rysunku; innemi słowy, wskutek tej niedokładności pionowe przesunięcie początku krzywej nasycenia nastąpić nie może. Inaczej rzecz się ma z różnicą  $\Delta\theta$ ; wobec tego, że najmniejsze  $\theta$  wynosi  $0.4-0.6$ , więc ma wartość znaczną, na wartość  $\Delta\theta$  według drugiego wzoru (55) ma decydujący wpływ ułamek  $\frac{\Delta T_k}{T_k + \Delta T_k}$ ; ułamek ten jest tem mniejszy, im mniejszą jest różnica  $\Delta T_k$ , a im większą temperaturę krytyczną  $T_k$ . U ciał o wysokiej temperaturze krytycznej, wyższej od  $0^\circ\text{C}$ ., ułamek ten jest nieznaczny, a zatem  $\Delta\theta$  niewielka; np.  $\Delta\theta$  benzolu, którego najmniejsze  $\theta$  leży koło  $0.45$ ,  $T_k$  wynosi średnio  $559^\circ$ , a  $\Delta T_k = \pm 5.5^\circ$  u spodu krzywej nasycenia będzie miało wartość  $\frac{\pm 5.5 \cdot 0.45}{559 \pm 5.5}$ , czyli  $\pm 0.004$ .

Jest to przesunięcie poziome przy wykreśleniu krzywej nieuchwytnie wobec nieznacznego nachylenia krzywej nasycenia u spodu względem osi temperatur. Dla tego wszystkie krzywe benzolu zbiegały się ku dołowi. Tak samo zachować się muszą wszystkie ciała o temperaturze krytycznej, wyższej od  $0^\circ\text{C}$ ., w ogóle wysokiej.

U ciał blizkich temperatury zerowej wprawdzie  $T_k$  jest mniejsze, różnica zatem  $\Delta\theta$  wzrastać z tego powodu powinna, jednak ich temperatury krytyczne są pewniejsze,  $\Delta T_k$  nieznaczne, z tego powodu  $\Delta\theta$  niewielkie. Weźmy dla przykładu azot, ciało z badanych mające najniższą temperaturę krytyczną  $T_k = 127^\circ$ ; najmniejsze  $\theta$  leży koło  $0.4$ ,  $\Delta T_k$  wynosi najwięcej  $\pm 1$ , więc  $\Delta\theta$  będzie miało u spodu krzywej wartość  $\pm \frac{0.4}{127 \pm 1} = 0.003$ .

Jedynie ciała o temperaturze krytycznej nadzwyczaj niskiej, jak np. z badanych ciał wodór, którego temperatura krytyczna  $T_k = 32^\circ$ , są wątpliwe i krzywe ich podlegają specjalnej analizie. Twierdzenie zatem, jakoby brak wspólnego początku krzywych nasycenia zredukowanych dowodził nieściśłości prawa van der Waals'a, jest słuszne dla wszystkich ciał badanych z wyjątkiem wodoru, którego zachowanie się wymaga niezależnego roztrząsania.

Brak wspólnego początku krzywych u dołu przy małych ciśnieniach służy za podstawę podziału ciał na grupy. Ciała, których krzywe biorą początek u spodu w jednym mniej więcej miejscu, można uważać za należące do jednej grupy, o ile kierunek ich jest jednakowy i o ile spotykają się znów w punkcie krytycznym u góry. Można je również uważać za należące do jednej grupy, nawet gdy się rozchodzą u góry, byleby przedstawiały takie analogie kształtu, jak np. trzy wyżej omawiane krzywe benzolu.

Na tych zasadach dadzą się ciała podzielić na trzy główne grupy i kilka pomniejszych. Niektóre tak odbiegają od głównych typów, że ich

do żadnej z tych grup włączyć nie można. Do pierwszej grupy należą następujące ciała:

- |                                   |                                                            |                                 |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| 1. Fluorobenzol                   | } Krzywa zredukowana nasyconemu ciału zupełnie identyczna. | 14. Octan etylu                 | } Krzywa identyczna. <sup>1)</sup> |
| 2. Bromobenzol                    |                                                            | 15. Isomasłan metylu            |                                    |
| 3. Jodobenzol                     |                                                            | 16. Dwuizobutyl                 |                                    |
| 4. Dwuizopropyl                   |                                                            | 17. Propionian metylu           |                                    |
| 5. Pentan normalny                |                                                            | 18. Woda <sup>1)</sup>          |                                    |
| 6. Mrówczan metylu <sup>1)</sup>  |                                                            | 19. Masłan metylu <sup>1)</sup> |                                    |
| 7. Chlorobenzol <sup>1)</sup>     |                                                            | 20. Octan propylu               | } Krzywa identyczna                |
| 8. Eter                           |                                                            | 21. Propionian etylu            |                                    |
| 9. Mrówczan etylu <sup>1)</sup>   |                                                            | 22. Oktan normalny              |                                    |
| 10. Hexan normalny <sup>1)</sup>  |                                                            | 23. Benzol                      |                                    |
| 11. Chlorek cyny <sup>1)</sup>    |                                                            | 24. Izopentan                   |                                    |
| 12. Octan metylu                  |                                                            | 25. Czterochlorek węgla         |                                    |
| 13. Mrówcza propylu <sup>1)</sup> |                                                            |                                 |                                    |

Do tej obszernej grupy eteru i fluorobenzolu należy zaliczyć jeszcze 5 ciał następujących:

- |                        |                                  |
|------------------------|----------------------------------|
| 26. Acetylen           | 29. Fluorek metylu <sup>2)</sup> |
| 27. Bezwodnik siarkawy | 30. Amoniak <sup>2)</sup>        |
| 28. Cyan <sup>2)</sup> |                                  |

Wszystkie te ciała w jednych krzywych są podobne do normalnych, w innych do anormalnych krzywych benzolu. Gdybyśmy innych ciał nie znali, prawo van der Waals'a można by uznać za ścisłe; lecz istnieją ciała, których krzywe nie zbiegają się wcale z krzywami ciał powyższych u dołu. Jedną z grup takich ciał wyodrębnił Young; wykreślenie potwierdziło słuszność tej klasyfikacji. Druga więc główna grupa leży po prawej stronie grupy eteru i benzolu i zawiera 4 alkohole, mianowicie:

- |                     |                                    |
|---------------------|------------------------------------|
| 1. Alkohol metylowy | 3. Alkohol propylowy <sup>2)</sup> |
| 2. „ etylowy        | 4. „ izobutylowy.                  |

Krzywa alkoholu propylowego krzyżuje się z krzywami alkoholów etylowego i metylowego.

<sup>1)</sup> Krzywych tych ciał niema na tablicy 5-ej. Wszystkie one mają przebieg bardzo podobny i zawarte są między krzywami czterochloru węgla i octanu propylu.

<sup>2)</sup> Krzywych tych ciał niema na tablicy 5-ej.



Trzecią grupą główną, której odrębność wykazał H a p p e l, stanowią gazy atmosferyczne. Należy do niej prawdopodobnie także rtęć. Oto ciała tej grupy:

- |            |          |
|------------|----------|
| 1. Argon   | 4. Tlen  |
| 2. Krypton | 5. Azot  |
| 3. Ksenon  | 6. Rtęć. |

Grupa ta początkiem odbiega znacznie na lewo od grupy benzolu i eteru o wiele dalej, niż grupa alkoholów na prawo.

Prócz tych grup głównych dadzą się wydzielić jeszcze grupy pomniejsze przejściowe. Jedną stanowi kwas octowy i tlenek azotu. Jest ona jakby przejściem od grupy eteru i benzolu do grupy alkoholów. Charakterystyczne jest, że krzywe kwasu octowego i tlenku azotu krzyżują się; pochodzi to zapewne stąd, że dane krytyczne przyjęte dla tlenku azotu nie zgadzają się z danymi co do ciśnień nasycenia: krzywa tego ciała, odchylając się stale ku górze od krzywej kwasu octowego, przecina wszystkie trzy krzywe alkoholów i w najwyższym swym punkcie nie okazuje kierunku ku punktowi 1/1. Za czwartą zatem grupę możemy uważać:

- |                |                                |
|----------------|--------------------------------|
| 1. Kwas octowy | 2. Tlenek azotu. <sup>1)</sup> |
|----------------|--------------------------------|

Piąta grupa stanowi przejście od grupy eteru i benzolu do grupy gazów atmosferycznych; zawiera cztery następujące ciała:

- |                                    |                             |                                 |
|------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. Chlor                           | } Krzywa<br>iden-<br>tyczna | 3. Chlorek metylu <sup>1)</sup> |
| 2. Dwusiarczek węgla <sup>1)</sup> |                             | 4. Etylen.                      |

Jedna z krzywych etylenu (według F a r a d a y'a) wykazuje bieg odmienny od krzywej chloru; zdaje się, że jest anormalna. Do szóstej grupy, można zaliczyć dwa ciała:

- |                       |                 |
|-----------------------|-----------------|
| 1. Etan <sup>1)</sup> | 2. Siarkowodór. |
|-----------------------|-----------------|

Główną częścią przebiegu zajmują one również środkowe pole między pierwszą i trzecią grupą, początkiem jednak wybiegać się zdają znacznie po za pierwszą grupę; jak się można domyślać, krzywe tych ciał są anormalne, górne ich punkty zwłaszcza etanu nie okazują kierunku ku punktowi krytycznemu.

Siódmą grupę w pewnej mierze tworzą dwa inne ciała:

- |                              |                          |
|------------------------------|--------------------------|
| 1. Chlorowodór <sup>1)</sup> | 2. Bezwodnik podazotawy. |
|------------------------------|--------------------------|

<sup>1)</sup> Krzywych tych ciał niema na figurze 5-ej.

Chlorowodór wykazuje pokrewieństwo do bezwodnika podazotawego; krzywa jego według doświadczeń A n s d e l l a, jak się zdaje normalna, przebieg ma nader zbliżony do jednej, zdaje się, najnormalniejszej krzywej bezwodnika podazotawego; druga prawdopodobnie anormalna, gdyż przecina inne krzywe normalne różnych ciał, nie ma kształtu analogicznego do krzywych  $N_2O$ , ale początek zdaje się leżeć w jednej okolicy; odmienny kształt dałby się wytłómaczyć nienormalnością krzywej i niepełną pewnością danych, na podstawie których została wykreślona. Co do bezwodnika podazotawego, to z trzech, wykreślonych przezemnie jego krzywych, jedna tylko zdaje się być normalną, lecz nie jest pewna; szkoda, że brak doświadczeń nad tem ciałem w niskich temperaturach i ciśnieniach; w każdym razie krzywe zdają się zmierzać ku pewnemu wspólnemu początkowi, leżącemu w obrębie pierwszej grupy.

Nie dadzą się włączyć do żadnej z tych 7-iu grup trzy ciała :

1. Chlorek etylu <sup>1)</sup>
2. Bezwodnik węglowy
3. Wodór.

Chlorek etylu możnaby uznać za należący do pierwszej grupy, gdyby nie najniższy punkt jego krzywej, świadczący o odmiennym kierunku; miejsce więc tego ciała jest wątpliwe.

Nader charakterystyczny jest przebieg krzywych bezwodnika węglowego: wszystkie krzywe tego ciała zmierzają ku początkowi odległemu od początków wszystkich grup i ciał innych; jest to przypadek zgoła wyjątkowy.

Wodór wykazuje zupełnie odrębny kierunek krzywej i początek, najskrajniej na lewo posuniętej, daleko po za trzecią grupę gazów jedno- i dwuatomowych. Pewne wyjaśnienie tej odrębności stanowić może fakt, iż temperatura krytyczna wodoru jest bardzo niska, a ciśnienie niepewne, więc krzywa nasycenia przy dokładniejszym wyznaczeniu danych krytycznych może uleść znacznemu przesunięciu. Według wzorów (55) przesunięcia pionowe i poziome najniższego punktu krzywej wodoru o współrzędnych  $\theta = 0.4409$  i  $H = 0.0034$  (ponieważ  $T_k = 32^\circ$ ,  $\Delta T_k$  nie przekracza zapewne  $\pm 1^\circ$ ,  $p_k = 19.4$  atm.,  $\Delta p_k$  dojsć może 5 atm.), wynoszą  $\Delta H = \frac{-5.0 \cdot 0034}{14.4} = -0.001$ ;

$\Delta \theta = \frac{\pm 0.4409}{32 \pm 1} = \pm 0.014$ . Względnie znaczne przesunięcie poziome nie wystarcza jednak do wyjaśnienia anomalii wodoru, gdyż nieznacznie zbliża się jego krzywą do krzywych innych ciał.

<sup>1)</sup> Krzywych tego ciała nie ma na figurze 5-ej.

Ogólnym wnioskiem, jaki wyciągnąć można z analizy tablic przedstawiających krzywe nasycenia 53-ch ciał jest ten, że klasyfikacja na grupy w obrębie których prawo van der Waalsa byłoby ściśle, nie może się opierać na podstawach bezwzględnych, że istnieją przejścia od jednej grupy do drugiej. Bliższych wskazówek co do klasyfikacji ciał na grupy udzielić mogłoby wykreślenie początków krzywych nasycenia w większej skali. Obecnie jednak nie posiadamy dla wielu ciał zwłaszcza najciekawszych doświadczeń nad punktami wrzenia przy niskich ciśnieniach.

Co do odpowiedzi na pytanie, czy wyniki, otrzymane przez van der Waalsa, Mathiasa, Amagata i Raveau, były prawdziwe, to wypada ona niejednakowo. Van der Waals, uznając eter i bezwodnik siarkawy za zgodne na podstawie danych co do krzywych nasycenia, eter i wodę co do krzywych granicznych według równania (30), nie popełnił błędu. Również nie odbiegł od prawdy, uważając estry kwasów tłuszczowych za zgodne z powyższymi ciałami. Wątpliwą okazała się jedynie zgodność z niemi chlorku etylu. Natomiast sprawdzania Mathiasa były za mało dokładne: stwierdzał on zgodność ciał w istocie niezgodnych. Pochodziło to z tej przyczyny, że stosował do sprawdzeń wzory empiryczne i że zużytkował nieliczne spostrzeżenia, nie obejmujące całości krzywych gęstości, czy też innych krzywych charakterystycznych. Tak samo próby jego klasyfikacji ciał na podstawie różnic współczynnika  $a$  z wzoru średnicy prostoliniowej nie były szczęśliwe, nie wszystkie ciała pozostały w grupach przeznaczonych im przez Mathiasa. Bardziej szczęśliwymi nie okazali się w swych badaniach Amagata i Raveau: uznane przez nich za zgodne etylen, eter i bezwodnik węglowy okazały się niezgodnymi.

## ROZDZIAŁ IV.

### POJĘCIE STANÓW ODPOWIEDNICH I JEGO ZNACZENIE FIZYCZNE.

1. Mimo to, iż prawo van der Waalsa stosuje się tylko w obrębie pewnych grup, samo pojęcie stanów odpowiednich nie utraciło swego ogólnego charakteru. Są bowiem cechy w zachowaniu się termodynamicznem ciał, które wskazują na odpowiedniość w stanach, scharakteryzowanych przez każdemu ciału właściwe odrębne elementy termodynamiczne: ciśnienia, temperatury, objętości lub tym podobne wielkości. Już kształt analogiczny izoterm Andreasa wszystkich ciał, istnienie na izotermach niższych od krytycznej trzech odrębnych części, odpowiadających: 1) cieczy jednolitej, 2) układowi dwóch faz: cieczy i pary nasyconej, 3) parze przegrzanej,

Young i Ramsay sprawdzali, czy znalezione przez nich izotermy odpowiadają warunkowi (57), według którego pola, zawarte między częścią izoterm ponad linią prostą stanu nasycenia a tą prostą, powinny być równe polom między częścią izoterm ponad prostą nasycenia a tą prostą. Że ten

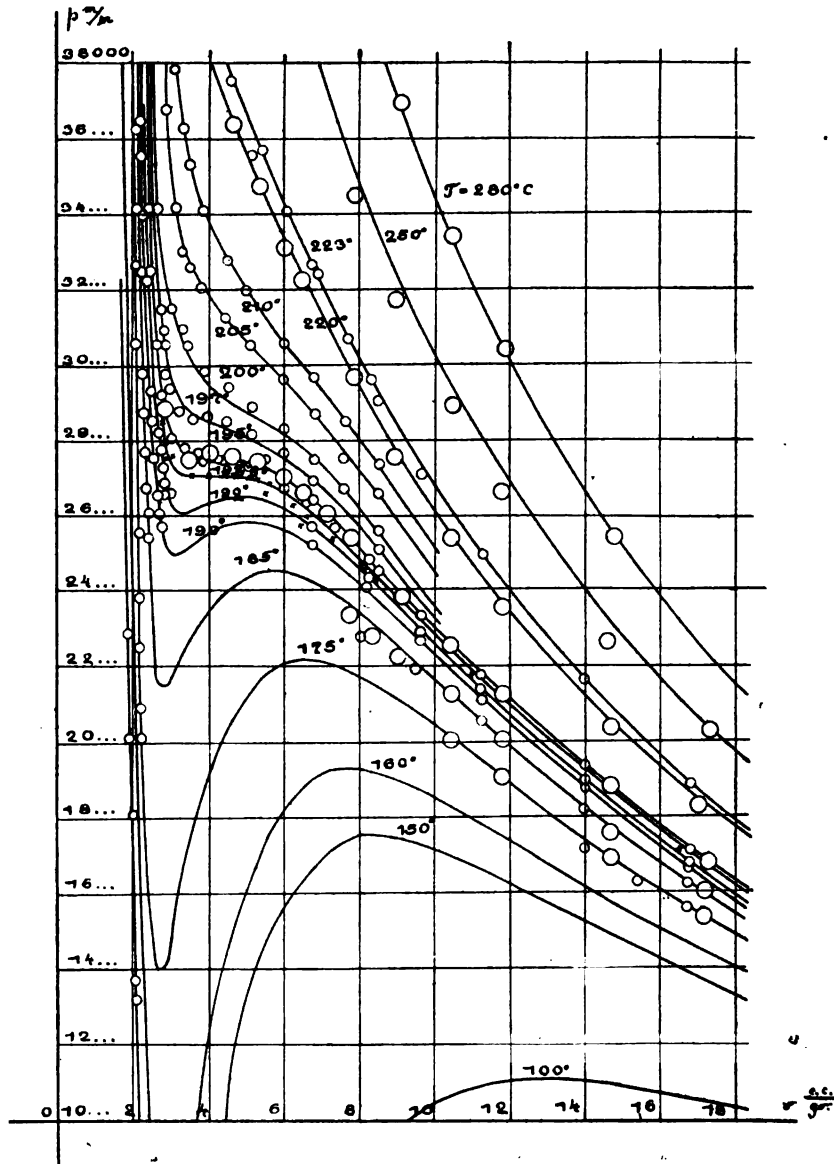


Fig. 6.

(192)

wniosek wypływa z równania (57), wykazuje rysunek, przedstawiający położenie izotermy i linii nasycenia. Umieszczona poniżej figura 7 przedstawia izotermę eteru w temperaturze  $185^{\circ}\text{C}$ . wraz z linią nasycenia według doświadczeń Younga i Ramsaya nad eterem. Przytoczona w Rozdziale III tablica zależności ciśnień nasycenia eteru od temperatury wskazuje, że temperaturze  $185^{\circ}\text{C}$ . odpowiada ciśnienie  $23646^{\text{m}}/\text{m}$ .

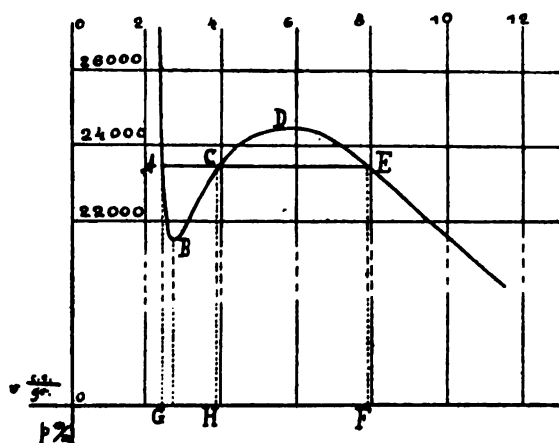


Fig. 7.

Według prawa Clausiusa - Maxwella, prostokąt  $A E F G A$  musi mieć powierzchnię równą  $A B C D E F G A$ . Ponieważ powierzchnia ta równa się prostokątowi  $A E F G A$  więcej  $C D E C$  mniej  $A B C A$ , przeto  $A B C A$  musi być równe  $C D E C$ . Warunek ten pozwala obliczyć ciśnienie nasycenia: linią nasycenia będzie prosta pozioma, która odcina odcinki  $A C B A$  i  $C D E C$  równe. Zestawienie znalezionych w ten sposób ciśnień nasycenia z wyznaczonymi doświadczalnie przekona, czy izotermy znalezione poddają się prawu Clausiusa - Maxwella. Ciśnienie nasycenia z izoterm wykreślonych obliczali Young i Ramsay w dowcipny sposób. Mając do czynienia z pewną izotermą, badali oni za pomocą planimetru, jakie jest pole zawarte powyżej i poniżej trzech linii poziomych, odpowiadających ciśnieniom, między którymi było zawarte znane z doświadczeń ciśnienie nasycenia; następnie przedstawiali rezultaty na diagramacie, za rzędne brali ciśnienia, za odcięte pola  $A C B A$  i  $C D E C$ ; pola obliczali w calach kwadratowych; skala była taka, iż jeden cal kwadratowy wyobrażał iloczyn z  $2000^{\text{m}}/\text{m}$  ciśnienia przez 2 centymetry sześciennego objętości właściwej. Zmienność pola  $A C B A$  w zależności od ciśnienia charaktery-

zowała pewna krzywa; inna krzywa uwydatniała zmienność pola  $CDEC$  przy zmianie ciśnienia. Krzywe te przecinały się w pewnym miejscu. W tym punkcie  $ACBA$  i  $CDEC$  są równe, zatem przypada on przy ciśnieniu nasycenia.

Rysunek poniższy (Fig. 8) przedstawia diagramat podobny dla izotermi  $175^{\circ}$ ; okazuje się, że ciśnienie nasycenia przy tej temperaturze wynosi  $20260^m/m$ .

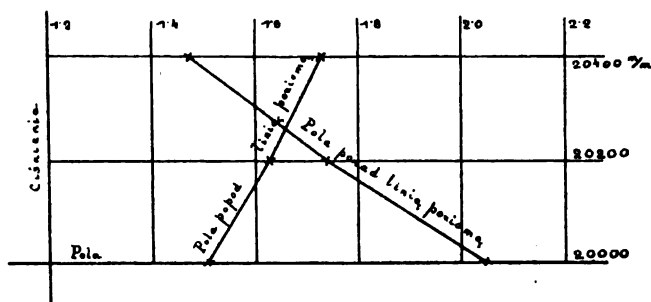


Fig. 8.

Ciśnienia nasycenia, w ten sposób znalezione, dla sześciu temperatur są nader blizkie ciśnieniom, otrzymanym z doświadczeń, jak to przedstawia niżej umieszczona tablica, w której podane są też ciśnienia maximum i minimum izoterm, tworzące krzywe w zależności od temperatur. Wraz z krzywą nasycenia tworzą one system trzech linii, spotykających się w punkcie krytycznym.

| Temperatura     | Ciśnienie nasycenia obliczone | Ciśnienie nasycenia obserwowane | Ciśnienie w najmniejszości izotermi | Ciśnienie w największości izotermi |
|-----------------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $192^{\circ}C.$ | $26350^m/m$                   | $26331^m/m$                     | $26125^m/m$                         | $26490^m/m$                        |
| 190             | 25554                         | 25513                           | 24960                               | 25870                              |
| 185             | 23703                         | { 23623 (stare)<br>23765 (nowe) | 21660                               | 24510                              |
| 175             | 20259                         | { 20189 (stare)<br>20271 (nowe) | 14060                               | 22100                              |
| 160             | 15900                         | 15778                           | — 20                                | 19090                              |
| 150             | 13405                         | 13262                           | — 10400                             | 17380                              |

Zgodność danych doświadczalnych i obliczonych z wzoru (56) jest tak ścisła, iż można ją uważać za znakomite potwierdzenie prostoliniowości izochor.

Ramsay i Young przedsiębrali jeszcze podobne rachunki nad innymi ciałami, mianowicie alkoholami: metylowym, etylowym i kwasem octowym. Okazało się, że izochory alkoholów są również prostoliniowe. Natomiast kwas octowy wykazuje krzywoliniowe izochory, co należy wytłumaczyć tą okolicznością, że kwas octowy ulega zmianom składu drobinowego. Istotnie  $N_2O_4$ , ciało również niestałego składu drobinowego, okazuje, jak stwierdzili wymienieni badacze na podstawie danych doświadczalnych Edw. i Wł. Natansonów<sup>1)</sup>, podobne krzywoliniowe izochory.

Nadto badali Ramsay i Young bezwodnik węglowy. Danych dostarczyły doświadczenia Andrews'a<sup>2)</sup>. Postępowali oni w tym razie analogicznie jak z eterem, kończąc wykreśleniem izoterm wraz z nieznanymi doświadczalnie częściami. Wykreślenie to zawiera Fig. 10 cytowanego ich dzieła. Kształt izoterm okazał się analogiczny do kształtu izoterm eteru.

Powyższe badania uzupełniły wszechstronnie nasze wiadomości o analogiach w zachowaniu się termodynamicznem ciał, znane już z diagramatów Andrews'a i z hipotezy J. Thomsona.

2. Stwierdzenie innych, równie uderzających, analogij zawdzięczamy Amagatowi i Wróblewskiemu.

Już sprawdzenia prawa Boyle'a - Mariotte'a, czy i jak dalece iloczyn ( $p v$ ) w stałej temperaturze okazuje się stały, dowodziły pewnej analogii w zachowaniu się różnych gazów. Z badań Regnaulta i Natterera nad ściśliwością gazów wynikało, że iloczyn ( $p v$ ) w tej samej temperaturze ( $4^{\circ} C.$ ) zależy od ciśnienia i u wszystkich gazów z wyjątkiem wodoru przechodzi przez najmniejszość. Cailletet znalazł, że dla azotu najmniejszość iloczynu ( $p v$ ) w stałej temperaturze  $15^{\circ} C.$  przypada pod ciśnieniem 75 atm. Andrews odkrył, że dla  $CO_2$  najmniejszość ( $p v$ ) w temperaturze  $35.5^{\circ} C.$  leży przy ciśnieniu 90 atm. Krokiem naprzód w badaniach nad ściśliwością gazów było określenie przez Amagata ciśnienia, przy którym ( $p v$ ) jest najmniejszością, na różnych izotermach. Spółrządne takich najmniejszości oznaczmy na diagramatach ściśliwości<sup>3)</sup> przez  $p_m$  i  $(p v)_m$ . Doświadczenia Amagata dowiodły, że są one związane ze sobą związkiem  $(p v)_m = \varphi(p_m)$ , a same są funkcjami temperatury:  $(p v)_m = \varphi_1(T_m)$  i  $p_m = \varphi_2(T_m)$ . Amagat zbadał ściśliwość azotu, wodoru, metanu, acetylenu i bezwodnika węglowego w granicach temperatury od  $15^{\circ} C.$  do  $100^{\circ} C.$  i ciśnienia od 40 atm. do 430 atm.<sup>4)</sup> Dla azotu i me-

<sup>1)</sup> Wied. Ann., t. 27. 1886, str. 606, Kosmos (Lwów) 1886.

<sup>2)</sup> Phil. Trans. 1869, II, str. 575; 1876, str. 421.

<sup>3)</sup> Odejętami są ciśnienia, rzędniemi iloczynu ( $p v$ ).

<sup>4)</sup> Ann. Chim. Phys. 1880 i 1881.

tanu  $p_m$  maleje, dla bezwodnika węglowego i etylenu wzrasta z podnoszeniem się temperatury. Wykazuje to poniższa tabelka W r ó b l e w s k i e g o <sup>1)</sup>.

| Etylen.  |           | Bezwod. węglowy. |           | Azot. |       | Metan. |       |
|----------|-----------|------------------|-----------|-------|-------|--------|-------|
| $t_m$    | $p_m$     | $t_m$            | $p_m$     | $t_m$ | $p_m$ | $t_m$  | $p_m$ |
| 16·3° C. | 72·4 atm. | 35·1° C.         | 92·1 atm. | 17·7  | 65·8  | 14·7   | 165·7 |
| 20·3     | 79        | 42               | 105·2     | 30·1  | 57·9  | 29·5   | 163·1 |
| 30·1     | 92·1      | 50               | 128·9     |       |       | 40·6   | 153·9 |
| 40       | 105·2     | 60               | 151·3     |       |       | 79·8   | 144·7 |
| 50       | 115·7     | 70               | 171       |       |       | 100·1  | 131·5 |
| 60       | 125       | 80               | 184·2     |       |       |        |       |
| 70       | 131·5     | 90·2             | 197·3     |       |       |        |       |
| 79·9     | 138·1     | 100              | 210·5     |       |       |        |       |
| 89·9     | 151·3     |                  |           |       |       |        |       |
| 100      | 157·9     |                  |           |       |       |        |       |

Rezultaty przedstawił A m a g a t na diagramatach ściśliwości, z których dwa dla CO<sub>2</sub> i wodoru reprodukuje na Fig. 15 i 16 według N a t a n s o n a <sup>2)</sup>.

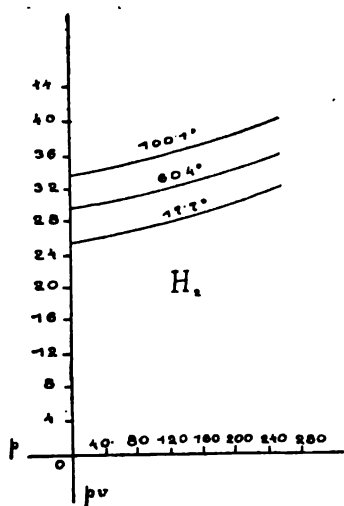


Fig. 9.

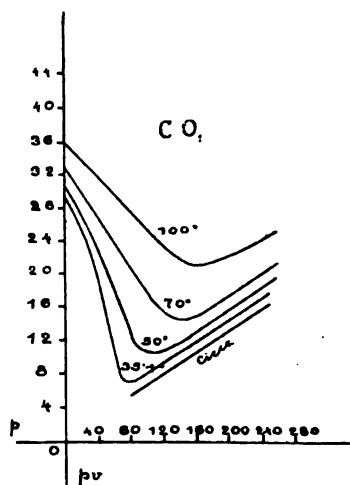


Fig. 10.

<sup>1)</sup> Sitzb. Wien. Akad., t. XCVII. 1888; „Wstęp do Fizyki teoretycznej“ Wł. N a t a n s o n a. Warszawa 1890, str. 258.

<sup>2)</sup> „Wstęp do Fizyki teoretycznej“. Warszawa 1890, str. 259, fig. 19. Za jednostkę ciśnienia służy metr słupa rtęciowego.



Izotermi azotu różnią się od krzywych wodoru lekką wklęsłością ku osi ciśnień; krzywe metanu są bardziej wklęsłe w tym samym kierunku; krzywe etylenu okazują się zbliżonymi do krzywych dwutlenku węgla, lecz uginają się szybciej przy obniżaniu się temperatury. Diagramat bezwodnika węglowego okazuje, że izotermi przy ciśnieniach większych od  $p_m$  zbliżają się do prostych, nachylonych do osi odciętych. Im bardziej temperatura opada, tem bardziej zbliża się ta część izotermi w sposób asymptotyczny do prostej, przechodzącej przez środek współrzędnych a odpowiadającej zupełnej nieściśliwości.

Badania A m a g a t a dowiodły, że prawa, rządzące zachowaniem się termodynamicznem gazów, są podobne. Zachowania się wodoru nie można uważać za wyjątkowe. Izotermi jego składają się tylko z gałęzi, zbliżonych do prostych, dla temperatur między  $17^\circ$  i  $100^\circ$  C. Ponieważ jednak wodór jest gazem trudnym do skroplenia, zwykle temperatury są dla niego za wysokie, ażeby najmniejszości ( $p v$ ) wystąpiły. Stanie się to jasne, jeżeli przypuścimy, że  $p_m$ , jako funkcyja temperatury, przechodzi przez największość, następnie z podwyższaniem temperatury zmniejsza się tak, że w temperaturach wysokich izotermi nie okazują najmniejszości ( $p v$ ). Takimi wysokimi temperaturami są dla wodoru już temperatury między  $17^\circ$  i  $100^\circ$  C. Podobnie można wyjaśnić niejednakowe zachowanie się bezwodnika węglowego i etylenu z jednej strony, metanu i azotu z drugiej. W przypadku bezwodnika węglowego i etylenu maximum  $p_m$  leży nad temperaturą  $100^\circ$  C., zatem ciśnienia  $p_m$ , odpowiadające najmniejszości ( $p v$ ), na izotermach między  $17^\circ$  i  $100^\circ$  C. wzrastają szybko z podwyższeniem temperatury. Metan i azot mają największość  $p_m$  poniżej  $100^\circ$ , zatem na izotermach tych ciał między  $17^\circ$  i  $100^\circ$  ciśnienia  $p_m$  opadają przy podwyższaniu temperatury. Hypotezę tę przeczuwał już A m a g a t, sformułował ją Z. W r ó b l e w s k i w r. 1888. Późniejsze badania W i t k o w s k i e g o <sup>1)</sup> i A m a g a t a dowiodły słuszności hipotezy W r ó b l e w s k i e g o.

A m a g a t w r. 1891 <sup>2)</sup> podał nową siatkę ściśliwości  $\text{CO}_2$ , wykazującą kształt linii najmniejszości ( $p v$ ), czyli t. zw. linii W r ó b l e w s k i e g o; diagramat ściśliwości bezwodnika węglowego, odtworzony według spostrzeżeń A m a g a t a przedstawiam na Fig. 11. Sieci A m a g a t a prócz linii W r ó b l e w s k i e g o, zwanej także według Y o u n g a ortobaryczną, wykazują także linię skraplania. Są one nowym dowodem analogii w zachowaniu się termodynamicznem ciał; dowodem tem ważniejszym, że obejmują szerszy zakres zjawisk niż sieci izoterm na zwykłym diagramacie A n d r e w s a, ograniczonym linią skraplania ku górze lub nie wiele za nią posuniętym.

<sup>1)</sup> Nowe badania prof. W i t k o w s k i e g o nad wodorem zostaną niebawem ogłoszone

<sup>2)</sup> Comptes Rendus, t. CXIII, str. 3 i 4 (odbitki), fig. 1 i 2.

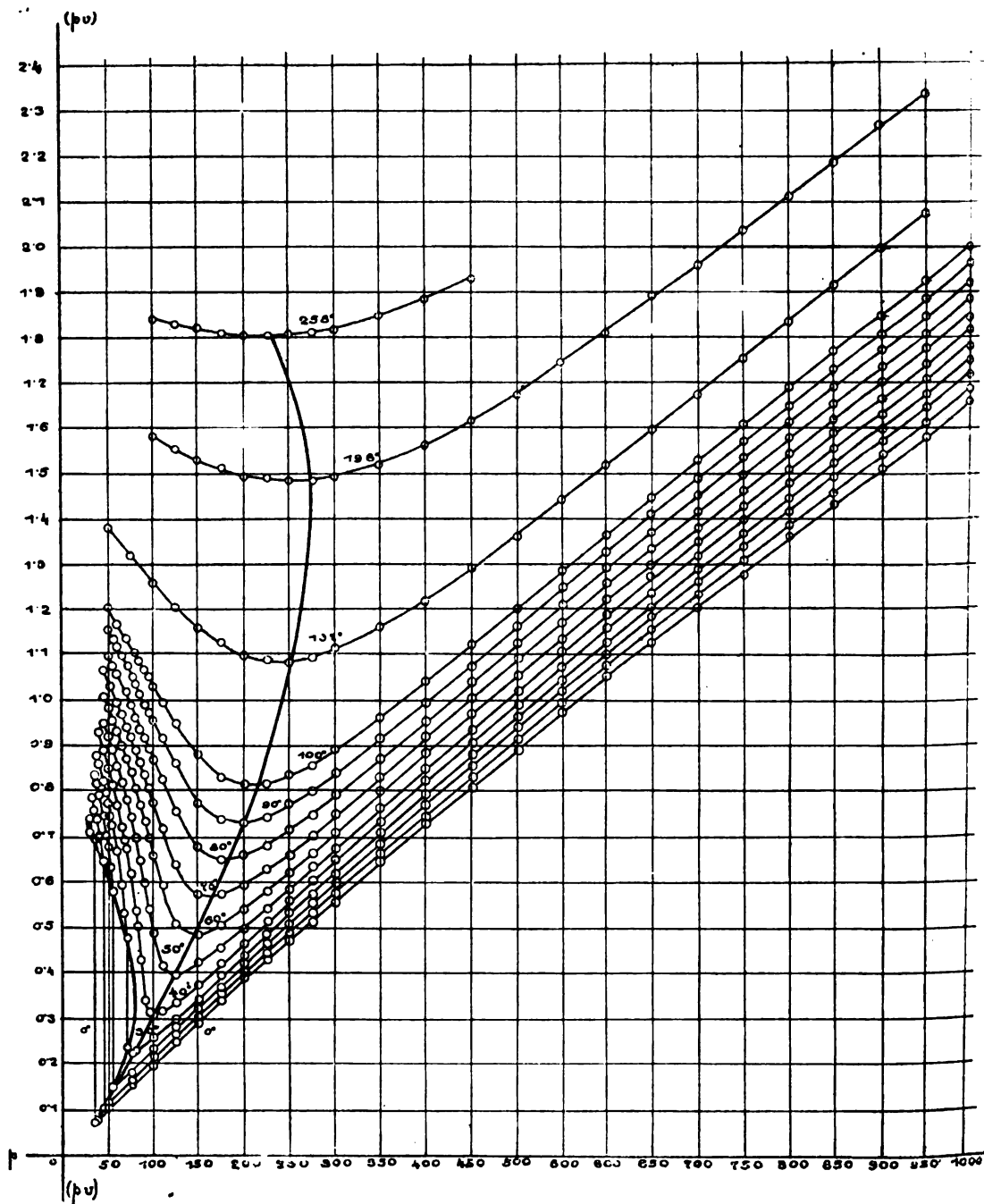


Fig. 11.

Punkt największości ciśnienia  $p_m$  jest więc charakterystycznym, podobnie jak punkt krytyczny. Wł. Natanson<sup>1)</sup> i D. Berthelot<sup>2)</sup> wyprowadzają odmiennymi drogami wartości współrzędnych tego punktu z równania charakterystycznego van der Waalsa na zasadzie równań:

$$(58) \quad \frac{\partial(pv)}{\partial p} = 0, \quad \frac{dp_m}{dT} = 0.$$

Znaleźli oni, że współrzędne tego punktu, wyrażone bądź przez parametry równania van der Waalsa, bądź przez współrzędne punktu krytycznego, wynoszą:

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_a = \frac{1}{8} \frac{a}{b^3} \\ T_a = \frac{9}{16} \frac{a}{bR} \\ v_a = 4b \end{array} \right. \quad (60) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_a = \frac{27}{8} p_k \\ T_a = \frac{243}{128} T_k \\ v_a = \frac{4}{3} v_k \end{array} \right.$$

Berthelot nazywa ten punkt punktem cofania się minimum iloczynu ( $pv$ ).

3. Krzywa ortobaryczna ma, jak wykazuje Berthelot<sup>3)</sup>, doniosłe znaczenie w teorii zjawiska Joule'a - Kelvina, rozprężania się gazów przez zatyczkę porowatą. Zjawisko to wywołuje, jak wiadomo, skutki termiczne. Początkowo próbowano badać rozprężanie się gazów do próżni. Wówczas gaz nie wykonywa pracy żadnej. Jeżeli przez  $\delta Q$ ,  $\delta W$ ,  $\delta U$  oznaczymy pochłaniane elementarne ilości ciepła, pracy i zmianę energii wewnętrznej gazu, mamy według pierwszej zasady Termodynamiki:

$$(61) \quad \delta Q = \delta U + \delta W,$$

ponieważ:

$$(62) \quad \delta W = 0,$$

więc:

$$(63) \quad \delta U = \delta Q.$$

<sup>1)</sup> „Wstęp do Fizyki teoretycznej“, str. 297 i 299.

<sup>2)</sup> „Quelques remarques sur l'équation caractéristique des fluides“. Livre Jubilaire dédié à H. A. Lorentz. La Haye 1900, str. 429—440, 445 i 446.

<sup>3)</sup> „Sur la notion des états correspondants et sur divers points correspondants remarquables“. Bulletin des séances de la Société française de Physique 1903. Zeszyt 1-szy, str. 36—52.

Ilość pochłoniętego ciepła zależy tylko od zmian energii wewnętrznej gazu. Gay-Lussac pierwszy prowadził badania nad rozprężaniem się gazów do próżni. Później badali to zjawisko Joule i Regnault; doszli do wniosku, że gazy nie okazują w niem zmiany temperatury. Ugruntowane na tych doświadczeniach twierdzenie, że energia wewnętrzna gazów przy rozprężaniu się do próżni nie zmienia się, nosi, jak wiadomo, nazwę prawa Mayera - Joule'a. Atoli jest rzeczą niewątpliwą, iż zjawisko rozprężania się gazów do próżni, jest połączone ze zmianą temperatury gazu; w doświadczeniach wyżej wymienionych metody wykrywania tych zmian były za mało czułe. Lord Kelvin zmodyfikował warunki zjawiska, każąc rozprężyć się gazom przez zatyczkę porowatą. Mamy znown równanie powyższe (61); tu wszakże praca elementarna jest <sup>1)</sup>:

$$(64) \quad \delta W = p \delta v + v \delta p = \delta (pv),$$

zatem:

$$(61^*) \quad \delta Q = \delta U + \delta (pv),$$

oraz

$$(65) \quad \int \delta Q = \int \delta U + \int \delta (pv).$$

Oznaczmy:

$$(66) \quad \Delta Q = \int \delta Q, \quad \Delta U = \int \delta U, \quad \Delta (pv) = \int \delta (pv).$$

Wówczas równanie (65) będzie:

$$(67) \quad \Delta Q = \Delta U + \Delta (pv).$$

Joule i Kelvin wykonali doświadczenia tego rodzaju nad powietrzem, wodorem, azotem, tlenem i bezwodnikiem węglowym przy rozmaitych ciśnieniach i temperaturach <sup>2)</sup>. Jeżeli przez  $\delta t$  oznaczymy zmianę temperatury, odpowiadającą rozprężaniu się gazu od ciśnienia  $p$  do  $(p - \delta p)$ , wówczas za miarę skutku termicznego w zjawisku Joule'a - Kelvina możemy wziąć  $\frac{\delta t}{\delta p}$ . Okazało się, iż ta wielkość jest w zwykłych temperaturach dla wodoru dodatnia, dla innych gazów ujemna, t. j. wodór przy rozprężaniu ogrzewa się, inne gazy oziębiają się.

<sup>1)</sup> Patrz: „Wstęp do Fizyki teoretycznej“, str. 249.

<sup>2)</sup> „Scientific Papers of J. P. Joule“, t. II. 1887; „Mathematical and physical Papers by Sir William Thomson (Lord Kelvin)“, t. I. 1882.

Lord Kelvin wykazał, że istnieje następująca zależność:

$$(68) \quad \frac{\delta t}{\delta p} = \frac{1}{I c_p} \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right),$$

gdzie  $c_p$  oznacza ciepło właściwe gazu pod stałym ciśnieniem. Podobnie w zjawisku Gay-Lussaca-Joule'a, jeżeli oznaczymy przez  $\delta t$  zmianę temperatury odpowiadającą zmianie objętości  $\delta v$ , mamy:

$$(69) \quad \frac{\delta t}{\delta v} = \frac{1}{I c_v} \left( T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right),$$

gdzie  $c_v$  oznacza ciepło właściwe gazu w stałej objętości. Równania te pozwalają na wskazanie krzywych i punktów na diagramacie ściśliwości, mających doniosłe znaczenie termodynamiczne. Berthelot wyodrębnił 6 miejsc na diagramacie, które odpowiadają pewnemu zachowaniu się funkcji  $p v$ ,  $(p v + U)$  i  $U$ . Na każdej z niższych izoterm między  $T=0$  i  $T=3.375 T_k$  znajdziemy miejsce, gdzie  $\Delta(p v)$  jest największością. Miejsca te na izotermach, połączone w jedną linię, dadzą krzywą w kształcie paraboli. Podobnie każda z wyższych izoterm okaże miejsce, w którym  $\Delta(p v) = 0$ . Punkty, odpowiadające temu warunkowi, utworzą inną krzywą paraboliczną. Posuwając się na izotermach w górę, przy wyższych ciśnieniach znajdziemy punkty, gdzie  $[\Delta(p v) + \Delta U]$  będzie największością; jeszcze wyżej takie, w których ta zmiana funkcji  $(U + p v)$  stanie się  $= 0$ ; punkty te utworzą nowe krzywe, również parabolicznego kształtu; według równania van der Waalsa te kategorie punktów leżą na wszystkich izotermach między  $T=0$  i  $T=6.75 T_k$ . Warunki, że zmiana energii wewnętrznej gazu  $\Delta U$  osiąga maximum lub staje się zerem, dają źródło nowym krzywym hyperbolicznego kształtu.

Powyższe miejsca geometryczne charakterystycznych punktów na izotermach, możnaby wyznaczyć za pomocą pomiarów termicznych w zjawiskach Gay-Lussaca-Joule'a i Joule'a - Kelvina, gdyż pierwsze dają wskazówki o zmianach  $\Delta U$ , drugie o zmianach  $[\Delta U + \Delta(p v)]$ . Na zasadzie dotychczasowych danych doświadczalnych nie jest to jeszcze możliwe. Natomiast jesteśmy w stanie wyznaczyć te punkty inną drogą.

Weźmy miejsce geometryczne punktów, gdzie zmiana temperatury wskutek pracy zewnętrznej, a więc i sama praca zewnętrzna, przez gaz wykonywana, osiąga największość.  $\Delta(p v)$  przedstawia się jako różnica iloczynu  $(p v)$  w punkcie danym izotermi i iloczynu  $p_0 v_0$ , odpowiadającego początkowi izotermi. Praca zewnętrzna, wykonywana przez gaz, rozprężający się przez ściankę porowatą od ciśnienia  $p$  do ciśnienia  $p_0 = 0$ , jest:

$$(70) \quad \Delta(p v) = \int_{p_0}^p \delta(p v) = p v - p_0 v_0.$$

Iloczyn ( $pv$ ) na izotermach między  $T=0$  i  $T=3.375 T_k$  początkowo zmniejsza się aż do punktu, w którym osiąga minimum, następnie wzrasta; przeto  $\Delta(pv)$  ma wartość ujemną, gdyż ( $pv$ ) jest stale mniejsze od ( $p_0 v_0$ ), a nadto zmniejsza się aż do minimum ( $pv$ ) wraz ze zmniejszaniem się ( $pv$ ), gdyż ( $p_0 v_0$ ) jest stałe. Wartość pracy bezwzględna jest największa w punkcie najmniejszości ( $pv$ ); znak pozostaje ujemny. Po przejściu minimum ( $pv$ ) praca zewnętrzna maleje, bo ( $pv$ ) wzrasta, a bezwzględna wartość  $\Delta(pv)$  zmniejsza się. Że  $\Delta(pv)$  ma wartość ujemną, znaczy, że aby gaz w tych warunkach rozprężyć, należy nad nim pracę wykonać. Praca ta ma wartość największą przy najmniejszości iloczynu ( $pv$ ), t. j. jeżeli rozprężenie gazu rozpoczyna się w temperaturze danej izotermy od ciśnienia, przy którym ( $pv$ ) jest najmniejszością od ciśnienia  $p_m$ , gaz osiąga największe oziębienie, możliwe w danej temperaturze wskutek pracy zewnętrznej. Koniecznym i wystarczającym warunkiem, ażeby  $\Delta(pv)$  było maximum, jest więc ten, że ciśnienie, przy którym rozpoczynać się ma rozprężanie, powinno być  $= p_m$ , czyli:

$$(58) \quad \left[ \frac{\partial (pv)}{\partial p} \right]_T = 0.$$

Jest to znany warunek, charakteryzujący krzywą Wróblewskiego; zatem roztrząsania Berthelota doprowadzają do wykrycia nowych cech tej krzywej. Wierzchołek krzywej Wróblewskiego, punkt charakterystyczny na równi z krytycznym, może być nazwany punktem cofania się największości oziębienia w zjawisku Joule'a-Kelvina wskutek pracy zewnętrznej.

Roztrząsania Berthelota stały się narzędziem do odkrycia nowych punktów, nie mniej charakterystycznych od dwu poprzednich. Miejsce geometryczne punktów, gdzie  $\Delta(pv)$  staje się zerem, daje się wynaleść na diagramacie ściśliwości, ponieważ dla niego  $pv = p_0 v_0$ ; jest to zatem przecięcie izotermy z prostą poziomą, przechodzącą przez jej początek. Ponieważ zaś praca zewnętrzna w danym punkcie znika, pozostaje zatem wpływ pracy wewnętrznej, czyli: skutek cieplny zjawiska Joule'a-Kelvina jest tu taki sam, jak zjawiska Gay-Lussaca-Joule'a, jeżeli zjawiska zachodzą pomiędzy tym samym stanem początkowym i końcowym, t. j. od stanu ( $p, v$ ) na początku do stanu  $p=0, v=\infty$  na końcu. Mamy wówczas:

$$(71) \quad \int_0^p c_p \frac{\partial t}{\partial p} dp = \int_{\infty}^v c_v \frac{\partial t}{\partial v} dv.$$

Wobec (68) i (69), zależność (71) zamieni się na

$$(72) \quad \int_0^p \left[ \frac{\partial \left( \frac{v}{T} \right)}{\partial T} \right]_p dp = \int_{\infty}^v \left[ \frac{\partial \left( \frac{p}{T} \right)}{\partial T} \right]_v dv.$$

Początek tej krzywej leży w tym samym punkcie diagramatu  $(pv, p)$ , iak początek krzywej ortobarycznej; wierzchołek jej ma tę samą rzędną  $(pv)$ , jak wierzchołek krzywej *Wróblewskiego*. Wierzchołek ten służy znowu za źródło wartości  $p, v, T$ , redukujących równanie charakterystyczne. Jeżeli oznaczymy współrzędne tego punktu przez  $p_f, v_f, T_f$ , znajdziemy z równania van der *Waal*sa:

$$(73) \quad \begin{cases} p_f = 6.75 p_k, \\ v_f = 0.666 v_k, \\ T_f = 1.6875 T_k. \end{cases}$$

Gdy się posuniemy na izotermach dalej, znajdziemy miejsce, gdzie  $[\Delta(pv) + \Delta U]$  osiąga maximum (maximum bezwzględnej wartości, gdyż algebraiczna wartość jest ujemna). Oziębienie w tym miejscu jest największą, zatem  $\frac{\delta t}{\delta p} = 0$ . Równanie (68) daje  $T \frac{\partial v}{\partial T} - v = 0$  lub

$$(74) \quad \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{v}{T}.$$

Inaczej:

$$(75) \quad \left[ \frac{\partial \left( \frac{v}{T} \right)}{\partial T} \right]_p = 0.$$

Geometryczne miejsce tych punktów można wyznaczyć na diagramacie odstępstw od połączonego prawa *Mariotte'a-Gay-Lussaca* lub *Avogadro-Ampère'a*; diagramat ten ma za rzędne wartości  $\left( \frac{pv}{T} \right)$ , za odcięte temperatury. Jeżeli na takim diagramacie wykreślimy izobary, znajdziemy, że posiadają one najmniejszości rzędnych w tych miejscach:

$$(76) \quad \frac{\partial \left( \frac{pv}{T} \right)}{\partial T} = 0,$$

ponieważ leżą one na izobarach i  $p$  ma wartość skończoną, zatem spełnia się warunek (75).

*Berthelot* podaje (Fig. 12) diagramat podobnych izobar, wykreślonych według równania van der *Waal*sa w zmiennych zredukowanych do punktu krytycznego  $\left( \frac{\pi v}{\vartheta}, \vartheta \right)$ .

Krzywa tych najmniejszychości:

$$(77) \quad \left(\frac{pv}{T}\right)_m = f(T_m)$$

okazuje wierzchołek, w którym  $\left(\frac{pv}{T}\right)_m$  przechodzi przez największość, gdzie zatem:

$$(78) \quad \frac{d}{dT_m} \left(\frac{pv}{T}\right)_m = 0.$$

Punkt ten jest tak samo charakterystyczny, jak punkty wyżej wspomniane, i jest w stanie redukować równanie charakterystyczne. Nazwał go Berthelot punktem cofnięcia się zjawiska Joule'a - Kelvina;

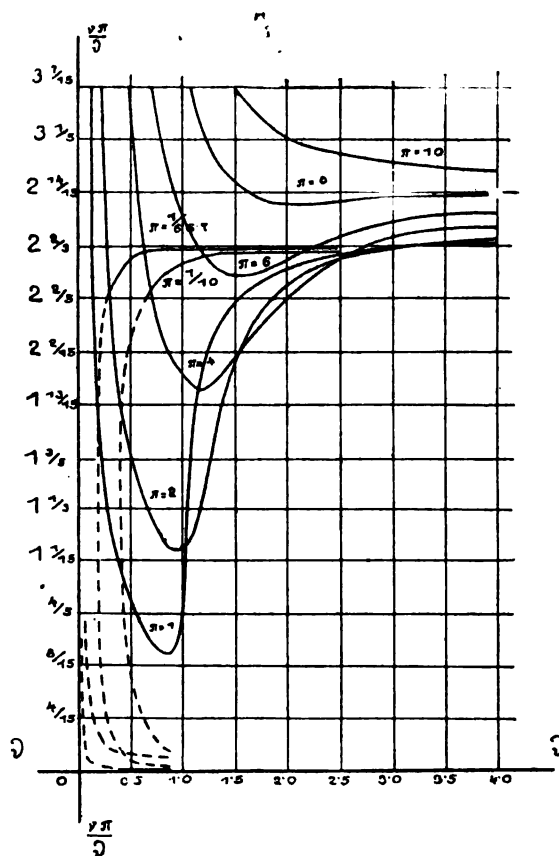


Fig. 12.



według równania van der Waalsa spółrzędne tego punktu, które oznaczam przez  $p_b$ ,  $v_b$  i  $T_b$ , wynoszą:

$$(79) \quad p_b = 9 p_k, \quad v_b = v_k, \quad T_b = 3 T_k.$$

Krzywa największego oziębienia jest jednocześnie krzywą największej wydajności maszyn oziębających, opartych na zjawisku Joule'a - Kelvina, np. maszyny Lindego - Hampsona, powszechnie dziś używanej do skraplania gazów.

Jeżeli przeniesiemy krzywą największego oziębienia z diagramatu  $\left(\frac{pv}{T}, T\right)$ , na diagramat ściśliwości  $(pv, p)$ , okaże się ona krzywą paraboliczną podobnego kształtu jak krzywa ortobaryczna i będzie okazywała największość odciętej  $p_m$ . Punkt ten charakteryzują związki:

$$(80) \quad \frac{dp_m}{p(pv)_m} = 0 \quad \text{lub} \quad (81) \quad \frac{dp_m}{dT_m} = 0.$$

Wierzchołek ten jest identyczny z wierzchołkiem krzywej największego oziębienia na diagramacie  $\left(\frac{pv}{T}, T\right)$ .

Gdy posuniemy się na izotermach po za parabolę największego oziębienia, znajdziemy miejsca obojętne, gdzie gaz ani ogrzewa się, ani oziębia przy rozprężaniu; w istocie po przejściu krzywej, gdzie zmiana funkcji  $(pv)$  staje się zerem, wielkość ta musi być dodatnia i stale wzrasta; skoro zaś oziębienie całkowite wzrasta, przeto zawdzięczamy je zmianie funkcji  $U$ ;  $\Delta U$  musi być ujemne i wzrastać w wartości bezwzględnej równocześnie ze zmianą funkcji  $U + pv$  aż do punktów maximum oziębienia; odtąd  $\Delta U$  zmniejsza się pozostając ujemnym; ponieważ praca zewnętrzna  $\Delta(pv)$ , jak wskazują izotermy ściśliwości, dalej wzrasta, nie przestając być dodatnią, musi w końcu zająć przypadek, kiedy wielkości: ujemna  $\Delta U$  i dodatnia  $\Delta(pv)$  sparaliżują się wzajemnie, kiedy  $\Delta(pv) + \Delta U$  będzie zerem; wówczas gaz ani się oziębia, ani ogrzewa. Miejsce to określa warunek:

$$(82) \quad \int_0^p \left[ \frac{\partial \left(\frac{v}{T}\right)}{\partial T} \right]_p dp = 0.$$

Po za tą krzywą, mającą również kształt paraboli, następuje ogrzewanie się gazów przy rozprężaniu się w zjawisku Joule'a - Kelvina. Parabola ta ma początek w tem samym miejscu diagramatu ściśliwości, jak krzywa największego oziębienia. Wierzchołek jej ma tę samą rzędną  $(pv)$ , jak wierzchołek poprzedniej paraboli. Wierzchołek ten nie może służyć za źródło jednostek redukujących równanie charakterystyczne, ponieważ wła-

ściwa mu temperatura jest zerem absolutnem. Na izotermach wyższych od tej, która zawiera początek ostatnio omówionych krzywych, gaz przy rozprężaniu będzie się ogrzewał pod wszelkimi ciśnieniami. Tak się rzecz ma z wodorem przy zwykłych temperaturach. Za pomocą przytoczonych równań można znaleźć równania tych krzywych charakterystycznych, jeżeli znamy kształt równania charakterystycznego. Berthelot znajduje ich równania, wynikające z równania van der Waals'a. Podaję ich rzut na płaszczyznę  $(pv, p)$  w zmiennych zredukowanych, oznaczając iloczyn  $\pi\gamma$  przez  $\varphi$ :

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Krzywa Wróblewskiego ma równanie } \pi = \varphi \frac{9-\varphi}{6} . \\ 2. \text{ Krzywa znikania pracy zewnętrznej } \pi = \varphi \frac{9-\varphi}{3} . \\ 3. \text{ Krzywa największego oziębienia } \pi = \varphi \frac{18-\varphi}{9} . \\ 4. \text{ Krzywa oziębienia zerowego } \pi = \varphi \frac{18-\varphi}{3} . \end{array} \right.$$

Oznaczając zmienne zredukowane do wierzchołka krzywej najmniejszości iloczynu  $(pv)$  przez  $\mathbf{P}, \mathbf{V}, \mathbf{T}$ , a więc:

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{p_a} = \mathbf{P} , \\ \frac{v}{v_a} = \mathbf{V} , \\ \frac{T}{T_a} = \mathbf{T} , \end{array} \right.$$

otrzymamy równanie zredukowane:

$$(85) \quad \left( \mathbf{P} + \frac{1}{2\mathbf{V}^2} \right) \left( \mathbf{V} - \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{8} \mathbf{T} .$$

Redukując do wierzchołka krzywej znikania pracy zewnętrznej:

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{p_b} = \mathbf{\Pi} , \\ \frac{v}{v_b} = \mathbf{\Gamma} , \\ \frac{T}{T_b} = \mathbf{\Theta} , \end{array} \right.$$

otrzymamy:

$$(87) \quad \left( \mathbf{\Pi} + \frac{1}{3\mathbf{\Gamma}^2} \right) \left( \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{9} \mathbf{\Theta} .$$

Nakoniec, gdy wierzchołek krzywej największego oziębienia dostarcza zmiennych zredukowanych:

$$(88) \quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \frac{p}{p_f}, \\ \mathfrak{V} = \frac{v}{v_f}, \\ \mathfrak{T} = \frac{T}{T_f}, \end{cases}$$

znajdziemy równanie zredukowane kształtu:

$$(89) \quad \left( \mathfrak{P} + \frac{1}{\mathfrak{V}^2} \right) \left( \mathfrak{V} - \frac{1}{2} \right) = \mathfrak{T}.$$

Równania zredukowane (85), (87) i (89) są analogiczne do równania (11), zredukowanego do punktu krytycznego:

$$(11) \quad \left( \pi + \frac{3}{\gamma^2} \right) \left( \gamma - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \phi.$$

Przytaczam tu jeszcze diagramat  $(\pi\gamma, \pi)$ , obliczony z wzoru van der Waalsa przez Berthelota (Fig. 13).

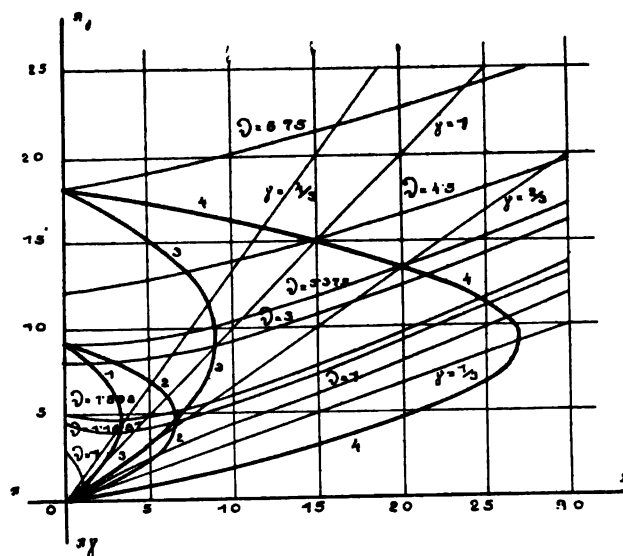


Fig. 13<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Linie proste na figurze 13 i 14, nachylone do osi odejętych, przechodzące przez początek współrzędnych, są izochorami.

Ponieważ warunki analityczne pozwalają obliczyć kształt krzywych wprost z danych doświadczalnych, przeto Berthelot przedstawił również diagramat na zasadzie doświadczeń A m a g a t a nad azotem, powietrzem, tlenem, CO<sub>2</sub> i etylenem (Fig. 14).

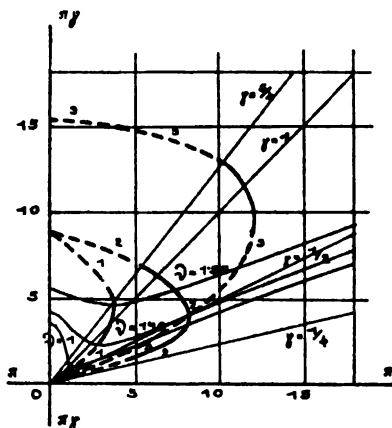


Fig. 14.

Krzywe, scharakteryzowane przez warunki  $\Delta U = \text{maximum}$  i  $\Delta U = 0$  dają również odpowiednie warunki. Pierwsza z nich wymaga, by  $\frac{\partial t}{\partial v} = 0$ ; zatem według równania (69) musi istnieć zależność:

$$(90) \quad \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{p}{T}$$

lub:

$$(91) \quad \left[ \frac{\partial \left( \frac{p}{T} \right)}{\partial T} \right]_v = 0.$$

Drugiej zadość czyni warunek:

$$(92) \quad \int_{\infty}^v \left[ \frac{\partial \left( \frac{p}{T} \right)}{\partial T} \right]_v dv = 0.$$

Ażeby określić kształt pierwszej z nich, użyć można diagramatu  $\left( \frac{pv}{T}, T \right)$ , wykreślając zamiast izobar — izochory; wówczas skrajności tych krzywych dadzą krzywą szukaną, gdyż:

$$\frac{\partial \left( \frac{pv}{T} \right)}{\partial T} = v \left[ \frac{\partial \left( \frac{p}{T} \right)}{\partial T} \right]_v = 0.$$

Badania Amagata i Wróblewskiego oraz Berthelota, rozszerzyły wiadomości nasze o analogiach w zachowaniu się ciał. Pole, objęte przez krzywe skraplania, jest małe wobec obszarów, zakreślonych przez krzywe odkryte przez Berthelota. Dość zestawić następujące dane: dla  $\text{CO}_2$  mamy  $p_k = 73$  atm.,  $p_f = 606$  atm.; dla azotu  $p_k = 34$  atm.,  $p_s = 408$  atm. Wierzchołki krzywych, tyjących zachowania się energii wewnętrznej rozprężających się gazów, leżą pod jeszcze wyższymi ciśnieniami.

4. Przytoczone wyniki stwierdzają istnienie analogii w termodynamicznym zachowaniu się ciał w określonych stanach. Stany te zasługują na miano odpowiednich. Odpowiedniość ich daje się wyrazić za pomocą równań, wiążących zmienne termodynamiczne  $p$ ,  $v$  i  $T$ . Takimi równaniami są następujące pary: (13) i (14), (58), (74) i (80) i t. p. Odpowiedniość ta odbija się na kształcie analogicznym izoterm, izobar, izochor i krzywych pochodnych na diagramatach Andrews'a, ściśliwości, odstępstw od prawa Mariotte'a - Gay-Lussac'a. Przedewszystkiem odpowiedniość tych stanów znajduje wyraz w podobieństwie ich fizycznym; występuje ono np. w samym stanie krytycznym. Z tego powodu nazywamy stany podobne „odpowiedniami fizycznie“, chcąc odpowiedniość ich odróżnić od odpowiedniości hypotetycznej van der Waals'a.

Nie znamy matematycznej postaci tej odpowiedniości. Gdybyśmy zależność tę znali, kwestya prawa stanów odpowiednich byłaby rozwiązana: umielibyśmy redukować elementy, sprowadzać diagramaty ciał do wspólnego kształtu; moglibyśmy wyszukiwać nieskończoność stanów odpowiednich, znając elementy dwu lub kilku z nich. Według hipotezy van der Waals'a dość jest znać elementy jednego z tych stanów (np. krytycznego), aby znaleźć wszystkie inne stany odpowiednie; zależność, łącząca elementy stanów odpowiednich, jest proporcjonalnością. Analitycznie stan jednego ciała o elementach:  $p'$ ,  $v'$  i  $T'$  uważamy za odpowiedni stanowi drugiego o elementach:  $p''$ ,  $v''$  i  $T''$ , jeżeli oznaczając przez  $p_0'$ ,  $v_0'$ ,  $T_0'$  i  $p_0''$ ,  $v_0''$ ,  $T_0''$  elementy jakichkolwiek stanów „odpowiednich fizycznie“ tych ciał mamy:

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p'}{p_0'} = \frac{p''}{p_0''} = \pi, \\ \frac{v'}{v_0'} = \frac{v''}{v_0''} = \gamma, \\ \frac{T'}{T_0'} = \frac{T''}{T_0''} = \vartheta. \end{array} \right.$$

Zależność tych zmiennych zredukowanych  $\pi$ ,  $\gamma$ ,  $\vartheta$  ma być według van der Waals'a identyczna dla wszystkich ciał:

$$(18) \quad F(\pi, \gamma, \vartheta) = 0;$$

równanie charakterystyczne zredukowane powinno być to samo bez względu na skład ciała. Tej postaci prawa stanów odpowiednich dał Wł. Natanson nazwę twierdzenia o jedności równań charakterystycznych <sup>1)</sup>.

Jak widzieliśmy, doświadczenia nie stwierdziły tego prawa. Widocznie dla określenia stanów odpowiednich nie dość jest znać elementy jednego ze stanów odpowiednich fizycznie; trzeba znać elementy dwu lub kilku takich stanów. Widocznie zależność między elementami stanów odpowiednich nie jest zwykłą proporcjonalnością, lecz funkcją bardziej złożoną.

Równanie (18) nie jest zależne od kształtu równań (93), streszcza tylko zasadniczy warunek odpowiedniości, zdolność sprowadzania diagramów ciał do wspólnego kształtu. Natomiast zależności, określone przez równanie (93), nie są tak proste jak te równania podają.

Marceli Brillouin <sup>2)</sup> w roku 1893 podaje kilka wzorów zależności między temperaturami stanów odpowiednich, jako to:

1) zależność liniową:

$$(94) \quad \frac{T' - T_1'}{T_2' - T_1'} = \frac{T'' - T_1''}{T_2'' - T_1''} = \vartheta;$$

2) zależność 2-go stopnia:

$$(95) \quad \vartheta = \frac{(T_2'^2 - K'^2 T_1'^2) T' - (T_2' - K' T_1') T'^2}{T_2' T_1' (T_2' - T_1')} \\ = \frac{(T_2''^2 - K''^2 T_1''^2) T'' - (T_2'' - K'' T_1'') T''^2}{T_2'' T_1'' (T_2'' - T_1'')};$$

3) zależność ułamkową:

$$(96) \quad \vartheta = \frac{K' (T_2' - T_1') T'}{(T_2' - K' T_1') T' - (1 - K') T_1' T_2'} = \frac{K'' (T_2'' - T_1'') T''}{(T_2'' - K'' T_1'') T'' - (1 - K'') T_1'' T_2''} \cdot ^{3)}$$

Analogiczne zależności można pomyśleć dla ciśnień objętości.

Brillouin zaznacza, że koncepcja stanów odpowiednich, w ten sposób pojęta, nie powinna być uważana za prawo tylko przybliżone; powinna wskazać drogę do odkrycia istotnej zależności między stanami odpowiednimi.

<sup>1)</sup> „O jedności linii ortobarycznych dla roztworów i płynów jednorodnych“. Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział mat.-przyrod. Ser. II, t. III. 1891, str. 390—406.

<sup>2)</sup> „Sur la loi de compressibilité isotherme des liquides etc.“. Journal de Physique. Ser. 3, t. 2, str. 113—118.

<sup>3)</sup> Dla temperatury  $T'$  pewnego ciała, określają te równania (94), (95) i (96) temperaturę  $T''$  odpowiednią innego ciała.  $T_1'$  i  $T_2'$  są temperaturami pewnych określonych stanów jednego ciała,  $T_1''$   $T_2''$  temperaturami stanów fizycznie im odpowiednich drugiego;  $K'$  i  $K''$  są wielkościami stałymi.

Analogie w zależności elementów zwykłych (nie zredukowanych) między sobą są uderzające; należy więc przypuszczać przedewszystkiem zależność elementów w stanach odpowiednich najprostszą według wzoru (94). Dla objętości i ciśnienia miałyby ona następujący wygląd:

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p' - p_1'}{p_2' - p_1'} = \frac{p'' - p_1''}{p_2'' - p_1''} = \pi, \\ \frac{v' - v_1'}{v_2' - v_1'} = \frac{v'' - v_1''}{v_2'' - v_1''} = \gamma. \end{array} \right.$$

Zależność ta byłaby również proporcjonalnością, ale wówczas, kiedy mierzono by elementy  $p$ ,  $v$  i  $T$  nie od zera absolutnego, lecz od punktu jednego ze stanów odpowiednich fizycznie ( $p_1$ ,  $v_1$ ,  $T_1$ ); byłoby to przeniesieniem początku współrzędnych do punktu charakterystycznego.

5. Ścisłych prób w tym kierunku nie przedsięwzięto dotychczas, natomiast Krystyna Meyer<sup>1)</sup> przeprowadziła próby pokrewne. Posługuje się ona elementami jednego, mianowicie krytycznego stanu fizycznie odpowiedniego. Nie mogąc wobec tego sprawdzać hipotezy, wyrażonej przez (18), (94) i (97), założyła a priori, że zależność między elementami stanów odpowiednich zachodzi według wzorów (94) i (97) i obliczała, jakie stany będą odpowiadały u 30-u różnych ciał temu stanowi fluorobenzolu, w których wszystkie jego elementy są równe zeru.

Jeżeli oznaczymy przez  $p_0$ ,  $v_0$  i  $T_0$  elementy właściwe tym stanom, a dla stanu krytycznego przyjmiemy zwykłe oznaczenia, wzory (94) i (97) przyjmą postać:

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p' - p_k'}{p_0' - p_k'} = \frac{p'' - p_k''}{p_0'' - p_k''} = \pi, \\ \frac{v' - v_k'}{v_0' - v_k'} = \frac{v'' - v_k''}{v_0'' - v_k''} = \gamma, \\ \frac{T' - T_k'}{T_0' - T_k'} = \frac{T'' - T_k''}{T_0'' - T_k''} = \vartheta. \end{array} \right.$$

W celu znalezienia wartości  $p_0'$ ,  $v_0'$  i  $T_0'$  p. Meyer stosowała metodę Raveau, przytem szukając  $p_0$  i  $T_0$ , posilkowała się krzywą nasycenia:

$$(28^*) \quad \Pi = X_1(\theta),$$

szukając zaś  $v_0$  krzywą graniczną cieczy:

$$(27^*) \quad \psi = \Gamma_2(\theta).$$

<sup>1)</sup> „Ueber korrespondierende Zustände... etc.“.

Równania (98) przyjmą w pierwszym razie postać:

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P' - p_k'}{p_0' - p_k'} = \frac{P'' - p_k''}{p_0'' - p_k''} = II, \\ \frac{\tau' - T_k'}{T_0' - T_k'} = \frac{\tau'' - T_k''}{T_0'' - T_k''} = \theta; \end{array} \right.$$

w drugim:

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{w' - v_k'}{v_0' - v_k'} = \frac{w'' - v_k''}{v_0'' - v_k''} = \psi, \\ \frac{\tau' - T_k'}{T_0' - T_k'} = \frac{\tau'' - T_k''}{T_0'' - T_k''} = \theta. \end{array} \right.$$

W licznikach i mianownikach możemy zmienić znaki, nadto założyć  $p_0'' = v_0'' = T_0'' = 0$ , chcąc obliczyć elementy stanów ciał  $p_0', v_0', T_0'$  odpowiednio takiemu stanowi fluorobenzolu, w którym wszystkie jego elementy są równe zero. Logarytmując, otrzymamy:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lg(p_k' - P') - \lg(p_k'' - P'') = \lg(p_k' - p_0') - \lg p_k'', \\ \lg(T_k' - \tau') - \lg(T_k'' - \tau'') = \lg(T_k' - T_0') - \lg T_k''; \end{array} \right.$$

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lg(v_k' - w') - \lg(v_k'' - w'') = \lg(v_k' - v_0') - \lg v_k'', \\ \lg(T_k' - \tau') - \lg(T_k'' - \tau'') = \lg(T_k' - T_0') - \lg T_k''. \end{array} \right.$$

Zmiennymi są tu tylko po lewych stronach wielkości  $P', w', \tau'$  i  $P'', w'', \tau''$ ; prawe strony są stałe. Z doświadczeń Younga, Ramsaya, Batelli'ego, Amagata i Ausdella — p. Meyer oblicza wartości  $(p_k' - P')$ ,  $(T_k' - \tau')$  i  $(v_k' - w')$  dla 28 ciał, także:  $(p_k'' - P'')$ ,  $(T_k'' - \tau'')$  i  $(v_k'' - w'')$  dla fluorobenzolu; następnie metodą przesuwania równoległego znajduje, ile wynosi lewa strona równań (101) i (102), wykreśliwszy poprzednio krzywe zależności  $(p_k' - P')$  od  $(T_k' - \tau')$  i  $(v_k' - w')$  od  $(T_k' - \tau')$ . Ponieważ dane krytyczne są znane, obliczyć łatwo wielkości  $p_0', v_0'$  i  $T_0'$ .

Przy przesuwaniu krzywych zależności:

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_k' - P' = H_0(T_k' - \tau'), \\ v_k' - w' = G_0(T_k' - \tau'), \end{array} \right.$$

wykreślonych dla różnych ciał w celu otrzymania koincydencji z krzywymi fluorobenzolu:

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_k'' - P'' = H_0(T_k'' - \tau''), \\ v_k'' - w'' = G_0(T_k'' - \tau''), \end{array} \right.$$



okazało się, że krzywe jak najlepiej padają jedna na drugą, co można uważać za stwierdzenie równań (18) i (98). Rezultaty obliczeń  $p_0$  wykazują, że jest ono dla wszystkich ciał równe zeru.  $T_0$  i  $v_0$  podaję w następującej tabelicy. Należy zauważyć, że p. Meyer obliczała nie właściwe objętości  $v_k, v_0$ , mierzone w  $\text{cm}^3$  na gram, ale objętości cząsteczkowe  $Mv_k$  i  $Mv_0$ .

| Ciało                         | $T_k - T_0$ | $T_0$  | $M(v_k - v_0)$ | $Mv_0$ | $M$    |
|-------------------------------|-------------|--------|----------------|--------|--------|
| Fluorobenzol . . . . .        | 559.55      | 0      | 270.5          | 0      | 95.8   |
| Chlorobenzol . . . . .        | 631.2       | + 1.1  | 306.7          | -1.0   | 112.2  |
| Bromobenzol . . . . .         | 669.7       | + 0.3  | 322.8          | -1.4   | 156.6  |
| Jodobenzol . . . . .          | 721.1       | - 0.1  | 348.9          | -1.0   | 203.4  |
| Benzol . . . . .              | 572.19      | -10.69 | 257.1          | -0.8   | 77.84  |
| Czterochlorek węgla . . . . . | 573.41      | -17.2  | 275.8          | -0.2   | 153.45 |
| Chlorek cyny . . . . .        | 586.69      | + 5.01 | 353.3          | -2.9   | 259.3  |
| Eter . . . . .                | 462.13      | + 5.27 | 282.9          | -1.5   | 73.84  |
| Pentan normalny . . . . .     | 471.19      | - 1.0  | 309.4          | -0.2   | 71.85  |
| Izopentan . . . . .           | 468.4       | - 7.6  | 305.3          | +1.2   | "      |
| Hexan . . . . .               | 495.3       | +12.5  | 367.2          | -0.9   | 85.82  |
| Heptan . . . . .              | 511.67      | +28.23 | 428.8          | -2.4   | 99.79  |
| Mrówczan metylu . . . . .     | 485.62      | + 1.38 | 173.1          | -1.8   | 59.86  |
| Mrówczan etylu . . . . .      | 499.19      | + 9.11 | 230.9          | -2.5   | 73.83  |
| Octan metylu . . . . .        | 487.23      | +19.47 | 229.8          | -3     | "      |
| Mrówczan propylu . . . . .    | 518.49      | +19.36 | 286.6          | -2.9   | 87.8   |
| Octan etylu . . . . .         | 491.61      | +31.49 | 288.2          | -3.2   | "      |
| Propionian metylu . . . . .   | 502.25      | +28.15 | 283.5          | -2.4   | "      |
| Octan propylu . . . . .       | 508.86      | +40.34 | 347.9          | -4.5   | 101.77 |
| Propionian etylu . . . . .    | 506.35      | +39.55 | 347.4          | -4.6   | "      |
| Masłan metylu . . . . .       | 517.45      | +36.8  | 342.7          | -3.8   | "      |
| Izomasłan metylu . . . . .    | 508.46      | +32.09 | 340.2          | -2.9   | "      |
| Bezwodnik węglowy . . . . .   | 314.88      | -10.53 | 93.704         | +1.1   | 44     |
| Alkohol metylowy . . . . .    | 436.11      |        |                |        |        |
| Alkohol etylowy . . . . .     | 429.54      |        |                |        |        |
| Alkohol propylowy . . . . .   | 456.72      |        |                |        |        |
| Kwas octowy . . . . .         | 534.76      |        |                |        |        |
| Dwusiarczek węgla . . . . .   | 586.27      | -40.2  | 222.09         | -20.6  | 76     |
| Woda . . . . .                | 605         |        |                |        |        |
| Chlorowódór . . . . .         | 346.67      | +32.3  |                |        | 36.5   |

P. Meyer sprawdza jeszcze o ile wartości  $T_0, v_0$  i  $p_0$  odpowiadają warunkom (99) i (100). Wartości  $\theta$  różnych ciał okazują się jednakowe w znacznym przybliżeniu przy jednakowym  $H$ ; podobnie wartości  $\psi$ . Wyjątek stanowią jedynie alkohole i kwas octowy. Niestosowanie się tych

ciał do ogólnego prawa objaśnia autorka tem, że ulegają zmianom składu.

Tablica zależności  $\theta = \frac{T_k - \tau}{T_k - T_0}$  od  $\Pi = \frac{P}{p_k}$  jest następująca:

|                 | Przy $\Pi = 0.05898$ | 0.01180   | 0.02241  | 0.04423  | 0.14745  | 0.2064 | 0.5898 | 0.7373 | 0.8257 |
|-----------------|----------------------|-----------|----------|----------|----------|--------|--------|--------|--------|
| Ciało           | Wartości $\theta$    |           |          |          |          |        |        |        |        |
| Fluorobenzol    | 0.4277               | 0.3946    | 0.3600   | 0.3173   | 0.2229   | 0.1908 | 0.0712 | 0.0421 | 0.0269 |
| Chlorobenzol    | 0.4283               | 0.3953    | 0.3603   | 0.3170   | 0.2216   | 0.1898 | 0.0714 | 0.0421 | 0.0270 |
| Bromobenzol     | 0.4285               | 0.3953    | 0.3599   | 0.3169   | 0.2224   | 0.1911 |        |        |        |
| Jodobenzol      | 0.4282               | 0.3951    | 0.3598   | 0.3169   |          |        |        |        |        |
| Benzol          | 0.4270               | 0.3936    | 0.3595   | 0.3173   | 0.2233   | 0.1911 | 0.0716 | 0.0428 | 0.0270 |
| Czteroch. węgla | 0.4272               | 0.3935    | 0.3595   | 0.3174   | 0.2234   | 0.1916 | 0.0718 | 0.0422 | 0.0267 |
| Chlorek cyny    | 0.4273               | 0.3944    | 0.3596   | 0.3172   | 0.2231   | 0.1911 | 0.0719 | 0.0426 | 0.0270 |
| Eter            | 0.4272               | 0.3947    | 0.3597   | 0.3170   | 0.2226   | 0.1908 | 0.0731 | 0.0437 | 0.0275 |
| Pentan normal.  | 0.4283               | 0.3952    | 0.3596   | 0.3170   | 0.2226   | 0.1905 | 0.0721 | 0.0426 | 0.0273 |
| Izopentan       | 0.4270               | 0.3950    | 0.3595   | 0.3170   | 0.2231   | 0.1901 | 0.0723 | 0.0427 | 0.0273 |
| Hexan           | 0.4291               | 0.3953    | 0.3600   | 0.3171   | 0.2224   | 0.1902 | 0.0708 | 0.0418 | 0.0266 |
| Heptan          | 0.4313               | 0.3970    | 0.3610   | 0.3179   | 0.2216   | 0.1894 | 0.0702 | 0.0413 | 0.0262 |
| Mrówcz. metylu  | 0.4272               | 0.3941    | 0.3597   | 0.3171   | 0.2228   | 0.1909 | 0.0723 | 0.0427 | 0.0272 |
| Mrówcz. etylu   | 0.4278               | 0.3944    | 0.3596   | 0.3170   | 0.2224   | 0.1909 | 0.0718 | 0.0423 | 0.0268 |
| Octan metylu    | 0.4309               | 0.3960    | 0.3602   | 0.3170   | 0.2219   | 0.1902 | 0.0713 | 0.0421 | 0.0269 |
| Mrówcz. propylu | 0.4297               | 0.3961    | 0.3609   | 0.3179   | 0.2230   | 0.1911 | 0.0711 | 0.0420 | 0.0267 |
| Octan etylu     | 0.4314               | 0.3975    | 0.3617   | 0.3173   | 0.2220   | 0.1899 | 0.0702 | 0.0413 | 0.0260 |
| Propion. metylu | 0.4308               | 0.3960    | 0.3612   | 0.3173   | 0.2220   | 0.1899 | 0.0706 | 0.0416 | 0.0263 |
| Octan propylu   | 0.4318               | 0.3979    | 0.3616   | 0.3174   | 0.2214   | 0.1891 | 0.0694 | 0.0406 | 0.0257 |
| Propion. etylu  | 0.4317               | 0.3975    | 0.3618   | 0.3179   | 0.2214   | 0.1891 | 0.0695 | 0.0408 | 0.0258 |
| Masłał. metylu  | 0.4319               | 0.3980    | 0.3614   | 0.3173   | 0.2214   | 0.1890 | 0.0700 | 0.0412 | 0.0263 |
| Izomasł. metylu | 0.4309               | 0.3969    | 0.3614   | 0.3175   | 0.2218   | 0.1894 | 0.0699 | 0.0410 | 0.0261 |
| Bezw. węglowy   |                      |           |          |          |          |        | 0.0713 | 0.0419 | 0.0270 |
| Dwusiar. węgla  | 0.4275               | 0.3947    | 0.3602   | 0.3179   | 0.227    |        |        |        |        |
| Woda            | 0.4306               |           | 0.3589   |          |          |        |        |        |        |
| Alkohol metyl.  | (0.4665)             | (0.4058)  | (0.3670) | (0.3203) | 0.2224   | 0.1887 | 0.0728 | 0.0420 | 0.0265 |
| Alkohol etyl.   | (0.4372)             | (0.4007)  | (0.3627) | 0.3178   | 0.2209   | 0.1888 | 0.0707 | 0.0418 | 0.0270 |
| Alkohol propyl. | (0.4371)             | (0.3929)  | (0.3572) | 0.3142   | 0.2211   | 0.1889 | 0.0725 | 0.0427 | 0.0269 |
| Kwas octowy     | (0.4402)             | (0.7033?) | (0.3652) | (0.3188) | (0.2190) | 0.1866 | 0.0703 | 0.0416 | 0.0261 |

Badania p. Meyer tracą na doniosłości, z powodu, że ciała, o których dowodzi, iż podlegają prawu wyrażonemu przez (18) i (96), stosują się i do samego prawa van der Waalsa, musieliśmy je zaliczyć do jednej głównej grupy ciał, w obrębie której prawo van der Waalsa sprawdza się dokładnie. Do tej grupy nie należał jedynie  $\text{CO}_2$ , którego liczby jednak obejmują w tablicy p. Meyer okolice najbliższą punktu krytycznego,  $\text{CS}_2$ ,

którego krzywa jest identyczna z krzywą chloru, a więc niedaleko odbiega od grupy benzolu i eteru. Są to zdobycze zbyt małe, ażeby mogły przekonać, iż prawo stanów odpowiednich, wyrażone przez równania (18) i (96), jest bliższe prawdy, aniżeli prawo stanów odpowiednich w pierwotnej postaci, wyrażone przez (18) i (93). Co do sposobu rozumowania autorki, wydaje się on trafny, nic bowiem nie usprawiedliwia założenia, iż punkt zerowy jest odpowiednim stanem różnych ciał. Można jednak zarzucić jej metodzie dowolność w obiorze drugiego punktu odpowiedniego  $p_0, v_0$  i  $T_0$ ; nie jest on odpowiedni fizycznie na podobieństwo punktu krytycznego lub punktów Berthelota. Z tego powodu rezultaty jej badań nie mogą wyjaśnić, jaką postać matematyczną ma odpowiedniość fizyczna ciał. Metoda jej w ogóle tego wyjaśnić nie zdoła.

6. Pewne światło na zagadnienie nasze rzucił Berthelot. Jako drugi stan odpowiedni, jako początek spółrzędnych wprowadza on stan najmniejszej objętości (covolume). Myśl tę podnosił już wprawdzie w roku 1897 Raveau<sup>1)</sup>, twierdząc, że wydaje się mało prawdopodobnem, by stosunek objętości dwu ciał grał rolę istotną, gdyż objętość nie może nigdy zejść poniżej pewnej granicy skończonej. Byłoby racjonalniej badać zmiany objętości, poczynawszy od najmniejszej objętości (covolume) lub od punktu krytycznego. Berthelot zastosował tę uwagę i do temperatury. Autor ten zaznacza<sup>2)</sup>, że do prawa stanów odpowiednich należy wnieść tę poprawkę, że objętości i temperatury zredukowane nie tylko należy mierzyć jednostkami dla każdego ciała specjalnemi, mianowicie objętością i temperaturą krytyczną, ale nadto należy rozpoczynać mierzenie od pewnych, właściwych każdemu ciału najmniejszych objętości  $v_m$  i temperatur najmniejszych  $T_m$ . Co do ciśnień, doświadczenia nad ciśnieniami słabymi dowodzą, że należy je liczyć od zera. Jest to zgodne z wynikami obliczeń p. Meyer. Równania, wyrażające charakter redukcji, mają według Berthelota postać następującą:

$$(105) \quad \left. \begin{aligned} \frac{p'}{p_k'} &= \frac{p''}{p_k''} = \pi, \\ \frac{v' - v_m'}{v_k' - v_m'} &= \frac{v'' - v_m''}{v_k'' - v_m''} = \gamma, \\ \frac{T' - T_m'}{T_k' - T_m'} &= \frac{T'' - T_m''}{T_k'' - T_m''} = \vartheta. \end{aligned} \right\}$$

Berthelot próbował<sup>3)</sup> obliczyć  $v_m$  i  $T_m$  dla różnych ciał.

<sup>1)</sup> „La loi des états correspondants... etc“.

<sup>2)</sup> „Sur la loi des états correspondants“. Com. Ren. 1900, t. CXXXI, str. 175—178.

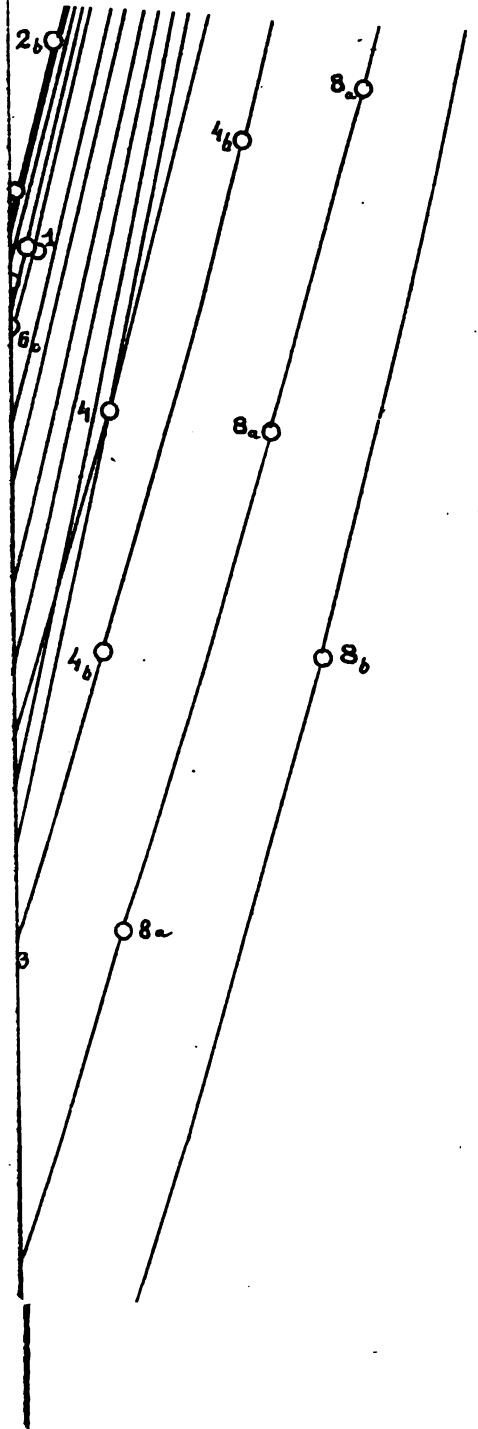
<sup>3)</sup> „Sur le volume minimum des fluids“. Com. Ren. 1900, t. CXXX, str. 175.

Wobec braku dokładnych metod wyszukiwania tych wielkości, sprawdzenie, o ile stosunki (105) odpowiadają rzeczywistości, wydaje się trudnem.

Ponieważ jednak jest prawdopodobne, że zależność między temperaturami i objętościami stanów odpowiednich istnieje taka, jaką wskazują wzory (94) i (97), ciśnienia zaś stosują się do (93), że zatem równanie charakterystyczne gazów posiada nie 3 lecz 5 parametrów, przeto znacznej wagi nabierają studia nad stanami „odpowiedniami fizycznymi”, na które zwrócił uwagę Berthelot: wyznaczenie wartości elementów tych stanów i sprawdzenie, o ile spólrzędne stanów takich odpowiadają warunkom (94) i (97), powinno być zadaniem przyszłych badaczy.

Kraków, w kwietniu 1905 r.

---



0.500

0.400

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

## UEBER DIE VAN DER WAALS'SCHE HYPOTHESE DER ÜBEREINSTIMMENDEN ZUSTÄNDE.

---

Die Hypothese von van der Waals ist unabhängig von der charakteristischen Gleichung, welche seinen Namen trägt, obwohl sie auf Grund dieser Gleichung gefunden wurde. Die charakteristische Gleichung von van der Waals hat sich als unrichtig erwiesen; nichtsdestoweniger könnte seine Hypothese streng richtig bleiben, wenn sie nur durch das experimentelle Material der modernen Physik bestätigt wäre. Theoretisch bewies Meslin, dass die Waals'sche Hypothese eine nothwendige Folge des gegenseitigen Zusammenhanges zwischen Druck, Volumen und Temperatur der Fluida wäre, wenn die Sicherheit existierte, die charakteristische Gleichung habe nicht mehr als drei Parameter. Da uns aber Beweise darüber mangeln, blieb die experimentelle Prüfung der Hypothese nothwendig.

Solche Prüfungen wurden von mehreren Forschern unternommen. Es beschäftigte sich damit van der Waals selber, Mathias, Amagat, Rayeau u. A., aber erst Young und nach ihm Frau Meyer wandten richtige Methoden zur Prüfung an und zogen eine genügende Anzahl Beobachtungen und Versuche ins Prüfungsgebiet hinein; nach ihnen erwies sich die Hypothese unhaltbar, obwohl der Grad der Abweichungen unbestimmt blieb, so dass man geneigt sein könnte, die letzteren den Ungenauigkeiten der Versuche zuzuschreiben.

Aus der Gesammtheit dieser Prüfungen ergab sich, dass einige Stoffe ganz gut miteinander hinsichtlich der Waals'schen Hypothese übereinstimmen, während sie von anderen Stoffen stark abweichen. Nun lag der Gedanke nahe, alle Stoffe in Gruppen zu theilen, innerhalb welcher die reducierte charakteristische Gleichung identisch, darnach auch die Hypothese der übereinstimmenden Zustände streng richtig wäre. Versuche eine solche Classification durchzuführen unternahmen Young, Mathias, Happel.

Der Verfasser, sich auf die vorigen Prüfungen stützend, kam zur Ueberzeugung, dass die allein massgebende Prüfung, inwieweit die Hypothese der übereinstimmenden Zustände richtig sei und wie sich darnach die Stoffe classificieren lassen, darin bestände all das bisjetzt bekannte Versuchsmaterial graphisch zu veranschaulichen in der Form von reducierten charakteristischen Curven; mehr oder weniger gute Uebereinstimmung der letzteren würde uns über beides Aufschluss geben.

Als „medium comparationis“ wählte der Verfasser die Dampfdruckcurve, weil einerseits die kritischen Temperaturen und Drücke viel sicherer sind, als die betreffenden Volumina, andererseits Daten über die Abhängigkeit der Dampfdrücke von der Temperatur am zahlreichsten sind.

Die Genauigkeit bei der graphischen Darstellung reicht bis zur 3-ten Decimalstelle nach dem Komma der decimalen Brüche; dieselbe entspricht nahezu der Genauigkeit der Young'schen Versuche. Der Verfasser hielt sie für eine genügende, weil die Experimente anderer Forscher, soweit er weiss, nicht genauer als die von Young sind.

Es handelte sich vor allem darum, zu versuchen, wie sich die Gestalt der reducierten Dampfdruckcurve eines und desselben Stoffes bei der Aenderung der Werte von kritischen Daten ändert. Zu diesem Behufe nahm der Verfasser bei denselben Daten über die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur verschiedene kritische Daten eines und desselben Stoffes nach verschiedenen Autoren und berechnete jedesmal die reducierte Dampfdruckcurve. Zunächst wurden auf diese Weise drei reducierte Dampfdruckcurven des Benzols berechnet und gezeichnet, wobei man die kritischen Daten nach Young, Zajoncowski und Ramsay benutzte, indem alle übrigen nach Young genommen wurden.

Die dargestellten Curven des Benzols zeigten unten einen gemeinsamen Ursprung und stufenweise immer grössere Tendenz nach aufwärts auseinanderzugehen. Im Allgemeinen behalten die Curven eine ähnliche Gestalt bei. Es zeigte sich nunmehr, dass nur die Young'schen kritischen Daten mit seinen Daten über Dampfdrücke im Einklang sind, nicht aber die von Zajoncowski und Ramsay, weil nur die nach den ersten gezeichnete Reductionscurve gegen den kritischen Punkt hinstrebt, wo  $II = 1$  und  $\theta = 1$  ist, dagegen die beiden anderen die  $II$ -Achse viel tiefer schneiden.

Solche Curven, welche sich nicht gegen den kritischen Punkt in stetiger Weise richten, bei welchen also die kritischen Daten mit denen über die Dampfdrücke nicht übereinstimmen, nannte der Verfasser *abnormale* reducierte Dampfdruckcurven.

Die zweite vorbereitende Untersuchung des Verfassers bestand darin, zu prüfen, wie sich die Gestalt der reducierten Dampfdruckcurven ändert, wenn wir zwei verschiedene, von zwei Forschern stammende, aber beide normale Datensysteme zur Berechnung benützen. Als typisches Untersuchungsobjekt nahm der Verfasser die Dampfdruckcurve des Aethers. Das eine Datensystem stammte von Young und Ramsay, das andere von Batelli. Beide Curven erwiesen sich als unten und oben zusammen fallend, am meisten in der Mitte gegen den Punkt der grössten Krümmung abweichend; die Gestalt der Curven war nicht in dem Grade ähnlich, wie im ersten Falle.

Beide Fälle unterzog der Verfasser einer besonderen Prüfung, weil sie samt einigen Combinationen unter ihnen alle möglichen Abweichungen von der typischen Gestalt der reducierten Dampfdruckcurve erschöpfen,



welche man der Ungenauigkeit der Versuche zuschreiben konnte. Wenn ausserdem Abweichungen vorhanden wären, müsste man dafür die Hypothese selbst verantwortlich machen.

Die zur Darstellung reducirter Dampfdruckcurven nöthigen Berechnungen führte der Verfasser theils selber durch, theils benützte er die Berechnungen von Young, van der Waals, Estreicher und Happel. Insgesamt zeichnete er Dampfdruckcurven von 53 Stoffen, theils Gasen, theils Flüssigkeiten und benützte dabei alle ihm bekannten Daten über Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur d. h. die von Young, Ramsay, Batelli, Regnault, Cailletet, Faraday, Pictet, Blümcke, Zajonczewski, Knietsch, Anodell, Villard, Olszewski, Travers, Senter, Jacqueroed, Fischer, Alt, Collie, Chappuis, Rivière u. A..

Leider nicht alle Daten konnte man zur Darstellung von reducirten Dampfdruckcurven verwerten, da einige so ungenau waren, dass sich keine stetige Curve formierte. Dies war der Fall bei den Daten Olszewski's für Selenwasserstoff, Metan und Propan, Hainlen's für Propan, Wróblewski's für Sauerstoff und Stickstoff, Faraday's für Ammoniak und Villard's für Athylen.

Die Resultate seiner Berechnungen sammelt der Verfasser in einer Reihe von Tabellen, auf Grund welcher er dann auf zwei grossen Figuren die Curven graphisch repräsentiert. Die zur genannten Arbeit gehörige Fig. 5 enthält nur diejenigen Curven, deren Verlauf mehr charakteristisch war.

Die graphische Darstellung reducirter Curven zeigte erstens, dass keineswegs alle untersuchten Stoffe eine gemeinsame Curve besitzen, zweitens ergab dieselbe gewisse Grundlagen zur Classification der Stoffe, obwohl nicht so strenge und absolute, wie man erwarten konnte.

Die reducirten Dampfdruckcurven gehen nicht nur nach oben hin aneinander, was man durch nicht passend angenommene kritische Daten erklären könnte, lassen nicht nur eine mehr oder weniger breite Strecke zwischen einander an der Stelle der grössten Krümmung, was man der Ungenauigkeit der Versuche über die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur zuschreiben könnte, sondern beginnen auch keineswegs an derselben Stelle, was sich nicht mehr durch experimentelle Fehler erklären lässt und beweist, dass das Gesetz der übereinstimmenden Zustände nicht streng richtig ist.

Da dieser wichtige Schluss aus dem Satze folgt, dass bei verschiedenen kritischen Daten eines und desselben Stoffes die Curven unten nicht auseinander weichen, und derselbe sich auf der einzigen Untersuchung des Benzols stützt, so dass er als nicht genügend begründet erscheinen könnte, beschloss der Verfasser ihn noch theoretisch zu prüfen. Die Prüfung ergab,

dass der Satz für alle Stoffe streng richtig ist mit Ausnahme derer, welche eine sehr niedrige kritische Temperatur (wie z. B. Wasserstoff:  $T_k = 32^\circ$ ) haben. Für solche muss eine Extra-Untersuchung durchgeführt werden.

Die Thatsache, dass bei niedrigen Drücken der gemeinschaftliche Anfang unten fehlt, dient als Basis für die Classification der Stoffe. Stoffe, deren Curven an derselben Stelle unten beginnen, darf man in eine und dieselbe Gruppe einschliessen, wenn nur ihre Richtung die gleiche ist und wenn sie sich im kritischen Punkte oben treffen. Man kann einen Stoff auch noch zur selben Gruppe zuzählen, wenn sogar das obere Ende seiner Curve von der normalen Richtung der Gruppe abweicht, da die Curve dann abnormal sein kann; sie muss aber in diesem Falle solche Gestaltsanalogien mit der Normalcurve aufweisen wie die zwei abnormalen Curven des Benzols mit seiner Normalen.

Auf diese Weise lassen sich die untersuchten Stoffe in drei grosse Hauptgruppen und einige kleinere Gruppen theilen; ausserdem weichen einige Stoffe durch die Gestalt ihrer Curven von den Haupttypen so ab, dass man sie total sonderstellen muss.

Unter den letzteren zeigt der Wasserstoff eine am meisten abweichende Richtung und einen am weitesten nach links verschobenen Anfang. Man könnte diese Abnormität durch die niedrige kritische Temperatur erklären, aber eine nähere Untersuchung darüber ergibt, dass dieser Umstand sogar bei falsch angenommenen kritischen Daten nicht eine solche Verschiebung der reducierten Dampfdruckcurve des Wasserstoffs hervorrufen könnte, dass sie mit anderen zusammenfalle.

Aus dem Zusammenstellen der Curven aller dieser 53 Stoffe kann man die allgemeine Folge ziehen, dass die Classification der Stoffe nach Gruppen, innerhalb welcher das van der Waals'sche Gesetz streng richtig wäre, auf keine Weise scharf werden kann, dass es bindende Glieder zwischen den Gruppen giebt. Näheres über die Frage, ob eine solche Classification überhaupt einen Sinn hat, könnte vielleicht eine Darstellung der Anfänge der Curven im grösseren Masstabe ergeben; leider haben wir bisjetzt sehr wenige Daten über die Dampfdrücke der Stoffe, in erster Linie der interessantesten, bei niedrigen Temperaturen.

Obwohl aber das Waals'sche Gesetz nur innerhalb gewisser Gruppen von Stoffen richtig ist, also keine allgemeine Gültigkeit besitzt, behält die Conception der übereinstimmenden Zustände ihren allgemeinen Charakter. Denn es giebt Merkmale im thermodynamischen Verhalten der Stoffe, welche auf eine strenge Uebereinstimmung in gewissen Zuständen hinweisen.

Die ähnliche Gestalt der Isothermen aller Stoffe auf den Diagrammen von Andrews; die Thatsache, dass auf den Isothermen, die tieferen Temperaturen, als die kritische, entsprechen, drei verschiedene Theile exi-

stiren und zwar: 1) homogene Flüssigkeit, 2) das System zweier Phasen der Flüssigkeit und des gesättigten Dampfes, 3) der überhitzte Dampf (eine Erscheinung, die sich bei allen Stoffen ohne Rücksicht auf ihre chemische Zusammensetzung wiederholt); ferner die Existenz der Grenzlinien, der Dampfdrucklinien, überhaupt der Verflüssigungslinien von ähnlicher Gestalt auf der Isothermenfläche aller Stoffe, dann die sehr charakteristische Stellung des kritischen Punktes, welcher analytisch als Punkt-Maximum der Grenzkurve definiert werden kann oder als Wendepunkt solcher Isotherme (der kritischen), welche im letzteren eine zur Abscissenachse parallele Tangente besitzt; endlich die ganz analoge Gestalt der stetigen Isothermen oberhalb des kritischen Punktes bei allen Stoffen; all das wies auf eine gewisse Uebereinstimmung der Zustände bei verschiedenen Stoffen hin.

Die Hypothese von James Thomson, welche dadurch eine neue Verallgemeinerung brachte, dass sie annahm, es existiere kein principieller Unterschied zwischen den Isothermen oberhalb und unterhalb des kritischen Punktes, dehnte den Begriff von Analogie im Verhalten der Stoffe weit aus.

Einen weiteren Schritt in dieser Beziehung bildete die empirische Bestätigung dieser Hypothese auf indirectem Wege, was wir zu den Verdiensten von Ramsay und Young rechnen.

Die Entdeckung weiterer Analogien verdanken wir Amagat und Wróblewski, die die Existenz der Minimum-Curve von Product ( $pv$ ) bewiesen und einen Maximum-Punkt auf derselben fanden, welcher ebenso charakteristisch ist wie der kritische Punkt

Eine ganze Reihe charakteristischer Curven und Punkte entdeckte in neuerer Zeit Berthelot und vermehrte somit reichlich die Zahl der Analogien im thermischen Verhalten der Stoffe. Der Bereich dieser Analogien ist viel (10-fach ungefähr) umfassender, als derjenige, welchen wir auf den Andrews'schen Diagrammen kennen gelernt haben.

Diese neuentdeckten Thatfachen beweisen die Existenz einer Analogie im thermodynamischen Verhalten verschiedener Stoffe in gewissen klar bestimmten Zuständen. Solche Zustände verdienen wohl den Namen: „übereinstimmende“. Ihre Uebereinstimmung lässt sich mit Hilfe von Gleichungen ausdrücken, welche auf unzweideutige Weise die thermodynamischen Variablen:  $p$ ,  $v$ ,  $T$  binden und somit die Bedingungen der Entstehung solcher Zustände bestimmen.

Aber am deutlichsten tritt die Uebereinstimmung durch die physikalische Aehnlichkeit solcher Zustände hervor, wie z. B. bei dem kritischen Punkte. Deshalb nennen wir sie physikalisch übereinstimmende Zustände. Die Existenz solcher physikalischer Uebereinstimmung ist eine geprüfte Thatfache. Wir kennen aber die Natur dieser Uebereinstimmung

nicht, wir wissen nicht, was für Abhängigkeit die Elemente einzelner Zustände verbindet, die im obigen, physikalischen Sinne übereinstimmend sind.

Sicher ist nur, dass diese Abhängigkeit keine einfache Proportionalität zu den Elementen bekannter, physikalisch übereinstimmender Zustände ist, wie z. B. des kritischen Zustandes.

Um diese Abhängigkeit analytisch definieren zu können, muss man sehr wahrscheinlich noch eine zweite Serie übereinstimmender Elemente hinziehen und die Elemente:  $p, v, T$  nicht von der absoluten Null messen, sondern von einem der übereinstimmenden Punkte auf der Isothermenfläche. Zu solcher Idee kam Brillouin; Fran Meyer führte diesbezügliche Berechnungen durch, jedoch ohne sicheren Erfolg und bei willkürlicher Annahme des zweiten, übereinstimmenden (nicht physikalisch) Punktes; als offener Freund dieser Idee bekannte sich Berthelot.

Ein Hinderniss auf dem Wege zur gründlichen Prüfung des Gesetzes von übereinstimmenden Zuständen in dieser neueren Gestalt bildet der Mangel an Versuchen über die Elemente der physikalisch übereinstimmenden Zustände.

Solange wir keine Daten über charakteristische Punkte haben, bleibt die Hypothese der übereinstimmenden Zustände eine offene Frage.

G. MITTAG-LEFFLER,  
O PRZEDSTAWIENIU ANALITYCZNEM  
JEDNOZNACZNEJ GAŁĘZI FUNKCYI ANALITYCZNEJ.

NOTA CZWARTA. <sup>1)</sup>

Zagadnienia, rozstrząsane przezemnie w poprzedzających częściach tej rozprawy <sup>2)</sup>, dają się sprowadzić do jednego źródła, którem jest problemat, postawiony przez *A b e l a* w dzienniku *Crellego* (2, str. 286) <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Patrz *Prace mat.-fizycz.*, t. 16, str. 157—232.

<sup>2)</sup> Po ogłoszeniu Noty trzeciej, pojawiły się następujące prace, mające związek z niniejszą rozprawą:

*Z. G. de Galdeano*. Estudios de critica y pedagogia matematica. Zaragoza 1900, p. 133. *C. A. Dell' Agnola*. Sulle serie di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena (*Annali di mat.* (3) 6. 1901, p. 227). *E. Borel*. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles (*Acta math.* 24. 1901, p. 309). *C. A. Dell' Agnola*. Sulle serie di polinomi (*Atti del R. Ist. Veneto* 60, parte 2. 1900—01, p. 171). *E. Borel*. Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901. Chap. IV, p. 156—182. *S. Pincherle* — *U. Amaldi*. Le operazioni distributive e loro applicazioni all'analisi. Bologna 1901 §§ 99, 214, 215. *E. Lindelöf*. Sur le prolongement analytique (*Bull. de la Soc. math. de France.* 29. 1901, p. 157). *J. Hadamard*. La série de Taylor et son prolongement analytique (*Scientia* № 12. 1901. Chap. VI, pp. 63, 85, 89, 91, 98). *G. Vivaniti*. Teoria delle funzioni analitiche. Milano 1901, pp. 275, 279—304. *E. Phragmén*.

Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^{\infty} F(ax)e^{-a} da$  (C. R. 10 juin 1901).

*Luciusi Hann*: Über Borels Verallgemeinerung des Grenzbegriffes (*Monatshefte für Math. u. Phys.* 12. 1901). *I. Fredholm*. Sur la méthode de prolongement analytique de *M. Mittag-Leffler* (*Ofvers. af. K. Vet.-Akad. förh.* 1901). *P. Painlevé*. Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes (C. R. 7 juillet 1902). Patrz także artykuły *G. Mittag-Lefflera*: Ueber eine Verallgemeinerung der *Taylor'schen Reihe* (*Gött. Nachr.* 1900), On multiply infinite series and on an extension of *Taylor's series* (*Proc. of London Math. Soc.* 32. 1900), Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen (*Jahresb. d. deutsch. Math. Ver.* 9. 1901), Sur une formule de *M. Fredholm* (C. R. 25 mars 1901), Sur la série de *Bernoulli* (C. R. 10 juin 1901), Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène (C. R. 12 août 1901), Sur le terme complémentaire d'un développement de la branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas où ce développement possède un étolle de convergence (*Ofvers. af. K. Vet.-Akad. förhandl.* 1901).

<sup>3)</sup> *Oeuvres*, Nouvelle édition (*Sylow et Lie*) 1, p. 618.

„Zakładając, że szereg

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

jest zbieżny dla każdej wartości dodatniej mniejszej od  $r$ , znaleźć granicę, do której zmierza wartość funkcji  $f(x)$ , gdy  $x$  dąży do wartości  $r$ “.

Abel przyjmuje oczywiście, że  $r$  jest promieniem zbieżności szeregu. Z dzisiejszych naszych wiadomości wypływa, że istnieje głęboka różnica pomiędzy przypadkiem, w którym  $r$  jest punktem osobliwym, a przypadkiem w którym  $r$  jest punktem zwykłym (regularnym) funkcji  $f(x)$ . Do tej pory zajmowano się tylko tym ostatnim przypadkiem.

Wiadomo już z początków Rachunku nieskończonościowego, że nawet w tym przypadku szereg  $c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \dots$  nieskończenie jest zbieżny. Rozważmy naprzykład wzór

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots; \quad x = 1,$$

który był niegdyś przedmiotem tylu rozstrząsań. Problemat Abela w przypadku, gdy  $x = r$  jest punktem zwykłym, polega na zastąpieniu wyrażenia  $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ , stosownego w ogóle jedynie dla  $0 \leq x < r$ , innym wyrażeniem, utworzonym przy pomocy stałych  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , lecz stosownym dla  $0 \leq x \leq r$ . Stawiając tak zagadnienie, dochodzimy naturalnie do zagadnienia ogólniejszego, w którym idzie o zbudowanieżądanego wyrażenia w ten sposób, aby zachodziło dla wszystkich punktów zwykłych funkcji  $f(x)$ , położonych na osi rzeczywistej od  $x=0$  do pierwszego punktu osobliwego. Stając na tem stanowisku, musimy oczywiście pozbyć się warunku ścieśniającego, iż zmienna  $x$  przebiega jedynie wartości rzeczywiste, i winniśmy żądać od szukanego wyrażenia, aby przedstawiało funkcję nietylko na osi rzeczywistej, lecz i na każdym innym wektorze, idącym ze środka  $x=0$  aż do pierwszego punktu osobliwego. Inaczej mówiąc, należy żądać, aby szukane wyrażenie przedstawiało funkcję wewnątrz gwiazdy głównej<sup>1)</sup> stałych  $c_0, |1 c_1, |2 c_2, |3 c_3, \dots$

Rozwiązanie zupełne tego zagadnienia podałem w trzech Notach poprzednich. Rozpatrywane z nieco odmiennego punktu widzenia, zagadnienie to należy do tych, które Weierstrass uczyniłbył podstawą przyszłego rozwoju teorii funkcji. Wiadomo, że ten wielki analista za cel idealny teorii funkcji uważał znalezienie, dla możliwie rozległych klas funkcji, takich wyrażenń arytmetycznych, które są stosowne i zachowują

<sup>1)</sup> Określenie gwiazdy głównej patrz Nota I (Prace mat.-fizycz., t. 16, str. 161), Nota II (tamże str. 192).

tę samą formę w całym obszarze istnienia funkcji. Możemy w tym względzie powołać się na ustęp, znajdujący się w odpisie <sup>1)</sup> komunikatu Weierstrassa w końcu IX-go dziesiątka zeszłego stulecia w seminarium berlińskim, gdy zdawał sprawę z rozmaitych prac nad tym przedmiotem: „Weiter ist man bis heut noch nicht gekommen, aber es scheint, als ob das Ziel, welches ich vor langen Jahren der Functionentheorie steckte, nicht unerreichbar sei: dass nämlich überall, wo zwischen mehreren Veränderlichen Zusammenhang besteht, es möglich sein müsse, ihn in beständig gültiger Form darzustellen“ <sup>2)</sup>. Najogólniejszy związek analityczny w pojęciu Weierstrassa pomiędzy dwiema zmiennymi może być sprowadzony do przypadku, w którym jedna zmienna wyraża się przez szereg potęg drugiej. Z punktu widzenia Weierstrassa, mój problemat, po zdefiniowaniu możliwie rozległej jednoznacznej gałęzi funkcji monogenicznej, sprowadza się do znalezienia wyrażenia arytmetycznego tej gałęzi, posiadającego tę cechę, że jest stosowne i zachowuje swą formę w całym obszarze gałęzi.

W poprzednich częściach tej rozprawy stosowałem jedynie najelementarniejsze rozważania w szeregach potęgowych i nie uciekałem się wcale do całki Cauchy'ego. Tymczasem, oparcie się na teorii całkowania pomiędzy granicami urojonemi daje tę korzyść, że uzyskujemy wyraz dopełniający oznaczony, zupełnie analogiczny do wyrazu, jaki otrzymał był Cauchy dla przypadku rozwinięcia według szeregu Taylora. Przytem dowód naszych twierdzeń staje się wtedy nadzwyczaj prostym. To właśnie chcę pokazać w pierwszym paragrafie tej rozprawy.

Wychodząc z całki Cauchy'ego, otrzymuje się jeszcze w sposób nadzwyczaj prosty wyrażenie gałęzi funkcji przy pomocy sławnej całki Laplace'a <sup>3)</sup>, która była przedmiotem jednej z najbardziej pobudzających rozpraw Abela <sup>4)</sup>, a której niezmiernie ciekawe nowe własności odkrył w ostatnich latach Borel <sup>5)</sup>.

Borel wykazał, że całka Laplace'a — Abela jest stosowna w gwieździe, którą nazywa wielokątem sumowalności. Phrag-

<sup>1)</sup> Zawdzięczamy ten odpis p. Karolowi Itzigsohnowi w Berlinie.

<sup>2)</sup> „Dalej nie doszliśmy do dziś dnia, ale zdaje się, że cel, jaki przed wieloma laty postawiłem teorii funkcji, nie jest nieosiągalny, mianowicie, że wszędzie, gdzie pomiędzy zmiennymi zachodzi związek, musi być możliwe przedstawienie go w formie stale stosownej“.

<sup>3)</sup> Théorie analytique des probabilités (Oeuvres 7. Livre premier, Seconde partie).

<sup>4)</sup> Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes (Sylow et Lie, Oeuvres d'Abel 2, p. 67—71).

<sup>5)</sup> Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

m é n<sup>1)</sup> znów wykazał, że ten wielokąt sumowalności jest równocześnie gwiazdą zbieżności. Dowiodę w § 2, że przy pomocy nieznaczej modyfikacji otrzymać można całkę zbieżności  $A^{(a)}$ , która zmierza nieograniczenie do gwiazdy głównej  $A$ , gdy  $a$  dąży do zera. Dla  $a = 1$  gwiazda ta staje się wielokątem sumowalności Borela.

## § 1.

Niechaj

$$(1) \quad v = f(u | a)$$

będzie przekształceniem dwujednoznacznym, przekształcającem koło  $|u| < R$ ,  $R > 1$  na powierzchnię skończoną i jednospójną, i założmy, że punkty  $u = 0$ ,  $v = 0$  oraz  $u = 1$ ,  $v = 1$  odpowiadają sobie wzajemnie.

Niechaj będzie jeszcze:

$$(2) \quad f(u | 1) = u$$

Rozważmy całkę

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

gdzie  $S$  oznacza kontur powierzchni jednospójnej, dla której tak  $f(y|a)$  jak i  $F(a + (x-a)f(y|a))$  są funkcjami monogenicznymi i regularnymi zmiennej  $y$ , kontur zawierający w swym wnętrzu dwa punkty  $y = 0$ ,  $y = u$ . Dajmy, że całka jest wzięta w zwrocie dodatnim.

Mamy:

$$(4) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= F(a + (x-a)f(u|a)) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^{\infty} F(ax) e^{-ax} da$  (C. R.



gdzie całka  $\int^{(0)}$  jest wzięta w zwrocie dodatnim około punktu  $y=0$ . Połóżmy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a)f(y|a) + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|a)^2 + \dots}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.$$

Założyliśmy, że  $\frac{1}{y} f(y|a)$  jest skończone dla  $y=0$ , przeto:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a)f(y|a) + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|a)^2 + \dots + \frac{1}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n f(y|a)^n}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned} \right.$$

Kładąc:

$$(6) \quad g_{\mu n}(u|a) = -\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{(f(y|a))^\mu}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

otrzymujemy:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$(7) = g_{0n}(u|a) F(a) + \frac{g_{1n}(u|a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{g_{2n}(u|a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{g_{nn}(u|a)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Przypominając sobie odpowiedniość pomiędzy punktami  $u=0$ ,  $v=0$  i kładąc:

$$(8) \quad D^{(v)} f^\mu = [D^{(v)} (f(y|a))^\mu]_{y=0},$$

widzimy, że:

$$(9) \quad g_{\mu n}(u|a) = \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\underline{\mu}} u^\mu + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{\underline{\mu+1}} u^{\mu+1} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{\underline{n}} u^n.$$

Mamy nadto:

$$(10) \quad g_{0n}(u|a) = 1, \quad g_{u0}(u|a) = 0.$$

Otrzymujemy tedy:

$$(11) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ = F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} u^\mu + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{|\underline{\mu+1}|} u^{\mu+1} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\underline{n}|} u^n \right) F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu,$$

a na zasadzie wzoru (4):

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} & F(a + (x-a)f(u|a)) \\ & = F(a) + \sum_{\mu=1}^n \left( \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} u^\mu + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{|\underline{\mu+1}|} u^{\mu+1} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\underline{n}|} u^n \right) F^{(\mu)}(x-a)^\mu \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy, \end{aligned} \right\}$$

lub, porządkując wyrażenie (11) według potęg wielkości  $u$ :

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} & F(a + (x-a)f(u|a)) \\ & = F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) u^\mu + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned} \right\}$$

Kładąc  $u = 1$  i wprowadzając:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{\mu n}(a) &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{(f(y|a))^u}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{|\underline{\mu+1}|} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\underline{n}|}, \end{aligned} \right.$$

otrzymujemy wzór następujący:

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \left. \begin{aligned}
 F(x) &= F(a) + \frac{a_{1n}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \\
 &+ \frac{a_{\mu n}(a)}{|n|} F^{(u)}(a) (x-a)^\mu + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\
 &= F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\mu|} \left\{ \frac{D^{(\mu)}f}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)}f^2}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \right. \\
 &\left. + \frac{D^{(\mu)}f^\mu}{|\mu|} F^{(u)}(a) (x-a)^\mu \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy.
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Uwzględniając wzór (9), definicyę wyrażenia  $f(u|a)$ , oraz odpowiedniość punktów  $u=1, v=1$ , otrzymujemy równość:

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\mu n}(a) = 1,$$

zachodzącą dla każdej wartości danej na  $\mu$ .

Użyjmy teraz funkcji tworzącej  $f(u|a)$ ,  $|u| \leq 1$  dla utworzenia gwiazdy  $A^{(a)}$ , wpisanej w gwiazdę główną  $A$  stałych:

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a) \dots ^1)$$

Niechaj  $X$  będzie jakimkolwiek obszarem skończonym wewnątrz  $A^{(a)}$ . Istnieć będzie zawsze gwiazda  $E$  (Nota pierwsza, str. 7) o środku  $a$ , obejmująca w sobie  $X$  i położona wewnątrz  $A^{(a)}$ . Jeżeli zmienna  $x$  przebiega gwiazdę  $E$ , ogół  $\bar{E}$  wszystkich różnych punktów  $Z$ , które otrzymujemy, kładąc:

$$Z = a + (x-a) f(u|a); \quad |u| \leq r, \quad 1 < r < R,$$

obejmie gwiazdę  $E$  i pozostanie wewnątrz  $A$ , gdy  $r$  jest obrane dość blizkiem jedności.

<sup>1)</sup> Patrz: Nota I str. 5, Nota II str. 36, Nota III str. 53.

Wprowadzając zamiast  $S$  kontur  $C$  okręgu koła  $|y| = r$ , możemy wzór (15) napisać w postaci:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} FA^{(n)}(x) &= F(a) + \frac{a_{1n}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{a_{nn}(a)}{|n|} F^{(n)}(a) (x-a)^n + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overset{(o)}{F}(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\mu|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a) + \dots \right. \\ &\left. + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overset{(o)}{F}(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned} \right.$$

Ta równość podstawowa zachodzić będzie dla wszystkich punktów  $x$ , należących do obszaru  $X$ , leżącego wewnątrz gwiazdy  $A^{(n)}$ . Jeżeli uczynimy  $\alpha = 1$ , otrzymamy z wzoru (17) wzór Taylora z wyrazem dopełniającym Cauchy'ego. W samej rzeczy (patrz (2)):

$$f(y|1) = y, \quad a_{\mu n}(1) = 1, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, n,$$

a wyraz dopełniający staje się równy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overset{(o)}{F}(a + (x-a)y)}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overset{(o)}{F}(z)}{z-x} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} dz,$$

gdzie  $\bar{C}$  jest kołem o środku  $a$ , zawierającym w sobie punkt  $x$  i znajdującym się wewnątrz gwiazdy  $A^{(n)}$ ; koło to jest kołem zbieżności rozwinięcia według wzoru Taylora. Jest to znany wzór Cauchy'ego na wyraz dopełniający, w przypadku, w którym  $x$  jest zmienną zespoloną.

Powróćmy do przypadku ogólnego. Widzieliśmy, że gdy promień  $r$  koła  $C$  weźmiemy dostatecznie blizkim jedności, wtedy  $F(a + (x-a)f(y|a))$  należy zawsze do obszaru  $\bar{E}$ , położonego wewnątrz gwiazdy głównej  $A$ . Wartość bezwzględna wyrażenia  $\frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1}$  posiada tedy granicę wyższą skończoną, gdy  $y$  przebiega okrąg  $C$ . Jeżeli teraz liczba  $n$  zwiększy się dostatecznie, będzie można wartość bezwzględną wyrazu dopełniającego uczynić mniejszą od wszelkiej wielkości dodatniej, tak małej jak się podoba.

A więc równość

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} FA^{(a)}(x) &= F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{a_{\mu n}(a)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \\ &= F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) \end{aligned} \right.$$

zachodzi dla każdego punktu wewnątrz  $A^{(a)}$ .

Wartość graniczna

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{a_{\mu n}(a)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f^1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right)$$

jest nadto jednostajnie zbieżna w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $A^{(a)}$ .

Przyjmijmy odwrotnie, że wartość graniczna (19) jest zbieżna dla  $x = x_0$ . Z tożsamości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x_0-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x_0-a)^\mu \right) \\ = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x_0-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x_0-a)^\mu \right)$$

wynika na zasadzie pewnego twierdzenia A b e l a <sup>1)</sup>, że wartość graniczna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{a_{\mu n}}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f^1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x_0-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x_0-a)^\mu \right)$$

<sup>1)</sup> Oeuvres. Nouvelle édition (S y l o w et L i e), p 223. Théor. V.

będzie zbieżna dla  $|u| < 1$ . Pamiętając, że  $f(u|a) = 0$ , widzimy, że równość (13) zachodzi dla  $x = x_0$ , gdy wielkości  $|u|$  nadawać będziemy wartości dostatecznie małe. Widzimy także, że obrawszy sobie za  $S$  kontur, obejmujący koło o środku w punkcie zero i o promieniu  $|u|$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} & F(a + (x_0 - a) f(u|a)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{u^\mu}{|\mu|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x_0 - a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x_0 - a)^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) (x_0 - a)^\mu \right). \end{aligned}$$

Ponieważ strona druga jest zbieżna dla  $|u| < 1$ , przeto strona pierwsza jest funkcją regularną zmiennej  $u$  dla  $|u| < 1$ . Stąd, na podstawie definicji gwiazdy  $A^{(a)}$ , punkt  $x_0$  jest koniecznie albo wierzchołkiem gwiazdy  $A^{(a)}$  albo punktem wewnętrznym tej gwiazdy.

Przypominając sobie (patrz Notę trzecią), że funkcja tworząca  $f(u|a)$  może być obrana tak, aby gwiazda  $A^{(a)}$  dążyła nieograniczenie do gwiazdy  $A$  wtedy, gdy  $a$  dąży do zera i aby wszystkie  $a_{\mu n}(a)$  były liczbami dodatnimi, możemy otrzymane dotąd wyniki wyrazić w następującej nowej formie twierdzenia 4.

**Twierdzenie 4a.** Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku  $a$ , przez  $a$  wielkość dodatnią mniejszą od jedności, przez  $A^{(a)}$  gwiazdę spółśrodkową z  $A$  i wpisaną w  $A$ , a utworzoną przez funkcję tworzącą  $f(u|a)$ . Można będzie zawsze obrać tę funkcję tak, aby, gdy  $a$  jest dostatecznie małe, gwiazda  $A^{(a)}$  obejmowała w swym wnętrzu obszar dany jakikolwiek, położony wewnątrz gwiazdy  $A$ , i tak jeszcze, aby dla  $a = 1$  gwiazda  $A^{(1)}$  stała się kołem spółśrodkowym z  $A$  i wpisanem w  $A$ . Nadto, gdy  $A$  jest gwiazdą główną ciągłą stałych:

$$F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots,$$

poddanych warunkowi Cauchy'ego, będzie można obrać  $f(u|a)$  w ten sposób, aby wyrażenie graniczne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{a_{nn}(a)}{|\underline{n}|} F^{(n)}(a) (x-a)^n \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$a_{\mu n}(a), \quad \mu = 1, 2, \dots, n; \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

są stałymi dodatnimi oznaczonemi o własnościach

$$a_{\mu n}(1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\mu n}(a) = 1,$$

zależnymi tedy tylko od funkcji tworzącej, posiadała gwiazdę zbieżności tożsamą z gwiazdą  $A^{(a)}$  i taką, by równość

$$FA(x) = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{a_{nn}(a)}{|n|} F^{(n)}(a) (x-a)^n \right],$$

zachodziła wszędzie wewnątrz  $A^{(a)}$ . Wyrażenie graniczne podwójne

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{a_{nn}(a)}{|n|} F^{(n)}(a) (x-a)^n \right]$$

ma gwiazdę zbieżności tożsamą z gwiazdą  $A$ , a równość

$$FA(x) = F(a) + \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (a-x) + \frac{a_{2n}(a)}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{a_{nn}(a)}{|n|} F^{(n)}(a) (x-x)^n \right]$$

zachodzi wszędzie wewnątrz  $A$ .

Jeżeli w przejściu do granicy zatrzymamy się na liczbie oznaczonej  $n$ , będziemy mieli równość

$$FA^{(a)}(x) = F(a) + \frac{a_{1n}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{|2|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{a_{nn}(a)}{|n|} F^{(n)}(a) (x-a)^n + \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy,$$

gdzie całka jest wzięta w zwrocie dodatnim,  $C$  zaś oznacza okrąg koła o środku w punkcie zero i o promieniu  $r$  ( $1 < r < R$ ) tak, że  $a + (x-a)f(y|a)$  należy do wnętrza gwiazdy  $A^{(a)}$ .

Zamiast całki (3) możnaby wziąć za punkt wyjścia inne całki, np.

$$\frac{\left(\frac{df_1(u|a)}{du}\right)_{u=1}}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{f_1(y|a) - 1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy,$$

gdzie  $f_1(u|a)$  jest funkcją, mającą te same własności co  $f(u|a)$  i jeszcze tę własność, że:

$$\left(\frac{df_1(u|a)}{du}\right)_{u=1}$$

nie jest zerem. Stałe  $a_{\mu n}(a)$  stają się w tym przypadku:

$$a_{\mu n}(a) = -\frac{\left(\frac{df_1(u|a)}{du}\right)_{u=1}}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{(f(y|a))^\mu}{f_1(y|a) - 1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, n$$

i zachowują dwie własności:

$$a_{\mu n}(1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\mu n}(a) = 1;$$

lecz nie zdaje się być koniecznym, aby gwiazda  $A^{(a)}$  pozostała gwiazdą zbieżności przy każdym wyborze wielkości  $f(u|a)$ .

Wywody, podane przezemnie w Nocie trzeciej, stosują się specjalnie do pewnej funkcji tworzącej, przy pomocy której otrzymujemy bardzo prostą konstrukcję geometryczną gwiazdy  $A^{(a)}$ . Liczby  $a_{\mu n}(a)$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , obliczają się za pomocą wzorów zwrotnych.

Fredholm<sup>1)</sup> zaproponował, jako funkcję tworzącą, funkcję:

$$f(u|a) = \frac{\log(1 - (1-a)u)}{\log a}$$

<sup>1)</sup> G. Mittag-Leffler. Sur une formule de M. Fredholm (C. R. 25 mars 1901). I. Fredholm. Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler (Öfv. af. K. Vet.-Ak. förhandl. 13 marca 1901).



i otrzymał piękne rozwinięcie:

$$FA^{(a)}(x) = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^n \frac{(1-a)^\mu}{|\underline{\mu}|} \left[ h_{\mu-1}^{(a)} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} + \dots \right. \\ \left. + h_1^{(a)} F^{(a-1)}(a) \left( \frac{x-a}{H} \right)^{a-1} + F^{(a)}(a) \left( \frac{x-a}{H} \right)^a \right],$$

gdzie  $H = \log \frac{1}{a}$ , stałe zaś  $h_{\mu-1}^{(a)}, \dots, h_1^{(a)}$  są współczynnikami czynnikowej (fakultetu)  $\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+\mu-1)$ , t. j. liczbami całkowitemi dodatnimi, określonymi przy pomocy równości:

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+\mu-1) = \lambda^\mu + h_1^{(a)}\lambda^{\mu-1} + \dots + h_{\mu-1}^{(a)}.$$

Lecz konstrukcja geometryczna gwiazdy  $A^{(a)}$  staje się w tym przypadku mniej prostą niż przy użyciu figury sercowatej, jak w Nocie trzeciej; wzory zaś wyraźne na współczynnik czynnikowej są bardzo zawiłe<sup>1)</sup>.

Jest przeto zadaniem interesującym znaleźć taką funkcję tworzącą dla której wzory wyraźne na stałe  $a_{\mu n}(a)$ ,  $\mu = 1, 2 \dots n$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots \infty$  są dostatecznie proste.

Znajdujemy rozwiązanie tego zagadnienia, wprowadzając funkcję tworzącą:

$$(20) \quad v = f(u|a) = \frac{au}{\left(1 - \frac{u}{R}\right)^a}; \quad \frac{1}{R} = 1 - a \frac{1}{a}.$$

Widzimy, że przekształcenie  $v = f(u|a)$  jest dwujędnoznaczne dla  $|u| < R$  i że odpowiadają sobie wzajemnie punkty  $u=0, v=0$  oraz  $u=1, v=1$ . Widzimy jeszcze, że odpowiadają sobie wzajemnie:

$$u = -1, \quad v = -\frac{a}{\left(2 - a \frac{1}{a}\right)^a}.$$

Punkt  $v$ , który odpowiada punktowi  $u = -1$ , znajduje się więc na przedłużeniu wektora  $(0, 1)$  poza zero i dąży do zera wraz z  $a$ . Łatwo też

<sup>1)</sup> O. Schlömilch. Compendium der höheren Analysis, t. II, wydanie 3-cie str. 23—31.

widzieć, że obraz koła  $|u|=1$ , opisanego przez punkt  $v$ , spłaszcza się nieograniczenie, gdy  $a$  dąży do zera. W samej rzeczy, gdy położymy:

$$1 - \frac{e^{i\vartheta}}{R} = \rho e^{i\theta},$$

będzie:

$$v = x + iy = \frac{a}{\rho^a} e^{i(\vartheta - a\theta)},$$

a więc:

$$y = \frac{a}{\rho^a} \sin(\vartheta - a\theta),$$

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{a}{\rho^a} \left[ \cos(\vartheta - a\theta) + \frac{a}{R\rho} \cos(2\vartheta - (1+a)\theta) \right].$$

Widzimy z jednej strony, że  $\frac{1}{\rho}$  zmniejsza się stale od  $\vartheta=0$  do  $\vartheta=\pi$ , z drugiej zaś strony, ponieważ  $\frac{dy}{d\vartheta}$  pozostaje dodatniem pomiędzy  $\vartheta=0$  i  $\vartheta=\frac{\pi}{4}$ , wartość  $y$  rośnie od zera do

$$\frac{a}{\left[ 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) - a^{\frac{1}{a}} \left( 2 - a^{\frac{1}{a}} - 2 \cos \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{a}{2}}} \sin \left( \frac{\pi}{4} - a\theta \frac{\pi}{4} \right),$$

gdzie  $\theta \frac{\pi}{4}$  jest wartością wielkości  $\theta$ , odpowiadającą wartości  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ .

Rozpatrzmy teraz  $y$ . Czynniki  $\frac{a}{\rho^a}$  zmniejsza się dla wartości  $\vartheta$  od  $\vartheta=0$  do  $\vartheta=\pi$ ; czynnik drugi  $\sin(\vartheta - a\theta)$ , przeciwnie, powiększa się przy wartościach  $\vartheta$  od  $\vartheta=0$  do  $\vartheta=\frac{\pi}{4}$ . Toż samo będzie z wielkością  $y$ . Wielkość

$$\frac{a}{\left[ 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) - a^{\frac{1}{a}} \left( 2 - a^{\frac{1}{a}} - 2 \cos \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{a}{2}}},$$

jest więc oczywiście większa od wartości maximum na  $y$ . Lecz wielkość ta dąży nieograniczenie do zera wraz z  $a$ .

Dowiedliśmy zatem, że obraz koła  $|u|=1$ , opisanego przez punkt  $v$ , dąży nieograniczenie do linii prostej, poprowadzonej od punktu  $v=0$  do punktu  $v=1$ , gdy  $a$  dąży nieograniczenie do zera. Funkcja tworząca posiada tedy wszystkie własności, wysłowione w twierdzeniu 4.

Obliczmy teraz stałe  $\alpha_{\mu n}(a)$ . Wzór (14) daje bezpośrednio:

$$(21) \quad \alpha_{\mu}(a) = a^{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha_{\mu}}{1} (1-a^{\frac{1}{a}}) + \frac{\alpha_{\mu}(\alpha_{\mu}+1)}{2} (1-a^{\frac{1}{a}})^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{\alpha_{\mu}(\alpha_{\mu}+1)\dots(\alpha_{\mu}+n-\mu-1)}{n-\mu} (1-a^{\frac{1}{a}})^{n-\mu} \right);$$

kładąc  $a = \frac{1}{n}$ , otrzymujemy wyrażenie bardzo proste:

$$(22) \quad F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\alpha_{1n}\left(\frac{1}{n}\right)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}\left(\frac{1}{n}\right)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{\alpha_{nn}\left(\frac{1}{n}\right)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right],$$

przedstawiające funkcję  $FA(x)$  wewnątrz gwiazdy głównej  $A$  i zarazem zbieżne jednostajnie dla każdego obszaru wewnątrz  $A$ . Lecz  $A$  nie jest w ogóle — jak to wykazał B o r e l <sup>1)</sup> — gwiazdą zbieżności tego wyrażenia; przeciwnie, widzieliśmy, że jest ona zawsze gwiazdą zbieżności wyrażenia granicznego podwójnego

$$F(a) + \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\alpha_{1n}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{\alpha_{nn}(a)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right\},$$

które, podobnie jak wyrażenie (22), przedstawia  $FA(x)$  wewnątrz  $A$ .

## § 2.

Wyniki powyższe otrzymano wszystkie z badania całki:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.$$

<sup>1)</sup> E. B o r e l. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Acta. math. 24, p. 309. Patrz naszą Notę trzecią.

Jeżeli w tej całce, zamiast czynnika  $\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}$ , weźmiemy inny czynnik, zachowujący tę własność, aby był równy 1 dla  $y = u$  i aby punkt  $y = 0$  był jedynym jego punktem osobliwym, otrzymamy inne wyniki, również godne uwagi.

W paragrafie niniejszym obierzemy czynnik  $e^{\omega\left(\frac{y}{u}-1\right)}$ , gdzie  $\omega$  jest stałą dodatnią, i zajmiemy się badaniem całki:

$$(23) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{y}{u}-1\right)} dy.$$

Należy rozpocząć od przypadku najprostszego  $f(y|a) = y$ ,  $u = 1$  i zbadać całkę:

$$(24) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy.$$

Przyjmijmy, jak w paragrafie pierwszym, że  $S$  jest konturem powierzchni jednospójnej, dla której  $F(a + (x-a)y)$  jest funkcją monogeniczną, regularną, obejmującą w sobie dwa punkty  $y = 0$ ,  $y = 1$ . Mamy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy = F(x) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy.$$

Mamy nadto:

$$(25) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy \\ & = \frac{e^{-\omega}}{2\pi i} \int \left\{ F(a) + (F(a) + \frac{1}{|1} F^{(1)}(a) (x-a) y) \right. \\ & \quad \left. + (F(a) + \frac{1}{|1} F^{(1)}(a) (x-a) y + \frac{1}{|2} F^{(2)}(a) (x-a)^2 y^2 + \dots \right\} \\ & \quad \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{|1} \frac{\omega}{y} + \frac{1}{|2} \left(\frac{\omega}{y}\right)^2 + \frac{1}{|3} \left(\frac{\omega}{y}\right)^3 + \dots \right\} dy \\ & = e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|1} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{1}{|2} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{|\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1}. \end{aligned}$$

Szereg

$$(26) \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{\underline{1}} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{\mu+1}},$$

jest zbieżny dla każdego punktu, któremu odpowiada kontur  $S^1$ ).

Mamy tedy równość:

$$(27) \quad F(x) = e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{\underline{1}} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{\mu+1}} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{-\omega \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,$$

zachodzącą dla każdego punktu, któremu odpowiada kontur  $S$ .

<sup>1)</sup> W rzeczy samej, szereg ten jest bezwzględnie zbieżny dla każdej wartości  $x$  i  $\omega$ . Można to okazać sposobem, wskazanym nie przez Phragmèna. Niechaj  $r$  będzie

wielkością dodatnią mniejszą od promienia zbieżności szeregu  $\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu}$

i niechaj  $g$  będzie wartością maximum wyrażenia  $\left| \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right|$  dla  $|x| = r$ .

Będzie wtedy:

$$\left| \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) \right| \leq g r^{-\mu}.$$

Dla jakiegokolwiek  $x$  jest:

$$\sum_{\mu=0}^n \left| \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right| \leq g \frac{1 - \left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{|x-a|}{r}},$$

stąd:

$$\sqrt[n]{\left( \sum_{\mu=0}^n \left| \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right| \right) \frac{1}{\underline{n+1}}} \leq \sqrt[n]{g \frac{1 - \left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{|x-a|}{r}}},$$

a więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{\mu=0}^n \left| \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right| \frac{1}{\underline{n+1}}} = 0,$$

a zatem i t. d..

Ze zbieżności szeregu (26) wypływa :

$$(28) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{1}{n} F^{(n)}(a) (x-a)^n \right) \frac{\omega^{n+1}}{n+1} = 0,$$

a zważając, że :

$$(29) \frac{e^{-\omega} \omega^n}{n} = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-\omega} \omega^{\mu-1}}{\mu-1} - \frac{e^{-\omega} \omega^{\mu}}{\mu} \right) d\omega,$$

widzimy, że :

$$(30) \begin{aligned} F(x) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\mu|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy. \end{aligned}$$

Możnaby było otrzymać również oba wzory podstawowe (27) i (30), wziąwszy za punkt wyjścia tożsamość :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} \left[ \left( \frac{1}{y} - 1 \right) \int_0^{\infty} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} d\omega + 1 \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} dy - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y} \left( \int_0^{\infty} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} d\omega \right) dy \\ &= F(x) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y} \left( \int_0^{\infty} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} d\omega \right) dy. \end{aligned}$$

Szereg

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\mu|)^2} (\omega(x-a))^{\mu}$$

jest widocznie zawsze zbieżny względem  $\omega$ ; będzie zatem:

$$(31) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\underline{\mu}|)^2} (\omega(x-a))^{\mu} \right) d\omega.$$

Kładąc:

$$(32) \quad \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\underline{\mu}|)^2} (\omega(x-a))^{\mu},$$

możemy napisać:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega.$$

Stąd wynika:

$$(33) \quad F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy.$$

Ten nowy wzór można uważać za podstawowy na równi z wzorami (27) i (30).

Zbudujmy teraz gwiazdę  $A^{(1)}$ , wpisaną w gwiazdę główną  $A$  stałych  $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a) \dots F^{(\mu)}(a) \dots$ , w sposób następujący. Ustalmy wektor  $l$ , wychodzący ze środka  $a$  i nadajmy mu długość  $r$ . Gdy weźmiemy  $r$  dostatecznie małym, koło, którego ta część wektora  $l$  będzie średnicą, stanowić będzie część gwiazdy  $A$ . Jeżeli przez  $\varrho$  oznaczymy granicę wyższą wielkości  $r$ , odetniemy na  $l$  długość  $\varrho$  i obrócimy  $l$  raz jeden około środka  $a$ , zbudujemy gwiazdę  $A^{(1)}$ .

Obierzmy teraz na  $S$  okrąg  $\mathcal{C}$  o środku w punkcie  $y = \frac{1}{2}$  i promieniu  $\frac{1}{2} r$ ;  $r > 1$ . Z wzorów (27), (30) i (33) wyprowadzamy następujące trzy równości:

$$\begin{aligned}
 & FA^{(1)}(x) = e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\
 & \left. + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C})} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy, \\
 (34) \quad & FA^{(1)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C})} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy, \\
 & FA^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} F(a+\omega(x-a)) d\omega \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C})} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,
 \end{aligned}$$

które stosują się wszystkie do jakiegokolwiek obszaru  $X$ , położonego wewnątrz  $A^{(1)}$ , byleby  $r$  było dostatecznie blizkie jedności.

Szeregi (26), (31) i (32) są jednostajnie zbieżne dla obszaru  $X$  i są one nadto zawsze i bezwzględnie zbieżne tak względem  $x$  jak i względem  $\omega$ .

Część rzeczywista wyrażenia  $\frac{1}{y} - 1$ , gdy  $y$  opisuje obwód  $\mathcal{C}$ , jest równa

$$\frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1+\cos\varphi)},$$

gdzie uczyniono  $y = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} e^{i\varphi}$  i pozostaje zawsze ujemną; będzie zatem:

$$(35) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C})} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy = 0.$$

Gdy obierzemy  $r$  dostatecznie blizkiem jedności, zbieżność ku zeru tego wyrażenia granicznego stanie się jednostajną dla wszelkiego obszaru  $X$  wewnątrz  $A^{(1)}$ .



Z wzorów (34) wyprowadzamy więc następujące:

$$(36) \quad FA^{(1)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{|\underline{n}|} F^{(n)}(a) (x-a)^n \right) \frac{\omega^{n+1}}{|\underline{n+1}|},$$

$$(37) \quad FA^{(1)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} \omega^n d\omega}{(|\underline{n}|)} F^{(n)}(a) (x-a)^n,$$

$$(38) \quad FA^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega,$$

zachodzące wszystkie wewnątrz  $A^{(1)}$ . Strony drugie każdej z tych równości są jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru  $X$  wewnątrz  $A^{(1)}$ .

Wzór (36) zawdzięczamy Borelowi<sup>1)</sup>. Wzór (38) jest sławnym wzorem Laplace'a — Abela<sup>2)</sup>. Funkcja  $\mathfrak{F}(a, \omega(x-a))$  jest funkcją, którą Abel nazywa „funkcją tworzącą”, gdy gałąź funkcyjna  $FA^{(1)}(x)$  jest „funkcją określającą”. Zasługą Borela jest odkrycie ważnego faktu, że całka Laplace'a — Abela

$$(39) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega,$$

jest zbieżna wszędzie wewnątrz gwiazdy  $A^{(1)}$ , która zresztą jest gwiazdą, opisaną na kole zbieżności szeregu Taylora

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu}$$

i zlewa się z tym kołem tylko w przypadkach specjalnych.

<sup>1)</sup> Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

<sup>2)</sup> Laplace. Théorie analytique des probabilités (Oeuvres 7. Livre premier, Sec. e partie). Abel. Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes (Sylvow et L. e, Oeuvres 2. 67—71).

Wywód powyższy podałem w liście do Hermite'a, napisanym wkrótce po pierwszej publikacji Borela <sup>1)</sup>.

Ważne pytanie pozostało jeszcze po badaniach Borela. Udowodniono wprawdzie, że całka (39) ma znaczenie wszędzie wewnątrz gwiazdy  $A^{(1)}$ , lecz nie wiadomo, czy ta całka posiada gwiazdę zbieżności, czy też jej nie posiada. Phragmén wyjaśnił tę sprawę, dowiodłszy, że gwiazda  $A^{(1)}$  jest gwiazdą zbieżności trzech wyrażeń: powyższego (39) oraz dwu wyrażeń:

$$(40) \quad \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}|},$$

$$(41) \quad \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu}.$$

Dowodzenie Phragmèna może być streszczone w sposób następujący:

Dowodzi on najprzód następującego twierdzenia.

„Dajmy, że całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega,$$

gdzie  $\varphi(\omega)$  jest funkcją rzeczywistą i jednoznaczną,  $t_0$  zaś wielkością rzeczywistą, jest zbieżna. Oznaczmy przez  $\varepsilon$  wielkość dodatnią dowolnie małą, a przez  $R(t-t_0)$  część rzeczywistą wielkości  $t-t_0$ , gdzie  $t$  jest rzeczywiste lub zespolone.

Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega$$

jest jednostajnie zbieżna, gdy  $R(t-t_0) \geq \varepsilon$ .

<sup>1)</sup> Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^{\infty} F(a) e^{-a} da$  (C. R.

10 juin 1901).

W samej rzeczy, połóżmy:

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\omega} e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega;$$

dla  $M$  dodatniego i dostatecznie wielkiego będzie:

$$|\Phi(\omega)| < M.$$

Jest nadto:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)} e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)} d\Phi(\omega).$$

Wykonywając całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega = \left[ e^{-\omega(t-t_0)} \Phi(\omega) \right]_{\omega_1}^{\omega_2} + (t-t_0) \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)} \Phi(\omega) d\omega,$$

stąd:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega \right| &\leq M(e^{-\omega_1 \varepsilon} + e^{-\omega_2 \varepsilon}) + |t-t_0| M \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega \varepsilon} d\omega \\ &= M(e^{-\omega_1 \varepsilon} + e^{-\omega_2 \varepsilon}) + \frac{|t-t_0|}{\varepsilon} M(e^{-\omega_1 \varepsilon} - e^{-\omega_2 \varepsilon}) \\ &< 2M e^{-\omega_1 \varepsilon} + M \frac{|t-t_0|}{\varepsilon} e^{-\omega_1 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Wyraz po prawej, gdy  $\omega$  rośnie, może stać się tak małym, jak chcemy. Twierdzenie jest więc dowiedzione.

Przyjmijmy teraz, że wyrażenie (40) jest zbieżne dla  $x = x_0$ . Będzie:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_2} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) \frac{\omega_2^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \\
 & - \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_1} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) \frac{\omega_1^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \\
 (42) \quad & = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) \left( \frac{e^{-\omega_2} \omega_2^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} - \frac{e^{-\omega_1} \omega_1^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \right) \\
 & = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( \frac{e^{-\omega} \omega^\mu}{|\underline{\mu}|} - \frac{e^{-\omega} \omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \right) d\omega \\
 & \quad \text{[porów. (29)]} \\
 & = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega.
 \end{aligned}$$

Kładąc:

$$(43) \quad \omega(x-a) = w, \quad (44) \quad \frac{1}{x-a} = t,$$

$$(45) \quad \mathfrak{F}(a, w) = \varphi(w) + i \psi(w),$$

gdzie  $\varphi(w)$ ,  $\psi(w)$  są rzeczywiste, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 (46) \quad & \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega = t \int_{w_1}^{w_2} e^{-w t} \mathfrak{F}(a, w) dw \\
 & = t \left[ \int_{w_1}^{w_2} e^{-w t} \varphi(w) dw + i \int_{w_1}^{w_2} e^{-w t} \psi(w) dw \right].
 \end{aligned}$$

Warunkiem tedy koniecznym i dostatecznym na to, aby każde z trzech

wyrażeń (39), (40) i (41) było zbieżne, jest, by moduł każdego z dwóch wyrażeń

$$\int_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega, \quad \int_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t} \psi(\omega) d\omega,$$

gdy  $w_1$  jest dostatecznie wielkie,  $w_2$  zaś jest wielkością dodatnią jakąkolwiek i  $w_1 < w_2$ , pozostawał mniejszy od wielkości dodatniej danej, jakkolwiek małej. Przyjmuje się, że warunek ten spełnia się dla  $t_0 = \frac{1}{x_0 - a}$ .

Według twierdzenia P h r a g m é n a warunek ten spełnia się także dla

$$R\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x_0-a}\right) = R(t-t_0) \geq \varepsilon,$$

t.j. we wszystkich punktach wnętrza koła, którego średnicą jest wektor  $(ax_0)$ .

Całka (39) jest więc funkcją monogeniczną i regularną zmiennej  $x$  wszędzie wewnątrz tego koła. Punkt  $x_0$  jest przeto albo wierzchołkiem, albo punktem wewnętrznym gwiazdy  $A^{(1)}$ . Ta gwiazda zbieżności całki (39) jest równocześnie na zasadzie wzoru (42), gwiazdą zbieżności dwóch wyrażeń (40) i (41).

Wyniki, osiągnięte dotąd w tym paragrafie, dają się streścić w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 7a.** Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku  $a$ , przez  $A^{(1)}$  inną gwiazdę, którą nazwijmy gwiazdą Borela; ta gwiazda Borela będzie spółśrodkowa z  $A$ , wpisana w  $A$  i tworzy się tak: ograniczamy każdy wektor  $l$ , wychodzący ze środka  $a$ , do długości  $\varrho$ , będącej granicą wyższą innej długości  $r$ , na wektorze  $l$  takiej, że koło o średnicy  $r$  stanowi część składową gwiazdy  $A$ .

Ponieważ gwiazda  $A$  jest gwiazdą główną stałych  $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$  poddanych warunkowi Cauchy'ego, przeto każde z wyrażeń

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega, \quad \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\underline{\mu}|)^2} (\omega(x-a)^\mu),$$

$$\lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|}$$

$$\lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu$$

będzie miało gwiazdę Borela jako gwiazdę zbieżności, a równość:

$$\begin{aligned}
 FA^{(1)}(x) &= \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}|} \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}
 \end{aligned}$$

zachodzić będzie wszędzie wewnątrz gwiazdy Borela.

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na określonej liczbie skończonej, będziemy mieli równość:

$$\begin{aligned}
 FA^{(1)}(x) &= \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega + \int_{\mathbb{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\infty \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy \\
 &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}|} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\infty \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy \\
 &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\infty \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,
 \end{aligned}$$

gdzie całka  $\int_{\mathbb{C}}$  jest wzięta w zwrocie dodatnim i gdzie  $\mathbb{C}$  oznacza koło o środku  $\frac{1}{2}$  i promieniu  $\frac{1}{2}r$  ( $r > 1$ ) tak, że  $a + (x-a)y$  należy do wnętrza gwiazdy  $A'$ .

Wróćmy teraz do badania całki ogólnej (23), t. j. całki

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\infty \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy.$$

Nadamy funkcji  $f(y|a)$  to samo znaczenie, co w paragrafie pierwszym i przyjmiemy tak samo, jak w tym paragrafie, że  $S$  jest konturem powierzchni jednorodnej, dla której tak  $f(y|a)$  jak i  $F(a+(x-a)f(y|a))$  są funkcjami monogenicznymi i regularnymi, konturem zawierającym w swem wnętrzu punkty  $y=0$ ,  $y=u$ . Mamy:

$$F(a+(x-a)f(u|a)) \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} dy + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(S)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} dy$$

i nadto:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} dy = -\frac{e^{-\omega}}{2\pi i} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} dy \\ - \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-\omega} \omega}{|1} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right) dy \\ - \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-\omega} \omega^2}{|2} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^2 dy \\ - \dots - \frac{1}{2\pi i} e^{-\omega} \omega^{\mu+1} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1} dy - \dots \\ = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{e^{-\omega} \omega^{\mu+1}}{|\mu+1} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1} dy.$$

Stąd na zasadzie wzoru (7) będzie:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} dy \\ = e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{g_{1u}(u|a)}{|1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{g_{2u}(u|a)}{|2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{g_{\mu u}(u|a)}{|\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1} \\ = e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \sum_1^{\mu} \frac{w^r}{|r} \left( F^{(1)}(u)(x-a) + \frac{D^r f^2}{|2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{D^r f^r}{|r} F^{(r)}(a)(x-a)^r \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1} \right).$$

A zatem:

$$\begin{aligned}
 & F(a + (x-a) f(u | a)) \\
 = & e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{g_{1u}(u | a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{g_{\mu u}(u | a)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\
 (48) \quad & + \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{F(a + (x-a) f(y | a))}{y-u} e^{\omega \left(\frac{x}{y}-1\right)} dy,
 \end{aligned}$$

a kładąc  $u = 1$ , mieć będziemy:

$$\begin{aligned}
 F(x) = & e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1u}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{a_{\mu u}(a)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\
 (49) \quad & + \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{F(a + (x-a) f(y | a))}{y-1} e^{\omega \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy.
 \end{aligned}$$

Widzimy analogię zupełną z wzorem (27). Użyjmy teraz funkcji tworzącej  $f(u | a)$ , gdzie  $u$  opisuje okrąg, którego średnicą jest prosta zawarta pomiędzy 0 a 1, dla utworzenia gwiazdy  $\mathfrak{A}^{(a)}$ , wpisanej w gwiazdę główną stałych  $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a) \dots$ . Widzimy, że gwiazda ta jest wpisana w gwiazdę  $A^{(a)}$ , która powstaje, gdy  $u$  opisuje okrąg  $|u| = 1$ , i że zlewa się z gwiazdą  $A^{(a)}$  tylko w przypadkach szczególnych.

Wziąwszy jako kontur  $S$  okrąg  $\mathcal{C}$  o środku  $y = \frac{1}{2}$  i promieniu  $\frac{1}{2}r$  ( $r > 1$ ), otrzymujemy równość:

$$\begin{aligned}
 F\mathfrak{A}^{(a)}(x) = & e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1u}(a)}{|1|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{a_{\mu u}(a)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\
 (50) \quad & + \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{F(a + (x-a) f(y | a))}{y-1} e^{\omega \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,
 \end{aligned}$$

zachodzącą w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $\mathfrak{A}^{(a)}$ , jeżeli tylko obierzemy  $r$  dostatecznie blizkiem jedności. Sposobem, w jaki dowiedliśmy równości (35), dowodzi się też równości:

$$(51) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{F(a + (x-a) f(y | a))}{y-1} e^{\omega \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy = 0,$$



a więc równość:

$$(52) \quad \begin{aligned} F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} & \left( F(a) + \frac{\alpha_{1\mu}(\alpha)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{\mu\mu}(\alpha)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}|}, \end{aligned}$$

zachodzi w każdym obszarze wewnątrz  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ . Wyrażenie po drugiej stronie jest jednostajnie zbieżne dla wszelkiego obszaru, położonego wewnątrz gwiazdy  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ . Widzimy, że wzór ten jest bezpośredniem uogólnieniem wzoru (36) Borela.

Otrzymujemy łatwo analogiczne uogólnienie wzorów (37) i (38). Mamy:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(S)}(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-a} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} dy \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(S)}(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-a} dy \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(S)}(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} d\omega \right) dy \\ & = F(a) + (x-a)f(y|\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(S)}(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} d\omega \right) dy, \end{aligned} \right.$$

a także:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(S)}(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} d\omega \right) dy \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(0)}(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} d\omega \right) dy \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int \left[ F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a)f(y|\alpha) \right. \\ & \left. + \frac{1}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|\alpha)^2 + \dots \right] \left( \int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{x}{y}-1\right)} d\omega \right) \frac{dy}{y}. \end{aligned} \right.$$

Funkcja  $f(y|a)$  znika dla  $y=0$ , będzie (porówn. (8)):

$$(55) \quad f(y|a)^r = \frac{D^r f^r}{|\underline{r}|} y^r + \frac{D^{r+1} f^r}{|\underline{r+1}|} y^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{|\underline{r+2}|} y^{r+2} + \dots,$$

a zatem:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} f(y|a)^r \left( \int_0^w e^{-\omega} \left( \frac{\omega}{y} - 1 \right) d\omega \right) \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \left( \frac{D^r f^r}{|\underline{r}|} y^r + \frac{D^{r+1} f^r}{|\underline{r+1}|} y^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{|\underline{r+2}|} y^{r+2} + \dots \right) \\ & \times \left( \int_0^w \left( 1 + \frac{1}{|\underline{1}|} \frac{\omega u}{y} + \frac{1}{|\underline{2}|} \left( \frac{\omega u}{y} \right)^2 + \frac{1}{|\underline{3}|} \left( \frac{\omega u}{y} \right)^3 + \dots \right) e^{-\omega} d\omega \right) \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^w e^{-\omega} \left( \frac{D^r f^r}{(|\underline{r}|)^2} (\omega u)^r + \frac{D^{r+1} f^r}{(|\underline{r+1}|)^2} (\omega u)^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{(|\underline{r+2}|)^2} (\omega u)^{r+2} + \dots \right) d\omega. \end{aligned}$$

Kładąc:

$$(56) \quad f_r(\omega u|a) = \frac{D^r f^r}{(|\underline{r}|)^2} (\omega u)^r + \frac{D^{r+1} f^r}{(|\underline{r+1}|)^2} (\omega u)^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{(|\underline{r+2}|)^2} (\omega u)^{r+2} + \dots,$$

mamy:

$$(57) \quad \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} f(y|a)^r \left( \int_0^w e^{-\omega} \left( \frac{\omega}{y} - 1 \right) d\omega \right) \frac{dy}{y} = \int_0^w e^{-\omega} f_r(\omega u|a) d\omega.$$

Przeto:

$$(58) \quad \left. \begin{aligned} F(a+(x-a)f(u|a)) &= \int_0^w e^{-\omega} d\omega \cdot F(a) + \frac{\int_0^w e^{-\omega} f_1(\omega u|a) d\omega}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_0^w e^{-\omega} f_2(\omega u|a) d\omega}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{\int_0^w e^{-\omega} f_3(\omega u|a) d\omega}{|\underline{3}|} F^{(3)}(a)(x-a)^3 + \dots \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(s)}(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{-\omega} \left( \frac{\omega}{y} - 1 \right) dy. \end{aligned} \right\}$$

Jeżeli wprowadzimy:

$$(59) \quad \mathfrak{F}(x|f_1\omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega|a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega|a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots,$$

będzie:

$$(60) \quad F(a + (x-a)f(u|a)) \\ = \int_0^{\omega} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x, f, \omega u) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy.$$

Kładąc  $a=1$ , otrzymujemy  $f(y|a)=y$ ; funkcja  $\mathfrak{F}(x|f, \omega)$  staje się w tym przypadku tem, co wyżej oznaczyliśmy przez  $\mathfrak{F}(a, \omega(x-a))$  (porów. (32)), i otrzymujemy równość:

$$(61) \quad \mathfrak{F}(x|f, \omega) = \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)).$$

W terminologii A b e l a nowa wprowadzona funkcja  $f_r(\omega u|a)$  jest funkcją tworzącą funkcji określającej  $f(u|a)^r$ . Mamy więc równość:

$$(62) \quad f(u|a)^r = \int_0^{\omega} e^{-\omega} f_r(\omega u|a) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(u y|a)^r}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy$$

zasługującą na zaznaczenie.

Obierzmy teraz jako kontur  $S$  okrąg  $\mathcal{C}$  wyżej określony; kładąc  $u=1$ , otrzymamy zamiast wzorów (58) i (60) dwa następujące:

$$(63) \quad F^{\mathfrak{A}(a)}(x) = \int_0^{\omega} e^{-\omega} d\omega \cdot F(a) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_r(\omega|a) d\omega}{r} F^{(r)}(a)(x-a)^r \\ + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy,$$

$$(64) \quad F^{\mathfrak{A}(a)}(x) = \int_0^{\omega} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x|f, \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-a} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy$$

stosowalne w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $\mathfrak{A}(a)$ , jeżeli tylko promień  $r$  koła  $\mathcal{C}$  weźmiemy dość blizkim jedności.

Otrzymujemy jeszcze dwa wzory:

$$(65) \quad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = F(a) + \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\omega} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega | a) d\omega}{|\nu} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu}$$

$$(66) \quad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x | f, \omega) d\omega$$

stosowalne w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ . Wyrażenia po stronie drugiej są jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru wewnątrz gwiazdy  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ .

Zestawmy te dwa wzory (65) i (66) z poprzednim wzorem (52). Te trzy wzory stanowią razem bezpośrednie uogólnienie wzorów (36), (37) i (38). Można by otrzymać wzory (65) i (66), poddając wzór (52) temu samemu przekształceniu, jakiemu poddaliśmy wzór (27) dla otrzymania z niego wzorów (30) i (33).

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia bardzo ważne pytanie:

Gwiazda  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$  była gwiazdą zbieżności w przypadku  $\alpha = 1$ . Czy jest jeszcze gwiazdą zbieżności dla trzech wyrażeń (52), (65) i (66) w przypadku ogólnym  $0 < \alpha \leq 1$ ?

Tak jest w samej rzeczy, a dowodzenie tego jest tylko powtórzeniem dowodzenia P h r a g m é n a dla  $\alpha = 1$ . Przyjmijmy w istocie, że całka

$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega) d\omega$  jest zbieżna, t. j. że wyrażenie:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega u) d\omega = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega}{u}} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega) d\omega$$

jest zbieżna dla  $u = 1$ . Według twierdzenia P h r a g m é n a całka

$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega}{u}} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega) d\omega$  będzie jednostajnie zbieżna dla  $R\left(\frac{1}{u} - 1\right) \geq \varepsilon$ ,

gdzie  $\varepsilon$  jest wielkością dodatnią tak małą, jak chcemy, co wychodzi na to, że całka jest jednostajnie zbieżna dla każdego obszaru wewnątrz koła, opisanego przez zmienną  $u$  i mającego za średnicę wektor  $(01)$ . Całka jest więc funkcją monogeniczną i regularną zmiennej  $u$  wszędzie wewnątrz tego koła. Lecz gdy obierzemy  $|u|$  dostatecznie małym, będzie  $f(u | \alpha)$  tak blizkiem zera, jak chcemy, i otrzymamy równość:

$$F(a + (x_0 - a) f(u | \alpha)) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega u) d\omega. \quad (\text{por. (60)})$$

Wynika stąd, że gdy  $u$  jest punktem wewnątrz koła, którego średnicą jest  $(01)$ , to  $F(a + (x-a)f(u|a))$  będzie funkcją monogeniczną i regularną zmiennej  $z = (a + (x-a)f(u|a))$ , o ile punkt  $x$  będzie punktem położonym na wektorze  $(ax_0)$  pomiędzy  $u$  i  $x_0$ . A więc  $x_0$  jest albo wierzchołkiem albo punktem wewnętrznym gwiazdy  $\mathfrak{A}^{(a)}$ . Dowodzenie, zastosowane przez nas do wyrażenia (66), stosuje się i do wyrażenia (65), a także do wyrażenia (52), jeżeli posługujemy się przekształceniem analogicznym do przekształcenia użytego dla wzoru (42).

Jeżeli teraz pozwolimy wielkości  $a'$  dążyć do zera, otrzymamy następujące wyrażenia, stosowalne wszędzie wewnątrz gwiazdy  $H$ , która jest ich gwiazdą zbieżności:

$$\begin{aligned}
 (67) \quad \left\{ \begin{aligned}
 FA(x) &= \lim_{a=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_1 u(a)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_{\mu} u(a)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}|} \\
 &= F(a) + \lim_{a=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu} \\
 &= \lim_{a=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega} \delta(x|f, \omega) d\omega.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Wyrażenia, otrzymane w tym paragrafie na  $F\mathfrak{A}^{(a)}(x)$  [ $0 < a \leq 1$ ] są wszystkie zawilsze od wyrażeń w paragrafie poprzedzającym w tem znaczeniu, że są wyrażeniami granicznymi podwójnymi, wtedy gdy wyrażenia nasze w paragrafie pierwszym są wyrażeniami granicznymi pojedynczemi.

Wyrażenia na  $FA(x)$  w paragrafie pierwszym są wyrażeniami granicznymi podwójnymi, a w paragrafie niniejszym stają się wyrażeniami granicznymi potrójnymi. Wiemy już, że niepodobna przedstawić  $FA(x)$  za pomocą wyrażenia granicznego pojedynczego, jeżeli chcemy zachować dla gwiazdy  $\mathfrak{A}$  własność pozostawiania gwiazdą zbieżności we wszystkich przypadkach <sup>1)</sup>.

Wyniki tego paragrafu możemy streścić w następującem twierdzeniu:

<sup>1)</sup> E. Borel. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Addition au mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Acta math. 24.

**Twierdzenie 7b.** Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku w punkcie  $a$ , przez  $a$  wielkość dodatnią mniejszą od jedności, przez  $\mathfrak{A}^{(a)}$  gwiazdę spółśrodkową z  $A$ , wpisaną w  $A$  i utworzoną przez funkcję tworzącą  $f(u|a)$ , gdzie  $u$  opisuje okrąg koła, którego średnicą jest prosta zawarta pomiędzy zerem a jednością, który-żatem, gdy  $f(u|a)$  dobrano odpowiednio, będzie opisany na gwiazdzie  $A^{(a)}$ , otrzymanej przy pomocy tejże samej funkcji tworzącej, gdy  $u$  opisuje okrąg koła o środku  $a$  i promieniu 1. Będzie można zawsze obrać funkcję  $f(u|a)$  taką, by, gdy  $a$  jest dostatecznie małe, gwiazda  $\mathfrak{A}^{(a)}$  obejmowała w swem wnętrzu wszelki obszar położony wewnątrz  $A$ , i taką jeszcze, by dla  $a=1$  gwiazda  $\mathfrak{A}^{(a)}$  stawała się gwiazdą Borela (twierdzenie 7a).

Będzie można jeszcze obrać funkcję  $f(u|a)$  taką, by —gdy  $A$  jest gwiazdą główną stałych  $F(a), F'(a) \dots F^{(n)}(a) \dots$  poddanych warunkowi Cauchy'ego—następujące trzy wyrażenia (A), (B), (C) posiadały jedną gwiazdę zbieżności, zawsze tę samą i identyczną z gwiazdą  $\mathfrak{A}^{(a)}$ .

$$(A) \quad \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{\alpha_{1\mu}(a)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\ \left. + \frac{\alpha_{\mu\mu}(a)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}|},$$

gdzie  $\alpha_{\mu\mu}(a) \begin{matrix} \mu=1,2,\dots,n \\ n=1,2,\dots,\infty \end{matrix}$  są stałymi dodatnimi oznaczonemi, mającemi wszystkie własności podwójne  $\alpha_{\mu n}(1)=1$ ,  $\lim_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(a)=1$  i zależnemi tylko od funkcji tworzącej;

$$(B) \quad F(a) + \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu},$$

gdzie:

$$f_{\nu}(\omega|a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{D^{\mu} f^{\nu}}{(|\underline{\mu}|)^2} \omega^{\mu}, \quad D^{\mu} f^{\nu} = [D^{\mu} f(u|a)^{\nu}]_{u=0};$$

$$(C) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x|t, \omega) d\omega.$$

gdzie:

$$\delta(x|f, \omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega|a)}{|1|} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega|a)}{|2|} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots$$

Nadto równość:

$$\begin{aligned} FA(x) &= \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{|1|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\ &= F(a) + \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{|\nu|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \delta(x|f, \omega) d\omega, \end{aligned}$$

zachodzi wszędzie wewnątrz  $\mathfrak{A}(a)$ .

Wyrażenia graniczne potrójne:

$$\begin{aligned} \lim_{a=0} \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{|1|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\ \left. + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|}, \\ F(a) + \lim_{a=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{|\nu|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}, \\ \lim_{a=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega} \delta(x|f, \omega) d\omega, \end{aligned}$$

mają wszystkie gwiazdę zbieżności identyczną z  $A$ , a równość, w której po stronie lewej mamy  $FA(x)$ , po prawej zaś pierwsze, drugie lub trzecie z powyższych trzech wyrażen granicznych, zachodzi wszędzie wewnątrz  $A$ .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie oznaczonej skończoną  $\omega$ , będzie:

$$\begin{aligned}
 F_{\mathfrak{A}(\omega)}(x) &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}|} \\
 &= F_{\mathfrak{A}(\omega)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega} d\omega \cdot F(a) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega | a) d\omega}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu} \\
 &= F_{\mathfrak{A}(\omega)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega} \delta(x | f, \omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{F(a + (x-a) f(y | a))}{y-a} e^{\omega \left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,
 \end{aligned}$$

gdzie  $\mathfrak{C}$  oznacza okrąg koła o środku w punkcie  $a$  i promieniu  $\frac{1}{2} r$  ( $r > 1$ ); równość ta zachodzi, o ile  $x$  jest punktem takim, że  $a + (x-a) f(y | a)$  należy do wnętrza gwiazdy  $\mathfrak{A}(\omega)$ , gdy  $y$  opisuje okrąg  $\mathfrak{C}$ <sup>1)</sup>.

1) Prócz prac wskazanych na początku tej Noty, po ogłoszeniu Noty trzeciej ukazały się jeszcze następujące prace, odnoszące się do przedmiotu mej pracy: Le Roy, Sur les séries divergentes; rectification à une note précédente (C. R. 5. VI. 1900). Le Roy, Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor (Ann. de la Fac. des sciences de Toulouse 2. 1900, p. 322-328). E. Borel, Les séries absolument sommables, les séries et le prolongement analytique (C. R. 19. XI. 1900). E. Borel, Sur la généralisation du prolongement analytique (C. R. 21. VII. 1902). P. Painlevé, Observations sur la communication précédente (C. R. 21. VII. 1902). E. Borel, Leçons sur les séries à termes positifs. Paris 1902. Chap. VI, p. 70.



A. PRZEBORSKI,

## O CAŁKACH NIEANALITYCZNYCH

### równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

W artykule „O całkach nieanalitycznych równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego“<sup>1)</sup>, dowiodłem twierdzenia, że wszelkie równanie liniowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$A_0(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_0} + \dots + A_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = A_n(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

gdzie  $A_0, A_1, \dots, A_n$  są funkcje analityczne w pewnym obszarze, posiada w tym obszarze, oprócz całek analitycznych, i całki nieanalityczne.

W artykule niniejszym dowiodę analogicznego twierdzenia i dla równania nieliniowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$(1) \quad F(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

gdzie  $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ , przyczem  $F$  jest funkcją analityczną w pewnym obszarze ( $\epsilon$ )

Metoda, którą będę się posługiwał, jest uogólnieniem metody, podanej w poprzednim artykule.

<sup>1)</sup> Prace matematyczno-fizyczne, tom XVII, str. 123.

Zakładając, że funkcja  $\frac{\partial F}{\partial p_n}$  nie jest zerem w obszarze  $(\varepsilon)$ , znajdziemy całkę zupełną równania (1), całkując układ równań zwyczajnych

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dx_n} &= A_0(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), & \frac{dx_1}{dx_n} &= A_1(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \\ & & \frac{dx_{n-1}}{dx_n} &= A_{n-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \\ \frac{dp_1}{dx_n} &= B_1(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), & \frac{dp_2}{dx_n} &= B_2(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \\ & & \frac{dp_n}{dx_n} &= B_n(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \end{aligned}$$

gdzie:

$$A_0(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} p_i}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \quad A_k(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{\frac{\partial F}{\partial p_k}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}},$$

$$B_h(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_h} + \frac{\partial F}{\partial z} p_h}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $h = 1, 2, \dots, n$ )

Wiadomem jest, że układ równań (2) ma układ całek:

$$(3) \quad \begin{aligned} L(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) &= c, & L_1(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) &= c_1, \dots \\ & & L_{2n-1}(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) &= c_{2n-1}, \end{aligned}$$

gdzie  $c, c_1, \dots, c_{2n-1}$  są stałe dowolne, a  $L, L_1, \dots, L_{2n-1}$  funkcje analityczne w pewnym obszarze  $(\varepsilon_1)$ , zawartym w  $(\varepsilon)$ , czyniące zadość warunkowi, że wyznacznik *Jacobiego*

$$(4) \quad D = \frac{\partial(L, L_1, \dots, L_{2n-1})}{\partial(z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_n)}$$

w tym obszarze nie jest zerem.

Układem całek równań (2) będzie i układ równań

$$(5) \quad \begin{aligned} L - \omega(L_{n+1}, L_{n+2}, \dots, L_{2n-1}) &= 0, & L_1(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) &= c_1, \dots \\ & & L_{2n-1}(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) &= c_{2n-1}, \end{aligned}$$

gdzie  $\omega$  jest funkcją dowolną, ciągłą, mającą pochodne cząstkowe rzędu pierwszego względem  $L_{n+1}, L_{n+2}, \dots, L_{2n-1}$ .

Funkcję  $\omega$  wybierzemy w ten sposób, aby jacobian

$$(6) \quad \Delta := \frac{\partial (L - \omega, L_1, \dots, L_n)}{\partial (z, p_1, \dots, p_n)}$$

nie był zerem w obszarze  $(\varepsilon_1)$ .

Równocześnie skutkiem założenia (4) wyznacznik

$$(7) \quad \frac{\partial (L - \omega, L_1, \dots, L_{2n-1})}{\partial (z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_n)}$$

też nie jest zerem w obszarze  $(\varepsilon_1)$ .

Na mocy warunku (6) możemy wyznaczyć z równań

$$(8) \quad L - \omega(L_{n+1}, \dots, L_{2n-1}) = 0, \quad L_1 = c_1, \dots, L_n = c_n,$$

funkcje  $z, p_1, \dots, p_n$ , przyczem wyznaczona w ten sposób funkcja  $z$  jest całką równania (1).

Niech rozwiązania równań (8) będą:

$$(9) \quad z = P(x_1, \dots, x_n), \quad p_1 = P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n = P_n(x_1, \dots, x_n).$$

Postaramy się dowieść, że funkcje  $P, P_1, \dots, P_n$  będą funkcjami analitycznymi tylko pod warunkiem, że  $\omega$  jest funkcją analityczną.

Założmy więc, że funkcje  $P, P_1, \dots, P_n$  są funkcjami analitycznymi w pewnym obszarze  $(\varepsilon_2)$ , zawartym w  $(\varepsilon_1)$ .

Oznaczmy przez  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  funkcje analityczne, które otrzymamy, rugując za pomocą (9) z funkcji  $L, L_{n+1}, \dots, L_{2n-1}$  wielkości  $z, p_1, \dots, p_n$  tak, że

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, \dots, x_n) &\equiv L(x_1, \dots, x_n, P(x_1, \dots, x_n), P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_n(x_1, \dots, x_n)), \\ \lambda_k(x_1, \dots, x_n) &\equiv L_{n+k}(x_1, \dots, x_n, P(x_1, \dots, x_n), P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_n(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

( $k = 1, 2, \dots, n-1$ )

Z powodu, że układ (9) jest rozwiązaniem równań (8), otrzymujemy tożsamość

$$(10) \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) \equiv \omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}).$$

Na mocy warunku (4) łatwo dowieść, że układ równań

$$(11) \quad \lambda_1(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1, \quad \lambda_2(x_1, \dots, x_n) = \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = \lambda_{n-1}$$

może być rozwiązany względem  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ .

Wyznaczając więc z równań (11)  $x_1, \dots, x_{n-1}$  i oznaczając te rozwiązania przez  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}$ , znajdziemy, że są one funkcjami analitycznymi względem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ .

Podstawiając w tożsamości (10) te wartości na  $x_1, \dots, x_{n-1}$  i oznaczając przez  $\lambda^*(x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  funkcję analityczną, którą otrzymamy, podstawiając  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}$  zamiast  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  w funkcji  $\lambda$  tak, że

$$\lambda^*(x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \equiv \lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, x_n),$$

napiszemy tożsamość (10) w postaci:

$$(12) \quad \lambda^*(x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \equiv \omega(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

Nie trudno jednakże dowieść, że rugując za pomocą równań (11) z funkcji  $\lambda(x_1, \dots, x_n)$  wielkości  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , wyrugujemy też i wielkość  $x_n$ , innemi słowy dowieść, że funkcja  $\lambda^*$  nie zależy od  $x_n$ .

Istotnie łatwo widzieć, że funkcję  $\lambda^*(x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  otrzymaliśmy, rugując  $z, p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_{n-1}$  z funkcji  $L(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$  za pomocą równań (5), gdzie tylko zamiast  $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_{2n-1}$  podstawiliśmy  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ .

Lecz równania (5) są układem całek równań różniczkowych (2), zarazem i równanie

$$L = c$$

jest całą tychże równań (2); stąd wynika, że funkcje  $L, L - \omega(L_{n+1}, \dots, L_{2n-1}), L_1, \dots, L_{2n-1}$  są funkcjami zależnymi względem  $z, p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$ , a więc funkcja  $\lambda^*$  nie zależy od  $x_n$ .

W ten sposób doszliśmy do tożsamości

$$\lambda^*(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \equiv \omega(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}),$$

a że funkcja  $\lambda^*$  jest funkcją analityczną, więc i funkcja  $\omega$ , równa jej tożsamościowo, jest funkcją analityczną.

A więc założenie, że znaleziona przez nas całka równania (1)

$$z = P(x_1, \dots, x_n)$$

jest funkcją analityczną, doprowadziło nas do wniosku koniecznego, że funkcja  $\omega$  jest analityczną.

Jeżeli więc założymy, że funkcja  $\omega$  nie jest analityczną, to z równań (8) otrzymamy nieanalityczną całkę równania (1).

W ten sposób dowiedliśmy następującego twierdzenia:

Wszelkie równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$F(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

gdzie  $F$  jest funkcją analityczną w pewnym obszarze  $(\varepsilon)$ , oprócz całek analitycznych w obszarach, zawartych w  $(\varepsilon)$ , posiada zawsze całki nieanalityczne.

Za pomocą tej samej metody, którą posługiwałem się wyżej, łatwo dowieść następującego ogólniejszego twierdzenia:

Wszelki układ równań różniczkowych jednoczesnych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$F_1(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad F_2(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \dots \\ F_m(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

gdzie funkcje  $F_1, F_2, \dots, F_m$  są analitycznymi w pewnym obszarze  $(\varepsilon)$ , oprócz całek analitycznych w obszarach, zawartych w  $(\varepsilon)$ , ma zawsze całki nieanalityczne.

Charków, w kwietniu 1906 r.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

CZASOPISMA, KSIĄZKI I BROSZURY,

NADESZANE DO REDAKCYI „PRAC MATEMAT.-FIZYCZNYCH“

od października 1905 do października 1906 r.

**Amsterdam.** Proceedings of the Section of sciences von der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Vol. VI.

— Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. 14.

**Barcelona.** Memorias de la Real Academia de ciencias y artes de Barcelona 1905—1906.

**Bolonia.** Rendiconti delle sessioni della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 1903—04.

**Bruksella.** Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des sciences 1905, № 1—12.

— Annuaire de l'Académie 1906.

**Cambridge.** Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1904—1905; Transactions of the Camb. Ph. Soc. 1905—1906.

**Charkow.** Soobsczenija Charkowskaho matematiczeskaho Obszczestwa 1905—1906.

**Coimbra.** Annaes scientificos de Academia Polytechnica do Porto publicados sob a direcção de F. Gomes Teixeira Vol. I; 1, 2, 3.

**Genewa - Paryż.** L'Enseignement mathématique, VI et VII Année.

**Helsingfors.** Acta Societatis Fennicae. Tomus XXXII. 1906.

— Ofversigt af Finska Vetenskaps - Societatens Förhandlingar XLVII. 1904—1905.

— Bidrag till Kännadom af Finlands Natur och Foltk 1905.

- Kazaň.** Izwiestja fiziko-matiematiczeskaho obszczestwa pri Imperatorskom Kazanskom Uniwiersytietie 1905.
- Kopenhaga.** Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1905—1906.
- Kraków.** Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności 1905.
- Sprawozdania z posiedzeń Akad. Um. 1905—1906.
  - Bulletin International de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles 1905—1906.
- Lima.** Revista de Ciencias 1905—1906.
- Lwów.** Die Chronik d. Szewczenko-Gesellschaft der Wissenschaften 1905—06.
- Lipsk.** Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von Dr. R. Mehmke und Dr. C. Runge 1905—1906, B. G. Teubner.
- Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von Gustaf Eneström in Stockholm 6 und 7 Bd. B. G. Teubner.
- Londyn.** Proceedings of the London Mathematical Society 1905—1906.
- Monachium.** Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften zu München 1905—1906.
- Medyolan.** Annali di matematica. Serie III. Tomo XII, XIII.
- New-York.** Bulletin of the American Mathematical Society Vol. XII.
- Transactions of the American Mathematical Society Vol. VI.
- Palermo.** Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1905—1906.
- Annuario del Circolo matematico 1906.
- Paryż p. Genewa-Paryż.**
- Praga.** Rosprávy České Akademie Cisaře Františka Josefa etc., Třída II. 1905—6.
- Bulletin international de l'Académie des sciences de l'Empereur François Joseph I, Sciences mathématiques et naturelles 1905—1906.
  - Věstník Kral.-České společnosti nauk, Třída math.-přir. 1905.
  - Věstník České Akademie, etc. 1905.
  - Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. Rocznik XXXV.
  - Živa, Časopis přírodnický 1905—1906.
- Rzym.** Atti della Reale Accademia dei Lincei Vol. XIV—XV.
- Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle scienze. Serie terza. Tomo XIII.
- Springfield.** The American Monthly 1905—1906.
- Stockholm.** Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar 1905.
- Tokyo.** Tokyo Sugaku Buturigakkwai Hokoku 1905—1906.



**Turyn.** Atti della Reale Accademia di Torino Vol. XXXIX.

— Revista de Matematica tomo VIII. 1905—1906.

**Upsala & Stockholm.** Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik utgifvet af  
k. Svenske Vetenskapsakademie i Stockholm, Bd. 2, Heft 3—4.

**Warszawa.** Przegląd Techniczny, tygodnik poświęcony sprawom techniki  
i przemysłu, 1905—1906.

**Wiedeń.** Monatshefte für Mathematik und Physik 1905—1906.

**Württemberg.** Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen, im Auftrage  
des mathematisch - naturwissenschaftlichen Vereins herausgegeben von  
Dr. E. Wölffing (2). 1905—1906.

**Zaragoza.** Revista trimestrial de matematicas publicada por Don José Riu  
y Casas Ano V, VI.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

- V. Schlegel.** NAUKA ROZCIĄGŁOŚCI GRASSMANNA. Przyczynek do historii matematyki w ostatnich 50 latach. Przekład S. Dicksteina. 8-ka, str. 51. 1896. Cena kop. 80.
- E. Pascal.** RACHUNEK NIESKOŃCZONOŚCIOWY, przekład S. Dicksteina:  
Tom I. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY, 1896, 8-ka, str. 265. Cena rs. 2.  
Tom II. RACHUNEK CAŁKOWY, 1896, 8-ka str. 240. Cena rs. 2.  
Tom III. RACHUNEK WARYACYJNY I RACHUNEK RÓŻNIC SKOŃCZONYCH 1897. 8-ka str. 247. Cena rs. 2.
- G. Peano.** ZARYS RACHUNKU GEOMETRYCZNEGO, przekład S. Dicksteina. Warszawa, 1897, 8<sup>o</sup>, str. 28. Cena kop. 40.
- St. Kramsztyk.** FIZYKA BEZ PRZYZRĄDÓW. Pierwsze zasady Fizyki w prostych doświadczeniach dla dzieci i młodzieży:  
Książeczka I-a z 34 drzeworytami w tekście, 8-ka, str. 104. Cena kop. 60.  
Książeczka II-a z 61 drzeworytami w tekście, 8-ka, str. 112. Cena kop. 60.
- S. Dickstein.** POCZĄTKOWA NAUKA GEOMETRII W ZADANIACH. Wydanie III. znacznie powiększone. 1892. 16-ka, str. 152. W kartonie cena kop. 50.
- St. Kramsztyk.** SZKICE PRZYRODNICZE Z DZIEDZINY FIZYKI, GEOFIZYKI I ASTRONOMII. Warszawa. 1893, 8-ka większa. Str. VI+347. Cena rs. 3.
- M. Ernst.** ASTRONOMIA GWIAZD STAŁYCH. 1896. 8-ka; str. X, 351. Cena rs. 3.
- F. Klein.** ODCZYTY O MATEMATYCE, miane w Evanston, spisane przez A. Ziweta, przełożył S. Dickstein. Warszawa 1899. 8<sup>o</sup>, str. 2, 109. Cena rs. 1.
- W. Fr. Meyer.** O STANIE OBECNYM TEORII NIEZMIENNIKÓW, przełożył S. Dickstein. Warszawa 1899. 8<sup>o</sup> więk., str. II, 138. Cena rs. 1.
- E. Pascal.** REPERTORIUM MATEMATYKI WYŻSZEJ, przełożył S. Dickstein.  
T. I. Analiza. 8<sup>o</sup>, str. 556. Cena rs. 4.  
T. II. Geometria, str. X, 728. Cena rubli 5.
- E. Picard.** O ROZWOJU NIEKTÓRYCH TEORII ZASADNICZYCH ANALIZY MATEMATYCZNEJ W WIEKU XIX, przełożył S. Dickstein 1900. 8, str. 59. Cena 60 kop.
- Giovanni Schiaparelli.** FORMY ORGANICZNE PRZYRODY A FORMY GEOMETRYCZNE CZYSTE. STUDIUM PORÓWNAWCZE. Przełożył Jan Dal Trozko. 1902. 8<sup>o</sup>, str. 89. Cena kop. 75.
- KORRESPONDENCA Kochańskiego i Leibniza WEDŁUG ODPISÓW Dr. L. Bodeмана, wydana przez S. Dicksteina. Warszawa, 1902, 8-a większa, str. 85. Cena kop. 60.**
- E. Pascal.** GRUPY CIĄGŁE PRZEKSZTAŁCEN. (Część ogólna teorii), przełożył S. Dickstein. Warszawa, 1903, 8-o, str. XII—296. Cena rubli 2 kop. 40.
- E. Pascal.** RÉSUMÉ DE QUELQUES-UNS DE MES RÉCENTS TRAVAUX SUR LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE Warszawa, 1903, 8-ka większa. Kop 30.
- J. Sochocki.** ZASADY TEORII FUNKCJI ELIPTYCZNYCH. Warszawa, 1903. 8-ka więk. str. 50. Cena kop. 50.
- A. W. Witkowski.** TABLICE LOGARYTMOWE I GONIOMETRYCZNE CZTEROCYFROWE. Warszawa, 1903. Cena kop. 25.
- A. W. Witkowski.** TABLICE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE. Warszawa, 1904, 8-o str. 158. Cena rb. 1 kop. 50.
- K. Weierstrass.** O PRZEDSTAWIALNOŚCI ANALITYCZNEJ TAK ZWANYCH DOWOLNYCH FUNKCJI ARGUMENTÓW RZECZYWISTYCH. Warszawa, 1904, 8-o, str. 36. Cena kop. 40.
- P. Duhem.** EWOLUCJA MECHANIKI. Warszawa 1904, 8-o, str. II, 223. Cena rs 1 kop. 50.
- C. Segre.** GEOMETRYA DZISIEJSZA I JEJ ZWIĄZKI Z ANALIZĄ. Warszawa 1905. 8<sup>o</sup>, str. 15. Cena kop. 15.
- S. Dickstein.** O NAJNOWSZYCH BADAANIACH NAD PODSTAWAMI MATEMATYKI. Warszawa 1905, 8<sup>o</sup>, str. 23. Cena kop. 20.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)



**PRACE**  
**MATEMATYCZNO-FIZYCZNE**

**WYDAWANE**

przy współudziale

**WŁ. GOSIEWSKIEGO, WŁ. NATANSONA, A. WITKOWSKIEGO i K. ŻORAWSKIEGO**

**PRZEZ**

**S. DICKSTEINA.**

**TOM XVIII.**

**WARSZAWA.**

**SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.**

**Druk Józefa Sikorskiego, Warecka 14.**

**1907.**

WYDAWNICTWA  
**Redakcyi „PRAC MATEMATYCZNO - FIZYCZNYCH“**  
i Redakcyi „WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH“.  
(Warszawa, Marszałkowska 117).

Do nabycia we wszystkich księgarniach:

**PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE:**

- Tom I*, 8-ka większa, str. VI, 223 i 4 nl. 1888; z rysunkami. Cena rs. 2.  
*Tomu I-go zeszyt 1*; 8-ka większa, str. 244, 1890; z rysunkami. Cena rs. 2.  
*Tomu II-go zeszyt 2*; 8-ka większa, str. X i 286. 1890. Cena rs. 2 kop 40.  
*Tomu III*, 8-ka większa, str. 243. 1892. Z rysunkami. Cena rs. 2.  
*Tom IV*, 8-ka większa, z rysunkami, str. 234. 1893. Cena rs. 2.  
*Tom V*, 8-ka większa, z rysunkami, str. 239. 1894. Cena rs. 2.  
*Tom VI*, 8-ka większa z rysunkami, str. 255. 1895. Cena rs. 2.  
*Tom VII*, 8-ka większa z rysunkami, str. 260. 1896. Cena rs. 2.  
*Tom VIII*, 8-ka większa str. 247, 1897. Cena rs. 2.  
*Tom IX*, 8-ka większa str. 280. 1898. Cena rs. 2.  
*Tom X*, 8-ka większa. str. 306. 1899—1900. Cena rs. 2 kop. 40.  
*Tom XI*, 8-ka większa, str. 262. 1900. Cena rs. 2 kop. 40.  
*Tom XII*, 8-ka większa str 300. 1901. Cena rubli 3.  
*Tom XIII*, 8-ka większa str. 400. 1902. Cena rs. 4.  
*Tom XIV*, 8-ka większa str. 300. 1903. Cena rs. 3.  
*Tom XV*, 8-ka większa, str. 205. 1904. Cena rb. 2 kop. 40.  
*Tom XVI*, 8-ka większa, str. 270. Cena rb. 3 kop. 60.  
*Tom XVII*, 8-ka większa, str. 262. Cena rb. 3 kop. 60.  
*Tom XVIII*, 8-ka większa. str. 240. Cena rs. 3.  
*Tom XIX* (w druku).

**WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE:**

- T. I. 1897. 8<sup>o</sup>, str. 217. Cena rubli 3.  
T. II. 1898. 8<sup>o</sup>, str. 275.           "           "  
T. III. 1899. 8<sup>o</sup>, str. 308.           "           "  
T. IV. 1900. 8<sup>o</sup>, str. 278.           "           "  
T. V. 1901. 8<sup>o</sup>, str. 287.           "           "  
T. VI. 1902. 8. str. 365.           "           "  
T. VII. 1903. 8<sup>o</sup>, str. 326.           "           "  
T. VIII. 1904. 8<sup>o</sup>, str. 342.           "           "  
T. IX. 1905. 8<sup>o</sup>, str. 251.           "           "  
T. X. 1906. 8<sup>o</sup>, str. 239; 23.           "           "  
T. XI. 1907 (w druku).

- S. Dickstein.** KANONY LOGARYTMÓW Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 30, z 6 tablicami. 1890. Cena rs. 1.  
**S. Dickstein.** TABLICA LOGARYTMÓW Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 15, z 1 tablicą. 1890. (Wydanie mniejsze). Cena kop. 20.  
**Wł. Natanson.** WSTĘP DO FIZYKI TEORETYCZNEJ. 8-ka, str. XII i 458; z drzeworytami w tekście. 1890. Cena rs. 4; w oprawie angielskiej rs. 4 kop. 50.  
**S. Dickstein.** POJĘCIA I METODY MATEMATYKI. Tom I. Część pierwsza. Teorya działań. 1891. 8-ka, str. VI i 268. Cena rs. 2 kop. 50. (wyczerpane)  
**S. Dickstein.** MATEMATYKA I RZECZYWISTOŚĆ. 1893. 8-ka, str. 40. 1893. Cena kop. 30.  
**GEOMETRYA MARCINA KRÓLA**, pierwszy raz z rękopisu z XV-go wieku, wydana przez L. Birkenmajera. 1895. 8-ka, str. IX, 82. Cena rs. 1.  
**V. Schlegel.** NAUKA ROZCIĄGŁOŚCI GRASSMANNA. Przyczynek do historii matematyki w ostatnich 50 latach. Przekład S. Dicksteina 8-ka, str. 51. 1896. Cena kop. 80.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

**PRACE**  
**MATEMATYCZNO - FIZYCZNE**

**WYDAWANE**

przy współdziale

**WŁ. GOSIEWSKIEGO, WŁ. NATANSONA, A. WITKOWSKIEGO i K. ŻORAWSKIEGO**

**PRZEZ**

**S. DICKSTEINA.**

**TOM XVIII.**

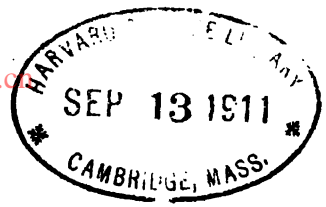
**WARSZAWA.**

**SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.**

**Druk Józefa Sikorskiego, Warecka 14.**

**1907.**

www.libtool.com



*Gift of  
Prof. H. Townsend*



W. SIERPIŃSKI.

O SUMOWANIU SZEREGU  $\sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n)$ , GDZIE  $\tau(n)$  OZNACZA LICZBĘ ROZKŁADÓW LICZBY  $n$  NA SUMĘ KWADRATÓW DWÓCH LICZB CAŁKOWITYCH. <sup>1)</sup>

(SUR LA SOMMATION DE LA SÉRIE  $\sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n)$ , ON  $\tau(n)$  SIGNIFIE LE NOMBRE DE COMPOSITIONS DU NOMBRE  $n$  EN UNE SOMME DE DEUX CARRÉS DES NOMBRES ENTIERS).

W S T Ę P.

Przedmiotem badań naszych będzie obliczanie sumy podwójnej

$$S = \sum \sum f(m^2 + n^2),$$

rozciągniętej na obszar wartości całkowitych zmiennych  $m$  i  $n$ , wyznaczony przez nierówności

$$a < m^2 + n^2 \leq b,$$

co do funkcji  $f(n)$  zakładając będziemy, iż jest ona ciągła i posiada pochodne w przedziale  $(a, b)$ .

Wprowadzając funkcję liczbową  $\tau(k)$ , przedstawiającą liczbę rozkładów liczby  $k$  na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, z łatwością przekształcimy daną sumę podwójną  $S$  na zwykłą

$$(1) \quad S = \sum \sum f(m^2 + n^2) = \sum_{k>a}^{k \leq b} \tau(k) f(k).$$

<sup>1)</sup> Rozprawa doktorska.  
Prace mat.-fizycz., t. XVIII.

W celu obliczenia wartości przybliżonej sumy  $S$ , wychodzimy ze wzoru Woronoja:

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u) \vartheta(u) du \quad \dots(2)$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[ \varrho_\lambda(b) f^{(\lambda)}(b) - \varrho_\lambda(a) f^{(\lambda)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \varrho_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du.$$

We wzorze tym  $\vartheta(u)$  jest funkcją dowolnie obraną, byleby ciągłą w przedziale  $(a, b)$ , funkcje zaś  $\varrho_k(x)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  określone są przez równości

$$\varrho_k(x) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}$$

$$- \left[ \int_0^x \vartheta(u) \frac{(x-u)^k}{k!} du + A_0 \frac{x^k}{k!} + A_1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + A_k \right], \quad \dots(3)$$

gdzie  $A_0, A_1, \dots$  są współczynniki, których obiór pozostaje dowolnym.

Wyznaczenie funkcji  $\vartheta(u)$  oraz współczynników  $A_0, A_1, \dots$  w ten sposób, iżby rząd funkcji  $\varrho_k(x)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  był możliwie niski, będzie najbliższym naszym zadaniem.

Ponieważ, na mocy ogólnego wzoru sumacyjnego (2) oraz równości (3) kwestyą zasadniczą jest obliczenie sum postaci

$$\varphi_k(x) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

więc przedewszystkiem zajmujemy się wyznaczeniem przybliżonego wyrażenia analitycznego na funkcję liczbową  $\varphi_k(x)$ .

Przedstawimy funkcję  $\varphi_k(x)$  w postaci sumy podwójnej

$$\varphi_k(x) = \sum \sum \frac{(x-\mu^2-\nu^2)^k}{k!}, \quad 0 < \mu^2 + \nu^2 \leq x,$$

wykonywamy przy pomocy wzoru Eulera-Maclaurina sumowanie najprzód względem zmiennej  $\mu$ , potem zaś względem zmiennej  $\nu$ . W ten sposób dochodzimy do następującego ważnego wniosku: funkcja liczbowa  $\varphi_k(x)$

może być przedstawiona przybliżenie przez funkcję całkowitą  $\pi \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!}$  z błędem  $\varrho_k(x)$ , którego rząd nie przewyższa rzędu wielkości  $x^{\frac{k+1}{2}}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$

Na tej podstawie znajdujemy w ogólnym wzorze sumacyjnym (2):

$$\mathfrak{F}(u) = \pi, \quad A_0 = -1 \quad \text{oraz} \quad A_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

W ten sposób otrzymujemy wzór:

$$\sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n) \Rightarrow \pi \int_a^b f(u) du \quad \dots(4)$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[ \varrho_\lambda(b) f^\lambda(b) - \varrho_\lambda(a) f^\lambda(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \varrho_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du,$$

który następnie stosujemy i badamy przy rozmaitych założeniach o funkcji  $f(n)$ .

Znalezioną wartość przybliżoną na funkcję  $\varphi_k(x)$  posługujemy się dla podania nader prostego dowodu pewnego twierdzenia o zależności między liczbą rozkładów liczby całkowitej na sumę czterech kwadratów oraz sumą dzielników.

W celu bardziej szczegółowego zbadania własności funkcji liczbowej  $\tau(n)$ , tudzież sum postaci  $\sum \tau(n) f(n)$ , posługujemy się znanym twierdzeniem J a c o b i e g o, według którego liczba rozkładów każdej liczby całkowitej dodatniej na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych równa się czterokrotnemu nadmiarowi liczby tych jej dzielników, które mają postać  $4k+1$ , nad liczbę jej dzielników postaci  $4k+3$ . Opierając się na tem twierdzeniu, ułożyliśmy tablicę wartości funkcji  $\tau(n)$  dla  $n \leq 1000$ , którą podajemy w końcu pracy. Przy pomocy twierdzenia J a c o b i e g o wyprowadzamy również pewien wzór ogólny na przekształcenie sumy (1), będący uogólnieniem znanej tożsamości L i o u v i l l e'a:

$$E\sqrt{x} + E\sqrt{x-1^2} + E\sqrt{x-2^2} + \dots = E\frac{x}{1} - E\frac{x}{3} + E\frac{x}{5} - \dots$$

Wzór ten stosujemy do obliczenia sumy  $\sum_{n>0}^{n \leq x} \frac{\tau(n)}{n}$  i znajdujemy dla niej

wyrażenie przybliżone  $\pi \lg x + K$ , prawdziwe do rzędu  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , gdzie  $K$  oznacza pewną stałą. Stałą tę wyrażamy przez szereg nieskończony, a również.

przedstawiamy ją pod postacią całki oznaczonej. Posługując się wyprowadzonymi wzorami, obliczamy stałą  $K$  z dokładnością do 10-go znaku dziesiętnego.

Wprowadzamy dalej funkcję analityczną  $F(s)$ , określoną przez szereg nieskończony

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \text{ dla } R(s) > 1.$$

Rozszerzamy następnie analityczne określenie funkcji  $F(s)$  na całą płaszczyznę zmiennej zespolonej i wykazujemy, iż funkcja ta posiada jeden tylko punkt osobliwy  $s=1$ , biegun pierwszego rzędu, którego pozostałość równa się liczbie  $\pi$ .

Dowodzimy następnie ważnej własności funkcji  $F(s)$ , polegającej na tem, iż iloczyn

$$\frac{\Gamma(s) F(s)}{\pi^s}$$

jest funkcją, której wartość się nie zmienia przy zamianie  $s$  na  $1-s$ .

Zwracamy się następnie do badania przy pomocy wyprowadzonych wzorów sumacyjnych pewnych własności funkcji  $\tau(n)$  dla liczb  $n$ , zawartych w jakimkolwiek postępie arytmetycznym oraz dla liczb kwadratowych. Co do tych ostatnich, dowodzimy twierdzenia: „Średnia liczba rozkładów liczb kwadratowych na sumę dwóch kwadratów wzrasta wraz z rozkładaną liczbą, w stosunku prostym do jej logarytmu”. Opierając się na tem twierdzeniu, znajdujemy wartość średnią kwadratu funkcji  $\tau(n)$ , skąd wreszcie wyprowadzamy pewne ciekawe wnioski o charakterze biegu zajmującej nas funkcji liczbowej.

## ROZDZIAŁ I.

Punktem wyjścia dla rozważań naszych w tym rozdziale będzie pewien wzór ogólny na przekształcenie sumy  $\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$ , gdzie  $\tau(n)$  oznacza jakąkolwiek funkcję liczbową,  $f(n)$  zaś—dowolną funkcję ciągłą i mającą

pochodne w przedziale  $(a, b)$ . Wzór ten został podany przez **Woronoi**<sup>1)</sup> i ma postać:

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u) \vartheta(u) du \quad \dots(1)$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[ \varrho_\lambda(b) f^{(\lambda)}(b) - \varrho_\lambda(a) f^{(\lambda)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \varrho_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du,$$

gdzie

$$\varrho_k(x) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} - \left[ \int_0^x \vartheta(u) \frac{(x-u)^k}{k!} du \right. \\ \left. + A \frac{x^k}{k!} + A_1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + A_k \right] \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(Patrz Wstęp).

Pojmując dalej przez  $\tau(n)$  liczbę rozkładów liczby  $n$  na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, postaramy się obrać funkcję dowolną  $\vartheta(u)$ , oraz dowolne współczynniki stałe  $A_k$ , w sposób dla nas najdogodniejszy.

W tym celu zajmiemy się przedewszystkiem obliczeniem funkcji sumacyjnych

$$\varphi_k(x) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}.$$

Posłuży nam do tego oczywista tożsamość.

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n) f(n) = \sum_{\substack{v < \sqrt{x} \\ v > -\sqrt{x}}} \sum_{\substack{u < \sqrt{x-v^2} \\ u > -\sqrt{x-v^2}}} f(\mu^2 + v^2);$$

<sup>1)</sup> Wzór ten był po raz pierwszy ogłoszony drukiem w książce „Godiecznyj Akt Warsz. Uniw. 30 Awgusta 1904 g.“ (patrz „Otyw o konkursom soeznienii na tjemu: O summirowanii rjada  $\sum \tau(n) f(n) \dots$  pod dewizom  $\ll$  Summa  $\gg$ “. Wzór podany jest tam bez dowodu. Z dowodzeniem znajduje się on w XXI-ym tomie „Annales de l'École Normale“, w zeszyte listopadowym z 1904-go roku: **Voronoi** „Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries“, str. 462.

kładąc

$$f(u) = \frac{(x-u)^k}{k!},$$

znajdujemy:

$$\varphi_k(x) = -\frac{x^k}{x!} + \sum_{\nu > -\sqrt{x}}^{\nu < \sqrt{x}} \sum_{\mu > -\sqrt{x-\nu^2}}^{\mu < \sqrt{x-\nu^2}} \frac{(x-\mu^2-\nu^2)^k}{k!}.$$

Oznaczmy przez skrócenie  $x-\nu^2=s$  i zajmiemy się obliczeniem sumy

$$\sum_{\mu > -\sqrt{s}}^{\mu < \sqrt{s}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!} = \sum_{\mu > -\sqrt{s}}^{\mu < \sqrt{s}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!},$$

używając w tym celu wzoru Eulera-Maclaurina, uogólnionego przez Sonina.<sup>1)</sup> Wzór ten otrzymać można z łatwością z ogólnego wzoru Wronoja, kładąc w nim  $\tau(n) = 1$  i wyznaczając  $\vartheta(u)$  oraz  $A$ , tak, iżby  $\varrho_r(x)$  było funkcją peryodyczną, o peryodzie równym jedności. Warunki te doprowadzają nas do założenia  $\vartheta(u) = 1$ ; dla wyznaczenia zaś współczynników  $A$ , otrzymujemy wzór zwrotny:

$$\frac{1}{(\lambda+1)!} + \frac{A_0}{\lambda!} + \frac{A_1}{(\lambda-1)!} + \dots + \frac{A_{\lambda-1}}{1!} = 0; \quad \lambda=1, 2, 3, \dots \quad (*)$$

Można wykazać, iż wszystkie  $A_{2\lambda}$  są równe zeru dla  $\lambda > 0$ , zaś  $A_0 = -\frac{1}{2}$ . Zamiast współczynników  $A_\lambda$  wprowadzane są zwykle liczby Bernoulli'ego na mocy związków

$$A_{2\lambda-1} = \frac{(-1)^\lambda B_\lambda}{(2\lambda)!}; \quad (\lambda=1, 2, \dots)$$

Funkcje  $\varrho_r(x)$ , odpowiadające wyżej poczynionym założeniom, będziemy oznaczali nadal przez  $r_\lambda(x)$  i wzór Sonina pisać będziemy w postaci:

$$(2) \dots \sum_{\substack{n < b \\ n > a}} f(n) = \int_a^b f(u) du + \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[ r_\lambda(b) f^{(\lambda)}(b) - r_\lambda(a) f^{(\lambda)}(a) \right] \\ + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du,$$

<sup>1)</sup> Sonin: „O pewnej całce oznaczonej, zawierającej funkcję liczbową  $[x]^n$  (po rosyjsku). (Warsz. Wiadomości Uniwersyteckie za rok 1885, Nr. 3).

gdzie

$$r_k(x) = - \left[ \frac{(x-Ex)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^k A_\lambda \frac{(x-Ex)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right] \quad (k=0, 1, \dots) \quad \dots(2a)$$

a współczynniki  $A$  mogą być wyznaczone ze wzoru (\*)

Dla obliczenia sumy

$$\sum_{\substack{\mu < \sqrt{z} \\ \mu > -\sqrt{z}}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!}$$

winniśmy we wzorze (2) założyć:

$$f(u) = \frac{(z-u^2)^k}{k!},$$

oraz przyjąć:

$$a = -\sqrt{z}, \quad b = \sqrt{z}.$$

Mamy:

$$\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{(s-u^2)^k}{k!} du = \frac{2^{2k+1} k! s^k \sqrt{z}}{(2k+1)!},$$

$$f^{(\lambda)}(\sqrt{z}) = f^{(\lambda)}(-\sqrt{z}) = 0, \quad \text{dla } \lambda = 0, 1, \dots, k-1,$$

oraz

$$f^{(k)}(\sqrt{z}) = (-1)^k 2^k \sqrt{z}^k, \quad f^{(k)}(-\sqrt{z}) = 2^k \sqrt{z}^k,$$

skąd na mocy wzoru (2), kładąc w nim  $m=k+1$ :

$$\dots(3) \quad \sum_{\substack{\mu < \sqrt{z} \\ \mu > -\sqrt{z}}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!} = \frac{2^{2k+1} k! z^k \sqrt{z}}{(2k+1)!} + 2^k \sqrt{z}^k \left[ r_k(\sqrt{z}) - (-1)^k r_k(-\sqrt{z}) \right] \\ + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} r_k(u) \frac{d^{k+1}(z-u^2)^k}{du^{k+1}} du$$

(7)

W całce dopełniającej podstawimy  $u = \sqrt{z}t$ , co da nam

$$\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} r_k(u) \frac{d^{k+1}(z-u^2)^k}{du^{k+1}} du = \sqrt{z}^k \int_{-1}^1 r_k(\sqrt{z}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^k}{dt^{k+1}} dt.$$

Z określenia funkcji peryodycznej  $r_k(u)$  wynika, iż jest ona funkcją ograniczoną. Oznaczmy przez  $A(k)$  dokładną górną granicę wartości bezwzględnych funkcji  $r_k(u)$ ; przez  $B(k)$  — największą wartość bezwzględną funkcji ciągłej  $\frac{d^{k+1}(1-t^2)^k}{dt^{k+1}}$  w przedziale  $(-1, 1)$ ;  $B(k)$  będzie oczywiście liczbą oznaczoną, skończoną przy skończonym  $k$ .

W całce

$$\int_{-1}^1 r_k(\sqrt{z}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^k}{dt^{k+1}} dt$$

funkcja podcałkowa nie przewyższa bezwzględnie w granicach całkowania liczby  $A(k) \cdot B(k)$ , niezależnej od  $z$  i  $t$ , skończonej przy skończonym  $k$ ; stosując twierdzenie o wartości średniej, powiemy, iż sama całka, co do swej wartości bezwzględnej, nie przewyższa  $2A(k)B(k)$ .

Oznaczając

$$2 A(k) \left[ 2^k + \frac{B(k)}{k!} \right] = M(k),$$

ostatecznie ze wzoru (3) otrzymamy wzór:

$$\sum_{\substack{\mu < \sqrt{z} \\ \mu > -\sqrt{z}}} \frac{(z-\mu^2)^k}{k!} = \frac{2^{2k+1} \cdot k! \cdot z^k \sqrt{z}}{(2k+1)!} + \xi \cdot M(k) \cdot \sqrt{z}^k. \quad \dots(3a)$$

gdzie  $|\xi| < 1$ , oraz  $M(k)$  jest funkcją jedynie liczby całkowitej  $k$ , skończoną przy skończonym  $k$ .

We wzorze (3a) winniśmy założyć  $z = x - \nu^2$  i otrzymane w ten sposób wyrażenie sumować względem  $\nu$  w granicach:  $-\sqrt{x} < \nu \leq \sqrt{x}$ .<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Opuściliśmy tu dla wygody wyraz, który w razie całkowitego  $\sqrt{x}$ , odpowiadałby wartości  $\nu = -\sqrt{x}$ , co nam wolno, gdyż wyraz ten jest zerem dla  $k > 0$  oraz jednością dla  $k = 0$ , a więc na rezultat przybliżony nie wpływa.



Dwa składniki prawej strony równości (3a) dadzą nam dwie różne sumy. Suma, odpowiadająca drugiemu składnikowi, jest

$$M(k) \sum_{\substack{\nu < \sqrt{x} \\ \nu > -\sqrt{x}}} \xi \cdot \sqrt{x - \nu^2}^{2k},$$

gdzie  $\xi$ , jako zależne od  $\nu$ , nie może być wyprowadzone przed znak sumy. Zadawając się przybliżonym rezultatem i biorąc pod uwagę, iż

$$|\xi| < 1; \quad \sqrt{x - \nu^2}^{2k} \leq \sqrt{x}^{2k},$$

oraz iż liczba składników w sumie względem  $\nu$  jest nie większa, niż  $2\sqrt{x}$ , możemy napisać:

$$\sum_{\substack{\nu < \sqrt{x} \\ \nu > -\sqrt{x}}} \xi \cdot \sqrt{x - \nu^2}^{2k} = 2\xi^k \sqrt{x}^{k+1},$$

gdzie  $|\xi^k| < 1$  przy wszelkiem  $x$  i  $k$ .

Suma, odpowiadająca pierwszemu składnikowi prawej strony wzoru (3a), ma postać:

$$2^{2k+1} \cdot k! \sum_{\substack{\nu < \sqrt{x} \\ \nu > -\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x - \nu^2}^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Do obliczenia jej użyjemy znów wzoru (2), kładąc w nim

$$f(u) = \frac{\sqrt{x - u^2}^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad a = -\sqrt{x}; \quad b = \sqrt{x}; \quad m = k+1.$$

Zważywszy, iż

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x - u^2}^{2k+1}}{(2k+1)!} du = \frac{\pi x^{k+1}}{2^{2k+1} \cdot k! (k+1)!}.$$

$$f^{(\lambda)}(\sqrt{x}) = f^{(\lambda)}(-\sqrt{x}) = 0 \quad \text{dla } \lambda = 0, 1, 2, \dots, k,$$

otrzymamy:

$$\sum_{\substack{r < \sqrt{x} \\ r > -\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x-r}^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\pi x^{k+1}}{2^{2k+1} \cdot k! \cdot (k+1)!}$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} r_k(u) \frac{d^{k+1}(x-u^2)^{k+\frac{1}{2}}}{du^{k+1}} du.$$

Przez podstawienie  $u = \sqrt{x}t$ , nadamy całce dopełniającej postać:

$$\sqrt{x}^{k+1} \int_{-1}^1 r_k(\sqrt{x}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}{dt^{k+1}} dt.$$

Zważywszy dalej, iż  $|r_k(u)| \leq A(k)$ , i oznaczając

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{d^{k+1}(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}{dt^{k+1}} \right| dt = C(k)$$

(a łatwo się przekonać, iż jest to liczba skończona), przez zastosowanie twierdzenia o wartości średniej, otrzymamy:

$$\int_{-1}^1 r_k(\sqrt{x}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}{dt^{k+1}} dt = \eta \cdot A(k) \cdot C(k),$$

gdzie  $|\eta| < 1$ .

Oznaczając

$$\frac{A(k) \cdot C(k)}{(2k+1)!} = M_1(k),$$

ostatecznie otrzymamy:

$$\sum_{\substack{r < \sqrt{x} \\ r > -\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x-r}^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\pi x^{k+1}}{2^{2k+1} \cdot k! \cdot (k+1)!} + \eta' \cdot M_1(k) \cdot \sqrt{x}^{k+1}. \quad \dots (4)$$

Dochodzimy więc do równości:

$$\varphi_k(x) = \frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!} + \vartheta \cdot K(k) \cdot \sqrt{x}^{k+1},$$

gdzie

$$K(k) = 2 M(k) + 2^{2k+1} \cdot k! M_1(k),$$

oraz  $|\vartheta| < 1$ .

Oznaczając, wedle przyjętego zwyczaju, przez  $O(x^l)$  funkcję, której stosunek do  $x^l$  dla  $x$ , większych od pewnej stałej granicy, pozostaje zawsze bezwzględnie mniejszym od pewnej liczby stałej, możemy jeszcze napisać:

$$\varphi_k(x) = \frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!} + O(x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{2}}), \quad \dots(5)$$

co wysławiamy w sposób następujący:

Funkcja całkowita

$$\frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!}$$

przedstawia funkcję liczbową  $\varphi_k(x)$  z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji  $x^{\frac{k+1}{2}}$ .

Wobec takiej własności funkcji liczbowej  $\varphi_k(x)$ , najdogodniej będzie przyjąć we wzorze **W o r o n o j a**

$$\vartheta(u) = \pi, \quad A_0 = -1, \quad \text{zaś } A_i = 0 \text{ dla } i > 0.$$

W ten sposób otrzymujemy wzór:

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \pi \int_a^b f(u) du \quad \dots(6)$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[ \varrho_\lambda(b) f^{(\lambda)}(b) - \varrho_\lambda(a) f^{(\lambda)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \varrho_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du,$$

przyczem będzie  $\varrho_k(x) = O(x^{\frac{k+1}{2}})$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

Jednym z najprostszycch wniosków z otrzymanego wzoru jest nader ciekawa równość przybliżona

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n) \approx \pi \int_a^b f(u) du.$$

Rząd błędu tej przybliżonej równości może być w każdym danym przypadku określony na podstawie wzoru (6) i podanej wyżej własności funkcji  $\varrho_k(x)$

W obliczaniu wartości przybliżonej funkcji liczebnej  $\varphi_k(x)$  przy  $k > 0$ , można by było pójść też inną drogą, wskazaną przez W o r o n o j a na trzecim międzynarodowym zjeździe matematyków w Heidelbergu (w sierpniu 1904 roku)<sup>1)</sup>.

Należałoby wyjść w tym celu z wzoru

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \pi \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(a) f(a) \\ + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b f(x) \eta(\pi^2 nx) dx; \quad ^2)$$

gdzie  $\eta(x)$  jest funkcją cylindryczną, określoną przez szereg nieskończony

$$\eta(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^\lambda}{\lambda! \lambda!}$$

stosując znane rozkłady funkcji cylindrycznych na szeregi asymptotyczne.<sup>3)</sup>

Możnaby w ten sposób uowodnić, iż funkcja

$$\frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!}$$

przedstawia funkcję liczbową

$$\sum_{n=0}^{n \leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} \quad (k > 0)$$

z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji  $x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}}$ ; rezultat więc byłby nieco dokładniejszy od otrzymanego przez nas, lubo dowodzenie nie byłoby już tak elementarne.

<sup>1)</sup> Patrz: Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses, V o r o n o j a: „Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles  $\sum f_1 pm^2 + 2qmn + rn^2$ , où  $pm^2 + 2qmn + rn^2$  est une forme positive à coefficients entiers.

<sup>2)</sup> Patrz tamże, strona 245, wzór (8) (przy  $\Delta = 1$ )

<sup>3)</sup> Patrz: S t j e s, Recherches sur quelques séries semi-convergentes (Annales de l'École Normale, 1886).

Przy  $k=0$  na podstawie wzoru (5) otrzymamy:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) = \pi x + O(\sqrt{x}),$$

do czego doszedł był już Dirichlet drogą geometryczną.

Chcąc obliczyć dokładniej sumę  $\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n)$ , należałoby użyć innej metody, również przez W o r o n o j a podanej.<sup>1)</sup> Okazałoby się, iż błąd równości przybliżonej

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) \neq \pi x$$

jest rzędu nie wyższego od rzędu funkcji  $\sqrt[3]{x}$ .

W rozdziale niniejszym prowadziliśmy umyślnie dosyć drobiazgowo wszystkie rozważania, odnoszące się do obliczenia rzędu funkcji  $\varrho_2(x)$ ; dalej, o ile zajdzie potrzeba wyznaczenia rzędu jakiej funkcji, w szczególności wdawać się nie będziemy.

## ROZDZIAŁ II.

Wyprowadzonych w rozdziale poprzedzającym wzorów na funkcje  $\varphi_k(x)$  użyjemy obecnie do obliczenia pomocniczych funkcji sumacyjnych, służących do przybliżonego obliczania sumy wielokrotnej

$$(1) \dots \quad S = \sum f(m^2 + n^2 + p^2 + q^2),$$

dla obszaru wartości całkowitych zmiennych  $m, n, p$  i  $q$ , wyznaczonego przez nierówności

$$a < m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \leq b.$$

<sup>1)</sup> Zob. moją pracę: „O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcji asymptotycznych“ (Prace mat.-fizycz., t. XVII).

Sumę wielokrotną  $S$  z łatwością przekształcimy na podwójną

$$(2) \dots S = \sum \sum \tau(\mu) \tau(\nu) f(\mu + \nu),$$

gdzie obszar zmienności liczb całkowitych  $\mu$  i  $\nu$  jest wyznaczony przez nierówności

$$a < \mu + \nu \leq b,$$

lub też na sumę zwykłą

$$(3) \dots S = \sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau_4(n) f(n),$$

jeśli wprowadzimy funkcję  $\tau_4(n)$ , wyrażającą liczbę rozkładów liczby  $n$  na sumę kwadratów czterech liczb całkowitych.

Kładąc  $f(n) = \frac{(x-n)^k}{k!}$ , na mocy (3) i (2) znajdziemy z łatwością

$$\varphi_{k4}(x) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau_4(n) \frac{(x-n)^k}{k!} = \sum_{\substack{\mu < x \\ \mu > 0}} \tau(\mu) \varphi_k(x-\mu),$$

a ponieważ na mocy wzoru (5) rozdz. I z łatwością wnioskujemy:

$$\varphi_k(x-\mu) = \pi \frac{(x-\mu)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(x-\mu)^k}{k!} + O(x^{\frac{k+1}{2}}),$$

$$\sum_{\substack{\mu < x \\ \mu > 0}} \tau(\mu) = O(x),$$

więc otrzymamy:

$$\varphi_{k4}(x) = \pi \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) + O(x^{\frac{k+3}{2}}),$$

czyli, stosując znowu wzór (5), I:

$$\varphi_{k4}(x) = \frac{\pi^2 x^{k+2}}{(k+2)!} - \frac{2\pi x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{x^k}{k!} + \varrho_{k4}(x),$$

przyczem rząd błędu  $\varrho_{k4}(x)$  nie przewyższa rzędu funkcji  $x^{\frac{k+3}{2}}$ ,  $k=0, 1, \dots$

A więc w ogólnym wzorze **W o r o n o j a** (1), I powinniśmy dla naszej funkcji  $\tau_4(n)$  przyjąć

$$\mathfrak{D}(u) = \pi^2 u - 2\pi, \quad A_0 = 1, \quad A_t = 0, \quad t = 1, 2, \dots$$

Kładąc w wyprowadzonym na  $\varphi_{t_4}(x)$  wzorze  $k = 0$ , otrzymamy na

$$\varphi_{04}(x) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau_4(n)$$

wartość przybliżoną

$$\pi^2 \frac{x^2}{2}$$

z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji  $x\sqrt{x}$ . Otrzymany rezultat pozwoli nam obliczyć wartość asymptotyczną wyrażenia

$$\frac{\tau_4(n+1) + \tau_4(n+2) + \dots + \tau_4(n+m)}{m},$$

które, według **G a u s s a**<sup>1)</sup>, przedstawia wartość średnią funkcji liczbowej  $\tau_4(n)$  w miejscu  $n$ , jeżeli przypuścimy, iż  $n, m$  oraz stosunek  $\frac{n}{m}$  są liczby bardzo wielkie. Mianowicie będziemy mieli:

$$M \tau_4(n) \approx \pi^2 n$$

i napisaną równość asymptotyczną należy rozumieć w ten sposób, iż stosunek obu jej stron dąży do jedności.

Oznaczmy teraz przez  $\sigma(n)$  sumę wszystkich dzielników liczby  $n$  (wliczając 1 i  $n$ ), zaś przez  $\sigma'(n)$  — sumę wszystkich tych dzielników liczby  $n$ , które nie są wielokrotnościami czterech.

Będziemy mieli:

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \sigma(n) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} n E \frac{x}{n} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \left( E \frac{x}{n} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} E \frac{x}{n} = \frac{\pi^2 x^2}{12} + O(x \lg x),$$

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \sigma'(n) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} n E \frac{n}{x} - 4 \sum_{\substack{n < \frac{x}{4} \\ n > 0}} n E \frac{x}{4n} = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \sigma(n) - 4 \sum_{\substack{n < \frac{x}{4} \\ n > 0}} \sigma(n) = \frac{\pi^2 x^2}{16} + O(x \lg x),$$

<sup>1)</sup> Disquisitiones Arithm. art. 301 - 303.

skąd znajdziemy wyrażenie asymptotyczne na wartość średnią funkcji  $\sigma'(n)$ :

$$M\sigma'(n) \approx \frac{1}{8} \pi^2 n.$$

Zestawiając otrzymany rezultat z wyrażeniem na  $M\tau_4(n)$ , wyżej wprowadzonym, dochodzimy do równości asymptotycznej

$$M\tau_4(n) = M8\sigma'(n),$$

którą tak możemy wysłowić: „Liczba rozkładów liczby całkowitej na sumę czterech kwadratów równa się średnio ośmiokrotnej sumie tych jej dzielników, które nie są podzielne przez cztery. Zaznaczyć wypada, iż w samej rzeczy funkcje  $\tau_4(n)$  i  $8\sigma'(n)$  są sobie równe nie tylko średnio, ale dokładnie, dla wszelkiej wartości na  $n$ , co możnaby wyprowadzić jako wniosek z pewnej tożsamości, otrzymanej przez J a c o b i e'g o z teorii funkcji eliptycznych.<sup>1)</sup>

Podobnie możnaby badać funkcję liczbową  $\tau_8(n)$ , przedstawiającą liczbę rozkładów liczby  $n$  na sumę kwadratów ośmiu liczb całkowitych. Znaleźlibyśmy równość asymptotyczną

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tau_8(n) = 16 \sum_{n>0}^{n \leq \infty} n^3 E \frac{x}{n} - 32 \sum_{n>0}^{n \leq \infty} n^3 E \frac{x}{2n} + 256 \sum_{n>0}^{n \leq \infty} n^3 E \frac{x}{4n},$$

którą tak wysłowić można:

„Średnio wartość funkcji  $\tau_8(n)$  równa się pomnożonej przez 16 różnicy bezwzględnej pomiędzy sumą sześciątów wszystkich nieparzystych a sumą sześciątów wszystkich dzielników liczby  $n$ “. I tu także zaznaczyć wypada, iż twierdzenie to jest prawdziwe nie tylko średnio, ale i dokładnie, co zostało dowiedzione (w przypadku nieparzystego  $n$ ) już przez E i s e n s t e i n a.

### ROZDZIAŁ III.

Wprowadzimy teraz pewien nowy wzór ogólny na przekształcenie sumy

$$S = \sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n),$$

Dowód arytmetyczny odnośnego twierdzenia w Journ. f. reine u. ang. Math. 12, p. 167. Zob. też Lejeune-Darichlet, Werke 2, p. 201 (Sur l'équation  $t^2+u^2+v^2+w^2=4m$ ).



opierając się na twierdzeniu J a c o b i e g o, według którego liczba rozkładów jakiejkolwiek liczby całkowitej dodatniej na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych równa się czterokrotnemu nadmiarowi liczby tych jej dzielników, które mają formę  $4k+1$ , nad liczbą jej dzielników formy  $4k+3$ .<sup>1)</sup>

Jeżeli pojmywać będziemy przez  $j(k)$  liczbę  $(-1)^{\frac{k-1}{2}}$  w razie nieparzystego  $k$ , oraz liczbę 0 w razie parzystego lub nie całkowitego  $k$ , to twierdzenie J a c o b i e g o będziemy mogli wyrazić w postaci:

$$\tau(n) = 4 \sum_{\mu=1}^{\infty} j\left(\frac{n}{\mu}\right), \quad \dots(1)$$

skąd na sumę  $S$  znajdziemy wzór

$$S = 4 \sum \sum j\left(\frac{n}{\mu}\right) f(n),$$

gdzie obszar zmiennych całkowitych  $n$  i  $\mu$  jest wyznaczony przez nierówności:

$$a < n \leq b, \quad \mu > 0.$$

Zważywszy, iż  $j\left(\frac{n}{\mu}\right)$  jest różne od zera jedynie w przypadku, kiedy  $\frac{n}{\mu}$  jest liczbą całkowitą nieparzystą  $2\nu+1$ , oraz że w tym razie  $j(2\nu+1) = (-1)^\nu$ , i przechodząc następnie od zmiennej sumowania  $n$  do zmiennej  $\nu$ , znajdziemy:

$$S = 4 \sum \sum (-1)^\nu f([2\nu+1]\mu),$$

gdzie obszar sumowania względem zmiennych całkowitych  $\mu$  i  $\nu$  jest wyznaczony przez nierówności

$$a < (2\nu+1)\mu \leq b, \quad \mu > 0,$$

które, na mocy warunków  $b > a \geq 0$ , mogą być zastąpione przez nierówności

$$\frac{a}{2\nu+1} < \mu \leq \frac{b}{2\nu+1}.$$

<sup>1)</sup> Crelle's Journal Bd. 12, p 167.

Uskuteczniając sumowanie względem  $\mu$ , znajdziemy:

$$S = 4 \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \sum_{\substack{\mu < \frac{b}{2\nu+1} \\ \mu > \frac{a}{2\nu+1}}} f([2\nu+1]\mu).$$

Aby suma wewnętrzna (względem  $\mu$ ) była różna od zera,  $\nu$  powinno być koniecznie  $\geq 0$  oraz  $\leq \frac{b-1}{2}$ , a więc, oznaczając przez  $A$  liczbę dowolną  $\geq \frac{b-1}{2}$ , będziemy mogli napisać:

$$S = 4 \sum_{\substack{\nu < A \\ \nu > 0}} (-1)^{\nu} \sum_{\substack{\mu < \frac{b}{2\nu+1} \\ \mu > \frac{a}{2\nu+1}}} f([2\nu+1]\mu) \quad (b > a > 0) \quad \dots (2)$$

Jest to wzór na przekształcenie sumy  $S$ , o który nam chodziło.

Kładąc, w przypadku szczególnym,  $f(n) = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = x$ , otrzymamy na sumę

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n) = \varphi_0(x)$$

wzór

$$\frac{1}{4} \varphi_0(x) = E \frac{x}{1} - E \frac{x}{3} + E \frac{x}{5} - \dots$$

Lecz  $\varphi_0(x)$  można uważać jako liczbę wszystkich możliwych układów liczb całkowitych  $m, n$ , spełniających nierówność

$$0 < m^2 + n^2 \leq x,$$

(patrz Wstęp wzór (1)), skąd znów z łatwością otrzymamy:

$$\frac{1}{4} \varphi_0(x) = E\sqrt{x} + E\sqrt{x-1^2} + E\sqrt{x-2^2} + \dots$$

Porównywając ze sobą oba otrzymane wzory, dostaniemy następującą nader ciekawą tożsamość Liouville'a: <sup>1)</sup>

$$E\sqrt{x} + E\sqrt{x-1^2} + E\sqrt{x-2^2} + \dots = E \frac{x}{1} - E \frac{x}{3} + E \frac{x}{5} - \dots$$

<sup>1)</sup> Liouville. Journ. des Math. 1860 p. 288 (bez dowodu).

Założmy obecnie we wzorze ogólnym (2):

$$a = 0, \quad b = x, \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

i wyprowadźmy  $2\nu+1$  w mianowniku przed znak sumy wewnętrznej; otrzymamy:

$$\sum_{n>0}^{\mu < s} \frac{\tau(n)}{n} = 4 \sum_{\nu=0}^{\nu < \mu} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \sum_{\mu>0}^{\mu < \frac{n}{2\nu+1}} \frac{1}{\mu}. \quad \dots(3)$$

Stosując do sumy

$$\sum_{\mu>0}^{\mu < s} \frac{1}{\mu}$$

wzór (2) rozdziału I-go (przy  $m=1$ ), otrzymamy:

$$\sum_{\mu>0}^{\mu < s} \frac{1}{\mu} = 1 + \int_1^s \frac{du}{u} + \frac{r_0(s)}{s} - \frac{r_0(1)}{1} + \int_1^s \frac{r_0(u)}{u^2} du,$$

lub, oznaczając

$$1 - \frac{r_0(1)}{1} + \int_1^\infty \frac{r_0(u)}{u^2} du = C$$

i wprowadzając w całce

$$\int_1^\infty \frac{r_0(u)}{u^2} du$$

nową zmienną  $t$  z równania  $u=ts$ :

$$\sum_{\mu>0}^{\mu < s} \frac{1}{\mu} = \lg s + C + \frac{r_0(s)}{s} - \frac{1}{s} \int_1^\infty \frac{r_0(ts)}{t^2} dt. \quad \dots(4)$$

Kładąc w otrzymanym wzorze  $s = \frac{x}{2\nu+1}$  i biorąc pod uwagę wzór (3), dostaniemy:

$$(5) \dots \sum_{n>0}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n} = 4(\lg x + C) \sum_{\nu>0}^{\nu<A} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} - 4 \sum_{\nu>0}^{\nu<A} \frac{(-1)^\nu \lg(2\nu+1)}{2\nu+1} \\ + \frac{4}{x} \sum_{\nu>0}^{\nu<A} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{x}{2\nu+1} \right) - \frac{4}{x} \sum_{\nu>0}^{\nu<A} (-1)^\nu \int_1^\infty r_0 \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right) \frac{dt}{t^2}.$$

Ostatnią z sum, stojących po prawej stronie, przedstawimy w postaci

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \sum_{\nu>0}^{\nu<A} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Sumę, stojącą pod znakiem całki, rozłożymy na dwie:

$$\sum_{\nu>0}^{\nu < \frac{\sqrt{tx}}{2}} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right) + \sum_{\nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}^{\nu < A} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Pierwsza suma co do wartości bezwzględnej oczywiście nie przenosi liczby  $\frac{\sqrt{tx}}{4} + \frac{1}{2}$ , gdyż liczba składników nie jest większa, niż  $\frac{\sqrt{tx}}{2} + 1$ , zaś wartość bezwzględna każdego z nich nie przewyższa  $\frac{1}{2}$ .

Przejdźmy do drugiej sumy.

Niech  $k_1$  oznacza największą, zaś  $k_m$  — najmniejszą z liczb całkowitych  $k$ , spełniających warunki

$$\frac{tx}{\sqrt{tx}+1} > k \geq \frac{tx}{2A+1};$$

liczba  $m$  wszystkich takich wartości całkowitych na  $k$  nie może oczywiście być większa, niż  $\sqrt{tx}$ , jakkolwiek wielką liczbą byłoby  $A$ .

Niech liczby  $n_i$  będą wyznaczone z równań

$$\frac{tx}{2n_i+1} = k_i = k_1 - i + 1.$$

Na mocy warunków dla  $k_i$ , liczby  $n_i$  będą spełniały warunki

$$\frac{\sqrt{tx}}{2} < n_i \leq A,$$

oraz będą wzrastały przy wzrastaniu wskaźnika  $i$ .

Sumę

$$\sum_{\substack{\nu < A \\ \nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}} (-1)^\nu r_\nu \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right)$$

możemy przeto rozłożyć na szereg sum

$$\sum_{\substack{\nu < A \\ \nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}} = \sum_{\substack{\nu < n_1 \\ \nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}} + \sum_{\substack{\nu < n_2 \\ \nu > n_1}} + \dots + \sum_{\substack{\nu < n_{i+1} \\ \nu > n_i}} + \dots + \sum_{\substack{\nu < A \\ \nu > n_m}}. \quad \dots(6)$$

Rozważmy sumę

$$\sum_{\substack{\nu < n_{i+1} \\ \nu > n_i}} (-1)^\nu r_\nu \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Oznaczając przez  $n_{i+\frac{1}{2}}$  liczbę, wyznaczoną z równania

$$\frac{tx}{2n_{i+\frac{1}{2}}+1} = k_i - \frac{1}{2},$$

i zważywszy, iż na mocy warunków

$$\frac{tx}{2n_i+1} = k_i \text{ oraz } \frac{tx}{2n_{i+1}+1} = k_{i+1} = k_i - 1$$

będzie

$$n_i < n_{i+\frac{1}{2}} < n_{i+1},$$

możemy rozpatrywaną sumę rozbić na dwie:

$$\sum_{\substack{\nu < n_{i+\frac{1}{2}} \\ \nu > n_i}} (-1)^\nu r_\nu \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right) + \sum_{\substack{\nu < n_{i+1} \\ \nu > n_{i+\frac{1}{2}}} } (-1)^\nu r_\nu \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Dla pierwszej sumy:

$$n_i < \nu \leq n_{i+\frac{1}{2}},$$

skąd

$$k_i > \frac{tx}{2\nu+1} \geq k_i - \frac{1}{2},$$

gdzie  $k_i$  jest liczbą całkowitą.

Ponieważ

$$r_0(u) = Eu - u + \frac{1}{2}$$

(zob. wzór (2a) Rozdz. I), więc dla pierwszej sumy wszystkie  $r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right)$  są  $\leq 0$ , a wartość ich bezwzględna przy wzrastaniu  $\nu$  maleje. Wnosimy stąd, iż moduł pierwszej sumy nie przewyższa modułu pierwszego jej składnika, więc jest  $\leq \frac{1}{2}$ . Rozumując analogicznie co do drugiej sumy, dla której wszystkie  $r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right)$  są  $> 0$  i wzrastają razem z  $\nu$ , znajdziemy również, iż moduł jej jest  $\leq \frac{1}{2}$ .

Mamy zatem:

$$\left| \sum_{\substack{\nu < n_{i+\frac{1}{2}} \\ \nu > n_i}} (-1)^\nu r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right) \right| \leq 1.$$

Na mocy tożsamości (6), która w prawej stronie zawiera nie więcej, niż  $\sqrt{tx}+1$  składników, napiszemy więc:

$$\left| \sum_{\substack{\nu < 1 \\ \nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}} (-1)^\nu r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right) \right| \leq \sqrt{tx} + 1,$$

a biorąc pod uwagę to, cośmy rzekli wyżej o sumie  $\sum_{\nu > 0}^{\nu < \frac{\sqrt{tx}}{2}}$ , ostatecznie wnosimy:

$$(7) \dots \left| \sum_{\nu > 0}^{\nu < A} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right) \right| \leq \frac{5}{4} \sqrt{tx} + \frac{3}{2},$$

jakkolwiek wielkie byłoby  $A$ .

Zakładając  $x > 1$ , będziemy mogli napisać:

$$\left| \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \sum_{\nu > 0}^{\nu < A} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right) \right| \leq \sqrt{tx} \cdot \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \left( \frac{5}{4} \sqrt{t} + \frac{3}{2} \right),$$

czyli

$$\leq I \cdot \sqrt{x},$$

gdzie  $I$  oznacza pewną liczbę stałą.

Mamy więc:

$$\frac{1}{x} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \sum_{\nu > 0}^{\nu < A} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{tx}{2\nu+1} \right) = \frac{\xi}{\sqrt{x}} \cdot I$$

gdzie

$$|\xi| \leq 1.$$

Następnie nierówność (7) przy  $t = 1$  da nam:

$$\sum_{\nu > 0}^{\nu < A} (-1)^\nu r_0 \left( \frac{x}{2\nu+1} \right) = \eta \cdot \left( \frac{5}{4} \sqrt{x} + \frac{3}{2} \right), \quad |\eta| < 1.$$

a więc wzór (5) możemy teraz napisać w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{n > 0}^{\nu < A} \frac{\tau(n)}{n} &= 4(\lg x + C) \sum_{\nu > 0}^{\nu < A} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \\ &- 4 \sum_{\nu > 0}^{\nu < A} (-1)^\nu \frac{\lg(2\nu+1)}{2\nu+1} + \frac{\Phi \cdot R}{\sqrt{x}}, \end{aligned} \quad \dots(8)$$

gdzie  $|\Phi| < 1$  oraz  $R$  oznacza pewną skończoną liczbę stałą.

Przejdźmy teraz do granicy przy  $A = \infty$ .

Sumy

$$\sum_{\nu > 0}^{x < A} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{\nu > 0}^{x < A} (-1)^\nu \frac{\lg(2\nu+1)}{2\nu+1}$$

przy nieograniczonym wzrastaniu  $A$  oczywiście dążą do pewnych oznaczonych granic (jako szeregi o składnikach malejących, kolejno dodatnich i ujemnych); pierwsza z wymienionych sum dąży do granicy  $\frac{\pi}{4}$ , granicę drugiej nazwijmy przez  $H$ . A więc, kładąc we wzorze (8)  $A = \infty$ , otrzymamy:

$$\sum_{n > 0}^{n < x} \frac{\tau(n)}{n} = \pi(\lg x + C) - 4H + \frac{\vartheta_0 \cdot R}{\sqrt{x}}, \quad |\vartheta_0| < 1,$$

Wzór ten możemy jeszcze napisać w postaci:

$$\sum_{n > 0}^{n < x} \frac{\tau(n)}{n} - \pi \lg x = \pi C - 4H + \frac{\vartheta_0 \cdot R}{\sqrt{x}},$$

skąd, przechodząc do granicy przy  $x = \infty$ , otrzymamy:

$$(9) \dots \quad K = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{n > 0}^{n < x} \frac{\tau(n)}{n} - \pi \lg x \right) = \pi C - 4H.$$

#### OBLICZANIE STAŁEJ $K$ .

Na podstawie wyprowadzonego przed chwilą wzoru obliczanie stałej  $K$  sprowadzić się daje do obliczenia dwu stałych:  $C$  i  $H$ .

Dla pierwszej z nich na mocy wzoru (4) z łatwością otrzymamy

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{n > 0}^{n < x} \frac{1}{n} - \lg x \right);$$

jest to więc stała E u l e r a = 0,577215664902.

W celu obliczenia stałej

$$H = \frac{\lg 1}{1} - \frac{\lg 3}{3} + \frac{\lg 5}{5} - \dots$$



wyjdziemy ze wzoru

$$\sum_{\substack{n < b \\ n > a}} (-1)^n f(2n+1)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-4)^\lambda \left\{ \left[ r_\lambda \left( \frac{b}{2} \right) - r_\lambda \left( \frac{b+1}{2} \right) \right] f^{(\lambda)}(2b+1) - \left[ r_\lambda \left( \frac{a}{2} \right) - r_\lambda \left( \frac{a+1}{2} \right) \right] f^{(\lambda)}(2a+1) \right\}$$

(10)...

$$+ (-4)^m \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ r_{m-1}(u) - r_{m-1} \left( u + \frac{1}{2} \right) \right] f^{(m)}(4u+1) du,$$

który z łatwością otrzymać można ze wzoru (2) rozdziału I, stosując ten ostatni z osobna do każdej z sum

$$\sum_{\substack{\nu < \frac{b}{2} \\ \nu > \frac{a}{2}}} f(4\nu+1), \text{ oraz } \sum_{\substack{\nu < \frac{b+1}{2} \\ \nu > \frac{a+1}{2}}} f(4\nu+1).$$

Wzór (10) przybierze postać prostszą, jeżeli przejdziemy do granicy przy  $b = \infty$ , zakładając, iż

$$\lim_{b \rightarrow \infty} f^{(\lambda)}(x) = 0 \text{ dla } \lambda = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Załóżmy, iż  $m$  jest liczbą parzystą  $= 2p$ . Można się przekonać, iż różnica funkcji peryodycznych

$$r_{2p-1}(u) - r_{2p-1} \left( u + \frac{1}{2} \right)$$

osiąga przy  $u=0$  największej swej wartości bezwzględnej, równej

$$\frac{2^{2p} - 1}{2^{2p-1}} \frac{B_p}{(2p)!},$$

gdzie  $B_p$  jest liczbą Bernoulli'ego.

Jeżeli więc dla  $u > 2a + 1$  funkcja  $f^{(2p)}(u)$  zachowuje znak stały, można będzie założyć:

$$-4)^{2p} \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} \left[ r_{2p-1}(u) - r_{2p-1}\left(u + \frac{1}{2}\right) \right] f^{(2p)}(4u+1) du = \vartheta \cdot 2^{2p-1} \cdot (2^{2p}-1) \frac{B_p}{(2p)!} f^{(2p-1)}(2a+1),$$

gdzie

$$|\vartheta| < 1.$$

Przypuśćmy dalej, iż  $a$  jest liczbą całkowitą parzystą. Można wykazać, iż

$$r_0(0) - r_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

tudzież

$$r_{2k-1}(0) - r_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \cdot \frac{B_k}{(2k)!},$$

oraz

$$r_{2k}(0) - r_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ dla } k > 0.$$

A więc, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(\lambda)}(x) = 0 \text{ dla } \lambda = 0, 1, 2, \dots, 2p-1,$$

jeżeli nadto funkcja  $f^{(2p)}(u)$  dla  $u > 2a + 1$  zachowuje znak stały, zaś  $a$  oznacza liczbę parzystą, to mamy wzór:

$$\sum_{\substack{n < \infty \\ n > a}} (-1)^n f(2n+1) = -\frac{1}{2} f(2a+1) + \sum_{k=1}^p (-1)^k \cdot 2^{2k-1} \cdot (2^{2k}-1) \cdot \frac{B_k}{(2k)!} f^{(2k-1)}(2a+1) \quad \dots(11) + \vartheta \cdot 2^{2p-1} \cdot (2^{2p}-1) \cdot \frac{B_p}{(2p)!} f^{(2p-1)}(2a+1),$$

gdzie

$$|\vartheta| < 1.$$

Zauważymy, iż prawa strona wzoru (11) przedstawiać będzie najczęściej szereg rozbieżny o wyrazach kolejno dodatnich i ujemnych; wyraz dopełniający jest tu bezwzględnie mniejszy od ostatniego wyrazu sumy względem  $k$ : będziemy tu zatem mieli typowy szereg asymptotyczny pierwszego gatunku. W celu znajdowania przybliżonych wartości funkcji, przedstawionych przez takie szeregi, można je bez skrupułu obliczać tak daleko, dopóki zdają się zbiegać.<sup>1)</sup>

W obchodzącym nas przypadku winniśmy założyć

$$f(n) = \frac{\lg n}{n},$$

a więc będziemy mieli

$$f^{(k)}(u) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{u^{k+1}} \left( \lg u - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{k} \right),$$

zatem  $\lim_{u \rightarrow \infty} f^{(k)}(u)$  będzie zerem przy wszelkiem skończonym  $k$ .

Co zaś do stałości znaku funkcji  $f^{(2p)}(u)$ , to skoro już obierzemy sobie liczbę  $p$ , warunek ten będzie spełniony dla dostatecznie wielkich wartości  $u$ . Wszystkie zatem warunki, wymagane dla wzoru (11), mogą być przy stosownym doborze liczby  $a$  spełnione.

Dla obliczenia stałej  $H$  należy obrać liczby  $p$  i  $a$  stosownie do żądanej dokładności, kierując się wygodą przy obliczaniu, przyczem należy mieć na względzie, iż sumę

$$\sum_{n=1}^a \frac{(-1)^n \lg(2n+1)}{2n+1}$$

trzeba będzie wyliczyć bezpośrednio.

Na stałą  $H$  otrzymujemy wartość:

$$H = -0,192901316797,$$

ze wzoru zaś (9) obliczymy:

$$K = 2,5849817596.$$

<sup>1)</sup> O szeregach asymptotycznych zob. obszerniej u Borela: *Leçons sur les séries divergentes*. Paris 1901. Rozdział I.

Można też z łatwością otrzymać na stałą  $K$  wzory w postaci całki oznaczonej. Zauważmy w tym celu, iż liczbę  $-H$  uważać można jako wartość przy  $s=1$  pochodnej względem  $s$  szeregu nieskończonego

$$\frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \dots,$$

który, używając znanego wzoru

$$\frac{\Gamma'(s)}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-ns} x^{s-1} dx,$$

możemy przedstawić jako

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-s} \cdot x^{s-1} dx}{1 + e^{-2x}},$$

skąd znajdziemy:

$$-H = \frac{\pi}{4} C + \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \lg x}{1 + e^{-2x}} dx;$$

stałą zaś  $C = -\Gamma'(1)$  możemy wyrazić przez który ze znanych wzorów całkowych.

#### ROZDZIAŁ IV.

W rozdziale niniejszym zajmować się będziemy funkcją  $F(s)$ , określoną przez szereg nieskończony:

$$(1) \dots \quad F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \quad R(s) > 1.$$

Kładąc we wzorze (2) rozdziału poprzedzającego

$$f(n) = \frac{1}{n^s}; \quad a = 0, \quad b = \infty,$$

z łatwością otrzymamy:

$$(2) \dots \quad F(s) = 4\zeta(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^s},$$

oznaczając przez  $\zeta(s)$  znaną funkcję Riemanna

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Dla  $\varrho > 0$  mamy rozwinięcia według wzrastających potęg wielkości  $\varrho$ :

$$\zeta(1+\varrho) = \frac{1}{\varrho} + C + \dots$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{1+\varrho}} = \frac{\pi}{4} - H\varrho + \dots,$$

skąd

$$F(1+\varrho) = \frac{\pi}{\varrho} + (\pi C - 4H) + \dots,$$

a więc:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[ F(1+\varrho) - \frac{\pi}{\varrho} \right] = K,$$

gdzie  $K$  oznacza znaną nam z rozdziału poprzedzającego granicę

$$K = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \frac{\tau(n)}{n} - \pi \lg x \right].$$

Możnaby też znaleźć ogólniejszą własność współczynników rozwinięcia

$$F(1+\varrho) = \frac{\pi}{\varrho} + K + \frac{K_1}{1!} \varrho + \frac{K_2}{2!} \varrho^2 + \dots,$$

mianowicie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{\lg^h n}{n} - \pi \frac{\lg^{h+1} x}{h+1} \right) = (-1)^h K_h, \quad (h=1, 2, \dots)$$

W tym celu zważmy, iż odpowiednie zastosowanie wzoru (6) rozdziału I, daje

$$F(1+\varrho) = \frac{\pi}{\varrho} + \pi + (1+\varrho) \int_1^{\infty} \frac{\varrho_0(u)}{u^{2+\varrho}} du,$$

skąd dla  $h > 0$

$$K_h = (-1)^h \int_1^{\infty} \frac{\varrho_0(u)}{u^2} \left[ \lg^h u - h \lg^{h-1} u \right] du$$

i porównajmy otrzymane wyrażenie z granicą, do której dąży przy nieograniczonym wzrastaniu  $x$  całka dopełniająca we wzorze

$$\sum_{n>0}^{\infty} \tau(n) \frac{\lg^h n}{n} - \pi \frac{\lg^{h+1} x}{h+1} = \frac{\varrho_0(x) \cdot \lg^h x}{x} + \int_1^x \frac{\varrho_0(u)}{u^2} \left[ \lg^h u - h \lg^{h-1} u \right] du$$

gdzie pierwszy wyraz prawej strony, na mocy własności funkcji  $\varrho_0(x)$  (Rozdz. I), przy  $x = \infty$  zmierza do zera.

Wzór (1) określa funkcję  $F(s)$  tylko dla wartości zmiennej  $s$ , dla których część rzeczywista  $R(s)$  jest większą od jedności. Postaramy się obecnie uogólnić funkcję  $F(s)$  na całą płaszczyznę zmiennej zespolonej.

W tym celu wystarczy wyjść ze wzoru

$$F(s) = 4 \zeta(s) f(s), \quad \dots(2a)$$

gdzie

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

(patrz wzór 2) i użyć znanych uogólnień dla funkcji  $\zeta(s)$  i  $f(s)$ , podanych przez R i e m a n n a.<sup>1)</sup>

W ten sposób możnaby z łatwością okazać, iż funkcja  $F(s)$  posiada jeden tylko punkt osobliwy  $s = 1$ , biegun rzędu pierwszego, którego pozostałość równa się liczbie  $\pi$ .

Funkcja  $F(s)$  posiada następującą własność charakterystyczną: iloczyn

$$\frac{\Gamma(s) F(s)}{\pi^s}$$

<sup>1)</sup> Zob. o tem np. u B a c h m a n n a: *Analyt. Zahlentheorie*. 1894, str. 340.

nie zmienia swej wartości przy zamianie  $s$  na  $1-s$ .

Aby to udowodnić, oprzemy się na własności funkcji  $\zeta(s)$ :

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{s\pi}{2} \cdot \Gamma(s) \zeta(s),^1)$$

podanej przez R i e m a n n a, oraz analogicznej własności funkcji  $f(s)$ :

$$f(1-s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \sin \frac{s\pi}{2} \cdot \Gamma(s) f(s),$$

znalezionej przez S c h l o e m i l c h a.

Mnożąc przez siebie odpowiednimi stronami obie napisane równości i zwracając uwagę na tożsamość (2a), otrzymamy:

$$F(1-s) = \frac{\sin s\pi \cdot \Gamma(s) \cdot \Gamma(s)}{\pi^{2s}} F(s),$$

a ponieważ, na mocy znanej własności funkcji  $\Gamma$  jest:

$$\sin s\pi \cdot \Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)},$$

przeto możemy jeszcze napisać:

$$\frac{\Gamma(1-s) F(1-s)}{\pi^{1-s}} = \frac{\Gamma(s) F(s)}{\pi^s},$$

o co właśnie chodziło.

Rozwiążmy teraz następujące ciekawe zagadnienie: zbudujmy funkcję całkowitą  $G(x)$ , która by dla wszystkich całkowitych dodatnich wartości  $n$  spełniła warunek

$$G(n) = \tau(n).$$

Taką funkcją, jak łatwo się o tem przekonać, będzie np. funkcya

$$G(x) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \tau(n)}{x^2 - n^2}.$$

<sup>1)</sup> Tamże, str. 339, wzór 62.

Możnaby wykazać, iż jest to funkcya całkowita, parzysta

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{2n},$$

której współczynniki wyrażają się przy pomocy funkcji  $F(s)$ :

$$A_n = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu+1} \frac{2^{2\mu+1} \cdot \pi^{2\mu}}{(2\mu+1)!} F(2n-2\mu). \text{ } ^1)$$

## ROZDZIAŁ V.

Zbadamy obecnie, jak rozłożoną jest funkcya  $\tau(n)$  po rozmaitych postępkach arytmetycznych.

Rozważmy w tym celu sumę

$$\sum_{\substack{n < \infty \\ n > 0}} \tau(mn + a),$$

gdzie  $m$  i  $a$  są liczby całkowite dodatnie.

Obliczenie takiej sumy oczywiście jest równoważne wyznaczeniu wszystkich układów liczb całkowitych  $\xi$  i  $\eta$ , czyniących jednocześnie zadość kongruencji

$$\xi^2 + \eta^2 \equiv a \pmod{m},$$

oraz nierówności

$$a \leq \xi^2 + \eta^2 \leq mx + a.$$

Wszystkie takie układy możemy podzielić na grupy, zaliczając do jednej i tej samej grupy dwa układy  $(\xi, \eta)$  i  $(\xi', \eta')$ , dla których

$$\xi \equiv \xi' \text{ oraz } \eta \equiv \eta' \pmod{m},$$

<sup>1)</sup> Porównaj: Wigert. Recherches sur la représentation analytique de la fonction  $\sum_{v=1}^{\infty} \left[ \frac{v}{v} \right]$ . Première note, str. 165 (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 1. Stockholm 1903—04).



zaś do grup różnych, jeżeli przynajmniej jedna z napisanych kongruencji nie jest spełniona.

Niech  $l$  będzie liczbą takich grup. Wszystkie rozwiązania kongruencji

$$\xi^2 + \eta^2 \equiv a \pmod{m},$$

należące do  $i$ -tej grupy, będą zawarte we wzorach:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_i + mt, \\ \eta &= \eta_i + mu,\end{aligned}$$

gdzie  $(\xi_i, \eta_i)$  przedstawia jakies oznaczone rozwiązanie tej grupy.

Jeżeli chcemy otrzymywać jedynie układy, spełniające nierówność

$$a \leq \xi^2 + \eta^2 \leq mx + a,$$

to liczby  $t$  i  $u$  mogą przybierać tylko takie wartości całkowite, iżby

$$a \leq (\xi_i + mt)^2 + (\eta_i + mu)^2 \leq mx + a.$$

Liczbę wszystkich układów  $(t, u)$ , spełniających napisane nierówności, znajdziemy z łatwością, obliczając najprzód np. ile różnych wartości może przyjmować  $u$  przy danej wartości na  $t$ , a następnie sumując otrzymane w ten sposób wyrażenie względem  $t$ . W ten sposób znajdziemy na liczbę układów  $(\xi, \eta)$ , tworzących  $i$ -tą grupę, wartość  $\frac{\pi}{m}x$ , prawdziwą do rzędu wielkości  $\sqrt{x}$ , skąd:

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(mn + a) = \frac{\pi}{m}lx + O(\sqrt{x}).$$

Ze wzoru tego wypływa, iż wyrażenie

$$\frac{\tau(a) + \tau(a + m) + \tau(a + 2m) + \dots + \tau(a + nm)}{n}$$

dąży przy wzrastaniu  $n$  do granicy oznaczonej

$$\frac{\pi l}{m},$$

która przedstawia wartość średnią funkcji  $\tau(n)$  w postępie arytmetycznym  $mk + a$ . Liczba grup  $l$  jest funkcją liczbową zmiennych  $m$  i  $a$ ; tablicę wartości tej funkcji dla  $m \leq 10$  podajemy na końcu pracy. Nie byłoby to rzeczą trudną podać ogólny sposób obliczania funkcji  $l$ , gdy zmienne jej rozłożone są na czynniki pierwsze, nie będziemy się jednak bliżej zatrzymywać i przejdziemy do badania wartości średniej funkcji  $\tau(n)$  dla liczb kwadratowych.

Oznaczmy przez  $\bar{\omega}(n)$  liczbę rozkładów  $n$  na sumę kwadratów dwóch liczb względnie pierwszych. Pomiedzy funkcjami liczbowymi  $\tau(n)$  oraz  $\bar{\omega}(n)$  zachodzi zależność

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\omega}\left(\frac{n}{k^2}\right), \quad \dots(1)$$

gdzie przez  $\bar{\omega}(x)$  należy pojmować liczbę zero, w przypadku, kiedy  $x$  nie jest liczbą całkowitą. Tożsamość (1) może być odwrócona, t. j. można również wyrazić funkcję  $\bar{\omega}$  przez  $\tau$  wzorem

$$\bar{\omega}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \tau\left(\frac{n}{k^2}\right), \quad \dots(2)$$

gdzie  $\mu(k)$  oznacza znaną funkcję Mertensa.<sup>1)</sup>

Przy pomocy tożsamości (2), oraz twierdzenia Jacobi'ego (rozd. III), udowodnić można następującą własność funkcji  $\bar{\omega}(n)$  dla liczb kwadratowych:

$$\text{oraz } \left. \begin{aligned} \bar{\omega}(n^2) &= 0, \text{ kiedy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ \bar{\omega}(n^2) &= \bar{\omega}(n) \text{ przy } n \text{ nieparzystym.} \end{aligned} \right\} \dots(3)$$

Na mocy wzoru (1) oraz własności (3) z łatwością wyprowadzić można tożsamość:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\omega}(2k+1) E \frac{x}{2k+1},$$

<sup>1)</sup> O funkcji Mertensa zob. np. u Bachmanna *Analyt. Zahlenthe.* w rozdziale 12-ym.

z której znów, przy pomocy wzoru (2), otrzymać możemy wzór

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n^2) = \sum_m \mu(m) \sum_n \tau(n) E \frac{x}{m^2 n}, \quad \dots(4)$$

gdzie sumowanie po stronie prawej względem  $m$  i  $n$  rozciąga się na wszystkie dodatnie liczby nieparzyste.

Zajmijmy się przedewszystkiem obliczeniem sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(2n+1) E \frac{z}{2n+1}.$$

Na mocy własności

$$\tau(2n) = \tau(n),$$

możemy napisać:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(2n+1) E \frac{z}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{2n}, \quad \dots(5)$$

tak iż całe zagadnienie sprowadza się do obliczenia sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{n},$$

lub, co na jedno wyniesie, sumy podwójnej

$$\sum_{m, n} E \frac{z}{m^2 + n^2}.$$

rozsuniętej na wszystkie różne układy wartości całkowitych na  $m$  i  $n$ , wyłączając  $m = n = 0$ .

Ostatnia suma, jak to łatwo można widzieć, przedstawia liczbę wszystkich możliwych układów wartości całkowitych zmiennych  $l, m, n$ , spełniających nierówności

$$(S) \dots \quad 0 < l(m^2 + n^2) \leq z, \quad \text{przy } z \geq 0.$$

Obszar wartości całkowitych zmiennych  $l, m, n$ , wyznaczony przez nierówności (S), rozbić możemy na dwa obszary, określając je odpowiednio przez nierówności:

$$(S').. \quad 0 < l(m^2 + n^2) \leq s, \quad l \leq \sqrt[3]{s},$$

oraz

$$(S'')... \quad 0 < l(m^2 + n^2) \leq s, \quad l > \sqrt[3]{s}.$$

Liczbę układów  $(l, m, n)$ , należących do obszaru  $(S')$ , przedstawić możemy w postaci

$$\sum_{l > 0}^{l < \sqrt[3]{s}} \varphi_0 \left( \frac{s}{l} \right),$$

gdzie, jak i w rozdziale I, oznaczamy

$$\varphi_0(x) = \sum_{n > 0}^{n \leq x} \tau(n).$$

Co się zaś tyczy liczby układów  $(l, m, n)$ , tworzących obszar  $(S'')$ , to, zważywszy, iż przy danych  $m$  i  $n$ , na mocy nierówności  $(S'')$ , zmienna  $l$  może przyjmować

$$E \frac{s}{m^2 + n^2} - E \sqrt[3]{s}$$

różnych wartości, jeżeli tylko  $m^2 + n^2 \leq (\sqrt[3]{s})^2$ , znajdziemy, iż liczba ta jest równa sumie

$$\sum_{m, n} \left( E \frac{s}{m^2 + n^2} - E \sqrt[3]{s} \right), \dots \quad (0 < m^2 + n^2 \leq \sqrt[3]{s^2})$$

lub, co na jedno wynosi:

$$\sum_{n > 0}^{n < \sqrt[3]{s^2}} \tau(n) E \frac{s}{n} - \varphi_0(\sqrt[3]{s^2}) E \sqrt[3]{s}.$$

Zestawiając teraz razem wszystko, cośmy rzekli o obszarach ( $S'$ ) i ( $S''$ ), możemy ostatecznie napisać tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{n} = \sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z} \\ n > 0}} \varphi_0 \left( \frac{z}{n} \right) + \sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z} \\ n > 0}} \tau(n) E \frac{z}{n} - \varphi_0 \left( \sqrt[3]{z} \right) E \sqrt[3]{z}. \quad \dots(6)$$

Zajmiemy się teraz przybliżonem obliczaniem przy wielkich wartościach na  $z$  każdej z sum, stojących po prawej stronie.

Sumę

$$\sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z} \\ n > 0}} \varphi_0 \left( \frac{z}{n} \right)$$

obliczymy, posługując się znalezionym w rozdziale pierwszym wzorem

$$\varphi_0(x) = \pi x + O(\sqrt{x}),$$

oraz wzorem na przybliżoną wartość sumy

$$\sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z} \\ n > 0}} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \log z + C + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)$$

(porówn. wzór (4) Rozdz. III). W ten sposób znajdziemy:

$$\sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z} \\ n > 0}} \varphi_0 \left( \frac{z}{n} \right) = \frac{\pi z}{3} \log z + \pi C z + O\left(\sqrt[3]{z}\right).$$

Przejdźmy do sumy

$$\sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z} \\ n < 0}} \tau(n) E \frac{z}{n}.$$

Odrzucając symbol  $E$  i biorąc pod uwagę rząd sumy  $\sum \tau(n)$ , czyli funkcji  $\varphi_0$ , znajdziemy

$$\sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z^3} \\ n > 0}} \tau(n) E \frac{z}{n} = z \sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z^3} \\ n > 0}} \frac{\tau(n)}{n} + O(\sqrt[3]{z^3}).$$

Lecz (Rozdz. III):

$$\sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z^3} \\ n > 0}} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{2}{3} \pi \log z + K + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right),$$

a więc:

$$\sum_{\substack{n < \sqrt[3]{z^3} \\ n > 0}} \tau(n) E \frac{z}{n} = \frac{2}{3} \pi z \log z + Kz + O(\sqrt[3]{z^3}).$$

W końcu z łatwością znajdziemy:

$$\varphi_0(\sqrt[3]{z^3}) E \sqrt[3]{z^3} = \pi z + O(\sqrt[3]{z^3}),$$

tak iż ostatecznie:

$$\sum_{\substack{n < z \\ n > 0}} \tau(n) E \frac{z}{n} = \pi z \log z + (\pi C + K - 1)z + O(\sqrt[3]{z^3})$$

i na mocy wzoru (5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(2n+1) E \frac{z}{2n+1} = \frac{\pi z}{2} \log z + (\pi C + K + \pi \log 2 - 1) \frac{z}{2} + O(\sqrt[3]{z^3})$$

W otrzymanem wyrażeniu winniśmy założyć  $z = \frac{x}{m^2}$  i wziąć pod uwagę wzór (4). We wzorze tym sumowanie względem  $m$  możemy rozciągnąć tylko na wartości dodatnie nieparzyste liczby  $m$ , niewiększe od  $\sqrt{x}$ , gdyż dla  $m > \sqrt{x}$  znika suma wewnętrzna.

Dla sumy

$$\sum_m \frac{\mu(m)}{m^2} \quad (m \text{ nieparzyste } \leq \sqrt{x})$$

znajdujemy wartość przybliżoną

$$\frac{8}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

zaś dla sumy

$$\sum_m \frac{\mu(m) \log m}{m^2} \quad (m \text{ nieparzyste} \leq \sqrt{x}),$$

wartość

$$\frac{8}{3} \frac{\log 2}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^4} F + O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right),$$

gdzie

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0,9375482543.$$

W ten sposób, na mocy wzoru (4), ostatecznie znajdziemy:

$$(7) \dots \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n^2) = Ax \log x + Bx + O(\sqrt{x^3}),$$

gdzie

$$A = \frac{4}{\pi}, \quad B = \frac{4}{\pi} \left( C + \frac{K}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{\pi} \right).$$

Wzór (7) pozwala nam obliczyć wartość asymptotyczną wyrażenia

$$\frac{\tau([n+1]^2) + \tau([n+2]^2) + \dots + \tau([n+m]^2)}{m},$$

która przedstawia (wedle G a u s s a) wartość średnią funkcji liczbowej  $\theta(n) = \tau(n^2)$  w miejscu  $n$ , jeżeli przypuścimy, iż liczby  $n$  i  $m$  rosną nieograniczenie, tak, iżby stosunki  $\frac{m}{n}$  oraz  $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{m}$  zmierzały do zera.

Po wykonaniu łatwych rachunków (porównaj B a c h m a n n Zahl. II, strona 414), otrzymamy:

$$M \tau(n^2) = \frac{4}{\pi} \log n + (A + B).$$

Dla funkcji  $\tilde{\omega}(n)$  na mocy wzoru (2) znaleźlibyśmy:

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n) = \sum_{n>0}^{n \leq \sqrt{x}} \mu(n) \varphi_0\left(\frac{x}{n^2}\right),$$

skąd, przy pomocy wzoru

$$\sum_{n>0}^{n \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

wyprowadzilibyśmy z łatwością:

$$(8) \dots \sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n) = \frac{6x}{\pi} + O(\sqrt{x} \log x),$$

skąd

$$M \tilde{\omega}(n) = \frac{6}{\pi}.$$

Dla funkcji  $\tilde{\omega}(n^2)$  przy pomocy własności (3) oraz wzoru (2) można znaleźć wzór analogiczny ze wzorem (4) dla funkcji  $\tau(n^2)$ , a mianowicie:

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n^2) = \sum_m \mu(m) \sum_n \tau(n),$$

gdzie sumowanie względem  $n$  rozciąga się na wszystkie liczby dodatnie nieparzyste  $\leq \frac{x}{m^2}$ , sumowanie zaś względem  $m$ —na wszystkie liczby dodatnie nieparzyste, nie przewyższające  $\sqrt{x}$ .

Na podstawie tego wzoru możnaby otrzymać

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n^2) = \frac{4x}{\pi} + O(\sqrt{x} \log x),$$

skąd

$$M \tilde{\omega}(n^2) = \frac{4}{\pi}.$$



Zestawiając ze sobą wartości średnie funkcji  $\tau(n)$ ,  $\tau(n^2)$ ,  $\bar{\omega}(n)$ ,  $\bar{\omega}(n^2)$ , przychodzimy do następującego ciekawego wniosku:

„Średnia liczba rozkładów liczb szeregu naturalnego na sumę kwadratów dwu liczb całkowitych jest wielkością stałą, gdy tymczasem średnio liczba takich rozkładów dla liczb kwadratowych wzrasta wraz z rozkładaną liczbą w stosunku prostym do jej logarytmu. Co się zaś tyczy liczby rozkładów na sumę kwadratów dwóch liczb względnie pierwszych, to, zarówno dla liczb szeregu naturalnego, jak i dla kwadratów zupełnych, jest ona średnio stałą“.

Wyprowadzimy jeszcze wzory na wartości średnie funkcji  $\tau$  dla kwadratów liczb postaci  $4n+1$  oraz  $4n+3$ . Wzory, które przytem otrzymamy, przydadzą nam się w rozdziale następnym.

Na mocy wzoru (1) i własności (3) możemy napisać

$$\tau([4n+1]^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\omega}\left(\frac{4n+1}{k}\right),$$

skąd

$$\sum_{n>0}^{\substack{* < \frac{x-1}{4}}} \tau([4n+1]^2) = \sum_{n>0}^{\substack{* < \frac{x-1}{4}}} \sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\frac{4n+1}{k}\right).$$

Aby liczba  $\bar{\omega}\left(\frac{4n+1}{k}\right)$  była różną od zera, iloraz  $\frac{4n+1}{k}$  powinien być liczbą całkowitą postaci  $4m+1$ , skąd wnosimy, iż taką samą postać musi mieć liczba  $k$ . Kładąc  $k=4l+1$ , możemy napisać:

$$4n+1 = (4l+1)(4m+1),$$

i warunki

$$k > 0, \quad 0 \leq n \leq \frac{x-1}{4},$$

lub

$$k > 0, \quad 0 < 4n+1 \leq x,$$

przybiorą postać:

$$4l+1 > 0, \quad 4m+1 > 0, \quad (4l+1)(4m+1) \leq x. \quad \dots(S)$$

Mamy zatem:

$$\sum_{n>0}^{\substack{n < \frac{x-1}{4}}} \tau([4n+1]^2) = \sum_{l,m} \bar{\omega}(4m+1),$$

gdzie suma  $\sum_{l,m}$  rozciąga się na wszystkie układy wartości całkowitych  $l$  i  $m$ , spełniające nierówności (S).

Obszar (S) możemy rozłożyć na dwa: (S') i (S''), określając je odpowiednio przez nierówności:

$$(S') \quad 4l+1 > 0, \quad 4m+1 > 0, \quad (4l+1)(4m+1) \leq x, \quad 4l+1 \leq \sqrt[3]{x},$$

$$(S'') \quad 4l+1 > 0, \quad 4m+1 > 0, \quad (4l+1)(4m+1) \leq x, \quad 4l+1 > \sqrt[3]{x}.$$

Obliczając osobno sumy, odnoszące się do każdego z tych obszarów, otrzymamy (porówn. wyprow. tożsamości (6)):

$$\begin{aligned} \sum_{n>0}^{\substack{n < \frac{x-1}{4}}} \tau([4n+1]^2) &= \sum_{l>0}^{\substack{l < \frac{\sqrt[3]{x}-1}{4} \\ m < \frac{1}{4}(\frac{x}{4l+1}-1)}} \sum_{m>0} \bar{\omega}(4m+1) \\ &+ \sum_{m>0}^{\substack{m < \frac{\sqrt[3]{x}-1}{4} \\ l < \frac{1}{4}(\frac{x}{4m+1}-1)}} \bar{\omega}(4m+1) - E \frac{\sqrt[3]{x}-1}{4} \sum_{m>0} \bar{\omega}(4m+1). \end{aligned} \quad \dots(9)$$

Zauważywszy, iż  $\bar{\omega}(4m+3) = 0$ , możemy pierwszą z sum prawej strony przedstawić w postaci

$$\sum_{l>0}^{\substack{l < \frac{\sqrt[3]{x}-1}{4} \\ m < \frac{1}{2}(\frac{x}{4l+1}-1)}} \sum_{m>0} \bar{\omega}(2m+1)$$

i na podstawie łatwo wyprowadzić się dającego wzoru

$$\sum_{n>0}^{\substack{n < \frac{z-1}{2}}} \bar{\omega}(2n+1) = \frac{4}{\pi} z + O(\sqrt{z} \log z)$$

(zob. w tym celu wzór (8), znajdziemy dla niej wartość

$$\frac{4x}{\pi} \sum_{l \geq 0}^{l < \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{4}} \frac{1}{4l+1} + O(\sqrt[3]{x^2} \log x).$$

Lecz

$$4 \sum_{l \geq 0}^{l < \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{4}} \frac{1}{4l+1} = \frac{1}{3} \log x + C + \log 2 + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right),$$

więc

$$(10) \dots \sum_{l \geq 0}^{l < \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{4}} \sum_{m \geq 0} \omega(4m+1) = \frac{x}{3\pi} \log x + \left(C + \log 2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{\pi} + O(\sqrt[3]{x^2} \log x).$$

Uważajmy obecnie sumę

$$(11) \dots \sum_{m \geq 0}^{m < \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{4}} \omega(4m+1) E \frac{1}{4} \left( \frac{x}{4m+1} - 1 \right).$$

Odrzucając symbol  $E$  i zwracając uwagę na rząd sumy  $\sum \omega(n)$ , znajdziemy (na mocy własności  $\omega(4m+3) = 0$ ) dla rozważanej sumy wartość

$$(12) \dots \frac{x}{4} \sum_{m \geq 0}^{m < \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{4}} \frac{\omega(2m+1)}{2m+1} + O(\sqrt[3]{x^2}).$$

Zajmijmy się obliczeniem sumy względem  $m$ . Załóżmy:

$$\sum_{n \geq 0}^{n < u} \omega(n) = \frac{6}{\pi} u + r(u),$$

gdzie, wedle (8), mamy  $r(u) = O(\sqrt{u} \lg u)$  i użyjmy tożsamości

$$\sum_{\substack{n < z \\ n > 0}} \frac{\hat{\omega}(n)}{n} = \frac{6}{\pi} \log z + \frac{r(z)}{z} + \frac{6}{\pi} + \int_1^z \frac{r(u)}{u^2} du.$$

Zważywszy, iż  $\int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^2} du$ , oraz  $\frac{r(z)}{z}$  są wielkościami rzędu nie wyżej  $\frac{\lg z}{\sqrt{z}}$ , oraz oznaczając

$$\frac{6}{\pi} + \int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^2} du = D,$$

otrzymamy:

$$\sum_{\substack{n < z \\ n > 0}} \frac{\hat{\omega}(n)}{n} = \frac{6}{\pi} \log z + D + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right).$$

Postaramy się wyrazić stałą  $D$  przez znane nam już stałe. W tym celu będziemy rozwijali dwoma sposobami funkcję

$$\Phi(1+\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\omega}(n)}{n^{1+\varrho}} \quad (\varrho > 0)$$

na szereg według potęg wielkości  $\varrho$ .

Jedno rozwinięcie otrzymamy, zważywszy, iż na mocy wzoru (2):

$$\Phi(1+\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^{2(1+\varrho)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{1+\varrho}}.$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^{2(1+\varrho)}} = \frac{6}{\pi^2} - \frac{72F}{\pi^4} \varrho + \dots$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{1+\varrho}} = \frac{\pi}{\varrho} + K + \dots,$$

więc otrzymamy:

$$\Phi(1+\varrho) = \frac{6}{\pi \varrho} + \left( \frac{6}{\pi^2} K - \frac{72}{\pi^3} F \right) + \dots$$

Z drugiej zaś strony, dla  $\varrho > 0$  mamy tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{6}{\pi\varrho} + \frac{6}{\pi} + (1+\varrho) \int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^{2+\varrho}} du,$$

skąd:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(n)}{n^{1+\varrho}} - \frac{6}{\pi\varrho} \right) = \frac{6}{\pi} + \int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^2} du = D;$$

porównywając to z otrzymanem wyżej rozwinięciem funkcji  $\Phi(1+\varrho)$ , znajdziemy:

$$D = \frac{6}{\pi^2} K - \frac{72}{\pi^3} F.$$

W podobny sposób, jakieśmy znaleźli wyrażenie dla sumy  $\sum \frac{\tilde{\omega}(n)}{n}$ , możemy też znaleźć:

$$(13) \dots \sum_{n>0}^{\substack{n < \frac{z}{2} \\ n > 0}} \frac{\tilde{\omega}(2m+1)}{2m+1} = \frac{4}{\pi} \log z + D' + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right),$$

gdzie  $D'$  jest pewną stałą, którą zaraz wyznaczymy

Napisany przed chwilą wzór oraz tożsamość

$$\sum_{n>0}^{\substack{n < z \\ n > 0}} \frac{\tilde{\omega}(n)}{n} = \sum_{n>0}^{\substack{n < \frac{z-1}{2} \\ n > 0}} \frac{\tilde{\omega}(2n+1)}{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n>0}^{\substack{n < \frac{z-2}{4} \\ n > 0}} \frac{\tilde{\omega}(2n+1)}{2n+1}$$

[\(\tilde{\omega}(2n)\) jest bowiem różne od zera tylko przy nieparzystym  $n$  i przytem  $\tilde{\omega}(4n+2) = \tilde{\omega}(2n+1)\)], dają nam:$

$$\sum_{n>0}^{\substack{n < z \\ n > 0}} \frac{\tilde{\omega}(n)}{n} = \frac{6}{\pi} \log z + \frac{3}{2} D' - \frac{2}{\pi} \log 2 + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right),$$

skąd, porównywając z otrzymanem wyżej wyrażeniem dla tejże sumy, znajdziemy:

$$D' = \frac{4}{\pi^2} K - \frac{48}{\pi^3} F + \frac{4}{3\pi} \log 2.$$

W ten sposób, na mocy równości (13), oraz wzoru (12) na sumę (11), otrzymamy już z łatwością:

$$(14) \dots \sum_{\substack{n < \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{4} \\ n > 0}} \omega(4m+1) E \frac{1}{4} \left( \frac{x}{4m+1} - 1 \right) = \frac{2x}{3\pi} \log x + \left( \frac{K}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{\log 2}{3} \right) \frac{x}{\pi} + O(\sqrt[3]{x^2} \log x).$$

Dalej znajdziemy:

$$(15) \dots E \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{4} \sum_{\substack{n < \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{4} \\ n > 0}} \omega(4m+1) = \frac{x}{\pi} + O(\sqrt[3]{x^2} \log x).$$

Biorąc więc pod uwagę tożsamość (9) oraz wzory (10), (14) i (15), ostatecznie znajdziemy:

$$(16) \dots \sum_{\substack{n < \frac{x-1}{4} \\ n > 0}} \tau([4n+1]^2) = \frac{x}{\pi} \log x + \left( \frac{C}{\pi} + \frac{K}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^3} F + \frac{4}{3\pi} \log 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) x + O(\sqrt[3]{x^2} \log x),$$

skąd z łatwością możnaby obliczyć średnią wartość rozpatrywanej funkcji. Wzór, podobny do napisanego przed chwilą, mianowicie

$$(17) \dots \sum_{\substack{n < \frac{x-3}{4} \\ n > 0}} \tau([4n+3]^2) = \frac{x}{\pi} \log x + \left( \frac{C}{\pi} + \frac{K}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^3} F + \frac{4}{3\pi} \log 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) x + O(\sqrt[3]{x^2} \log x),$$

znależlibyśmy z łatwością, wychodząc z tożsamości

$$\sum_{\substack{n < \frac{x-3}{4} \\ n > 0}} \tau([4n+3]^2) = \sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau(n^2) - \sum_{\substack{n < \frac{x}{2} \\ n > 0}} \tau(n^2) - \sum_{\substack{n < \frac{x-1}{4} \\ n > 0}} \tau([4n+1]^2).$$

## ROZDZIAŁ VI.

Postaramy się obliczyć średnią wartość kwadratu funkcji liczbowej  $\tau(n)$ . W tym celu przedewszystkiem udowodnimy tożsamość:

$$\tau^2(n) = 4 \sum_{d:n} j(d) \tau(d^2), \quad \dots(1)$$

w której  $\sum_{d:n}$  oznacza sumę, rozciągniętą na wszystkie dzielniki liczby  $n$ , zaś funkcja  $j(n)$  oznacza to samo, co i w rozdziale III-im. Dowód ten jednak poprzedzimy ogólniejszemi rozważaniami.

Bardzo wiele funkcji  $f(n)$ , spotykanych w Teorii liczb, posiada tę własność, iż dla liczb, względnie pierwszych,  $m$  i  $n$  mamy zawsze:

$$f(1) f(mn) = f(m) f(n).$$

O każdej funkcji, posiadającej powyższą własność, będziemy dla krótkości mówili, iż posiada ona własność  $A$ . Podamy kilka twierdzeń o funkcjach, posiadających własność  $A$ .

I. Każda liczba stała może być uważana za funkcję, posiadającą własność  $A$ .

II. Iloczyn kilku funkcji, z których każda posiada własność  $A$ , sam jest funkcją, posiadającą tę własność.

III. Potęga całkowita funkcji, posiadającej własność  $A$ , posiada tę własność.

Dowód wszystkich tych własności jest tak łatwy, iż go pomijamy. Przejdziemy do następnego, nieco trudniejszego, twierdzenia.

IV. Jeżeli funkcja  $f(n)$  posiada własność  $A$ , zaś funkcja  $\varphi(n)$  jest określona przez wzór

$$\varphi(n) = \sum_{d:n} f(d), \quad (n=1, 2, \dots)$$

to funkcja  $\varphi(n)$  również posiada własność  $A$ .

W samej rzeczy, na zasadzie określenia funkcji  $\varphi(n)$ , możemy napisać:

$$\varphi(m) \varphi(n) = \sum_{d:m} f(d) \sum_{\delta:n} f(\delta).$$

(47)

Jeżeli liczby  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze, to takimiż będą i ich dzielniki  $d$  i  $\delta$ ; będziemy więc na mocy własności funkcji  $f$  mieli:

$$f(d) f(\delta) = f(1) f(d\delta);$$

możemy zatem napisać:

$$\varphi(m) \varphi(n) = f(1) \sum_{d:m} \sum_{\delta:n} f(d\delta).$$

Z łatwością można się przekonać, iż w sumie podwójnej po prawej stronie iloczyn  $d\delta$  przebiega wszystkie dzielniki liczby  $m \cdot n$  i przytem przyjmuje wartość każdego z nich raz tylko jeden; możemy więc ją zastąpić przez sumę

$$\sum_{d:mn} f(d) = \varphi(mn);$$

z określenia zaś funkcji  $\varphi(n)$  wypada:

$$\varphi(1) = f(1);$$

w ten sposób otrzymujemy:

$$\varphi(m) \varphi(n) = \varphi(1) \varphi(mn),$$

c. b. d. d. Podamy jeszcze dwa twierdzenia:

V. Jeżeli  $f(n)$  posiada własność  $A$ , oraz

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

jest rozkładem liczby  $n$  na czynniki pierwsze, to będziemy mieli:

$$[f(1)]^{k-1} f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_k^{\alpha_k}).$$

VI. Jeżeli  $f(n)$  posiada własność  $A$ , to funkcja  $\theta(n) = f(n^2)$  również posiada własność  $A$ .

Dowody obu tych twierdzeń pomijamy, gdyż są bardzo łatwe.

Funkcja  $j(n)$ , jak łatwo się o tem można przekonać, wychodząc z jej określenia, posiada własność  $A$ , posiada ją więc i funkcja  $4j(n)$  (wedle I i II).



Napiżemy twierdzenie J a c o b i'e g o w postaci

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 4j(d);$$

na mocy tego, cośmy rzekli przed chwilą o fankcyi  $4j(n)$ , oraz twierdzenia IV, wnosimy, iż funkcyja  $\tau(n)$  posiada własność A.

Załóźmy

$$f(n) = 4j(n)\tau(n^2);$$

na mocy twierdzeń VI i II przekonamy się, iż funkcyja  $f(n)$  posiada własność A. Posiada ją więc i funkcyja

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

na mocy twierdzenia IV.

Tożsamość (1), o dowód której chodzi, możemy napisać w postaci:

$$\tau^2(n) = \varphi(n);$$

obie jej strony są funkcyjami, posiadającemi własność A (funkcyja  $\tau^2(n)$  posiada ją na mocy III).

Na mocy twierdzenia V z łatwością widzimy, iż tożsamość ta będzie udowodniona dla wszelkich  $n$ , jeżeli tylko zostanie wykazana dla

$$n = p^a \quad (a = 0, 1, 2, \dots),$$

gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą.

Rozważmy zosobna następujące przypadki:

1) Niech  $n = p^a$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą kształtu  $4k + 1$ .

Na mocy twierdzenia J a c o b i'e g o znajdziemy z łatwością w tym przypadku:

$$\tau^2(n) = 16(a + 1)^2,$$

zaś dla sumy

$$\sum_{d|n} j(d)\tau(d^2)$$

otrzymamy wartość:

$$\tau(1) + \tau(p^2) + \dots + \tau(p^{2a}) = 4[1 + 3 + \dots + (2a + 1)] = 4(a + 1)^2.$$

2) Niechaj  $n = p^\alpha$ , gdzie  $p$  oznacza liczbę pierwszą kształtu  $4k + 3$ .  
Jeśli  $\alpha$  jest liczbą nieparzystą, to

$$\tau^2(n) = 0,$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{d:n} j(d) \tau(d^2) &= \tau(1) - \tau(p^2) + \tau(p^4) - \dots - \tau(p^{2\alpha}) \\ &= 4[1 - 1 + 1 - \dots - 1] = 0; \end{aligned}$$

przy  $\alpha$  zaś parzystym:

$$\tau^2(n) = 16,$$

oraz:

$$\begin{aligned} \sum_{d:n} j(d) \tau(d^2) &= \tau(1) - \tau(p^2) + \dots + \tau(p^{2\alpha}) \\ &= 4[1 - 1 + \dots + 1] = 4. \end{aligned}$$

3) Niech będzie  $n = 2^\alpha$ . Mamy w tym przypadku:

$$\tau^2(n) = 16,$$

oraz:

$$\sum_{d:n} j(d) \tau(d^2) = \tau(1) = 4.$$

Tożsamość (1) została zatem udowodniona.

Kładąc w niej na  $n$  wartości  $1, 2, \dots, Ex$  i sumując, otrzymamy:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau^2(n) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n}, \quad \dots(2)$$

jeśli oznaczymy  $\theta(n) = j(n) \tau(n^2)$ .

Użyjemy dalej tożsamości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n} = \sum_{\substack{n \leq \sqrt[4]{x} \\ n > 0}} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{\substack{n \leq \sqrt[4]{x} \\ n > 0}} \theta(n) E \frac{x}{n} - \varphi\left(\sqrt[4]{x^3}\right) \cdot E \sqrt[4]{x}, \quad \dots(3)$$

gdzie

$$\varphi(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \theta(n),$$

którą z łatwością otrzymać można, zważywszy, iż sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n}$$

rozpatrywać możemy, jako sumę podwójną

$$\sum_{m, n} \theta(m, n),$$

gdzie obszar sumowania jest wyznaczony przez nierówności:

$$m > 0, \quad n > 0, \quad mn \leq 0,$$

rozkładając obszar ten na dwa, tak, iżby w jednym z nich było  $n \leq \sqrt[4]{x}$ , w drugim zaś  $n > \sqrt[4]{x}$  i obliczając sumę dla każdego z otrzymanych w ten sposób obszarów oddzielnie.<sup>1)</sup>

Mamy oczywiście

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \theta(n) = \sum_{\substack{n < \frac{x-1}{4} \\ n > 0}} \tau([4n+1]^2) - \sum_{\substack{n < \frac{x-3}{4} \\ n > 0}} \tau([4n+3]^2),$$

skąd, na mocy wzorów (16) i (17) rozdziału poprzedzającego, możemy napisać

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \theta(n) = x + O(\sqrt[3]{x^2} \log x)$$

i stąd już z łatwością znajdziemy (na mocy (3)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n} = x \sum_{\substack{n < \sqrt[4]{x} \\ n > 0}} \frac{1}{n} + x \sum_{\substack{n < \sqrt[4]{x^3} \\ n > 0}} \frac{\theta(n)}{n} - x + O(\sqrt[4]{x^3} \log x). \quad \dots(4)$$

<sup>1)</sup> Porówn. Voronoï, Sur un probl. du calcul des fonctions asymptotiques (Journ. f. r. u. a. M. Bd. 126) str. 244 wzór (1) przy  $f(m, n) = \theta(m, n)$ , oraz: Dirichlet, Ueber die Bestimmung der mittl. Werthe in der Zahlentheorie § 2 wzór (b).

Mamy:

$$\sum_{\substack{n < \sqrt{x} \\ n > 0}} \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \log x + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \quad \dots(5)$$

Zajmijmy się teraz obliczeniem sumy  $\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \frac{\theta(n)}{n}$ .

Drogą, całkiem analogiczną do użytej przy obliczaniu sumy  $\sum \frac{\tilde{\omega}(n)}{n}$  (w rozdziale poprzedzającym), znajdziemy:

$$\sum_{\substack{n < z \\ n > 0}} \frac{\theta(n)}{n} = \log z + G + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right), \quad \dots(6)$$

gdzie stałą  $G$  wyznaczmy, jako współczynnik przy  $q^0$  w rozwinięciu według potęg wielkości  $q$  funkcji

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^{1+e}}.$$

Rozwinięcie takie otrzymamy z tożsamości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^{1+e}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j(k)}{k^{1+e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}},$$

którą wyprowadzimy, wychodząc z określenia funkcji  $\theta(n)$ , biorąc pod uwagę tożsamość (1) oraz własność (3) w Rozdz. V.

Mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j(k)}{k^{1+e}} = \frac{\pi}{4} - Hq + \dots; \left(H = \frac{\pi C - K}{4}\right).$$

Dalej, z tożsamości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(n)}{n^{1+e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(2n)}{(2n)^{1+e}},$$

na mocy własności

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(4n+2) &= \tilde{\omega}(2n+1), \\ \tilde{\omega}(4n) &= 0, \end{aligned}$$

wyprowadzimy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(n)}{n^{1+e}} = \left(1 + \frac{1}{2^{1+e}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}},$$

skąd, biorąc pod uwagę rozwinięcia według potęg wielkości  $\varrho$  funkcji

$$\frac{2^{1+e}}{1+2^{1+e}} = \frac{2}{3} + \frac{2\log 2}{9} e + \dots,$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(n)}{n^{1+e}} = \Phi(1+e)$$

(zob. rozdz. poprz.), znajdziemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}} = \frac{4}{\pi\varrho} + \left(\frac{4}{\pi^2} K - \frac{48}{\pi^3} F + \frac{4}{3\pi} \log 2\right) + \dots$$

W ten sposób znajdujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^{1+e}} = \frac{1}{\varrho} + \left(\frac{2K}{\pi} - C - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{1}{3} \log 2\right) + \dots,$$

skąd:

$$G = \frac{2K}{\pi} - C - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{1}{3} \log 2.$$

Kładąc obecnie we wzorze (6)  $z = \sqrt[4]{x^3}$  i biorąc jeszcze pod uwagę wzór (5), na zasadzie wzoru (4), otrzymamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n} = x \log x + \left(\frac{2K}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{1}{3} \log 2 - 1\right) x + O(\sqrt[4]{x^3} \log x).$$

skąd ostatecznie na mocy (2):

$$\sum_{\substack{n < x \\ n > 0}} \tau^2(n) = 4x \log x + \left(\frac{8K}{\pi} - \frac{48}{\pi^2} F + \frac{4}{3} \log 2 - 4\right) x + O(\sqrt[4]{x^3} \log x) \dots (7)$$

i na średnią wartość funkcji  $\tau^2(n)$  otrzymujemy:

$$M\tau^2(n) = 4 \log n + \frac{8K}{\pi} - \frac{48}{\pi^2} F + \frac{4}{3} \log 2;$$

godnem uwagi jest, iż, oprócz spotykanych już, nie wchodzi tu żadna nowa stała.

Uważajmy jakąkolwiek funkcję liczbową  $f(n)$  w przedziale  $a < n < b$ ; przez  $\omega$  oznaczmy średnią arytmetyczną wartości funkcji  $f(n)$  w uważanym przedziale.

Im mniejsze będą wartości bezwzględne różnic

$$f(a+1) - \omega, f(a+2) - \omega, \dots, f(b) - \omega, \quad (*)$$

tem mniejsze na ogół będą wahania funkcji  $f(n)$  w przedziale  $(a, b)$ .

Funkcję symetryczną różnic (\*):

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{b-a} [f(a+i) - \omega]^2}{b-a}} = W_{a,b} f(n)$$

nazywać będziemy wahaniami średnim funkcji  $f(n)$  w przedziale  $(a, b)$

W przypadku, kiedy liczby  $n$ ,  $m$  i  $\frac{n}{m}$  są bardzo wielkie, liczbę

$$W_{n, n+m} f(n)$$

uważać można za wahanie średnie funkcji  $f(n)$  w miejscu  $n$  (porówn. określenie Gaussa wartości średniej funkcji  $f(u)$  w miejscu  $n$ ).

Nie wdając się na tem miejscu w bardziej szczegółowe badania własności wahań średnich, znajdziemy wartość asymptotyczną na wahanie śred-

nie funkcji  $\tau(n)$  w miejscu  $n$ , zakładając, że stosunek  $\frac{\sqrt[4]{n^3 \log n}}{m}$  jest liczbą bardzo małą.

Na mocy wzoru (7) z łatwością znajdziemy wzór asymptotyczny:

$$W_{\tau}(n) = 2 \sqrt{\log n};$$

wahanie funkcji  $\tau(n)$  zatem wzrasta w miarę postępowania w szeregu naturalnym, i to w stosunku prostym do pierwiastka kwadratowego z logarytmu liczby  $n$ .

TABLICA WARTOŚCI FUNKCYI  $\tau(n)$ .

|    | 0  | 1  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7 | 8 | 9  |
|----|----|----|---|---|---|----|---|---|---|----|
| 1  | 1  | 4  | 4 | 0 | 4 | 8  | 0 | 0 | 4 | 4  |
| 2  | 8  | 0  | 0 | 8 | 0 | 0  | 4 | 8 | 4 | 0  |
| 3  | 8  | 0  | 0 | 0 | 0 | 12 | 8 | 0 | 0 | 8  |
| 4  | 0  | 0  | 4 | 0 | 8 | 0  | 4 | 8 | 0 | 0  |
| 5  | 8  | 8  | 0 | 0 | 0 | 8  | 0 | 0 | 0 | 4  |
| 6  | 12 | 0  | 8 | 8 | 0 | 0  | 0 | 0 | 8 | 0  |
| 7  | 0  | 8  | 0 | 0 | 4 | 16 | 0 | 0 | 8 | 0  |
| 8  | 0  | 0  | 4 | 8 | 8 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  |
| 9  | 8  | 4  | 8 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 8  |
| 10 | 8  | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 8 | 4 | 0  |
| 11 | 12 | 8  | 0 | 0 | 8 | 0  | 8 | 0 | 0 | 8  |
| 12 | 0  | 0  | 0 | 8 | 0 | 0  | 8 | 8 | 0 | 0  |
| 13 | 0  | 4  | 8 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 4 | 0  |
| 14 | 16 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 8 | 8 | 0 | 0  |
| 15 | 0  | 0  | 0 | 0 | 4 | 16 | 8 | 0 | 8 | 8  |
| 16 | 0  | 0  | 0 | 8 | 0 | 0  | 0 | 8 | 0 | 0  |
| 17 | 8  | 0  | 4 | 0 | 8 | 0  | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 18 | 16 | 0  | 0 | 8 | 0 | 0  | 0 | 0 | 8 | 0  |
| 19 | 8  | 8  | 0 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0  |
| 20 | 0  | 0  | 0 | 8 | 8 | 0  | 4 | 8 | 0 | 0  |
| 21 | 12 | 0  | 8 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 8 | 0  |
| 22 | 0  | 0  | 8 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0 | 8 | 0  |
| 23 | 0  | 16 | 0 | 0 | 0 | 12 | 8 | 0 | 0 | 8  |
| 24 | 0  | 0  | 8 | 8 | 8 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  |
| 25 | 0  | 8  | 4 | 0 | 8 | 8  | 0 | 0 | 0 | 0  |

 $0 \leq n < 250.$

$$250 \leq n < 500.$$

|    | 0  | 1  | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9  |
|----|----|----|----|----|---|----|---|----|----|----|
| 25 | 16 | 0  | 0  | 0  | 0 | 0  | 4 | 8  | 0  | 0  |
| 26 | 16 | 8  | 0  | 0  | 0 | 16 | 0 | 0  | 0  | 8  |
| 27 | 0  | 0  | 8  | 0  | 8 | 0  | 0 | 8  | 0  | 0  |
| 28 | 0  | 8  | 0  | 0  | 0 | 0  | 0 | 0  | 4  | 12 |
| 29 | 16 | 0  | 8  | 8  | 0 | 0  | 8 | 0  | 8  | 0  |
| 30 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 16 | 8 | 0  | 0  | 0  |
| 31 | 0  | 0  | 0  | 8  | 8 | 0  | 0 | 8  | 0  | 0  |
| 32 | 8  | 0  | 0  | 0  | 4 | 24 | 0 | 0  | 8  | 0  |
| 33 | 0  | 0  | 0  | 8  | 0 | 0  | 0 | 8  | 12 | 0  |
| 34 | 16 | 0  | 0  | 0  | 0 | 0  | 8 | 0  | 0  | 8  |
| 35 | 0  | 0  | 0  | 8  | 0 | 0  | 8 | 0  | 0  | 0  |
| 36 | 8  | 4  | 8  | 0  | 0 | 16 | 0 | 0  | 0  | 8  |
| 37 | 16 | 0  | 0  | 8  | 0 | 0  | 0 | 16 | 0  | 0  |
| 38 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 0  | 8 | 0  | 8  | 8  |
| 39 | 0  | 0  | 4  | 0  | 8 | 0  | 0 | 8  | 0  | 0  |
| 40 | 12 | 8  | 0  | 0  | 8 | 8  | 0 | 0  | 0  | 8  |
| 41 | 16 | 0  | 0  | 0  | 0 | 0  | 8 | 0  | 0  | 0  |
| 42 | 0  | 8  | 0  | 0  | 8 | 24 | 0 | 0  | 0  | 0  |
| 43 | 0  | 0  | 0  | 8  | 0 | 0  | 8 | 0  | 0  | 0  |
| 44 | 0  | 4  | 16 | 0  | 0 | 16 | 0 | 0  | 0  | 8  |
| 45 | 12 | 0  | 8  | 0  | 0 | 0  | 0 | 8  | 8  | 0  |
| 46 | 0  | 8  | 0  | 0  | 8 | 0  | 8 | 0  | 8  | 0  |
| 47 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 0  | 0 | 8  | 0  | 0  |
| 48 | 0  | 16 | 8  | 0  | 4 | 16 | 0 | 0  | 8  | 0  |
| 49 | 8  | 0  | 0  | 16 | 0 | 0  | 0 | 0  | 0  | 0  |

$$250 \leq n < 500.$$



$$500 \leq n < 750.$$

|    | 0  | 1 | 2 | 3  | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|----|----|---|---|----|---|----|----|----|----|----|
| 50 | 16 | 0 | 0 | 0  | 0 | 16 | 0  | 0  | 0  | 8  |
| 51 | 0  | 0 | 4 | 0  | 8 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 52 | 16 | 8 | 8 | 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 4  |
| 53 | 16 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0  | 0  | 0  | 8  | 0  |
| 54 | 0  | 8 | 0 | 0  | 8 | 16 | 0  | 0  | 8  | 8  |
| 55 | 0  | 0 | 0 | 0  | 8 | 0  | 0  | 8  | 0  | 0  |
| 56 | 0  | 0 | 8 | 0  | 0 | 16 | 0  | 0  | 0  | 8  |
| 57 | 0  | 0 | 0 | 0  | 0 | 0  | 4  | 8  | 12 | 0  |
| 58 | 16 | 0 | 0 | 0  | 8 | 16 | 8  | 0  | 0  | 0  |
| 59 | 0  | 0 | 8 | 8  | 0 | 0  | 8  | 0  | 0  | 0  |
| 60 | 0  | 8 | 0 | 0  | 0 | 8  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 61 | 16 | 0 | 8 | 8  | 0 | 0  | 0  | 8  | 0  | 0  |
| 62 | 0  | 0 | 0 | 0  | 0 | 20 | 8  | 0  | 8  | 16 |
| 63 | 0  | 0 | 0 | 0  | 8 | 0  | 0  | 8  | 0  | 0  |
| 64 | 8  | 8 | 0 | 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 4  | 0  |
| 65 | 24 | 0 | 0 | 8  | 0 | 0  | 8  | 8  | 0  | 0  |
| 66 | 0  | 8 | 0 | 0  | 0 | 0  | 8  | 0  | 0  | 0  |
| 67 | 0  | 0 | 0 | 8  | 8 | 0  | 12 | 8  | 0  | 0  |
| 68 | 16 | 0 | 0 | 0  | 0 | 16 | 0  | 0  | 0  | 16 |
| 69 | 0  | 0 | 8 | 0  | 0 | 0  | 0  | 16 | 8  | 0  |
| 70 | 0  | 8 | 0 | 0  | 0 | 0  | 8  | 0  | 0  | 8  |
| 71 | 0  | 0 | 8 | 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 72 | 8  | 0 | 4 | 0  | 8 | 24 | 0  | 0  | 0  | 4  |
| 73 | 16 | 0 | 0 | 8  | 0 | 0  | 0  | 0  | 8  | 0  |
| 74 | 16 | 0 | 0 | 0  | 0 | 16 | 8  | 0  | 0  | 0  |

$$500 \leq n < 750.$$

$$750 \leq n < 1000.$$

|    | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7 | 8 | 9  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|----|
| 75 | 0  | 0  | 0  | 0  | 16 | 0  | 0  | 8 | 0 | 0  |
| 76 | 0  | 8  | 0  | 0  | 0  | 16 | 0  | 0 | 0 | 8  |
| 77 | 0  | 0  | 8  | 8  | 0  | 0  | 8  | 0 | 8 | 0  |
| 78 | 0  | 0  | 0  | 0  | 4  | 16 | 0  | 0 | 8 | 0  |
| 79 | 0  | 0  | 0  | 16 | 8  | 0  | 0  | 8 | 0 | 0  |
| 80 | 12 | 8  | 8  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 8 | 8  |
| 81 | 8  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 8 | 0  |
| 82 | 16 | 8  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 0 | 8  |
| 83 | 0  | 0  | 8  | 8  | 0  | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  |
| 84 | 0  | 12 | 8  | 0  | 0  | 24 | 0  | 0 | 8 | 0  |
| 85 | 0  | 0  | 0  | 8  | 0  | 24 | 0  | 8 | 0 | 0  |
| 86 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 16 | 8  | 0 | 0 | 0  |
| 87 | 0  | 0  | 8  | 8  | 0  | 0  | 0  | 8 | 0 | 0  |
| 88 | 0  | 8  | 4  | 0  | 16 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  |
| 89 | 16 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 8 | 0  |
| 90 | 12 | 16 | 0  | 0  | 8  | 16 | 0  | 0 | 0 | 8  |
| 91 | 0  | 0  | 0  | 0  | 8  | 0  | 8  | 0 | 0 | 0  |
| 92 | 0  | 0  | 8  | 0  | 0  | 24 | 0  | 0 | 8 | 8  |
| 93 | 0  | 0  | 8  | 0  | 0  | 0  | 8  | 8 | 0 | 0  |
| 94 | 0  | 8  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 0 | 16 |
| 95 | 0  | 0  | 0  | 8  | 8  | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  |
| 96 | 0  | 4  | 16 | 0  | 8  | 16 | 0  | 0 | 4 | 0  |
| 97 | 16 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 8  | 8 | 0 | 0  |
| 98 | 8  | 8  | 0  | 0  | 0  | 16 | 16 | 0 | 0 | 0  |
| 99 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 8 | 0 | 0  |

$$750 \leq n < 1000.$$

TABLICA WARTOŚCI FUNKCYI  $\tau_4(n)$  dla  $n < 100$ .

|   | 0    | 1   | 2    | 3    | 4    | 5   | 6    | 7   | 8    | 9    |
|---|------|-----|------|------|------|-----|------|-----|------|------|
|   | 1    | 8   | 24   | 32   | 24   | 48  | 96   | 64  | 24   | 104  |
| 1 | 144  | 96  | 96   | 112  | 192  | 192 | 24   | 144 | 312  | 160  |
| 2 | 144  | 256 | 288  | 192  | 96   | 248 | 336  | 320 | 192  | 240  |
| 3 | 576  | 256 | 24   | 384  | 432  | 384 | 312  | 304 | 480  | 448  |
| 4 | 144  | 336 | 768  | 352  | 288  | 624 | 576  | 384 | 96   | 456  |
| 5 | 744  | 576 | 336  | 432  | 960  | 576 | 192  | 640 | 720  | 480  |
| 6 | 576  | 496 | 768  | 832  | 24   | 672 | 1152 | 544 | 432  | 768  |
| 7 | 1152 | 576 | 312  | 592  | 912  | 992 | 480  | 768 | 1344 | 640  |
| 8 | 144  | 968 | 1008 | 672  | 768  | 864 | 1056 | 960 | 288  | 720  |
| 9 | 1872 | 896 | 576  | 1024 | 1152 | 960 | 96   | 784 | 1368 | 1248 |

TABLICA WARTOŚCI FUNKCYI  $l(m, a)$  DLA  $m \leq 10$ .

| $\frac{a}{m}$ | 1  | 2  | 3 | 4  | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 |
|---------------|----|----|---|----|----|---|----|----|---|----|
| 2             | 2  | 2  | — | —  | —  | — | —  | —  | — | —  |
| 3             | 4  | 4  | 1 | —  | —  | — | —  | —  | — | —  |
| 4             | 8  | 4  | 0 | 4  | —  | — | —  | —  | — | —  |
| 5             | 4  | 4  | 4 | 4  | 9  | — | —  | —  | — | —  |
| 6             | 8  | 8  | 2 | 8  | 8  | 2 | —  | —  | — | —  |
| 7             | 8  | 8  | 8 | 8  | 8  | 8 | 1  | —  | — | —  |
| 8             | 16 | 16 | 0 | 8  | 16 | 0 | 0  | 8  | — | —  |
| 9             | 12 | 12 | 0 | 12 | 12 | 0 | 12 | 12 | 9 | —  |
| 10            | 8  | 8  | 8 | 8  | 18 | 8 | 8  | 8  | 8 | 18 |

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

A. DENIZOT.

## PRZYCZYNEK DO TEORII AKSONOMETRY.

(CONTRIBUTION À LA THEORIE DE LA PERSPECTIVE  
AXONOMÉTRIQUE).

---

Wiadomo, że ogólną zasadą skośnej aksonometrii jest twierdzenie *Pohlkego*<sup>1)</sup>, które orzeka:

„Trzy proste o dowolnych długościach i kierunkach, wyprowadzone z jednego punktu na płaszczyźnie, tworzą rzut równoległy trzech równych odcinków na trzech osiach układu prostokątnego, odmierzonych z początku współrzędnych. Jednakże tylko jedna z owych prostych lub jeden z kątów, zawartych pomiędzy osiami, może się równać zeru“.

Zakres praktycznego zastosowania i wyzyskania tego zagadnienia jest wprawdzie bardzo mały: w znanych perspektywach nie bierze się ani dowolnych wielkości osi, ani dowolnych kątów osi; rozstrzygają tu bądźto względy przeprowadzenia wygodnej i praktycznej konstrukcyi, bądźto dążenie do wywołania harmonijnego wrażenia przedmiotu. Nadto zaznaczyć wypada, że perspektywy używane nie są dopiero wpływem rozpoznania

---

<sup>1)</sup> Według podań *H. A. Schwarz*a (*Crelle*, 63 p. 309, 1864) *Pohlke* sformułował to twierdzenie około r. 1853, lecz ogłosił dopiero r. 1860 w pierwszym wydaniu swojego dzieła „*Darstellende Geometrie*“. Wydanie czwarte. Berlin 1876. str. 109. Literaturę dotyczącą twierdzenia *Pohlkego* zestawiał *Fr. Schilling*, *Zeitschrift f. Math. u. Phys.* 48, p. 487, 1903.

ogólnego twierdzenia, tylko istniały już przedtem, podyktowane potrzebą i bezpośrednio wyobraźnią.

Z tego punktu widzenia nie zachodziłaby potrzeba zastanawiania się dłużej nad powyższem twierdzeniem. Atoli to ogólne twierdzenie narzuca różne zasadnicze zagadnienia, których rozpatrzenie jest celem niniejszej rozprawy.

Dla całości podaję najprzód szkic dowodu twierdzenia Pohlkego. Wobec licznych prac, zajmujących się tym przedmiotem, nie mogę twierdzić, że rozumowanie moje zawiera myśli nowe; zbliżam się poniekąd do dowodu, podanego przez Reyego<sup>1)</sup>; jednakże sposób przeprowadzenia myśli zasadniczy jest—o ile mi się wydaje—prostszy, aniżeli w istniejących dowodach. Następnie rachunek, polegający na poprzednim rozumowaniu geometrycznem, daje w nader prosty sposób pewien wzór Pohlkego, wykazujący związek pomiędzy stosunkami skróceń osi a kątem nachylenia promieni względem tła; dalej otrzymujemy wzory, które pozwalają wyznaczyć z danego układu osi na tle kierunek promieni. Równocześnie okazuje się, że stosunków skróceń nie można—jak nieraz się utrzymuje—przyjąć dowolnie, tylko są one zależne od pewnego współczynnika, który w sposób jednoznaczny z danego układu osi wyznaczyć można. Celem dalszego badania jest—i to na podstawie wyprowadzonych wzorów—wyznaczenie układu osi na płaszczyźnie prostopadłej do promieni, których rzutem skośnym jest dany układ osi na na tle; zarazem poznajemy prosty sposób wykreślenia osi powinowactwa wzajemnie przynależnych płaszczyzn rzutów skośnych i prostokątnych. Takie zestawienie obydwóch rzutów, należących do jednego i tego samego pęku promieni, daje nam dopiero właściwą możność porównania utworów, powstających przez obydwaj rodzaje rzutów.

Na koniec podaję przykład, dotyczący znanej perspektywy kawalerskiej i to w oświetleniu przeprowadzonych ogólnych badań.

§ 1. Twierdzenie Pohlkego nie jest złączone z warunkiem, że odcinki, których rzutami są jakiegokolwiek trzy proste, wyprowadzone z jednego punktu na płaszczyźnie, są równe i odmierzone na osiach wzajemnie prostopadłych. Dowód tego twierdzenia może być przeprowadzony dla nierównych odcinków i dla dowolnego układu osi.

Niech będą zatem (fig. 1) w płaszczyźnie  $O_aX_a$ ,  $O_aY_a$ ,  $O_aZ_a$  osi aksonometryczne, a (fig. 2)  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  (trzy równe lub nierówne) odcinki na osiach jakiegokolwiek układu osi współrzędnych; stawiamy sobie zagadnienie:

<sup>1)</sup> Th. Reye, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 11, p. 350, 1886. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 12, p. 433, 1867.

Wykreślić na pewnej płaszczyźnie rzut skośny danego układu osi  $O(X'Y'Z')$  w ten sposób, aby rzut  $O'_a(X'_aY'_aZ'_a)$  był podobny do danego układu osi  $O_a(X_aY_aZ_a)$ ; albowiem możemy następnie układ  $O(X'Y'Z')$  w odpowiedni sposób tak zmienić, aby układy  $O'_a(\dots)$  i  $O_a(\dots)$  były identyczne.

Rozwiązanie tego zagadnienia uskutecznimy: 1-o wyznaczywszy kierunek promieni rzutów, 2-o znalazłszy położenie płaszczyzny rzutów (tła).

Aby znaleźć kierunek promieni rzutów, wyznaczmy w płaszczyźnie przesuniętej przez punkty  $X', Y', Z'$  punkt  $O'$ , który z punktem  $O_a$  danego utworu  $O_aX_aY_aZ_a$  jest w związku powinowactwa. Niech proste  $O_aX_a, O_aY_a, O_aZ_a$  przecinają boki trójkąta  $X_aY_aZ_a$  odpowiednio w punktach  $A, B, C$ ; wtenczas punkt  $O'$  otrzymujemy jako punkt przecięcia dwu pro-

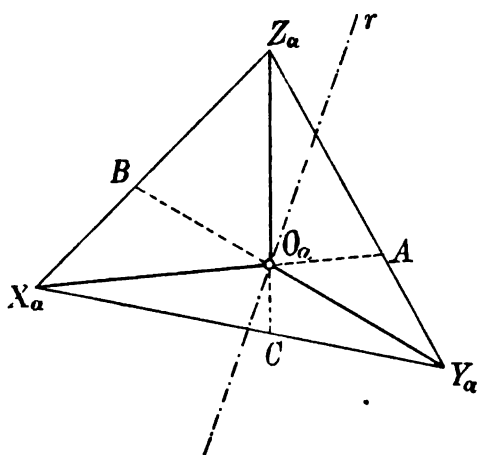


Fig. 1.

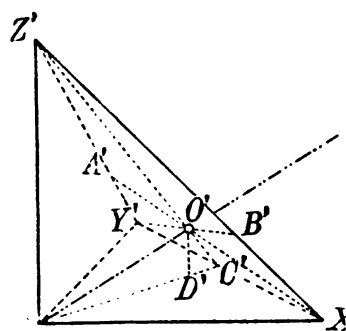


Fig. 2.

stych, np.  $X'A'$  i  $Y'B'$ , przyczem punkty  $A'$  i  $B'$  na bokach  $Y'Z'$  i  $Z'X'$  trójkąta  $X'Y'Z'$  są wyznaczone na podstawie stosunków:

$$\frac{A'Y'}{A'Z'} = \frac{AY_a}{AZ_a} \text{ i } \frac{B'Z'}{B'X'} = \frac{BZ_a}{BX_a}.$$

Żądany kierunek promieni rzutów jest następnie wyznaczony przez kierunek prostej  $OO'$ , łączącej początek  $O$  układu  $O(xyz)$  z punktem  $O'$ .

W celu rozwiązania drugiej części naszego zagadnienia, t. j. wyznaczenia położenia tła, przesunmy przez promień  $OO'=l$  i punkty  $X', Y', Z'$ , względnie  $A', B', C'$ , płaszczyzny  $\pi_x, \pi_y, \pi_z$  i weźmy pod uwagę powstały w ten sposób pęk płaszczyzn  $l(\pi_x, \pi_y, \pi_z, \dots)$ . Uważajmy następnie proste  $O_aX_a, O_aY_a, O_aZ_a$  jako trzy promienie, wyznaczające pęk promieni  $O_a(x_a, y_a, z_a, \dots)$ ,

jednokreślny względem pęku płaszczyzn  $l(\pi_x, \pi_y, \pi_z, \dots)$ . Rozumowanie nasze sprowadzamy przez to do rozwiązania znanego zagadnienia:

Mając dany pęk płaszczyzn  $l(\pi_x, \dots)$  i pęk promieni  $O_a(x_a, \dots)$ , sprowadzić te utwory do położenia perspektywicznego.

W tym celu <sup>1)</sup> przecinamy pęk  $l(\pi_x, \dots)$  płaszczyzną  $\Pi_0$ , prostopadłą do osi  $l$  podług pęku  $O_0(x_0, y_0, z_0, \dots)$  i wyznaczamy promienie odpowiednio prostopadłe  $q_a$  i  $r_a$ , tudzież  $q_0$  i  $r_0$  utworów  $O_a(x_a, y_a, z_a, \dots)$  i  $O_0(x_0, y_0, z_0, \dots)$ . Jak wiadomo, otrzymujemy następnie dwie płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$  o położeniu symetrycznym do osi  $l$ , przecinające pęk płaszczyzn  $l(\dots)$  podług pęków  $O'_{a_i}(x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}, \dots)$ , przyczem punkty  $X'_{a_i}, Y'_{a_i}, Z'_{a_i}$  ( $i=1, 2$ ) przedstawiają się jako rzuty równoległe punktów  $X', Y', Z'$  w kierunku prostej  $l$ . Z równości kątów  $\sphericalangle Y'_{a_i} O'_{a_i} Z'_{a_i} = \sphericalangle Y_a O_a Z_a$  i t. d. i z uwagi, że utwory  $O'_{a_i}(X'_{a_i}, Y'_{a_i}, Z'_{a_i})$  i  $O_a(X_a, Y_a, Z_a)$  są wzajemnie w związku powinowactwa, wynika podobieństwo tych utworów. Jeżeli jeszcze na osiach układu  $O(x, y, z)$  zamiast  $OX', OY', OZ'$  odmierzymy odcinki  $OX, OY, OZ$  i to wedle stosunków

$$\frac{O'_{a_i} X'_{a_i}}{OX'} = \frac{O_a X_a}{OX} \text{ i t. d.,}$$

natenczas otrzymamy w płaszczyznach  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$  utwory, zupełnie identyczne z utworem danym  $O_a(X_a, Y_a, Z_a)$ . c. b. d. d.

§ 2. W poprzednim rozumowaniu obraliśmy, jako punkt wyjścia, dowolny układ osi w przestrzeni i, wyznaczwszy kierunek promieni względem tego układu, wykazaliśmy następnie w sposób syntetyczny istnienie dwóch płaszczyzn  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$ , które czynią zadość warunkom zagadnienia. Przyjmując zatem płaszczyznę papieru jako tło rysunkowe  $\Pi_a$  przedmiotu, w której poprzednio scharakteryzowane kryją się dwie płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$ , tem samem winniśmy przyjąć istnienie dwu kierunków promieni, z których każdy wyznacza rysunek na tle, jako rzut dwóch równych przedmiotów o symetrycznym położeniu do promieni.

W następnem badaniu, stosownie do jednego tła, przyjmujemy tylko jeden kierunek promieni i jeden przedmiot w przestrzeni.

Osi układu, z którym przedmiot łączymy, przyjmujemy raz na zawsze wzajemnie prostopadłe i odmierzamy na nich odcinki  $OX, OY, OZ$  równe odcinkowi jednostki „ $a$ ”, których rzuty na tle są  $O_a X_a, O_a Y_a, O_a Z_a$ .

<sup>1)</sup> Zob. M. Łazar ski, Zasady Geometrii wykreślnej, Lwów 1903, tom I, str. 8.



Stawiamy teraz pytanie: Pod jakim kątem padają promienie rzutów na tło?

Niech będą:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  kąty, zawarte pomiędzy promieniem rzutów  $l$  a osiami  $OX, OY, OZ$ ;

$O_0X_0 = p_1, O_0Y_0 = p_2, O_0Z_0 = p_3$  rzuty prostokątne jednostki „ $a$ ” w płaszczyźnie  $\Pi_0$ ;

$O_aX_a = q_1, O_aY_a = q_2, O_aZ_a = q_3$  odpowiednie rzuty skośne na tle  $\Pi_a$ ;

$\sphericalangle Y_0O_0Z_0 = \xi_0, \sphericalangle Z_0O_0X_0 = \eta_0, \sphericalangle X_0O_0Y_0 = \zeta_0$ ;

$\sphericalangle Y_aO_aZ_a = \xi, \sphericalangle Z_aO_aX_a = \eta, \sphericalangle X_aO_aZ_a = \zeta$ .

Stosunki  $\kappa_i = \frac{p_i}{a}$  względnie  $\lambda_i = \frac{q_i}{a}$  ( $i=1, 2, 3$ ) nazywać będziemy stosunkami skróceń rzutów prostokątnych, względnie stosunkami skróceń (lub przedłużeń) rzutów skośnych.

Mamy najprzód związki:

$$p_i = a \sin \sigma_i, \quad (1)$$

skąd wynika znany związek:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 2a^2 \quad (2)$$

względnie:

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 = 2. \quad (2^*)$$

Oznaczmy przez  $\tau_i$  kąty, zawarte między  $p_i$  i  $q_i$ , a otrzymamy:

$$p_i = q_i \cos \tau_i. \quad (3)$$

Utwórzmy sumę kwadratów związków (3), przyczem piszemy:

$$\cos^2 \tau_i = 1 - \sin^2 \tau_i,$$

to, przy uwzględnieniu wzoru (2), będzie:

$$2a^2 = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (q_1^2 \sin^2 \tau_1 + q_2^2 \sin^2 \tau_2 + q_3^2 \sin^2 \tau_3). \quad (4)$$

W celu uproszczenia tego wzoru sprowadźmy płaszczyznę  $\Pi_a$  względem  $\Pi_0$  przez przesunięcie równoległe do takiego położenia, aby punkty  $O_a$  i  $O_0$  tworzyły jeden punkt  $O_0$ , tak że prosta  $r$ , podług której płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  się przecinają, czyli oś powinowactwa utworów  $O_aX_aY_aZ_a$  i  $O_0X_0Y_0Z_0$  przesunięta będzie przez punkt  $O_0$  (fig. 3).

Będą wtedy

$$h_i = q_i \sin \tau_i \quad (5)$$

prostopadłe, wyprowadzone z punktów  $X_a, Y_a, Z_a$  na płaszczyznę  $\Pi_0$  i przebijające tę płaszczyznę w punktach  $X_0, Y_0, Z_0$ .

Niech  $\varphi$  oznacza kąt nachylenia płaszczyzn  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  i niech będą  $\delta_i$  prostopadłe, wyprowadzone z punktów  $X_0, Y_0, Z_0$  do osi powinowactwa  $r$ , przyczem  $D_i$  oznaczają spodki tych prostopadłych; będzie:

$$h_i = \delta_i \operatorname{tg} \varphi, \quad (6)$$

skąd wynika:

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (7)$$

Z trójkątów  $X_0 D_1 O_0$  i t. d. mamy:

$$\delta_1^2 = p_1^2 - \overline{O_0 D_1^2} \text{ i t. d.} \quad (8)$$

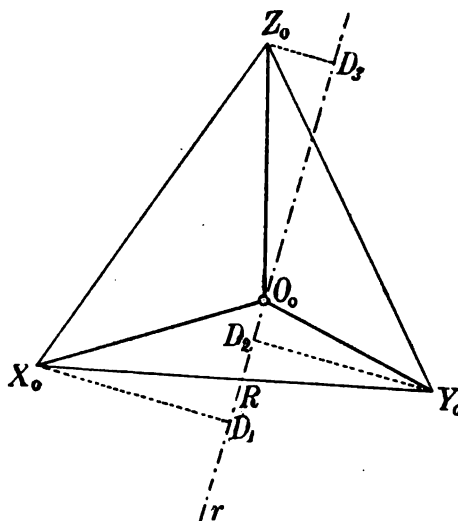


Fig. 3.

Odcinki  $O_0 D_i$  zaś są rzutami prostokątnymi odcinków  $O X, O Y, O Z$  na prostą  $r$ ; z uwagi tej wynika:

$$\overline{O_0 D_1^2} + \overline{O_0 D_2^2} + \overline{O_0 D_3^2} = a^2. \quad (9)$$

A zatem z trzech równań (8), przy uwzględnieniu równania (2), wynika:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = a^2. \quad (10)$$

Powracając do wzorów (7) i (4), otrzymamy:

$$2a^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad (11)$$

czyli, wprowadzając stosunki skróceń:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2. \quad (11^*)$$

§ 3. Wzór ten, podany po raz pierwszy przez P o h l k e g o<sup>1)</sup>, wykazuje związek pomiędzy stosunkami skróceń a kątem nachylenia ( $\varphi$ ) płaszczyzny  $\Pi_a$  do  $\Pi_0$  lub też kątem ( $90^\circ - \varphi$ ), pod którym promienie rzutów względem tła są pochylone. Podwójna wartość na  $\operatorname{tg} \varphi$  wskazuje dwie płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a'}$ , względnie dwa kierunki promieni, o których wspomnieliśmy na początku poprzedniego ustępu.

W myśl zagadnienia P o h l k e g o można przyjąć dowolnie osi aksonometryczne co do kierunku ( $\xi, \eta, \zeta$ ) i długości ( $q_1, q_2, q_3$ ), natomiast wybór stosunków skróceń ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) nie jest dowolny. Jeżeli przyjmiemy np.  $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$  otrzymujemy, wedle (11\*),  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{-1}$ , co znaczy, że obraliśmy fałszywie powyższe skrócenia. Popelnia się więc niedokładność, jeżeli się bez ogródki twierdzi, że przy aksonometrii skośnej rzuty osi nie tylko co do kierunku, ale i co do stosunków skróceń mogą być dowolnie przyjęte.

Związek pomiędzy stosunkami skróceń ( $\lambda_i$ ) a przyjętymi osiami ( $q_i$ ) jest raczej następujący:

Jeśli dane są długości osi, to równocześnie jest znany tylko stosunek stosunków skróceń; niechaj nim będzie:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = m_1 : m_2 : m_3,$$

gdzie  $m_i$  uważamy jako liczby całkowite (dodatnie), które, w myśl ogólnego zagadnienia, dowolnie przyjąć możemy i które nazywać będziemy liczbami skróceń. Natenczas:

$$\lambda_i = \varrho m_i,$$

gdzie  $\varrho$  oznacza pewien (dodatni) współczynnik; przytem wzór (11\*) zmienia się na:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \varrho^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - 2. \quad (11^{**})$$

<sup>1)</sup> P o h l k e, Darstellende Geometrie. Vierte Auflage p. 112.

Aby tedy stosunki  $\lambda_i$  i kąt  $\varphi$  były znane, winniśmy wyznaczyć współczynnik  $\rho$ . Sposób, w jaki to skutecznie można, podamy później.

§ 4. W celu wyprowadzenia dalszych wniosków z ogólnego twierdzenia, weźmy pod uwagę przekrój prostopadły ( $II_0$ ) pęku płaszczyzn  $l(\pi_x, \pi_y, \pi_z \dots)$ . Trójkąt  $Z_0 O_0 Y_0$  jest przytem prostokątnym rzutem trójkąta  $ZOY$ ; kątem nachylenia płaszczyzn obydwóch trójkątów jest kąt, zawarty między prostopadłymi do tych płaszczyzn, a więc  $\sigma_1$ ; zatem otrzymujemy jako wyrażenie na podwójną płaszczyznę  $\Delta Z_0 O_0 Y_0$  i w podobny sposób na  $\Delta Y_0 O_0 X_0$  i  $\Delta X_0 O_0 Z_0$ :

$$\begin{aligned} p_2 p_3 \sin \xi_0 &= a^2 \cos \sigma_1, \\ p_3 p_1 \sin \eta_0 &= a^2 \cos \sigma_2, \\ p_1 p_2 \sin \zeta_0 &= a^2 \cos \sigma_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Uważając zaś  $\Delta Z_0 O_0 Y_0$  jako rzut prostokątny trójkąta  $Z_a O_a Y_a$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 \sin \xi_0 &= q_2 q_3 \sin \xi \cdot \cos \varphi, \\ p_2 p_1 \sin \eta_0 &= q_3 q_1 \sin \eta \cdot \cos \varphi, \\ p_1 p_2 \sin \zeta_0 &= q_1 q_2 \sin \zeta \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Pierwsze wzory (12) prowadzą do znanych wzorów Weisbacha na aksonometrię prostokątną.

Uwzględniając wzory (1), piszemy:

$$\cos \sigma_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \sigma_1} = \frac{\sqrt{a^2 - p_1^2}}{a},$$

czyli na podstawie wzoru (2):

$$a^2 \cos \sigma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}. \quad (14)$$

Wiążemy (14) z (12) i otrzymujemy znane wzory; po wprowadzeniu zaś stosunków skróceń  $\kappa_i = \frac{p_i}{a}$ , będzie:

$$\begin{aligned} \sin \xi_0 &= \frac{1}{2\kappa_2 \kappa_3} \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)(-\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)}, \\ \sin \eta_0 &= \frac{1}{2\kappa_1 \kappa_3} \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)(+\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2)}, \\ \sin \zeta_0 &= \frac{1}{2\kappa_1 \kappa_2} \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)(+\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \kappa_3^2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Połączenie wzorów (12) i (13) prowadzi do nowych wniosków. Z wzorów tych wynika szereg równań:

$$\frac{a^2}{\cos \varphi} = \frac{q_2 q_3 \sin \xi}{\cos \sigma_1} = \frac{q_1 q_3 \sin \eta}{\cos \sigma_2} = \frac{q_1 q_2 \sin \zeta}{\cos \sigma_3} \quad (16)$$

Istnienie tych równań jest tylko możliwe pod warunkiem równoczesnego istnienia stosunków:

$$\cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 = \frac{\sin \xi}{q_1} : \frac{\sin \eta}{q_2} : \frac{\sin \zeta}{q_3} \quad (17)$$

A zatem: Dostawy kątów promieni są proporcjonalne do ilorazów wstaw kątów, zawartych między dwiema osiami aksonometrycznymi, przez oś trzecią.<sup>1)</sup>

Zagadnienie to pozwala z danego układu osi na tle wyznaczyć kierunek promieni względem osi przyjętego układu, do którego punkty przedmiotu się odnoszą.

§ 5. Powróćmy do dowodu twierdzenia P o h l k e g o i przypomnijmy sobie, że tam wyznaczyliśmy w inny sposób kierunek promieni. Biorąc punkty przecięcia  $A, B, C$  danych osi na tle z przeciwległymi bokami trójkąta  $X, Y, Z$ , znaleźliśmy odpowiednie punkty  $A' B' C'$  na bokach  $\Delta X' Y' Z'$  (fig. 2). Wprowadzamy zatem do rozumowania następujące stosunki, dane na tle przez położenie osi aksonometrycznych:

$$\frac{AO_a}{AX_a} = \mu_1, \quad \frac{BO_a}{BY_a} = \mu_2, \quad \frac{CO_a}{CZ_a} = \mu_3 \quad (18)$$

Według tych samych stosunków dzieli punkt  $O'$  proste  $A'X', B'Y', C'Z'$  trójkąta  $X' Y' Z'$ . Wyprowadźmy z punktu  $O'$  prostopadłą  $O'D' = z'$  do płaszczyzny  $OX'Y'$ , a otrzymamy z  $\Delta C'O'Z'$  stosunek:

$$\frac{O'D'}{Z'O} = \frac{C'O'}{C'Z'}$$

czyli:

$$\frac{z'}{a} = \mu_3.$$

<sup>1)</sup> Wzór (17) zachodzi w innym związku w pracy H. A. Schwarz a l. c..

Otrzymujemy zatem na współrzędne punktu  $O'$ :

$$x' = a\mu_1, \quad y' = a\mu_2, \quad z' = a\mu_3. \quad (19)$$

Na podstawie tych wartości wynika wyrażenie na odległość punktu  $O'$  od początku współrzędnych  $O$ ; będzie:

$$r = a\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2};$$

a kierunek prostej  $OO'$ , t. j. promienia rzutów, jest wyznaczony na podstawie wyrażen:

$$\cos \sigma_1 = \frac{x'}{r} = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \text{ i t. d.} \quad (20)$$

czyli

$$\cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3. \quad (21)$$

Stosunek wartości (18) wyznacza więc stosunek dostaw kierunku promieni rzutów.

Uważając stosunki  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  jako dane, możemy wyrazić przez nie i inne poprzednio wyznaczone wielkości. Np. otrzymujemy na wstawy kątów  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ :

$$\sin \xi_0 = \frac{\cos \sigma_1}{\sin \sigma_2 \sin \sigma_3} = \mu_1 \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{(\mu_1^2 + \mu_2^2)(\mu_1^2 + \mu_3^2)}} \quad (22)$$

i podobne wyrażenia na  $\sin \eta_0$  i  $\sin \zeta_0$ .

§ 6. Jeżeli na osiach  $Ox, Oy, Oz$  naszego prostokątnego układu w przestrzeni odmierzymy odcinki (rys. 4)  $OM_1, OM_2, OM_3$ , proporcjonalne odpowiednio do  $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}$ , to płaszczyzna, przesunięta przez  $M_1, M_2, M_3$ , jest prostopadła do kierunku promieni, albowiem wzory (20) wyrażają kierunek prostopadłej do tej płaszczyzny.

Trójkąt  $M_1 M_2 M_3$ , którego boki mają stosunek wzajemny

$$\overline{M_1 M_2} : \overline{M_2 M_3} : \overline{M_3 M_1} = \sqrt{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2}} : \sqrt{\frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2}} : \sqrt{\frac{1}{\mu_3^2} + \frac{1}{\mu_1^2}}, \quad (23)$$

przedstawia zatem trójkąt śladów przekroju ( $\Pi_0$ ) prostopadłego do pęku promieni. Punkt  $O_0$ , jako rzut prostokątny wierzchołka  $O$  na płaszczyznę  $\Pi_0$ , jest wspólnym punktem przecięcia wysokości trójkąta śla-

dów, przez co równocześnie są dane kierunki (22) osi aksonometrycznych na płaszczyźnie  $\Pi_0$ .

§ 7. U w a g a. Wzajemne połączenie wzorów (17) i (18) względnie (21) prowadzi do wzoru:

$$\frac{AO_a}{AX_a} : \frac{BO_a}{BY_a} : \frac{CO_a}{CZ_a} = \frac{\sin \xi}{q_1} : \frac{\sin \eta}{q_2} : \frac{\sin \zeta}{q_3}.$$

Uważajmy proste  $AX_a$ ,  $BY_a$ ,  $CZ_a$  jako poprzeczne w trójkącie  $X_aY_aZ_a$ , przechodzące przez wspólny punkt  $O_a$ , to powyższy wzór określa pewne związki metryczne, dotyczące poprzecznych i zawartych między nimi kątów.

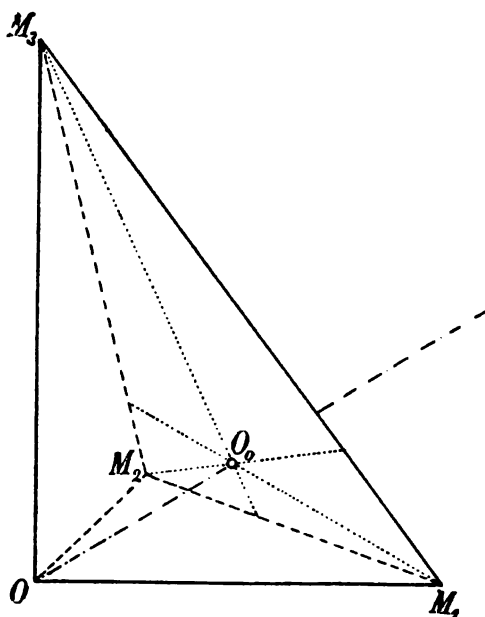


Fig. 4.

Przykład. Jeżeli  $O_a$  jest środkiem ciężkości trójkąta, to otrzymujemy na podstawie powyższego wzoru:

$$\frac{\sin \xi}{t_1} = \frac{\sin \eta}{t_2} = \frac{\sin \zeta}{t_3},$$

gdzie  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  oznaczają linie środkowe.

W stosunku do płaszczyzny  $\Pi_0$  wyraża ten przypadek rzut izometryczny.

§ 8. Wyznaczenie współczynnika  $\varrho$ . Wzory (12) i (13) w połączeniu z warunkiem

$$\xi + \eta + \zeta = 360^\circ, \quad (24)$$

któremu kąty  $\xi, \eta, \zeta$  winny zadość czynić, wskażą nam drogę, na której możemy wyznaczyć współczynnik  $\varrho$ , dotyczący stosunków skrótów (§ 3).

W tym celu wyprowadzamy z wzorów (12) i (13) wartości na wstawy kątów  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\sin \xi = \frac{a^2}{q_2 q_3} \cos \sigma_1 \cdot \frac{1}{\cos \varphi}. \quad (25)$$

Kładziemy w równaniu (25) wyrażenie na skrótach:

$$\lambda_i = \frac{q_i}{a} = \varrho m_i$$

oraz wzór, wynikający z (11\*\*):

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{\varrho^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - 1};$$

dla krótkości piszemy:

$$u = \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^4}} \quad (26)$$

a otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sin \xi &= \frac{\cos \sigma_1}{m_2 m_3} u, \\ \sin \eta &= \frac{\cos \sigma_2}{m_3 m_1} u, \\ \sin \zeta &= \frac{\cos \sigma_3}{m_1 m_2} u. \end{aligned} \quad (27)$$

Dostawy kątów  $\sigma_i$ , które na podstawie wzorów (17) lub (21) uważamy jako dane, są niezależne od współczynnika  $\varrho$ , tak że jedynie wielkość  $u$  zawiera ten współczynnik.

Na zasadzie warunku (24) mamy znany wzór goniometryczny:

$$\cos \xi + \cos \eta + \cos \zeta + 4 \cos \frac{\xi}{2} \cos \frac{\eta}{2} \cos \frac{\zeta}{2} + 1 = 0. \quad (28)$$

Wyrażamy dostawy połów kątów przez dostawy całych kątów i zamiast (28) otrzymamy:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta - 2 \cos \xi \cos \eta \cos \zeta - 1 = 0. \quad (29)$$



względnie

$$4 \sin^2 \xi \sin^2 \eta \sin^2 \zeta - 4 \sin^2 \xi \sin^2 \zeta + (\sin^2 \xi - \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta)^2 = 0. \quad (30)$$

Wprowadzając do tego wzoru wyrażenia (27), otrzymamy równanie na  $u$ :

$$u^2 = \frac{4m_1^2 \cos^2 \sigma_1 m_3^2 \cos^2 \sigma_3 - (m_1^2 \cos^2 \sigma_1 - m_2^2 \cos^2 \sigma_2 + m_3^2 \cos^2 \sigma_3)^2}{4 \cos^2 \sigma_1 \cos^2 \sigma_2 \cos^2 \sigma_3}. \quad (31)$$

Równanie, wynikające z (26):

$$\frac{1}{\rho^4} - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \frac{1}{\rho^2} + u^2 = 0 \quad (32)$$

daje dwie wartości na współczynnik  $\rho$ ; przekonamy się jednak, że tylko jednej wartości użyć można. Rozwiązanie równania (32) prowadzi do wzoru:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 - 4u^2}. \quad (33)$$

Wzór ten napiszemy w postaci:

$$\rho^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - 2 = \mp \rho^2 \sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 - 4u^2}. \quad (34)$$

Lewa strona tego równania przedstawia wedle (11\*\*) wartość na  $\operatorname{tg}^2 \varphi$ . Z uwagi tej wnioskujemy, że tylko wartość dodatnia pierwiastnika wzoru (34) czyli ujemny znak w (33) wyznacza wartość na współczynnik  $\rho$ . Zatem:

Dowolnie przyjętym liczbom skrótów  $m_i$  odpowiada jedna jedyna wartość na współczynnik  $\rho$ .

Jeżeli są dane na tle  $\Pi_*$  osi aksonometryczne ( $q_i$ ), a więc zarazem i liczby skrótów ( $m_i$ ), to otrzymamy na stosunki skrótów wartości:

$$\lambda = \rho m_i, \quad (35)$$

a na jednostkę „ $a$ ” wartość:

$$a = \frac{q_i}{\rho m_i}; \quad (36)$$

długości osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$  będą:

$$p_i = a \kappa_i = \frac{\kappa_i q_i}{\rho m_i}. \quad (37)$$

§ 9. Wykreślenie układu osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$ . Poprzednio przeprowadzone rozumowanie pozwala wykreślić układ osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$ , jeżeli jest dany układ w płaszczyźnie  $\Pi_*$ .

Kierunek osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$  możemy obliczyć, posługując się wzorami (15), jeżeli poprzednio wyznaczyliśmy  $\kappa_i = \sin \sigma_i$  na zasadzie wartości dostaw kątów  $\sigma_i$  (17).

W sposób geometryczny otrzymamy kąty  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  najwygodniej za pomocą trójkąta śladów  $M_1 M_2 M_3$ , którego stosunek boków jest dany przez wzór (23).

W celu przeprowadzenia konstrukcyi dobieramy dowolny odcinek  $e$  i wyznaczamy wielkości:

$$e \cdot \frac{AX_a}{AO_a} = \frac{e}{\mu_1} = n_1, \quad e \cdot \frac{BY_a}{BO_a} = n_2, \quad e \cdot \frac{CZ_a}{CO_a} = n_3,$$

jako czwarte proporcjonalne według

$$A_a O : AX_a = e : n_1, \text{ i t. d.}$$

Następnie z wyznaczonych odcinków  $n_1, n_2, n_3$  otrzymamy za pomocą trójkątów prostokątnych boki trójkąta śladów:

$$\overline{M_1 M_2} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}, \quad \overline{M_2 M_3} = \sqrt{n_2^2 + n_3^2}, \quad \overline{M_3 M_1} = \sqrt{n_3^2 + n_1^2}.$$

Kierunek osi wykreślamy, prowadząc (fig. 5) z wierzchołków trójkąta śladów ( $M_1 M_2 M_3$ ) prostopadłe do przeciwległych boków.

Odmierzamy następnie z punktu  $O_0$ , wspólnego punktu przecięcia tych prostopadłych, odcinki  $O_0 X_0 = p_1, O_0 Y_0 = p_2, O_0 Z_0 = p_3$ , danych na podstawie wzorów (37), a otrzymamy układ osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$ .

Z korzyścią możemy się także posługiwać sposobami, znanymi z aksonometrii prostokątnej <sup>1)</sup>. W tym celu uskuteczniamy kłady pewnych płaszczyzn ( $\overline{M_1 O M_2}$  i t. d.) na płaszczyznę  $\Pi_0$ ; następnie odmierzymy na kładach  $\overline{O M_1}, \overline{O M_2}, \overline{O M_3}$  odcinki  $\overline{O X_0}, \overline{O Y_0}, \overline{O Z_0}$ , równe jednostce „a”, i wyznaczamy rzuty prostokątne  $O_0 X_0, O_0 Y_0, O_0 Z_0$ . Równocześnie otrzymamy, jak wiadomo, stosunki skróceń, t. j. wstawy kątów  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Konstrukcyja geometryczna nadawać się będzie mianowicie wtenczas, jeśli nie zależy na istotnych długościach osi ( $p$ ), tylko na ich stosunku wzajemnym.

§ 10. Wyznaczenie osi powinowactwa. Utwory w płaszczyznach  $\Pi_0$  i  $\Pi_a$  są wzajemnie zwarte osią powinowactwa. Jeden ze sposobów wyznaczenia tej osi, nadających się mianowicie do konstrukcyi geometrycznej, wskazuje druga część dowodu twierdzenia Pohlkego. Wyżej rozwinięte wzory umożliwiają jej wykreślenie także na podstawie rachunku. Znając bowiem stosunek prostopadłych  $\delta_i$ , poprowadzonych z punktów np.  $X_0$  i  $Y_0$  do osi powinowactwa, przesuniętej przez  $O_0$ , znajdujemy na prostej-

<sup>1)</sup> M. Łazarski, l. c. 102.

$X_0 Y_0$  punkt  $B$  (fig. 3), jako drugi punkt tej osi, który dzieli odcinek  $X_0 Y_0$  w stosunku owych prostopadłych.

Celem wyznaczenia tego stosunku łączymy wzory (5) i (6) i otrzymamy na prostopadle:

$$\delta_i = \frac{q_i \sin \tau_i}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (38)$$

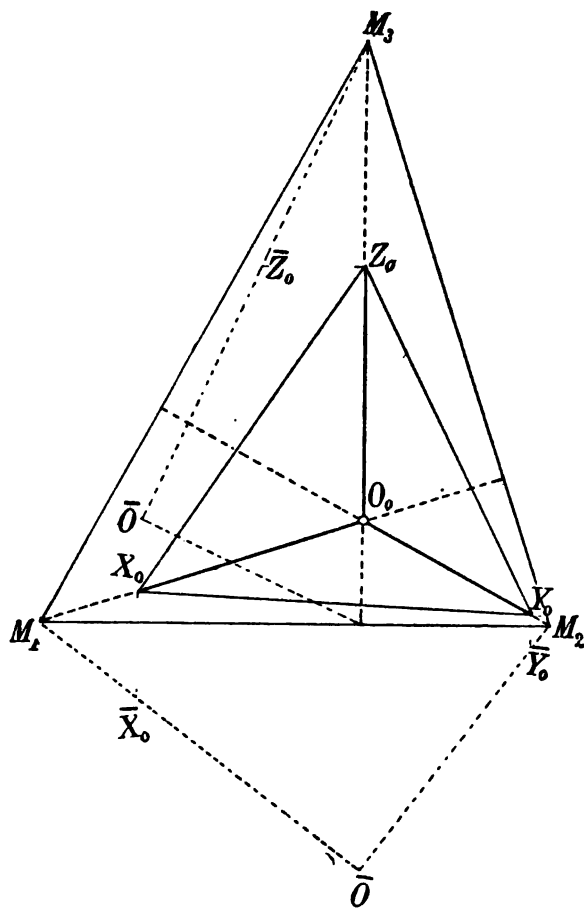


Fig. 5.

Zważmy, że:

$$\cos \tau_i = \frac{\eta_i}{q_i} = \frac{\alpha_i}{\lambda_i},$$

a będzie zamiast (38)

$$\delta_i = \frac{\sqrt{q_i^2 - \eta_i^2}}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (39)$$

Kładąc w równaniach (39)  $\kappa_i = \frac{p_i}{a}$ ,  $\lambda_i = \frac{q_i}{a}$  jako wartości znane, otrzymamy na wyrażenie szukanego stosunku:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = \sqrt{\lambda_1^2 - \kappa_1^2} : \sqrt{\lambda_2^2 - \kappa_2^2} : \sqrt{\lambda_3^2 - \kappa_3^2}. \quad (40)$$

§ 11. W rozprawie „Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective“ podaje Hauck<sup>1)</sup> przy zastosowaniu ogólniejszej teorii do rzutów równoległych, oprócz wzoru (11\*\*), szeregu innych wzorów. Pod pewnym względem wyniki przeprowadzonego w niniejszej rozprawie rozumowania są w pewnej sprzeczności z orzeczeniami wspomnianego autora. Z badań jego nie wynika, że współczynnik  $\varrho$ , zachodzący we wzorze (11\*\*), posiada tylko jedną wartość. Nadto zachodzą tam wzory, zależne nie tylko od stosunków skróceń, lecz jeszcze od pewnych pomocniczych wielkości, nie zachodzących we wzorach naszych, które są niejako wyodrębnione z pod zależności od zagadnienia Pohlkego. Wykazuje się, że te wielkości pomocnicze są to odcinki, wyznaczone przez tło  $\Pi_a$  na osiach  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Jest widoczne, że jeżeli wyrazi się te odcinki przez wielkości, przyjęte w naszej rozprawie, natenczas zniknie niezależność owych wzorów od ogólnego zagadnienia.

§ 12. Zastosowanie. Poprzednio przeprowadzone rozumowanie stosujemy do pewnego przypadku perspektywy kawaleryjskiej, najprostszego przykładu aksonometrii skośnej.

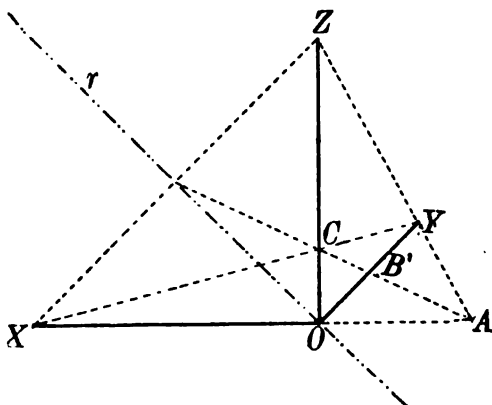


Fig. 6.

<sup>1)</sup> G. Hauck, Zeitschrift für Mathem. u. Phys. 21, p. 81, 1876.

Jako dane bierzemy (fig. 6) długości osi (w dowolnej jednostce):

$$OX = q_1 = 1, \quad OY = q_2 = \frac{1}{2}, \quad OZ = q_3 = 1,$$

tudzież kąty aksonometryczne:

$$\xi = 45^\circ, \quad \eta = 90^\circ, \quad \zeta = 225^\circ;$$

przyjmujemy zatem jako dane równocześnie liczby skróceń:

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2.$$

Dla kierunku promieni  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  wynika z wzoru (17):

$$\begin{aligned} \cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 &= \frac{\sin 45^\circ}{1} : \frac{\sin 90^\circ}{\frac{1}{2}} : \frac{\sin 225^\circ}{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} : 2 : \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Będzie:

$$\cos \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316; \quad \cos \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894; \quad \cos \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316.$$

Do tego samego wyniku prowadzą wzory (20). W tym celu wyznaczamy:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{AO}{AX} = \frac{OY}{XZ} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ \mu_2 &= \frac{CO}{CZ} = \frac{OY}{XZ} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Punkt  $B$  leży w nieskończoności; wartość stosunku  $\mu_2 = \frac{B_\infty O}{B_\infty Y} = \frac{\infty}{\infty}$  otrzymamy z uwagi, że punkt  $B'$ , jako punkt przecięcia prostych  $OY$  i  $AC$ , jest do punktu  $B_\infty$  w stosunku harmonicznym; zatem:

$$\mu_2 = \frac{B_\infty O}{B_\infty Y} = \frac{B'O}{B'Y} = 1.$$

Z wartości na  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  otrzymujemy za pomocą wzoru (21) wartości na dostawy kątów  $\sigma_i$ .

Na podstawie wartości  $\cos \sigma_i$  wynika z (31):  $u^2 = 20$ , a następnie z równania (32), gdy bierzemy tylko pierwiastek ujemny, wynika:  $\rho = \frac{1}{2}$ . Zatem stosunki skróceń będą:  $\lambda_1 = \rho m_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = \rho m_2 = \frac{1}{2}$ ;  $\lambda_3 = \rho m_3 = 1$ ; jednostka „ $a$ “ będzie (36):  $a = 1$ ; kąt, zawarty między płasz-

czyznami  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  będzie (11\*\*):  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$ ;  $\varphi = 36^\circ,5$ ; zatem kąt promieni rzutów do tła:  $90 - \varphi = 63^\circ,5$ .

Płaszczyzna  $\Pi_0$  rzutów prostokątnych:

Stosunki skróceń:

$$\kappa_1 = \sin \sigma_1 = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,149; \kappa_2 = \sin \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447; \kappa_3 = \sin \sigma_3 = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,949.$$

Kąty, zawarte między osiami, na podstawie (15) lub (22):

$$\sin \xi_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}; \sin \eta_0 = \frac{4\sqrt{5}}{9}; \sin \zeta_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\xi_0 = 48^\circ 10'; \eta_0 = 83^\circ 40'; \zeta_0 = 228^\circ 10'.$$

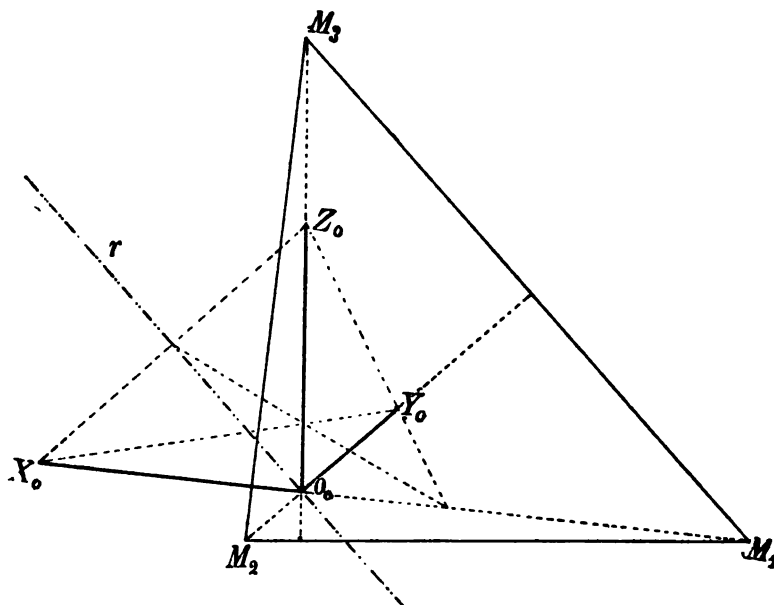


Fig. 7.

Kąty te otrzymujemy także za pomocą trójkąta śladów ( $M_1 M_2 M_3$ ), którego boki są w stosunku (23):  $3 : 3 : 4$ .

Długości osi (37):  $p_1 = 0,949$ ;  $p_2 = 0,447$ ;  $p_3 = 0,949$ .

Stosunek prostopadłych (40):  $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$ .

A zatem oś powinowactwa  $r$  płaszczyzn  $\Pi_0$  i  $\Pi_a$ , przeprowadzona przez wierzchołek osi  $O$  względnie  $O_0$ , przecina środek odcinków  $\overline{XZ}$  względnie  $\overline{X_0Z_0}$ .

Uzupełnienie osi na płach  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  do sześciianu daje pojęcie o wrażeńiu odtworzonego przedmiotu; porównanie rysunków wypada na korzyść rzutów prostokątnych.

Na koniec podaję liczby, odnoszące się do rysunków (1—5), zachodzących w rozprawie:

$$\xi = 121^\circ, \eta = 95^\circ, \zeta = 144^\circ.$$

$$q_1 = 42, q_2 = 36, q_3 = 38.$$

$$m_1 = 21, m_2 = 18, m_3 = 19.$$

$$\cos \sigma_1 = \tau \cdot \frac{\sin 59}{21} = 0,5413.$$

$$\cos \sigma_2 = \tau \cdot \frac{\sin 85}{18} = 0,7339.$$

$$\cos \sigma_3 = \tau \cdot \frac{\sin 36}{19} = 0,4103.$$

$$\tau^2 = 0,005686 = 1.$$

$$\cos^2 \sigma_1 = 0,2930; \cos^2 \sigma_2 = 0,5387; \cos^2 \sigma_3 = 0,1683.$$

$$\kappa_1^2 = 0,7070; \kappa_2^2 = 0,4613; \kappa_3^2 = 0,8317.$$

$$\kappa_1 = 0,841; \kappa_2 = 0,679; \kappa_3 = 0,912.$$

$$\xi_0 = 119^\circ 5'; \eta_0 = 106^\circ 50'; \zeta_0 = 134^\circ 5'.$$

$$u^2 = 293307; e = 0,0494.$$

$$\lambda_1 = 1,038; \lambda_2 = 0,890; \lambda_3 = 0,939.$$

$$a = 20,2.$$

$$p_1 = 17,0; p_2 = 13,7; p_3 = 18,5^1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,867; \varphi = 40^\circ 55'.$$

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 61 : 57,5 : 22,5.$$

Charlottenburg, w listopadzie 1906.

<sup>1)</sup> Trójkąt  $X_0 Y_0 Z_0$  jest narysowany w powiększonej mierze.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)



G. MITTAG-LEFFLER.

O PRZEDSTAWIENIU ANALITYCZNYM  
JEDNOZNACZNEJ GAŁĘZI FUNKCYI ANALITYCZNEJ.<sup>1)</sup>

NOTA PIĄTA.<sup>2)</sup>

Poświęciłem § 2 mojej Noty czwartej<sup>2)</sup> szczegółowemu badaniu całki Laplace'a - Abela; wyniki tego badania streściłem w twierdzeniu 7b. W Nocie niniejszej dochodzę inną drogą do nowego uogólnienia, prowadzącego do ostatecznego wyniku tej samej doniosłości, co poprzednio; droga ta wyróżnia się nadzwyczajną prostotą i rzuca nowe światło na mój problemat.

<sup>1)</sup> Patrz Prace mat.-fiz. t. XVI i XVII.

<sup>2)</sup> Po ogłoszeniu Noty czwartej ukazały się następujące prace, związane z przedmiotem niniejszej rozprawy: E. A. Fouët, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques, Paris 1902, Prem. partie, Chap. V. A. Pringsheim, Jacques Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, Arch. d. Math. u. Phys. (3), 3, 1902, pp. 289, 290, 294, 296. E. Lindelöf, Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. C. R. 135. 29. XII. 1902, pp. 1315—1318. F. C. Radelfinger Analytical representation of complex functions. Phil. Mag. Soc. of Washington, Vol. 14, 1902 pp. 227—32; Bull. of the Amer. Math. Soc. 8, 1901—1902, pp. 15, 16. F. E. Moutton, Bull. of the Amer. Math. Soc. 9, pp. 98, 99. L. Hänni, Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Lefflers  $n$  fach unendliche Reihe. Monath. für Math. u. Phys. 14, 1903, p. 105—124; S. Pincherle Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione. Rend. R. Accad. delle scienze dell' Ist. di Bologna, 8. III. 1903. pp. 4. G. Faber, Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorschen Reihen, Math. Ann. 57, 1900. p. 385; Ueber polynomische Entwicklungen, Ib. ib. p. 406—408. E. Lindelöf, Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. Journ. de Math. pures et appl. (5), 9. 1903. p. 213—221. J. Malmquist, Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par la méthode de

Przypomnijmy najprzód definicyę całki Laplace'a — A b e l a. Niechaj  $k_0, k_1, k_2, \dots$  będzie ciąg stałych, poddanych warunkowi, by granica wyższa wartości granicznych liczb  $|\sqrt[r]{k_r}|$  była skończona.<sup>1)</sup> Wiemy, że odwrotność  $r$  tej granicy wyższej jest promieniem zbieżności szeregu.

Idąc za Pringsheimem,<sup>2)</sup> wyrażam tę własność stałych  $k_0, k_1, k_2, \dots$  wzorem:

$$(1) \quad \overline{\lim}_{r=\infty} |\sqrt[r]{k_r}| = \frac{1}{r},$$

i oznaczam przez  $F(x)$  funkcję analityczną, określoną przez stałe  $k_0, k_1, k_2, \dots$

Wiemy, że:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt[r]{\frac{1}{r}} = 0.$$

Szereg

$$(2) \quad \overline{F}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k_r}{r} x^r$$

Cauchy-Lipschitz. Arkiv für Mat. Astr. och Fysik. Stockholm, 1. 13. V. 1903. pp. 149—156. Helge von Koch, Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes, Arkiv. für Math. 1, 9 IX, 1903. p. 205—208. G. Faber, Ueber Reihenentwicklungen analytischer Functionen. Inaug. Diss. München, 1903. pp. 61—66. E. Lindelöf, Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor. Bull. des sciences math. (2), 27. pp. 224—225. L. Fejer, Untersuchungen über Fourier'sche Reihen, Math. Ann. 58, p. 51. S. Pincherle, Sulla sviluppiabilità di una funzione in serie di fattoriali. R. Acc. Lincei 12, (5), 8. XI. 1903; Sulla funzioni meromorfe. Ib. 12, (5). 22 XI. 1903. E. Phragmén, Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions. Acta math 28. p. 351—368. E. Picard, Sur certains développements en séries déduits de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires, Ann. Ec. Norm. 21, 1902 p. 141—151. W druku w Act. Math., 20, były następujące prace: L. H a n n i, Ueber die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Function durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerthe des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf. A. Wiman, Ueber den Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen  $E_a(x)$ . A. Wiman, Ueber die Nullstellen der Functionen  $E_a(x)$ . J. Malmquist, Étude d'une fonction entière — Patrz jeszcze artykuły Mittag-Lefflera: Sur l'intégrale de Laplace-Abel, C. R. 185. 1. XII. 1902, pp. 937—939; Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. Ib. 186, 2. III. 1903, p. 537—539; Sur la nouvelle fonction  $E_a(x)$  Ibid 187, 12. X, 1903. p. 554—558; Sopra la funzione  $E_a(x)$ , R. Acc. del Lincei. Atti (5), 18, 3. I. 1904. p. 3—5; Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques. C. R. 188. 11. IV. 1904. p. 881—884; Une nouvelle fonction entière, Ibid 188, 18. IV. p. 941—942.

<sup>1)</sup> Patrz Notę pierwszą, Prace mat.-fiz. XVI.

<sup>2)</sup> A. Pringsheim, Zur Theorie des Doppel-Integrals. München Sitzungsber. 28, 1878. p. 62.

jest więc szeregiem zawsze zbieżnym. Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na wszystkie wartości dodatnie  $\omega$ , jest sławną całką Laplace'a-Abela.

Borel w szeregu prac<sup>1)</sup> bardzo ważnych doszedł pierwszy do ustalenia obszaru zmiennej  $x$ , dla którego całka ta jest zbieżna.

Obszar ten jest gwiazdą o środku w punkcie zero, wpisaną w gwiazdę główną, określoną przez stałe  $k_0, k_1, k_2, \dots$  i opisaną na kole zbieżności szeregu  $k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots$ <sup>2)</sup> W nocie niniejszej gwiazdę tę oznaczać będę przez  $B^{(1)}$ . Otrzymujemy ją w sposób następujący. Ograniczamy każdy z wektorów  $l$ , wychodzących ze środka do długości  $\rho$ , będącej granicą wyższą innej długości  $d$ , ograniczającej wektor  $l$ , i taką, że koło o średnicy, równej  $d$ , stanowi część gwiazdy głównej  $A$ .

Borel dowiódł zbieżności całki Laplace'a-Abela dla wnętrza gwiazdy  $B^{(1)}$ . Phragmén<sup>3)</sup> wykazał, że całka ta nie może być zbieżna zewnątrz  $B^{(1)}$ . Gwiazda  $B^{(1)}$  jest tedy co do zmiennej  $x$  prawdziwą gwiazdą zbieżności dla całki Laplace'a-Abela, podobnie jak koło  $C$  o środku w punkcie zero i promieniu  $r$  jest kołem zbieżności szeregu  $k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots$ .  
Równość

$$(3) \quad FB^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega$$

zachodzi dla obszaru jakiegokolwiek wewnątrz  $B^{(1)}$  zupełnie tak samo, jak równość Taylora

$$(4) \quad FC(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n k_{\nu} x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} x^{\nu}$$

zachodzi dla każdego obszaru wewnątrz  $C$ .

<sup>1)</sup> E. Borel, Mémoire sur les séries divergentes Ann. Ecole Norm. (3). 16, 1899; Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.

<sup>2)</sup> Co do definicji „gwiazdy“, gwiazdy „głównej“, gwiazdy „wpisanej“, gwiazdy „opisanej“ (patrz Noty I, II, III); oznaczałem poprzednio gwiazdę  $A$ , jako gwiazdę główną stałych  $k_0, |1k_1, |2k_2, |3k_3, \dots$

<sup>3)</sup> E. Phragmén, Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^{\infty} F(ax)e^{-ad} da$ .

Podamy teraz bardzo prosty sposób uogólnienia całki Laplace'a-Abela, pozwalający otrzymać gwiazdę zbieżności, rozleglejszą od  $B^{(1)}$  i zbliżającą się wraz ze zmianą pewnego parametru nieograniczenie do gwiazdy głównej  $A$ . Zamiast „funkcji tworzącej” Abela  $\overline{F}(x)$  wprowadźmy nową funkcję nieco ogólniejszą, określoną przez równość:

$$(5) \quad F_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{|\underline{a\nu}} x^{\nu},$$

gdzie

$$(6) \quad |\underline{a\nu} = \Gamma(a\nu + 1),$$

$a$  zaś oznacza daną wielkość dodatnią. Mamy:

$$(7) \quad F_1(x) = \overline{F}(x),$$

i widzimy, że  $F_a(x)$  jest szeregiem zawsze zbieżnym, podobnie jak  $\overline{F}(x)$ .

Zamiast całki Laplace'a-Abela, wprowadzam całkę nową ogólniejszą:

$$(8) \quad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} F_a(\omega^a x) d\omega,$$

dla której udowodnię twierdzenie:

„Całka  $f(x)$  posiada względem  $x$  gwiazdę zbieżności  $B^{(a)}$ , która jest wpisana w gwiazdę  $A$  i dąży do niej nieograniczenie, gdy  $a$  zmierza do zera. Równość

$$FB^{(a)}(x) = f(x)$$

zachodzi wszędzie wewnątrz  $B^{(a)}$ .”

Dowód tego twierdzenia dzieli się na trzy różne części:

1-o. Gdy całka  $f(x_0)$  jest zbieżna, to całka  $f(x)$  jest jednostajnie zbieżna dla obszaru  $\theta x_0$  ( $\theta_0 \leq \theta \leq 1$ ), gdzie  $\theta$  oznacza wielkość dodatnią.

2-o. Gdy całka  $f(x_0)$  jest zbieżna, to całka  $f(x)$  przedstawia na wektorze  $(0, x_0)$  funkcję  $FC(x)$  oraz jej przedłużenie analityczne wzdłuż tego wektora.

Niechaj  $x_0$  przebiega wewnątrz gwiazdy  $A$  przez wszystkie punkty, dla których obszar <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Przez  $R(z)$  oznaczam część rzeczywistą, przez  $\arg(z)$  argument wielkości  $z$ .

$$k \left[ \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{1}{a}} \right] > 1, \quad \begin{aligned} -a \frac{\pi}{2} < \arg \left( \frac{x_0}{x} \right) < a \frac{\pi}{2}, & \text{ (jeżeli } 0 < a < 2) \\ -\pi < \arg \left( \frac{x_0}{x} \right) < \pi, & \text{ (jeżeli } a \geq 2) \end{aligned}$$

jest położony wewnątrz  $A$ , i oznaczymy przez  $B^{(a)}$  gwiazdę, w ten sposób otrzymaną. Całka  $f(x)$  nigdy nie jest zbieżna zewnątrz  $B^{(a)}$ .

3-0. Całka  $f(x)$  jest zbieżna jednostajnie dla wszelkiego obszaru zewnątrz  $B^{(1)}$ .

Twierdzenia 1-0 i 2-0 udowodnimy w § 1. Co się tyczy twierdzenia 3-0, to dowód jego wymaga wprowadzenia nowej funkcji przestępnej, którą otrzymujemy, upraszczając funkcję  $F_a(x)$ , kładąc mianowicie  $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = \dots = 1$ ; tę nową funkcję oznaczam przez

$$(9) \quad E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{a^\nu}.$$

Różne jej własności rozwijam w §§ 2 i 3. Dowód zupełny twierdzenia 3-0 podaję w § 4.

W przypadku  $a = 1$  całka Laplace'a - Abela, t. j.:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} F_1(\omega x) d\omega$$

może być przekształcona na wyrażenie, podane przez Borela:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^\nu) \frac{\omega^{\nu+1}}{\nu+1},$$

posiadające ten sam obszar zbieżności  $B^{(1)}$ , co całka. W § 4 otrzymuję dla jakiegokolwiek  $a$  nowe wyrażenie tej samej formy, co wyrażenie Borela. Otrzymuję tam także dwa nowe wyrażenia ciekawej postaci. W § 5 odrzucam warunek, że gwiazda wyrażenia ma być gwiazdą zbieżności, i otrzymuję nowe wyrażenia.

### § 1.

Rozpaczynam od uzasadnienia następującego twierdzenia:

**A.** Jeżeli przyjmujemy, że całka

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

jest zbieżna, to całka

$$f(\theta x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest koniecznie zbieżna dla obszaru  $0 < \theta_0 \leq \theta \leq 1$ , gdzie  $\theta_0$  oznacza wielkość dodatnią.

Widzimy tu analogię zupełną ze sławnym twierdzeniem *Abela* dla szeregu potęgowego<sup>1)</sup> Dowodzenie jest zupełnie takie, jak twierdzenia *Phragmèna* dla przypadku  $\alpha = 1$ .<sup>2)</sup>

Położmy:

$$F_{\alpha}(\omega x_0) = \varphi(\omega) + i\psi(\omega),$$

gdzie  $\varphi(\omega)$  i  $\psi(\omega)$  są wielkości rzeczywiste. Dwie całki

$$\int_0^{\infty} \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \int_0^{\infty} \psi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

są zbieżne i należy dowieść, że całki:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\theta \omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \int_0^{\infty} \psi(\theta \omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

są jednostajnie zbieżne w obszarze  $0 < \theta_0 \leq \theta \leq 1$ , gdzie  $\theta_0$  jest dodatnie. Rozpatrzmy naprzykład pierwszą z nich. Mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(\theta \omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} &= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{(\theta \omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta \omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega) e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{(\theta \omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta \omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}} - 1)}} \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Recherches sur la série  $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$   
Théorème 4, Oeuvres. Nouv. éd. 1, p. 223.

<sup>2)</sup> E. Phragmèna, Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^{\infty} F(ax)e^{-a} da$ .

Zastosujmy teraz twierdzenie drugie o średniej dla całek określonych, będziemy mieli:

$$\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}-1)} \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}(1-\theta^{\frac{1}{\alpha}})} \int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega) e^{-\frac{1}{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

gdzie  $\bar{\omega}$  oznacza pewną wartość pomiędzy  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Wypływa stąd bezpośrednio, że całka  $\int_0^{\infty} \varphi(\theta\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$  jest zbieżna jednostajnie dla  $\theta_0 \leq \theta \leq 1$ , gdzie  $\theta_0$  jest dodatnie.

Twierdzenie A więc jest dowiedzione. Co się tyczy funkcji  $F_{\alpha}(\omega x_0)$ , to jedyny warunek, jakiemu jest poddana w tem twierdzeniu, jest, jak widzimy, ten, aby wyrażenie  $e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$  było całkowalne. Ważność tej uwagi, uczynionej już przez P h r a g m é n a, wykażemy naocznie przy innej sposobności.

Całkę  $f(\theta x_0)$  można przekształcić w sposób następujący:

$$(10) \quad f(\theta x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Położmy jeszcze:

$$(11) \quad \Phi_{\alpha}(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Gdy całka  $f(x_0)$  jest zbieżna, granica całki  $\Phi_{\alpha}(\omega)$  będzie oczywiście skończona. Mamy:

$$(12) \quad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} \theta^{-\frac{1}{\alpha}-1}} \frac{d\Phi_{\alpha}(\omega)}{d\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Otrzymujemy przeto, całkując przez części:

$$(13) \quad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} - 1 \right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left( \theta^{-\frac{1}{\alpha}-1} \right)} \Phi_{\alpha}(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Strona druga tej nierówności jest zbieżna oczywiście dla  $R\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right) > 1$ , gdzie  $\theta$  jest wielkością rzeczywistą lub zespoloną, czyli jest zbieżna dla  $R\left(\left(\frac{x_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) > 1$ , a zatem:

B. Gdy całka:

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest zbieżna, całka przekształcona:

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

t. j. całka:

$$(14) \quad \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

gdzie:

$$\Phi_a(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest zbieżna, o ile  $R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1^a$ .

Całka

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

przedstawia oczywiście dla każdego obszaru:

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \quad 2k\pi - a\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + a\frac{\pi}{2} \text{ (jeżeli } 0 < a < 2),$$

$$2k\pi - \pi < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \pi \text{ (jeżeli } a > 2).$$

$$k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$$



gałąź funkcyjną. Ta gałąź jest w ogólności dla każdego różnego obszaru gałęzią różnej funkcji. Jedynie ciekawem w tej chwili jest rozpatrzenie obszaru, odpowiadającego wartości  $k=0$ . Obszar ten obejmuje w sobie wektor  $(0x_0)$ , a równość:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} - 1 \right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} (\theta^{-\frac{1}{\alpha}} - 1)} \Phi_{\alpha}(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

zachodzi dla wartości dodatnich  $\theta$ ,  $\theta_0 \leq \theta \leq 1$ . Przeto:

C. „Gdy całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest zbieżna, całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

przedstawia na wektorze  $(\theta_0 x_0, x_0)$ —gdzie  $\theta_0$  jest wielkością dodatnią, jakkolwiek małą—funkcję analityczną zmiennej  $x^{\alpha}$ .

Twierdzenia B i C utrzymują się jeszcze, podobnie jak poprzednio twierdzenie A, i wtedy, gdy jedynym warunkiem, któremu podlega funk-

kcja  $F_{\alpha}(\omega x)$ , jest, by wyrażenie  $e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$  było całkowne.

W naszym przypadku, w którym funkcja  $F_{\alpha}(x)$  jest określona równością (5), wykazemy, że funkcja analityczna, którą wzdłuż wektora  $(0x)$  przedstawia całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

jest tożsama z funkcją  $FC(x)$  i z przedłużeniem analitycznym funkcji  $FC(x)$  wzdłuż wektora.

W samej rzeczy, wiemy, że:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\alpha \nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\alpha \nu} d\omega = \Gamma(\alpha \nu + 1) = \underline{\alpha \nu}.$$

Na podstawie założenia (1) można zawsze, dając sobie liczbę dodatnią  $\varepsilon$  tak małą, jak chcemy, znaleźć liczbę dodatnią  $n$  taką, aby było:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |k_{\nu}| \cdot |x|^{\nu} < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeżeli tylko  $|x| \leq r' < r$ . Dla tego obszaru zmiennej  $x$ , jeżeli  $\omega'$  i  $\omega''$  są dwie wielkości dodatnie także, że  $\omega' < \omega''$ , będzie tedy:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{|k_{\nu}|}{|\alpha^{\nu}|} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^{\nu} < \frac{\varepsilon}{2},$$

Z drugiej strony dla tego samego obszaru zmiennej  $x$ , jeżeli obierzemy  $\omega'$  dostatecznie wielkie, będzie:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|k_{\nu}|}{|\alpha^{\nu}|} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^{\nu} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A zatem, przy dowolnych  $\varepsilon$  i  $r'$ , można zawsze znaleźć liczbę dodatnią  $\omega'$  dostatecznie wielką, aby było:

$$(16) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|k_{\nu}|}{|\alpha^{\nu}|} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^{\nu} < \varepsilon,$$

jeżeli tylko  $|x| \leq r' < r$ .

Szereg potęgowy (5) jest zawsze zbieżny; to samo ma się z szeregiem:

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu}}{|\alpha^{\nu}|} x^{\nu},$$

uważanym względem  $\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ . Otrzymujemy więc całkę  $\int e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ , całkując każdy wyraz oddzielnie, i mamy prawo napisać:

$$(17) \quad \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{|\alpha^{\nu}|} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} x^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Będzie więc na mocy wzoru (16):

$$(18) \quad \left| \int_{\omega^{\frac{1}{a}}}^{\omega'^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \right| < \varepsilon,$$

jeżeli tylko  $|x| \leq r' < r$ .

Całka:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

uważana, jako funkcja zmiennej  $x$ , jest więc jednostajnie zbieżna w każdym obszarze  $|x| \leq r' < r$ .

Jeżeli przez  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  oznaczymy ciąg stałych dodatnich, nieograniczenie rosnących, będzie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} &= \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\omega_{\nu}^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= k_0 + \frac{k_1}{|a.1|} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x + \frac{k_2}{|a.2|} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x^2 + \dots \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ k_0 + \frac{k_1}{|a.1|} \int_{\omega_{\nu}^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x + \frac{k_2}{|a.2|} \int_{\omega_{\nu}^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x^2 + \dots \right\}; \end{aligned}$$

równość ta zachodzi dla obszaru  $|x| \leq r' < r$ .

Na mocy twierdzenia zasadniczego Weierstrassa (Zur Functionentheorie, Werke, Bd. 2. p. 205) jest więc:

$$(19) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} x^{\nu} = FC(x)$$

przynajmniej dla każdego obszaru wewnątrz koła zbieżności  $C$  szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n.$$

Gdy całka  $\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$  jest zbieżna, funkcja analityczna,

przedstawiona przez całkę  $\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$  wzdłuż wektora  $(0x_0)$ , zlewa się w punktach  $|x| < r$  na tym wektorze z funkcją  $FC(x)$ . A zatem:

D. „Gdy całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest zbieżna, całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

przedstawia na wektorze  $(0x_0)$  gałąź funkcyjną, która jest tożsamą z funkcją  $FC(x)$  i z przedłużeniem analitycznym jej wzdłuż wektora“.

Niechaj teraz  $B^{(\alpha)}$  będzie gwiazdą określoną, jak wyżej. Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

nie może być zbieżna zewnątrz  $B^{(\alpha)}$ . W samej rzeczy, gdybyśmy przyjęli, że jest zbieżna, to, wprowadzając oznaczenie (11), mielibyśmy równość

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \Phi_{\alpha}(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Pierwsza i druga strona przedstawiają obie tę samą funkcję analityczną na wektorze  $(0x_0)$ . Strona druga wskazuje, że ta funkcja jest regularna wszędzie w obszarze:

$$R \left[ \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] > 1, \quad -\alpha \frac{\pi}{2} < \arg \left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha \frac{\pi}{2} \quad (\text{jeżeli } 0 < \alpha < 2), \\ -\pi < \arg \left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi \quad (\text{jeżeli } \alpha \geq 2).$$

Widzimy więc, na zasadzie twierdzenia D i definicyi gwiazdy  $B^{(a)}$ , że punkt  $x_0$  nie może leżeć zewnątrz  $b^{(a)}$ . A zatem:

E. „Niechaj  $x_0$  przebiega przez wszystkie punkty wewnątrz gwiazdy głównej  $A$ , określonej przez stałe  $k_0, k_1, \dots, k_\mu$ , dla których obszar:

$$R \left[ \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{1}{a}} \right] > 1, \quad -a \frac{\pi}{2} < \arg \left( \frac{x_0}{x} \right) < a \frac{\pi}{2} \text{ (jeżeli } 0 < a < 2),$$

$$- \pi < \arg \left( \frac{x_0}{x} \right) < \pi, \text{ (jeżeli } a \geq 1)$$

jest położony wewnątrz  $A$ , i oznaczymy przez  $B^{(a)}$  gwiazdę, która w ten sposób powstaje. Całka  $\int_0^\infty e^{-\omega x} F_a(\omega x) d\alpha^{\frac{1}{a}}$  nigdy nie może być zbieżna zewnątrz  $B^{(a)}$ .

Należy teraz zbadać, czy całka ta, która nie może być zbieżna zewnątrz  $B^{(a)}$ , jest zbieżna wszędzie wewnątrz  $B^{(a)}$ . Bo tylko wtedy i gdy zbieżność jest jednostajna dla każdego obszaru wewnątrz  $B^{(a)}$ , jest  $B^{(a)}$ , w samej rzeczy gwiazdą zbieżności dla naszej całki.

Nie widać na pierwszy rzut oka możliwości uogólnienia dowodu, podanego w § 2 Noty czwartej dla  $a=1$ , na przypadek, gdy  $a$  jest jakiegokolwiek. Należy więc szukać innej drogi.

Uproszczę zagadnienie, wprowadzając, zamiast  $F(x)$ , funkcję elementarną  $\frac{1}{1-x}$ . Dowiodę później, że przypadek ogólny da się do tego prostego sprowadzić.

Phragmén i Borel<sup>1)</sup> udowodnili, że gdy umiemy rozwinąć  $\frac{1}{1-x}$  na szereg, którego różne wyrazy są funkcjami wymiernymi zmiennej  $x$ , to otrzymujemy bezpośrednio rozwinięcie funkcji  $F(x)$  na taki szereg. Ogłaszając swoje wyniki, nie zauważyli, że dowiodłem tego samego twierdzenia już przed 21 laty.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> E. Borel Addition au mémoire sur les séries divergentes. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 16. 1899, p. 132—134.

E. Phragmén Sur une extension d'un théorème de G. Mittag-Leffler. Comptes rendus, 12 czerwca 1899.

<sup>2)</sup> Fullständig analytisk framställning of hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd of första slaget. Öfversigt of K. Vet. Ak. Förhandl. 8 lutego 1882.

W pracy tej (str. 25, 26) dowiodłem wzoru

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \dots + B_n k_n x^n$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} F(z) \left[ \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \left( B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_n \left( \frac{x}{z} \right)^n \right) \right] dz,$$

Jeżeli w rozprawie tej nie posługiwałem się poprzednią metodą, polegającą na sprowadzeniu badania funkcji  $F(x)$  do badania funkcji  $\frac{1}{1-x}$ , to miałem do tego dwa powody następujące:

gdzie  $B_0, B_1, \dots, B_n$  są stałymi względem  $z$ , lecz nie względem  $x$ , i gdzie  $S$  jest konturem ograniczającym powierzchnię jednospójną, dla której  $F(z)$  jest funkcją regularną. Podaję jeszcze ten wzór w postaci ogólniejszej:

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \dots + B_n k_n x^n + \sum_{\nu=0}^m \left[ G_\nu \left( \frac{1}{x-a_\nu} \right) - \sum_{\mu=0}^{m-1} B_\mu A_\mu^{(\nu)} \left( \frac{x}{a_\nu} \right)^{\mu} \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} F(z) \left[ \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \left( B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_n \left( \frac{x}{z} \right)^n \right) \right] dz,$$

gdzie funkcja, jednokształtna dla powierzchni, ograniczonej przez kontur  $S$  i regularna na tym konturze, posiada ograniczoną liczbę punktów osobliwych  $a_1, a_2, \dots, a_m$  wewnątrz  $S$ , i gdzie  $G_i(z), G_m(z)$  są funkcje całkowite, określone przez równość

$$F(x) = G_\nu \left( \frac{1}{x-a_\nu} \right) + \mathcal{Y}(x-a_\nu),$$

zachodzącą w sąsiedztwie punktu  $a_\nu$ , równość zaś

$$G_\nu \left( \frac{1}{x-a_\nu} \right) = \sum_{u=0}^{\infty} A_u^{(\nu)} \left( \frac{x}{a_\nu} \right)^u$$

zachodzi w sąsiedztwie punktu  $x=0$ . Wzór mój wskazuje bezpośrednio, że gdy jest

$$\frac{1}{z-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \left( B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_n \left( \frac{x}{z} \right)^n \right)$$

wewnątrz figury tworzącej (patrz Notę trzecią), przechodzącej przez punkty  $0, x$  i obwiedzącej linię  $(0x)$ , wtedy równość

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \dots + B_n k_n x^n)$$

zachodzi dla gwiazdy  $E$ , którą otrzymujemy, kreśląc naokoło każdego wektora, wychodzącego z początku, największą z figur tworzących, która nie obejmuje żadnego punktu osobliwego funkcji  $F(x)$ , i dołączając do  $E$  część wektora pomiędzy początkiem a punktem  $x$ .

Jest to właśnie twierdzenie, dowiedzione przez Borela i Phragmén'a.

Rozwinięcia moje byłyby w obu przypadkach w gruncie absolutnie teżsame i byłbym otrzymał przeto uproszczenie raczej formalne, niż istotne. <sup>1)</sup>

Po drugie—i to jest powód, który kierował mną w tych pierwszych Notach—chciałem dojść do celu przy pomocy rozważań bezpośrednich, czysto elementarnych, a więc bez posługiwania się całką Cauchy'ego. Metoda zaś, polegająca na sprowadzeniu rozwinięcia funkcji  $F(x)$  do rozwinięcia funkcji  $\frac{1}{1-x}$ , zakłada zasadniczo przejście przez całkę Cauchy'ego. Otóż w Nocie niniejszej już to nie zachodzi, a uproszczenie, do którego dochodzimy, badając najprzód funkcję  $F(x) = \frac{1}{1-x}$ , ma wagę pierwszorzędą.

## § 2.

Kładąc

$$(20) \quad F(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

otrzymujemy na  $F_0(x)$  szereg (9), t. j.

$$E_a(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{\Gamma(av)}.$$

W tym paragrafie zajmę się badaniem funkcji  $E_0(x)$  przy pomocy wzoru sumacyjnego Maclaurina, wyjaśnionego metodami Abela i Cauchy'ego. <sup>2)</sup>

Liczbę dodatnią  $a$  poddam nierówności:

$$(21) \quad 2 \geq a > 0.$$

Niechaj  $\epsilon$  będzie wielkością dodatnią mniejszą od 1,  $n$  zaś liczbą całkowitą dodatnią. Niechaj  $R$  będzie prostokątem, którego dwa boki rów-

<sup>1)</sup> Autorowie, którzy mówili o uproszczeniu mojego pierwszego dowodzenia, do którego inni autorowie doszli po mnie (patrz np. Pringsheim, J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, Archiv. d. Math. und Physik (3), 8, p. 289) nie uchwycili—zdaje się—podstawy moich myśli.

<sup>2)</sup> Patrz na przykład: J. Petersen, Vorlesungen über Functionstheorie, Kopenhaga 1898, Rozdz. 8, §§ 78, 79. H. Meinel, Die Dirichlet'schen Reihen der zahlentheoretischen Functionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, Acta Soc. Fennicae 31, 602. E. Lindelöf, Quelques applications d'une formule sommatoire générale, Acta Soc. Fennicae 31, 603.

noległe od osi rzeczywistej są położone po jednej i drugiej stronie tej osi w odległości  $n$ , drugie zaś dwa boki, prostopadłe do tej osi, przechodzą jeden przez punkt  $\varepsilon$ , drugi przez punkt  $n+1-\varepsilon$ .

Będzie:

$$(22) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{x^\nu}{|\alpha \nu|} = \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{|\alpha z|} dz.$$

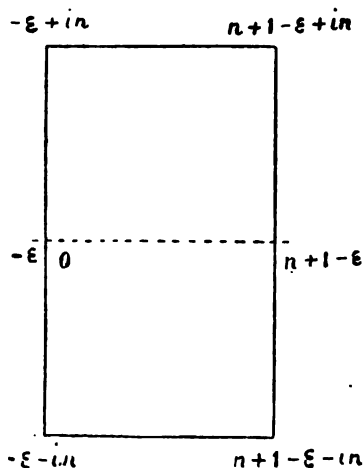


Fig. 15.

Położmy:

$$(23) \quad \int_{(R)} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{|\alpha z|} dz = \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{|\alpha z|} dz + \int_{(R_2)} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{|\alpha z|} dz,$$

gdzie  $R_1$  oznacza linię  $(n+1-\varepsilon, n+1-in, -\varepsilon+in, -\varepsilon)$ ,  $R_2$  linię  $(-\varepsilon, -\varepsilon+in, n+1-\varepsilon-in, n+1-\varepsilon)$ . Kładąc:

$$(24) \quad z = \tau + it, \quad (25) \quad x = r^{i\varphi},$$

gdzie  $\tau, t, \varphi$  są wielkości rzeczywiste,  $r$  zaś jest modułem  $|x|$ , znajdziemy:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{|\alpha z|} dz &= i \int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon - 2\pi i t} - 1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)|} r^{it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \\ &- \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i \tau - 2\pi i n} - 1} \frac{r^\tau e^{-\varphi n}}{|\alpha(\tau+in)|} r^{in} e^{i\varphi \tau} d\tau \\ &- i \int_0^\varepsilon \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon - 2\pi i t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\alpha(-\varepsilon+it)|} r^{it} e^{-i\varphi \varepsilon} dt. \end{aligned} \right.$$



$$(27) \left. \begin{aligned} \int_{(R_2)} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{z^2}{|az} dz &= i \int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{\varphi t}}{\alpha(n+1-\varepsilon-it)} r^{-it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \\ &+ \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i \tau + 2\pi n} - 1} \frac{r^\tau e^{\varphi \tau}}{\alpha(\tau-in)} r^{-in} e^{i\varphi \tau} d\tau \\ &- i \int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon-it)} r^{-it} e^{-i\varphi \varepsilon} dt. \end{aligned} \right\}$$

A zatem:

$$(28) \left. \begin{aligned} \int_{(R_2)} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{z^2}{|az} dz &= i \int_0^n \left[ \frac{r^{it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\alpha(n+1-\varepsilon+it)} + \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{\varphi t}}{\alpha(n+1-\varepsilon-it)} \right] e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \\ &+ i \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \left[ \frac{r^{-in}}{e^{2\pi i \tau + 2\pi n} - 1} \frac{r^\tau e^{\varphi \tau}}{\alpha(\tau-in)} - \frac{r^{in}}{e^{2\pi i \tau + 2\pi n} - 1} \frac{r^\tau e^{-\varphi \tau}}{\alpha(\tau+in)} \right] e^{i\varphi \tau} d\tau \\ &- i \int_0^n \left[ \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon-it)} + \frac{r^{it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon+it)} \right] e^{-i\varphi \varepsilon} dt. \end{aligned} \right\}$$

Abby roztrząsać wzór (28), musimy znać moduł wielkości  $\frac{1}{|z}$ . Wyrażenie Weierstrassa (patrz np. Schlämilch, Compendium der höheren Analysis, 2, 3-e wyd. str. 248) daje:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\tau+it} \cdot \frac{1}{|\tau-it} &= e^{c(\tau+it)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\tau+it}{n}\right)^{-\frac{\tau+it}{n}} \cdot e^{c(\tau-it)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\tau-it}{n}\right)^{-\frac{\tau-it}{n}} \\ &= e^{2c\tau} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2\tau}{n} + \frac{\tau^2+t^2}{n^2}\right) e^{-\frac{2\tau}{n}} \\ &= \left[ e^{c\tau} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\tau}{n}\right) e^{-\frac{\tau}{n}} \right]^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(\tau)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right). \end{aligned}$$

A zatem:

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|\tau+it|} \leq \frac{1}{|\tau|} \sqrt{\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi t}}; \quad \tau \geq 0, +\infty > t > -\infty \\ \frac{1}{|-\varepsilon+it|} \leq \frac{1}{|-\varepsilon|} \sqrt{\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi t}} \sqrt{1 + \frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}}; \quad 0 < \varepsilon < 1. \end{array} \right.$$

Rozpatrzmy teraz pierwszą całkę po stronie drugiej wzoru (28). Na zasadzie pierwszego z wzorów (29) i ponieważ minimum dwóch modułów  $|e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1|$  i  $|e^{-2\pi i\varepsilon} - e^{-2\pi t}|$ , ( $0 \leq t$ ) jest wielkością  $h$ , różną od zera, będzie:

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^n \left[ \frac{r^t}{e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1} \cdot \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)|} + \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon + 2\pi t} - 1} \cdot \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon-it)|} \right] e^{i\varphi(n+1-t)t} dt \\ \leq \frac{r^{n+1-\varepsilon}}{|\alpha(n+1-\varepsilon)|} \frac{1}{h} \int_0^\infty (e^{-\varphi t} + e^{-(2\pi-\varphi)t}) \sqrt{\frac{e^{a\pi t} - e^{-a\pi t}}{2a\pi t}} dt. \end{array} \right.$$

Całka po stronie drugiej jest zbieżna, jeżeli  $\varphi$  spełnia warunek:

$$(31) \quad 2\pi - a \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq a \frac{\pi}{2}.$$

Wyrażenie  $\frac{r^{n+1-\varepsilon}}{|\alpha(n+1-\varepsilon)|}$  dąży nieograniczenie do zera wraz z  $\frac{1}{n}$ . Moduł całki po stronie pierwszej wzoru (30) zbliża się tedy nieograniczenie do zera wraz z  $\frac{1}{n}$ , gdy  $\varphi$  spełnia warunek (31).

Rozpatrzmy teraz drugą całkę po stronie drugiej wzoru (28). Na zasadzie drugiego z wzorów (29) będzie:

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{r^{-in}}{e^{i\pi i\varepsilon + 2\pi n} - 1} \frac{r^\tau e^{\tau n}}{|\alpha(\tau-in)|} - \frac{r^{-n}}{e^{2\pi i\varepsilon - 2\pi n} - 1} \frac{r^\tau e^{-\tau n}}{|\alpha(\tau+in)|} e^{i\tau n} d\tau \\ < \frac{e^{-(2\pi-\varphi)n} + e^{-\varphi n}}{1 - e^{-2\pi n}} \sqrt{1 + \frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi n} - e^{-a\pi n}}{2a\pi n}} \int_{-\varepsilon}^\infty \frac{r^\tau}{|\alpha\tau|} d\tau, \end{array} \right.$$

gdzie całka  $\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{|\underline{a}x|} dx$  ma wartość skończoną. Strona druga wzoru (32)

dąży nieograniczenie do zera wraz z  $\frac{1}{n}$ , o ile  $\varphi$  spełnia warunek:

$$(33) \quad 2\pi - a \frac{\pi}{2} > \varphi > a \frac{\pi}{2},$$

który wymaga, aby było:

$$(34) \quad 2 > a > 0.$$

Dodając do warunku (21) ten nowy warunek (34) i zakładając, że  $\varphi$  spełnia warunek (33), widzimy, że moduł każdej z dwóch całek po stronie drugiej wzoru (27) dąży nieograniczenie do zera wraz z  $\frac{1}{n}$ .

Otrzymujemy tedy wzór podstawowy:

$$(35) \quad E_{\varepsilon}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{|\underline{a}x|} \\ = -i \int_0^{\infty} \left[ \frac{x^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{x^{-\varepsilon e^{\varphi t}}}{|\underline{a}(-\varepsilon - it)|} + \frac{x^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1} \frac{x^{-\varepsilon e^{-\varphi t}}}{|\underline{a}(-\varepsilon + it)|} \right] e^{-i\varphi t} dt.$$

Mamy:

$$(36) \quad \left| \int_0^{\infty} \left[ \frac{x^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{x^{-\varepsilon e^{\varphi t}}}{|\underline{a}(-\varepsilon - it)|} + \frac{x^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1} \frac{x^{-\varepsilon e^{-\varphi t}}}{|\underline{a}(-\varepsilon + it)|} \right] e^{-i\varphi t} dt \right| \\ < \frac{1}{h} \frac{x^{-\varepsilon}}{|\underline{a}\varepsilon|} \int_0^{\infty} (e^{-2\pi - \varphi t} + e^{-\varphi t}) \sqrt{1 + \frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi t} - e^{\varphi\pi t}}{2a\pi t}} dt.$$

Całka po stronie drugiej jest zbieżna, skoro  $\varphi$  spełnia warunek (33). Gdy spełniają się tedy warunki (34) i (33), całka po stronie drugiej wzoru (35) jest zbieżna. Lecz wzór (36) daje nam jeszcze inną cenną wskazówkę.

Mamy:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{x^{-\varepsilon}}{|\underline{a}\varepsilon|} = 0,$$

całka zaś po drugiej stronie wzoru (36) jest niezależna od  $r$ . Dochodzimy więc do twierdzenia:

F. „Załóżmy, że  $2 > a > 0$ . Moduł funkcji  $E_a(x)$  dąży nieograniczenie do zera wraz z  $\frac{1}{r}$ , gdy  $x$  dąży do nieskończoności wewnątrz kąta  $\varphi$ .

spełniającego warunek  $2\pi - a \frac{\pi}{2} > \varphi > a \frac{\pi}{2}$ .

Kładąc  $a = 1$ , otrzymujemy znaną własność funkcji wykładniczej  $E_1(x) = e^x$ . Twierdzenie to rozwiązuje też ważne pytanie, podniesione przed kilku laty przez B o r e l a (L'Intermédiaire des mathématiciens, 6, Nr. 4, kwiecień 1899): „czy można znaleźć funkcję całkowitą, której moduł przekracza jedność tylko wewnątrz pewnego kąta, tak małego, jak zgóry chcemy; a jeżeli nie, czy można dowieść ściśle, że na pytanie to należy dać odpowiedź przeczącą?”

Na pytanie to należy dać odpowiedź twierdzącą, a funkcja  $E_a(x)$  jest funkcją żadaną, jeżeli tylko nadamy wielkości  $a$  wartość dostatecznie małą. Nietrudno też utworzyć inne funkcje, mające tę samą własność, jaką ma funkcja  $E_a(x)$ . Taką jest na przykład funkcja:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{|\underline{a_1\nu} \underline{a_2\nu} \dots \underline{a_m\nu}|}; \quad a_1 + a_2 + \dots + a_m = a,$$

albo funkcja:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{(|\underline{a_1\nu}|^{\beta_1} |\underline{a_2\nu}|^{\beta_2} \dots |\underline{a_m\nu}|^{\beta_m})}; \quad a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_m\beta_m = a.$$

Rozumowanie, stosowane wyżej do funkcji  $E_a(x)$ , okaże, że moduł każdej z tych funkcji dąży nieograniczenie do zera, gdy  $|x|$  rośnie nieograniczenie wzdłuż wektora, położonego w kącie  $2\pi - a \frac{\pi}{2} > \varphi > a \frac{\pi}{2}$ . Znamy przeto wzrastanie funkcji  $E_a(x)$  w tym kącie. Zbadajmy teraz pytanie o wzrastaniu tej funkcji w innej części płaszczyzny, t. j. w kącie:

$$(37) \quad a \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq -a \frac{\pi}{2}.$$

Wróćmy do wzoru (23), w którym poddamy niewielkiej odmianie pierwszą z całek po stronie drugiej.

Mamy:

$$(38) \quad \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} = -1 - \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1},$$

przeto:

$$(39) \quad \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{z^\varepsilon}{|az|} dz = - \int_{(R_1)} \frac{z^\varepsilon}{|az|} dz - \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1} \frac{z^\varepsilon}{|az|} dz.$$

Funkcja  $\frac{z^\varepsilon}{|az|}$  zachowuje się regularnie wewnątrz i na obwodzie prostokąta  $(-\varepsilon, n+1-\varepsilon, n+1-\varepsilon+in, -\varepsilon+in, -\varepsilon)$ , przeto:

$$- \int_{(R_1)} \frac{z^\varepsilon}{|az|} dz = \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{x^\varepsilon}{|ax|} dx.$$

Z drugiej strony jest:

$$(41) \quad \left. \begin{aligned} & - \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1} \frac{z^\varepsilon}{|az|} dz \\ & = -i \int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi it}-1} \frac{\gamma^{n+1-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)|} \gamma^{it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \\ & \quad + \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi in}-1} \frac{\gamma^\varepsilon e^{-\varphi n}}{|\alpha(\tau+in)|} \gamma^{in} e^{i\varphi \tau} d\tau \\ & \quad + i \int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi i\varepsilon}-1} \frac{\gamma^{-\varepsilon} e^{-\varphi \tau}}{|\alpha(-\varepsilon+it)|} \gamma^{it} e^{-i\varphi \varepsilon} dt. \end{aligned} \right\}$$

Mamy zatem na mocy wzorów (23), (39), (40), (41), (27):

$$(42) \quad \left. \begin{aligned} & \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{z^\varepsilon}{|az|} dz = \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{x^\varepsilon}{|ax|} dx \\ & + i \int_0^n \left[ \frac{\gamma^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi it}-1} \frac{\gamma^{n+1-\varepsilon} e^{\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon-it)|} - \frac{\gamma^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi it}-1} \frac{\gamma^{n+1-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)|} \right] e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \\ & + \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \left[ \frac{\gamma^{-in}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi in}-1} \frac{\gamma^\varepsilon e^{\varphi n}}{|\alpha(\tau-in)|} + \frac{\gamma^{in}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi in}-1} \frac{\gamma^\varepsilon e^{-\varphi n}}{|\alpha(\tau+in)|} \right] e^{i\varphi \tau} d\tau \\ & - i \int_0^n \left[ \frac{\gamma^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi it}-1} \frac{\gamma^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{|\alpha(-\varepsilon-it)|} - \frac{\gamma^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi it}-1} \frac{\gamma^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\alpha(-\varepsilon+it)|} \right] e^{-i\varphi \varepsilon} dt; \end{aligned} \right\}$$

jest to wzór, odpowiadający wzorowi (28).

Całka  $\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{|\alpha x|} dx$  jest zbieżna dla wszelkich wartości na  $\nu$  i na  $\varphi$ . Dla drugiej całki po stronie drugiej mamy:

$$(43) \quad \left| \int_0^n \left[ \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i t} + 2\pi i} - \frac{r^{n+1-s} e^{\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon-it)|} - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i t} + 2\pi i} - \frac{r^{n+1-s} e^{-\varphi t}}{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)|} \right] e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \right|$$

$$\leq \frac{r^{n+1-s}}{|\alpha(n+1-\varepsilon)|} \frac{1}{h} \int_0^{\infty} (e^{-(2\pi-\varphi)t} + e^{-(2\pi+\varphi)t}) \sqrt{\frac{e^{a\pi t} - e^{-a\pi t}}{2a\pi t}} dt,$$

a więc moduł tej całki dąży nieograniczenie do zera wraz z  $\frac{1}{n}$ , jeżeli  $\varphi$  spełnia warunek:

$$(44) \quad 2\pi - a \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq - \left( 2\pi - a \frac{\pi}{2} \right).$$

Co się tyczy trzeciej całki po stronie drugiej wzoru (42), mamy:

$$(45) \quad \left| \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{r^{-i\tau}}{e^{2\pi i \tau} + 2\pi i} - \frac{r^{\tau} e^{\varphi \tau}}{|\alpha(\tau-in)|} + \frac{r^{i\tau}}{e^{-2\pi i \tau} + 2\pi i} - \frac{r^{\tau} e^{-\varphi \tau}}{|\alpha(\tau+i\tau)|} \right| e^{i\varphi \tau} d\tau$$

$$< (e^{-(2\pi-\varphi)n} + e^{-(2\pi+\varphi)n}) \sqrt{1 + \frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi n} - e^{-a\pi n}}{2a\pi n}} \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{r^{\tau}}{|\alpha \tau|} d\tau$$

Moduł zatem tej całki dąży zatem nieograniczenie do zera wraz z  $\frac{1}{n}$ , skoro tylko  $\varphi$  spełnia warunek:

$$(46) \quad 2\pi - a \frac{\pi}{2} > \varphi > - \left( 2\pi - a \frac{\pi}{2} \right);$$

otrzymujemy tedy:

$$(47) \quad E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{|\alpha \nu|}$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\tau}}{|\alpha \tau|} d\tau + i \int_0^{\infty} \left( \frac{r^{it}}{e^{2\pi i t} + 2\pi i} - \frac{r^{-s} e^{-\varphi t}}{|\alpha(-\varepsilon+it)|} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i t} + 2\pi i} - \frac{r^{-s} e^{\varphi t}}{|\alpha(-\varepsilon-it)|} \right) e^{-i\varphi t} dt$$

wzór, który należy postawić obok wzoru (35) i w którym całka druga po stronie drugiej jest zbieżna, gdy spełnia się warunek (46). Ponieważ moduł tej całki jest mniejszy od  $Kr^{-\varepsilon}$ , gdzie  $K$  jest stała niezależna od  $r$  (porównaj rozumowanie, przeprowadzone przy całce (36)), więc dąży nieograniczenie do zera, gdy  $r$  rośnie nieograniczenie wzdłuż wektora, położonego w kącie (46). Co się tyczy wielkości dodatniej  $\alpha$ , to warunek (46) sprowadza się wprost do warunku  $4 > \alpha > 0$ , a zbieżność drugiej całki po stronie drugiej wzoru (47) zachodzi przy ostatnio podanym warunku i warunku (46).

Wzór (47) daje nam:

$$(48) \quad E_1(x) = e^x = e^{r\varepsilon i\varphi} = \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{|\tau|} d\tau + \delta_r^{(1)}.$$

W tym wzorze argument  $\varphi$  zmiennej  $x$  spełnia, według przyjęcia, warunek:

$$(49) \quad \frac{3\pi}{2} > \varphi > -\frac{3\pi}{2},$$

który wypływa z warunku (46). Moduł wielkości  $\delta_r^{(1)}$  zmniejsza się nieograniczenie wraz z  $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$ , gdy  $x$  dąży do nieskończoności wzdłuż wektora, położonego w kącie (49).

Mamy:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{|\alpha\tau|} d\tau = \frac{1}{\alpha} \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\frac{\tau}{\alpha}}}{|\tau|} d\tau.$$

Na zasadzie wzoru (48), wprowadzając  $\alpha\varepsilon$  zamiast  $\varepsilon$  i oznaczając przez  $\delta_r^{(\alpha)}$  to na co przechodzi  $\delta_r^{(1)}$  przy tem podstawieniu, będziemy mieli:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{|\alpha\tau|} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} - \frac{1}{\alpha} \delta_r^{(\alpha)},$$

a ta równość wymaga warunku:

$$(50) \quad \alpha \frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha \frac{3\pi}{2}.$$

Wracając do wzoru (47), otrzymujemy następujące twierdzenie:

**G.** „Dajmy, że  $2 > a > 0$ . W przypadku, gdy  $x$  jest położone wewnątrz kąta, określonego przez nierówności:

$$2\pi - a \frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - a \frac{\pi}{2}\right), \quad a \frac{3\pi}{2} > \varphi > -a \frac{3\pi}{2},$$

mamy:

$$(51) \quad E_a(x) = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)},$$

gdzie moduł wielkości  $\varepsilon_r^{(a)}$  zmniejsza się nieograniczenie, gdy  $|x|$  rośnie nieograniczenie“.

Dwa twierdzenia **F** i **G**, wzięte razem, pouczają nas w zupełności co do wzrastania funkcji  $E_a(x)$  we wszelkich różnych kierunkach, byleby było  $2 > a > 0$ .

Można tedy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 8a.** „Funkcja  $E_a(x)$ , gdzie  $a$  oznacza stałą dodatnią, spełniającą warunek  $2 > a > 0$ , zachowuje się co do swego wzrastania w różnych kierunkach w sposób następujący:

Należy rozróżnić trzy przypadki. 1) Moduł wielkości  $x$  zwiększa się nieograniczenie wewnątrz kąta  $2\pi - a \frac{\pi}{2} > \varphi > a \frac{\pi}{2}$ ; wtedy  $|E_a(x)|$  dąży nieograniczenie do zera; 2) moduł wielkości  $x$  zwiększa się nieograniczenie wzdłuż jednego z dwóch wektorów  $\varphi = \pm a \frac{\pi}{2}$ ; wtedy  $|E_a(x)|$  dąży nieograniczenie do  $\frac{1}{a}$ ; 3) moduł wielkości  $x$  zmienia się nieograniczenie wewnątrz kąta  $a \frac{\pi}{2} > \varphi > -a \frac{\pi}{2}$ ; wtedy  $|E_a(x)|$  zwiększa się nieograniczenie, równocześnie zaś wyrażenie  $|E_a(x) - \frac{1}{a} e^{\frac{1}{ra} e^{i\frac{\varphi}{a}}}|$  zmniejsza się nieograniczenie“.

Dla  $a = 1$  otrzymujemy znaną charakterystyczną własność funkcji wykładniczej  $E_1(x) = e^x$ .

Twierdzenie **G** poucza nas nadto o wzrastaniu funkcji  $E_a(x)$  w przypadku  $a = 2$ , gdy  $\pi > \varphi > -\pi$ . Widzimy, że  $|E_2(x)|$  zwiększa się nieograniczenie, gdy  $|x|$  dąży do nieskończoności w kącie, zawartym wewnątrz kąta  $\pi > \varphi > -\pi$ , równocześnie zaś  $|E_2(x) - \frac{1}{2} e^{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}}|$  zmniejsza się nieograniczenie.



Lecz ani twierdzenie **F**, ani twierdzenie **G** nie dają nam wzrastania funkcji  $|E_2(x)|$  w przypadku  $\varphi = \pm \pi$ ; przeciwnie, otrzymujemy je bezpośrednio z równości:

$$E_2(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = \frac{e^{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}} + e^{-r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}}}{2},$$

z której wyprowadzamy:

$$E_2(r e^{i\pi}) = E_2(-r) = \cos r^{\frac{1}{2}}.$$

W tym paragrafie wyczerpaliśmy więc całkowicie pytanie o wzrastaniu funkcji  $E_\alpha(x)$  w przypadku  $2 \geq \alpha > 0$ ; w następnym paragrafie pokażę, w jaki sposób zbadać można zupełnie wzrastanie tej funkcji w przypadku  $\alpha > 2$ .

### § 3.

W § poprzednim badałem wzrastanie funkcji  $E_\alpha(x)$  przy pomocy wzoru sumacyjnego *M a c l a u r i n a*; przytem stała  $\alpha$  poddana była warunkowi  $2 \geq \alpha > 0$ . W § niniejszym użyję innej drogi, prowadzącej do poznania wzrastania nie tylko funkcji  $E_\alpha(x)$  dla wartości  $\alpha$ , poddanej pomienionemu warunkowi, lecz i funkcji  $E_\alpha(x)$  dla wszelkiej wartości rzeczywistej na  $\alpha$ .

W krótkim czasie po ogłoszeniu rozprawy *R i e m a n n a* o liczbach pierwszych („Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Berl. Monatsber. Nov. 1859. Ges.; Werke 2e Aufl. p. 140), *H a n k e l* ogłosił godną uwagi rozprawę (*Die Eulerschen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes*, Leipzig. Voss 1863; Zeitschr. f. Math. u. Phys. 9, p. 1—21), w której otrzymał na  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  wyrażenie przy pomocy całki określonej, analogicznej do całki, podanej przedtem przez *R i e m a n n a* dla funkcji  $\zeta(z)$  (Werke, p. 146); wyrażenie to jest:

$$(52) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_S e^{t-z} \frac{dt}{t},$$

gdzie kontur  $S$  jest konturem otwartym, po którego lewej stronie znajduje się początek, a po którym przebieg odbywa się w zwrocie dodatnim. Kontur ten można zdefiniować w sposób następujący:

Wprowadzamy dwie wielkości dodatnie  $\varrho$  i  $\varepsilon$ , z których  $\varepsilon$  jest mniejsza od 2. Kontur składa się z trzech części różnych. Najprzód idzie część wektora, wychodzącego z początku, o argumentcie  $-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ , pomiędzy nieskończonością a punktem  $\varrho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ . Następnie idzie łuk koła, zatoczonego

końcem wektora długości  $\rho$ , obracającego się około początku w zwrocie prostym, od  $\rho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  do  $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ . Wreszcie mamy część nowego wektora, wychodzącego z początku, o argumentcie  $i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ , pomiędzy punktem  $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  a nieskończonością. (Fig. 16).

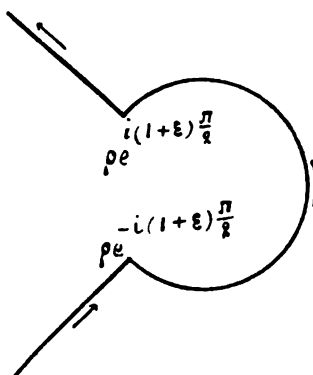


Fig. 16.

Położmy  $|x| < \rho^a$ ; będzie:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{S}} e^t \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{x}{t^a} \right)^\nu \right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{S}} \frac{1}{a} e^t \frac{dt^a}{t^a - x}.$$

Niechaj będzie  $t^a = \omega$ ,  $\bar{S}$  zaś niechaj oznacza nowy kontur w płaszczyźnie zmiennej  $\omega$ , pozostawiający początek po lewej stronie i utworzony: z części, pomiędzy nieskończonością a  $\rho^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ , wektora, wychodzącego z początku i mającego argument  $-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ ; z łuku koła, zakreślonego przez koniec wektora o długości  $\rho^a$ , obracającego się naokoło początku w zwrocie prostym od  $\rho^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  do  $\rho^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ ; wreszcie z części, pomiędzy  $\rho^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  a nieskończonością, wektora, wychodzącego z początku i mającego za argument  $i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ . (Fig. 17).

Będzie:

$$(53) \quad E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{S}} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x},$$

gdzie całka jest wzięta w zwrocie dodatnim. Całka ta przedstawia jedną i tę samą funkcję zmiennej  $x$ , jeżeli  $x$  jest położone z tej samej strony konturu  $\bar{S}$ , co początek.

Rozpatrzmy przypadek  $2 > \alpha > 0$ . Ponieważ  $\varepsilon$  jest tak małe, jak chcemy, wzór (53) wskazuje, że  $|E_\alpha(x)|$  zmniejsza się nieograniczenie wraz z  $\frac{1}{r}$  ( $x = re^{i\varphi}$ ), gdy  $x$  dąży do nieskończoności w kącie, znajdującym się wewnątrz kąta  $2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha \frac{\pi}{2}$ . Jest to twierdzenie F § 2. Ale wzór ten wskazuje nadto wzrastanie funkcji  $E_\alpha(x)$  w kącie  $\alpha \frac{\pi}{2} \cong \varphi \cong -\alpha \frac{\pi}{2}$  w przypadku  $2 > \alpha > 0$ , w przypadku zaś  $\alpha \geq 2$  daje nam wzrastanie funkcji  $E_\alpha(x)$  w różnych kierunkach.

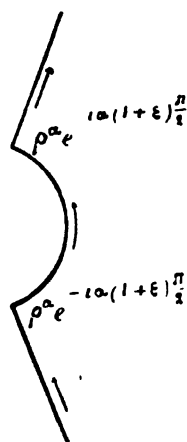


Fig. 17.

Dajmy, że przy jakimkolwiek  $\alpha$  wielkość  $x$  znajduje się w kącie  $\alpha \frac{\pi}{2} \cong \varphi \cong -\alpha \frac{\pi}{2}$ . Wprowadźmy dwa kontury różne, a mianowicie  $\bar{S}_1$ , odpowiadający promieniowi  $\varrho = \varrho_1$ , i  $\bar{S}_2$ , odpowiadający promieniowi  $\varrho = \varrho_2$ , gdzie  $\varrho_2 < |x| < \varrho_1$ . Mamy:

$$(54) \quad E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{S}_1} \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} \frac{d\omega}{\omega - x}.$$

Oznaczmy przez  $R$  czworobok, utworzony z następujących czterech linii: łuku kołowego, opisanego przez końce wektora o długości  $\varrho_1^\alpha$ , obracającego się naokoło początku w zwrocie prostym od  $\varrho_1^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  do  $\varrho_1^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ ; z zawartej pomiędzy  $\varrho_1^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  a  $\varrho_2^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  części wektora o argumentzie  $i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ ,

wychodzącego z początku; z łuku kołowego, opisanego przez koniec wektora o długości  $\rho_2^a$ , obracającego się w zwrocie odwrotnym około początku od  $\rho_2^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  do  $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ ; wreszcie z zawartej pomiędzy  $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  a  $\rho_1^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$  części wektora o argumentcie  $-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ , wychodzącego z początku. (Fig. 18).

Mamy:

$$(55) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{S}_1)} \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} \frac{d\omega}{\omega-x} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{S}_2)} \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} \frac{d\omega}{\omega-x} + \frac{1}{\omega-x} \int_{(R)} \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} \frac{d\omega}{\omega-x}.$$

Strona druga wzoru (54), która przedstawiała jedną i tę samą funkcję, gdy  $x$  znajdowało się po tej samej stronie konturu  $\bar{S}_2$ , co początek, przedstawia inną znów, jedną i tę samą, funkcję, gdy  $x$  znajduje się po przeciwległej stronie początku. Całka ta dąży nieograniczenie do zera, gdy  $x$  zmierza do nieskończoności w kącie:

$$(56) \quad a(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2} > \varphi > -a(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}.$$

Kładziemy więc:

$$(57) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{S}_1)} \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} \frac{d\omega}{\omega-x} = \varepsilon_r^{(a)}.$$

Wynika stąd, że w kącie (56) będzie:

$$(58) \quad E_a(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} \frac{d\omega}{x-a} + \varepsilon_r^{(a)},$$

Fig. 18.

gdzie moduł wielkości  $\varepsilon_r^{(a)}$  zmniejsza się nieograniczenie wraz z  $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$ .

W przypadku  $2 > a > 0$ , obierając  $\varepsilon$  dostatecznie małym, mamy:

$$(59) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} = \frac{1}{a} e^{x \frac{1}{a}};$$

otrzymujemy więc w tym przypadku:

$$(60) \quad E_a(x) = \frac{1}{a} e^{x^{\frac{1}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)} = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i \frac{\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)};$$

równość ta zachodzi w kącie (56); twierdzenie więc 8a jest dowiedzione.

Wzór (58) daje nam jeszcze sposób zupełnego zbadania wzrastania funkcji  $E_a(x)$ , gdy  $a \geq 2$ . Ta funkcja jest innej natury, niż funkcja  $E_a(x)$ ,  $2 > a > 0$ , i zdaje się być mniej ważną; ale jest rzeczą ciekawą poznanie własności charakterystycznych dwóch funkcji, pochodzących z tego samego źródła.

Dla uproszczenia sprawy, aby w całce (54) części nieskończone drogi całkowania zwały się obie z osią rzeczywistą dodatnią (albo w przypadku szczególnym z wektorem blizkim tej osi. Jest to możliwe dla tego, że w przypadku  $a \geq 2$  istnieje zawsze liczba parzysta taka, że  $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$ . Jeżeli obierzemy taką liczbę  $m$ , droga całkowania  $\bar{S}$  składać się będzie z części następujących: 1-o z części osi rzeczywistej, znajdującej się zewnątrz okręgu koła o pewnym promieniu  $\rho^a$ , przyczem oś ta jest przebiegana w zwrocie ujemnym; 2-o z okręgu koła o promieniu  $\rho^a$ , przebieganym  $2m$  razy w zwrocie dodatnim; 3-o z części osi rzeczywistej, wymienionej pod 1-o i przebieganej w zwrocie dodatnim. Wyznamy funkcję  $\omega^{\frac{1}{a}}$  w ten sposób, że w punkcie osi rzeczywistej, w którym kończy się okrąg  $m$ -ty, a zaczyna okrąg  $(m+1)$ -y, miała ona wartość rzeczywistą i dodatnią. Dzięki temu wyznaczeniu, na częściach drogi, położonych w odległości skończonej, będzie  $\omega^{\frac{1}{a}} = |\omega^{\frac{1}{a}}| e^{i \frac{2\nu\pi}{a}}$ , co na zasadzie nierówności  $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$  stwierdza nam zbieżność całki (53).

Powróćmy teraz do wzoru (58); całka  $\frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x}$  sprowadza się do sumy  $2m$  całek  $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x}$ ; drogę całkowania we wszystkich tych całkach wskazuje figura 19.

Różnem w tych całkach jest wyznaczenie funkcji  $\omega^{\frac{1}{a}}$ . W samej rzeczy, kładąc  $\omega = \rho^a e^{i\theta}$ , powinniśmy wziąć w  $(m+1)$ -ej całce:  $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho e^{i \frac{\theta}{a}}$ , .....  
 .... w  $(m+1+\nu)$ -ej całce:  $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho e^{i \frac{\theta+2\nu\pi}{a}}$  ( $\nu=0, \dots, m-1$ ), .... w  $m$ -tej całce:  $\omega^{\frac{1}{a}}$

$= \rho^{\frac{1}{a}} e^{i \frac{\theta-2\pi}{a}}$ , w  $(m+1-\nu)$ -ej całce,  $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i \frac{\theta-2\nu\pi}{a}}$  ( $\nu=1 \dots m$ ). Pisząc zatem  $a = re^{i\varphi}$  i zakładając  $0 < \varphi < 2\pi$ , otrzymujemy dla  $(m+1+\nu)$ -ej całki:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{a} e^{\frac{\omega}{a}} \frac{d\omega}{\omega-x} = \frac{1}{a} e^{\frac{1}{a} e^{i \frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} \quad (\nu = -m, \dots, + (m-1))$$

Dowiedliśmy zatem wzoru:

$$(61) \quad E_n(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{a} e^{\frac{1}{a} e^{i \frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + e_r^{(a)},$$

zachodzącego przy założeniach  $a \geq 2$ ,  $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$  dla  $0 < \varphi < 2\pi$ .

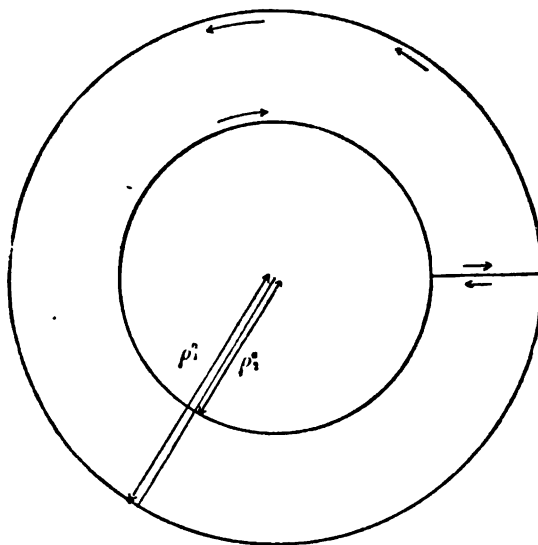


Fig. 19.

Przypadek  $\varphi=0$  został dotąd wyłączony, ale łatwo odmienić dowodzenie tak, aby i ten przypadek był niem objęty. W samej rzeczy, obróciwszy drogę całkowania  $\bar{S}$  na mały kąt  $\eta$  w zwrocie ujemnym, dowodzi się, w sposób podobny do powyższego, że zachodzi zawsze wzór (61), z tą tylko zmianą, że być winno  $-\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$ ; a więc wzór (61) zachodzi także dla  $\varphi=0$ . W tenże sam sposób dowodzi się, że wzór ten stosuje się także w przypadku  $\varphi=2\pi$ . Dowiedliśmy zatem, że wzór (61) zachodzi dla  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Jest widoczne, że można w tym wzorze pominąć wszystkie wyrazy, dla których jest

$$\left| \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a} \right| > \frac{\pi}{2}.$$

W samej rzeczy, ponieważ we wszystkich tych wyrazach, na mocy nierówności  $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$ , jest:

$$\left| \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a} \right| \leq \frac{2m\pi}{a} < \frac{3\pi}{2};$$

więc każdy z nich dąży do zera, gdy  $r$  dąży do nieskończoności. Doszliśmy więc do wzoru ostatecznego:

$$(62) \quad E_m(x) = \sum_{(\nu)} \frac{1}{a} e^{\frac{1}{a} e^{\nu} \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}} + e_r^{(a)},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby  $\nu = -m, \dots, +m+1$ , dla których:

$$\left| \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a} \right| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ten wynik można streścić w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 8b.** „Funkcja  $E_m(x)$ , w której  $a$  jest stałą dodatnią, spełniającą warunek  $a \geq 2$ , zachowuje się co do swego wzrastania w różnych kierunkach w sposób następujący:

Wybermy liczbę  $m$ , poddaną warunkowi  $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$ . Gdy  $|x|$  zwiększa się nieograniczenie wzdłuż jakiegokolwiek wektora ( $x = re^{i\varphi}$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), moduł

$$\left| E_m(r) - \sum_{(\nu)} \frac{1}{a} e^{\frac{1}{a} e^{\nu} \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}} \right|,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby całkowite  $\nu = -m, \dots, -(m-1), \dots, m-1$ , spełniające warunek  $\left| \frac{\nu\pi + \varphi}{a} \right| \leq \frac{\pi}{2}$ , maleje nieograniczenie.

Widzimy, że  $E_m(x)$  dąży do nieskończoności wraz z  $|x|$  dla wszystkich wektorów prócz osi rzeczywistej ujemnej. Mamy jeszcze:

$$(63) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r^{\frac{1}{a}}} |E_a(r)| = \frac{1}{a}; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r^{\frac{1}{a}}} |E_a(x)|; \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Dla osi rzeczywistej ujemnej otrzymujemy:

$$(64) \quad E_a(-r) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{2}{a} e^{\frac{1}{a} \cos \frac{2\nu+1}{a} \pi} \cos \left( r^{\frac{1}{a}} \sin \frac{2\nu+1}{a} \pi \right).$$

Funkcja  $E_a(x)$  ( $a \geq 2$ ) posiada tedy własność wspólną z funkcją  $\sin x$ , że moduł jej rośnie bez granic wraz z  $|x|$ , gdy  $x$  dąży do nieskończoności wzdłuż wektora wyjąwszy jeden wektor. Z drugiej strony moduł funkcji wymiernej całkowitej  $f(x)$  rośnie bez granic wraz z  $|x|$ , gdy  $x$  dąży do nieskończoności wzdłuż jakiegokolwiek wektora.

Stąd wypływa naturalnie pytanie: czy istnieją funkcje całkowite przestępne, których moduł podobnie, jak moduł funkcji  $G(x)$ , rośnie wraz z  $|x|$  bez granic, gdy  $a$  dąży do nieskończoności wzdłuż jakiegokolwiek wektora.

Helge von Koch odpowiedział twierdząco na to pytanie,<sup>1)</sup> dając przykład funkcji  $\bar{G}(x) = x \sin(x+i)$ , która widocznie posiada tę własność. Inną funkcją tej natury jest  $G(x) = \bar{G}(x) + E_a(x)$ . Różnicę pomiędzy sposobami dążenia do nieskończoności funkcji  $G(x)$  i  $\bar{G}(x)$  można wyrazić, mówiąc, że  $G(x)$  zmierza do nieskończoności jednostajnie dla wszystkich kierunków, gdy tymczasem  $\bar{G}(x)$  zdąża do nieskończoności niejednostajnie. Funkcję  $G(x)$  można określić przez tę własność zdążania do nieskończoności w sposób jednostajny.

Ale powstaje tu pytanie głębsze. Funkcja  $E_a(x)$ ,  $0 < a < 2$ , zdąża do nieskończoności jedynie wewnątrz kąta  $-\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2}$ . Zmniejszając  $\alpha$ , można uczynić ten kąt tak małym, jak chcemy. Czy można utworzyć funkcję całkowitą, która staje się nieskończoną wtedy tylko, gdy  $|x|$  rośnie wzdłuż jednego tylko wektora, a maleje nieograniczenie, gdy  $|x|$  rośnie wzdłuż wszystkich innych wektorów? Jeden z moich uczniów, J. Malmquist, podał na to taki przykład.<sup>2)</sup> Funkcja

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^a}\right)}; \quad 0 < a < 1.$$

<sup>1)</sup> Helge von Koch, Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendantes. Arkiv f. Mat. Astr. o. Fysik, Stockholm 1, 9 września 1903.

<sup>2)</sup> J. Malmquist, Étude d'une fonction entière. Acta math. 29.



posiada tę własność. Istotnie, dąży ona nieograniczenie do zera, gdy  $|x|$  zwiększa się nieograniczenie wzdłuż określonego wektora, położonego w kącie  $0 < \varphi < 2\pi$ , rośnie zaś nieograniczenie, gdy  $x$  dąży do nieskończoności wzdłuż osi rzeczywistej dodatniej. Dowiedzimy tego z łatwością na drodze prawie tożsamej z drogą, wskazaną w § 2.

E. Lindelöf, nawiązując rzecz do mojej Noty tymczasowej z „Comptes rendus”<sup>1)</sup> i opierając się na pewnym ciekawym, znalezionem przez siebie twierdzeniu,<sup>2)</sup> utworzył funkcję<sup>3)</sup>:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{x}{\log \left( \nu + \frac{1}{a} \right)} \right)^{\nu}; \quad 0 < a < 1,$$

która posiada wszystkie własności funkcji Malmquista.<sup>4)</sup> Taką jest też funkcja

$$(65) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu (\log \nu)^{\alpha}} x^{\nu}; \quad 0 < \alpha < 1.$$

Wprowadzając do całki (53) zamiast  $e^{\omega \frac{1}{a}}$  nową funkcję zmiennej  $\omega$ , spotkamy w Nocie następną nową klasę funkcji tego gatunku.<sup>4)</sup>

Oznaczmy przez  $\mathcal{G}_a(x)$  funkcję tej natury. Za pomocą takiej funkcji można odpowiedzieć na inną kwestyę interesującą. Czy istnieją funkcje całkowite, które dążą nieograniczenie do zera, gdy  $|x|$  rośnie nieograniczenie wzdłuż jakiegokolwiek określonego wektora?

Funkcja

$$(66) \quad e^{-\mathcal{G}_{a'}(x)} - e^{-\mathcal{G}_{a''}(x)}; \quad a' \geq a''$$

posiada oczywiście tę własność. Widzimy bez trudności, że wyjaśnienie tego zjawiska, na pozór dość paradoksalnego, polega na tem, że moduł funkcji maleje niejednostajnie, gdy  $x$  dąży do nieskończoności w różnych kierunkach.

Łatwo widzieć, że we wszystkich naszych przykładach funkcja  $\mathcal{G}_a(x)$  nie jest rodzaju skończonego. Czy istnieją podobne funkcje rodzaju skoń-

1) 2 marca 1903.

2) Acta Soc. Sc. Fenn. 31 No. 3. p. 29.

3) Bull. des Sc. math. sierpień 1903 p. 224—225.

4) Por. Phragmén, Sur une extension etc. Acta math. 28. p. 357, 358 oraz Mittag-Leffler, Un nouveau théorème etc. (C. R. II. IV. 1904) i Une nouvelle fonction etc. (tamże 18 IV. 1904).

czego? Odpowiedź na to jest przecząca, co wynika z twierdzenia wielkiej wagi, dowiedzonego przez P h r a g m é n a, <sup>1)</sup> a które nie jest bez związku z własnościami charakterystycznymi, podanymi przezemnie dla funkcji  $E_a(x)$ . Twierdzenie to tak brzmi w wysłowieniu własnym autora: <sup>2)</sup>

„Niechaj  $\alpha$  i  $\rho$  będą dwie wielkości, czyniące zadość nierównościom:

$$0 < \alpha < 2, \quad 0 < \rho < \frac{1}{\alpha},$$

i dajmy, że funkcya całkowita  $E(x)$  czyni zadość dwóm warunkom następującym:

$$1-0. \quad |E(x)| e^{-x} \leq A \text{ dla } -\alpha \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \alpha \frac{\pi}{2};$$

$$2-0. \quad |E(x)| \leq B \text{ dla } \alpha \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha \frac{\pi}{2},$$

gdzie  $x = re^{i\varphi}$ ,  $A$  i  $B$  zaś są dwiema stałymi. Powiadamy, że funkcya  $E(x)$  jest koniecznie wielkością stałą“.

Nie będę tym razem wchodził w bardziej szczegółowe rozpatrywanie innych własności funkcji  $E_a(x)$ . Wspomnę, że A. W i m a n ukończył pracę bardzo ciekawą <sup>3)</sup> o rozmieszczeniu zer tej funkcji; przypomnę także, że P h r a g m é n wykazał, iż funkcya  $E_a(x)$  jest z pewnego punktu widzenia najprostszą swojego gatunku. Należy wszakże jeszcze zastanowić się nad tem, czy własność funkcji  $E_1(x) = e^x$  czynienia zadość równemu różniczkowaniu liniowemu o współczynnikach wymiernych względem  $x$  może być uogólniona dla  $E_a(x)$ , gdy  $\alpha$  ma wartości różne od jedności. Zobaczymy, że istotnie tak jest, gdy  $\alpha$  jest wymierne.

Położmy  $\alpha = \frac{m}{n}$ , gdzie  $m$  i  $n$  są liczby całkowite dodatnie. Znajdujemy bezpośrednio, stosując formę symboliczną:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m E_{\frac{m}{n}}(\xi^{\frac{m}{n}}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\xi^{-\frac{m}{n}\nu}}{\left[-\frac{m}{n}\nu\right]} = E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) \\ \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m E_m(\xi^n) = E_m(\xi^n) \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> P h r a g m é n, Sur une extension etc.

<sup>2)</sup> Porówn. M i t t a g - L e f f l e r, Comptes rendus, 12 paźdz. 1903.

<sup>3)</sup> A. W i m a n, Ueber die Nullstellen der Functionen  $E_a(x)$ , Acta math. 29.

<sup>4)</sup> P h r a g m é n, Sur une extension etc.

lub

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{m}{n} x^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dx} \right)^m E_{\frac{m}{n}}(x) &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x^{\nu-n}}{\left[ \frac{m}{n} (\nu-n) \right]} + E_{\frac{m}{n}}(x); \quad n > 1 \\ \left( m x^{1-\frac{1}{m}} \frac{d}{dx} \right)^m E_m(x) &= E_m(x). \end{aligned} \right.$$

Jest naprzykład:

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} E_{\frac{1}{2}}'(x) &= \frac{1}{\left[ \frac{1}{2} \right]} + 2x E_{\frac{1}{2}}(x) \\ E_{\frac{1}{n}}'(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\left[ \frac{1}{n} \right]} + \frac{x^2}{\left[ \frac{2}{n} \right]} + \dots + \frac{x^{n-1}}{\left[ \frac{n-1}{n} \right]} \right) \pi + n x^{n-1} E_{\frac{1}{n}}(x) \\ E_2''(x) + \frac{1}{2x} E_2'(x) - \frac{1}{4x} E_2(x) &= 0. \end{aligned} \right.$$

## § 4.

Przy pomocy twierdzenia 8 podejmuję na nowo badanie całki

$$(8) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

i upraszczam ją, kładąc  $F_{\alpha}(x) = E_{\alpha}(x)$ . Weźmy, jak poprzednio,  $x = re^{i\varphi}$  i rozpatrzmy najprzód przypadek  $2 > \alpha > 0$ .Na podstawie twierdzenia 8a, oznaczwszy przez  $\delta$  wielkość dodatnią, która może być tak mała, jak chcemy, będziemy mieli dla dostatecznie rosnących wartości  $\omega$ :

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} |E_{\alpha}(\omega x)| - e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right)} \right| &< \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; \quad -\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2} \\ e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} |E_{\alpha}(\omega x)| &< \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; \quad \alpha \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

Wynika stąd, że całka

$$(71) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega x} E_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

jest zbieżna, o ile zmienna  $x$  znajduje się po tej samej stronie linii

$$(72) \quad r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a} = 1; \quad -a \frac{\pi}{2} < \varphi < a \frac{\pi}{2},$$

co początek, t. j. wewnątrz gwiazdy o środku w punkcie zero, ograniczonej linią (72). Linia ta, przechodząca zawsze przez punkt  $x=1$ , ma w przypadku  $1 > a > 0$  postać zbliżoną do hyperboli i posiada dwie asymptoty:

$$re^{ia\frac{\pi}{2}} \text{ i } r^{-ia\frac{\pi}{2}}; \quad 0 < r < \infty.$$

Gdy  $a$  zbliża się do zera, krzywa spłaszcza się coraz bardziej aż do zlania z prostą  $(1, +\infty)$ . W przypadku  $a=1$  jest ona prostopadła do osi rzeczywistej w punkcie  $x=1$ . W przypadku  $2 > a > 1$  ma znów postać zbliżoną do paraboli i, gdy  $\varphi$  zbliża się do kątów  $a \frac{\pi}{2}$  i  $-a \frac{\pi}{2}$ , od-

dala się nieograniczenie od dwóch linii  $re^{ia\frac{\pi}{2}}$  i  $re^{-ia\frac{\pi}{2}}$ ,  $0 \leq r < +\infty$ . W przypadku  $a=2$  staje się parabolą (Patrz fig. 20).

Gwiazda o środku zero, ograniczona linią (72), jest dla całki (71) gwiazdą, którą w § 1 (twierdzenie **E**) oznaczyliśmy przez  $B^{(a)}$ . Twierdzenie **E** uczy, że zbieżność całki nie może zachodzić przy  $B^{(a)}$ , gwiazda  $B^{(a)}$  jest tedy gwiazdą zbieżności dla całki (72). Z drugiej strony z twierdzenia **D** wypływa, że równość

$$(73) \quad \frac{1}{1-x} = \int_0^{\infty} e^{-\omega x} E_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

zachodzi wszędzie wewnątrz  $B^{(a)}$ .

Zbadajmy teraz całkę w przypadku  $a \geq 2$ . Z twierdzenia **Sb** wynika, że gdy wielkość dodatnia  $\omega$  rośnie dostatecznie,  $\delta$  zaś jest wielkością dodatnią tak małą, jak chcemy, jest:

$$(74) \quad \left| e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} |E_a(\omega x)| - \frac{1}{a} e^{-\omega^{\frac{1}{a}} \left(1-r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a}\right)} \right| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{a}} \left(1-r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a}\right)}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Całka przeto (72) w założeniu  $\alpha \geq 2$  jest zbieżna wewnątrz gwiazdy o środku zero, ograniczonej linią

$$(75) \quad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Linia ta, jak już zauważyliśmy, jest parabolą dla  $\alpha=2$ . Dla  $\alpha > 2$  staje się linią zamkniętą symetryczną względem osi rzeczywistej (fig. 21) i przeci-

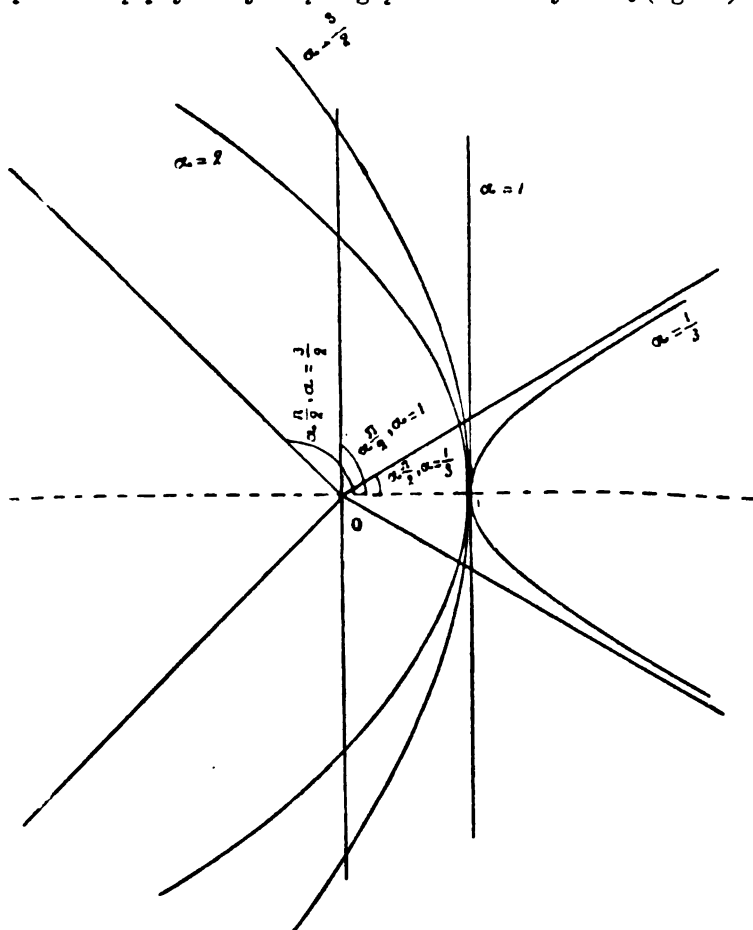


Fig. 20.

nającej tę oś w dwóch punktach:  $r = 1, \varphi = 0, r = \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}} \right)^\alpha, \varphi = \pm \pi$ .

Gdy  $\alpha$  dąży do nieskończoności, zbliża się ona coraz bardziej do okręgu koła o środku w punkcie zero i o promieniu równym jedności.

Za pomocą takich samych rozważań, jak w przypadku  $2 \geq \alpha > 0$ ,

okazać można, że gwiazda o środku zero, ograniczona linią (75), jest gwiazdą zbieżności dla całki (72).

Widzimy także, że równość (73) zachodzi wszędzie wewnątrz tej gwiazdy.

Doszliśmy tedy do następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 9.** „Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}},$$

w której  $a$  jest stałą, poddaną warunkowi  $2 \geq a > 0$ , posiada względem  $x = r e^{i\varphi}$  gwiazdę zbieżności o środku zero ograniczoną linią krzywą:

$$r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a} = 1; \quad -a \frac{\pi}{2} < \varphi < a \frac{\pi}{2}.$$

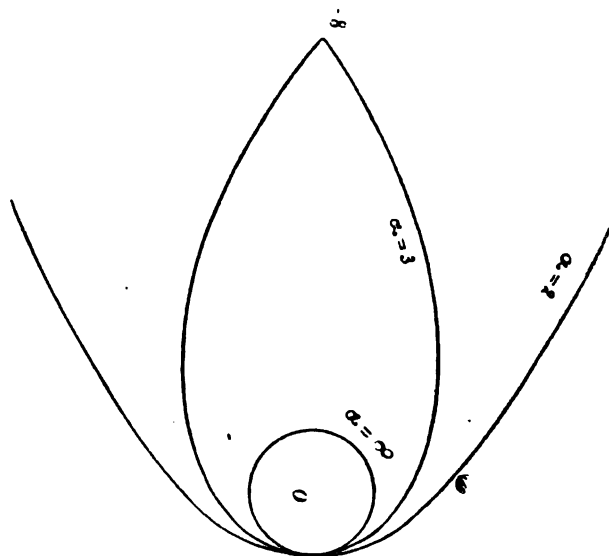


Fig. 21.

Wewnątrz tej gwiazdy jest wszędzie:

$$\frac{1}{1-x} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Wyrażenie

$$(76) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

posiada względem  $x$  gwiazdę zbieżności o środku zero, utworzoną z całej płaszczyzny z wyłączeniem prostej  $(1, \infty)$ . Wewnątrz tej gwiazdy, która jest gwiazdą główną stałych  $1, 1, 1, \dots$ , zachodzi wszędzie równość:

$$(77) \quad \frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\alpha} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Gdy  $\alpha \geq 2$ , całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

posiada gwiazdę zbieżności o środku zero, ograniczoną linią

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

a równość (73) zachodzi wszędzie wewnątrz tej gwiazdy.

Wyrażenie

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

posiada względem  $x$  koło zbieżności o środku zero i promieniu jeden, i wszędzie wewnątrz tego koła jest:

$$(79) \quad \frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Przy pomocy twierdzenia 9 łatwo teraz dojść do zupełnego poznania całki

$$(80) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Powracam do mojego twierdzenia z roku 1882 (patrz wyżej § 1) i zamiast całki:

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} F(z) \left[ \frac{1}{s-x} - \frac{1}{2} \left( B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_n \left( \frac{x}{z} \right)^n \right) \right] dz$$

rozważam całkę analogiczną

$$(80) \quad \frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} F(x, y) \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\infty} e^{-\omega \frac{1}{y}} E_n \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega \frac{1}{y} \right) dy.$$

Gwiazda  $B^{(a)}$  była zbudowana w sposób następujący (twierdzenie E): Na około promienia  $re^{i\varphi}$  wykreślamy w przypadku  $2 \geq a > 0$  figurę, tworzącą

$$(81) \quad \varrho = r \left( \cos \frac{\psi}{a} \right)^a; \quad -a \frac{\pi}{2} < \psi < a \frac{\pi}{2},$$

a w przypadku  $a \geq 2$  inną figurę tworzącą

$$(82) \quad \varrho = r \left( \cos \frac{\psi}{a} \right)^a; \quad -\pi \leq \psi \leq \pi,$$

gdzie  $\varrho, \psi$  są współrzędnymi biegunowymi, odnoszącymi się do wektora, gdzie  $r$  jest wyznaczone w ten sposób, że figura należy całkowicie do gwiazdy głównej  $A$  stałych  $k_0, k_1, k_2, \dots$ . Jeżeli  $R$  oznacza granicę wyższą wielkości  $r$ , kontur graniczny gwiazdy  $B^{(a)}$  będzie opisany przez  $Re^{i\varphi}$ , gdzie  $\varphi$  przebiega wartości  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Rozpatrzmy bliżej linię (81). Jest to linia zamknięta symetrycznie względem  $r, \varphi$  i przechodząca przez dwa punkty:  $\varrho = 0, \varrho = r$ . W przypadku  $a = 1$ , rozpatrzonym przez Borela, staje się ona kołem, mającym za średnicę  $(0, \varphi)$  i  $(r, \varphi)$ .

Rzędną punktu  $(\varrho, \psi)$  względem linii  $(r, \varphi)$  jest  $r \left( \cos \frac{\psi}{a} \right)^a \sin \psi$ . Widzimy więc, że linia spłaszcza się coraz bardziej aż do zlania z linią prostą  $(0, \varphi; r, \varphi)$ , gdy  $a$  dąży do zera. Wypływa stąd, że gwiazda  $B^{(a)}$  zbliża się nieograniczenie do gwiazdy głównej  $A$ , gdy  $a$  dąży do zera.

Linia (82) jest, przeciwnie, także linią zamkniętą symetryczną względem linii  $r, \varphi$ , którą przecina w dwóch punktach  $r$  i  $-r \left( \cos \frac{\pi}{a} \right)^a$ ; obejmuje ona zatem punkt zero. Gdy  $a$  dąży do nieskończoności, zbliża się ona nieograniczenie do koła o środku zero i promieniu  $r$ . Gwiazda  $B^{(a)}$  zbliża



się tedy nieograniczenie do koła o środku zero, wpisanego w gwiazdę główną  $A$ , gdy  $\alpha$  dąży do nieskończoności.

Wróćmy do całki (80), w której  $x$  jest wewnątrz  $B^{(\alpha)}$ ,  $S$  zaś jest konturem zamkniętym, obejmującym linię  $(0,1)$  oraz figurę tworzącą względem tej linii, i takim, że odpowiedni kontur, opisany przez  $xy$ , będzie równocześnie położony wewnątrz  $B^{(\alpha)}$ .

Mamy:

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} F(xy) \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy \\ & = F(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(0)} \frac{F(xy)}{y} \left( \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy, \end{aligned} \right.$$

gdzie całka

$$(84) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(0)} \frac{F(xy)}{y} \left( \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy$$

jest wzięta wzdłuż małego koła o środku w punkcie zero. Wprowadzimy do całki:

$$(85) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

szereg, przedstawiający funkcję  $E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right)$ ; będzie:

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(0)} \frac{F(xy)}{y} \left( \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(0)} \frac{F(xy)}{y^{\nu+1}} dy \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha}^{\nu}} \right) \cdot \omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(0)} \frac{F(z)}{z^{\nu+1}} dz \frac{(\omega x)^{\nu}}{|\underline{\alpha}^{\nu}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \right.$$

Przeto:

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} F(xy) \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy. \end{aligned} \right.$$

Dla każdej wartości na  $y$ , należącej do  $S$ , mamy:

$$(88) \quad \frac{1}{y-1} = \frac{1}{y} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

skąd:

$$(89) \quad F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

równość ta zachodzi dla każdego obszaru  $X$ , położonego wewnątrz  $B^{(\alpha)}$ . Jeżeli przypomnimy sobie teraz twierdzenia **D** i **E**, widzimy, że gwiazda  $B^{(\alpha)}$  jest gwiazdą zbieżności całki

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

a więc twierdzenie, podane na wstępie Noty, jest całkowicie udowodnione.

Zwróć jeszcze uwagę na wzór:

$$(90) \quad FB^{(\alpha)}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^{\nu},$$

będący bezpośrednim wynikiem wzoru (86), a w którym  $B^{(\alpha)}$  jest gwiazdą zbieżności wyrażenia granicznego po stronie drugiej. Szereg nieskończony, znajdujący się po stronie drugiej, jest funkcją całkowitą zmiennej  $x$ , zależną od dwóch parametrów  $\omega$  i  $\alpha$ ; zbliża się on nieograniczenie do  $FB^{(\alpha)}(x)$ , gdy  $\omega$  rośnie nieograniczenie, do  $FA(x)$  zaś, gdy  $\alpha$  zmierza nieograniczenie do zera. Dochodzimy zatem do twierdzenia:

**Ga.** „Niechaj  $FA(x)$  będzie jakąkolwiek gałęzią funkcyjną, należącą do stałych  $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{\nu}, \dots$ , których  $A$  jest gwiazdą główną. Można zawsze przy pomocy stałych  $k$  utworzyć funkcję całkowitą  $G_{\omega, \alpha}(x)$  zmiennej  $x$ , zależną, oprócz od  $x$  i od stałych  $k$ , jeszcze od parametrów dodatnich  $\omega$  i  $\alpha$ , taką, aby:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x) = FA(x)$$

i aby wyrażenie  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x)$  było rozbieżne zewnątrz  $A$ .

Można dobrać  $G_{\omega, \alpha}(x)$  w ten sposób, aby było równocześnie:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x) = FB^{(a)}(x),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x) = FC(x)$$

i aby wyrażenia  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x)$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x)$  były rozbieżne, pierwsze zewnątrz  $B^{(a)}$ , drugie zewnątrz  $C^a$ .

Jeżeli usuniemy warunek, że wyrażenie, którego granicą jest  $FA(x)$ , ma mieć jednocześnie  $A$  jako gwiazdę zbieżności, to łatwo będzie wybrać funkcję całkowitą w ten sposób, aby zależała tylko od jednego parametru. Zobaczymy to w dalszym ciągu w § 5 Twierdzenie to jest analityczne do następującego twierdzenia Weierstrassa<sup>1)</sup>, do którego wielki analityk przywiązywał szczególną wagę:

g. „Niechaj będzie funkcja jakakolwiek rzeczywista i ciągła zmiennej  $x$ . Można zawsze utworzyć funkcję całkowitą  $g_{\omega}(x)$  zmiennej  $x$ , zależnej oprócz od  $x$ , jeszcze od parametru dodatniego  $\omega$ , i taką, że równość  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} g_{\omega}(x) = f(x)$  zachodzi dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej  $x$ ”.

Wzór (90) może być przekształcony w sposób następujący.

Mamy:

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^n (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \left( \int_0^{\frac{1}{\omega}} \frac{e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^{\nu}}{|\alpha \nu|} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} - \int_0^{\frac{1}{\omega}} \frac{e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^{\nu+1}}{|\alpha(\nu+1)|} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^n \frac{k_{\nu}}{|\alpha \nu|} \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^{\nu} - \left( \sum_{\nu=0}^n k_{\nu} x^{\nu} \right) \int_0^{\frac{1}{\omega}} \frac{e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^{n+1}}{|\alpha(n+1)|} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Mamy też:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|\alpha n|} \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^n d\omega^{\frac{1}{\alpha}}} = 0;$$

<sup>1)</sup> Patrz K. Weierstrass, „O przedstawialności analitycznej tak zwanych dowolnych funkcji argumentów rzeczywistych“, Prace mat.-fiz. 15, str. 162.

a zatem (patrz Notę IV-tą):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{\nu=0}^n k_{\nu} x^{\nu} \right| \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu+1}}{\Gamma(\alpha(\nu+1))} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

Otrzymujemy więc:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{\Gamma(\alpha\nu)} \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{\Gamma(\alpha\nu)} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\Gamma(\alpha(\nu+1))} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

a stąd:

$$(91) \quad FB^{(\alpha)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{\Gamma(\alpha\nu)} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\Gamma(\alpha(\nu+1))} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Przy  $\alpha = 1$  wzór ten staje się wzorem Borela:

$$FB^{(1)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{e^{-\omega} \omega^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Druga strona wzoru jest jednostajnie zbieżna względem  $x$ ; można więc napisać:

$$(92) \quad FB^{(\alpha)}(x) = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\omega^{\nu}}{\Gamma(\alpha\nu)} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\Gamma(\alpha(\nu+1))} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} k_{\mu} x^{\mu} \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Wzór (91) poucza nas, że moglibyśmy otrzymać cztery wzory podstawowe (89), (90), (91), (92), poddając całkę (80) przekształceniu:

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} F(xy) \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{1}{y} \frac{F(xy)}{y-1} \left[ \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) - y \left( E_{\alpha} \left( \frac{\omega}{y} \right) - 1 \right) \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right] dy. \end{aligned} \right.$$

i stosując do strony drugiej rozważanie zupełnie podobne do rozważań w § 2 Noty czwartej.

Doszliśmy tedy do równości następujących:

$$\begin{aligned}
 (94) \quad & FB^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\
 &= FB^{(a)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} k_{\mu} x^{\mu} \right] d\omega^{\frac{1}{a}} \\
 &= FB^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{a}} x^{\nu} \\
 &= FB^{(a)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} F(xy) \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} \right) dy;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (95) \quad & FB^{(a)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} k_{\mu} x^{\mu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{a}} \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{a}} x^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (96) \quad \left\{ \begin{aligned}
 FA(x) &= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^\nu}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &= \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \left( \frac{\omega^\nu}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{|\underline{\alpha\nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu = \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 10.** „Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku  $a$ , przez  $a$  wielkość dodatnią, przez  $B^{(a)}$  gwiazdę spółśrodkową z  $A$ , wpisaną w  $A$  i utworzoną w przypadku  $2 \geq a > 0$  przez figurę tworzącą:

$$\rho = r \left( \cos \frac{\psi}{a} \right)^a; \quad -a \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq a \frac{\pi}{2},$$

w przypadku zaś  $a \geq 2$  przez figurę tworzącą:

$$\rho = r \left( \cos \frac{\psi}{a} \right)^a; \quad -\pi \leq \psi \leq \pi,$$

gdzie  $\rho$  i  $\psi$  są spółrzednemi biegunowemi, odnoszącemi się do wektorów  $x - a = r e^{i\varphi}$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Gwiazda  $B^{(a)}$  zbliża się nieograniczenie do koła o środku  $a$ , wpisanego w  $A$ , gdy  $a$  dąży do nieskończoności. Powiększa się ona w sposób ciągły wraz z  $\frac{1}{a}$  i staje się dla  $a=1$  gwiazdą Borela (Twierdzenie 7a). Zawiera ona w swoim wnętrzu każdy obszar położony wewnątrz  $A$ , jeżeli tylko  $a$  jest dostatecznie małe.

Gdy gwiazda  $A$  jest gwiazdą główną stałych  $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\nu)}(a), \dots$  poddanych warunkowi C a u c h y' e g o, gwiazda  $B^{(a)}$  jest gwiazdą zbieżności dla wyrażenia

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} (x-a)^\nu \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^\nu}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
 = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\omega^\nu}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^\mu \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} \frac{1}{|\underline{\alpha \nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

$$F_{\alpha}(x-a) = F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}|} \frac{x-a}{|\underline{\alpha \cdot 1}|} + \frac{F^{(2)}(a)}{|\underline{2}|} \frac{(x-a)^2}{|\underline{\alpha \cdot 2}|} + \frac{F^{(3)}(a)}{|\underline{3}|} \frac{(x-a)^3}{|\underline{\alpha \cdot 3}|} + \dots$$

Dalej mamy równość:

$$FB^{(\alpha)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} (x-a)^{\nu} \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha \nu}|} - \frac{\omega^{(\nu)}}{|\underline{\alpha(\nu+1)|}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha \nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)|}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^{\mu} \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} \frac{1}{|\underline{\alpha \nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Wyrażenie graniczne:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{\nu}|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} (x-a)^{\nu} \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha \nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)|}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha \nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)|}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^{\mu} \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} \frac{1}{|\underline{\alpha \nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

posiada gwiazdę zbieżności tożsamą z gwiazdą  $A$  i mamy równość:

$$\begin{aligned}
 FA(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{1}|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} (x-a)^{\nu} \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^{\mu} \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Z drugiej wyrażenie graniczne:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{1}|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} (x-a)^{\nu} \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^{\mu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} \cdot \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

posiada koło zbieżności  $C$  o środku zero, wpisane w gwiazdę  $A$ . Otrzymujemy tedy równość, w której po stronie pierwszej będzie  $FC(x)$ , a po stronach drugiej i następnych poprzednio wypisane wyrażenia graniczne.

Jeżeli przy całkowaniu zatrzymamy się w przejściu do nieskończoności na liczbie skończonej  $\omega$ , będziemy mieli równość:



$$\begin{aligned}
FB^{(\alpha)}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F^{(\nu)}(a) + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{1}|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} (x-a)^{\nu} \right) \int_0^{\frac{1}{\omega^{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= FB^{(\alpha)}(x) - \int_0^{\frac{1}{\omega^{\alpha}}} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \left( \frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^{\mu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= FB^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}|} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}|} \int_0^{\frac{1}{\omega^{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} \\
&= FB^{(\alpha)}(x) - \int_0^{\frac{1}{\omega^{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} F(z) \left( \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \int_0^{\frac{1}{\omega^{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left( \omega \frac{x}{z} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dz,
\end{aligned}$$

zachodzącą wszędzie wewnątrz  $B_{\alpha}^{(a)}$ , gdzie  $S$  oznacza kontur zamknięty, otaczający linię  $(ax)$  oraz figurę tworzącą względem tej linii i położoną wewnątrz  $B^{(\alpha)u}$ .

Można rozmaitemi sposobami, które wskażę w następnym paragrafie, utworzyć wzory analogiczne do wzorów (94), (95), (96); lecz zdaje się być rzeczą trudną utworzyć je tak, aby gwiazda, wewnątrz której są zbieżne, pozostała zawsze gwiazdą zbieżności przy jakiegokolwiek funkcji. Jest to przeważnie, jak tego dowiodłem, własność podstawowa wzorów (95), (96).

### § 5.

Rozpatrzmy całkę:

$$(97) \quad J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} F(xy) E \left( \omega \left( \frac{1}{y} - 1 \right) \right) dy,$$

gdzie  $F(x)$  jest określone zawsze przez równość:

$$FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots;$$

$C$  jest kołem o środku w punkcie zero i o promieniu  $r$ , określonym przez równość  $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |\sqrt[r]{k_r}| = \frac{1}{r}$ ;  $E(x)$  zaś oznacza funkcję całkowitą zmiennej  $x$  taką, że  $E(0)=1$ .

Kontur  $F$  powinien być granicą powierzchni jednospójnej, dla której funkcja  $F(xy)$  pozostaje regularną; przebieg po nim odbywa się w zwrocie prostym i obejmuje on punkty  $y=0$ ,  $y=1$ .

Mamy:

$$J(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)\right) dy,$$

gdzie:

$$(98) \quad F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_r x^r) \frac{E^{r+1}(-\omega)}{|r+1|} \omega^{r+1} + J(x).$$

Szereg:

$$E(-\omega + h) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E^r(-\omega) h^r}{|r|} h^r$$

jest zawsze zbieżny względem  $h$  przy wszystkich wartościach na  $\omega$ , przeto dla każdej wartości  $\omega$  mamy:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 \frac{E^r(-\omega)}{|r|} \right| = 0.$$

Z drugiej strony, biorąc  $r_1 < r$  i oznaczając przez  $g_1$  granicę wyższą wyrażenia  $\left| \sum_{r=0}^{\infty} k_r r^r \right|$  dla  $|x|=r_1$ , mamy według twierdzenia Cauchy'ego — Weierstrassa<sup>1)</sup>:  $|k_u| \leq g_1 r_1^{1-u}$ , a stąd:

$$\sum_{u=0}^r |k_u x^u| \leq g_1 \frac{1 - \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^{r+1}}{1 - \frac{|x|}{r_1}} = g_1 \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^r \frac{1 - \left(\frac{r_1}{|x|}\right)^{r+1}}{1 - \frac{r_1}{|x|}},$$

<sup>1)</sup> Weierstrass, Werke Bd. 1. p. 67.

przeło szereg:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (|k_0| + |k_1 x| + \dots + |k_\nu x^\nu|) \frac{E^{\nu+1}(-\omega)}{|\nu+1|} k^{\nu+1}$$

jest szeregiem zawsze zbieżnym względem  $h$  dla wszelkich wartości na  $x$  i  $\omega$ . Przy ustaleniu  $\omega$  i  $h$ , jest on nadto jednostajnie zbieżny dla jakiegokolwiek obszaru zmiennej  $x$ . Stąd (porówn. wyżej str. 155):

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (|k_0| + |k_1 x| + \dots + |k_\nu x^\nu|)^0 \frac{\int_0^\omega E^{(\nu+2)}(-\omega) \omega^{\nu+1} d\omega}{|\nu+1|} = 0,$$

a kładąc jeszcze

$$\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} = \int_0^\omega \left( \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu|} \omega^\nu - \frac{E^{(\nu+2)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} \right) d\omega,$$

i na podstawie twierdzenia podstawowego Weierstrassa mamy:<sup>1)</sup>

$$(99) \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left( \int_0^\omega \frac{E^{\nu+1}(-\omega)}{|\nu|} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu.$$

Przy ustaleniu wielkości  $\omega$ , obie strony tej równości są zawsze zbieżne względem  $x$ .

Niechaj teraz  $W$  będzie obszarem skończonym w rozmaitości  $\omega$ ,  $\rho$  wielkością dodatnią tak wielką, jak chcemy; oznaczmy przez  $g$  granicę wyższą wielkości  $|E(-\omega+h)|$ , gdy  $\omega$  należy do  $W$ , dla  $h$  zaś jest  $|h| \leq \rho$ . Mamy wtedy:

$$\left| \frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{|\nu|} \right| \leq g \rho^{-\nu},$$

a przypominając sobie wzór  $|k_\nu| \leq g_1 r_1^{-\nu}$ , widzimy, że:

$$\left| k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu|} \right| < (\nu+1) \frac{g g_1}{(r_1 \rho)^\nu} \frac{1}{\rho},$$

<sup>1)</sup> Weierstrass, Zur Functionenlehre, Werke, Bd. 2. p. 205.

a zatem szereg

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} (\omega x)^{\nu},$$

gdzy  $x$  należy do danego obszaru skończonego, jest względem  $\omega$  jednostajnie zbieżny dla jakiegokolwiek obszaru skończonego. Mamy więc prawo powiedzieć, że:

$$(100) \quad \int_0^{\infty} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} (\omega x)^{\nu} \right] d\omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} \int_0^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^{\nu} d\omega}{|\underline{\nu}} x^{\nu}.$$

Stąd i na mocy wzorów (97), (98), (99), (100) mamy równość następującą:

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{E^{\nu+1}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ &= F(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} \left( \int_0^{\infty} \frac{E^{\nu+1}(-\omega)}{|\underline{\nu}} \omega^{\nu} d\omega \right) x^{\nu} \\ &= F(x) - \int_0^{\infty} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} \frac{E^{\nu+1}(-\omega)}{|\underline{\nu}} (\omega x)^{\nu} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)\right) dy. \end{aligned} \right.$$

Widzimy bezpośrednio, że przez postępowanie zupełnie takie same, jak poprzednio, otrzymujemy jeszcze wzór:

$$(102) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{1}{E(\omega)} \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{|\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} \frac{F(xy)}{y-1} \frac{E\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E(\omega)} dy. \end{aligned} \right.$$

Aby otrzymać szukane wyrażenia na  $F(x)$ , należy znaleźć takie funkcje  $E(x)$ , by ostatnia strona tak w (101), jak i w (102) dążyła do zera wraz z  $\omega$ , dążącym do nieskończoności.

W drugim z tych wzorów połączmy  $E(x) = E_2(x)$ ; niechaj  $B^{(a)}$  będzie gwiazdą o środku zero, należącą do stałych  $k_0, k_1, k_2, \dots$  (patrz § 4),  $x$  zaś punktem wewnątrz tej gwiazdy. Przyjmijmy najprzód  $2 > a > 0$ . Figurą tworzącą względem linii (01) jest:

$$\rho^{\frac{1}{a}} = \cos \frac{\psi}{a}; \quad -a \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq a \frac{\pi}{2}.$$

Obierzmy na  $S$  kontur, obejmujący tę linię, i taki, aby punkt  $xy$  znajdował się wewnątrz  $B^{(a)}$ . Niechaj  $\bar{S}$  będzie konturem, opisanym przez  $z = \frac{1}{y}$  w tym czasie, gdy zmienna  $y$  opisuje kontur  $S$ . Linia  $\bar{S}$  jest zamknięta, obejmuje początek i pozostaje zawsze wewnątrz linii

$$\rho^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\bar{\psi}}{a} = 1; \quad (s = \bar{\rho} e^{i\bar{\psi}}),$$

będącej przekształceniem linii  $\rho^{\frac{1}{a}} = \cos \frac{\psi}{a}$  przy pomocy podstawienia  $z = \frac{1}{y}$ . Wiemy, że  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} E_a(\omega s)$  zbliża się nieograniczenie do zera dla każdego punktu na  $\bar{S}$ , położonego w kącie  $2\pi - a \frac{\pi}{2} > \bar{\psi} > a \frac{\pi}{2}$ , oraz że  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |E_a(\omega s)| = \frac{1}{a}$  dla wszystkich punktów na  $\bar{S}$ , dla których  $\bar{\psi} = \pm a \frac{\pi}{2}$ . Wiemy jeszcze, że:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( |E_a(\omega z)| - \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{z}} e^{\frac{1}{a} \cos \frac{\bar{\psi}}{a}} \right) = 0$$

dla każdego punktu na  $\bar{S}$ , położonego w kącie  $-a \frac{\pi}{2} < \bar{\psi} < a \frac{\pi}{2}$ .

Według założenia o konturach  $S$  i  $\bar{S}$ , część konturu  $\bar{S}$ , położona w kącie  $-a \frac{\pi}{2} < \bar{\psi} < a \frac{\pi}{2}$ , pozostaje zawsze z linią  $\rho^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\bar{\psi}}{a} = 1$  po jednej stronie względem początku. Granica wyższa wyrażenia  $\rho^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\bar{\psi}}{a}$  w tym kącie jest więc zawsze mniejsza od jedności.

Widzimy tedy, że jest:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{E_a\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_a(\omega)} = 0, \quad 2 > a > 0,$$

dla każdego punktu na  $S$  i także, że  $\frac{E_a\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_a(\omega)}$  zbliża się w sposób jednostajny do zera dla wszystkich punktów na  $S$ .

Dochodzimy do tego samego wyniku dla  $\alpha \geq 2$ . Figurą tworzącą względem linii (01) jest wtedy  $\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos \frac{\psi}{\alpha}$ ;  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ; jeżeli  $\delta$  oznacza wielkość dodatnią, która staje się nieskończenie małą wraz z  $\frac{1}{\omega}$ , będzie wtedy:

$$\left| |E_a(\omega s)| - \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha} \cos \frac{\psi}{\alpha}}} \right| < \delta e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha} \cos \frac{\psi}{\alpha}}}, \quad -\pi \leq \bar{\psi} \leq \pi.$$

Powróćmy do wzoru (102).

Mamy:

$$(103) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int \frac{F(xy)}{y-1} \frac{E_a\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_a(\alpha)} dy = 0,$$

a zatem:

$$(104) \quad \left\{ \begin{aligned} FB^{(\alpha)}(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{1}{E_a(\omega)} \frac{E_a^{(\nu+1)}(0)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{\omega^{\nu+1}}{|\alpha(\nu+1)|}; \end{aligned} \right.$$

równość ta zachodzi wszędzie wewnątrz gwiazdy  $B^{(\alpha)}$ , a wyrażenie po stronie trzeciej tego wzoru jest jednostajnie zbieżne dla całego obszaru wewnętrznego gwiazdy  $B^{(\alpha)}$ .

Widzimy więc analogię zupełną z wyrażeniem Borela, które otrzymujemy, kładąc  $\alpha = 1$ .

Uczyńmy jeszcze uwagę, że na  $E(x)$  zamiast  $E_a(x)$  można wziąć funkcję, którą rozważaliśmy poprzednio, mianowicie funkcję, która zbliża się nieograniczenie do zera, gdy  $x$  dąży do nieskończoności wzdłuż jakiegokolwiek wektora różnego od osi rzeczywistej dodatniej, a jest wielkością rzeczywistą dodatnią, rosnącą nieograniczenie, gdy  $x$  dąży do nieskończoności wzdłuż osi rzeczywistej dodatniej. Obierając nadto tę funkcję tak, aby stosunek  $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$  zdążył do zera jednostajnie, gdy  $x$  należy do obszaru skoń-

zonego, położonego zewnątrz części osi rzeczywistej dodatniej pomiędzy  $x=1$  a nieskończonością, otrzymujemy wyrażenie:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{|\underline{\nu+1}|} \omega^{\nu+1}$$

jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru wewnątrz gwiazdy głównej  $A$  i przedstawiające gałąź funkcyjną  $FA(x)$  wszędzie wewnątrz tej gwiazdy.

Na innym miejscu<sup>1)</sup> rozpatrywałem taką funkcję  $E(x)$  i powrócę do niej w Nocie następnej.

Wynik, do którego doszliśmy przez zbadanie wzoru (102), można streścić w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 11.** „Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku w punkcie zero, przez  $a$  wielkość dodatnią, przez  $B^{(a)}$  gwiazdę spółśrodkową z  $A$ , wpisaną w  $A$  i utworzoną w przypadku  $2 > a > 0$  przez figurę tworzącą  $\rho = r \left( \cos \frac{\psi}{a} \right)^a$ ;  $-a \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq a \frac{\pi}{2}$ , w przypadku zaś  $a \geq 2$  przez figurę tworzącą  $\rho = r \left( \cos \frac{\psi}{a} \right)^a$ ;  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ , gdzie  $\rho$  i  $\psi$  są spółrzędne biegunowe w odniesieniu do wektora  $x-a = r e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Gdy  $A$  jest gwiazdą główną, należącą do stałych  $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$ , poddanych warunkowi Cauchy'ego, mamy dwie równości:

$$FB^{(a)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\alpha(\mu+1)}|},$$

$$FA(x) = \lim_{a=0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\alpha(\mu+1)}|},$$

gdzie  $E_a(x)$  oznacza funkcję:

$$E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\underline{\alpha \nu}|},$$

$\omega$  zaś jest zmienną dodatnią. Pierwsza z tych równości zachodzi wszędzie wewnątrz  $B^{(a)}$ , druga wszędzie wewnątrz  $A$ . Druga strona pierwszej równości jest

<sup>1)</sup> Mittag-Leffler, Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques, Comptes rendus 188. II. IV. 04. Patrz co do tej funkcji: E. Phragmén, Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions, Acta math. 28. p. 357--359.

jednostajnie zbieżna dla wszelkiego obszaru wewnątrz  $B^{(a)}$ , druga strona drugiej równości jest jednostajnie zbieżna dla wszelkiego obszaru wewnątrz  $A$ .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie skończonej  $\omega$ , będziemy mieli równość:

$$FB^{(a)}(x) = \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|1|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\mu|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\alpha(\mu+1)|}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E_a\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E_a(\omega)} dz,$$

zachodzącą wszędzie wewnątrz  $B^{(a)}$ , jeżeli  $(S)$  oznacza kontur zamknięty, położony wewnątrz  $B^{(a)}$  i obejmujący figurę tworzącą w odniesieniu do prostej  $(ax)$ .

Jeżeli przez  $E(x)$  oznaczymy funkcję taką, że dla każdego obszaru skończonego, położonego zewnątrz części osi rzeczywistej pomiędzy  $x=1$  a nieskończonością, wielkość  $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$  zdąży nieograniczenie do zera, gdy  $\omega$  rośnie nieograniczenie, będzie:

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|1|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\mu|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{E^{\nu+1}(0)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1}$$

gdzie strona druga jest jednostajnie zbieżna dla wszelkiego obszaru wewnątrz  $A$ .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie skończonej  $\omega$ , będzie:

$$FA(x) = \frac{1}{E(\omega)} \left( F(a) + \frac{1}{|1|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\mu|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{E^{\nu+1}(0)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1}$$

$$= \int^{(S)} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E(\omega)} d\omega,$$

gdzie kontur  $S$  jest konturem zamkniętym, położonym wewnątrz  $A$  i obejmującym prostą  $(ax)$ .

Powróćmy do wzoru (101) i uczynimy w nim, jak poprzednio we wzorze (102),  $E(x) = E_a(x)$ ; przyjmijmy nadto, że  $2 > a > 0$ . Niechaj zmienna  $y$  opisuje dokoła linii  $(01)$  figurę klinową, złożoną z dwóch łuków kołowych symetrycznych względem tej linii i przecinających się w dwóch punktach  $0$  i  $1$  pod kątem  $a\pi$  (fig. 22).



Oznaczmy przez  $V^{(a)}$  gwiazdę o środku w punkcie zero, wpisaną w gwiazdę główną  $A$ , utworzoną przez tę figurę klinowatą jako figurę tworzącą.

Jest to figura niewiele odmienna od tej, którą roztrząsaliśmy razem z prof. *Volterra*.<sup>1)</sup>

Obierzmy na  $S$  linię, obejmującą figurę tworzącą w odniesieniu do linii  $(01)$  i położoną zarazem wewnątrz  $V^{(a)}$ . Niechaj  $\bar{S}$  będzie linią opisaną przez  $z = \frac{1}{y}$  w tym czasie, gdy  $y$  opisuje linię  $S$ . Figurze klinowatej

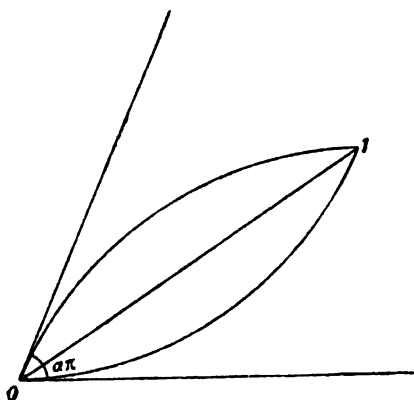


Fig. 22.

w płaszczyźnie  $y$ , mającej linię  $(01)$  za oś, odpowiadają w płaszczyźnie  $z$  dwie półproste symetryczne względem osi rzeczywistej, przechodzącej przez punkt  $s=1$  i przecinające się pod kątem  $\alpha\pi$ .

Linia  $\bar{S}$  jest więc linią zamkniętą, otaczającą początek i pozostającą zawsze po tej samej stronie dwóch półprostych, co początek. Na zasadzie znanej własności funkcji  $E_a(x)$  widzimy tedy, że  $\lim_{\omega=\infty} E_a(\omega(s-1))$  zbliża się nieograniczenie do zera w sposób jednostajny dla wszystkich punktów  $z$ , które należą do  $\bar{S}$ . Mamy zatem:

$$\lim_{\omega=\infty} \int_{\bar{S}}^{(s)} \frac{F(xy)}{y-1} E_a\left(\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)\right) dy = 0$$

i przy pomocy wzoru (101) otrzymujemy:

<sup>1)</sup> Patrz Notę trzecią str. 61, Prace mat.-fiz. t. 16 str. 217.

$$(105) \left\{ \begin{aligned} FV^{(a)}(x) &= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ FV^{(a)}(x) &= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left( \int_0^\omega \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu \\ FV^{(a)}(x) &= \int_0^\infty \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} (\omega x)^\nu \right) d\omega. \end{aligned} \right.$$

Kładąc  $a=1$ , otrzymamy na  $V^{(a)}$  gwiazdę Borela, którą oznaczylem przez  $B^{(1)}$ . Drugi i trzeci wzór stają się wtedy wzorami Borela, drugi zaś wzorem (37) Noty trzeciej.

Jeżeli zamiast  $E_a(x)$  wprowadzimy funkcję  $E(x)$  tego gatunku, jaki rozpatrzyłem w moich Notach w Comptes rendus 11 i 18 kwietnia 1904, t. j. funkcję taką, że  $E(0)=1$  i że  $E(\omega x)$  dla rzeczywistych dodatnich rosnących bez granic wartości  $\omega$  zbliża się jednostajnie do zera w jakimkolwiek obszarze skończonym zmiennej  $x$ , nie zawierającym osi rzeczywistej dodatniej, otrzymamy wzory:

$$(106) \left\{ \begin{aligned} FA(x) &= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ FA(x) &= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left( \int_0^\omega \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu \\ FA(x) &= \int_0^\infty \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} (\omega x)^\nu \right) d\omega, \end{aligned} \right.$$

gdzie strony drugie są jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru skończonego, położonego wewnątrz gwiazdy głównej.

Wyniki, osiągnięte przez rozpatrzenie wzoru (101), dadzą się streścić w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 11b.** „Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku  $a$ , przez  $\alpha$  wielkość dodatnią mniejszą od 2, przez  $V^{(a)}$  gwiazdę spółśrodkową z  $A$ , wpisaną w  $A$  i utworzoną przez figurę klinową o kącie  $\alpha\pi$  i obracającą się około jednego z jej wierzchołków, który winien być w środku  $a$ . Ponieważ  $A$  jest gwiazdą główną, należącą do stałych  $F(a)$ ,  $F^{(1)}(a)$ , ...,  $F^{(\mu)}(a)$  ..., poddanych warunkowi Cauchy'ego, będziemy mieli dwa układy równości:

$$FV^{(a)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right) \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}|} \omega^{\nu+1},$$

$$FV^{(a)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} E_a^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

$$FV^{(a)}(x) = \int_0^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega x)^\nu \right) d\omega;$$

$$FA(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right) \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}|} \omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} E_a^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

$$FA(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega x)^\nu \right) d\omega,$$

gdzie  $E_a(x)$  oznacza funkcję  $E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\underline{\nu}|}$  i gdzie  $\omega$  jest wielkością

rzeczywistą dodatnią. Pierwszy układ wartości zachodzi wszędzie wewnątrz  $V^{(a)}$ , drugi wszędzie wewnątrz  $A$ . Drugie strony pierwszego układu są jednostajnie zbieżne dla całego obszaru wewnątrz  $V^{(a)}$ , drugie strony drugiego układu wszędzie wewnątrz  $A$ . Jeżeli zatrzymamy się w przejściu do nieskończoności na liczbie skończonej  $\omega$ , będziemy mieli równość:

$$\begin{aligned} FV^{(a)}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}|} \omega^{\nu+1} \\ &= FV^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} E_a^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \\ &= FV^{(a)}(x) - \int_0^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^\nu \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(z)}{z-x} E_a\left(\frac{x-z}{z-a}\right) dz, \end{aligned}$$

zachodzącą wszędzie wewnątrz  $V^{(a)}$ , jeżeli  $S$  oznacza kontur zamknięty, położony wewnątrz  $V^{(a)}$  i obejmujący figurę tworzącą w odniesieniu do prostej  $(ax)$ .

Jeżeli zamiast  $E_x(x)$  wprowadzimy funkcję  $E(x)$  taką, że  $E(\omega x)$  zbliża się nieograniczenie do zera, gdy zmienna rzeczywista dodatnia  $\omega$  rośnie bez granic,  $x$  zaś należy do obszaru skończonego, nie zawierającego osi rzeczywistej dodatniej, będziemy mieli wzory:

$$FA(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}|} \omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^{\nu} d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FA(x) = \int \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a)^{\nu}) d\omega,$$

gdzie strony drugie są jednostajnie zbieżne dla wszelkiego obszaru wewnątrz  $A$ .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie skończonej  $\omega$ , będzie:

$$FA(x) - \sum_0^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \right) \frac{E^{\nu+1}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}|} \omega^{\nu+1}$$

$$= FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^{\nu} d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$= FA(x) - \int \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a)^{\nu}) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{F(z)}{z-x} E\left(\omega \frac{x-z}{z-a}\right) dz,$$

gdzie  $S$  oznacza kontur zamknięty, otaczający linię  $(ax)$  i położony wewnątrz gwiazdy  $A^*$ .

Wyrażenie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^{\nu} d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} k_{\nu} x^{\nu}$$

po stronie drugiej równości:

$$(107) \quad FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} k_{\nu} x^{\nu}$$

jest funkcją całkowitą zmiennej  $x$ .

Równość (107) pozwala nam w następujący sposób uzupełnić twierdzenie **Ga**:

**Gb.** „Niechaj  $FA(x)$  będzie jakąkolwiek gałęzią funkcyjną, należącą do stałych  $k_0, k_1, \dots, k_{\nu}, \dots$  których  $A$  jest gwiazdą główną. Przy pomocy stałych  $k$  można utworzyć zawsze funkcję  $G_{\omega}(x)$  całkowitą zmiennej  $x$ , która, oprócz od  $x$  i od stałych  $k$ , zależy jeszcze od pewnego parametru rzeczywistego  $\omega$  i taką, że:

$$\lim_{\omega=\infty} G_{\omega}(x) = FA(x)^*.$$

Jak to zauważyłem już na końcu paragrafu poprzedzającego, pomiędzy wzorami, otrzymanymi tam, a otrzymanymi tu, zachodzi ta różnica, że nie udowodniliśmy, iż te ostatnie posiadają gwiazdę zbieżności.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

K. ŻORAWSKI.

NOTIZEN AUS DEM GEBIETE DER DIFFERENTIAL-  
GEOMETRIE.

---

I. BEMERKUNG ÜBER TRANSLATIONSFLÄCHEN.

In den früheren Aufsätzen: „Notiz über Translationsflächen“<sup>1)</sup> und „Über Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen“<sup>2)</sup>, haben wir unter anderem Bedingungen für den Fall aufgestellt, wenn zwei Curvenscharen auf einer Fläche die miteinander conjugierten Scharen von congruenten und gleichgestellten Curven bilden. Im folgenden wollen wir die Bedingungen dieser Tatsache direkt aus dem Umstande ableiten, dass man alsdann die Gleichungen der Fläche durch zweckmässige Einführung neuer Parameter auf die den Translationsflächen charakteristische Form bringen kann.

Eine Fläche:

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

ist dann und nur dann eine Translationsfläche, wenn es möglich ist derartige neue Parameter:

$$(2) \quad u' = u'(u, v), \quad v' = v'(u, v)$$

einzuführen, dass die Gleichungen der Fläche die einfache Form:

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= \varphi_1(u') + \varphi_2(v'), \\ y &= \psi_1(u') + \psi_2(v'), \\ z &= \sigma_1(u') + \sigma_2(v'), \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Leipziger Berichte, Band LVII, 1905, S. 233—45.

<sup>2)</sup> Prace mat.-fiz., T. XVII, 1906, str. 56—6.

annehmen, d. h. dass die Coordinaten  $x, y, z$  sämtlich die Differentialgleichung:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} = 0$$

befriedigen.

Um die Gleichungen zu bestimmen, denen  $u', v'$  genügen müssen, bemerke man zunächst, dass die Formeln:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial u'} &= \frac{1}{D} \frac{\partial v'}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial u'} = -\frac{1}{D} \frac{\partial v'}{\partial u}, \\ \frac{\partial u}{\partial v'} &= -\frac{1}{D} \frac{\partial u'}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{D} \frac{\partial u'}{\partial u} \end{aligned}$$

stattfinden, in welchen mit  $D$  die Functionaldeterminante:

$$D = \frac{\partial u' \partial v'}{\partial u \partial v} - \frac{\partial u' \partial u}{\partial v \partial u}$$

bezeichnet worden ist. Auf Grund der Formeln (5) ergeben sich sogleich die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u'} &= \frac{1}{D} \left( \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial v'} &= \frac{1}{D} \left( \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

und aus jeder derselben erhält man durch Differentiation die Formel:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} &= -\frac{1}{D^2} \left[ \frac{\partial u' \partial v'}{\partial v \partial v} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \left( \frac{\partial u' \partial v'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u' \partial v'}{\partial v \partial u} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u' \partial v'}{\partial u \partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] \\ &+ \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v}, \end{aligned}$$

wobei statt der Berechnung der Coefficienten  $\alpha$  und  $\beta$ , die definitive Formel für  $\frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'}$  in folgender Weise erhalten werden kann. Man führe die kürzere Bezeichnung:

$$(7) \quad \Omega f = \frac{\partial u' \partial v'}{\partial v \partial v} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \left( \frac{\partial u' \partial v'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u' \partial v'}{\partial v \partial u} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u' \partial v'}{\partial u \partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

ein und man bemerke, dass die Identität (6) insbesondere für  $f = u', v'$  bestehen muss. Auf diese Weise kommt man auf das System von Gleichungen:



$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} - \frac{\Omega f}{D^2} + \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v} &= 0, \\ -\frac{\Omega u'}{D^2} + \alpha \frac{\partial u'}{\partial u} + \beta \frac{\partial u'}{\partial v} &= 0, \\ -\frac{\Omega v'}{D^2} + \alpha \frac{\partial v'}{\partial u} + \beta \frac{\partial v'}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

aus denen durch Elimination von  $\alpha$  und  $\beta$  ergibt sich die Formel:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} = -\frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} \Omega f, & \frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \Omega u', & \frac{\partial u'}{\partial u}, & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \Omega v', & \frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Es muss die Determinante in (8) für  $f = x, y, z$  verschwinden. Man erhält also ein System von drei Gleichungen, welches wir sogleich durch ein äquivalentes System ersetzen werden. Wenn man nämlich mit  $X, Y, Z$  die Richtungscosinus der positiven Normalen der Fläche bezeichnet und für die Summation in bezug auf drei Achsen des Coordinatensystems das Zeichen  $\Sigma$  in Anwendung bringt, so wird man unser System von Gleichungen durch drei Gleichungen von der Form:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ \Omega u', & \frac{\partial u'}{\partial u}, & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \Omega v', & \frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

ersetzen können, wo die Zeile  $p, q, r$  der Reihe nach die folgende ist:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \Omega x, & \sum \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, & \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v} \Omega x, & \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, & \sum \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2, \\ \sum X \Omega x, & \sum X \frac{\partial x}{\partial u}, & \sum X \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned}$$

Die zwei letzten Glieder der dritten Zeile sind gleich Null. Die zwei letzten Glieder der ersten und der zweiten Zeile sind die Fundamental-

größen erster Ordnung, die wir der Reihe nach mit  $E, F, G$  bezeichnen. Alsdann sieht man mit Leichtigkeit ein, dass man unser System von drei Gleichungen folgendermassen darstellen kann:

$$\begin{aligned} D \sum \frac{\partial x}{\partial u} \Omega x + E \left( \frac{\partial u'}{\partial v} \Omega v' - \frac{\partial v'}{\partial u} \Omega u' \right) + F \left( \frac{\partial v'}{\partial u} \Omega u' - \frac{\partial u'}{\partial v} \Omega v' \right) &= 0, \\ D \sum \frac{\partial x}{\partial v} \Omega x + F \left( \frac{\partial u'}{\partial v} \Omega v' - \frac{\partial v'}{\partial u} \Omega u' \right) + G \left( \frac{\partial v'}{\partial u} \Omega u' - \frac{\partial u'}{\partial v} \Omega v' \right) &= 0, \\ \sum X \Omega x &= 0. \end{aligned}$$

Die zwei ersten Gleichungen dieses Systems können in bezug auf  $\Omega u'$  und  $\Omega v'$  aufgelöst werden und man erhält:

$$\begin{aligned} \Omega u' &= \frac{1}{EG-F^2} \left\{ \frac{\partial u'}{\partial u} \sum \left( G \frac{\partial x}{\partial u} - F \frac{\partial x}{\partial v} \right) \Omega x + \frac{\partial u'}{\partial v} \sum \left( E \frac{\partial x}{\partial v} - F \frac{\partial x}{\partial u} \right) \Omega x \right\}, \\ \Omega v' &= -\frac{1}{EG-F^2} \left\{ \frac{\partial v'}{\partial u} \sum \left( G \frac{\partial x}{\partial u} - F \frac{\partial x}{\partial v} \right) \Omega x + \frac{\partial v'}{\partial v} \sum \left( E \frac{\partial x}{\partial v} - F \frac{\partial x}{\partial u} \right) \Omega x \right\}. \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen noch anders darzustellen, bemerke man, dass:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}, \end{aligned}$$

und führe die Christoffel'schen Symbole:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{G \frac{\partial E}{\partial u} + F \frac{\partial E}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{-F \frac{\partial E}{\partial u} + 2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{-F \frac{\partial G}{\partial v} + 2G \frac{\partial F}{\partial v} - G \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{E \frac{\partial G}{\partial v} + F \frac{\partial G}{\partial u} - 2F \frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)} \end{aligned} \right.$$

ein. Wenn man sich nun der Bedeutung des Symbols  $\Omega f$  erinnert und die folgenden Verkürzungen benutzt:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} Af &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}, \\ Bf &= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}, \\ Cf &= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

und zuletzt noch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung einführt:

$$\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = L, \quad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = M, \quad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = N,$$

so wird man unser System von Gleichungen in der Form:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} Au' - \left( \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} \right) Bu' + \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial u} Cu' &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} Av' - \left( \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} \right) Bv' + \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial u} Cv' &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} L - \left( \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} \right) M + \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial u} N &= 0 \end{aligned} \right.$$

ausdrücken können.

Dies sind die Bedingungen, die aufgestellt werden sollten, und wir gehen hier nicht näher darauf ein, wie aus ihnen die in den genannten Arbeiten befindlichen Bedingungen abgeleitet werden können.

## II. ÜBER DIFFERENTIALINVARIANTEN DER FLÄCHE IN BEZUG AUF DIE LINEARE GRUPPE.

In der Abhandlung „Über die Differentialinvarianten der Fläche in bezug auf die lineare Gruppe und über Translationsflächen“<sup>1)</sup> haben wir das Gesamtsystem der Differentialinvarianten der Haupttangentialcurven in zwei Formen dargestellt. Die zweite dieser Formen ist auf Grund der ersten abgeleitet worden. In dieser Notiz wollen wir die zweite Form ohne

<sup>1)</sup> Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences math. et natur. Decembre 1906. p. 865. - 901.

Benutzung der ersten aufstellen und werden dabei die Bezeichnungen der erwähnten Abhandlung in Anwendung bringen ohne dieselben hier zu besprechen.

Es handelt sich also darum, zu beweisen, dass das genannte Gesamtsystem von Differentialinvarianten in bezug auf die spezielle lineare Gruppe durch die Grössen  $T, P, Q$  und die Grössen gebildet wird, welche aus den letzteren durch Ausübung der Operationen  $Uf$  und  $Vf$  erhalten werden können und dass alle diese Grössen nur durch Relationen (53) der erwähnten Abhandlung und durch diejenigen, welche aus denselben durch Differentiationen und Eliminationen abgeleitet werden können, miteinander verbunden sind. Das analoge Resultat für die allgemeine lineare Gruppe unterscheidet sich von dem soeben erörtertem Resultate nur dadurch, dass die Grösse  $T$  selbst keine Differentialinvariante der allgemeinen linearen Gruppe ist.

Zum Zwecke unseres direkten Beweises wollen wir noch zwei Grössen einführen, nämlich:

$$a = \log \left( h^{\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}} \right), \quad b = \log \left( h^{\frac{2}{3}} k^{\frac{1}{3}} \right).$$

Alsdann hat man:

$$h = e^{2b-a}, \quad k = e^{2a-b}$$

und ferner:

$$\omega = T + 2a + 2b.$$

Die Operationen  $Uf$  und  $Vf$  wird man in der Form:

$$Uf = e^{-a} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad Vf = e^{-b} \frac{\partial f}{\partial v}$$

darstellen können und es ist leicht zu sehen, dass für  $P$  und  $Q$  die Ausdrücke:

$$P = U(b), \quad Q = V(a)$$

gelten.

Wir beschäftigen uns zunächst damit, die Relationen (29) der erwähnten Abhandlung in der Weise zu transformieren, dass man statt der Grössen  $k, h, \omega$  die Grössen  $a, b, T$  einführt und statt der Differentiationen nach  $u$  und  $v$  die Operationen  $Uf$  und  $Vf$  benutzt. Die Relationen (29) sind aus (27) durch die Annahme entstanden worden, dass  $u, v$  Parameter der Haupttangentialcurven sind. Man hat nämlich zwei Relationen:

$$\frac{\partial \beta'}{\partial u} - \frac{\partial \alpha'}{\partial v} + \left( \frac{\partial I_{11}}{\partial v} - I''_{02} \right) \alpha' - \left( \frac{\partial I_{11}}{\partial u} - 2I'_{20} \right) \beta' = 0,$$

$$\frac{\partial \beta''}{\partial v} - \frac{\partial \alpha''}{\partial u} + \left( \frac{\partial I_{11}}{\partial u} - I'_{20} \right) \alpha'' - \left( \frac{\partial I_{11}}{\partial v} - 2I''_{02} \right) \beta'' = 0,$$

in denen

$$I_{11} = \omega, \quad I'_{20} = \frac{1}{2} \omega_{10}, \quad I''_{02} = \frac{1}{2} \omega_{01},$$

$$\alpha' = \alpha'' = \frac{1}{2} \omega_{11} + hk,$$

$$\beta' = h_{10} + \frac{1}{2} l \omega_{10}, \quad \beta'' = k_{01} + \frac{1}{2} l \omega_{01}$$

zu setzen ist. Wir wollen in diese Grössen sogleich  $a, b$  und  $T$  einführen und auf diese Weise die fragliche Form der Relationen (29) ableiten.

Man hat zunächst die Formel:

$$I_{11} = \omega = T + 2a + 2b,$$

und es ergeben sich ferner die Ausdrücke:

$$I'_{20} = \frac{1}{2} \omega_{10} = \frac{1}{2} e^a [U(T) + 2U(a) + 2U(b)],$$

$$I''_{02} = \frac{1}{2} \omega_{01} = \frac{1}{2} e^b [V(T) + 2V(a) + 2V(b)].$$

Aus diesen Ausdrücken folgen nun leicht die Formeln:

$$\omega_{11} = e^{a+b} [VU(T) + 2VU(a) + 2VU(b) + V(a)U(T) + 2V(a)U(a) + 2V(a)U(b)],$$

$$\omega_{11} = e^{a+b} [UV(T) + 2UV(b) + 2UV(a) + U(b)V(T) + 2U(b)V(b) + 2U(b)V(a)],$$

denen man noch eine andere Form ertheilen kann. Wenn man nämlich die Beziehung (46) der erwähnten Abhandlung auf die Functionen  $a$  und  $b$  in Anwendung bringt, so ergeben sich die Relationen:

$$VU(a) + QU(a) = U(Q) + PQ,$$

$$UV(b) + PV(b) = V(P) + QP$$

und man erhält für  $\omega_{11}$  leicht die Ausdrücke:

$$\omega_{11} = e^{a+b} [VU(T) + QU(T) + 2U(Q) + 2V(P) + 4PQ],$$

$$\omega_{11} = e^{a+b} [UV(T) + PV(T) + 2V(P) + 2U(Q) + 4PQ],$$

d. h. man bekommt für die Grösse:

$$\Omega = \frac{\omega_{11}}{hk}$$

die Formeln (52) der erwähnten Abhandlung, nämlich:

$$\begin{aligned} \Omega &= VU(T) + QU(T) + 2U(Q) + 2V(P) + 4PQ \\ &= UV(T) + PV(T) + 2V(P) + 2U(Q) + 4PQ, \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha' = \alpha'' = \left(\frac{1}{2} \Omega + 1\right) e^{a+b}.$$

Es ergibt sich ferner leicht:

$$\beta' = \frac{1}{2} e^{2b} [U(T) + 6P],$$

$$\beta'' = \frac{1}{2} e^{2a} [V(T) + 6Q].$$

Alle erhaltenen Formeln erlauben nun die gewünschte Gestalt der Relationen (29) zu erhalten, man bekommt nämlich die Relationen:

$$\frac{1}{2} UU(T) + 3U(P) + P[U(T) + 6P] = \frac{1}{2} V(\Omega) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \Omega\right) V(T),$$

$$\frac{1}{2} VV(T) + 3V(Q) + Q[V(T) + 6Q] = \frac{1}{2} U(\Omega) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \Omega\right) U(T),$$

d. h. eben die Relationen (53), die am Anfang dieser Notiz erwähnt wurden.

Um nun den verlangten Beweis zu erhalten, wollen wir bemerken, dass die Differentialinvarianten der Haupttangencurven nur von  $h, k, \omega$  und deren Differentialquotienten verschiedener Ordnungen nach  $u$  und  $v$  abhängen können. Wenn man ferner beachtet, dass die Grössen  $a, b, T$  durch  $h, k, \omega$  und umgekehrt die Grössen  $h, k, \omega$  durch  $a, b, T$  ausdrückbar sind und dass Differentiationen nach  $u, v$  durch die Operationen  $Uf, Vf$  ersetzt werden können, so kann man sagen, dass die Differentialinvarianten der Haupttangencurven jedenfalls durch  $a, b, T$  und Grössen ausgedrückt

werden können, welche aus den letzteren durch Ausführung der Operationen  $Uf, Vf$  sich ergeben. Man bemerke nun, dass  $Uf, Vf$  invariante Operationen gegenüber allen Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe sind, dass die Grössen:

$$P = U(b), \quad Q = V(a), \quad U(T), \quad V(T)$$

Differentialinvarianten in bezug auf die allgemeine lineare Gruppe sind und dass die Grösse  $T$  Differentialinvariante in Bezug auf die spezielle, nicht aber in Bezug auf die allgemeine lineare Gruppe ist. Die in dem letzteren Satze angeführten Thatsachen können leicht unmittelbar constatiert werden und darauf brauchen wir nicht näher einzugehen. Wenn man nun auf die Grössen  $P, Q, T$  die Operationen  $Uf, Vf$  auf alle mögliche Weisen ausführt, so erhält man auch lauter Differentialinvarianten. Man kommt also zu dem am Anfang des gegenwärtigen Aufsatzes angegebenen System von Differentialinvarianten, welche die Relationen (53) der früheren Abhandlung und alle diejenigen Relationen erfüllen, die aus denselben durch alle möglichen Differentiationen und Eliminationen erhalten werden können. Es ist klar, dass die Differentialinvarianten dieses Systems keine weiteren Relationen erfüllen, da die Relationen (53) den Relationen (29) äquivalent sind und diese letzteren nothwendige und hinreichende Bedingungen für unsere Grössen  $h, k, \omega$  sind

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, ob dieses System von Differentialinvarianten das Gesamtsystem derselben bildet. Zu dem Zwecke bemerke man, dass von den Grössen  $a, b, T$  und Grössen, die durch Ausführung auf denselben der Operationen  $Uf, Vf$  entstehen, kommen in dem aufgestellten Systeme von Differentialinvarianten nur diejenigen nicht vor, welche in den Reihen:

$$\begin{aligned} a, & U(a), UU(a), UUU(a), \dots \\ b, & V(b), VV(b), VVV(b), \dots \end{aligned}$$

enthalten sind. Aber auf Grund der Formeln (32) der oben zitierten Abhandlung ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= \log \sqrt{E} + \log \left( -g_1^{\frac{2}{3}} g_2^{\frac{1}{3}} \operatorname{cosec} \theta \right), \\ b &= \log \sqrt{G} + \log \left( g_1^{\frac{1}{3}} g_2^{\frac{2}{3}} \operatorname{cosec} \theta \right) \end{aligned}$$

und wir schliessen daraus, dass die zwei angeführten Reihen von Grössen beziehungsweise die Grössen:

$$\begin{aligned} &\sqrt{E}, r_1, r_1', r_1'', \dots \\ &\sqrt{G}, r_2, r_2', r_2'', \dots \end{aligned}$$

enthalten. Wenn man daher die Eigenschaften der letzteren Grössen in Erinnerung bringt, so kommt man leicht zum Schlusse, dass die Grössen der zwei früheren Reihen in den Differentialinvarianten nicht vorkommen können. Auf diese Weise ist also bewiesen worden, dass das aufgestellte System von Differentialinvarianten das Gesamtsystem von Differentialinvarianten ausmacht.

### III. ÜBER GEWISSE CURVENSCHAREN AUF FLÄCHEN DIE AUF ROTATIONSFLÄCHEN ABWICKELBAR SIND.

In dieser Notiz beschäftigen wir uns mit der Aufstellung solcher infinitesimaler Transformationen, die alle Linienelemente der Fläche und eine auf der Fläche gegebene Curvenschar invariant lassen, und mit Aufstellung der Bedingungen, unter welchen dies möglich ist. Es ist klar, dass dies jedenfalls nur auf Flächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind, stattfinden kann. Der eigentliche Zweck dieser Notiz besteht also hauptsächlich in der Bestimmung der Bedingungen, welchen eine Curvenschar auf einer derartigen Fläche genügen muss, damit die genannten infinitesimalen Transformationen möglich seien. In dieser Darstellung gehen wir aber nicht von vornherein von der Voraussetzung aus, dass die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, sondern gelangen dazu infolge unserer Entwicklungen, weil es uns für die betrachtete Aufgabe bequem zu sein scheint, nicht das für diese Kategorie von Flächen charakteristische Linienelement zu benutzen, sondern die vorgelegte Curvenschar und deren orthogonale Trajektorien als Parameterlinien zu wählen. Am Schlusse des Aufsatzes werden einige Bemerkungen über Curvenscharen auf allgemeinen Flächen angegeben.

1. Es sei auf einer Fläche ein krummliniges orthogonales Koordinatensystem  $u, v$  gegeben. Das Quadrat des Linienelementes dieser Fläche besitzt alsdann die Form:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

Man betrachte ferner auf dieser Fläche eine infinitesimale Transformation:

$$\Omega f = p \frac{\partial f}{\partial u} + q \frac{\partial f}{\partial v}$$

und stelle zunächst die Bedingungen auf, dass diese infinitesimale Transformation alle Linienelemente der Fläche invariant lasse. Diese lauten:



$$2E \frac{\partial p}{\partial u} + \Omega(E) = 0,$$

$$E \frac{\partial p}{\partial v} + G \frac{\partial q}{\partial u} = 0,$$

$$2G \frac{\partial q}{\partial v} + \Omega(G) = 0.$$

Man stelle ausserdem die Bedingung auf, dass die infinitesimale Transformation  $\Omega f$  die Curvenschar  $v = \text{const.}$  invariant lasse. Diese Bedingung ist:

$$\frac{\partial q}{\partial u} = 0.$$

Es sind also die Bedingungen, unter welchen die infinitesimale Transformation  $\Omega f$  alle Linienelemente der Fläche und die Curvenschar  $v = \text{const.}$  invariant lässt, die folgenden:

$$(1) \quad \begin{aligned} 2E \frac{\partial p}{\partial u} + \Omega(E) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial u} = 0, \quad 2G \frac{\partial q}{\partial v} + \Omega(G) = 0. \end{aligned}$$

Aus denselben folgt, dass auch die Curvenschar  $u = \text{const.}$  eine invariante Curvenschar von  $\Omega f$  ist, was im übrigen ohne weiteres klar ist.

Wir wollen die Bedingungen (1) umformen, indem wir die Differentiationen nach den Bogenlängen der Curvenscharen  $v = \text{const.}$  und  $u = \text{const.}$  durch die Formeln:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f}{\partial v}$$

einführen und die Bezeichnungen:

$$\xi = p\sqrt{E}, \quad \eta = q\sqrt{G}$$

gebrauchen, wobei  $\Omega f$  die Form:

$$\Omega f = \xi \frac{\partial f}{\partial s_1} + \eta \frac{\partial f}{\partial s_2}$$

annimmt. Alsdann erhalten die Bedingungen (1) die Form:

$$\begin{aligned} 2E \frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial E}{\partial s_2} \eta &= 0, & 2E \frac{\partial \xi}{\partial s_2} - \frac{\partial E}{\partial s_1} \xi &= 0, \\ 2G \frac{\partial \eta}{\partial s_1} - \frac{\partial G}{\partial s_2} \eta &= 0, & 2G \frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \frac{\partial G}{\partial s_1} \xi &= 0, \end{aligned}$$

und wenn man noch die Bezeichnungen:

$$(2) \quad g_1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial s_2}, \quad g_2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial s_1}$$

einführt, so ergibt sich für das System von Bedingungen (1) die Form:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s_1} + g_1 \eta &= 0, & \frac{\partial \xi}{\partial s_2} - g_1 \xi &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial s_1} - g_2 \eta &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial s_2} + g_2 \xi &= 0. \end{aligned}$$

Die Coefficienten  $g_1$  und  $g_2$  sind geodätische Krümmungen der Curvenscharen  $v = \text{const.}$  beziehungsweise  $u = \text{const.}$

2. Man beachte jetzt, dass wenn man für die Aufeinanderfolge der Differentiationen nach den Bogenlängen die Bezeichnungsweise:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial f}{\partial s_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial s_k \partial s_1}$$

wählt, die identische Beziehung:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} = g_2 \frac{\partial f}{\partial s_2} - g_1 \frac{\partial f}{\partial s_1}$$

stattfindet. Wenn man sie auf die Functionen  $\xi$  und  $\eta$ , die dem Systeme (3) genügen sollen, anwendet, so ergibt sich:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \xi + \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \eta &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \xi + \frac{\partial g_2}{\partial s_2} \eta &= 0. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen ist ohne weiteres klar, da die geodätischen Krümmungen bei der Biegung der Fläche un-

verändert bleiben. Man sieht, dass aus diesen Gleichungen in allen möglichen Fällen die Relation:

$$(6) \quad \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial g_2}{\partial s_2} - \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial g_2}{\partial s_1} = 0$$

folgt.

Wir setzen zuerst voraus, dass nicht alle beide Krümmungen  $g_1$  und  $g_2$  constant sind und es sei beispielsweise  $g_1$  eine Function von  $u, v$ , die sich auf keine Constante reduziert. Alsdann kann man  $\xi$  und  $\eta$  folgendermassen ausdrücken:

$$(7) \quad \xi = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_2}, \quad \eta = -\lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_1},$$

wobei  $\lambda$  eine noch unbestimmte Function von  $u, v$  bezeichnet. Um  $\lambda$  zu bestimmen, setze man die Werte (7) in die Gleichungen (3) ein, woraus folgt:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_1} = g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2 \partial s_1}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_2} = g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2^2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_1} = g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_2} = g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1 \partial s_2}. \end{array} \right.$$

Es müssen also die Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \left( g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^2} \right) - \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \left( g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2 \partial s_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \left( g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1 \partial s_2} \right) - \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \left( g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

bestehen, die durch die Identität:

$$g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2 \partial s_1} = g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1 \partial s_2}$$

auf die Form:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \right) - \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \right) = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \right) - \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \right) = 0 \end{array} \right.$$

gebracht werden können. Wir werden aber auch beweisen, dass diese Relationen für die Möglichkeit der Bestimmung der Function  $\lambda$  aus den Gleichungen (8) ausreichend sind. Da die Ableitungen  $\frac{\partial g_1}{\partial s_1}$  und  $\frac{\partial g_1}{\partial s_2}$  nicht alle beide identisch Null sind und die Relationen (9) bestehen, so genügen den Gleichungen (8) vollständig bestimmte Functionen für die Ableitungen  $\frac{\partial \log \lambda}{\partial s_1}$  und  $\frac{\partial \log \lambda}{\partial s_2}$ . Es erübrigt also nur noch nachzuweisen, dass diese Functionen der Integrabilitätsbedingung genügen. Ist zunächst die Ableitung  $\frac{\partial g_1}{\partial s_1}$  von Null verschieden, so werden die Differentialquotienten von  $\log \lambda$  aus den zwei letzten der Gleichungen (8) zu bestimmen sein. Aus denselben folgt:

$$\frac{\partial \log \left( \lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \right)}{\partial s_1} = g_2, \quad \frac{\partial \log \left( \lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \right)}{\partial s_2} = g_2 \frac{\frac{\partial g_1}{\partial s_2}}{\frac{\partial g_1}{\partial s_1}},$$

es soll also nach (4) unter Berücksichtigung von (6) die Beziehung:

$$g_2 \left[ \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^2} + \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \left( g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_2} - g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \right) \right] = 0$$

bestehen. Diese Beziehung besteht aber in der That, weil sie mit Hilfe der ersten der Relationen (9) auf die Form:

$$g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \left[ \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1 \partial s_2} - g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} + g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \right] = 0$$

gebracht werden kann. Ist ferner die Ableitung  $\frac{\partial g_1}{\partial s_2}$  von Null verschieden, so wird man die Differentialquotienten von  $\log \lambda$  aus zwei ersten der Gleichungen (8) zu bestimmen haben, und man überzeugt sich auf dieselbe Weise wie vorhin, dass unter Voraussetzung früherer Relationen die Integrabilitätsbedingung erfüllt wird.

Wir haben also bewiesen, dass im Falle, wenn  $g_1$  keine Constante ist, die Relationen (6) und (9) für die Möglichkeit der Bestimmung von  $\xi$  und  $\eta$  aus den Gleichungen (3) nothwendig und hinreichend sind. Es wird dabei klar, dass man auf diese Weise zu einer vollständig bestimmten infinitesimalen Transformation  $\Omega f$  gelangt.

Wenn nun  $g_2$  eine Function ist, die sich nicht auf eine Constante reduziert, so sieht man ein, dass für die Möglichkeit der Bestimmung von  $\xi$  und  $\eta$  neben der Bedingung (6) noch die Bedingungen:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \right) - \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial g_2}{\partial s_2} \right) - \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial s_2} \right) = 0$$

stattfinden, welche in Vereinigung mit (6) nothwendig und hinreichend sind. Falls sie erfüllt sind, bekommt man wieder eine vollständig bestimmte infinitesimale Transformation  $\Omega f$ .

3. Die in der vorigen Nummer dargelegten Betrachtungen beziehen sich auf Fälle, in welchen die geodätischen Krümmungen  $g_1$  und  $g_2$  nicht alle beide constante Werthe besitzten. Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Fälle, wo diese Krümmungen constant sind. Es wird dabei bequemer sein direkt das System (1) zu behandeln.

Man bemerke vorerst, dass im Falle, wenn die Constanten  $g_1$  und  $g_2$  nicht beide gleich Null sind, die folgenden Formeln stattfinden:

$$(10) \quad \sqrt{E} = -\frac{\varphi'}{g_2\varphi + g_1\psi}, \quad \sqrt{G} = -\frac{\psi'}{g_2\varphi + g_1\psi},$$

womit  $\varphi$  eine Function, die nur von  $u$  und mit  $\psi$  eine Function, die nur von  $v$  abhängt, bezeichnet worden ist. Diese Formeln können leicht mittels einer Rechnung gefunden werden, die ein Specialfall derjenigen Rechnung ist, welche sich in L. Bianchi's Vorlesungen über Differentialgeometrie<sup>1)</sup> auf S. 176—7 befindet. Im Falle  $g_1=g_2=0$  erhält man die Formeln:

$$(11) \quad \sqrt{E} = \varphi', \quad \sqrt{G} = \psi'.$$

Man wende sich nun zu dem Systeme (1), welches in der Form:

$$(12) \quad \frac{dp}{du} + \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} p + g_1 \sqrt{G} q = 0,$$

$$\frac{dq}{dv} + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} q + g_2 \sqrt{E} p = 0$$

dargestellt werden kann, wo  $p$  und  $q$  Functionen sind, die nur von  $u$  beziehungsweise  $v$  abhängig sind. Im Falle, wenn  $g_1$  und  $g_2$  nicht beide gleich Null sind, hat man:

<sup>1)</sup> Übersetzung von Max L u k a t, Leipzig 1899.

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} &= \frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{g_2 \varphi'}{g_2 \varphi + g_1 \psi}, \\ \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} &= \frac{\psi''}{\psi'} - \frac{g_1 \psi'}{g_2 \varphi + g_1 \psi}, \end{aligned}$$

und wenn man die Werthe (10) und (13) in die Gleichungen (12) einsetzt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{dp}{du} + \frac{\varphi''}{\varphi'} p - \frac{g_2 \varphi' p + g_1 \psi' q}{g_2 \varphi + g_1 \psi} &= 0, \\ \frac{dq}{dv} + \frac{\psi''}{\psi'} q - \frac{g_2 \varphi' p + g_1 \psi' q}{g_2 \varphi + g_1 \psi} &= 0. \end{aligned}$$

Aus denselben folgt:

$$\frac{1}{\varphi'} \frac{d(p\varphi')}{du} = \frac{1}{\psi'} \frac{d(q\psi')}{dv};$$

da aber das Glied linker Hand nur von  $u$  und das Glied rechter Hand nur von  $v$  abhängen kann, so sind diese beiden Glieder eine und dieselbe Constante. Bezeichnet man diese Constante mit  $C$  und zwei weitere Constanten mit  $\alpha$  und  $\beta$ , so folgt:

$$(15) \quad \begin{aligned} p\varphi' &= C\varphi + \alpha, \\ q\psi' &= C\psi + \beta. \end{aligned}$$

Man sieht aber leicht ein, dass die dadurch erhaltenen Ausdrücke für  $p$  und  $q$  die Gleichungen (12) dann und nur dann befriedigen, wenn die Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  der Beziehung:

$$g_1 \alpha + g_2 \beta = 0.$$

genügen. Man erhält also eine Lösung mit zwei willkürlichen Constanten, d. h. eine zweigliedrige continuierliche Transformationsgruppe.

Wenn jetzt  $g_1$  und  $g_2$  beide gleich Null sind, so ergeben sich die Werthe:

$$p = \frac{\alpha}{\varphi'}, \quad q = \frac{\beta}{\psi'},$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

4. Wir wollen nun fragen, auf welchen Flächen die Bedingungen der Nummer 2 in der That stattfinden können. Es ist leicht zu ersehen, dass die Bedingungen, die wir in der Nummer 2 erhalten haben, folgendermassen formuliert werden können. Es muss eine solche Function  $\omega(u, v)$  existieren, die sich nicht auf eine Constante reduziert und die Relationen von der Form:

$$(16) \quad \begin{aligned} g_1 &= P(\omega), & g_2 &= Q(\omega), \\ \frac{\partial \omega}{\partial s_1} &= S_1(\omega), & \frac{\partial \omega}{\partial s_2} &= S_2(\omega) \end{aligned}$$

befriedigt. Man beachte nun, dass das Krümmungsmass  $K$  der Fläche bei der gebrauchten Bezeichnungsweise sich folgendermassen darstellen lässt:

$$K = - \left[ g_1^2 + g_2^2 + \frac{\partial g_1}{\partial s_2} + \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \right]$$

und dass für den ersten und zweiten Differentialparameter die Ausdrücke gelten:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left( \frac{\partial f}{\partial s_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial s_2} \right)^2, \\ \Delta^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} + g_2 \frac{\partial f}{\partial s_1} + g_1 \frac{\partial f}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

Man ersieht sofort, dass sobald die Relationen (16) erfüllt sind, die identischen Beziehungen:

$$K = A(\omega), \quad \Delta K = B(\omega), \quad \Delta^2 K = C(\omega)$$

bestehen. Es können dabei zwei Fälle vorkommen. Die Function  $A(\omega)$  kann entweder eine Constante sein, in welchem Falle die Fläche eine Fläche vom constanten Krümmungsmasse ist, oder reduziert sich diese Function  $A(\omega)$  auf keine Constante und in diesem Falle werden Beziehungen von der Form:

$$\Delta K = \Phi(K), \quad \Delta^2 K = \psi(K)$$

erfüllt, d. h. die Fläche ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

Die Voraussetzungen der Nummer 3 bestehen darin, dass  $g_1$  und  $g_2$  Constanten sind. Es ist ersichtlich, dass sie nur für Flächen vom constanten Krümmungsmasse  $-(g_1^2 + g_2^2)$  erfüllt werden können.

5. Unter 4 haben wir bewiesen, dass unsere Aufgabe nur auf Flächen möglich ist, welche auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Wenn wir nun voraussetzen, dass die Fläche in der That dieser Kategorie von Flächen

angehört, so werden wir die Bedingungen (16) in einfacherer Form darstellen können.

Wir setzen zunächst voraus, dass unsere Fläche eine Fläche vom constanten Krümmungsmasse ist. Nimmt man nun erstens an, dass  $g_1$  keine Constante ist, so ist leicht einzusehen, dass die Bedingungen (16) auf die Form:

$$(17) \quad g_2 = \Phi(g_1), \quad \frac{\partial g_1}{\partial s_1} = \Psi(g_1)$$

gebracht werden können. Unserer Voraussetzung zufolge hat man:

$$(18) \quad K = - \left( g_1^2 + g_2^2 + \frac{\partial g_1}{\partial s_2} + \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \right),$$

wo  $K$  den constanten Krümmungsmass bezeichnet; da aber aus den Gleichungen (17):

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1} = \Phi'(g_1) \Psi(g_1),$$

folgt, so ergibt sich nach (18):

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2} = - [g_1^2 + \Phi^2(g_1) + \Phi'(g_1) \Psi(g_1) + K]$$

d. h. dass  $\frac{\partial g_1}{\partial s_2}$  auch eine Function von  $g_1$  ist. Falls also die Bedingungen (17) erfüllt sind, so bestehen auch die Bedingungen (16) d. h. die Gleichungen (17) nothwendige und hinreichende Bedingungen für die in Rede stehenden Curvenscharen auf Flächen vom constanten Krümmungsmasse sind. Wenn ferner  $g_2$  keine Constante ist, kann auf dieselbe Weise bewiesen werden, dass die betreffenden Bedingungen in der Form der Relationen:

$$(19) \quad g_1 = \bar{\Phi}(g_2), \quad \frac{\partial g_2}{\partial s_2} = \bar{\Psi}(g_2)$$

dargestellt werden können.

Wir wollen nun voraussetzen, dass unsere Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, dass sie aber keine Fläche vom constanten Krümmungsmasse ist. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle, die Bedingungen, welche unter 2 abgeleitet wurden, einfach in der Form:

$$(20) \quad g_1 = P(K), \quad g_2 = Q(K)$$



dargestellt werden können, Beachtet man nämlich, dass zufolge der Beziehungen (20) die Relationen:

$$K = - \left[ P^2(K) + Q^2(K) + P(K) \frac{\partial K}{\partial s_2} + Q(K) \frac{\partial K}{\partial s_1} \right],$$

$$\Phi(K) = \left( \frac{\partial K}{\partial s_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial s_2} \right)^2$$

bestehen und dass die geodätischen Krümmungen  $g_1, g_2$  nicht alle beide constant sind, so wird man aus den angeführten Relationen die Beziehungen von der Form:

$$\frac{\partial K}{\partial s_1} = S_1(K), \quad \frac{\partial K}{\partial s_2} = S_2(K)$$

erhalten können. Daraus folgt, dass die Beziehungen (16) in der That durch die Bedingungen (20) ersetzt werden können.

6. Endlich wollen wir noch die Bemerkung machen, dass im Falle, wenn die betrachtete Fläche eine Ebene ist, die zweite der Gleichungen (17) besagt, dass alle Curven  $v = \text{const.}$  miteinander congruent sind, und die zweite der Gleichungen (19), dass alle Curven  $u = \text{const.}$  miteinander congruent sind. Wir fragen, welche Bedeutung man diesen Gleichungen für allgemeine Flächen zuschreiben könnte.

Um diese Frage zu beantworten, suche man auf der Fläche solche infinitesimale Transformationen zu bestimmen, welche die Curven der Curvenschar  $v = \text{const.}$  in einander verbiegen und die geodätische Krümmung dieser Curvenschar invariant lassen.

Es lässt sich mit Leichtigkeit einsehen, dass wenn man die Bedingungen benutzt, die wir unter 1 gebraucht haben, die in Frage stehende infinitesimale Transformation aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sein wird:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} + g_1 \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_1} - g_2 \eta = 0,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_1} \xi + \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \eta = 0.$$

Falls  $g_1$  nicht eine Constante ist, so können  $\xi$  und  $\eta$  in der Form:

$$\xi = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_2}, \quad \eta = -\lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_1}.$$

dargestellt werden und für die Bestimmung des Factors  $\lambda$  erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_1} = g_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2 \partial s_1},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_1} = g_2 \frac{\partial g_1}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^2},$$

aus welchen die Bedingung:

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \right) - \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \right) = 0,$$

d. h. die Relation von der Form:

$$(21) \quad \frac{\partial g_1}{\partial s_1} = \Phi(g_1)$$

folgt. Falls diese Relation erfüllt ist, so erhält man für  $\lambda$  eine Function, die eine willkürliche Function von  $v$  als Factor enthält, im übrigen aber vollständig bestimmt ist. Die Beziehung (21) ist also nothwendig und hinreichend dazu, dass im Falle wenn  $g_1$  keine Constante ist, die fraglichen infinitesimalen Transformationen existieren. Im Falle wenn  $g_1$  eine Constante ist, existieren augenscheinlich immer infinitesimale Transformationen, die den oben angeführten Bedingungen genügen.

Wir wollen aber noch eine analoge Frage berühren. Es sei nämlich wiederum eine allgemeine Fläche und man frage um Bedingungen dafür, dass infinitesimale Transformationen auf der Fläche existieren, welche die Curven einer vorgelegten Curvenschar in einander verbiegen und die geodätische Krümmung orthogonaler Trajectorien dieser Curvenschar invariant lassen.

Wenn für die Curvenschar die Parameterlinien  $v = \text{const.}$  gewählt werden, so wird man die fraglichen infinitesimalen Transformationen aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} + g_1 \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_1} - g_2 \eta = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1} \xi + \frac{\partial g_2}{\partial s_2} \eta = 0$$

zu bestimmen haben. Ist  $g_2$  keine Constante, so ergeben sich für  $\xi$  und  $\eta$  die Formeln:

$$\xi = \lambda \frac{\partial g_2}{\partial s_2}, \quad \eta = -\lambda \frac{\partial g_2}{\partial s_1},$$

wobei der Factor  $\lambda$  die Gleichungen:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_1} = g_1 \frac{\partial g_2}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial s_2 \partial s_1}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1} \frac{\partial \log \lambda}{\partial s_1} = g_2 \frac{\partial g_2}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial s_1^2}$$

befriedigen muss. Aus diesen Gleichungen folgt die Bedingung:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \right) - \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial s_1} \right) = 0,$$

welche bei der Voraussetzung, dass  $g_2$  keine Constante ist, auch in der Form:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1} = \Psi(g_2)$$

dargestellt werden kann. Ist dagegen  $g_2$  eine Constante, so ist für die Existenz der in Frage stehenden infinitesimalen Transformationen keine weitere Bedingung nothwendig.

#### IV. ÜBER CONGRUENZKRITERIEN EBENER CURVENSCHAREN.

In dieser Notiz werden Kriterien aufgestellt, die erfüllt werden müssen, damit zwei vorgelegte Curvenscharen in der Ebene miteinander congruent seien.

1. Es sei in der Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem  $x, y$  und die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b},$$

wo  $a$  und  $b$  Functionen von  $x, y$  sind, welche der Bedingung:

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

genügen. Der durch die Gleichungen:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\varepsilon \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\varepsilon \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

definierte Winkel  $\varphi$  ist bei einer bestimmten Wahl des Vorzeichens  $\varepsilon$ , derjenige Winkel, welchen eine der beiden Halbtangenten der Integralcurve von (1) mit der positiven  $x$ -Axe bildet. Es ist klar, dass wenn dieser Winkel  $\varphi$  als Function von  $x, y$  bestimmt ist, zugleich auch die Schar von Integralcurven der Gleichung (1) vollständig bestimmt ist. Der Winkel  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  bestimmt auf dieselbe Weise die Schar von Curven, die orthogonale Trajectorien der früheren Curvenschar sind. Wenn man die Bogenlängen dieser Curvenscharen mit  $s_1$  und  $s_2$  bezeichnet und die Annahme macht, dass diese Bogenlängen in denjenigen Richtungen wachsen, welche durch  $\varphi$  und  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  bestimmt sind, so erhält man die Formeln:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s_1} &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial s_2} &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Die Krümmungen unserer beiden Curvenscharen werden durch die Formeln:

$$K_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \quad K_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}$$

bestimmt sein. Und wenn man noch darüber einigt die Bezeichnung:

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \left( \frac{\partial f}{\partial s_l} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial s_l \partial s_k}$$

zu benutzen, so wird man die bekannte Integrabilitätsbedingung in der Form:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} = K_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + K_2 \frac{\partial f}{\partial s_2}$$

angeben und als nächste Folge derselben die Beziehung:

$$\frac{\partial K_1}{\partial s_2} - \frac{\partial K_2}{\partial s_1} = K_1^2 + K_2^2$$

notieren können.

Man betrachte ferner die Gruppe der euklidischen Bewegungen in der Ebene. Wenn man unsere Curvenschar einer Transformation dieser Gruppe unterwirft und mit  $\varphi'$  den Winkel bezeichnet, welcher mit der positiven  $x$ -Axe von demjenigen Linienelemente  $ds_1$  gebildet wird, das ur-

spränglich unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die positive  $x$ -Axe geneigt war, so wird:

$$\varphi' = \varphi + c$$

worin  $c$  eine Constante bezeichnet. Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich sogleich alle Differentialinvarianten der Curvenschar (1) in bezug auf die Gruppe der euklidischen Bewegungen angeben. Es ist nämlich klar, dass die Differentialquotienten von  $\varphi$  nach  $s_1$  und  $s_2$  aller Ordnungen die Gesamtheit der fraglichen Differentialinvarianten bilden. Denn einerseits sind alle diese Grössen Invarianten und andererseits kann es offensichtlich keine Invarianten geben, die von  $x$ ,  $y$  und  $\varphi$  allein abhängig wären und die Anzahl der unabhängigen Differentialinvarianten verschiedener Ordnungen muss gerade der Anzahl der Differentialquotienten dieser Ordnungen von  $\varphi$  nach  $x$  und  $y$  gleich sein.

2. Wir wollen uns jetzt mit folgender Aufgabe beschäftigen. Es sei eine Curvenschar auf der Ebene d. h. eine Function  $\varphi$  der Veränderlichen  $x$ ,  $y$  vorgelegt. Wir wollen dasjenige System von Differentialgleichungen aufstellen, welches von allen solchen Functionen  $\varphi$  befriedigt wird, die den Curvenscharen angehören, die aus der gegebenen Curvenschar durch euklidische Bewegung erhalten werden können. Mit anderen Worten, soll das fragliche System von Differentialgleichungen alle mit der vorgelegten Curvenschar congruente Curvenscharen und keine weiteren bestimmen.

Die Gleichungen des fraglichen Systems müssen in allen Fällen unserer Aufgabe Relationen zwischen den früher aufgestellten Differentialinvarianten darstellen. Bei der Bestimmung dieser Relationen muss man mehrere Fälle unterscheiden.

Man setze zunächst voraus, dass für die vorgelegte Curvenschar die Invarianten  $K_1$  und  $K_2$  voneinander unabhängig sind, d. h. dass die Determinante:

$$(4) \quad \frac{\partial K_1}{\partial s_1} \frac{\partial K_2}{\partial s_2} - \frac{\partial K_1}{\partial s_2} \frac{\partial K_2}{\partial s_1}$$

nicht identisch gleich Null ist. In diesem Falle lassen sich aus den Gleichungen:

$$(5) \quad K_1 = K_1(x, y), \quad K_2 = K_2(x, y)$$

die Grössen  $x$  und  $y$  bestimmen und man kann alle übrigen Differentialinvarianten durch  $K_1$  und  $K_2$  ausdrücken, insbesondere ergibt es sich:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} &= F_{11}(K_1, K_2), & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2} &= F_{12}(K_1, K_2), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1} &= F_{21}(K_1, K_2), & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} &= F_{22}(K_1, K_2), \end{aligned}$$

wobei infolge der Relation (3) die Identität:

$$F_{12} - F_{21} = K_1^2 + K_2^2$$

stattfindet, d. h. von den vier Gleichungen des Systems (6) nur drei Gleichungen berücksichtigt zu werden brauchen. Durch Elimination von  $x$  und  $y$  zwischen den Gleichungen (5) und den Ausdrücken der Differentialinvarianten von der dritten und höheren Ordnungen lassen sich weitere Relationen aufstellen, welchen jene Curvenscharen genügen, die der vorgelegten Curvenschar congruent sind. Alle diese Relationen ergeben sich durch Differentiation aus dem Systeme (6) d. h. das fragliche System von Differentialgleichungen ist in unserem Falle das System (6), wobei zu bemerken ist, dass entweder die zweite oder die dritte Gleichung dieses Systems weggelassen werden kann. Sollen also zwei Curvenscharen, deren jeder die Eigenschaft zukommt, dass die Determinante (4) nicht identisch gleich Null ist, miteinander congruent sein, so müssen die Functionen  $\varphi$  jeder von diesen Curvenscharen ein und demselben Systeme (6) genüge leisten.

3. Man setze jetzt voraus, dass die Determinante (4) identisch gleich Null ist, und ziehe zunächst denjenigen Fall in Betracht, wo  $K_1$  keine Constante ist. Man hat alsdann:

$$(7) \quad K_2 = F(K_1)$$

und zuvörderst möge man voraussetzen, dass die Functionen  $K_1$  und

$$(8) \quad I_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2}$$

für die vorgelegte Curvenschar voneinander unabhängig sind. Man kann in diesem Falle  $x$  und  $y$  durch  $K_1$  und  $I_1$  ausdrücken und wenn man diese Ausdrücke in die anderen Differentialinvarianten hineinsetzt, so bekommt man Relationen, denen die der gegebenen Curvenschar congruente Curvenscharen genügen. Es handelt sich nun darum, diejenigen von diesen Relationen aufzustellen, aus welchen alle anderen durch Differentiation

nen und Eliminationen abgeleitet werden können. Durch Differentiation der Relation (7) ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1} = F' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} = F' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2}$$

und mit Hilfe der Relation:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1} = K_1^2 + F^2$$

und der Bezeichnung (8) erhält man die Ausdrücke:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1} = I_1 F',$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} = F' (I_1 F' + K_1^2 + F^2).$$

Man sieht also, dass mit Hilfe der Relation (7) durch  $K_1$  und  $I_1$  alle übrigen Differentialinvarianten zweiter Ordnung ausgedrückt werden können. Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Differentialinvarianten dritter Ordnung. Es gibt vier von einander unabhängige Differentialinvarianten dritter Ordnung. Es können als solche die folgenden angenommen werden:

$$(11) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1^3}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2^2 \partial s_1}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2^3}.$$

Alle anderen Differentialquotienten dritter Ordnung von  $\varphi$  nach  $s_1$  und  $s_2$  können durch diese vier und die Differentialinvarianten niedrigerer Ordnungen ausgedrückt werden, und insbesondere, sobald die Voraussetzungen des betrachteten Falles stattfinden, können sie als Functionen der Grössen (11) und der Grössen  $K_1$  und  $I_1$  dargestellt werden. Es ist auf Grund der Beziehung (7) leicht zu sehen, dass diese Functionen die folgende Form besitzen:

$$(12) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_1} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1^2} + \alpha, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1^2 \partial s_2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1^2} + \beta,$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2^2 \partial s_1} + \gamma, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2^2 \partial s_1} + \delta,$$

wo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  nur von  $K_1$  und  $I_1$  abhängig sind.

Die Anzahl der Differentialinvarianten  $n$ -ter Ordnung ist gleich  $n+1$  und man könnte sogleich für dieselben die den Formeln (11) und (12) analoge Formeln angeben, worauf wir indessen nicht einzugehen brauchen.

Man möge nun beachten, dass sobald man aus einer Relation erster Ordnung im Falle zweier unabhängigen Variablen durch Differentiation

Relationen höherer Ordnungen ableitet, auf diese Weise  $n$  und nur  $n$  solche Relationen  $n$ -ter Ordnung erhalten werden können, die von einander und von den Relationen niedrigerer Ordnungen unabhängig sind. Auf Grund der Bemerkung über die Anzahl der Differentialinvarianten sieht man also, dass weder alle Differentialinvarianten 3-ter Ordnung, noch alle Differentialinvarianten irgend welcher höheren Ordnung mit Hilfe der Relation (7) durch  $K_1$  und  $I_1$  ausgedrückt werden können. Um also das System von Differentialgleichungen aufzustellen, welches alle Curvenscharen, die mit der vorgelegten Curvenschar congruent sind, und keine weiteren definiert, müssen zu der Relation (7) noch weitere Relationen hinzugefügt werden. Um zu ersehen, welche Relationen hier zu wählen sind, sollen Relationen aufgestellt werden, die durch zweimalige Differentiation aus (7) folgen. Aus den Formeln (10) und (12) erhellt, dass diese Relationen dritter Ordnung in der folgenden Form dargestellt werden können:

$$(1.) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1^2} &= F' \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1^3} + p, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2^2 \partial s_1} &= F'' \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1^3} + q, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2^3} &= F''' \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1^3} + r, \end{aligned}$$

wobei  $p, q, r$  Functionen von  $K_1$  und  $I_1$  sind. Man sieht also, dass wenn man  $x$  und  $y$  zwischen  $K_1, I_1$  und  $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1^3}$  eliminiert und auf diese Weise zur Relation von der Form:

$$(14) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1^3} = \Phi(K_1, I_1)$$

gelangt, mit Hilfe der Relationen (7) und (14) alle Differentialinvarianten 3-ter Ordnung durch  $K_1$  und  $I_1$  ausgedrückt werden können. Es leuchtet alsdann ein, dass auch alle Differentialinvarianten höherer Ordnungen durch  $K_1$  und  $I_1$  ausgedrückt werden können. Demnach bilden die Relationen (7) und (14) das gewünschte System von Differentialgleichungen und für zwei Curvenscharen, die zu der eben betrachteten Kategorie gehören, liefern sie Congruenzkriterien, welche aufgestellt werden sollten.

4. Es wird uns nunmehr leicht sein, die Congruenzkriterien für alle übrigen Fälle aufzustellen.

Wir wollen zuerst den Fall in Betrachtung ziehen, wo  $K_1$  keine Constante, jedoch  $I_1$  eine Function von  $K_1$  ist. In diesem Falle hat man zwei Beziehungen von der Form:

$$(15) \quad K_2 = F(K_1), \quad I_1 = \Phi(K_1)$$



und auf Grund der früheren Betrachtungen lässt sich sogleich einsehen, dass in diesem Falle alle Differentialinvarianten aller Ordnungen als Functionen von  $K_1$  dargestellt werden können. Daraus folgt, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass zwei Curvenscharen, die zu der jetzt betrachteten Kategorie gehören congruent seien, darin bestehen, dass diese beiden Curvenscharen denselben Systeme (15) genügen. Vergleicht man diese Betrachtungen mit den Betrachtungen der Notiz III „Über gewisse Curvenscharen auf Flächen etc.“ so sieht man, dass eine Curvenschar der gegenwärtig erörterten Kategorie eine infinitesimale euklidische Bewegung gestattet. Wenn  $K_1$  eine Constante ist, so kann es vorkommen, dass  $K_2$  keine Constante ist. Dieser Fall wird in jenem allgemeineren Falle inbegriffen sein, für welchen die Determinante (4) gleich Null und  $K_2$  keine Constante ist. Wir können die fraglichen Congruenzkriterien für diesen allgemeineren Fall ohne weiteres auf Grund von Betrachtungen, die unter 3 und am Anfang der gegenwärtigen Nummer angegeben waren, aufstellen.

Falls nämlich  $K_2$  und

$$I_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2}$$

von einander unabhängig sind, so ist das gewünschte System von Relationen

$$K_1 = F(K_2), \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_2^3} = \Phi(K_2, I_2)$$

und falls diese Functionen  $K_2$  und  $I_2$  nicht von einander unabhängig sind, so ist dieses System von Relationen das folgende:

$$K_1 = F(K_2), \quad I_2 = \Phi(K_2).$$

In diesem letzten Falle gestattet die betrachtete Curvenschar eine infinitesimale euklidische Bewegung.

Es bleibt noch der Fall, in welchem  $K_1$  und  $K_2$  alle beide Constanten sind. In diesem Falle sind alle Differentialquotienten der höheren Ordnungen von  $\varphi$  gleich Null. Daraus folgt, dass in dem betrachteten Falle zwei Curvenscharen dann und nur dann miteinander congruent sind, wenn jede der Grössen  $K_1$  und  $K_2$  für beide Curvenscharen denselben Werth besitzt. Wie aus der Relation (3) zu ersehen ist, ist in dem soeben erörtertem Falle jede reelle Curvenschar eine Schar von parallelen Geraden.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

WITOLD BRONIEWSKI.

## ZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY ZMIANĄ OPORU ELEKTRYCZNEGO I ROZSZERZALNOŚCIĄ METALI JEDNOATOMOWYCH.

(RELATIONS ENTRE LA VARIATION DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE  
ET LA DILATATION DES MÉTAUX MONOATOMIQUES).

---

Zjawisko, odkryte przez Matteucci'ego i potwierdzone przez De la Rive'a<sup>1)</sup>, że podczas topienia opór elektryczny zmniejsza się u metali, które się kurczą (Bi, Sb) i wzrasta u tych, które się rozszerzają, nasunęło mi myśl, że pomiędzy rozszerzalnością i zmianą oporu powinna istnieć bliska zależność.

Wobec tego, że co do rozszerzalności znalazłem tylko materiał surowy, musiałem go usystematyzować; stanowi to pierwszą część mojej pracy.

Związki uzyskane pozwalają mi przejść w drugiej części do zależności pomiędzy rozszerzalnością i zmianą oporu elektrycznego.

Trzecia część poświęcona jest określeniu granic, w których wyprowadzone wzory dają się stosować.

Część czwarta zawiera bibliografię prac nad oporem właściwym i nad zmianą oporu elektrycznego metali czystych.

---

### I. Rozszerzalność.

Zmiana współczynnika rozszerzalności.—Zależność pomiędzy rozszerzalnością, objętością atomową i topliwością.—Zmiana objętości podczas topienia.—Ciepło utajone topienia.—Zmiana temperatury topienia pod wpływem ciśnienia.

Wzór doświadczalny na zmianę współczynnika rozszerzalności  $a_t = a_0 + a't$  przedstawić możemy pod postacią

$$(1) \quad a_t = a_0 (1 + Kt),$$

---

<sup>1)</sup> Matteucci, C. R. 40—541—1855; De la Rive, C. R. 56—698—1863.

wyprowadzając  $a_0$  za nawias, mamy  $K = \frac{a'}{a_0}$ .

Przekształćmy ten wzór (1), zastępując temperaturę zwykłą ( $t$ ) przez temperaturę bezwzględną  $T = T_0 + t$  oraz nadając współczynnikowi  $K$  formę  $K = \frac{1}{nF + T_0}$ , gdzie  $T_0 = 273^0$ ;  $F$  jest temperaturą bezwzględną topienia danego ciała,  $n$  — współczynnikiem.

Mamy wtedy:

$$(2) \quad a_t = a_0 \frac{nF + T}{nF + T_0}.$$

Wzór ten staje się identycznym ze wzorem (1), gdy na  $n$  bierzemy:

$$n = \frac{1 - KT_0}{KF}.$$

Określmy wartości liczebne, jakie powinniśmy nadać współczynnikowi  $n$ , ażeby mógł przedstawić wzory doświadczalne na zmianę współczynnika rozszerzalności pod postacią (2).

|    | Temp   | $10^6 \alpha t$                                     | $10^6 K$                                       | F                                       | $n = \frac{1 - KT_0}{KF}$                             | Średnia $n$ |
|----|--------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------|
| Pt | 0—312  | $868 + 0,32 t$<br>Dulong i Petit <sup>2)</sup>      | 37                                             | 2048<br>(1775)<br>Violle <sup>13)</sup> | 1,18                                                  | 0,99        |
|    | 10—70  | $899 + 0,78 (t - 40)$<br>Fizeau <sup>3)</sup>       | 90                                             |                                         | 0,41                                                  |             |
|    | 0—100  | $851 + 0,70 t$<br>Matthiessen <sup>4)</sup>         | 82                                             |                                         | 0,46                                                  |             |
|    | 0—80   | $890,1 + 0,242 t$<br>Benoit <sup>5)</sup>           | 27                                             |                                         | 0,67                                                  |             |
|    | 0—1000 | $879 + 0,49 t$<br>Fizeau—Le Chatelier <sup>6)</sup> | 56                                             |                                         | 0,74                                                  |             |
|    | 0—1000 | $886,8 + 0,2648 t$<br>Holborn i Day <sup>7)</sup>   | 30                                             |                                         | 1,49                                                  |             |
|    | 20—100 | $880,5 + 0,390 t$<br>Scheel <sup>8)</sup>           | 44                                             |                                         | 0,98                                                  |             |
|    | Cu     | 0—372                                               | $1658 + 1,2 t$<br>Dulong i Petit <sup>2)</sup> | 72                                      | 1353<br>(1080)<br>Heycock<br>i Neville <sup>14)</sup> |             |

<sup>2)</sup> Dulong i Petit, Ann. chim. et phys. (2)—7—113—1817; Fizeau, C. R. 68—1125—1869; <sup>4)</sup> Matthiessen, Pogg. Ann. 130—51—1867; <sup>5)</sup> Benoit, Jour. de phys. (2)—8—253—1889; <sup>6)</sup> Le Chatelier, C. R. 108—1096—1889; <sup>7)</sup> Holborn i Day, Ann. d.

|    | Temp.            | $10^{\circ}\alpha_t$                                | $10^{\circ}\text{K}$ | F                                                     | $n = \frac{1 - \text{KT}_0}{\text{KF}}$ | Śred-<br>nia $n$ |
|----|------------------|-----------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------|
|    | 10—70            | 1678 + 2,05 ( $t-40$ )<br>Fizeau <sup>3)</sup>      | 128                  |                                                       | 0,38                                    |                  |
|    | 0—1000           | 1650 + 0,7 $t$<br>Fizeau—Le Châtelier <sup>6)</sup> | 42                   |                                                       | 1,56                                    |                  |
|    | od—103<br>do 100 | 1665 + 1,45 $t$<br>Zakrzewski <sup>9)</sup>         | 87                   |                                                       | 0,65                                    |                  |
|    | 0—625            | 1670 + 0,81 $t$<br>Dittenberger <sup>10)</sup>      | 49                   |                                                       | 1,30                                    | 0,94             |
| Ag | 0—70             | 1921 + 1,47 ( $t-40$ )<br>Fizeau <sup>3)</sup>      | 79                   | 1234<br>(961)<br>Heycock<br>i Neville <sup>14)</sup>  | 0,80                                    |                  |
|    | 0—750            | 1827 + 0,96 $t$<br>Holborn i Day <sup>7)</sup>      | 52                   |                                                       | 1,34                                    | 1,07             |
| Al | 10—70            | 2313 + 2,29 ( $t-40$ )<br>Fizeau <sup>3)</sup>      | 103                  | 927<br>(654)<br>Heycock<br>i Neville <sup>14)</sup>   | 0,75                                    |                  |
|    | 0—100            | 2204,6 + 2,12 $t$<br>Tütton <sup>11)</sup>          | 96                   |                                                       | 0,83                                    |                  |
|    | 0—610            | 2353,6 + 1,41 $t$<br>Dittenberger <sup>10)</sup>    | 60                   |                                                       | 0,50                                    | 1,03             |
| Pd | 20—100           | 1661,2 + 0,646 $t$<br>Scheel <sup>8)</sup>          | 56                   | 1860<br>(1587)<br>Holborn<br>i Wien <sup>15)</sup>    | 0,81                                    |                  |
|    | 0—1000           | 1167 + 0,437 $t$<br>Holborn i Day <sup>7)</sup>     | 37                   |                                                       | 1,32                                    | 1,07             |
| Au | 10—70            | 1143 + 0,83 ( $t-40$ )<br>Fizeau <sup>3)</sup>      | 59                   | 1335<br>(1062)<br>Heycock<br>i Neville <sup>14)</sup> | 1,07                                    | 1,07             |
| K  | 0—50             | 8023 + 12 $t$<br>Hagen <sup>12)</sup>               | 149                  | 365<br>(62)<br>Hagen <sup>12)</sup>                   | 1,09                                    | 1,09             |
| Cd | 10—70            | 3069 + 3,26 ( $t-40$ )<br>Fizeau <sup>3)</sup>      | 111                  | 595<br>(322)<br>Holborn<br>i Day <sup>16)</sup>       | 1,06                                    | 1,06             |

Widzimy więc, że dla ciał jednoatomowych najlepiej zbadanych założyć możemy

$$n = 1.$$

Wzór (2) na zmianę współczynnika rozszerzalności przybiera wtedy postać:

$$(3) \quad \alpha_t = \alpha_0 \frac{F+T}{F+T_0} \text{ albo } \frac{\alpha_t}{F+T} = \text{const.}$$

Więc, o ile założymy, że współczynnik rozszerzalności ciał jednoatomowych zmienia się proporcjonalnie do sumy bezwzględnej temperatury topnienia i bezwzględnej temperatury ciała, otrzymamy wartości, pozostające w obrębie wartości doświadczalnych.

Wyrazić to możemy inaczej. Oznaczając przez  $\alpha_A$  współczynnik rozszerzalności przy zerze bezwzględnym, otrzymamy:

$$(4) \quad \alpha_t = \alpha_A \left( 1 + \frac{1}{F} \right),$$

czyli:

(A) „współczynnik rozszerzalności ciał jednoatomowych wzrasta z temperaturą o  $\frac{1}{F}$  część swej wartości przy zerze bezwzględnym“.

Jeżeli w ten sposób określać będziemy współczynnik  $n$  dla ciał wieloatomowych, otrzymamy wartości, znacznie się różniące od jedności, przeważnie ujemne, wskazujące wtedy na minimum objętości. Na podstawie tych wartości można podzielić ciała wieloatomowe na nieliczne grupy, prawdopodobnie równoatomowe.

Z pomiędzy metali: bizmut, antymon, ind, tal, gal oraz szara odmiana cyny<sup>17)</sup> winny być uważane za wieloatomowe.

Metaliczne odmiany arsenu, selenu i telluru zachowują się też, jak metale wieloatomowe.

Odrębną grupę stanowią żelazo, nikiel i kobalt, prawdopodobnie wieloatomowe aż do pewnej temperatury (830° dla żelaza, 370° dla niklu i 900° dla kobaltu), przy której ustroj ich się zmienia na jednoatomowy. Tej zmianie ustroju wewnętrznego towarzyszy zmiana prawie wszystkich własności fizycznych: magnetyzm, rozszerzalność, opór elektryczny, ciepło właściwe,

Phys. (4)—4—104—1901; <sup>8)</sup> Scheel, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanst. 4—33—1904;

<sup>9)</sup> Zakrzewski, Rozprawy wyd. mat.-przyrod. Akad. Umiejętności—20—227—1890;

<sup>10)</sup> Dittenberger, (ZS d. Ver. d. deutsch. Ing. 36—1—1902); Tablice Landolta

i Bernsteina, 1905, st. 206; <sup>11)</sup> Tutton, Proc. Roy. Soc. 63—208—1898; <sup>12)</sup> Hagen,

Wied. Ann. 19—436—1883; <sup>13)</sup> Violle, J. de phys. (1)—9—81—1880; <sup>14)</sup> Heycock i Ne-

villie, Jour. Chem. Soc. 67—160—1895; <sup>15)</sup> Holborn i Wien, Wied. Ann. 56—360—1895;

<sup>16)</sup> Holborn i Day, Ann. d. Phys. (4)—2—505—1900; <sup>17)</sup> Cohen i v. Elk, ZS.f. phys.

termo-elektryczność i zjawisko Thomsona. Zmiana współczynnika rozszerzalności poniżej temperatury krytycznej jest dla tych metali większa, niż dla metali jednoatomowych.

|       | Temp.             | $10^6 \alpha_t$                                                    | $10^6 K$                               | F                                 | $n$            | Średnia na $n$ |
|-------|-------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|----------------|----------------|
| Fe    | 0—300             | 1039 + 2,86 t<br>Dulong i Petit <sup>2)</sup>                      | 275                                    | 1873<br>(1600)                    | 0,05           |                |
|       | 10—70             | 1210 + 1,85 (t—40)<br>Fizeau <sup>3)</sup> (miękkie żelazo)        | 162                                    | Roberts—<br>Ansten <sup>22)</sup> | 0,19           |                |
|       | 10—70             | 1188 + 2,05 (t—40)<br>Fizeau <sup>3)</sup><br>(odtlenione wodorem) | 185                                    |                                   | 0,14           |                |
|       | od —103<br>do 100 | 1154 + 1,85 t<br>Zakrzewski <sup>9)</sup>                          | 160                                    |                                   | 0,19           |                |
|       | 0—750             | 1050 + 1,00 t<br>Le Châtelier <sup>18)</sup>                       | 95                                     |                                   | 0,42           | 0,24           |
|       | 0—500             | 1070,5 + 1,05 t<br>Holborn i Day <sup>7)</sup>                     | 90                                     |                                   | 0,44           |                |
|       | Ni                | 8—122                                                              | 1248 + 1,48 t<br>Tütton <sup>19)</sup> | 118                               | 1757<br>(1484) | 0,30           |
| 0—325 |                   | 1280 + 1,93 t<br>Harrison <sup>20)</sup>                           | 151                                    | Holborn<br>i Wien <sup>15)</sup>  | 0,22           | 0,26           |
| Co    | 0—120             | 1208 + 1,28 t<br>Tütton <sup>19)</sup>                             | 106                                    | 1803<br>(1530)                    | 0,37           |                |
|       | 0—300             | 1148 + 2,21 t<br>Fizeau—Curzio <sup>21)</sup>                      | 192                                    | Copaux <sup>23)</sup>             | 0,08           | 0,23           |

Średniej wartości  $n = \frac{1}{4}$  niepodobna jeszcze uważać za wartość ostateczną.

Powyżej temperatury krytycznej zmiana współczynnika rozszerzalności niklu (żelazo i kobalt nie zostały wystarczająco zbadane) ściśle odpowiada wzorowi, wyprowadzonemu dla ciał jednoatomowych.

Chim. 30—601—1899; <sup>18)</sup> Le Châtelier, C. R. 129—131—1899; <sup>19)</sup> Tütton, Proc. Roy Soc. 65—161—1900; <sup>20)</sup> Harrison, Phil. Mag. (6)—7—626—1904; <sup>21)</sup> Curzio, (Bull. Acc. in Catania, 1897 p. 7) Beibl. 22—547—1898; <sup>22)</sup> Roberts Austen, (Report to the Alloys Research. Comp. 1899) Tablice Landolta i Börnsteina, 1905; <sup>23)</sup> Copaux, C. R. 56—188—1863.

|    | Temp.    | $10^6 \alpha_t$                                 | K  | F    | $n$  | Średnia na " |
|----|----------|-------------------------------------------------|----|------|------|--------------|
| Ni | 376—1000 | $1346 + 0,663 t$<br>Holborn i Day <sup>2)</sup> | 49 | 1757 | 1,01 | 1,01         |

Jako wyjątek wymienić należy ołów, którego współczynnik rozszerzalności zmienia się mniej, niżby tego wymagał wzór (3).

|    |       |                                              |    |                                 |     |       |
|----|-------|----------------------------------------------|----|---------------------------------|-----|-------|
| Pb | 10—70 | $2924 + 2,39 (t-40)$<br>Fizeau <sup>3)</sup> | 82 | 600<br>(327)                    | 1,5 | $n=2$ |
|    | 0—100 | $2726 + 1,48 t$<br>Matthiessen <sup>4)</sup> | 54 | Holborn i<br>Day <sup>16)</sup> | 2,6 |       |

Wzór (3) stosować będziemy do wszystkich metali, które nie zostały wymienione jako wieloatomowe lub jako wyjątki.

Pozwoli to nam określić zależność pomiędzy rozszerzalnością, objętością atomową i topliwością, zależność, którą wyrazić możemy w formie następującej:

(B) „Zmiana objętości atomowej pomiędzy zerem bezwzględnym i temperaturą topienia jest jednakowa dla znacznej ilości ciał jednoatomowych.\*<sup>24)</sup>”

Mamy wtedy:

$$(5) \quad O_F - O_A = W,$$

<sup>23)</sup> De Heen znajduje (w 1876 r.), że dla ciał zbliżonych pod względem chemicznym  $F\beta_0 = \text{const.}$  La chaleur, Liège (1893) p. 330.

L. Meyer wykazał (w 1879 r.), że objętość atomowa i temperatura topienia są funkcją peryodyczną ciężaru atomowego. Théories modernes de la chimie, Paris 1887 p. 151.

Mendelejew dochodzi do takiegoż wniosku. Osnovy chimii S.-Petersburg, 1903, p. 447.

Pictet wygłasza prawo: „długość wychyleń (cząsteczek) stoi w stosunku odwrotnym do temperatury topliwości i ich iloczyn jest stałą“. Prawo to wyraża wzór  $F\alpha\sqrt{O} = \text{const.}$ , gdzie  $\alpha$  jest współczynnik rozszerzalności pomiędzy 0 i 100°. C. R. 88—855, 1315—1879.

Carnille y zaznacza, że „współczynnik rozszerzalności jest tem większy, im niższą jest temperatura topienia“ (bez wzoru). Ber. chem. Gesell. 12—139—1879.

Wiebe uzupełnia uwagę Carnille y'a wzorem  $AF\beta c = \text{const.}$ , gdzie  $c$  oznacza ciepło właściwe.

Lémeray wznawia twierdzenie De Heena, C. R. 131—1291—1900.

Ponajew wznawia twierdzenie Carnille y'a, Ann. d. Phys. (4)—18—210—1905.



gdzie  $O_F$  oznacza objętość atomową przy temperaturze topienia,  $O_A$  tę objętość przy zerze bezwzględem,  $W$  ich różnicę.

Przedstawić możemy jeszcze tę wartość pod postacią:

$$(6) \quad O_A F \beta_{\frac{F}{2}} = W,$$

oznaczając przez  $\beta_{\frac{F}{2}}$  średni współczynnik rozszerzalności objętościowej pomiędzy zerem bezwzględem i temperaturą topienia.

Wobec tego, że objętość atomowa przy zerze bezwzględem nieznacznie tylko się różni od objętości atomowej przy temperaturze zwykłej, możemy założyć ze znacznym przybliżeniem:

$$(7) \quad W = OF \beta_{\frac{F}{2}},$$

oznaczając przez  $O$  objętość atomową przy temperaturze zwykłej.

Spółczynnik rozszerzalności  $\beta_{\frac{F}{2}}$  otrzymamy ze wzoru (3):

$$\beta_{\frac{F}{2}} = \frac{1,5 F}{F + T} \beta_t,$$

gdzie  $T$  jest temperaturą bezwzględną, której odpowiada współczynnik  $\beta_t$ . W następującej tabelicy oznaczamy przez  $A$  ciężar atomowy, przez  $d$  gęstość.

|    | $A$   | $d$                              | $O = \frac{A}{d}$ | $10^6 \beta$                                       | $10^6 \frac{P}{z}$    | $F$                                             | $W = OF$ |
|----|-------|----------------------------------|-------------------|----------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------------|----------|
| Al | 27,0  | 2,70<br>Kahlbaum <sup>25)</sup>  | 10,00             | $\beta_{40} = 6940$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 7773                  | 927 Heycock<br>(654) i Neville <sup>14)</sup>   | 0,72     |
| Ag | 107,9 | 10,50<br>Kahlbaum <sup>26)</sup> | 10,30             | $\beta_{450} = 6150$<br>Le Chatelier <sup>6)</sup> | 5781                  | 1234 Heycock<br>(960) i Neville <sup>14)</sup>  | 0,73     |
| Au | 197   | 19,27<br>Kahlbaum <sup>26)</sup> | 10,23             | $\beta_{40} = 4329$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 5238                  | 1335 Heycock<br>(1062) i Neville <sup>14)</sup> | 0,71     |
| Cd | 112   | 8,65<br>Kahlbaum <sup>26)</sup>  | 13,00             | $\beta_{40} = 9207$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 9023                  | 595 Holborn<br>(322) i Day <sup>16)</sup>       | 0,70     |
| Co | 59    | 8,8<br>Copaux <sup>23)</sup>     | 6,70              | $\beta_0 = 3624$<br>Tutton <sup>17)</sup>          | (6187) <sup>30)</sup> | 1803 Copaux <sup>23)</sup><br>(1530)            | 0,74     |
| Cu | 63,6  | 8,94<br>Kahlbaum <sup>26)</sup>  | 7,11              | $\beta_0 = 5010$<br>Dittenberger <sup>10)</sup>    | 6253                  | 1353 Heycock<br>(1080) i Neville <sup>14)</sup> | 0,69     |
| Fe | 55,9  | 7,80<br>Kahlbaum <sup>25)</sup>  | 7,17              | $\beta_{300} = 4350$<br>Le Chatelier <sup>6)</sup> | 4610                  | 1873 Roberts<br>1600 Austen <sup>22)</sup>      | 0,67     |
| Ir | 193   | 22,4<br>Mylius <sup>27)</sup>    | 8,61              | $\beta_{40} = 2100$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 2797                  | 2470 Carnilley <sup>31)</sup><br>(2200)         | 0,60     |
| Ni | 58,7  | 8,8<br>Copaux <sup>23)</sup>     | 6,66              | $\beta_{300} = 5460$<br>Le Chatelier <sup>6)</sup> | 5690                  | 1757 Holborn<br>(1484) i Vien <sup>15)</sup>    | 0,66     |
| Os | 191   | 22,48<br>Deville <sup>28)</sup>  | 8,50              | $\beta_{40} = 1970$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 2724                  | 2770 Pictet <sup>32)</sup><br>(2500)            | 0,64     |
| Pd | 106,5 | 11,9<br>Mylius <sup>27)</sup>    | 8,95              | $\beta_0 = 3484$<br>Scheel <sup>8)</sup>           | 4555                  | 1860 Holborn<br>(1587) i Vien <sup>15)</sup>    | 0,75     |
| Pt | 194,9 | 21,4<br>Mylius <sup>27)</sup>    | 9,11              | $\beta_0 = 2641,5$<br>Scheel <sup>8)</sup>         | 3496                  | 2048 Violle <sup>13)</sup><br>(1775)            | 0,65     |
| Rh | 103,0 | 12,6<br>Mylius <sup>27)</sup>    | 8,17              | $\beta_{40} = 2550$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 332 <sup>2)</sup>     | 2070 Deville<br>(1800) i Debray <sup>33)</sup>  | 0,56     |
| Ru | 101,7 | 12,06<br>Joly <sup>29)</sup>     | 8,43              | $\beta_{40} = 2890$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 3810                  | 2270 Deville<br>(2000) i Debray <sup>33)</sup>  | 0,73     |
| Sn | 119,0 | 7,28<br>Kahlbaum <sup>25)</sup>  | 16,34             | $\beta_{40} = 6702$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 6233                  | 505 Heycock<br>(232) i Neville <sup>14)</sup>   | 0,52     |
| Zn | 65,4  | 7,13<br>Kahlbaum <sup>26)</sup>  | 9,17              | $\beta_{40} = 8754$<br>Fizeau <sup>3)</sup>        | 8917                  | 692 Holborn<br>(419) i Day <sup>16)</sup>       | 0,57     |

Średnia 0,66

<sup>25)</sup> Kahlbaum i Sturm, ZS anorg. Chem. 46—217—1905; <sup>26)</sup> Kahlbaum, Roth, Siedler, ZS anorg. Chem. 29—177—1902; <sup>27)</sup> Mylius i Dietz, Ber. Chem. Gesell. 31—3187—1899; <sup>28)</sup> Deville i Debray, C. R. 82—1076—1876; <sup>29)</sup> Joly, C. R. 116—430—1893; <sup>30)</sup> Wartość średnia obliczona, zakładając do temperatury krytycznej  $n = \frac{1}{4}$ , powyżej

Różnica pomiędzy wartościami na  $W$  leży w obrębie błędów doświadczalnych. Nie wykraczają one poza granicę, jaką otrzymamy, obliczając wartości na  $W$  dla tegoż samego ciała podług rozmaitych wzorów doświadczalnych. Dla platyny, na przykład, posługując się wzorem Fizeau<sup>3)</sup>, otrzymamy  $W = 0,81$ , posługując się wzorem Benoit<sup>5)</sup>  $W = 0,60$ .

Najbardziej oddala się od wartości średniej cyna, która wykazuje cechy przejściowe od metali jednoatomowych do wieloatomowych. Cecha ta stoi zapewne w związku ze znanym polimorfizmem cyny<sup>17)</sup>.

Metale, które uważać można za wyjątki, podzielimy na dwie kategorie. Do pierwszej należy ołów i rtęć.

|    | A     | d                                | $\sigma = \frac{A}{d}$ | $10^8 \rho_t$                                   | $10^8 \rho_{\frac{r}{z}}$ | F                                                   | W    |
|----|-------|----------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------------------|------|
| Hg | 200   | 14,9<br>Dewar <sup>34)</sup>     | 14,08                  | $\beta_{(-115)} = 8870$<br>Dewar <sup>34)</sup> | 7924                      | $\frac{234}{(-39)}$ Dewar <sup>34)</sup>            | 0,26 |
| Pb | 206,9 | 11,35<br>Kahlbaum <sup>26)</sup> | 18,23                  | $\beta_{40} = 877,2$<br>Fizeau <sup>3)</sup>    | 8685                      | $\frac{600}{(327)}$ Holborn<br>i Day <sup>16)</sup> | 0,95 |

Nie sądzę, ażeby można było uważać ołów ostatecznie za wyjątek, zważywszy, że badania jego rozszerzalności nie były wznowione od czasu Fizeau i Matthiessena.

Do drugiej kategorii wchodziły metale alkaliczne, metale ziem alkalicznych i magn. Jeżeli określimy dla nich, narówni z innymi ciałami, objętość atomową, jako iloraz ciężaru atomowego, przez gęstość, otrzymamy wartości za duże. Gdy dla innych ciał objętość molekularna połączeń równa się (mniej więcej) sumie objętości atomowych składników<sup>35)</sup>, te ciała wykazują kurczenie się niezwykle.

Naprzykład: <sup>35)</sup>

90 objętości K + O dają 35 objętości  $K_2O$ ; kurczenie 61%,  
 47 " Na + O " 24 "  $Na_2O$ ; " 49%,  
 28 " Mg + O " 23 "  $MgO$ ; " 18%.

Więc założywszy nawet, że się atomy tlenu umieścili pomiędzy atomami metali, widzimy, że w połączeniu objętość atomowa ciał tych znacznie się zmniejszyła, że więc objętość atomowa poprzednio obliczona nie była objętością minimalną, którą być winna z założenia (6). Przyjmując za objętość atomową objętość obliczoną z tlenków, otrzymamy na  $W$  wartości znacznie bardziej zbliżone do stałej normalnej.

$n=1$ ; <sup>31)</sup> Carnilley, Phil. Mag. (5) - 8 - 305, 368 - 1879; <sup>32)</sup> Pictet, C. R. 88 - 855, 1315 - 1879; <sup>22)</sup> Deville i Debray, Ann. chim. et phys. (3) 56 - 385 - 1859; <sup>3)</sup> Dewar, Proc. Roy. Soc. 70 - 237 - 1902; <sup>35)</sup> Mendelejew, Osnovy chimii, S.-Petersburg, 1903,

|    | $O_1 = \frac{A}{d}$  | $O_2$ | $10^3 \rho_t$                                | $10^3 \frac{\rho}{z}$ | F                                                       | $W_1$ | $W_2$ |
|----|----------------------|-------|----------------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------------------------|-------|-------|
| K  | 45,25 <sup>12)</sup> | 17,5  | $\beta_{25} = 24990$<br>Hagen <sup>12)</sup> | 19830                 | $\frac{336}{(63)}$ Bunsen <sup>37)</sup>                | 3,02  | 1,17  |
| Na | 23,69 <sup>12)</sup> | 12,0  | $\beta_{25} = 21630$<br>Hagen <sup>12)</sup> | 17970                 | $\frac{369}{(96)}$ Bunsen <sup>37)</sup>                | 1,57  | 0,80  |
| Mg | 13,89 <sup>36)</sup> | 11,5  | $\beta_{40} = 7982$<br>Fizeau <sup>3)</sup>  | 8890                  | $\frac{906}{(630)}$ Heycock<br>i Neville <sup>14)</sup> | 1,12  | 0,93  |

$O_1$  jest objętością atomową zwykłą,  $O_2$ —obliczoną z tlenków,  $W_1$  i  $W_2$  są odpowiednie wartości na stałą.

Jeżeli zwiększenie objętości atomowej pomiędzy zerem bezwzględnym i temperaturą topienia jest jednakowe dla większości ciał jednoatomowych, prawdopodobnym się staje, że zwiększenie objętości atomowej podczas topienia też jest jednakowe dla znacznej ilości tych samych ciał.

Zmiana objętości podczas topienia określona bywa dwoma sposobami:

- 1) zmianą objętości 1-go cm. sześciennego danego ciała ( $\varepsilon$ ),
- 2) " " " " 1-go grama " " ( $\eta$ ).

Zmianę objętości atomowej podczas topienia ( $V$ ) określić więc możemy:

$$(8) \quad V = O_1 - O_2 = \varepsilon O = \eta A.$$

$O_1$  i  $O_2$  oznaczają objętości atomowe w stanie ciekłym i stałym przy temperaturze topienia  $O$ —przy temperaturze zwykłej,  $A$ —ciężar atomowy.

|    | $\varepsilon$ | $O$   | $\eta$ | $A$   | $V = \varepsilon O$<br>$= \eta A$ | Śred-<br>nia | Antor                              |
|----|---------------|-------|--------|-------|-----------------------------------|--------------|------------------------------------|
| Ag | 0,0494        | 10,30 |        |       | 0,51                              | 0,51         | Roberts-Wrygthon <sup>38)</sup>    |
| Al |               |       | 0,019  | 27,0  | 0,51                              | 0,51         | Toepler <sup>39)</sup>             |
| Cd | 0,0472        | 13,00 |        | 112   | 0,61                              | 0,66         | Vincentini i Omodei <sup>40)</sup> |
|    |               |       | 0,0064 |       | 0,71                              |              | Toepler <sup>39)</sup>             |
| Na | 0,0249        | 23,69 |        |       | 0,59                              |              | Vincentini i Omodei <sup>40)</sup> |
|    | 0,025         | "     |        |       | 0,59                              |              | Hagen <sup>41)</sup>               |
|    |               |       | 0,0264 | 23,05 | 0,61                              | 0,60         | Toepler <sup>39)</sup>             |
| Pb | 0,0338        | 18,23 |        |       | 0,62                              |              | Vincentini i Omodei <sup>40)</sup> |
|    |               |       | 0,0034 | 206,9 | 0,70                              | 0,66         | Toepler <sup>39)</sup>             |
| Su | 0,028         | 16,34 |        |       | 0,46                              |              | Vincentini i Omodei <sup>40)</sup> |
|    |               |       | 0,0039 | 119   | 0,46                              | 0,46         | Toepler <sup>39)</sup>             |
| Zn |               |       | 0,01   | 65,4  | 0,65                              | 0,45         | Toepler <sup>39)</sup>             |

Średnia 0,58

p. 475; <sup>36)</sup> Deville i Caron, C. R. 44—394—1857; <sup>37)</sup> Bunsen, C. R. 56—188—1863;  
<sup>38)</sup> Roberts i Wrygthon, Nature (ang.) 24—470—1881 (Bulbl. 5—817—1881);  
<sup>39)</sup> Toepler, Wied. Ann. 53—343—1894; <sup>40)</sup> Vincentini i Omodei, Atti Acc.

Liczby te potwierdzają przypuszczenie, że:

(C) „Zwiększenie objętości atomowej podczas topienia jest jednakowe dla znacznej ilości ciał jednoatomowych“.<sup>42)</sup>

Ołów i sód nie stanowią wyjątku.

Wartości dla cyny, nieco mniejsze od normalnych, niepodobna uważać za ostateczne ze względu na znaczną sprzeczność danych. Nies i Winkelmann<sup>43)</sup> sądzili, że się cyna kurczy podczas topienia ( $V = -0,11$ ); E. Wiedemann<sup>44)</sup> zaprzecza temu i podaje  $V = 0,31$ , badania Vincentini i Omodeia oraz Toeplera zwiększają znacznie tę wartość ( $V = 0,46$ ).

Rtęć znacznie się rozszerza nie tylko przy stałej temperaturze topienia, ale też w obrębie kilku stopni, otaczających tę temperaturę. Mamy  $\varepsilon = 0,051$ <sup>45)</sup> pomiędzy  $-33,5^{\circ}$  i  $-38,5^{\circ}$ , więc:

$$V = \varepsilon O = 0,72.$$

Potas, rubid i cez dają na  $V$  wartości większe od normalnych.

|    | $\varepsilon$ | O                 | $\eta$ | $\Lambda$ | $\frac{v=O}{\eta\Lambda}$ | Średnia | Autor                                                       |
|----|---------------|-------------------|--------|-----------|---------------------------|---------|-------------------------------------------------------------|
| K  | 0,026         | 45,25             |        |           | 1,18                      |         | Vincentini i Omodei <sup>46)</sup><br>Hagen <sup>41)</sup>  |
|    | 0,029         | "                 | 0,030  | 39,1      | 1,31                      | 1,22    |                                                             |
| Rb |               |                   | 0,014  | 85,4      | 1,17                      |         |                                                             |
|    |               |                   | 0,0166 | "         | 1,20                      |         |                                                             |
| Cs | 0,0263        | 70 <sup>47)</sup> |        |           | 1,42                      | 1,31    | Eckhardt <sup>46)</sup><br>Eckhardt i Graefe <sup>47)</sup> |
|    |               |                   |        |           |                           | 1,83    |                                                             |

Przejdźmy do ciepła utajonego. Ażeby ogrzać atom gramowy ciała prostego, jednoatomowego od zera bezwzględnego do temperatury topienia zużyć należy ilość ciepła proporcjonalną do tej temperatury (Dulong i Petit). Lecz energia ta powoduje jednakowe zwiększenie objętości atomowej, utworzonej przez atom gramowy (B); widzimy więc, że dla otrzymania jednakowej rozszerzalności wydać należy ilość energii, proporcjonalną do bezwzględnej temperatury topienia danego ciała.

Torino 23—38—1887/8; <sup>41)</sup> Hagen, Verh. Phys. Ges. Berlin. 1882 p. 97; <sup>42)</sup> Toepler znajduje, że zmiana objętości podczas topienia jest funkcją peryodyczną ciężaru atomowego l. cit. p. 377; <sup>43)</sup> Nies i Winkelmann, Wied. Ann. 13—43—1881; <sup>44)</sup> E. Wiedemann, Wied. Ann. 20—288—1883; <sup>45)</sup> Grunmach, Phys. ZS. 3—134—1902; <sup>46)</sup> Eckhardt, Ann. d. Phys. (4)—1—790—1900; <sup>47)</sup> Eckhardt i Graefe. ZS. anorg. Chem. 23—

Wiemy, że zwiększenie objętości atomowej podczas topienia jest też jednakowe dla znacznej ilości ciał jednoatomowych (C). Przewidywać więc można, że energia niezbędna dla wywołania tych jednakowych zmian objętości atomowej będzie też proporcjonalna do bezwzględnej temperatury topienia ciała i że:

$$(9) \quad \frac{LA}{F} = k.$$

gdzie  $L$  jest ciepło utajone,  $A$ —ciężar atomowy,  $F$ —bezwzględna temperatura topienia,  $k$ —stała.

|    | L                            | A     | F    | $k = \frac{LA}{F}$ |
|----|------------------------------|-------|------|--------------------|
| Ag | 24,7 Pionchon <sup>48)</sup> | 107,9 | 1233 | 2,16               |
| Al | 80,0 Pionchon <sup>49)</sup> | 27,0  | 927  | 2,33               |
| Cd | 13,0 Person <sup>50)</sup>   | 112,4 | 595  | 2,59               |
| Cu | 43,0 Richards <sup>51)</sup> | 63,6  | 1353 | 2,02               |
| Hg | 2,82 Person <sup>50)</sup>   | 200   | 234  | 2,41               |
| Na | 13,7 Joannis <sup>52)</sup>  | 23,5  | 365  | 2,00               |
| Pb | 5,85 Rudberg <sup>53)</sup>  | 206,9 | 600  | 2,02               |
| Pd | 27,2 Violle <sup>54)</sup>   | 106,5 | 1860 | 2,08               |
| Pt | 36,3 Violle <sup>54)</sup>   | 194,9 | 2048 | 2,59               |
| Sn | 13,3 Rudberg <sup>53)</sup>  | 119   | 505  | (3,13)             |
| Zn | 28,1 Person <sup>50)</sup>   | 65,4  | 692  | 2,66               |

Srednia 2,36

Wygłosić więc możemy zależność następującą:

(D) „Przechodząc ze stanu stałego do stanu cieczy, atomy gramowe ciał jednoatomowych pochłaniają pod postacią ciepła utajonego ilość energii proporcjonalną do bezwzględnej temperatury topienia”. <sup>55)</sup>

Cyna znowu wykazuje cechy przejściowe do ciał wieloatomowych, kurczących się w czasie topienia, których stała ( $k$ ), w ten sposób obliczona, jest znacznie większa ( $k = 4,5$  dla Bi i Ga).

378—1900; <sup>48)</sup> Pionchon, Ann. chim. et phys. (6)—11—108—1887; <sup>49)</sup> Pionchon, C. R. 115—162—1892; <sup>50)</sup> Person, Ann. chim. et phys. (3)—24—136, 264, 274—1848; <sup>51)</sup> Richards, ZS. phys. Chem. 42—620—1903; <sup>52)</sup> Joannis, Ann. chim. et phys. (6)—12—381—1887; <sup>53)</sup> Rudberg, Pog. Ann. 19—125—1830, <sup>54)</sup> Violle, C. R. 87—981—1878; <sup>55)</sup> Robertson określa ciepło utajone wzorem  $\frac{LA}{FV_0} = \text{const.}$ , gdzie  $V_0$  jest

objętość atomowa. Slotte daje wzór  $\frac{L}{FV_0} = \text{const.}$ , gdzie  $C$  jest ciepło właściwe. Beibl. 29—623—1905.

Ciepło utajone potasu i cezu jest mniejsze od normalnego.

|    | L                                        | A     | F                  | $k = \frac{LA}{F}$ |
|----|------------------------------------------|-------|--------------------|--------------------|
| K  | 15,7 Jounnis <sup>52)</sup>              | 39,1  | 336                | 1,82               |
| Cs | 3,73 Eckhardt i<br>Graefe <sup>47)</sup> | 132,9 | 299 <sup>47)</sup> | 1,65               |

Związki ustalone dla zmiany objętości podczas topienia (C) i dla ciepła utajonego (D) pozwolą nam uogólnić zależność punktu topienia ciał jednoatomowych od ciśnienia.

Wzór Clausiusa określa zmianę temperatury topienia, zmianę, którą uważać będziemy za stałą. Mamy:

$$(10) \quad \frac{dF}{dP} = \frac{PF}{JL} (u_1 - u_2),$$

gdzie  $P$  oznacza ciśnienie atmosfery na  $m^2 = 10333 \text{ kg.}$ ;  $F$ —bezwzględną temperaturę topienia,  $J$ —równoważnik mechaniczny kalorii = 426  $\text{kgm.}$ ,  $L$ —ciepło utajone,  $(u_1 - u_2)$ —zmianę objętości (wyrażonej w  $m^3$ ) jednego  $\text{kg.}$  ciała podczas topienia.

Wiemy, że dla znacznej ilości ciał jednoatomowych:

$$(8) \quad \eta A = V, \quad V = 0,58,$$

$$(9) \quad \frac{LA}{F} = k, \quad k = 2,36.$$

Więc:

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{10^3} \eta.$$

Podstawiając te wartości do wzoru Clausiusa, otrzymujemy:

$$(11) \quad \frac{dF}{dP} = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{P}{J} \cdot \frac{V}{k} = 0,006^0 \frac{dP}{dF} = 167 \text{ atm.}$$

Wyrazić to możemy:

(E) „Jeżeli zmiana temperatury topienia pod wpływem ciśnienia jest stałą, stała ta jest jednakowa dla znacznej ilości ciał jednoatomowych“.

Nieliczny materiał doświadczalny odnosi się przeważnie do ciał, które uważać należy za wieloatomowe (Bi) lub za częściowe wyjątki (K, Sn). Tamann <sup>56)</sup> daje na  $\frac{dF}{dP}$  dla Na 0,007, dla Hg 0,005.

<sup>56)</sup> Tamann, Wied. Ann. 68—636—1899; ZS. anorg. Chem. 40—59—1904.

Niezmienność  $\frac{dF}{dP}$  przyjęta być może tylko jako założenie hypotetyczne, zważywszy, że doświadczenia nie dały dotąd pewnych pod tym względem wyników.

## II. Opór elektryczny.<sup>1)</sup>

Zmiana oporu podczas topienia.—Zależność oporu od temperatury.—Czynnik anormalnej zmiany oporu.—Przykłady.

Związki ustalone dla rozszerzalności pozwolą nam wygłosić prawo na zmianę oporu:

(F) „Zmiana oporu elektrycznego metali jest proporcjonalna do zmiany ich spójności”.<sup>2)</sup>

Spójność (covolume) nazywać będziemy przestrzeń wolną pomiędzy molekułami.

Przedstawić to możemy przez

$$(12) \quad \frac{r}{r'} = \frac{w}{w'}, \text{ albo } \frac{r}{w} = \text{const.},$$

oznaczając opór przez  $r$  i  $r'$ , spójności odpowiednie przez  $w$  i  $w'$ .

Wiemy, że zmiana objętości atomowej pomiędzy zerem bezwzględem i temperaturą topienia jest stała dla znacznej ilości metali jednoatomowych

<sup>1)</sup> Wskazówki bibliograficzne umieszczone są w rozdz. IV-ym.

<sup>2)</sup> Lenz (w 1835 r.), Becquerel (1846 r.) i Mathiessen (1857) już zaznaczyli możliwość związku pomiędzy rozszerzalnością i zmianą oporu elektrycznego, lecz udowodnić go nie mogli.

Clausius (1858) wygłosił prawo, według którego zmiana oporu proporcjonalną jest do temperatury bezwzględnej.

Benoit (1873) i Callendar (1887) wyrażają zmianę oporu wzorem parabolicznym.

Według Kundta (1889) zmiana oporu jest proporcjonalna do zmiany szybkości czerwonego światła w metalach.

Williams (1902) znajduje, że opór metali podczas topienia zmienia się proporcjonalnie do długości wahań molekuł. Zależność oporu od temperatury wyraża on wzorem  $r_t = r_0 (1 + 0,00366t) (1 + at)$ , gdzie  $a$  jest współczynnikiem, zależnym od rozszerzalności i ciepła właściwego.

Streinz (1902) twierdzi, że współczynnik zmiany oporu metali jest funkcją periodyczną ciężaru atomowego i że „współczynnik ten jest tem większy, im temperatura topienia ciała jest niższa“ (bez wzoru). Poprzednio już do ostatniego wniosku doszedł Benoit (1875).

Mewes (1903) zakłada, że opór zmienia się proporcjonalnie do spójności według wzoru wykładniczego.



$W = 0,66 \text{ cm.}^3$ , że zmiana objętości atomowej jest również stała dla znacznej ilości ciał  $V = 0,58 \text{ cm.}^3$ .

Dla pewnej więc liczby ciał zmiana spółobjętości podczas topienia określona jest przez stosunek:

$$(19) \quad \frac{w}{w'} = \frac{W + V}{W} = 1,9.$$

Na zmianę oporu podczas topienia mamy wartości następujące.

|    | Zmiana oporu<br>$\frac{r}{r'}$ | Średnia | Autorytety                 |
|----|--------------------------------|---------|----------------------------|
| Cd | 1,80                           | 1,91    | De la Rive (1863)          |
|    | 1,96                           |         | Vincentini i Omodei (1890) |
|    | 1,98                           |         | Vassura (1892)             |
| Pb | 1,89                           | 1,97    | De la Rive (1863)          |
|    | 1,95                           |         | Vincentini i Omodei (1890) |
| Sn | 2,12                           | 2,15    | Siemens (1861)             |
|    | 2,17                           |         | De la Rive (1863)          |
|    | 2,21                           |         | Vincentini i Omodei (1890) |
| Zn | 2,13                           | 2,00    | Vassura (1892)             |
|    | 2,00                           |         | De la Rive (1863)          |

$$\text{Średnia } \frac{r}{r'} = 2,0.$$

Wartość ta znacznie się zbliża do odpowiedniego stosunku  $\frac{w}{w'}$ .

Wzmiankowaliśmy rtęć jako wyjątek (str. 7 i 9), gdyż zmiana jej objętości atomowej aż do temperatury topienia jest mniejsza od normalnej,  $W = 0,26$ ; zmiana zaś objętości atomowej podczas topienia—nieco większa od normalnej,  $V = 0,72$ . Wobec tego zmiana spółobjętości podczas topienia winna być większa, niż dla innych ciał:

$$\frac{w}{w'} = 3,8.$$

Przewidywać więc należy również większą, niż dla innych ciał zmianę oporu podczas topienia. Istotnie C a i l l e t e t i B o u t y (1885) oraz C. L. W e b e r (1899) podaje dla rtęci:

$$\frac{r}{r'} = 4,1.$$

Dewar i Fleming (1897) podają ten sam stosunek pomiędzy temperaturami  $-36$  i  $-50$ ; są to granice, w których odczuwać się daje wpływ topienia.

Dla metali alkalicznych zmiana spójności podczas topienia oraz odpowiednia zmiana oporu elektrycznego są mniejsze od normalnych.

|    | Zmiana objętości<br>$\frac{w}{w'}$ | Zmiana oporu<br>$\frac{r}{r'}$ | Średnia | Autorowie          |
|----|------------------------------------|--------------------------------|---------|--------------------|
| K  | $\frac{3,02+1,22}{3,02} = 1,40$    | 1,46                           |         | Matthiessen (1857) |
| Na | $\frac{1,57+0,60}{1,57} = 1,38$    | 1,39                           | 1,43    | Bernini (1904)     |
|    |                                    | 1,30                           |         | Matthiessen (1857) |
|    |                                    | 1,34                           | 1,32    | Bernini (1904)     |

Różnice pomiędzy  $\frac{w}{w'}$  i  $\frac{r}{r'}$  pozostają, jak widzimy, w granicach błędów doświadczalnych.

Zmiana oporu elektrycznego, zależnie od temperatury, jest również proporcjonalna do zmiany spójności.

Stosunek spójności przy temperaturze bezwzględnej  $T$  i  $T'$  wyrażony być może przez wzór:

$$(14) \quad \frac{w}{w'} = \frac{\beta_{\frac{T}{2}} T}{\beta_{\frac{T'}{2}} T'}$$

gdzie  $\beta_{\frac{T}{2}}$  i  $\beta_{\frac{T'}{2}}$  są średnie współczynniki rozszerzalności pomiędzy zerem bezwzględem i temperaturami bezwzględnymi  $T$  i  $T'$ , czyli, innymi słowy, współczynniki rzeczywiste przy temperaturze  $\frac{T}{2}$  i  $\frac{T'}{2}$ . Lecz wiemy, że dla znacznej liczby ciał jednoatomowych zmiana współczynnika rozszerzalności jest proporcjonalna do sumy bezwzględnej temperatury topienia i bezwzględnej temperatury ciała (str. 3). Mamy więc:

$$(15) \quad \beta_{\frac{T}{2}} = \beta_0 \frac{F + \frac{T}{2}}{F + T_0}, \quad \beta_{\frac{T'}{2}} = \beta_0 \frac{F + \frac{T'}{2}}{F + T_0},$$

gdzie  $F$  jest bezwzględna temperatura topienia danego ciała

Podstawiając te wartości do wzoru (14), otrzymamy wzór następujący na zmianę spółobjętości oraz na zmianę oporu elektrycznego:

$$(16) \quad \frac{w}{w'} = \frac{2F+T}{2F+T'} \cdot \frac{T}{T'} = \frac{r_i}{r'} \quad \text{albo} \quad \frac{r}{(2F+T)T} = \text{const.}$$

Przypatrzmy się bliżej temu wzorowi.

1. Jeżeli temperatura topienia jest wysoka, wyraz  $\frac{2F+T}{2F+T'}$  zbliża się do jedności i zmiana oporu uważana być może za proporcjonalną do temperatury bezwzględnej (prawo *Clausa*—1858).

2. Zmiana oporu elektrycznego jest tem większa, im niższa jest temperatura topienia, gdyż większą wtedy wartość przybiera wyraz  $\frac{2F+T}{2F+T'}$ . Zgodne to jest ze spostrzeżeniami *Benoit* (1875), *G. Wiedemanna* (1893) i *Streintza* (1902).

3. Wzór (16) odpowiada funkcji parabolicznej. Widoczne to się staje, gdy go przedstawimy pod postacią:

$$(17) \quad \left(1 + 3 \frac{r_i}{r_F}\right) = \left(1 + \frac{T}{F}\right)^2,$$

gdzie  $r_F$  oznacza opór przy temperaturze topienia.

4. Zastępując temperaturę bezwzględną przez temperaturę zwykłą  $T=273+t$  oraz zakładając  $T'=T_0=273$ , otrzymujemy wzór:

$$(18) \quad r_i = r_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right) \left(1 + \frac{1}{2F+273} t\right).$$

Odpowiada mu wzór *Williama* (1902), o ile współczynnik doświadczalny zastąpimy wyrazem  $\frac{1}{2F+273}$ .

5. Przedstawić możemy, nareszcie, wzór (16) pod postacią zwykłą:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i = r_0 (1 + \gamma t + \gamma' t^2), \\ \text{gdzie:} \\ \gamma = \frac{1}{273} + \frac{1}{2F+273} \quad \text{i} \quad \gamma' = \frac{1}{(2F+273)273} \end{array} \right.$$

TABLICA I.  
Zmiana oporu zależnie od temperatury.

| F                    | $r_t = r_0(1 + \gamma t + \gamma^2 t^2)$ | Obliczone pomiędzy 0 i 100° | Znalezione pomiędzy 0 i 100° | Obliczone pomiędzy 0 i 100° | Znalezione pomiędzy 0 i 1000°    |
|----------------------|------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| Li 459 <sup>3)</sup> | $1 + 0,004503t + 0,0,308t^2$             | 0,0048                      | 0,0046 Bernini (1904)        | 0,0042                      | 0,0042 Chilletet i Bouty (1885)  |
| Su 505               | $1 + 0,004442t + 0,0,286t^2$             | 0,0047                      | 0,0046 Benoit (1873)         | 0,0041                      | 0,0040 Dewar i Fleming (1893)    |
| Cd 595               | $1 + 0,004347t + 0,0,250t^2$             | 0,0046                      | 0,0044 Benoit (1873)         | 0,0040                      | 0,0040 Dewar i Fleming (1893)    |
| Zn 692               | $1 + 0,004267t + 0,0,221t^2$             | 0,0045                      | 0,0043 Benoit (1873)         | 0,0040                      | 0,0039 Calletet i Bouty (1885)   |
| Mg 906               | $1 + 0,004143t + 0,0,176t^2$             | 0,0043                      | 0,0040 Benoit (1873)         | 0,0040                      | 0,0039 Dewar i Fleming (1892)    |
| Al 927               | $1 + 0,004133t + 0,0,171t^2$             | 0,0043                      | Dewar i Fleming (1893)       | 0,0039                      | 0,0039 Calletet i Bouty (1885)   |
| Ag 1234              | $1 + 0,004028t + 0,0,137t^2$             | 0,0042                      | 0,0040 Benoit (1873)         | 0,0039                      | 0,0038 Dewar i Fleming (1892)    |
| Au 1235              | $1 + 0,004003t + 0,0,125t^2$             | 0,0041                      | Matthiessen i v. Bose (1862) | 0,0039                      | 0,0041 Dewar i Fleming (1892)    |
| Cu 1353              | $1 + 0,004000t + 0,0,123t^2$             | 0,0041                      | Matthiessen i v. Bose (1862) | 0,0038                      | 0,0039 Dewar i Fleming (1893)    |
| Pd 1860              | $1 + 0,003913t + 0,0,092t^2$             | 0,0040                      | Dewar i Fleming (1893)       | 0,0038                      | de 0,0035 Dewar i Fleming (1892) |
| Pt 2048              | $1 + 0,003892t + 0,0,084t^2$             | 0,0040                      | Holborn (1901)               | 0,0038                      | à 0,0040 Holborn (1903)          |
| Ir 2470              | $1 + 0,003855t + 0,0,070t^2$             | 0,0039                      | Holborn i Wien (1895)        |                             |                                  |

<sup>3)</sup> Kahlbaum, ZS. anorg. Chem, 23—220—1900.

Tablica I zawiera w pierwszej kolumnie wartości na  $\gamma$  i  $\gamma'$ , obliczone ze wzoru (19). W kolumnach następnych porównywane są dane doświadczalne z wartościami obliczonymi na zmianę oporu pomiędzy 0 i 100° oraz pomiędzy 0 i -100°.

Dla rtęci stałej związku (16) i (19) dają nam wzór:

$$r_t = r_{-50} [1 + 0,00511 (t + 50) + 0,53 (t + 50)^2],$$

gdzie  $r_{-50}$  jest opór rtęci przy -50°. Temperatura ta została przyjęta za podstawę, ponieważ pomiędzy -40° i -50° zmiana oporu pozostaje jeszcze pod wpływem temperatury topienia.

Wzór ten daje pomiędzy -50° i -90°:  $\gamma = 0,00490$ ,

C a i l l e t e t i B o u t y (1885) znaleźli:  $\gamma = 0,00486$ .

Wzmiankowaliśmy ołów jako wyjątek (str. 5), ponieważ jego współczynnik rozszerzalności zmienia się powolniej, niż u innych ciał jednoatomowych. To same zjawisko odnajdujemy w zbyt powolnej zmianie oporu, która przedstawiona być może przez wzór (16) tylko po zastąpieniu  $F$  przez  $nF$  ( $n=2$ ), wartością znaną dla ołowiu. Mamy wtedy:

$$r_t = r_0 (1 + 0,00403 t + 0,05137 t^2).$$

Wzór ten daje pomiędzy 0 i 100°:  $\gamma = 0,00417$ ,

B e n o i t (1873) znajduje:  $\gamma = 0,00410$ .

Dla ciał wieloatomowych z grupy żelaza też znajdujemy odpowiednik pomiędzy rozszerzalnością i zmianą oporu. Wiemy (str. 4), że współczynnik rozszerzalności żelaza, niklu i kobaltu zmienia się poniżej temperatury krytycznej pręcej, niż dla ciał jednoatomowych. Opór elektryczny również zmienia się pręcej, niżby tego wymagał wzór (16); jeżeli jednak w tym wzorze zastąpimy  $F$  przez  $nF$  ( $n = \frac{1}{4}$ ), wartością, znaną dla metali z grupy żelaza, otrzymamy dane bardziej zbliżone do wartości doświadczalnych. Mamy więc:

$$\text{dla żelaza } (F = 1873) \quad r_t = r_0 (1 + 0,004489 t + 0,05303 t^2).$$

$$\text{„ niklu } (F = 1757) \quad r_t = r_0 (1 + 0,004531 t + 0,05318 t^2).$$

$$\text{„ kobaltu } (F = 1803) \quad r_t = r_0 (1 + 0,004514 t + 0,05312 t^2).$$

Wzory te dają nam pomiędzy 0 i 100°.

1) Zważywszy, że  $\frac{1+0,00407 t}{1-40 \cdot 0,00407} = 1+0,00486(t+50)$ .

|    | Oblieczone<br>pomiędzy<br>0 i 100° | Znalezione pomiędzy 0 i 100°                          |
|----|------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Fe | 0,0048                             | od 0,0048 Hopkinson (1888)<br>do 0,0057 Morris (1897) |
| Ni | 0,0049                             | od 0,0040 Harrison (1902)<br>do 0,0062 Fleming (1900) |
| Co | 0,0048                             | od 0,0030 Knott (1891)<br>do 0,0055 Copaut (1905)     |

Prawo, ogłoszone na zmianę oporu elektrycznego metali jednoatomowych, stosuje się tylko do ciał bezwzględnie czystych. Najmniejszy ślad ciał obcych wywiera na opór elektryczny wpływ nieproporcjonalny do swej wartości. Jako przykład wystarczy przytoczyć, że 0,1% żelaza i 0,1% miedzi zwiększają o 40% opór właściwy złota i zmniejszają o 36% jego współczynnik temperatury <sup>5)</sup> Wpływ ten ciał obcych, powodowany zapewne przez zjawiska termo-elektryczne (Liebenow 1898), tłumaczy nam znaczne różnice w doświadczeniach nad ciałami, które z trudnością tylko w stanie czystym otrzymać się dają (Pt, Bl, Fe, Co, Ni); natomiast rtęć, którą otrzymać można w stanie bezwzględnej prawie czystości, dokładnie się stosuje do ogłoszonego prawa.

Wobec tego, że ślady ciał obcych zmniejszają współczynnik temperatury, widzimy, że znalezione współczynniki mniejsze są przeważnie od obliczonych, które uważane być mogą za granicę dla metali bezwzględnie czystych, a nie za średnią zwykłych wartości doświadczalnych. Wyjątek stanowi miedź, o której mowa będzie w rozdziale następnym.

Spółczynnik temperatury zależy też od stanu ciała. Jest on mniejszy dla metali twardych, aniżeli dla wyżarzonych. Naprzykład dla cynku. <sup>6)</sup>

|   |                                        |                   |                    |
|---|----------------------------------------|-------------------|--------------------|
|   | twardego ( $r_0 = 1025$ )              | pomiędzy 0 i 100° | $\gamma = 0,0037,$ |
|   | wyżarzonego przy 100° ( $r_0 = 1021$ ) | " "               | $\gamma = 0,0038,$ |
| " | " 240° ( $r_0 = 986$ )                 | " "               | $\gamma = 0,0040,$ |
| " | " 360° ( $r_0 = 975$ )                 | " "               | $\gamma = 0,0043.$ |

Przyjąć tu możemy teorię Kalischer'a <sup>7)</sup>, że stanem normalnym dla metali jest stan krystaliczny. Naruszony on jest częściowo lub całkowicie przez czynniki mechaniczne, naprzykład ciągnięcie i odtworzony pod

<sup>5)</sup> Jaeger i Disselhorst, Abh. d. phys.-techn. Reichsanst. 8-320, 360-1900; <sup>6)</sup> Benoit, Rozprawa doktorska. Paryż 1873 p. 41; <sup>7)</sup> Kalischer, Chem. Ber. 14-2747-1881; 15-702-1882.

wpływem ciepła. Uważać więc musimy stan wyżarzony za normalny. Doświadczenie potwierdza to rozumowanie, gdyż w miarę wyżarzenia współczynnik temperatury coraz bardziej się zbliża do wartości teoretycznej ( $\gamma=0,0045$  dla cynku).

Znaczne anomalie spostrzegamy też, o ile metal badany wzięty jest w warstwie tak cienkiej, że odczuwać się daje wpływ warstwy powierzchniowej.<sup>8)</sup> Współczynnik temperatury staje się wtedy bardzo mały lub nawet ujemny.<sup>9)</sup>

W następujących tablicach porównywać będziemy wyniki doświadczeń Dewara i Fleminga (1893 i 1897) z wartościami, danymi przez wzór:

$$(16) \quad r_t = r_a \frac{2F+T}{2F+T_a} \cdot \frac{T}{T_a}$$

Oznaczać będziemy przez  $t$  temperaturę,  $r'_t$ —opór znaleziony,  $r_t$ —opór obliczony,  $\Delta$ —różnice w procentach,brane w stosunku do  $r_a$ ;  
 $\Delta = 100 \frac{r'_t - r_t}{r}$

<sup>8)</sup> Grubość tej warstwy oblicza Vincent dla srebra na 25  $\mu$ . C. R. 126—820 · 1898  
<sup>9)</sup> Oberbach, Wied. Ann. 46—265—1892; 47—353—1892; Langden, Phys. Rev. 11—40, 85—1900.

## 4. R t ę ć.

$$F = 234; T_a = T_{-50} = 223; r_a = r_{-50} = 2130; r_t = 0,01382182(2F + T)T$$

| $t$     | $r_t$ oblicz. | $r'_t$ znalez. | $\Delta$ | $t$     | $r_t$ oblicz. | $r'_t$ znalez. | $\Delta$ |
|---------|---------------|----------------|----------|---------|---------------|----------------|----------|
| - 50,3* | 2124          | 2127           | +0,1     | -121,0* | 1303          | 1316           | +0,6     |
| - 55,1* | 2068          | 2063           | -0,2     | -124,3* | 1267          | 1278           | +0,5     |
| - 60,5* | 2000          | 2000           | -0,0     | -134,4* | 1166          | 1177           | +0,5     |
| - 64,4* | 1951          | 1937           | -0,7     | -140,5* | 1099          | 1120           | +1,0     |
| - 69,8* | 1886          | 1874           | -0,6     | -147,5* | 1030          | 1057           | +1,3     |
| - 75,4* | 1818          | 1810           | -0,4     | -154,4* | 962           | 987            | +1,2     |
| - 80,9* | 1752          | 1746           | -0,3     | -157,4* | 933           | 962            | +1,4     |
| - 86,6* | 1686          | 1683           | -0,1     | -161,7* | 891           | 912            | +1,0     |
| - 92,1* | 1622          | 1620           | -0,1     | -170,2* | 811           | 810            | +0,0     |
| - 98,4* | 1551          | 1556           | +0,2     | -177,6* | 743           | 760            | +0,8     |
| -102,7* | 1502          | 1506           | +0,2     | -181,3* | 709           | 735            | +1,2     |
| -111,1* | 1410          | 1417           | +0,3     | -182,8* | 696           | 716            | +0,9     |
| -116,1* | 1355          | 1367           | +0,6     | -183,3* | 692           | 697            | +0,2     |

## III. Zmiana ustroju przy niskich temperaturach.

Opór elektryczny. — Rozszerzalność. — Termoelektryczność. — Ciepło właściwe. — Dysocjacja dodatkowa. — Wnioski.

Związki na zmianę rozszerzalności i oporu elektrycznego otrzymane zostały dla ciał jednoatomowych i stosują się tylko w tych granicach, w których ciała te pozostają jednoatomowymi.

Tymczasem znaczna liczba metali, uważanych przy temperaturze zwykłej za jednoatomowe, wykazuje przy niskich temperaturach nieregularności, uzasadniające przeprowadzenie zmiany ustroju analogicznej do zmiany ustroju żelaza, niklu i kobaltu przy wysokich temperaturach.

Kolejno porównywać będziemy opór elektryczny, rozszerzalność, zdolność termo-elektryczną i ciepło właściwe tych metali przy niskich temperaturach z własnościami żelaza i niklu (kobalt za mało jest jeszcze zbadany) w okolicach ich temperatury krytycznej. Nie posiadamy wystarczających danych, dotyczących zjawiska *Thomsona* oraz magnetyzmu przy niskich temperaturach.



Opór elektryczny.<sup>1)</sup> Już Macfarlane (1875) zauważył, że opór elektryczny żelaza zmienia się znacznie prędzej poniżej jego temperatury krytycznej, aniżeli powyżej tej temperatury. Knott (1885) robi te same spostrzeżenia dla niklu. Prace W. Kohlrauscha (1888), Hopkinsona (1888), Le Chateliera (1890), Morrisa (1897) i Harrisona (1902) potwierdziły i uzupełniły te spostrzeżenia.

Analogiczne zjawiska stwierdzone zostały dla kilku metali przy niskich temperaturach.

Wróblewski (1885) zauważył, że opór miedzi zmniejsza się przy niskich temperaturach stosunkowo znacznie prędzej, aniżeli przy temperaturze zwykłej, tak że zbliża się zapewne do zera przy temperaturze azotu wrzącego pod słabym ciśnieniem.

Olszewski (1895), określając temperaturę wrzenia wodoru platynowym termometrem oporu, kalibrowanym pomiędzy 0 i  $-208^{\circ}$ , popełnia błąd  $9^{\circ}$  z powodu zmiany kierunku krzywej oporu.

Holborn (1901), Travers i Gwyer zaznaczają, że platynowy termometr, kalibrowany przy wysokich temperaturach, nie może być ekstrapolowany dla niskich temperatur.

Dewar (1901 i 1904) znajduje, że pomiędzy temperaturami wrzenia tlenu i wodoru forma krzywych oporu większości metali tak się zmienia, że nie może już być przedstawiona wzorem parabolicznym.

Meilink (1904) twierdzi, że zmiana oporu platyny nie może być przedstawiona poniżej  $-197^{\circ}$  nawet przez wzór 3-go stopnia.

Fig. 1 przedstawia zmianę oporu żelaza według Morrisa (1897), niklu według Le Chateliera (1890) i miedzi według Dewara i Fleminga (1893), Dewara (1901) i Wróblewskiego (1885).

<sup>1)</sup> Wskazówki bibliograficzne umieszczone są w rozdz. IV-ym.

Zmiana oporu żelaza, niklu i miedzi.

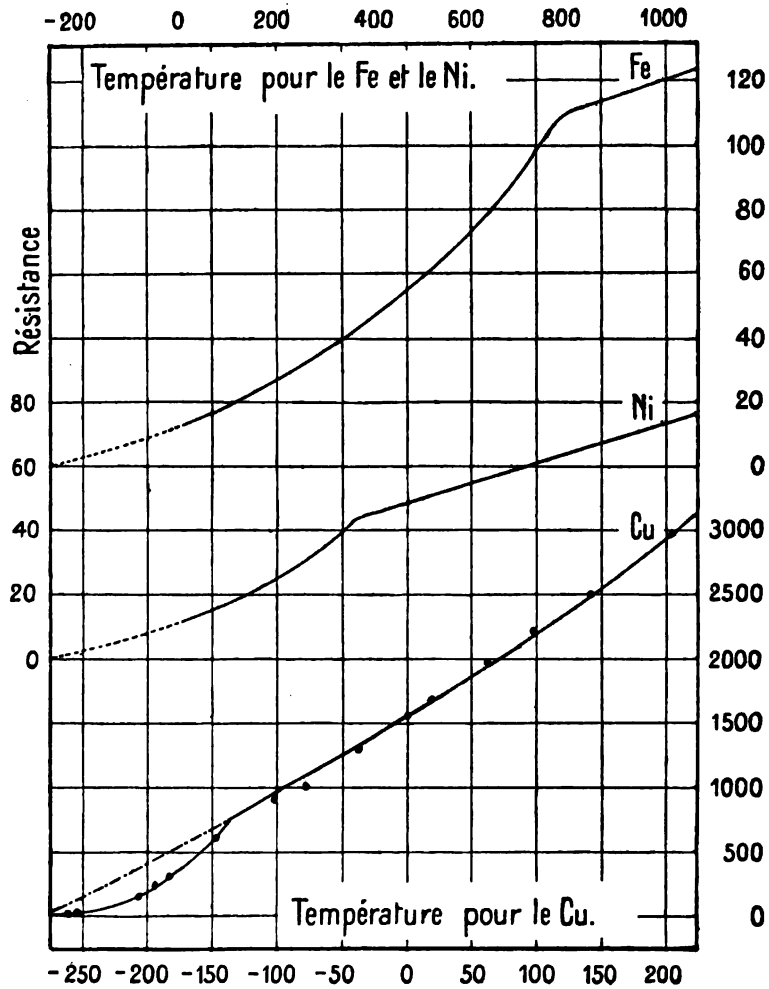


Fig. 1.

W tablicy I-ej dane Dewara i Wróblewskiego zastosowane zostały do jednostki oporu, użytej przez Dewara i Fleminga. Wartości kolumny ( $r_t$ ) obliczone są według wzoru  $\frac{r_t}{(2F+T)T} = \text{const.}$ ;  $\Delta$  ozna-

cza zboczenie oporu czyli daje w procentach różnice, odniesione do  $r_0$  pomiędzy wartościami znalezionymi i obliczonymi:  $\Delta = 100 \frac{r'_t - r_t}{2_0}$ .

TABLICA I.  
Zmiana oporu miedzi.

| t     | $r_t$ oblicz. | $r'_t$ znalezione    | $\Delta$ | t      | $r_t$ oblicz. | $r'_t$ znaleź.      | $\Delta$ |
|-------|---------------|----------------------|----------|--------|---------------|---------------------|----------|
| 205,0 | 2921          | 2927 Dewar i Fleming | +0,4     | -103,0 | 939           | 895 Wróblewski      | - 2,8    |
| 141,1 | 2480          | 2498                 | +1,2     | -146,0 | (691)         | 587 Wróblewski      | - 6,7    |
| 98,0  | 2191          | 2216                 | +1,6     | -183,0 | (483)         | 289 Dewar i Fleming | -12,4    |
| 60,0  | 1942          | 1961                 | +1,2     | -193,0 | (428)         | 222 Dewar           | -13,2    |
| 18,3  | 1676          | 1682                 | +0,4     | -205,9 | (312)         | 144 Dewar i Fleming | -14,0    |
| 0,6   | 1565          | 1564                 | $\pm 0$  | -253,0 | (107)         | 15 Dewar            | - 5,9    |
| -37,8 | 1328          | 1298                 | -1,9     | -258,0 | (78,4)        | 13,6 Dewar          | - 4,2    |
| -78,0 | 1085          | 1024                 | -3,9     |        |               |                     |          |

Tablica II-ga zawiera w dwóch pierwszych kolumnach współczynniki temperatury pomiędzy 0 i 100° obliczone i znalezione; w kolumnach następnym zboczenia oporu przy -183° i -253°. Wiemy, że ślady ciał obcych zmniejszają współczynnik temperatury metali. Różnice więc pomiędzy wartościami dwóch pierwszych kolumn dać mogą wyobrażenie o stopniu czystości ciała. Liczby kolumn następujących wskazują nam, że, pomimo zanieczyszczeń, opór większości metali zmniejsza się przy niskich temperaturach prędzej, niżby się tego spodziewać było można.

TABLICA II.  
Zboczenie oporu przy niskich temperaturach.

|    | Współczynnik temperatury od 0 do 100 |            | $\Delta$ zboczenie oporu |            | Autorowie              |
|----|--------------------------------------|------------|--------------------------|------------|------------------------|
|    | obliczony                            | znaleziony | przy -183°               | przy -253° |                        |
| Al | 0,0043                               | 0,0042     | -8,1                     | —          | Dewar i Fleming (1893) |
| Mg | 0,0043                               | 0,0038     | -7,1                     | —          |                        |
| Pt | 0,0040                               | 0,0038     | -5,5                     | -4,7       | Dewar (1904)           |
| Pd | 0,0040                               | 0,0035     | -3,8                     | -1,0       | "                      |
| Zn | 0,0045                               | 0,0041     | -3,2                     | —          | Dewar i Fleming (1893) |
| Ag | 0,0042                               | 0,0039     | -3,0                     | -2,9       | Dewar (1901)           |
| Sn | 0,0047                               | 0,0044     | -2,2                     | —          | Dewar i Fleming (1893) |
| Au | 0,0041                               | 0,0039     | -1,9                     | -3,6       | Dewar (1901)           |

Zboczenia oporu magnu, palladu i cynku są znacznie zmniejszone przez zanieczyszczenia. Złoto zmienia ustrój zapewne tylko pomiędzy  $-183^{\circ}$  i  $-253^{\circ}$ . Rtęć, ołów i kadm nie wykazują zmiany ustroju przy  $-183^{\circ}$  (nie posiadamy danych przy niższych temperaturach). Metale te mogą więc z lepszym skutkiem być użyte dla pomiarów niskich temperatur, aniżeli platyna, która, jak widzieliśmy, wykazuje liczne nieregularności.

**Rozszerzalność.** Gore<sup>2)</sup> znalazł, że żelazo, ogrzane do jasnej czerwoności i powoli oziębione, rozszerza się raptownie przy temperaturze krytycznej. Barret<sup>3)</sup> potwierdza to spostrzeżenie i znajduje podczas ogrzewania odpowiednie kurczenie się. Le Chatelier<sup>4)</sup>, Swedelius<sup>5)</sup>, Charpy i Grenet<sup>6)</sup> badają ilościowo te zjawisko dla żelaza i stali.

Dla niklu zjawisko Gore'a nie zostało spostrzeżone<sup>7)</sup>. Wobec tego, że nikiel trudniej otrzymać się daje w stanie czystym, aniżeli żelazo, brak kurczenia się przy temperaturze krytycznej mógłby być powodowany przez nieczystości, które zmniejszają zjawisko Gore'a i mogą je nawet znieść.<sup>8)</sup>

Wiemy (str. 4 i 5), że spójczownik rozszerzalności żelaza i niklu zmienia się poniżej temperatury krytycznej prędkiej, niż u ciał jednoatomowych. Powyżej tej temperatury rozszerzalność niklu jest normalna, żelazo niedostatecznie zostało zbadane.

Fig. 2 przedstawia rozszerzalność żelaza podczas ogrzewania i oziębiania według Swedeliusa.<sup>9)</sup>

Krzywa oporu elektrycznego żelaza nie wskazuje na kurczenie się przy temperaturze krytycznej. Zrozumiałem się to stanie, gdy zauważymy, że przy tej to temperaturze ma miejsce dysocjacja. Przed dysocjacją przestrzeń wolna składa się z dwóch części: ze spółobjętości właściwej, czyli przestrzeni wolnej pomiędzy molekułami oraz z przestrzeni pomiędzy atomami, tworzącymi molekułę. Tylko spółobjętość wpływa na opór elektryczny, gdyż przestrzeń pomiędzy atomami jest częścią składową molekuły. Po dysocjacji przestrzeń pomiędzy atomami, które się stały niezależnymi, wchodzi do spółobjętości. Opór powinienby więc wzrosnąć proporcjonalnie do tego wzrostu spółobjętości, nawet wtedy, gdyby objętość zewnętrzna się nie zmieniła. Kurczenie się równoważy tylko częściowo lub całkowicie ten wzrost spółobjętości.

<sup>2)</sup> Gore, Phil. Mag. (4)—38—59—1869; Proc. Roy. Soc. 17—260—1869; <sup>3)</sup> Barret, Phil. Mag. (4)—46—472—1873; <sup>4)</sup> Le Chatelier, C. R. 108—1096—1889; C. R. 129—131. 279, 331—1899; <sup>5)</sup> Swedelius, Phil. Mag. (5)—46—173—1898; <sup>6)</sup> Charpy i Grenet, C. R. 184—540, 598—1902; <sup>7)</sup> W. Kohlrusch, Wied. Ann. 33—58—1888; Harrison, Phil. Mag. (6)—7—626—1904; <sup>8)</sup> Nie należy utożsamiać kurczenia się żelaza podczas zmiany ustroju molekularnego z kurczeniem się stali przy oddzielaniu się węgla. Te ostatnie zjawisko dochodzi do maximum przy 0,8% węgla (Charpy i Grenet); <sup>9)</sup> Swedelius, L. ett. p. 186 fig. 18.

Dla niklu, o ile się on nie kurczy przy temperaturze krytycznej, oczekiwac należy zmiany oporu, silniejszej od zmiany spółośjętości.

Jeżeli istnieją punkty krytyczne przy niskich temperaturach, wpływać one winny na rozszerzalność.

Dla ciał, któreby się zachowywały, jak żelazo; rozszerzenie się przy temperaturze krytycznej (podczas oziębienia) winno nadać pozór anormalnego zmniejszenia spółośczynnika rozszerzalności.

Dla ciał, któreby się zachowywały, jak nikiel, spółośczynniki rozszerzalności wzrosłyby przy niskich temperaturach, zamiast się zmniejszać.

### Rozszerzalność żelaza.

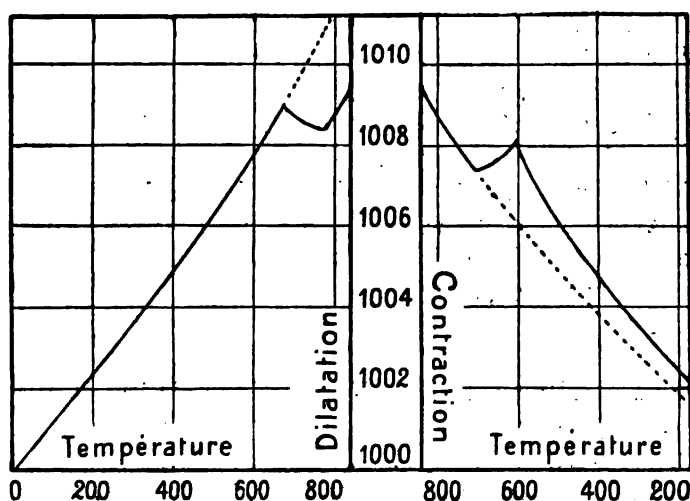


Fig. 2.

Nieznaczna ilość danych, które posiadamy na rozszerzalność przy niskich temperaturach, odpowiada pierwszemu przypadkowi.

Według Ayre s'a<sup>10)</sup> mamy:

|                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| dla srebra przy 75°,        | $\alpha = 1890 \cdot 10^{-6}$ , |
| „ „ pomiędzy —150° i —184°, | $\alpha = 1510 \cdot 10^{-6}$ , |
| „ glinu przy 59°,           | $\alpha = 2360 \cdot 10^{-6}$ , |
| „ „ pomiędzy —160° i —185°, | $\alpha = 1390 \cdot 10^{-6}$ . |

Według Scheela:<sup>11)</sup>

|                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| dla platyny przy 58°,     | $\alpha = 903 \cdot 10^{-6}$ ,  |
| „ „ pomiędzy 16° i —190°, | $\alpha = 799 \cdot 10^{-6}$ ,  |
| „ palladu przy 58°,       | $\alpha = 1199 \cdot 10^{-6}$ , |
| „ „ pomiędzy 16° i —190°, | $\alpha = 1025 \cdot 10^{-6}$ . |

<sup>10)</sup> Ayres, Phys. Rev. 20—38—1905; <sup>11)</sup> Scheel, Verh. Phys. Gesell. 9—1—1907.

Zakładając, że współczynnik rozszerzalności zmienia się przy niskich temperaturach tak samo, jak przy temperaturze zwykłej, otrzymujemy:

|            |                                          |                                 |
|------------|------------------------------------------|---------------------------------|
| dla srebra | między $-150^{\circ}$ i $-184^{\circ}$ , | $\alpha = 1600 \cdot 10^{-8}$ , |
| „ glinu    | „ $-160^{\circ}$ i $-185^{\circ}$ ,      | $\alpha = 1710 \cdot 10^{-8}$ , |
| „ platyny  | „ $16^{\circ}$ i $-190^{\circ}$ ,        | $\alpha = 848 \cdot 10^{-8}$ ,  |
| „ palladu  | „ $16^{\circ}$ i $-190^{\circ}$ ,        | $\alpha = 1105 \cdot 10^{-8}$ . |

Różnica pomiędzy obliczonymi i znalezionymi wartościami odpowiadaćby mogła raptownemu rozszerzeniu się o 0,015% dla srebra, o 0,055% dla glinu, o 0,010% dla platyny i o 0,016% dla palladu.

**Termoelektryczność.** Tait<sup>13)</sup> zauważył, że linia zdolności termoelektrycznej żelaza i niklu nie jest ciągła przy temperaturze krytycznej, gdzie się ostro załamuje. Le Chatelier<sup>13)</sup> potwierdza te spostrzeżenie Taita, Harrison<sup>14)</sup> i Belloc<sup>15)</sup> uzupełniają je.

Nieciągłość zdolności termoelektrycznej przy niskich temperaturach zauważona została dla kilku metali.

Wróblewski<sup>16)</sup>, używając dla pomiaru niskich temperatur parę i miedź—najzylber zauważył, że poniżej  $-193^{\circ}$  temperatury, określone termoelektrycznie, nie zgadzały się z danymi przez termometr wodorowy. Zdaniem Wróblewskiego różnica ta powodowana była przez to, że się wodór zbliżał do temperatury krytycznej i nie odpowiadał już prawu Gay-Lussaca.

Olszewski<sup>17)</sup> wykazał, że tłumaczenie to nie jest dopuszczalne i że przy niskich temperaturach miarodajnymi są wskazówki termometru wodorowego, a nie pary termoelektrycznej.

Już te zjawisko nasunęło przypuszczenie, że zdolność termoelektryczna miedzi zmienia się raptownie przy niskich temperaturach.

Doświadczenia Dewara i Fleminga<sup>18)</sup> wykazują, że zmiana zdolności termoelektrycznej (w stosunku do ołowiu) znacznej ilości metali nieregularną się staje przy niskich temperaturach. Zdolność termoelektryczna miedzi wzrasta przy  $-175^{\circ}$ , następnie mocno spada, przy  $-181^{\circ}$  przyjmuje wartość ujemną. Glin, zamiast wytworzyć punkt obojętny z ołowiem, zmienia kierunek, wykazując nieciągłość przy  $-45^{\circ}$  i  $-150^{\circ}$ . Linia magnuma wygląda krzywej wklęsłej w kierunku ołowiu; załamuje się ona w okolicach  $-80^{\circ}$ . Linia platyny wykazuje nieciągłość przy  $-100^{\circ}$  i  $-180^{\circ}$ .

<sup>13)</sup> Tait, Trans Edinb. Soc. 27 - 125 - 1872/3; Pogg. Ann. 152 - 427, 443 - 1874; <sup>13)</sup> Le Chatelier, C. R. 102 - 819 - 1886; <sup>14)</sup> Harrison, Phil. Mag. (6) - 3 - 177 - 1902; <sup>15)</sup> Belloc, C. R. 131 - 336 - 1900; Thèse de doctorat. Paris 1903; <sup>16)</sup> Wróblewski, Wiener Ber., Mat. nat. Kl. 91 - 2-o Abh. - 708 - 1885; <sup>17)</sup> Olszewski, Wied. Ann. 81 - 71 - 1887; <sup>18)</sup> Dewar i Fleming, Phil. Mag. (5) - 40 - 95 - 1895; nieciągłość widoczniejszą się staje przy zamianie siły elektrycznej na zdolność termoelektryczną.

H o l b o r n<sup>19)</sup> znajduje, że zdolność termoelektryczna platyny nieregularną się staje poniżej  $-100^{\circ}$ . Od tej temperatury krzywa oporu elektrycznego platyny również zmienia kierunek.

Ciepło właściwe. Żelazo pochłania ciepło (5,3 kal.) w pasie krytycznym w okolicach  $830^{\circ}$ , ale wydziela ciepło (od 4 do 6 cal.) przy temperaturze krytycznej dodatkowej przy  $1200^{\circ}$ .<sup>20)</sup>

Nikiel pochłania ciepło (4,6 kal.) w pasie krytycznym w okolicach  $370^{\circ}$ .<sup>20)</sup>

Tablica III wskazuje ciepło właściwe metali przy niskich temperaturach według B e h n a.<sup>21)</sup>  $C$  oznacza ciepło właściwe atomowe pomiędzy  $18^{\circ}$  i  $100^{\circ}$ .  $C'$  pomiędzy  $18^{\circ}$  i  $-79^{\circ}$ ;  $C''$  pomiędzy  $-79^{\circ}$  i  $-186^{\circ}$ .  $D$  i  $D'$  oznaczają odpowiednie zmniejszenia ciepła właściwego pomiędzy pierwszym i drugim okresem oraz pomiędzy drugim i trzecim okresem;  $D=C-C'$ ,  $D'=C'-C''$ .

TABLICA III.

Zmiana ciepła właściwego przy niskich temperaturach.

| metal | C<br>od $18^{\circ}$ do $100^{\circ}$ | $D=C-C'$ | $D'=C'-C''$ | metal | C<br>od $18^{\circ}$ do $100^{\circ}$ | $D=C-C'$ | $D'=C'-C''$ |
|-------|---------------------------------------|----------|-------------|-------|---------------------------------------|----------|-------------|
| Fe    | 6,3                                   | 0,7      | 1,6         | Pd    | 6,3                                   | 0,3      | 0,8         |
| Ni    | 6,4                                   | 0,6      | 1,5         | Zn    | 6,1                                   | 0,3      | 0,6         |
| Cu    | 6,0                                   | 0,4      | 1,1         | Ag    | 6,0                                   | 0,3      | 0,5         |
| Al    | 6,0                                   | 0,7      | 1,1         | Sn    | 6,5                                   | 0,4      | 0,3         |
| Mg    | 6,1                                   | 0,4      | 1,1         | Cd    | 6,3                                   | 0,3      | 0,4         |
| Pt    | 6,3                                   | 0,2      | 0,7         | Pb    | 6,4                                   | 0,2      | 0,2         |

Widzimy, że ciepło właściwe najmocniej się zmienia u metali, które wykazują najsilniejsze nieregularności przy zmianie oporu elektrycznego, mianowicie u żelaza i niklu, do których się zbliżają miedź, glin i magn. Metale te nie pochłaniają więc ciepła, możliwym jest jednak wydzielanie ciepła, podobnie jak żelazo przy  $1200^{\circ}$ .

Stosowanie metody pyrrometrycznej, użytej przez O s m o n d a przy badaniu przemian żelaza i stali, wykazać by mogło, czy istnieje takie wydzielanie ciepła przy niskich temperaturach.

<sup>19)</sup> H o l b o r n, Ann. d. Phys. (4)—6—251—1901; <sup>20)</sup> P l o n c h o n, Ann. chim. et phys. (6)—11—33—1887; P l o n c h o n oznacza temperatury krytyczne nieco niżej, niż nowocześni badacze; <sup>21)</sup> B e h n, Ann. d. Phys. (4)—1—257—1900; <sup>22)</sup> O s m o n d, C. R. 108—743, 1135—1886;

**Dysocjacja dodatkowa.** Zmiana ustroju przy niskich temperaturach może być niezupełna dla niektórych ciał i wymagać dysocjacji dodatkowej przy temperaturze wyższej, podobnie jak żelazo przy 1200°.

Gore znajduje dla miedzi ogrzanej do czerwoności nieregularną rozszerzalność, której towarzyszy lekkie kurczenie się.

Le Chatelier wskazuje metodą oporu elektrycznego punkt krytyczny dla cynku przy 360°.

Harrison twierdzi, że krzywa oporu miedzi wykazuje wklęsłość powyżej 500°.

Zmiana oporu elektrycznego i współczynnika rozszerzalności winna być dla ciał niezupełnie zdysocjowanych nieco większa, niż dla ciał jednoatomowych. Tak więc współczynnik temperatury miedzi elektrolitycznej pomiędzy 0 i 100° zbliża się do 0,0043, gdy jego wartość teoretyczna jest 0,0041. Zmiana współczynnika rozszerzalności miedzi też wydaje się być nieco większą, niż u ciał jednoatomowych.

Dysocjacja dodatkowa winna powodować lekkie kurczenie się lub opóźnienie w rozszerzalności, co włączone do wyników ogólnych, wywołać może wrażenie, że współczynnik rozszerzalności przy wysokich temperaturach mniej się zmienia, niż przy temperaturze zwykłej.

Zjawisko to daje się zauważyć dla pewnej liczby ciał, bez tej dokładności jednak, która niezbędna jest dla ścisłej klasyfikacji.

**Wnioski.** Możemy więc rozszerzyć i uogólnić wnioski, do których doszedł był Le Chatelier: „metale z punktu widzenia zmian molekularnych zachowują się zupełnie tak samo, jak inne ciała, które Chemia bada; czyli zmiana ustroju jest albo raptowna i metal wtedy się zachowuje, jak wszystkie ciała krystaliczne, lub stopniowa w przypadku aliaży, które się zachowują, jak mieszaniny amorfne”.<sup>23)</sup>

Metale nie zmieniają swego wyglądu przy zmianie ustroju, jak na przykład częstokroć metaloidy, lecz zmiana ich własności fizycznych jest niemniej głęboka.

Niektóre metale pozostają zapewne wieloatomowymi aż do temperatury topienia lub nawet powyżej (Bi, Sb, In, Tl). Inne (Fe, Co, Ni) nie dysocjują się, aż przy wysokich temperaturach, lecz większość metali zmienia swój ustrój całkowicie lub prawie całkowicie już pomiędzy —190° i —100°.

Wzory, ustalone na zmianę oporu i rozszerzalności, są stosowalne tylko dla ciał całkowicie lub prawie całkowicie zdysocjowanych. Poniżej tem-

<sup>23)</sup> Gore Phil. Mag. (4)—38—63—1869; <sup>21)</sup> Le Chatelier Jour. de phys. (2)—10—369—1891; <sup>22)</sup> Harrison, Phil. Mag. (6)—3—193—1902.



peratury krytycznej rozszerzalność i opór elektryczny przedstawione być winny przez odrębne wzory.

Sądzymy wszakże, że ogólna zasada proporcjonalności pomiędzy oporem elektrycznym i spójnością pozostaje prawdziwa nawet dla metali wieloatomowych.

#### IV. Bibliografia.

(1821—1905).

Literatura, dotycząca oporu właściwego i zmiany oporu metali czystych, bardzo liczna, porozrzucana jest po rozmaitych pismach periodycznych. Zwykle źródła bibliograficzne dają o niej tylko przybliżone i nie zawsze poprawne pojęcie. Uważamy więc za pożyteczne wskazać prace, któremi posługiwaliśmy się i które stanowią literaturę prawie zupełną tego przedmiotu.

Tytuły prac, których nie mogliśmy dostać w oryginale, umieszczone są w nawiasie z zaznaczeniem, gdzie te prace zostały cytowane lub streszczone.

Używać będziemy następujących skrótów: RS.—opór właściwy;  $R_0$  i  $R_t$ —opory przy zerze i temperaturze  $t$ ;  $C_0$  i  $C_t$ —przewodnictwo (odwrotność oporu) przy zerze i temperaturze  $t$ ; T—temperatura bezwzględna =  $273+t$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ —spółczynniki doświadczalne.

- 1821 Humphry Davy, Phil. Trans. Roy. Soc. 1821—I-a część p. 430 (RS. Ag, Au, Cu, Fe, Pb, Pd, Pt; doświadczenia ilościowe nad zmianą oporu Pt zależnie od temperatury).
- 1826 M. Becquerel, Ann. chim. et phys. (3)—32—420—1826 (RS. Ag, Au, Cu, Fe, Hg, Na, Pb, Pt, Sn, Zn).
- 1827 Harris, Phil. Trans. Roy. Soc. 1827—1-a część—p. 18 (RS. Ag, Au, Cu, Fe, Pb, Pt, Sn, Zn względem elektryczności statycznej).
- 1829 Pouillet, (Eléments de physique expérimentale v. 1—p. 754) Pogg. Ann. 15—91—1829 (RS. Ag, Au, Cu, Fe, Pt).
- 1833 Christie, Phil. Trans. Roy. Soc. 1835—I-a część p. 133 (RS. Ag, Au, Cu, Fe, Pb, Pt, Sn, Zn).
- Forbes (Proc. Edinb. Soc. 1—5—1833) Trans. Edinb. Soc. 23—133—1861/2. (Stosunek pomiędzy przewodnictwem elektrycznym i termicznym).
- 1835 Lenz Pogg. Ann. 34—418—1835. (Pierwsze doświadczenia ilościowe nad zmianą oporu elektrycznego; Ag, Cu, Fe, Pt, od 0 do 200°; wzór wadliwy  $C_t = C_0(1 - at + bt^2)$  daje maximum oporu pomiędzy 300° i 400°).
- 1837 Pouillet, C. R. 4—795—1837 (RS. Co, Pd, Pt).
- 1838 Lenz, Pogg. Ann. 44—342—1838; 45—105—1838 (RS. Bi, Hg, Sb, Au, Pb, Sn od 15° do 200°; wzór poprzedni).

- Riess, Pogg. Ann. **45**—1—1838 (RS. Ag, Au, Cd, Cu, Fe, Ni, Pb, Pd, Pt, Sn).
- 1846** Ed. Becquerel, Ann. chim. et phys. (3)—**17**—242—1846; C. R. **22**—413—1846; (Ag, Au, Cd, Cu, Hg, Fe, Pb, Pt, Sn, Zn od 10° do 100°; wzór liniowy  $R_t = R_0(1+at)$ ).
- 1847** Buff, Jahresberichte f. **1847** p. 286 (RS. Ag i Cu).
- 1848** J. Müller (in Halle), Pogg. Ann. **73**—434—1848 (Zależność pomiędzy ciepłem właściwym i współczynnikiem temperatury; Fe, Hg i Zn od 0 do 150°).
- 1853** G. Wiedemann i Franz, Pogg. Ann. **89**—497—1853 (Stosunek pomiędzy przewodnictwem elektrycznym i termicznym).
- 1855** Sainte-Claire Deville, Ann. chim. et phys. (8)—**43**—10—1885 (RS. Al i Fe).
- 1856** Lamy, C. R. **43**—695—1856) Ann. chim. et phys. (3)—**51**—316—1856 (RS. K i Na).
- Poggenдорф, Pogg. Ann. **97**—643—1856 (RS. Al).
- Matthiessen, Phil. Mag. (4)—**12**—199—1856 (K i Na od 0 do 12°; wzór Lenza).
- 1857** Matthiessen, Phil. Mag. (4)—**13**—81—1857; Pogg. Ann. **100**—177—1857 (K i Na od 0° do 120°; RS. Ca, Li, Mg, Sr).
- Buff, Lieb. Ann. **102**—265—1857 (RS. Ag, Al, Cu, Fe).
- 1858** J. Müller (in Wessel), Pogg. Ann. **103**—176—1858 (Cu, Fe, Pt przy wysokich temperaturach).
- Matthiessen, Phil. Trans. Roy. Soc. **148**—383—1858; Pogg. Ann. **103**—428—1855; (RS. Ag, Al, Au, Bi, Cd, Cu, Fe, Pb, Pd, Pt, Sb, Sn, Zn).
- Arndsen, Pogg. Ann. **104**—1—1858 (Ag, Al, Cu, Fe, Pb, Pt od 0° do 160°; wzór liniowy).
- Clausius, Pogg. Ann. **105**—650—1858. (Wygłasza hipotezę, że opór metali jest proporcjonalny do temperatury bezwzględnej).
- Arndsen, Pogg. Ann. **108**—148—1858 (RS. Ni).
- 1859** G. Wiedemann, Pogg. Ann. **108**—393—1859. (Przewodnictwo elektryczne; p. 405 (RS. Cu, Sn, Zn).
- 1860** W. Siemens, Pogg. Ann. **110**—1—1860. (Proponuje Hg jako jednostkę oporu; zmiana oporu Ag i Pt; wzór liniowy).
- Matthiessen, Phil. Trans. Roy. Soc. **150**—175—1860; Pogg. Ann. **109**—526—1860 (RS. Au).
- Matthiessen, Phil. Trans. Roy. Soc. **150**—85—1860; Pogg. Ann. **110**—222—1860. (RS. różnych gatunków miedzi).
- Schröder von der Kolk, Pogg. Ann. **110**—452—1860 (Hg od 10° do 90°).
- 1861** W. Siemens, Phil. Mag. (4)—**21**—25—1861 (patrz 1860 r.).
- W. Siemens, Pogg. Ann. **113**—91—1861 (Hg i Cu od 0° do 100°; Sn od 0° do 280°; przyjmuje hipotezę Clausiusa; wzór liniowy).
- 1862** Neumann, Ann. chim. et phys. (3)—**66**—183—1862. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne, p. 185; RS. Cu, Fe, Zn).
- Matthiessen i v. Bose, Phil. Trans. **152**—1—1862; Pogg. Ann. **115**—353—1862 (Ag, As, Au, Bi, Cd, Cu, Pb, Sb, Sn, Zn od 0° do 100°; sądzi, że współczynniki temperatury są jednakowe dla wszystkich metali czystych; wzór Lenza).

- 1863 De la Rive, C. R. 56—588—1863 (Tl od 15° do 50°).  
Matthiessen i Vogt, Phil. Trans. 153—369—1863; Pogg. Ann. 118—431—1863; (Co, Fe, Ni, Tl od 0° do 100°).
- 1871 C. W. Siemens, Proc. Roy. Soc. 19—443—1871; Les Mondes, 24—313—1871; 28—305—1872. (Proponuje mierzenie wysokich temperatur zmianą oporu elektrycznego; Cu, Fe, Pt przy wysokich temperaturach; wzór  $R_t = R_0(a + bT^{\frac{1}{2}} + CT)$ ).
- 1872 L. Lorenz, Pogg. Ann. 147—429—1872 (p. 434—przewodnictwo elektryczne i termiczne).
- 1873 Benoit, Études sur la résistance électrique des métaux (Rozprawa doktorska). Paris, 1873; C. R. 76—342—1873; Phil. Mag. (4)—45—314—1873 (Ag, Al, Au, Cd, Cu, Fe, Hg, Mg, Pl, Pd, Pt, Sn, Tl, Zn od 0° do wysokich temperatur, niektóre do 800°; wzór paraboliczny  $R_t = R_0(1 + at + bt^2)$ ).
- 1875 Macfarlane, (Proc. Edinb. Soc. 8—626—1875); Wiedemann, Elektrizität, Braunschweig 1893 v. 1 p. 494. (Opór żelaza przy wysokich temperaturach).  
C. W. Siemens, (Trans. Soc. Telegr. Eng. 1875); Callendar, Phil. Mag. (5)—82—104—1891. (Termometr oparty na zmianie oporu).
- 1878 Auerbach, Wied. Ann. 5—289—1878. (Zależność pomiędzy magnetyzmem i współczynnikiem temperatury żelaza).  
Tait, Trans. Edinb. Soc. 28—717—1877/8. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne; p. 739 RS. Cu, Fe, Pb).
- 1879 Auerbach, Wied. Ann. 8—479—1879. (Stosunek pomiędzy oporem elektrycznym i ciepłem właściwym).
- 1880 H. F. Weber (aus Zürich). Berl. Ber. 1880 p. 457. (Związek pomiędzy przewodnictwem elektrycznym i termicznym oraz ciepłem właściwym; pp. 469 i 475. RS. Ag, Bi, Cd, Cu, Sn, Zn).
- 1881 Kirchhoff i Hansemann, Wied. Ann. 13—406—1881. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne p. 410. RS. Cu, Fe, Pb, Sn, Zn).  
L. Lorenz, Wied. Ann. 13—422—592—1881. (Zmiana stosunku pomiędzy przewodnictwem elektrycznym i termicznym; p. 598 Al, Bi, Cu, Cd, Fe, Mg, Pb, Sb, Sn, od 0° do 100°).  
Ehrhardt, Wied. Ann. 14—404—1881 (In od 0° do 110°).
- 1882 Nichols, Phil. Mag. (5)—13—38—1882. (Rozszerzalność i opór Pt przy wysokich temperaturach).
- 1883 Strouhal i Barus, Wied. Ann. 20—525—1883. (Fe i stal od 0° do 35°).  
Rayleigh i Sidgwich, Phil. Trans. Roy. Soc. 174—173—1883. (Hg od 0° do 12°).
- 1884 Mascart, Neville i Benoit, Jour. de phys. (2)—3—230—1884. (Hg od 0° do 100°).  
Leduc, J. de phys. (2)—3—133, 362—1884 (Bi od 12° do 60°).  
Righi, J. de phys. (2)—3—355—1884. (RS. Bi).  
Strouhal i Barus, Abh. Böm. Gesell. d. Wiss. (6)—12—mat. nat.—N14—1883/4. (Amalgamy srebra; p. 15, RS. Ag, Au, Cu, Pt, Zn).  
Emo, (Atti R. Inst. Veneto (6)—2—43—1884), Beibl. 9—265—1885. (Ag, Al, Au, Cu, Fe, Mg, Ni, Pb, Pd, Pt, Sn, Zn, od 0° do 300°; wzór C. W. Siemensa.

- 1885** Cailletet i Bouty, C. R. **100**—1188—1885. (Ag, Al, Cu, Fe, Hg, Mg, Sn, od 0° do -100°; pierwsze doświadczenia przy niskich temperaturach).  
 Wróblewski, C. R. **101**—160—1885; Wied. Ann. **26**—27—1885. (Cu od 0° do -200°).  
 Erhardt, Wied. Ann. **24**—229—1885. (Pt od 0° do 600°).  
 L. Lorenz, Wied. Ann. **25**—1—1885. (Hg od 0° do 35°).  
 C. L. Weber, Wied. Ann. **25**—245—1885. (Hg od 0° do -55°).  
 Streckler, Wied. Ann. **25**—252, 456—1885. (Hg od 0° do 20°).  
 Schleiermacher, Wied. Ann. **26**—287—1885. (Graficzne przedstawienie oporu Pt od 0° do 1000°).  
 Wehler, (Central-ZS. f. Opt. u. Mech. **6**—26—1885) (i Beibl. **9**—525—1885. (RS. Ag, Al, Au, Cu, Ni, Pb, Sb, Sn, Zn).  
 Glazebrook, Phil. Mag. (5)—**20**—343—1885. (Hg od 0° do 150°).  
 Poloni, (N. Cinm. (3)—**15**—279—1885; **16**—42—1885) Beibl. **9**—743—1885. (Zależność pomiędzy sprężystością i oporem elektrycznym).
- 1886** Upenborn, (Centralbl. f. Eektrot. **7**—564—1886) Beibl. **10**—772—1886. (Ag, Al, Au, Bi, Cu, Fe, Hg, Ni, Pb, Pt, Sn, Zn, od 0° do 100°).  
 Humpidge, Proc. Roy. Soc. **39**—15—1885/6. (Pt od 0° do 940°).  
 Knott, Trans. Edinb. Soc. **33**—187—1885/6. (Ni, Pd, Pt od 0° do 300°; wzór wykładniczy).
- 1887** L. Meyer, Théories modernes de la chimie, Paris 1887 p. 174. (Opór właściwy jest funkcją peryodyczną ciężaru atomowego).  
 Oberbeck i Bergmann, Wied. Ann. **31**—792—1887. (RS. Al, Cu, Cd, Bi, Mg, Pb, Sb, Sn, Zn wagą indukcyjną).  
 Krüger, Wied. Ann. **32**—572—1887. (Przewodnictwo cienkich warstw Ag, Al, Au).  
 Callendar, Phil. Trans. Roy. Soc. (A)—**178**—161—1887. (Wprowadza pojęcie temperatury platynowej  $\tau = \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0}$ , skąd  $t - \tau = a \left\{ \left( \frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right\}$ ; opór Pt i Fe od 0° do 600°, Sn od 0° do 200°).  
 Preece, (Brit. Ass. Repp. Manchester 1887) Beibl. **12**—73—1888. (RS. Ag, Cu, Fe).
- 1888** W. Kohlrausch, Wied. Ann. **33**—42—1888. (Graficzne przedstawienie zmiany oporu Fe i Ni przy wysokich temperaturach).  
 Kundt, Wied. Ann. **34**—469—1888. (Stosunek pomiędzy szybkością czerwonego światła w metalach i ich przewodnictwem elektrycznym).  
 Grünmach, Wied. Ann. **35**—764—1888. (Hg od 20° do -90°).  
 Glazebrook i Fitzpatrick, Phil. Trans. Roy. Soc. (A)—**179**—351—1888. (Hg od 0° do 100°).  
 Hopkinson, Proc. Roy. Soc. **45**—457—1888. (Graficzne przedstawienie zmiany oporu Fe od 20° do 1000°).  
 Batelli, (Atti Acc. di Torino **22**—169—1888) Beibl. **12**—589—1888. (Ni od 0° do 360°).
- 1889** E. v. Aubel, C. R. **108**—1102—1889; Ann. chim. et phys. (6)—**18**—433—1889; Phil. Mag. (5)—**38**—342—1889. (Bi od 0° do 100°).  
 Tomlinson, Lum. Electr. **34**—591—1889. (Fe od 17° do 100°).

- 1889 **K u n d t**, Wied. Ann. **36**—820—1889. (Związek pomiędzy zmianą szybkości światła w metalach i zmianą ich przewodnictwa zależnie od temperatury).
- C. L. W e b e r**, Wied. Ann. **37**—587—1889. (Krytyka doświadczeń **G r ü n m a c h a**).
- G r ü n m a c h**, Wied. Ann. **37**—508—1889. (Odpowiedź **W e b e r o w i**).
- G i e s e**, Wied. Ann. **37**—576—1889. (Elektroniczna teoria elektryczności, p. 592—przewodnictwo metali).
- C. L. W e b e r**, Wied. Ann. **38**—227—1889. (Dalszy ciąg polemiki z **G r ü n m a c h e m**).
- H o p k i n s o n**, Phil. Trans. Roy. Soc. (A)—**180**—443—1889. (Patrz 1888 r.).
- 1890 **B e r g e t**, C. R. **110**—76—1890. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne; p. 77. RS. Cu, Fe, Hg, Pb, Sb, Sn, Zn).
- L e C h a t e l i e r**, C. R. **110**—283—1890. (Fe od 0° do 1000°).
- L e C h a t e l i e r**, C. R. **111**—454—1890. (Ag, Cu, Fe, Ni, Pt, Zn od 0° do 1000°; wzór liniowy).
- C h w o l s o n**, Mém. Acad. St.-Petersbourg (7)—**37**—N12—1890. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne Cu i Fe).
- L e n a r d**, Wied. Ann. **39**—619—1890. (Bi od 0° do 100°).
- P a s s a v a n t**, Wied. Ann. **40**—505—1890. (Hg od 0° do 34°).
- T o m l i n s o n**, Phil. Mag. (5)—**29**—77—1890 (Patrz 1889).
- V i n c e n t i n i i O m o d e i**, Atti Acc. di Torino, **25**—30—1889/90. (Bi, Cd, Pb, Sn, Tl od 0° do 350°; wzór 3-go stopnia).
- 1891 **L e C h a t e l i e r**, J. de phys. (2)—**10**—369—1891 (Patrz C. R. **111**—1890).
- L e d u c**, J. de phys. (2)—**10**—112—1891. (Bi od 0° do 150°, nieczysty).
- J o n e s**, Proc. Roy. Soc. **48**—434—1891 (RS. Hg).
- K n o t t**, Proc. Edinb. Soc. **18**—303—1890/91. (Co od 0° do 250°; wzór wykładniczy).
- 1892 **G u i l a u m e**, C. R. **115**—414—1892. (Hg od 0° do 61°).
- K r i e c h g a u e r i J a e g e r**, Wied. Ann. **47**—513—1892. (Hg od 15° do 28°).
- D e w a r i F l e m i n g**, Phil. Mag. (5)—**34**—326—1892. (Ag, Al, Au, Cu, Fe, Ni, Pt, Sn od 100° do —183°).
- O b e r b e c k**, Wied. Ann. **46**—265—1892; **47**—353—1892. (Przewodnictwo cienkich warstw srebra).
- 1893 **E. v. A u h e l**, J. de phys. (3)—**2**—407—1893. (Bi od 0° do 100°).
- G u i l l a u m e**, C. R. **116**—51—1893. (O doświadczeniach **K r i e c h g a u e r a i J a e g e r a**).
- K e n n e l l y i F e s s e n d e n**, Lum. Electr. **50**—194—1893. (Cu od 20° do 250°).
- D e H e e n**, La Chaleur, Liège (1893) p. 337. (Związek pomiędzy przewodnictwem i rozszerzalnością).
- O s t w a l d**, ZS. f. phys. Chem. **11**—515—1893. (Objaśnia opór termoelektryczność).
- G. W i e d e m a n n**, Elektrizität, Braunschweig, 1893 s. 1 p. 471. (Związek pomiędzy współczynnikiem temperatury i temperaturą topienia).
- L a g a r d e**, Elektrotechn. ZS. **14**—531—1893. (Cu elektrolityczna od 0° do 40°)

- Dewar i Fleming, Phil. Mag. (5)—**36**—271—1893. (Ag, Al, Au, Cu, Cd, Fe, Mg, Ni, Pb, Pd, Pt, Sn, Tl, Zn od 200° do —183°; opór zbliża się do zera przy zerze bezwzględnej).
- 1894** Vachy, C. R. **118**—1324—1894. (Istota przewodnictwa metalicznego).  
Ebert, Wied. Ann. **51**—268—1894; **52**—417—1894. (Teoria elektryczności według Maxwella; **51**—296 i **52**—428—przewodnictwo metali).  
Haas, Wied. Ann. **52**—673—1894. (Cu, Zn i ich aliaże).  
Swan i Rhodin, Proc. Roy. Soc. **56**—64—1894. (Cu elektrolityczna od 12° do 90°).  
Burton, Phil. Mag. (5)—**38**—55—1894. (Istota przewodnictwa metalicznego).
- 1895** Holborn i Wien, Wied. Ann. **56**—379—1895. (Ir, Pd, Pt, Rh, od 0° do 100°; mierzenie wysokich temperatur).  
Dorn, Abh. d. Phys. Techn. Reichsanst. **2**—257—1895. (Streszcza prace nad oporem Hg).  
Schweidler, Wiener Ber., Mat.-nat. Kl. **104**—II Abt.—273—1895. (Hg od 8° do 45°).  
Dewar i Fleming, Phil. Mag. (5)—**40**—303—1895. (Bi od 100° do —210°, nieczysty).  
Olszewski, Phil. Mag. (5)—**40**—202—1895. (Pt—termometr oporowy od 0° do —208°).
- 1896** Scott i Richards, Eclair. electr. **8**—412—1896. (Al od 25° do 80°).  
Holborn i Wien, Wied. Ann. **59**—213—1896. (Pt—termometr od 100° do —190°; podaje dla Pt wzór  $t=a+bR_t+cR_t^2$ ).  
Ihle, (Jahresber. d. K. Gymn. Dresden-Neustadt **22**—3—1896) Landolt-Bernstein's Tabellen, Berlin 1905 p. 716 i nast. (Ag, Au, Cd, Fe, Mg od 20° do 100°).  
Witkowski, Phil. Mag. (5)—**41**—312—1896. (Pt i Fe od 0° do —180°).  
Fleming, (Roy. Inst. Great Brit. 1896) Beibl. **20**—885—1896. (Ag, Al, Au, Bi, Cd, Cu, Fe, Hg, Ni, Mg, Pd, Pb, Pt, Sn, Tl, Zn od 0° do 100°).
- 1897** Houllévigue, J. de phys. (3)—**6**—246—1897. (RS. żelaza elektrolitycznego).  
Morris, Phil. Mag. (5)—**44**—213—1897. (Fe od 0° do 1200°, zwłaszcza przy temperaturze krytycznej).  
Dickson, Phil. Mag. (5)—**44**—445—1897. (Podaje dla Pt—termometru wzór paraboliczny  $(R_t-a)^2=c(t+b)$ ).  
Dewar i Fleming, Proc. Roy. Soc. **60**—72—1896/7 (czysty Bi od 60° do —186°).  
Dewar i Fleming, Proc. Roy. Soc. **60**—76—1896/7. (Hg od 35° do —183°).
- 1898** Vincent, C. R. **126**—820—1898. (Przewodnictwo cienkich warstw Ag).  
Riecke, Wied. Ann. **66**—353. 545—1898. (Elektryczna teoria elektryczności; p. 377—opór metali).  
Liebenow, ZS. f. Elektrochemie, **4**—201, 217, 458—1897/8. (Objasnia termoelektrycznością opór elektryczny).  
Silberstein, Prace matemat.-fizyczne **9**—103—1898. (Teoria przewodnictwa metali).
- 1899** Callendar, Phil. Mag. (5)—**47**—191—1899. (Przegląd krytyczny wzorów, używanych dla termometrów oporowych).

- 1899** Waidner i Millory, Phil. Mag. (5)—48—1—1899. (Porównanie Pt—termometru z termometrem Rowlanda i normalnym termometrem).
- 1900** Vincent, J. de phys. (3)—9—78—1900. (Patrz 1898 r.).  
 Drude, Ann. d. Phys. (4)—4—566—1900. (Elektroniczna teoria elektryczności; p. 575—o przewodnictwie).  
 Reinganum, Ann. d. Phys. (4)—2—398—1900. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne według teorii elektronów).  
 Eckhardt i Graefe, ZS. anorg. Chem. 23—378—1900. (RS. Cs).  
 Jaeger i Disselhorst, Abh. de Phys. Techn. Reichsanst. 3—269—1900. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne; p. 355 Ag, Al, Au, Bi, Cd, Cu, Ni, Pd, Pt, Sn od 0° do 100°).  
 Longden, Phys. Rew. 11—40, 85—1900. (Przewodnictwo cienkich warstw Ag, Au, Pt).  
 Fleming, Proc. Roy. Soc. 66—50—1900. (Ni elektrolityczny od 100° do —183°).  
 Tory, Phil. Mag. (5)—50—421—1900. (Pt—termometry rozmaitych stopni czystości od 0° do 1000°).  
 Harker i Chappius, Phil. Trans. Roy. Soc. (A)—194—37—1900. (Porównanie Pt—termometru z termometrem gazowym od 0° do 460°).  
 J. J. Thomson, Nature (angielska) 62—31—1900. (Elektroniczna teoria oporu metali).
- 1901** Holborn, Ann. d. Phys. (4)—6—242—1901. (Pt od —78° do —190° i od 300° do 500°).  
 Reichardt, Ann. d. Phys. (4)—6—832—1001 (Co i Cu i ich aliaże od 20° do 160°).  
 E. v. Aubel, J. de Phys. (3)—10—389—1901; Phys. ZS. 2—371—1901. (Krytyka doświadczeń Dewara i Fleminga).  
 Dewar, Proc. Roy. Soc. 68—360—1901 (Ag, Au, Cu, Fe, Pt od 100° do —253°).
- 1902** Hagen i Rubens, Ann. d. Phys. (4)—8—432—1902. (Związek pomiędzy przezroczystością i oporem elektrycznym Ag, Au, Pt).  
 Streintz, Ann. d. Phys. (4)—8—847—1902. (Spółczynnik temperatury jest funkcją peryodyczną ciężaru atomowego, równoległą do temperatury topienia).  
 Schulze, Ann. de Phys. (4)—9—555—1902. (Przewodnictwo elektryczne i termiczne amalgam; p. 579, Rd. Bi, Pb, Sn, Zn).  
 Lownds, Ann. d. Phys. (4)—9—681—1902. (Bi krystaliczny od 15° do —186°).  
 Benediks, ZS. f. phys. Chem. 40—545—1902 (RS. żelaza; wpływ zanieczyszczeń).  
 Harrison, Phil. Mag. (6)—3—177—1902 (Fe i Ni od 1050° do —200°).  
 Harrison, Nature (angielska) 66—343—1902 (Fe przy —253°).  
 Williams, Phil. Mag. (6)—3—515—1902. (Teoria przewodnictwa metali; wzór  $R_t = R_0(1 + 0,00366t)(1 + at)$ , gdzie  $a$  zależy od rozszerzalności i ciepła właściwego).
- 1903** Hagen i Rubens, Ann. de Phys. (4)—11—873—1903. (Zależność pomiędzy zdolnością emisyjną i przewodnictwem metali).  
 Mewes, Elektrochem. ZS. 9—80—1902/3. (Opór zmienia się proporcjonalnie do spółobjętości według wzoru wykładniczego).

- 1903** Grossman, (Diss. Zürich 1903) Beibl. **29**—178—1905 (Cu, Sn i ich aliaże od 0° do 100°).
- 1904** Lombardi, Elektrot. ZS. **25**—41—1904 (Os od 100° do 300°).  
 Lohr, Wiener Ber.; Mat.-nat. Kl. **113**—911—1904 (Na od 20° do 70°).  
 Bernini, Phys. ZS. **5**—241, 406—1904 (K i Na od 0° do 130°).  
 Bernini, N. Cim. (5)—**8**—269—1904 (Li od 0° do 230°).  
 Sturm, (Diss. Rostock, 1904) Beibl. **29**—143—1905 (Al, Zn i ich aliaże od 0° do 100°).  
 Dewar, Proc. Roy. Soc. **73**—244—1904 (Ag, Au, Cu, Ni, Pd, Pt od 100° do —253°; wskazuje nieciągłość zmiany oporu przy niskich temperaturach).  
 Sutherland, Phil. Mag. (6)—**7**—417—1904. (Elektryczne pochodzenie światła; p. 423—przewodnictwo metali).  
 Harker, Phil. Trans. Roy. Soc. (A)—**203**—343—1904; Proc. Roy. Soc. **73**—217—1904. (Porównanie Pt—termometru od 500° do 1000° z termometrem gazowym i parą Pt—Pt Rh).  
 Smith, Phil. Trans. Roy. Soc. (A)—**204**—57—1904; Proc. Roy. Soc. **79**—239—1904 (Hg od 0° do 24°).  
 Meilink, (Comm. Phys. Lab. Leiden N93—1904). Beibl. **29**—66—1905 (Pt od 0° do —197°; wzór 3-go stopnia).
- 1905** Moissan i Chavanne, C. R. **140**—121—1905 (RS, Ca).  
 Copaux, C. R. **140**—657—1905 (Co, Ni od 0° do 100°).  
 Bolton, ZS. f. Elektrochem. **11**—45—1905 (Ta od 0° do 350°).  
 Reinganum, Ann. d. Phys. (4)—**11**—958—1905 (Elektrooptyka metali).  
 Reinganum, ZS. f. Elektrochemie **11**—851—1905. (Zależność pomiędzy oporem właściwym i ekwiwalentem elektrochemicznym).  
 Travers i Gwyer, Proc. Roy. Soc. **74**—528—1905 (Pt—termometr przy wysokich i niskich temperaturach).

### Zmiana oporu podczas topienia.

- 1855** Matteucci, C. R. **40**—541, 913—1855; Ann. chim. et phys. (3)—**43**—472—1885 (Bi).
- 1857** Matthiessen, Phil. Mag. (4)—**13**—81—1857; Pogg. Ann. **100**—177—1857 (K i Na).
- 1861** W. Siemens, Pogg. Ann. **113**—99—1861 (Sn).
- 1862** Matthiessen, Pogg. Ann. **116**—379—1862 (Pb).
- 1863** Dela Rive, C. R. **57**—698—1863 (Bi, Cd, Pb, Sb, Sn, Zn).
- 1885** Cailletet i Bouty, C. R. **100**—1188—1885 (Hg).  
 C. L. Weber, Wied. Ann. **25**—244—1805 (Hg).
- 1888** Grünmach, Wied. Ann. **35**—764—1888 (Hg).  
 C. L. Weber, Wied. Ann. **34**—580—1888 (Bi).
- 1889** C. L. Weber, Wied. Ann. **36**—587—1889 (Hg).  
 Grünmach, Wied. Ann. **37**—588—1889 (Hg).  
 C. L. Weber, Wied. Ann. **38**—227—1889 (Hg).
- 1890** Vincentini i Omodei, Atti Acc. di Torino **25**—30—1889/90 (Bi, Cd, Pb, Sn, Tl).



- 1892 Vassura, (N. Cim. (3)—31—25—1892) Beibl. 16—545—1892 (Bi, Cd, Sn).  
 1897 Dewar i Fleming, Proc. Roy. Soc. 60—76—1896/7 (Hg).  
 1904 Bernini, Phys. ZS. 5—241, 406—1904 (K, Na).  
 Bernini, N. Cim. (5)—8—269—1904 (Li).

W rozwoju poglądu na zmianę oporu elektrycznego metali rozróżnić możemy trzy okrasy:

- I. od Lenza (1835) do Benoita (1873).
- II. od Benoita do Callendara (1887).
- III. od Callendara.

Zcharakteryzujemy je kilka rysami.

I (1835—1873). Temperatury zwykłe. Niezgoda pomiędzy zwolennikami Lenza i Becquerela charakteryzuje ten okres. Lenz (1885—38), który pierwszy wykonał doświadczenia ilościowe nad zmianą oporu elektrycznego, wyraził je wzorami, które, estrapolowane, wskazywały maximum oporu pomiędzy 300° i 400°. Becquerel (1846) sądził, że opór wzrasta proporcjonalnie do zmiany temperatury i może być wyrażony wzorem liniowym.

Matthiessen (1856—63) przyjmuje dla swych licznych doświadczeń wzór Lenza. Arndsen (1858) i W. Siemens (1860—61), znalazłszy, że zmiana oporu nie zmniejsza się z temperaturą, co powinno by poprzedzać maximum Lenza, stają po stronie Becquerela.

Kwestya istnienia maximum oporu nie została rozwiązana eksperymentalnie, gdyż doświadczenia ograniczone były do temperatur, które otrzymać można przez ogrzewanie w oliwie (od 0 do 200°).

Podczas tego okresu ogłoszone zostały znane hipotezy: zmiana oporu jest ta sama dla wszystkich metali (Matthiessen); jest ona proporcjonalna do temperatury bezwzględnej (Clausius).

II (1873)—1887). Wysokie i niskie temperatury. Podstawy nowoczesnych poglądów na zmianę oporu elektrycznego wypracowane zostały w tym okresie. Zakres doświadczeń rozciąga się od +1000° do —200°.

Benoit (1873) rozwiązał doświadczalnie znaczną ilość pytań, które się nasunęły w poprzednim okresie: że opór wzrasta aż do najwyższych temperatur, że zmienia się on zazwyczaj prędzej od temperatury bezwzględnej i niejednakowo dla rozmaitych metali.

Doświadczenia przy niskich temperaturach (Cailletet, Bauty, Wróblewski—1885) podnoszą nowe zagadnienie: minimum oporu. Stwierdzono, że opór zmienia się przy niskich temperaturach prędzej od temperatury bezwzględnej; prawdopodobnem się stało wobec tego przypusz-

czenie, że zdąża on do zera lub do minimum w granicach dostępnych dla doświadczeń.

Wzór *Lenza* został porzucony, lecz znaczna liczba nowych wzorów służy do szeregowania doświadczeń. Obok liniowego wzoru *Becquerela* znajdujemy wzór paraboliczny *Benoita*, który pozostał klasycznym, zażyły wzór *C. W. Siemensa*, wzory 3-go stopnia i wzory wykładnicze. Czuć się daje wysiłek odkrycia charakteru funkcji, której odpowiada zmiana oporu.

III (1887—1905). Zastosowanie do mierzenia temperatury. Znaczna liczba prac tego okresu ma na celu mierzenie temperatur zmianą oporu. Pierwsza myśl termometru oporowego pochodzi od *C. W. Siemensa* (1871), ale tylko prace *Callendar*a dały niezbędną dla jej rozwoju podstawę.

*Callendar* (1879—99) zbadał krytycznie rozmaite wzory, używane na zmianę oporu elektrycznego, i znalazł, że wzór paraboliczny przedstawia ją dokładnie. Opracował on budowę, kalibrowanie i użycie platynowego termometru oporowego.

*Dewar* (1892—1904) zpopularyzował użycie termometru oporowego, którym się posługiwał przy swych licznych pracach. On też ponownie opracował zmianę oporu większości metali, zwłaszcza przy niskich temperaturach, i znalazł, że opór wciąż się zmniejsza z temperaturą, lecz że bieg krzywej oporu znacznie się zmienia przy niskich temperaturach.

*Holborn* i *Wien* (1895—1896), *Holborn* (1901), *Chappuis* i *Harker* (1904) starannie porównują platynowy termometr oporowy z termometrem gazowym.

*Williams* (1902) znajduje zależność pomiędzy dwoma współczynnikami parabolicznego wzoru na zmianę oporu.

Kolejno, pod wpływem teorii *Maxwella* i teorii elektronów, wzniesione zostają wysiłki objaśnienia oporu elektrycznego metali.

Prace, dotyczące zmiany oporu elektrycznego, są bardzo nieregularnie podzielone pomiędzy rozmaite metale. Gdy bardzo znaczna ilość prac, które się częściowo powtarzają, poświęcona jest rtęci, miedzi, żelazu i platynie, posiadamy tylko ograniczone dane, dotyczące głównych metali alkalicznych (K, Na, Li), kobaltu, irydu, osmu, rhodu, tantalu, indu i antymonu; nie posiadamy żadnych danych co do rubidu, cezu, metali ziem alkalicznych (Ca, Sr, Ba), niektórych metali z grupy żelaza (Mn, Cr, Mo, W, U), rutenu, gallu, germanu, metali ziem rzadkich.

### Zakończenie.

Zasada proporcjonalności pomiędzy spółobjętością i oporem zadawalająco objaśnia zmianę oporu metali z temperaturą. Niepodobna jednak uważać zmiany spółobjętości za jedyny czynnik, mogący wpływać na opór. Naprzykład przy zmianie oporu pod wpływem ciśnienia przyjąć musimy ciśnienie, jako czynnik niezależny, zwiększający opór. Wpływ ciśnienia na opór uważać wtedy można za spowodowany przez dwa czynniki przeciwne, lecz nie ściśle proporcjonalne: zmniejszona spółobjętość i zwiększone ciśnienie.

Znaczenie ustalonych wzorów z łatwością zostanie zrozumiane, o ile założymy, że dla ciał stałych istnieją stany odpowiednie,<sup>1)</sup> tak że mierząc masę—masą molekularną, objętość—objętością molekularną, temperaturę—temperaturą topienia, dojść można do wniosków prostszych, niż przyjmując jako jednostki pomiarów wartości niezależne od charakteru ciała.

Nancy, luty 1907 r.

---

<sup>1)</sup> Niekoniecznie stany odpowiednie van der Waals'a, jak sądzi S. Traube, Anorg. Chem. 84 - 413 - 1902.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

WŁ. GORCZYŃSKI.

## O OBLICZANIU SUM CIEPŁA W KALORYACH GRAMOWYCH.

---

Naturalnem uzupełnieniem danych o natężeniu promieniowania słonecznego jest wyznaczenie, choćby przybliżone, wartości insolacyjnych dla danego miejsca; te ostatnie, przedstawiając sumy ciepła, dostarczanego przez słońce w ciągu danego czasu na jednostkę powierzchni, stanowią jednocześnie pierwszą podwalinę do zdania sobie sprawy z bilansu energetycznego ziemi i jego zmienności w ciągu roku dla danego miejsca. Dla wyznaczenia danych insolacyjnych znać potrzeba dwie wartości: natężenie promieniowania słonecznego oraz usłonecznienie. Pierwszy element znajdujemy przy pomocy pomiarów pyrhelometrycznych lub aktynometrycznych, sprowadzonych do wskazań pyrhelometru; drugi element otrzymuje się przy pomocy heliografu.

Poniżej dajemy wyniki odnośnych rachunków dla Warszawy, gdzie od r. 1901 prowadzone są stałe pomiary promieniowania słonecznego oraz od r. 1903 funkcjonują heliografy. Obok Warszawy przytoczono kilka analogicznych wyników, otrzymanych dla paru innych miejscowości.

---

### WARTOŚCI INSOLACYJNE I t. zw. STAŁA SŁONECZNA.

Gdybyśmy znali wartość energii promienistej, dochodzącej do granicy górnej (na 1 cm.<sup>2</sup>) atmosfery ziemskiej (i noszącej zwykle nazwę „stałej słonecznej”, którą oznaczymy przez  $C$ ) i gdyby przypuścić, że promienie słoneczne w granicach naszej atmosfery nie podlegają absorbcji, wtedy

obliczenie sumy energii, dostarczonej np. w ciągu danego dnia na jednostkę powierzchni, nie byłoby zadaniem zbyt trudnym do rozstrzygnięcia. W rzeczy samej, oznaczając przez  $Q$  natężenie promieniowania, przez  $r$  odległość ziemi od słońca, przez  $h$  wysokość słońca nad poziomem, mielibyśmy:

$$(1) \quad dQ = \frac{c}{r^2} \cdot \sin h \cdot dt,$$

przyczem na zasadzie znanej zależności z trójkąta paralaktycznego:

$$(2) \quad \sin h = \sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cdot \cos t,$$

gdzie  $\lambda$  oznacza szerokość geograficzną,  $\delta$  zboczenie słońca,  $t$  czas.

Chcąc wyznaczyć wielkość  $Q$ , otrzymaną np. w ciągu jednego dnia, należałoby obliczyć całkę:

$$(3) \quad Q = c \cdot \int_{-t_0}^{+t_0} \frac{\sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cdot \cos t}{r^2} \cdot dt,$$

gdzie granice całki odpowiadają czasowi wschodu i zachodu słońca i obliczają się naprzód na zasadzie wzoru:

$$\sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cdot \cos t_0 = 0$$

lub

$$(4) \quad \cos t_0 = -\operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

Obliczanie całki (3) może nastęrczać raczej matematyczne trudności; dla celów Meteorologii, gdy chodzi np. o przeciąg jednego dnia, można z wystarczającą dokładnością założyć, że  $\delta$  (zboczenie) i  $r$  (odległość) pozostają bez zmiany w tym okresie, a także zaniedbać wpływ refrakcji i zamiast (3) napisać wzór:

$$(5) \quad Q = \frac{2c}{r^2} \cdot (\sin \lambda \cdot \sin \delta \cdot t_0 + \cos \lambda \cos \delta \cdot \sin t_0)$$

ważny dla okresu jednodniowego.

Podobne rachunki były w rzeczy samej przeprowadzane niejednokrotnie, a Angot rozszerzył je i na przypadek działań absorbcyjnych atmosfery ziemskiej. Pomimo tych bezwątpienia interesujących wyników, jakie otrzymali ci badacze, rezultaty ich prac dotychczas nie będą miały bezpośredniego zastosowania w Fizyce atmosfery, dopóki sama t. zw. stała słoneczna nie zostanie zrealizowana.

Tymczasem kwestya „stałej słonecznej“ pozostaje dotychczas otwartą mimo znacznego nakładu pracy ze strony wielu zasłużonych badaczy, którzy

usiłowali ją rozwiązać. Zdaje się jednak, że najważniejszy szkopuł do osiągnięcia rezultatu polegał tu na posiłkowaniu się metodami, które z góry wydają się wątpliwymi.

Rozumowano np., że, skoro z pomiarów w danej miejscowości dla różnych wysokości  $h$  słońca, a więc dla różnych wielkości dróg  $s$  promieni, przebytych w atmosferze, można wnioskować o wielkości i zmianie absorbcyi w danym interwale, więc—wiążąc obserwowane przyrosty zapomocą mniej lub więcej prawdopodobnych i mniej lub więcej złożonych wzorów teoretycznych—stosowano ją następnie do przypadku  $s=0$ , t. j. do granicy górnej atmosfery. Nie liczone się więc z tem, że znaleziona zależność ma charakter empiryczny, że otrzymana została na zasadzie oceny absorbcyi tylko w pewnej części drogi promieni i że dla wielu innych jeszcze względów podobne ekstrapolacje są nieracjonalne.

Stosunkowo racjonalniejszymi były ekspedycje górskie dla oznaczeń „stałej słonecznej“, gdyż dają one możliwość oceny absorbcyjnych działań warstw powietrznych dla względnie większej części drogi, przebywanej przez promienie słoneczne w atmosferze. Lecz i tu poprzednie zarzuty pozostają w swej mocy, niema bowiem naukowych dowodów, stwierdzających, że charakter absorbcyi atmosferycznej jest ten sam w różnych, rozmaicie od powierzchni ziemi oddalonych, warstwach powietrznych. K. A n g s t r ö m w swej znanej pracy „Intensité de la radiation solaire à différentes altitudes; recherches faites à Ténériffe“ wprost wskazuje, że charakter absorbcyi promieniowań jest różny w różnych warstwach atmosfery i że wszelkie oddalanie się od granic obserwacyjnych jest tu niedozwolone.

Za przypuszczalne wartości „stałej słonecznej“ często przyjmuje się obecnie wielkość od 3 do 4 gr. cal.; dodamy, że kwestya „stałej słonecznej“ jest nader skomplikowana i w swej ogólności wymagałaby uwzględnienia np. i wpływów atmosfery słonecznej.

#### O OBLICZANIU SUM CIEPŁA, DOSTARCZANEGO DO POWIERZCHNI ZIEMI W WARSZAWIE, W RAZIE STAŁEGO USŁONECZNIENIA.

Dla przybliżonego wyznaczania sum insolacyjnych w Warszawie, użyjemy metody następującej. Pomiaru bezpośrednie dają nam (przynajmniej dla pewnej liczby dni w roku) zmiany dzienne i miesięczne radiacji  $Q$  w zależności od zmian w wysokości słońca  $h$ ; każdorazową zależność:

$$(6) \quad Q = f(h)$$

można zapomocą podstawienia:

$$(2bis) \quad \sin h = \sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cdot \cos t$$

wyrazić, dla danego  $\lambda$  i  $\delta$ , w postaci:

$$(7) \quad Q = \varphi(t)$$

i biorąc całkę:

$$(8) \quad \int_{-t_0}^{+t_0} \varphi(t) dt,$$

gdzie granice wyznaczają się z zależności:

$$(4bis) \quad \cos t_0 = -\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \delta,$$

otrzymać szukaną sumę dzienną na zasadzie bezpośrednich pomiarów natężenia promieniowania i oznaczeń sumy godzin oraz rozkładu usłonecznienia w dniu danym.

Chodzi tylko o to, aby zależność  $Q$  od  $t$ , t. j. funkcję  $\varphi(t)$  przedstawić dla każdego dnia w sposób możliwie najprostszy i dogodny do wyznaczenia wartości liczbowej całki (8).

Przed przystąpieniem do obliczania faktycznych sum insolacyjnych dla danego roku, rozpatrzmy przedewszystkiem następujące pytanie. Ile ciepła doszłoby przeciętnie do powierzchni ziemi w Warszawie (na jednostkę powierzchni, umieszczonej prostopadle względem promieni), jeżeliby słońce świeciło bez przerwy t. j. usłonecznienie było ciągłe od wschodu do zachodu. Zwracamy uwagę, że warunek ten nie jest bynajmniej identyczny z warunkiem zachmurzenia 0 lub stałej czystości nieba.

Ponieważ w pytaniu tem jest mowa nie o maksymalnych, lecz o przeciętnych ilościach ciepła, mogącego dochodzić do powierzchni ziemi w Warszawie w razie stałego usłonecznienia od wschodu do zachodu, więc zwróćmy się przedewszystkiem do tych przeciętnych średnich miesięcznych radiacji, które znalezione zostały<sup>1)</sup> dla pięciolecia 1901—1905 z wyłączeniem okresu zniżki. Te średnie miesięczne dają nam zmiany w wartościach na  $Q$  w ciągu roku w zależności od czasu lub, co na jedno wychodzi, od tych wysokości słońca (w południe prawdziwe), które w rozważanych odstępach czasu występują dla danej miejscowości.

Tak też postąpiono dla Warszawy. Przedstawiając graficznie przebieg roczny natężenia promieniowania (odkładając np. na osi rzędnych wartości natężenia w kal., a na osi odciętych wysokości słońca w stopniach), można

<sup>1)</sup> Te przeciętne średnie miesięczne podane zostały (na str. 144) przez autora w pracy p. t. „Sur la marche annuelle de l'intensité du rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés“. (8-o, VIII+202, 1906). Z dwoma rycinami poza tekstem.



dla każdego dnia, stosownie do jego wysokości południowej i miejsca w okresie rocznym, oznaczyć przeciętną wartość radiacji. Dane te dla Warszawy były znalezione dla 10, 20 i 30-go każdego miesiąca (w lutym dla 28-go) i są przedstawione w ostatniej rubryce (dla 12<sup>a</sup>) tablicy I.

W ten sposób uzyskane zostały przeciętne natężenia promieniowania w okresie rocznym dla najwyższej dziennej wysokości słońca; aby otrzymać nadto zmiany dzienne radiacji, obliczono i podano w tab. I także i wartości godzinne. Dla otrzymania tych ostatnich znaleziono przedewszystkiem wysokość słońca w Warszawie dla kolejnych godzin 10-go, 20-go i 30-go każdego miesiąca według zwykłych formuł (w stopniach i częściach dziesiątych) i stąd, posilkując się wyprowadzonymi dla Warszawy (w pracy, cytowanej w przypisku) wartościami redukcyjnymi na wysokość, oznaczono przeciętne wartości godzinne natężenia promieniowania w dniu danym.

Te ostatnie są podane w tab. I obok poprzednio dyskutowanych wartości południowych, przyczem umówiono się pierwszą godzinę insolacyjną liczyć dopiero od chwili, gdy słońce w jej początku dosięgło przynajmniej 5° nad poziomem. Wybór ten uczyniono z tego względu, że redukcye dla zbyt małych wysokości są niepewne, a zresztą natężenia promieniowania są tu już tak małe, że opuszczenie pewnej liczby minut przy wschodzie i zachodzie mało wpływa na ogólną sumę insolacyjną w tym przynajmniej stopniu przybliżenia, jaki się daje osiągnąć obecnie w tych rachunkach.

Dalej, ze względu na to, że wartości godzinne zależą tylko od zmian w wysokości słońca, wzięto wspólne rubryki dla odpowiednich godzin przed- i popołudniowych, jak to jest też zaznaczone w nagłówkach tabelki. Pomija się więc tu zmiana w ciągu dnia wartości zboczenia słońca, której wpływ na obliczaną wysokość rzadko tylko przenieść może 0,1 stopnia.

## TABLICA I.

Wartości godzinne natężenia promieniowania  
słonecznego w Warszawie.

(według przeciętnych średnich miesięcznych z okresu 1901—1905).

| DATA    | 4 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>8 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 5 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>7 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 6 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>6 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 7 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>5 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 8 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>4 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 9 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>3 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 10 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>2 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 11 <sup>h</sup> <sub>a</sub><br>1 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 12 <sup>h</sup> |
|---------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------|
| 10.I    | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.449                                                      | 0.702                                                       | 0.810                                                       | 0.841           |
| 20.I    | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.513                                                      | 0.731                                                       | 0.824                                                       | 0.851           |
| 30.I    | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.638                                                      | 0.826                                                       | 0.903                                                       | 0.927           |
| 10.II   | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.461                                                      | 0.800                                                      | 0.941                                                       | 1.007                                                       | 1.028           |
| 20.II   | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.663                                                      | 0.901                                                      | 1.015                                                       | 1.074                                                       | 1.092           |
| 28.II   | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.738                                                      | 0.927                                                      | 1.034                                                       | 1.089                                                       | 1.107           |
| 10.III  | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.430                                                      | 0.823                                                      | 0.966                                                      | 1.060                                                       | 1.112                                                       | 1.127           |
| 20.III  | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.595                                                      | 0.877                                                      | 1.004                                                      | 1.090                                                       | 1.133                                                       | 1.146           |
| 30.III  | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.700                                                      | 0.919                                                      | 1.039                                                      | 1.115                                                       | 1.151                                                       | 1.162           |
| 10.IV   | —                                                          | —                                                          | 0.413                                                      | 0.783                                                      | 0.959                                                      | 1.069                                                      | 1.135                                                       | 1.168                                                       | 1.180           |
| 20.IV   | —                                                          | „                                                          | 0.550                                                      | 0.832                                                      | 0.983                                                      | 1.082                                                      | 1.138                                                       | 1.169                                                       | 1.180           |
| 30.IV   | —                                                          | „                                                          | 0.641                                                      | 0.860                                                      | 0.995                                                      | 1.082                                                      | 1.133                                                       | 1.162                                                       | 1.172           |
| 10.V    | —                                                          | 0.263                                                      | 0.694                                                      | 0.882                                                      | 1.008                                                      | 1.085                                                      | 1.131                                                       | 1.157                                                       | 1.165           |
| 20.V    | —                                                          | 0.388                                                      | 0.719                                                      | 0.885                                                      | 1.002                                                      | 1.073                                                      | 1.119                                                       | 1.143                                                       | 1.149           |
| 30.V    | —                                                          | 0.431                                                      | 0.723                                                      | 0.881                                                      | 0.993                                                      | 1.061                                                      | 1.106                                                       | 1.127                                                       | 1.133           |
| 10.VI   | „                                                          | 0.461                                                      | 0.726                                                      | 0.877                                                      | 0.984                                                      | 1.052                                                      | 1.095                                                       | 1.114                                                       | 1.120           |
| 20.VI   | „                                                          | 0.462                                                      | 0.727                                                      | 0.878                                                      | 0.985                                                      | 1.054                                                      | 1.097                                                       | 1.116                                                       | 1.122           |
| 30.VI   | „                                                          | 0.476                                                      | 0.741                                                      | 0.892                                                      | 0.999                                                      | 1.067                                                      | 1.110                                                       | 1.129                                                       | 1.136           |
| 10.VII  | „                                                          | 0.454                                                      | 0.750                                                      | 0.908                                                      | 1.019                                                      | 1.087                                                      | 1.131                                                       | 1.151                                                       | 1.157           |
| 20.VII  | „                                                          | 0.430                                                      | 0.746                                                      | 0.914                                                      | 1.028                                                      | 1.097                                                      | 1.142                                                       | 1.164                                                       | 1.170           |
| 30.VII  | —                                                          | 0.310                                                      | 0.689                                                      | 0.874                                                      | 0.998                                                      | 1.074                                                      | 1.123                                                       | 1.148                                                       | 1.155           |
| 10.VIII | —                                                          | „                                                          | 0.612                                                      | 0.831                                                      | 0.964                                                      | 1.048                                                      | 1.098                                                       | 1.126                                                       | 1.135           |
| 20.VIII | —                                                          | „                                                          | 0.507                                                      | 0.784                                                      | 0.929                                                      | 1.026                                                      | 1.080                                                       | 1.112                                                       | 1.122           |
| 30.VIII | —                                                          | —                                                          | 0.402                                                      | 0.755                                                      | 0.921                                                      | 1.030                                                      | 1.091                                                       | 1.124                                                       | 1.135           |
| 10.IX   | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.708                                                      | 0.911                                                      | 1.029                                                      | 1.103                                                       | 1.139                                                       | 1.152           |
| 20.IX   | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.603                                                      | 0.867                                                      | 0.992                                                      | 1.080                                                       | 1.121                                                       | 1.134           |
| 30.IX   | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.457                                                      | 0.803                                                      | 0.941                                                      | 1.034                                                       | 1.084                                                       | 1.099           |
| 10.X    | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.398                                                      | 0.781                                                      | 0.924                                                      | 1.017                                                       | 1.041                                                       | 1.058           |
| 20.X    | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.670                                                      | 0.863                                                      | 0.966                                                       | 0.993                                                       | 1.011           |
| 30.X    | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.552                                                      | 0.784                                                      | 0.902                                                       | 0.932                                                       | 0.953           |
| 10.XI   | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.621                                                      | 0.798                                                       | 0.875                                                       | 0.898           |
| 20.XI   | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | „                                                          | 0.549                                                      | 0.758                                                       | 0.851                                                       | 0.876           |
| 30.XI   | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.485                                                      | 0.730                                                       | 0.838                                                       | 0.868           |
| 10.XII  | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.427                                                      | 0.706                                                       | 0.823                                                       | 0.860           |
| 20.XII  | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.400                                                      | 0.700                                                       | 0.820                                                       | 0.855           |
| 30.XII  | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | —                                                          | 0.410                                                      | 0.696                                                       | 0.815                                                       | 0.846           |

NB. Kreski w odpowiednich rubrykach oznaczają, że dla danej godziny (Jej początku) wysokość słońca była już ujemna, zaś znaczek „ świadczy, że wysokość ta w tymże momencie była wprawdzie dodatnia, lecz nie przenosiła 5°.

Mając wartości godzinne, należy przejść do sumowania, aby otrzymać sumy dzienne, a następnie miesięczne i roczne. Sumowania tego dokonano w ten sposób, że każdą wartość godziną radiacji, obliczoną dla początku godziny, przyjęto jako średnią dla 30 minut poprzedzających i następujących; co się zaś tyczy wartości południowej, to, odnosząc ją do przedziału od  $11^{\text{h}} 30^{\text{m}}$  do  $12^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ , jako średnią dla tego przedziału, należało brać wartość dla  $11^{\text{h}} 45^{\text{m}}$  (lub  $12^{\text{h}} 15^{\text{m}}$ ). Z powodu jednak małych zmian wysokości w samo południe, dla większości przypadków można było wprost wartość południową przyjmować za średnią.

W ten sposób np. dla 10-go lutego otrzymuje się liczba 446,580 (po pomnożeniu rezultatu przez 60) lub, odrzucając ułamek, 447 gr. cal. Zaokrąglenie do całych kaloryj jest aż nadto usprawiedliwione przez przybliżony charakter rachunku.

Takie sumy dzienne, obliczone co dni 10 w sposób podany, zawarte są w poniższej Tab. II; mając sumy dzienne i interpolując w interwałach dziesięciodniowych, otrzymano sumy miesięczne, podane w naszej tabelce pod odpowiednimi rubrykami dla oddzielnych miesięcy. Te sumy miesięczne zostały zaokrąglone do setek kaloryj.

TABLICA II.

Sumy ciepła dla Warszawy, w razie stałego usłonecznienia (według przeciętnych średnich miesięcznych natężenia promieniowania).

| Miesiące<br>Dni | I<br>(31) | II<br>(28)          | III<br>(31) | IV<br>(30) | V<br>(31) | VI<br>(30) | VII<br>(31) | VIII<br>(31) | IX<br>(30) | X<br>(31) | XI<br>(30) | XII<br>(31) |
|-----------------|-----------|---------------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|--------------|------------|-----------|------------|-------------|
| S. dla 10-go    | 286       | 447                 | 595         | 734        | 816       | 824        | 849         | 750          | 656        | 563       | 329        | 286         |
| " " 20-go       | 299       | 504                 | 633         | 761        | 828       | 826        | 853         | 720          | 628        | 480       | 312        | 282         |
| " " 30-go       | 340       | 520 <sup>1)</sup>   | 661         | 775        | 827       | 838        | 815         | 707          | 584        | 438       | 298        | 281         |
| Suma za mies.   | 9000      | 13000 <sup>1)</sup> | 18900       | 22200      | 25300     | 24800      | 26100       | 22900        | 19200      | 15900     | 10100      | 8800        |

Suma ciepła dla miesięcy zimowych (XII, I, II): 30800 gr. cal. na cm.<sup>2</sup>

" " " " wiosennych (III, IV, V): 66400 " " " "

" " " " letnich (VI, VII, VIII): 73800 " " " "

" " " " jesiennych (IX, X, XI): 45200 " " " "

Suma ogólna za rok 216200 gr. cal. na cm.<sup>2</sup>

(powierzchni, umieszczonej prostopadle względem kierunku padania promieni słonecznych).

<sup>1)</sup> Ostatnia wartość dla lutego stosuje się do 28-go; dla lat przestępnych sumę za luty, a przeto i sumę ogólną za rok należy zwiększyć o 500.

Widzimy, że na rok przypadałoby w Warszawie z górą 200000 gr. cal. na  $\text{cm}^2$  powierzchni, umieszczonej prostopadle, gdyby słońce świeciło bez przerwy, t. j. usłonecznienie było ciągłe. Zauważymy raz jeszcze, że suma ta opiera się na przeciętnych danych natężenia, jakie w Warszawie były faktycznie obserwowane w okresie 1901—1905 i że, jeżeli przedstawia wyższą granicę sum ciepła, dostarczanego przez słońce na powierzchnię ziemi w Warszawie, to tylko z tego względu, że usłonecznienie od wschodu do zachodu uważane jest za stałe.

O OBLICZANIU SKŁADOWYCH PIONOWYCH NATĘŻENIA PROMIENIOWANIA  
W WARSZAWIE.

Wszystkie dane, podane w tabelkach poprzedzającego paragrafu, wyrażają te ilości ciepła, które promienie słoneczne dostarczają w Warszawie  $1 \text{ cm}^2$  powierzchni, wystawionej prostopadle na działanie radiacji. Gdy jednak chodzi o samą powierzchnię ziemi, to otrzymuje ona promieniowanie pod kątem padania, mniej lub więcej różnym od prostego. Dlatego jest rzeczą nader interesującą obliczyć tę część radiacji, która jest otrzymana prostopadle przez poziomą powierzchnię ziemi. W tym celu wszystkie wartości godzinne, podane w Tab. I, były mnożone przez  $\sin h$ , t. j. wstawę odpowiedniej wysokości słońca w tym czasie. Z tych nowych wartości godzinnych (przytoczonych w Tab. IV), utworzone były, w sposób zupełnie analogiczny jak poprzednio, sumy dla 10-go, 20-go i 30-go każdego miesiąca, a stąd sumy miesięczne i roczne.

TABLICA III.

Sumy ciepła według składowych pionowych dla Warszawy.

| Miesiące<br>Dni                                 | I<br>(31)                                                         | II<br>(28)         | III<br>(31) | IV<br>(30) | V<br>(31) | VI<br>(30) | VII<br>(31) | VIII<br>(31) | IX<br>(30) | X<br>(31) | XI<br>(30) | XII<br>(31) |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|--------------|------------|-----------|------------|-------------|
| S. P. dla 10-go                                 | 60                                                                | 133                | 243         | 381        | 485       | 520        | 531         | 446          | 336        | 222       | 93         | 56          |
| " " " 20-go                                     | 71                                                                | 172                | 287         | 421        | 503       | 524        | 523         | 407          | 294        | 177       | 76         | 53          |
| " " " 30-go                                     | 93                                                                | 200 <sup>1)</sup>  | 330         | 455        | 514       | 530        | 488         | 376          | 248        | 140       | 70         | 54          |
| Za miesiąc                                      | 2100                                                              | 4100 <sup>1)</sup> | 8400        | 12000      | 15300     | 15700      | 16100       | 13200        | 9400       | 6100      | 2700       | 1700        |
| Suma ciepła dla miesięcy zimowych (XII, I, II): | 7900 gr. cal. na $\text{cm}^2$                                    |                    |             |            |           |            |             |              |            |           |            |             |
| " " " wiosennych (III, IV, V):                  | 35700 " " " "                                                     |                    |             |            |           |            |             |              |            |           |            |             |
| " " " letnich (VI, VII, VIII):                  | 45000 " " " "                                                     |                    |             |            |           |            |             |              |            |           |            |             |
| " " " jesiennych (IX, X, XI):                   | 18200 " " " "                                                     |                    |             |            |           |            |             |              |            |           |            |             |
| Suma ogólna za rok:                             | 106800 gr. cal. na $\text{cm}^2$<br>(poziomej powierzchni ziemi). |                    |             |            |           |            |             |              |            |           |            |             |

<sup>1)</sup> Ostatnia wartość dla lutego stosuje się do 28-go; dla lat przestępnych sumę za luty, a przeto i sumę ogólną za rok należy zwiększyć o 200.

TABLICA IV.

Wartości godzinne składowych pionowych natężenia promieniowania słonecznego w Warszawie  
(według przeciętnych średnich miesięcznych).

| DATA    | 4 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 5 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 6 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 7 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 8 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 9 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 10 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 11 <sup>h</sup> <sub>a</sub> | 12 <sup>h</sup> |
|---------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|
|         | 8 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 7 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 6 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 5 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 4 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 3 <sup>h</sup> <sub>p</sub> | 2 <sup>h</sup> <sub>p</sub>  | 1 <sup>h</sup> <sub>p</sub>  |                 |
| 10.I    | —                           | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.048                       | 0.138                        | 0.204                        | 0.229           |
| 20.I    | —                           | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.069                       | 0.164                        | 0.233                        | 0.257           |
| 30.I    | —                           | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.109                       | 0.218                        | 0.291                        | 0.319           |
| 10.II   | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.046                       | 0.179                       | 0.299                        | 0.379                        | 0.408           |
| 20.II   | —                           | —                           | —                           | "                           | 0.104                       | 0.248                       | 0.377                        | 0.462                        | 0.492           |
| 30.II   | —                           | —                           | —                           | "                           | 0.148                       | 0.296                       | 0.430                        | 0.518                        | 0.550           |
| 10.III  | —                           | —                           | —                           | 0.044                       | 0.213                       | 0.362                       | 0.501                        | 0.592                        | 0.623           |
| 20.III  | —                           | —                           | "                           | 0.094                       | 0.272                       | 0.432                       | 0.576                        | 0.668                        | 0.699           |
| 30.III  | —                           | —                           | "                           | 0.147                       | 0.331                       | 0.502                       | 0.647                        | 0.738                        | 0.770           |
| 10.IV   | —                           | —                           | 0.045                       | 0.209                       | 0.396                       | 0.574                       | 0.721                        | 0.812                        | 0.845           |
| 20.IV   | —                           | "                           | 0.089                       | 0.261                       | 0.451                       | 0.630                       | 0.770                        | 0.861                        | 0.893           |
| 30.IV   | —                           | "                           | 0.134                       | 0.310                       | 0.499                       | 0.675                       | 0.810                        | 0.898                        | 0.930           |
| 10.V    | —                           | 0.023                       | 0.173                       | 0.349                       | 0.540                       | 0.712                       | 0.842                        | 0.929                        | 0.959           |
| 20.V    | —                           | 0.048                       | 0.197                       | 0.373                       | 0.560                       | 0.728                       | 0.858                        | 0.943                        | 0.971           |
| 30.V    | —                           | 0.063                       | 0.214                       | 0.390                       | 0.574                       | 0.738                       | 0.868                        | 0.948                        | 0.976           |
| 10.VI   | "                           | 0.075                       | 0.224                       | 0.399                       | 0.581                       | 0.745                       | 0.873                        | 0.951                        | 0.978           |
| 20.VI   | "                           | 0.076                       | 0.228                       | 0.404                       | 0.586                       | 0.750                       | 0.880                        | 0.956                        | 0.983           |
| 30.VI   | "                           | 0.078                       | 0.231                       | 0.409                       | 0.591                       | 0.757                       | 0.888                        | 0.966                        | 0.994           |
| 10.VII  | "                           | 0.067                       | 0.226                       | 0.405                       | 0.595                       | 0.762                       | 0.894                        | 0.976                        | 1.003           |
| 20.VII  | "                           | 0.057                       | 0.211                       | 0.393                       | 0.585                       | 0.754                       | 0.888                        | 0.971                        | 0.998           |
| 30.VII  | —                           | 0.031                       | 0.173                       | 0.351                       | 0.541                       | 0.712                       | 0.847                        | 0.933                        | 0.962           |
| 10.VIII | —                           | "                           | 0.130                       | 0.306                       | 0.491                       | 0.661                       | 0.795                        | 0.881                        | 0.911           |
| 20.VIII | —                           | "                           | 0.085                       | 0.255                       | 0.436                       | 0.609                       | 0.744                        | 0.832                        | 0.863           |
| 30.VIII | —                           | —                           | 0.048                       | 0.212                       | 0.392                       | 0.568                       | 0.707                        | 0.796                        | 0.829           |
| 10.IX   | —                           | —                           | "                           | 0.157                       | 0.338                       | 0.511                       | 0.657                        | 0.749                        | 0.783           |
| 20.IX   | —                           | —                           | "                           | 0.104                       | 0.279                       | 0.440                       | 0.590                        | 0.681                        | 0.714           |
| 30.IX   | —                           | —                           | —                           | 0.055                       | 0.221                       | 0.371                       | 0.509                        | 0.600                        | 0.632           |
| 10.X    | —                           | —                           | —                           | 0.041                       | 0.201                       | 0.345                       | 0.477                        | 0.517                        | 0.548           |
| 20.X    | —                           | —                           | —                           | "                           | 0.136                       | 0.274                       | 0.399                        | 0.438                        | 0.467           |
| 30.X    | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.084                       | 0.208                       | 0.325                        | 0.361                        | 0.389           |
| 10.XI   | —                           | —                           | —                           | —                           | "                           | 0.112                       | 0.219                        | 0.292                        | 0.317           |
| 20.XI   | —                           | —                           | —                           | —                           | "                           | 0.077                       | 0.176                        | 0.247                        | 0.272           |
| 30.XI   | —                           | —                           | —                           | —                           | "                           | 0.054                       | 0.147                        | 0.217                        | 0.242           |
| 10.XII  | —                           | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.039                       | 0.127                        | 0.195                        | 0.221           |
| 20.XII  | —                           | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.034                       | 0.120                        | 0.187                        | 0.211           |
| 30.XII  | —                           | —                           | —                           | —                           | —                           | 0.036                       | 0.123                        | 0.190                        | 0.213           |

Z ostatniej tabelki widać, że nieco więcej, niż 100000 gr. cal. mogłyby być dostarczone w ciągu roku 1 cm.<sup>2</sup> powierzchni ziemi w Warszawie, gdyby usłonecznienie nie podlegało przerwom. W porównaniu z danymi z Tab. II zmniejszenie sumy rocznej wynosi 50%, a dla zimy dochodzi do 75%.

#### USŁONECZNIE NIE I SUMY INSOLACYJNE DLA R. 1903, 1904 I 1905 W WARSZAWIE.

Przejdźmy teraz do otrzymania faktycznych sum insolacyjnych dla Warszawy, biorąc pod uwagę liczby godzin słonecznych według heliografu i ich rozkład w ciągu danego okresu. Jeżeli, według krzywych heliografu, słońce w ciągu danego przedziału godzinowego świeciło tylko ułamek godziny, wynoszący np.  $k$ , to, dla otrzymania sum dziennych, należy sumować nie wprost wartości godzinne, jak to czyniliśmy poprzednio, lecz iloczyn  $k \cdot Q$ , t. j. obliczać sumy:

$$(9) \quad 60 \cdot \sum k_i Q_i,$$

a dla składowych pionowych:

$$(10) \quad 60 \cdot \sum k_i Q_i \sin h_i,$$

gdzie sumowanie należy rozprzestrzenić na czas od wschodu do zachodu słońca.

Wzory te zastępują używaną poprzednio do obliczeń formułę sumowań:

$$(11) \quad 2 \cdot 60 \cdot \sum Q_i,$$

a dla składowych pionowych:

$$(12) \quad 2 \cdot 60 \sum Q_i \sin h_i,$$

gdzie sumowanie rozciąga się tylko na czas od wschodu (lub zachodu) do południa, a  $k_i$  jest przyjęte za jedność.

Jak widzimy, dla obliczania faktycznych sum insolacyjnych trzeba znać dla danego okresu liczby  $k$ , t. j. usłonecznienie danej miejscowości. Dane te dla Warszawy w r. 1903, 1904 i 1905 zostały otrzymane według wskazań heliografów, funkcyjujących na Stacji Centralnej Meteorologicznej tuż przy miejscu, w którym były dokonywane pomiary natężenia promieniowania. Nadmienimy, że usłonecznienie w r. 1903 (oraz styczniu następnego roku) notowane było na heliografie systemu fotograficznego, a w latach następnych działał, prócz poprzedniego, przyrząd systemu Campbell'a według którego obliczano też godziny słoneczne.

W ten sposób otrzymano w r. 1903 1245.4, w r. 1904—1790.6 i w r. 1905 1562.9 godzin słonecznych. Sumy miesięczne wykazują przeważnie jedno-

stajny wzrost do lipca oraz najniższe wartości w końcu roku. W r. 1903 oraz w styczniu i lutym 1904 r., a więc w okresie depresji radiacyjnej<sup>1)</sup>, sumy godzin słonecznych są dość znacznie niższe.

Przyjmując prowizorycznie liczbę 3550, jako maximum możliwego usłonecznienia dla Warszawy (uwzględniając już, że heliografy nie od razu dla wschodu i zachodu pozostawiają ślady na papierkach), otrzymujemy, że w r. 1903 usłonecznienie faktyczne wynosiło 35% możliwego, w r. 1904—50%, a w r. 1905—44%.

Co się wreszcie tyczy rozkładu usłonecznienia na oddzielne godziny dnia, to w sumach rocznych maxima wypadają zgodnie na okres od 11 do 12 w poł.; między 9<sup>h</sup> i 3<sup>h</sup> zmiany nie są wogóle zbyt wielkie. Liczba dni z usłonecznieniem w ciągu roku w Warszawie przynosi nieco 250.

Mając potrzebne materiały co do liczby i rozkładu godzin słonecznych, możemy przystąpić do obliczenia samych sum insolacyjnych dla Warszawy. Aby uzyskać sumy miesięczne, należy przedewszystkiem obliczyć sumy insolacyjneienne dla każdego dnia słonecznego (w którym heliograf wskazywał więcej, niż 0.0) według wzorów poprzednio przytoczonych.

Sumy miesięczne przedstawiają się jako sumy podwójne postaci:

$$(13) \quad 60 \cdot \sum \sum k_i Q_i$$

w gr. cal. na cm.<sup>2</sup> powierzchni, wystawionej prostopadle na działanie promieni słonecznych, oraz postaci:

$$(14) \quad 60 \cdot \sum \sum k_i Q_i \sin h_i$$

na cm.<sup>2</sup> poziomej powierzchni ziemi. Pierwsze sumowanie odpowiada kolejnym godzinom dnia danego od wschodu do zachodu słońca, a drugie sumowanie dotyczy kolejnych dni rozważanego miesiąca.

Wartości  $k_i$  wzięte zostały z wspomnianych godzin słonecznych według wskazań heliografów w Warszawie,  $Q_i$  z pomiarów bezpośrednich nad natężeniem promieniowania słonecznego, a  $\sin h_i$  obliczono dla początków odpowiednich godzin, według tablic astronomicznych. Aby choć częściowo ułatwić te znużone rachunki, dzielono każdy miesiąc na grupy co 5, 6 lub 10 dni, dla których brano odpowiednie wartości usłonecznienia w odstępach godzinnych okresu dziennego. Sumy zaśienne dla każdej grupy obliczano w sposób analogiczny do poprzednio stosowanego, t. j. brano  $Q$  dla początku każdej godziny, poczynając od południa prawdziwego aż do ostatniej godziny przed wschodem (resp. zachodem), w której wysokość słońca nad poziomem przewyższała 5°; mnożąc te godzinne wartości  $Q$  przez odpowiednie  $k$ , otrzymywano  $kQ$  dla danego przedziału, a stąd i ich sumę dzienną oraz miesięczną.

<sup>1)</sup> Por. rozdział IX (str. 139—150) pracy powyżej cytowanej, a także artykuł autora w zeszycie kwietniowym (z r. 1907) w Monthly Weather Review, Vol. XXXV, N 4, str. 171—175. (Washington, Weather Bureau).

Podkreślamy tę okoliczność, że wartości południowe dla każdej grupy były tu brane nie według średnich miesięcznych wykazów rocznych, lecz wprost według odpowiednich pomiarów w danym okresie. Nadto, dla większego zbliżenia się do warunków faktycznych, za wartość południową brano nie liczbę najwyższą z pośród mierzonych  $Q$  (jak to czyniono dla obliczania średnich miesięcznych w wykazach przebiegu rocznego), lecz średnią z pomiędzy bezpośrednio mierzonych wartości w okresie godzinnym od 11<sup>h</sup>30<sup>m</sup>a do 12<sup>h</sup>30<sup>m</sup>p.

Z pomocą tej ostatniej wartości  $Q$  obliczano, według zwykłych danych redukcyjnych na wysokość dla Warszawy, odpowiednie  $Q$  dla początku innych godzin. Te dane uważano za średnie natężenia dla okresów 60-minutowych i mnożono przez odpowiednie  $k$ , łączone z stosownych odstępów przed i popołudniowych. Wreszcie wysokość słońca brano dla środka grup dziesięciodniowych, t. j. według danych dla 10-go, 20-go i 30-go każdego miesiąca.

TABLICA V.

Sumy insolacyjne dla r. 1903, 1904 i 1905 w Warszawie.

|                                                         | I                                                                   | II   | III   | IV    | V     | VI    | VII   | VIII  | IX    | X     | XI                           |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------------------|
| ROK 1903.                                               |                                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       |                              |
| $\Sigma \Sigma k$ (godz. słoń.) . .                     | 40.0                                                                | 66.0 | 93.0  | 82.8  | 177.7 | 150.3 | 149.9 | 162.5 | 194.7 | 103.9 | 157.7                        |
|                                                         | Suma za rok: 1245 godzin słonecznych (35% usłonecznienia możliwego) |      |       |       |       |       |       |       |       |       |                              |
| 60. $\Sigma \Sigma k Q$ (gr. cal.) <sup>1)</sup>        | 1400                                                                | 2760 | 4510  | 4400  | 9070  | 9090  | 8150  | 8510  | 9880  | 5090  | 6880                         |
| 60. $\Sigma \Sigma k Q \sin h$ (gr. cal.) <sup>2)</sup> | 360                                                                 | 940  | 2100  | 2620  | 6090  | 6290  | 5600  | 5410  | 5120  | 2140  | 1880                         |
| Suma insolacyjna dla mies. zimowych (XII, I, II):       | 4370 gr. cal. <sup>1)</sup> (14%)                                   |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 1340 gr. cal. <sup>1)</sup>  |
| " " " " wiosennych (III, IV, V):                        | 17980 " " (27%)                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 10810 " "                    |
| " " " " letnich (VI, VII, VIII):                        | 25750 " " (35%)                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 17300 " "                    |
| " " " " jesiennych (IX, X, XI):                         | 15650 " " (35%)                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 7440 " "                     |
|                                                         | Suma za rok 1903: 63750 gr. cal. <sup>1)</sup> (30%)                |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 36890 gr. cal. <sup>1)</sup> |
| ROK 1904.                                               |                                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       |                              |
| $\Sigma \Sigma k$ (godz. słoń.) . .                     | 38.7                                                                | 32.5 | 146.4 | 130.3 | 231.7 | 271.7 | 311.6 | 265.7 | 187.5 | 99.2  | 44.8                         |
|                                                         | Suma za rok: 1791 godzin słonecznych (50% usłonecznienia możliwego) |      |       |       |       |       |       |       |       |       |                              |
| 60. $\Sigma \Sigma k Q$ (gr. cal.) <sup>1)</sup>        | 1180                                                                | 1290 | 8150  | 7090  | 13820 | 14680 | 17360 | 14160 | 10580 | 4900  | 2010                         |
| 60. $\Sigma \Sigma k Q \sin h$ (gr. cal.) <sup>2)</sup> | 290                                                                 | 420  | 3800  | 3760  | 8630  | 9230  | 11310 | 8420  | 5410  | 2100  | 640                          |
| Suma insolacyjna dla mies. zimowych (XII, I, II):       | 3590 gr. cal. <sup>1)</sup> (12%)                                   |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 930 gr. cal. <sup>1)</sup>   |
| " " " " wiosennych (III, IV, V):                        | 29060 " " (44%)                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 16190 " "                    |
| " " " " letnich (VI, VII, VIII):                        | 46200 " " (63%)                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 28960 " "                    |
| " " " " jesiennych (IX, X, XI):                         | 17540 " " (39%)                                                     |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 8150 " "                     |
|                                                         | Suma za rok 1904: 96390 gr. cal. <sup>1)</sup> (45%)                |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 54230 gr. cal. <sup>1)</sup> |



TABLICA V (ciąg dalszy).

|                                                    | I                                                                     | II   | III  | IV    | V     | VI    | VII   | VIII  | IX                                  | X    | XI   | XII  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------|------|------|------|
| ROK 1905.                                          |                                                                       |      |      |       |       |       |       |       |                                     |      |      |      |
| $\Sigma k$ (godz. słon.) . .                       | 79.0                                                                  | 58.4 | 39.3 | 122.2 | 263.3 | 268.3 | 248.9 | 237.4 | 125.4                               | 65.5 | 27.7 | 27.5 |
|                                                    | Suma za rok: 1563 godzin słonecznych (44% ustłonecznienia możliwego). |      |      |       |       |       |       |       |                                     |      |      |      |
| $\Sigma \Sigma k Q$ (gr. cal. <sup>1</sup> ) . .   | 3220                                                                  | 2690 | 2100 | 6300  | 15600 | 14410 | 15520 | 13540 | 7510                                | 3100 | 1240 | 1120 |
| $\Sigma \Sigma k Q \sin h$ (gr. cal.) <sup>2</sup> | 760                                                                   | 920  | 1020 | 4730  | 10010 | 9610  | 10380 | 7800  | 3850                                | 1280 | 330  | 230  |
| ma insolacyjna dla mies. zimowych (XII, I, II):    | 7030 gr. cal. <sup>1</sup> ) (23%)                                    |      |      |       |       |       |       |       | 1910 gr. cal. <sup>2</sup> ) (24%)  |      |      |      |
| " " " " wiosennych (III, IV, V):                   | 24000 " " (37%)                                                       |      |      |       |       |       |       |       | 15760 " " (44%)                     |      |      |      |
| " " " " letnich (VI, VII, VIII):                   | 43470 " " (59%)                                                       |      |      |       |       |       |       |       | 27790 " " (62%)                     |      |      |      |
| " " " " jesiennych (IX, X, XI):                    | 11850 " " (26%)                                                       |      |      |       |       |       |       |       | 5460 " " (30%)                      |      |      |      |
|                                                    | Suma za rok 1905: 86350 gr. cal. <sup>1</sup> ) (40%)                 |      |      |       |       |       |       |       | 50920 gr. cal. <sup>2</sup> ) (48%) |      |      |      |

Wartości, podane w nawiasach, oznaczają procenty sum insolacyjnych faktycznych w porównaniu z możliwymi (por. Tab. II i III). Dla rocznych sum godzin słonecznych oraz sum insolacyjnych, otrzymane wartości procentowe są bliskie sobie.

Sumy insolacyjne miesięczne, a zwłaszcza dla składowych pionowych, wykazują przeważnie bieg, odpowiadający zmianom w wysokości słońca. Z pomiędzy pór roku najwięcej gr. cal. przypada na miesiące letnie, później na wiosenne. Rok 1903 wykazuje znaczny deficyt w porównaniu z następnymi latami, równie jak pierwsze dwa miesiące r. 1904.

Sumy insolacyjne, podane w Tab V, były zaokrąglane do dziesiątków kaloryj; przybliżony ich charakter polega głównie na:

a) nieuwzględnianiu indywidualnych wahań dziennych radiacji i przyjmowaniu przeciętnego okresu dziennego (równego dla godzin przed- i popołudniowych) według średnich redukcji na wysokość słońca, wyprowadzonych obserwacyjnie.

Jakkolwiek trudno ocenić granice powstających stąd błędów w obliczaniu sum miesięcznych lub rocznych, to jednak niektóre względy prowadzą do wniosku, że dla dłuższych okresów powinna tu występować pewna kompensacja odchyłeń i że wogóle przyjęcie biegu dziennego według średnich redukcji na wysokość dąży raczej do zwiększenia obliczanych sum insolacyjnych.

b) Następnie dla obliczeń sum dziennych insolacji brano nie cały czas od astronomicznego wschodu do zachodu, lecz okres o 30 minut poprzedzający resp. następujący po tej godzinie, dla której początku wysokość słońca nie była mniejsza od 5°. Dla składowych pionowych odrzucanie z góry może być usprawiedliwione, gdyż pominięty czynnik dochodzi zaledwie do kilku

kaloryj w sumie miesięcznej. Dla sum zaś  $\Sigma \Sigma kQ$  czynnik pominięty może mieć wartości wyższe (np. dojsć w miesiącu letnim w przybliżeniu do 100 kaloryj lub do 1% sumy odpowiedniej).

Odrzucanie kilkunastu minut przy samym wschodzie i zachodzie słońca było potrzebne ze względu na trudność redukcji dla tak małych wysokości, a także i ze względu na to, że heliografy nie od razu zaczynają wykazywać ślady na papierkach. Dla danych warszawskich przekonano się, że czułość heliografów wogóle przewyższała nieco te granice niższe wysokości słońca, które przyjęto dla sumowań radiacji; w ten sposób wyniki stają się niezależne od własności indywidualnych przyrządu zapisującego, co nas też uwalnia od dyskutowania poprawek i wskazań heliografów warszawskich.

Ten drugi błąd przy obliczeniach ma zawsze charakter ujemny, t. j. dąży do zmniejszenia ogólnych sum insolacyjnych, podczas gdy pierwsze źródło błędów zdaje się powodować pewne zwiększanie tychże sum.

Zupełnie dokładne sumy insolacyjne uda się otrzymać, gdy skonstruowany zostanie aktynograf samopiszący o wskazaniach, pozwalających na ścisłą redukcję.

SUMY INSOLACYJNE WEDŁUG POMIARÓW W TREURENBERGU (SPITZBERG)  
W R. 1899/1900.

Obserwator ekspedycji biegunowej do pomiarów południka na Spitzbergu, J. Westman, przeprowadził w ciągu dwunastu miesięcy w okresie 1899/1900 seryę dokładnych pomiarów z pyrliometrem kompensacyjnym i podał <sup>1)</sup> także liczby godzin słonecznych oraz sumy insolacyjne miesięczne i roczne dla tej miejscowości. Jest rzeczą ciekawą i ważną porównać te dane z wynikami, otrzymanymi w tej mierze dla Warszawy.

<sup>1)</sup> Westman J., Mesures de l'intensité de la radiation solaire faites en 1899 et en 1900 dans la baie de Treurenberg (Stockholm, 4-o, p. 58, 1903).



W tym ostatnim czasie prowadzono niejednokrotnie pomiary w ciągu całej doby, zarówno w południe, jak i o północy, i sumowanie dzienne rozprzestrzeniano na cały ten okres. Wreszcie do obliczeń faktycznych sum insolacyjnych wzięte były wskazania heliografu *Campbella*, który w ciągu całego okresu pomiarów od sierpnia 1899 r. do lipca 1900 r. działał w Treurenbergu.

Widzimy także w Tab. VI, że poważna część radiacji, wysyłana przez słońce ku powierzchni ziemi w Treurenbergu, jest zahamowana w swym przejściu przez chmury i przeto bezpośrednio tam nie dochodzi. Tak z 252300 gr. cal., które mogłyby dojść w okresie rocznym, gdyby usłonecznienie było ciągłe, tylko 53610, t. j. około 21%, rzeczywiście dochodziło w r. 1899/1900 w Treurenbergu. Dla sum składowych pionowych stosunek ten jest tylko nieznacznie większy (22%). Wreszcie, wskutek wysokiej szerokości geograficznej, składowe pionowe w Treurenbergu sięgają w ciągu roku conajwyżej do 30% sum dla kierunków prostopadłych.

Zauważymy, że dla Treurenberga, podobnie jak i dla Warszawy, wartości procentowe możliwego usłonecznienia i sum insolacyjnych są bliskie do siebie.

#### DANE DLA MONTPELLIER I ZESTAWIENIE SUM INSOLACYJNYCH.

Prócz Warszawy i Treurenberga, sumy ciepła obliczane były dla Montpellier, gdzie prowadzone były w okresie 1883—1900, spostrzeżenia aktynometryczne z przyrządem *A. Crova*. Rachunki te przeprowadził *F. Houdaille* (w Bull. Météor. de l'Hérault, r. 1899), przyczem metoda jego, zupełnie różna od użytej poprzednio, polegała na stosowaniu wzoru absorbcyjnego *Pouilleta* i posiłkowaniu się tabelkami *Angota* dla teoretycznych sum ciepła. Rachunki te zakładają znajomość stałej słonecznej, za którą *F. Houdaille* przyjmuje 2,4 gr. cal. Wreszcie godziny usłonecznienia były brane według notowań heliografu *Campbella*.

Jakkolwiek niewiadomo, o ile natężenia promieniowania, mierzone w Montpellier, są porównywalne z wskazaniami pyrliometru kompensacyjnego *Ångströma* lub aktynometrów do niego sprowadzonych oraz, jakkolwiek przyjęta przez *F. Houdaille'a* wartość stałej słonecznej nie jest pewna, sądzimy, że jest rzeczą pożyteczną przytoczyć rezultaty tych obliczeń dla Montpellier. Należy bowiem zauważyć, że na wielkość sum insolacyjnych największy wpływ ma usłonecznienie według heliografu i że wogóle rachunki te nie mogą być dotąd uskutecznione z całą pożądaną ścisłością.

W niniejszem zestawieniu podane są wartości średnie dla okresu 1883—1889 według zapisów heliografu i pomiarów aktynometrycznych w Montpellier.

|                                              | Zima | Wiosna | Lato  | Jesień | Rok   |
|----------------------------------------------|------|--------|-------|--------|-------|
| Usłonecznienie (godz. słon.) . . . . .       | 345  | 593    | 859   | 473    | 2270  |
| Sumy insolac. (dla pow. poziomej) w gr. cal. | 8100 | 21500  | 28550 | 13650  | 71800 |

Gdyby usłonecznienie było stałe, Montpellier otrzymywałoby, według obliczeń Houdaille'a, w przybliżeniu 145000 gr. cal. Sumy faktyczne dają więc średnio około 51% wartości teoretycznie możliwych.

Powyższe dane dla Montpellier przedstawiają średnie dla okresu 1883—1889; dla lat poszczególnych otrzymuje Houdaille (l. c.) następujące wartości:

|      | Usłonecznienie (w godz. słon.) | Sumy ciepła na cm. <sup>2</sup> pow. poz. (w gr. cal.) |
|------|--------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1883 | 2428                           | 84450                                                  |
| 1884 | 2107                           | 64450                                                  |
| 1885 | 2156                           | 60350                                                  |
| 1886 | 2387                           | 69450                                                  |
| 1887 | 2346                           | 79750                                                  |
| 1888 | 2290                           | 74000                                                  |
| 1889 | 2173                           | 69650                                                  |

Z tabelki tej widać, że sumy insolacyjne roczne mogą się wahać w dość znacznych granicach; np. w rozważanym okresie siedmioletnim mamy z jednej strony 84450 (w r. 1883), a z drugiej tylko 60350 gr. cal. (w r. 1885).

Odchylenia między porami roku w różnych okresach mogą występować jeszcze daleko silniej, a ta niejednorodność w rozkładzie rocznym sum ciepła może znacznie wpływać na czynniki, które od niej zależą bezpośrednio. Oczywiście przy rozpatrywaniu tego wpływu muszą być uwzględnione liczne komplikacje; tak w szczególności bieg temperatur w naszych okolicach nie jest jedynie pod wpływem warunków słonecznych danej miejscowości, lecz jest jednocześnie ciągle modyfikowany wskutek wpływu mas powietrznych, pochodzących z różnych mniej lub więcej odległych okolic, w których bieg sum insolacyjnych może być zupełnie odrębny.

Zestawiamy w poniższej tabelce dane insolacyjne dla Treurenberga, Warszawy i Montpellier.

TABLICA VII.

Zestawienie sum ciepła dla Treurenberga, Warszawy i Montpellier.

|                         | Szer.<br>geogr.<br>$\varphi$ | Usłonecznienie |    | Sumy na cm. <sup>2</sup> pow.<br>prostopadłej |                |    | Sumy na cm. <sup>2</sup> pow.<br>poziomej |                |    |
|-------------------------|------------------------------|----------------|----|-----------------------------------------------|----------------|----|-------------------------------------------|----------------|----|
|                         |                              | godz.<br>słon. | %  | teore-<br>tyczne                              | fak-<br>tyczne | %  | teore-<br>tyczne                          | fak-<br>tyczne | %  |
| Treurenberg (1899/1900) | 79° 9                        | 895            | 21 | 252300                                        | 53610          | 21 | 75770                                     | 16820          | 22 |
| Warszawa (1905) . . .   | 52° 2                        | 1563           | 44 | 216200                                        | 86350          | 40 | 106800                                    | 50920          | 48 |
| Montpellier (1883—1889) | 43° 6                        | 2270           | —  | —                                             | —              | —  | 145000                                    | 71800          | 51 |

Do danych tych dołączyćby także można i sumy, obliczone dla Kijowa ( $\varphi=50^{\circ},4$  N.) przez Saveliewa, który z trzechletniego okresu szacuje sumę roczną (na cm.<sup>2</sup> pow. poziomej) na 60700 gr. cal., a odnośną sumę teoretyczną na 123500 gr. cal. Pierwsza suma daje więc 49% drugiej.

Sumy dzienne ciepła dla najbardziej pogodnych dni w maju, czerwcu i lipcu w Kijowie niewiele przewyższają 600 gr. cal. (max. 670 w lipcu 1891 r.); w jasne zaś dni grudniowe sumy te są mniejsze od 100 gr. cal.

Co do danych dla Kijowa (które przytaczamy według Hanna „Lehrbuch der Meteorologie“) musimy zaznaczyć, że wartość natężenia promieniowania słonecznego ze względu już na przyrząd, którym się posługiwał Saveliew, nie mogą być uważane za zupełnie pewne co do ich redukcji do gr. cal.

Interesującym jest także następujące zestawienie średnich dziennych sum ciepła (na cm.<sup>2</sup> pow. poziomej) dla wszystkich czterech miejscowości.

TABLICA VIII.

Średnie dzienne sumy ciepła na cm.<sup>2</sup> powierzchni poziomej.

|                         | I  | II  | III | IV  | V   | VI  | VII | VIII | IX  | X   | XI | XII |
|-------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|----|-----|
| Treurenberg (1899/1900) | —  | —   | 15  | 53  | 143 | 127 | 114 | 55   | 40  | 0   | —  | —   |
| Warszawa (1905) . . .   | 24 | 33  | 33  | 158 | 323 | 320 | 335 | 252  | 128 | 41  | 11 | 7   |
| Kijów (1891—1893) . . . | 24 | 67  | 99  | 122 | 318 | 325 | 328 | 306  | 227 | 125 | 34 | 13  |
| Montpellier (1883—1889) | 82 | 127 | 184 | 229 | 296 | 311 | 325 | 295  | 225 | 135 | 90 | 61  |

W rozkładzie na pory roku otrzymujemy następujące sumy (na cm.<sup>2</sup> pow. poziomej) dla tychże miejscowości, obliczone jako średnie z tylko co zaznaczonych okresów czasu:

|             | Zima              | Wiosna             | Lato               | Jesień             | Rok                 |
|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| Treurenberg | 0.10 <sup>2</sup> | 65.10 <sup>2</sup> | 91.10 <sup>2</sup> | 12.10 <sup>2</sup> | 168.10 <sup>2</sup> |
| Warszawa    | 19. „             | 157. „             | 278. „             | 55. „              | 509. „              |
| Kijów       | 30. „             | 166. „             | 294. „             | 117. „             | 607. „              |
| Montpellier | 81. „             | 215. „             | 286. „             | 136. „             | 718. „              |

Dla Warszawy wzięto dane z jednego tylko roku (1905) zamiast średniej z trzechletniego okresu (1903—1905), aby nie posilkować się anormalnym pod względem insolacji okresem depresji od grudnia 1902 r. do lutego 1904 r.

Wszystkie powyższe rezultaty, choć ciekawe, są jeszcze zbyt nieliczne i mało porównywalne (głównie wskutek niewspółczesności podanych okresów rocznych), aby pozwalały na dokładniejsze wnioski. Zanotujemy, że dla powierzchni, wystawionej prostopadle na działanie promieni słonecznych, Treurenberg otrzymywałby więcej ciepła, niż Warszawa w razie stałego usłonecznienia; w sumach faktycznych wpływ pochyłości promieni obok liczby godzin słonecznych sprawia, że sumy insolacyjne zmniejszają się wraz z szerokością.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)



G. A. MILLER.

**On the groups generated by two operators of order three  
whose product is of order four.**

(O GRUPACH UTWORZONYCH PRZEZ DWA OPERATORY  
RZĘDU 3, KTÓRYCH ILOCZYN JEST RZĘDU 4).

---

Let  $s_1$  and  $s_2$  represent two operators of order three. It is well known that  $s_1, s_2$  generate the tetrahedral group whenever  $s_1s_2$  is of order 2. When  $s_1s_2$  is the identity these operators clearly generate the cyclic group of order 3. In all other cases the group generated by  $s_1, s_2$  is not completely determined as a group of finite order by assigning a value to the order of  $s_1s_2$ . The infinite system of groups obtained by assuming that this order is three has been considered.<sup>1)</sup> The present paper is devoted to some important groups obtained by assuming that  $s_1s_2$  is of order 4 and by assigning an additional condition.

$$\S 1. \quad s_1^3 = s_2^3 = 1, \quad (s_1s_2)^4 = (s_1s_2^2)^3 = 1.$$

We first observe that  $s_1s_2^2$  cannot be of order 2 when  $s_1s_2$  is of order 4 in view of the theorem mentioned in the preceding paragraph. Hence 3 is the lowest possible order of  $s_1s_2^2$  which is consistent with the other conditions imposed on  $s_1$  and  $s_2$ . The operators

$$1, \quad s_1s_2s_1s_2, \quad s_2s_1s_2s_1, \quad s_1^2s_2s_1s_2s_1^2$$

---

<sup>1)</sup> *Annals of Mathematics*, vol. 3 (1901), p. 40.

constitute the four-group since  $s_2 s_1 s_2 s_1 \cdot s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 = s_2 s_1 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 = s_2^3 s_1^2 s_2^3 s_1^2$  and  $s_1 s_2^2 s_1 = s_2 s_1^2 s_2$  from  $(s_1 s_2^2)^3 = 1$ . As  $s_1 s_2 s_1 s_2$  is of order 2 it is equal to its inverse. Hence  $s_1 s_2 s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2$  and the given operators constitute the four-group. To prove that this is an invariant subgroup under the group  $\{s_1, s_2\}$  generated by  $s_1, s_2$  it is only necessary to prove that it is transformed into itself by  $s_2$ , since its three operators of order 2 are conjugate under  $s_1$ . The transformed subgroup under  $s_2$  is

$$1, \quad s_2^2 s_1 s_2 s_1 s_2^2, \quad s_1 s_2 s_1 s_2, \quad s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2.$$

Since  $s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 = s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 \cdot s_1 s_2^2 s_1 = s_2^2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 = s_2^2 \cdot s_2^3 s_1 s_2^3 \cdot s_2^2 s_1 = s_2 s_1 s_2 s_1$ , it follows that these two subgroups of order 4 have three common operators and hence they are identical. This proves that  $\{s_1 s_2 s_1 s_2, s_2 s_1 s_2 s_1\}$  is invariant under  $\{s_1, s_2\}$ . It will be convenient to represent the latter by  $G$ .

For the purpose of determining the order of  $G$  it is convenient to consider the quotient group of  $\{s_1, s_2\}$  with respect to  $\{s_1 s_2 s_1 s_2, s_2 s_1 s_2 s_1\}$ . To the generators  $s_1, s_2$  of  $\{s_1, s_2\}$  there correspond two operators of order three in this quotient group. The product of these operators corresponds to  $s_1 s_2$  or to  $s_2 s_1$  and hence it is of order 2. In other words, the quotient group of  $G$  with respect to  $\{s_1 s_2 s_1 s_2, s_2 s_1 s_2 s_1\}$  is the tetrahedral group and hence  $G$  is of order 48. It contains a single subgroup of order 16, which corresponds to the four-group in the tetrahedral quotient group. As  $s_1$  is not commutative with any operator of  $\{s_1 s_2 s_1 s_2, s_2 s_1 s_2 s_1\}$  besides the identity it has 16 conjugates under  $G$  and hence there are 32 operators of order 3 in this group. From this it follows that  $G$  is one of the two groups of order 48 which do not contain a subgroup of order 24 in case it exists.<sup>1)</sup> For the sake of proving the existence of  $G$  it may be convenient to employ the following substitutions:

$$\begin{aligned} s_1 &= bki \cdot cnm \cdot deh \cdot fjl \cdot gop \\ s_2 &= akl \cdot bfc \cdot djp \cdot lnm \cdot hoi \\ s_1 s_2 &= aklij \cdot blcm \cdot dneo \cdot fpqi \\ s_1 s_2^2 &= alb \cdot cei \cdot dmf \cdot ghp \cdot jko. \end{aligned}$$

By means of these substitutions it is easy to prove that the subgroup of order 16 contained in  $G$  is abelian and of type (2, 2). This follows also from the fact that  $s_1 s_2, s_2 s_1, s_1^2 s_2 s_1^2$  constitute a complete set of conjugates under  $G$  since  $s_2^2 s_1 s_2^2 = s_1^2 s_2 s_1^2$  and  $s_2^2 \cdot s_2^2 s_1 s_2^2 \cdot s_2 = s_2 s_1$ . Hence  $s_1 s_2$  and each of its conjugates is invariant under the subgroup of order 16 and

<sup>1)</sup> Quarterly Journal of Mathematics, vol. 80 (1889), p. 247.

these conjugates have distinct squares. This proves the following theorem: It two different operators satisfy the conditions  $s_1^3=s_2^3=1$ ,  $(s_1s_2)^4=(s_1s_2^2)^3$  they generate the group of order 48 which involves operators of order 4 but no subgroup of order 24.

From the fact that  $s_1s_2$  and  $s_2s_1$  are commutative it follows that  $(s_1s_2^2)^3=1$  and vice versa. Hence  $G$  may also be defined as the group generated by two operators of order 3 whose product is of order 4 and whose commutator  $(s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2)$  is equal to the commutator of their inverses  $(s_1s_2s_1^{-1}s_2^{-1})$ . The commutator subgroup of  $G$  is of order 16 and each of its operators is a commutator. The 32 operators of order 3 are composed of two complete sets of 16 conjugates while all the other operators besides the identity are conjugate in sets of three.

$$\S 2. \quad s_1^3 = s_2^3 = 1, \quad (s_1s_2)^4 = (s_1s_2^2)^4 = 1.$$

We shall prove that any two operators  $(s_1, s_2)$  which satisfy the conditions  $s_1^3 = s_2^3 = (s_1s_2)^4 = (s_1s_2^2)^4 = 1$  generate the simple group of order 168 unless both of the operators are the identity. This trivial case will not be considered in what follows. It will first be proved that the group ( $G$ ) generated by  $s_1, s_2$  contains the symmetric group of order 24. It is easy to prove that  $s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2$  is of order 3 by means of the equation  $(s_1s_2)^4 = 1$ . In fact

$$s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 = s_2^2s_1^2s_2^2s_1^2s_2^2 \cdot s_2s_1s_2^2s_1^2s_2^2s_1^2 \\ = (s_2^2s_1^2)^4 = 1. \quad 1)$$

Moreover, the product of  $s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2$  and  $s_1s_2s_1s_2$  is of order 4 since:

$$(s_2^2s_1^2s_2^2)^4 = s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2s_1^2s_2s_1^2s_2^2 = s_2(s_2s_1^2)^4s_2^2 = 1.$$

Since two operators of orders 2 and 3 respectively whose product is of order 4 must generate the symmetric group of order 24 it follows that  $\{s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2, s_1s_2s_1s_2\}$  is this symmetric group. This group contains  $s_1 = s_1s_2s_1s_2 \cdot s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1s_2s_1s_2$  and hence it is identical with  $\{s_1, s_2s_1s_2\}$ .

To prove that  $G$  is the simple group of order 168 it is only necessary to find a cyclic subgroup of order 7 and to show that all the operators of  $G$  can be arranged in the usual rectangular form. The required subgroup may be generated by  $s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2$  since

$$s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \\ = s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \\ = s_2^2s_1s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2^2s_1s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_1^2s_2^2s_1s_2s_1^2s_2^2s_1^2 \cdot s_2^2s_1s_2s_1^2s_2^2s_1^2.$$

1) This results also from the fact that  $s_2^2s_1^2s_2s_1^2s_2^2s_1^2$  is the transform  $s_1$  with respect to  $s_1s_2s_1s_2$ .

Since  $s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 = s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1$  and  $s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 = s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2$ .

The last member of the equation under consideration reduces to:

$$\begin{aligned} & s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 \\ & = s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 \\ & = s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 = 1. \end{aligned}$$

The last equation is readily obtained from the preceding by observing that  $s_1 s_2 s_1$  is of order 4 and hence  $s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1$  is equal to its inverse.

Having proved that  $s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2$  is of order 7 the possibility of arranging all the operators of  $G$  in a rectangular form, the first row being the given symmetric group of order 24 and the first column the cyclic group of order 7 generated by  $t = s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2$ , is proved by the following equations:

$$s_1 t = s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 = t^3 (s_2 s_1 s_2)^{-1}, \quad s_1 s_2 s_1 s_2 t = t^6 s_1^2 s_2 s_1 s_2 \cdot s_2 s_1 s_2 s_1^2.$$

By making use of the defining relations given by Dyck<sup>1)</sup>

$$A_1^7 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad (A_1 A_2)^2 = 1, \quad (A_2 A_1^5)^4 = 1$$

the above proof can be considerably simplified since we may let

$$\begin{aligned} A_1 &= (s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2)^2 = s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1, \quad A_2 = s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 \\ A_1 A_2 &= s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2, \quad A_2 A_1^5 = s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 \cdot s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 = s_2^2 s_1 s_2 s_1. \end{aligned}$$

It is very easy to prove that  $A_2^3 = 1$  and  $(A_2 A_1^5)^4 = 1$ , and the other equations were proved above. To prove the existence of  $G$  we may let

$$s_1 = abe \cdot cdf \quad s_2 = aeg \cdot bfc$$

and observe that

$$s_1 s_2 = afbg \cdot cd \quad s_1 s_2^2 = acdb \cdot eg.$$

The preceding results prove the following theorem: If two operators satisfy the conditions  $s_1^3 = s_2^3 = (s_1 s_2)^4 = (s_1 s_2^2)^4 = 1$  they generate the simple group of order 168 unless each of the operators is the identity.

$$\S 3. \quad s_1^3 = s_2^3 = 1, \quad (s_1 s_2)^4 = (s_1 s_2^2)^4 = 1.$$

We shall first prove that every group which contains two operators which satisfy the condition  $s_1^3 = s_2^3 = (s_1 s_2)^4 = (s_1 s_2^2)^4 = 1$  must include the icosahedral group. This fact follows from the equations:

<sup>1)</sup> Dyck, *Mathematische Annalen*, vol. 20 (1882), p. 41.

$$\begin{aligned} (s_1^2 s_2 s_1 s_2)^5 &= s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 \\ &= s_1 s_2^3 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2^3 s_1^2 s_2^3 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 \\ &= s_1 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^3 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = 1. \end{aligned}$$

Since  $s_1$  and  $s_1 s_2 s_1 s_2$  are of orders 2 and 3 respectively and their product is of order 5 they generate the icosahedron group.

Let  $t_1 = abc.def$  and  $t_2 = cde$ . Then  $t_1 t_2 = abdc.ef$  and  $t_1 t_2^2 = abefc$ . Hence  $t_1, t_2$  are two substitutions which satisfy the conditions imposed upon  $s_1, s_2$ . As  $t_1, t_2$  generate the alternating group of degree 6 it follows that  $\{s_1, s_2\}$  is either this simple group of order 360 or it has an  $(\alpha, 1)$  isomorphism with it.

Suppose that the commutator of  $s_1, s_2$  is of order 5. That is:

$$(s_1^2 s_2^2 s_1 s_2)^5 = s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 = 1.$$

Since  $(s_1^2 s_2^2)^4 = (s_1 s_2)^4 = 1$  we may write this product as follows:

$$\begin{aligned} s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^3 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^3 s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 \\ = s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^3 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^3 s_1 s_2 s_1^2 s_2 \\ = s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 . s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2 = 1. \end{aligned}$$

Hence  $s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1 s_2 s_1^2 s_2$  is of order 2. If we let

$$b = s_1 s_2 \text{ and } c = s_1^2 s_2^2 s_1,$$

the commutator  $b^{-1} c b c^{-1} = s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1^2 s_2 s_1$  is of order 2 since its inverse is of this order. Moreover,

$$(b^2 c)^2 = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 = s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1.$$

This is of the same order as

$$s_1^2 s_2^2 . s_1 s_2^2 s_1^2 s_2 . s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 = s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 . s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2.$$

Since  $s_1^2 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 = s_1 s_2 s_1^2 s_2 s_1^2$ , the preceding operator reduces to

$$s_1 s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2 s_1^2 = \text{the transform of } s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2$$

with respect to  $s_2 s_1^2$ . As  $s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2$  is of order 2 it follows that  $b^2 c$  is of order 4. Hence  $b$  and  $c$  satisfy the following conditions:

$$b^4 = 1, c^4 = 1, (b^{-1} c b c^{-1})^2 = 1, (b^2 c)^4 = 1.$$

As two operators which satisfy these conditions generate the simple group of order 360<sup>1)</sup> we have proved the theorem:

If two operators whose commutator is of order 5 satisfy the conditions  $s_1^3 = s_2^3 = (s_1 s_2)^4 = (s_1 s_2^2)^5 = 1$  they generate the simple group of order 360.

While two operators of order 3 whose product is of order 4 may generate any one of an infinite system of groups of finite order, it follows from the above that one additional condition may completely determine one of these groups. It may also be added that the order of the commutator of two such operators of order 3 must always exceed 2, since two operators of order 3 whose commutator is of order 2 must generate one of four groups whose orders are respectively 12, 36, 144, and 288; and in these groups the product of two generating operators of order 3 is not of order 4. Hence the theorem:

If two operators of order 3 have a product of order 4 the order of their commutator exceeds 2.

---

<sup>1)</sup> Dickson, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 9 (1903), p. 303  
It should be observed that  $b, c$  generate the same group as  $s_1, s_2$ .

CZASOPISMA, KSIĄŻKI I BROSZURY,

NADESLANE DO REDAKCYI „PRAC MATEMAT.-FIZYCZNYCH“

od października 1906 do października 1907 r.

- Amsterdam.** Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. 15, 1.
- Barcelona.** Memorias de la Real Academia de ciencias y artes de Barcelona Vol. VI, № 1, 2, 3, 4; Año academico 1905—1906.
- Cambridge.** Proceedings of the Cambridge Philosophical Society Vol. XIII Part. VI, 1906; Vol. XIV Part. I, II, 1907. Transactions of the Camb. Ph. Soc. Vol. XX, N-o XI.
- Coimbra.** Annaes scientificos de Academia Polytechnica do Porto publicados sob a direcção de F. Gomes Teixeira Vol. II.
- Edinburgh.** Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. XXIV.
- Genewa - Paryż.** L'Enseignement mathématique, VIII Année.
- Helsingfors.** Observations météorologiques publiées par l'Institut météorologique central, 1893—1896.
- Kopenhaga.** Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1906, № 4, 5, 6; 1907 № 1.
- Kraków.** Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności 1906.
- Sprawozdania z posiedzeń Akad. Um. 1906—1907.
- Bulletin International de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles 1906—1907.
- Lima.** Revista de Ciencias 1906—1907.  
Prace mat.-fizycz., t. XVIII.

- Lwów.** Die Chronik d. Szewczenko-Gesellschaft der Wissenschaften 1906—07.
- Lipsk.** Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von Dr. R. Mehmke und Dr. C. Runge 1906—1907, B. G. Teubner.
- Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von Gustaf Eneström in Stockholm 3-e Folge 1907; B. G. Teubner.
- Londyn.** Proceedings of the London Mathematical Society 1906—1907.
- Monachium.** Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften zu München 1906—1907.
- Medyolan.** Annali di matematica. Serie III. Tomo XIII, XIV.
- New-York.** Bulletin of the American Mathematical Society Vol. XII, XIII.
- Transactions of the American Mathematical Society Vol. VII, VIII.
- Palermo.** Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1906—1907.
- Annuario del Circolo matematico 1906.
- Paryž p. Genewa-Paryž.**
- Praga.** Rosprávy České Akademie Cisaře Františka Josefa etc., Třída II. 1906.
- Bulletin international de l'Académie des sciences de l'Empereur François Joseph I, Sciences mathématiques et naturelles 1906.
- Věstník Kral.-České společnosti nauk, Třída math.-přir. 1906.
- Věstník České Akademie, etc. 1906.
- Časopis pro pěstování matematiký a fysiký. Rocznik XXXVI.
- Živa, Časopis přírodnický 1906—1907.
- Rzym.** Atti della Reale Accademia dei Lincei Vol. XVI.
- Springfield.** The American Monthly 1906—1907.
- Stockholm.** Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik etc. Bd. 3.
- Tokyo.** The Tokyo Mathematical-Physical Society Vol. III, IV.
- Wiedeń.** Monatshefte für Mathematik und Physik 1906—1907.
- Württemberg.** Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen, im Auftrage des mathematisch - naturwissenschaftlichen Vereins herausgegeben von Dr. E. Wölffing (2). 1905—1, 2, 3; 1906—1, 2, 3.



ERRATA.

---

| str. (1) w tytule artykułu | <i>zamiast</i> on                    | <i>powinno być</i> on                 |
|----------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| " " " " " "                | " compositions                       | " " décompositions                    |
| " (76) wiersz 12 od góry   | " które                              | " " wzory H a u c k a                 |
| " (78) " 1 " "             | " $\varphi=36,05$                    | " " $\varphi=26^{\circ},5$            |
| " (79) " 14 od dołu        | " $\tau=0,00586$                     | " " $\tau^2.000586$                   |
| " " " 4 " "                | " $\alpha=20,2$                      | " " $\alpha=40,5$                     |
| " " " 3 " "                | " $p_1=17,0, p_2=13,7$<br>$p_3=18,5$ | " " $p_1=34, p_2=27,5$<br>$p_3=36,9.$ |

---

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

TREŚĆ TOMU XVIII-go.—TABLE DES MATIÈRES DU TOME XVIII<sup>1)</sup>.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <i>str.</i> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>I11b,c.</b> W. Sierpiński. O sumowaniu szeregu $\sum_{n>a}^{n\leq b} \tau(n) f(n)$ ,<br>gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę rozkładów liczby $n$ na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych.                                                                                                       |             |
| Sur la sommation de la série $\sum_{n>b}^{n\leq b} \tau(n) f(n)$ où $\tau(n)$ signifie le nombre de décompositions du nombre $n$ en une somme des carrés de deux entiers . . . . .                                                                                                              | 1—60        |
| <b>K23c.</b> A. Denizot. przyczynek do teoryi aksonometrii.<br>Contribution à la théorie de la perspective axonométrique.                                                                                                                                                                       | 61—79       |
| <b>D3b<math>\alpha</math>.</b> G. Mittag-Leffler. O przedstawieniu analitycznem jednoznacznej gałęzi funkcyi analitycznej. Przekład S. Dicksteina.<br>Nota V.<br>Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Traduit par S. Dickstein.<br>Note V . . . . . | 80—143      |
| <b>O5q.</b> K. Żorawski. Notizen aus dem Gebiete der Differentialgeometrie. (Notatki z dziedziny Geometrii różniczkowej) . .                                                                                                                                                                    | 142—169     |
| <b>S4,7.</b> W. Broniewski. Zależność pomiędzy zmianą oporu elektrycznego i rozszerzalnością metali jednoatomowych.<br>Relation entre la variation de la résistance électrique et la dilatation des métaux monoatomiques . . . . .                                                              | 176—213     |

<sup>1)</sup> Les indications en caractères gras correspondent à la classification adoptée par le Congrès de Bibliographie mathématique de 1889.

|                                                                                                                                                                                                                 | <i>str.</i> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>S4.</b> W. G o r c z y ń s k i. O obliczaniu sum ciepła w kaloryach gramowych.                                                                                                                               |             |
| Sur le calcul des sommes de la chaleur en gr. cal. . . . .                                                                                                                                                      | 215—233     |
| <b>J4</b> G. A. M i l l e r. On the groups generated by two operators of order three whose product is of order four. (O grupach utworzonych przez dwa operatory rzędu 3, których iloczyn jest rzędu 4). . . . . | 235—240     |
| Czasopisma, książki i broszury, nadesłane do Redakcyi „Prac matematyczno-fizycznych.                                                                                                                            |             |
| Ouvrages reçus par la Rédaction . . . . .                                                                                                                                                                       | 241—242     |
| Errata . . . . .                                                                                                                                                                                                | 243         |

---

- E. Pascal.** RACHUNEK NIESKOŃCZONOŚCIOWY, przekład S. Dicksteina:  
Tom I. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY, 1896, 8-ka, str. 265. Cena rs. 2.  
Tom II. RACHUNEK CAŁKOWY, 1896, 8-ka str. 240. Cena rs. 2.  
Tom III. RACHUNEK WARYACYJNY I RACHUNEK RÓŻNIC SKOŃCZONYCH 1897.  
8-ka str. 247. Cena rs. 2.
- G. Peano.** ZARYS RACHUNKU GEOMETRYCZNEGO, przekład S. Dicksteina.  
Warszawa, 1897, 8<sup>o</sup>, str. 28. Cena kop. 40.
- St. Kramstyk.** FIZYKA BEZ PRZYRZĄDÓW. Pierwsze zasady Fizyki w prostych doświadczeniach dla dzieci i młodzieży:  
Książeczka I-a z 34 drzeworytami w tekście, 8-ka, str. 104. Cena kop. 60.  
Książeczka II-a z 61 drzeworytami w tekście, 8-ka, str. 112. Cena kop. 60.
- S. Dickstein.** POEZĄTKOWA NAUKA GEOMETRYI W ZADANIACH. Wydanie III.  
znacznie powiększone. 1892. 16-ka, str. 152. W kartonie cena kop. 50.
- St. Kramstyk** SZKICZ PRZYRODNICZE Z DZIEDZINY FIZYKI, GEOFIZYKI I ASTRONOMII. Warszawa. 1893, 8-ka większa. Str. VI+347. Cena rs. 3. (wyczerpane).
- M. Ernst.** ASTRONOMIA GWIAZD STAŁYCH. 1896. 8-ka; str. X, 351. Cena rs. 3.
- F. Klein.** ODCZYTY O MATEMATYCE, miane w Evanston, spisane przez A. Ziweta, przełożył S. Dickstein. Warszawa 1899. 8<sup>o</sup>, str. 2, 109. Cena rs. 1.
- W. Fr. Meyer.** O STANIE OBECNYM TEORJI NIZSZMNIKÓW, przełożył S. Dickstein. Warszawa 1899. 8<sup>o</sup> więk., str. II, 138. Cena rs. 1.
- E. Pascal.** REPERTORIUM MATEMATYKI WYŻSZEJ, przełożył S. Dickstein.  
T. I. Analiza, 8<sup>o</sup>, str. 556. Cena rs. 4.  
T. II. Geometria, str. X+728. Cena rubli 5.
- E. Picard.** O ROZWOJU NIEKTÓRYCH TEORJI ZASADNICZYCH ANALIZY MATEMATYCZNEJ W WIEKU XIX, przełożył S. Dickstein 1900, 8, str. 59. Cena 60 kop.
- Giovanni Schiaparelli.** FORMY ORGANICZNE PRZYRODY A FORMY GEOMETRYCZNE CZYSTE. STUDYUM PORÓWNAWCZE. Przełożył Jan Dal Troz z o. 1902 8<sup>o</sup>, str. 89. Cena kop. 75.
- KORRESPONDENCA Kochańskiego i Leibniza według odpisów Dr. L. Bodemanna, wydana przez S. Dicksteina. Warszawa, 1902, 8-a większa, str. 85. Cena kop. 60.
- E. Pascal.** GRUPY CIĄGŁE PRZEKSZTAŁCEŃ. (Część ogólna teoryi), przełożył S. Dickstein. Warszawa, 1903, 8-o, str. XII — 296. Cena rubli 2 kop. 40.
- E. Pascal.** RÉSUMÉ DE QUELQUES-UNS DE MES RÉCENTS TRAVAUX SUR LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE. Warszawa, 1903, 8-ka większa. Kop. 30.
- J. Sochocki.** ZASADY TEORJI FUNKCJI ELIPTYCZNYCH. Warszawa, 1903. 8-ka więk. str. 50. Cena kop. 50.
- A. W. Witkowski.** TABLICE LOGARYTMOWE I GONIOMETRYCZNE CZTEROCIĘTNE. Warszawa, 1903. Cena kop. 25.
- A. W. Witkowski.** TABLICE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE. Warszawa, 1904, 8-o str. 158. Cena rb. 1 kop. 50.
- K. Weierstrass.** O PRZEDSTAWIALNOŚCI ANALITYCZNEJ TAK ZWANYCH DOWOLNYCH FUNKCJI ARGUMENTÓW RZECZYWISTYCH. Warszawa, 1904, 8-o, str. 36. Cena kop. 40.
- P. Duhem.** EWOLUCYA MECHANIKI. Warszawa 1904, 8-o, str. II, 223. Cena rs. 1 kop. 50.
- C. Segre.** GEOMETRYA DZISIEJSZA I JEJ ZWIĄZKI Z ANALIZĄ. Warszawa 1905. 8<sup>o</sup>, str. 15. Cena kop. 15.
- S. Dickstein.** O NAJNOWSZYCH BADANIACH NAD PODSTAWAMI MATEMATYKI. Warszawa 1905, 8<sup>o</sup>, str. 23. Cena kop. 20.
- E. Kasner.** TERAZNIEJSZE ZAGADNIENIA GEOMETRYI, 1905, 8<sup>o</sup>, str. 32. Cena k. 20.
- J. Laub.** KRÓTKI ZARYS ANALIZY WEKTORÓW, 1905, 8<sup>o</sup>, str. 44. Cena kop. 40.
- A. Loretz.** TERMODYNAMIKA I TEORIA KINETYCZNA. 1906, 8<sup>o</sup>, str. 23. Cena k. 30.

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)



[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)



[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

[www.libtool.com.cn](http://www.libtool.com.cn)

